UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FÍSICA Y PSICOACÚSTICA DE LA TEORÍA MUSICAL, LA AFINACIÓN Y EL TEMPERAMENTO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

HÉCTOR LEOPOLDO ESQUER BELTRÁN DEL RÍO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. PABLO PADILLA LONGORIA

2012

Hoja de datos del Jurado

1. Datos del alumno Apellido paterno Apellido materno Nombre(s) Teléfono Universidad Facultad Carrera Número de cuenta	1. Datos del alumno Esquer Beltrán del Rio Héctor Leopoldo 55 23 99 83 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 098515079
2. Datos del Tutor Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	2. Datos del Tutor Dr. Pablo Padilla Longoria
3. Datos del sinodal 1 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	3. Datos del sinodal 1 Dra. Catalina Elizabeth Stern Forgach
4. Datos del sinodal 2 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	4. Datos del sinodal 2 Dr. Pablo Luis Rendón Garrido
5. Datos del sinodal 3 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	5. Datos del sinodal 3 Dr. Felipe Orduña Bustamante
6. Datos del sinodal 4 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	6. Datos del sinodal 4 Dr. Dany Pierre Page Rollinet
7. Datos del trabajo escrito Título Número de Páginas Año	7. Datos del trabajo escrito Física y psicoacústica de la teoría musical, la afinación y el temperamento 177p. 2012

AGRADECIMIENTOS.

Dedico este trabajo a mis papás por el apoyo incondicional que siempre me brindaron y por haberme concedido la absoluta libertad de buscar y encontrar mi propio camino.

Deseo expresar mi admiración y respeto a cada uno de mis sinodales, no sólo por sus valiosos conocimientos que definitivamente trascienden sus respectivas áreas, sino también por su íntegra calidad humana reflejada en su inmutable disposición de ayudar. Todos ellos son un ejemplo a seguir para mí.

Agradezco infinitamente a mi asesor el Dr. Pablo Padilla quien hizo mucho más que dar forma a este trabajo y cuyas correcciones, observaciones y consejos fueron indispensables para cumplir con esta meta. Le agradezco me haya brindado el privilegio de compartir un salón de clases donde pude enseñar un poco y aprender mucho, tanto de él, como de nuestros cinco alumnos. Le agradezco por ser una valiosa guía y por dejarme vislumbrar lo mucho que me falta por aprender.

De forma muy especial, quiero dirigirme a la Dra. Catalina Stern, quien me concedió la valiosa oportunidad y el excepcional privilegio de explorar libremente mi inquietud de vincular lo que más me apasiona, esto es, la física con la música. Estoy convencido de que difícilmente alguien más, al abrirme la puerta de su cubículo por primera vez, lejos de la comodidad, y sin obligación, se mostrara abierto a aprender de un área ajena. Gracias a lo que debo, no sólo la concepción de este proyecto, sino también el haberme habilitado a acceder a una gama de conocimientos que han resultado invaluables para mí. Estoy muy agradecido y le aprecio mucho por haberme hecho sentir apoyado y respaldado en todo momento.

Agradezco al Dr. Pablo Rendón el tiempo que me concedió y los valiosos comentarios y correcciones, que indudablemente contribuyeron para que mi trabajo mejorara en todos los sentidos. Le agradezco profundamente su trato y sus atenciones.

Agradezco sus comentarios y correcciones al Dr. Felipe Orduña con quien además realicé mi servicio social, y que, en ese entonces, puso a mi disposición las notas digitales de su curso de Acústica Musical para el posgrado en Tecnología Musical de la Escuela Nacional de Música, cuyo contenido inspiró mi tema de tesis.

Agradezco al Dr. Dany Page por su amabilidad al haber aceptado ser mi sinodal.

Agradezco a los afinadores de la Escuela de Música “Vida y Movimiento” por acercarme a la práctica de la afinación, al maestro David Domínguez de la Escuela Nacional de Música por su introducción a la armonía funcional y, especialmente, a Alejandro Esbrí por la oportunidad que me brinda de vincularme con la Escuela Superior de Música y el que su libro haya caído en mis manos.

Finalmente, agradezco a la UNAM y a las maravillosas personas que en ella encontré.


Física y Psicoacústica de la
Teoría Musical, la Afinación
y el Temperamento
Héctor Leopoldo Esquer Beltrán del Rio

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MËXICO

FACULAD DE CIENCIAS

FÍSICA Y PSICOACÚSTICA DE LA TEORÍA MUSICAL, LA AFINACIÓN Y EL TEMPERAMENTO.

Tesis que presenta:

HÉCTOR LEOPOLDO ESQUER BELTRÁN DEL RÍO.

Director de Tesis:

Dr. Pablo Padilla Longoria.

21 de febrero de 2012.

RESUMEN:

En este trabajo se hace una descripción de la física y la matemática involucradas en el proceso de afinación de instrumentos musicales. Se presenta como modelo la serie armónica para describir un problema matemático de afinación cuya solución es el temperamento musical. Además, se expone a la afinación como un proceso físico que es consistente con la parte de la teoría musical de la cultura occidental que se ha mantenido vigente desde el período barroco. Lo más relevante de este trabajo, es que hace notar la influencia de este modelo sobre la estructura de la teoría musical. Esta conexión entre la música y la física se debe a que la cuerda vibrante con extremos fijos, además de ser un elemento presente en muchos instrumentos, ha sido objeto de estudio desde el punto de vista musical por parte de matemáticos, físicos y músicos desde la época de los griegos. Aunado a lo anterior, en este trabajo se exploran las cualidades y limitaciones de nuestra percepción del fenómeno sonoro, así como el impacto que éstas tienen sobre la metodología con la que se afinan los temperamentos. Vale la pena señalar que usualmente la afinación y el temperamento suelen ser abordados exclusivamente, ya sea desde una perspectiva histórica, matemática, o en su defecto, metodológica. En consecuencia, es una finalidad de la tesis presentar a la afinación y el temperamento desde un enfoque científico, ya que éste facilita mostrar la convergencia de estas tres diferentes perspectivas de una forma razonablemente sistemática, objetiva y simplificada. Específicamente, es en la sección de discusión y conclusiones donde se tratan de manera explícita las aportaciones de este trabajo.

ÍNDICE GENERAL.

Capítulo 1 INTRODUCCIÓN.

Referencias generales: [1], [2], [3], [4] y [5].

1.1. Objetivo. *Referencias: [1] y [2].*

El objetivo es construir de una manera lógica y secuenciada la teoría musical propia de la tradición occidental aceptada actualmente por los músicos a partir de la física de la cuerda vibrante. Además, se pretende mostrar que un modelo simple basado en la serie armónica para describir la música, conlleva un problema de afinación cuya solución es el temperamento. Lo anterior permitirá ver, con una finalidad didáctica, que entre científicos y músicos hay un lenguaje común basado en las matemáticas.

La afinación de instrumentos como el piano y el clavecín -que requieren un temperamento musical para ser ejecutados- consiste en ajustar la altura de los sonidos que el instrumento es capaz de producir. Este ajuste es un proceso físico en el que se tienen que controlar algunas variables como la tensión de las cuerdas que lo componen. Sin embargo, también otras variables como la densidad lineal y la longitud de las mismas están involucradas en este proceso, e incluso, fueron determinantes en el diseño de instrumentos como estos.

El control que se logra sobre las variables que requerimos ajustar, se alcanza a través de la supervisión por medio de nuestros sentidos de otras variables físicas como la frecuencia de oscilación de algunos modos de vibración de las cuerdas. Dichos modos pueden originar el fenómeno de *batimientos* o *pulsaciones* que se produce cuando dos ondas de frecuencias cercanas interfieren entre sí. Este fenómeno ha sido utilizado para afinar temperamentos, y, es por ello que los límites de precisión de los ajustes que hacemos están acotados por dos tipos de factores: físicos y psicoacústicos. Los primeros están comprendidos por las leyes físicas que rigen las características mecánicas y acústicas tanto del instrumento a afinar, como de la herramienta usada para ese fin. Por otro lado, los factores psicoacústicos son regidos por nuestra particular forma de percibir el fenómeno sonoro. Sin embargo, los criterios y las metodologías correctas para realizar dichos ajustes no sólo implican el simple control de variables acústicas, sino que además, éstos deben ser consistentes con un modelo que surge de la teoría musical.

1.2. Motivación.

La motivación de este trabajo surge de notar que no es fácil encontrar literatura en la que de manera suficientemente profunda, explícita y lógica se exponga la relación de la física con la afinación y con la teoría musical "académica". Existen diversos elementos que se han mantenido vigentes hasta nuestros días a pesar de las múltiples transformaciones y adaptaciones de dicha teoría a lo largo de prácticamente cuatro siglos. Específicamente, la estructura de las escalas musicales más relevantes de occidente -la escala diatónica y la cromática- que resultan, en gran medida, de razones físicas, es un ejemplo de lo anterior. Dichas escalas, han sido un fundamento para componer una parte significativa de la música de los últimos siglos e incluso hoy en día están en uso. Basta con observar la disposición de las teclas de un teclado moderno o ver la escritura de un sinfín de partituras actuales.

Es bien sabido que muchos músicos pretenden recrear, en la medida de lo posible, el estilo propio de cada período y autor. En muchos casos reinterpretando las obras desde un enfoque históricamente informado. Es sumamente importante denotar el esfuerzo que ha implicado para algunos músicos, historiadores y constructores de instrumentos el que se ejecute la música en instrumentos musicales con las propiedades originales propias de cada época. Sin embargo, no debe pasar desapercibido que en cada época dichas escalas se afinaron de una cierta manera. Es por ello que estas afinaciones por sí solas pueden considerarse una parte fundamental del estilo, o por lo menos, del carácter musical de cada período.

1.3. Antecedentes. *Referencias: [1], [2], [3], [4] y [5].*

Fig. 1.1. Monocordio.

El *monocordio* es en esencia un instrumento que consta de una cuerda con extremos fijos a la cual se le puede modificar su longitud o su tensión a través del uso de pesas. Por esta razón, los griegos llamaban *peso* a la cualidad musical que hoy es referida como *altura* de un sonido. Este instrumento fue utilizado por físicos, músicos y matemáticos desde la época de Pitágoras (s. VI a.C.) para entender las cualidades musicales de los instrumentos en términos de cómo pueden ser afinados. Como podemos verificar en *[2], [3]* y *[4]*, las diversas afinaciones se han explorado en monocordios antes de ser ejecutadas en instrumentos musicales desde los tiempos de los griegos, durante la edad media y el renacimiento. Aun así, incluso en nuestros días se ha hecho alusión a las afinaciones de este instrumento. Un inmejorable ejemplo de ello, es la investigación llevada a cabo por Barbour en su libro *Tuning and Temperament* publicado en 1972. Este trabajo sirvió como base a Jorgensen para poder publicar su libro *Tuning*, en el que aparecen instrucciones precisas para afinar las escalas que dieron forma a la música occidental a lo largo de más de 25 siglos. Por ello, es que históricamente la estructura musical está vinculada con la física de la cuerda vibrante con extremos fijos de una manera muy directa. Fue a partir de estudiar el comportamiento de la misma, que se entendieron los problemas de afinación. Es así que, de acuerdo con el avance del conocimiento matemático y físico de la música, así como las necesidades artísticas de cada época, fue evolucionando la teoría musical. Debido a este proceso, se suele abordar la afinación y el temperamento desde una perspectiva histórica. En este trabajo, sin embargo, se les pretende abordar de una manera sistemática y lógica, más no necesariamente cronológica para mostrar con mayor claridad su estructura.

Existen antecedentes más generales que inciden directamente en aspectos musicales como son los relacionados con la búsqueda de afinaciones que se dio en el renacimiento y el barroco temprano. Dichas afinaciones aparecen en muchos tratados musicales históricos en los que se abordan conceptos fundamentales en la afinación. Quizás el más importante de ellos sea la *tonalidad*, que se consolidó tras siglos de evolución de la tradición musical occidental. De la tonalidad se desprende a su vez el concepto de "*color*" también nombrado "*afecto*" (del alemán Affekt). A grandes rasgos, el *color* es una característica de naturaleza acústica y musical propia de un tipo muy específico de afinaciones, que brinda una cualidad auditiva única a cada *tonalidad* (*ver [1], [2] y [5]*). Dicha característica se perdió al imponerse el *temperamento igual* (afinado estrictamente hasta 1917, *ver [5]*) como una especie de estándar de afinación en nuestros días, producto de una búsqueda que se dio durante el siglo XIX. Sin embargo, en la actualidad se pretende hacer notar la relevancia que el color tenía en algunas afinaciones previas, propias sobretodo del barroco, pero que subsistieron y evolucionaron prácticamente hasta principios del siglo XX. En principio, todo afinador sabe que retomar esta característica u otro tipo de afinaciones en desuso no necesariamente implica perder una "buena" afinación o afinar una menos buena que el temperamento igual. De ahí que haya una tendencia a revalorar el papel que desempeñan las afinaciones históricas en el carácter musical de cada período.

1.4. Aportaciones.

Teniendo como antecedente que el desarrollo de las escalas (y su influencia en la estructura fundamental de la teoría musical) tuvo como escenario principal el monocordio, una aportación significativa de este trabajo es entonces mostrar de manera conjunta el vínculo entre la física del sonido, de la cuerda vibrante y la psicocústica con la estructura de la tradición musical en occidente. Es decir, a pesar de que existen numerosos textos especializados que abordan de manera profunda cada uno de estos temas, en este trabajo se pretende tratarles desde la perspectiva más global posible y exponerles de una manera breve, secuenciada y lógica sin que esto demerite en su contenido. Es importante mencionar que dado el nivel de matemáticas sobre todo del segundo capítulo, entonces este trabajo está dirigido a personas que tengan una formación en ciencias matemáticas o ingeniería que incluso pudieran no tener conocimientos musicales, pero que estén interesados en comprender con cierta extensión la naturaleza matemática, sensorial y musical del problema de afinación. En particular, se pretende que el trabajo sirva como herramienta de aprendizaje, y por ello, sobre todo en el capítulo que trata la teoría musical, y en los que tratan la afinación y el temperamento, se muestran explícitamente cálculos que a pesar de no ser novedosos, difícilmente aparecen en la literatura. Finalmente, en la sección de discusión se pretende justificar, a través de una serie de cálculos, el potencial desarrollo de un afinador electrónico basado en una única metodología aural. Asimismo, en esta sección y en las conclusiones se pretende redondear el contenido conceptual de lo previamente expuesto. Finalmente, se presenta una línea de trabajo en este campo a futuro.

Capítulo 2 FÍSICA DE LA MÚSICA.

Referencias generales: [6],[7],[8] y [9].

2.1. Acústica física.

En esta sección nos enfocaremos en dos modelos sustanciales para poder aproximarnos a la música desde un punto de vista físico. Estudiaremos el modelo más simple de la cuerda vibrante con extremos fijos y el modelo más simple de propagación de una onda en un gas. Es por ello que comenzaremos por explicar la teoría fundamental que sirve como herramienta para analizar este tipo de sistemas físicos.

Para presentar esta herramienta, es imprescindible comprender la forma de vibración más simple. El resorte es un sistema físico que nos facilita visualizar de manera sumamente aproximada este tipo de movimiento.

2.1.1. El oscilador armónico simple. *Basado en [6].*

De una manera idealizada, una masa atada a un resorte es modelada como una masa puntual sometida a una fuerza que es proporcional y opuesta a su desplazamiento respecto a un punto. Este punto corresponde a la posición de equilibrio alrededor del cual dicha masa oscila. Este modelo se conoce como *oscilador armónico simple* cuya dinámica correspondiente es el *movimiento armónico simple*.

Matemáticamente el modelo se expresa de la siguiente manera y es conocido como la *ley de Hooke.*

$$F = -kx \tag{2.1}$$

donde F es la fuerza restitutiva aplicada a la masa, k es la constante de proporcionalidad asociada al resorte (ya que depende de las propiedades intrínsecas del mismo) y finalmente x corresponde al desplazamiento respecto a la posición de equilibrio del sistema.

Tomando en cuenta la segunda ley de Newton, que nos dice que $F = ma$ donde m es la masa puntual que representa la masa del sistema y a es la aceleración de dicha masa, podemos reescribir la ec. 2.1 de la forma

$$ma = -kx, \tag{2.2}$$

además, $a = dx/dt^2$ entonces, si sustituimos d^2x/dt^2 en la ec. anterior, dividimos la misma entre m, hacemos $\omega = \sqrt{k/m}$ y pasamos los dos miembros de la igualdad del lado izquierdo, finalmente la ecuación 2.1 la podemos expresar de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

(2.3)

Ésta es la ecuación de Helmholtz homogénea y cualquier sistema cuya dinámica pueda ser descrita a través de ella se comporta como un oscilador armónico simple. La solución más general de esta ecuación es

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \tag{2.4}$$

si definimos R=$\sqrt{A^2 + B^2}$, entonces podemos expresar a A y B en términos de R de la siguiente manera:

$$A = R\cos\varphi \tag{2.5}$$

$$B = R\sin\varphi \tag{2.6}$$

dónde $\varphi = \tan(B/A)$. Si sustituimos 2.5 y 2.6 en 2.4 y usamos las identidades de suma de ángulos correspondiente, podemos reescribir 2.4 como

$$x(t) = R\cos(\omega t + \varphi). \tag{2.7}$$

El movimiento que describe ya sea la ec. 2.4 o la ec. 2.7 lo denotaremos *vibración armónica simple* de frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$ cuya amplitud R y fase φ que dependen de las condiciones iniciales del sistema, es decir, la posición y velocidad de la masa a un determinado tiempo. Es importante señalar que por definición $\omega = 2\pi\nu$, donde ν es la tasa de repetición de la vibración llamada *frecuencia* medida en ciclos por segundo o Hz.

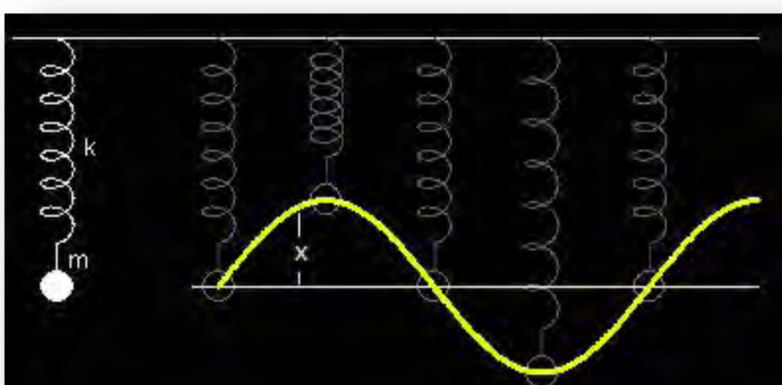


Fig. 2.1. Ejemplo de vibración armónica simple producida por un resorte.

2.1.2. Análisis de vibraciones complejas a través del teorema de Fourier.

Basado en [6], [7] y [8].

Philip J. Davis et al. mencionan en *[7]*, que para presentar la ópera *Aida* de Guisseppe Verdi, se podría prescindir de los instrumentos de aliento, de la sección de las cuerdas, de las percusiones, incluso de los coros y los cantantes solistas. En su lugar, lo que se necesita es una vasta (infinita) colección de diapasones y un método preciso para controlar su sonoridad.

Ésta es una aplicación acústica del teorema de Fourier, cuya demostración experimental fue llevada a cabo por Hermann von Helmholtz en el siglo XIX. Desde luego, el físico y médico alemán, no ejecutó sin músicos la obra de Verdi, pero sí construyó sonidos musicales complejos a partir de combinar de manera adecuada diapasones estimulados eléctricamente. Su dispositivo es considerado hoy en día como un *sintetizador* electromecánico, aparentemente, el primero en ser construido.

Además, en *[6]* Kinsler et al. nos dicen que la combinación lineal de dos o más vibraciones armónicas simples con frecuencias cuyos cocientes den como resultado un número racional, dan origen a una vibración compleja periódica con frecuencia de oscilación determinada por el máximo común divisor de dichas frecuencias.

Es así, que matemáticamente, el teorema de Fourier nos permite analizar cualquier vibración periódica en términos de un arreglo armónico de frecuencias que componen dicha vibración.

Dado que las vibraciones de cuerpos materiales pueden ser analizadas en términos de vibraciones armónicas simples, este teorema es una herramienta muy poderosa en el campo de la acústica. En particular, los instrumentos musicales que requieren ser afinados, producen perturbaciones periódicas en el aire. Es por ello que resulta muy relevante el hecho de que una vibración periódica -como bajo ciertas condiciones lo es el sonido producido por dichos instrumentos- pueda verse como una suma de vibraciones armónicas simples.

Expresado de una forma compacta, el teorema enuncia que cualquier función periódica univaluada, puede ser expresada como una suma de términos armónicos simples cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la tasa que determina la repetición de dicha función.

Entonces $f(t)$ que represente a una función periódica se puede expresar de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + \cdots + A_n \cos n\omega t + \cdots$$

$$+B_1 \operatorname{sen} \omega t + B_2 \operatorname{sen} 2\omega t + \cdots + B_n \operatorname{sen} n\omega t + \cdots \tag{2.8}$$

dónde $\omega = 2\pi/T$ y cada coeficiente A_n y B_n corresponde a una constante por determinar a través de las siguientes fórmulas:

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\, dt \tag{2.9}$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\text{sen}\ n\omega t\, dt. \tag{2.10}$$

El número de términos que aparezca en la serie, dependerá de la naturaleza y complejidad de la función $f(t)$. Si dicha función representa la combinación de un número finito de vibraciones simples (senos y/o cosenos) entonces la serie obtenida a partir de calcular los coeficientes correspondientes a estas vibraciones será finita y contendrá sólo estos términos.

Por otro lado si la función $f(t)$ presenta cambios abruptos de pendiente, entonces un número infinito de términos aparecerá en la serie.

Asimismo, si la función es par, es decir si $f(t) = f(-t)$, entonces todos los términos que corresponden a los senos desaparecerán; mientras que si la función es impar, lo que implica que $f(t) = -f(-t)$, hará que los cosenos no aparezcan en la serie.

En la Figura 2.2. se muestra una onda periódica cuadrada de período T , la cual sirve como muy buen ejemplo para mostrar lo anterior.

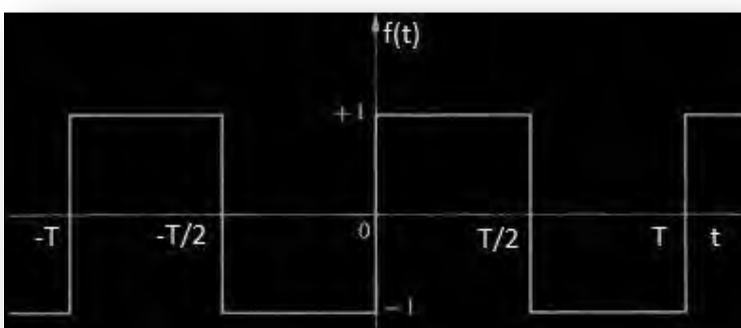


Fig. 2.2. Onda cuadrada.

La función que representa una onda cuadrada de un período la podemos expresar de la siguiente manera:

$$f(t) = \begin{cases} -1\ para\ -T/2 < t < 0 \\ 1\ para\ 0 < t < T/2\,. \end{cases}$$
(2.11)

Para expresar $f(t)$ en términos de una serie de Fourier debemos calcular los coeficientes A_n y B_n a partir de las ecs. 2.9 y 2.10. De donde obtenemos que $A_0 = 0$, $A_n = 0\ para\ n \neq 0$, pero

$$B_n = \frac{2}{n\pi}[1 - (-1)^n]\ para\ n \neq 0.$$
(2.12)

Finalmente sustituyendo esta ecuación en 2.8 obtenemos que

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\operatorname{sen}\omega t + \frac{1}{3}\operatorname{sen}3\omega t + \frac{1}{5}\operatorname{sen}5\omega t + \cdots\right] \text{ con } \omega = 2\pi/T\,.$$
(2.13)

En la siguiente figura se muestran los primeros tres términos armónicos no nulos de la onda cuadrada (a) y se observa cómo su superposición empieza a aproximarse a esta forma de onda (b).

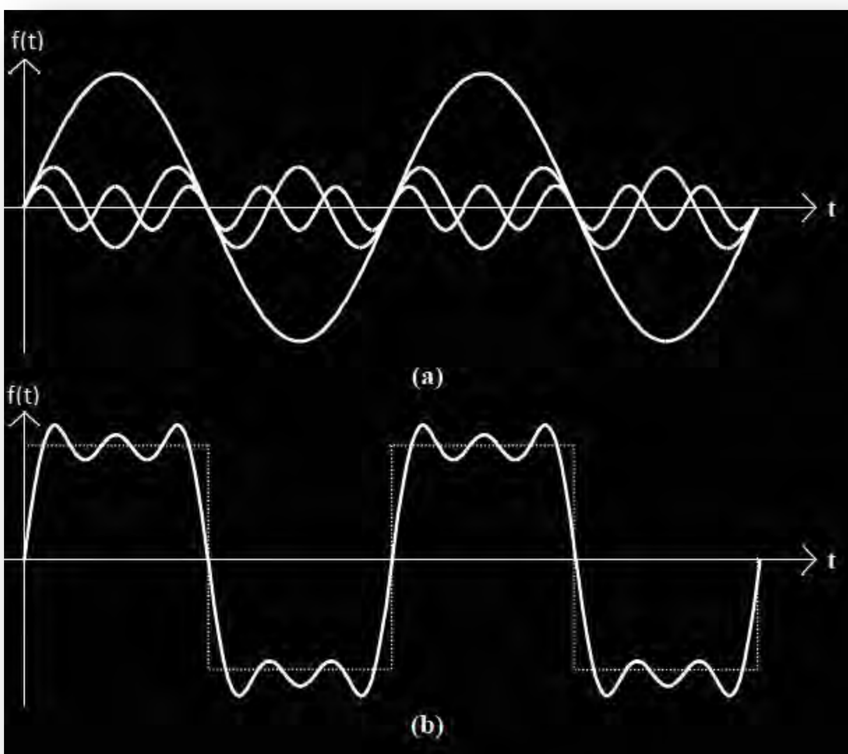


Fig. 2.3. Aproximación de una onda cuadrada mediante la superposición de los tres primeros términos no nulos de su correspondiente serie de Fourier.

2.1.3. Análisis de vibraciones complejas a través de la integral de Fourier.

Basado en [8]

Hemos visto cómo una función que puede representar una vibración periódica compleja, se puede expresar como una combinación lineal de vibraciones armónicas simples. A continuación veremos cómo una vibración compleja más general (no necesariamente periódica) puede también ser representada de manera análoga, como una superposición de modos que corresponden a oscilaciones armónicas simples. Sólo que en este caso la superposición es continua y está representada por una integral y no por una serie.

Para ello partiremos de la serie de Fourier expresada en notación exponencial usando las siguientes relaciones:

$$\cos\, n\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}\right) \tag{2.14}$$

$$sen\ n\omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}\right), \tag{2.15}$$

entonces la serie de Fourier la podemos expresar de la siguiente manera.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{a}_n\, e^{in\omega t}, \tag{2.16}$$

donde a_n lo podemos determinar por la relación de ortogonalidad

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dx\, e^{in\omega t} e^{-im\omega t} = \partial mn = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n' \end{cases} \tag{2.17}$$

luego,

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t} dx. \tag{2.18}$$

Ahora reescribiremos 2.16 introduciendo la variable Δn, que corresponde a la diferencia entre dos enteros sucesivos. Y dado que ello es la unidad, tenemos

$$f(t) = \sum_n a_n\, e^{in\omega t} \Delta n \tag{2.19}$$

$$= \frac{T}{2\pi} \sum_n a_n\, e^{in\omega t} \frac{2\pi}{T} \Delta n. \tag{2.20}$$

Cambiemos la notación escribiendo

$$\frac{2n\pi}{T} = \omega \tag{2.21}$$

y

$$\frac{2\Delta n\pi}{T} = \Delta\omega, \tag{2.22}$$

reescribiendo además

$$\frac{T}{2\pi} a_n = \frac{1}{2\pi} A(\omega), \tag{2.23}$$

en consecuencia 2.10 se convierte en

$$f(t) = \sum \frac{1}{2\pi} A(\omega)\, e^{i\omega t} \Delta\omega. \tag{2.24}$$

Si tomamos el límite cuando $T \to \infty$, entonces ω se aproxima a una variable continua dado que $\Delta\omega$ se vuelve infinitesimalmente pequeña. Basta con recordar la definición de Riemann de integral, para notar que en este límite, 2.24 se puede escribir de la forma

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega \tag{2.25}$$

y la función $A(\omega)$ está dada por

$$A(\omega) = 2\pi \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt, \tag{2.26}$$

esto es,

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt. \tag{2.27}$$

Las ecuaciones 2.25 y 2.27 corresponden a la *transformada de Fourier* y la *transformada inversa de Fourier* respectivamente.

El *espectro de Fourier* de una vibración compleja corresponde la función $A(\omega)$ y suele graficarse en función de ω. Esta gráfica nos brinda información acerca de la amplitud de los elementos en frecuencia que se han de superponer para producir dicha vibración. A estos elementos se les conoce como *componentes* de la vibración.

Además, podemos concluir que cualquier vibración (en particular las perturbaciones en el aire producidas por cualquier instrumento musical) se puede analizar en términos de una superposición (suma) de oscilaciones armónicas simples. Es así que cualquier instrumento que produzca una perturbación periódica compleja se puede modelar de manera muy simple y burda través de una serie de osciladores armónicos. De modo que las frecuencias de dichos osciladores tienen que ser múltiplos enteros de la tasa de repetición de la perturbación en cuestión.

Para ejemplificar lo anterior, en la siguiente figura mostramos la amplitud de variaciones de presión en el aire en función del tiempo. Dichas variaciones de presión son medidas en un punto y son producidas por las vibraciones complejas de diferentes instrumentos musicales. Es importante notar el patrón periódico de las señales originadas por estos instrumentos.

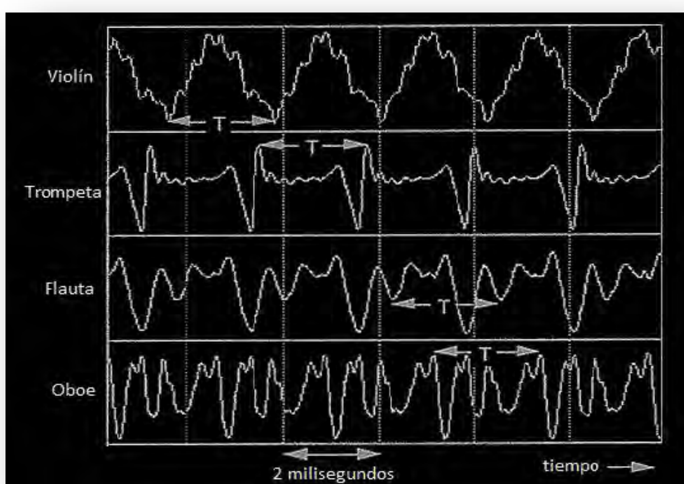


Fig. 2.4. Vibraciones complejas producidas por diferentes instrumentos musicales en el aire.

En la fig. 2.25. se muestra el espectro de Fourier de dichas señales, cuya periodicidad, explica la aparición de picos equidistantes a lo largo del eje de frecuencias. Estos picos son indicio de los términos armónicos simples en los que se puede descomponer la señal medida para cada instrumento.

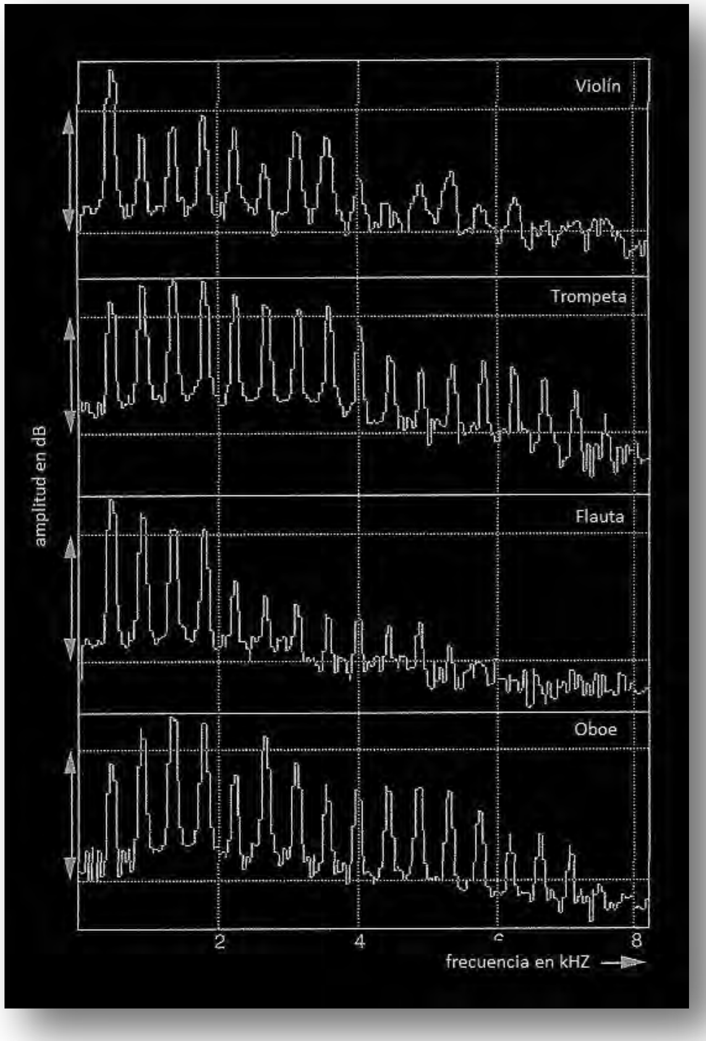


Fig. 2.5. Espectro de Fourier de las vibraciones producidas por instrumentos musicales en el aire.

2.1.4. La física de la cuerda vibrante.

- **Deducción de la ecuación de onda de la cuerda vibrante.** *Basado en [6].*

Lo primero que haremos será deducir una ecuación para describir la dinámica del movimiento transversal de una cuerda. Para ello será importante hacer algunas suposiciones sobre este sistema.

Veamos el comportamiento de una cuerda sometida a una tensión *T*. Si una porción de la misma sufre un desplazamiento pequeño con respecto a su posición de equilibrio y posteriormente es liberada, en la cuerda existirá una fuerza restitutiva que propagará una perturbación. A dicha perturbación la denominamos onda transversal, y su velocidad sólo dependerá, con gran aproximación, de la tensión y de la densidad lineal de la cuerda.

Considerando la naturaleza de esta fuerza restitutiva es posible derivar una ecuación diferencial parcial de segundo orden conocida como *ecuación de onda*. Así mismo, el tomar en cuenta las condiciones de frontera, aunadas desde luego, a las condiciones iniciales a las que esté sometida la cuerda, nos permitirá determinar por completo la dinámica de la misma.

Supongamos que la cuerda tiene una densidad lineal uniforme ρ_L y rigidez despreciable, también que la tensión T a la que la cuerda está sometida es lo suficientemente grande como para poder ignorar los efectos gravitatorios sobre la misma. Finalmente consideremos que no existen fuerzas disipativas considerables como lo son aquéllas asociadas a la fricción o a la radiación de energía en forma de sonido a través del aire.

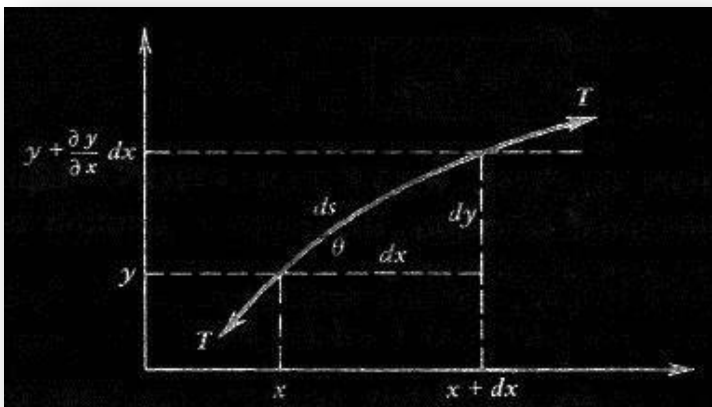


Fig. 2.6. Segmento de cuerda.

En la Fig. 2.1. se muestra un segmento infinitesimal de cuerda aislado con posición de equilibrio x y longitud de equilibrio dx. Si el desplazamiento de la posición de equilibrio denotado por y es pequeño, entonces la tensión a lo largo de toda la cuerda permanece constante y la diferencia entre la componente y de la tensión en los extremos del elemento de cuerda está dada por

$$df_y = (T sen\, \theta)_{x+dx} - (T sen\, \theta)_x. \tag{2.28}$$

Donde θ es el ángulo entre la tangente de la cuerda y el eje x, $(T sen\, \theta)_{x+dx}$ es el valor de $T sen\, \theta$ en $x + dx$, y $(T sen\, \theta)_x$ su valor en x. Desarrollando la expansión en serie de Taylor

$$f(x+dx) = f(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_x dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_x dx^2 + \cdots \tag{2.29}$$

y sustituyendo en la ecuación 2.28 obtenemos

$$df_y = \left[(T\ sen\ \theta)_x + \frac{\partial(T\ sen\ \theta)}{\partial x}\ dx + \cdots\right] - (T\ sen\ \theta)_x = \frac{\partial(T\ sen\ \theta)}{\partial x}\ dx. \tag{2.30}$$

Si sólo consideramos los términos de orden más bajo de la expansión y si θ es pequeño, entonces el $sen\,\theta$ puede ser sustituido por $\delta y/\delta x$ y entonces la fuerza neta transversal sobre el elemento se convierte en

$$df_y = \frac{\partial\left(T\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x}\ dx = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\ dx \tag{2.31}$$

puesto que la masa del elemento está dado por $\rho_L\ dx$ y su aceleración en la dirección y es $\partial^2 y/\partial t^2$, la segunda ley de Newton nos dice que:

$$df_y = \rho_L dx\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{2.32}$$

Combinar las ecs. 2.31 y 2.32 nos lleva a la *ecuación de onda*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{2.33}$$

donde c^2 está definida por T/ρ_L.

- **Solución de la ecuación de onda de la cuerda con extremos fijos.** *Basado en [1] y [9].*

Consideremos el caso particular de que la cuerda tenga una longitud L, con sus extremos en $x = 0$ y $x = L$; las condiciones iniciales de la cuerda las damos por conocidas y están dadas por

$$y(x,0) = f(x) \tag{2.34}$$

$$y'(x,0) = g(x), \tag{2.35}$$

además, las condiciones de frontera de la cuerda con extremos fijos son

$$y(0,t) = 0 \tag{2.36}$$

$$y(L,t) = 0. \tag{2.37}$$

- Método de separación de variables.

Ahora procederemos a resolver la ecuación de onda de la cuerda sometida a estas condiciones iniciales y de frontera utilizando el *método* de *separación de variables*.

Propongamos que la solución tiene la forma de un producto de funciones

$$y(x,t) = X(x)\tau(t), \tag{2.38}$$

ahora sustituyámosla en la ec. 2.33 de lo que se obtiene

$$X''\tau = \frac{1}{c^2} X\ddot{\tau} \tag{2.39}$$

y dividiendo la ecuación entre $X\tau$ se tiene

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\tau}}{\tau}. \tag{2.40}$$

Pero para que una función que sólo depende de x (el lado izquierdo de la ecuación) sea igual a una función que sólo depende de t (el lado derecho de la misma), se debe satisfacer que ambos lados sean constantes. A esta constante se le llama *constante de separación* y por conveniencia en este caso la denotaremos por $-k^2$, i.e.

$$\frac{X''}{X} = -k^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\tau}}{\tau}. \tag{2.41}$$

Con esto hemos conseguido separar la ecuación de onda en dos ecuaciones ordinarias de segundo orden cuyas soluciones son bien conocidas.

La parte dependiente de la posición de la ec. 2.41 resulta ser la ecuación de Helmholtz y queda expresada de la siguiente forma:

$$X'' + k^2 X = 0, \tag{2.42}$$

esta ecuación tiene por solución

$$X = A_1 \cos kx + A_2 \, sen \, kx \tag{2.43}$$

para la cual A_1 y A_2 son constantes arbitrarias. De manera similar, la parte dependiente del tiempo de la ec. 2.41 se expresa así:

$$\ddot{\tau} + k^2 c^2 \tau = 0, \tag{2.44}$$

que a su vez tiene por solución

$$\tau = B_1 \cos \omega t + B_2 \, sen \, \omega t \tag{2.45}$$

donde $\omega^2 = k^2 c^2$, o $k = \pm \omega/c$. Ahora resulta claro por qué se ha elegido $-k^2$ una vez que k resulta ser el número de onda.

El sustituir las ecs. 2.43 y 2.45 en la ec. 2.38 resulta en que

$$y(x,t) = (A_1 \cos kx + A_2 \, sen \, kx)(B_1 \cos \omega t + B_2 \, sen \, \omega t). \tag{2.46}$$

Obsérvese que quedan por determinar las amplitudes y la constante de separación.

- Aplicación de las condiciones de frontera.

Dado que la ec. 2.36 requiere que $y(x,t)$ sea cero en $x = 0$, debemos de descartar la solución que contiene los términos $\cos kx$ y notar que la solución que contiene los términos $sen \, kx$ automáticamente satisfacen la ec. 2.36 tras hacer $A_1 = 0$. Luego la condición de frontera en $x = L$ requiere que

$$sen \, kL = 0 \tag{2.47}$$

lo que se satisface si se escoge

$$k = \frac{\pi}{L}, \qquad \frac{2\pi}{L}, \qquad \frac{3\pi}{L}, \qquad \dots \qquad , \frac{n\pi}{L}, \qquad \dots \tag{2.48}$$

donde *n* es cualquier número entero positivo. A estos valores se les conoce como *valores propios* o *eigenvalores*. Más aún, dado que $\omega = 2\pi f = kc$, las *frecuencias propias* f_n están dadas por

$$f_n = \frac{k_n c}{2\pi} = \frac{nc}{2L}. \tag{2.49}$$

o La serie armónica.

Una cuerda con sus extremos fijos puede vibrar únicamente con las frecuencias fijas que se muestran en la ecuación anterior. Además podemos observar que

$$f_1 = \frac{c}{2L} \tag{2.50}$$

por lo tanto

$$f_n = n\, f_1. \tag{2.51}$$

Denominaremos a esta expresión *ley armónica* y efectivamente nos dice que una cuerda con extremos fijos vibra únicamente con frecuencias que son múltiplos enteros de una *frecuencia fundamental* o *primer armónico,* al que hemos denotado f_1; a f_2 se le denomina *segundo armónico,* a f_3 *tercer armónico*, y así sucesivamente, de tal manera que f_n corresponde al *n-esimo armónico.* Al conjunto de frecuencias armónicas se le conoce como *serie armónica natural*.

o Las leyes de Mersenne. *Basado en [1]*.

En el campo de la física, es común que se modelen leyes a partir de observaciones y mediciones meticulosas mediante procedimientos experimentales. De manera que después de años, o, incluso siglos de avances científicos y matemáticos, las mismas puedan ser deducidas a partir de un aparato teórico más general y poderoso. Por ejemplo, la ley de refracción de la luz -cuya modelación matemática es atribuida a Willebrord Snell a principios del siglo XVII, pero que fue descubierta desde el siglo XIII (*ver [10]*)- tuvo que aguardar hasta mediados del siglo XIX para poder ser deducida teóricamente a partir de la teoría electromagnética unificada por las cuatro ecuaciones de James Clerk Maxwell (*ver [11]*). Como éste, existen muchos otros ejemplos, algunos muy famosos, concernientes a la física cuántica o a la mecánica clásica. Uno de ellos, que resulta relevante para nosotros, es el que involucra a las leyes reportadas por el padre Marin Mersenne. a principios del siglo XVII a partir de experimentos llevados a cabo en el monocordio (*ver [4] pp. 65-72)*. Sus resultados tuvieron que aguardar aproximadamente un siglo hasta que D´Alambert, Helmholtz junto con otros científicos pudieran deducirlas a partir de una teoría acústica de vibraciones que involucrara a los armónicos de la cuerda, mismos que fueron reconocidos como tal hasta el siglo XVIII (*ver [12])*. A continuación presentaremos su interesante y simple deducción a partir de la ley armónica, cuya derivación recién llevamos a cabo. Las leyes de Mesrsenne, en analogía con las leyes de los gases, nos dicen cómo dependen las frecuencias de los armónicos de una cuerda con extremos fijos de las diferentes variables (ya sea la tensión, la densidad lineal, o la longitud de la cuerda) y se derivan a partir de expresar la ec. 2.51 de la siguiente forma:

$$f_n = n\frac{c}{2L} = n\frac{\sqrt{T/\rho_L}}{2L}. \tag{2.52}$$

1ª ley o ley de las longitudes:

"La frecuencia de oscilación del i-ésimo armónico de una cuerda con extremos fijos es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda, en la medida que la tensión y la densidad lineal de la misma se mantengan constantes".

Si comparamos dos cuerdas de iguales densidades lineales y sometidas a la misma tensión, pero de longitudes L_1 y L_2 respectivamente, y consideramos las correspondientes frecuencias de oscilación de sus i-ésimos armónicos f_1 y f_2, podemos expresar la primera ley de manera matemática de la siguiente manera:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{L_1}{L_2} \tag{2.53}$$

2ª ley o ley de las tensiones:

"La frecuencia de oscilación del i-ésimo armónico de una cuerda con extremos fijos es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión a la que la cuerda esté sometida, en la medida que la densidad lineal y la longitud de la misma se mantengan constantes".

De manera análoga, si comparamos dos cuerdas de igual longitud y de igual densidad lineal, pero sometidas a tensiones T_1 y T_2 respectivamente, y nuevamente consideramos las correspondientes frecuencias de oscilación de sus i-ésimos armónicos f_1 y f_2, podemos expresar la segunda ley de manera matemática como a continuación se muestra:

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \tag{2.54}$$

3ª ley o ley de las densidades:

"La frecuencia de oscilación del i-ésimo armónico de una cuerda con extremos fijos es inversamente proporcional a la raíz de la densidad lineal de la cuerda, en la medida que la tensión y longitud de la misma se mantengan constantes".

Finalmente, si comparamos dos cuerdas de igual longitud sometidas a la misma tensión, pero de densidades lineales ρ_1 y ρ_2 respectivamente, y una vez más consideramos las correspondientes frecuencias de oscilación de sus i-ésimos armónicos f_1 y f_2, podemos expresar la tercera ley de manera matemática como sigue:

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \tag{2.55}$$

La aplicación de las leyes anteriores es fundamental en el diseño de todos los instrumentos de cuerda (desde la guitarra y los instrumentos de la familia del violín hasta el piano, el clavecín y el arpa entre muchos otros) ya que éstas determinan esencialmente las dimensiones del instrumento, su registro, así como las fuerzas estructurales que el mismo debe soportar.

- Los Modos Normales de Vibración.

La solución dada por la ec. 2.46 la podemos escribir ahora como

$$y_n = sen\ \frac{n\pi x}{L}\ [a_n \cos\omega_n t + b_n \operatorname{sen}\omega_n t] \tag{2.56}$$

donde $a_n = A_2 B_1\ y\ b_n = A_2 B_2$. El índice *n* se utiliza para señalar una solución diferente para cada entero distinto. Una superposición de todas estas soluciones representa la solución más general o la solución total del problema de eigenvalores.

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} sen\,\frac{n\pi x}{L}\,[a_n \cos\omega_n t + b_n \operatorname{sen}\omega_n t].$$

(2.57)

Aunque el eigenvalor $k = 0$ (i. e. $n = 0$) satisface $sen\,kl = 0$, la suma comienza con el índice $n = 1$, y no con $n = 0$, porque la solución para $n = 0$ es trivial.

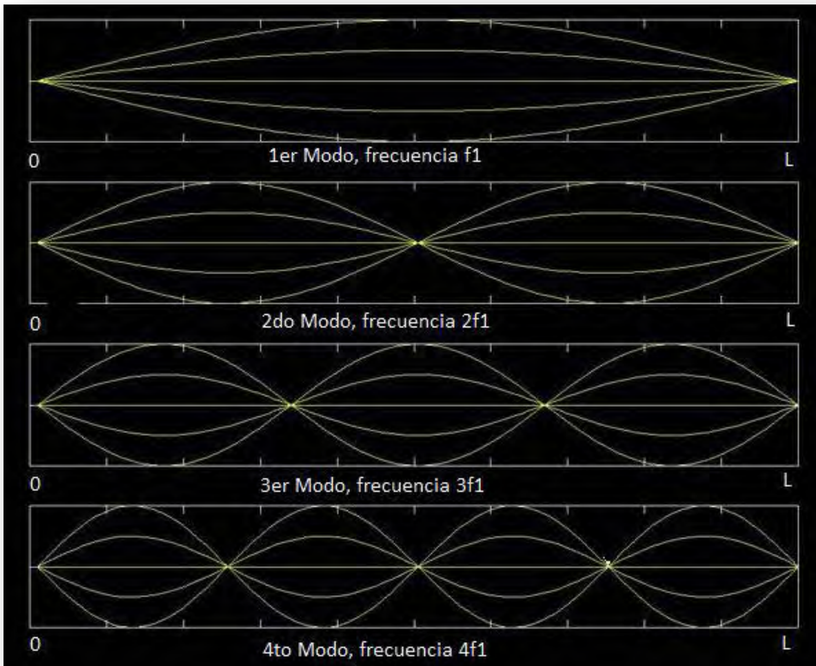


Fig.2.6. Primeros 5 modos normales de vibración de una cuerda con extremos fijos.

Las funciones $sen\,(n\pi x/L)$ que satisfacen las condiciones de frontera dadas, las denotamos como *eigenfunciones*. Estas funciones constituyen un conjunto ortogonal completo y con ello, la suma de soluciones y_n que está constituida por las *eigenfunciones* correspondientes combinadas con la parte temporal, representan una onda estacionaria en la cuerda. Debido a ello, a las y_n se les se les llama *modos normales de vibración* de la cuerda. A menudo, tan sólo las soluciones de la parte espacial i.e. las $X_n = sen\,(n\pi x/L)$ por sí mismas, son referidas de manera práctica como los *modos normales.*

- Las condiciones iniciales y las ondas estacionarias en una cuerda con extremos fijos.

Los modos que aparecerán en la solución más general dependen de los valores de los coeficientes a_n y b_n, que a su vez dependen de las condiciones iniciales del sistema. En este caso en particular, dichas condiciones están dadas por las ecs. 2.34 así como 2.35, y el evaluar la ec. 2.57 en $t = 0$ da como resultado que

$$f(x) = \sum a_n \, sen \frac{n\pi x}{L}. \tag{2.58}$$

Esta es una serie de Fourier. Para determinar los coeficientes a_n se usará la ortogonalidad de las eigenfunciones. Multiplicando ambos lados de la ecuación por $sen\,(m\pi x/L)dx$, donde m es un número entero, e integrando a lo largo de la longitud de la cuerda (0 a L) tenemos

$$\int_0^L f(x)\, sen\, \frac{m\pi x}{L}\, dx = \sum a_n \int_0^L sen\, \frac{m\pi x}{L}\; sen\, \frac{n\pi x}{L}\, dx. \tag{2.59}$$

Sin embargo, cada integral del lado derecho de la igualdad vale cero siempre que $m \neq n$. Por consecuencia la serie infinita se reduce a un solo término, a saber, precisamente el que corresponde a $m = n$. Dado que

$$\int_0^L sen^2\, \frac{m\pi x}{L}\; dx = \frac{L}{2} \tag{2.60}$$

la ec. (2.59) se convierte en

$$\frac{L}{2} a_n = \int_0^L f(x)\, sen\, \frac{m\pi x}{L}\, dx \tag{2.61}$$

o, si el índice m es reemplazado por el índice n, entonces

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, sen\, \frac{n\pi x}{L}\, dx. \tag{2.62}$$

De manera análoga, el igualar la velocidad de la cuerda, esto es, la derivada respecto a al tiempo de la ec. 2.57 con la ec. 2.35 al tiempo $t = 0$ da como resultado otra serie de Fourier, a partir de la cual se pueden calcular los coeficientes b_n, de tal manera que

$$b_n = \frac{2}{L\omega_n}\int_0^L f(x)\, sen\, \frac{m\pi x}{L}\, dx \tag{2.63}$$

Los valores de los coeficientes a_n y b_n determinan las ondas estacionarias correspondientes a los modos normales que se han de superponer según la forma en que la cuerda haya sido excitada.

Con esto hemos determinado por completo la dinámica de la cuerda vibrante con extremos fijos. Ahora nos queda la labor de mostrar la relación entre la física de la cuerda y la estructura de la teoría musical.

Es muy importante recalcar que se ha resuelto, mediante el *método de separación de variables*, un *problema de valores propios* que surge de imponer *condiciones de frontera* a la cuerda. De manera que, los modos de vibración corresponden a las *funciones propias,* que en principio, conforman un conjunto infinito, pero discreto, de soluciones asociado al sistema sometido a dichas condiciones. Asimismo, las *frecuencias* con las que la cuerda puede oscilar, son los *valores propios* reales asociados este sistema.

- Inarmonicidad, parciales, armónicos y sobretonos.

Es importante mencionar que una cuerda real tiene rigidez, y por ende la ley armónica no se satisface con toda precisión, sino que los componentes del sonido se corren hacia frecuencias más altas. A la desviación respecto a las frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental de la cuerda se le conoce como *inarmonicidad*. Otra causa de la inarmonicidad es el acoplamiento acústico de la cuerdas con los modos de vibración de los resonadores del instrumento que las sostiene (lo que es resultado de que las cuerdas de los instrumentos musicales no tienen los extremos totalmente fijos). Este acoplamiento se presenta precisamente en los soportes que sujetan los extremos de la cuerda, pero no es el objetivo de este trabajo profundizar más en esta y otras causas de dicho fenómeno.

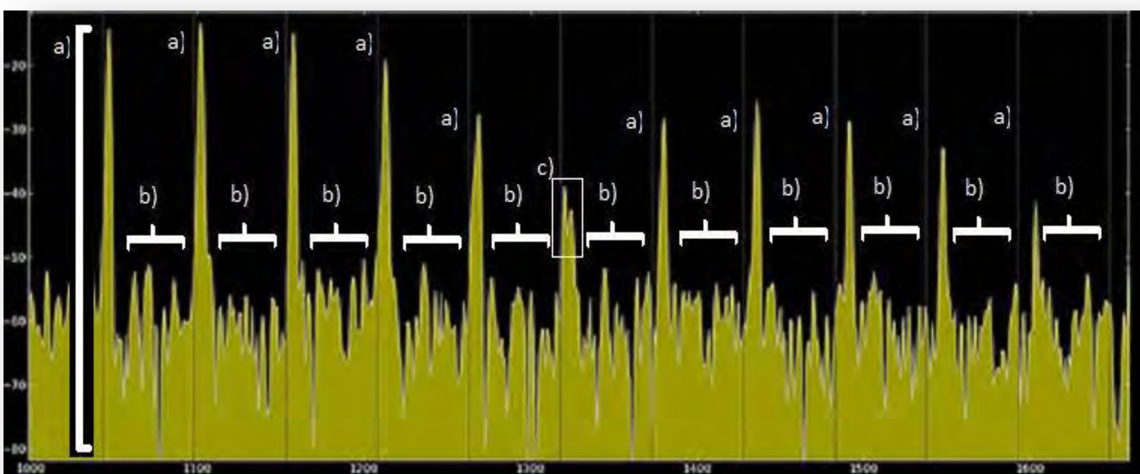


Fig. 2.7. Espectro de una cuerda de guitarra. En a) se muestran parciales cuasiarmónicas desviadas hacia frecuencias agudas debido a la rigidez de la cuerda; la primera de ellas es la frecuencia fundamental y le siguen 10 sobretonos. En b) aparecen parciales inarmónicas de menor amplitud. En c) se acopla un modo de vibración de la tapa armónica de la guitarra con el 6to modo de vibración de la cuerda y por ello se observan dos picos.

Aunado a ello, como se muestra en la Fig. 2.7., el espectro de Fourier de una cuerda real y en general de cualquier señal acústica, está conformado por elementos que no necesariamente son armónicos. A todas y cada una de las componentes de la señal en frecuencia se les llama *parciales,* independientemente de que satisfagan o no la ley armónica; si resulta que algunas o todas las parciales son, de manera exacta o aproximada, múltiplos enteros de una frecuencia mínima a la que se llama *frecuencia fundamental*, entonces a dichas parciales se les llama *armónicos* incluida la frecuencia fundamental. Finalmente a los armónicos cuyas frecuencias están por encima de dicha frecuencia fundamental se les llama *sobretonos.*

2.1.5. Ondas acústicas planas. *Basado en [6] y [13].*

Las ondas acústicas que son percibidas como sonido, no son, sino una variedad de perturbaciones de presión que pueden ser propagadas a través de cualquier fluido compresible. Las mismas, son *ondas longitudinales* porque las partículas del fluido se mueven en la dirección en la que se propaga la onda. El movimiento oscilatorio de las partículas provoca que en el medio existan zonas de compresión y rarefacción que ocasionan las diferencias de presión que son transmitidas a través de éste. Las fuerzas restitutivas que originan dichas perturbaciones provienen de la oposición elástica que presentan los fluidos cuando son sometidos a una compresión.

A continuación describiremos el modelo más sencillo de movimiento ondulatorio propagado a través un medio fluido, i.e. estudiaremos *ondas planas* cuya presión acústica, desplazamientos de partícula, cambios de densidad, etc. tienen la misma amplitud y fase a lo largo y ancho de un plano que es perpendicular a la dirección de propagación de dichas ondas.

Este tipo de ondas se pueden producir en un tubo cilíndrico mediante la acción de un pistón vibrante localizado en uno de los extremos del mismo. Finalmente, para que las ondas generadas se puedan suponer planas, se requiere de un medio homogéneo al interior del tubo, y por lo tanto, las tomaremos en cuenta cuando se encuentren lo suficientemente lejos del pistón.

- **Deducción de la ecuación de onda para el caso acústico. Ondas longitudinales planas en gases.**

Para deducir una ecuación de onda unidimensional, supondremos que el tubo cilíndrico es rígido y tiene una sección transversal constante a lo largo del eje x. Posteriormente para realizar la derivación, necesitamos encontrar la relación entre los cambios de presión en el fluido y la deformación del mismo. Lo anterior se consigue mediante la combinación de ecuaciones que expresan *propiedades termodinámicas* del medio, con ecuaciones relacionadas con la *conservación de la masa* a lo largo de éste.

  - Comportamiento elástico de los fluidos.

Definiremos las siguientes variables asociadas a propiedades físicas del fluido.

x coordenada de equilibrio para una partícula del medio.
ξ desplazamiento de la partícula respecto a su posición de equilibrio, a lo largo del eje x.
u velocidad de la partícula, $u = \partial\xi / \partial t$.

ρ densidad instantánea en cualquier punto.
ρ_0 densidad constante de equilibrio del medio.
s condensación en cualquier punto, definida por

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \qquad \rho = \rho_0(1+s). \tag{2.64}$$

P presión instantánea en cualquier punto.
P_0 presión constante de equilibrio en el medio.
p exceso de presión acústica en cualquier punto, definida por

$$p = P - P_0. \tag{2.65}$$

c velocidad de propagación de la onda.

El término *partícula* del medio debe ser entendido como un elemento de volumen lo suficientemente grande como para contener millones de moléculas de tal manera que se pueda considerar que el fluido es continuo. Simultáneamente, el elemento de volumen debe ser lo suficientemente pequeño, como para que las variables locales que hemos definido arriba puedan ser consideradas constantes dentro de dicho elemento. Además los efectos gravitatorios sobre el medio serán despreciados, por ello ρ_0 y P_0 se han considerado valores constantes en el medio. El medio ha sido supuesto isotrópico, homogéneo y perfectamente elástico, i.e., no hay pérdidas de energía debido a la viscosidad o a la conducción de calor. Finalmente, el análisis estará limitado a ondas de amplitud relativamente pequeña de tal forma que los cambios de densidad y presión en el medio sean pequeños comparados con su valor en equilibrio.

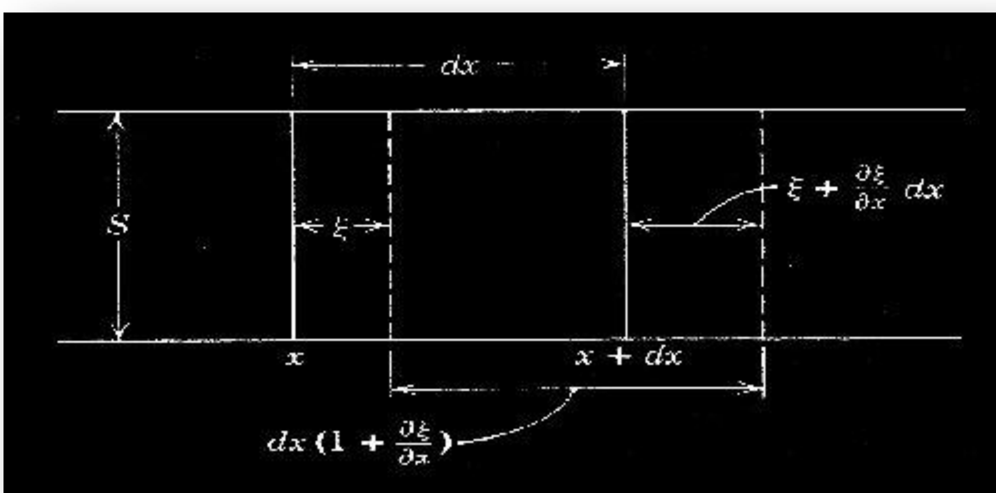


Fig. 2.8. Desplazamientos longitudinales en una onda acústica plana.

A medida que una onda plana se mueve a lo largo del eje x, planos adyacentes de moléculas en el fluido son desplazados de su posición de equilibrio como se muestra en la Fig. 2.8. En general, estos desplazamientos dependen tanto de la posición como del tiempo y pueden ser representados por una función $\xi(x,t)$. Lo primero que haremos será derivar una ecuación que relacione dichos desplazamientos con los cambios de densidad en el medio. Para conseguirlo, podemos aplicar el principio de conservación de la masa a una región de fluido no perturbado acotada por los planos de área S posicionados en x y $x+dx$. La masa del fluido en dicha región es $\rho_0 Sdx$. Lo que sigue es suponer que cuando una onda sonora pasa, el plano que originalmente se encontraba en x es desplazado una distancia ξ a la derecha, mientras que el que estaba en $x+dx$ lo hace una distancia $\xi+(\partial\xi/dx)dx$. Entonces, el volumen de dicha región cambia de Sdx a $Sdx(1+\partial\xi/dx)$. En consecuencia, la densidad del fluido contenido entre ambos planos debe cambiar de tal manera que la masa total de fluido en la región permanezca inalterada. Matemáticamente esto se expresa de la siguiente manera:

$$\rho Sdx\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)=\rho_0 Sdx$$

Si usamos la ec. 2.64 para reemplazar ρ por $\rho_0(1+s)$ y cancelamos el término común $\rho_0 Adx$ de la ecuación resultante, entonces ella se torna en

$$1+s\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)=1. \tag{2.66a}$$

Dado que tanto los cambios de densidad como los desplazamientos moleculares se han supuesto pequeños, (incluso para aquellos sonidos en el aire que resultan dolorosos para el oído humano, en los que ni s ni $\partial\xi/\partial x$ exceden 10^{-4}), podemos despreciar el producto de s por $\partial\xi/\partial x$, de tal modo que la ec. 2.66a se simplifica y queda expresada así

$$s=-\frac{\partial\xi}{\partial x}. \tag{2.66b}$$

Esta ecuación es una forma especial de otra ecuación hidrodinámica muy importante denominada *ecuación de continuidad*. Lo que ella nos dice, es que cuando los planos de moléculas se separan a una distancia mayor que su separación de equilibrio, $\partial\xi/\partial x$ es positiva y la densidad del fluido en esa región disminuye.

Una segunda propiedad de los fluidos que usaremos para deducir la ecuación de onda es aquélla que relaciona cambios de presión y de densidad. En general, esta relación depende del proceso particular que se lleve a cabo y de cómo sea modelado termodinámicamente el fluido.

Cuando un elemento de volumen en el fluido sufre una compresión, es porque se ha realizado trabajo sobre el mismo. Entonces la energía asociada a este proceso es convertida en calor y esto ocasionará que se eleve la temperatura del elemento a menos que dicho proceso sea lo suficientemente lento como para que la energía calorífica sea disipada a los alrededores del mismo. Sin embargo, cuando el fluido transmite una onda acústica, los gradientes de temperatura entre regiones adyacentes de fluido comprimido y expandido son relativamente pequeños. Esto quiere decir que poca energía calorífica fluye hacia los alrededores de una región comprimida antes de que ésta se expanda hasta su posición de equilibrio. Bajo estas circunstancias, podemos suponer que los cambios de presión acústica y de densidad en un fluido, debidos a la transmisión de una onda sonora, corresponden a un proceso adiabático.

Con la finalidad de poder generalizar nuestra deducción a cualquier tipo de fluido, i.e., no sólo al gas ideal sino también a gases reales o incluso a líquidos, consideraremos el proceso adiabático en la que la entropía $\boldsymbol{S}$ es constante debido a que no haya pérdidas de energía en forma de calor y el proceso sea reversible. Esto es consecuencia directa de la definición de entropía, i.e., $\delta q = 0 = Td\boldsymbol{S}$, como en general $T \neq 0$, entonces $d\boldsymbol{S} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{S} = cte.$ Por lo tanto, dicho proceso es isentrópico y puede ser representado por una ecuación donde $P = P(\rho, \boldsymbol{S} = cte.))$, cuya diferenciación es

$$dP = \left(\frac{dP}{d\rho}\right)_0 d\rho \tag{2.67a}$$

donde $(dP/d\rho)_0$ es la pendiente medida en un punto de coordenadas ρ_0, P, de una gráfica adiabática de la presión como función de la densidad. Para los pequeños cambios de presión debidos a las ondas acústicas podemos sustituir tanto el incremento de presión dP por la presión acústica p, como el incremento de densidad $d\rho$ por $\rho_0 s$ (ver ec. 2.64) lo que nos lleva a que

$$p = \left(\frac{dP}{d\rho}\right)_0 \rho_0 s. \tag{2.67b}$$

Sea

$$c^2 = \left(\frac{dP}{d\rho}\right)_0, \tag{2.68}$$

entonces tenemos

$$p = \rho_0 c^2 s \tag{2.67c}$$

que es una ecuación muy relevante que relaciona la presión acústica con la condensación. Finalmente si sustituimos s por $-(\partial\xi/\partial x)$, de la ec. 2.66b, obtenemos

$$p = -\rho_0 c^2 \frac{\partial\xi}{\partial x} \tag{2.69}$$

- Ecuación de onda plana.

Cuando un fluido es deformado en la forma que se ha descrito arriba, los valores de presión en ambas caras del elemento de volumen $S\,dx$ difieren ligeramente. Esta diferencia de presiones redunda en una fuerza neta actuando sobre el elemento, de tal forma que, de acuerdo a la segunda ley de Newton, el mismo sufrirá una aceleración proporcional a dicha fuerza. Dado que la fuerza externa actuando sobre cada cara del elemento está dada por el producto del valor de la presión en el plano correspondiente multiplicado por la superficie del mismo, entonces el valor de ésta actuando sobre el elemento en el sentido positivo del eje x es

$$dF_x = \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\right)\right] S = -\frac{\partial p}{\partial x}\, dx\, S. \tag{2.70}$$

Al derivar esta ecuación, las fuerzas causadas por la presión de equilibrio P_0 han sido ignoradas puesto que siempre se cancelan. Entonces, es sólo el gradiente $\partial p/\partial x$ de la presión acústica el encargado de producir la fuerza neta que actúa sobre el elemento de volumen, cuyo valor, que es igual al producto de la masa de dicho elemento $\rho_0 S$ por su aceleración. Considerar esto nos lleva a poder escribir

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \tag{2.71}$$

Para calcular esta ecuación, hemos despreciado diferencias de segundo orden entre las aceleraciones $\partial^2\xi/\,\partial t^2$ que ocurren en el medio en un punto fijo x en el espacio y aquéllas asociadas al cambio del estado de movimiento propio del elemento de volumen, dadas también por $\partial^2\xi/\,\partial t^2$.

La ec. 2.71 se puede combinar con la ec. 2.69 ya sea para eliminar p o ξ, dando, respectivamente, como resultado

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\xi^2}{\partial t^2} \tag{2.72a}$$

o

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p^2}{\partial t^2}.$$

(2.72b)

Dichas expresiones corresponden a dos formas de la ecuación de *onda acústica plana*. Ecuaciones similares son aplicables para otras variables acústicas como son la velocidad de partícula u y la condensación s. Una vez que se obtiene una solución para ξ el comportamiento de otras variables acústicas puede ser caracterizado a través de relaciones que fueron derivadas arriba como son

$$p = -\rho_0 c^2 \frac{\partial \xi}{\partial x}, \qquad s = -\frac{\partial \xi}{\partial x}, \qquad u = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \qquad \text{etc.}$$

Desde luego que un fluido no está compuesto de partículas cuyas posiciones promedio en el fluido sean fijas, como se ha supuesto en la derivación de la ecuación de onda. Aun sin la presencia de una onda, las moléculas están en movimiento, y no sólo eso, además, su rapidez promedio excede por mucho las velocidades asociadas al movimiento ondulatorio. Sin embargo desde un punto de vista estadístico, un elemento de volumen pequeño, puede ser tratado como una unidad invariante, una vez que aquellas moléculas que abandonan su confinamiento, son reemplazadas por un número igual de moléculas que, en promedio, poseen propiedades idénticas, de tal manera que las propiedades macroscópicas del elemento permanecen inmutadas. De esta manera es posible hablar de *desplazamientos y velocidades de partícula* en el medio perturbado. A pesar de ello, debemos enfatizar que es la presión acústica, la variable estadística que mejor representa a las ondas acústicas, y es ella, la que es usada de manera casi exclusiva para medirles.

- Velocidad del sonido en gases.

La constante c, que representa la velocidad con la que una onda acústica se propaga a través de un fluido se definió en la sección anterior como

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$$

(2.73)

donde $dP/d\rho$ es evaluada para un proceso adiabático en condiciones de equilibrio de presión y densidad. Notemos que c es una característica intrínseca del medio que depende de sus características elásticas así como de variables termodinámicas como son la presión, la densidad y la temperatura. Asimismo, la velocidad del sonido es independiente de la frecuencia y la amplitud de la presión y los desplazamientos, por lo menos en el rango audible de las ondas sonoras.

Con base en *[13]*, deduciremos, a partir de la termodinámica de un gas ideal, la ley de un gas adiabático, que relaciona la presión con la densidad, y, que podemos aplicar cuando una onda acústica se propaga en el medio.

La primera ley de la termodinámica relaciona el cambio de energía interna dU con el trabajo dW realizado por un sistema y el calor δQ transferido a éste. Matemáticamente, lo anterior queda expresado como

$$dU = \delta Q - dW. \tag{2.74}$$

Por definición, en un proceso adiabático el calor intercambiado entre el sistema y sus alrededores es $\delta Q = 0$. Sustituyendo esto en la primera ley y reacomodando los términos obtenemos

$$\delta Q = 0 = dU + dW, \tag{2.75}$$

donde el trabajo $dW = PdV$ cuando un sistema cambia de volumen V en una cantidad dV. Además dU puede relacionarse con el calor específico, que se define como el calor añadido a un sistema de tal manera que su temperatura se eleve en una unidad por mol de sustancia. Si transferimos calor a volumen constante, entonces el gas no se expande y luego no se hace trabajo. Entonces, la energía intercambiada en forma de calor incrementa la energía interna U. Luego, el calor específico a volumen constante está dado por

$$c_v = \frac{dU}{dT} \cdot \frac{1}{n}, \tag{2.76}$$

donde n es el número de moles. Sustituyendo c_v y dW en 2.75 obtenemos

$$0 = nc_v dT + PdV. \tag{2.77}$$

Ahora, consideremos la ecuación de un gas ideal

$$PV = nRT \tag{2.78}$$

donde R es la constante del gas, cuya diferenciación resulta en que

$$PdV + VdP = nRdT. \tag{2.79}$$

Combinando las ecs. 2.77 y 2.79 para eliminar T mientras que 2.77 y 2.78 dan las siguientes expresiones para $nc_v dT$:

$$-PdV = nc_v dT = \frac{c_v}{R}(PdV + VdP) \tag{2.80}$$

lo que nos lleva a

$$0 = \left(1 + \frac{c_v}{R}\right) PdV + \frac{c_v}{R} VdP = \frac{R + c_v}{c_v} \cdot \left(\frac{dV}{V}\right) + \left(\frac{dP}{P}\right).$$

(2.81)

Dado que el gas es ideal, su energía interna es puramente cinética (ya que las moléculas que le componen no interactúan entre sí), i.e., U sólo depende de T. Entonces el trabajo dW realizado a presión constante sobre el gas es simplemente $PdV = nRdT$. De tal manera que a cada mol del gas se le transfiere una cantidad de energía calorífica igual a RdT, además de la que se le transferiría a volumen constante. Entonces, el calor específico a presión constante de un gas ideal lo podemos expresar como $c_P = c_v + R$. La razón entre las dos capacidades caloríficas se define como $\gamma \equiv c_P/c_v$. Ahora podemos expresar 2.81 en términos de γ como

$$0 = \gamma \left(\frac{dV}{V}\right) + \left(\frac{dP}{P}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = \gamma d(lnV) + d(lnP)$$

$$\Rightarrow 0 = d(\gamma lnV + nP) = d(lnPV^{\gamma}).$$

(2.82)

Integrando la ecuación anterior podemos deducir que

$$PV^{\gamma} = C,$$

(2.83)

donde C es una constante. Finalmente, sustituyendo $V = m/\rho$, y $K = C/m^{\gamma}$, podemos escribir la ley adiabática de un gas ideal de cómo sigue:

$$\frac{P}{\rho^{\gamma}} = K.$$

(2.84)

A partir de esta ley podemos relacionar la velocidad del sonido con estas variables mediante la diferenciación de la ecuación de arriba. De modo que,

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{\gamma P}{\rho},$$

(2.85)

si sustituimos esta expresión en la ecuación 2.73 en el punto (P_0, ρ_0), correspondiente a las condiciones de equilibrio de presión y densidad del medio, obtenemos

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}.$$

(2.86)

Para el aire a 0º centígrados, $\gamma = 1.042\ kjoules/kg \cdot {}^{\text{o}}C$, $P_0 = 1.013 \text{ x } 10^5\ newtons/m^2$ y $\rho_0 = 1.293\ kg/m^3$. Sustituyendo estos valores en la ec. 2.86, resulta que la velocidad del sonido a esta temperatura es

$$c_0 = 331.6\ metros/segundo,$$

lo que concuerda de manera muy precisa con el valor medido experimentalmente. Esto también corrobora la hipótesis de que las compresiones y expansiones del fluido constituyen un proceso adiabático.

Si la atmósfera fuese homogénea e isotérmica, la velocidad del sonido sería independiente de la altitud. Sin embargo, en la realidad, los cambios debidos a la temperatura del medio no deben ser ignorados, ya que son significativos y mucho más relevantes que aquellos provenientes de la inhomogeneidad de la composición del fluido. De manera que, para la mayoría de los gases, la función $P(\rho)$ se puede aproximar razonablemente a una recta cuya pendiente se puede expresar en términos de la temperatura. Por otro lado, como hemos visto, dicha pendiente corresponde precisamente a c^2. Entonces, nuevamente podemos expresar la ecuación de un gas ideal $PV = nRT$, usando $V = m/\rho$ y $r = nR/m$, de la forma

$$\frac{P}{\rho} = rT$$

donde r es una constante que de pende de cada gas, y T es la temperatura absoluta medida en º K (Kelvin), i.e., $T = t_c + 273$, donde t_c es la temperatura en º C (centígrados). Luego podemos expresar la velocidad del sonido así:

$$c^2 = \gamma rT,$$

lo que nos indica que tanto la velocidad del sonido es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta, como que la misma, a cualquier temperatura, está relacionada con c_0 (la velocidad del sonido a 0º C) a través de

$$c = c_0\sqrt{\frac{T}{273}} = c_0\sqrt{1 + \frac{t_c}{273}}.$$

(2.87a)

Cuando la temperatura en grados centígrados es pequeña en comparación con la temperatura absoluta, podemos aproximar la ec. anterior por

$$c \approx c_0\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{t_c}{273}\right) \tag{2.87b}$$

si sustituimos el valor numérico de c_0 en la ec. 287b, obtenemos finalmente

$$c = 331.6 + 0.6t_c. \tag{2.88}$$

Es importante recalcar que ésta aproximación es buena si $t_c \ll T$. Asimismo debemos señalar que esta ecuación sólo es válida para gases y no para líquidos, ya que para estos últimos, la ec. 2.86 deja de ser válida.

- **Solución general de la ecuación de onda.**

Las soluciones más generales de las ecuaciones 2.72a y 2.72b son denominadas *ondas planas* y son de la forma

$$\xi(x,t) = f_1(ct-x) + f_2(ct+x), \tag{2.89a}$$

$$p(x,t) = g_1(ct-x) + g_2(ct+x). \tag{2.89b}$$

Probaremos que en efecto éstas son soluciones de dichas ecuaciones de onda partiendo de considerar primero la función $f_1(ct-x)$, cuya primera derivada parcial respecto al tiempo es

$$\frac{\partial f_1(ct-x)}{\partial t} = f_1{}'(ct-x)\frac{\partial(ct-x)}{\partial t} = cf_1{}'(ct-x)$$

donde $f_1{}'$es otra función de $(ct-x)$, definida por

$$f_1{}'(ct-x) = \frac{df_1(ct-x)}{d(ct-x)}.$$

Repitiendo la diferenciación parcial respecto al tiempo obtenemos

$$\frac{\partial^2 f_1(ct-x)}{\partial t^2} = c^2 f_1''(ct-x) \tag{2.90}$$

donde f_1'' vuelve a ser una función de $(ct-x)$, definida por

$$f_1''(ct-x) = \frac{df_1'(ct-x)}{d(ct-x)} = \frac{d^2 f_1'(ct-x)}{d(ct-x)^2}.$$

De manera similar, la diferenciación de $f_1(ct-x)$ respecto a x da

$$\frac{\partial^2 f_1(ct-x)}{\partial t^2} = -\frac{\partial f_1'(ct-x)}{\partial x} = f_1''(ct-x) \tag{2.91}$$

donde f_1' y f_1'' son las mismas funciones de $(ct-x)$ que las de la ec. 2.90. Por lo tanto la sustitución directa de las ecs. 2.74 y 2.75 en la ecuación de onda 2.89a demuestra que $f_1(ct-x)$ es solución de dicha ecuación.

De manera análoga se puede probar que $f_2(ct+x)$, también es solución de la ec. 2.89a. Por lo tanto, la suma de estas dos funciones es la solución general completa de la ecuación lineal de onda.

Resulta inmediato ver que también $p(x,t) = g_1(ct-x) + g_2(ct+x)$ es la solución de la ec. 2.73b.

- **Ondas viajeras**.

Consideremos la solución $f_1(ct-x)$. Para mostrar la naturaleza viajera de este tipo de solución de cualquier ecuación de onda (transversal o plana), por claridad escogeremos una onda transversal. Si graficamos $y(x,t) = f_1(ct-x)$ al instante $t = 0$, la curva resultante, $y_0(x,t) = f_1(-x)$, tiene una forma general como la que se muestra en la Fig. 2.8. a). Más tarde, en $t = 1$, la curva que represente a dicha función será $y_1(x,t) = f_1(c-x) = f_1 - (x-c)$.

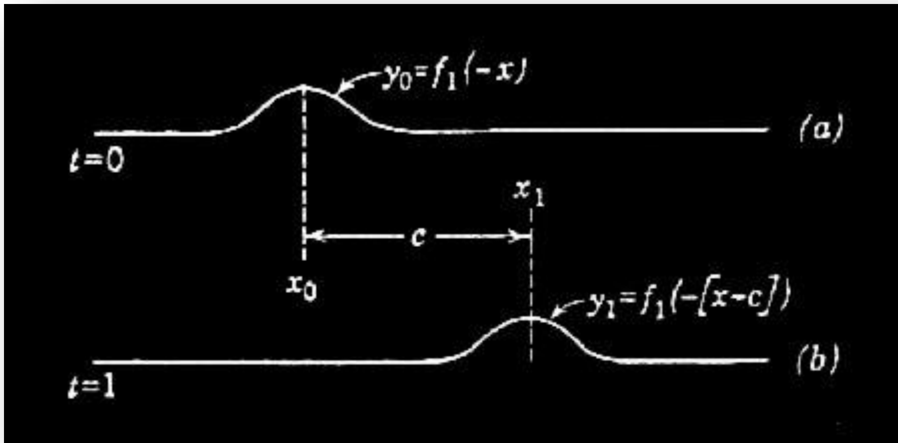


Fig. 2.9. Velocidad de una onda viajera (transversal) propagándose hacia la derecha.

Es evidente que la Fig. 2.8. b) que representa a la función en $t = 1$, es idéntica a la de $t = 0$, excepto por que cada variación particular de y, ocurre en $x - c$ en lugar de en x. Entonces el valor y_1 en x_1 es igual al valor y_0 en x_0 si $x_0 = x_1 - c.$ Reescribir esta ecuación en la forma$x_1 = x_0 + c$, muestra que toda la curva se desplazó hacia la derecha una distancia c en un tiempo de un segundo. En consecuencia, $f_1(ct - x)$representa una onda moviéndose hacia la derecha con velocidad c. De manera análoga se puede mostrar que $f_2(ct + x)$ representa una onda moviéndose hacia la izquierda a la misma velocidad.

- **Solución armónica de la ecuación de onda plana.**

El tipo de solución más importante de la ecuación 2.72a está dada por la expresión

$$\boldsymbol{\xi}(x,t) = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)} + \boldsymbol{B}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + kx)}, \tag{2.92}$$

Esta es la *solución armónica* de la ecuación de onda plana. Sabemos que es solución porque la podemos expresar como función de la forma $a_1(ct - x) + b_2(ct + x)$ con $\omega(k) = ck$ y hemos demostrado arriba que funciones de este tipo lo son. Su relevancia yace en el hecho de que la ecuación de onda es lineal, y por lo tanto, el principio de superposición es válido, i.e. la suma de soluciones armónicas es también solución de dicha ecuación.

La ec. 2.92 corresponde a la superposición de dos *ondas armónicas planas* viajeras (la primera moviéndose a la derecha y la otra a la izquierda). Sus *amplitudes complejas de desplazamiento* son $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ respectivamente, su frecuencia angular es $\omega = 2\pi\nu$ y su *número de onda* es $k = 2\pi/\lambda$. Donde ν es la frecuencia de oscilación medida en Hz o ciclos por segundo y λ es la *longitud de onda*.

En su forma compleja, las expresiones para otras variables acústicas importantes son

$$\boldsymbol{p} = -\rho_0 c^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} = j\rho_0 c\omega(\boldsymbol{\xi}_+ - \boldsymbol{\xi}_-) \tag{2.93}$$

$$\boldsymbol{s} = -\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} = jk(\boldsymbol{\xi}_+ - \boldsymbol{\xi}_-) \tag{2.94}$$

$$\boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = j\omega(\boldsymbol{\xi}_+ - \boldsymbol{\xi}_-), \tag{2.95}$$

donde $j = \sqrt{-1}$. y con la finalidad de simplificar la notación

$$\boldsymbol{\xi}_+ = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)} \tag{2.96}$$

y

$$\boldsymbol{\xi}_- = \boldsymbol{B}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + kx)} \tag{2.97}$$

son funciones que representan desplazamientos producidos por ondas que se mueven en las direcciones positiva y negativa de x respectivamente.

Debemos observar que cuando la onda se mueve en dirección positiva de x, la presión acústica p, la condensación s y la velocidad de la partícula v están en fase entre sí, al tiempo que están adelantadas por j que equivale a 90º respecto al ángulo de fase del desplazamiento ξ en el plano complejo. Por otro lado, si la perturbación se desplaza en dirección negativa, entonces la velocidad de partícula está adelantada 90º respecto al desplazamiento, mientras que la condensación y la presión se retrasan el mismo ángulo de fase.

Las diferencias propias de las relaciones de ángulos de fase entre ondas que viajan en direcciones opuestas proviene del hecho que la presión y la condensación son escalares mientras que la velocidad y el desplazamiento son cantidades vectoriales. Sin embargo, es independiente de la dirección de las ondas, que haya un máximo de condensación y de velocidad en la dirección de propagación asociados un máximo de presión. Además, los tres últimos lideran al máximo valor del desplazamiento por un ángulo de fase de 90º.

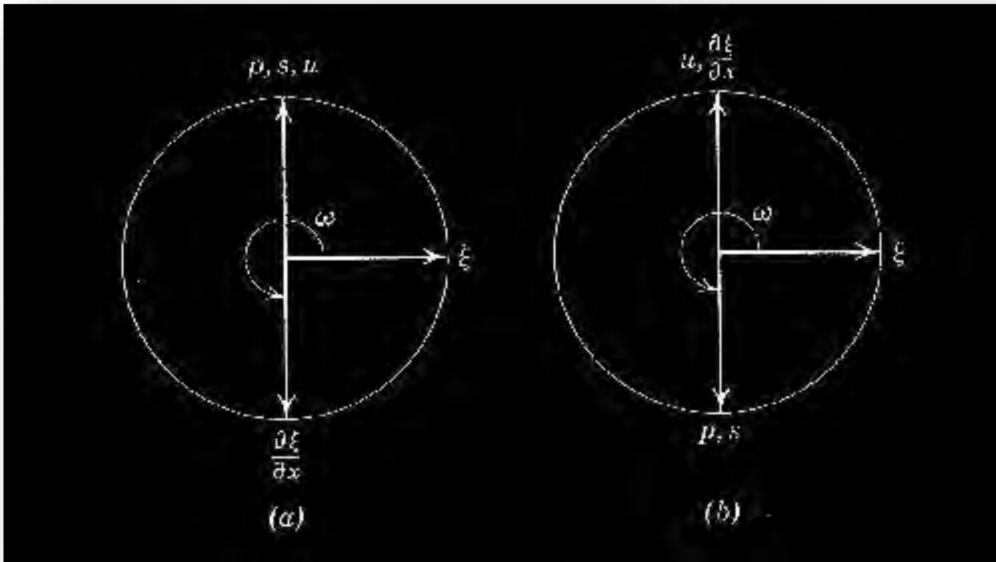


Fig. 2.10. Relación entre las fases de diferentes variables acústicas de ondas planas viajando hacia la derecha a) y hacia la izquierda b).

Además, los valores físicos (mensurables) asociados a dichas variables acústicas corresponden a la evaluación de la parte real de las ecs. 2.92 a la 2.95 que pueden ser expresados, por ejemplo de la siguiente manera:

$$\xi = A\cos(\omega t - kx) + B\ sen(\omega t - kx) \tag{2.98}$$

$$p = -\rho_0 c\omega A\cos(\omega t - kx) + \rho_0 c\omega B\ sen(\omega t - kx) \tag{2.99}$$

$$s = -kA\cos(\omega t - kx) + kB\ sen(\omega t - kx) \tag{2.100}$$

$$u = -\omega A\cos(\omega t - kx) - \omega B\ sen(\omega t - kx) \tag{2.101}$$

De tal manera que si observamos la dinámica de las ondas planas en un punto fijo, o estudiamos su distribución en el espacio un tiempo fijo, entonces éstas se pueden descomponer en términos de una superposición de vibraciones armónicas simples a través de la integral de Fourier (previamente discutida en la sección 2.1.3) y su espectro dependerá de ω o de k según sea el caso.

Cabe mencionar que las ondas estacionarias que caracterizan a los modos de vibración cuerda vibrante con extremos fijos pueden verse como la superposición de dos ondas viajeras armónicas transversales (no planas) de igual amplitud y fase, una desplazándose hacia la derecha y la otra hacia la izquierda.

- **Densidad de energía de una onda plana.**

La energía involucrada en la propagación de ondas acústicas en el medio resulta de la energía cinética de las partículas en movimiento y de la energía potencial inherente a un fluido comprimido.

Consideremos un pequeño elemento de volumen de espesor dx tal que se pueda suponer que todas las partículas contenidas en éste, tengan la misma velocidad u. Entonces la energía cinética de dicho elemento está dada por

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\rho_0 u^2 V_0 \tag{2.102}$$

donde V_0, el volumen del elemento en el fluido sin perturbar, es igual a $S\ dx$. A medida que el fluido se contra y se expande durante la transmisión de una onda acústica, el volumen de dicho elemento variará según la ecuación

$$V = V_0\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right). \tag{2.103}$$

El cambio de energía potencial asociado a esta variación del volumen está dado por

$$\Delta E_p = -\int p\ dv. \tag{2.104}$$

El signo negativo de la ecuación es necesario para que la energía potencial aumente a medida que se efectúe trabajo sobre el elemento cuando el volumen del mismo, disminuya debido a la acción de la presión acústica p ejercida sobre éste. Para llevar a cabo la integración, expresaremos dv en términos de p reemplazando por $\partial \xi\ /\ \partial x$ en la ec. 2.103 por $-p/p_0 c^2$ como lo muestra la ec. 2.69, entonces

$$V = V_0\left(1 - \frac{p}{p_0 c^2}\right),$$

cuya diferenciación resulta en

$$dV = -\frac{V_0 dp}{p_0 c^2}. \tag{2.105}$$

Sustituyendo la ec. 2.105 en la ec. 2.104 e integrando de 0 a p, entonces,

$$\Delta E_p = \frac{V_0}{\rho_0} \int_0^p p \; dp = \frac{1}{2} \frac{p^2}{p_0 c^2} V_0,$$

por lo tanto la energía total del elemento de volumen es

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \frac{1}{2} p_0 \left(u^2 + \frac{p^2}{p_0 c^2} \right) V_0$$

luego la *densidad de energía* ε en joules por metro cubico es

$$\varepsilon = \frac{\Delta E}{V_0} = \frac{1}{2} p_0 \left(u^2 + \frac{p^2}{p_0 c^2} \right). \tag{2.106}$$

Para determinar la densidad de energía instantánea asociada a ondas acústicas viajando en las direcciones positiva y negativa de x, es necesario sustituir los valores de u y p de las ecuaciones 2.99 y 2.101 en la ec. 2.106. Por simplicidad en los cálculos, consideraremos por separado cada onda según su dirección de propagación. Entonces, para la onda que viaja hacia $+x$, $p = p_0 c u$, por lo tanto,

$$\varepsilon_+ = p_0 u_+^2, \tag{2.107}$$

mientras que para la onda que viaja hacia $-x$, $p = -p_0 c u$, luego,

$$\varepsilon_- = p_0 u_-^2, \tag{2.108}$$

de tal manera que

$$\varepsilon = p_0 (u_+^2 + u_-^2). \tag{2.109}$$

La densidad de energía de una onda plana moviéndose en la dirección positiva de x, no es constante a lo largo del medio dado que la velocidad de las partículas es función tanto de x como de t. Entonces, el promedio temporal de la densidad de energía en un punto fijo se torna una variable relevante y se expresa así

$$\bar{\varepsilon}_{+}^{t} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \varepsilon_{+}\ dt, \tag{2.110}$$

donde la integración se lleva a lo largo del período correspondiente a un ciclo de la oscilación armónica. La ec. 2.101 hace evidente que

$$u_{+} = -\omega A \cos(\omega t - kx),$$

entonces,

$$\bar{\varepsilon}_{+}^{t} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \rho_0\, [-\omega A \cos(\omega t - kx)]^2\ dt$$

$$= \frac{\rho_0 \omega^2 A^2}{T}\int_{0}^{T} \left[sen^2 \omega t\ cos^2\ kx + sen^2\ kx\ cos^2\ \omega t - \frac{sen\ (2\omega t)\ sen\ (2kx)}{2}\right] dt.$$

De modo que

$$\bar{\varepsilon}_{+}^{t} = \frac{\rho_0 \omega^2 A^2}{2}. \tag{2.111a}$$

Sustituyendo $-\omega A$ por U_{+}, la amplitud de la velocidad de esta onda, obtenemos

$$\bar{\varepsilon}_{+}^{t} = \frac{\rho_0 {U_{+}}^2}{2}, \tag{2.111b}$$

o, tras sustituir $-\omega A$ por $P_{+}/\rho_0 c$ donde P_{+} es la amplitud de presión de la onda, entonces la energía la podemos reescribir como

$$\bar{\varepsilon}_{+}^{t} = \frac{{P_{+}}^2}{2\rho_0 c}.$$

(2.111c)

De manera análoga, en vez de calcular la densidad de energía promediada en el tiempo en una posición fija, podemos promediarla en el espacio a un tiempo fijo. En este caso la integración se lleva a cabo a lo largo de una longitud de onda completa, i.e.,

$$\bar{\varepsilon}_{+}^{x} = \frac{1}{\lambda}\int_{0}^{\lambda} \varepsilon_{+}\ dt.$$

Podeos ver que la integración es prácticamente idéntica a la anterior. De ahí que

$$\bar{\varepsilon}_{+}^{x} = \frac{\rho_0 \omega^2 A^2}{2} = \frac{\rho_0 {U_{+}}^2}{2} = \frac{{P_{+}}^2}{2\rho_0 c} = \bar{\varepsilon}_{+}^{t}. \tag{2.112}$$

Finalmente, resulta inmediato que

$$\bar{\varepsilon}_{-}^{t} = \bar{\varepsilon}_{-}^{x} = \frac{\rho_0 \omega^2 B^2}{2} = \frac{\rho_0 {U_{-}}^2}{2} = \frac{{P_{-}}^2}{2\rho_0 c} \tag{2.113}$$

- **Intensidad acústica.**

La *intensidad acústica I* de una onda sonora está definida como la tasa *promedio* de flujo de energía a través de una superficie perpendicular a la dirección de propagación de dicha onda. Sus unidades fundamentales son joule por segundo por metro cuadrado, pero al tener dimensiones de potencia por unidad de superficie, se puede expresar en watts por metro cuadrado. Toda la energía acústica contenida en una columna de longitud de $c\,dt$ metros está dada por $\varepsilon c\,dt$ pasará por una unidad de superficie en un periódo de dt segundos. En consecuencia la tasa de flujo de energía acústica está dada por

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon c, \tag{2.114}$$

de modo que la *intensidad* o tasa de flujo promedio es

$$I = \frac{\overline{dE}^{t}}{dt} = \bar{\varepsilon}^{t} c. \tag{2.115a}$$

Entonces, la intensidad de una onda plana que viaja en la dirección positiva de x es

$$I = \bar{\varepsilon}_{+}^{t} c, \tag{2.115b}$$

misma que podemos expresar alternativamente como

$$I_{+} = \frac{\rho_0 c \omega^2 A^2}{2} = \frac{\rho_0 c {U_{+}}^2}{2} = \frac{{P_{+}}^2}{2\rho_0 c} = \frac{P_{+} U_{+}}{2} \tag{2.116a}$$

y de forma similar

$$I_{-} = \frac{\rho_0 c \omega^2 B^2}{2} = \frac{\rho_0 c {U_{-}}^2}{2} = \frac{{P_{-}}^2}{2\rho_0 c} = \frac{P_{-} U_{-}}{2}. \tag{2.116b}$$

2.1.6. Superposición de dos vibraciones armónicas simples de frecuencias cercanas (Batimientos). *Basado en [6].*

La razón por la que deseamos estudiar la superposición de dos vibraciones armónicas simples radica en que la metodología más precisa para afinar instrumentos musicales está íntimamente ligada al fenómeno de batimientos, que resulta precisamente de la interferencia generada por dicha superposición.

La combinación lineal de dos vibraciones armónicas simples de diferente frecuencia que resulta de evaluar la variación de presión en un punto x_0 debida a la superposición de dos *ondas armónicas planas acústicas* se escribe de la siguiente manera:

$$p(x_0, t) = A_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega_2 t + \varphi_2)} \tag{2.117}$$

donde ω_1 es la frecuencia angular de una vibración y ω_2 es la frecuencia angular de la otra. El movimiento resultante de esta suma no es armónico simple, por lo que no puede ser representado por una simple función seno o coseno. Sin embargo, si la razón entre la frecuencia mayor y la menor es un número racional, el movimiento que resulta es periódico con frecuencia angular igual al máximo común divisor entre ω_1 y ω_2. De otro modo, el movimiento resultante es una oscilación no periódica que por ende, nunca se repite. Para la suma de tres o más vibraciones ocurre algo similar a lo que ocurre con la suma de dos, pero esta última es más fácil de interpretar. Para ello, escribiremos ω_2 como $\omega_1 + \Delta\omega$, entonces la suma de vibraciones se ve así:

$$p(x_0, t) = A_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega_1 t + \Delta\omega t + \varphi_2)} \tag{2.118}$$

lo que podemos reescribir como sigue:

$$p(x_0, t) = \left[A_1 e^{\,i\varphi_1} + A_2 e^{i(\,\Delta\omega t + \varphi_2)}\right] e^{i\omega_1 t} \tag{2.119}$$

y finalmente expresar de la forma

$$p(x_0, t) = A e^{i(\omega_1 t + \varphi)} \tag{2.120}$$

donde

$$A(t) = \left[A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \Delta\omega t)\right]^{1/2} \tag{2.121}$$

La vibración resultante puede ser considerada como *aproximadamente* armónica simple, con frecuencia angular ω_1 pero con amplitud y fase variables. La amplitud varía entre los límites definidos por $A_1 + A_2$ y $|\,A_1 - A_2|$. La variación de la fase lleva a que la frecuencia oscile de manera que su promedio se encuentre entre ω_1 y ω_2 según las magnitudes relativas de las amplitudes A_1 y A_2.

Si consideramos $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ y definimos $\overline{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$, entonces podemos escribir la superposición como

$$p(x_0, t) = \left[A_1 e^{-i(\frac{\Delta\omega}{2} t)} + A_2 e^{i(\frac{\Delta\omega}{2} t)}\right] e^{i\overline{\omega} t} \tag{2.122}$$

En el caso acústico de que los dos tonos puros sean de frecuencias ligeramente distintas, la variación de amplitud resulta en una pulsación rítmica de la sonoridad conocida como *batimiento.* Para mostrarlo, consideraremos el caso particular en que $A_1 = A_2$ y $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Entonces la ecuación de amplitud se reduce a

$$A = A_1 \left[2 + 2\cos\,\Delta\omega t\right]^{1/2} \tag{2.123}$$

luego, la amplitud oscila entre $2A_1$ y cero con una frecuencia $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$ y el fenómeno de batimientos es bajo estas condiciones, sumamente notorio.

Además, la parte real de la ec. 2.122 que corresponde a la oscilación física, se reduce a

$$Re\{p(x_0,t)\} = 2A_1 \cos\frac{\Delta\omega}{2}t \cdot \cos\bar{\omega}t \tag{2.124}$$

lo que quiere decir que hay una onda sinusoidal de frecuencia angular $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$ "lenta" que modula en amplitud a otra de frecuencia angular "rápida" $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$.

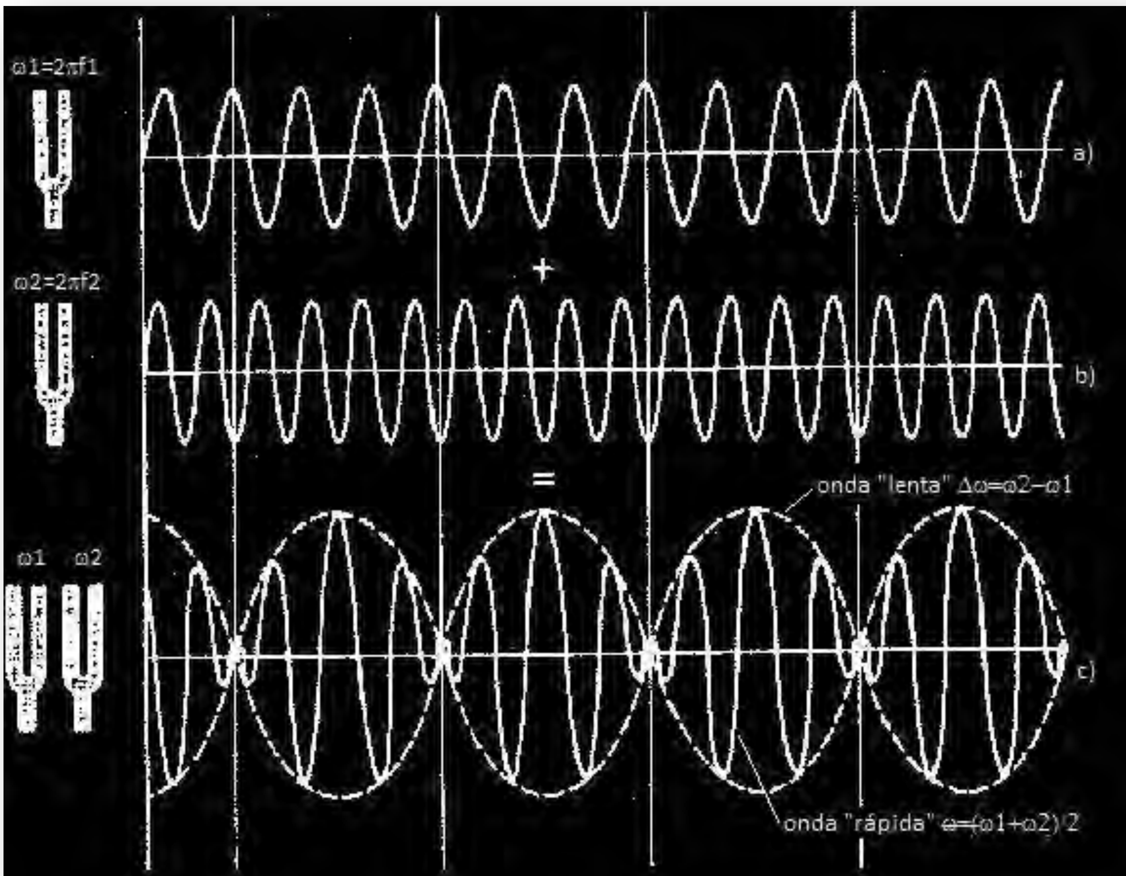


Fig. 2.11. En a) y b) aparecen dos vibraciones armónicas simples de igual amplitud y de frecuencias f_1 y f_2 cercanas. En c) se muestra la superposición y la envolvente de éstas. La suma de ambas origina las pulsaciones o batimientos.

2.2. Principios de acústica musical. *Basado en [1], [14] y [15].*

En esta parte se pretende relacionar lo que hemos presentado sobre la cuerda con lo que escuchamos. Empezaremos planteando de manera muy simplificada la naturaleza física del sonido. Posteriormente se mostrará desde el punto de vista musical, la relación *a grosso modo* entre las variables físicas que se pueden medir de una señal acústica proveniente de un instrumento musical susceptible a afinarse con las cualidades musicales del sonido que este produce.

Definiremos el sonido como una forma de energía mecánica asociada a perturbaciones que son originadas por un cuerpo que vibra llamado o *emisor*, que son transmitidas a través de un *medio*, capaces de estimular otro cuerpo capaz de vibrar llamado *receptor*. Específicamente nos interesan las perturbaciones transmitidas a través del aire debido a diferencias de presión producidas por la vibración de instrumentos musicales, que puedan ser percibidas por el oído.

Dada la naturaleza ondulatoria del fenómeno sonoro podemos aplicar la matemática de Fourier previamente vista para analizarlo. La cuerda vibrante puede producir ondas sonoras prácticamente análogas a los modos de vibración presentes en la cuerda en el sentido que las componentes espectrales de la onda sonora tendrán en principio la misma amplitud frecuencia y fase que las de la cuerda. La diferencia sustancial es que las ondas en el aire son longitudinales, es decir, la dirección de propagación de la onda es paralela al desplazamiento de las partículas. Por su parte, las ondas presentes en la cuerda son transversales, es decir, la dirección en la que se transmite la perturbación es perpendicular a la dirección en la que se desplaza el segmento de cuerda perturbado. Además, las ondas en el aire en campo libre son viajeras, mientras que en la cuerda con extremos fijos, son estacionarias.

Para enfocarnos en cualidades asociadas subjetivamente al sonido desde el punto de vista musical, en particular nos interesa considerar sonidos que puedan ser representados físicamente por una onda periódica con frecuencia, longitud de onda y amplitud muy definidas. En consecuencia, nos interesan sonidos conformados por componentes en frecuencia que sean armónicas o cuasiarmónicas.

2.2.1. Cualidades musicales del sonido y su relación con variables físicas.

- **Altura, sonoridad y timbre.**

A nivel musical el sonido cuenta con las siguientes cualidades principales:

Altura.- determina cuán *agudo* o *grave* es un sonido y está relacionado principalmente con la periodicidad del mismo. A medida que el sonido tiene una periodicidad mayor, éste es más grave. De manera similar, es más agudo si el período es más corto. En consecuencia tenemos una sensación clara de altura si en el sonido predominan en intensidad parciales armónicas o cuasiarmónicas.

Sonoridad o intensidad subjetiva.- Determina cuán *forte* o *piano* es un sonido, y está relacionado principalmente y de forma simplificada con la intensidad acústica que está en función de la energía de la onda sonora. Dicha energía está a su vez relacionada con el cuadrado de las amplitudes de las parciales que componen al sonido. La sonoridad se mide en *fons* o *fonos* (*ver pp. 82,89 de [15]*).

Timbre.-permite distinguir dos sonidos producidos por dos instrumentos distintos que tienen la misma altura y la misma sonoridad. Está relacionado principalmente con el espectro en frecuencia del sonido, es decir que esta cualidad depende principalmente de las parciales que componen el sonido y sus respectivas amplitudes.

- **El tono.**

Un *tono* es un sonido al que de manera subjetiva le podemos asignar una altura definida.

En el siguiente capítulo veremos con más detalle la relación entre altura y tono. Adicionalmente mostraremos cómo la asignación de la altura a un tono depende de otras variables como el grado de inarmonicidad o la amplitud de las parciales involucradas.

Por su naturaleza los tonos de dividen en dos categorías:

Tono puro.- es aquel sonido cuyo espectro de frecuencias contiene una sola parcial o armónico.

El tono puro lo podemos dividir a su vez en dos subcategorías:

Tono puro ideal.- su espectro es necesariamente una función *delta de Dirac*, lo que implica que su duración es infinita.

Tono puro real.- Es producido por un sistema físico que posee un solo modo de vibración, pero cuya duración es finita por lo que su espectro, aunque esté muy localizado en el espacio de frecuencias, tiene una determinada anchura que está ligada a las *relaciones de incertidumbre* conocidas para variables vinculadas a través de una Transformada de Fourier (en este caso duración y frecuencia). Un ejemplo de estos sistemas es el *diapasón*.

Es importante mencionar que la forma física de un tono puro corresponde a una oscilación armónica simple del medio, que como ya se mencionó, en este caso es el aire.

Tono complejo.- es aquel sonido cuyo espectro de frecuencias está compuesto al menos de dos parciales. En este sentido se puede entender al tono complejo como una superposición de tonos puros, es decir, como la superposición de oscilaciones armónicas simples del medio. (ver Fig. 2.12.)

La cuerda vibrante real con extremos fijos, produce tonos complejos. Y dado que en general sus parciales corresponden casi de manera exacta a una serie armónica, entonces la altura que asignamos a dicha vibración es esencialmente la frecuencia fundamental o en su defecto, la frecuencia que corresponda al máximo común divisor de las frecuencias de los armónicos involucrados en la producción de dicho sonido; el asignar la altura de la segunda forma, constituye el fenómeno conocido como la *fundamental omitida*. Dicho fenómeno se presenta, siempre que se sumen vibraciones armónicas simples que tengan un máximo común divisor. Este es el fenómeno que explica como uno puede escuchar frecuencias graves en audífonos, aun cuando las frecuencias de los modos de vibración más graves de los mismos, son mucho más agudas que las frecuencias percibidas, ya que la suma de estos armónicos, producen vibraciones con períodos más largos.

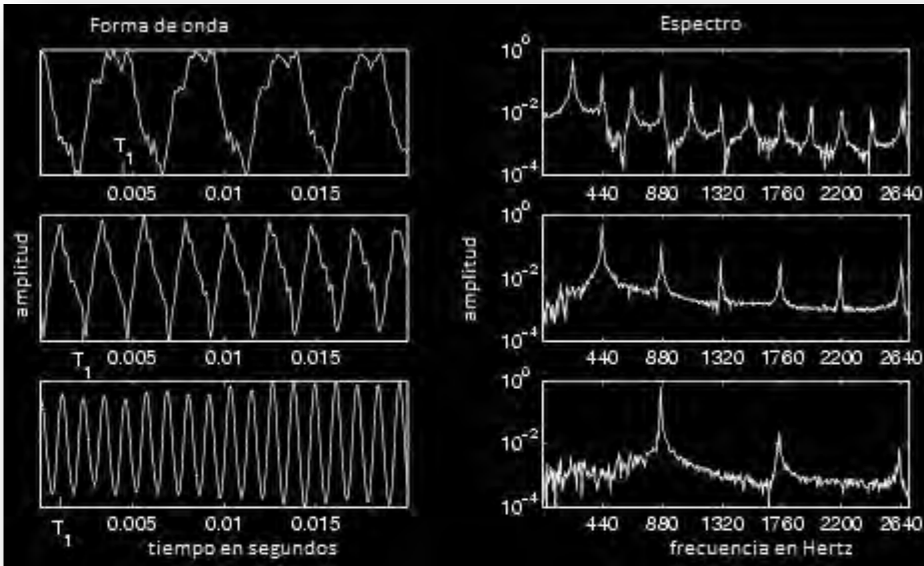


Fig. 2.12. Tres tonos complejos generados por un piano correspondientes a las notas La6, La5 y La4 (de arriba hacia abajo) y sus respectivos espectros. Es importante notar la periodicidad de la onda y la presencia de armónicos en el espectro.

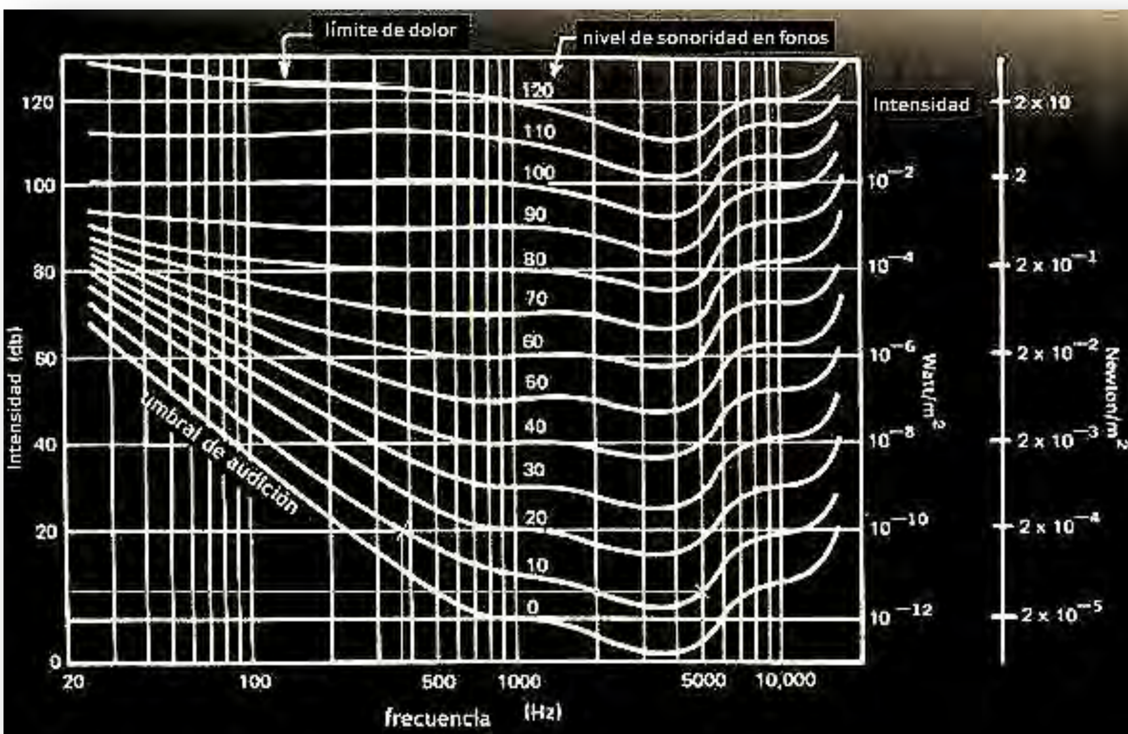


Fig. 2.13. Curvas de Fletcher-Munson. Cada curva muestra la intensidad de tonos puros que son percibidos con una misma sonoridad dependiendo de su frecuencia. Estas curvas están acotadas por el umbral de audición (por debajo de éste no se percibe un tono puro) y por el umbral de dolor (por encima de éste ell sonido es desagradable o incluso nocivo).

En la Fig. 2.13. se muestra para un *oído promedio*, cómo depende de la frecuencia y la intensidad la sonoridad de tonos puros. Se debe notar que el oído es “algo sordo” a bajas frecuencias e intensidades, mientras que particularmente alrededor de los 4000 Hz es muy sensible. Además, la sonoridad que se asigna a un tono complejo es aquella que se asigna al tono puro de igual frecuencia que se perciba con la misma intensidad subjetiva.

Con lo expuesto hasta aquí, hemos cubierto los aspectos físicos más relevantes relacionados con la música y, en particular, con la afinación de instrumentos musicales. En el siguiente capítulo nos enfocaremos en la percepción sensorial de algunos de estos fenómenos y las limitaciones que ésta nos impone.

Capítulo 3 PSICOACÚSTICA DE LA MÚSICA. *Referencias generales: [15] y [16].Basado en [16].*

La *psicoacústica* es el estudio científico de la percepción del sonido, con el fin de establecer la relación entre las propiedades físicas de un estímulo *acústico* con las consecuentes respuestas *sensoriales* (psicológicas y fisiológicas) del *sistema nervioso humano* basado en resultados provenientes de arreglos experimentales (*ver [17]y [18]*).

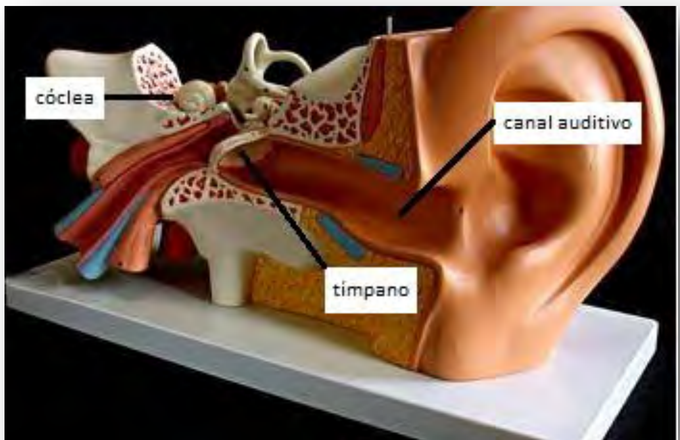


Fig. 3.1. Diagrama del oído.

Fig. 3.2. La cóclea, el nervio auditivo y el tímpano.

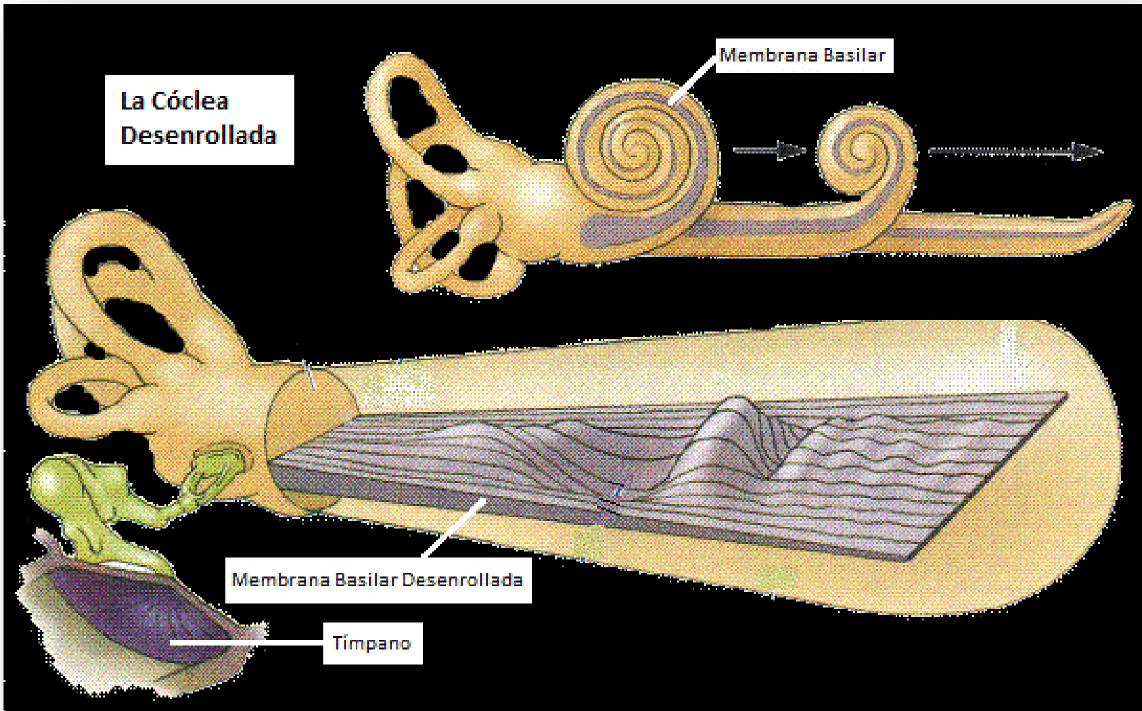


Fig. 3.3. La cóclea y la membrana basilar.

La percepción subjetiva del sonido, y, en particular, de las cualidades musicales previamente mencionadas, es compleja. Cada una de éstas, depende simultáneamente, pero en diferente medida, de variables físicas objetivas y mensurables como son la periodicidad, el espectro en frecuencia, la amplitud, duración y envolvente (forma de la variación de la amplitud) de las ondas sonoras. De manera que en la sección anterior sólo hemos mencionado la variable física que tiene mayor incidencia en la cualidad correspondiente.

Se ha enunciado cómo podemos relacionar variables físicas, que tienen que ver con propiedades matemáticas de las ondas sonoras provenientes de una cuerda vibrante, vistas desde el ámbito de la música. Es momento de entender de una manera más precisa esta relación, describiendo la manera en que percibimos el sonido. Para ello, nos enfocaremos en el receptor (el oído humano) y específicamente veremos con más detalle cómo se percibe la altura, que es determinante en la afinación de los instrumentos musicales. Se describirá la percepción de tonos puros por un lado, y por el otro, la percepción de tonos complejos.

3.1. Psicoacústica de tonos puros.

Los tonos puros son producidos exclusivamente por medios electrónicos con excepción del diapasón, el cuál fue diseñado intencionalmente para tener un solo modo de vibración. De hecho, ningún instrumento musical produce tonos puros. A pesar de ello, fue indispensable estudiar cómo éstos son percibidos para llegar a comprender la psicoacústica de los tonos complejos.

El *tímpano* (ver Figs. 3.1., 3.2. y 3.3.) es una membrana capaz de vibrar según la naturaleza de las ondas sonoras que lo estimulen. Cuando percibimos un tono puro, la vibración del tímpano se comporta, con gran aproximación, como un oscilador armónico simple (*ver p. 12 de [16]*).

Es importante mencionar que ante estímulos más complejos, el tímpano responde como una membrana bidimensional, luego esta aproximación se ve más limitada, como se discutirá más adelante. Al respecto se puede consultar “Finite Element Modeling of Acousto-mechanical Coupling in the Cat Middle Ear” por Tuck Lee y Steel, en donde el tímpano es modelado como una membrana elástica que presenta un comportamiento no lineal debido a su forma y estructura.

Existen dos maneras de comparar dos tonos puros. Si se hace escuchar uno después de que el otro ha cesado, entonces se ha hecho una *comparación melódica*; mientras que si se hacen sonar los dos tonos simultáneamente, luego se ha hecho una *comparación armónica* o *superposición*. Los límites en la percepción acústica de estas comparaciones, están determinados por la *discriminación de frecuencias* y la *selectividad de frecuencias* respectivamente.

3.1.1. Discriminación de frecuencias.

Es la habilidad de un individuo para detectar variaciones de frecuencia de un tono puro a partir de una comparación melódica. Puesto de otra forma, es poder distinguir variaciones melódicas en la altura de dicho tono.

3.1.2. Selectividad de frecuencias.

Es la habilidad de un individuo para *resolver*, a partir de una comparación armónica, las frecuencias de dos o más tonos puros superpuestos. Esto es, la habilidad para distinguir separadamente dos o más tonos puros que suenen al mismo tiempo. De tal manera que el concepto de *resolución de frecuencias* hace referencia a los tonos puros que podemos identificar de manera independiente de un grupo de tonos puros superpuestos que conformen cualquier sonido complejo.

3.1.3. Límite de la discriminación de frecuencias en un tono puro.

Tomemos en cuenta la habilidad un individuo para establecer un orden relativo entre dos tonos puros de la misma intensidad a partir de su altura cuando son comparados melódicamente.

Siempre existe una diferencia entre frecuencias lo suficientemente pequeña, como para que el individuo sea incapaz de notarla.

A la diferencia de frecuencias más grande para la cual el individuo juzga que ambos tonos puros tienen la misma altura luego de compararlos melódicamente lo llamamos *umbral de* *diferenciación* denotado por *DL* (del inglés "Difference Limen") o *diferencia apenas notable* denotada por *JND* (del inglés "Just Noticeable Difference").

De tal manera que siempre que la variación en frecuencia del estímulo exceda al *DL*, el individuo notará un cambio en la sensación acústica.

El grado de sensibilidad del mecanismo de percepción de la altura de tonos puros debido a los cambios de frecuencia, no sólo depende de ésta, sino también de otras variables como son la intensidad y la duración del tono en cuestión. Es muy importante señalar que también varía enormemente de persona en persona en función del entrenamiento musical.

Debido a lo anterior, definiremos el *umbral de diferenciación para la frecuencia* denotado por DLF (del inglés "Difference Limen for Frequency"), como la mínima diferencia en frecuencia que debe existir entre dos tonos puros para detectar un cambio de altura. Matemáticamente lo expresamos de la siguiente manera:

$$\log(DLF) = a\sqrt{f} + k + \frac{m}{SL} \tag{3.1}$$

donde f es la frecuencia en Hertz, SL es la intensidad en decibeles, a, k y m son constantes obtenidas experimentalmente cuyos valores son típicamente $a = 0.023$, $k = -0.25$ y $m = 4.3$ (*ver p. 14 de [16] y [19]*).

El modelo matemático anterior nos dice que el DLF expresado en Hertz es menor a frecuencias bajas y se incrementa a medida que la frecuencia aumenta, así mismo, el DLF disminuye a medida que la intensidad aumenta. Lo que quiere decir que para tonos puros poco intensos es más difícil notar los cambios en frecuencia de manera melódica.

3.1.4. Límites en la superposición de tonos puros. Psicoacústica de los batimientos.

Existen dos teorías predominantes al respecto de cómo percibimos la altura de tonos: La *teoría espacial* y la *teoría temporal*.

Según la teoría espacial, el oído interno funciona como un *analizador de espectro de resolución limitada*. Cuando escuchamos un tono puro, éste estimula una región específica de la *membrana basilar* (ver Fig. 3.3) dependiendo de su frecuencia. Dicha membrana se encuentra al interior de la *cóclea* (ver Figs. 3.1, 3.2 y 3.3), de tal manera que cuando escuchamos sonidos compuestos de tonos puros superpuestos, cada frecuencia estimula una región específica de esta membrana, es decir, la superposición de tonos puros produce un *patrón espacial de actividad neuronal* vía el patrón espacial inducido en la membrana basilar debido al estímulo. Esto es consecuencia de que en la membrana existen *regiones de resonancia* que son sometidas a una máxima estimulación cuando el sonido que se percibe está compuesto por tonos puros cuyas frecuencias corresponden a las *frecuencias de resonancia* de dichas regiones. De tal manera que si variamos la frecuencia de un tono puro, cambiará la región de la membrana basilar estimulada. Es así que los límites en la superposición de los tonos puros está ligada al ancho de estas regiones y por tanto está ligada a la teoría espacial. (*ver pp. 121-125 de [15], p. 16 de [16] y [19]*).

Por otro lado la teoría temporal plantea que el estímulo, es decir las ondas sonoras que escuchamos, producen un *patrón temporal* de impulsos nerviosos que se transmite a lo largo del *nervio auditivo* (ver Fig. 3.2.) hasta el cerebro. Dicho patrón es generado como repuesta a la envolvente de la onda sonora incidente. En la siguiente sección discutiremos con más detalle esta teoría.

En el capítulo anterior describimos físicamente la superposición de dos vibraciones armónicas simples. A continuación discutiremos la percepción de este fenómeno.

El tímpano oscila respondiendo a las variaciones de presión en el aire contenido en el *canal auditivo* (ver Fig. 3.1.). Cuando dos tonos puros se superponen, la respuesta del tímpano se puede modelar como si se estuvieran ejecutando al mismo tiempo, pero de forma independiente, las vibraciones armónicas simples impuestas por cada uno de ellos. Puesto de otra forma, el movimiento resultante se puede aproximar a una superposición de movimientos individuales independientes. Así mismo, se puede suponer que todos los elementos vibrantes junto con el medio responden de esta manera. Matemáticamente esto corresponde a una *aproximación lineal* del oído.

Como ya vimos, la superposición de dos tonos puros de frecuencias diferentes pero de una misma intensidad, implica una vibración conformada por una onda modulada en amplitud. La sensación acústica producida por dicha suma, depende de la diferencia entre frecuencias.

Si la diferencia de frecuencias es lo suficientemente grande, se excitarán dos regiones de resonancia lo suficientemente separadas entre sí en la membrana basilar y por ende escucharemos dos tonos de manera separada y con intensidades constantes, cuyas alturas corresponden a las alturas de cada tono por separado. Esta habilidad de la *cóclea* de separar las componentes individuales superpuestas en un patrón de vibración complejo, corresponde precisamente a lo que definimos previamente como selectividad de frecuencias.

Por otro lado, si la diferencia entre frecuencias es menor que un determinado valor, las regiones de resonancia se traslapan y entonces escuchamos un solo tono de altura intermedia pero de *intensidad modulada* variable que reproduce fielmente el patrón de vibración del tímpano y que percibimos en forma de batimientos.

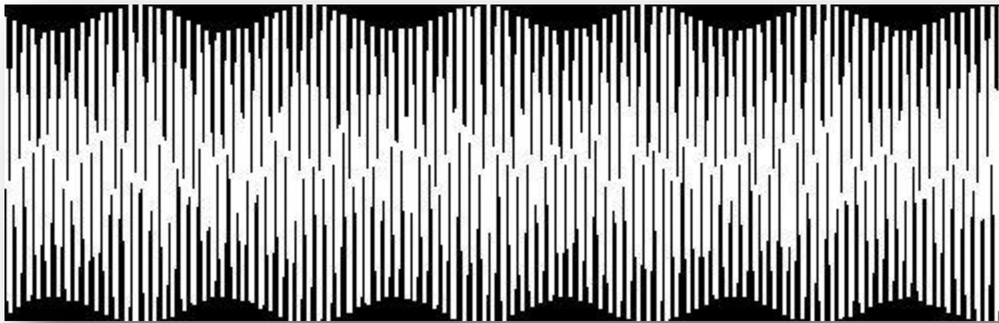


Fig. 3.4. Superposición de dos tonos puros de frecuencias cercanas, pero de diferentes amplitudes y fases.

Sin embargo, un afinador no necesariamente escucha las pulsaciones provenientes de dos tonos puros de frecuencias exactamente iguales, además, las fases de los mismos tampoco necesariamente coinciden. En la Fig. 3.4. se muestra la interferencia de dos tonos puros de intensidad similar y de diferente fase. Para deducir la frecuencia con la que se escuchan los batimientos de este tipo estímulo, veremos matemáticamente la modulación de la intensidad de la onda resultante. Consideraremos ésta, como una onda plana cuya amplitud varía en el tiempo de acuerdo a la ec. 2.121. Sustituyendo dicha expresión en la ec. 2.116a que relaciona la intensidad acústica con la amplitud de una onda plana obtenemos

$$I(t) = \frac{\rho_0 c \omega^2 A(t)^2}{2} = \frac{1}{2}\rho_0 c \overline{\omega}^2 [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \Delta\omega\, t)], \tag{3.2}$$

donde $\overline{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$, $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$ y además, A_1, A_2, φ_1, φ_2, ω_1 y ω_2 son las amplitudes, fases y frecuencias angulares correspondientes a cada tono respectivamente. Dado que $\omega = 2\pi\nu$, entonces,

$$\bar{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \tag{3.3}$$

donde ν_1 y ν_2 corresponden a las frecuencias de los tonos puros superpuestos y $\bar{\nu}$ es la frecuencia que psicoacústicamente asociamos a la superposición.

Finalmente, lo que la ec. 3.2 nos dice es que la frecuencia con la que percibimos los batimientos es

$$f_B = |\nu_2 - \nu_1| = \Delta\nu. \tag{3.4}$$

No debe pasar desapercibido que el oído responde a la variación de la intensidad que está asociada a un promedio temporal de la variación de la amplitud de la onda sonora. Esto nos incita a concluir que cuando fijamos la altura de un tono puro, también se promedie la variación de la presión acústica, más que responder directamente a los valores de la amplitud de dicha variable.

3.2. Psicoacústica de tonos complejos.

Hemos visto que, el tono puro corresponde a la percepción de una vibración armónica simple del aire. Dado que un tono complejo se puede ver como una superposición de vibraciones armónicas simples, luego podemos considerar al tono complejo como una superposición de tonos puros.

3.2.1. Armónicos resolubles.

En la Fig. 3.5. se representa la situación en la que un tono complejo sea el resultado de la suma de sólo dos tonos puros de tal manera que inicialmente ambos coinciden en frecuencia, intensidad y fase. Esto da por resultado que se escuche un unísono con el doble de amplitud que la de uno solo de los tonos puros. Si paulatinamente se incrementa la frecuencia de uno de ellos, seguiremos escuchando un tono cada vez más agudo cuya altura corresponde al promedio de ambas frecuencias. La intensidad de dicho tono nos hará percibir batimientos cada vez más rápidos. Dichos batimientos serán nítidos mientras Δf (la diferencia entre frecuencias) no exceda por mucho los 10Hz, pero a partir de que Δf sea mayor que unos 15 Hz, la nitidez de los batimientos desaparecerá y aparecerá en su lugar una aspereza en el sonido percibido. A medida que Δf siga incrementándose, se comenzarán a escuchar dos tonos separados ya que se habrán llegado a estimular dos regiones de la membrana basilar lo suficientemente alejadas entre sí, pero aun así, la aspereza prevalece especialmente para frecuencias bajas. Sólo cuando cierta diferencia de frecuencias ha sido superada se percibirán los dos tonos de forma separada y además la aspereza habrá desaparecido; a dicha diferencia de frecuencias se le conoce como *banda crítica* o *CB* (del inglés "Critical Band") denotada por Δf_{CB}.

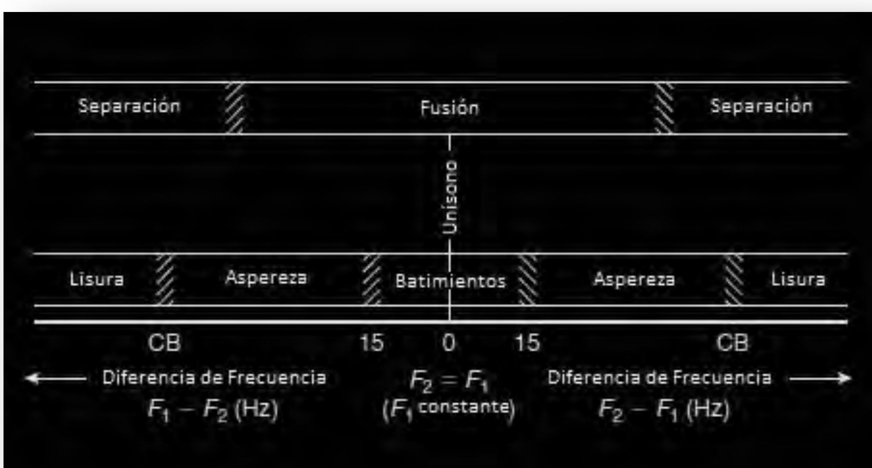


Fig. 3.5. Ilustración de los cambios de percepción cuando se escucha un tono puro de frecuencia fija F_1 combinado con otro de frecuencia variable F_2.

La manera de estudiar la selectividad de frecuencias es midiendo la banda de frecuencia que debe existir entre dos tonos puros para que puedan ser resueltos, es decir, que se puedan escuchar separadamente. Esta banda se conoce *ancho de banda rectangular equivalente* denotado ERB (del inglés "Equivalent Rectangular Bandwidth"). Esta banda corresponde aproximadamente a la CB y puede ser calculada mediante la siguiente expresión:

$$ERB = 24.7(4.37f_c + 1) \tag{3.5}$$

donde f_c es la frecuencia central de la banda expresada en kHz. La ec. anterior es válida entre 100 y 10000 Hz.

Se ha encontrado que la banda de selectividad de frecuencias de un tono complejo de más de dos parciales es $1.25 \cdot ERB$, lo que quiere decir que es aun más difícil resolver parciales en un tono complejo que resolver dos tonos puros superpuestos (*ver p. 76 de [15], p. 19 de [16] y [19]*).

La cantidad de armónicos resolubles en un tono complejo depende de ancho de la banda crítica; de tal suerte que los armónicos cuya separación en frecuencia sea menor que ERB no pueden ser resueltos. Esto impone un límite al número de armónicos que pueden ser discriminados al escuchar cualquier tono complejo.

Aproximadamente el oído promedio es capaz de resolver alrededor de ocho armónicos, aunque a bajas frecuencias este número tiende a disminuir ya que se torna más ineficiente el filtrado de frecuencias (*ver [20]*).

3.2.2. La fundamental omitida y la altura virtual de los tonos complejos.

Una de las propiedades más notables del sistema auditivo es la cualidad de percibir una sensación de altura al escuchar un tono complejo. Cuando las componentes de un tono complejo están relacionadas armónicamente entre sí, la altura que asociamos a dicho sonido corresponde a la altura de la frecuencia fundamental; aun cuando la componente de la misma no esté presente en las parciales. Debido a ello, la altura asociada al tono complejo es llamada *altura virtual*, pero también recibe otros nombres de acuerdo a su naturaleza y contexto como son: *altura de la fundamental omitida*, *altura residual* o *residuo*, *altura periódica* o finalmente *altura musical* (*ver p. 19 de [16]*).

3.2.3. Discriminación de la altura en tonos complejos.

Cuando el ritmo de repetición de la forma de onda de un tono complejo varía, todas sus componentes cambian de frecuencia en la misma proporción; entonces se perciben cambios en la altura virtual que están íntimamente relacionados con dicha proporción. Sin embargo, la habilidad para detectar estos cambios es mucho mayor en los tonos complejos que en los tonos puros, e incluso, que la habilidad para detectar cambios de cualquier componente específica y resoluble del tono complejo. Esto es un indicio del papel que desempeña la presencia de armónicos en la percepción de la altura virtual. Esta información, que es brindada por los mismos, se traduce en que la discriminación de la altura de tonos complejos sea tan precisa, que puedan discriminarse cambios en el período de la onda de hasta un 0.2% para una frecuencia fundamental en el intervalo de 100-400Hz (*ver p. 22 de [16]*).

3.2.4. Teorías de percepción de tonos complejos.

También se han propuesto varias teorías sobre la percepción de la altura virtual de tonos complejos. Las *teorías espectrales* nos dicen que el fenómeno consta de dos etapas. En la primera, se sintetizan y determinan las frecuencias de los tonos puros que componen al tono complejo. La segunda etapa consiste en ajustar la serie armónica que mejor encaje con los armónicos que se han resuelto en la etapa anterior, de tal manera que la frecuencia fundamental de esta serie, es finalmente la que corresponde a la altura virtual percibida. Estas teorías fallan en la percepción, tanto de sonidos cuya frecuencia fundamental se encuentra por debajo de 50 Hz, como de sonidos cuyas componentes en frecuencia no pueden ser resueltos por las regiones de la membrana basilar. Además, tampoco explican la gran precisión con la que la altura es percibida por el oído humano.

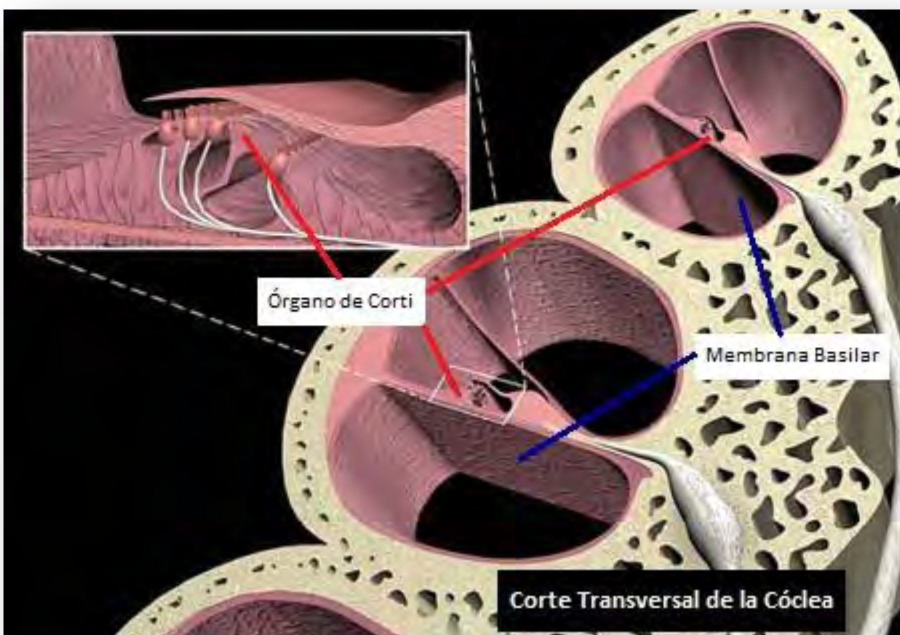


Fig. 3.6. Imagen del órgano de Corti y membrana basilar en un corte transversal de la cóclea.

Las *teorías temporales*, por otro lado, proponen que la estimación de la altura virtual está dada por la estimulación de diferentes puntos de la membrana basilar debida al patrón temporal de la forma de onda. Este punto de la membrana responde a los armónicos más altos que son incluso irresolubles. Se considera que la altura está relacionada con la periodicidad con que se perciben los puntos máximos de la envolvente del tono complejo y que estos máximos producen impulsos nerviosos en el *órgano de Corti* (ver Fig. 3.6.). Estos impulsos constituyen un patrón temporal que determina la altura virtual. Este modelo explica la percepción de la altura a frecuencias fundamentales bajas, pero cuando éstas exceden los 5 kHz, la teoría falla debido a que los patrones temporales son más cortos que el tiempo de respuesta del órgano de Corti.

Existen teorías que nos dicen que tanto el análisis temporal como el análisis espectral están involucrados en la percepción de la altura de tonos complejos. A dichas teorías se les conoce como *teorías espectro-temporales*. En la siguiente figura se muestra un modelo de Moore (1982) en el que in análisis de los dos tipos es realizado por el cerebro (*ver pp. 121-135 de [15] y p. 22 de [16]*).

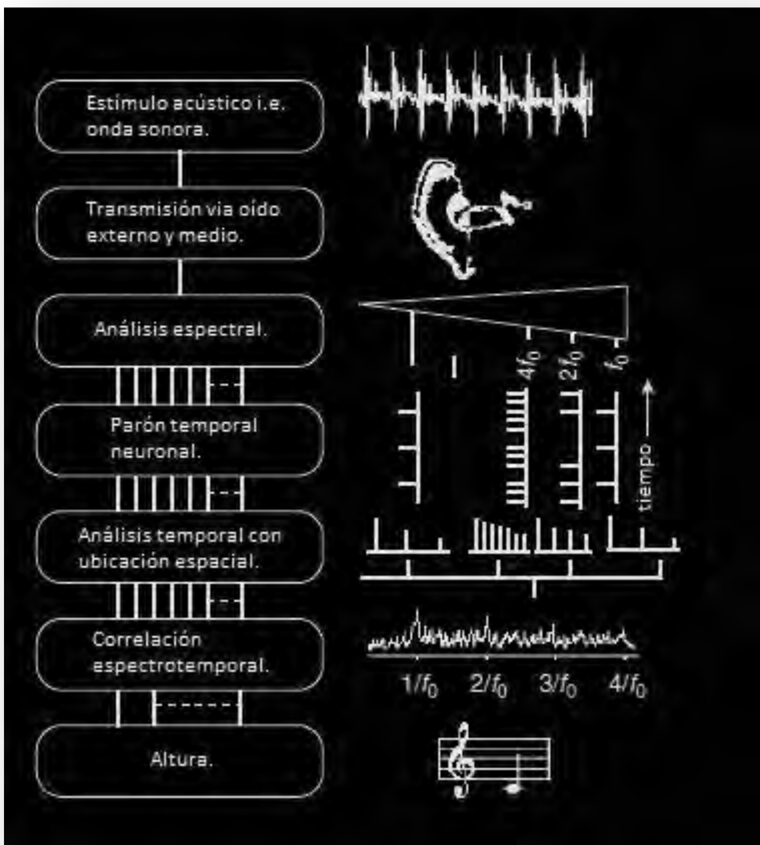


Fig. 3.7. Modelo espectro-temporal de Moore de percepción de la altura de tonos complejos.

3.2.5. Altura de tonos complejos con parciales inarmónicas.

Experimentalmente se ha visto que si se varía en una misma cantidad pequeña la frecuencia de los armónicos de un tono complejo dando origen a parciales levemente inarmónicas, entonces el oído percibe una variación de la altura virtual "buscando" un factor común cercano a las frecuencias de sus componentes. Además, el oído es capaz de distinguir dos tonos complejos superpuestos, lo que implica que el receptor es capaz de discernir cuáles parciales corresponden a la serie armónica de uno de los tonos y cuáles a la serie armónica del otro tono. Este fenómeno se explica mediante el concepto de *coladera armónica* (Goldstein, 1973) el cual establece que una parcial será aceptada como parte de una serie armónica dada, si su valor en frecuencia cae en determinado rango alrededor de la frecuencia de algún armónico de dicha serie.

También experimentalmente se ha reportado que variaciones lineales de inarmonicidades de hasta un ±3% respecto a un armónico, producen variaciones lineales en la percepción de la altura virtual. Mientras que para armónicos desafinados entre un ±3% y un ±6% existen variaciones pequeñas en la altura virtual. Finalmente armónicos desafinados más allá de un ±6% prácticamente no alteran la percepción de la altura virtual. Esta evidencia sugiere que la hipotética "coladera armónica" admite sólo parciales inarmónicas cuyas frecuencias caigan dentro de un ±3% de los valores armónicos de alguna serie dada ((*ver pp. 24-25 de [16] y [21]*).

3.2.6. Principios de dominancia.

La *dominancia* la podemos entender como una medida de la influencia que tiene un armónico o una parcial levemente inarmónica en la determinación de la altura virtual de un tono complejo.

De tal manera que la altura virtual puede ser calculada como un promedio ponderado de las alturas asociadas a las frecuencias de las parciales armónicas o cuasiarmónicas individuales que componen a cualquier tono compuesto. Matemáticamente esto se expresa de la siguiente forma:

$$H = \sum_{i=1}^{n} w_i\, f_i/i \tag{3.6}$$

donde H es el valor de la altura virtual, n es el número de parciales, w_i es la dominancia asociada a la i-ésima componente con frecuencia f_i, además, se satisface la siguiente condición:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{3.7}$$

aunado a ello, cuando la m-ésima parcial se desvía de la frecuencia armónica en una cantidad Δf, la desviación en la altura virtual es

$$\Delta H = w_m \Delta f / m \tag{3.8}$$

La dominancia de un armónico decrece notablemente cuando su nivel de intensidad es reducido por debajo del nivel de los armónicos adyacentes a éste; así mismo, su dominancia aumenta cuando, por el contrario, su nivel está por encima del nivel de sus armónicos adyacentes (*ver pp. 25-26 de [16]*).

Con esto hemos concluido la descripción de los factores psicoacústicos más relevantes en la percepción de la altura de tonos complejos, por lo que en los siguientes capítulos mostraremos cómo la estructura de la teoría musical y de los temperamentos se puede entender como una consecuencia de la serie armónica y estos factores.

Capítulo 4 TEORÍA MUSICAL.

Referencias generales: [1],[2],[3],[4],[5],[14],[22] y [23].

En esta parte, serán expuestos los conceptos musicales que atañen a la afinación y el temperamento, prácticamente tal y como son aceptados por los músicos; aunque quizás vistos desde una óptica un poco diferente. A pesar de que se acostumbra ver el problema de la afinación desde un punto de vista histórico, se hará una construcción lógica de la teoría deducida a partir de la física. Ésta no necesariamente está ligada con la cronología y el orden tradicional en el que suele ser mostrada. Entonces, una vez que hemos visto lo que es la serie armónica y su deducción, es oportuno entender las consecuencias musicales que dicha ley conlleva. Éste es nuestro punto de partida.

Haremos tres suposiciones muy importantes: *La serie armónica se ajusta con toda precisión*; sabemos de antemano que cualquier cuerda real, y, en particular, las cuerdas de los instrumentos musicales, presentan un cierto grado de inarmonicidad. Además, supondremos que *la cuerda vibra como una superposición de todos sus modos*; lo que definitivamente no ocurre con una cuerda real. Finalmente, supondremos que *la intensidad de cualquier modo es mayor que la de cualquier otro con frecuencia más alta.* Esto último no necesariamente se cumple debido esencialmente, al acoplamiento entre los modos de vibración de la cuerda con los modos de vibración de los resonadores del instrumento musical. Lo anterior quiere decir que, en principio, la altura subjetiva que le asignamos a los tonos está relacionada con la frecuencia fundamental de la serie armónica correspondiente a dicho tono. Como se ha mencionado, ninguna cuerda real vibra de esta manera, pero bajo ciertos límites, es una buena aproximación considerarlo de así, ya que el hacerlo, puede simplificar mucho la formulación de la teoría musical.

4.1. Intervalos musicales.

4.1.1. Definiciones.

a) Proporción de Frecuencias.

Una *proporción de frecuencias* o simplemente *proporción* se define, según sea el caso, como la razón entre las frecuencias de un par de tonos puros, de un par de parciales específicas de dos tonos complejos o también la razón entre las frecuencias de un tono puro y una parcial específica de un tono complejo.

En adelante, la proporción de frecuencias se expresa indistintamente de alguna de estas tres maneras: ya sea como $a{:}b$, como el cociente a/b, o simplemente como c. Los valores a y b son quienes definen la razón entre el par de frecuencias; donde a y b son números naturales y $a \geq b$. Por otro lado $c \geq 0$ es un número irracional que representa a la razón entre frecuencias, cuando ésta no se puede expresar como el cociente de dos números naturales.

b) Intervalo musical.

Un *intervalo musical* es la diferencia de altura que guardan dos tonos entre sí. Dado que aceptamos la convención de que un tono consiste, ya sea de un tono puro, o de un tono complejo cuyos armónicos coinciden con los de la serie armónica, su tamaño corresponde una proporción de frecuencias que es asignada de acuerdo a alguno de los siguientes tres criterios según sea el caso:

1) Si el intervalo consta de dos tonos complejos, el tamaño del intervalo está dado por la proporción que guardan entre sí, las frecuencias fundamentales de cada tono.

2) Si el intervalo consta de un tono complejo y un tono puro, el tamaño está dado por la proporción que guarda la frecuencia fundamental del tono complejo con la frecuencia del tono puro.

3) Si el intervalo consta de dos tonos puros, el tamaño del intervalo está dado simplemente por la proporción que guardan las frecuencias de ambos entre sí.

Por lo tanto, mientras más grande sea la proporción de frecuencias, más grande será el intervalo musical, y por ende, más grande será también la diferencia de altura entre los tonos en cuestión. Es fundamental notar que dicha diferencia, más que estar relacionada con la diferencia de frecuencias, lo está con la proporción que éstas guardan entre sí.

Hemos definido el intervalo musical en términos de una propiedad psicoacústica. Sin embargo, a través de los anteriores criterios hemos asignado una manera objetiva y cuantitativa de medir una cualidad matemática de dicho concepto en términos de propiedades estrictamente físicas de los tonos involucrados. Esta manera de medir y calificar el intervalo responde, a su vez, a la naturaleza de nuestra percepción. Por ello, el intervalo musical es quizás el concepto más relevante de este trabajo, ya que éste encierra de una manera casi global el vínculo de la física y la psicoacústica con la música. Esto es sumamente importante porque toda la teoría que construiremos se desprende de dicho concepto, y por ende, la misma estará finalmente conectada con la física de forma directa.

c) Intervalo melódico e intervalo armónico.

En términos de cómo comparamos ambos tonos, definiremos dos tipos de intervalos:

i) *Intervalos melódicos* son aquéllos que resultan de hacer sonar el segundo tono no sin antes haber hecho sonar el primero y haber esperado éste cesara.

ii) *Intervalos armónicos* son aquéllos que resultan de hacer sonar ambos tonos simultáneamente

Es importante hacer la distinción entre intervalos melódicos y armónicos porque la afinación de instrumentos como el clavecín y posteriormente del piano, entre otros, se hace mediante el uso de los segundos. Estos últimos definen la afinación aural, en la que el oído del afinador es el único medio usado para afinar. Esto se logra mediante la regulación de las frecuencias de batimiento entre armónicos coincidentes de los tonos que componen dichos intervalos.

Existen en la teoría de la música otras categorías asociadas a los intervalos, pero para efectos prácticos de este trabajo, unas serán omitidas y otras serán definidas oportunamente.

d) Sucesión de intervalos.

Una *sucesión de intervalos* es el intervalo que resulta de hacer un acomodo consecutivo de intervalos que no necesariamente son iguales.

Matemáticamente, su proporción de frecuencias se calcula obteniendo el producto de las proporciones de frecuencias de cada intervalo que compone dicho acomodo.

Ejemplo:

Supongamos que ponemos en sucesión cuatro intervalos cuyas proporciones de frecuencia estén dadas por $3/2, 4/3, 5/4$ y $8/5$ respectivamente, entonces la proporción de la sucesión de intervalos está dada por

$$^{3}/_{2} \cdot {}^{4}/_{3} \cdot {}^{5}/_{4} \cdot {}^{8}/_{5} = 480/120 = 4/1. \tag{4.1}$$

e) Encadenamiento de un intervalo.

El *encadenamiento de un intervalo* es el intervalo que resulta de hacer una sucesión a partir del acomodo consecutivo de un único intervalo.

Entonces la proporción de frecuencias asociada al encadenamiento, se obtiene elevando la proporción que define al intervalo que se ha acomodado sucesivamente a la potencia que iguala el número de veces que se encadenó.

Ejemplo:

Supongamos que encademos tres veces el intervalo cuya proporción de frecuencias es$5/4$, entonces la proporción del encadenamiento está dado por

$$^{5}/_{4} \cdot {}^{5}/_{4} \cdot {}^{5}/_{4} = \left({}^{5}/_{4}\right)^{3} = 125/64 \tag{4.2}$$

f) Proporción simple.

Una *proporción simple* de frecuencias es aquélla que se puede expresar como el cociente de dos números naturales.

De lo anterior podemos deducir que todas las proporciones que definen intervalos que provengan de la serie armónica, son simples.

g) Proporción superparticular.

Una *proporción superparticular* (del inglés: superparticular ratio) de frecuencias es aquélla que se puede expresar de la forma $n/n+1$; dónde n es un número natural.

Resulta inmediato ver que toda proporción superparticular es a su vez una proporción simple.

h) Intervalo justo.

Un *intervalo justo* es aquel cuya proporción de frecuencias corresponde a una proporción simple.

Propiedad:

Si el intervalo justo consta de dos tonos complejos provenientes de cuerdas ideales que vibren en todos sus posibles modos y la serie armónica se ajusta de forma exacta, entonces existe un conjunto infinito de armónicos coincidentes entre ambas series.

Prueba:

Sean f_0 y f'_0 las frecuencias fundamentales de cada uno de los tonos que componen el intervalo con $f_0' \geq f_0$. Dado que el intervalo es justo, existen $a \geq b$ naturales tales que

$$f'_0 = \frac{a}{b} \cdot f_0. \tag{4.3}$$

Entonces, para $n = 1,2,3, \dots$, se satisface la siguiente igualdad:

$$naf_0 = nb\frac{a}{b} \cdot f_0. \tag{4.4}$$

Si definimos $A_n = na$ y $B_n = nb$, luego para cada valor de n, se satisface que

$$A_n f_0 = B_n \frac{a}{b} \cdot f_0, \tag{4.5}$$

pero por la ec. 4.3 podemos escribir

$$A_n f_0 = B_n \cdot f_0' \tag{4.6}$$

finalmente, como A_n y B_n son números naturales, entonces existen un conjunto infinito de armónicos coincidentes entre la serie armónica del tono grave y la del agudo. Además, fácilmente podemos deducir a partir de (4.4), que cada a-ésimo armónico del tono más grave es igual cada b-ésimo armónico del más agudo.

i) La coma.

Una *coma* es el intervalo que resulta de comparar dos encadenamientos, dos sucesiones, o una sucesión con un encadenamiento, de intervalos justos diferentes. Su proporción está dada por el cociente de la proporción del encadenamiento o sucesión más grande entre la del más pequeño.

Para que esta definición no pierda generalidad, y sin que esto contradiga las definiciones previas, no debemos descartar que un intervalo constituye por sí sólo una sucesión y un encadenamiento de un solo intervalo (*ver p. 417 de [2]*).

Ejemplos:

1) La coma sintónica es el intervalo que resulta de comparar el encadenamiento de cuatro intervalos de proporción 3/2 con la sucesión del encadenamiento de dos intervalos de proporción 2/1 y un intervalo cuya proporción es 5/4.

Por lo tanto la proporción de frecuencias de la coma sintónica está dada por

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 \div \left(\left(\frac{2}{1}\right)^2 \cdot \frac{5}{4}\right) = \frac{3^4}{2^4 \cdot 5} = \frac{81}{80}. \tag{4.7}$$

Pero también es el intervalo que resulta de comparar un intervalo cuya proporción es 9/8 con otro de proporción 10/9, luego

$$\frac{9}{8} \div \frac{10}{9} = \frac{81}{80}. \tag{4.8}$$

2) La coma pitagórica es el intervalo que resulta de comparar el encadenamiento de doce intervalos de proporción 3/2, con el de siete de proporción 2/1. Entonces, su proporción es

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \div \left(\frac{2}{1}\right)^7 = \frac{3^{12}}{2^{19}}. \tag{4.9}$$

j) Límite primo de un intervalo justo.

El límite primo de un intervalo justo es el número primo más grande que resulte tanto de la descomposición en factores primos del numerador como del denominador de la proporción simple del mismo. Además, el límite primo de un intervalo justo está contenido en cualquier límite superior a éste.

Ejemplo:

El intervalo entre el 9º y el 8º armónico tiene proporción ${}^{9}/_{8} = {}^{3^2}/_{2^3}$, por lo tanto su límite primo es 3 ya que éste es el número más grande de la descomposición de la proporción en sus factores primos.

El límite primo de la coma sintónica es 5 dado que su proporción es ${}^{81}/_{80} = {}^{3^4}/_{2^4 \cdot 5}$ y precisasmente 5 es el número primo más grande.

Finalmente, el límite del primer intervalo está contenido en el límite del segundo dado que $3 < 5$. Por lo tanto el primer intervalo es también de límite 5 , pero el segundo no es de límite 3.

k) Intervalo superparticular.

Un *intervalo superparticular* es aquél cuya proporción de frecuencias corresponde a una proporción superparticular.

De aquí se deduce que todo intervalo superparticular es a su vez justo.

l) Definición matemática de inversión de un intervalo.

Un intervalo es *inversión* de otro si y solo si el producto de las proporciones de frecuencias de ambos intervalos es igual a 2, bajo la condición de que la proporción que define al intervalo a invertir no sea mayor que 2.

Propiedad:

La inversión de un intervalo justo es otro intervalo justo.

Prueba:

Dado que el intervalo a invertir es justo, entonces su proporción la podemos expresar como una fracción de la forma $a/b \ con \ a \ y \, b$ números naturales. Entonces podemos plantear la siguiente expresión en base a la definición de inversión:

$$\frac{a}{b} \cdot x = 2 \Rightarrow x = \frac{2b}{a} \tag{4.10}$$

si hacemos $2b = c$, es evidente que c es natural, entonces podemos escribir la inversión del intervalo justo como $\frac{c}{a}$ y por lo tanto es también un intervalo justo.

De lo anterior también podemos notar que si tenemos un intervalo justo representado por la proporción m/n, la inversión de dicho intervalo se puede ver de alguna de las dos siguientes formas únicamente:

$$\frac{2n}{m} \text{ si } m \text{ es impar, ó } \frac{n}{m/2} \text{ si } m \text{ es par, ya que } \frac{a}{b} \cdot \frac{2b}{a} = 2. \tag{4.11}$$

m) Intervalos justos definidos a partir de la serie armónica.

En la antigüedad, diversas culturas, tanto de oriente como también de occidente, hicieron música a partir de una estructura inhomogénea llamada *escala pentatónica*. Ésta consiste de los sonidos que se originaron a partir de una específica división en 5 partes -de diversos tamaños- del intervalo que surge del segundo armónico y la frecuencia fundamental de la serie armónica. Sin embargo, a partir de que la cuerda fue estudiada por los griegos por medio del monocordio, surgió otra estructura inhomogénea de 7 sonidos denominada *escala diatónica*; esta última, consecuencia de la bipartición de dos de los cinco intervalos de la escala pentatónica. La escala diatónica ha desempeñado un papel importantísimo a lo largo de la historia, tanto así que la nomenclatura de los intervalos que definiremos a continuación se debe a ella. (Más adelante se mostrará el sentido de dicha nomenclatura, pero por ahora no debe extrañarnos que ésta evoque una división en siete partes). Sin embargo, la música occidental no se estancó con el uso de escalas de siete sonidos, sino que desde el siglo VI A.C. hasta la Baja Edad Media, evolucionó hacia una tercera estructura que consta de 12 sonidos llamada *escala cromática*. Aun así, incluso ella está ligada a la escala diatónica una vez que los sonidos adicionales surgen de alterar cinco de los siete intervalos de dicha escala. Estas *alteraciones cromáticas* son el resultado de superponer una escala pentatónica a la diatónica, que origina la bipartición de 5 de los 7 intervalos generando así los sonidos adicionales. Además desde hace por lo menos siete siglos, esta división es la que proveyó su particular estructura al teclado "convencional". La consecuencia última es un problema de afinación que surge de pretender construir escalas diatónicas con una afinación aceptable a partir de cualquier tono de la cromática.

Con la finalidad de desglosar detalladamente lo anterior y entender las consecuencias musicales que dicho proceso conllevó, comenzaremos por construir estas escalas. Para ello, en la siguiente tabla definiremos los intervalos musicales que les brindan sus respectivas estructuras en términos de pares de armónicos de una cuerda vibrante. Cada par toma el papel de un par de tonos puros, cuya diferencia de altura define el intervalo correspondiente a dicho par.

En la literatura hay más de cincuenta intervalos justos que son nombrados incluso de diversas maneras. Muchos de ellos definen la afinación de escalas, mientras que otros son, más bien consecuencia de la afinación de las mismas. Sin embargo, por simplicidad, será definido el menor número posible de intervalos justos necesarios para exponer de la forma más clara y profunda el origen del problema de afinación que originó el surgimiento de los temperamentos. Dichos intervalos serán acomodados en orden descendente según su tamaño y clasificados en grupos de acuerdo a su límite primo. Formaremos cuatro grupos correspondientes a los números primos menores que 11, es decir, no serán definidos intervalos justos que tengan un límite mayor que 7.

Armónicos de procedencia del intervalo	Nombre del intervalo y de su inversión	Factores de la proporción de frecuencias	Límite primo	Super-particular
2º y 1º 1º y 1º	*Octava Justa* *Primera Justa*	2:1 1:1	2 2	Si No
243º y 128º 256º y 243º	*Séptima Mayor Pitagórica* *Segunda Menor Pitagórica*[1]	$3^5 : 2^7$ $2^8 : 3^5$	3 3	No No
16º y 9º 9º y 8º	*Séptima Menor Pitagórica* *Segunda Mayor Pitagórica*[1]	$2^4 : 3^2$ $3^2 : 2^3$	3 3	No Si
27º y 16º 32º y 27º	*Sexta Mayor Pitagórica* *Tercera Menor Pitagórica*	$3^3 : 2^4$ $2^5 : 3^3$	3 3	No No
128º y 81º 81º y 64º	*Sexta Menor Pitagórica* *Tercera Mayor Pitagórica*	$2^7 : 3^4$ $3^4 : 2^6$	3 3	No No
3º y 2º 4º y 3º	*Quinta Pitagórica*[1] *Cuarta Pitagórica*[1]	$3 : 2$ $2^2 : 3$	3 3	Si Si
729º y 512º 10240º y 729º	*Quinta Disminuida Pitagórica*[1] *Cuarta Aumentada Pitagórica*[1]	$3^6 : 2^9$ $2^{10} : 3^6$	3 3	No No
531441º y 524288º	*Coma Pitagórica*	$3^{12} : 2^{19}$	3	No
15º y 8º 16º y 15º	*Séptima Mayor Justa* *Segunda Menor Justa*[1]	$3{\cdot}5 : 2^3$ $2^4 : 3{\cdot}5$	5 5	No Si
9º y 5º 10º y 9º	*Séptima Menor Justa* *Segunda Mayor Justa*[1]	$3^2 : 5$ $2{\cdot}5 : 3^2$	5 5	No Si
5º y 3º 6º y 5º	*Sexta Mayor Justa* *Tercera Menor Justa*	$5 : 3$ $2{\cdot}3 : 5$	5 5	Si Si
8º y 5º 5º y 40º	*Sexta Menor Justa* *Tercera Mayor Justa*	$2^3 : 5$ $5 : 2^2$	5 5	No Si
81º y 80º	*Coma Sintónica*	$3^4 : 2^4{\cdot}5$	5	Si
32805º y 32768º	*Schisma*	$3^8{\cdot}5 : 2^{15}$	5	No
7º y 4º 8º y 7º	*Séptima Menor Septimal* *Segunda Mayor Septimal*[1]	$7 : 2^2$ $2^3 : 7$	7 7	No Si
12º y 7º 7º y 6º	*Sexta Mayor Septimal* *Tercera Menor Septimal*[1]	$2^2{\cdot}3 : 7$ $7 : 2{\cdot}3$	7 7	No Si
10º y 7º 7º y 5º	*Quinta Disminuida Septimal*[1] *Cuarta Aumentada Septimal*[1]	$2{\cdot}5 : 7$ $7 : 5$	7 7	No No

Una vez que hemos definido estos intervalos y en particular la octava justa, es importante hacer notar que si se hace una partición arbitraria de ésta en dos intervalos, entonces uno es la inversión del otro y viceversa. Lo anterior es simplemente una consecuencia inmediata la definición de inversión del inciso l).

[1] El nombre de estos intervalos no corresponde que comúnmente les ha ido asignado debido a que la nomenclatura aquí propuesta es más apropiada para simplificar la comprensión de la estructura y origen de la escala diatónica.

Es muy relevante enfatizar que todos los intervalos que hemos definido están asociados a la serie armónica natural proveniente de una cuerda vibrante. Esto queda reflejado en la naturaleza matemática de sus proporciones, es decir, en que dichas proporciones fueron expresadas como un cociente de dos números naturales asociados a dos armónicos de la cuerda. Sin embargo, sólo los intervalos cuyas proporciones provienen de armónicos resolubles pueden ser vinculados auditivamente a los modos de vibración de la cuerda. Por lo tanto, el origen del resto de los intervalos responde a un análisis matemático y físico de la teoría musical, que se fue gestando a lo largo de siglos de evolución. Lo anterior es muy importante porque la teoría musical no se puede entender simplemente como algo basado exclusivamente en la percepción del fenómeno sonoro, sino que además, tiene bases matemáticas y físicas que exceden las capacidades psicoacústicas del oído humano.

En la siguiente tabla se enuncian los nombres más representativos y comunes de algunos de los intervalos definidos previamente.

Nombre del intervalo	**Otras acepciones comunes**
Quinta Disminuida Pitagórica	*Tritono Pitagórico Grande*
Cuarta Aumentada Pitagórica	*Tritono Pitagórico Pequeño*
Segunda Mayor Pitagórica	*Tono Mayor Pitagórico*
Segunda Menor Pitagórica	*Semitono Pitagórico Diatónico o Semitono Limma*
Segunda Mayor Justa	*Tono Menor Justo*
Segunda Menor Justa	*Semitono Diatónico Justo* o *Semitono Mayor*
Séptima Menor Septimal	*Séptima Menor Armónica*
Quinta Disminuida Septimal	*Tritono Grande Septimal*
Cuarta Aumentada Septimal	*Tritono Pequeño Septimal*
Tercera Menor Septimal	*Tercera Menor Pequeña Justa*
Segunda Mayor Septimal	*Tono Máximo*
Quinta Pitagórica	*Quinta Justa Perfecta*, o *Quinta Justa,* o *Quinta Pura*
Cuarta Pitagórica	*Cuarta Justa Perfecta*, o *Cuarta Justa,* o *Cuarta Pura*

4.2. Construcción y definición de escalas pentatónicas, diatónicas y cromáticas.

A estas alturas no hemos mostrado los elementos que explican la nomenclatura asignada a estos intervalos justos ni su origen más allá de la serie armónica. Para exponer dicho origen, será necesario definir el concepto de escala musical y construir a partir de estos intervalos un par de escalas pentatónicas, diatónicas y cromáticas, para luego definirles de manera apropiada.

4.2.1. Definición de escala musical.

Ahora somos capaces de definir la escala musical en términos de la octava justa como sigue:

Una *escala musical* es una sucesión de intervalos en la que el producto de las proporciones de cada intervalo da como resultado 2.

Musicalmente, esto quiere decir simplemente que los intervalos de dicha sucesión son el resultado de una división de la octava justa.

Comenzaremos construyendo dos escalas pentatónicas (de 5 sonidos), dos diatónicas (de 7 sonidos), y dos cromáticas (de 12 sonidos), mismas que clasificaremos en tres grupos según si provienen de intervalos de límite 3, 5 o 7. Partiremos de un tono con frecuencia fundamental f_1, y a partir de éste, construiremos cada escala multiplicando dicha frecuencia por la proporción que corresponda al intervalo que definirá la altura de cada tono que constituya la escala respectiva. Finalmente los diferentes tipos de escala serán propiamente definidos de acuerdo a su estructura a partir de una comparación de cada par.

4.2.2. Escalas de límite 3 o de afinación justa pitagórica.

Escala Pentatónica Pitagórica.

Multipliquemos f_1 por $\frac{1}{1}, \frac{9}{8}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{27}{16}$ y finalmente por $\frac{2}{1}$.

Escala Diatónica Pitagórica o Escala Diatónica de Eratóstenes (230 A.C.).

Multipliquemos f_1 por $\frac{1}{1}, \frac{9}{8}, \frac{81}{64}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{27}{16}, \frac{243}{128}$ y finalmente por $\frac{2}{1}$.

Escala Cromática Pitagórica (antes del siglo XVI).

Multipliquemos f_1 por $\frac{1}{1}, \frac{256}{243}, \frac{9}{8}, \frac{32}{27}, \frac{81}{64}, \frac{4}{3}, \frac{729}{512}, \frac{3}{2}, \frac{128}{81}, \frac{27}{16}, \frac{16}{9}, \frac{243}{128}$ y finalmente por $\frac{2}{1}$.

4.2.3. Escalas de límite 5 o de afinación justa.

Escala Pentatónica Justa.

Multipliquemos f_1 por $\frac{1}{1}, \frac{10}{9}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ y finalmente por $\frac{2}{1}$.

Escala Diatónica Justa o Sintonón Diatónico de Ptolomeo (140 D.C.) con los dos primeros tonos intercambiados (*ver p. 20 de [3]*).

Multipliquemos f_1 por $\frac{1}{1}, \frac{10}{9}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}$ y finalmente por $\frac{2}{1}$.

4.2.4. Escalas de límite 7 o de afinación septimal.

Escala Cromática Justa.

Multipliquemos f_1 por $\frac{1}{1}, \frac{16}{15}, \frac{10}{9}, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{9}{5}, \frac{15}{8}$ y finalmente por $\frac{2}{1}$.

Hemos construido seis escalas evidentemente diferentes que, sin embargo, por pares tienen algunas características en común. Debido a ello, la estructura de dichos pares será analizada con la finalidad proveer una definición adecuada de escala pentatónica, escala diatónica y escala cromática.

4.2.5. Comparación entre los diversos tipos de escalas.

- **Comparación entre ambas escalas pentatónicas.**

Proporción	Escala Pentatónica Pitagórica	Proporción	Escala Pentatónica Justa
$1/1$	Primera Justa	$1/1$	Primera Justa
$9/8$	Segunda Mayor Pitagórica	$10/9$	Segunda Mayor Justa
$4/3$	Cuarta Pitagórico	$4/3$	Cuarta Pitagórica
$3/2$	Quinta Pitagórica	$3/2$	Quinta Pitagórica
$27/16$	Sexta Mayor Pitagórica	$5/3$	Sexta Mayor Justa
$2/1$	Octava Justa	$2/1$	Octava Justa

Lo primero que debemos de notar es que ambas escalas han sido denotadas como escalas pentatónicas, aun cuando sus afinaciones son evidentemente distintas. Es por ello que no podemos definir la escala pentatónica en términos de alguna sola de las dos. Sin embargo, las similitudes entre ambas, si nos permitirán definirlas apropiadamente.

Para cada escala, queda definida la altura de 6 tonos que constituyen los siguientes 5 intervalos con respecto a nuestro tono de partida de frecuencia fundamental f_1, aparte de la primera justa formada por este último consigo mismo. Lo primero que haremos será probar que ambas cumplen con la definición de escala musical. Para ello, encontraremos los 5 intervalos en sucesión propios de cada escala y posteriormente obtendremos el producto de las proporciones correspondientes a cada uno de ellos.

Escala Pentatónica Pitagórica.

Los intervalos sucesivos son:

$$i)\frac{9/8}{1/1}=\frac{9}{8}, ii)\frac{4/3}{9/8}=\frac{32}{27}, iii)\frac{3/2}{4/3}=\frac{9}{8}, iv)\frac{27/16}{3/2}=\frac{9}{8}, v)\frac{2/1}{27/16}=\frac{32}{27}$$

Ahora multiplicando las proporciones de los intervalos de la sucesión obtenemos:

$$\frac{9}{8}\cdot\frac{32}{27}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{32}{27}=\frac{2^{10}\cdot 3^{6}}{2^{9}\cdot 3^{6}}=2, \tag{4.12}$$

luego la escala está bien construida.

Escala Pentatónica Justa.

Los intervalos sucesivos son:

$$i)\,\frac{10/9}{1/1}=\frac{10}{9},\, ii)\,\frac{4/3}{10/9}=\frac{6}{5},\, iii)\,\frac{3/2}{4/3}=\frac{9}{8},\, iv)\,\frac{5/3}{3/2}=\frac{10}{9},\, v)\,\frac{2/1}{5/3}=\frac{6}{5}$$

Ahora multiplicando las proporciones de los intervalos de la sucesión obtenemos:

$$\frac{10}{9}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{6}{5}=\frac{2^{4}\cdot 3^{4}\cdot 5^{2}}{2^{3}\cdot 3^{4}\cdot 5^{2}}=2, \tag{4.13}$$

luego la escala está bien construida.

Notemos que ambas escalas están constituidas por tonos cuyas alturas quedan definidas a partir de los siguientes intervalos a partir de f_1:

Primera Justa, Segunda Mayor (Justa o Pitagórica), Cuarta Pitagórica, Quinta Pitagórica, y Sexta Mayor (Justa o Pitagórica).

Estos intervalos sientan las bases para poder definir la escala pentatónica en términos de una estructura independiente del valor numérico de las proporciones que distinguen unas escalas pentatónicas de otras, pero para ello primero definiremos el concepto de *tono*.

- **Comparación entre ambas escalas diatónicas.**

Nuevamente, nótese que ambas escalas han sido denotadas como escalas diatónicas, aun cuando sus afinaciones son evidentemente distintas. Por ello, a partir de la similitud de sus estructuras definiremos de forma consistente esta escala.

Proporción	Escala Diatónica Pitagórica	Proporción	Escala Diatónica Justa
$1/1$	Primera Justa	$1/1$	Primera Justa
$9/8$	Segunda Mayor Pitagórica	$10/9$	Segunda Mayor Justa
$81/64$	Tercera Mayor Pitagórica	$5/4$	Tercera Mayor Justa
$4/3$	Cuarta Pitagórico	$4/3$	Cuarta Pitagórica
$3/2$	Quinta Pitagórica	$3/2$	Quinta Pitagórica
$27/16$	Sexta Mayor Pitagórica	$5/3$	Sexta Mayor Justa
$243/128$	Séptima Mayor Pitagórica	$15/8$	Séptima Mayor Justa
$2/1$	Octava Justa	$2/1$	Octava Justa

Ahora, para cada escala, queda definida la altura de 8 tonos que constituyen los siguientes 7 intervalos con respecto a nuestro tono de partida de frecuencia fundamental f_1, aparte de la primera justa formada por este último consigo mismo. Nuevamente comprobaremos que ambas cumplen con la definición de escala musical procediendo como se hizo antes.

Escala Diatónica Pitagórica.

Los intervalos sucesivos son:

$$i)\,\frac{9/8}{1/1}=\frac{9}{8},\,ii)\,\frac{81/84}{9/8}=\frac{9}{8},\,iii)\,\frac{4/3}{81/64}=\frac{256}{243},\,iv)\,\frac{3/2}{4/3}=\frac{9}{8},\,v)\,\frac{27/16}{3/2}=\frac{9}{8},$$

$$vi)\,\frac{243/128}{27/16}=\frac{9}{8},\,vii)\,\frac{2/1}{243/128}=\frac{256}{243}.$$

Ahora multiplicando las proporciones de los intervalos de la sucesión obtenemos:

$$\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{256}{243}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{256}{243}=\frac{2^{16}\cdot 3^{10}}{2^{15}\cdot 3^{10}}=2, \tag{4.14}$$

luego la escala está bien construida.

Escala Diatónica Justa.

Los intervalos sucesivos son:

$$i)\,\frac{10/9}{1/1}=\frac{10}{9},\,ii)\,\frac{5/4}{10/9}=\frac{9}{8},\,iii)\,\frac{4/3}{5/4}=\frac{16}{15},\,iv)\,\frac{3/2}{4/3}=\frac{9}{8},\,v)\,\frac{5/3}{3/2}=\frac{10}{9},$$

$$vi)\ \frac{15/8}{5/3}=\frac{9}{8}, vii)\ \frac{2/1}{15/8}=\frac{16}{15}.$$

Ahora multiplicando las proporciones de los intervalos de la sucesión obtenemos:

$$\frac{10}{9}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{15}=\frac{2^{10}\cdot 3^{6}\cdot 5^{2}}{2^{9}\cdot 3^{6}\cdot 5^{2}}=2, \tag{4.15}$$

luego la escala está bien construida.

Nótese que ambas escalas están constituidas por tonos cuyas alturas quedan definidas a partir de los siguientes intervalos a partir de f_1:

Primera Justa, Segunda Mayor (Justa o Pitagórica), Tercera Mayor (Justa o Pitagórica), Cuarta Pitagórica, Quinta Pitagórica, Sexta Mayor (Justa o Pitagórica) y Séptima Mayor (Justa o Pitagórica).

Análogamente a lo hecho anteriormente, estos intervalos vuelven a sentar las bases para poder definir la escala diatónica en términos de una estructura independiente del valor numérico de las proporciones que distinguen unas escalas diatónicas de otras, pero para ello necesitamos definir primero el *semitono diatónico*.

- **Comparación entre ambas escalas cromáticas.**

Proporción	Escala Cromática Pitagórica	Proporción	Escala Cromática Justa
$1/1$	Primera Justa	$1/1$	Primera Justa
$256/243$	Segunda Menor Pitagórica	$16/15$	Segunda Menor Justa
$9/8$	Segunda Mayor Pitagórica	$10/9$	Segunda Mayor Justa
$32/27$	Tercera Menor Pitagórica	$6/5$	Tercera Menor Justa
$81/64$	Tercera Mayor Pitagórica	$5/4$	Tercera Mayor Justa
$4/3$	Cuarta Pitagórica	$4/3$	Cuarta Pitagórica
$729/512$	Quinta Disminuida Pitagórica	$7/5$	Cuarta Aumentada Septimal
$3/2$	Quinta Pitagórica	$3/2$	Quinta Pitagórica
$128/81$	Sexta Menor Pitagórica	$8/5$	Sexta Menor Justa
$27/16$	Sexta Mayor Pitagórica	$5/3$	Sexta Mayor Justa
$16/9$	Séptima Menor Pitagórica	$9/5$	Séptima Menor Justa
$243/128$	Séptima Mayor Pitagórica	$15/8$	Séptima Mayor Justa
$2/1$	Octava Justa	$2/1$	Octava Justa

Por última vez y de forma análoga a lo que hemos repetido con anterioridad, esta escala será definida a partir de las similitudes en la estructura de las dos anteriores.

En esta ocasión, para cada escala cromática, queda definida la altura de 13 tonos (sonidos) que constituyen los siguientes 12 intervalos con respecto a nuestro tono de partida de frecuencia fundamental f_1, aparte de la primera justa formada por este último consigo mismo. Finalmente volveremos a comprobar ambas satisfacen nuestra definición de escala.

Escala Cromática Pitagórica.

Los intervalos sucesivos son:

$$i)\frac{256/243}{1/1}=\frac{256}{243}, ii)\frac{9/8}{256/243}=\frac{2187}{2048}, iii)\frac{32/27}{9/8}=\frac{256}{243}, iv)\frac{81/64}{32/27}=\frac{2187}{2048},$$

$$v)\frac{4/3}{81/64}=\frac{256}{243}, vi)\frac{729/512}{4/3}=\frac{2187}{2048}, vii)\frac{3/2}{729/512}=\frac{256}{243}, viii)\frac{128/81}{3/2}=\frac{256}{243},$$

$$ix)\frac{27/16}{128/81}=\frac{2181}{2048}, x)\frac{16/9}{27/16}=\frac{256}{243}, xi)\frac{243/128}{16/9}=\frac{2187}{2048}, xii)\frac{2/1}{243/128}=\frac{256}{243}.$$

Ahora multiplicando las proporciones de los intervalos de la sucesión obtenemos:

$$\frac{256}{243}\cdot\frac{2187}{2048}\cdot\frac{256}{243}\cdot\frac{2187}{2048}\cdot\frac{256}{243}\cdot\frac{2187}{2048}\cdot\frac{256}{243}\cdot\frac{256}{243}\cdot\frac{2187}{2048}\cdot\frac{256}{243}\cdot\frac{2187}{2048}\cdot\frac{256}{243}=$$

$$=\frac{2^{56}\cdot 3^{35}}{2^{55}\cdot 3^{35}}=2, \tag{4.16}$$

luego la escala está bien construida.

Escala Diatónica Justa.

Los intervalos sucesivos son:

$$\frac{16/15}{1/1}=\frac{16}{15}, ii)\frac{10/9}{16/15}=\frac{25}{24}, iii)\frac{6/5}{10/9}=\frac{27}{25}, iv)\frac{5/4}{6/5}=\frac{25}{24},$$

$$v)\frac{4/3}{5/4}=\frac{16}{15},vi)\frac{7/5}{4/3}=\frac{21}{20},vii)\frac{3/2}{7/5}=\frac{15}{14},viii)\frac{8/5}{3/2}=\frac{16}{15},$$

$$ix)\frac{5/3}{8/5}=\frac{25}{24},x)\frac{9/5}{5/3}=\frac{27}{25},xi)\frac{15/8}{9/5}=\frac{25}{24},xii)\frac{2/1}{15/8}=\frac{16}{15}$$

Ahora multiplicando las proporciones de los intervalos de la sucesión obtenemos:

$$\frac{16}{15}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{27}{25}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{21}{20}\cdot\frac{15}{14}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{27}{25}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{16}{15}=\frac{2^{16}\cdot 3^{8}\cdot 5^{9}}{2^{15}\cdot 3^{8}\cdot 5^{9}}=2, \tag{4.17}$$

luego la escala está bien construida.

Nótese nuevamente que ambas escalas están constituidas por tonos cuyas alturas quedan definidas a partir de los siguientes intervalos a partir de f_1:

Primera (Justa), Segunda Menor (Justa o Pitagórica), Segunda Mayor (Justa o Pitagórica), Tercera Menor (Justa o Pitagórica), Tercera Mayor (Justa o Pitagórica), Cuarta Justa (Pitagórica), Cuarta Aumentada Septimal o Quinta Disminuida Pitagórica, Quinta Justa (Pitagórica), Sexta Menor (Justa o Pitagórica), Sexta Mayor (Justa o Pitagórica), Séptima Menor (Justa o Pitagórica) y Séptima Mayor (Justa o Pitagórica).

Estos intervalos sientan las bases para poder definir la escala cromática en términos de una estructura independiente del valor numérico de las proporciones que distinguen unas escalas cromáticas de otras, pero para ello necesitamos definir el semitono cromático.

- **Definición de semitono cromático, semitono diatónico y tono.**

Un *semitono cromático* es el intervalo entre cualquier segunda mayor y segunda menor, tercera mayor y tercera menor, cuarta aumentada y cuarta justa, quinta justa y quinta disminuida, sexta mayor y sexta menor, séptima mayor y séptima menor.

Un *semitono diatónico* es el intervalo entre cualquier segunda menor y primera justa, cuarta justa y tercera mayor, quinta justa y cuarta aumentada, sexta menor y quinta justa, séptima menor y sexta mayor, octava justa y séptima mayor.

Un *Tono*[2] es el intervalo que resulta de la sucesión de cualesquiera dos semitonos.

---

[2] Desafortunadamente en la música existen algunos conceptos que comparten la misma nomenclatura, y el tono es uno de ellos, por lo que no debemos confundir esta definición de tono con el concepto de tono como la cualidad del sonido previamente definida.

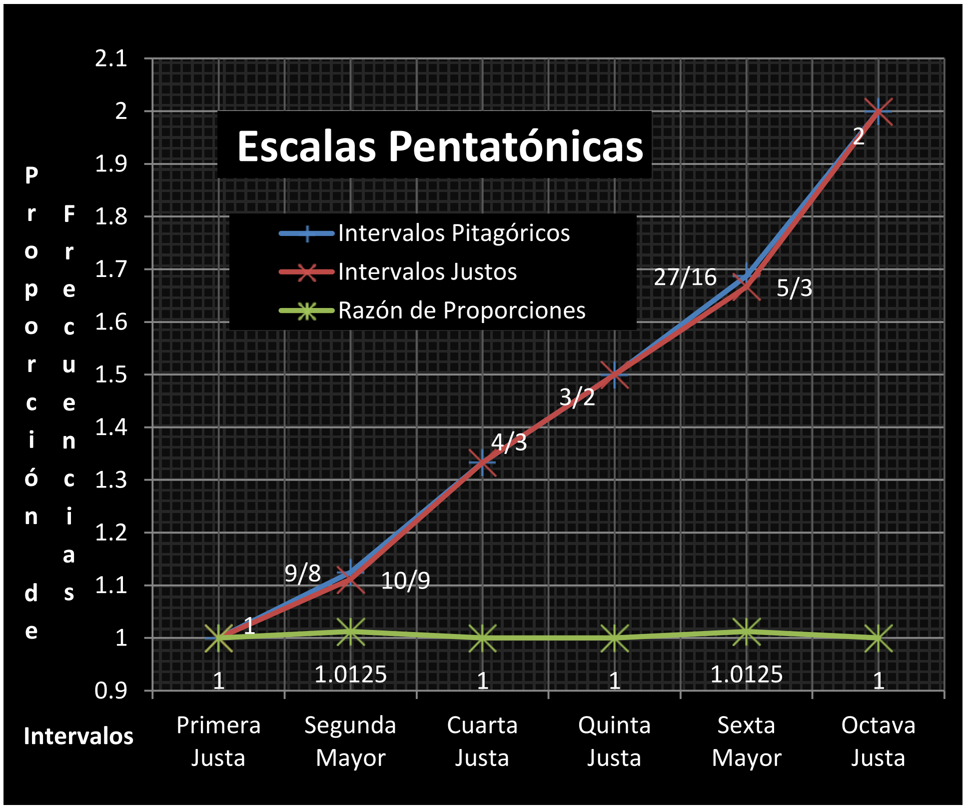


Fig. 4.1. Comparación entre la escala pentatónica pitagórica y la justa.

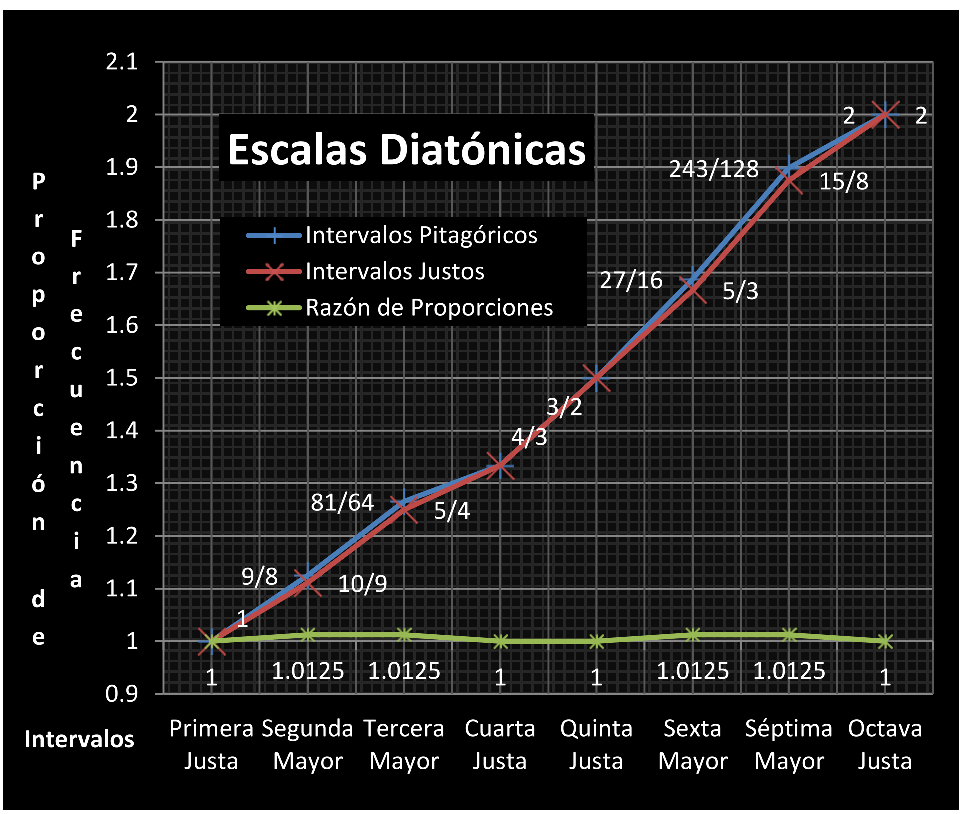


Fig. 4.2. Comparación entre la escala diatónica pitagórica y la justa.

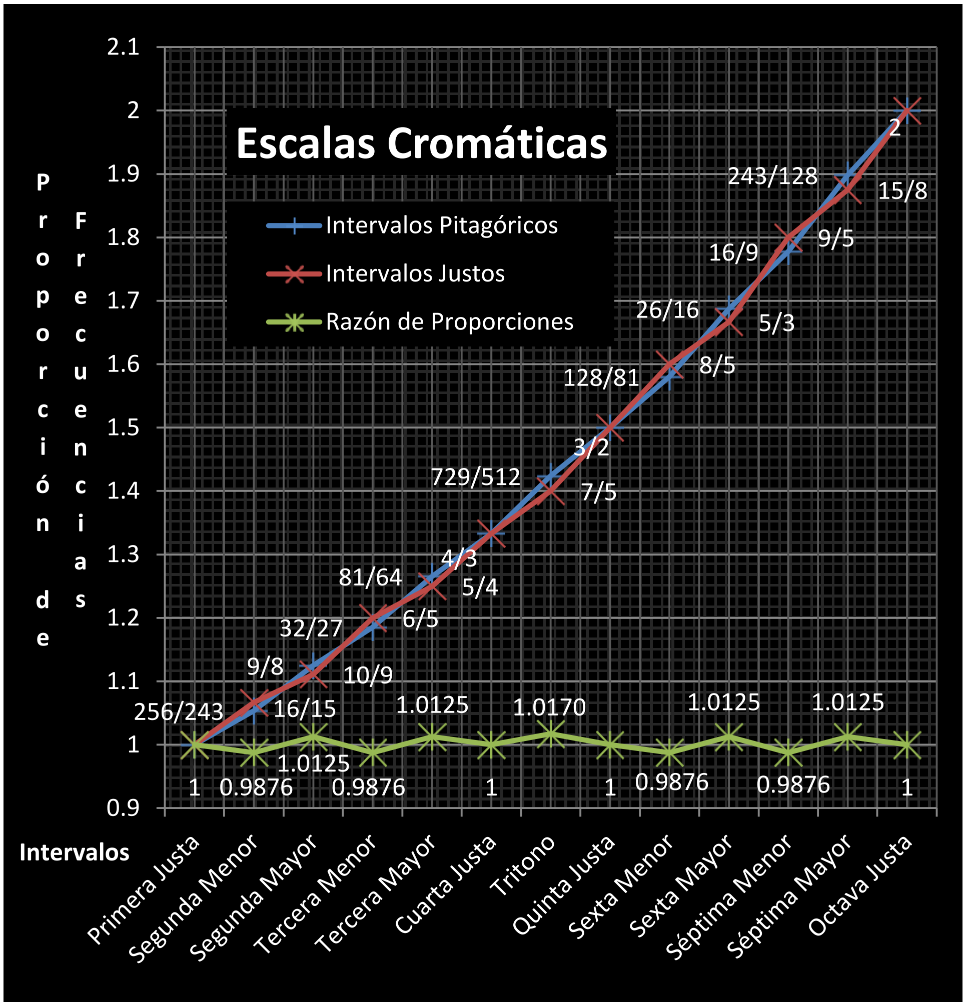


Fig. 4.3. Comparación entre la escala cromática pitagórica y la justa.

En las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 se muestra una representación gráfica de cada escala que hemos construido. En ellas podemos observar claramente que cada tipo de escala justa y pitagórica produce tonos coincidentes o muy cercanos que pueden asociarse a una misma estructura (visiblemente inhomogénea en el caso de las pentatónicas y las diatónicas). Los intervalos que hemos definido como justos coinciden en proporción sin importar si provienen de una escala justa o pitagórica. Sin embargo, las diferencias de altura propias de los intervalos mayores y menores, aunque puedan aparentar ser pequeñas, no son despreciables. Además, como en los siguientes capítulos se mostrará, dichas diferencias representan los límites dentro de los cuales estos intervalos pueden variar al construir cualquier otra escala diatónica o cromática. Lo más importante de estas comparaciones es que cada tipo de escalas puede ser definido a partir de la estructura afín e ellas en términos de tonos, semitonos cromáticos y semitonos diatónicos.

- **Definición estructural de escala pentatónica.**

Una *Escala Pentatónica* es aquella cuya división de la octava es de la siguiente forma:

Tono-Tercera Menor-Tono-Tono-Tercera Menor

bajo la condición de que dicha sucesión de intervalos satisfaga la definición de escala musical.

De aquí podemos deducir que un semitono diatónico en sucesión con un tono equivale a una tercera menor.

- **Definición estructural de escala diatónica.**

Una *escala diatónica* es aquella cuya división de la octava tiene la siguiente estructura:

Tono-Tono-Semitono Diatónico-Tono-Tono-Tono-Semitono Diatónico

bajo la condición de que la sucesión de tonos y semitonos diatónicos cumpla con la definición de escala musical.

También de la definición de escala diatónica y de la correlación entre los intervalos de las escalas que construimos podemos deducir lo que sigue: Existe un tono entre cualquier segunda mayor y la primera justa, cualquier tercera mayor y cualquier segunda mayor, cualquier quinta justa[3] y cualquier cuarta justa[3], cualquier sexta mayor y cualquier quinta pitagórica y finalmente entre cualquier séptima mayor y cualquier sexta mayor.

Finalmente, definiremos en particular como *tono mayor* la segunda mayor pitagórica cuya proporción de frecuencias es 9/8 y definiremos como *tono menor* a la segunda mayor justa cuya proporción de frecuencias es 10/9.

- **Definición estructural de escala cromática.**

Para definir la escala cromática denotaré tanto al semitono diatónico como al semitono cromático por medio de sus iniciales, es decir, S.D. y S.C. respectivamente; así será más sencillo apreciar la estructura de escala.

Una *escala cromática* la sucesión de intervalos que divide la octava justa en 12 semitonos de tal manera que en ella no aparezcan ligados ni dos semitonos cromáticos ni más de dos semitonos diatónicos.

De tal manera que las escalas cromáticas que hemos construido tienen la siguiente estructura:

[3] Ha llegado a existir una inconsistencia entre afinadores y músicos. En muchas ocasiones, los segundos aceptan como justas cuartas y quintas que los afinadores rechazan como tal. Más adelante, en este trabajo se propondrá un criterio que evite dicho malentendido manteniendo la acepción del músico sin ésta que atente contra la del afinador.

S.D.-S.C.-S.D.-S.C.-S.D.-**S.D**.-**S.C**.-S.D.-S.C.-S.D.-S.C.-S.D.

S.D.-S.C.-S.D.-S.C.-S.D.-**S.C**.-**S.D**.-S.D.-S.C.-S.D.-S.C.-S.D.

pero de forma equivalente podrían tener ésta entre muchas otras una vez que hayamos profundizado más en la teoría musical.

S.C.-S.D.-S.D.-S.C.-S.D.-S.C.-S.D.-S.C.-S.D.-S.D.-S.C.-S.D.

- **Definición de diesis enarmónica y enarmonía.**

Una vez que hemos definido el tono, y dado que este se divide en un semitono diatónico y un semitono cromático, hemos así mismo, consolidado los ladrillos a partir de los cuales la música es construida, ya que cada intervalo que se utilice para componer una melodía se puede descomponer siempre en un número entero de semitonos. Sin embargo, aunque no necesariamente siempre ocurra, suele existir una diferencia en la afinación entre los semitonos cromáticos y los diatónicos. De este hecho se desprenden dos conceptos que a continuación serán definidos.

a) La *diesis enarmónica* es el intervalo que resulta de la diferencia entre un semitono diatónico y un semitono cromático consecutivos.

b) Son una *enarmonía* los dos tonos definidos por la diesis enarmónica.

A partir de construir la escala cromática justa vemos que surgen otros intervalos que no habíamos definido.

Armónicos de procedencia del intervalo	Nombre del intervalo y de su inversión	Factores de la proporción de frecuencias	Límite primo	Super-particular
27º y 25º	*Semitono diatónico mínimo*	$3^3 : 5^2$	5	No
25º y 24º	*Semitono menor*	$5^2 : 2^3 \cdot 3$	5	Si
15º y 14º	*Semitono máximo* septimal	$3 \cdot 5 : 2 \cdot 7$	7	

Finalmente, se ha definido un pequeño conjunto de intervalos justos, sin embargo existen muchos otros intervalos a partir de los cuales se pueden construir escalas diatónicas y cromáticas. Incluso, éstos no necesariamente deben satisfacer la definición de intervalo justo. Aun así, cualquiera de estas escalas musicales siempre procederá de tonos, semitonos diatónicos y semitonos cromáticos.

Hay otros aspectos de las escalas que mostraremos más adelante mediante el uso de la notación musical; ya que ésta facilitará la exposición de nuevos conceptos como el de la tonalidad. Veremos también bajo esta nueva óptica, el hecho de que la escala pentatónica está contenida en la diatónica, así como también, tanto la escala pentatónica como la diatónica, se encuentran contenidas en la cromática.

4.3. La nomenclatura de las notas musicales y el origen musical de las escalas.

Es necesario encaminarnos hacia un lenguaje musical más concreto. Hasta ahora hemos estado hablando de tonos complejos y tonos puros, y hemos construido escalas a partir de ellos. Sin embargo, en la práctica, son las *notas musicales* quienes representan finalmente estos tonos. De manera tal que es precisamente a través de éstas, que podemos representar y simplificar el lenguaje musical.

Las notas musicales fundamentales son *Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si*, ya que, en ese orden, representan la escala diatónica previamente definida. Cada tono que la constituye recibe respectivamente el nombre de la nota correspondiente. Son precisamente estas notas quienes ahora definen a nivel musical la escala diatónica y cualquier otra nota es resultado de alterar cromáticamente alguna de éstas. Son también estas siete notas las que corresponden a las teclas blancas del teclado convencional. Es por eso que mientras los teclados no cambien su morfología, el diatonismo estará presente de alguna manera. En algunos países y en algunos ámbitos, éstas son representadas por letras. De hecho esta nomenclatura es más antigua, sin embargo en países influenciados musicalmente por Italia, como lo es el nuestro, es la primera notación la más común.

La relación entre letras y la nomenclatura italiana de Guido D'Arezzo está correlacionada de la siguiente manera**.**

Letra	Nota
A	La
B	Si
C	Do
D	Re
E	Mi
F	Fa
G	Sol

El resto de las notas musicales son el resultado de alterar cromáticamente alguna de las notas previamente definidas. Su origen consiste precisamente en habilitar el construir otras escalas diatónicas a partir de cualquiera nota. Son precisamente estas alteraciones las que garantizan que la estructura de las diversas escalas diatónicas se conserve. De este hecho surge el concepto de tonalidad que posteriormente veremos.

4.3.1. Definiciones.

a) Alteraciones cromáticas de las notas musicales.

-se lee sostenido- es la alteración cromática que eleva en un semitono cromático la nota que le precede.

b -se lee bemol- es la alteración cromática que disminuye en un semitono cromático la nota que le precede.

bb -se lee doble bemol- es la alteración cromática que disminuye en dos semitonos cromáticos la nota que le precede.
x -se lee doble sostenido- es equivalente a ## y es la alteración cromática que aumenta en dos semitonos cromáticos la nota que le precede.

b) Definición musical de quinta justa.
Quintas justas son todas aquellas quintas cuya proporción de frecuencias es lo suficientemente cercana a la proporción de frecuencias de una quinta pitagórica sin excederla.

La inversión matemática de una quinta justa es una *cuarta justa*.

Más adelante, cuando contemos con los elementos para hacerlo, se determinará la condición que debe satisfacer la proporción para que ambos intervalos puedan ser considerados musicalmente justos.

c) Intervalo descendente.
Un intervalo es *ascendente* cuando la proporción por la que se multiplica es un número mayor que 1.

d) Intervalo descendente.
Un intervalo es *descendente* cuando la proporción por la que se multiplica es mayor que cero y menor que 1.

La manera de encontrar la altura del tono o nota que resulta de construir un intervalo descendente, es multiplicar la frecuencia del tono o nota que genera el intervalo por el inverso de la proporción de dicho intervalo ascendente.

4.3.2. Generación de notas.

La forma de generar nuevas notas musicales es encadenando quintas justas ascendentes y descendentes.

De hecho veremos como las escalas pitagóricas que hemos construido se pueden ver como el producto de encadenamiento de quintas pitagóricas y como cualquier escala musical será el resultado de encadenar quintas (que no necesariamente tendrán una proporción 3:2, es decir, no serán necesariamente pitagóricas).

Primero generaremos las notas encadenando quintas justas empezando por la nota Fa.

Las quintas ascendentes a partir de Fa son: Do, Sol, Re, La, Mi, Si, $Fa_{\#}$, $Do_{\#}$, $Sol_{\#}$, $Re_{\#}$, $La_{\#}$, $Mi_{\#}$, $Si_{\#}$, Fa_{x}, Do_{x}, Sol_{x}, Re_{x}, La_{x}, Mi_{x}, Si_{x}.

Las quintas descendentes a partir de Fa son: Si_{b}, Mi_{b}, La_{b}, Re_{b}, Sol_{b}, Do_{b}, Fa_{b}, Si_{bb}, Mi_{bb}, La_{bb}, Re_{bb}, Sol_{bb}, Do_{bb}, Fa_{bb}.

Nosotros podríamos seguir definiendo notas aumentando las alteraciones cromáticas de manera conveniente, sin embargo, para efectos prácticos de la notación musical, las notas que hemos definido son suficientes para escribir, leer y ejecutar la música occidental tradicional.

4.3.3. La espiral de quintas pitagóricas y el origen de la coma pitagórica.

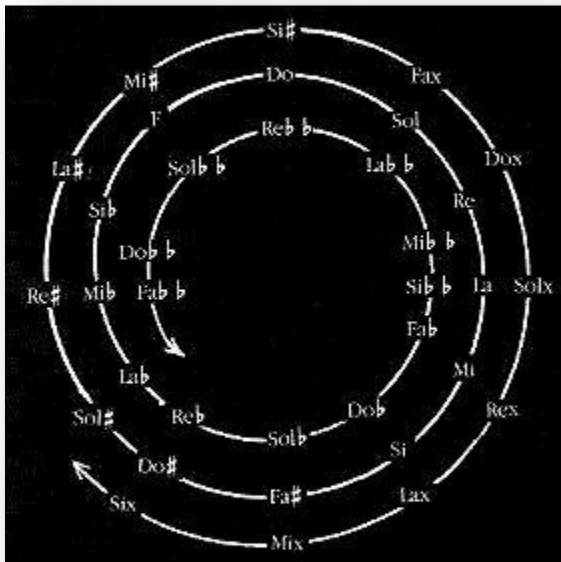


Fig. 4.4. Espiral de quintas pitagóricas.

La espiral de quintas pitagóricas es la representación gráfica que compara un encadenamiento sucesivo e interminable de quintas pitagóricas con un encadenamiento indefinido de octavas justas. La conclusión más importante que podemos extraer de la espiral de quintas pitagóricas es que siempre existirá un residuo al comparar encadenamientos de estos dos tipos de intervalo. Dicho residuo no permitirá que la espiral se cierre. El residuo más relevante que existe en la espiral lo encontramos tras encadenar 12 quintas pitagóricas y notar que éste excede al encadenamiento de 7 octavas justas precisamente en una coma pitagórica, que más adelante veremos que equivale aproximadamente a 1/4 de semitono. Además, si vemos la espiral de quintas como un reloj, todas las notas que quedan a las mismas horas, definen enarmonías cuyas diesis enarmónicas son precisamente esta coma.

$$\frac{12\ quintas\ pitagóricas}{7\ octavas\ justas} = \frac{(3/2)^{12}}{(2/1)^{7}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} = 1\ coma\ pitagórica$$

Por primera vez podemos vislumbrar el problema de la afinación a través de la afinación pitagórica. Pero para entenderlo a fondo necesitamos introducir el concepto de tonalidad.

4.3.4. El círculo de quintas, los sistemas de afinación y el origen musical de las escalas.

- **El círculo de quintas.**

El *círculo de quintas* consiste en el encadenamiento de quintas que pueden ser de diversas proporciones de tal manera que la espiral se cierre en un círculo y de esa manera sea equivalente al encadenamiento de un determinado número octavas justas.

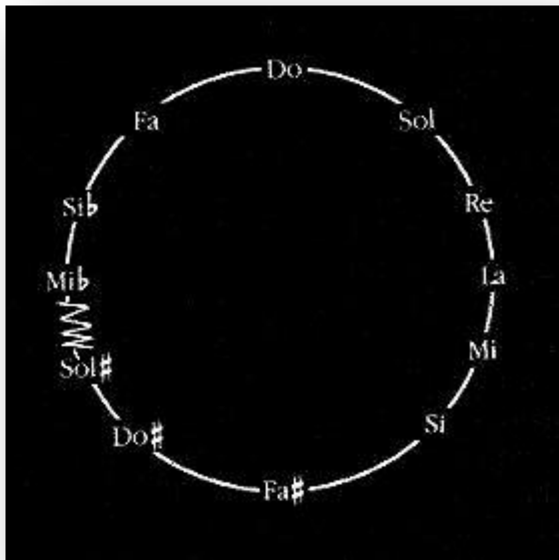


Fig. 4.5. Ejemplo de círculo de quintas pitagóricas**.**

El cerrar la espiral en un círculo permite a las notas que se originan a partir del encadenamiento conformar una octava justa cuando se trasladan en sucesión dentro de dicho intervalo. Entonces se habrá definido una escala.

El círculo de quintas más usual es el que surge de encadenar 11 quintas comprendidas en 7 octavas justas. En la figura 4.5. se muestra el circulo de 11 quintas pitagóricas.

- **Definición de sistema de afinación.**

Un *sistema de afinación* es la división de una octava justa representada a través de un círculo de quintas, es decir, es la representación de una escala musical a partir de dicho círculo.

- **El origen musical de las escalas pentatónica, diatónica y cromática.**

La escala pentatónica se origina a partir de encadenar las 4 quintas justas Fa-Do-Sol-Re-La y acomodar las notas en orden ascendente dentro de una sola octava de la forma Do-Re-Fa-Sol-La.

Comparando con la estructura previamente definida para escala:

Tono-Tercera Menor-Tono-Tono-Tercera Menor.

Resulta que entre Do y Re existe un tono o segunda mayor, entre Re y Fa existe una tercera menor, entre Fa y Sol existe un tono o segunda mayor, entre Sol y La existe un tono o segunda mayor y finalmente entre La y Do existe una tercera menor.

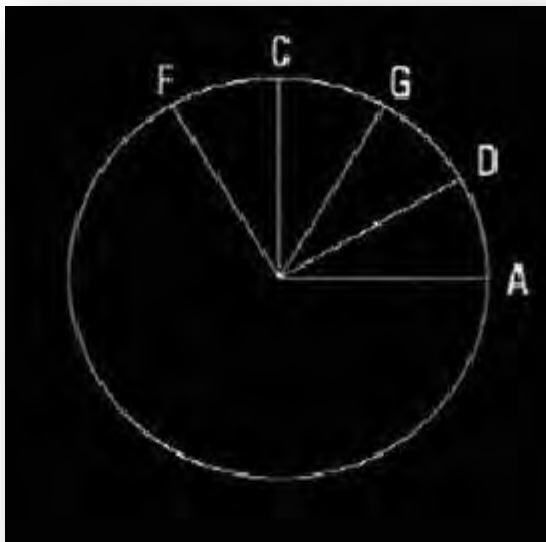


Fig.4.6. Escala Pentatónica.

La escala Diatónica se origina a partir de encadenar las 6 quintas justas Fa-Do-Sol-Re-La-Mi-Si y acomodar nuevamente las notas dentro de una octava en orden ascendente de la forma Do-Re-Mi-Fa-Sol-La-Si.

Análogamente comparando la estructura previamente definida de la escala diatónica:

Tono-Tono-Semitono Diatónico-Tono-Tono-Tono-Semitono Diatónico.

Resulta que entre Do y Re existe un tono o segunda mayor, entre Re y Mi existe un tono o segunda mayor, entre Mi y Fa existe un semitono diatónico o segunda menor, entre Fa y Sol existe un tono o segunda mayor, entre Sol y La existe un tono o segunda mayor, entre La y Si existe un tono o segunda mayor y finalmente entre Si y Do existe un semitono diatónico o segunda menor.

Además, las Escalas Diatónicas se subdividen en dos *tetracordes*. Esto se ve de la siguiente manera.

Do-Tono-Re-Tono-Mi-Semitono-Fa-Tono-Sol-Tono-La-TonoSi-Semitono-Do

1er Tetracorde 2do Tetracorde

Fig. 4.7. Escala Diatónica.

La Escala Cromática se puede originar de dos maneras distintas de tal manera que aparezcan tanto bemoles como sostenidos.

i) A partir de encadenar 11 quintas justas ascendentes a partir de Fa.

Fa-Do-Sol-Re-La-Mi-Si-$Fa_{\#}$-$Do_{\#}$-$Sol_{\#}$-$Re_{\#}$-$La_{\#}$

ii) A partir de encadenar 11 quintas justas ascendentes a partir de Sol_b.

Sol_b-Re_b-La_b- Mi_b-Si_b-Fa-Do-Sol-Re-La-Mi-Si

En la Fig. 4.8. presentamos como comúnmente se acostumbra, la escala cromática vista en forma de una combinación de las dos anteriores.

Acomodando una vez más en orden ascendente las notas para cada caso obtenemos las siguientes escalas cromáticas y nuevamente comparando con las estructuras definidas previamente de las escalas cromáticas, podemos notar que:

i) Do-S.C.-$Do_{\#}$-S.D.-Re-S.C.-$Re_{\#}$-S.D.-Mi-Fa-S.C.-$Fa_{\#}$-S.D.-Sol-S.C.-$Sol_{\#}$-S.D.-La-S.C.-$La_{\#}$-S.D.-Si.

ii) Do-S.D.-Re_b-S.C.-Re-S.D.-Mi_b-S.C.-Mi-Fa-S.D.-Sol_b-S.C.-Sol-S.D.-La_b-S.C.-La-S.D.-Si_b-S.C.-Si.

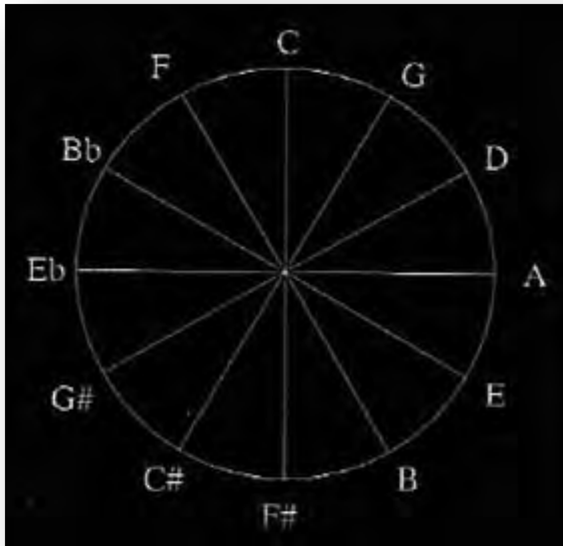


Fig. 4.8. Escala Cromática.

Escala Cromática de Sostenidos	
Semitonos Diatónicos entre	**Semitonos Cromáticos entre**
$Do_{\#}$ y Re	Do y $Do_{\#}$
$Re_{\#}$ y Mi	Re y $Re_{\#}$
Mi y Fa	Fa y $Fa_{\#}$
Fa# y Sol	Sol y $Sol_{\#}$
$Sol_{\#}$ y La	La y $La_{\#}$
$La_{\#}$ y Si	
Si y Do	

Escala Cromática de Bemoles	
Semitonos Diatónicos entre	**Semitonos Cromáticos entre**
Do y Re_{b}	Re_{b} y Re
Re y Mi_{b}	Mi_{b} y Mi
Mi y Fa	Sol_{b} y Sol
Fa y Sol_{b}	La_{b} y La
Sol y La_{b}	Si_{b} y Si
La y Si_{b}	
Si y Do	

De comparar los diagramas de las diversas escalas podemos ver claramente que la escala pentatónica está contenida en la escala diatónica y estas dos últimas están a su vez contenidas en las escalas cromáticas.

Así se distribuyen las notas definidas a lo largo de una octava si superponemos ambas escalas cromáticas unidas a otras cuatro enarmonías que podemos extraer de la espiral de quintas, ahora podemos apreciar entre que notas se encuentran las diesis enarmónicas previamente definidas.

Do-Do$_{\#}$-$^{\text{d.e.}}$-Re$_{b}$-Re-Re$_{\#}$-$^{\text{d.e.}}$-Mi$_{b}$-Mi-Mi$_{\#}$-$^{\text{d.e.}}$-Fa$_{b}$-Fa-Fa$_{\#}$-$^{\text{d.e.}}$-Sol$_{b}$-Sol-Sol$_{\#}$-$^{\text{d.e.}}$-La$_{b}$-La-La$_{\#}$-$^{\text{d.e.}}$-Si$_{b}$-Si-Si$_{\#}$-$^{\text{d.e.}}$-Do$_{b}$-Do.

Habremos notado que el origen musical de las escalas es el encadenamiento de quintas. Además de que con las notas que hemos definido, hemos dividido la octava en tres tipos de intervalos: Los semitonos cromáticos, los diatónicos y las diesis enarmónicas.

4.4. La modalidad, la tonalidad y la tonalidad acústica.

Sin pretender ahondar en cómo se dio la evolución del teclado a lo largo de la historia, resulta que desde hace algunos siglos, la octava se ha dividido en doce semitonos dispuestos sucesivamente a lo largo del mismo. Cuya estructura se puede entender como la superposición de una escala diatónica (las teclas blancas) con una escala pentatónica (las teclas negras) de forma consecutiva en cada octava. Ello implica que para afinar una octava en un teclado convencional debemos escoger y fijar sólo doce de las notas que hemos definido, y para hacer esta elección, nos tenemos que basar en los conceptos musicales de *tonalidad* y *tonalidad acústica*. Pero para entender estos conceptos partiremos del concepto de *modalidad* del cual se desprenden.

4.4.1. La modalidad de una escala diatónica.

En una concepción moderna, a cada tono de la escala musical le asignaremos un *grado armónico* denotado por un número romano. De tal modo que la escala musical ahora va a estar representada por siete grados. Por lo tanto la octava se ve dividida de la siguiente forma en dos *tetracordes*.

I-tono-II-tono-III-semitono-IV-tono-V-tono-VI-tono-VII-semitono-I

$\longleftrightarrow$ 1er Tetracorde $\qquad$ $\longleftrightarrow$ 2do Tetracorde

Los *modos griegos* de la escala diatónica que posteriormente fueron sustituidos por sus equivalentes *modos eclesiásticos* están definidos a partir de siete permutaciones cíclicas de los grados armónicos como sigue:

Modo Griego	Orden de los Grados de la Escala	Modo Eclesiástico (medieval)
Lidio	I-II-III-IV-V-VI-VII	Jónico
Frigio	II-III-IV-V-VI-VII-I	Dórico
Dórico	III-IV-V-VI-VII-I-II	Frigio
Sintolidio	IV-V-VI-VII-I-II-III	Lidio
Jónico	V-VI-VII-I-II-III-IV	Mixolidio
Eólico	VI-VII-I-II-III-IV-V	Eólico
Mixolidio	VII-I-II-III-IV-V-VI	Locrio

4.4.2. La tonalidad y el modo de las escalas.

La música evolucionó a partir del uso de estos siete modos a una forma tonal, la cual, sólo se presenta en dos de las modalidades de las que acaban de ser definidas. Lo importante es que esas dos modalidades comparten las mismas siete notas pero dispuestas en dos escalas diferentes en donde una escala es nuevamente una permutación cíclica de la otra. Son estas siete notas a través de sus alteraciones cromáticas las que definen precisamente las dos tonalidades correspondientes. Esto es, definen una *tonalidad mayor* y una *tonalidad menor* que comparten siete notas en común.

Los modos sobrevivientes son el modo Jónico que da forma a la escala diatónica que hemos definido y que ahora renombraremos como *escala mayor* y cuyo modo redefiniremos como *modo mayor*. El otro modo sobreviviente es el modo Eólico que renombraremos como *modo menor* y cuya escala redefiniremos como *escala menor natural.*

La estructura de una escala mayor que define cualquier tonalidad mayor, es la misma que la de la escala diatónica que hemos definido.

Tono-Tono-Semitono Diatónico-Tono-Tono-Tono-Semitono Diatónico.

Dentro del esquema tonal, la escala diatónica es una escala mayor.

Mientras que la estructura de la escala menor natural, que define cualquier tonalidad menor es la que sigue:

Tono-Semitono Diatónico-Tono-Tono-Semitono Diatónico-Tono-Tono.

La escala menor natural que hemos definido es precisamente una permutación cíclica de la escala mayor.

Nosotros podemos construir escalas mayores y menores a partir de cualquier nota de las que hemos definido. Dicha nota define el nombre de la tonalidad, mientras que la estructura de la escala define la modalidad; mayor si construimos una escala mayor a partir de dicha nota o menor si construimos una escala menor natural a partir de la misma. A su vez, son las alteraciones cromáticas quienes definen la estructura de las escalas. El hecho de que existan notas enarmónicas implica a su vez la existencia de *tonalidades enarmónicas*. Por ej. Mi bemol mayor y Re sostenido mayor son dos tonalidades enarmónicas una vez que $Re_{\#}$ y Mi_{b}. La práctica musical es tal que se escoge precisamente la tonalidad con menor número de alteraciones cromáticas. Esto último quiere decir que en general y con escasas excepciones, es más sencillo leer un menor número de alteraciones a la vez que es más sencillo leer sostenidos y bemoles que dobles sostenidos y dobles bemoles. Por lo tanto, en la escritura musical se omiten en la medida de lo posible las tonalidades enarmónicas que contengan estas dobles alteraciones y se escoge la tonalidad enarmónica que contenga un menor número de alteraciones.

El círculo de quintas es también una representación de las tonalidades. Esto es consecuencia de que la octava quede dividida en doce sonidos, y, que a partir de cada uno de ellos, se pueda construir una escala mayor y una menor encadenando 6 quintas. En la siguiente figura se muestran las tonalidades mayores en el exterior del círculo, y las tonalidades menores correspondientes a cada tonalidad mayor en el interior del mismo. Cada tonalidad mayor está relacionada con una menor dado que ambas están construidas a partir de las mismas siete notas, lo único que cambia es que las notas de la escala mayor son una permutación cíclica de la menor y viceversa. Esto proviene del hecho de que los modos que definimos son precisamente permutaciones cíclicas unos de los otros, de modo que esta cualidad se heredó de la modalidad a la tonalidad. Al par de tonalidades - mayor y menor- que comparten las mismas siete notas se les define como *tonalidades primas relativas*. De hecho, en la siguiente figura podemos notar como se requiere hacer una permutación cíclica para que las tonalidades primas en el interior del círculo concuerden con las del exterior del mismo. Lo que hace falta por ver es cómo se tienen que ir alterando cromáticamente los siete sonidos para definir las diferentes tonalidades.

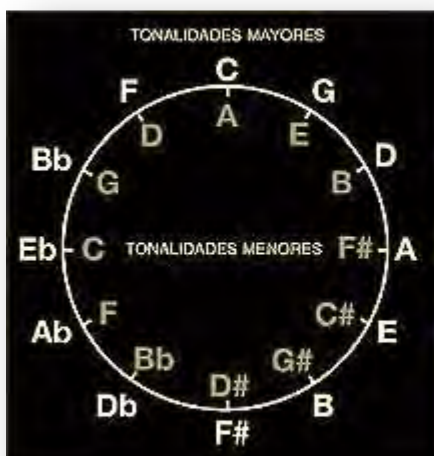


Fig. 4.9. Tonalidades Mayores y Menores en el Círculo de Quintas.

4.4.3. Las alteraciones cromáticas de las tonalidades.

Las tonalidades en el círculo están acomodadas por quintas debido a que es precisamente en este orden que aparecen y se acumulan las alteraciones cromáticas de las notas que componen tanto a la escala mayor como a la menor que define a cada una de ellas. Las tonalidades de Do mayor y La menor, que corresponden a las escalas diatónicas conformadas por las teclas blancas del teclado comenzando por la nota Do y la nota La respectivamente, son las únicas tonalidades mayor y menor que no poseen ninguna alteración. Esto se debe a que, como hemos dicho, ambas comparten las mismas notas por ser tonalidades prima relativas.

A medida que avanzamos por quintas ascendentes en el círculo en el sentido horario a partir de Sol mayor y Mi menor (la 1 del reloj) hasta llegar a la posición de Fa# mayor y Re# menor (las 6 del reloj), cada par de tonalidades primas va adquiriendo un nuevo sostenido a medida que se avanza de quinta en quinta a lo largo del círculo. De manera que, se van acumulando los sostenidos que se hayan adquirido en las quintas anteriores. Las notas se van alterando y acumulando sucesivamente en el mismo sentido, pero partiendo de la quinta que precede a Do, es decir, por quintas ascendentes a partir de Fa. Así se generan las tonalidades mayores y menores que, poseen sostenidos y no son enarmónicas, a partir de cómo aparecen en el círculo de quintas.

Por otro lado, las tonalidades mayores y menores que poseen bemoles y no son enarmónicas, se generan a partir de avanzar en el círculo por quintas descendentes en sentido anti-horario a partir de Fa mayor o Re menor (las 11 del reloj) hasta llegar a la posición de Reb mayor y Sib menor (las 7 del reloj), cada par de tonalidades primas va adquiriendo un nuevo bemol a medida que se avanza de quinta en quinta a lo largo del círculo de manera que se van acumulando los bemoles que se hayan adquirido en las quintas anteriores. Las notas se van alterando y acumulando en el mismo sentido pero partiendo de la quinta que le precede a Fa, es decir, por quintas descendentes a partir de Sib.

De esta forma quedan definidas 24 tonalidades no enarmónicas, de las cuales, doce son mayores y doce son menores. Entonces, dichas tonalidades quedan definidas en términos de escalas diatónicas de siete sonidos.

4.4.4. Tonalidades enarmónicas.

Las tonalidades enarmónicas se generan de forma análoga a la forma en que se generaron estas veinticuatro tonalidades mayores y menores. De hecho, surgen a partir de continuar avanzando con saltos ascendentes y descendentes por quintas a lo largo del círculo hasta llegar a las notas enarmónicas de bemoles y sostenidos. Además, bajo la premisa de seguir añadiendo y acumulando alteraciones y procediendo en el mismo esquema que con las tonalidades que acabamos de definir. Todas las tonalidades que quedan acomodadas la misma “hora” en el círculo de quintas son tonalidades enarmónicas. Esto sucede de la misma forma que las notas que quedan acomodadas a la misma “hora” en la espiral de quintas pitagóricas, correspondían a notas enarmónicas.

4.4.5. Definición de armadura.

La *armadura* es el conjunto de alteraciones cromáticas que comparten un par de tonalidades primas.

En la siguiente tabla se muestran las 24 tonalidades más comunes que no son enarmónicas entre sí con sus respectivas escalas y armaduras.

Tonalidad	**Escala Mayor y Relativa Menor**	**Alteraciones o Armadura**
Do Mayor	Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si	
La Menor	La, Si, Do, Re, Mi, Fa, Sol	
Sol Mayor	Sol, La, Si, Do, Re, Mi, Fa$_{\#}$	Fa$_{\#}$
Mi Menor	Mi, Fa$_{\#}$, Sol, La, Si, Do, Re	
Re Mayor	Re, Mi, Fa$_{\#}$,Sol, La, Si, Do$_{\#}$	Fa$_{\#}$, Do$_{\#}$
Si menor	Si, Do$_{\#}$, Re, Mi, Fa$_{\#}$, Sol, La,	
La Mayor	La, Si, Do$_{\#}$, Re, Mi, Fa$_{\#}$, Sol$_{\#}$	Fa$_{\#}$, Do$_{\#}$, Sol$_{\#}$
Fa$_{\#}$ Menor	Fa$_{\#}$, Sol$_{\#}$, La , Si ,Do$_{\#}$, Re, Mi	
Mi Mayor	Mi, Fa$_{\#}$, Sol$_{\#}$, La, Si, Do$_{\#}$, Re$_{\#}$	Fa$_{\#}$, Do$_{\#}$, Sol$_{\#}$, Re$_{\#}$
Do$_{\#}$ Menor	Do$_{\#}$, Re$_{\#}$, Mi, Fa$_{\#}$, Sol$_{\#}$, La, Si	
Si Mayor	Si, Do$_{\#}$, Re$_{\#}$, Mi, Fa$_{\#}$, Sol$_{\#}$, La$_{\#}$	Fa$_{\#}$, Do$_{\#}$, Sol$_{\#}$, Re$_{\#}$, La$_{\#}$
Sol$_{\#}$ Menor	Sol$_{\#}$, La$_{\#}$, Si, Do$_{\#}$, Re$_{\#}$, Mi, Fa$_{\#}$	
Fa$_{\#}$ Mayor	Fa$_{\#}$, Sol$_{\#}$, La$_{\#}$, Si, Do$_{\#}$, Re$_{\#}$, Mi$_{\#}$	Fa$_{\#}$, Do$_{\#}$, Sol$_{\#}$, Re$_{\#}$, La$_{\#}$, Mi$_{\#}$
Re$_{\#}$ Menor	Re$_{\#}$, Mi$_{\#}$, Fa$_{\#}$, Sol$_{\#}$, La$_{\#}$, Si, Do$_{\#}$	
Fa Mayor	Fa, Sol, La , Si$_{b}$,Do, Re, Mi	Si$_{b}$
Re Menor	Re, Mi, Fa, Sol, La, Si$_{b}$, Do	
Si$_{b}$ Mayor	Si$_{b}$, Do, Re, Mi$_{b}$, Fa, Sol, La	Si$_{b}$, Mi$_{b}$
Sol Menor	Sol, La, Si$_{b}$, Do, Re, Mi$_{b}$, Fa	
Mi$_{b}$ Mayor	Mi$_{b}$, Fa, Sol, La$_{b}$, Si$_{b}$, Do ,Re	Si$_{b}$, Mi$_{b}$, La$_{b}$
Do Menor	Do, Re, Mi$_{b}$, Fa, Sol, La$_{b}$, Si$_{b}$	
La$_{b}$ Mayor	La$_{b}$, Si$_{b}$, Do, Re$_{b}$, Mi$_{b}$, Fa, Sol	Si$_{b}$, Mi$_{b}$, La$_{b}$, Re$_{b}$
Fa Menor	Fa, Sol, La$_{b}$, Si$_{b}$, Do ,Re$_{b}$, Mi$_{b}$	
Re$_{b}$ Mayor	Re$_{b}$, Mi$_{b}$, Fa, Sol$_{b}$, La$_{b}$, Si$_{b}$, Do,	Si$_{b}$, Mi$_{b}$, La$_{b}$, Re$_{b}$, Sol$_{b}$
Si$_{b}$ Menor	Si$_{b}$, Do, Re$_{b}$, Mi$_{b}$, Fa, Sol$_{b}$, La$_{b}$,	

4.4.6. La tonalidad y la armonía funcional.

La música modal prevaleció desde los griegos hasta el medioevo y el renacimiento a través de los *modos eclesiásticos.* Estos últimos son una analogía de los modos griegos, pero eventualmente se pasó del uso de siete escalas modales al uso de dos escalas mayores y tres menores. Mismas que terminaron definiendo la tonalidad mayor y la tonalidad menor.

En el período barroco se consagró la *armonía funcional* como el esquema para componer la música. En esencia, su significado consiste en que cada nota de cualquier escala diatónica mayor o menor adquiere una *función armónica* que es equivalente a un *grado armónico.* Éste, a su vez provee una *jerarquía* a la nota que define la tonalidad, misma redunda en una sensación denominada *centro tonal*. De tal manera que, si las escalas diatónicas están constituidas por siete notas, entonces existen siete grados armónicos representados por los primeros siete números romanos asociados a la función armónica que desempeña cada nota de la escala. La relación entre las funciones armónicas y los grados armónicos es la que sigue:

Grado Armónico	Función Armónica
I	Tónica
II	Supertónica
III	Mediante
IV	Subdominante
V	Dominante
VI	Superdominante
VII	Sensible ó Subtónica

La nota de la escala que funge como *tónica*, funciona como centro tonal, define la tonalidad y por ende es la nota con mayor jerarquía, al punto que da nombre a la tonalidad.

Tanto la nota que funge como *mediante* o como la nota que funge como *superdominante*, son las que determinan si la tonalidad es mayor o menor y para este efecto la mediante tiene mayor jerarquía que la Superdominante ya que si hay un semitono diatónico de distancia entre el tercero y el cuarto grado queda determinada el modo mayor la tonalidad, mientras que si hay un tono entre estos dos grados es el modo menor de la tonalidad el que queda definido.

El séptimo grado es *sensible* si la nota se encuentra a un semitono de la nota que funge como tónica, y el séptimo grado es *subtónica* si la nota se encuentra a un tono de la que funge como tónica.

Cuando se dio el paso de la forma modal a la forma tonal, hubo una combinación entre la escala diatónica mayor y la menor natural así como una alteración cromática de la escala menor natural, de tal suerte que surgieron como hemos enunciado, dos escalas mayores y tres menores. Son estas escalas las que rigen la estructura de la *armonía funcional* y las que determinan si la tonalidad es mayor o menor.

La estructura de dichas escalas es la que sigue:

Escalas Mayores:

Escala Mayor.

$$\mathrm{I} - {}_{\text{Tono}} - \mathrm{II} - {}_{\text{Tono}} - \mathrm{III} - {}_{\text{S. D.}} - \mathrm{IV} - {}_{\text{Tono}} - \mathrm{V} - {}_{\text{Tono}} - \mathrm{VI} - {}_{\text{Tono}} - \mathrm{V\ II} - {}_{\text{S. D.}} - \mathrm{I}$$

1er Tetracorde 2do Tetracorde

Escala Mayor Armónica.

$$\mathrm{I} - {}_{\text{Tono}} - \mathrm{II} - {}_{\text{Tono}} - \mathrm{III} - {}_{\text{S. D.}} - \mathrm{IV} - {}_{\text{Tono}} - \mathrm{V} - {}_{\text{S. D.}} - \mathrm{VI} - {}_{\text{Tono + S. D.}} - \mathrm{VII} - {}_{\text{S. D.}} - \mathrm{I}$$

1er Tetracorde 2do Tetracorde

Escalas Menores:

Escala Menor Natural.

I - Tono - II - S. D. - III - Tono - IV - Tono - V - S. D. - VI - Tono – VII- Tono - I

1er Tetracorde 2do Tetracorde

Escala Menor Armónica.

I - Tono - II S. D. - III - Tono - IV - Tono - V - S. D. - VI - Tono + S. D. - VII - S. D. - I

1er Tetracorde 2do Tetracorde

Escala Menor Melódica.

I - Tono - II - S. D. - III - Tono - IV - Tono - V - Tono - VI - Tono - VII - S. D. - I

1er Tetracorde 2do Tetracorde

Las dos escalas mayores de forma indistinta determinan la tonalidad mayor mientras que la tonalidad menor es determinada indistintamente por cualquiera de las tonalidades menores.

Además, la escala mayor armónica tiene el segundo tetracorde de la escala menor armónica, mientras que la escala menor melódica tiene el segundo tetracorde de la escala mayor. Finalmente, la escala menor armónica tiene alterado el séptimo grado de tal forma que la nota que ocupe este grado tenga función de sensible. Como vemos, la forma del primer tetracorde, y en particular del tercer grado, es quien determina si la tonalidad es mayor o menor.

4.4.7. La modulación.

Visto desde una perspectiva muy simplificada, la *modulación* consiste en el paso sistemático de una tonalidad a otra. Este proceso se realiza haciendo una transición paulatina de una escala cuyas alteraciones propias definen la tonalidad a otra escala en la cual aparecen las alteraciones propias de la tonalidad a la que se ha modulado. Una técnica muy socorrida es alterar cromáticamente los grados necesarios de la tonalidad de tal forma que aparezcan la sensible y/o la subdominante de la tonalidad hacia la que se desea modular.

4.4.8. Cercanía entre las tonalidades.

La *cercanía de dos tonalidades* queda definida en términos de las notas comunes entre ambas tonalidades. En la medida que más notas compartan dos tonalidades, más cercana es una tonalidad de la otra. A partir del círculo de quintas podemos deducir que las tonalidades más cercanas son las primas relativas por compartir la misma armadura es decir, comparten las mismas notas. A estas tonalidades les siguen en cercanía las que se encuentren a una quinta de distancia en cualquier dirección ya que sólo difieren en la alteración cromática de una sola nota. Posteriormente les suceden las tonalidades que se encuentran a dos quintas de distancia en cualquier dirección, ya que ahora son dos notas las que difieren cromáticamente. De tal manera que a medida que existan más quintas entre dos tonalidades, más lejana es una tonalidad de la otra. De acuerdo a estos preceptos, las tonalidades no enarmónicas más lejanas entre sí, son aquéllas que se encuentran en las posiciones diametralmente opuestas del círculo de quintas.

En general es más sencilla la modulación en la medida que la tonalidad a la que se modula sea más cercana a la tonalidad de la que se parte.

4.4.9. Tonalidad acústica.

Así como la tonalidad fija siete notas que dividen a la octava en siete partes, de manera análoga, la *tonalidad acústica* fija, además de estas siete, las restantes cinco notas que dividirán a la octava en doce partes (en este caso en doce semitonos). Siete de estas doce notas son precisamente las que corresponden a la tonalidad de la escala diatónica en cuestión. De manera que, la forma de escoger las restantes cinco notas está basada en la cercanía de otras tonalidades a ésta. De esta manera podremos definir la estructura de una escala cromática dentro del esquema de la tonalidad. Esto resulta de suma relevancia a la hora de afinar, como es requerido en un teclado, una escala cromática fija, en la cual, debemos escoger 12 enarmónicos a partir del el criterio brindado precisamente por la tonalidad acústica.

La tonalidad acústica surge de alterar cromáticamente cinco grados de la escala diatónica y agregar las notas correspondientes a estos cinco grados alterados a las 7 notas correspondientes a la escala diatónica de la que se partió.

Dichas alteraciones adicionales se presentan como sigue:

El primer grado se altera ascendentemente en un semitono cromático.
El tercer grado se altera descendentemente en un semitono cromático.
El cuarto grado se altera ascendentemente en un semitono cromático
El quinto grado se altera ascendentemente en un semitono cromático.
El séptimo grado se altera descendentemente en un semitono cromático.

El hacer estas alteraciones a estos grados, nos produce las cinco notas restantes que se deben añadir a las notas de la escala diatónica para conformar la escala cromática que finalmente se asociará a la tonalidad mayor así como a la tonalidad relativa menor que contiene las notas de la escala diatónica cuyos grados fueron alterados. Es decir, a la tonalidad acústica le corresponde tanto una tonalidad mayor como la tonalidad menor prima relativa de ésta y viceversa, esto quiere decir que, también a cada par de tonalidades primas relativas, les corresponde una misma tonalidad acústica y por ende las mismas 12 notas enarmónicas.

Vale la pena hacer notar también que el segundo y el sexto grado de la escala diatónica no resultan alterados. A continuación mostraremos cómo este hecho, aunado a la manera en que se alteraron los restantes cinco grados, dan como resultado que los 12 enarmónicos de la tonalidad acústica correspondan a las alteraciones de las tonalidades cercanas a las dos tonalidades primas relativas que comparten las notas de la escala diatónica de la que se partió.

En la siguiente tabla se muestran las doce tonalidades acústicas asociadas a las 24 tonalidades no enarmónicas entre sí que ya conocemos. También se muestran los 12 enarmónicos correspondientes a cada tonalidad acústica una vez que se han alterado los grados correspondientes.

De la misma tabla debemos notar que aparecen las alteraciones propias de las dos escalas diatónicas que definen las tonalidades más cercanas por la izquierda y las tres escalas diatónicas que definen las tonalidades más cercanas por la derecha a las dos tonalidades primas relativas correspondientes a la escala diatónica cuyos grados fueron alterados. Esto quiere decir que los 12 enarmónicos de la tonalidad acústica surgen precisamente de las alteraciones propias de estas tonalidades cercanas.

Tonalidad Acústica	**Enarmónicos**
Re$_b$ Mayor y Si$_b$ Menor	La, Re, Sol , Do, Fa, Si$_b$, Mi$_b$, La$_b$, Re$_b$, Sol$_b$, Do$_b$, Fa$_b$
La$_b$ Mayor y Fa Menor	Mi, La, Re, Sol , Do, Fa, Si$_b$, Mi$_b$, La$_b$, Re$_b$, Sol$_b$, Do$_b$
Mi$_b$ Mayor y Do Menor	Si, Mi, La, Re, Sol , Do, Fa, Si$_b$, Mi$_b$, La$_b$, Re$_b$, Sol$_b$
Si$_b$ Mayor y Sol Menor	Si, Mi, La, Re, Sol , Do, Fa, Si$_b$, Mi$_b$, La$_b$, Re$_b$, Fa$_\#$
Fa Mayor y Re Menor	Si, Mi, La, Re, Sol , Do, Fa, Si$_b$, Mi$_b$, La$_b$, Fa$_\#$, Do$_\#$
Do Mayor y La menor	Si, Mi, La, Re, Sol , Do, Fa, Si$_b$, Mi$_b$, Fa$_\#$, Do$_\#$, Sol$_\#$
Sol Mayor y Mi Menor	Si, Mi, La, Re, Sol , Do, Fa, Si$_b$, Fa$_\#$, Do$_\#$, Sol$_\#$, Re$_\#$
Re Mayor y Si menor	Si, Mi, La, Re, Sol , Do, Fa, Fa$_\#$, Do$_\#$, Sol$_\#$, Re$_\#$, La$_\#$
La Mayor y Fa$_\#$ Menor	Si, Mi, La, Re, Sol , Do, Fa$_\#$, Do$_\#$, Sol$_\#$, Re$_\#$, La$_\#$, Mi$_\#$
Mi Mayor y Do$_\#$ Menor	Si, Mi, La, Re, Sol, Fa$_\#$, Do$_\#$, Sol$_\#$, Re$_\#$, La$_\#$, Mi$_\#$, Si$_\#$
Si Mayor y Sol$_\#$ Menor	Si, Mi, La, Re, Fa$_\#$, Do$_\#$, Sol$_\#$, Re$_\#$, La$_\#$, Mi$_\#$, Si$_\#$, Fa$_x$
Fa$_\#$ Mayor y Re$_\#$ Menor	Si, Mi, La, Fa$_\#$, Do$_\#$, Sol$_\#$, Re$_\#$, La$_\#$, Mi$_\#$, Si$_\#$, Fa$_x$, Do$_x$

4.5. Perspectiva musical de los intervalos.

4.5.1. El origen de la nomenclatura de los intervalos musicales.

La teoría musical fue construida en este trabajo partiendo de la serie armónica y definiendo, a partir de ella, ciertos intervalos musicales con proporciones matemáticas bien definidas. Dichos intervalos fueron utilizados para construir escalas y definir la estructura de la escala diatónica; culminaremos explicando la nomenclatura de estos intervalos como consecuencia de dicha estructura, así como de la nomenclatura de las notas musicales.

De la escala cromática y la diatónica podemos ver que hemos dividido la octava en tonos y semitonos (diatónicos y cromáticos) de tal manera que el tono quedó dividido en dos semitonos; esto nos permitirá contar cuantos semitonos componen un intervalo. Así mismo, hemos definido siete notas que tienen un orden muy definido independientemente de la nota con la que se comience. Es este orden, el que determina la nomenclatura de los intervalos. Las notas son: Do Re Mi Fa Sol La Si, dichas notas serán enlazadas indefinidamente, de tal forma que exista un orden definido en el que queden enlazadas, pero no un principio ni un final. Esto nos permitirá contar el número de notas contenido en un intervalo. Como veremos a continuación, a partir de poder hacer estas dos cuentas (número de semitonos y número de notas) podremos dar nombre a cualquier intervalo.

Para determinar si el intervalo entre cualesquiera dos notas corresponde a una primera, segunda, tercera ,cuarta, quinta, sexta, séptima o a una octava, lo primero que hay que hacer es ignorar las alteraciones cromáticas de las notas en cuestión, posteriormente debemos fijarnos en el número de notas que están contenidas en sucesión a lo largo del intervalo. Esto lo podemos hacer precisamente porque las notas tienen asignado un orden muy definido que se repite indefinidamente. El número de notas que comprende el intervalo corresponde al tipo de intervalo de que se trata, i. e., el intervalo que consta de una sola nota corresponde a un intervalo de primera, el que consta de dos, corresponde a un intervalo de segunda y así sucesivamente hasta llegar a la octava que consta de ocho notas.

4.5.2. Intervalos diatónicos y cromáticos.

Los intervalos musicales se clasifican en *intervalos diatónicos* e *intervalos cromáticos* según su origen.

- **Intervalo diatónico.**

Si los intervalos se originan a partir de la tónica de una escala mayor o una escala menor natural, son *intervalos diatónicos*. Los intervalos diatónicos quedan determinados por el número de semitonos que comprende el intervalo y son los que siguen:

Nombre del Intervalo Diatónico	Número de Semitonos Comprendidos en el Intervalo
Primera justa	0
Segunda menor	1
Segunda mayor	2
Tercera menor	3
Tercera mayor	4
Cuarta justa	5
Quinta justa	7
Sexta menor	8
Sexta mayor	9
Séptima menor	10
Séptima mayor	11
Octava justa	12

Cualquier intervalo mayor que se disminuya cromáticamente en un semitono se convierte en un intervalo menor.

Cualquier intervalo menor que se aumente cromáticamente en un semitono se convierte en un intervalo mayor.

- **Intervalo cromático.**

Cualquier intervalo que provenga de la alteración cromática de grados armónicos de alguna escala mayor o menor natural es un *Intervalo Cromático* siempre y cuando estas alteraciones no den origen a un intervalo mayor o menor.

Dicho de otro modo, los intervalos cromáticos surgen de alterar cromáticamente alguna o ambas notas que componen un intervalo diatónico. En su nomenclatura se mantiene el grado de la escala de la que proviene pero cambia el término mayor, menor, o justo por el término aumentado, superaumentado, disminuido o subdisminuido de acuerdo a los siguientes criterios:

Cualquier intervalo justo que se aumente cromáticamente en un semitono se llama intervalo *aumentado*.

Cualquier intervalo justo que se aumente cromáticamente en dos semitonos se llama intervalo *doble-aumentado* o *superaumentado*.

Cualquier intervalo justo que se disminuya cromáticamente en un semitono, se llama intervalo *disminuido*.

Cualquier intervalo justo que se disminuya cromáticamente en dos semitonos, se llama *doble-disminuido* o *subdisminuido*.

Cualquier intervalo mayor que se aumente en un semitono cromático se llama *aumentado*.

Cualquier intervalo mayor que se aumente en dos semitonos cromáticos se llama doble-*aumentado* o *superaumentado*.

Cualquier intervalo menor que se disminuya en un semitono cromático se llama *disminuido*.

Cualquier intervalo menor que se disminuya cromáticamente en dos semitonos cromáticos se llama *doble-disminuido* o *subdisminuido*.

Cualquier intervalo mayor que se disminuya cromáticamente en dos semitonos cromáticos se llama *disminuido*.

Cualquier intervalo menor que se aumente cromáticamente en dos semitonos se llama *aumentado*.

Una vez que hemos determinado el número de notas que comprende el intervalo, basta con contar el número de semitonos que constituyen dicho intervalo para poderlo nombrar de acuerdo a los criterios que acaban de ser expuestos, es decir, determinando de que intervalo diatónico o cromático se trata.

Ejemplo:

Si deseamos ver que intervalo existe entre Re y La_b, primero contamos el número de notas que hay entre ambos tonos ignorando la alteración cromática. Re, Mi , Fa, Sol, La… i.e., hay cinco notas en el intervalo, por lo tanto se trata de una quinta, pero falta ver qué tipo de quinta es. Para que la quinta sea justa y se trate de un intervalo diatónico, el Re debería ser Re_b o el La_b debería de ser La natural (sin alteración) para que ambas notas estén dentro de un mismo encadenamiento de 7 quintas partiendo de cualquiera de ellas, y por lo tanto, provengan de una misma escala diatónica. Dado que la quinta justa Re_b - La_b o la quinta justa Re - La, deben ser disminuidas en un semitono cromático para producir el intervalo Re - La_b, entonces, de acuerdo a la definición de intervalo cromático el intervalo es una quinta disminuida.

4.5.3. Intervalos enarmónicos.

Son *intervalos enarmónicos* todos aquellos intervalos que comprendan un mismo número de semitonos siempre y cuando al menos una de las notas de uno de los intervalos sea enarmonía de la nota que esté en el mismo extremo del otro intervalo.

Ejemplo:

La quinta disminuida Si - Fa, la cuarta aumentada Do_b - Fa, la muy exótica tercera superaumentada Do_b - $Mi_\#$ y la igualmente exótica sexta subdisminuida $La_{\#\#}$ - Fa son todos intervalos enarmónicos porque todos consisten de seis semitonos y todos tienen al menos una nota enarmónica en común en el mismo extremo.

4.5.4. Inversión musical de los intervalos.

La inversión de intervalo musical se encuentra basada en los siguientes criterios:

La inversión de un intervalo justo es otro intervalo justo, la de un intervalo mayor es uno menor y viceversa, el de un disminuido es uno aumentado y viceversa, y finalmente el de uno superaumentado es otro subdsiminuido y viceversa.

Por otro lado, la inversión del grado del intervalo es tal que la suma del grado del intervalo y la suma del grado del intervalo invertido es nueve, es decir, la inversión de cualquier primera es una octava y viceversa, la inversión de cualquier segunda es una séptima y viceversa, la inversión de cualquier tercera es una sexta y finalmente la de cualquier cuarta es una quinta y viceversa.

Lo anterior implica que la inversión de un intervalo diatónico es otro intervalo diatónico y la inversión de un intervalo cromático es un intervalo cromático.

Notemos que los intervalos que hemos definido y que resultan ser inversiones matemáticas de otros intervalos, son también desde este criterio musical, inversiones de estos otros intervalos. Es decir que para los intervalos que hemos definido, la inversión matemática y la inversión musical de dichos intervalos son equivalentes.

Con lo expuesto hasta ahora tenemos las bases físicas y musicales para abordar el tema de la afinación.

Capítulo 5 LA AFINACIÓN JUSTA.

Referencias generales: [1],[2],[3],[4] y [5].

5.1. La Afinación.

Entenderemos a la *afinación* como el proceso físico necesario para que las escalas que hemos definido puedan ser ejecutadas en un instrumento musical. El resultado es que éste produzca tonos tales que empaten con la teoría que hemos construido. En particular, nos enfocaremos en instrumentos cuya afinación es fija, es decir, que no depende del ejecutante. Tal es el caso, entre muchos otros, del piano, el clavecín o del órgano, que para afinarse, es preciso seguir una metodología que nos llevará a fijar la altura de doce tonos complejos. De dicha metodología, y de los tonos que de ella resulten, quedarán determinados qué notas musicales y qué escalas podrán ser ejecutadas en los instrumentos en cuestión.

Partiendo de la serie armónica, hemos visto lo que son los intervalos musicales y cómo a partir de ellos se han construido escalas. Ahora, basados en el concepto de tonalidad, describiremos lo que implica física y matemáticamente que un instrumento haga sonar tonos que corresponden a las notas que hemos definido teóricamente desde un punto de vista musical.

La manera en que un instrumento hace sonar una escala musical, es mediante la afinación de ciertos intervalos. A partir de éstos, se fija la altura de los tonos que corresponden a las notas de dicha escala.

5.2. Definición de diapasón.

El *diapasón* (inventado en 1711) es un instrumento que tiene un solo modo de vibración calibrado para producir un tono puro cuya frecuencia es una referencia a la que se le puede asignar una nota musical.

La relevancia de este instrumento, es que una vez que se ha afinado la frecuencia de referencia correspondiente a una determinada nota en un instrumento musical, es posible afinar en el mismo cualquier otra, mediante el intervalo o serie de intervalos que nos lleven a ella. Además, éste garantiza que en varios instrumentos musicales puedan estar afinadas las mismas notas.

Históricamente, han existido un gran número de frecuencias de referencia para diversas notas, pero en la actualidad, es la frecuencia de 440 Hertz la que se asigna a la frecuencia fundamental de la nota *La* situada en la octava central del piano moderno. A continuación presentamos algunas referencias relevantes desde 1640 hasta 1939. Es importante notar cómo en el siglo XIX hubo una tendencia a subir la afinación del La inclusive por encima de los 440Hz.

1640 A457.6 del Órgano Franciscano Vienés.

1699 A404 de la Ópera de Paris.

1711 A423.5 del diapasón inventado por John Shore.

1714 A391de la Catedral de Estrasburgo.

1722 A415 del órgano de la Iglesia Católica Romana de Dresden.

1751 A422.5 del diapasón propio de Handel.

1759 A309 del órgano del Trinity College de Cambridge.

1762 A405 para instrumentos de cuerda en Hamburgo.

1780 A422.6 del diapasón de Stein.

1780 A421 afinación de Stein para Mozart.

1811 A427 de la Grand Opera de Paris.

1812 A440 como afinación moderna del Paris Conservatoire.

1813 A423.3. adoptado para la Philharmonic Society.

1828 A440 de la Philharmonic Society.

1834 A 436.5 de la Ópera de Viena.

1846 A452.5 fue la afinación filarmónica (muy alta) hasta 1854.

1858 C522 fue la nueva afinación filarmónica.

1871 A440 de la Covent Garden Opera House.

1878 A447 de la Ópera de Viena.

1879 A450 de la Ópera de Covent Garden.

1879 A454 de Steinway of England.

1879 A451.9 adoptado por la Armada Inglesa para los alientos madera.

1880 A436 puede haber sido usado por Steinway y se cree que antes de esta fecha no se haya utilizado una afinación más alta a pesar de que en Steinway de Londres se tenía un diapasón en A454.7.

1885 A435.4 a 59 grados Fahrenheit en Viena.

1885 A452 de una feria de inventos y música en Londres.

1896 A439 o afinación filarmónica que produce C522.

1925 A440 adoptado el 11 de junio por la industria musical norteamericana.

1936 A440 adoptado por la American Standards Association.

1939 A440 adoptado en una conferencia internacional.

5.3. Los índices acústicos de las notas musicales.

Un *índice acústico* es un número que se le asigna a una nota para distinguir en qué octava se encuentra. Ya que cada vez que se duplique o se reduzca a la mitad la frecuencia fundamental de ésta, la misma conservará su nombre, pero el índice permitirá que su altura correspondiente sea identificada.

En los países en los que se utiliza la misma nomenclatura que en el nuestro, a todas las notas que se encuentran entre el do y el si centrales del piano se les asigna el índice 5 (en Francia se asigna el índice 3 y en EU el índice 4), a cada nota que se encuentra una octava por debajo de este rango se le asigna el índice 4, y así sucesivamente si seguimos descendiendo por octavas asignamos los índices 3, 2, etc. respectivamente. De manera análoga, si ahora ascendemos por octavas, asociamos a cada nota los índices 5, 6, etc.

Utilizando esta notación, la frecuencia de 440Hz corresponde a la frecuencia fundamental de la nota La5.

5.4. Afinación justa de un intervalo musical.

Por definición la *afinación justa de un intervalo musical*, o simplemente *afinación* de un intervalo musical, consiste en hacer coincidir dos armónicos resolubles comunes a las dos notas que comprenden el intervalo. El hacerlos coincidir implica que no existan, o que se eliminen, los batimientos entre ambos armónicos.

Mientras la frecuencia de los armónicos coincidentes sea más baja, y el armónico sea de menor frecuencia, será más sencillo llevar a cabo la afinación de dicho intervalo.

Dadas las posibilidades psicoacústicas de discriminar armónicos en un tono complejo, sólo se afinan los siguientes intervalos justos enunciados a continuación según cuán fácil resulta afinarlos:

a) Primera justa o unísono.- es el intervalo más sencillo de afinar ya que todos los armónicos concuerdan y en general se busca hacer coincidir la frecuencia fundamental de ambos tonos.

b) Octava justa.- en este intervalo todos los armónicos del tono más agudo coinciden con los armónicos pares del más grave. Por simplicidad suelen afinarse la fundamental del sonido más agudo con el segundo armónico del tono más grave, es decir, el primer sobretono.

c) Quinta justa o pitagórica.- cada tercer armónico del tono más grave coincide con cada armónico par del tono más agudo. Se afina el tercer armónico del tono grave con el segundo del tono agudo.

d) Cuarta justa o pitagórica.- cada cuarto armónico del tono más grave va a coincidir con cada tercero del más agudo. Por lo tanto, para afinar este intervalo se hace coincidir el cuarto armónico del tono más grave con el tercero del más agudo y se eliminan los batimientos.

e) Tercera mayor justa.- cada quinto armónico del tono más grave coincide con cada cuarto armónico del tono más agudo y por lo tanto se hace coincidir el quinto armónico del tono más grave con el cuarto del más agudo.

f) Tercera menor justa.- cada sexto armónico del tono más grave coincide con cada quinto del más agudo. Por lo tanto se hace coincidir el sexto armónico del tono más grave con el quinto del más agudo.

g) Sexta mayor justa.- cada quinto armónico del tono más grave coincide con cada tercero del más agudo. Por lo tanto se hace coincidir el quinto armónico del tono más grave con el tercero del más agudo.

h) Tercera menor pequeña justa o tercera menor septimal.- cada séptimo armónico del tono más grave coincide con cada sexto armónico del tono más agudo por lo tanto se hace coincidir el séptimo armónico del tono más grave con el sexto del más agudo.

i) Séptima menor armónica o séptima menor septimal.- cada séptimo armónico del tono más grave coincide con cada cuarto del tono más agudo por lo tanto se hace coincidir el séptimo armónico del tono más grave con el cuarto del más agudo.

j) Segunda mayor pitagórica o tono mayor pitagórico.- cada noveno armónico del tono más grave coincide con cada octavo del tono más agudo por lo tanto se hace coincidir el noveno armónico del tono más grave con el octavo del más agudo.

k) Segunda menor justa o tono menor.- cada décimo armónico del tono más grave coincide con cada noveno del tono más agudo por lo tanto se hace coincidir el noveno armónico del tono más grave con el octavo del más agudo.

En la medida de lo posible, se pretende qua la afinación de las escalas musicales se logre a través de unísonos, octavas, quintas, cuartas, terceras mayores y sextas mayores. Por su dificultad, se evitarán los intervalos que contienen armónicos comunes más allá del 6to. Se evita también en la medida de lo posible, el uso de la tercera menor por ser más difícil de afinar que su inversión, es decir, la sexta mayor. Se evita así mismo, el uso de la Sexta Menor Justa en donde el 8vo armónico del tono grave coincide con el 5to del tono agudo (*ver [2]*).

5.5. Reglas para afinar los enarmónicos.

Estas reglas sirven para garantizar que no se cometa el error de afinar un enarmónico por otro.

a) Los sostenidos y bemoles sólo pueden ser afinados a partir de otros tonos por medio de segundas aumentadas, terceras mayores o menores, cuartas o quintas justas, sextas mayores, sextas menores o sextas aumentadas y octavas.

b) Cuando un tono se encuentra a una segunda aumentada de otro, se debe utilizar la tercera menor pequeña de proporción 7/6 para afinar el intervalo. Ya que si se usara la tercera menor de proporción 6/5, entonces habríamos afinado el enarmónico incorrecto.

c) Cuando un tono se encuentra a una sexta aumentada de otro, se debe utilizar la séptima menor armónica de proporción 7/4 para afinar el intervalo. Ya que usar cualquier otro intervalo, resultaría en la afinación el enarmónico incorrecto.

d) De no ser a través de los intervalos de segunda aumentada o sexta aumentada, no es posible afinar un bemol a partir de un sostenido ni un sostenido a partir de un bemol.

e) No es posible afinar bemoles ni sostenidos a partir de otros tonos por medio de ninguno de los siguientes intervalos: segundas mayores, segundas menores, terceras aumentadas, cuartas aumentadas, tritonos, quintas aumentadas, séptimas menores, séptimas mayores, séptimas aumentadas o cualquier intervalo disminuido.

5.6. Definiciones.

a) Intervalo justo desde el punto de vista de la afinación.

Todos los intervalos en los que el oído del afinador puede discriminar al menos un par de armónicos coincidentes, son *intervalos justos* desde el punto de vista de la afinación, bajo la condición que no existan batimientos entre el par.

b) Sistema de afinación justa.

Todas las escalas que son construidas o afinadas a partir de eliminar los batimientos entre los armónicos resolubles comunes a los tonos que componen intervalos justos, son escalas que corresponden a un *sistema de afinación justa*.

Esta conexión de la física con la música es consecuencia de que un intervalo justo queda afinado sólo hasta que el evento físico arriba descrito se satisfaga.

c) Intervalo ancho e intervalo angosto.

Un *intervalo ancho* es aquel intervalo cuya proporción de frecuencias es mayor que la del intervalo justo equivalente.

Un *intervalo angosto* es aquel intervalo cuya proporción de frecuencias es menor que la del intervalo justo equivalente.

Propiedad:

La inversión matemática de un intervalo ancho es un intervalo angosto, de manera que la proporción en la que el intervalo ancho excede al justo, es la misma proporción en la que la inversión del intervalo ancho es más pequeña que la inversión del intervalo justo correspondiente.

Prueba:

Partamos de un intervalo de proporción a/b con a y b naturales y $a > b$. Eso implica que este intervalo es justo. A partir de él, podemos construir un intervalo ancho disponiéndolo en sucesión con otro intervalo de proporción p con $p > 1$ un número racional o irracional que en general va a representar alguna coma o una fracción de coma. Entonces el intervalo ancho tendrá proporción pa/b y excederá al intervalo justo precisamente en p. Aplicando la definición de inversión matemática podemos encontrar la proporción x de la inversión del intervalo ancho que estará dada por la siguiente condición:

$$x \cdot \frac{pa}{b} = 2 \Rightarrow x = \frac{2b}{pa} \tag{5.1}$$

Además la proporción y de la inversión matemática del intervalo justo a/b debe cumplir lo siguiente:

$$y \cdot \frac{a}{b} = 2 \Rightarrow y = \frac{2b}{a} \tag{5.2}$$

Finalmente podemos comparar ambas inversiones calculando el cociente de sus respectivas proporciones.

$$\frac{y}{x} = \frac{2b/a}{2b/pa} = p \tag{5.3}$$

Dado que $p > 1$, entonces la inversión del intervalo ancho es más angosta en la misma proporción que la inversión del intervalo justo y dicha inversión es por tanto un intervalo angosto.

Propiedad:

La inversión matemática de un intervalo angosto es un intervalo ancho, además de que la proporción en la que el intervalo angosto difiere del justo, es la misma proporción en la que la inversión del intervalo angosto es más grande que la inversión del intervalo justo correspondiente.

La prueba de ello es análoga a la del intervalo ancho.

5.7. El problema de la afinación justa: Dos caminos sin solución.

5.7.1. Los intervalos musicales a partir del encadenamiento de quintas.

De la Fig 5.1. podemos ver que el recorrer quintas ascendentes hacia la derecha (sentido horario) es equivalente a recorrer cuartas ascendentes hacia la izquierda (sentido antihorario). También podemos observar que a través de encadenar hasta 6 quintas en la dirección adecuada es posible generar todos los intervalos de la escala cromática. Además el intervalo que resulta de un encadenamiento en una dirección equivale a la inversión del intervalo equivalente al encadenamiento en la dirección opuesta. Particularmente nos interesa notar que el encadenamiento de 4 quintas hacia la derecha equivale a un intervalo de tercera mayor mientras que el encadenamiento de 3 quintas hacia la izquierda es igual al encadenamiento de 3 tres cuartas ascendentes y equivale a un intervalo de tercera menor. Así mismo el encadenamiento de 2 quintas hacia la derecha equivale a una segunda mayor.

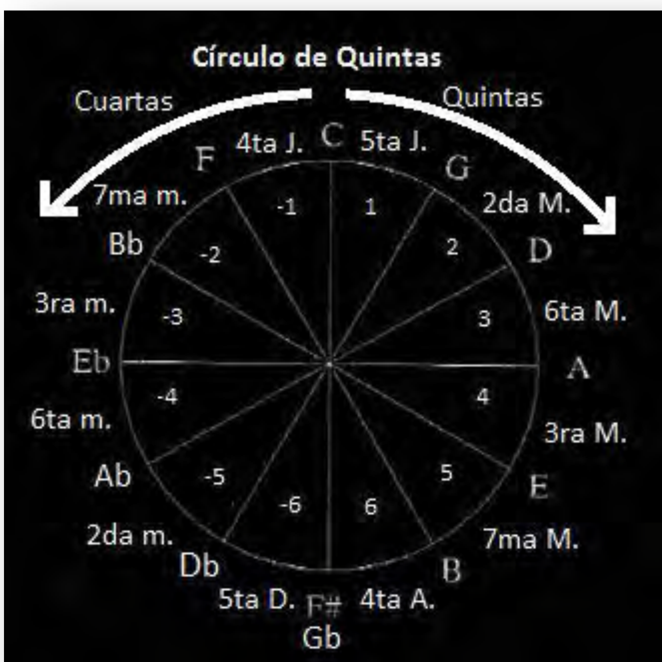


Fig. 5.1. Encadenamiento de Quintas y Cuartas.

5.7.2. El origen de la coma sintónica y el schisma.

Si las quintas que encadenamos en el círculo de quintas son pitagóricas, entonces los intervalos que obtendremos al disponer las quintas en sucesión dentro de una octava son los intervalos pitagóricos que hemos definido en el Capítulo 4. De tal manera que el encadenamiento de dos quintas pitagóricas hacia la derecha resultan en lo que hemos definido como segunda mayor pitagórica o tono mayor.

Ahora compararemos las terceras y sextas justas con las pitagóricas.

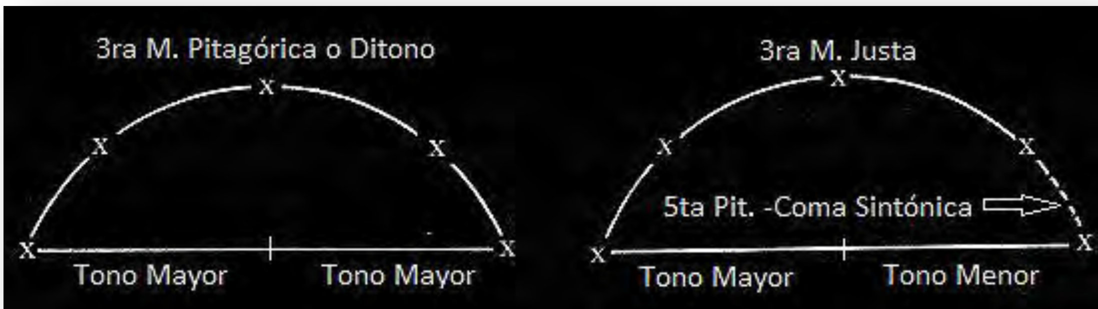


Fig. 5.2. Encadenamiento de 4 Quintas Pitagóricas y Encadenamiento de 4 Quintas Pitagóricas – Coma Sintónico.

En la Fig. 5.2. se muestra la estructura de la tercera mayor pitagórica y de la tercera mayor justa. Ahora veremos en detalle esta estructura.

El encadenar dos quintas pitagóricas y restringir el intervalo resultante a una octava resulta en una segunda mayor pitagórica o tono mayor. Matemáticamente esto se ve de la siguiente manera:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \div \frac{2}{1} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8} \tag{5.7}$$

El encadenar cuatro quintas pitagóricas y restringir el intervalo resultante a una octava es equivalente a encadenar dos tonos mayores y veremos que es equivalente a una tercera mayor pitagórica.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \div \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \div \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{3^4}{2^6} = \frac{81}{64} \tag{5.8}$$

por esa razón a la tercera mayor pitagórica también se le llama *ditono*.

La tercera mayor justa equivale a la sucesión de un tono mayor con un tono menor. Si la comparamos con el ditono, entonces se obtendrá como residuo la coma sintónica, que más adelante mostraremos que equivale aproximadamente a 1/5 de semitono. Esto se ve de la siguiente forma:

$$\frac{\frac{81}{64}}{\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}} = \frac{81}{64} \div \frac{5}{4} = \frac{3^4 \cdot 2^2}{2^6 \cdot 5} = \frac{81}{80} \tag{5.9}$$

Lo anterior implica que la tercera mayor pitagórica es una coma sintónica más ancha que la tercera mayor justa y por la propiedad demostrada con anterioridad, entonces la sexta menor pitagórica es una coma sintónica más angosta que la sexta menor justa.

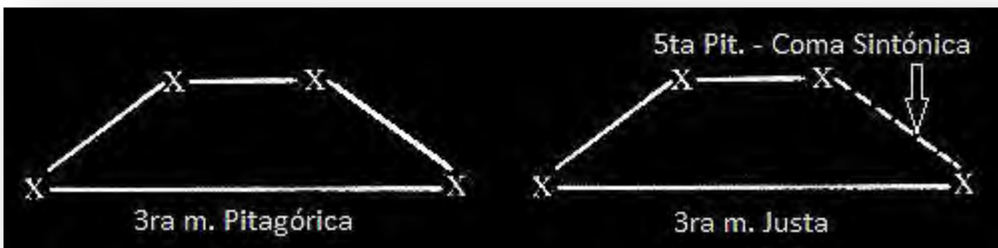


Fig. 5.3. Encadenamiento de 3 Quintas Pitagóricas y Encadenamiento de 3 Quintas Pitagóricas – Coma Sintónico.

Ahora compararemos a partir de la Fig. 5.3. la tercera menor justa con la tercera menor pitagórica.

El encadenamiento de 3 quintas pitagóricas hacia la izquierda equivale al encadenamiento de 3 cuartas pitagóricas ascendentes. Si restringimos el intervalo resultante a una octava entonces obtenemos una tercera menor pitagórica. Esto se ve como sigue:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 \div \frac{2}{1} = \frac{2^6}{3^3 \cdot 2} = \frac{32}{27} \tag{5.10}$$

Ahora comparando la tercera menor justa con la tercera menor pitagórica volveremos a obtener como residuo la coma sintónica.

$$\frac{\frac{6}{5}}{\frac{32}{27}} = \frac{3^4 \cdot 2}{2^5 \cdot 5} = \frac{81}{80} \tag{5.11}$$

Por lo tanto la tercera menor pitagórica es más angosta que la tercera menor justa en una coma sintónica y por la otra propiedad recién demostrada, entonces la sexta mayor pitagórica es una coma sintónica más ancha que la sexta mayor justa.

Finalmente si comparamos la coma pitagórica con la coma sintónica el residuo es el schisma.

$$\frac{\frac{531441}{524288}}{\frac{81}{80}} = \frac{3^{12} \cdot 2^4 \cdot 5}{2^{19} \cdot 3^4} = \frac{32805}{32768} \tag{5.12}$$

5.7.3. Los intervalos lobo.

Los *intervalos lobo* son intervalos cuya afinación no es aceptable para ser utilizados musicalmente. Dichos intervalos no se pueden afinar directamente sino que son el residuo que resulta de afinar o modificar intencionalmente la afinación de una serie de intervalos.

La tradición histórica marca como intervalos lobo los siguientes intervalos:

a) Cualquier octava cuya afinación varíe de la afinación justa.

b) Cualquier quinta que sea más ancha que una quinta pitagórica o que sea más angosta media coma sintónica que ésta. Si la quinta está entre estos límites musicalmente se le suele considerar quinta justa.

c) Cualquier tercera mayor que sea más ancha que una tercera mayor pitagórica y más angosta que una tercera mayor justa.

d) Cualquier tercera menor que sea más angosta que una tercera menor pitagórica y más ancha que una tercera menor justa.

e) Cualquier sexta mayor que sea más ancha que una sexta mayor pitagórica y más angosta que una sexta mayor justa.

f) Cualquier sexta menor que sea más ancha que una sexta menor justa y más angosta que una sexta menor pitagórica.

5.7.4. El origen del problema de la afinación justa.

Históricamente, los intervalos lobo hicieron su aparición hasta que se consolidó el uso de un teclado que dividió la octava en doce semitonos. Previamente, se tenía una escala diatónica de 7 notas y sólo cuatro de ellas estaban alteradas cromáticamente. Hasta que se encadenaron 12 quintas justas surgió el primer sistema de afinación asociado a este nuevo teclado. Dicho sistema es denominado *afinación pitagórica medieval* (*ver pp. 46 de [2]*). Es por ello comenzaremos esta sección discutiéndolo, a pesar de que desde el tiempo de los griegos, se sabía que existe otro sistema de afinación basado en la justeza de las terceras y sus inversiones, que no es compatible con el pitagórico, y que denominaremos *justa entonación*. Ésta fue explorada ampliamente a partir de finales del siglo XV como alternativa a los problemas del sistema pitagórico.

Debemos de tener cuidado de no confundir la afinación justa con lo que en este trabajo hemos denominado justa entonación. La afinación pitagórica y la justa entonación son ambas sistemas de afinación justa dado que los intervalos que las constituyen son intervalos justos de acuerdo con nuestras definiciones. Sin embargo, la afinación pitagórica está basada en la justeza de la quinta, mientras que la justa entonación, se basa en la de las terceras (*ver pp. 33-63 de [4]*).

- **La afinación pitagórica.**

El problema de la afinación justa se hace evidente partiendo de la afinación pitagórica. Como hemos visto, el encadenamiento de 12 quintas pitagóricas excede al encadenamiento de 7 octavas justas en una coma pitagórica. Esto trae como consecuencia que la diferencia de afinación de las enarmonías sea de una coma pitagórica como se muestra en de la Fig 5.4. Si se encadena un número suficiente de quintas, podemos ver que la diferencia entre un bemol y un sostenido a partir de esta construcción, es de una coma pitagórica, es decir, las diesis enarmónicas en este encadenamiento corresponden a dicha coma. Esto quiere decir, a su vez, que no se pueden utilizar simultáneamente las notas enarmónicas en un sistema de afinación basado en quintas pitagóricas. Esto se debe al surgimiento de intervalos lobo originados por el excesivo tamaño de las diesis entre notas enarmónicas.

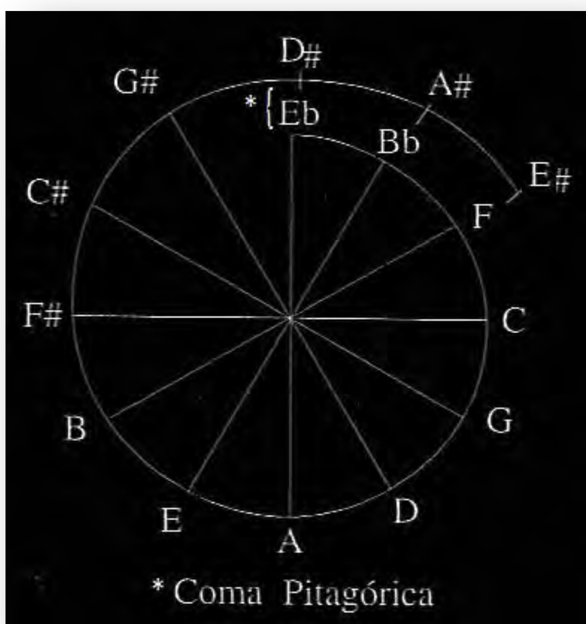


Fig. 5.4. Espiral de Quintas Pitagóricas.

Más adelante veremos los criterios para que una diesis no sea demasiado grande y entonces dos notas enarmónicas se puedan utilizar simultáneamente en un mismo sistema de afinación.

Otra consecuencia del encadenamiento de 12 quintas es que las terceras mayores que resultan (las que hemos denominado terceras mayores pitagóricas) son más anchas que las terceras mayores justas en una coma sintónica. Así mismo, su inversión, es decir las sextas menores pitagóricas son más angostas que las sextas menores justas también en dicha proporción. De manera análoga, tanto las terceras menores pitagóricas son más angostas que las terceras menores justas, como las sextas mayores pitagóricas (inversión de las terceras menores pitagóricas) son más anchas que las sextas mayores justas, y una vez más, en ambos casos la diferencia es la misma coma.

De lo anterior se desprende que el tamaño de las terceras y las sextas está limitado precisamente por los excedentes y faltantes en los correspondientes intervalos pitagóricos. De tal manera que, para tener una afinación aceptable, las proporciones de dichas terceras y sextas deben estar comprendidas entre el intervalo pitagórico y el justo.

Como se muestra en la Fig. 5.5., si sólo encadenamos 11 quintas pitagóricas en vez de 12, y sustituimos esta última por el enarmónico a partir del cual se inició dicho encadenamiento, entonces habremos cerrado la espiral de quintas en un círculo y por lo tanto se habrá constituido un sistema de afinación. Así mismo, se habrá dado origen una *quinta falsa* más pequeña en una coma pitagórica que las otras once. Esta quinta notoriamente desafinada recibe el nombre de *quinta del lobo*.

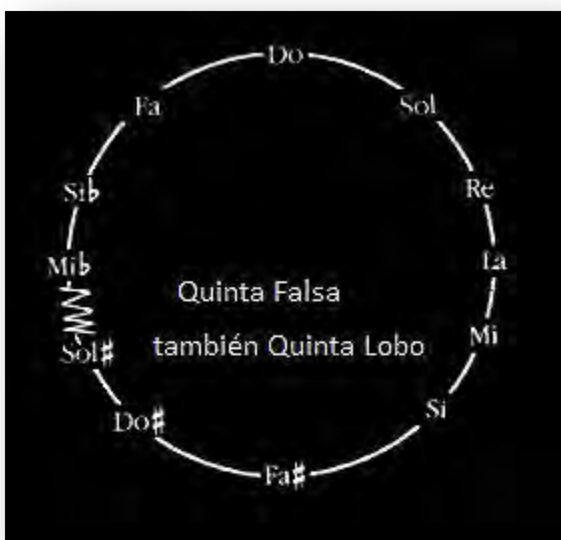


Fig. 5.5. Circulo de Quintas Pitagóricas con Quinta Falsa.

Habrá entonces en nuestro sistema de afinación, 11 quintas pitagóricas y una quinta falsa o quinta del lobo, y como consecuencia de ello, se obtendrán 8 terceras mayores pitagóricas y un número igual de sextas menores pitagóricas que no atraviesen dicha quinta falsa. Sin embargo, también se obtendrán 4 terceras mayores y un número igual de sextas menores que si la atraviesen. De la misma forma, habrá 9 terceras menores pitagóricas y un número igual de sextas mayores pitagóricas que no atraviesen la quinta falsa, pero aparecerán en consecuencia, 3 terceras menores y 3 sextas mayores que si lo harán. Estas terceras y sextas que atraviesan la quinta falsa son también notoriamente desafinadas, y por lo tanto, todas ellas conforman terceras y sextas lobo.

Es así que a través del sistema de afinación pitagórico se ha dividido la octava justa en 12 semitonos, pero a su vez, se ha dado lugar a intervalos lobo tan desafinados, que no nos permiten usar las escalas diatónicas de las diversas tonalidades que incluyen estos intervalos. Por lo tanto, con este sistema de afinación, la posibilidad de modular a las diversas tonalidades queda muy restringida.

Finalmente nos queda por observar que, en un sistema de afinación, existe una incompatibilidad entre las quintas pitagóricas, las octavas justas y las terceras justas. Esto se debe a que tanto doce quintas pitagóricas transportadas a la misma octava, como cuatro terceras menores justas, exceden a la octava justa, mientras que tres terceras mayores justas no la alcanzan. Por otro lado, tres terceras mayores pitagóricas, provenientes del encadenamiento de 4 quintas pitagóricas, también exceden a la octava en una coma pitagórica. De manera similar, cuatro terceras menores pitagóricas, que resultan de encadenar 3 quintas pitagóricas, no alcanzan la octava justa, siendo esta misma coma el respectivo faltante.

- **La justa entonación.**

A través de la *justa entonación* se pretendió construir escalas haciendo uso tanto de intervalos superparticulares como de sus respectivas inversiones. Dichos intervalos estaban condicionados a proceder de los primeros 6 armónicos. En particular se pugnaba por sustituir las terceras y las sextas pitagóricas por terceras y sextas justas.

Cabe mencionar que esta condición es más bien de naturaleza filosófica y matemática que física, ya que hasta el siglo XVII se percibieron y se estudiaron científicamente los armónicos como tal (*ver pp. 65-74 de [4]*).

Partamos del hecho de que tanto la diferencia entre una tercera mayor pitagórica y una tercera mayor justa, como la diferencia entre una tercera menor pitagórica y una justa, es precisamente la coma sintónica. Una alternativa que se pretendió encontrar para la afinación pitagórica fue procurar la justeza de terceras mayores y menores. Para lograr la justeza de una tercera mayor, de acuerdo con la justa entonación, se deben encadenar cuatro quintas pitagóricas, pero una de ellas debe estar reducida en una coma sintónica. El problema es que el encadenamiento de tres terceras mayores justas (equivalentes a doce quintas pitagóricas de las cuales tres son una coma sintónica más angostas) transforma la quinta falsa en una quinta lobo. Sin embargo, en esta ocasión, ésta es más grande que la quinta pitagórica en una coma que denotaremos *diesis menor* y cuya proporción es 128/125.

Por ende, finalmente tras este encadenamiento no se alcanza la octava, siendo esta diesis el faltante correspondiente; esto se ve de la siguiente manera:

$$\frac{2}{1} \div \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{2 \cdot 4^3}{5^3} = \frac{128}{125} \tag{5.13}$$

De manera similar, para lograr la justeza de la tercera menor, hay que encadenar 3 quintas pitagóricas y reducir una de ellas en una coma sintónica. Con ello se produce la justeza de la sexta mayor y por ende también la de su inversión, i.e. la tercera menor. De forma análoga, el encadenamiento de cuatro sextas mayores (equivalentes a doce quintas pitagóricas de las cuales cuatro son una coma sintónica más angostas) transforma, una vez más, la quinta falsa en una quinta lobo más grande que la quinta pitagórica en una coma que denotaremos *diesis mayor* y cuya proporción es 648/625. Entonces no se alcanza la octava tras este encadenamiento de sextas mayores o excederemos la octava por el encadenamiento de su contraparte conformada por terceras menores. La diferencia entre ambos encadenamientos y la octava es precisamente esta diesis; lo que puede mostrarse así:

$$\left(\frac{6}{5}\right)^4 \div \frac{2}{1} = \frac{6^4}{2 \cdot 5^4} = \frac{648}{625} \tag{5.14}$$

Lo anterior implica así mismo, que el procurar la justeza de terceras mayores y menores simultáneamente es imposible, lo que quiere decir que las terceras justas son también incompatibles entre sí.

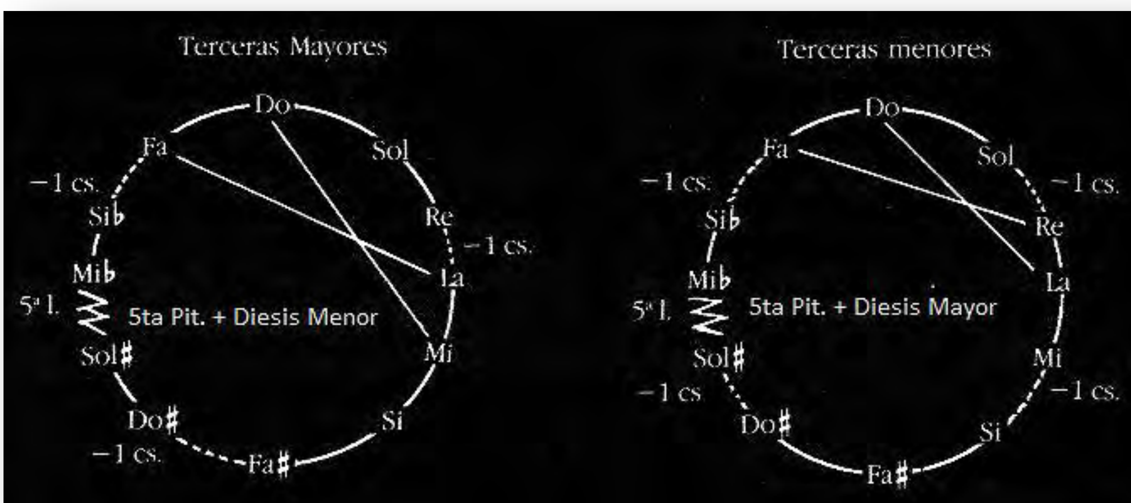


Fig. 5.6. Terceras Mayores y Menores Justas en el Círculo de Quintas.

Históricamente, en el marco de la justa entonación, lo primero que se hizo fue procurar la justeza de las terceras mayores y menores a partir de la afinación exclusiva de intervalos justos (quintas, terceras y sus respectivas inversiones) como se muestra en la Fig. 5.6. sin embargo, de esta forma no se pueden hacer desaparecer los intervalos lobo para cada tonalidad. Podemos ver del círculo de quintas que el encadenamiento de 4 quintas genera una tercera mayor y el encadenamiento de 3 quintas genera la inversión de una tercera menor. De tal suerte que para procurar la justeza de tres terceras mayores, se desafinó una de cada cuatro quintas en una coma sintónica, mientras que para procurar la justeza de cuatro terceras menores se desafinó una de cada tres quintas también en la misma proporción. El problema es que en ninguno de los casos desaparece la quinta falsa (que es un intervalo lobo). Además, las quintas que desafinamos se convierten también en quintas lobo por lo que el problema no puede ser resuelto a partir de la afinación justa.

- **La incompatibilidad entre intervalos justos.**

Definición de *compatibilidad* (*ver p. 417 de [2]*).

Sean p y r las proporciones de frecuencias correspondientes a dos intervalos respectivamente. Ambos intervalos son *compatibles* entre sí y sólo si existen dos números naturales m y n tales que $p^m = r^n$.

Mostraremos por contradicción que las Octavas Justas, las Quintas Pitagóricas, las Terceras Mayores y las Terceras Menores no son compatibles entre sí.

a) Octava justa y quinta pitagórica.

Supongamos que ambos intervalos son compatibles entre sí. Ello implica que

$$\left(\frac{2}{1}\right)^m = \left(\frac{3}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{2^m}{1^m} = \frac{3^n}{2^n} \Rightarrow 2^{m+n} = 3^n \,! \tag{5.15}$$

La última igualdad implica una contradicción pues 3^n es un número impar y 2^{m+n} es un número par para m y n naturales ∴ los intervalos son incompatibles entre sí.

b) Octava justa y tercera mayor justa.

Supongamos que ambos intervalos son compatibles entre sí. Ello implica que

$$\left(\frac{2}{1}\right)^m = \left(\frac{5}{4}\right)^n \Rightarrow \frac{2^m}{1^m} = \frac{5^n}{4^n} \Rightarrow 2^m \cdot 4^n = 5^n \Rightarrow 2^m \cdot 2^{2n} = 5^n \Rightarrow 2^{m+2n} = 5^n \,! \tag{5.16}$$

Lo anterior es imposible dado que 5^n es impar y 2^{m+n} es par para m y n naturales ∴ los intervalos son incompatibles entre sí.

De manera análoga se puede mostrar la incompatibilidad entre cada uno de estos intervalos justos. Dichas demostraciones se basan en el hecho de que 2,3 y 5 son números primos.

Con esto hemos comprobado que cualquier encadenamiento de estos intervalos comparado con cualquier otro de los mismos dará un residuo o coma. Este hecho es lo que en esencia constituye el problema de la justa entonación.

Capítulo 6 EL TEMPERAMENTO.

Referencias generales: [1],[2],[3],[4] y [5].

6.1. Solución del problema de la afinación justa.

En resumen, el encadenar 12 quintas pitagóricas genera una diesis enarmónica del tamaño de una coma pitagórica que no permite usar simultáneamente enarmonías en un mismo sistema de afinación. De ahí que el cerrar la espiral de quintas en un círculo de 11 quintas pitagóricas y una quinta pitagórica reducida en una coma pitagórica produzca intervalos lobo.

Es imposible substituir una nota por alguna de sus enarmonías en un sistema de afinación en el que se ha fijado la altura de los doce semitonos que dividen a la octava, si éste da origen a intervalos lobo. Esto finalmente restringe el poder modular libremente a cualquier tonalidad ya que las tonalidades que contengan lobos, estarán notoriamente desafinadas.

El párrafo anterior puede resumir el problema de afinación de la forma más general. Sin embargo, para solucionarlo, basta con enfocarnos en las características de la afinación pitagórica y en la incompatibilidad entre los intervalos justos cuyos armónicos coincidentes podemos resolver. En el primer caso, las terceras y sextas que se generan a partir del encadenamiento de 12 quintas pitagóricas, son una coma sintónica más anchas o angostas que las terceras y sextas justas. Finalmente, los intervalos justos que podemos afinar, es decir, quintas pitagóricas, terceras junto con sextas justas y octavas justas, no son compatibles entre sí. Las terceras y sextas justas no son compatibles ni con las quintas pitagóricas ni con las octavas justas, las octavas no son compatibles ni con las quintas pitagóricas ni con las terceras y sextas justas, y finalmente, las quintas pitagóricas no son compatibles ni con las octavas justas ni con las terceras y sextas justas, además de que ni las terceras ni las sextas justas son compatibles entre sí.

Las condiciones del problema de afinación en el caso pitagórico rigen una dirección para solucionar el problema más general. Esto se debe a que el modificar el tamaño de la quinta pitagórica y el hacerla más angosta en la proporción adecuada, incide en poder cerrar el círculo de quintas, y a su vez, incide en ajustar el tamaño de las terceras y sextas pitagóricas de tal manera que tiendan a la justeza o, en algunos casos, incluso la alcancen.

Si se pretende tener un sistema de afinación fijo de doce tonos, en el cual, cada nota se pueda sustituir por cualquiera de sus enarmonías sin restricción, se deben desafinar algunos o todos los intervalos justos de la escala cromática. Lo anterior debe incidir en que las diesis entre los semitonos cromáticos y diatónicos, que surgen de las enarmonías, sean lo suficientemente pequeñas como para que no se generen intervalos lobo en ninguna tonalidad. Para garantizar que éstos no se produzcan, dichas desafinaciones se deben de llevar a cabo siguiendo las siguientes direcciones, y deben de estar confinadas a los siguientes límites.

a) Las quintas se desafinarán de tal manera que resultan más angostas que la quinta pitagórica pero no más angostas que media coma pitagórica (aprox. 1/8 de semitono).

b) Las cuartas se desafinarán de tal manera que resulten más anchas que la cuarta pitagórica pero no más anchas que media coma pitagórica.

c) Las terceras mayores se desafinarán de tal manera que resulten más anchas que la tercera mayor justa pero no más anchas que una tercera pitagórica.

d) Las terceras menores, se desafinarán de tal manera que resulten más angostas que la tercera menor justa pero no más angostas que la tercera menor pitagórica.

e) Las sextas mayores se desafinarán de tal manera que resulten más anchas que la sexta mayor justa pero no más ancha que la sexta mayor pitagórica.

f) Las sextas menores se desafinarán de tal manera que resulten más angostas que la sexta menor justa pero no más angosta que la sexta menor pitagórica.

g) La octava siempre será justa y no se desafinará en ninguna dirección.

Notemos que la afinación de las terceras y las sextas puede variar en una coma sintónica (aproximadamente 1/5 semitono).

6.2. Definiciones.

a) División geométrica de un intervalo.

La *división geométrica* de un intervalo es la partición de un intervalo en una sucesión de intervalos idénticos. Matemáticamente la proporción de frecuencias de cada uno de estos intervalos equivale a la raíz n-ésima de la proporción del intervalo a dividir y n corresponde al número de partes en las que se ha dividido dicho intervalo.

b) Serie melódica.

Una *serie melódica* es la sucesión de intervalos que corresponde a alguna división geométrica de una octava justa.

Ésta es la razón fundamental debida a la cual la metodología para afinar el Temperamento Igual (que más adelante describiremos) es sumamente compleja comparada con la de otros temperamentos.

c) Intervalo temperado.

Temperar un intervalo justo quiere decir desafinar dicho intervalo de manera intencional de tal forma que los armónicos coincidentes y resolubles de los tonos que componen el intervalo interfieran entre sí produciendo el fenómeno de batimientos. La intencionalidad consiste en ajustar la frecuencia de los batimientos a un valor determinado y en ejecutar la desafinación en la dirección correcta. En general los intervalos se temperan a frecuencias de batimientos que resultan contables por unidad de tiempo, o en su defecto, se igualan a la frecuencia de batimiento de otros intervalos. A esto último se le conoce como la *técnica de igualación de batimientos*. Esta metodología es más simple que el *conteo* y por ellos se piensa que su práctica fue más común en la medida que la afinación fuese más antigua.

Una vez más es evidente la conexión de un concepto musical con un evento físico.

d) Sistema de afinación temperado.

Un *sistema de afinación temperado* o *temperamento* corresponde a una escala que cuenta por lo menos con un intervalo temperado.

6.3. Clasificación de los sistemas de afinación.

a) según el tipo de división de la octava.

Si en un temperamento la octava se divide en intervalos de una sola proporción, es decir, en una serie melódica, entonces se trata de un *temperamento igual.*

Si por el contrario al menos un intervalo es de proporción diferente al de cualquier otro, entonces se trata de un *temperamento desigual.*

b) según las quintas que los componen.

i. *Afinaciones y temperamentos regulares.*- Son aquellos cuya división de la octava produce al menos 11 quintas de una misma proporción en el círculo de quintas.

ii. *Afinaciones y temperamentos irregulares.*- Son aquellos en lo que la división de la octava produce al menos 2 quintas de diferente proporción en el círculo de quintas.

c) según sus enarmónicos.

Los sistemas de afinación se clasifican en dos grupos de acuerdo a cómo las diferentes notas pueden o no ser utilizadas como enarmonías.

i. *Afinaciones y temperamentos restringidos*.- Son aquéllos para los cuales existe al menos un par de tonos que no puedan ser utilizados simultáneamente como enarmonía debido a que la diesis enarmónica entre ellos sea lo suficientemente grande para generar intervalos lobo.

ii. *Afinaciones y temperamentos no restringidos*.- Son aquéllos en los que todos los tonos pueden ser usados como enarmonías, una vez que las diesis enarmónicas son lo suficientemente pequeñas y por lo tanto es posible la modulación a cualquier tonalidad, ya que en ninguna de ellas existirán intervalos lobo.

6.4. La reducción de un intervalo musical.

Si se desea reducir un intervalo de proporción p de tal manera que el tamaño de la reducción sea de un intervalo de proporción r, entonces la proporción v del intervalo resultante debe satisfacer la siguiente relación:

$$v \cdot r = p. \tag{6.1}$$

Esto quiere decir que la sucesión de los intervalos de proporción v y r respectivamente tiene que igualar al intervalo de proporción p; despejando v de esta ecuación, tenemos que la proporción del intervalo reducido será

$$v = \frac{p}{r}. \tag{6.2}$$

6.5. El tamaño de los intervalos musicales y la fracción de un intervalo en términos de otro.

Si definimos $s(p)_u$ como el tamaño del intervalo cuya proporción de frecuencias es p medido en términos de una *unidad* representada por el intervalo cuya proporción de frecuencias es u, entonces se cumple la siguiente relación.

$$p = (u)^{s(p)_u} \tag{6.3}$$

$$\therefore s(p)_u = \frac{log(p)}{log(u)}. \tag{6.4}$$

Lo anterior corresponde a una generalización de la definición de encadenamiento de intervalo en el sentido de que $s(p)_u$ es el número de veces que hay que encadenar al intervalo definido por u para obtener el interevalo cuya proporción sea p; lo que finalmente quiere decir que $s(p)_u$ corresponde a la *fracción* del intervalo definido por u que es equivalente al intervalo cuya proporción es p.

6.6. Propiedades de las fracciones de un intervalo.

Las siguientes 5 propiedades son consecuencia de aplicar las propiedades de los logaritmos.

i.

$$s(a \cdot b)_u = \frac{\log(a \cdot b)}{\log u} = \frac{\log a}{\log u} + \frac{\log b}{\log u} = s(a)_u + s(b)_u \tag{6.5}$$

ii.

$$s(a/b)_u = \frac{\log(a/b)}{\log u} = \frac{\log a}{\log u} - \frac{\log b}{\log u} = s(a)_u - s(b)_u \tag{6.6}$$

iii.

$$s(a^n)_u = \frac{\log(a^n)}{\log u} = \frac{n \cdot \log a}{\log u} = n \cdot s(a)_u \tag{6.7}$$

iv.

$$s\left(\sqrt[n]{a}\right)_u = \frac{\log \sqrt[n]{a}}{\log u} = \frac{1}{n}\frac{\log a}{\log u} = \frac{1}{n} s(a)_u \tag{6.8}$$

v.

$$s(a)_u = \frac{\log u}{\log v} s(a)_v \tag{6.9}$$

6.7. Alteración de los intervalos en una fracción de la coma sintónica.

Si en un temperamento regular se modifica el tamaño de la quinta pitagórica en una determinada fracción de la coma sintónica dada por $s(r)_{cs} \equiv q$ donde cs es la proporción de la coma sintónica y r es la proporción de frecuencias del intervalo en que se redujo la quinta, entonces es posible determinar en qué fracción de la misma coma se desviará la afinación de otros intervalos con respecto a los intervalos justos que les corresponden.

En particular nos interesa mostrar cómo serán alterados ciertos intervalos justos como lo son el tono mayor, el tono menor, la tercera mayor justa, la tercera menor justa, la cuarta pitagórica y sus respectivas inversiones.

Una vez más a partir del círculo de quintas pitagóricas mostraremos lo anterior. Si partimos de una tercera mayor Justa equivalente al encadenamiento de tres quintas pitagóricas más una quinta pitagórica reducida en una coma sintónica, notamos que las primeras dos quintas equivalen a un tono mayor. Por lo tanto si reducimos cada quinta pitagórica en $-q$, entonces el encadenamiento de esas dos quintas y por tanto el tono mayor se habrá reducido en $-2q$; como se muestra en la Fig. 6.1.

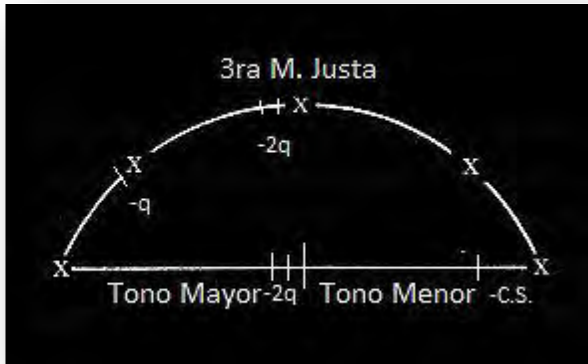


Fig. 6.1. Desviaciones del Tono Mayor y del Tono menor.

Si ahora tomamos en cuenta el encadenamiento de las dos últimas quintas que equivalen a un tono menor, podemos observar que éste es el residuo de la tercera mayor justa y el tono mayor. Dado que la tercera mayor justa es una coma sintónica más angosta que la tercera mayor pitagórica y las dos primeras quintas están desviadas en $-q$, entonces la desviación del tono menor está dada por la diferencia entre menos la reducción de la tercera mayor justa respecto a la pitagórica, i.e. una coma sintónica, y menos la desviación del tono mayor como se puede ver en la Fig. 6.1. Por lo tanto la desviación del tono menor está dada por $1 - 2q$.

Considerando que la tercera mayor equivale a cuatro quintas pitagóricas, cada una alterada en $-q$, como se muestra en la Fig. 6.2., entonces la desviación de esta tercera mayor con respecto a la tercera mayor justa está dada por la diferencia entre la coma sintónica y $4q$, lo que es equivalente a $1 - 4q$. La desviación de la tercera mayor respecto al intervalo justo también la podemos expresar, a partir de lo anterior, en términos de las desviaciones del tono mayor y el tono menor. Entonces dicha desviación equivale a la suma de la desviación del tono menor y la desviación del tono mayor.

Fig. 6.2. Desviación de la Tercera Mayor Justa.

Definiremos como *temperamento negativo* a aquél temperamento regular cuya reducción de la quinta pitagórica de origen a terceras mayores que sean más angostas que una tercera mayor justa. Esto sucede cuando la reducción de la quinta es mayor que 1/4 de coma sintónica. Estos temperamentos cuentan con terceras mayores lobo de acuerdo con nuestra definición al ser más pequeñas que las justas.

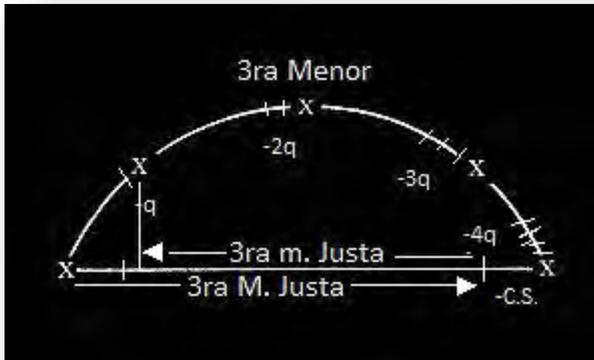


Fig. 6.3. Desviación de la Tercera Menor Justa.

La desviación de la tercera menor justa la podemos deducir a partir de comparar una tercera mayor y una tercera menor en términos de las quintas que las componen. Para ello debemos considerar asimismo, que la tercera menor consiste en el encadenamiento hacia la izquierda de tres quintas pitagóricas cada una reducida en $-q$ y dado que la diferencia entre la tercera mayor y la menor es precisamente una quinta menos su desviación, entonces la desviación de la tercera menor justa está dada por menos la diferencia entre la desviación de la tercera mayor y la de la quinta. Esto equivale a $3q - 1$ como se muestra en la Fig. 6.3.

Si la reducción de la quinta pitagórica es mayor que 1/3 de la coma sintónica, entonces las terceras menores serán más grandes que la tercera menor justa, por lo tanto, de acuerdo con nuestra definición, corresponderán a terceras menores lobo.

Calcular la desviación de las inversiones de las terceras, de la quinta y en general de cualquier intervalo es trivial usando de las propiedades demostradas en el capítulo anterior; basta con cambiar de signo a la desviación del intervalo en cuestión y asignar el nuevo valor a la inversión.

Conocer la desviación de estos intervalos a partir de temperar una quinta pitagórica es sumamente útil porque fija un criterio para evaluar el temperamento en términos de la desviación de la justeza de sus intervalos calculando precisamente la suma de las desviaciones para cada intervalo o la suma de los cuadrados de las desviaciones para cada intervalo.

6.8. Las triadas con batimientos proporcionales y la armoniosidad de un temperamento.

Una *triada* es la descomposición de una quinta en la sucesión de una tercera mayor y una tercera menor o viceversa. El primer caso corresponde a una *triada mayor* mientras que el segundo (tercera menor y tercera mayor) corresponde a una *triada menor.*

Una *triada con batimientos proporcionales* es aquella en la que la *frecuencia de los batimientos* de cada uno de los intervalos que la conforman (la quinta y ambas terceras) están en proporciones dadas por números naturales.

Una propiedad importante es que las inversiones de los intervalos de una triada con batimientos proporcionales también están en proporciones dadas por números naturales.

Otra propiedad relevante es que si uno de los intervalos de la triada es justo, los otros dos tendrán batimientos proporcionales.

La *armoniosidad* (del inglés harmoniousness) es una medida subjetiva de la calidad de un intervalo. La máxima armoniosidad corresponde a los intervalos justos, pero ésta va disminuyendo a medida que aumenta la frecuencia de los batimientos en dichos intervalos.

La *armoniosidad de una triada* es mayor mientras menor sea la frecuencia de los batimientos de los intervalos que la componen.

Una triada es *rítmicamente más armoniosa* en la media que las proporciones del número de batimientos por unidad de tiempo de los intervalos que la componen se aproximen a números naturales más pequeños.

Un temperamento es más *armonioso* en la medida que contenga más triadas con batimientos proporcionales.

Es importante señalar que de esta manera la calidad subjetiva de los sistemas de afinación está, por lo tanto, asociada a propiedades físicas del mismo.

6.9. Evolución de los sistemas de afinación.

Los primeros sistemas en ser afinados fueron escalas pentatónicas, al encadenar 4 quintas, posteriormente se encadenaron otras dos quintas con lo que se afinaron escalas diatónicas. Al juntar estas dos escalas a través del encadenamiento de 11 quintas, se llegó a la afinación pitagórica medieval; con esto se agotaron los recursos dentro del ámbito de la afinación justa para procurar evitar la existencia de intervalos lobo por un lado, y procurar la coexistencia de quintas pitagóricas y terceras justas simultáneamente, por el otro.

De ahí surgieron simultáneamente dos tipos de afinación que involucraban el temperar intervalos justos en su metodología.

Por un lado surgieron los *temperamentos mesotónicos* y por el otro, los *buenos temperamentos*.

Para definir los temperamentos mesotónicos es importante hacer notar que la diferencia entre un tono menor y un tono mayor es precisamente la coma sintónica, que es intervalo que suele usarse como unidad para medir la reducción de las quintas pitagóricas que caracteriza a los diversos temperamentos mesotónicos.

$$\frac{9}{8} \div \frac{10}{9} = \frac{81}{80} = coma\ sintónica \tag{6.10}$$

6.9.1. Temperamentos mesotónicos.

Los *temperamentos mesotónicos* son temperamentos regulares restringidos en los que se temperan 11 quintas reduciéndolas en fracciones de la coma sintónica, para obtener finalmente tonos intermedios entre el tono mayor (segunda mayor pitagórica de proporción 9:8) y el tono menor (segunda mayor justa de proporción 10:9), de tal manera que las terceras mayores sean menores que las terceras pitagóricas y las terceras menores sean mayores que las pitagóricas, procurando la justeza de unas o de otras o, finalmente, buscando un compromiso entre la desviación de la justeza de ambas.

- **La diesis enarmónica en los temperamentos mesotónicos.**

En el capítulo 4 definimos lo que era una diesis enarmónica, ahora veremos cómo se puede calcular su tamaño y veremos su relación con el círculo de quintas cuando ésta proviene de un temperamento mesotónico.

Dado que una diesis enarmónica es la diferencia entre un semitono cromático y uno diatónico, podemos decir que la ésta es la diferencia de afinación entre una nota y la nota enarmónica a doce quintas de distancia de la misma trasladada a la misma octava. Si se trata de un temperamento mesotónico, esa diferencia de afinación es equivalente a calcular la diferencia de afinación entre el encadenamiento de doce quintas pitagóricas reducidas en un intervalo cuya proporción será denotada por r con el encadenamiento de siete octavas justas. Entonces el *tamaño de la diesis* enarmónica, denotado por $|s(de)_u|$, medido en alguna unidad, que corresponde a un intervalo arbitrario de proporción u y donde de es la proporción de frecuencias del intervalo que corresponde a dicha diesis, lo podemos expresar matemáticamente como sigue:

$$|s(de)_u| = \left|12 \cdot s\left(\frac{3/2}{r}\right)_u - 7 \cdot s(2/1)_u\right|$$

$$\Rightarrow |s(de)_u| = |s(cp)_u - 12 \cdot s(r)_u| \tag{6.11}$$

donde cp es la proporción de frecuencias de la coma pitagórica; además, la proporción de frecuencias del intervalo que corresponde a la diesis enarmónica está dada por:

$$\begin{cases} de \uparrow = \dfrac{cp}{r^{12}}, & si\ cp > r^{12}\ , es\ decir, si\ 12\ quintas\ superan\ 7\ octavas. \\ de \downarrow = \dfrac{r^{12}}{cp}, & si\ cp < r^{12}\ , es\ decir, si\ 7\ octavas\ superan\ 12\ quintas. \end{cases}$$
(6.12)

- **La desviación de la 12ª Quinta en un temperamento mesotónico.**

Sea r la proporción del intervalo en que se reduzca cada una de once quintas de la espiral de Quintas Pitagóricas y se exige la condición de que la espiral se cierre en un círculo en siete octavas, entonces podemos conocer el tamaño de la desviación de la 12ª quinta Pitagórica denotado por $s(\delta)_u$ medido en alguna unidad arbitraria representada por el intervalo de proporción u, donde δ es la proporción del intervalo en el que se modifica el tamaño de esta última quinta pitagórica. Esto se expresa de la siguiente manera según si la desviación hace la última quinta más grande o más pequeña.

a) Si la 12ª quinta es más pequeña que la pitagórica:

$$s\left(\frac{3/2}{\delta}\right)_u + 11 \cdot s\left(\frac{3/2}{r}\right)_u = 7 \cdot s(2/1)_u$$

usando $s(a/b)_u = s(a)_u - s(b)_u$ y dado que $s(cp)_u = 12 \cdot s(3/2)_u - 7 \cdot s(2/1)_u$

$$\Rightarrow s(\delta)_u \uparrow = s(cp)_u - 11 \cdot s(r)_u$$
(6.13)

sumando y restando $s(r)_u$ podemos escribir la ec. anterior de la forma

$$s(\delta)_u \uparrow = s(de)_u \uparrow + s(r)_u.$$
(6.14)

b) Si la 12ª quinta es más grande que la pitagórica:

$$s(\delta \cdot 3/2)_u + 11 \cdot s\left(\frac{3/2}{r}\right)_u = 7 \cdot s(2/1)_u$$

tomando en cuenta que $s(a \cdot b)_u = s(a)_u + s(b)_u$ y procediendo como en el inciso anterior tenemos que

$$s(\delta)_u \downarrow = 11 \cdot s(r)_u - s(cp)_u$$
(6.15)

$$\Rightarrow s(\delta)_u \downarrow = s(de)_u \downarrow - s(r)_u.$$
(6.16)

- **Condición para producir tonos intermedios entre el tono mayor y el tono menor.**

Si q equivale a una fracción de la coma sintónica cuyo valor se encuentre entre 0 y 1/2 y las quintas pitagóricas se reducen en esta fracción, entonces en estos temperamentos se obtendrán tonos intermedios entre el tono mayor y el tono menor.

Prueba:

Si q está contenida en el intervalo abierto $(0, 1/2)$ y corresponde a la reducción de cada una de 11 quintas del círculo de quintas pitagóricas, dado que la desviación del tono mayor es $-2q$ y la del tono menor está dada por $1-2q$, entonces la desviación del primero está contenida en el intervalo$(-1,0)$ mientras que la del segundo está limitada por el intervalo $(0,1)$. Luego entonces, se habrán producido tonos intermedios entre ambos.

- **Condición de restricción de los temperamentos mesotónicos.**

Un temperamento mesotónico puede ser un temperamento no restringido si la diesis enarmónica es lo suficientemente pequeña como para no generar intervalo lobo alguno. Como vimos anteriormente, el tamaño de la diesis depende del tamaño de la reducción de las quintas. Ahora mostraremos cuál es la restricción en el tamaño de dicha reducción para que el temperamento no esté restringido.

Cualquier quinta , y en particular la 12ª , no puede ser reducida en una fracción mayor a media coma sintónica ni aumentada en fracción alguna, ya que de lo contrario se generaría una quinta lobo.

Ahora sustituiremos $q = s(r)_{cs}$ y la condición impuesta en el párrafo anterior en la ec. (6.13) y resolveremos para q. De esa manera encontraremos uno de los límites de la reducción de las quintas para tener un temperamento no restringido.

$$1/2 = s(cp)_{cs} - 11q \upharpoonleft$$

$$\Rightarrow q \upharpoonleft = \frac{1}{11}\left(s(cp)_{cs} - 1/2\right)$$

$$\Rightarrow q \upharpoonleft = \frac{1}{11}\left(\frac{\log cp}{\log cs} - \frac{1}{2}\right) \cong \frac{1}{18.6} \tag{6.17}$$

La desviación con respecto a la tercera mayor pitagórica de las 4 terceras mayores que atraviesan la 12ª quinta expresada como una fracción de la coma sintónica es $-\frac{1}{2} - 3q \cong -\frac{2}{3}$, como $-1 < -\frac{2}{3} < 0$, entonces las terceras mayores están entre la tercera mayor pitagórica y la justa y por lo tanto no son terceras lobo.

Por su parte, la desviación con respecto a la tercera menor pitagórica de las 3 terceras menores que atraviesan la 12ª quinta expresada como una fracción de la coma sintónica está dada por $\frac{1}{2}+2q \cong \frac{5}{8}$, una vez más como $0<\frac{5}{8}<1$, entonces las terceras están entre la tercera pitagórica y la justa y por lo tanto no son terceras lobo.

Finalmente el otro límite de la reducción de las quintas lo calcularemos pidiendo que para la ec. (6.15) se satisfaga que la desviación de la 12ª quinta sea cero; i. e.

$$0 = \ 11q \downarrow -s(cp)_{cs}$$

$$\Rightarrow q \downarrow = \frac{1}{11}(s(cp)_{cs})$$

$$\Rightarrow q \downarrow = \frac{1}{11}\left(\frac{\log cp}{\log cs}\right) \cong \frac{1}{10.1} \tag{6.18}$$

En este caso, la desviación con respecto a la tercera mayor pitagórica de las 4 terceras mayores que atraviesan la 12ª quinta expresada como una fracción de la coma sintónica es $-3q \cong -\frac{3}{10}$, como $-1<-\frac{3}{10}<0$, entonces las terceras mayores están entre la tercera mayor pitagórica y la justa y por lo tanto no son terceras lobo.

Por su parte, la desviación con respecto a la tercera menor pitagórica de las 3 terceras menores que atraviesan la 12ª quinta expresada como una fracción de la coma sintónica está dada por $+2q \cong \frac{1}{5}$, una vez más como $0<\frac{1}{5}<1$, entonces las tereceras están entre la Tercera Pitagórica y la Justa y por lo tanto no son terceras lobo.

Entonces mientras $q \in \left[\frac{1}{11}\left(\frac{\log cp}{\log cs}-\frac{1}{2}\right), \frac{1}{11}\left(\frac{\log cp}{\log cs}\right)\right]$ ni las quintas, ni las terceras ni sus respectivas inversiones conformarán intervalos lobo por lo tanto el temperamento no estará restringido.

A partir de estos cálculos podemos también ver en qué intervalo debe estar comprendida la proporción de la diesis enarmónica para que un temperamento mesotónico no esté restringido. Para calcular este intervalo usaremos las ecs. (6.17) y (6.18)

a) Si la reducción es de $\frac{1}{11}\left(\frac{\log cp}{\log cs}-\frac{1}{2}\right)$

$$s(\delta)_{cs} \uparrow = s(de)_{cs} \uparrow + s(r)_{cs}$$

$$\Rightarrow s(de)_{cs} \uparrow = \frac{1}{2}-\frac{1}{11}\left(\frac{\log cp}{\log cs}-\frac{1}{2}\right) \cong \frac{1}{2.2} \tag{6.19}$$

En números redondos, en la medida que el tamaño de la diesis enarmónica no exceda $1/2$ de la coma sintónica y el encadenamiento de doce quintas reducidas supere al de siete octavas justas, entonces el temperamento no estará restringido.

b) Si la reducción es de $\frac{1}{11}\left(\frac{\log cp}{\log cs}\right)$

$$\Rightarrow\ s(\delta)_{cs}\downarrow = s(de)_{cs}\downarrow - s(r)_{cs}$$

$$\Rightarrow s(de)_{cs}\downarrow = \frac{1}{11}\left(\frac{\log cp}{\log cs}\right) \cong \frac{1}{10.1} \tag{6.20}$$

De manera similar en la medida que el tamaño de la diesis enarmónica no supere $1/10$ de la coma sintónica y el encadenamiento de 12 quintas reducidas sea más pequeño que el de 7 octavas, entonces el temperamento no estará restringido.

A partir de la ecs. (6.19) y (6.20) se puede enunciar que si se restringe $s(de)_{cs}$ al intervalo $\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{2}\right)$, entonces el temperamento mesotónico no estará restringido.

A continuación veremos cuatro de los temperamentos mesotónicos más significativos expresados en términos de la reducción de cada una de las quintas pitagóricas que los componen.

- **Temperamento de 1/4 de coma sintónica de Aron** (1523)**.**

Este es el único temperamento estrictamente mesotónico ya que es el único que produce tonos cuya proporción equivale exactamente a la media geométrica entre el tono mayor y el tono menor como se muestra en la tabla de abajo. Dado que cada quinta se reduce en 1/4 de la coma sintónica, entonces todas las terceras mayores del círculo de quintas son justas excepto las 4 que atraviesan la quinta falsa.

El tamaño de la diesis enarmónica en términos de la coma sintónica de acuerdo con la ec. (6.11) es

$$|s(de)_{cs}| = |s(cp)_{cs} - 12 \cdot s(r)_{cs}| = \left|s(cp)_{cs} - 12 \cdot \frac{1}{4}\right| = |s(cp)_{cs} - 3|,$$

por lo tanto la proporción de la diesis enarmónica es

$$de = \frac{cs^3}{cp} = \frac{\left(\frac{3^4}{2^4 \cdot 5}\right)^3}{\frac{3^{12}}{2^{19}}} = \frac{2^7}{5^3} = \frac{128}{125} = diesis\ menor \equiv dm. \tag{6.21}$$

A partir de lo anterior el tamaño de la desviación de la quinta falsa en términos de la coma sintónica es:

$$s(\delta)_{cs} = s(de)_{cs} - s(r)_{cs} = s(dm)_{cs} - \frac{1}{4} = \frac{\log dm}{\log cs} - \frac{1}{4} \cong 1.65915584$$

luego

$$\delta = \frac{dm}{\sqrt[4]{cs}} \cong 1.02082477. \tag{6.22}$$

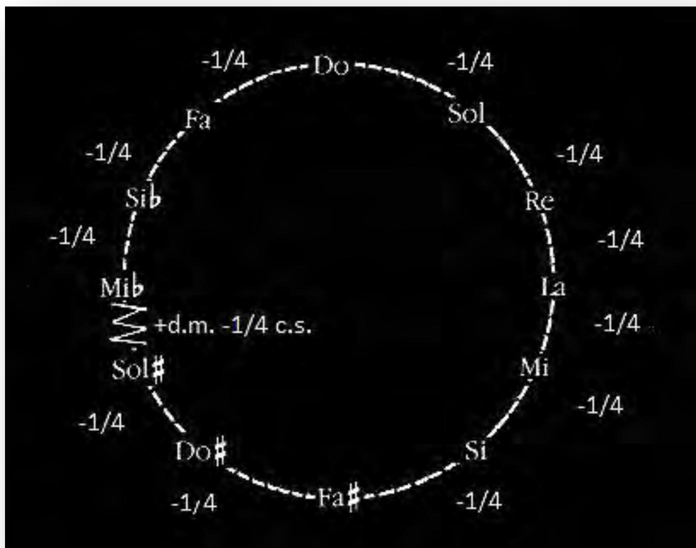


Fig. 6.4. Temperamento de 1/4 de Coma Sintónica.

- **Temperamento de 1/3 de coma sintónica de Salinas** (1577)**.**

Este temperamento produce terceras menores justas ya que cada tres quintas se verán reducidas en una coma sintónica exceptuando a las 3 que atraviesen la quinta falsa. Además, es un temperamento negativo ya que como se puede apreciar en la siguiente tabla, si bien las terceras menores son justas, las mayores son más angostas que las terceras mayores justas.

En este caso la proporción de la diesis enarmónica la deduciremos de forma análoga a partir de la misma relación.

$$|s(de)_{cs}| = |s(cp)_{cs} - 12 \cdot s(r)_{cs}| = \left|s(cp)_{cs} - 12 \cdot \frac{1}{3}\right| = |s(cp)_{cs} - 4|$$

$$\Rightarrow de = \frac{cs^4}{cp} = \frac{\left(\frac{3^4}{2^4 \cdot 5}\right)^4}{\frac{3^{12}}{2^{19}}} = \frac{2^3 \cdot 3^4}{5^4} = \frac{648}{625} = diesis\, mayor \equiv dM.$$

(6.23)

A partir de lo anterior el tamaño de la desviación de la quinta falsa en términos de la coma sintónica es:

$$s(\delta)_{cs} = s(de)_{cs} - s(r)_{cs} = s(dM)_{cs} - \frac{1}{3} = \frac{\log dM}{\log cs} - \frac{1}{3} \cong 2.57582251$$

luego

$$\delta = \frac{dM}{\sqrt[3]{cs}} \cong 1.03251565.$$

(6.24)

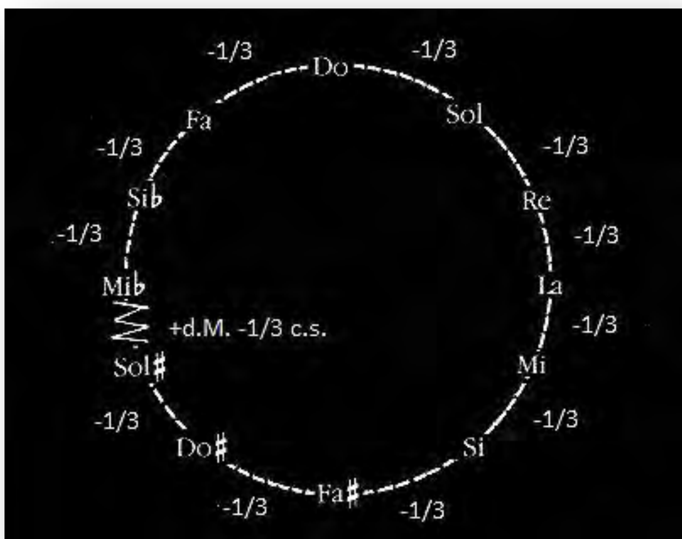


Fig. 6.5. Temperamento de 1/3 de coma sintónica.

Estos dos temperamentos mesotónicos hacen evidente una vez más la incompatibilidad entre terceras mayores justas y las terceras menores justas.

- **Temperamento de 2/7 de coma sintónica de Zarlino** (1558)**.**

Este temperamento fue concebido de tal manera que produjera terceras que mediaran la justeza entre el intervalo mayor y el menor. Lo anterior es consecuencia de que una tercera mayor más una menor en el círculo de quintas equivale a 7 quintas entre las que se reparten dos comas sintónicas reduciendo cada una de esas quintas en 2/7 de la coma sintónica. Este temperamento también es negativo ya que las terceras mayores son más angostas que las justas.

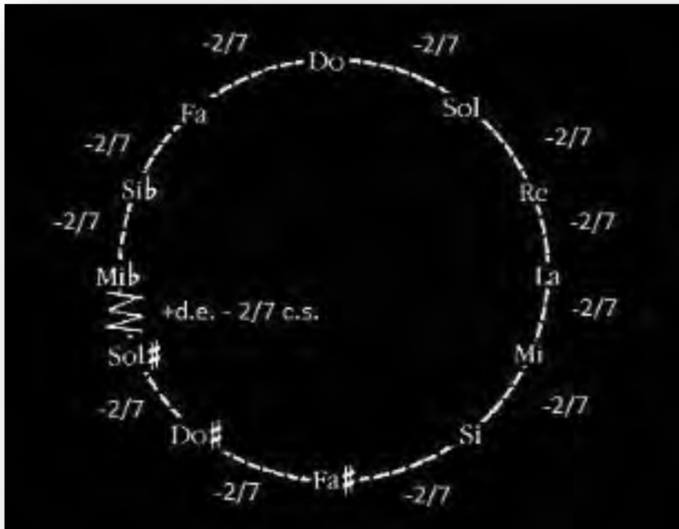


Fig. 6.6. Temperamento de 2/7 de coma sintónica.

La proporción de la diesis en este caso está dada por:

$$|s(de)_{cs}| = |s(cp)_{cs} - 12 \cdot s(r)_{cs}| = \left|s(cp)_{cs} - 12 \cdot \frac{2}{7}\right| = \left|s(cp)_{cs} - \frac{24}{7}\right|$$

$$\Rightarrow de = \frac{cs^{\frac{24}{7}}}{cp} = \frac{\left(\frac{3^4}{2^4 \cdot 5}\right)^{\frac{24}{7}}}{\frac{3^{12}}{2^{19}}} = \frac{3^{12/7} \cdot 2^{37/7}}{5^{24/7}} = diesis\ enarmónica$$

$$\Rightarrow de \cong 1.02946624. \tag{6.25}$$

En consecuencia, el tamaño de la desviación de la quinta falsa en términos de la coma sintónica es:

$$s(\delta)_{cs} = s(de)_{cs} - s(r)_{cs} = s(de)_{cs} - \frac{2}{7} = \frac{\log de}{\log cs} - \frac{2}{7} \cong 2.05201222,$$

por lo tanto la proporción de la desviación de esta quinta está dada por:

$$\delta = \frac{de}{cs^{2/7}} = \frac{\frac{3^{12/7} \cdot 2^{37/7}}{5^{24/7}}}{\left(\frac{3^4}{2^4 \cdot 5}\right)^{2/7}} = \frac{3^{4/7} \cdot 2^{45/7}}{5^{22/7}} \cong 1.02581885.$$

(6.26)

- **Temperamento de 1/6 de coma sintónica de Silbermann** (~1650**).**

Se le considera un temperamento mesotónico muy relevante después del temperamento de 1/4 de coma sintónica (ver *[4]* p. 106), ya que históricamente tuvo un período de gran aceptación -antes de que se instaurara el temperamento igual que más adelante describiremos- debido a que es un temperamento intermedio entre este último y el de 1/4 de coma sintónica. Este temperamento corrige en las direcciones adecuadas tanto a las terceras mayores como a las menores dado que 1/6<1/4 como podemos verificar en la siguiente subsección de este capítulo.

La proporción de la diesis en este caso está dada por:

$$|s(de)_{cs}| = |s(cp)_{cs} - 12 \cdot s(r)_{cs}| = \left|s(cp)_{cs} - 12 \cdot \frac{1}{6}\right| = |s(cp)_{cs} - 2|$$

$$\Rightarrow de = \frac{cs^2}{cp} = \frac{\left(\frac{3^4}{2^4 \cdot 5}\right)^2}{\frac{3^{12}}{2^{19}}} = \frac{2^{11}}{3^4 \cdot 5^2} = \frac{2048}{2025} = diesis\ enarmónica.$$

(6.27)

De ahí que el tamaño de la desviación de la quinta falsa en términos de la coma sintónica sea

$$s(\delta)_{cs} = s(de)_{cs} - s(r)_{cs} = s(de)_{cs} - \frac{1}{6} = \frac{\log de}{\log cs} - \frac{1}{6} \cong 0.74248917,$$

(6.28)

por lo tanto, la proporción de la desviación de esta quinta está dada por

$$\delta = \frac{de}{cs^{1/6}} = \frac{\frac{2^{11}}{3^4 \cdot 5^2}}{\left(\frac{3^4}{2^4 \cdot 5}\right)^{1/6}} = \frac{2^{70/6}}{3^{28/6} \cdot 5^{11/6}} \cong 1.00926625.$$

(6.29)

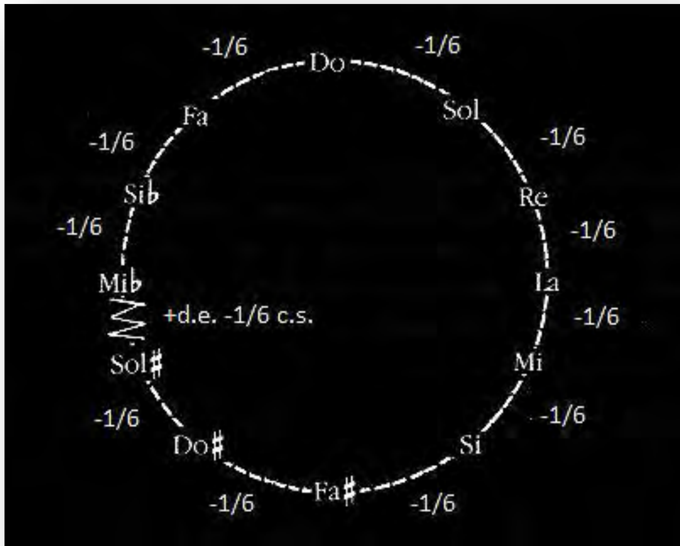


Fig. 6.7. Temperamento de 1/6 de coma sintónica.

- **Evaluación de los temperamentos mesotónicos.**

En la tabla se muestra la evaluación de los temperamentos recién definidos y además la de la afinación pitagórica.

	Temperamento o Afinación	**1/3**	**2/7**	**1/4**	**1/6**	**Pit.**
Fórmula	**Desviación de Intervalo**	**Fracción de la coma sintónica.**				
$-q$	Reducción de la quinta	-1/3	-2/7	-1/4	-1/6	0
$+q$	Aumento de la cuarta	+1/3	+2/7	+1/4	+1/6	0
$-2q$	Reducción del tono mayor	-2/3	-4/7	-2/4	-2/6	0
$1-2q$	Aumento del tono menor	+1/3	+3/7	+2/4	+4/6	+1
$1-4q$	Desviación de la tercera mayor	-1/3	-1/7	0	+2/6	+1
$3q-1$	Desviación de la tercera menor	0	-1/7	-1/4	-3/6	-1

De la tabla anterior podemos observar que nuestras fórmulas son congruentes con la afinación pitagórica, ya que si no temperamos las quintas, entonces recuperamos este sistema de afinación. Además, si observamos las desviaciones del tono mayor y del tono menor en el temperamento de 1/4 de coma sintónica, podemos notar que es el único que puede reproducir tonos que corresponden a la media geométrica entre ambos ya que se presenta exactamente la misma desviación pero con signos opuestos respectivamente. También podemos observar que en efecto el temperamento de 2/7 de coma compromete equitativamente la justeza de la tercera mayor y la de la menor y que tanto el temperamento de 1/3 de coma como el de 2/7 son negativos debido a la reducción de las terceras mayores justas.

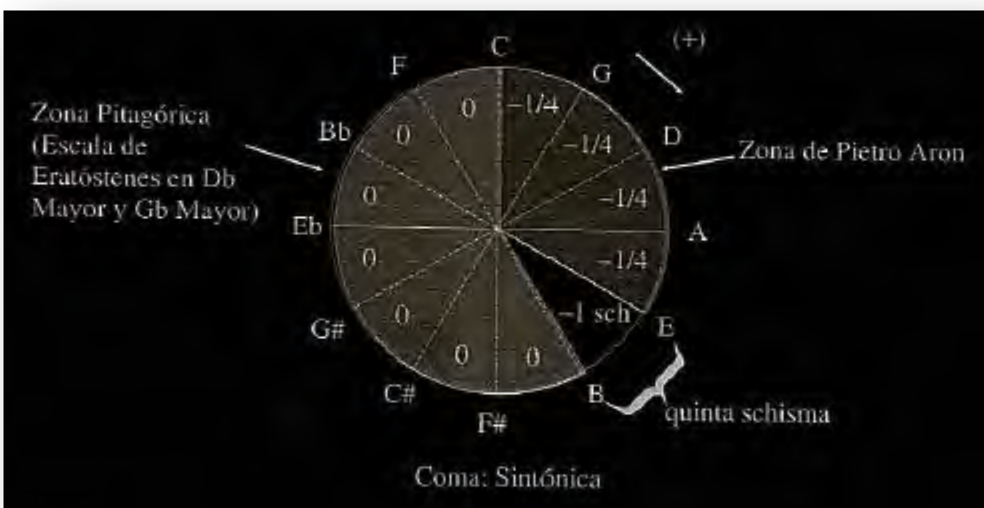
6.9.2. Buenos temperamentos.

Los *buenos temperamentos* son temperamentos irregulares en los que reparte la coma pitagórica de manera inhomogénea en diversas quintas, con ello se logra que la desigualdad de que la quinta falsa adquiera una proporción adecuada para que el intervalo lobo desaparezca; además, ninguna de las quintas puede producir intervalos lobo. Por lo tanto son temperamentos no restringidos, y en consecuencia, las enarmonías se pueden utilizar libremente permitiendo la modulación a cualquier tonalidad.

El *contraste tonal* es una cualidad de los temperamentos irregulares que es consecuencia de tener quintas de diferentes proporciones que dividen la octava en 12 semitonos cuyos tamaños estarán distribuidos de manera inhomogénea a lo largo de la octava y es por tanto una característica intrínseca, física y audible de los buenos temperamentos.

Para que un temperamento sea buen temperamento, además de no estar restringido, debe existir contraste tonal entre cualesquiera dos tonalidades no enarmónicas (*ver p. 246 de [2]*), ello implica que cada tonalidad debe tener su propio "patrón de afinación", conocido como *color tonal o Affekt*. Por lo tanto, no pueden existir más de 6 quintas consecutivas con la misma proporción de frecuencias, ya que son precisamente seis quintas consecutivas las que definen la escala diatónica que caracteriza a cada tonalidad.

En las siguientes figuras, se muestran los esquemas de algunos de los buenos temperamentos más representativos. Los dos primeros surgieron de temperamentos mesotónicos, además, en muchos de éstos surge la *quinta schismática*, que es una quinta reducida en un schisma.



.

Fig.6.8. Buen temperamento de Niedhardt-Arón de **1/4** de coma sintónica (1732).

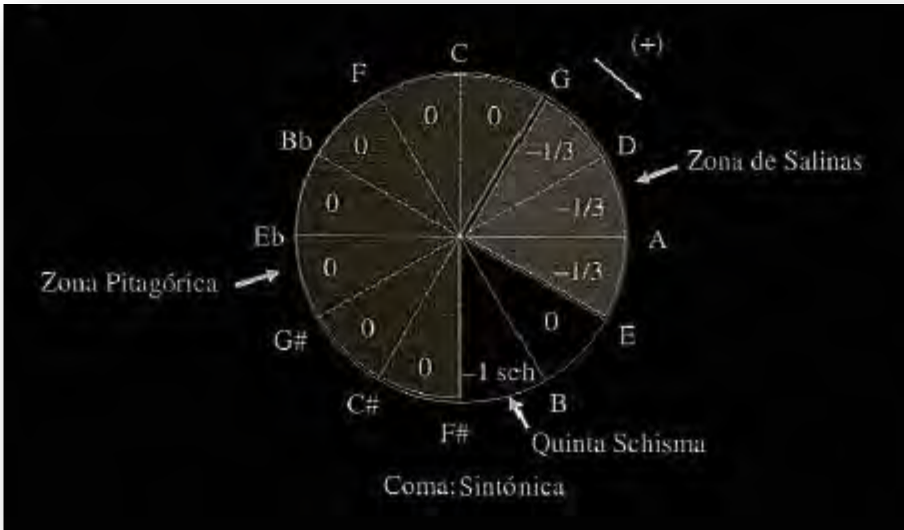


Fig. 6.9. Buen temperamento de $1/3$ de coma sintónica (?).

Es importante notar que los dos temperamentos anteriores (Figs. 6.8. y 6.9.) resultan de dividir la coma sintónica, lo que da nos permite identificar dos zonas de afinación y a una quinta schismática. La zona pitagórica de ambos temperamentos corresponde a la afinación de las mismas dos escalas diatónicas en cada caso, i.e. las escalas mayores de Eratóstenes en Re bemol y en Sol bemol. Esto implica que las dos tonalidades asociadas a dichas escalas tengan el mismo color tonal, aun así, ambos sistemas de afinación son aceptados como buenos temperamentos (a pesar de que no exista un color diferente para cada tonalidad no enarmónica). Por otra parte, las zonas de Aron y Salinas respectivamente son el vestigio de haber convertido los correspondientes temperamentos mesotónicos en buenos temperamentos. Así mismo, el schisma resulta del faltante de la coma sintónica para convertirse en pitagórica.

A continuación se presentan, en el sentido más estricto, dos buenos temperamentos que resultan de la división de la coma pitagórica. Como hemos visto, el encadenamiento de 6 quintas genera las notas de una escala diatónica. La diferente coloración tonal, resulta entonces, de los 12 diferentes encadenamientos de 6 quintas consecutivas que se pueden hacer a lo largo del círculo de quintas, ya que cada uno de ellos está constituido por un patrón diferente de quintas.

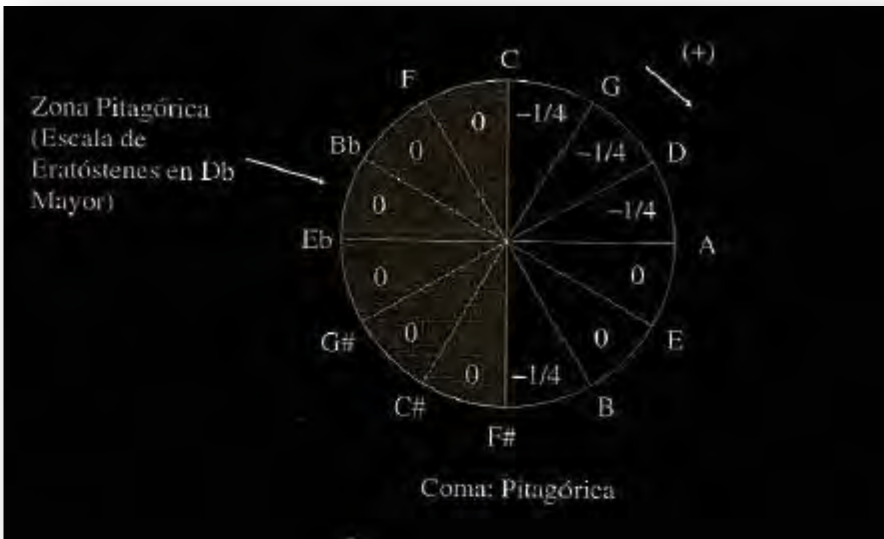


Fig. 6.10. Buen temperamento de Werckmeister I de **1/4** de coma pitagórica (1681).

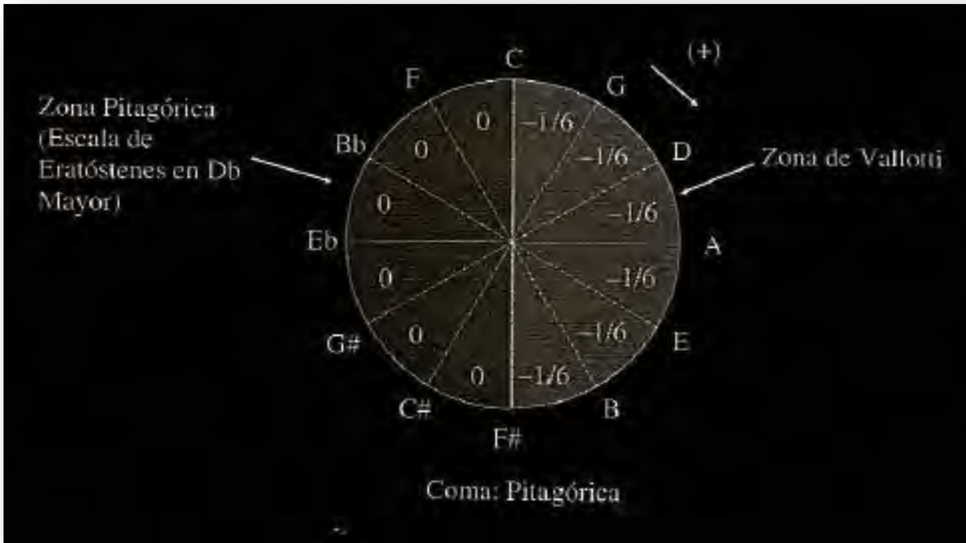


Fig. 6.11. Buen temperamento de Valotti-Young de $\mathbf{1/6}$ de coma pitagórica (~1650-1781).

Finalmente, en la Fig. 6.12. se muestra un temperamento de Thomas Young considerado como el mejor buen temperamento. Según algunos, entre ellos, Jorgensen y Esbrí, este sistema de afinación es mejor incluso que el temperamento igual (que enseguida discutiremos) debido a dos razones: (1) el sutil cambio de coloración de tonalidad en tonalidad que se experimenta a medida que se recorre el círculo de quintas y (2) que es el temperamento con mayor número de *triadas con batimientos proporcionales* y por tanto, el que tiene mayor armoniosidad. ("Acústica Musical y Afinación de Pianos, Esbrí, p. 193).

Fig. 6.12. Temperamento representativo de Thomas Young (1800).

6.9.3. El temperamento igual estándar.

El *temperamento igual estándar* o simplemente *temperamento igual* reúne características de un buen temperamento y de mesotónico, ya que es, por una parte un temperamento regular (sin coloración tonal), y por la otra, no restringido. Por estas razones no se puede catalogar ni como buen temperamento ni como mesotónico. Éste es tan relevante en nuestros días que será discutido ampliamente en la siguiente sección.

Fig. 6.13. Temperamento igual de **1/12** de coma pitagórica (1917).

6.9.4. Rivales del temperamento igual estándar.

Los *rivales del temperamento igual* son temperamentos en los que se llegan a temperar octavas para cerrar el círculo de quintas, otra rama de estos temperamentos corresponde a temperamentos irregulares que admiten quintas más grandes que la quinta pitagórica.

6.10. El temperamento igual.

El *temperamento igual* que de ahora en adelante denotaremos como *TI*, consiste en dividir geométricamente la octava justa en doce intervalos idénticos, lo que incide en dividir geométricamente la coma pitagórica también en doce partes iguales y repartir cada una de ellas en cada una de las quintas de la espiral de quintas pitagóricas para que ésta se cierre en un círculo. Basta con concebir el encadenamiento de 12 quintas pitagóricas reducidas en 1/12 de coma pitagórica cada una para que la espiral de 12 quintas pitagóricas efectivamente se torne un círculo de quintas igualmente temperadas. La doceava quinta, generará el primer enarmónico, si seguimos encadenando quintas de la manera adecuada, podemos generar todos los enarmónicos, pero con la característica única de que estos van a coincidir en afinación. Lo anterior se puede replantear diciendo que las diesis enarmónicas desaparecen, es decir, no existe diferencia entre los semitonos cromáticos y los diatónicos. Desde el punto de vista de la afinación, cada uno de los 12 intervalos en el que la octava queda dividida equivale a un semitono cromático o diatónico indistintamente.

El problema se puede ver matemáticamente y relacionado con la física de la siguiente manera.

Partiremos de una frecuencia fundamental f_1, que caracteriza la altura de alguna nota. La condición que hemos planteado previamente, es que lleguemos a una octava justa después de encadenar 12 intervalos idénticos de proporción c. Cómo hicimos ver en el capítulo anterior, matemáticamente esto se expresa de la siguiente manera:

$$f_1 \cdot c^{12} = 2f_1, \tag{6.30}$$

lo que implica que $c = \sqrt[12]{2}$; donde c corresponde a la proporción de frecuencias de un semitono de TI. Las diesis enarmónicas no existen y por tanto tampoco los intervalos lobo, luego el semitono de TI puede ser indistintamente un semitono cromático o diatónico ya que ambos coinciden en afinación. Entonces cualquier nota puede ser sustituida libremente por cualquier nota enarmónica, lo que conlleva que cualquier tonalidad tendrá el mismo "patrón de afinación", es decir, todos los intervalos en todas las tonalidades mantendrán inmutadas sus respectivas proporciones por lo que la coloración tonal no existe.

Existe una convención adicional para afinar el temperamento igual; esta convención es que la frecuencia fundamental de la nota La5 sea de 440Hz.

Recapitulando, hay tres consecuencias fundamentales de afinar el temperamento igual; la primera es que debido a que las diesis enarmónicas desaparecen, la modulación a cualquier tonalidad no está restringida; la segunda, es que dada la naturaleza matemática a partir de la cual surgen los intervalos de TI, ninguno de ellos, salvo la octava justa, son intervalos justos. Es decir, que cada intervalo está desafinado de la afinación justa visto desde el contexto más amplio posible ya que todas las proporciones correspondientes a dichos intervalos son números irracionales. Esto significa que los intervalos de TI no provienen de la serie armónica sino de una división geométrica de la octava justa que corresponde a la sucesión de semitonos de TI; finalmente, la tercera consecuencia es que no existe la coloración tonal debido a que los semitonos que componen los intervalos provienen precisamente de una división geométrica de la octava justa. Ello implica que la escala cromática de TI es una serie melódica.

6.10.1. La unidad del temperamento igual.

Estas características tan particulares del TI lo han hecho tan importante que la unidad más socorrida para medir el tamaño de los intervalos se desprende de él.

- **Definición de cent.**

Un cent es la unidad para medir intervalos musicales que corresponde a la centésima parte de un semitono de TI. Matemáticamente se expresa como la división geométrica de una octava en 1200 partes.

$$1\ cent \equiv \sqrt[1200]{2}. \tag{6.31}$$

Fácilmente podemos comprobar que

$$100\ cents = \left(\sqrt[1200]{2}\right)^{100} = \sqrt[12]{2} = 1\ semitono\ de\ TI. \tag{6.32}$$

- **Medición de los intervalos musicales en cents.**

Como hemos visto, el tamaño de los intervalos previamente definidos en el capítulo 4 se caracteriza por una proporción de frecuencias expresada como una fracción simple. Si pretendemos saber cuántas veces cabe 1 cent en esta proporción, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$\frac{a}{b} = \left(\sqrt[1200]{2}\right)^{n}. \tag{6.33}$$

De aquí podemos notar que n corresponde al número de veces que hay que encadenar un cent para abarcar el intervalo cuya proporción de frecuencias es a/b. De esta manera el despejar n nos permitirá saber el tamaño del intervalo en cents.

$$s(a/b)_{cent} \equiv n = 1200\frac{log(a/b)}{log2} \tag{6.34}$$

donde $s(a/b)_{cent}$ es el tamaño del intervalo en cents.

6.10.2. Comparación del tamaño de los intervalos justos y los intervalos de TI.

El TI es la afinación más homogénea que existe, y por ello ha tenido gran aceptación, pero debemos notar que los valores en cents de terceras y sextas de TI se aproximan más a los de las terceras y sextas pitagóricas que a los de las justas. Ésta es una de las características más criticadas de este temperamento. Sin embargo, en contraparte, para la música atonal, el hecho de que todas las tonalidades tengan un mismo color, fue una cualidad deseada ya que esta corriente musical surgió precisamente en oposición a la tonalidad. En este contexto, se pretendía acabar con la jerarquía de ciertas notas sobre otras, de tal manera que, mientras la coloración tonal resalta dicha jerarquía, el TI la disimula mejor que cualquier otra afinación. Otra cualidad contrastante con los buenos temperamentos es que es muy poco rítmicamente armonioso, ya que no consta de una sola triada con batimientos proporcionales. Finalmente podemos notar que el temperamento igual, de la misma forma que el resto de los temperamentos mesotónicos positivos y los buenos temperamentos, da origen a intervalos intermedios entre la afinación justa y la pitagórica con excepción de la cuarta, la quinta y la octava. Es en ese sentido que las afinaciones justa y pitagórica representan los dos extremos en la afinación. En particular, como la proporción de la segunda mayor de TI está entre 9/8 y 10/9, entonces es también un temperamento de tono medio.

En la siguiente tabla se muestra el tamaño en cents de los intervalos justos más relevantes comparados con los respectivos intervalos de TI.

Intervalo Musical	**Proporción de Frecuencias**		**Tamaño en Cents**
Octava Justa	2		1200
Séptima Mayor Pitagórica	243/128	$= 1.8984375$	1109.78
Séptima Mayor de TI	$2^{11/12}$	$\cong 1.887749$	1100
Séptima Mayor Justa	15/8	$= 1.875$	1088.27
Séptima Menor Justa	9/5	$= 1.8$	1017.60
Séptima Menor de TI	$2^{10/12}$	$\cong 1.781797$	1000
Séptima Menor Pitagórica	16/9	$= 1.\overline{7}$	996.09
Sexta Mayor Pitagórica	27/16	$= 1.6875$	905.87
Sexta Mayor de TI	$2^{9/12}$	$\cong 1.681793$	900
Sexta Mayor Justa	5/3	$= 1.\overline{6}$	884.36
Sexta Menor Justa	8/5	$= 1.6$	813.69
Sexta Menor de TI	$2^{9/12}$	$\cong 1.587401$	800
Sexta Menor Pitagórica	128/81	$= 1.\overline{580246913}$	792.18
Quinta Pitagórica	3/2	$= 1.5$	701.96
Quinta “Justa” de TI	$2^{7/12}$	$\cong 1.498307$	700
Quinta Disminuida Pitagórica	729/512	$= 1.423828125$	611.73
Tritono de TI	$2^{6/12}$	$\cong 1.414214$	600
Cuarta Aumentada Justa	7/5	$= 1.4$	582.51
Cuarta de “Justa” TI	$2^{5/12}$	$\cong 1.334840$	500
Cuarta Pitagórica	4/3	$= 1.\overline{3}$	498.04
Tercera Mayor Pitagórica	81/64	$= 1.265625$	407.82
Tercera Mayor de TI	$2^{4/12}$	$\cong 1.259921$	400
Tercera Mayor Justa	5/4	$= 1.25$	386.31
Tercera Menor Justa	6/5	$= 1.2$	315.64
Tercera Menor de TI	$2^{3/12}$	$\cong 1.189207$	300
Tercera Menor Pitagórica	32/27	$= 1.\overline{185}$	294.13
Segunda Mayor Pitagórica	9/8	$= 1.125$	203.91
Segunda Mayor de TI	$2^{2/12}$	$\cong 1.122462$	200
Segunda Mayor Justa	10/9	$= 1.\overline{1}$	182.40
Segunda Menor Justa	15/16	$= 0.9335$	111.73
Segunda Menor de TI	$2^{1/12}$	$\cong 1.059463$	100
Segunda Menor Pitagórica	253/243	$\cong 1.0411522633744855$	90.22

6.10.3. Tamaño en cents de otros intervalos relevantes.

A continuación se muestra el tamaño en cents de otros intervalos importantes.

Intervalo	Proporción de Frecuencias		Tamaño en Cents
Coma Pitagórica	$531441/524288$	$\cong 1.013643$	23.46
$1/4$ de Coma Pitagórica	$(531441/524888)^{1/4}$	$\cong 1.003394$	5.87
$1/6$ de Coma Pitagórica	$(531441/524888)^{1/6}$	$\cong 1.002261$	3.91
$1/12$ de Coma Pitagórica	$(531441/524888)^{1/12}$	$\cong 1.001130$	1.79
Coma Sintónica	$81/80$	$= 1.0125$	21.51
$1/2$ de Coma Sintónica	$(81/80)^{1/2}$	$\cong 1.006231$	10.75
$1/3$ de Coma Sintónica	$(81/80)^{1/3}$	$\cong 1.004149$	7.17
$2/7$ de Coma Sintónica	$(81/80)^{2/7}$	$\cong 1.003555$	6.14
$1/4$ de Coma Sintónica	$(81/80)^{1/4}$	$\cong 1.003110$	5.38
$1/6$ de Coma Sintónica	$(81/80)^{1/6}$	$\cong 1.002072$	3.58
Schisma	$32805/32768$	$\cong 1.001129$	1.95
de $1/6$ de Coma Sintónica	$2048/2025$	$= 1.01\overline{135802469}$	19.55
dM $1/3$ de Coma Sintónica	$648/625$	$= 1.0368$	62.57
de $2/7$ de Coma Sintónica	$3^{12/7} \cdot 2^{37/7}/5^{24/7}$	$\cong 1.029466$	50.28
dm $1/4$ de Coma Sintónica	$128/125$	$= 1.024$	41.06
δ $1/4$ de Coma Sintónica	$\dfrac{128/125}{\sqrt[3]{81/80}}$	$\cong 1.02082477$	35.68
δ $2/7$ de Coma Sintónica	$3^{4/7} \cdot 2^{45/7}/5^{22/7}$	$\cong 1.02581885$	44.13
δ $1/3$ de Coma Sintónica	$\dfrac{648/625}{\sqrt[3]{81/80}}$	$\cong 1.03251565$	55.40
δ $1/6$ de Coma Sintónica	$2^{70/6}/3^{28/6} \cdot 5^{11/6}$	$\cong 1.00926625$	15.97
$de \uparrow_{\max}$ Temperamento M.T.	$\dfrac{(81/80)^{12/22}}{(531441/524888)^{1/11}}$	$\cong 1.005664$	9.78
$de \downarrow_{\min}$ Temperamento M.T.	$(531441/524888)^{1/11}$	$\cong 1.001129$	1.95
$\delta \uparrow_{\min}$ Temperamento M.T.	$(81/80)^{1/2}$	$\cong 1.006231$	10.75
$\delta \downarrow_{\min}$ Temperamento M.T.	0	$= 0$	0
$r \uparrow_{\max}$ Temperamento M.T.	$\dfrac{\sqrt[11]{531441/524888}}{\sqrt[22]{81/80}}$	$\cong 1.000563$	1.00
$r \downarrow_{\min}$ Temperamento M.T.	$\sqrt[11]{531441/524888}$	$\cong 1.001129$	1.95

En la tabla anterior, de es la diesis enarmónica, dM y dm son las diesis mayor y menor, δ es la desviación de la 12ª quinta, r es la reducción de cada quinta y finalmente $de \uparrow$, $de \downarrow$, $\delta \uparrow_{\min}$, $\delta \downarrow_{\min}$, $r \uparrow_{\max}$ y $r \downarrow_{\min}$ fueron calculados a partir de las ecs. 6.11-6.20 de tal manera que los temperamentos mesotónicos dejen de ser restringidos.

6.11. La circularidad de las afinaciones regulares y la división múltiple de la octava en partes iguales.

Con la finalidad de hacer desaparecer la quinta del lobo, se han hecho aproximaciones de las afinaciones regulares por medio de series melódicas, es decir a través de la división geométrica de la octava en intervalos más pequeños que el semitono denominados *microtonos*. Dichas divisiones se hacen a partir de extender el círculo de quintas de tal manera que se genere una coma *ad hoc* a partir de la comparación de los correspondientes encadenamientos de quintas y octavas. Cuando dicha coma tiene la proporción adecuada, se puede aproximar razonablemente este encadenamiento de quintas a una división de la octava que genere intervalos cercanos a los de la afinación regular. Dicha división corresponde un temperamento igual que, en general, consta de más de doce partes.

A continuación se muestran dos ejemplos sumamente comunes y el sistema de afinación árabe.

6.11.1. División en 53 partes o Sistema de Holder.

Esta es una aproximación a la afinación pitagórica que da origen a la famosa división del tono en 9 comas.

El sistema surge de comparar el encadenamiento de 53 quintas con 31 octavas. De éste surge un sistema de afinación cuya coma resultante, llamada *coma de Mercator*, es aproximadamente 1/6 de la pitagórica.

$$coma\ de\ Mercator \equiv c_{53} = \frac{3/2^{53}}{2/1^{31}} = \frac{3^{53}}{2^{84}}, \tag{6.35}$$

cuyo tamaño en cents es

$$s\left(\frac{3^{53}}{2^{84}}\right)_{cent} = 1200\frac{log(3^{53}/2^{84})}{log2} \cong 3.62. \tag{6.36}$$

El siguiente paso es repartir esta coma entre las 53 quintas para obtener un temperamento igual análogo a TI. Así se origina la *coma de Holder* equivalente a la división geométrica de la octava en 53 partes.

$$c_{53} = \sqrt[53]{2} \cong 1.013164 \tag{6.37}$$

por lo que el tamaño en cents de la coma está dado por

$$s(\sqrt[53]{2})_{cent} = \frac{1200}{53} \cong 22.64\ cents. \tag{6.38}$$

Finalmente, cada tono constará de 9 comas de Holder, el tono estará dividido por un semitono cromático de 5 comas y uno diatónico de 4.

Lo anterior implica que en cada tonalidad se pueden construir escalas diatónicas muy aproximadas a la escala diatónica pitagórica, ya que la división de la octava se puede ver de la siguiente manera:

$$\mathrm{T + T + S.D. + T + T + T + S.D.} = 9 + 9 + 4 + 9 + 9 + 9 + 4 = 53.$$

Es así que este sistema, en analogía con el pitagórico, tiene también tonos de un solo tamaño divididos en semitonos distintos, terceras mayores conformadas como un ditono, y por la manera en que fue construido, consta de terceras y quintas casi pitagóricas como se muestra en la siguiente tabla..

Intervalo	No. de Partes	Cents 53 Partes	Cents A. Pit.	Diferencia (Cents)
quinta	31/53	701.89	701.95	-0.6
tercera mayor	18/53	407.55	407.82	-0.27
tercera menor	13/53	294.34	294.13	0.21
tono	9/53	203.77	203.91	-0.14
S.D.	4/53	90.57	90.23	0.34
S.C.	5/53	113.20	113.69	-0.40

6.11.2. División en 31 partes.

De manera análoga, este sistema es una aproximación al temperamento mesotónico de 1/4 de coma. La coma en este caso tiene la siguiente proporción:

$$c_{31} = \sqrt[31]{2} \cong 1.022611 \tag{6.39}$$

y su tamaño en cents es

$$s(\sqrt[31]{2})_{cent} = \frac{1200}{31} \cong 38.71\ cents. \tag{6.40}$$

En este caso la quinta está conformada por 18 comas, misma que está dividida en una tercera mayor de 10 y una menor de 8. La tercera mayor equivale a un ditono y cada tono a su vez está dividido en un semitono cromático de 2 comas y uno diatónico de 3. De tal manera que las escala diatónica tiene la siguiente estructura.

$$\mathrm{T} + \mathrm{T} + \mathrm{S.D.} + \mathrm{T} + \mathrm{T} + \mathrm{T} + \mathrm{S.D.} = 5 + 5 + 3 + 5 + 5 + 5 + 3 = 31.$$

Intervalo	No. de Partes	Cents 31 Partes	Cents 1/4 de cs	Diferencia (Cents)
Quinta	18/31	696.77	696.58	0.19
tercera mayor	10/31	387.10	386.31	0.79
tercera menor	8/31	309.68	310.26	0.58
Tono	5/31	193.55	193.16	0.39
S.D.	3/31	116.13	117.11	-0.98
S.C.	2/31	77.42	76.05	0.37

Es importante notar que en ambas aproximaciones la diferencia entre los intervalos de la afinación regular y los del temperamento igual microtonal es menor a un cent.

Así mismo, el temperamento de 1/3 de cs se aproxima por una división de 19 partes, el de 2/7 por una de 50 y el de 1/6 por una de 55.

6.11.3. División en 17 partes. La afinación árabe.

La afinación árabe se puede construir a partir de la división en 17 partes de la octava. La coma correspondiente tiene la siguiente proporción

$$c_{17} = \sqrt[17]{2} \cong 1.041616$$

Y su tamaño en cents es

$$s(\sqrt[17]{2})_{cent} = \frac{1200}{17} \cong 70.59\ cents.$$

De tal manera que los intervalos quedan conformados de la siguiente manera:

Intervalo	No. de Partes	Cents 17 Partes
Quinta	10/17	705.88
tercera mayor	6/17	423.53
tercera menor	4/17	282.35
Tono	3/17	211.76
S.D.	1/17	70.59
S.C.	2/17	141.18

Dichos intervalos están dispuestos de tal forma que dan origen a una especie de escala menor armónica con un patrón de afinación propio.

6.12. Retorno al origen. Las escalas Javanesa y Siamesa.

Estas dos escalas asiáticas son propias de antiguos instrumentos de aliento previos a los instrumentos cordados. A pesar de ello, pueden ser vistas a partir del círculo de quintas dado que ambas corresponden a series melódicas que dividen a la octava en 5 y 7 partes respectivamente.

Dichas escalas son relevantes porque contribuyen a hacer evidente el hecho de que fue la implementación de la cuerda en los instrumentos, la que dio origen a la teoría musical imperante en occidente. Es decir, que la estructura de las escalas pentatónica y diatónica están íntimamente vinculadas a la física de la cuerda vibrante y han predominado desde los griegos hasta nuestros días (*ver p. 23 de [2]*).

6.12.1. La escala Javanesa.

Surge de la división geométrica de la octava en 5 partes por lo que la proporción de cada tono es

$$tono\ javanés \equiv t_5 = \sqrt[5]{2} \cong 1.148698,$$

de tal manera que

$$s(\sqrt[5]{2})_{cent} = \frac{1200}{5} = 240\ cents.$$

Para ver ésta y la siguiente escala desde la perspectiva de la circularidad de las afinaciones, necesitamos comparar el encadenamiento de 3 octavas con el de 5 quintas. La diferencia entre éstos corresponde a una *coma javanesa* y su valor es

$$coma\ javanesa \equiv c_5 = \frac{\left(\frac{2}{1}\right)^3}{\left(\frac{3}{2}\right)^5} = \frac{2^8}{3^5} \cong 1.053498$$

y el tamaño en cents de esta coma es

$$s(c_5)_{cent} = 1200\frac{log(2^8/3^5)}{log2} \cong 90.22\ cents.$$

Ahora nos queda repartir esta coma entre las 5 quintas para obtener el temperamento igual que divide a la octava en 5 tonos iguales.

Esto se muestra en la siguiente figura.

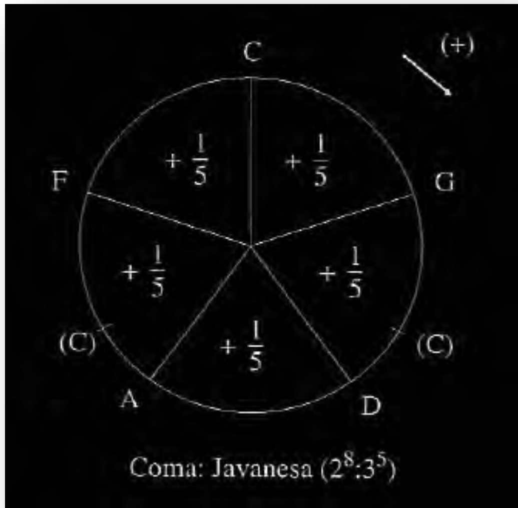


Fig. 6.14. Escala Javanesa.

6.12.2. La escala Siamesa.

De manera similar esta escala surge de la división geométrica de la octava en 7 tonos cuya proporción de frecuencias es

$$tono\ siamés \equiv t_5 = \sqrt[7]{2} \cong 1.104090,$$

es así que

$$s(\sqrt[7]{2})_{cent} = \frac{1200}{7} \cong 171.43\ cents.$$

En este caso la *coma siamesa* queda definida en términos de la diferencia entre el encadenamiento de 7 quintas comparado con el de 4 octavas y tiene el siguiente valor

$$coma\ siamesa \equiv c_7 = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^7}{\left(\frac{2}{1}\right)^4} = \frac{3^7}{2^{11}} \cong 1.067871$$

cuyo tamaño en cents es

$$s(c_5)_{cent} = 1200 \frac{log(3^7/2^{11})}{log 2} \cong 113.69\ cents.$$

Notemos que la coma siamesa excede a la javanesa en una coma pitagórica.

$$\frac{\frac{3^7}{2^{11}}}{\frac{2^8}{3^5}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = cp.$$

Finalmente sólo nos queda repartir la coma siamesa entre 7 quintas para dar origen al sistema de afinación como se muestra en la siguiente figura.

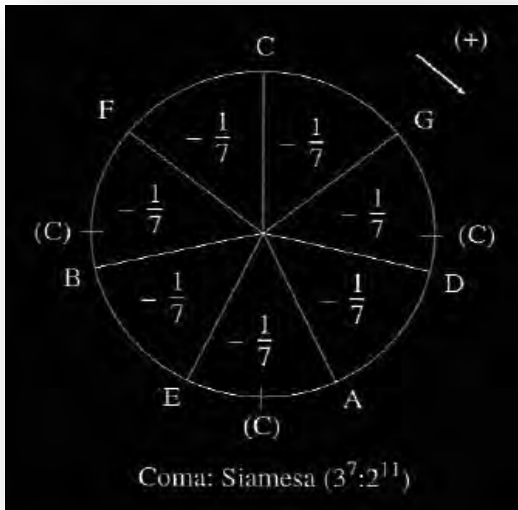


Fig. 6.15. Escala Siamesa.

Es importante recalcar que la cuerda fue el medio que originó una división inhomogénea de la octava en 5 y 7 partes. Esta nueva división representó una ruptura y dio rumbo a la evolución de la música en occidente hasta nuestros días.

Owen Jorgensen publicó un temperamento en el que afinaba la escala siamesa en las teclas blancas del piano y la escala javanesa en las negras. A éste se le conoce como el *temperamento 5 y 7.*

Con esto hemos cubierto los aspectos más significativos de la afinación y del temperamento musical.

Capítulo 7 DISCUSIÓN.

Referencias generales: [1],[2],[5],[15],[16] y [24].

7.1. La serie armónica y el método de afinación.

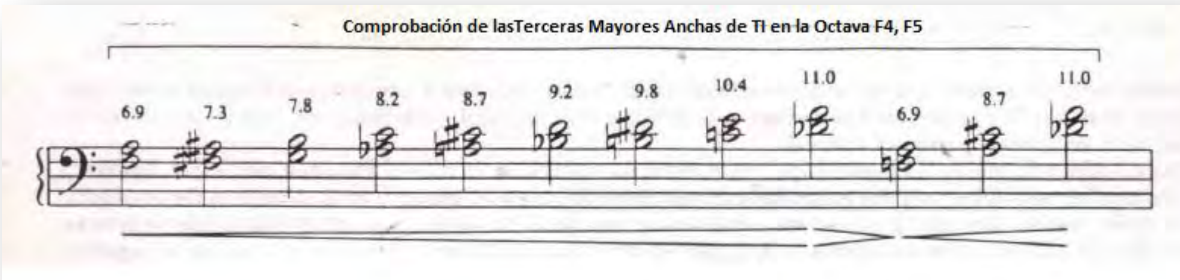


Fig. 7.1. Comprobación de uno de los tipos de intervalo de Temperamento Igual.

La fig. 7.1. fue extraída de *[5]*. En ella se muestra la comprobación de las terceras mayores a lo largo de una octava cuando se afina el temperamento igual estándar a lo largo de la misma, para luego extenderlo a todo el teclado. Los números que en ella aparecen, corresponden a las frecuencias de batimiento de los armónicos coincidentes de cada intervalo de tercera mayor. En el siguiente párrafo mostraremos cómo dichas frecuencias fueron calculadas suponiendo que la serie armónica se ajusta con exactitud. Los reguladores que aparecen en la parte inferior del pentagrama indican que las frecuencias aumentan a medida que las terceras ascienden cromáticamente, es decir, de semitono en semitono. Asimismo, con esquemas similares se comprueban terceras menores, quintas y cuartas, sextas mayores y, finalmente, ciertos intervalos particulares que tengan frecuencias de batimiento cuasiguales. La octava es Fa4 a Fa5 porque en esta región los batimientos son claramente audibles y en muchos casos contables.

Nota	*f 1er armónico*	*f 5to armónico*	*4f 3ra Mayor*	*BPS de 3ras Mayores*	*Terceras Mayores*
fa4	174.6141	873.0706	880.0000	6.93	fa4-la4
fa#4	184.9972	924.9861	932.3275	7.34	fa#4-la#4
sol4	195.9977	979.9886	987.7666	7.78	sol4-si4
sol#4	207.6523	1038.2617	1046.5023	8.24	lab4-do5
la4	220.0000	1100.0000	1108.7305	8.73	la4-do#5
sib4	233.0819	1165.4094	1174.6591	9.25	sib4-re5
si4	246.9417	1234.7083	1244.5079	9.8	si4-re#5
do5	261.6256	1308.1278	1318.5102	10.38	do5-mi5
do#5	277.1826	1385.9132	1396.9129	11.00	reb5-fa5
re5	293.6648				
mib5	311.1270				
mi5	329.6276				
fa5	349.2282				

Los afinadores desprecian la inarmonicidad cuando fijan el temperamento en una octava dado que los valores de esquemas como el la de la fig. 7.1 fueron calculados suponiendo que la serie armónica se ajusta con toda precisión. Para demostrarlo debemos analizar la tabla de arriba. En ella podemos ver que los valores de los batimientos por segundo de los armónicos coincidentes para las terceras mayores de TI empatan con los valores que aparecen en el esquema de la fig. 7.1. Esto quiere decir que se ha supuesto que la serie armónica se ajusta con gran precisión o incluso con exactitud. Es por ello que en este trabajo nos hemos basado en esta ley para construir la teoría musical aceptada, discriminando así la inarmonicidad.

Además, la misma tabla nos permite vislumbrar la metodología de afinación. Para ilustrarlo consideremos el siguiente ejemplo.

Si deseamos afinar el Do#5 de temperamento igual en un piano, primero podemos usar un diapasón de 440Hz (usualmente se usaría uno de 523.2511Hz correspondiente a un Do6 de TI) y con éste afinaríamos el La4 del piano eliminando los batimientos del segundo armónico de esta nota. Posteriormente afinaríamos el Do#5 usando la serie armónica. De la tabla sabemos que el 5º armónico de la nota La4 es precisamente un Do#7 de frecuencia $5 \cdot 220 = 1100$Hz. Por otro lado, la tabla muestra que en el temperamento igual, la frecuencia fundamental del Do#5 es 277.1826 Hz, cuyo cuarto armónico es también un Do#7 pero de frecuencia $4 \cdot 277.1826$ Hz $= 1108.7305$ Hz. La diferencia de afinación entre ambos tonos Do es de 8.73Hz. Por lo tanto nosotros deberíamos ajustar la tensión de las tres cuerdas correspondientes a Do#5 de tal manera que cuando toquemos simultáneamente éstas y las del La4 escuchemos que los armónicos coincidentes interfieren y produzcan batimientos a una frecuencia precisamente de 8.73Hz. El hacer lo anterior, de tal manera que la tercera mayor sea ancha, garantiza que el Do#5 está afinado en el temperamento igual.

Desde luego hay dos fuentes de error inmediatas e inherentes a esta metodología. Una es la precisión con la que el afinador es capaz de contar o eliminar los batimientos y la segunda es la inarmonicidad de la cuerda. Para controlar el error debido a la primera causa, el afinador podría usar una metodología análoga para afinar la nota Fa4, de tal manera que, según la tabla, ésta bata a una tasa de 6.93 Hz respecto a La4. Posteriormente puede afinarse Fa5 eliminando batimientos entre la fundamental de ésta última y el segundo armónico de Fa4 para comprobar que Do#5 y Fa5 batan 11 veces por segundo. Si el afinador cometió errores significativos al fijar la altura de algunas de estas notas, no le será posible satisfacer estas condiciones simultáneamente, i.e. que tanto Do#5 y Fa5 batan a 11Hz, como La4 y Do5 lo hagan a 8.73 Hz; entonces éste tendrá que repetir pasos. En el momento que las dos condiciones se satisfagan con una buena aproximación, el afinador podrá proceder a afinar una nueva nota. La metodología es tal, que cada nueva nota que se afina es a su vez una fuente para comprobar intervalos. A través de una metodología análoga se afina el TI o cualquier otro temperamento en una octava para luego extenderlo a todo el teclado. Por otro lado, el afinador no ejerce ningún control sobre la otra fuente de error, esto es, la inarmonicidad. En la siguiente sección discutiremos a nivel cualitativo las implicaciones de ello.

7.2. Psicoacústica del éxito de la afinación aural.

Con la finalidad de mostrar cómo el fenómeno de batimientos es superior a la comparación melódica cuando se afina, veremos un ejemplo que aparece en las págs. 14 y 15 de *[16]*.

Comenzaremos evaluando numéricamente la ec. 3.1 del tercer capítulo de este trabajo. El resultado es que para un tono puro de 440 Hz y 80db (el La5 que se ha adoptado como referencia para afinar instrumentos musicales) el *DLF* correspondiente es de 1.93Hz, que a su vez equivalen a 7.3 cents. Ello implica que la máxima precisión con la que podríamos afinar en un instrumento el La5 a partir de una comparación melódica con un diapasón de 440Hz que produjera una intensidad de 80 db sería precisamente de 1.93Hz o 7.3 cents. Sin embargo, si en el mismo instrumento y en el diapasón fuésemos capaces de sostener la nota por 10 segundos (lo que en muchos casos es factible o cercano), podríamos eliminar batimientos con una precisión máxima de 0.1 batimientos por segundo. Para 440Hz esta incertidumbre corresponde a tan sólo 0.39 cents. Por lo tanto podemos alcanzar una precisión considerablemente mayor eliminando batimientos que comparando tonos puros melódicamente.

A pesar de lo anterior, la precisión de los temperamentos basados en la afinación aural, la podemos entender a partir de la figura 7.1. Como se muestra en dicha figura, la precisión con la que el afinador logra afinar el TI no se debe a su capacidad de contar con exactitud 6.9 o 10.4 batimientos por segundo, sino a que es capaz de distinguir y obtener los incrementos o decrementos de frecuencia que en ella se muestran para cada tipo de intervalo. Es esto lo que garantiza la gran precisión con que se afinan los temperamentos.

El incremento en la frecuencia de los batimientos en TI no es fortuito y, de hecho, se debe a una propiedad importante de los intervalos musicales que enseguida describiremos.

Sea f_B la frecuencia de batimiento entre dos armónicos coincidentes originada por dos tonos y sea u la proporción de frecuencias del intervalo asociada a ambos tonos.

Propiedad:

Si modificamos la frecuencia de ambos tonos en una proporción v, la frecuencia de batimientos cambia en dicha proporción mientras que el intervalo resultante conserva la suya.

Prueba:

Sea f_g la frecuencia fundamental del tono grave y f_a la del agudo entonces $f_a/f_g = u$. Además, dado que existen dos armónicos coincidentes cuya desafinación produce los batimientos, luego existen n y m naturales tales que $f_B = |m\,f_g - nf_a|$. Ahora multipliquemos tanto la frecuencia fundamental del tono grave como la del agudo por v, luego

$$f'_g = vf_g$$

$$f'_a = vf_a,$$

(7.1)

donde f'_g y f'_a son las frecuencias fundamentales de los tonos resultantes. Entonces, la proporción de frecuencias u' asociada a dichos tonos está dada por

$$u' = \frac{f'_a}{f'_g} = \frac{vf_a}{vf_g} = u.$$

(7.2)

Hasta aquí hemos demostrado sólo la segunda parte del enunciado. Para demostrar la otra condición, consideremos la interferencia entre el m-ésimo armónico del tono cuya frecuencia fundamental es f'_g con el n-ésimo aquél cuya fundamental es f'_a. Entonces, la frecuencia de batimientos f'_{bat} del intervalo asociado a estos nuevos dos tonos está dada por

$$f'_B = \left|m\, f'_g - nf'_a\right| = \left|mvf_g - nvf_a\right| = v\left|m\, f_g - nf_a\right| = vf_B.$$

(7.3)

Con esto no sólo hemos terminado de demostrar la propiedad, sino también podemos ver que si modificamos en una proporción v un tono cuyas frecuencias son armónicas, entonces todos los armónicos de éste se verán alterados en la misma proporción.

Finalmente, esta propiedad incide en que los números que aparecen en la fig. 7.1 se incrementen a razón de $\sqrt[12]{2}$, dado que los intervalos de TI provienen de una serie melódica y por lo tanto cuando cada tipo de intervalo se hace un semitono más agudo, la frecuencia de los batimientos aumenta en dicha proporción. La naturaleza de nuestro oído es tal que el afinador es capaz de notar estos incrementos, y entonces a partir de ellos, éste puede comprobar la precisión con la que el temperamento es afinado.

Una conclusión importante –que vale la pena demostrar experimentalmente- es que aparentemente, la inarmonicidad de las cuerdas no es lo suficientemente grande como para alterar los reguladores que aparecen en la fig. 7.1. Este hecho es lo podría justificar, o no, que finalmente aquélla se pueda despreciar.

7.3. La igualación de batimientos y los límites de la incertidumbre de la afinación aural.

En la sección anterior mostramos que la precisión con la que podemos afinar un La 440 mediante la eliminación de batimientos en una señal de 10 segundos de duración es del orden de 1/10 Hz. Sin embargo, ésta no es la forma en la que un afinador ajusta la altura de dicha nota mediante el uso de un diapasón. Lo que éste haría, sería desafinar la nota Fa4 creando una doble octava más una tercera mayor ancha con respecto al La5 de tal manera que el 5º armónico de ésta produzca batimientos con el La del diapasón (440Hz) a una cierta frecuencia que se pueda contar. Finalmente, el afinador igualaría la frecuencia de batimientos de la nota La5 del instrumento con el Fa previamente desafinado garantizando que la doble octava más la tercera mayor correspondiente sea también ancha. Como las frecuencias de batido coinciden bajo estas condiciones y ambos intervalos serían anchos, entonces la frecuencia del La del diapasón y la del instrumento necesariamente serían iguales. Asimismo, un procedimiento similar, basado en la igualación de batimientos, es el que le permite al afinador extender el temperamento a todas las octavas del teclado.

Si deseamos explorar el límite de precisión al afinar usando la técnica de igualación de batimientos en un procedimiento como el que ha sido expuesto arriba, podemos considerar lo siguiente: Supongamos que para una determinada frecuencia de batimientos, el afinador puede distinguir un incremento o decremento de frecuencia mínimo caracterizado por una proporción ε. Si el afinador trata de afinar una frecuencia de referencia f_{ref} (que podría provenir de un diapasón o de otra nota en el instrumento) mediante la igualación de batimientos, entonces éste ajustará una nota de frecuencia $f_0$de tal manera que el m-esimo armónico resoluble de ésta bata a una tasa de n pulsaciones por segundo, i.e. $f_B = n$ donde f_B es un número que el afinador puede contar por unidad de tiempo. Además, el afinador garantizará que el intervalo resultante entre f_0 y f_{ref} sea ancho. Posteriormente, tratará de ajustar la altura de una segunda nota de frecuencia variable f en el instrumento igualando batimientos, de tal forma que la afinación de dicha nota empate con la frecuencia de referencia, es decir, provocando que ésta también tenga la misma $f_B = n$ respecto a mf_0 y produciendo el mismo intervalo ancho. Si el afinador comete el máximo error de confundir f_B con $\varepsilon f_B = \varepsilon \cdot n$, entonces podemos calcular la máxima incertidumbre resultante de afinar esta última nota bajo dichas condiciones; veamos este procedimiento en detalle.

Como se expuso en el tercer capítulo de este trabajo, la frecuencia de batimientos está dada por el valor absoluto de la diferencia de frecuencias entre los tonos que interfieren. Pero como el intervalo que estamos considerando es ancho, podemos escribir lo siguiente:

$$f_B = f_{ref} - mf_0 = n, \tag{7.4}$$

entonces

$$f_0 = \frac{f_{ref} - n}{m}. \tag{7.5}$$

Ahora la metodología nos indica que debemos ajustar f de tal manera que $mf_0 - f = n$. Esto garantiza que se han igualado batimientos, así como también que el intervalo entre f_0 y f es ancho y, por lo tanto, que $f = f_{ref}$. Pero si suponemos que el afinador comete el máximo error de ajustar a εn batimientos por segundo en vez de n , entonces la afinación de la frecuencia de referencia en el instrumento se va a ver afectada de acuerdo a las siguientes ecuaciones.

La frecuencia de la nota que erramos afinar igualando batimientos está dada por

$$f = mf_0 + \varepsilon n, \tag{7.6}$$

entonces

$$\Delta f = f - f_{ref} \tag{7.7}$$

donde Δf es el error de la afinación correspondiente a la diferencia de frecuencia de la nota que ajustamos con la frecuencia de referencia. Sustituyendo la ec. 7.6 en la expresión anterior en la anterior obtenemos

$$\Delta f(n) = mf_0 + \varepsilon n - f_{ref}. \tag{7.8}$$

Ahora, a partir de sustituir la ecuación 7.5 en la última igualdad se llega finalmente a que

$$\Delta f(n) = m\frac{f_{ref} - n}{m} + \varepsilon n - f_{ref}$$

$$\Rightarrow \ \Delta f(n) = n(\varepsilon - 1). \tag{7.9}$$

Debemos observar que aunque esta ecuación muestra que el error es independiente del armónico que escojamos para igualar batimientos, el grado de inarmonicidad de las cuerdas sí depende de éste y por tanto hay un error asociado. Esto se debe a que mientras más agudo es el armónico de una cuerda cuya rigidez no es despreciable, mayor es el corrimiento a frecuencias respecto a la frecuencia armónica (*ver [24]*).

Por otro lado, a falta de información experimental que provea el valor de ε, podemos calcular el valor de Δf, de manera sobrada[4], a partir del mínimo valor del cociente de batimientos por segundo entre los dos valores más bajos que aparecen en la fig. 7.1. Esto se fundamenta en el hecho de que todo afinador debe poder notar el incremento de frecuencia entre la tercera mayor correspondiente a Fa4-La4 y la correspondiente a Fa#4-

[4] Por “sobrada” debemos entender que podemos garantizar que el error real de afinación es menor, o, en el peor de los casos, igual al valor que le estamos asignando.

La#4. Debido a la propiedad previamente demostrada, podemos inferir que dicho incremento se da en una proporción equivalente a $\sqrt[12]{2}$.

Entonces sustituir $n = 6.9$ y $\varepsilon = \sqrt[12]{2}$ en la ec. 7.9 nos dice que el error asociado a la afinación cumple la siguiente desigualdad:

$$\Delta f(n = 6.9) \leq 0.41\ Hz. \tag{7.10}$$

Si f_{ref} es igual a la frecuencia fundamental de Fa4 denotada por $f_0 \cong 174.61\ Hz$ en el TI, entonces el tamaño en cents del intervalo correspondiente al error máximo de afinación cuya proporción de frecuencias[5] $p_{a\,1} = f_{ref} + \Delta f(n = 6.9)/f_{ref}$, entonces

$$s(p_{a\,1})_{cent} = 1200\frac{log(p_{a\,1})}{log2} \cong 1200\frac{log\big(1 + (0.41/174.61)\big)}{log2} \cong 1.20\ cents. \tag{7.11}$$

Sin embargo, si $f\acute{}_{ref}$ ahora es igual a la frecuencia del quinto armónico de Fa4 denotada por $5f_0 \cong 5 \cdot 174.61 \cong 873.07\ Hz$, entonces hay una disminución de dicho error cuya proporción denotaremos $p_{a\,5} = f\acute{}_{ref} + \Delta f(n = 6.9)/f\acute{}_{ref}$ como a continuación se muestra

$$s(p_{a\,5})_{cent} = 1200\frac{log(p_{a\,1})}{log2} \cong 1200\frac{log\big(1 + (0.41/873.07)\big)}{log2} \cong 0.81\ cents. \tag{7.12}$$

Este error es razonablemente pequeño si consideramos que es del orden del 1% del intervalo musical más pequeño que se emplea para componer música, i.e., un semitono. Así mismo, dicho error disminuye para cualquier nota más aguda que Fa4. Esto se puede entender siguiendo un razonamiento similar al que explica por qué $s(p)_{cent}$ disminuye de 1.20 a 0.81 cents. Otro factor que es importante considerar, es que aunque usar un armónico más agudo favorece que el error disminuya, otra fuente de error es introducida, a saber, la inarmonicidad. Sobra reiterar que el afinador no cuenta con elementos para siquiera tener una idea de cuán grande puede resultar este error.

Finalmente es importante mencionar que Alejandro Esbrí en su libro "Acústica Musical y Afinación de Pianos" sugiere que se use precisamente el 5to armónico de la nota Lab4 para afinar la nota Do6 del piano ajustando dicho armónico a 3 o 4 batimientos por segundo con respecto a un diapasón cuya frecuencia de referencia sea Do6 de TI y luego igualando batimientos de la nota Do6 del piano con el 5to armónico. De tal manera que lo último que nos queda por hacer es mostrar, sin exponer los cálculos (por ser similares a los últimos), el

[5] $p_{a\,i}(n)$ corresponde a la proporción de frecuencias p del error asociado a la afinación de una nota cuando comparamos su i-ésimo armónico con un tono o armónico de referencia y lo igualamos a n batimientos por segundo.

valor de $\Delta f(n = 3)$ y del correspondiente $s(p_{a\,5})_{cent}$, pero para el quinto armónico de la nota Fa4, lo que nos permitirá comparar equitativamente con los datos de arriba. Sin embargo, no debemos pasar por alto que estaremos bajo el supuesto de que también para 3 batimientos por segundo sigue siendo válido suponer que podemos distinguir cambios en la frecuencia de batimientos cuya proporción es del orden de ε.

$$\Delta f(n = 3) \leq 0.18\, Hz \tag{7.13}$$

y

$$s(p_{a\,5})_{cent} = 1200 \frac{log p_{arm\,5} = f'_{ref} + \Delta f(n = 6.9)/f'_{ref}}{log 2} \cong 0.35\, cents. \tag{7.14}$$

Esto muestra, a final de cuentas, que reducir la frecuencia de batimientos de 7 a 3 BPS (batimientos por segundo) y tomar en cuenta el 5º armónico en vez del primero, incrementa de manera muy significativa la precisión con la que se puede llegar a afinar una nota de referencia mediante una técnica aural.

A partir de estos cálculos es posible contemplar la posibilidad de diseñar un afinador que simplifique la metodología de afinación mediante la producción electrónica simultánea de por lo menos un par de tonos puros para cada nota que se desee afinar. La frecuencia de éstos estaría calibrada para producir el mismo número de batimientos por segundo respecto a diversos armónicos específicos de las notas cuya frecuencia fundamental coincida con la frecuencia teórica de algún temperamento. Además, uno de los tonos del par estaría calibrado por arriba de la frecuencia del armónico respectivo, mientras que el otro, lo estaría por debajo de su respectivo armónico. De esa manera el dispositivo podría permitir afinar con una precisión razonable (la máxima alcanzable por medio del oído) cualquier temperamento a través de una sola metodología de afinación similar a la que se ha expuesto basada en la igualación de batimientos. Además, dicha metodología podría no discriminar la inarmonicidad de las cuerdas si la proporción de la desviación de la frecuencia de un armónico resoluble es mayor que ε. De esta manera, el error inducido por la inarmonicidad sería detectable y podrá ser corregido igualando batimientos respecto a los tonos electrónicos. Finalmente, se podría garantizar que la afinación se ha hecho en la dirección correcta debido a que de lo contrario no se podrían igualar los batimientos.

Para ilustrar lo anterior consideremos el siguiente ejemplo: si tomamos como referente la fundamental y el quinto armónico de una nota en algún temperamento específico y, de manera simultánea y suficientemente precisa, producimos electrónicamente dos tonos puros -uno 3hz por arriba de la fundamental y el otro 3 hz por debajo del quinto armónico- sólo cuando la nota del instrumento esté afinada, se podrán igualar los batimientos a una frecuencia de 3hz, o, un valor cercano a éste si la inarmonicidad juega un papel significativo. Sin embargo, si en vez de afinar la frecuencia del quinto armónico 3 hz por arriba del tono de referencia, lo hacemos por debajo del mismo, entonces la frecuencia fundamental batirá a 6 hz y esto será muy notorio; pues mientras más nos acerquemos a los 3bps por el lado equivocado de alguno de los tonos, más nos alejaremos de la susodicha frecuencia coincidente de pulsaciones relativa al otro tono. Es fácil deducir que si la inarmonicidad es lo suficientemente grande, al igualar batimientos se promedia y se reparte, entre el armónico y la fundamental, la correspondiente desviación. La aportación más significativa de semejante dispositivo sería que, como Jorgensen lo expone en la introducción de *[2]*, la metodología aural de afinación más simple y práctica, es precisamente la que está basada en la técnica de igualación de batimientos.

7.4. Consonancia y disonancia.

La consonancia es una sensación, y como tal, puede ser analizada desde una perspectiva psicoacústica. Es un concepto fundamental en la música que se origina a partir de la naturaleza física del sonido y de la naturaleza de nuestra percepción. Como concepto, se puede entender a partir de la percepción de tonos puros.

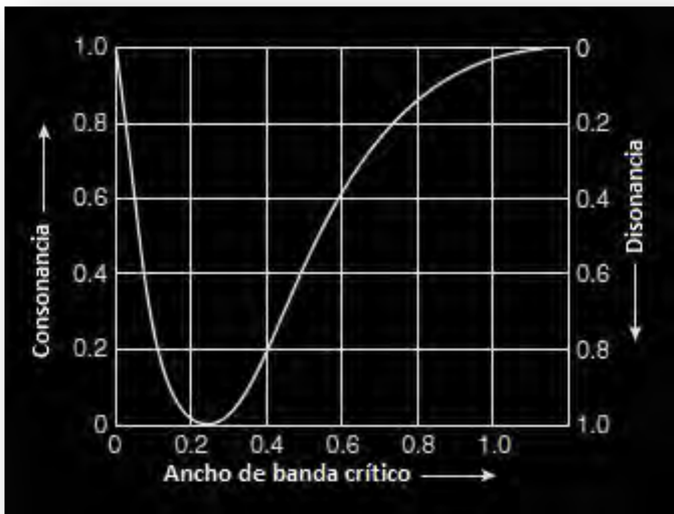


Fig. 7.2. Modelo de Plomp y Levelt (1965) de la percepción de la consonancia y disonancia de dos tonos puros.

En la Fig. 7.2. se muestra cómo cambia la percepción de la consonancia y disonancia de un tono puro de frecuencia variable respecto a otro de frecuencia fija en términos de un ancho de banda crítica. De la gráfica se puede concluir lo siguiente:

i. Cuando las frecuencias de ambos tonos coinciden (unísono) se percibe una "consonancia perfecta".

ii. Cuando la diferencia de frecuencias excede una banda crítica, los tonos se juzgan consonantes.

iii. Para diferencias de frecuencia entre el 5% y el 50% de la banda crítica, los tonos se juzgan disonantes.

iv. La máxima disonancia ocurre a un cuarto de la banda crítica.

Para extender el concepto de disonancia o consonancia asociado a intervalos conformados por dos tonos complejos, es necesario considerar las contribuciones de la interacción de cada armónico resoluble de un tono con cada uno de los del otro.

Mientras más armónicos coincidan, más consonante será el intervalo, mientras más armónicos resolubles se encuentren entre el 5 y el 50% de una banda crítica, más disonante será. Los armónicos resolubles que se encuentren a más de una banda crítica de distancia favorecerán la consonancia. Finalmente, si las frecuencias fundamentales de los tonos del intervalo se encuentran a menos de una banda crítica, el intervalo será juzgado como disonante.

De acuerdo a estos criterios, el unísono es el intervalo más consonante, le sigue la octava justa, la quinta pitagórica, la tercera mayor justa y la tercera menor justa. Todos estos y sus inversiones son considerados musicalmente consonantes. La segunda mayor pitagórica, los semitonos, sus inversiones y los tritonos son considerados musicalmente disonantes.

A pesar de ello, es importante mencionar que debido al último criterio, desde el punto de vista psicoacústico, mientras más grave es un intervalo, más disonante se torna; al punto tal, que una tercera mayor, o incluso una quinta pitagórica, se vuelven disonantes en la octava más grave del piano (*ver [24]*).

Dado que son los armónicos resolubles los que nos permiten identificar los intervalos musicales a partir de comparar auditivamente los armónicos de una cuerda vibrante con extremos fijos, es importante definir a partir de ello la *pureza* de un intervalo.

Un intervalo es *puro* cuando dos armónicos resolubles de los tonos que lo conforman coinciden.

Este concepto nos permite ligar la consonancia a los primeros seis armónicos de la serie armónica y nos brinda un criterio para establecer una *jerarquía* en términos de la consonancia entre los diferentes tipos de intervalos, a saber, quintas, cuartas, terceras etc.

Es así que los intervalos justos provenientes de los primeros seis armónicos, y sus respectivas inversiones, serán más consonantes que los intervalos equivalentes en los que se produzcan batimientos entre dichos armónicos.

Por ejemplo, las quintas pitagóricas, al ser puras ya que provienen del tercer armónico, son más consonantes que las quintas de TI una vez que en éstas últimas los armónicos coincidentes están ligeramente desafinados (dos cents). De la misma forma, las terceras mayores justas son más consonantes que las pitagóricas; ya que las primeras son puras al proceder del quinto armónico, mientras que en las segundas, los armónicos coincidentes están desafinados aproximadamente 21 cents. Así podemos generalizar para todas las consonancias.

Finalmente, musicalmente se distinguen como consonancias perfectas a la octava justa y la quinta justa (cuya desviación no exceda más de 1/2 coma sintónica respecto al intervalo pitagórico) así como sus respectivas inversiones. Por su parte, son consonancias imperfectas terceras y sextas mayores y menores.

Esto también se puede entender en términos de la jerarquía de las consonancias en los sistemas de afinación predominantes. Todos los temperamentos y afinaciones que fueron descritas en este trabajo demandan la justeza de la octava. Además, con excepción de los temperamentos mesotónicos de 1/4 y de 1/3 de coma sintónica, se le da prioridad a la pureza de la quinta sobre la de las terceras. Esto es notorio sobre todo en TI, ya que las quintas y las cuartas se desvían de su valor puro 2 cents en números redondos mientras que las terceras mayores y las sextas menores lo hacen 14 cents al igual que las terceras menores y sextas mayores lo hacen 16 cents. Como se puede observar en tabla de la sección 6.10.2.

Vale la pena señalar que en el temperamento de 1/4 de coma sintónica la tercera mayor, la sexta menor y la octava tienen la misma jerarquía y son por tanto, estas tres, las consonancias perfectas, mientras que las quinta cuartas y terceras menores constituyen las imperfectas. Asimismo, para el temperamento de 1/3 de coma, las terceras menores y sextas mayores ocupan el lugar de las terceras mayores y sextas menores. Por su parte el temperamento de 2/7 de coma reparte equitativamente la jerarquía entre terceras mayores y menores. Además, Jorgensen hace referencia a un temperamento en el que se procura la justeza de las quintas temperando inclusive la octava.

Con base en la existencia de una jerarquía en las consonancias de los sistemas de afinación, podemos concluir que vale la pena explorar nuevos temperamentos. Un camino inexplorado aún, consistiría en buscar un temperamento que pretenda el equilibrio entre todas las consonancias. El ideal sería procurar un temperamento igual en el que en vez de repartir de forma equitativa la coma pitagórica entre 12 quintas, se repartiera de forma equitativa la jerarquía entre octavas, quintas y terceras. Ésta sería una nueva forma de afinar o temperar instrumentos y abriría una ventana de nuevas posibilidades acústicas en la afinación.

Capítulo 8 CONCLUSIONES.

8.1. Un modelo logarítmico del oído y la serie armónica.

Si nuestro oído tuviera un comportamiento lineal respecto a la frecuencia al momento de fijar subjetivamente la altura, escucharíamos el mismo intervalo musical entre cualesquiera dos armónicos consecutivos. El hecho es que, como hemos visto, con gran aproximación es una misma proporción de frecuencias la que nos hace juzgar un mismo intervalo. Son por tanto, las proporciones que surgen de los primeros 6 armónicos resolubles, y que rigen la justa entonación, las que finalmente nos hacen identificar de manera natural los intervalos a partir de los cuales se puede construir físicamente una escala diatónica.

De lo anterior se desprenden dos consecuencias fundamentales. La primera, es que nuestra percepción de la música- que ha sido ejecutada desde tiempos inmemoriales- ha dependido de la respuesta prácticamente logarítmica de nuestro oído; sin embargo, es la influencia de la serie armónica la que le ha dado estructura y ha fijado los intervalos a partir de los cuales la música escrita en occidente ha sido compuesta. La segunda, es que, si bien no podemos eludir la forma en la que nuestro oído percibe el sonido, hoy sí existe la posibilidad, a través de medios electrónicos y digitales, de evadir en cierta medida la serie armónica y las condiciones acústicas y musicales que ésta impone. Esto abre el horizonte musical ya que (intencionalmente o no) es la física de los instrumentos la que ha fijado el comportamiento armónico de éstos, pero en la actualidad podemos prescindir de éste a través de la tecnología. Una posibilidad proviene de la síntesis digital en instrumentos electrónicos. Hasta ahora ésta ha sido utilizada principalmente para ofrecer un abanico de posibilidades tímbricas en instrumentos electrónicos. Sin embargo, se pueden explorar de una forma innovadora las posibilidades de afinación de nuevos sistemas musicales no armónicos con la finalidad de crear una nueva forma de hacer música.

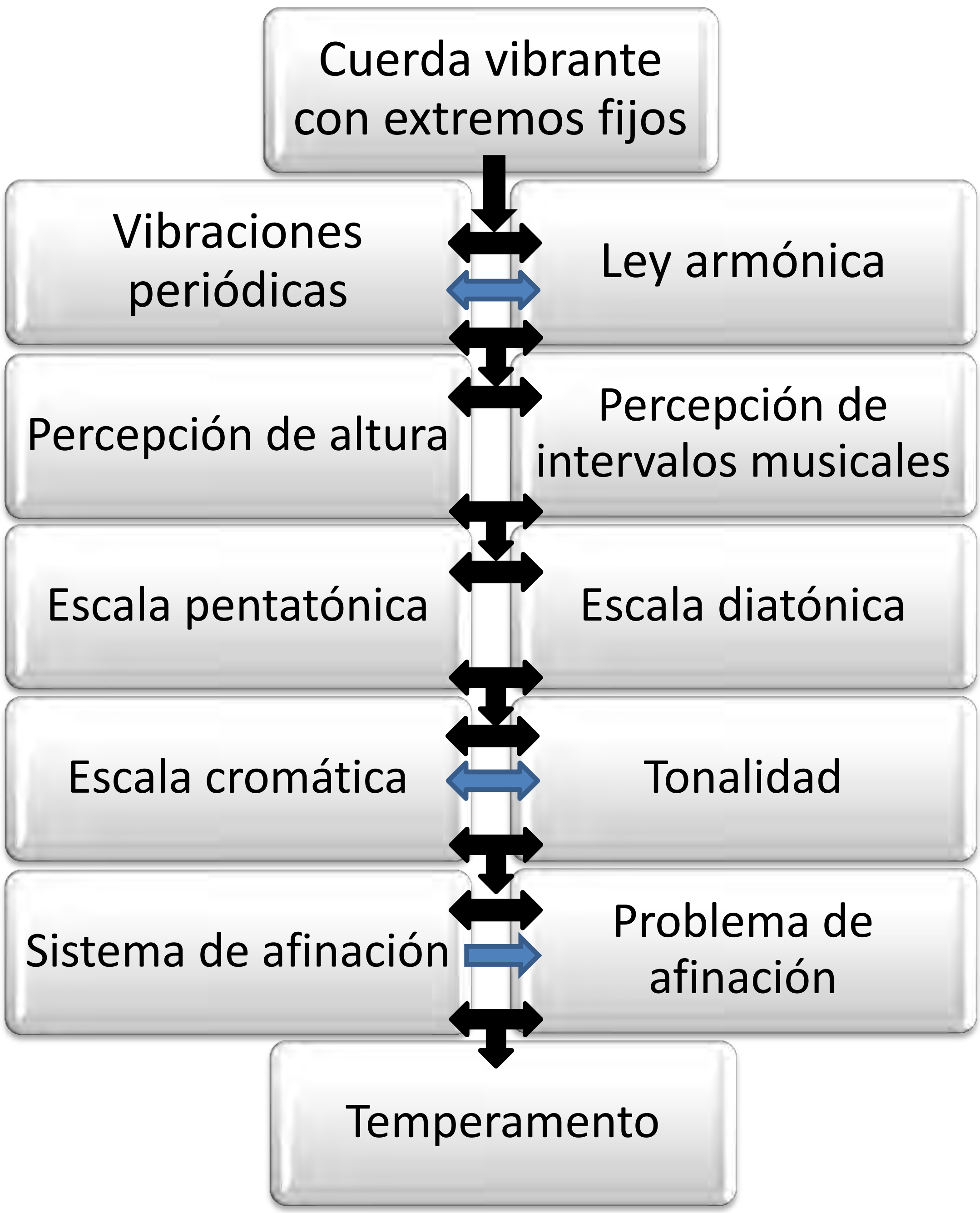
8.2. El valor de las afinaciones históricas.

Una vez que se ha entendido la jerarquía de las consonancias, resulta evidente que cada sistema de afinación que ha sido utilizado en algún contexto en períodos específicos de la historia musical, ha estado ligado a una determinada jerarquía. Incluso, cuando dos afinaciones diferentes comparten una misma jerarquía, las cualidades de ésta también difieren a raíz de las diversas consonancias originadas a partir del tipo de intervalos particulares que resulten de dicho sistema (e.g. TI y algún temperamento mesotónico cuasigual).

La conclusión más importante al respecto, es que sería deseable que el músico tuviera a su alcance el conocimiento de la relevancia de las afinaciones históricas así como una comprensión al menos elemental de su naturaleza. Esto le permitiría contar con los elementos necesarios para decidir con qué afinación desea ejecutar las obras que interpreta, ya sea que escoja el temperamento igual, la afinación histórica correspondiente al contexto en que la obra fue compuesta, o, finalmente, alguna otra afinación que el ejecutante considere pertinente. Además, está más que probado que un compositor que entiende el problema de afinación cuenta con recursos creativos que pueden ser muy útiles y relevantes; para muestra basta el Clave Bien Temperado de Bach concebido para un instrumento afinado en un buen temperamento que permitiera la libre modulación y que frecuentemente se asocia erróneamente al TI.

8.3. Esquema de la anatomía de la afinación occidental.

El siguiente esquema resume la estructura de este trabajo mediante la cadena de conceptos que se deslindan de la física de la cuerda hasta el temperamento musical.



Es importante discutir el sentido de este cuadro. La afinación y el temperamento son temas cuya complejidad se extiende mucho más allá de los conceptos que aparecen en el mismo y que conforman el esqueleto ideológico de este trabajo. De manera intencional, y seguramente también involuntaria, han sido omitidas diversas consideraciones de carácter objetivo, subjetivo e incluso histórico. Las mismas, indudablemente están sumamente ligadas a la evolución y estructura de la música en general, y del problema de afinación en particular. No obstante, se ha hecho un esfuerzo por mostrar un modelo, que a pesar de ser relativamente simple y austero, sea capaz de brindar, de manera didáctica, un panorama razonablemente amplio, lógico, consistente y sobre todo plausible sobre el vínculo entre los elementos que aparentemente pudieran tener mayor incidencia en la parte más objetiva del tema abordado.

Concretamente, la consonancia y la disonancia son conceptos fundamentales, que sin lugar a duda, juegan un papel preponderante en la evolución de la música a lo largo de la historia. Desafortunadamente, ambos guardan una profunda carga subjetiva que abarca desde aspectos de percepción hasta factores relacionados con la variación de tendencias estéticas o artísticas aceptadas en diferentes períodos. Inclusive, éstos han sido entendidos y enfocados desde diversas perspectivas, que a su vez han sido influenciadas por avances paulatinos en los campos de la acústica y la psicofísica. A pesar de ello, en este trabajo se ha procurado recopilar y discutir un modelo simple sobre ambos conceptos, que esté acorde con una perspectiva tradicional desde el ámbito musical de los mismos, y que a su vez, esté ligado a factores psicoacústicos que permitan abordarlos con cierta objetividad.

8.4. Posibles líneas de trabajo a futuro.

Con base en lo discutido en el capítulo anterior, proponemos los siguientes proyectos que se pueden desprender de este trabajo.

Se ha pretendido justificar la utilidad de diseñar un afinador electrónico basado en cálculos físicos a nivel acústico, sin embargo también sería necesario considerar la contribución de errores de origen instrumental. En particular, sería importante saber, por ejemplo, cual es la mínima incertidumbre del oscilador electrónico que genere tonos puros cuyas frecuencias se encuentren dentro del rango audible. Además, sería muy importante diseñar de una manera óptima el procedimiento y metodología de la afinación. Lo que implica necesariamente calcular la frecuencia de cada tono puro que el artefacto deba producir y la máxima desviación que ésta pueda alcanzar. Finalmente, si las condiciones anteriores son satisfactorias quedaría la extensa parte que involucra, primero el diseño, y, posteriormente las pruebas del dispositivo.

Asimismo, se ha discutido sobre la jerarquía de las consonancias y la posibilidad de buscar un temperamento que la reparta de manera equitativa. Lo anterior implicaría optar por temperar octavas (lo que sin duda puede ser cuestionado y requiere cierta justificación) para lo que, desde luego, sería necesario calcular las frecuencias de cada nota, y frecuencias de batimientos para diferentes intervalos. Con esta información, en principio, podríamos finalmente obtener la metodología que incluya los pasos que el afinador deberá seguir.

Se ha expuesto cómo la congruencia entre la serie armónica y los intervalos que surgen del círculo de quintas, determinan la estructura de la teoría musical. Es posible entonces plantearse el problema a la inversa, es decir, pensar en un nuevo sistema musical, donde a partir de otro círculo de "quintas" diseñado *ad hoc*, se pretenda encontrar las parciales de los tonos complejos que conformen las "nuevas" notas. Evidentemente, para llevar este sistema teórico a la práctica sería necesario generar dichos tonos de manera electrónica. Una vez más, lo primero sería hacer los cálculos para construir dicho círculo sometido a condiciones de tipo físico y psicoacústico, para posteriormente encontrar las parciales. Es importante mencionar que, aparentemente, es posible crear de esta manera, un sistema que herede prácticamente todas las propiedades de afinación que han sido descritas en este trabajo pero aportando "nuevas sonoridades".

Para culminar, se ha mencionado que, debido al nivel de matemáticas, éste trabajo no está dirigido al músico en general. Por lo anterior, se propone como una meta ambiciosa, presentar el contenido de este material con un mínimo de matemáticas tratando de preservar, en la medida de lo posible, el contenido conceptual y permitiendo que este tipo de lector pueda desarrollar una cierta "intuición" respecto al tema. Ya que, si en alguna instancia este trabajo no consigue incidir en el ámbito del músico, bien podría llegar a considerarse fútil.

8.5. "Qua verba finiunt musica incipit".

"A través de las matemáticas y la física, la humanidad lleva más de 25 siglos buscando y encontrando formas de afinar estas cuerdas de ineludible naturaleza. Lo valioso de dicha búsqueda, es que ha tenido incidencia en las diversas y geniales formas de esa bella arte que comienza donde terminan las palabras. Aunque hemos mostrado conceptos apoyados en algunas de esas palabras para pretenciosamente describirle, la que nos habla sin limitaciones, por sí sola y en su propio lenguaje, es la música misma".

REFERENCIAS.

[1] Esbrí, Alejandro. *Acústica Musical y Afinación de Pianos: un Enfoque Moderno.* México D.F.: UNAM, 1997.

[2] Jorgensen, Owen. *Tuning the Historical Temperaments by Ear.* Marquette: Northern Michigan University Press, 1977.

[3] Barbour, Murray. *Tuning and Temperament: a Historical Survey*. New York: Da Capo Press, 1972.

[4] Goldáraz, Javier. *Afinación y Temperamento en la Música Occidental.* Madrid: Alianza, 1992.

[5] Jorgensen, Owen. *Tuning*. East Lansing: Michigan State University Press, 1991.

[6] Kinsler, Lawrence, et al. *Fundamentals of Acoustics*. New York: Wiley & Sons, 2000.

[7] Davis, Philip, et al. *The mathematical Experience,* pp. 279-294, Boston: Birkhäuser, 1995.

[8] Gasiorowicz, Stephen. *Quantum Physics.* 3a ed., pp. 489-492.New York: Wiley & Sons, 2003.

[9] Blackstock, David. *Fundamentals of Physical Acoustics*, pp. 218-225, New York: Wiley & Sons, 2000.

[10] http://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_Snell.

[11] http://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell´s_equations.

[12] Wheeler, Gerald; Crumette, William. *The Vibrating String Controversy*, Journal of Physics. Am., v55 no. 1, pp. 33-37, 1987.

[13] http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/Adiabatic-expansion-compression.htm

[14] Jeans, James. *Ciencia y Música.* Reverte, Pedro (traductor), La Habana: Pueblo y Educación, 1961.

[15] Howard, David; Angus Jamie. *Acoustics and Psychoacoustics.* Oxford: Focal Press, 2006.

[16] Fernandez, Francisco. *Estudio de los Factores que Intervienen en la Afinación de la Guitarra Clásica*, capítulo 2, México D.F.: tesis de licenciatura de la ENM de la UNAM, ca. 2002.

[17] http://www.cs.indiana.edu/~port/teach/641/audition.for.linguists.Sept1.html.

[18] http://en.wikipedia.org/wiki/Psychoacoustics.

[19] Crocker, Malcom. *Encyclopedia of Acoustics,* capítulo 116. New York: Wiley & Sons, 1997.

[20] Crocker, Malcom. *Handbook of Acoustics,* p. 138. New York: Wiley & Sons, 1998.

[21] Moore, J. *Thresholds for the Detection of Inharmonicity in Complex Tones*. Journal of the Acoustic Society, 77. Mayo, 1885.

[22] Hamel, Fred; Hürlimann, Martin. "Primera Parte: Teoría de la Música". En: *Enciclopedia de la Música.* Meyer-Serra, Otto (traductor) Tomo I, pp. 3-66. México D.F.: Editorial Cumbre, 1954.

[23] Montegón, Juan José. *Introducción al Estudio de la Música.* Barcelona, España: Labor, S.A., 1942.

[24] Rossing, Thomas. *The Science of Sound*. 2a ed., pp. 156-157. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

[25] http://www.piano-tuners.org/history/pitch.html.

BIBLIOGRAFÍA.

Física y acústica.

Blackstock, David. *Fundamentals of Physical Acoustics*, pp. 218-225, New York: Wiley & Sons, 2000.

Cooper, Jeffery. *Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB.* pp. 157-160, Boston: Birkhäuser, 1998. ISBN 0-8176-3967-5, ISBN 3-7643-3967-5.

Davis, Philip, et al. *The mathematical Experience,* pp. 279-294, Boston: Birkhäuser, 1995.

Gasiorowicz, Stephen. *Quantum Physics.* 3a ed., pp. 489-492.New York: Wiley & Sons, 2003.

Kinsler, Lawrence, et al. *Fundamentals of Acoustics*. New York: Wiley & Sons, 1962.

Acústica y psicoacústica.

Fernández, Francisco. *Estudio de los Factores que Intervienen en la Afinación de la Guitarra Clásica*. Capítulo 2, México D.F.: tesis de licenciatura de la ENM de la UNAM, ca. 2002.

Howard, David; Angus Jamie. *Acoustics and Psychoacoustics.* Oxford: Focal Press, 2006.

Rossing, Thomas. *The Science of Sound*. 2a ed. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

Teoría musical.

Hamel, Fred; Hürlimann, Martin. “Primera Parte: Teoría de la Música”. En: *Enciclopedia de la Música.* Meyer-Serra, Otto (traductor) Tomo I, pp. 3-66. México D.F.: Editorial Cumbre, 1954.

Jeans, James. *Ciencia y Música.* Reverte, Pedro (traductor), La Habana: Pueblo y Educación, 1961.

Moncada, Francisco. *La Más Sencilla, Útil y Práctica Teoría de la Música*. México D.F. Costa Amic, 1968.

Montegón, Juan José. *Introducción al Estudio de la Música.* Barcelona, España: Labor, S.A., 1942.

Afinación y temperamento.

Barbour, Murray. *Tuning and Temperament: a Historical Survey*. New York: Da Capo Press, 1972.

Esbrí, Alejandro. *Acústica Musical y Afinación de Pianos: un Enfoque Moderno.* México D.F.: UNAM, 1997.

Goldáraz, Javier. *Afinación y Temperamento en la Música Occidental.* Madrid: Alianza, 1992.

Isacoff, Stuart. *Temperament*. New York: Vintage Books, 2003.

Jorgensen, Owen. *Tuning the Historical Temperaments by Ear.* Marquette: Northern Michigan University Press, 1977.

Jorgensen, Owen. *Tuning*. East Lansing: Michigan State University Press, 1991.