UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ACATLÁN

MICROECONOMÍA AVANZADA PARA EL CONSUMIDOR, PRODUCTOR Y LOS TIPOS DE MERCADOS

TESINA

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN ACTUARÍA

PRESENTA

HUMBERTO SOSA ROMERO

ASESOR: GABRIEL DELGADO JUÁREZ

FEBRERO 2012

Índice general

Introducción general

En la actualidad, encontrar una definición de economía resulta ser una tarea difícil, esto es debido a que su objeto de estudio se ha ampliado de forma significativa. Sin embargo, una definición acorde con los objetivos del libro es la siguiente: "la economía es la ciencia que estudia la conducta humana como una relación entre agentes económicos y bienes escasos que tienen usos alternativos", Robbins (1932). Según ésta definición, la economía es un medio para racionalizar los bienes escasos, y así poder satisfacer las necesidades de los seres humanos.

La economía se divide en dos grandes áreas de conocimiento: macroeconomía y microeconomía. La primera estudia las variables agregadas como la producción, desempleo, inflación y salarios de un país. Por su parte, la microeconomía se enfoca en el estudio del comportamiento individual de los agentes económicos, como son las empresas, consumidores, trabajadores e inversionistas. Los elementos básicos en los que se centra el análisis microeconómico son los bienes, los precios, los mercados y los agentes económicos.

La teoría microeconómica explica, entre otras cosas, las decisiones que toman cada uno de los agentes económicos ante ciertos escenarios. De forma que, si se agregan las decisiones que toman todos los agentes que componen una economía se pueden obtener modelos que expliquen el comportamiento de las diversas variables macroeconómicas. A éstos modelos se les denomina modelos con microfundamentos y forman parte de la llamada, corriente neoclásica, la cual ha sido ampliamente aceptada por varios economistas de fines del siglo pasado y de esta década.

De manera particular, éste libro desarrolla la teoría microeconómica, enfocándose en las decisiones que toman los agentes económicos y el entorno en el que se desenvuelven éstos, haciendo uso de una estructura axiomática que permite por medio de relaciones lógicas, construir modelos matemáticos que representen el comportamiento de los diversos agentes de la economía.

La presente tesina tiene como finalidad proporcionar material didáctico para la asignatura de Economía matemática I, con un enfoque actual de la teoría microeconómica, que pueda proveer a los alumnos de la carrera de Actuaría, principalmente (sin descartar carreras de ciencias económicas y áreas afines) conocimiento especializado y suficiente, respecto a la profundidad de los conceptos y la cobertura del temario de la asignatura respectivamente. Resulta preciso agregar, que el análisis microeconomico sirve como introducción al estudio de las decisiones bajo incertidumbre. Además, el estudiante fortalecerá su formación analítica y desarrollará la capacidad para interpretar resultados económicos.

El presente libro permitirá conocer el comportamiento de los diferentes agentes de la economía, para lo cual se tomará como ejemplo un agente representativo. Éste análisis se dividirá en tres capítulos, en el primero y segundo se analizarán los problemas que enfrentan el consumidor y el productor así como las decisiones que toman. En el tercero, se estudiarán los diferentes entornos en los que se desenvuelven los agentes económicos, dichos entornos se denominan mercados, en particular en los mercados de competencia perfecta, monopolio y oligopolio.

Capítulo 1

Teoría del consumidor

En éste capítulo se analizará la conducta del consumidor. Un consumidor es un agente económico, por lo general, entendido como un individuo que demanda bienes y servicios. Cada uno de estos individuos toma decisiones de consumo siguiendo sus preferencias, limitado al ingreso del cual dispone y a un conjunto de precios que establece el mercado. En términos generales, los bienes aportan satisfacción o utilidad a quien los consume, por tanto, el consumidor buscará adquirir una combinación de bienes que le represente la mayor utilidad, considerando sus preferencias y los niveles de precios.

Éste análisis se dividirá en seis secciones. En las primeras dos secciones se estudiarán las preferencias y sus propiedades. Se definirá la función de utilidad, la cual es un instrumento matemático muy utilizado en esta teoría económica, que permite medir las preferencias y cuantificar el nivel de satisfacción del consumidor.

Las secciones tres y cuatro analizaran dos enfoques distintos para estudiar la conducta del consumidor, maximización de la utilidad y minimización del gasto. En el primero, el consumidor buscará un conjunto de bienes que le permitan obtener el mayor nivel de utilidad posible. Por otro lado, en el enfoque de minimización del gasto, el consumidor buscará un conjunto de bienes que dado un nivel prefijado de satisfacción se agote una menor cantidad de su ingreso.

La sección cinco comprende las características comunes entre el problema de maximización de la utilidad y minimización del gasto. La parte final del capítulo estudiará la conducta del consumidor ante cambios en los precios.

1.1. Preferencias del consumidor

La decisión de un consumidor consiste en elegir una cesta de consumo x, tal que, $x \in X \subset \mathbb{R}^n_+$, donde X es su conjunto de consumo[1]. La cesta de consumo tiene la forma $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Donde x_i representa la cantidad de cada uno de los bienes adquiridos.

Las preferencias del consumidor se representan por medio de una relación binaria[2], llamada preferencia débil, definida sobre el conjunto de consumo X. Ésta relación se denota por medio de $\succcurlyeq$. Sean, $x, y \in X$, si $x \succcurlyeq y$, entonces, la cesta de consumo x se prefiere débilmente que la cesta y. Dicho de otra forma, para cierto consumidor, x es al menos tan buena como y.

Definición 1.1 (Preferencia estricta). *La relación de preferencia estricta es la relación binaria, $\succ$, sobre el conjunto de consumo X, que se define como:*

$$x \succ y \leftrightarrow x \succcurlyeq y \text{ pero no se cumple que } y \succcurlyeq x,$$

donde $x, y \in X$. La expresión $x \succ y$ se lee, la cesta x se prefiere estrictamente a y.

Definición 1.2 (Indiferencia). *La relación de indiferencia es la relación binaria, $\sim$, sobre el conjunto de consumo X, que se define como:*

$$x \sim y \leftrightarrow x \succcurlyeq y \text{ y } y \succcurlyeq x,$$

[1] $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n\}$

[2] La preferencia débil es la relación binaria a partir de la cual se construyen las demás preferencias. Ver la Definición A.4

donde $x, y \in X$. La expresión $x \sim y$ se lee, la cesta x es indiferente a y.

Sean $x, y \in X$, la relación binaria $\sim$ sobre el conjunto de consumo X, se define como:

$$x \sim y \leftrightarrow x \succcurlyeq y \text{ y } y \succcurlyeq x.$$

La relación $\sim$ es llamada relación de indiferencia. La expresión $x \sim y$ se lee, la cesta x es indiferente a y.

Axioma 1.1 (Completitud)**.** *Para todo $x, y \in X$, $x \succcurlyeq y$ o $y \succcurlyeq x$ o ambos.*

El axioma anterior explica el hecho, de que el consumidor pueda comparar las cestas de consumo entre sí, para discriminar aquellas cestas de su preferencia. Éste axioma elimina la posibilidad de indecisión en el consumidor.

Axioma 1.2 (Reflexividad)**.** *Para todo $x \in X$, $x \succcurlyeq x$.*

El axioma de reflexividad explica que la cesta x es al menos tan buena como sí misma.

Axioma 1.3 (Transitividad)**.** *Para todo $x, y, z \in X$, si $x \succcurlyeq y$, $y \succcurlyeq z$, entonces, $x \succcurlyeq z$.*

La transitividad permite ordenar de manera consistente las cestas. Es decir, si x es al menos tan buena como y y, a su vez, y es al menos tan buena como z, entonces, x es al menos tan buena como z.

Definición 1.3. *La relación de preferencia, $\succcurlyeq$, es racional si cumple con* Completitud*,* Reflexividad *y* Transitividad*.*

Teorema 1.1. *Si $\succcurlyeq$ es racional, $\forall\ x, y, z \in X$, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

i. La relación de preferencia, $\succ$ es transitiva (si $x \succ y$ y *$y \succ z$, entonces $x \succ z$) e irreflexiva (no es posible que $x \succ x$).*

ii. La relación de preferencia, $\sim$ es reflexiva ($x \sim x \quad \forall x$), transitiva (si $x \sim y$ y *$y \sim z$, entonces $x \sim z$) y simétrica (si $x \sim y$, entonces $y \sim x$).*

iii. Si $x \succ y$ con $y \succcurlyeq z$, entonces $x \succ z$.

Demostración.

i. Para demostrar transitividad se hará uso de la definición de preferencia estricta, *Definición 1.1*, la cual dice que

$$x \succ y \leftrightarrow x \succcurlyeq y \text{ pero no se cumple que } y \succcurlyeq x$$

de igual manera

$$y \succ z \leftrightarrow y \succcurlyeq z \text{ pero no se cumple que } z \succcurlyeq y$$

Dado que la relación de preferencia $\succcurlyeq$ es racional, cumple con el supuesto de transitividad, por consiguiente, si $x \succcurlyeq y$ y $y \succcurlyeq z$, entonces, $x \succcurlyeq z$. Además, a partir de que no se cumplen $y \succcurlyeq x$ y $z \succcurlyeq y$, tampoco se cumple que $z \succcurlyeq x$. Por lo tanto, $x \succcurlyeq z$, y no se cumple que $z \succcurlyeq x$, lo cual implica que $x \succ z$.

La demostración de que la relación $\succ$ no es reflexiva se hará por contradicción, por consiguiente se supondrá que $x \succ x$.

$$x \succ x \leftrightarrow x \succcurlyeq x \text{ pero no se cumple que } x \succcurlyeq x$$

Esto representa una contradicción, por lo tanto, la relación de preferencia, $\succ$, es irreflexiva.

ii. Dado que la relación $\succcurlyeq$ es racional, $x \succcurlyeq x$ y $x \succcurlyeq x \leftrightarrow x \sim x$. Por lo tanto, la relación $\sim$ es reflexiva.

Considerando que, $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces, por la definición de indiferencia, *Definición 1.2*, se tiene que $x \succcurlyeq y$ y $y \succcurlyeq x$, además, $y \succcurlyeq z$ y

$z \succcurlyeq y$. De ahí, por el axioma de transitividad, se tiene que, $x \succcurlyeq z$ por las primeras partes de las definiciones anteriores, mientras que por las segundas partes se concluye que $z \succcurlyeq x$, lo cual implica que $x \sim z$. La demostración de simetría es análoga y se deja al lector como ejercicio.

iii. Si $y \succcurlyeq z$ implica que $y \succ z$ o $y \sim z$, pero no las dos al mismo tiempo.

Tomando el caso cuando $y \succ z$, entonces, considerando que $x \succ y$, $x \succ z$.

Si $y \sim z$, entonces $y \succcurlyeq z$ y $z \succcurlyeq y$. Además, $x \succ y \leftrightarrow x \succcurlyeq y$ y no se cumple que $y \succcurlyeq x$. Considerando $x \succcurlyeq y$ y $y \succcurlyeq z$, entonces $x \succcurlyeq z$. Tomando en cuenta $z \succcurlyeq y$ y que no se cumple $y \succcurlyeq x$, entonces no se cumple $z \succcurlyeq x$. De ahí que, por la *Definición 1.2*, $x \succ z$.

$\square$

Axioma 1.4 (Continuidad)**.** *La relación de preferencia $\succcurlyeq$ en X es continua si $\forall\ x \in X$ los conjuntos $\{y \in X | y \succcurlyeq x\}$* y *$\{y \in X | x \succcurlyeq y\}$ son cerrados.*

La continuidad de $\succcurlyeq$ establece que para alguna sucesión $\{x^n, y^n\}_{n=1}^{\infty}$ con $x^n \succcurlyeq y^n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} x^n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y^n = y$, entonces $x \succcurlyeq y$.

Para caracterizar el axioma siguiente, se definirán antes las relaciones de desigualdad entre vectores. Sean $x, y \in X$, si $x \geq y$, se dice que la canasta x contiene al menos tantos bienes como y. Además, si $x > y$ se dice que, x contiene estrictamente más de cada bien que y.

Axioma 1.5 (Monotonicidad)**.** *Sean $x, y \in X$, se cumple con Monotonicidad débil, si $x \geq y$, entonces $x \succcurlyeq y$;* y *con Monotonicidad fuerte o estricta, si $x > y$ entonces $x \succ y$.*

El axioma de monotonicidad expresa que más es mejor. Es decir, si la cesta de consumo x contiene al menos la misma cantidad de todos los bienes que la cesta y, entonces x es al menos tan buena como y. Análogamente, si una cesta x tiene una mayor cantidad de todos los bienes que una cesta y, entonces x se prefiere estrictamente sobre y. Si la relación $\succcurlyeq$ cumple con monotonicidad estricta, entonces cumple con monotonicidad débil, pero no al contrario.

Axioma 1.6 (Insaciabilidad local). *Sea $x \in X$ con $\epsilon > 0$ un número real, entonces existe $y \in X$, tal que,* $|x - y|$[3] $< \epsilon$ y $y \succ x$.

La insaciabilidad local establece que $\forall\ x \in X$ siempre va a existir una cesta $y \in X$, tal que el consumidor la prefiera a x. El lector debe verificar que la monotonicidad fuerte implica la insaciabilidad local.

Axioma 1.7 (Convexidad). *Sean $x, y \in X$, las preferencias son convexas si, $x \succcurlyeq y$, implica que $tx + (1-t)y \succcurlyeq y \quad \forall\ t \in [0,1]$. Además, son estrictamente convexas si, $x \succcurlyeq y$, implica que $tx + (1-t)y \succ y \quad \forall\ t \in (0,1)$.*

La convexidad y convexidad estricta de las preferencias establece que siempre se van a preferir las cestas intermedias a las de los extremos.

1.2. Función de utilidad

El objetivo fundamental de definir los supuestos anteriores es conseguir una estructura analítica que permita asignar a cada una de las canastas un número real, de manera de que si una cesta x es preferida a y, el número real asociado a x sea mayor que el de y. Se busca una función creciente en el conjunto $X \subset \mathbb{R}^n_+$ que represente cabalmente las preferencias del consumidor.

Definición 1.4 (Función de utilidad). *Una función $u : X \to \mathbb{R}$, se dice que es una función de utilidad que representa la relación de preferencia $\succcurlyeq$, si para cada $x, y \in X$,*

$$x \succcurlyeq y \leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

.

La función de utilidad no es única, ya que para cualquier función creciente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $v(x) = f(u(x))$, $v(x)$ representa las mismas preferencias

[3] El término $|x - y|$ se refiere a la norma euclidiana del vector $x - y$, la cual denota la distancia que hay entre los vectores x y y. Ver Definición A.6.

que $u(x)$. Esto se debe a que si se evalúan dos cestas distintas, $x, y \in X$, en $u(\cdot)$, ésta arroja dos números reales que pueden ser comparados entre sí. No importa que los dos números sean muy grandes o muy pequeños, sino que conserven el mismo orden jerárquico. Por ésta razón, es importante que la función $f(\cdot)$ sea creciente, ya que de esa manera conserva las preferencias que representa $u(\cdot)$.

El conjunto de todas las cestas de consumo indiferentes entre sí se denomina conjunto de indiferencia o curvas de indiferencia. Puede considerarse que las curvas de indiferencia son las curvas de nivel de una función de utilidad. Formalmente, el conjunto de indiferencia de x_0 queda definido como:

$$CI(x_0) = \{x \in X | x \sim x_0\}.$$

Graficamente y de forma general las curvas de indiferencia suelen representarse como en la figura 1.1, esto no significa que dichas curvas tengan que tener necesariamente esa forma.

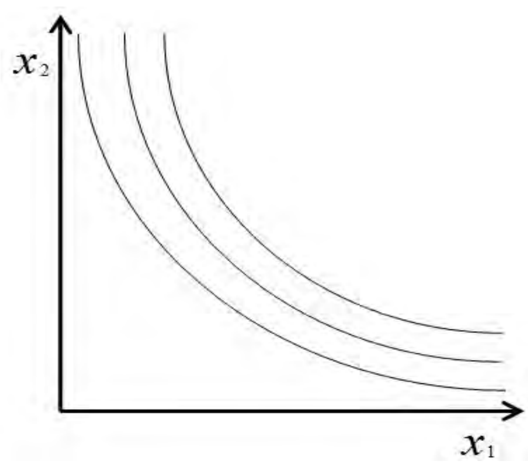

Figura 1.1: Curva de indiferencia

Teorema 1.2 (Existencia de una función de utilidad). *Si la relación de preferencia, $\succcurlyeq$, es racional* y *estrictamente monótona y continua, entonces existe* *una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ que representa la relación de preferencia $\succcurlyeq$.*

Demostración. Sea $e = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}_+^n$ un vector formado por unos y $u : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ una función que cumple con $u(x)\, e \sim x$. Primero se demostrará que $u(x)$ existe y es único.

Sean $A = \{t \geq 0 | te \succcurlyeq x\}$ y $B = \{t \geq 0 | x \succcurlyeq te\}$. Si $t^* \in A \bigcap B$, entonces $t^* e \sim x$, de tal forma que $u(x) = t^*$. Solo falta demostrar que $A \bigcap B \neq \varnothing$.

La continuidad de $\succcurlyeq$ permite que A y B sean cerrados, de ahí que se puedan reescribir como $[t, \infty)$ y $[0, t]$. Por lo que $A \bigcap B = [t, \infty) \bigcap [0, t] \neq \varnothing$.

Para demostrar que u es único supóngase que existen $t_1, t_2 \geq 0$, si $t_1 e \sim x$ y $t_2 e \sim x$, entonces por transitividad $t_1 e \sim t_2 e$, de ahí que $t_1 = t_2$.

Para probar Monotonicidad, considérese dos cestas x y y, cada una asociada a una función de utilidad $u(x)$ y $u(y)$, por la definición de u se debe satisfacer que $u(x)e \sim x$ y $u(y)e \sim y$. Si se tiene que

$$\begin{aligned} x \succcurlyeq y &\leftrightarrow u(x)e \sim x \succcurlyeq y \sim u(y)e \\ &\leftrightarrow u(x)e \succcurlyeq u(y)e \\ &\leftrightarrow u(x) \geq u(y). \end{aligned}$$

La demostración de continuidad se puede encontrar en el texto de Andreu Mas-Colell [4]. □

Es por el teorema anterior que, se cuenta con un instrumento que sirve para representar las preferencias del consumidor en una función. Además, ciertas propiedades que se mencionarán a continuación permitirán utilizar el cálculo diferencial.

Teorema 1.3. *Si la relación de preferencia $\succcurlyeq$ es representada por la función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$, entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

[4]Mas-Colell, A., Whinston, M. D. y Green, J. R.; 1995, Cap. 3, Pag. 47

i. $u(x)$ *es estrictamente creciente si* y *sólo si* $\succcurlyeq$ *es estrictamente monótona.*

ii. $u(x)$ *es cuasicóncava si* y *sólo si* $\succcurlyeq$ *es convexa.*

iii. $u(x)$ *es estrictamente cuasicóncava si* y *sólo si* $\succcurlyeq$ *es estrictamente convexa.*

Demostración.

i. $\Rightarrow$) Sea $u(x)$ una función de utilidad estrictamente creciente y $x, y \in X$, de tal forma que sin pérdida de generalidad $y > x$. Dado que $u(x)$ es creciente, $u(y) > u(x)$, entonces, por la definición de función de utilidad, *Definición 1.4*, $y \succ x$. Por lo tanto, la relación de preferencia $\preccurlyeq$ es estrictamente monótona.

$\Leftarrow$) Ésta demostración es análoga a la prueba anterior.

ii. $\Rightarrow$) Sea $u(x)$ una función de utilidad cuasicóncava

$$\rightarrow u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \text{mín}\{u(x), u(y)\} \ \forall x, y \in X.$$

Sin pérdida de generalidad, se podrá asumir que $u(x) \leq u(y)$, de ahí que, $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq u(x)$, si y sólo si, $\lambda x + (1-\lambda)y \succcurlyeq x$ cuando $x \succcurlyeq y$. Por lo tanto, $\succcurlyeq$ es convexa.

$\Leftarrow$) La demostración del regreso es análoga a la anterior.

iii. La siguiente demostración es igual a la del inciso anterior, si se cambia la desigualdad por desigualdad estricta.

□

Asumase que la función de utilidad $u(\cdot)$ es continua y estrictamente creciente en X y, por consiguiente también derivable en X. Ahora, supóngase el caso de dos bienes diferentes x_i y x_j, donde se pretende aumentar la cantidad del bien j sin alterar el nivel de utilidad. Para lograr esto, es necesario cambiar el consumo del bien i. Esto es:

$$du(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} dx_j = 0.$$

Pasando las derivadas parciales del lado derecho y las derivadas totales del lado izquierdo se tiene que:

$$\frac{dx_i}{dx_j} = -\frac{\partial u(x)/\partial x_i}{\partial u(x)/\partial x_j} = TMS_{i,j}(x),$$

donde $TMS_{i,j}(x)$ representa a la *tasa marginal de sustitución*. La cual establece a qué tasa un individuo está dispuesto a sacrificar la cantidad del bien i para aumentar la cantidad del bien j, manteniéndose en el mismo nivel de utilidad. Dicho de otra forma, la tasa marginal de sustitución mide el valor que le da el consumidor al bien i con relación al bien j.

1.3. Maximización de la utilidad

Una vez definida la función de utilidad, la conducta del consumidor puede ser sometida a un análisis de funciones. Para ello, se supondrá que el consumidor tiene preferencias racionales, continuas y que siempre elegirá la cesta por la cual muestra una mayor preferencia.

Cada uno de los bienes de la cesta de consumo $x \in X \subset \mathbb{R}^n_{++}$ tienen asignado un precio $p_i,\ i = 1, \ldots, n$, de tal manera que el vector $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n_{++}$,[5] contiene a todos los precios de la cesta de consumo x. Así, el gasto total de un consumi-dor que adquiera la canasta x a los precios p será:

$$p \cdot x = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

[5] $\mathbb{R}^n_{++} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i > 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n\}$

Siempre que un consumidor escoja una cesta, la obtendrá del conjunto de consumo X, éste conjunto contiene todas las posibles alternativas de consumo. Sin embargo, según sus propias restricciones, el consumidor tiene alternativas limitadas, que pueden ser agrupadas en un conjunto, el cual se identifica por medio del conjunto $B \subset X$. Éstas restricciones son los precios p y el ingreso m del consumidor, para éste análisis, la renta m se considerará una cantidad fija de dinero que siempre sera positíva. El conjunto B se denomina como *conjunto factible* o *restricción presupuestaria* y viene dado por:

$$B = \{x \in X | p \cdot x \leq m\};$$

para el caso particular de dos bienes y manteniéndose la igualdad con respecto a m, al conjunto B se le denomina, *recta presupuestaria*, la cual se presenta en la figura 1.2, donde se muestra que la recta tiene pendiente negativa y cruza a los ejes en m/p_1 y m/p_2.

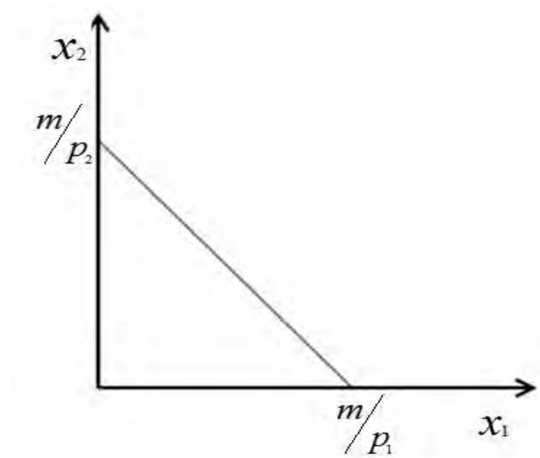

Figura 1.2: Recta presupuestaria

Los elementos que se han definido hasta ahora, son los conceptos requeridos para poder analizar el problema al que se enfrenta un consumidor. Un consumidor racional escoge una cesta $x \in X$ de acuerdo a sus preferencias $\succcurlyeq$, sujeto a la restricción de los precios y de la renta. Siempre buscará maximizar sus preferencias, sujeto a su ingreso y a los precios de los bienes que desea adquirir. De manera formal, el problema de maximización de la utilidad del queda definido así:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x \in X} & u(x) \\ s.a. & p \cdot x \leq m \end{array}$$

Para poder resolver éste problema es necesario verificar que tenga una solución. Si la función de utilidad es continua y el conjunto factible B es no vacío (contiene al menos al vector $0 \in \mathbb{R}+^n$), cerrado y acotado (para algún $i = 1, \ldots, n$, se tiene que $x_i \leq m/p_i$), según el Teorema de Weierstrass[6], se puede asegurar que existe un máximo de $u(x)$ sobre el conjunto B. Además, considerando que B es un conjunto convexo y $u(x)$ es estrictamente cuasicóncava, el máximo de $u(x)$ sobre B es único.

Una vez delimitado el problema, se puede afirmar que el consumidor escogerá x^*, de tal manera que $x^* \in B$ y $u(x^*) \geq u(x)$ para todo $x \in B$, ya que es un individuo que busca maximizar su utilidad. Sin embargo, considerando que $u(x)$ es estrictamente creciente y que las preferencias del consumidor cumplen con monotonicidad estricta, el consumidor siempre buscará agotar todo su ingreso m, por lo cual el problema de maximización se puede replantear de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x \in X} & u(x) \\ s.a. & p \cdot x = m. \end{array} \tag{1.1}$$

Para resolver éste problema se hará uso del cálculo diferencial. Dado que la función de utilidad es diferenciable en $\mathbb{R}^n_+$, por las condiciones de Lagrange[7],

[6]El Teorema de Weierstrass asegura que una función continua sobre un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$ alcanza valores extremos en los elementos del dominio. Para una mejor referencia consultar el Teorema A.2

[7]El Teorema de Lagrange establece que, para resolver un problema de optimización con restricciones de igualdad, basta con optimizar sólo la función lagrangiana, la cual, además de los parámetros del problema, depende de un multiplicador λ. Para una mejor referencia ver Teorema A.5

existe $\lambda^* \in \mathbb{R}$, tal que, (x^*, λ^*) es un punto crítico de la función lagrangiana $L(x, \lambda) = u(x) - \lambda(p \cdot x - m)$. Es decir, en (x^*, λ^*) se cumplen las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0 \quad \forall\ i = 1, \ldots, n \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = p \cdot x - m = 0 \tag{1.3}$$

A partir de éstas condiciones, se puede dividir la i-ésima condición de primer orden entre la j-ésima a fin de eliminar el multiplicador de Lagrange. De esa forma, se tiene que:

$$\frac{\partial u(x^*)/\partial x_i}{\partial u(x^*)/\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j} \tag{1.4}$$

Como se observa en *(1.4)*, el lado izquierdo de la ecuación es la tasa marginal de sustitución entre los bienes i y j, y el lado derecho es la relación de precios entre los mismos bienes. La relación de precios es la valoración que da el mercado al bien i sobre el bien j. Además, para una cesta de dos bienes, la relación de precios es la pendiente de la recta presupuestaria, ya que ésta puede expresarse como: $x_2 = m/p_2 - (p_1/p_2)x_1$. Es decir, el resultado de la maximización implica encontrar una cesta x^*, tal que, iguale las restricciones impuestas por el mercado (relación de precios), con las preferencias del consumidor (tasa marginal de sustitución).

Del sistema de ecuaciones *(1.2)* y *(1.3)* se obtendrá el vector óptimo x^*, el cual, como ya se mencionó, es único y se puede representar mediante una función $x(p, m)$ que depende de los precios p y el ingreso m. De aquí en adelante se usará $x^* = x(p, m)$ para denotar a la cesta óptima y se denominará como la *función de demanda marshalliana*. En la figura 1.3 se muestra la demanda marshalliana, donde se puede observar que el proceso de maximización de la utilidad implica alcanzar la curva de indiferencia con un nivel de utilidad mayor sujeto al nivel de ingreso y precios dados.

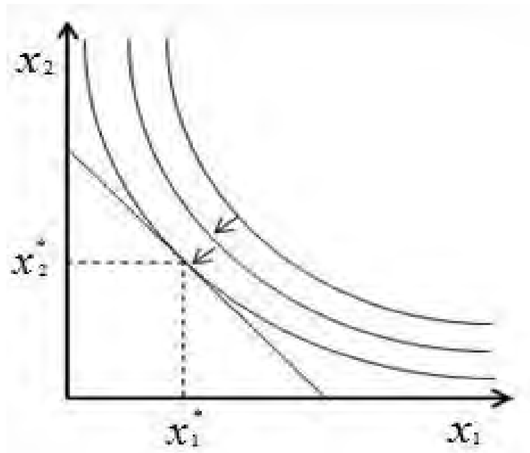

Figura 1.3: Demanda marshalliana de una función de utilidad

Teorema 1.4 (Suficiencia de las condiciones de primer orden)**.** *Suponga que* $u(x)$ *es continua* y *cuasicóncava en* X y *que* $(p, m) > 0$*. Si* $u(\cdot)$ *es diferenciable en* x^* y $(x^*, \lambda^*) > 0$ *resuelven el sistema (1.2)* y *(1.3), entonces* x^* *resuelve el problema (1.1) a los precios* p *e ingreso* m*.*

Demostración. Dado que u es cuasicóncava y continua, entonces, por el teorema y $\forall\ x, y \in X$, $\nabla f(x) \cdot (y - x) \geq 0$ cuando $u(y) \geq u(x)$.

Ahora suponga que (x^*, λ^*) resuelven el sistema *(1.2)* y *(1.3)*, entonces,

$$\nabla u(x^*) = \lambda^* p,$$
$$p \cdot x^* = m.$$

Si x^* no maximiza la utilidad, entonces debe existir un $x \geq 0$ tal que

$$u(x) > u(x^*),$$
$$p \cdot x \leq m$$

Sea $y > x$, entonces

$$u(y) > u(x^*),$$

$$p \cdot y \leq m$$

.

De ahí que:

$$\begin{array}{rrcl}
\rightarrow & \nabla u(x^*) \cdot (y - x) & = & \lambda^* p \cdot (y - x) \\
\rightarrow & & = & \lambda^* (p \cdot y - p \cdot x) \\
\rightarrow & & < & \lambda^* (y - y) \\
\rightarrow & & = & 0
\end{array}$$

Por lo tanto $y < x$, lo cual es una contradicción.

□

La función de demanda marshalliana $x(p,m)$ cumple con ciertas propiedades que resultaran utiles a este análisis, las cuales se enuncian a continuación.

Teorema 1.5 (Propiedades de la función de demanda marshalliana)**.** *Supóngase que* $u(\cdot)$*, es una función utilidad que representa la relación de preferencia,* $\succcurlyeq$*. Entonces, la función de demanda marshalliana* $x(p,m)$ *posee las siguientes propiedades:*

i. Homogénea de grado cero en (p,m).

ii. $p \cdot x(p,m) = m$.

iii. (Convexidad). Si $\succcurlyeq$ *es estrictamente convexa y* $u(\cdot)$ *es estrictamente cuasiconcava, entonces,* $x(p,m)$ *es única.*

Demostración.

i. Sea $\alpha > 0$ un escalar cualquiera, y $x(\alpha p, \alpha m)$ la demanda marshalliana que resuelve el problema de maximización:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x \in X} & u(x) \\ s.a. & \alpha p \cdot x = \alpha m, \end{array} \tag{1.5}$$

pero, por las propiedades del producto interno la restricción presupuestaria $\alpha p \cdot x = \alpha m$ es equivalente a $p \cdot x = m$. De tal forma que el problema de maximización *(1.5)* es igual al planteado en *(1.1)* y cuya solución es $x(p, m)$. Por lo tanto, $x(\alpha p, \alpha m) = x(p, m)$.

ii. Para demostrar este inciso, supongase que $p \cdot x(p, m) < m$, entonces, debe existir una cesta y, tal que, $p \cdot x(p, m) < p \cdot y(p, m) < m$, y por consiguiente, $y(p, m) \succ x(p, m)$. Sin embargo, esto contradice que $x(p, m)$ sea la solución óptima.

iii. Supongase que $u(\cdot)$ es estrictamente cuasiconcava y que x' es una cesta dentro del conjunto alcanzable a los precios p e ingreso m, y que x, x' son dos cestas distintas entre sí, tal que, $u(x) = u(x') = u(x(p, m)) = u*$. Considerese la siguiente cesta: $x'' = \alpha x + (1 - \alpha) x'$, donde $\alpha \in [0, 1[$. Dado que $p \cdot x \leq m$ y $p \cdot x' \leq m$, entonces, $p \cdot x'' = p \cdot (\alpha x + (1 - \alpha) x') \leq m$, de ahí que x'' sea alcanzable. Por la cuasiconcavidad estricta de $u(\cdot)$, $u(x'') > u*$. Sin embargo, eso es una contradicción, por lo tanto, $x(p, m)$ es única.

$\square$

La función de utilidad, $u(x)$, está definida sobre un conjunto X, y representa las preferencias del consumidor. A ésta función también se le llama función directa de utilidad. Sin embargo, cuando un consumidor maximiza su utilidad, está sujeto a un conjunto de restricciones, como los precios p y su ingreso m. De ahí que, su utilidad máxima también dependa de dichos parámetros. Por lo cual, se construirá una función que exprese cuál es el nivel máximo de utilidad del consumidor para cada nivel de precios e ingresos;

dicha herramienta es la función indirecta de utilidad, la cual es la función de valor[8] del problema de maximización de la utilidad.

Definición 1.5 (Función indirecta de utilidad). *Sea $u(x)$ una función de utilidad que es estrictamente creciente* y *cuasicóncava, la función indirecta de utilidad es $v(p,m)$* y *queda definida por:*

$$\begin{aligned} v(p,m) &= \max_{x\in X} u(x) \\ s.a. \quad & p\cdot x = m \end{aligned}$$

La función indirecta de utilidad cumple con varias propiedades que se enuncian a continuación:

Teorema 1.6. *Si $u(x)$ es una función de utilidad estrictamente creciente en X, entonces, la función indirecta de utilidad $v(p,m)$ es:*

i. *Homogénea de grado cero en (p,m).*

ii. *Estrictamente creciente en m* y *no creciente en p.*

iii. *Cuasiconvexa en p.*

iv. *Continua en p y m.*

v. *(Identidad de Roy). Si $v(p,m)$ es diferenciable en (p^0,m^0), donde p^0 y m^0 son un vector de precios y un nivel de renta cualquiera, respectivamente;* y *$\partial v(p^0,m^0)/\partial m \neq 0$, entonces,*

$$x_i(p^0,m^0) = -\frac{\partial v(p^0,m^0)/\partial p_i}{\partial v(p^0,m^0)/\partial m} \quad \forall\ i = 1,...,n$$

Demostración.

[8] En un problema de maximización de funciones, la función de valor es igual a la función objetivo evaluada en sus puntos máximos. Véase la *Definición A.19*

i. Si se multiplican los precios y el ingreso por $t \geq 1$, es decir,

$$\begin{array}{rcl} v(tp,tm) & = & \max\limits_{x\in X} u(x) \\ s.a. & & tp\cdot x \leq tm \end{array}$$

usando las propiedades del producto interno se llega a que:

$$\begin{array}{rcl} v(tp,tm) & = & \max\limits_{x\in X} u(x) \\ s.a. & & p\cdot x \leq m \end{array}$$

De ahí que $v(tp,tm) = v(p,m)$, por lo tanto, $v(p,m)$ es una función homogénea de grado cero.

ii. Para demostrar que $v(p,m)$ es decreciente en p, se definen $p, p^* \in \mathbb{R}^n_+$, de tal manera que, $p^* \geq p$, y sus respectivos conjuntos presupuestarios $B(p) = \{x \in X \mid p\cdot x \leq m\}$ y $B(p^*) = \{x \in X \mid p^*\cdot x \leq m\}$, dado que $p^* \geq p$, es fácil observar que $B(p^*) \subset B(p)$, de tal manera que $v(p^*,m) \leq v(p,m)$, por lo tanto, $v(p,m)$ es no decreciente en p.

La segunda parte de la demostración es similar, sean $m, m^* \in R_+$, tal que, $m^* < m$, de igual manera se definen sus respectivos conjuntos presupuestarios $B(p) = \{x \in X \mid p\cdot x \leq m\}$ y $B^*(p) = \{x \in X \mid p\cdot x \leq m^*\}$, dado que $m^* < m$, entonces $B^*(p) \subset B(p)$, tal que, $B^*(p) \neq B(p)$, de ahí que $v(p,m^*) < v(p,m)$, por lo tanto, $v(p,m)$ es estrictamente creciente en m.

iii. La cuasiconvexidad de v equivale a que los conjuntos de contorno inferiores sean convexos. Sean los precios $p, p' \in \mathbb{R}^n_+$ y α un escalar tales que $v(p',m) \leq \alpha$ y $v(p,m) \leq \alpha$, se define $p'' = \lambda p + (1-\lambda)p'$ con $\lambda \in [0,1]$. Se busca demostrar que $v(p'',m) \leq \alpha$. Considerando los conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{x \in X | p\cdot x \leq m\} \\ B' & = & \{x \in X | p'\cdot x \leq m\} \\ B'' & = & \{x \in X | p''\cdot x \leq m\} \end{array}$$

Observando que $B'' \subset B \cup B'$, lo cual implica que $x \in B$ o $x \in B'$. Ahora supóngase lo contrario, que $B \bigcup B' \subset B''$, esto implica que $p \cdot x > m$ y $p' \cdot x > m$, por lo cual $\lambda p \cdot x + (1-\lambda)p' \cdot > \lambda m + (1-\lambda)m = m$, esto es una contradicción.

iv. La continuidad de $v(p,m)$ se deduce del hecho de que $x^*(p,m)$ y $u(x)$ son funciones continuas, de ahí que, $v(p,m) = u(x^*(p,m))$ sea una función continua en p y m.

v. Para demostrar éste teorema, se utilizará el teorema de la envolvente[9], entonces,

$$\frac{\partial v(p^0,m^0)}{\partial p_i} = \frac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial p_i} = -\lambda^* x_i^*$$

Además,

$$\frac{\partial v(p^0,m^0)}{\partial m} = \frac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial m} = -\lambda^*$$

De ahí que,

$$-\frac{\partial v(p^0,m^0)/\partial p_i}{\partial v(p^0,m^0)/\partial m} = x_i^* = x(p^0,m^0)$$

□

Ejemplo 1.1. *Sea $u(x_1,x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$ una función de utilidad, verifique qué condiciones deben cumplir α y β para que u sea una función estrictamente cuasicóncava.*

Solución.

Se iniciará verificando qué condiciones deben cumplir α y β para que la matriz hessiana de u sea definida negativa.

[9] El Teorema de la envolvente explica que, derivar la función de valor con respecto a algún parámetro es equivalente a derivar la función lagrangiana con respecto a ese mismo parámetro. Para una mejor referencia ver el Teorema A.6

El vector de primeras derivadas de u es

$$\nabla u(x_1, x_2) = \left(\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}, \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}\right)$$

De ahí que su matriz Hessiana sea:

$$H(x) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)/x_1^2 & \alpha\beta/x_1 x_2 \\ \alpha\beta/x_1 x_2 & \beta(\beta-1)/x_2^2 \end{pmatrix},$$

Sea $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ un vector cualquiera,

$$\rightarrow \quad hH(x)h^t = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \Big(\frac{\alpha(\alpha-1)h_1^2}{x_1^2} + \frac{\alpha^2\beta^2 h_1 h_2}{x_1^2 x_2^2} + \frac{\beta(\beta-1)h_2^2}{x_2^2} < 0$$

Considerando que $x_1^{\alpha} x_2^{\beta} > 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha-1)h_1^2/x_1^2 + 2(\alpha\beta/x_1 x_2)^2 h_1 h_2 + \beta(\beta-1)h_2^2/x_2^2 &< 0 \\ \rightarrow \quad 0 < \Big(\alpha h_1/x_1 + \beta h_2/x_2\Big)^2 &< \alpha h_1^2/x_1^2 + \beta h_2^2/x_2^2 \\ \rightarrow \quad \alpha\left(\frac{h_1}{x_1}\right)^2 + \beta\left(\frac{h_2}{x_2}\right)^2 &> 0 \end{aligned}$$

Dado que h_1^2/x_1^2 y h_2^2/x_2^2 siempre son positivos, la única forma en que la desigualdad anterior se cumple es cuando α y β son estrictamente positivos. Por lo tanto, para que u sea estrictamente cuasicóncava es necesario que $\alpha, \beta > 0$.

Ejemplo 1.2. *A partir de la función, conocida como Cobb-Douglas*[10]*,* $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ *donde* $0 \leq \alpha \leq 1$ *obtener las demandas marshallianas y la función indirecta de utilidad.*

[10]La forma general de ésta función es $u(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$, donde $0 < \alpha_i < 1$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Solución.

Para obtener las demandas marshallianas se tiene que resolver el siguiente problema de maximización:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \\ s.a. & p_1x_1 + p_2x_2 = m. \end{array}$$

De ahí que el lagrangiano sea:

$$L(x,\lambda) = x_1^{\alpha} x_2^{(1-\alpha)} - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - m)$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} &= \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{(1-\alpha)} - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} &= (1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha} - \lambda p_2 = 0 \\ \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda} &= m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \end{aligned}$$

De las primeras dos ecuaciones se tiene que:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{p_1} = \frac{(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}}{p_2} \\ &\rightarrow \alpha p_2 x_2^* = (1-\alpha) p_1 x_1^* \\ &\rightarrow x_2^* = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_1}{p_2} x_1^* \end{aligned}$$

Sustituyendo en la tercera ecuación:

$$\rightarrow \quad p_1 x_1^* + \frac{1-\alpha}{\alpha} p_1 x_1^* = m$$

$$\begin{aligned}
&\to \quad p_1 x_1^* (1 + \frac{1-\alpha}{\alpha}) = m \\
&\to \quad x_1(p,m) = \frac{\alpha m}{p_1} \\
&\to \quad x_2^* = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_1}{p_2}\frac{\alpha m}{p_1} \\
&\to \quad x_2(p,m) = \frac{(1-\alpha)m}{p_2}
\end{aligned}$$

La función indirecta de utilidad esta definida como $v(p,m) = u(x_1^*, x_2^*)$, de ahí que:

$$\begin{array}{lrcl}
\to & v(p,m) & = & u(x_1^*, x_2^*) \\
\to & & = & x_1(p,m)^{\alpha} x_2(p,m)^{1-\alpha} \\
\to & & = & \left(\dfrac{\alpha m}{p_1}\right)^{\alpha} \left(\dfrac{(1-\alpha)m}{p_2}\right)^{1-\alpha} \\
\to & & = & \left(\dfrac{\alpha p_2}{(1-\alpha)p_1}\right)^{\alpha} \left(\dfrac{1-\alpha}{p_2}\right) m
\end{array}$$

1.3.1. Bienes sustitutos y complementarios

Una vez que se ha analizado la conducta del consumidor; se definirán dos tipos de bienes: sustitutos y complementarios perfectos.

Dos bienes son sustitutos perfectos cuando uno de ellos pueda ser sustituido por el otro. Existen diversos ejemplos, como: la margarina y la mantequilla, el petroleo y el gas natural, etc. Las preferencias de este tipo de bienes pueden ser representada por:

$$u(x) = ax_1 + bx_2, \text{ con } a, b > 0.$$

Un bien es complementario de otro cuando dependen entre sí para poder ser consumidos. Como ejemplos se tienen: zapato izquierdo y derecho, cafe y azucar, etc, ya que no es posible . Las preferencias de este tipo de bienes pueden ser representada por:

$$u(x) = min\{ax_1, bx_2\} \text{ con } a, b > 0.$$

A este tipo de preferencias se les denomina Leontief.

Ejemplo 1.3. *Para el caso de dos bienes, obtenga las funciones de demanda marshalliana para dos bienes sustitutos y complementarios perfectos, respectivamente.*

Solución.

Considerando que la derivada de la función de utilidad de un bien sustituto con respecto a un bien es siempre constante, al igualarla con la pendiente de la recta presupuestaria p_2/p_1 no habría forma de obtener la demanda de alguno de los bienes. Es decir, la condición de optimalidad 1.4 quedaría de la siguiente foma:

$$\frac{b}{a} = \frac{p_2}{p_1} \tag{1.6}$$

Como se puede observar en 1.6, no es posible obtener una expresión analitica a partir de la condición de optimalidad. Así, para obtener la función de demanda marshalliana es necesario analizar gráficamente el nivel máximo en que la función de utilidad toque a la recta presupuestaria. Este proceso es equivalente al de la ecuación 1.4, donde se iguala la tasa marginal de sustitución (TMS) con la relación de precios. En la figura 1.4 se puede observar la demanda marshalliana, para el caso de dos bienes, cuando la pendiente de la función de utilidad es mas grande, en terminos absolutos, que la relación de precios.

La forma general de la función de demanda marshalliana para el caso de dos bienes quedaría de la siguiente forma:

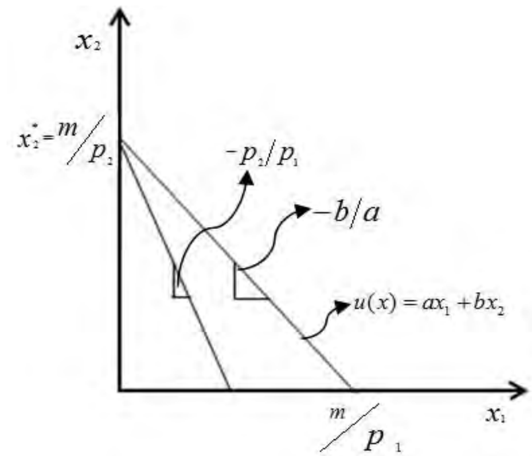

Figura 1.4: Demanda marshalliana de dos bienes sustitutos

$$x_1(p,m) = \begin{cases} 0 & \text{si } b/a > p_2/p_1 \\ m/p_1 & \text{si } b/a < p_2/p_1 \\ (0, m/p_1) & \text{si } b/a = p_2/p_1 \end{cases}$$

$$x_2(p,m) = \begin{cases} m/p_2 & \text{si } b/a > p_2/p_1 \\ 0 & \text{si } b/a < p_2/p_1 \\ (0, m/p_2) & \text{si } b/a = p_2/p_1 \end{cases}$$

Las preferencias Leontief no són representadas por una función diferenciable, por lo que, al igual que en el caso de dos bienes sustitutos, la solución se hará gráficamente.

Como se puede observar en la figura 1.5, las preferencias Leontief tienen forma de "L", por consiguiente, para maximizar la utilidad es necesario encontrar el punto donde se junten las curvas de indiferencia con la restricción presupuestaria que maximize las preferencias. Dicho punto es aquel donde la curva de indiferencia forma un vertice, el cual es el punto donde se intesectan ax_1 y bx_2; por consiguiente se tiene que sustituir $x_1 = bx_2/a$ en la recta presupuestaria, resultando en:

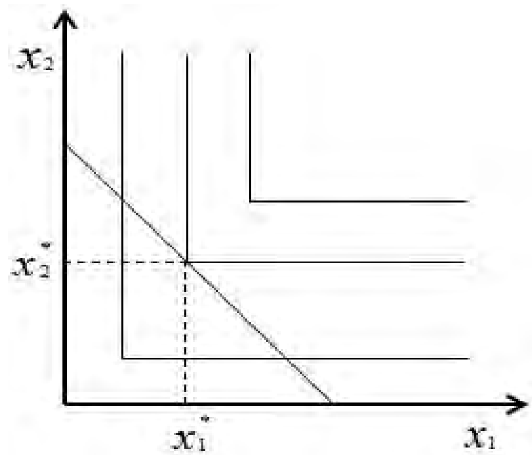

Figura 1.5: Demanda marshalliana de un bien complementario

$$x_1(p,m) = \frac{bm}{bp_1 + ap_2}$$

$$x_2(p,m) = \frac{am}{bp_1 + ap_2}$$

Este resultado se puede ver gráficamente en la figura 1.5

1.4. La minimización del gasto

Hasta ahora se ha abordado el problema del consumidor desde la óptica de maximizar sus preferencias, sujeto a una restricción presupuestaria. Sin embargo, ésta no es la única manera de analizar la conducta del consumidor. El consumidor puede mantener fijo su nivel de utilidad y sólo tratar de gastar la menor cantidad de ingreso. Éste enfoque fue planteado por *John R. Hicks* (Hicks, 1939) y se denomina problema de minimización del gasto, formalmente se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} &= p \cdot x \\ s.a. & \quad u(x) = u \end{aligned}$$

El lagrangiano del problema de minimización se expresa de la forma siguiente:

$$L(x, \lambda^*) = px - \lambda^*(u(x) - u)$$

Donde λ^* es el multiplicador de Lagrange. Diferenciando el lagrangiano con respecto a x_i y λ^*, se obtienen las condiciones de primer orden.

$$\frac{\partial L(x, \lambda^*)}{\partial x_i} = p_i - \lambda^* \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall i = 1, ..., n$$

y

$$\frac{\partial L(x, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} = u(x) - u = 0$$

A partir de éstas condiciones, se puede dividir la i-ésima condición de primer orden entre la j-ésima a fin de eliminar el multiplicador de Lagrange. De esa forma, se tiene que,

$$\frac{\partial u(x^*)/\partial x_i}{\partial u(x^*)/\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j} \qquad \forall i, j = 1, ..., n \tag{1.7}$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene la *función de demanda hicksiana*, la cual, mide el consumo óptimo a los diferentes niveles de precios y de utilidad y esta representada por: $x^h = x^h(p, u)$, Ésta función de demanda será única siempre que u sea continua y estrictamente cuasicóncava. En la figura 1.6 se puede observar la función de demanda hicksiana para el caso de dos bienes.

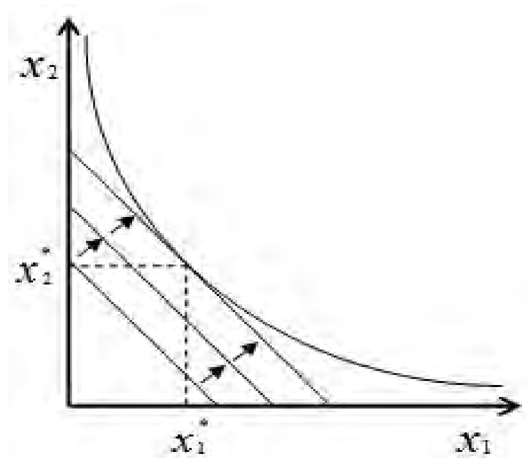

Figura 1.6: Demanda hicksiana

Como se puede observar, las condiciones anteriores son iguales a las condiciones de primer orden del problema de maximización, sin embargo, las funciones de demanda resultantes no son necesariamente iguales, esto es debido a que la función objetivo y las restricciones son diferentes.

Teorema 1.7 (Propiedades de la función de demanda hicksiana)**.** *Supóngase que $u(\cdot)$, es una función utilidad que representa la relación de preferencia, $\succcurlyeq$. Entonces, la función de demanda hicksiana $x^h(p,u)$ posee las siguientes propiedades:*

i. Homogénea de grado cero en p.

ii. $v(p, x^h(p,u)) = u$.

iii. (Convexidad). Si $\succcurlyeq$ es estrictamente convexa y $u(\cdot)$ es estrictamente cuasiconcava, entonces, $x^h(p,u)$ es única.

Demostración.

i. Sea $\alpha > 0$ un escalar cualquiera, y $x^h(\alpha p, u)$ la demanda hicksiana que resuelve el problema de minimización:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in X} & \alpha p \cdot x \\ s.a. & u(x) = u, \end{array} \tag{1.8}$$

pero, por las propiedades del producto interno la función objetivo $\alpha p \cdot x = \alpha(p \cdot x)$. De tal forma que el problema de minimización *(1.8)* es equivalente al planteado en *(1.7)* y cuya solución es $x^h(p, u)$. Por lo tanto, $x^h(\alpha p, u) = x^h(p, u)$.

ii. Para demostrar este inciso, supongase que $u(x^h(p, u)) > u$, entonces, debe existir una cesta y^h, tal que, $u(x^h(p, u)) > u(y^h(p, u)) > u$, y por consiguiente, $p \cdot x^h(p, u) < p \cdot y^h(p, u)$. Sin embargo, esto contradice que $x^h(p, u)$ sea la solución óptima.

iii. La demostración de este inciso es identica a la del inciso iii del Teorema 1.5.

□

De la misma manera, en el problema de maximización existe una función que permite conocer el nivel máximo de utilidad a cada nivel de precios e ingreso; en el problema de minimización existe la función de gasto, la cual permite conocer el gasto mínimo para cada nivel de precios y de utilidad.

Definición 1.6. *Sea $u(x)$ una función continua* y *estrictamente creciente. La función de gasto $e(p, u)$ queda definida como:*

$$\begin{array}{rcl} e(p, u) & = & \min\limits_{x \in X} p \cdot x^h(p, u) \\ s.a. & & u(x) = u \end{array}$$

Teorema 1.8. *Sea $u(x)$ una función continua y estrictamente creciente, entonces, la función de gasto cumple con las siguientes afirmaciones:*

i. *Homogénea de grado 1 en p.*

ii. *Estrictamente creciente en u* y *no decreciente en p.*

iii. *Cóncava en p.*

iv. *Continua en p y u.*

v. *(Lema de Shephard). Sea $x^h(p^*, u^*)$ la combinación de bienes que minimiza el gasto necesario para obtener un nivel de utilidad u^* a los precios p^*. Entonces, se verifica que,*

$$x^h(p^*, u^*) = \frac{\partial e(p^*, u^*)}{\partial p^*}$$

Demostración.

i. Sea $\alpha > 0$ un escalar, entonces, $e(\alpha p, U) = (\alpha p) \cdot x^h$, por propiedades del producto interno, $e(\alpha p, U) = (\alpha p) \cdot x = \alpha(p \cdot x) = \alpha e(p, U)$, de ahí que $e(p, U)$ es una función homogénea de grado 1 en p.

ii. Sean $x^h(p, u'), x^h(p, u'')$, las funciones de demanda hicksianas para u' y u'', tal que $u' < u''$. Supóngase que $e(p, u'') < e(p, u')$, es decir, $0 < p \cdot h(p, u'') < p \cdot h(p, u')$. Sea $x_1^h = \alpha x^h(p, u'')$, $\alpha \in (0, 1)$, la continuidad de $u(x)$ asegura que existe un α suficientemente cercano 1 tal que $u(x_1^h) > u'$ y $p \cdot x^h(p, u') > p \cdot x_1^h$. Esto es una contradicción, porque x_1^h es factible para u' y, además, permite obtener el nivel de utilidad u' de forma más barata que $x^h(p, u')$. Así pues, e es estrictamente creciente.

   En la segunda parte de la demostración de éste apartado, se encuentran los mismos elementos de la prueba del lema de Shephard.

iii. Para demostrar concavidad, se fijará un nivel de utilidad u y se definirá $p = \alpha p' + (1-\alpha)p''$ para $\alpha \in [0, 1]$. Supóngase que x^h es la cesta que minimiza el gasto a los precios p.

$$\rightarrow \quad e(p, U) = p \cdot x^h$$

$$\begin{array}{rcl} \rightarrow & = & \alpha p' \cdot x^h + (1-\alpha) p'' \cdot x^h \\ \rightarrow & \geq & \alpha e(p', u) + (1-\alpha) e(p'', u) \end{array}$$

La última desigualdad se sigue del hecho de que, $p' \cdot x^h \geq e(p, u)$ y $p'' \cdot x^h \geq e(p, u)$.

iv. La demostración de continuidad se deja para el lector.

v. Al igual que en la demostración del inciso iv del *Teorema 1.6*, se utilizará el *Teorema de la envolvente*, entonces

$$\frac{\partial e(p^*, u^*)}{\partial p_i} = \frac{\partial L(x^h, \lambda^*)}{\partial p_i} = \frac{\partial p \cdot x^h}{\partial p_i} = x_i^h(p, u) \quad i = 1, ..., n$$

Quedando así demostrado el Lema de Shephard. Además, dado que $x_i^h(p, u) \geq 0$, la función de gasto es no decreciente en p.

□

Ejemplo 1.4. *A partir de la función* $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ *donde* $0 \leq \alpha \leq 1$, *obtener las demandas hicksianas y la función de gasto.*

Solución.

Sea el problema de minimización del gasto

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ s.a. & x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} = u. \end{array}$$

El lagrangiano asignado al problema de minimización es,

$$L(x, \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \lambda(x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} - u)$$

Las condiciones de primer orden son:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} &= p_1 - \alpha\lambda x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha} = 0, && (1.9)\\
\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} &= p_2 - (1-\alpha)\lambda x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha} = 0, && (1.10)\\
\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda} &= u - x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} = 0. && (1.11)
\end{aligned}
$$

De las condiciones *(1.9)* y *(1.10)*, se tiene que:

$$
\lambda = \frac{p_1}{\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}} = \frac{p_2}{(1-\alpha)x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha}}
$$

$$
\begin{aligned}
&\rightarrow \quad \frac{p_1 x_1}{\alpha} = \frac{p_2 x_2}{1-\alpha}\\
&\rightarrow \quad x_2 = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_1}{p_2}x_1
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en *(1.11)*,

$$
\begin{aligned}
&\rightarrow \quad x_1^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_1}{p_2}x_1\right)^{1-\alpha} = u\\
&\rightarrow \quad x_1\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-\alpha} = u\\
&\rightarrow \quad x_1^h = u\left(\frac{\alpha p_2}{(1-\alpha)p_1}\right)^{1-\alpha} && (1.12)\\
&\rightarrow \quad x_2^h = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_1}{p_2}u\left(\frac{\alpha p_2}{(1-\alpha)p_1}\right)^{1-\alpha}\\
&\rightarrow \quad x_2^h = u\left(\frac{(1-\alpha)p_1}{\alpha p_2}\right)^{\alpha} && (1.13)
\end{aligned}
$$

Tomando *(1.12)* y *(1.13)* y sustituyéndolas en la función objetivo se llega a la función de gasto,

$$e(p,u) = p_1 x_1^h + p_2 x_2^h = u\left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_2}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}.$$

1.5. Algunas identidades importantes

El problema de maximización de la utilidad y el de minimización del gasto son conceptualmente distintos, sin embargo , existe una cercana relación entre ambos. Esto también puede decirse para las funciones de demanda hicksiana y marshalliana.

Considerese $u = v(p,m)$, ésta expresión dice que a los precios p, u es el nivel máximo de utilidad que puede ser alcanzado cuando el ingreso del consumidor es m. Consecuentemente, a los precios p, si el consumidor quisiera llegar a un nivel de utilidad de al menos u, el ingreso m debe ser lo suficientemente grande para alcanzarlo. Además, $e(p,u)$ es el gasto mínimo necesario para alcanzar un nivel de utilidad de al menos u. De ahí que, $e(p,u) \leq m$, de igual manera se puede llegar a la siguiente expresión,

$$e(p, v(p,m)) \leq m, \qquad \forall\ (p,m) > 0 \tag{1.14}$$

Sea $m = e(p,u)$, dicha expresión indica que a los precios p, el mínimo ingreso para obtener un nivel de utilidad de u es m. Dado que $v(p,m)$ es el máximo nivel de utilidad alcanzable a los precios p y con un ingreso m, entonces, $v(p,m) \geq u$. De ahí se puede llegar a,

$$v(p, e(p,u)) \geq u, \qquad \forall\ (p,u) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R} \tag{1.15}$$

Teorema 1.9. *Sean* $v(p,m)$ y $e(p,u)$ *la función indirecta de utilidad* y *la función de gasto, cuya función de utilidad es continua* y *estrictamente creciente. Entonces, para* $p >> 0$ *y* $m \geq 0$*,* *i.* $e(p, v(p, m)) = m$.

ii. $v(p, e(p, u)) = u$.

Demostración.

i. De *(1.14)* se sabe que $e(p, v(p, m)) \leq m$, sin embargo, se quiere probar que la igualdad se mantiene. Para eso se supondrá que no, es decir, $e(p, v(p, m)) < m$, donde $u = v(p, m)$. Se escogerá un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, tal que, $e(p, u + \epsilon) < m$.

   Sea $m_\epsilon = e(p, u + \epsilon)$, *(1.15)* implica que $v(p, m_\epsilon) \geq u + \epsilon$. Dado que $m_\epsilon < m$, $v(p, m) \geq u > v(p, m_\epsilon) \geq u + \epsilon$, entonces, $u > u + \epsilon$, sin embargo, esto es una contradicción. Por lo tanto, $e(p, v(p, m)) = m$.

ii. Al igual que en el inciso anterior se desea probar que *(1.15)* mantiene la igualdad. Para eso supóngase que $v(p, e(p, u)) > u$ y $u > u(0)$. Sea $m = e(p, u)$, entonces, $v(p, m) > u$. Dado que $e(p, u(0)) = 0$ y e es estrictamente creciente en la utilidad, $m = e(p, u) > 0$, elíjase un $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, tal que, $m - \epsilon > 0$ y $v(p, m - \epsilon) > u$. Entonces, el ingreso $m - \epsilon$ es suficiente para que a los precios p, se alcance un nivel de utilidad mayor a u. De ahí, $e(p, u) \leq m - \epsilon$. Pero esto es una contradicción, ya que, $m = e(p, u)$.

$\square$

Las soluciones al problema de maximización son las funciones de demandas marshallianas, las del problema de minimización son las funciones de demandas hicksianas. Debido a la cercana relación entre ambos problemas de optimización, resulta natural suponer que existen algunas identidades entre sus soluciones. El siguiente teorema formaliza ésta afirmación.

Teorema 1.10. *Sea $u(x)$ una función de utilidad, continua, estrictamente creciente* y *estrictamente cuasicóncava en $\mathbb{R}^n_+$, entonces, existen las siguientes relaciones entre las funciones de demanda hicksiana* y *marshalliana para $i = 1, \ldots, n$:*

i. $x(p,m) = x^h(p, v(p,m))$.

ii. $x^h(p,u) = x(p, e(p,u))$.

Demostración.

i. Sean $x^0 = x(p_0, m_0)$ y $u_0 = u(x^0)$. Entonces, $v(p_0, m_0) = u_0$ y $p_0 \cdot x^0 = m_0$. Por el *Teorema 1.9* se sabe que $e(p_0, v(p_0, m_0)) = m_0$ o, equivalentemente, $e(p_0, u_0) = m_0$. Dado que $u(x^0) = u_0$ y $p_0 \cdot x^0 = m_0$, esto implica que, x^0 es solución de la función de demanda hicksiana cuando $(p,u) = (p_0, u_0)$. Es decir,

$$x^0 = x^h(p_0, u_0)$$
$$x(p_0, m_0) = x^h(p_0, v(p_0, m_0)).$$

ii. La demostración queda para el lector.

$\square$

Ejemplo 1.5. *A partir de la función de demanda marshalliana vista en el Ejemplo 1.2, obtenga la función de demanda hicksiana y la función de gasto correspondiente.*

Solución.

De el *Ejemplo 1.2* se sabe que:

$$\begin{aligned} x_1(p,m) &= \frac{\alpha m}{p_1} \\ v(p,m) &= \left(\frac{\alpha p_2}{(1-\alpha)p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{p_2}\right) m \end{aligned}$$

Por el inciso *ii* del *Teorema 1.9* se tiene que:

$$v(p, e(p,u)) = \left(\frac{\alpha p_2}{(1-\alpha)p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p_2}\right)e(p,u) = u$$

Despejando $e(p,u)$, se llega a que:

$$e(p,u) = u\left(\frac{(1-\alpha)p_1}{\alpha p_2}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_2}{1-\alpha}\right)$$

Por el inciso *ii* del *Teorema 1.10* se tiene que:

$$\begin{aligned} x_1^h(p,u) &= x_1(p, e(p,u)) \\ &= u\left(\frac{(1-\alpha)p_1}{\alpha p_2}\right)^{\alpha}\left(\frac{\alpha p_2}{p_1(1-\alpha)}\right) \\ &= u\left(\frac{\alpha p_2}{p_1(1-\alpha)}\right)^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

1.6. Propiedades de la demanda

En el estudio de éste modelo aún no se ha respondido la pregunta, ¿qué efecto tiene en la demanda un cambio en el nivel de precios? A continuación, se responde esa pregunta. Cuando el precio de un bien aumenta de p_i a p_i', se espera que haya un cambio en la cantidad demandada de ese bien. Éste cambio en la demanda se puede separar en dos partes. Primero, al aumentar el precio del bien i, el consumidor tiene un menor nivel de ingreso para adqirir el resto de los bienes, por lo cual es relativamente más pobre. A éste efecto se le llama, *efecto renta* (ER).

A consecuencia del aumento en el precio del bien i, el consumidor disminuirá la demanda del bien i con el objeto de poder adquirir más del resto de los bienes. Éste efecto se denomina *efecto sustitución* (ES). Para calcular la magnitud de éste efecto, se utiliza la pendiente de la función de demanda hicksiana, también llamada función de demanda compensada. Es llamada así porque, ante la variación del precio, el consumidor es compensado para que pueda mantenerse en el mismo nivel de utilidad. A la suma de ambos efectos se le llama *efecto total* (ET).

Teorema 1.11 (Ecuación de Slutsky)**.** *Sea $x(p,m)$ el sistema de demanda marshalliana del consumidor. Sea u^* el nivel máximo de utilidad que el consumidor alcanza a los precios p e ingreso m. Entonces,*

$$\underbrace{\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j}}_{ET} = \underbrace{\frac{\partial x_i^h(p,u^*)}{\partial p_j}}_{ES} \underbrace{-x_j(p,m)\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m}}_{ER}, \qquad \forall i,j = 1,\ldots,n.$$

Demostración. A partir del inciso *ii.* del *Teorema 1.10*, se tiene que,

$$x^h(p,u^*) = x(p,e(p,u^*))$$

Se deriva de ambos lados de la ecuación y se utiliza la regla de la cadena, para obtener,

$$\frac{\partial x_i^h(p,u^*)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(p,e(p,u^*))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,e(p,u^*))}{\partial m}\frac{\partial e(p,u^*)}{\partial p_j} \tag{1.16}$$

Considerando que u^* es la utilidad alcanzada a los precios p e ingreso m, entonces $u^* = v(p,m)$, de ahí que, según el *Teorema 1.9*, $e(p,u^*) = e(p,v(p,m)) = m$.

Por el Lema de Shephard, se sabe que la derivada parcial de la función de gasto con respecto a p_j, es igual a la demanda hicksiana para el bien j con una utilidad de u^*, es decir,

$$\frac{\partial e(p,u^*)}{\partial p_j} = x_j^h(p,u^*) = x_j^h(p,v(p,m)). \tag{1.17}$$

Sin embargo, utilizando el inciso *i.* del *Teorema 1.10*, la ecuación *(1.17)* se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial e(p,u^*)}{\partial p_j} = x_j^h(p, v(p,m)) = x_j(p,m) \tag{1.18}$$

Sustituyendo *(1.18)* en (*1.16*) y restando el segundo término del lado derecho de la ecuación *(1.16)* a ambos lados de ésta, se llega a lo que quería probarse,

$$\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^h(p,u^*)}{\partial p_j} - x_j(p,m)\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m}, \quad \forall\ i,j = 1,\ldots,n.$$

□

La ecuación de Slutsky permite descomponer, por medio de expresiones analíticas, la variación de la demanda del bien j ante una alteración del precio del bien i en los dos efectos antes mencionados, efecto sustitución y efecto renta.

Ejemplo 1.6. *A partir de las demandas marshallianas* y *hicksianas calculadas en las secciones anteriores, obtenga los efectos renta, sustitución* y *total del bien* 1 *ante un cambio de una unidad en su propio precio.*

Solución.

De los ejemplos 1.2 y 1.4 se sabe que

$$x_1^h(p,u) = u\left(\frac{\alpha p_2}{(1-\alpha)p_1}\right)^{1-\alpha}$$

$$x_1(p,m) = \frac{\alpha m}{p_1}$$

A partir de esas demandas se tiene que

$$
\begin{aligned}
ES &= \frac{\partial x_1^h(p,u^*)}{\partial p_1} = \frac{-u(\alpha p_2)^{1-\alpha}((1-\alpha)p_1)^{\alpha}}{p_1^2} && (1.19)\\
ER &= -x_1(p,m)\frac{\partial x_1(p,m)}{\partial m} = -\frac{\alpha^2 m}{p_1^2} && (1.20)\\
ET &= \frac{\partial x_1(p,m)}{\partial p_1} = -\frac{\alpha m}{p_1^2} && (1.21)
\end{aligned}
$$

Si se toman los valores de $\alpha = 1/2$, $(p_1, p_2) = (3,3)$, $m = 648$ y por consiguiente $u^* = 108$ y se sustituyen en *(1.22)* y *(1.23)* se tiene que

$$
\begin{aligned}
ES &= = \frac{-108(3/2)^{1/2}(3/2)^{1/2}}{3^2} = -108\frac{3}{18} = -18 && (1.22)\\
ER &= = -648\frac{1/2^2}{3^2} = -\frac{648}{36} = -18 && (1.23)\\
ET &= -\frac{648/2}{3^2} = -36 && (1.24)
\end{aligned}
$$

Como se puede observar, se cumple la ecuación de Slutsky ya que $ET = -18 - 18 = -36$. Este resultado implica que si el precio del bien 1 aumenta en una unidad su demanda disminuye en 36 unidades.

Para finalizar el análisis de la demanda del consumidor, se analizará su conducta al enfrentar cambios en los precios y el ingreso.

Definición 1.7 (Elasticidad cruzada de la demanda)**.** *Sea $x_i(p,m)$ la demanda marshalliana del bien i, entonces la elasticidad cruzada de la demanda del bien i con respecto a p_j queda definida por:*

$$\epsilon_{ij}(x_i) = \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i(p,m)}.$$

La elasticidad cruzada de la demanda del bien i con respecto al precio del bien j, mide el cambio porcentual de la demanda del bien i ante cambios porcentuales en el precio del bien j. Para el caso particular en que $i = j$ se le denomina elasticidad precio de la demanda y se denota por: $\epsilon(x_i)$.

Definición 1.8 (Elasticidad ingreso)**.** *Sea $x_i(p,m)$ la demanda marshalliana del bien i, entonces la elasticidad ingreso queda definida por:*

$$\epsilon_m(x_i) = \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m}\frac{m}{x_i(p,m)}.$$

La elasticidad ingreso representa el cambio porcentual en la cantidad demandada del bien i ante cambios porcentuales en el ingreso m del consumidor.

Ejemplo 1.7. *Para el caso de las preferencias Cobb-Douglas, calcule la elasticidad precio, ingreso* y *cruzada de la demanda.*

Solución.

Como se observó anteriormente,

$$x_1^h(p,u) = u\left(\frac{\alpha p_2}{(1-\alpha)p_1}\right)^{1-\alpha},$$

$$x_1(p,m) = \frac{\alpha m}{p_1}.$$

Según las definiciones 1.7 y 1.8,

$$\epsilon_{1,2}(x_i) = \frac{\partial x_1(p,m)}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1(p,m)} \quad (1.25)$$

$$\epsilon_m(x_1) = \frac{\partial x_1(p,m)}{\partial m}\frac{m}{x_1(p,m)} \quad (1.26)$$

$$\epsilon(x_1) = \frac{\partial x_1(p,m)}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1(p,m)} \quad (1.27)$$

Considerando que para el caso de una función de utilidad Cobb-Douglas $\partial x_1(p,m)/\partial p_2 = 0$ y $\partial x_1(p,m)/\partial p_1 = -(m\alpha/)/p_1^2$, se tiene que,

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{1,2}(x_i) &= 0 && (1.28)\\
\epsilon_m(x_1) &= \frac{\alpha}{p_1}\frac{m}{\alpha m/p_1} = 1 && (1.29)\\
\epsilon(x_1) &= = -\frac{m\alpha}{p_1^2}\frac{p_1}{\alpha m/p_1} = -1. && (1.30)
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones *(1.28)*, *(1.29)* y *(1.30)*, expresan que para una función de utilidad Cobb-Douglas, la demanda del bien 1 no se altera ante cambios en el precio de otros bienes; aumenta en la misma tasa en la que aumenta el ingreso; y es inversamente proporcional a su propio precio.

Ejemplo 1.8. *Para el caso de dos sustitutos y complementarios, calcule la elasticidad cruzada de la demanda.*

Solución.

Como se observó anteriormente, las funciones de demanda de dos bienes sustitutos y complementarios son, respectivamente

$$x_1(p,m) = \frac{m}{p_1} \text{ y}$$

$$x_1(p,m) = \frac{mb}{ap_2 + bp_1}.$$

Para el caso de dos bienes sustitutos, según la definición 1.7, la elasticidad cruzada de la demanda es:

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{1,2}(x_i) &= \frac{\partial x_1(p,m)}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1(p,m)} && (1.31)\\
&= 0 \times \frac{p_1 p_2}{m} = 0 && (1.32)
\end{aligned}
$$

Para el caso de dos bienes complementarios, según la definición 1.7, la elasticidad cruzada de la demanda es:

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{1,2}(x_i) &= \frac{\partial x_1(p,m)}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1(p,m)} && (1.33)\\
&= \frac{-mab}{(ap_1+bp_2)^2}\frac{p_2(ap_2+bp_1)}{mb} && (1.34)\\
&= \frac{-ap_2}{ap_1+bp_2} < 0 && (1.35)
\end{aligned}
$$

Estos resultados dicen que en el caso de dos bienes sustitutos, cuando el precio de uno de los bienes cambia, la demanda del otro no se ve afectada (la elasticidad cruzada de la demanda es igual a cero). Para el caso de dos bienes complementarios, cuando el precio de uno de los bienes cambia, la demanda del otro se ve disminuidad (la elasticidad cruzada de la demanda es negativa).

1.6.1. Ley de la demanda

Un bien es normal si su consumo aumenta cuando se incrementa el ingreso manteniendo los precios constantes; es inferior cuando su consumo disminuye al aumentar el ingreso. Si $\partial x_i(p,m)/\partial m \geq 0$, el bien i es normal, y si $\partial x_i(p,m)/\partial m \leq 0$ el bien es inferior.

Teorema 1.12 (Ley de la demanda)**.** *Una caída en el precio de un bien normal provoca un incremento en la demanda de ese bien, si el bien es inferior, el efecto es una disminución de la demanda. Formalmente,*

$$\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_i} \leq 0. \tag{1.36}$$

$$\frac{\partial x_j(p,m)}{\partial p_j} \geq 0 \tag{1.37}$$

Donde x_i y x_j representan a un bien normal e inferior, respectivamente.

Demostración. La demostración de éste teorema se realizará en dos partes. Solo para el caso de un bien normal, el caso de un bien inferior se deja como ejercicio para el lector. Primero se demostrará que la derivada parcial de una función de demanda hicksiana con respecto a su precio es menor o igual que cero. A partir de ésta afirmación y de la ecuación de Slutsky, se probarán las expresiones *(1.36)* y *(1.37)*.

Por el lema de Shephard, se sabe que,

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = x^h(p,u) \tag{1.38}$$

Derivando ambos lados de la ecuación *(1.38)* con respecto a p_i, se llega a,

$$\frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_i^2} = \frac{\partial x^h(p,u)}{\partial p_i} \tag{1.39}$$

Del inciso iii del *Teorema 1.8*, la función de gasto e es una función cóncava en p, de ahí que,

$$\frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_i^2} = \frac{\partial x^h(p,u)}{\partial p_i} \leq 0 \tag{1.40}$$

Supóngase que el bien i es un bien normal. Utilizando el resultado anterior y el hecho de que $\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m} \geq 0$. Se tiene,

$$\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i^h(p,u^*)}{\partial p_i} - x_i(p,m)\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m} \leq 0.$$

Quedando así demostrado el teorema.

□

1.7. Ejercicios

1. Sea $\succcurlyeq$ una relación de preferencia. Demuestre las siguientes afirmaciones:

   a) $\backsim \subset \succcurlyeq$

   b) $\succ \cup \backsim = \succcurlyeq$

   c) $\succ \cap \backsim = \emptyset$

2. Demuestre que *preferencia estricta* e *indiferencia* son relaciones de preferencia, es decir, cumplen con los axiomas de completitud y transitividad.

3. ¿Cumplen las relaciones de *preferencia estricta* e *indiferencia* con las siguientes propiedades?

   a) Continuidad.

   b) Monotonicidad y Monotonicidad estricta.

   c) Convexidad y Convexidad estricta.

4. Considere una relación de preferencias débil/fuerte son, respectivamente,

$$(y_1, y_2) \succcurlyeq (x_1, x_2) \quad si \; y_1 \geq x_1 \quad y \quad y_2 \geq x_2$$

$$(y_1, y_2) \succ (x_1, x_2) \quad si \; y_1 \geq x_1 + t \quad y \quad y_2 \geq x_2 + t$$

   ¿Satisfacen dichas preferencias los supuestos de:

   a) Monotonicidad débil.

   b) Monotonicidad estricta

   c) Convexidad.

   d) Convexidad estricta.

   e) Continuidad.

5. Demuestre el regreso del inciso i, ii y todo el inciso iii del *Teorema 1.3.*

6. Sean $x, y \in X$. Demuestre que,

$$\max\{ax, ay\} + \min\{bx, by\} = min\{ax + by, bx + ay\} \;\; si \;\; a, b > 1$$

7. Sea $u(x, y) = min\{ax + by, bx + ay\}$ con $a, b > 1$. Obtenga sus demandas marshallianas y la función indirecta de utilidad.

8. Sea $u(x)$ la función de utilidad que representa a la relación de *preferencia débil*. Pruebe que $v(x)$ representa la *preferencia débil* si y sólo si $v(x) = f(u(x))$, donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente.

9. Demuestre el inciso iv del *Teorema 1.8.*

10. Considere la función de utilidad CES $u(x_1, x_2) = [a_1 x_1^\gamma + a_2 x_2^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}}$, ¿qué características debe cumplir γ para que u sea estrictamente cuasiconcava?

11. A partir de la función de utilidad CES

    a) Calcule las demandas marshallianas y hicksianas.

    b) Obtenga la función indirecta de utilidad y la función de gasto.

    c) Compruebe que se cumplen la identidad de Roy y el lema de Shephard.

12. Sea $u(x) = \prod_{n}^{i=1} (x_i - a_i)^{b_i}$ donde $b_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$. Los escalares $a_i \geq 0$ son interpretados algunas veces como niveles de *subsistencia* para los bienes respectivos.

    a) Obtenga las demandas marshallianas y la función indirecta de utilidad.

    b) A partir de la función indirecta de utilidad obtenga las demandas hicksianas y la función de gasto.

    c) Verifique que la función indirecta de utilidad es decreciente con respecto a los precios y creciente con respecto al ingreso.

    d) Verifique que la función de gasto es creciente con respecto al ingreso.

13. Demuestre el inciso ii del *Teorema 1.10*.

14. Explique cómo es la pendiente de la demanda hicksiana con respecto a la demanda marshalliana del bien i si x_i es un bien normal.

15. Demuestre para un bien inferior el *Teorema 1.12*.

Capítulo 2

Teoría del productor

En éste capítulo se analizará otro tipo de agente en la economía: la empresa o firma. Una empresa es una organización creada por individuos para lograr algún objetivo. Dicho objetivo suele ser ganar dinero a cambio de proveer algún servicio o de producir un bien para luego venderlo. Para obtener un producto o servicio, la firma requiere insumos que, a su vez, serán transformados en productos terminados. Los insumos serán adquiridos en un mercado de factores y esos gastos representan los costos de la empresa. Los productos terminados serán vendidos en un mercado de bienes y de ahí la firma obtendrá sus ingresos. La diferencia entre ingresos y costos cuando ésta es positiva es el beneficio. Éste análisis se dividirá en cuatro partes.

La primera parte se centrará en definir todos los conceptos necesarios para construir un modelo general de una empresa representativa que produce ciertos bienes a partir de insumos. Es aquí donde se definirá al conjunto de posibilidades de producción.

Después, a partir de los elementos que se definieron, se abordará el problema del productor desde el punto de vista de la maximización del beneficio. Para ello, se definirán algunos conceptos como la función de producción y la función de beneficios. Además, se estudiarán sus diversas propiedades.

En la tercera parte del capítulo se cambiará el enfoque del capítulo anterior por el de la minimización de los costos, se definirá a la función de costos y se estudiarán sus propiedades.

Finalmente, el análisis terminará con el estudio de las diferentes interrelaciones que existen entre el problema de la maximización del beneficio y de la minimización de costos.

2.1. Producción

Producción es el proceso mediante el cual se transforman insumos o factores en productos terminados. Para ello, las empresas cuentan con una tecnología, la cual determina y restringe lo que es posible producir. De forma general; el conjunto de posibilidades de producción, el cual ésta representado por $Y \subset \mathbb{R}^m_+$, donde cada vector $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in Y$; es un plan de producción cuyos componentes indican la cantidad de insumos o productos terminados que son tecnológicamente viables. En éste modelo se usará la convención de que si, $y_i < 0$, entonces, el bien i es un insumo, en caso de que, $y_i > 0$, es un producto terminado. Cuando $y_i = 0$ no forma parte del proceso de producción.

Axioma 2.1. *El conjunto, Y es no vacío y cerrado. Además, si $y^i \in Y \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots,$ es una sucesión de planes de producción, entonces, si $y^i \to y$ implica que $y \in Y_j$.*

Axioma 2.2. *Sea y un plan de producción, tal que, si $y_k \geq 0\ \forall k = 1, ..., m$, entonces, $y = 0$.*

Este axioma indica que no es posible producir algo a partir de nada.

Axioma 2.3. *Sea 0 un vector $m-$dimensional, entonces, $0 \in Y$.*

El axioma anterior expresa que la empresa en cualquier momento puede parar la producción.

Axioma 2.4 (Rendimientos no crecientes a escala)**.** *Sea $y \in Y$ un plan de producción* y $\lambda \in [0,1]$ *algún escalar, entonces,* $\lambda y \in Y$*.*

Este axioma expresa que, si se aumenta la cantidad de insumos en una proporción λ, la producción va a crecer en una proporción menor o igual a λ. Una implicación de éste supuesto es la posibilidad de suspender la actividad, *Axioma 2.3*.

Axioma 2.5 (Aditividad del conjunto de posibilidades de producción)**.** *Sean* $y^1, y^2 \in Y$*, dos distintos planes de producción, entonces,* $y^1 + y^2 \in Y$*.*

El axioma de aditividad del conjunto de posibilidades de producción explica que dados dos planes de producción, la empresa se puede dividir y establecer dos fábricas diferentes para que cada una produzca bajo uno de los planes de producción, así, la empresa en conjunto producirá ambos planes de producción.

Axioma 2.6 (Convexidad)**.** *Sean* $y^1, y^2 \in Y$*, dos distintos planes de producción, y* $\lambda \in [0,1]$ *algún escalar, entonces, la combinación convexa de planes de producción* $y' = \lambda y^1 + (1-\lambda)y^2 \in Y$*.*

Este axioma implica que con la combinación lineal de dos planes de producción, se puede producir al menos lo que produjo cada uno de los planes de producción.

Axioma 2.7 (Monotonicidad)**.** *Si* $y \in Y$ y $y \leq y'$*, entonces,* $y' \in Y$*.*

Al igual que en la teoría del consumidor, el axioma de monotonicidad implica que si se aumenta la cantidad de insumos, al menos se va a producir la misma cantidad que se producía antes. Si la desigualdad es estricta, se le llama monotonicidad estricta.

Un elemento que describe de forma abstracta a la tecnología con la que la empresa cuenta es la función de producción. Ésta función describe para cada vector de insumos la cantidad de bienes que la firma puede producir de acuerdo a sus restricciones tecnológicas.

Cuando un solo bien es producido por varios insumos, la cantidad de producto terminado será representada por y, y la cantidad de insumo i por x_i, de tal forma que el vector de insumos se denota por $x = (x_1, \ldots, x_n)$. El vector x y y son no negativos. A continuación, se describe formalmente a una función de producción.

Definición 2.1. *Una función de producción $f(\cdot)$, es una función $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$, que además, es continua, estrictamente creciente* y *estrictamente cuasicóncava en $\mathbb{R}^n_+$.*

De forma general, una función de producccción puede adoptar una forma similar a la que se presenta en la figura 2.1.

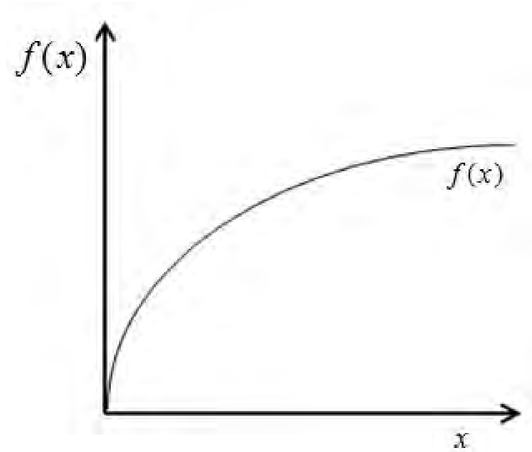

Figura 2.1: Función de producción

Según ésta definición, una función de producción debe ser continua, ésta propiedad garantiza que cambios muy pequeños en la cantidad de insumos reflejen cambios en la cantidad del producto terminado. Además, la tecnología debe ser estrictamente creciente, lo cual implica que un incremento en un insumo provoca un aumento en la producción. Al igual que en la teoría del consumidor, la cuasiconcavidad estricta de f permite encontrar una solución al problema de maximización del beneficio.

De forma análoga a la teoría del consumidor en que se tienen las curvas de indiferencia, en la teoría del productor existe un conjunto de insumos que producen y unidades y es llamado *isocuanta*. Como se puede observar en la figura 2.2 su gráfica es identica a la del conjunto de indiferencia y se denota por:

$$Q(y) \equiv \{x \geq 0 \mid f(x) = y\}.$$

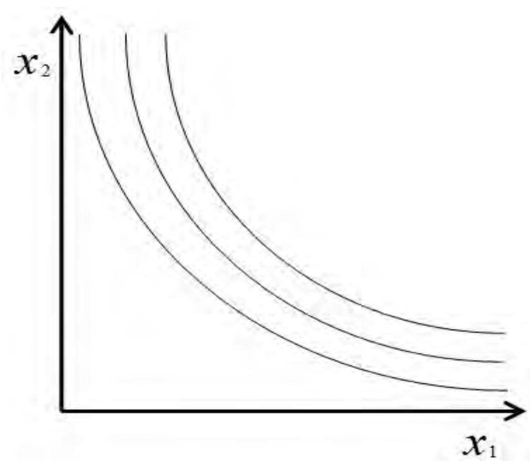

Figura 2.2: Isocuanta

De manera análoga a la tasa marginal de sustitución en la teoría del consumidor, en la teoría del productor existe la *tasa marginal de transformación* (TMT). La cual mide la tasa a la que debe ser sacrificada la cantidad del insumo h, para aumentar la cantidad del insumo k, mantener el nivel de producción constante. La función de producción es continua y estrictamente creciente, de ahí que sea diferenciable. Por tanto, la tasa marginal de transformación se define como:

$$TMT_{h,k}(x) = -\frac{\partial f(x)/\partial x_h}{\partial f(x)/\partial x_k}.$$

El proceso para obtener la $TMT_{h,k}(x)$ es análogo al que se usó para obtener $TMS_{i,j}(x)$.

Definición 2.2. *Una función de producción $f_j(\cdot)$ exhibe la propiedad de,*

i. Retornos constantes a escala si $f(tx) = tf(x) \quad \forall\ t > 0$.

ii. Retornos crecientes a escala si $f(tx) > tf(x) \quad \forall\ t > 0$.

iii. Retornos decrecientes a escala si $f(tx) < tf(x) \quad \forall\ t > 0$.

2.2. La maximización del beneficio

Una única empresa no es capaz de afectar el comportamiento de los precios a los que se enfrenta, considerando que el volumen de operaciones de las empresas es pequeño respecto al tamaño del mercado. Esto implica que la empresa no encontrará restricciones en el mercado de insumos ni en el de productos terminados, y tomarán como dados los precios. Éste tipo de mercados se denominan mercados competitivos. De aquí en adelante se considerará que las empresas actúan bajo éstas condiciones.

El beneficio de una empresa está definido como la diferencia entre los ingresos de la empresa py, producto de la venta de su producción, y los costos $w \cdot x$, los cuales fueron generados para poder producir y. La firma, entonces, tendrá que escoger un nivel de producción y un conjunto de insumos que permitan realizar la producción.

Así pues, el objetivo de la empresa es maximizar su beneficio. Por lo tanto, la firma elegirá un nivel de producción y y una combinación de insumos x que permitan resolver el siguiente problema,

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & py - w \cdot x \\ s.a. \quad & f(x) \geq y, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $f(x)$ es una función de producción. La solución a éste problema expresa qué cantidad de insumos, y, por consiguiente, que nivel de producción, debe elegir para maximizar sus beneficios.

Si se considera que la función de producción es estrictamente creciente, se quitará la desigualdad de la restricción y se mantendrá la igualdad. Consecuentemente, $y = f(x)$, de ahí que el problema de maximización se replantee y quede como:

$$\max_{x,y} \quad pf(x) - w \cdot x \tag{2.2}$$

Dado que la función de producción $f(\cdot)$ es diferenciable, la solución del problema de maximización del beneficio se puede caracterizar a partir de las condiciones de primer orden:

$$p\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = w_i \quad \forall \ i = 1, \ldots, n \tag{2.3}$$

Dividiendo la i-ésima entre la j-ésima condición, se tiene que:

$$TMT_{ij}(x) = \frac{\partial f(x)/\partial x_i}{\partial f(x)/\partial x_j} = -\frac{w_i}{w_j}, \quad \forall \ i, j = 1, \ldots, n \tag{2.4}$$

Como se observa en (2.4), la condición de optimalidad del problema de maximización del beneficio es análoga a la de maximización de la utilidad, por ello su interpretación económica sea similar. El resultado de la maximización implica encontrar un vector de insumos x^*, tal que iguale las restricciones impuestas por el mercado (relación de precios de los insumos), con las restricciones tecnológicas de la empresa (tasa marginal de transformación). En la figura 2.3 se puede observar la maximización del beneficio para el caso de un insumo.

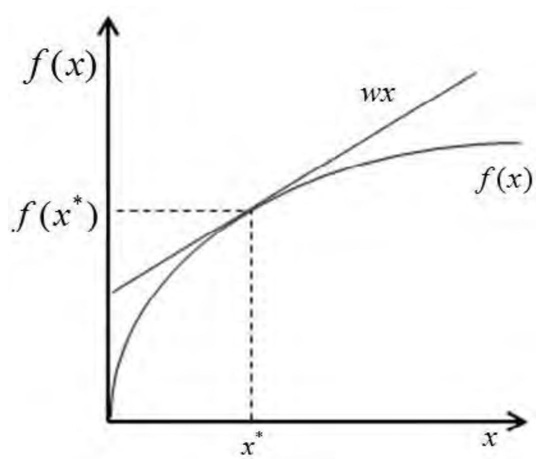

Figura 2.3: Maximización de los beneficios

El sistema de ecuaciones (2.3) representa a las condiciones de primer orden del problema de maximización del beneficio. La solución a éste sistema, $x^* = x(p,w)$, es única, y se denomina *función de demanda de insumos*. El nivel de producción óptimo, $y^* = y(p,w)$, se llama *función de oferta*.

Definición 2.3. *Una función de beneficios es una función,* $\pi : \mathbb{R}^{n+1}_{++} \to \mathbb{R}_+$, *tal que:*

$$\pi(p,w) = \max_{x,y} pf(x) - w \cdot x.$$

Teorema 2.1. *Sea $f(\cdot)$ una función de producción, entonces la función de beneficios $\pi(p,w)$ es continua* y*,*

i. Homogénea de grado uno en (p,w),

ii. Convexa en (p,w),

iii. Creciente en p,

iv. Decreciente en w,

v. (Lema de Hotelling). Diferenciable en $(p,w) >> 0$. Además,

$$\frac{\partial \pi(p,w)}{\partial p} = y(p,w), \ \ y \ -\frac{\partial \pi(p,w)}{\partial w_i} = x_i(p,w) \quad \forall\ i = 1,\dots,n$$

Demostración.

i. Sea $\pi(p,w)$ una función de beneficios y $t > 1$, entonces, $\pi(tp,tw) = \text{máx}_{x,y}(tp)f(x) - (tw)\cdot x$, factorizando t se obtiene,

$$\pi(tp,tw) = t \max_{x,y} pf(x) - w\cdot x = t\pi(p,w)$$

Por lo tanto, $\pi(p,w)$ es homogénea de grado uno en (p,w).

ii. Sólo se demostrará que la función de beneficios es convexa en el precio p. La demostración de que $\pi(p,w)$ es convexa w es análoga y se deja como ejercicio para el lector.

Sean $\lambda \in [0,1]$ y p^1, p^2 dos precios distintos entre sí, tal que, $p^t = \lambda p^1 + (1-\lambda)p^2$, entonces,

$$\begin{array}{lccl}
\rightarrow & \pi(p^t,w) & = & \max_{x,y} p^t f(x) - w\cdot x \\
\rightarrow & & = & \max_{x,y} (\lambda p^1 + (1-\lambda)p^2) f(x) - w\cdot x \\
\rightarrow & & = & \max_{x,y} \lambda p^1 f(x) + (1-\lambda)p^2 f(x) - w\cdot x \\
\rightarrow & & \leq & \max_{x,y} \lambda p^1 f(x) - w\cdot x + (1-\lambda)p^2 f(x) - w\cdot x \\
\rightarrow & & \leq & \lambda\pi(p^1,w) + (1-\lambda)\pi(p^2,w)
\end{array}$$

iii. Sean p y p' dos precios, tal que, $p < p'$,

$$\begin{array}{ll} \rightarrow & pf(x) < p'f(x) \\ \rightarrow & pf(x) - w \cdot x < p'f(x) - w \cdot x \\ \rightarrow & \pi(p, w) < \pi(p', w) \end{array}$$

Por lo tanto $\pi(p, w)$ es creciente en p.

iv. La demostración de éste inciso es análoga a la del inciso anterior, por lo que se deja como ejercicio para el lector.

v. La demostración del lema de Hotelling es análoga a la demostración de la identidad de Roy en el capítulo anterior, por lo cual se deja como ejercicio para el lector.

$\square$

Corolario 2.2.1. *Sea $\pi(p, w)$ una función de beneficios dos veces continuamente diferenciable. Entonces, para $p > 0$ y $w >> 0$*

i. $y(tp, tw) = y(p, w) \quad \forall\ t > 0,$

ii. $x(tp, tw) = x(p, w) \quad \forall\ t > 0$ *y* $\forall\ i = 1, \ldots, n,$

iii. $\partial y(p, w)/\partial p \geq 0,$

iv. $\partial x_i(p, w)/\partial w_i \leq 0 \quad \forall\ i = 1, \ldots, n,$

Demostración. La prueba de éste corolario se sigue del Teorema 2.1, Por lo que se deja al lector como ejercicio.

$\square$

Ejemplo 2.1. *Suponga que la función de producción de una empresa es una función CES (Constant elasticity of sustitution) de dos insumos, es decir, $f(x) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\beta/\rho}$, donde $0 < \rho$ y $\beta < 1$. Calcule la cantidad óptima de insumos que maximice los beneficios del productor* y *la función de beneficios.*

Solución.

El problema de maximización es el siguiente:

$$\text{máx}\,\pi \quad = \quad p(x_1^\rho + x_2^\rho)^{\beta/\rho} - w_1 x_1 - w_2 x_2 \tag{2.5}$$

donde p representa el precio del bien final y w_1 y w_2 los precios de los insumos $x_1,\ x_2$ respectivamente.

Las condiciones de primer orden son:

$$p\beta(x_1^\rho + x_2^\rho)^{(\beta-\rho)/\rho} x_1^{\rho-1} \quad = \quad w_1 \tag{2.6}$$
$$p\beta(x_1^\rho + x_2^\rho)^{(\beta-\rho)/\rho} x_2^{\rho-1} \quad = \quad w_2 \tag{2.7}$$

Dividiendo (2.6) entre (2.7) se tiene que $x_2 = x_1(w_2/w_1)^{1/(\rho-1)}$. Sustituyéndolo en la función de producción se llega a

$$x_i = y^{1/\beta}\left(w_1^{\rho/(\rho-1)} + w_2^{\rho/(\rho-1)}\right)^{-1/\rho} w_i^{1/(\rho-1)}, \quad \forall\ i = 1, 2. \tag{2.8}$$

Sustituyendo (2.8) en (2.6) y despejando y se obtiene la función de oferta,

$$y = \left(\frac{(w_1^{\rho/(\rho-1)} + w_2^{\rho/(\rho-1)})^{(\rho-1)/\rho}}{p\beta}\right)^{\beta/(\beta-1)}. \tag{2.9}$$

De (2.8) y (2.9), se obtienen las demandas de factores,

$$
\begin{aligned}
x_1(p,w) &= w_1^{1/(\rho-1)}\left(\frac{(w_1^{\rho/(\rho-1)}+w_2^{\rho/(\rho-1)})^{(\rho-\beta)/\rho}}{p\beta}\right)^{1/(\beta-1)}, && (2.10)\\
x_2(p,w) &= w_2^{1/(\rho-1)}\left(\frac{(w_1^{\rho/(\rho-1)}+w_2^{\rho/(\rho-1)})^{(\rho-\beta)/\rho}}{p\beta}\right)^{1/(\beta-1)}. && (2.11)
\end{aligned}
$$

Para obtener la función de beneficios se tienen que sustituir (2.10) y (2.11) en la función objetivo, esto es:

$$
\pi(p,w) = p^{-1/(\beta-1)}(w_1^{\rho/(\rho-1)}+w_2^{\rho/(\rho-1)})^{(\rho-1)\beta/\rho(\beta-1)}\beta^{-\beta/(\beta-1)}(1-\beta). \quad (2.12)
$$

Si $\beta = 1$ la función de producción tiene rendimientos constantes a escala y, por consiguiente, la función de beneficios estaría indefinida. Si $\beta > 1$, entonces f exhibe rendimientos crecientes a escala. Sin embargo, si esto sucediera, los beneficios que se obtendrían serían menores que en el caso cuando $\beta < 1$.

2.3. La minimización de los costos

Como ya se mencionó anteriormente, los costos de una empresa son el gasto que conlleva adquirir insumos para producir un bien. La decisión que tome la firma sobre la combinación de insumos que usará para producir dicho bien dependerá de cual sea su objetivo. Si su objetivo es maximizar beneficios, elegirá la combinación de insumos que sean menos costosa.

Definición 2.4. *La función de costos, definida para* $w > 0$ y *para* $y \in Y$*, es*

$$c(w,y) = \min_{x \in \mathbb{R}^n_+} \quad w \cdot x \qquad s.a. \quad f(x) \geq y.$$

donde $f(x)$ *es una función de producción.*

Al igual que lo que se hizo en el problema de maximización del beneficio, el problema de minimización de costos puede ser representado manteniendo la igualdad en la restricción. Formalmente,

$$c(w,y) = \min_{x \in \mathbb{R}^n_+} \quad w \cdot x \qquad s.a. \quad f(x) = y.$$

Dado que la función de producción es diferenciable en $\mathbb{R}^n_+$. Por el teorema de Lagrange, existe $\lambda^* \in \mathbb{R}$, tal que,

$$w_i = \lambda^* \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \quad \forall \ i = 1, \ldots, n$$

y

$$f(x) = y.$$

De ahí que,

$$\frac{\partial f(x)/\partial x_i}{\partial f(x)/\partial x_j} = \frac{w_i}{w_j} \quad \forall \ i, j = 1, \ldots, n$$

Como se puede observar, las condiciones de primer orden del problema de minimización de costos son las mismas que las de maximización del beneficio. Dado que la función de producción estrictamente cuasicóncava y los precios son estrictamente positivos, la solución $x(w, y)$ a éste sistema de ecuaciones es única y se denomina función de demanda condicionada de factores. Esto se puede ver en la figura 2.4

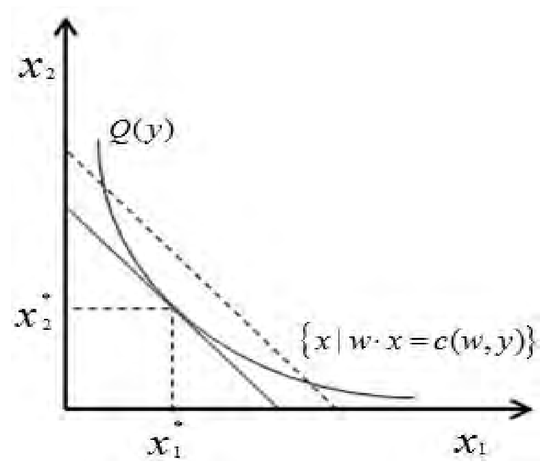

Figura 2.4: Función de demanda condicionada de factores

Esta función de demanda condicionada de factores es una función que está condicionada a un nivel dado de producción y. Es precisamente ese nivel de producción junto con los precios de los insumos lo que caracteriza la demanda condicionada de factores.

Teorema 2.2. *Si la función de producción $f(\cdot)$ es continua* y *estrictamente creciente, entonces $c(w, y)$*

i. Es homogénea de grado uno en w,

ii. Es creciente en w y *estrictamente creciente en y,*

iii. Es cóncava en w,

iv. Es continua en todo su dominio,

v. (Lema de Shephard). Es diferenciable en (w^0, y^0), y,

$$\frac{\partial c(w^0, y^0)}{\partial w_i} = x_i(w^0, y^0) \;\; \forall i = 1, \cdots, m.$$

Demostración. La demostración de éste teorema es análoga a la prueba del *Teorema 1.8* del capítulo de teoría del consumidor, de manera que se dejan al lector como ejercicio.

□

El teorema anterior dice que cuando aumenta el nivel de producción, aumentan los costos. Además, cuando los precios de los insumos se incrementan, también lo hacen los costos pero a un ritmo más lento. El lema de Shephard, por su parte, es un resultado muy poderoso ya que relaciona a la función costos con la función de demanda compensada de factores.

Teorema 2.3. *Si la función de costos* $c(w, y)$ *es dos veces continuamente diferenciable, entonces,* $x(w, y)$ *es homogénea de grado cero en* w.

Demostración. La demostración de éste teorema se deja al lector. □

Ejemplo 2.2. *Suponga que la función de producción de una empresa es* $y = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$. *Calcule las demandas condicionadas de insumos.*

Solución.

El problema de minimización es el siguiente,

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & w_1 x_1 + w_2 x_2 \\ s.a. & (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} = y \end{array}$$

donde w_1 y w_2 representan los precios de los insumos x_1 y x_2 respectivamente. A partir de las condiciones de primer orden, se tiene que:

$$\frac{w_1}{w_2} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho} - 1 \tag{2.13}$$

y

$$(x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{1/\rho} = y \tag{2.14}$$

Despejando x_1 de (2.13) y sustituyéndolo en (2.14), se tiene que:

$$y = x_2 w_2^{-1/(\rho-1)}(w_1^{\rho/(\rho-1)} + w_2^{\rho/(\rho-1)})^{1/\rho}.$$

Resolviendo para x_2 y sustituyéndolo en (2.13), se obtiene:

$$x_1 = y w_1^{1/(\rho-1)}(w_1^{\rho/(\rho-1)} + w_2^{\rho/(\rho-1)})^{-1/\rho}, \tag{2.15}$$
$$x_2 = y w_2^{1/(\rho-1)}(w_1^{\rho/(\rho-1)} + w_2^{\rho/(\rho-1)})^{-1/\rho}. \tag{2.16}$$

Sustituyendo (2.15) y (2.16) en la función objetivo se tiene,

$$c(w,y) = y(w_1^{\rho/(\rho-1)} + w_2^{\rho/(\rho-1)})^{(\rho-1)/\rho}.$$

2.4. Dualidad entre las funciones de costo y producción

Al igual que en el capítulo anterior se observó que existe una dualidad entre el problema de maximización de la utilidad y el de minimización del gasto, en la teoría del productor existe una dualidad entre el problema de maximización del beneficio y el de minimización de costos. De tal forma que, a partir de una función de beneficios, se puede construir una función de costos y viceversa.

Teorema 2.4. *Sea* $c : \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *una función de costos que cumple con el Teorema 2.2. Entonces, la función de producción* $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$, *definida por:*

$$f(x) = max\,\{y \geq 0 \mid w \cdot x \geq c(w, y),\ \forall w >> 0\}$$

es creciente, no acotada por arriba y *cuasicóncava. Además, la función de costos generada por* f *es* c.

El teorema anterior exhibe que la solución del problema de maximización de beneficios implica reducir al mínimo los costos, lo cual es consistente con el problema de integrabilidad visto en la teoría del consumidor.

Esta relación entre tecnología y costos se puede resumir en las dos propiedades siguientes:

i. Si $f(\cdot)$ es homogénea de grado 1 (i.e. exhibe rendimientos constantes a escala), entonces, $c(w, y)$ y $x(w, y)$ son homogéneas de grado 1 en y.

ii. Si $f(\cdot)$ es cóncava, entonces $c(w, y)$ es convexa en y (en particular, los costos marginales son no decrecientes en y).

2.5. Ejercicios

1. Demuestre que cuando la función de producción es homogénea de grado uno, debe ser escrita como la suma $f(x) = \sum_{i=1}^{n} MP_i(x)x_i$, donde $MP_i(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$.

2. Qué condiciones deben cumplir α y β para que la función de producción Cobb-Douglas $y = A\ x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, donde $A > 0$, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tenga rendimientos no crecientes a escala

3. Una generalización de la función de producción CES está dada por:

$$y = A(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ x_i^{p})^{\frac{\beta}{p}}$$

   para $A > 0$, $\alpha_0\ \geq 0$, $\alpha_i\ \geq 0$. ¿Qué condiciones deben cumplir β y ρ para que la función CES tenga rendimientos no crecientes a escala.

4. Una función de valor real es llamada **superaditiva** si $f(z^1 + z^2) \geq\ f(z^1) + f(z^2)$. Muestre que toda función de costo es superaditiva en precios de insumo. Use esto para demostrar que la función de costo es no decreciente en precios de insumo sin la necesidad de ser diferenciable.

5. Demuestre la función de benficios $\pi(p, w)$ es convexa en w.

6. Demuestre los incisos iv y v del teorema 2.1

7. Calcule la función de costo y el insumo la demanda del insumo condicional para la función de producción de Leontief en el ejercicio 3.

8. La tecnología de una empresa usa tres insumos, con demandas de insumos condicionales $x_i(w_1, w_2, w_3; y)$, $i = 1, 2, 3$. Algunas de las siguientes observaciones son consistentes con el costo de minimización y algunas no lo son. Si una observación no es consistente explique por qué. Si es consistente, dé un ejemplo de una función de costo o de producción que pueda tener dicho comportamiento.

   a) $\partial x_2/\partial w_1\ > 0$ y $\partial x_3/\partial w_1\ > 0$

b) $\partial x_2 \partial w_1 \ > 0$ y $\partial x_3/\partial w_1 \ < 0$

c) $\partial x_1/\partial y \ < 0$ y $\partial x_2/\partial y \ < 0$ y $\partial x_3/\partial y \ < 0$

d) $\partial x_1/\partial y = 0$

e) $\frac{\partial x_1/x_2}{\partial w_3} = 0$

9. Demuestre el *Teorema 2.2.*

10. La firma 1 tiene una función de costo $c^1(w, y)$. La firma 2 tiene la siguiente función de costo. ¿Será el comportamiento de la demanda del insumo y el suministro del producto de ambas firmas idéntico cuando:

    a) $c^1(w, y) = (\frac{1}{2})c^1(2w, y)$

    b) $c^1(w, y) = c^1(2w, y)$

11. Demuestre el *Teorema 2.3.*

12. Sea s_i el insumo compartido para el insumo i. Demuestre que para cualquier función de costo, $s_1 = \partial \ln[c(w, y)]/\partial \ln(w_i)$. Verifique mediante la función de costos de una Cobb-Douglas.

13. Se ha demostrado que la función de costo *translog* es una aproximación (local) de segundo orden a una función de costo arbitraria. Se da implícitamente en su forma logarítmica lineal

$$\ln \alpha = \ \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \ln w_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \ \ln(w_i) \ln(w_j) + \ln(y)$$

Si $y_{ij} = y_{ji}$ y $\sum_i y_{ij} = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, la matriz sustitución es simétrica como era requerido.

a) ¿Qué restricciones en los parámetros α_i son requeridos para asegurar homogeneidad?

b) ¿Para qué valores en los parámetros la translog se reduce a una forma Cobb-Douglas?

c) Muestre que los insumos compartidos en la función de costo translog son lineales en los logarítmos de los precios de los insumos y los productos.

14. Calcule la función de costo y las demandas condicionales de los insumos para la función de producción lineal $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; x_i$.

15. Demuestre que donde la función de producción es homotética, la proporción en la que la firma combina cualquier par de insumos es la misma para cada nivel de producción.

16. Demuestre que cuando la función de producción es homotética, la demanda condicional de cualquier insumo debe ser no creciente en su propio precio.

Capítulo 3

Tipos de mercados

En los capítulos previos se estudió la conducta de los consumidores y productores, describiendo sus elecciones óptimas cuando los precios los impone el mercado, más allá del control de cualquier agente.

En éste capítulo se estudiarán los tipos de mercado en los que interactúan consumidores y productores. Primero, se analizarán los mercados competitivos, en los cuales es el mercado quien determina la cantidad producida y el precio al que se venderá dicha producción.

Después se analizaran los monopolios, mercados en los cuales el precio y cantidad producida los determina un solo productor que tiene el control de todo el mercado.

Para finalizar, se estudiará el oligopolio, en el que, al igual que en el monopolio, el precio y la cantidad producida no lo determina el mercado sino un grupo de productores que tienen el control de todo el mercado. No hay una cantidad definida de productores para poder formar un oligopolio, la única condición es que ese grupo tenga control total del mercado.

3.1. Competencia perfecta

Un *mercado competitivo* es aquel en el que existen suficientes consumidores y productores para asegurar que individualmente ningún agente pueda determinar el precio p del mercado. Así, una *empresa competitiva* es aquella que toma los precios de los bienes que produce como dados.

Para que un mercado sea competitivo debe cumplirse que: todos las empresas tengan libre acceso a la tecnología; exista transparencia sobre las condiciones del mercado, libertad para que una empresa entre y salga del mercado; y una cantidad lo suficientemente grande de consumidores y productores para que la decisión individual de cada agente no afecte de forma significativa al mercado.

En conjunto, todas las empresas competitivas pueden modificar el precio de los bienes que producen; sin embargo, tendrían que ponerse de acuerdo para actuar de forma simultanea, un ejemplo de esto es el Oligopolio, el cual se vera mas adelante.

Dado que una empresa competitiva considera el precio como dado, sus ingresos seran pq y deberá elegir el nivel de producción q, considerando la función de costos $c(q)$ y el precio p, que resuelva el siguiente problema de maximización:

$$\max_{q} \quad pq - c(q). \tag{3.1}$$

La condición de primer orden de este problema de maximización es:

$$IMg(q) = p = c'(q) = CMg(q), \tag{3.2}$$

es decir, el ingreso marginal $IMg(q)p$ de producir una unidad adicional es igual al costo marginal $CMg(q)$ por producir esa unidad extra, por consiguiente el beneficio marginal es cero. De tal forma que dado el precio $p = CMg(q)$ los beneficios no aumentaran al incrementarse la producción.

Si se diera el caso en que $p < CMg(q)$, entonces, el beneficio marginal sería negativo, lo cual quiere decir que por cada unidad extra la empresa obtendra menores beneficios. El caso en que $p > CMg(q)$ es totalmente analogo.

Una empresa competitiva es libre de poner el precio a sus productos; pero si esta decide disminuir el precio de un bien por debajo del costo marginal $p < CMg(q)$, obtendrá menores beneficios. Si por el contrario decide que $p > CMg(q)$; el resto de las empresas tendran incentivos para fijar su precio en $p = CMg(q)$, con lo cual se quedará sin clientes ya que estos prefereriran comprar el mismo producto a un precio mas bajo. De tal forma el precio óptimo de mercado es $p = CMg(q)$.

Como ya se vio para que a una empresa le resulte rentable producir q unidades de un bien, el precio de ese bien deberá ser igual a su costo marginal. Asi, el precio de un bien depende de la cantidad producida y queda representado por medio de la función $p(q)$, a la cual se le denomina *función inversa de oferta* y se obtiene por medio de la condición de primer orden:

$$p(q) = c'(q).$$

La *función de oferta* $q(p)$, por su parte, indica el nivel de producción que maximiza los beneficio al precio p. Esta se obtiene por medio de la condición de primer orden:

$$p = c'(q(p)).$$

La demanda es la parte del mercado que ésta conformada por todos los consumidores de algún bien q, cada uno con sus preferencias e ingreso. Sea I la cantidad total de consumidores y $q^i(p, m^i)$ la función de demanda del consumidor i para el bien q, donde $i = 1, \ldots, I$.

Definición 3.1. *Sea $m^i > 0$ y $p > 0$, la función de demanda del mercado del bien q queda definida por,*

$$q^d(p) = \sum_{i=1}^{I} q^i(p, m^i), \tag{3.3}$$

donde $q^i(p, m^i)$ es la demanda marshalliana del individuo i para el bien q.

Si la función $q^d(p)$ es biyectiva y por consiguiente invertible, entonces tiene una función inversa, ésta se denomina función inversa de demanda del bien q y ésta representada por, $p^d(q)$.

La función de demanda $q^d(p)$ tiene pendiente negativa, ésta propiedad se debe a que cada una de las demandas marshallianas que la componen cumplen con la Ley de la demanda[1], es decir, son decrecientes con respecto a los precios p. Intuitivamente, ésto se explica de la siguiente manera: entre más alto sea el precio de un bien, más baja será su demanda.

La oferta es la parte del mercado que ésta conformada por todas las empresas que producen algún bien q. Al conjunto de empresas que producen un bien determinado se le llama industria. Para éste modelo se asumirá que la industria del bien q ésta conformada por J empresas y $q^j(p, w)$ será la función de oferta del productor j para el bien q, donde $j = i, \ldots, J$.

Definición 3.2. *Sea $w > 0$ y $p > 0$, la función de oferta de mercado del bien q queda definida por:*

$$q^s(p) = \sum_{j=1}^{J} q^j(p, w). \tag{3.4}$$

La función de oferta $q^s(p)$ tiene pendiente positiva, esto se debe a que cada una de las demandas de insumos es creciente con respecto al precio p del bien

[1] Ver el Teorema 1.12

final. Esto se explica por el hecho de que entre más alto sea el precio de un bien, más incentivos para producir tendrán las empresas.

La demanda y la oferta del mercado juntas determinan el precio al que se va a vender el bien q y la cantidad total de ese bien que va a producir la industria.

Definición 3.3. *Sea $q^d(p)$ y $q^s(p)$, las funciones de demanda* y *de oferta del bien q respectivamente. El equilibrio de mercado del bien q, queda definido por, p^*, el cual es la solución de la siguiente ecuación*

$$q^s(p^*) = q^d(p^*) \tag{3.5}$$

Geométricamente, el equilibrio es la intersección de la curva de demanda, representada por $q^d(p)$, y de la curva de oferta, representada por $q^s(p)$. Nótese por la forma en que se construyó el modelo, cada consumidor está comprando su cantidad óptima del bien q dados los precios p^* y cada empresa esta maximizando sus beneficios al mismo nivel de precios p^*. Así, con éste equilibrio ningún agente tendrá incentivos de cambiar su conducta, ya que cada uno está tomando la mejor decisión dadas las condiciones a las que se enfrenta. En la figura 3.1 se muestra el equilibrio de mercado para el caso particular en que la función de demanda es $q^d(p) = 10 - p$ y la función de oferta es $q^s(p) = (2/3)p$.

Ejemplo 3.1. *Considere una industria competitiva formada por* 10 *firmas idénticas. Cada empresa tiene una función de utilidad CES $q^j = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\beta/\rho}$ con $0 < \rho$ y $\beta < 1$. La función de demanda de mercado del bien q es $q^d = 36/p$. Calcule el equilibrio de mercado del bien q, cuando $\rho, \beta = 1/2$ y w_1 y w_2 son iguales a $1/8$ y $1/4$ respectivamente.*

Solución.

La función de oferta de la empresa j es:

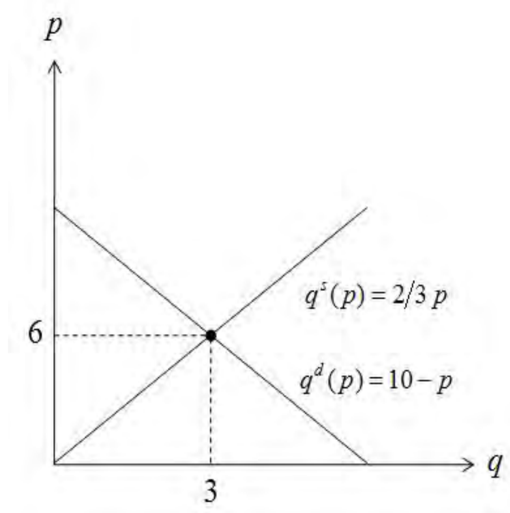

Figura 3.1:

$$q^j = \left(\frac{(w_1^{\rho/(\rho-1)} + w_2^{\rho/(\rho-1)})^{(\rho-1)/\rho}}{p\beta} \right)^{\beta/(\beta-1)}$$

Sustituyendo los valores de ρ, β, w_1 y w_2 en la función de oferta se tiene que:

$$q^j(p) = 6p$$

Dado que la función de demanda es $q^d = 36/p$, entonces la cantidad producida por cada empresa es $q^j = 6$, de ahí que el equilibrio de mercado sea:

$$(p^*, q^*) = (6, 360).$$

3.2. Monopolio

El ejemplo más simple de poder de mercado se presenta cuando hay solamente un vendedor, un *monopolista*, de algún bien. Si la demanda de mercado del bien es una función de precio continuamente decreciente, el monopolista reconoce que un pequeño aumento en éste precio sobre los niveles competitivos conduce sólo a una pequeña reducción en las ventas. Se dará cuenta de que vale la pena subir el precio sobre su nivel competitivo.

Considerando que el monopolista decide el precio que va a imponer en el mercado y que conoce la curva de demanda del mercado, el problema de maximización del beneficio del monopolista se expresa de la siguiente forma,

$$\max_{q} \quad p(q)q - c(w,q) \tag{3.6}$$

donde $p(q)$ es la función inversa de demanda del bien q.

La condición de primer orden del problema es:

$$\frac{dp(q)q}{dq} = p'(q)q + p(q) = \frac{\partial c(w,q)}{\partial q} \tag{3.7}$$

La parte izquierda de la ecuación *(3.7)* representa el ingreso marginal $IMg(q)$ y la parte derecha es el costo marginal $CMg(q)$. De tal manera que la condición de primer orden para una empresa monopolista que desea maximizar sus beneficios es $IMg(q) = CMg(q)$.

El ingreso marginal se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\rightarrow \quad IMg(q) \quad = \quad p(q) + p'(q)q$$

$$
\begin{aligned}
\rightarrow \quad & = p(q)\left(1+\frac{dp(q)}{dq}\frac{q}{p(q)}\right) \\
\rightarrow \quad & = p(q)\left(1-\frac{1}{|\epsilon(q)|}\right)
\end{aligned}
$$

donde $\epsilon(q)$ es la elasticidad precio de la demanda del bien q, y ésta definida por $|\epsilon(q)| = -(dq/dp)(p/q) > 0$. De tal forma que la ecuación de primer orden queda así:

$$IMg(q) = p(q)\left(1-\frac{1}{|\epsilon(q)|}\right) = CMg(q).$$

Dado que $CMg(q) \geq 0$ y $p > 0$ se tiene que,

$$
\begin{aligned}
\rightarrow \quad \left(1-\frac{1}{|\epsilon(q)|}\right) & \geq 0 \\
\rightarrow \quad 1 & \geq \frac{1}{|\epsilon(q)|} \\
\rightarrow \quad |\epsilon(q)| & \geq 1
\end{aligned}
$$

La expresión anterior expresa que el monopolista siempre elegirá producir q cuando la demanda sea elástica o, lo que es lo mismo, cuando $|\epsilon(q)| \geq 1$. Esto se puede ver gráficamente en la figura 3.2

Obsérvese que una empresa que se encuentra en un mercado competitivo, elige su nivel de producción en el punto donde $p = CMg(q)$, ya que $IMg(q) = p$. El monopolista, por su parte, elige el precio y el nivel de producción en el punto donde $p^m = CMg/(q)(1-1/|\epsilon(q)|)$. De ahí que el precio del monopolista sea mayor que el precio de un mercado competitivo, formalmente,

$$\rightarrow \quad p^m = CMg(q)(1-1/|\epsilon(q)|)$$

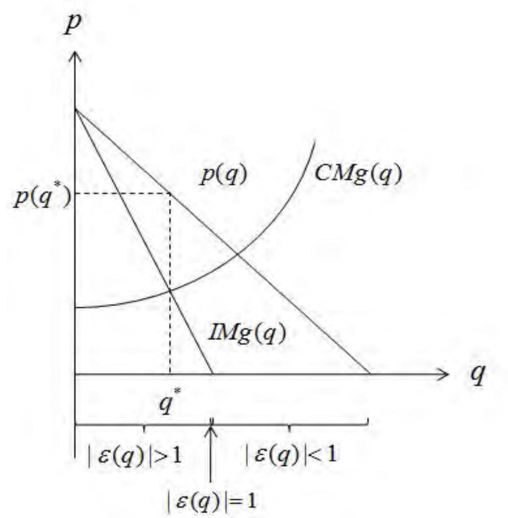

Figura 3.2:

$$\begin{array}{lll} \rightarrow & & \geq \; CMg(q) \\ \rightarrow & & \geq \; p \end{array}$$

Ejemplo 3.2. *Utilice los datos del ejemplo 3.1 pero con una función de demanda de $q^d(p) = 100-3p$ y calcule el equilibrio en un mercado monopolístico.*

Solución.

La función de costos para una función CES con $\beta = 1$ es

$$c(q) = q/12.$$

De ahí que el costo marginal sea:

$$CMg(q) = 1/12.$$

La función inversa de demanda es $p(q) = 100/3 - q/3$, por lo que el ingreso marginal queda como

$$IMg(q) = p(q) + p'(q)q = 100/3 - q/3 - q/3 = (100 - 2q)/3$$

Igualando el costo marginal con el ingreso marginal se tiene que:

$$IMg(q) = (100 - 2q)/3 = 1/12 = CMg(q)$$

De ahí que el equilibrio del mercado sea $(p^*, q^*) = (133/4, 1/4)$.

El precio competitivo de la industria sería $p^c = 20/3$, si se compara con el precio monopólico, se puede observar que el precio competitivo es más bajo que el monopólico.

3.3. Oligopolio

Un mercado oligopolico es aquel en el que actúan varios monopolistas, de tal forma que mantengan el control del mercado. La competencia entre las firmas en un oligopolio es intrínsecamente un ajuste de la interacción estratégica. Por ésta razón, es necesario recurrir a la teoría de juegos. Éste estudio se centrará en los modelos estáticos relativamente simples del oligopolio, en los cuales hay solamente un período de interacción competitiva y las firmas toman sus medidas simultáneamente.

Primero, se analizará el modelo de *Bertrand*, en el cual los agentes dan opciones simultáneas del precio del producto terminado. Éste modelo exhibe una característica llamativa, con apenas dos firmas en el mercado, se obtiene un resultado perfectamente competitivo.

Después, se analizará el modelo de *Cournot*, el cual se basa en el hecho de que, la producción total de un bien es igual a la producción de cada una de las empresas que produce ese bien, formalmente, $y^i = y_{1i} + ... + y_{ni}$, donde y^i representa la cantidad producida del bien i. Dado que el precio del bien i depende de la producción de dicho bien, es decir, $p_i = p_i(y^i)$, entonces la decisión de producción de cada uno de los agentes depende de las decisiones de los demás productores.

3.3.1. El modelo de Bertrand de la competencia de precios

Se comenzará éste análisis con el modelo de competencia oligopolística propuesto por Bertrand. Hay dos firmas que maximizan su beneficio, 1 y 2 (un duopolio), en un mercado cuya función de demanda ésta dada por $q(p)$. Se supondrá que $q(\cdot)$ es continua y estrictamente decreciente para todo p tal que $q(p) > 0$ y que existe un $\bar{p} < \infty$ tal que $q(p) = 0$ para todo $p \geq \bar{p}$. Las dos firmas tienen rendimiento constantes a escala en sus respectivas tecnologías, con el mismo costo $c > 0$, por unidad producida. Supóngase que $q(c) \in (0, \infty)$, lo que implica que el nivel de producción (competitivo) es estrictamente positivo y finito.

La competencia ocurre de la siguiente manera. Cada firma decide simultáneamente sus precios de venta p_1 y p_2, si una firma fija un precio más bajo que la otra, se queda con todo el mercado y, si las dos empresas fijan el mimo precio, cada una se lleva la mitad del mercado. Las ventas para la firma j son dadas por:

$$q_j(p_j, p_k) = \begin{cases} q(p_j) & si \ p_j < p_k \\ \frac{1}{2}q(p_j) & si \ p_j = p_k \\ 0 & si \ p_j > p_k. \end{cases} \tag{3.8}$$

Las firmas producen q_j e incurren en costos c, de ahí que el beneficio de la firma j es, por lo tanto, igual a $(p_j - c)q_j(p_j, p_k)$.

El modelo de Bertrand constituye un juego de movimiento simultáneo, de ahí que, el equilibrio de Nash[2] sea aplicable a éste modelo. En la siguiente proposición se presenta el equilibrio de Nash aplicado a éste modelo.

Teorema 3.1. *Hay un único equilibrio de Nash* (p_1^*, p_2^*) *en el modelo de Bertrand. En éste equilibrio, ambas firmas fijan sus precios iguales al costo:* $p_1^* = p_2^* = c$.

Demostración. Para comenzar, obsérvese que ambas firmas al fijar sus precios iguales a c, forman un equilibrio de Nash. Con estos precios, ambas firmas obtienen beneficios iguales a cero. Ninguna de las dos firmas puede ganar subiendo su precio, porque entonces no venderán nada; y bajando su precio debajo de c incurrirá en pérdidas.

Queda entonces por demostrar que no puede haber otro equilibrio de Nash. Suponga que el menor de los dos precios es menor que c. En éste caso, la firma que nombra éste precio incurre en pérdidas, pero si aumenta su precio a un nivel más alto que c, lo peor que le puede pasar es tener beneficios cero. Entonces, si $\min\{p_1, p_2\} < c$, (p_1, p_2) no constituyen un equilibrio de Nash.

Ahora, suponga que, sin pérdida de generalidad, $p_1 = c$ y $p_2 > c$. En éste caso, la firma 1 es dueña de todo el mercado, pero con beneficios cero. Si aumenta su precio un poco, $p_1 = c + (p_2 - c)/2$, la firma j todavía haría todas las ventas en el mercado, pero en un beneficio estrictamente positivo. Así, éstas opciones no podrán constituir un equilibrio de Nash.

Finalmente, suponga que ambos precios son estrictamente mayores que c, es decir, $p_1, p_2 > c$. Sin pérdida de generalidad, se asumirá que $p_1 \leq p_2$. En éste caso, la firma 2 puede estar ganando a lo más $\frac{1}{2}(p_1 - c)x(p_1)$. Sin embargo, si fija su precio en $p_1 - \epsilon$ para $\epsilon > 0$, la firma 2 va a quedarse el mercado entero y ganar $(p_j - \epsilon - c)x(p_j - \epsilon)$. Dado que $(p_j - \epsilon - c)x(p_j - \epsilon) > \frac{1}{2}(p_j - c)x(p_j)$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, la firma 2 puede incrementar sus beneficios. Así, estos precios tampoco son un equilibrio de Nash. □

[2] Se tiene un equilibrio de Nash cuando tomar una decisión diferente a la del equilibrio representa tener una ganacia menor. Ver Definición A.21

La implicación inmediata de la proposición 3.1 es que, con solamente dos firmas se obtiene el mismo resultado que en un mercado competitivo. En efecto, la competencia entre las dos firmas hace que cada firma tenga una curva de demanda infinitamente elástica en el precio practicado por su rival. La idea fundamental de la proposición anterior se puede extender a un número de firmas mayor que dos. (En ese caso, si la firma j tiene el menor precio del mercado, sea $\tilde{p}$, a lo largo con $\tilde{j}-1$ otras firmas, gana $(1/\tilde{j})q(\tilde{p})$.)

Ejemplo 3.3. *Considérese un mercado duopólico en el que las empresas eligen simultáneamente el precio de su producción. Muestre que en cualquier equilibrio de Nash con $J>2$ empresas, el precio es igual al costo.*

Solución.

Para que $(p_1^*,\ldots,p_n^*)$, sea un equilibrio de Nash, es necesario que $\forall\ i \in \mathbb{N}$, $u_i(p_1^*,\ldots,p_i^*,\ldots,p_n^*) \geq u_i(p_1^*,\ldots,p_i,\ldots,p_n^*) \quad \forall\ p_i \in \mathbb{R}^n_{++}$. En éste caso particular $u_i(p_1,\ldots,p_n) = p_i q_i(p_1,\ldots,p_n)$, de tal manera que el objetivo es encontrar un vector $(p_1^*,\ldots,p_n^*)$ que cumpla con que:

$$p_i q_i(p_1^*,\ldots,p_i^*,\ldots,p_n^*) \geq p_i q_i(p_1^*,\ldots,p_i,\ldots,p_n^*) \tag{3.9}$$

Además, la función *(3.8)* para $J>2$ se escribe de la siguiente forma:

$$q_i(p_1,\ldots,p_n) = \begin{cases} q(p_i) & si\ p_i < p_1,\ldots,p_i < p_n \\ \frac{1}{J}q(p_1) & si\ p_i = p_1,\ldots,p_i = p_n \\ 0 & si\ p_i > p_1,\ldots,p_i > p_n. \end{cases} \tag{3.10}$$

De ahí que la única forma en que se cumpla la ecuación *(ec-nash)* es que $c = p_1 =,\ldots,= p_i =,\ldots,= p_n$, ya que si $c < p_1 =,\ldots,= p_i =,\ldots,= p_n$, cada una de las empresas tiene incentivos para bajar sus precio y así apoderarse del mercado.

3.3.2. El equilibrio de Cournot

Considérese el caso de dos empresas que producen un mismo bien, y que ambas eligen simultáneamente su nivel de producción q_1 y q_2. El precio de mercado correspondiente a éste nivel de producción (la función inversa de demanda) es $p(q_1 + q_2)$. Las dos empresas enfrentan la misma función de costos: $c(\cdot)$.

El problema de maximización de la empresa 1 es:

$$\max_{q_1} \pi_1(q_1, q_2) = p(q_1 + q_2)y_1 - c(q_1)$$

Los beneficios de la empresa 1 dependen de la cantidad de producción que elija 2, y para tomar una decisión la empresa 1 debe predecir el nivel de producción que elegirá la 2. Éste es el tipo de consideración que interviene en un juego abstracto, cada uno de los jugadores debe adivinar las elecciones de los demás.

Es natural concebir, pues, el modelo de Cournot como un juego que sólo se juega una vez: el beneficio de la empresa i es su ganancia y el conjunto de estrategias de ésta empresa, simplemente, esta conformado por las posibles cantidades que pueda producir. Por lo tanto, un equilibrio de Nash es un conjunto de niveles de producción (q_1^*, q_2^*) en el que cada una de las empresas elige el nivel de producción que maximiza sus beneficios, dadas sus expectativas sobre la elección de la otra empresa, y las expectativas de cada una de las empresas sobre la elección de la otra son, de hecho, correctas.

$$\max_{q_1 \geq 0} \quad p(q_1 + q_2)q_1 - c(q_j)$$

En el problema de maximización anterior, la firma 1 actúa como un monopolio que encara una función inversa de demanda $p(q_1) = p(q_1 + q_2)$. La elección óptima para la firma j dado el nivel de producción q_2 de la otra empresa, debe satisfacer la condición de primer orden:

$$p'(q_1 + q_2)q_1 + p(q_1 + q_2) = c'(q) \tag{3.11}$$

Para cada q_2, sea $b_1(q_2)$ el conjunto que denota los niveles de producción óptimos de la empresa 2; el conjunto $b_2(\cdot)$ es la correspondencia de mejor respuesta.

El conjunto de estrategias, (q_1^*, q_2^*), es un equilibrio de Nash, si y sólo si, $q_1^* \in b_1(q_2^*)$ y $q_2^* \in b_2(q_1^*)$. Por lo tanto, si (q_1^*, q_2^*) es un equilibrio de Nash, las siguientes condiciones se deben satisfacer:

$$p'(q_1^* + q_2^*)q_1^* + p(q_1^* + q_2^*) = c'(q)$$

$$p'(q_1^* + q_2^*)q_2^* + p(q_1^* + q_2^*) = c'(q).$$

Estas dos condiciones explican que para cualquier equilibrio de Nash se tiene que:

$$p'(q_1^* + q_2^*)(\frac{q_1^* + q_2^*}{2}) + p(q_1^* + q_2^*) = c'(q).$$

Esta condición permite llegar a la conclusión que se muestra a continuación.

Teorema 3.2. *En cualquier equilibrio de Nash del modelo duopólico de Cournot con costo $c > 0$ por unidad para las dos firmas* y *una función inversa* *de demanda* $p(\cdot)$ *que satisface* $p'(q) < 0 \quad \forall\ q \geq 0$ *y* $p(0) > c$*, el precio* p *que imponen las dos firmas es mayor que c (el precio competitivo)* y *menor que el precio monopólico.*

Demostración. El hecho de que el precio de equilibrio éste sobre c se debe a la ecuación anterior, y el hecho de que $q_1^* + q_2^* > 0$ y $p'(q) < 0$ para todo $q \geq 0$. Después, se tiene que demostrar la siguiente desigualdad, $q_1^* + q_2^* > q^m$, esto es, que el precio del equilibrio duopólico $p(q_1^* + q_2^*)$ es estrictamente menor que el precio monopólico $p(q^m)$. La demostración viene en dos partes.

Para probar que $q_1^* + q_2^* > q^m$, se supondrá lo contrario, que $q^m > (q_1^* + q_2^*)$. Para incrementar la producción a $\hat{q}_1 = q^m - q_2^*$, la empresa 1 incrementará el ingreso conjunto de ambas firmas, dicho ingreso es igual al ingreso que se obtiene en un monopolio. Dado que la producción agregada aumenta, el precio cae, y la firma 2 obtiene menores beneficios. Esto implica que la firma 1 se queda con una mejor posición del mercado si, $q^m > (q_1^* + q_2^*)$. Se concluye entonces que $(q_1^* + q_2^*) \geq q^m$.

Segundo, no es posible tener $(q_1^* + q_2^*) = q^m$, ya que implicaría que,

$$p(q^m)_2^{q^m} + p(q^m) = c,$$

violando la condición de primer orden del monopolio. Así, que $(q_1^* + q_2^*) > q^m$.

$\square$

Esta proposición dice que la presencia de dos firmas no es suficiente para obtener un resultado competitivo en el modelo de Cournot, en contraste con la predicción del modelo de Bertrand. La razón es que en éste modelo, una firma no se ve enfrentando una demanda infinitamente elástica. Además, si la firma reduce su cantidad por unidad, ésta incrementa el precio de mercado en $-p'(q_1 + q_2)$. Si las firmas se encuentran produciendo conjuntamente la cantidad competitiva y consecuentemente tienen cero beneficios, cualquiera puede hacerlo estrictamente mejor reduciendo levemente su producción.

Ejemplo 3.4. *Considérese un mercado duopólico en el que las empresas eligen simultáneamente su producción, tienen un costo por unidad de* c*, y la función inversa de demanda es* $p(q) = a - bq$*, donde* $a > c \geq 0$ *y* $b > 0$*. Por otro lado, supóngase que la cantidad que ofrecería un monopolista sería* $q^m = (a-c)/2b$ *a un precio* $p^m = (a+c)/2$*. Verifique que se cumpla con el Teorema 3.2.*

Solución.

De *(3.11)* se tiene que las condiciones de primer orden son:

$$q_1 = \frac{a - c - bq_2}{2b}$$

$$q_2 = \frac{a - c - bq_1}{2b}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene que:

$$q_1^* = \frac{a-c}{3b} = q_2^*$$

De forma que $q_1 + q_2 = 2(a-c)/3b > (a-c)/2b = q^m$. Por lo cual se cumple con el *Teorema 3.2*.

3.4. Ejercicios

1. Supongase que se tienen dos empresas cuyos costos marginales son constantes, c_1 y c_2, donde $c_1 < c_2$. ¿Cuál es el equilibrio de Bertrand y competitivo en este modelo?

2. Dadas las funciones de demanda lineales $q_1 = 3 - 2p_1 + 6p_2$ y $q_2 = 2 + 5p_1 + 4p_2$, demuestre que las cantidades siempre son menores y los precios mayores en la competencia de Cournot que en la de Bertrand.

3. Considerese una industria en la que hay dos empresas, cada una de las cuales tiene unos costos marginales nulos. La curva inversa de demanda a la que se enfrenta la industria es:

$$P(Q) = 100 - Q$$

   donde $Q = q_1 + q_2$ es la producción total. ¿Cuál es el nivel de producción de la industria correspondiente al equilibrio competitivo?

4. Del ejercicio anterior, si cada una de las empresas se comportara como un competidor de Cournot, ¿cuál es la elección óptima de la empresa 1 dado el nivel de producción de la 2?

5. Considere una industria que tiene la siguiente estructura. Hay 50 empresas que se comportan competitivamente y que tienen las mismas funciones de costos, $c(q) = q^2/2$. Hay un monopolista que tiene unos costos marginales nulos. La curva de demanda viene dada por $Q(p) = 1000 - 50p$.

   a) ¿Cuál es la curva de oferta de una de las empresas competitivas?
   b) ¿Cuál es la oferta total del sector competitivo?
   c) Si el monopolista fija el precio p, ¿cuánta producción venderá ?
   d) ¿Cuál es el nivel de producción que maximiza el benficio del monopolista?
   e) ¿Cuál es el precio que maximiza el beneficio del monopolista?
   f) ¿Cuál sería la oferta del sector competitivo a ese precio?

Apéndice A

Apéndice matemático

A.1. Elementos de teoría de conjuntos

A.1.1. Conjuntos convexos

Definición A.1. *Un conjunto X es convexo en $\mathbb{R}^n$ si $\forall\ x, y \in X$, se tiene que:*

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in X \quad \forall\ t \in [0, 1].$$

Un vector $x^\lambda = \lambda x + (1 - \lambda) y$ se define como una combinación convexa de x y y. El conjunto de todas las combinaciones convexas de x y y es el segmento de recta que conecta a ambos vectores.

Teorema A.1 (La intersección de conjuntos convexos es convexa)**.** *Sean $X_1, \ldots, X_n$ conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$, entonces $X = X_1 \bigcap \ldots \bigcap X_n$ es un conjunto convexo.*

Demostración. Sean $X_1, \ldots, X_n$ conjuntos convexos, x y y dos puntos cualesquiera, tal que $x, y \in X$, donde $X = X_1 \bigcap \ldots \bigcap X_n$. Dado que $x, y \in X$, $x, y \in X^1, \ldots, x, y \in X^n$. Sea z una combinación convexa de x y y, ya que $X_i \quad \forall \; i = 1, \ldots, n$, es un conjunto convexo, $z \in X_i \quad \forall \; i = 1, \ldots, n$, de ahí $z \in X$. Por lo tanto X es un conjunto convexo.

□

A.1.2. Relación binaria

Definición A.2 (Par ordenado)**.** *Un par oredenado es una lista de dos elementos con un orden específico. Si los objetos son representados por x y y, entonces el par ordenado se denota como (x, y) o (y, x), donde (x, y)* y *(y, x) no son necesariamente iguales.*

Dos pares ordenados (x, y) (x', y') son iguales si y solo si $x = x'$ y $y = y'$.

Definición A.3 (Producto cartesiano)**.** *Un producto cartesiano de dos conjuntos no vacios X* y *Y, denotada por $X \times Y$, esta definido como el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) donde $x \in X$* y *$y \in Y$. Esto es,*

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X \text{ y } y \in Y\}.$$

Definición A.4 (Relación binaria)**.** *Sean X* y *Y dos conjuntos no vacios. Un subconjunto R de $X \times Y$ es una relación binaria de X a Y.*

A.2. Elementos básicos de topología

Definición A.5 (Espacio métrico). *Un espacio métrico es un par* (X, d)*, donde* $X \neq \varnothing$ *y* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *es la función distancia o métrica sobre* X*,* d *satisface:*

i. $d(x, y) \geq 0 \quad \forall\ x, y \in X$,

ii. $d(x, y) = 0 \ \leftrightarrow\ x = y \quad \forall\ x, y \in X$,

iii. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall\ x, y \in X$,

iv. (Desigualdad del triángulo). $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall\ x, y, z \in X$.

Definición A.6 (Norma euclideana). *La norma euclideana de un vector* $x \in \mathbb{R}^n$*, denotada por* $\|x\|$*, queda definida por:*

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Definición A.7 (Bolas abiertas y cerradas). *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Para* $x \in X$ y $\epsilon > o$*, la bola abierta con centro en* x y *radio* ϵ *esta dada por:*

$$B_\epsilon(x) = \{y \in X | d(x, y) < \epsilon\},$$

y *la bola cerrada con centro en* x *y radio* r *esta dada por:*

$$\bar{B}_\epsilon(x) = \{y \in X | d(x, y) \leq \epsilon\}.$$

Definición A.8 (Conjuntos abiertos y cerrados). *Sea (X, d) un espacio métrico, el conjunto $A \subset X$ es abierto si $\forall\ x \in A$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq A$. El conjunto A es cerrado si $X \backslash A$ es abierto.*

Definición A.9 (Conjuntos acotados). *Un subconjunto S de X es acotado si existe $x \in X$ y $\epsilon > 0$ tal que $S \subset B_\epsilon(x)$.*

Definición A.10 (Interior). *Sea $x \in X \subset \mathbb{R}^n$. x es un punto interior de X si existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq X$. El conjunto de todos los puntos interiores de X esta denotado por $int(X)$.*

Definición A.11 (Heine-Borel. Conjuntos compactos). *Un conjunto S de X es compacto si es cerrado* y *acotado.*

Teorema A.2 (Weierstrass). *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua de variable real, donde X es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Entonces existen los vectores $x^*, \bar{x} \in X$ tal que:*

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \leq f(x^*) \quad \forall\ x \in X$$

A.3. Funciones concavas y convexas

Definición A.12 (Concavidad y convexidad). *Una función $u : X \to \mathbb{R}$ es concava (convexa) en X si $\forall\ x, y \in X$* y *$\forall\ \lambda \in [0, 1]$:*

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq (\leq) \lambda u(x) + (1 - \lambda)u(y), \tag{A.1}$$

es estrictamente concava (convexa) si $\forall\ \lambda \in (0, 1)$, la desigualdad (A.1) es estricta.

Definición A.13 (Cuasiconcavidad y cuasiconvexidad)**.** *Una función* $u : X \to \mathbb{R}$ *es cuasiconcava en* X *si* $\forall\ x, y \in X$ y $\forall\ \lambda \in [0,1]$

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq min\{u(x), u(y)\}, \tag{A.2}$$

es estrictamente cuasiconcava si $\forall\ \lambda \in (0,1)$*, la desigualdad (A.2) es estricta.*

De igual forma, una función $u : X \to \mathbb{R}$ *es cuasiconvexa en* X *si* $\forall\ x, y \in X$ y $\forall\ \lambda \in [0,1]$,

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq max\{u(x), u(y)\}, \tag{A.3}$$

es estrictamente cuasiconvexa si $\forall\ \lambda \in (0,1)$*, la desigualdad (A.3) es estricta.*

A.4. Cálculo diferencial y optimización

Definición A.14 (Derivada parcial)**.** *Sea* $f : X \to \mathbb{R}$*, donde* $X \subset \mathbb{R}^n$ *es abierto. Entonces la derivada parcial de* f *con respecto a* x_i *esta definida por:*

$$f_i(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}.$$

Al vector $\nabla f(x)$ *se le denomina vector gradiente* y *esta definido como:*

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)$$

Definición A.15 (Derivada total)**.** *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua, donde $X \subset \mathbb{R}^n$ es abierto. La derivada total de f en $x \in X$ esta definida como:*

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) dx_i.$$

Teorema A.3. *Sea X un conjunto abierto* y *convexo en $\mathbb{R}^n$,* y *sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable. Entonces f es cuasiconcava si* y *solo si $\forall\ x, y \in X$, se da el caso de que*

$$f(y) \geq f(x) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x) \cdot (y - x) \geq 0.$$

Definición A.16 (Matriz hessiana)**.** *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua, donde $X \subset \mathbb{R}^n$ es abierto. La matriz hessiana de f en $x \in X$ esta definida por:*

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

donde $f_{ij}(x) = \partial f_i(x)/\partial x_j \quad \forall\ i, j = 1, \ldots, n.$

Definición A.17 (Matriz definida negativa)**.** *Sea A una matriz de $n \times n$, entonces A es semidefinida negativa (positiva) si $\forall\ z \in \mathbb{R}^n$,*

$$z^t A z \leq (\geq) 0$$

Si la desigualdad es estricta $\forall\ z \in \mathbb{R}^n$, no nulo, entonces la matriz A definida negativa (positiva).

Teorema A.4. *Sea* $X \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto* y *convexo,* y *sea* $f : X \to \mathbb{R}$ *una función dos veces continuamente diferenciable. Los siguientes enunciados de 1 a 3 son equivalentes:*

1. f *es concava.*
2. $H(x)$ *es negativa semidefinida* $\forall\ x \in X$
3. *Para todo* $x^0 \in X$, $f(x) \leq f(x^0) + \nabla f(x^0)(x - x^0) \quad \forall\ x \in X.$

   Además,
4. *Si* $H(x)$ *es negativa definida* $\forall\ x \in X$, *entonces* f *es estrictamente concava.*

Definición A.18 (Función homogénea)**.** *Una función de variable real* $f(x)$ *se dice que es homogénea de grado* k *si*

$$f(tx) = t^k f(x) \quad \forall\ t > 0$$

Teorema A.5 (Teorema de Lagrange)**.** *Sean* $f(x)$ *y* $g^j(x)$, $j = 1, \ldots, m$, *funciones continuamente diferenciables sobre algún conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$. *Sea* x^* *un punto interior de* X y *un punto crítico de* f *sujeto a la restricciones* $g^j(x) \quad \forall\ j = 1, \ldots, m$. *Si los vectores* $\nabla g^j(x) \quad \forall\ j = 1, \ldots, m$ *son linealmente independientes, entonces existe* m *números reales* $\lambda_j^* \quad \forall\ j = 1, \ldots, m$, *tal que*

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g^j(x^*)}{\partial x_i} = 0 \quad \forall\ j = 1, \ldots, m$$

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = g^j(x^*) = 0 \quad \forall\ j = 1, \ldots, m$$

donde $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g^j(x)$ *y* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$.

Definición A.19 (Función de valor)**.** *Sean $f(x,a)$ y $g(x,a)$ funciones continuamente diferenciables en a. Sea el problema de maximización:*

$$\begin{aligned} \max_x \quad & f(x,a) \\ s.a. \quad & g(x,a) = 0 \end{aligned} \tag{A.4}$$

donde $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ y *$a = (a_1, \ldots, a_m)$. La función de valor queda definida como:*

$$\begin{aligned} M(a) = \max_x \quad & f(x,a) \\ s.a. \quad & g(x,a) = 0 \end{aligned} \tag{A.5}$$

La función de valor también se puede escribir como $M(a) = f(x(a), a)$, donde para cada a existe la solución única $x(a) > 0$, la cual representa la solución al problema (A.4).

Teorema A.6 (Teorema de la envolvente)**.** *Considere el problema (A.4). Sea $L(x,a,\lambda)$ el lagrangiano asociado del problema de maximización* y *$(x(a), \lambda(a))$ la solución a las condiciones de Lagrange del teorema A.5. Finalmente sea $M(a)$ la función de valor del problema de maximización. Entonces, el teorema de la envolvente establece que:*

$$\frac{\partial M(a)}{\partial a_j} = \left.\frac{\partial L}{\partial a_j}\right|_{x(a),\lambda(a)} \qquad j = 1, \ldots, m.$$

A.5. Equilibrio de Nash

Definición A.20 (Juego en forma estratégica)**.** *Un juego en forma estratégica esta formado por un conjunto $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ de $n \in N$ jugadores* y*, para* *cada jugador* $i \in N$*, un conjunto de estratégias* S_i*,* y *una función de utilidad* $u_i : S \to \mathbb{R}$*, donde* $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ *es es el conjunto de combinaciones de estratégias. Un juego en forma estratégica se denota por* $\{N; S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$*.*

Definición A.21 (Equilibrio de Nash)**.** *Una combinación de estratégias* $(s_1^*, \ldots, s_n^*) \in S$ *forman un equilibrio de Nash si,* $\forall\ i \in \mathbb{N}$*, se cumple que*

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \quad \forall\ s_i \in S_i.$$

Bibliografía

[1] Sundaram, R. K. (1996). *A first course in optimization theory* [Un primer curso en la teoría de optimización]. Cambridge. Cambridge University Press.

[2] Vohra, R. V. (2005). *Advanced mathematical economics* [Matemáticas avanzadas para la economía]. New York, NY. Routledge.

[3] Jehle, G. A. y Reny, P.J. (2000). *Advanced microeconomic theory* [Teoría microeconómica avanzada] (2^a ed.). Boston, MA. Addison Wesley.

[4] Robbins, L. (1932, 1935, 2^a ed.) *An Essay on the Nature and Significance of Economic Science*, (p. 16). London. Macmillan.

[5] Varian, H. R. (1992). *Análisis microeconómico.* (Trad. Ma. Esther Rabasco y Luis Tohaira) (3^a ed.). Barcelona. Antoni Bosch, editor. (Original en ingles, 1992).

[6] De la Fuente, A. (2000). *Mathematical methods and models for economists.* Cambridge. Cambridge University Press.

[7] Simon, C. P. y Blume, L. E. (1994). *Mathematics for economists* [Matemáticas para economistas]. New York, NY. W. W. Norton & Company.

[8] Varian, H. R. (1992). *Microeconomía intermedia.* (Trad. Ma. Esther Rabasco y Luis Tohaira) (3^a ed.). Barcelona. Antoni Bosch, editor. (Original en ingles, 1992).

[9] Mas-Colell, A., Whinston, M. D. y Green, J. R. (1995). *Microeconomic theory* [Teoría microeconómica]. New York, NY. Oxford University Press, Inc.

[10] Hicks, J. R. (1939). *Value and Capital: An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory* (2^a ed. 1946). Oxford. Clarendon Press.

[11] Fernandez, J. (2002). *Teoría de juegos: su aplicación en economía.* México. El Colegio de México, A.C.