



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**QCD a bajas energías,
usando métodos de muchos cuerpos.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

P R E S E N T A:

DAVID ARTURO AMOR QUIROZ



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. PETER OTTO HESS BECHSTEDT
2011**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1.Datos del alumno

Apellido paterno
Apellido materno
Nombre(s)
Teléfono
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Carrera
Número de cuenta

1.Datos del alumno

Amor
Quiroz
David Arturo
56 96 14 49
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
304690213

2.Datos del tutor

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

2.Datos del tutor

Dr.
Peter Otto
Hess
Bechstedt

3.Datos del sinodal 1

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

3.Datos del sinodal 1

Dr.
Juan Carlos
López
Vieyra

4.Datos del sinodal 2

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

4.Datos del sinodal 2

Dr.
Panayotis
Panayotaros

5.Datos del sinodal 3

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

5.Datos del sinodal 3

Dr.
Roelof
Bijker
Bijker

6.Datos del sinodal 4

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

6.Datos del sinodal 4

Dr.
Myriam
Mondragón
Ceballos

7.Datos del trabajo escrito

Título

Número de páginas

Año

7.Datos del trabajo escrito

QCD a bajas energías,
usando métodos de muchos cuerpos.

65 p

2011

Dedicatoria

Dedico este trabajo

A mi familia, por impulsarme a seguir adelante.

A mi padre: por inculcarme siempre el amor por la ciencia.

A mi madre: por ser un gran ejemplo y apoyo en mi vida.

A mi hermana: por todas las experiencias que compartimos juntos.

Agradecimientos

El presente trabajo sólo fue posible gracias al aporte, directo o indirecto de muchas personas. A todos ellos quiero agradecer.

A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por la formación de calidad que me forjó como físico. En particular a la Facultad de Ciencias (FC-UNAM) y al Instituto de Ciencias Nucleares (ICN-UNAM) por los diversos apoyos brindados y por ser como un hogar para mí; así como al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) por el apoyo económico que me brindó por parte del proyecto IN102109.

Al Dr. Peter O. Hess por la gran cantidad de tiempo, experiencia y consejos entregados de manera casi paternal, así como a los profesores de mi comisión evaluadora, los Drs. Juan Carlos López Vieyra, Panayotis Panayotaros, Roelof Bijker y Myriam Mondragón, por el tiempo dedicado y por sus valiosos comentarios para mejorar la calidad de mi trabajo.

A Tochtli Yépez por ser mi sinodal no oficial, por toda la paciencia que me tuvo y porque sin su ayuda el presente trabajo no hubiera sido posible.

A todos mis amigos, los *árbol-guys* Alejandro, Luis, Luis Javier (*el Tolu*), Nahum, Ollin, Omar, Ricardo (*el Oso*) y Tonatiuh, que no sólo hicieron soportable el estrés de la licenciatura, sino que marcaron esta etapa y la convirtieron en la mejor de mi vida. En especial agradezco a las *árbol-girls* Ana, Mariana y Yunuen quienes se reparten mi corazón. También a Ricardo e Israel (*Lolo* y *Bo*) que más que amigos son como mis hermanos.

A todos los amigos que omití en nombre de la brevedad y por último, agradezco a mi novia Michelle, cuyo amor también marcó esta etapa de mi vida y siempre estuvo ahí, en las buenas y en las malas, ya que después de todo la física y la química se complementan.

Índice general

1. Introducción	2
2. Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica	4
3. Algunos Resultados Previos	9
4. Estados Coherentes	15
5. Resolviendo el Hamiltoniano	21
5.1. Tratamiento de los operadores bosónicos	27
5.1.1. Caso 1	28
5.1.2. Caso 2	30
6. Resultados y Conclusiones	31
Apéndices	34
A. Deducción del Término Cinético de Cuarks	35
B. Hamiltoniano de Coulomb Efectivo	44
C. Componentes eléctrico y magnético	52
D. Deducción del Término de Interacción	58

Capítulo 1

Introducción

Una de las metas en la física de partículas elementales es encontrar técnicas (de preferencia que partan de primeros principios) que sean capaces de predecir resultados experimentales.

Un gran esfuerzo se ha dedicado a describir a las interacciones fuertes a bajas energías, en donde la constante de acoplamiento es muy grande y por lo cual resulta imposible modelar la interacción de color como una perturbación.

Hasta ahora, principalmente el modelo de Cálculo en Redes (*Lattice QCD*) [15] es capaz de derivar resultados no perturbativos a partir de primeros principios, pero requiere de un gran esfuerzo numérico, no permite calcular el espectro completo de energía y en dicho modelo el espín no está bien definido. Por otra parte, existen muchos modelos fenomenológicos que tienen la desventaja de requerir de muchos parámetros, por mencionar uno, el modelo de bolsa del MIT (*MIT Bag Model*) [16].

Es por ello que en el presente trabajo se busca compilar y extender los resultados obtenidos en [1–3], en donde se presentan soluciones analíticas y semianalíticas a un Hamiltoniano efectivo que considera las interacciones gluónicas para un número arbitrario de niveles de energía. Por ello, en los Apéndices A y B se repiten con detalle algunos de los cálculos realizados en [1] y se resumen junto con otros resultados previos del modelo en los capítulos 2 y 3.

La aportación del presente trabajo al modelo en [1–3] consta de la inclusión de un término que considere las contribuciones dinámicas de los gluones, utilizando la norma de Coulomb y

la base de oscilador armónico para quarks y gluones por igual.

En el capítulo 4 se introducen los estados coherentes, pues permiten sustituir a los operadores de creación y aniquilación bosónicos por su valor de expectación. Dicha sustitución se muestra en el capítulo 5, donde se estudia la inclusión del término de interacción H_{int} que corresponde al orden más bajo en potencias del campo gluónico \mathbf{A} , así como las implicaciones que esto tiene en la forma general del Hamiltoniano.

Una vez implementada la base de estados coherentes, se diagonaliza numéricamente el término de interacción junto con las energías prediagonalizadas (mediante una transformación BCS) provenientes de los términos Cinético, de Masa y de Coulomb.

A futuro se buscará una forma de tratar los demás términos de interacción (a ordenes superiores), así como variar al Hamiltoniano respecto al valor de expectación de los gluones, con el fin de investigar el rompimiento de niveles degenerados que existe en [1], para finalmente encontrar la energía mínima en la base de estados coherentes.

El objetivo es extender el modelo para que requiera únicamente de dos parámetros: uno de volumen finito y otro de interacción; planteando la posibilidad de deshacerse del primero de ellos de manera natural conforme se indague en el efecto de la inclusión de potencias superiores de los campos gluónicos y la extensión a un volumen cada vez más grande.

Capítulo 2

Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica

En la notación covariante relativista, la densidad Lagrangiana dada por la ecuación de Dirac para partículas fermiónicas elementales con masa m es [13]

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)_{cf} (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{cc'} - m\delta_{cc'}) \psi(x)_{c'f} , \quad (2.1)$$

donde $(\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$ son las llamadas Matrices de Dirac y los subíndices c y f se refieren al color y sabor de los campos fermiónicos respectivamente.

Para requerir invariancia de norma local en el Lagrangiano \mathcal{L}_0 se debe introducir un campo $\mathbf{V}_\mu^a(x)$ donde $\mu = \{0, 1, 2, 3\}$ son las componentes espacio-temporales, y $a = \{1, \dots, 8\}$ son los índices del octete de color del gluón; tal que las propiedades de transformación de dicho campo garanticen la invariancia. De esta manera, si se desea considerar al campo de norma como un campo físico, se tiene finalmente que el Lagrangiano de la Cromodinámica Cuántica (CDC) es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(x)_{cf} (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{cc'} - m\delta_{cc'}) \psi(x)_{c'f} \\ &- g (\bar{\psi}(x)_{cf} \gamma^\mu T_{cc'}^a \psi(x)_{c'f}) \mathbf{V}_\mu^a(x) - \frac{1}{4} \mathbf{V}_{\mu\nu}^a(x) \mathbf{V}^{a,\nu\mu}(x) , \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde

$$\mathbf{V}_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu \mathbf{V}_\nu^a(x) - \partial_\nu \mathbf{V}_\mu^a(x) + g f^{abd} \mathbf{V}_\mu^b(x) \mathbf{V}_\nu^d(x) . \quad (2.3)$$

En la expresión (2.2) se tiene que f^{abd} son las constantes de estructura del grupo de color SU(3) y $\mathbf{T}_{cc'}^a$ es el generador de color de ese mismo grupo. Se tiene pues que dicha ecuación es el Lagrangiano para quarks ψ_{cf} y gluones \mathbf{V}_μ^a interactuando a través del color con un acoplamiento dado por g .

Se puede hacer la analogía del Lagrangiano (2.2) con el que se obtiene en la Electrodinámica Cuántica (EDC), con la diferencia de que el primero incluye términos de *autointeracción* y que exhiben la presencia de vértices de tres y cuatro gluones en la CDC.

Para pasar del Lagrangiano (2.2) al formalismo Hamiltoniano se utiliza la cuantización canónica, lo cual requiere escoger una norma específica que permita escribir relaciones de conmutación entre los campos y sus momentos conjugados para un tiempo dado [1]. La elección de la norma no debe cambiar la física, ya que las ecuaciones de movimiento son independientes de dicha elección.

En la llamada *norma axial temporal* ($\mathbf{V}_0^a = 0$), el Hamiltoniano de la CDC [9, 10] es

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} (\mathbf{\Pi}^a \cdot \mathbf{\Pi}^a + \mathbf{B}^a \cdot \mathbf{B}^a) - g \int d\mathbf{r} \bar{\psi}_{cf} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{V}^a \mathbf{T}_{cc'}^a \psi_{cf} \\ &+ \int d\mathbf{r} \bar{\psi}_{cf} (-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m) \psi_{cf} , \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ se relaciona con el momento conjugado de ψ , así como $\mathbf{\Pi}^a$ lo hace con el momento conjugado del potencial \mathbf{V}^a .

Por otro lado, el campo magnético \mathbf{B}^a está dado por

$$\mathbf{B}_i^a = \varepsilon_{ijk} \nabla_j \mathbf{V}_k^a + \frac{g}{2} \varepsilon_{ijk} f^{abd} \mathbf{V}_j^b \mathbf{V}_k^d , \quad (2.5)$$

donde ε_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita.

Se puede aplicar una transformación $SU(3)$ para reescribir al Hamiltoniano de manera que satisfaga la norma de Coulomb, es decir, que $\nabla_i \mathbf{A}_i^a(\mathbf{r}) = 0$ [9,10], lo cual introduce un término proveniente del Jacobiano de la transformación, el cual en las teorías de campo no-Abelianas se conoce como determinante Fadeev-Popov dado por

$$\mathcal{J} = \det(\nabla \cdot \mathcal{D}) . \quad (2.6)$$

A su vez, $\nabla \cdot \mathcal{D}$ es el operador de Fadeev-Popov, donde \mathcal{D} es la derivada covariante en la norma de Coulomb dada por $\mathcal{D}_{cc'} = \delta_{cc'} \nabla + ig \mathbf{A}_a \mathbf{T}_{cc'}^a$.

Considerando lo anterior, el Hamiltoniano de la CDC en la norma de Coulomb tiene la forma

$$\begin{aligned} H &= \int \left\{ \frac{1}{2} \left[\mathcal{J}^{-1} \Pi_i^{tr(a)} \mathcal{J} \Pi_i^{tr(a)} + \mathbf{B}_i^a \mathbf{B}_i^a \right] - \bar{\psi}_{cf} (-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m) \psi_{cf} - g \bar{\psi}_{cf} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}^a \mathbf{T}_{cc'}^a \psi_{cf} \right\} d\mathbf{r} \\ &+ \frac{1}{2} g^2 \int \mathcal{J}^{-1} \rho^a(\mathbf{r}) \langle a\mathbf{r} | \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} (-\nabla^2) \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} | a'\mathbf{r}' \rangle \mathcal{J} \rho^{a'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' , \end{aligned} \quad (2.7)$$

con $\rho^a(\mathbf{r})$ la densidad de carga de color. La deducción de este Hamiltoniano no es un objetivo principal de este trabajo, pero cabe mencionar que su deducción no es trivial [9,10].

Se puede reescribir a (2.7) de la siguiente manera [6]

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1 , \\ H_0 &= \int \left\{ \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right] + \psi^\dagger(\mathbf{r}) [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla] \psi(\mathbf{r}) + \psi^\dagger(\mathbf{r}) \beta m \psi(\mathbf{r}) \right\} d\mathbf{r} \\ &+ \frac{1}{2} g^2 \int \rho^a(\mathbf{r}) K^0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \rho^{a'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' , \\ H_1 &= \int \left\{ \frac{1}{2} \left[\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right] - g \psi^\dagger(\mathbf{r}) [\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})] \psi(\mathbf{r}) \right\} d\mathbf{r} + \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B \\ &+ \frac{1}{2} g^2 \int \left\{ \rho^a(\mathbf{r}) \langle a\mathbf{r} | \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} (-\nabla^2) \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} | a'\mathbf{r}' \rangle \rho^{a'}(\mathbf{r}') - \rho^a(\mathbf{r}) K^0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \rho^{a'}(\mathbf{r}') \right\} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' , \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde las matrices $(\beta, \boldsymbol{\alpha})$ se relacionan con las matrices de Dirac mediante las relaciones [13]

$$\beta = \gamma^0, \quad \boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} . \quad (2.9)$$

Se debe tener la precaución de no confundir a las matrices α con el índice de pseudo-espín $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ ni con la constante de acoplamiento fuerte α_{QCD} , la cual no tiene dimensiones y que se relaciona con g de la forma $\alpha_{QCD} = \frac{g^2}{4\pi}$. En el régimen no-perturbativo se tiene que $\alpha_{QCD} \approx 1$.

La estructura del Hamiltoniano (2.7) ha sido estudiada y ha arrojado resultados previos [1–6], algunos de los cuales se mencionarán más adelante.

La razón principal de hacer tal separación es que el término de interacción quark-quark $H_{Coulomb}^{q-q}$ definido como

$$H_{Coulomb}^{q-q} = \frac{1}{2}g^2 \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \rho^a(\mathbf{r}) \langle a\mathbf{r} | \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} (-\nabla^2) \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} | a'\mathbf{r}' \rangle \rho^{a'}(\mathbf{r}') , \quad (2.10)$$

es complicado y en la actualidad no se sabe resolver de forma exacta, por ello se puede pensar en un potencial $K^0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ que aproxime a $H_{Coulomb}^{q-q}$ para ciertas distancias (o energías) y con ello trabajar a su diferencia de forma perturbativa.

En el caso de U(1), $H_{Coulomb}^{q-q}$ se relaciona con un potencial de Coulomb de la forma $1/r$. Se cree que este término es posiblemente el responsable del llamado confinamiento [6].

El siguiente paso es aproximar el potencial $K^0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ por una constante $V_0 \in (0,2, 0,8)GeV$ [1, 2], buscando así que la diferencia $(K^0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - V_0)$ pueda ser considerada como parte residual del Hamiltoniano. Dicha aproximación es válida a bajas energías entre 0 y 1,5 GeV principalmente porque las funciones $K^0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ dependen del campo gluónico \mathbf{A} , los cuales representan, a bajas energías, gluones efectivos con una masa entre 600 y 800 MeV [4].

El término $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})$ contiene interacciones de 3 y 4 gluones, que pueden involucrar una gran variedad de acoplamientos, por ello el término $-\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r})$ intenta aproximar a $\mathbf{B}^2(\mathbf{r})$ análogamente a como hiciera $K^0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ con $H_{Coulomb}^{q-q}$.

Por otro lado, se tiene que

$$K_q = \int \psi^\dagger(\mathbf{r}) [-i\alpha \cdot \nabla] \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} , \quad (2.11)$$

es el término cinético de quarks,

$$H_{m_q} = \int \psi^\dagger(\mathbf{r}) \beta m \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} , \quad (2.12)$$

es el término de masa de quarks y

$$K_{gluon} = \int \frac{1}{2} [\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r})] d\mathbf{r} , \quad (2.13)$$

es el término cinético de gluones.

Por otro lado, las funciones \mathbf{V}_A y \mathbf{V}_B contienen términos de la expansión del término de Fadeev-Popov en términos de los campos gluónicos y son despreciados en [6], así pues, no son considerados en el presente trabajo, pero una vez que se conozca de mejor forma a los operadores involucrados en los campos gluónicos, se podrá estudiar su incorporación al modelo.

Debido a todo lo anterior, la separación $H = H_0 + H_1$ en [6] se propone con el fin de que H_1 represente correcciones menores a H_0 .

Por último

$$H_{int} = -g \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \quad (2.14)$$

representa la interacción entre quarks y anti-quarks con el campo gluónico correspondiente a la potencia más baja en la constante de interacción fuerte. Su estudio es el principal objetivo de la presente tesis, pues se pretende determinar su magnitud y con ello justificar si es necesaria una reescritura del término dominante H_0 de la ecuación (2.8) al trabajar a bajas energías.

Capítulo 3

Algunos Resultados Previos

En el presente capítulo se hace una breve introducción a la notación y los conceptos utilizados. Así mismo, se resumen algunos de los resultados previos que se han conseguido hasta el momento.

El Mar de Dirac es un esquema que considera al vacío como un mar infinito de partículas fermiónicas con energía negativa, al cual se le puede manipular mediante los operadores de creación \mathbf{b}_j^\dagger y aniquilación \mathbf{b}^i . Tal proceso se muestra en la figura 3.1, donde el producto $\mathbf{b}_{+\frac{1}{2}\mu}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}\mu}$ aniquila una partícula de energía negativa (pseudo-espín = $-\frac{1}{2}$) y números cuánticos μ , y crea una partícula de energía positiva (pseudo-espín = $\frac{1}{2}$) con el mismo juego μ de números cuánticos.

En general, el producto $\mathbf{b}_{+\frac{1}{2}\mu}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}\mu'}$ puede conectar estados con distintos números cuánticos, en cuyo caso se dice que la estructura de los operadores no es diagonal, por el contrario, si $\mu = \mu'$ se dice que la estructura es diagonal.

En [1] se muestra que el término cinético de quarks sin masa se puede escribir como una suma de operadores de ascenso y descenso de energía cinética \mathbf{K}_+ y \mathbf{K}_- que satisfacen entre sí un álgebra SU(2) para el caso de 2 y 3 niveles de número cuántico principal N . Desarrollo que se muestra en el Apéndice A.

La simetría SU(2) se rompe para sistemas de más de 3 niveles o introduciendo un término de masa (no nula), en cuyo caso es posible obtener una solución semi-analítica simultánea-

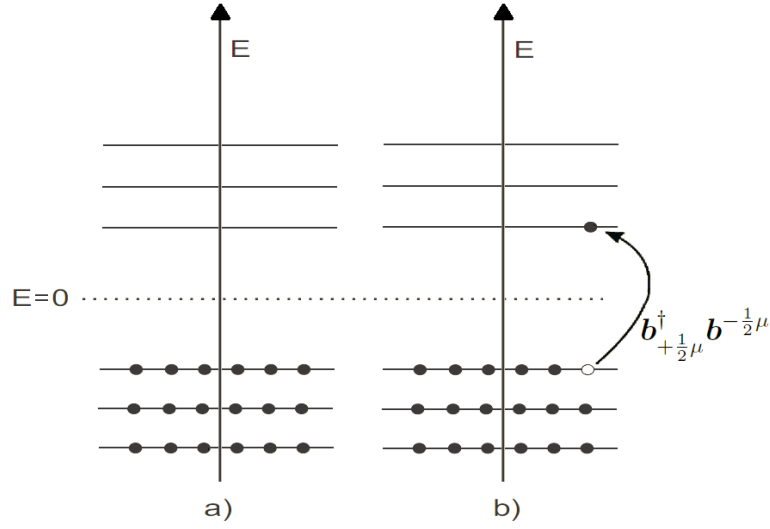


Figura 3.1: a) El Mar de Dirac con todos los estados de energía negativa ocupados , b) Excitación del Mar de Dirac, la cual se puede interpretar como la creación de un par quark-antiquark.

mente para los términos cinético y de masa por medio de una *transformación* $\alpha\beta$, la cual es una transformación canónica que cambia los números cuánticos principales N y N' por dos nuevos números cuánticos k y q que dan pasos de uno en uno ($k, q = 1, 2, 3, \dots$), a diferencia de N y N' que daban pasos de dos en dos.

La transformación $\alpha\beta$ está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}(N, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger &= \sum_k (\alpha_{Nk}^j)^* \widehat{\mathbf{b}}_{\pm\frac{1}{2}(k, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger, \\ \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}(N', j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger &= \sum_q (\beta_{N'q}^j)^* \widehat{\mathbf{b}}_{\pm\frac{1}{2}(q, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde j es el espín total, λ es la proyección del espín, f es el sabor y c es la notación corta para los índices de color $c = \{Y, I, I_z\}$. A su vez, Y es la hipercarga, I es el isoespín e I_z es la componente z del isoespín.

La idea de la transformación es diagonalizar a los índices N y N' , de manera que se impone la condición $k = q$.

Las matrices α_{Nk}^j y $\beta_{N'k}^j$ en (3.1) deben ser unitarias de manera que las reglas de anti-conmutación de los nuevos operadores se sigan satisfaciendo. Dichas matrices sólo mezclan estados con el mismo momento angular.

Como es posible observar de (3.1), la transformación $\alpha\beta$ no modifica los números cuánticos j, λ, c, f de cada estado, por lo que el nuevo sistema sigue conectando estados de momento angular $l = j - \frac{1}{2}$ con estados $l = j + \frac{1}{2}$ y sigue moviendo partículas de energía negativa a estados con energía positiva, lo cual todavía no permite obtener de forma analítica las energías de los estados posibles del sistema a considerar. Por ello, para conseguir una solución analítica del sistema, en [1] se hizo una transformación BCS generalizada de la forma

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbf{b}}^{\frac{1}{2}(k, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} &= c_{j - \frac{1}{2}, k} \mathbf{b}_{j + \frac{1}{2}}^{(k, j)\lambda cf} - s_{j - \frac{1}{2}, k} \mathbf{d}_{j - \frac{1}{2}}^{\dagger(k, j)\lambda cf} , \\
 \widehat{\mathbf{b}}^{-\frac{1}{2}(k, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} &= s_{j + \frac{1}{2}, k} \mathbf{b}_{j - \frac{1}{2}}^{(k, j)\lambda cf} + c_{j + \frac{1}{2}, k} \mathbf{d}_{j + \frac{1}{2}}^{\dagger(k, j)\lambda cf} , \\
 \widehat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}(k, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} &= c_{j - \frac{1}{2}, k} \mathbf{b}_{j + \frac{1}{2}}^{\dagger(k, j)\lambda cf} - s_{j - \frac{1}{2}, k} \mathbf{d}_{j - \frac{1}{2}}(k, j)\lambda cf , \\
 \widehat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}(k, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} &= s_{j + \frac{1}{2}, k} \mathbf{b}_{j - \frac{1}{2}}^{\dagger(k, j)\lambda cf} + c_{j + \frac{1}{2}, k} \mathbf{d}_{j + \frac{1}{2}}(k, j)\lambda cf , \\
 \widehat{\mathbf{b}}^{\frac{1}{2}(k, j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} &= c_{j + \frac{1}{2}, k} \mathbf{b}_{j - \frac{1}{2}}^{(k, j)\lambda cf} - s_{j + \frac{1}{2}, k} \mathbf{d}_{j + \frac{1}{2}}^{\dagger(k, j)\lambda cf} , \\
 \widehat{\mathbf{b}}^{-\frac{1}{2}(k, j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} &= s_{j - \frac{1}{2}, k} \mathbf{b}_{j + \frac{1}{2}}^{(k, j)\lambda cf} + c_{j - \frac{1}{2}, k} \mathbf{d}_{j - \frac{1}{2}}^{\dagger(k, j)\lambda cf} , \\
 \widehat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}(k, j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} &= c_{j + \frac{1}{2}, k} \mathbf{b}_{j - \frac{1}{2}}^{\dagger(k, j)\lambda cf} - s_{j + \frac{1}{2}, k} \mathbf{d}_{j + \frac{1}{2}}(k, j)\lambda cf , \\
 \widehat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}(k, j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} &= s_{j - \frac{1}{2}, k} \mathbf{b}_{j + \frac{1}{2}}^{\dagger(k, j)\lambda cf} + c_{j - \frac{1}{2}, k} \mathbf{d}_{j - \frac{1}{2}}(k, j)\lambda cf ,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde se usa la notación corta $c_{j \pm \frac{1}{2}, k} = \cos(\theta_{j \pm \frac{1}{2}, k})$ y $s_{j \pm \frac{1}{2}, k} = \sin(\theta_{j \pm \frac{1}{2}, k})$ con $\theta_{j \pm \frac{1}{2}, k}$ el ángulo de Bogoliubov.

Las expresiones en (3.2) se pueden resumir en una sola expresión introduciendo el índice de pseudo-espín $\alpha = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ y un nuevo índice $\delta = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbf{b}}_{\alpha(k, j + \delta)j\lambda cf}^{\dagger} &= \cos \left(\Theta_{j - (2\delta\alpha), k} - \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{b}_{j + (2\delta\alpha), kj\lambda cf}^{\dagger} \\
 &\quad - \text{sen} \left(\Theta_{j - (2\delta\alpha), k} - \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{d}_{j - (2\delta\alpha), kj\lambda cf} .
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Se puede observar que el producto $(2\delta\alpha) = \pm\frac{1}{2}$ da el signo correcto en los índices del ángulo de Bogoliubov $\Theta_{j\pm\frac{1}{2},k}$ y de los operadores fermiónicos $\mathbf{b}_{j\pm\frac{1}{2},k}^{\dagger}$ y $\mathbf{d}_{j\mp\frac{1}{2},k}$.

En [1] se muestra que tras aplicar la transformación BCS, el término cinético (2.11) y el término de masa (2.12) toman la forma

$$\begin{aligned} K_q + H_{m_q} &= \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m_0] \psi(\mathbf{r}) \\ K_q^{BCS} + H_{m_q}^{BCS} &= \sum_{jk} \left\{ \epsilon_{bkj+\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{j+\frac{1}{2},k}^\dagger \mathbf{b}_{j+\frac{1}{2},k} + \epsilon_{dkj+\frac{1}{2}} \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2},k}^\dagger \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2},k} \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_{bkj-\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{j-\frac{1}{2},k}^\dagger \mathbf{b}_{j-\frac{1}{2},k} + \epsilon_{dkj-\frac{1}{2}} \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2},k}^\dagger \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2},k} \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

En (3.4) se ha omitido la suma sobre los números cuánticos magnéticos y la constante de energía correspondiente al vacío perturbativo, y se usa la notación corta

$$\begin{aligned} \epsilon_{bkj\pm\frac{1}{2}} &= 2\tilde{k}_{kk} s_{j\mp\frac{1}{2},k} c_{j\mp\frac{1}{2},k} + m_{0,k,j\pm\frac{1}{2}} c_{j\mp\frac{1}{2},k}^2 - m_{0,k,j\mp\frac{1}{2}} s_{j\mp\frac{1}{2},k}^2, \\ \epsilon_{dkj\pm\frac{1}{2}} &= 2\tilde{k}_{kk} s_{j\pm\frac{1}{2},k} c_{j\pm\frac{1}{2},k} + m_{0,k,j\pm\frac{1}{2}} c_{j\pm\frac{1}{2},k}^2 - m_{0,k,j\mp\frac{1}{2}} s_{j\pm\frac{1}{2},k}^2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde $\epsilon_{bkj\pm\frac{1}{2}}$ y $\epsilon_{dkj\pm\frac{1}{2}}$ se relacionan con la energía subtotal debida al término cinético y de masa, mientras que $m_{0,k,j\pm\frac{1}{2}}$ es el parámetro de masa de los quarks.

Por otro lado, en [1] se encontró que el término $H_{Coulomb}^{q-q}$ aproximado por un potencial promedio V_0 se escribe como un operador de Casimir de $SU(3)$, el cual separa estados con color de estados sin color, es decir, los estados físicos con $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. (Ver Apéndice B).

$$\begin{aligned} H_{Coulomb}^{q-q}(V_0) &= 2V_0 \mathcal{C}_2(SU(3)), \\ E_{Coulomb}^{q-q}(V_0) &= 2V_0(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Así mismo, en [1] se muestra que la estructura del Hamiltoniano de gluones K_g es diagonal y en términos de funciones Bessel está dada por

$$\begin{aligned} K_g &= \frac{1}{2} \int [\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r})] d\mathbf{r} \\ &= \sum_{\Xi NLJMC} \Omega_{(N,L,1)J}^\Xi \left\{ \beta_{(N,L,1)JMC}^{\dagger\Xi} \beta^{\Xi;(N,L,1)JMC} + \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

El índice Ξ en los operadores bosónicos $\beta^{\dagger\Xi}$ y β^Ξ se refiere a los componentes magnético o eléctrico tal como se muestra en el Apéndice C. Además, en [1] se muestra que se puede interpretar a $\Omega_{(N,L,1)J}^\Xi$ como la energía característica de un gluón, la cual se ajusta en dicho trabajo a un valor de 800 MeV .

A futuro se puede reescribir a K_g utilizando la base de oscilador armónico tridimensional.

Por último, el término de interacción entre quarks y gluones H_{int} al orden más bajo en potencias del campo gluónico \mathbf{A} viene dado por

$$H_{int} = -g \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) . \quad (3.8)$$

Del tratamiento dado en [1] a dicho término, tras expandir el sector de quarks en la base de oscilador y a los campos gluónicos en términos de funciones de Bessel $j_L(x)$, se encuentra que H_{int} resulta de la forma

$$\begin{aligned} H_{int} &= g \sum_{\alpha N_i l_i j_i \lambda_i c_i f} \sum_{\Xi N L J M C} \int r^2 dr R_{N_1 l_1}^*(r) j_L(\Omega_{(N,L,1)J}^\Xi r) R_{N_2 l_2}(r) \frac{\alpha_{LJ}^\Xi}{\sqrt{\Omega_{(N,L,1)J}^\Xi}} \frac{N_{(N,L,1)J}^\Xi}{R_e^{3/2}} \\ &\times (-1)^{\chi_{c_2}} (-1)^{j_2 - \lambda_2 + l_2 + 1} \frac{3}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{(2l_2 + 1)(2j_2 + 1)(2j_1 + 1)(2l_1 + 1)}{2J + 1}} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & l_2 & j_2 \\ \frac{1}{2} & l_1 & j_1 \\ 1 & L & J \end{array} \right\} \\ &\times \langle l_2 0, l_1 0 | L 0 \rangle \langle j_1 \lambda_1, j_2 - \lambda_2 | J M \rangle \langle (10) c_1, (01) \bar{c}_2 | (11) C \rangle \\ &\times \mathbf{b}_{\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f}^\dagger \left(\beta^{\dagger\Xi; (N, L, 1) J M C} + \beta^{\Xi; (N, L, 1) J M C} \right) \mathbf{b}^{-\alpha(N_2, l_2, \frac{1}{2}) j_2 \lambda_2 c_2 f} , \end{aligned} \quad (3.9)$$

con $\chi_{c_2} = \frac{1}{3}(\lambda_{c_2} - \mu_{c_2}) + \frac{1}{2}Y - I_z$ donde Y es la hipercarga mientras que I_z es la proyección z del isoespín [14].

Se puede notar que la integración en (3.9) es únicamente sobre la componente radial, ya que la integración angular está implícita en los coeficientes Clebsch-Gordan mediante la identidad mostrada en la ecuación (D.7).

En el capítulo 5 se reescribe a H_{int} utilizando la base del oscilador armónico tridimensional para campos de quarks y gluones por igual, con la ventaja de requerir una única base para describir dicho término de interacción.

Posteriormente, se realiza la transformación BCS de la ecuación (3.3), la cual permite escribir a H_{int} en términos de nuevos operadores de creación y aniquilación de quarks y antiquarks. Luego se argumenta la hermiticidad de H_{int} y se proponen 2 maneras de dar tratamiento a los operadores bosónicos que contiene, teniendo la precaución de no perder la hermiticidad original.

Finalmente se hacen cálculos numéricos para agregar los efectos de la interacción gluónica a la energía prediagonalizada proveniente de los términos cinético y de masa de quarks. Los resultados se muestran en el capítulo 6.

Capítulo 4

Estados Coherentes

La importancia de estudiar los estados coherentes en el presente trabajo aparece en el capítulo 5, donde se propone hacer actuar sobre estados coherentes de prueba a los operadores gluónicos de la forma $(\beta^\mu + \beta^{\dagger\mu})$ que se muestran en (5.2).

En el caso bosónico, si $|n\rangle$ es eigenestado del oscilador armónico unidimensional, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, \\ \mathbf{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle.\end{aligned}\tag{4.1}$$

De las propiedades mostradas en (4.1) es que se da el nombre a \mathbf{a} y \mathbf{a}^\dagger de operadores de creación y aniquilación respectivamente. Además, de generalizar dichas propiedades se sigue que $[\mathbf{a}^i, \mathbf{a}_j^\dagger] = \delta_j^i$, la cual es el álgebra de los operadores bosónicos.

En particular, si se hace actuar sobre el vacío $|0\rangle$ a los operadores de creación y aniquilación, de acuerdo a (4.1) se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{a}|0\rangle &= 0, \\ (\mathbf{a}^\dagger)^n|0\rangle &= \sqrt{n!}|n\rangle.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Normalmente se construye a los llamados estados coherentes como eigenestados de los

operadores de aniquilación del oscilador armónico \mathbf{a} , y es la aplicación a la óptica cuántica de dicha propiedad lo que da origen al nombre de *estados coherentes* [17].

La definición estándar del estado coherente $|z\rangle$ con $z \in \mathbb{C}$ es

$$|z\rangle = e^{z^* \mathbf{a}^\dagger} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} |n\rangle . \quad (4.3)$$

Esta definición es útil en la construcción de estados de prueba pues genera todos los estados excitados del oscilador de la forma más simple. Además, de (4.3) se sigue de manera directa la propiedad

$$\mathbf{a}|z\rangle = z^*|z\rangle , \quad (4.4)$$

es decir, los estados coherentes son eigenestados del operador de aniquilación.

También es sencillo mostrar (usando la ortonormalidad de los estados $|n\rangle$ del oscilador estándar) que el producto interno está dado por

$$\langle z'|z\rangle = e^{z'z^*} . \quad (4.5)$$

Luego, la base $\{|z\rangle | z \in \mathbb{C}\}$ no es ortogonal, por lo que se dice que es sobrecompleta.

La introducción de un operador de identidad usando la medida de Bargmann e^{-zz^*} permite hacer del espacio generado por $\{|z\rangle | z \in \mathbb{C}\}$ un espacio completo: el llamado Espacio de Bargmann [18]

$$\mathbf{1} = \frac{1}{\pi} \int d^2z e^{-zz^*} |z\rangle \langle z| . \quad (4.6)$$

Por otro lado, los vectores de estado $|\psi\rangle$ pueden ser expresados por medio de su acción funcional en el espacio de Bargmann $\langle z|\psi\rangle = \psi(z)$, por lo que usando al operador identidad se tiene el producto escalar

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2z e^{-zz^*} \langle \psi_1 | z \rangle \langle z | \psi_2 \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2z e^{-zz^*} \psi_1^*(z) \psi_2(z) . \quad (4.7)$$

Además se tiene que

$$\psi(z) = \langle z|\psi\rangle = \langle 0|e^{z\mathbf{a}}|\psi\rangle = \sum_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \langle n|\psi\rangle, \quad (4.8)$$

donde $\psi(z)$ define a la transformada de Bargmann de la representación ordinaria de coordenadas $\psi(x)$. En particular, si $\psi(x) = \langle x|n\rangle$ es un eigenestado del oscilador, entonces su transformación de Bargmann es $\frac{z^n}{\sqrt{n!}}$.

Así como $\psi(z) = \langle 0|e^{z\mathbf{a}}|\psi\rangle$, análogamente para un operador \mathcal{O} actuando sobre $|\psi\rangle$ se cumple que

$$\begin{aligned} \langle z|\mathcal{O}|\psi\rangle &= \langle 0|e^{z\mathbf{a}}\mathcal{O}|\psi\rangle = \langle 0|(e^{z\mathbf{a}}\mathcal{O}e^{-z\mathbf{a}})e^{z\mathbf{a}}|\psi\rangle \\ &= \langle 0|\left(\mathcal{O} + \frac{1}{1!}[z\mathbf{a}, \mathcal{O}] + \frac{1}{2!}[z\mathbf{a}, [z\mathbf{a}, \mathcal{O}]] + \dots\right)e^{z\mathbf{a}}|\psi\rangle. \end{aligned} \quad (4.9)$$

La importancia de la ecuación anterior radica en que hace posible la expansión en serie de cualquier operador, de modo que si se conoce su acción sobre el vacío (o en general, sobre el estado de mínimo peso), se puede sustituir a dicho operador por su valor de expectación, el cual conserva la información original del operador. Por mencionar algunos ejemplos:

$$\begin{aligned} \langle z|\mathbf{a}|\psi\rangle &= \frac{d\psi(z)}{dz}, \\ \langle z|\mathbf{a}^\dagger|\psi\rangle &= z\psi(z). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para generalizar los estados coherentes del oscilador armónico unidimensional al álgebra del momento angular $SU(2)$, se sustituye al vacío por el estado de mínimo peso, que es en este caso el de menor proyección de momento angular m , pues éste es aniquilado por el operador de descenso \mathbf{J}_- en analogía al efecto del operador de aniquilación sobre el vacío. Expresado visualmente, se hace la sustitución:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow |j, m = -j\rangle =: | -j\rangle, \\ \mathbf{a}^\dagger &\rightarrow \mathbf{J}_+, \\ \mathbf{a} &\rightarrow \mathbf{J}_-, \\ \mathbf{1} &\rightarrow \mathbf{J}_0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Motivado por lo anterior, se define al estado coherente vectorial $|z\rangle$ como

$$|z\rangle = e^{z^* \mathbf{J}_+} | -j \rangle . \quad (4.12)$$

De este modo, las identidades antes exploradas se generalizan como

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \langle z | \psi \rangle = \langle -j | e^{z \mathbf{J}_-} | \psi \rangle , \\ \langle z | \mathcal{O} | \psi \rangle &= \langle -j | \left(\mathcal{O} + \frac{1}{1!} [z \mathbf{J}_-, \mathcal{O}] + \frac{1}{2!} [z \mathbf{J}_-, [z \mathbf{J}_-, \mathcal{O}]] + \dots \right) e^{z \mathbf{J}_-} | \psi \rangle . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Así pues, es fácil deducir los siguientes casos particulares:

$$\begin{aligned} \langle z | \mathbf{J}_- | \psi \rangle &= \frac{d}{dz} \psi(z) , \\ \langle z | \mathbf{J}_0 | \psi \rangle &= \left(-j + z \frac{d}{dz} \right) \psi(z) , \\ \langle z | \mathbf{J}_+ | \psi \rangle &= \left(2jz - z^2 \frac{d}{dz} \right) \psi(z) . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Con ello se ha mapeado al álgebra del momento angular a un álgebra construida sólo por z , d/dz y constantes [17]. Dado que se satisfacen las relaciones de conmutación del oscilador:

$$[d/dz, z] = 1, \quad [z, 1] = 0, \quad [d/dz, 1] = 0 , \quad (4.15)$$

el álgebra del momento angular resulta análoga al álgebra del oscilador, lo cual es consistente con las relaciones en la ecuación (4.11).

Para describir operadores con N grados de libertad se requiere hacer la generalización $z \rightarrow \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, con lo cual se define al estado coherente $|\mathbf{z}\rangle$ como

$$|\mathbf{z}\rangle = e^{\mathbf{z}^* \cdot \mathbf{a}^\dagger} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{z}^* \cdot \mathbf{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle , \quad (4.16)$$

con $\mathbf{z}^* \cdot \mathbf{a}^\dagger = \sum_m z_m^* a_m^\dagger$. Dado que $(z^m)^* = z_m$, se tiene de manera análoga que

$$\langle \mathbf{z} | = \langle 0 | e^{\mathbf{z} \cdot \mathbf{a}} , \quad (4.17)$$

donde $\mathbf{z} \cdot \mathbf{a} = \sum_m z_m a^m$, por lo cual es posible demostrar por inducción sobre n la siguiente identidad:

$$\langle \mathbf{z}' | \mathbf{z} \rangle = e^{\mathbf{z}^* \cdot \mathbf{z}'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{z}^* \cdot \mathbf{z}')^n}{n!}. \quad (4.18)$$

A causa de lo anterior, si se desea normalizar al estado \mathbf{z} , se le debe redefinir como $|\mathbf{z}\rangle = N_z e^{\mathbf{z} \cdot \mathbf{a}^\dagger} |0\rangle$, con lo cual

$$\langle \mathbf{z} | \mathbf{z} \rangle = N_z^2 e^{\mathbf{z}^* \cdot \mathbf{z}} = 1 \Leftrightarrow N_z = e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^* \cdot \mathbf{z}}. \quad (4.19)$$

Para completar la discusión de estados coherentes se presenta a los estados coherentes fermiónicos, los cuales deben satisfacer el principio de exclusión. Para ello se introducen los llamados *números de Grassmann*, los cuales satisfacen las siguientes propiedades de anticonmutación:

$$\begin{aligned} z_m z_{m'} &= -z_{m'} z_m, \\ z_m z^{m'} &= -z^{m'} z_m. \end{aligned} \quad (4.20)$$

De dicha definición se observa que $(z_m)^2 = (z^m)^2 = 0$ pero en general $z_m z^m \neq 0$.

Se debe tener en cuenta que para el caso de fermiones $\mathbf{a}^\dagger = (\mathbf{a}_1^\dagger, \dots, \mathbf{a}_N^\dagger)$ con $\{\mathbf{a}^i, \mathbf{a}_j^\dagger\} = \delta_j^i$. Considerando que no es posible *crear* más partículas fermiónicas que el número de grados de libertad disponibles, se encuentra que la suma en principio infinita en las ecuaciones (4.16) y (4.18) se corta para $n > N$, resultando que

$$\begin{aligned} |\mathbf{z}\rangle &= \sum_{n=0}^N \frac{(\mathbf{z}^* \cdot \mathbf{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle, \\ \langle \mathbf{z}' | \mathbf{z} \rangle &= \sum_{n=0}^N \frac{(\mathbf{z}^* \cdot \mathbf{z}')^n}{n!}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

con \mathbf{z} compuesto por números de Grassman. De esta manera se tiene que el corte en N permite hacer la aproximación $\langle \mathbf{z}' | \mathbf{z} \rangle \approx e^{\mathbf{z}^* \cdot \mathbf{z}'}$ con un error que va como $(N!)^{-1}$.

Por último, se tiene que para N suficientemente grande se satisface que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^m |\mathbf{z}\rangle &\approx z^m |\mathbf{z}\rangle, \\ \langle \mathbf{z} | \mathcal{O} | \mathbf{z} \rangle &\approx \sum_{n_i m_i} \mathcal{O}_{n_i m_i} z_{n_1} \dots z_{n_a} z^{m_1} \dots z^{n_b}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

El carácter aproximado para N grande se omite en [18] pues dicho documento trabaja con sistemas del orden de 10^{23} electrones, por lo que las igualdades son, para todo fin práctico, exactas.

En el Capítulo 5 se utiliza únicamente a los estados coherentes bosónicos.

Capítulo 5

Resolviendo el Hamiltoniano

En la ecuación (3.9) se presenta al Hamiltoniano de interacción efectivo en la base de caja esférica para los gluones y en la base de oscilador armónico tridimensional para quarks. Como se muestra con detalle en los apéndices C y D, un desarrollo análogo al mostrado en [1] lleva a deducir que la expresión para H_{int} en la base de oscilador armónico tridimensional para quarks y gluones por igual, es

$$\begin{aligned}
 H_{int} = & -g \sum_{\alpha N_i l_i j_i \lambda_i c_i f_i} \sum_{\Xi N' N L' L M C} \int r^2 dr R_{N_1 l_1}(r) R_{N' L'}(r) R_{N_2 l_2}(r) \frac{3\alpha_{N' N L' L}^{\Xi}}{\sqrt{4\pi\Omega_N}} \\
 & \times (-1)^{\chi_{c_2}} (-1)^{j_2 - \lambda_2 + l_2} \sqrt{(2l_2 + 1)(2j_2 + 1)(2j_1 + 1)(2l_1 + 1)} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & l_2 & j_2 \\ \frac{1}{2} & l_1 & j_1 \\ 1 & L' & L \end{Bmatrix} \\
 & \times \langle l_2 0, l_1 0 | L' 0 \rangle \langle j_1 \lambda_1, j_2 - \lambda_2 | L M \rangle \langle (10) c_1, (01) \bar{c}_2 | (11) C \rangle \\
 & \times \mathbf{b}_{\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f_1}^{\dagger} \left(\beta^{\dagger \Xi; (N', L', 1) L M C} + \beta^{\Xi; (N', L', 1) L M C} \right) \mathbf{b}^{-\alpha(N_2, l_2, \frac{1}{2}) j_2 \lambda_2 c_2 f_2} \delta_{f_1 f_2},
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde los coeficientes $\alpha_{N' N L' L}^{\Xi}$ son más generales que en (3.9) e imponen ciertas reglas de selección entre los números cuánticos $\{\Xi, N', N, L', L\}$, tal como se muestra en el Apéndice C.

La integración angular en (5.1) se encuentra implícita en la combinación de coeficientes Clebsch-Gordan de acuerdo a la ecuación (D.7), por lo que únicamente se requiere integrar a las funciones radiales.

A los operadores en (5.1) se les hace una transformación $\alpha\beta$ con $k_i = q_i$ (ver ecuación 3.1) de la misma manera como se hizo con el término cinético para así dar tratamiento a un número arbitrario de niveles.

Como los únicos valores posibles del momento angular l son $l = j \pm \frac{1}{2} = j + \delta$, con δ definido como en (3.3), entonces H_{int} toma la forma

$$\begin{aligned}
 H_{int} = & g \sum_{\alpha, k_i, N_i j_i \lambda_i c_i f_i} \sum_{\Xi N' N L' L M C} \sum_{\delta_i = -1/2}^{1/2} \int r^2 dr R_{N_1, j_1 + \delta_1}(r) R_{N' L'}(r) R_{N_2, j_2 + \delta_2}(r) \frac{3\alpha_{N' N L' L}^{\Xi}}{\sqrt{4\pi\Omega_N}} \\
 & \times \sqrt{(2j_2 + 2\delta_2 + 1)(2j_2 + 1)(2j_1 + 1)(2j_1 + 2\delta_1 + 1)} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & j_2 + \delta_2 & j_2 \\ \frac{1}{2} & j_1 + \delta_1 & j_1 \\ 1 & L' & L \end{Bmatrix} (\kappa_{N_1 k_1}^{j_1})^* (\kappa_{N_2 k_2}^{j_2}) \\
 & \times (-1)^{\chi_{c_2 + j_2 - \lambda_2 + (j_2 + \delta_2) + 1}} \langle j_2 + \delta_2 0, j_1 + \delta_1 0 | L' 0 \rangle \langle j_1 \lambda_1, j_2 - \lambda_2 | L M \rangle \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)C \rangle \\
 & \times \hat{\mathbf{b}}_{\alpha(k_1, j_1 + \delta_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f_1}^{\dagger} \left(\beta^{\dagger \Xi; (N', L', 1) L M C} + \beta^{\Xi; (N', L', 1) L M C} \right) \hat{\mathbf{b}}^{-\alpha(k_2, j_2 + \delta_2, \frac{1}{2}) j_2 \lambda_2 c_2 f_2} \delta_{f_1 f_2} ,
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \delta_i = \frac{1}{2} & \Rightarrow (\kappa_{N_i k_i}^{j_i}) = (\alpha_{N_i k_i}^{j_i}) , \\
 \delta_i = -\frac{1}{2} & \Rightarrow (\kappa_{N_i k_i}^{j_i}) = (\beta_{N_i k_i}^{j_i}) .
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Es posible simplificar la fase en (5.2) utilizando el hecho de que $2j_2 + 1$ es siempre un número par.

Posteriormente se realiza la transformación BCS de la ecuación (3.3), dando por resultado que el término de interacción es

$$\begin{aligned}
 H_{int} &= g \sum_{\alpha, k_i, N_i, j_i, \lambda_i, \delta_i, f_i} \sum_{\Xi \in N'NL'LMC} \int r^2 dr R_{N_1, j_1 + \delta_1}(r) R_{N'L'}(r) R_{N_2, j_2 + \delta_2}(r) \frac{3\alpha_{N'NL'L}^{\Xi}}{\sqrt{4\pi\Omega_N}} \\
 &\times \sqrt{(2j_2 + 2\delta_2 + 1)(2j_2 + 1)(2j_1 + 1)(2j_1 + 2\delta_1 + 1)} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & j_2 + \delta_2 & j_2 \\ \frac{1}{2} & j_1 + \delta_1 & j_1 \\ 1 & L' & L \end{Bmatrix} \\
 &\times (-1)^{\chi_{c_2} - \lambda_2 + \delta_2} \langle j_2 + \delta_2, 0, j_1 + \delta_1, 0 | L'0 \rangle \langle j_1, \lambda_1, j_2 - \lambda_2 | LM \rangle \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)C \rangle \\
 &\times \left\{ \cos \left(\Theta_{j_1 - (2\delta_1\alpha), k_1} - \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{b}_{j_1 + (2\delta_1\alpha), k_1, j_1, \lambda_1, c_1, f_1}^{\dagger} \right. \\
 &- \left. \sin \left(\Theta_{j_1 - (2\delta_1\alpha), k_1} - \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{d}_{j_1 - (2\delta_1\alpha), k_1, j_1, \lambda_1, c_1, f_1} \right\} \\
 &\times \left(\kappa_{N_1 k_1}^{j_1} \right)^* \left(\beta^{\dagger \Xi; (N', L', 1)LMC} + \beta^{\Xi; (N', L', 1)LMC} \right) \left(\kappa_{N_2 k_2}^{j_2} \right) \\
 &\times \left\{ \cos \left(\Theta_{j_2 + (2\delta_2\alpha), k_2} - \left(\frac{1}{2} + \alpha \right) \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{b}^{j_2 - (2\delta_2\alpha), k_2, j_2, \lambda_2, c_2, f_2} \right. \\
 &- \left. \sin \left(\Theta_{j_2 + (2\delta_2\alpha), k_2} - \left(\frac{1}{2} + \alpha \right) \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{d}^{\dagger j_2 + (2\delta_2\alpha), k_2, j_2, \lambda_2, c_2, f_2} \right\} \delta_{f_1 f_2} .
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Al introducir la notación $\mu = \{\alpha, k_1, N_1, j_1, \lambda_1, \delta_1, c_1, f_1\}$ y $\nu = \{-\alpha, k_2, N_2, j_2, \lambda_2, \delta_2, c_2, f_2\}$, la contribución del Hamiltoniano de interacción H_{int} al Hamiltoniano ya prediagonalizado $H_q = K_q + H_{m_q} + H_{Coulomb}^{q-q}$ toma la forma

$$\begin{aligned}
 H_q + H_{int} &= \sum_{\mu\nu} \epsilon_{\mu} \delta_{\mu\nu} (b_{\mu}^{\dagger} b^{\nu} + d_{\mu}^{\dagger} d^{\nu}) + 2V_0 \mathcal{C}_2(SU(3)) \\
 &+ \sum_{\mu\nu} V_{\mu\nu} (c_{\mu} c_{\nu} b_{\mu}^{\dagger} b^{\nu} - c_{\mu} s_{\nu} b_{\mu}^{\dagger} d^{\dagger\nu} - s_{\mu} c_{\nu} d_{\mu} b^{\nu} + s_{\mu} s_{\nu} d_{\mu} d^{\dagger\nu}) ,
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

donde c_{μ} y c_{ν} son los cosenos de la transformación BCS cuyo argumento depende de los índices μ y ν respectivamente. De la misma manera s_{μ} y s_{ν} son los senos de dicha transformación. Además se tiene que los coeficientes $V_{\mu\nu}$ están dados por

$$\begin{aligned}
 V_{\mu\nu} &= g \sum_{\Xi N'NL'LMC} \int r^2 dr R_{N_1, j_1 + \delta_1}(r) R_{N'L'}(r) R_{N_2, j_2 + \delta_2}(r) \frac{3\alpha_{N'NL'L}^{\Xi}}{\sqrt{4\pi\Omega_N}} \\
 &\times \sqrt{(2j_2 + 2\delta_2 + 1)(2j_2 + 1)(2j_1 + 1)(2j_1 + 2\delta_1 + 1)} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & j_2 + \delta_2 & j_2 \\ \frac{1}{2} & j_1 + \delta_1 & j_1 \\ 1 & L' & L \end{Bmatrix} \\
 &\times (-1)^{\chi_{c_2} - \lambda_2 + \delta_2} \langle j_2 + \delta_2 0, j_1 + \delta_1 0 | L' 0 \rangle \langle j_1 \lambda_1, j_2 - \lambda_2 | LM \rangle \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)C \rangle \\
 &\times (\kappa_{N_1 k_1}^{j_1})^* \left(\beta^{\dagger\Xi; (N', L', 1) LMC} + \beta^{\Xi; (N', L', 1) LMC} \right) (\kappa_{N_2 k_2}^{j_2}) \delta_{f_1 f_2} . \tag{5.6}
 \end{aligned}$$

De esta manera es posible reescribir a $H_q + H_{int}$ en notación matricial

$$\begin{aligned}
 H_q + H_{int} &= \sum_{\mu\nu} \begin{pmatrix} b_{\mu}^{\dagger} & d_{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{\mu} \delta_{\mu\nu} + V_{\mu\nu} c_{\mu} c_{\nu} & -V_{\mu\nu} c_{\mu} s_{\nu} \\ -V_{\mu\nu} s_{\mu} c_{\nu} & \epsilon_{\mu} \delta_{\mu\nu} + V_{\mu\nu} s_{\mu} s_{\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{\nu} \\ d^{\dagger\nu} \end{pmatrix} \\
 &+ 2V_0 \mathcal{C}_2(SU(3)) . \tag{5.7}
 \end{aligned}$$

En lo consiguiente se muestra que el Hamiltoniano es hermitiano, pues dicha comprobación es muy sensible a posibles errores y por ende sirve para detectarlos y eliminarlos. Para llevar a cabo tal prueba se hacen las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
 H_{11} &= \sum_{\mu\nu} V_{\mu\nu} c_{\mu} c_{\nu} b_{\mu}^{\dagger} b^{\nu} , \\
 H_{12} &= - \sum_{\mu\nu} V_{\mu\nu} c_{\mu} s_{\nu} b_{\mu}^{\dagger} d^{\dagger\nu} , \\
 H_{21} &= - \sum_{\mu\nu} V_{\mu\nu} s_{\mu} c_{\nu} d_{\mu} b^{\nu} , \\
 H_{22} &= \sum_{\mu\nu} V_{\mu\nu} s_{\mu} s_{\nu} d_{\mu} d^{\dagger\nu} . \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

De este modo, si se utilizan las identidades [14, 19]

$$\begin{aligned}
 \beta_{(N',L',1)LMC}^{\Xi} + \beta_{(N',L',1)LMC}^{\dagger\Xi} &= (-1)^{L+L'+1+M+\chi_C} \left(\beta^{\Xi(N',L',1)L-M\bar{C}} + \beta^{\dagger\Xi(N',L',1)L-M\bar{C}} \right), \\
 \langle (10)c_2, (01)\bar{c}_1 | (11)C \rangle &= \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)\bar{C} \rangle, \\
 \langle l_1 0, l_2 0 | L' 0 \rangle &= (-1)^{l_1+l_2-L'} \langle l_2 0, l_1 0 | L' 0 \rangle = \langle l_2 0, l_1 0 | L' 0 \rangle, \\
 \langle j_2 \lambda_2, j_1 - \lambda_1 | LM \rangle &= \langle j_1 \lambda_1, j_2 - \lambda_2 | L - M \rangle, \\
 \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & j_1 + \delta_1 & j_1 \\ \frac{1}{2} & j_2 + \delta_2 & j_2 \\ 1 & L' & L \end{Bmatrix} &= (-1)^{j_2+\delta_2+j_2+j_1+\delta_1+j_1+L'+L} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & j_2 + \delta_2 & j_2 \\ \frac{1}{2} & j_1 + \delta_1 & j_1 \\ 1 & L' & L \end{Bmatrix}, \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

es fácil observar que $H_{12}^{\dagger} = H_{21}$ pues

$$\begin{aligned}
 H_{12}^{\dagger} &= -g \sum_{\alpha, k_i, N_i j_i \lambda_i \delta_i f_i \in N' N L' L M C} \sum \int r^2 dr R_{N_1, j_1 + \delta_1}(r) R_{N' L'}(r) R_{N_2, j_2 + \delta_2}(r) \frac{3\alpha_{N' N L' L}^{\Xi}}{\sqrt{4\pi\Omega_N}} \\
 &\times \sqrt{(2j_2 + 2\delta_2 + 1)(2j_2 + 1)(2j_1 + 1)(2j_1 + 2\delta_1 + 1)} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & j_1 + \delta_1 & j_1 \\ \frac{1}{2} & j_2 + \delta_2 & j_2 \\ 1 & L' & L \end{Bmatrix} \\
 &\times (-1)^{\chi_{c_1} - \lambda_1 + \delta_1} \langle j_1 + \delta_1 0, j_2 + \delta_2 0 | L' 0 \rangle \langle j_2 \lambda_2, j_1 - \lambda_1 | LM \rangle \langle (10)c_2, (01)\bar{c}_1 | (11)C \rangle \\
 &\times (\kappa_{N_1 k_1}^{j_1})^* (\kappa_{N_2 k_2}^{j_2}) \cos \left(\Theta_{j_2 - (2\delta_2 \alpha), k_2} - \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\Theta_{j_1 + (2\delta_1 \alpha), k_1} - \left(\frac{1}{2} + \alpha \right) \frac{\pi}{2} \right) \\
 &\times \mathbf{d}_{j_1 + (2\delta_1 \alpha), k_1 j_1 \lambda_1 c_1 f_1} \left(\beta_{(N', L', 1) L M C}^{\Xi} + \beta_{(N', L', 1) L M C}^{\dagger \Xi} \right) \mathbf{b}^{j_2 + (2\delta_2 \alpha), k_2 j_2 \lambda_2 c_2 f_2} \delta_{f_1 f_2}. \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

Tras subir índices se puede renombrar a α por $-\alpha$, M por $-M$ y C por \bar{C} , ya que estos son índices mudos. De este modo resulta que

$$\begin{aligned}
 H_{12}^\dagger &= -g \sum_{\alpha, k_i, N_i j_i \lambda_i \delta_i f_i \in NN'L'LMC} \sum (-1)^{L+L'+1+M+\chi_C} (-1)^{j_2+\delta_2+j_2+j_1+\delta_1+j_1+L'+L} (-1)^{\chi_{c_1}-\lambda_1+\delta_1} \\
 &\times (-1)^{-\chi_{c_2}+\lambda_2-\delta_2} \int r^2 dr R_{N_1, j_1+\delta_1}(r) R_{N'L'}(r) R_{N_2, j_2+\delta_2}(r) \frac{3\alpha_{N'NL'L}^{\Xi}}{\sqrt{4\pi\Omega_N}} \\
 &\times \sqrt{(2j_2+2\delta_2+1)(2j_2+1)(2j_1+1)(2j_1+2\delta_1+1)} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & j_2+\delta_2 & j_2 \\ \frac{1}{2} & j_1+\delta_1 & j_1 \\ 1 & L' & L \end{array} \right\} \\
 &\times (-1)^{\chi_{c_2}-\lambda_2+\delta_2} \langle j_2+\delta_2 0, j_1+\delta_1 0 | L' 0 \rangle \langle j_1 \lambda_1, j_2-\lambda_2 | L-M \rangle \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)\bar{C} \rangle \\
 &\times \left(\kappa_{N_1 k_1}^{j_1} \right)^* \left(\kappa_{N_2 k_2}^{j_2} \right) \cos \left(\Theta_{j_2-(2\delta_2\alpha), k_2} - \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\Theta_{j_1+(2\delta_1\alpha), k_1} - \left(\frac{1}{2} + \alpha \right) \frac{\pi}{2} \right) \\
 &\times \mathbf{d}_{j_1+(2\delta_1\alpha), k_1 j_1 \lambda_1 c_1 f_1} \left(\beta^{\Xi(N', L', 1) L-M\bar{C}} + \beta^{\dagger \Xi(N', L', 1) L-M\bar{C}} \right) \mathbf{b}^{j_2+(2\delta_2\alpha), k_2 j_2 \lambda_2 c_2 f_2} \delta_{f_1 f_2} \\
 &= H_{21} \text{ ,} \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

en donde se ha usado que $(-1)^{\chi_C} = (-1)^{\chi_{c_1}+\chi_{c_2}}$ con $\chi_{c_i} \in \mathbb{Z}$ y que $\lambda_1 - \lambda_2 = -M$ para simplificar la fase que aparece.

$$(-1)^{L+L'+1+M+\chi_C+j_2+\delta_2+j_2+j_1+\delta_1+j_1+L'+L+\chi_{c_1}-\lambda_1+\delta_1-\chi_{c_2}+\lambda_2-\delta_2} = 1 \text{ .} \tag{5.12}$$

De forma semejante se puede probar que $H_{11}^\dagger = H_{11}$ y $H_{22}^\dagger = H_{22}$, por lo que al sumar resulta que $H_{int} = H_{11} + H_{12} + H_{21} + H_{22}$ es hermitiano.

Por otro lado, utilizando las identidades trigonométricas de ángulos complementarios es posible demostrar que

$$\sum_{\alpha=-1/2}^{1/2} c_\mu c_\nu = - \sum_{\alpha=-1/2}^{1/2} s_\mu s_\nu \Rightarrow \sum_{\mu\nu} V_{\mu\nu} c_\mu c_\nu = - \sum_{\mu\nu} V_{\mu\nu} s_\mu s_\nu \text{ ,} \tag{5.13}$$

de modo que los coeficientes de $b_\mu^\dagger b^\nu$ y $d_\mu d^{\dagger\nu}$ difieren únicamente por un signo, lo cual refleja una simetría entre partículas y antipartículas.

5.1. Tratamiento de los operadores bosónicos

Retomando la idea del capítulo 4, se aproxima a los operadores bosónicos por sus valores de expectación tras hacerlos actuar sobre estados coherentes de prueba.

$$\beta^{\Xi(N',L',1)LMC} \longrightarrow \langle \beta^{\Xi(N',L',1)LMC} \rangle = \gamma^{(N',L',1)LM(1,1)C} . \quad (5.14)$$

En la expresión anterior se ha eliminado el índice Ξ por ser redundante y se ha agregado el índice $(1, 1)$ a $\gamma^{(N',L',1)LM(1,1)C}$ para representar el acoplamiento de color.

La manera de definir a los estados coherentes, de acuerdo a la ecuación (4.16), es:

$$|\gamma^{N'L'L(1,1)}\rangle = N_{N'L'L(1,1)} e^{\gamma \cdot \beta^\dagger} |0\rangle , \quad (5.15)$$

donde $\gamma \cdot \beta^\dagger = \sum_{MC} \gamma^{(N',L',1)LM(1,1)C} \beta_{(N',L',1)LMC}^\dagger$ y el factor de normalización $N_{N'L'L(1,1)}$ está dado, según la ecuación (4.19) por

$$N_{N'L'L(1,1)} = e^{-\frac{1}{2}\gamma \cdot \gamma} = e^{-\frac{1}{2} \sum_{MC} \gamma^{(N',L',1)LM(1,1)C} \gamma^{(N',L',1)LM(1,1)C}} , \quad (5.16)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \langle \gamma^{N'L'L(1,1)} | \beta^{(N',L',1)LMC} | \gamma^{N'L'L(1,1)} \rangle &= N_{N'L'L(1,1)}^2 \langle 0 | e^{\gamma \cdot \beta} \beta^{(N',L',1)LMC} e^{\gamma \cdot \beta^\dagger} | 0 \rangle \\ &= N_{N'L'L(1,1)}^2 \gamma^{(N',L',1)LM(1,1)C} \\ &\times \langle 0 | e^{\sum_{MC} \gamma^{(N',L',1)LM(1,1)C} \beta^{(N',L',1)LMC}} \\ &\times e^{\sum_{MC} \gamma^{(N',L',1)LM'(1,1)C'} \beta_{(N',L',1)LM'C'}^\dagger} | 0 \rangle \\ &= \gamma^{(N',L',1)LM(1,1)C} \langle \gamma^{N'L'L(1,1)} | \gamma^{N'L'L(1,1)} \rangle \\ &= \gamma^{(N',L',1)LM(1,1)C} . \end{aligned} \quad (5.17)$$

Como $\gamma^{(N',L',1)LM(1,1)C} \in \mathbb{R}$ por tratarse de un valor de expectación, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \gamma^{N'L'L(1,1)} | \beta_{(N',L',1)LMC} | \gamma^{N'L'L(1,1)} \rangle &= \gamma^{(N',L',1)LM(1,1)C} , \\ \left(\langle \gamma^{N'L'L(1,1)} | \beta_{(N',L',1)LMC}^\dagger | \gamma^{N'L'L(1,1)} \rangle \right)^* &= \gamma^{(N',L',1)LM(1,1)C} . \end{aligned} \quad (5.18)$$

Por otro lado, de la forma de subir los índices a los operadores, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \gamma^{N'L'L(1,1)} | \beta_{(N',L',1)LMC} | \gamma^{N'L'L(1,1)} \rangle &= (-1)^{L+L'+1+M+\chi_C} \gamma^{(N',L',1)L-M(1,1)\bar{C}} , \\ \langle \gamma^{N'L'L(1,1)} | \beta_{(N',L',1)LMC}^\dagger | \gamma^{N'L'L(1,1)} \rangle &= (-1)^{L+L'+1+M+\chi_C} \gamma^{(N',L',1)L-M(1,1)\bar{C}} , \end{aligned} \quad (5.19)$$

por lo cual la suma de operadores bosónicos en H_{int} resulta de la forma

$$\langle \beta^{(N',L',1)LMC} + \beta_{(N',L',1)LMC}^\dagger \rangle = (-1)^{L+L'+1+M+\chi_C} \gamma^{(N',L',1)L-M(1,1)\bar{C}} + \gamma^{(N',L',1)LM(1,1)C} . \quad (5.20)$$

A continuación se explorarán 2 maneras de expresar a $\gamma^{(N',L',1)LM(1,1)C}$.

5.1.1. Caso 1

En el sistema intrínseco del gluón, en el cual hay simetría rotacional en los espacios de espín y color, el valor de expectación no puede depender de la proyección de momento angular (M) ni de los números cuánticos de color (C), de modo que $\gamma^{(N',L',1)LM(1,1)C} = \gamma^{N'L'L(1,1)}$, con lo cual se tendría que

$$\langle \beta^{(N',L',1)LMC} + \beta_{(N',L',1)LMC}^\dagger \rangle = \gamma^{N'L'L(1,1)} [(-1)^{L+L'+1+M+\chi_C} + 1] . \quad (5.21)$$

Es fácil observar que

$$(-1)^{L+L'+1+M+\chi_C} [(-1)^{L+L'+1+M+\chi_C} + 1] = [(-1)^{L+L'+1+M+\chi_C} + 1] , \quad (5.22)$$

por lo cual

$$[(-1)^{L+L'+1+M+\chi_C} + 1] = \begin{cases} 2 & \text{si } L + L' + 1 + M + \chi_C = \text{par} \\ 0 & \text{si } L + L' + 1 + M + \chi_C = \text{impar} \end{cases} , \quad (5.23)$$

de manera que se sigue cumpliendo que $H_{int}^\dagger = H_{int}$, pues la fase que se obtenía de dagnar a los operadores bosónicos según (5.9) -y que se pierde al sustituirles por valores de expectación-, no contribuye por ser siempre par. Además se tiene que

$$\langle \hat{\eta}_\beta \rangle = \sum_{MC} \langle \beta_{(N',L',1)LMC}^\dagger \beta^{(N',L',1)LMC} \rangle = \sum_{MC} (\gamma^{(N',L',1)LM(1,1)C})^2 = (\gamma^{N'L'L(1,1)})^2 (2L+1)(8), \quad (5.24)$$

donde $(2L+1)(8)$ es la dimensión de los espacios de momento angular y de color.

Bajo la suposición fenomenológica de que $\langle \hat{\eta}_\beta \rangle \approx 1$ [5], se tiene que

$$\gamma^{N'L'L(1,1)} = \frac{1}{\sqrt{8(2L+1)}}. \quad (5.25)$$

Es así que la forma final del Hamiltoniano en la base de estados coherentes de bosones para este caso resulta ser

$$H_q + H_{int} = \sum_{\mu\nu} \begin{pmatrix} b_\mu^\dagger & d_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_\mu \delta_{\mu\nu} + V_{\mu\nu} c_\mu c_\nu & -V_{\mu\nu} c_\mu s_\nu \\ -V_{\mu\nu} s_\mu c_\nu & \epsilon_\mu \delta_{\mu\nu} + V_{\mu\nu} s_\mu s_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^\nu \\ d^{\dagger\nu} \end{pmatrix} + 2V_0 \mathcal{C}_2(SU(3)), \quad (5.26)$$

con

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu} &= g \sum_{N'NL'LMC} \int r^2 dr R_{N_1, j_1 + \delta_1}(r) R_{N'L'}(r) R_{N_2, j_2 + \delta_2}(r) \frac{3\alpha_{N'NL'L}^{\Xi}}{\sqrt{4\pi\Omega_N}} \frac{1}{\sqrt{8(2L+1)}} \\ &\times \sqrt{(2j_2 + 2\delta_2 + 1)(2j_2 + 1)(2j_1 + 1)(2j_1 + 2\delta_1 + 1)} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & j_2 + \delta_2 & j_2 \\ \frac{1}{2} & j_1 + \delta_1 & j_1 \\ 1 & L' & L \end{Bmatrix} \\ &\times (-1)^{\chi_{c_2} - \lambda_2 + \delta_2} \langle j_2 + \delta_2 0, j_1 + \delta_1 0 | L' 0 \rangle \langle j_1 \lambda_1, j_2 - \lambda_2 | LM \rangle \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)C \rangle \\ &\times (\kappa_{N_1 k_1}^{j_1})^* [(-1)^{L+L'+1+M+\chi_C} + 1] (\kappa_{N_2 k_2}^{j_2}) \delta_{f_1 f_2}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

De esta manera es posible calcular todos los elementos de matriz de la ecuación (5.26) necesarios para construir el Hamiltoniano a diagonalizar.

5.1.2. Caso 2

En el modelo semifenomenológico conocido como el *Vacío de Espagueti* se tiene que los tubos de flujo cromomagnético no son paralelos entre sí, sino que cambian su orientación sobre regiones espaciales largas, lo cual garantiza invarianza de Lorentz tras promediar sobre dominios espaciales suficientemente grandes [12]. De esta manera se propone la dirección preferencial local $\gamma^{(N',L',1)LM(1,1)YIz} = \delta_{M0}\delta_{Y0}\delta_{Iz0}\delta_{I1}\gamma^{N'L'L(1,1)}$. En este caso [5]

$$\langle \hat{\eta}_\beta \rangle = \sum_{MC} \langle \beta_{(N',L',1)LMC}^\dagger \beta^{(N',L',1)LMC} \rangle = \sum_{MC} (\gamma^{(N',L',1)LM(1,1)C})^2 = (\gamma^{N'L'L(1,1)})^2 \approx 1. \quad (5.28)$$

Sin embargo, dicho caso no es analizado en el presente documento por requerir una modificación general al modelo, que es la introducción del campo magnético proporcional a la coordenada espacial preferencial [12].

Capítulo 6

Resultados y Conclusiones

Para obtener los elementos de matriz mostrados en (5.27) se usó el valor $\alpha = 0,92$ para la constante de acoplamiento ($g = 3,4$.)

Se utilizó el programa en *Mathematica* mostrado en [1], para calcular los elementos de matriz $(\kappa_{N_i k_i}^{j_i})$ de la transformación $\alpha\beta$, las energías propias para un número arbitrario de niveles orbitales en el sector de quarks, y los ángulos de Bogoliubov que identifican a la transformación BCS.

A dicho programa se le agregó el cálculo de la integral sobre funciones radiales $R_{N_l}(r)$ utilizando la identidad en términos de los polinomios de Laguerre [22]

$$\begin{aligned} \int r^2 dr R_{N_1 l_1}(r) R_{N_2 l_2}(r) R_{N_3 l_3}(r) &= \int_0^\infty r^{l_1+l_2+l_3+2} e^{-\frac{3}{2}\gamma r^2} dr \prod_{i=1}^3 L_{N_i}^{l_i+\frac{1}{2}}(\gamma r^2) \\ &= \frac{1}{2} \gamma^{\frac{3}{4}} \int_0^\infty \prod_{i=1}^3 \left\{ \left[\frac{2(N_i!)}{\Gamma(N_i + l_i + \frac{3}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} L_{N_i}^{l_i+\frac{1}{2}}(x) \right\} \\ &\times x^{\frac{1}{2}(l_1+l_2+l_3+1)} e^{-\frac{3}{2}x} dx \end{aligned} \quad (6.1)$$

con el valor de $\sqrt{\gamma} = 0,3287 \text{ GeV}$, que es el mismo ancho del oscilador armónico tridimensional utilizado al prediagonalizar el sector de quarks según la ecuación (A.28).

Se agregaron también las rutinas de Draayer [23] para calcular los diferentes coeficientes CG y el 9-J.

Energía BCS / espín	$\epsilon_{1j}(GeV)$	$\epsilon_{2j}(GeV)$	θ_{1j} (rad)	θ_{2j} (rad)
1/2	0.315	0.664	0.7727	0.7793
3/2	0.519	-	0.7777	-
5/2	0.614	-	0.7788	-

Cuadro 6.1: Energías y ángulos obtenidos de la diagonalización del sector de quarks H_q para un sistema de 4 niveles.

Una vez dados todos los elementos que requiere el cálculo de (5.27) se procedió a resolver un sistema de 4 niveles, que corresponde a truncar los números cuánticos de los quarks en $j = 5/2$ y $k = 2$ ($N = 4$), lo cual representa diagonalizar una matriz de 84×84 . Sólo se considera el estado $L' = 0$, $L = 1$, por lo que de acuerdo a (5.25), se utiliza $\gamma^{N'L'L(1,1)} = \frac{1}{\sqrt{24}} = 0,204$.

En este sistema se calcula una energía entre 0,04 y 0,54 GeV para un sólo quark en el estado de menor energía ($k = 1$ y $j = 1/2$), por lo cual la degeneración en sabor del modelo predice mesones con energía entre 0,08 y 1,08 GeV y bariones con energía entre 0,12 y 1,62 GeV . Por otro lado, en el Apéndice C se motiva una energía para el *glueball* (dos gluones acoplados a color cero) de 1,47 GeV .

Es posible extender el cálculo a un mayor número de estados, recordando que la magnitud de la matriz a diagonalizar crece rápidamente conforme crecen los grados de libertad.

En la figura 6.1 se grafican las energías BCS correspondientes al término H_q (mostradas el cuadro 6.1) y se comparan con los resultados numéricos obtenidos al agregar la interacción gluónica $H_q + H_{int}$.

En dicha figura las cajas representan el desdoblamiento de niveles debido a la interacción. Se puede notar que a mayor momento angular total j , el desdoblamiento de los niveles es menor, hasta ser despreciable para $j = 5/2$. Como sería de esperarse, el desdoblamiento de niveles mostrado resulta mayor para valores mayores de la constante global g .

El uso de estados coherentes introduce una base que no tiene color ni momento angular total bien definidos en cada estado desdoblado. Sin embargo, en la figura 6.1 sólo se muestran

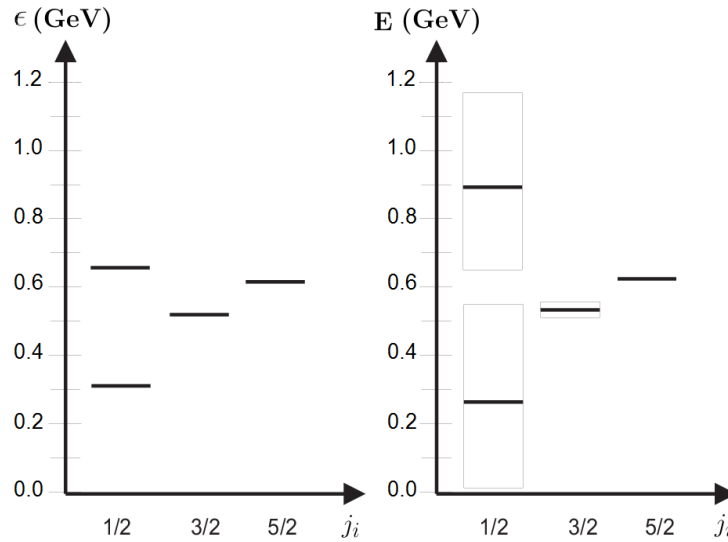


Figura 6.1: A la izquierda se grafica el espectro de energía de un solo quark ϵ correspondiente al cuadro 6.1. A la derecha, la energía correspondiente E tras introducir la interacción H_{int} .

los estados con momento angular total bien definido $\sqrt{\langle J^2 \rangle - \langle J \rangle^2} \approx 0$.

El problema de tener un fondo con color se pretende solucionar a futuro utilizando el hecho de que en el modelo trabajado, el término coulombiano actúa como un operador de Casimir de $SU(3)$, el cual separa los estados con color de los estados sin color (estados físicos.)

Recuperar el momento angular bien definido puede conseguirse mediante el uso de multiplicadores de Lagrange, posibilidad cuya exploración representa el paso siguiente a dar en el modelo.

En conclusión, se consiguió exitosamente repetir los cálculos mostrados en [1] e implementar la base de oscilador armónico tridimensional al Hamiltoniano de interacción H_{int} para quarks y gluones por igual. Más aún, se propusieron formas de tratamiento para los operadores bosónicos de dicho término de interacción, lo cual es importante para en el futuro manipular potencias mayores de los campos gluónicos, como lo es el término $\mathbf{B}^a \cdot \mathbf{B}^a$ mostrado en (2.4).

Se logró además diagonalizar a un Hamiltoniano efectivo para encontrar el espectro semi-

analítico de los niveles de energía, aun cuando el proceso de diagonalización transforma a la base original en una que no tiene color ni momento angular total bien definidos, razón por la cual los resultados mostrados en el presente documento deben considerarse como una primera aproximación de prueba.

Se debe a su vez mantener en mente los objetivos a futuro de proyecto, que es la minimización de la energía respecto al valor de expectación de los gluones, reducir el número de parámetros requeridos por el modelo y dar tratamiento a los términos de interacción a ordenes mayores.

Apéndice A

Deducción del Término Cinético de Cuarks

El objetivo del presente Apéndice es presentar, con el mayor detalle posible, el desarrollo matemático que lleva a deducir el término cinético del Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica, corroborando así los resultados mostrados en la referencia [1] dado el término cinético de quarks presentado a continuación.

$$\mathbf{K} = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla}] \psi(\mathbf{r}) , \quad (\text{A.1})$$

donde $\psi^\dagger = (\psi_1^\dagger(\mathbf{r}, \sigma_1, c_1, f_1), \psi_2^\dagger(\mathbf{r}, \sigma_1, c_1, f_1))$ y $\boldsymbol{\alpha}$ se relaciona con las Matrices de Dirac como se muestra en (2.9), entonces

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(\mathbf{r}) [\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla}] \psi(\mathbf{r}) &= \begin{pmatrix} \psi_1^\dagger & \psi_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \\ &= \psi_1^\dagger(\mathbf{r}) [\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}] \psi_2(\mathbf{r}) + \psi_2^\dagger(\mathbf{r}) [\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}] \psi_1(\mathbf{r}) , \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ son las matrices de Pauli en coordenadas esféricas, de modo que

$$\mathbf{K} = -i \int d\mathbf{r} \left[\psi_1^\dagger(\mathbf{r}, \sigma', c', f') [\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}] \psi_2(\mathbf{r}, \sigma, c, f) + \psi_2^\dagger(\mathbf{r}, \sigma', c', f') [\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}] \psi_1(\mathbf{r}, \sigma, c, f) \right]. \quad (\text{A.3})$$

Como

$$\psi_{1,2}^\dagger(\mathbf{r}, \sigma, c, f) = \sum_{Nlm\sigma cf} \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}, Nlm, \sigma cf}^\dagger R_{Nl}^*(r) Y_{lm}^*(\hat{r}) \chi_\sigma^\dagger, \quad (\text{A.4})$$

donde $\mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}, Nlm, \sigma cf}^\dagger$ es el operador de creación de un quark con pseudo-espín $\pm\frac{1}{2}$, número cuántico principal N , momento angular l , número cuántico magnético m , espín σ , color c y sabor f . $R_{Nl}(r)$ es la parte radial del oscilador armónico tridimensional, mientras que $Y_{lm}(\hat{r})$ son los armónicos esféricos como función de los ángulos subtendidos por el vector director $\hat{r} = (\Theta, \Phi)$; y χ_σ es la función espinorial correspondiente a espín σ .

Y dando por conocidas las relaciones [11, 19]

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla]_{\sigma', \sigma} &= (-1)^{1+\mu+\frac{1}{2}+\sigma} \sqrt{2} \langle \frac{1}{2} \sigma', \frac{1}{2} - \sigma | 1 - \mu \rangle \nabla_\mu, \\ \langle l' m' | \nabla_\mu | l m \rangle &= \sqrt{\frac{l+1}{2l+3}} \langle l m, 1 \mu | l+1, m' \rangle \left(\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right) \delta_{l', l-1} \\ &\quad - \sqrt{\frac{l}{2l-1}} \langle l m, 1 \mu | l-1, m' \rangle \left(\frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r} \right) \delta_{l', l+1}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

se encuentra que

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r} \psi_1^\dagger [\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla] \psi_2 &= \int d\mathbf{r} \sum_{Nlm\sigma cf N'l'm'\sigma'} \mathbf{b}_{\frac{1}{2}, N'l'm'\sigma' cf}^\dagger R_{N'l'}^* Y_{l'm'}^* [\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla]_{\sigma', \sigma} \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}, Nlm\sigma cf} R_{Nl} Y_{lm} \\ &= \sum_{Nlm\sigma cf N'l'm'\sigma' \mu} (-1)^{1+\mu+\frac{1}{2}+\sigma} \sqrt{2} \langle \frac{1}{2} \sigma', \frac{1}{2} - \sigma | 1 - \mu \rangle \\ &\quad \times \mathbf{b}_{\frac{1}{2}, N'l'm'\sigma' cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}, Nlm\sigma cf} \int d\mathbf{r} R_{N'l'}^* Y_{l'm'}^* \nabla [R_{Nl} Y_{lm}]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Identificando

$$\int d\mathbf{r} R_{N'l'}^*(r) Y_{l'm'}^*(\Omega) \nabla [R_{Nl}(r) Y_{lm}(\Omega)] = \int r^2 dr R_{N'l'}^*(r) \langle l' m' | \nabla_\mu | l m \rangle R_{Nl}(r), \quad (\text{A.7})$$

se tiene que de la relación (A.5)

$$-i \int d\mathbf{r} \psi_1^\dagger [\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla] \psi_2 = -i \sum_{Nlm\sigma cf N'l'm'\sigma' \mu} (-1)^{1+\mu+\frac{1}{2}+\sigma} \sqrt{2} \langle \frac{1}{2} \sigma', \frac{1}{2} - \sigma | 1 - \mu \rangle$$

$$\begin{aligned}
 & \times \mathbf{b}_{\frac{1}{2}N'l'm'\sigma'cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}Nlm\sigma cf} \int r^2 dr R_{N'l'}^*(r) \\
 & \times \left[\sqrt{\frac{l+1}{2l+3}} \langle lm, 1\mu | l+1, m' \rangle \left(\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right) \delta_{l', l-1} \right. \\
 & \left. - \sqrt{\frac{l}{2l-1}} \langle lm, 1\mu | l-1, m' \rangle \left(\frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r} \right) \delta_{l', l+1} \right] R_{Nl}(r) \\
 & := \mathbf{K}_{12} .
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

O bien, en la representación acoplada de los operadores de creación-anihilación

$$\mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}Nlm\sigma cf}^\dagger = \sum_{j\lambda} \langle lm, \frac{1}{2}\sigma | j\lambda \rangle \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}(N, l, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger , \tag{A.9}$$

donde $j, \lambda \in \mathbb{Z}/2$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{12} &= -i \sum_{Nlm\sigma j\lambda N'l'm'\sigma'j'\lambda'\mu cf} (-1)^{1+\mu+\frac{1}{2}+\sigma} \sqrt{2} \langle l'm', \frac{1}{2}\sigma' | j'\lambda' \rangle \langle lm, \frac{1}{2}\sigma | j\lambda \rangle \langle \frac{1}{2}\sigma', \frac{1}{2} - \sigma | 1 - \mu \rangle \\
 & \times \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N', l', \frac{1}{2})j'\lambda' cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N, l, \frac{1}{2})j\lambda cf} \int r^2 dr R_{N'l'}^*(r) \left[\sqrt{\frac{l+1}{2l+3}} \langle lm, 1\mu | l+1, m' \rangle \left(\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right) \delta_{l', l-1} \right. \\
 & \left. - \sqrt{\frac{l}{2l-1}} \langle lm, 1\mu | l-1, m' \rangle \left(\frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r} \right) \delta_{l', l+1} \right] R_{Nl}(r) .
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Utilizando las relaciones para transformar Clebsch-Gordan en 3j y 3j a 6j que se muestran a continuación [19, 21]

$$\begin{aligned}
 \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle &= (-1)^{j_1 - j_2 - m_3} \sqrt{2j_3 + 1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} , \\
 \sum_{\kappa\psi\rho\sigma\tau} (-1)^\Phi & \begin{pmatrix} p & a & q \\ \psi & -\alpha & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & r & t \\ -\kappa & \rho & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & a' & s \\ -\rho & \alpha' & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & p & t \\ -\sigma & -\psi & -\tau \end{pmatrix} \\
 &= \frac{(-1)^{a-\alpha}}{2a+1} \left\{ \begin{matrix} q & p & a \\ s & r & t \end{matrix} \right\} \delta_{aa'} \delta_{\alpha\alpha'} , \\
 \Phi &= p + q + r + s + t - \kappa - \psi - \rho - \sigma - \tau ,
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

se tiene que un segmento de la suma en el primer término de (A.10) es

$$\begin{aligned}
 & \sum_{mm'\sigma'\mu} (-1)^{1+\mu+\frac{1}{2}+\sigma} \langle l'm', \frac{1}{2}\sigma' | j'\lambda' \rangle \langle lm, \frac{1}{2}\sigma | j\lambda \rangle \langle \frac{1}{2}\sigma', \frac{1}{2} - \sigma | 1 - \mu \rangle \langle lm, 1\mu | l+1, m' \rangle \\
 = & \sum_{mm'\sigma'\mu} (-1)^{l-1-m'} \sqrt{2l'+1} \begin{pmatrix} l & 1 & l' \\ m & \mu & -m' \end{pmatrix} (-1)^{l'-\frac{1}{2}-\lambda'} \sqrt{2j'+1} \begin{pmatrix} l' & \frac{1}{2} & j' \\ m' & \sigma' & -\lambda' \end{pmatrix} \\
 \times & (-1)^{l-\frac{1}{2}-\lambda} \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} l & \frac{1}{2} & j \\ m & \sigma & -\lambda \end{pmatrix} (-1)^{\frac{1}{2}+\mu-\frac{1}{2}} \sqrt{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \sigma' & -\sigma & \mu \end{pmatrix} (-1)^{1+\mu+\frac{1}{2}+\sigma} \\
 = & \sum_{mm'\sigma'\mu} (-1)^{-\frac{1}{2}-\lambda+l'-\lambda'-m'+\sigma} \sqrt{2l'+1} \sqrt{2j'+1} \sqrt{2j+1} \sqrt{3} \\
 \times & \begin{pmatrix} l & \frac{1}{2} & j \\ m & \sigma & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & 1 & l' \\ m & \mu & -m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l' & \frac{1}{2} & j' \\ m' & \sigma' & -\lambda' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \sigma' & -\sigma & \mu \end{pmatrix} \\
 = & \sum_{mm'\sigma'\mu} (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma+l-m+l'-m'+\frac{1}{2}+\sigma'+1+\mu} \sqrt{2l'+1} \sqrt{2j'+1} \sqrt{2j+1} \sqrt{3} \\
 \times & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & j & l \\ \sigma & -\lambda & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l' & 1 \\ -m & m' & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l' & j' & \frac{1}{2} \\ -m' & \lambda' & -\sigma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \sigma' & -\sigma & \mu \end{pmatrix} \\
 \times & (-1)^{-\frac{1}{2}+\sigma-l+m+l'-m'+\frac{1}{2}+\sigma'+1+\mu} (-1)^{-\frac{1}{2}-\lambda+l'-\lambda'-m'+\sigma} \\
 = & (-1)^\phi \sqrt{2l'+1} \sqrt{2j'+1} \sqrt{2j+1} \sqrt{3} \frac{(-1)^{j-\lambda}}{2j+1} \begin{Bmatrix} l' & \frac{1}{2} & j' \\ \frac{1}{2} & l & 1 \end{Bmatrix} \delta_{jj'} \delta_{\lambda\lambda'} .
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} l' & \frac{1}{2} & j' \\ m' & \sigma' & -\lambda' \end{pmatrix} & \Rightarrow m' + \sigma' = \lambda' \Rightarrow \lambda' - \sigma' = m' , \\
 \begin{pmatrix} l & 1 & l' \\ m & \mu & -m' \end{pmatrix} & \Rightarrow m + \mu = m' \Rightarrow m' - \mu = m ,
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

por lo cual la fase $\phi = -\frac{1}{2} + \sigma - l + m + l' - m' + \frac{1}{2} + \sigma' + 1 + \mu - \frac{1}{2} - \lambda + l' - \lambda' - m' + \sigma$, tras hacer los cambios $-\frac{1}{2} + \sigma \rightarrow +\frac{1}{2} - \sigma$ y $-\lambda - \lambda' \rightarrow \lambda + \lambda'$ y simplificar, es equivalente a

la fase $-\frac{1}{2} - l + m - \sigma' - \mu + \lambda + \lambda' = \frac{1}{2} - l + m + m' - \mu + \lambda = \frac{1}{2} - l + \lambda$ de manera que

$$\begin{aligned} & (-1)^\phi \sqrt{2l'+1} \sqrt{2j'+1} \sqrt{2j+1} \sqrt{3} \frac{(-1)^{j-\lambda}}{2j+1} \begin{Bmatrix} l' & \frac{1}{2} & j' \\ \frac{1}{2} & l & 1 \end{Bmatrix} \delta_{jj'} \delta_{\lambda\lambda'} \\ & = (-1)^{\frac{1}{2}-l+\lambda} (-1)^{j-\lambda} \sqrt{2l'+1} \sqrt{3} \frac{\sqrt{2j'+1}}{\sqrt{2j+1}} \begin{Bmatrix} l' & \frac{1}{2} & j' \\ \frac{1}{2} & l & 1 \end{Bmatrix} \delta_{jj'} \delta_{\lambda\lambda'}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Al sumar sobre j' se encuentra finalmente que el segmento de la suma en el primer término de (A.10) es

$$\begin{aligned} & \sum_{mm'\sigma\sigma'\mu j'} (-1)^{1+\mu+\frac{1}{2}+\sigma} \langle l'm', \frac{1}{2}\sigma'|j'\lambda'\rangle \langle lm, \frac{1}{2}\sigma|j\lambda\rangle \langle \frac{1}{2}\sigma', \frac{1}{2}-\sigma|1-\mu\rangle \langle lm, 1\mu|l+1, m'\rangle \\ & = (-1)^{j-l+\frac{1}{2}} \sqrt{3} \sqrt{2l'+1} \begin{Bmatrix} l' & \frac{1}{2} & j \\ \frac{1}{2} & l & 1 \end{Bmatrix} \delta_{\lambda\lambda'}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Se debe notar que ambos términos de (A.10) tienen los mismos coeficientes Clebsch-Gordan, por lo que la igualdad (A.15) es válida en ambos casos, pero se ha de notar que en el primero de ellos $l' = l + 1$, mientras que en el segundo $l' = l - 1$.

De acuerdo a [21], el coeficiente 6j de Wigner satisface que

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} & |j_1 - j_2| \leq j_{12} \leq j_1 + j_2 \\ & |j_3 - j_2| \leq j_{23} \leq j_3 + j_2 \\ & |j_1 + J| \leq j_{23} \leq j_1 + J \\ & |j_3 + J| \leq j_{12} \leq j_3 + J \end{aligned} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

por lo que se encuentra que

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} l+1 & \frac{1}{2} & j \\ \frac{1}{2} & l & 1 \end{Bmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} & |l + \frac{1}{2}| \leq j \leq l + \frac{3}{2} \\ & |l - \frac{1}{2}| \leq j \leq l + \frac{1}{2} \end{aligned} \Leftrightarrow j = l + \frac{1}{2}, \\ & \begin{Bmatrix} l-1 & \frac{1}{2} & j \\ \frac{1}{2} & l & 1 \end{Bmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} & |l - \frac{3}{2}| \leq j \leq |l - \frac{1}{2}| \\ & |l - \frac{1}{2}| \leq j \leq l + \frac{1}{2} \end{aligned} \Leftrightarrow j = l - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Se usa luego la relación en [19]

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & b & b+1 \\ d & c & c \end{array} \right\} = (-1)^{1+b+c+d} \sqrt{\frac{(1+b+c-d)(1+b-c+d)(-b+c+d)(2+b+c+d)}{4c(1+2b)(1+b)(3+2b)(1+2c)(1+c)}} \quad (\text{A.18})$$

para determinar que

$$\begin{aligned} l' = l + 1 = j + \frac{1}{2} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} l+1 & \frac{1}{2} & l+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & l & 1 \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{2l+3}{6(l+1)(2l+3)}}, \\ l' = l - 1 = j - \frac{1}{2} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} l-1 & \frac{1}{2} & l-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & l & 1 \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{2l+1}{6l(2l-1)}}, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

de manera que el primero de los llamados *factores de intensidad* en la ecuación (A.10) se obtiene simplemente tras sustituir las condiciones $l = j - \frac{1}{2}$ y $l' = l + 1 = j + \frac{1}{2}$, es decir

$$\int r^2 dr R_{N'l'}^*(r) \left(\frac{d}{dr} - \frac{l'}{r} \right) R_{N'l}(r) = \int r^2 dr R_{N'j+\frac{1}{2}}^*(r) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-\frac{1}{2}}{r} \right) R_{N'j-\frac{1}{2}}(r), \quad (\text{A.20})$$

mientras que el segundo se obtiene tras observar que la identidad

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 R_{N'j-\frac{1}{2}}^*(r) R_{Nj+\frac{1}{2}}(r) \right) = 2r R_{N'j-\frac{1}{2}}^* R_{Nj+\frac{1}{2}} + r^2 \frac{dR_{N'j-\frac{1}{2}}^*}{dr} R_{Nj+\frac{1}{2}} + r^2 R_{N'j-\frac{1}{2}}^* \frac{dR_{Nj+\frac{1}{2}}}{dr} \quad (\text{A.21})$$

implica que

$$\begin{aligned} \int r^2 dr R_{N'j-\frac{1}{2}}^* \frac{dR_{Nj+\frac{1}{2}}}{dr} &= \int dr \frac{d}{dr} \left(r^2 R_{N'j-\frac{1}{2}}^*(r) R_{Nj+\frac{1}{2}}(r) \right) - \int dr 2r R_{N'j-\frac{1}{2}}^* R_{Nj+\frac{1}{2}} \\ &\quad - \int r^2 dr \frac{dR_{N'j-\frac{1}{2}}^*}{dr} R_{Nj+\frac{1}{2}} \\ &= - \int r^2 dr R_{N'j-\frac{1}{2}}^* \frac{2}{r} R_{Nj+\frac{1}{2}} - \int r^2 dr R_{Nj+\frac{1}{2}} \frac{d}{dr} R_{N'j-\frac{1}{2}}^*, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

puesto que

$$\int dr \frac{d}{dr} \left(r^2 R_{N'j-\frac{1}{2}}^*(r) R_{Nj+\frac{1}{2}}(r) \right) = r^2 R_{N'j-\frac{1}{2}}^*(r) R_{Nj+\frac{1}{2}}(r) \Big|_0^\infty = 0. \quad (\text{A.23})$$

Por lo cual, al sustituir las condiciones $l = j + \frac{1}{2}$ y $l' = l - 1 = j - \frac{1}{2}$ se encuentra que

$$\begin{aligned}
 \int r^2 dr R_{N'l'}^*(r) \left(\frac{d}{dr} + \frac{l+1}{r} \right) R_{Nl}(r) &= \int r^2 dr R_{N'j-\frac{1}{2}}^* \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+\frac{3}{2}}{r} \right) R_{Nj+\frac{1}{2}} \\
 &= - \int r^2 dr R_{N'j-\frac{1}{2}}^* \frac{2}{r} R_{Nj+\frac{1}{2}} - \int r^2 dr R_{Nj+\frac{1}{2}} \frac{d}{dr} R_{N'j-\frac{1}{2}}^* \\
 &\quad + \int r^2 dr R_{N'j-\frac{1}{2}}^* \frac{j+\frac{3}{2}}{r} R_{Nj+\frac{1}{2}} \\
 &= - \int r^2 dr R_{Nj+\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} - \frac{j+\frac{3}{2}}{r} \right) R_{N'j-\frac{1}{2}}^* \\
 &= - \int r^2 dr R_{Nj+\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-\frac{1}{2}}{r} \right) R_{N'j-\frac{1}{2}}^* . \quad (\text{A.24})
 \end{aligned}$$

Reescribiendo juntas a las ecuaciones (A.20) y (A.24)

$$\begin{aligned}
 \int r^2 dr R_{N'l'}^*(r) \left(\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right) R_{Nl}(r) &= \int r^2 dr R_{Nj+\frac{1}{2}}^*(r) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-\frac{1}{2}}{r} \right) R_{N'j-\frac{1}{2}}(r) , \\
 \int r^2 dr R_{N'l'}^*(r) \left(\frac{d}{dr} + \frac{l+1}{r} \right) R_{Nl}(r) &= - \int r^2 dr R_{Nj+\frac{1}{2}}(r) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-\frac{1}{2}}{r} \right) R_{N'j-\frac{1}{2}}^*(r) , \quad (\text{A.25})
 \end{aligned}$$

es sencillo observar que los términos a la derecha de la igualdad son complejos conjugados entre sí salvo por una fase. Por lo que definiendo

$$k_{NN'}^j = i \int r^2 dr R_{N(j+\frac{1}{2})}^*(r) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-\frac{1}{2}}{r} \right) R_{N'(j-\frac{1}{2})}(r) , \quad (\text{A.26})$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
 i \int r^2 dr R_{N'l'}^*(r) \left(\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right) R_{Nl}(r) &= k_{NN'}^j , \\
 i \int r^2 dr R_{N'l'}^*(r) \left(\frac{d}{dr} + \frac{l+1}{r} \right) R_{Nl}(r) &= (k_{NN'}^j)^* . \quad (\text{A.27})
 \end{aligned}$$

Se debe notar que los factores de intensidad $k_{NN'}^j$ y $(k_{NN'}^j)^*$ dependen de la base que se utilice en la expansión de los campos fermiónicos. En particular, para el oscilador armónico tridimensional $R_{nl}(r) = N_{nl} \exp(-\frac{\gamma r^2}{2}) r^l L_n^{l+\frac{1}{2}}(\gamma r^2)$ como función radial, es posible demostrar

mediante las relaciones de recurrencia de los polinomios de Laguerre [2] que

$$k_{NN'}^j = -i\gamma \frac{N_{n'l}}{N_{n',l+1}} \delta_{n,n'-1} \delta_{l',l+1} - i\gamma \frac{N_{n'l}}{N_{n',l+1}} \delta_{n,n'} \delta_{l',l+1} . \quad (\text{A.28})$$

Por último, al sustituir las ecuaciones (A.15), (A.19) y (A.27) en (A.10) se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{12} &= \sum_{NN'j\lambda cf} k_{NN'}^j \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \\ &+ \sum_{NN'j\lambda cf} (k_{NN'}^j)^* \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} . \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

De la ecuación (A.4) es posible observar que el intercambiar los índices 1 y 2 de $\psi_{1,2}^\dagger$ es equivalente a hacer el intercambio $\frac{1}{2} \leftrightarrow -\frac{1}{2}$ en los índices de pseudo-espín, por lo que siguiendo una metodología por completo análoga a la antes expuesta, es posible determinar que

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{21} := -i \int d\mathbf{r} \psi_2^\dagger [\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla] \psi_1 &= \sum_{NN'j\lambda cf} k_{NN'}^j \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \\ &+ \sum_{NN'j\lambda cf} (k_{NN'}^j)^* \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} . \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Finalmente, de sustituir las últimas dos expresiones en (A.3) se concluye que

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{21} \\ &= \sum_{NN'j\lambda cf} k_{NN'}^j \left[\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right] \\ &+ \sum_{NN'j\lambda cf} (k_{NN'}^j)^* \left[\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right] . \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Se puede observar que la aplicación del término cinético en algún estado de la representación de Dirac tendrá las siguientes implicaciones. Por un lado, la aniquilación de una partícula de pseudo-espín negativo (energía negativa) y la creación de una partícula con pseudo-espín positivo (energía positiva). Por otro lado, el segundo término de la ecuación (A.31), hace la operación inversa. Por tanto, si se parte de un estado en la representación de Dirac, donde todos los estados de energía negativa esten llenos (vacío perturbativo), esta última aplicación dará cero.

Es por ello que se puede identificar a \mathbf{K}_{12} con un operador de ascenso $\mathbf{K}_+ = \mathbf{K}_{12}$, y a \mathbf{K}_{21} con un operador de descenso $\mathbf{K}_- = \mathbf{K}_{21}$. Con las expresiones para \mathbf{K}_+ y \mathbf{K}_- obtenidas de identificar los términos en (A.31) es posible calcular su conmutador y definir así a un nuevo operador \mathbf{K}_0 como $2\mathbf{K}_0 = [\mathbf{K}_+, \mathbf{K}_-]$ y es fácil demostrar que para los casos de 2 y 3 niveles, los operadores \mathbf{K}_+ , \mathbf{K}_- y \mathbf{K}_0 satisfacen un álgebra de $SU(2)$.

Apéndice B

Hamiltoniano de Coulomb Efectivo

En el presente apéndice se muestra con detalle el desarrollo llevado a cabo en [1] en el cual se utiliza un potencial constante para aproximar el término coulombiano en el hamiltoniano motivado que se trabaja en los capítulos anteriores.

Del capítulo 2 se tenía que

$$H_{Coulomb}^{q-q} = \frac{1}{2}g^2 \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \rho^a(\mathbf{r}) \langle a\mathbf{r} | \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} (-\nabla^2) \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} | a'\mathbf{r}' \rangle \rho^{a'}(\mathbf{r}') . \quad (\text{B.1})$$

Dicho potencial de interacción es bastante complicado, sin embargo, se han hecho esfuerzos para tratar de entenderlo [6], mostrando que dicho potencial podría explicar el fenómeno de confinamiento con la desventaja de que el desarrollo es muy elaborado y poco ilustrativo.

Otra posibilidad es considerar un potencial estático de interacción entre las densidades de carga y que sólo dependa de la posición de cada una de las densidades de carga interactuantes. Un ejemplo de ello es el potencial de la forma $-\frac{a}{r} + br$, que es fenomenológicamente satisfactorio y confinante [7, 8].

En cambio, si se utiliza un potencial de interacción que dependa únicamente de la posición $V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$, el Hamiltoniano de Coulomb toma la forma

$$\begin{aligned} H_{Coulomb}^{q-q} &= \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \rho^a(\mathbf{r}) V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \rho^{a'}(\mathbf{r}') \\ &= \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \sum_C \psi^\dagger(\mathbf{r}) T_C \psi(\mathbf{r}) V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \psi^\dagger(\mathbf{r}') T^C \psi(\mathbf{r}') , \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

donde $\boldsymbol{\psi}^\dagger = \left(\psi_1^\dagger(\mathbf{r}, \sigma_1, c_1, f_1), \psi_2^\dagger(\mathbf{r}, \sigma_1, c_1, f_1) \right)$ y T_C es el generador de color.

Si se utilizan las expresiones para ψ_1 y ψ_2 dadas por (A.4) y haciendo la distinción en los índices de cada entrada de $\boldsymbol{\psi}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\psi}^\dagger(\mathbf{r})T_C\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) &= \left(\begin{array}{c} \sum_{N_1l_1m_1\sigma_1c_1f_1} \mathbf{b}_{+\frac{1}{2},N_1l_1m_1,\sigma_1c_1f_1}^\dagger R_{N_1l_1}^*(r)Y_{l_1m_1}^*(\hat{r})\chi_{\sigma_1}^\dagger \\ \sum_{N_1l_1m_1\sigma_1c_1f_1} \mathbf{b}_{-\frac{1}{2},N_1l_1m_1,\sigma_1c_1f_1}^\dagger R_{N_1l_1}^*(r)Y_{l_1m_1}^*(\hat{r})\chi_{\sigma_1}^\dagger \end{array} \right)^T \\
 &\times T_C \left(\begin{array}{c} \sum_{N_2l_2m_2\sigma_2c_2f_2} \mathbf{b}_{+\frac{1}{2},N_2l_2m_2,\sigma_2c_2f_2} R_{N_2l_2}(r)Y_{l_2m_2}(\hat{r})\chi_{\sigma_2} \\ \sum_{N_2l_2m_2\sigma_2c_2f_2} \mathbf{b}_{-\frac{1}{2},N_2l_2m_2,\sigma_2c_2f_2} R_{N_2l_2}(r)Y_{l_2m_2}(\hat{r})\chi_{\sigma_2} \end{array} \right) \\
 &= \sum_{N_1l_1m_1\sigma_1c_1f_1} \sum_{N_2l_2m_2\sigma_2c_2f_2} \mathbf{b}_{+\frac{1}{2},N_1l_1m_1,\sigma_1c_1f_1}^\dagger T_C \mathbf{b}_{+\frac{1}{2},N_2l_2m_2,\sigma_2c_2f_2} \\
 &\times R_{N_1l_1}^*(r)Y_{l_1m_1}^*(\hat{r})R_{N_2l_2}(r)Y_{l_2m_2}(\hat{r})\chi_{\sigma_1}^\dagger\chi_{\sigma_2} \\
 &+ \sum_{N_1l_1m_1\sigma_1c_1f_1} \sum_{N_2l_2m_2\sigma_2c_2f_2} \mathbf{b}_{-\frac{1}{2},N_1l_1m_1,\sigma_1c_1f_1}^\dagger T_C \mathbf{b}_{-\frac{1}{2},N_2l_2m_2,\sigma_2c_2f_2} \\
 &\times R_{N_1l_1}^*(r)Y_{l_1m_1}^*(\hat{r})R_{N_2l_2}(r)Y_{l_2m_2}(\hat{r})\chi_{\sigma_1}^\dagger\chi_{\sigma_2} . \tag{B.3}
 \end{aligned}$$

Análogamente se tiene que

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')T^C\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}') &= \sum_{N_3l_3m_3\sigma_3c_3f_3} \sum_{N_4l_4m_4\sigma_4c_4f_4} \mathbf{b}_{+\frac{1}{2},N_3l_3m_3,\sigma_3c_3f_3}^\dagger T^C \mathbf{b}_{+\frac{1}{2},N_4l_4m_4,\sigma_4c_4f_4} \\
 &\times R_{N_3l_3}^*(r')Y_{l_3m_3}^*(\hat{r}')R_{N_4l_4}(r')Y_{l_4m_4}(\hat{r}')\chi_{\sigma_3}^\dagger\chi_{\sigma_4} \\
 &+ \sum_{N_3l_3m_3\sigma_3c_3f_3} \sum_{N_4l_4m_4\sigma_4c_4f_4} \mathbf{b}_{-\frac{1}{2},N_3l_3m_3,\sigma_3c_3f_3}^\dagger T^C \mathbf{b}_{-\frac{1}{2},N_4l_4m_4,\sigma_4c_4f_4} \\
 &\times R_{N_3l_3}^*(r')Y_{l_3m_3}^*(\hat{r}')R_{N_4l_4}(r')Y_{l_4m_4}(\hat{r}')\chi_{\sigma_3}^\dagger\chi_{\sigma_4} . \tag{B.4}
 \end{aligned}$$

Se puede observar que las estructuras anteriores son diagonales en isospín entre sí pero no la una con la otra, por lo cual se pueden introducir los índices α_i de isospín tales que $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\alpha_3 = \alpha_4$.

Como ni $V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ ni T_C actúan en los índices de espín y color, se tiene que en la representación acoplada (A.9) de los operadores fermiónicos

$$\begin{aligned}
 H_{Coulomb}^{q-q} &= \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \sum_C \psi^\dagger(\mathbf{r}) T_C \psi(\mathbf{r}) V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \psi^\dagger(\mathbf{r}') T^C \psi(\mathbf{r}') \\
 &= \sum_C \sum_{N_i l_i m_i \sigma_i \alpha_i \lambda_i j_i c_i f_i} \int r^2 r'^2 dr dr' d\hat{r} d\hat{r}' \mathbf{b}_{\alpha_1(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f_1}^\dagger \mathbf{b}^{\alpha_2(N_2, l_2, \frac{1}{2}) j_2 \lambda_2 c_2 f_2} \\
 &\times \mathbf{b}_{\alpha_3(N_3, l_3, \frac{1}{2}) j_3 \lambda_3 c_3 f_3}^\dagger \mathbf{b}^{\alpha_4(N_4, l_4, \frac{1}{2}) j_4 \lambda_4 c_4 f_4} [T_C]_{c_2}^{c_1} [T^C]_{c_4}^{c_3} V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\
 &\times R_{N_1 l_1}^*(r) Y_{l_1 m_1}^*(\hat{r}) R_{N_2 l_2}(r) Y_{l_2 m_2}(\hat{r}) \langle l_1 m_1, \frac{1}{2} \sigma_1 | j_1 \lambda_1 \rangle \langle l_2 m_2, \frac{1}{2} \sigma_2 | j_2 \lambda_2 \rangle \\
 &\times R_{N_3 l_3}^*(r') Y_{l_3 m_3}^*(\hat{r}') R_{N_4 l_4}(r') Y_{l_4 m_4}(\hat{r}') \langle l_3 m_3, \frac{1}{2} \sigma_3 | j_3 \lambda_3 \rangle \langle l_4 m_4, \frac{1}{2} \sigma_4 | j_4 \lambda_4 \rangle \\
 &\times \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \delta_{\sigma_3 \sigma_4} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha_3 \alpha_4} \delta_{f_1 f_2} \delta_{f_3 f_4} . \tag{B.5}
 \end{aligned}$$

En la suma de la expresión anterior se ha utilizado la notación corta $i = \{1, 2, 3, 4\}$.

Se puede expandir a un potencial arbitrario en la base de los polinomios de Legendre y estos a su vez en términos de los armónicos esféricos.

$$V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \sum_L A_L P_L(\cos\theta) = \sum_{LM} A_L \frac{4\pi}{2L+1} Y_{LM}^*(\hat{r}) Y_{LM}(\hat{r}') , \tag{B.6}$$

donde

$$A_L = \frac{2L+1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) P_L(\cos\theta) V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) , \tag{B.7}$$

de manera que la integral angular contenida en $H_{Coulomb}^{q-q}$ toma la forma

$$\begin{aligned}
 &\int \int d\hat{r} d\hat{r}' Y_{l_1 m_1}^*(\hat{r}) Y_{l_2 m_2}(\hat{r}) V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) Y_{l_3 m_3}^*(\hat{r}') Y_{l_4 m_4}(\hat{r}') \\
 &= \sum_{LM} \frac{4\pi A_L}{2L+1} \int \int d\hat{r} d\hat{r}' Y_{l_1 m_1}^*(\hat{r}) Y_{l_2 m_2}(\hat{r}) Y_{LM}^*(\hat{r}) Y_{l_3 m_3}^*(\hat{r}') Y_{l_4 m_4}(\hat{r}') Y_{LM}(\hat{r}') \\
 &= \sum_{LM} \frac{4\pi A_L}{2L+1} (-1)^{m_1+M+m_3} \\
 &\times \left[\int d\hat{r} Y_{l_1-m_1}^*(\hat{r}) Y_{l_2 m_2}(\hat{r}) Y_{L-M}^*(\hat{r}) \right] \left[\int d\hat{r}' Y_{l_3-m_3}^*(\hat{r}') Y_{l_4 m_4}(\hat{r}') Y_{LM}(\hat{r}') \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{LM} \frac{4\pi A_L}{2L+1} (-1)^{m_1+M+m_3} \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2L+1)}{4\pi}} \sqrt{\frac{(2l_3+1)(2l_4+1)(2L+1)}{4\pi}} \\
 &\times \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L \\ -m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & l_4 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & l_4 & L \\ -m_3 & m_4 & M \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{LM} \frac{A_L}{2L+1} (-1)^{m_1+M+m_3+l_2-l_1+l_4-l_3} \sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)(2l_4+1)} \\
 &\times \langle l_1 0, l_2 0 | L 0 \rangle \langle l_3 0, l_4 0 | L 0 \rangle \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L \\ -m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & l_4 & L \\ -m_3 & m_4 & M \end{pmatrix}, \tag{B.8}
 \end{aligned}$$

mientras que los Clebsh-Gordan de la forma $\langle l_i m_i, \frac{1}{2} \sigma_i | j_i \lambda_i \rangle$ contenidos en $H_{Coulomb}^{q-q}$ son sustituidos por la identidad

$$\langle l_i m_i, \frac{1}{2} \sigma_i | j_i \lambda_i \rangle = (-1)^{l_i - \lambda_i - 1/2} \begin{pmatrix} l_i & \frac{1}{2} & j_i \\ m_i & \sigma_i & -\lambda_i \end{pmatrix}, \tag{B.9}$$

de modo que resulta

$$\begin{aligned}
 H_{Coulomb}^{q-q} &= \sum_{CLM} \sum_{N_i l_i m_i \sigma_i \alpha_i \lambda_i j_i c_i f_i} \mathbf{b}_{\alpha_1(N_1 l_1 \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f_1}^\dagger \mathbf{b}^{\alpha_2(N_2 l_2 \frac{1}{2}) j_2 \lambda_2 c_2 f_2} \mathbf{b}_{\alpha_3(N_3 l_3 \frac{1}{2}) j_3 \lambda_3 c_3 f_3}^\dagger \mathbf{b}^{\alpha_4(N_4 l_4 \frac{1}{2}) j_4 \lambda_4 c_4 f_4} \\
 &\times [T_C]_{c_2}^{c_1} [T^C]_{c_4}^{c_3} \frac{A_L}{2L+1} \int r^2 r'^2 dr dr' R_{N_1 l_1}^*(r) R_{N_2 l_2}(r) R_{N_3 l_3}^*(r') R_{N_4 l_4}(r') \\
 &\times (-1)^{m_1+M+m_3+l_2-l_1+l_4-l_3} \sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)(2l_4+1)} \langle l_1 0, l_2 0 | L 0 \rangle \langle l_3 0, l_4 0 | L 0 \rangle \\
 &\times (-1)^{l_1 - \lambda_1 - 1/2} \begin{pmatrix} l_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ m_1 & \sigma_1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} (-1)^{l_2 - \lambda_2 - 1/2} \begin{pmatrix} l_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ m_2 & \sigma_2 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L \\ -m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \\
 &\times (-1)^{l_3 - \lambda_3 - 1/2} \begin{pmatrix} l_3 & \frac{1}{2} & j_3 \\ m_3 & \sigma_3 & -\lambda_3 \end{pmatrix} (-1)^{l_4 - \lambda_4 - 1/2} \begin{pmatrix} l_4 & \frac{1}{2} & j_4 \\ m_4 & \sigma_4 & -\lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & l_4 & L \\ -m_3 & m_4 & M \end{pmatrix} \\
 &\times \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \delta_{\sigma_3 \sigma_4} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha_3 \alpha_4} \delta_{f_1 f_2} \delta_{f_3 f_4}. \tag{B.10}
 \end{aligned}$$

Es posible agrupar los coeficientes 3-J que dependen de los índices 1 y 2 para utilizar la identidad entre la suma del producto de tres 3-J y un 6-J como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\sigma_1 m_1 m_2} (-1)^{-\sigma_1 - \frac{1}{2} - \sigma_3 - \frac{1}{2} + M - \lambda_2 - \frac{1}{2} - \lambda_4 - \frac{1}{2}} \\
 & \times \begin{pmatrix} l_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ m_1 & \sigma_1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ m_2 & \sigma_2 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L \\ -m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \\
 & = \sum_{\sigma_1 m_1 m_2} \begin{pmatrix} j_1 & l_1 & \frac{1}{2} \\ -\lambda_1 & m_1 & \sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 & j_2 & \frac{1}{2} \\ -m_2 & \lambda_2 & -\sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 & l_1 & L \\ m_2 & -m_1 & -M \end{pmatrix} (-1)^{l_2 + l_1 + \frac{1}{2} + m_2 + m_1 - \sigma_1} \\
 & \times (-1)^{-\sigma_1 - \frac{1}{2} - \sigma_3 - \frac{1}{2} + M - \lambda_2 - \frac{1}{2} - \lambda_4 - \frac{1}{2} - l_1 - l_2 - \frac{1}{2} - m_2 - m_1 + \sigma_1 + l_2 + l_1 + L} \\
 & = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ -\lambda_1 & \lambda_2 & -M \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & L \\ l_2 & l_1 & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} (-1)^{L - \frac{1}{2} - \sigma_3 - \frac{1}{2} - \lambda_2 - \frac{1}{2} - \lambda_4 - 1} \\
 & = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ -\lambda_1 & \lambda_2 & -M \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_1 & l_1 & \frac{1}{2} \\ l_2 & j_2 & L \end{matrix} \right\} (-1)^{L - \frac{1}{2} - \sigma_3 - \frac{1}{2} - \lambda_2 - \frac{1}{2} - \lambda_4 - 1} . \tag{B.11}
 \end{aligned}$$

En la ecuación anterior se hizo uso del hecho de que $\sigma_1 = \sigma_2$. De la misma manera se pueden tomar los coeficientes 3-J que dependen de los índices 3 y 4, usando que $\sigma_3 = \sigma_4$ y acumulando la fase obtenida en la relación anterior. Así pues, resulta

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\sigma_3 m_3 m_4} (-1)^{L - \frac{1}{2} - \sigma_3 - \frac{1}{2} - \lambda_2 - \frac{1}{2} - \lambda_4 - 1} \\
 & \times \begin{pmatrix} l_3 & \frac{1}{2} & j_3 \\ m_3 & \sigma_3 & -\lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_4 & \frac{1}{2} & j_4 \\ m_4 & \sigma_3 & -\lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & l_4 & L \\ -m_3 & m_4 & M \end{pmatrix} \\
 & = \sum_{\sigma_3 m_3 m_4} \begin{pmatrix} j_3 & l_3 & \frac{1}{2} \\ -\lambda_3 & m_3 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_4 & j_4 & \frac{1}{2} \\ -m_4 & \lambda_4 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_4 & l_3 & L \\ m_4 & -m_3 & M \end{pmatrix} (-1)^{l_3 + l_4 + \frac{1}{2} + m_4 + m_3 - \sigma_3} \\
 & \times (-1)^{L - \frac{1}{2} - \sigma_3 - \frac{1}{2} - \lambda_2 - \frac{1}{2} - \lambda_4 - 1 - l_3 - l_4 - \frac{1}{2} - m_4 - m_3 + \sigma_3 + l_4 + l_3 + L} \\
 & = \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & L \\ -\lambda_3 & \lambda_4 & M \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_4 & L \\ l_4 & l_3 & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} (-1)^{M + \frac{1}{2} + \lambda_2 + \frac{1}{2} + \lambda_4} \\
 & = \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & L \\ -\lambda_3 & \lambda_4 & M \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_3 & l_3 & \frac{1}{2} \\ l_4 & j_4 & L \end{matrix} \right\} (-1)^{M + \frac{1}{2} + \lambda_2 + \frac{1}{2} + \lambda_4} . \tag{B.12}
 \end{aligned}$$

Es conveniente sustituir a los coeficientes 3-J de las expresiones anteriores de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ -\lambda_1 & \lambda_2 & -M \end{pmatrix} &= \frac{(-1)^{j_1-j_2-M+j_1+j_2+L}}{\sqrt{2L+1}} \langle j_1 \lambda_1, j_2 - \lambda_2 | L - M \rangle, \\ \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & L \\ -\lambda_3 & \lambda_4 & M \end{pmatrix} &= \frac{(-1)^{j_3-j_4+M+j_3+j_4+L}}{\sqrt{2L+1}} \langle j_3 \lambda_3, j_4 - \lambda_4 | LM \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

También se puede observar que la integral sobre las funciones radiales se puede simplificar como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} &\int r^2 r'^2 dr dr' R_{N_1 l_1}^*(r) R_{N_2 l_2}(r) R_{N_3 l_3}^*(r') R_{N_4 l_4}(r') \\ &= \int r^2 dr R_{N_1 l_1}^*(r) R_{N_2 l_2}(r) \int r'^2 dr' R_{N_3 l_3}^*(r') R_{N_4 l_4}(r') \\ &= \delta_{N_1 N_2} \delta_{N_3 N_4} \delta_{l_1 l_2} \delta_{l_3 l_4}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Por último, el producto de los elementos de matriz de los generadores de color de SU(3) $[T_C]_{c_2}^{c_1} [T^C]_{c_4}^{c_3}$ se puede escribir como

$$[T_C]_{c_2}^{c_1} [T^C]_{c_4}^{c_3} = 3(-1)^{\chi_{c_2} + \chi_{c_4} + \chi_C} \langle (1, 0)_{c_1}, (0, 1)_{\bar{c}_2} | (1, 1)_{\bar{C}} \rangle \langle (1, 0)_{c_3}, (0, 1)_{\bar{c}_4} | (1, 1)_{\bar{C}} \rangle. \quad (\text{B.15})$$

Así que al sustituir (B.7), (B.11), (B.12), (B.13), (B.14) y (B.15) en la expresión (B.10), y bajando los índices de $\mathbf{b}^{\alpha_2(N_2 l_2 \frac{1}{2}) j_2 \lambda_2 c_2 f_2}$ y $\mathbf{b}^{\alpha_4(N_4 l_4 \frac{1}{2}) j_4 \lambda_4 c_4 f_4}$ se tiene que el Hamiltoniano de Coulomb toma la forma

$$\begin{aligned} H_{Coulomb}^{q-q} &= \sum_{LMC} \sum_{N_i l_i \alpha_i \lambda_i j_i c_i f_i} (-1)^{\chi_C} (-1)^{j_2+j_4+M+1} \frac{3}{2} \frac{1}{2L+1} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) P_L(\cos\theta) V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\ &\times \prod_{i=1}^4 \sqrt{(2l_i+1)(2j_i+1)} \langle l_1 0, l_2 0 | L 0 \rangle \langle l_3 0, l_4 0 | L 0 \rangle \begin{Bmatrix} j_1 & l_1 & \frac{1}{2} \\ l_2 & j_2 & L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & l_3 & \frac{1}{2} \\ l_4 & j_4 & L \end{Bmatrix} \\ &\times \mathbf{b}_{\alpha_1(N_1 l_1 \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f_1}^\dagger \mathbf{b}_{(N_2 l_2 \frac{1}{2}) j_2 - \lambda_2 \bar{c}_2}^{\alpha_2 f_2} \langle j_1 \lambda_1, j_2 - \lambda_2 | L - M \rangle \langle (1, 0)_{c_1}, (0, 1)_{\bar{c}_2} | (1, 1)_{\bar{C}} \rangle \\ &\times \mathbf{b}_{\alpha_3(N_3 l_3 \frac{1}{2}) j_3 \lambda_3 c_3 f_3}^\dagger \mathbf{b}_{(N_4 l_4 \frac{1}{2}) j_4 - \lambda_4 \bar{c}_4}^{\alpha_4 f_4} \langle j_3 \lambda_3, j_4 - \lambda_4 | LM \rangle \langle (1, 0)_{c_3}, (0, 1)_{\bar{c}_4} | (1, 1)_{\bar{C}} \rangle \\ &\times \delta_{N_1 N_2} \delta_{N_3 N_4} \delta_{l_1 l_2} \delta_{l_3 l_4} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha_3 \alpha_4} \delta_{f_1 f_2} \delta_{f_3 f_4}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Es posible escribir de forma explícita el valor de los coeficientes CG como

$$\begin{aligned}\langle l_1 0, l_2 0 | L 0 \rangle &= \frac{(-1)^{l_1}}{\sqrt{2l_1 + 1}}, \\ \langle l_3 0, l_4 0 | L 0 \rangle &= \frac{(-1)^{l_3}}{\sqrt{2l_3 + 1}}.\end{aligned}\tag{B.17}$$

Si además se aproxima al potencial por una interacción promedio $V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = V_0$ -con lo cual el único posible valor de L es $L = 0$ y en consecuencia $M = 0$ -, se tienen las siguientes simplificaciones [19]

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 d(\cos\theta) P_L(\cos\theta) V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) &= 2V_0 \delta_{L0}, \\ \left\{ \begin{matrix} j_1 & l_1 & \frac{1}{2} \\ l_2 & j_2 & 0 \end{matrix} \right\} &= \frac{(-1)^{j_1 + l_1 + \frac{1}{2}}}{\sqrt{(2j_1 + 1)(2l_1 + 1)}} \delta_{j_1 j_2} \delta_{l_1 l_2}, \\ \left\{ \begin{matrix} j_3 & l_3 & \frac{1}{2} \\ l_4 & j_4 & 0 \end{matrix} \right\} &= \frac{(-1)^{j_3 + l_3 + \frac{1}{2}}}{\sqrt{(2j_3 + 1)(2l_3 + 1)}} \delta_{j_3 j_4} \delta_{l_3 l_4},\end{aligned}\tag{B.18}$$

por lo que finalmente

$$\begin{aligned}H_{Coulomb}^{q-q}(V_0) &= \left(\frac{3}{2}2V_0\right) \sum_{CN_i l_i j_i \alpha_i f_i \lambda_k c_k} (-1)^{\chi_C} (-1)^{\alpha_1 + \alpha_3 + f_1 + f_3} \sqrt{(2j_1 + 1)(2j_3 + 1)} \\ &\times \langle j_1 \lambda_1, j_1 - \lambda_2 | 00 \rangle \langle (1, 0) c_1, (0, 1) \bar{c}_2 | (1, 1) C \rangle \langle j_3 \lambda_3, j_3 - \lambda_4 | 00 \rangle \langle (1, 0) c_3, (0, 1) \bar{c}_4 | (1, 1) \bar{C} \rangle \\ &\times \mathbf{b}_{\alpha_1(N_1 l_1 \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f_1}^\dagger \mathbf{b}_{-\alpha_1(N_2 l_2 \frac{1}{2}) j_1 - \lambda_2 \bar{c}_2 - f_1} \mathbf{b}_{\alpha_3(N_3 l_3 \frac{1}{2}) j_3 \lambda_3 c_3 f_3}^\dagger \mathbf{b}_{-\alpha_3(N_4 l_4 \frac{1}{2}) j_3 - \lambda_4 \bar{c}_4 - f_3},\end{aligned}\tag{B.19}$$

donde $i = \{1, 3\}$ y $k = \{1, 2, 3, 4\}$.

Como se muestra en [1], tras comparar la expresión (B.19) con el operador de Casimir de $SU(3)$ resulta que

$$H_{Coulomb}^{q-q}(V_0) = \frac{3}{2}(2V_0) \sum_C (-1)^{\chi_C} \mathbf{C}^{(1, 1)_C} \mathbf{C}^{(1, 1)_{\bar{C}}} = 2V_0 \mathcal{C}_2(SU(3)),\tag{B.20}$$

por lo cual se tiene que

$$E_{Coulomb}^{q-q}(V_0) = 2V_0(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu) , \quad (\text{B.21})$$

de modo que operador de Casimir de SU(3) manda a energías superiores a los estados con color, separándolos de estados sin color, es decir, de los estados físicos con $(\lambda, \mu) = (0, 0)$, donde (λ, μ) son las representaciones irreducibles de SU(3).

Los quarks pertenecen al triplete (1,0), los antiquarks al triplete (0,1) y los gluones al octete (1,1), es decir, todos ellos por sí solos tienen color, pero es una imposición fenomenológica el pedir que al interactuar entre sí siempre acoplen a color (0,0).

Apéndice C

Componentes eléctrico y magnético

Para implementar la base de oscilador armónico se debe sustituir $-\mathbf{A}(\mathbf{r})\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r})$ en (2.8) por $\mathbf{A}(\mathbf{r})(-\nabla^2 + \gamma^2 r^2)\mathbf{A}(\mathbf{r})$ con la correspondiente sustracción en el término H_1 .

Con el fin de encontrar una expresión para ∇^2 es necesario hacer un análisis dimensional de la ecuación del oscilador armónico cuántico tridimensional

$$\left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right]\Psi = E_{nl}\Psi = \hbar\omega(2n + l + 3/2)\Psi . \quad (\text{C.1})$$

Así pues, en unidades en que $[\hbar] = 1$ se tiene que

$$[-\nabla^2 + m^2\omega^2 r^2]\Psi = 2mE_{nl}\Psi = \Omega_N^2\Psi . \quad (\text{C.2})$$

De esta manera se ha definido el factor $\Omega_N^2 = 2\gamma(N + 3/2)$ con $\gamma = m\omega$ y $N = 2n + l$. Se debe notar que Ω_N tiene unidades de energía.

Mediante el operador de momento angular \mathbf{L} se puede construir al componente magnético del campo gluónico como se muestra a continuación [11]

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, m) &= \sum_{NLM} \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}} \mathbf{L} \left(\frac{R_{NL}(r)}{\sqrt{2\Omega_N}} Y_{LM}(\hat{r}) \right) \\ &= \sum_{NLM} \frac{R_{NL}(r)}{\sqrt{2\Omega_N}} \mathbf{T}_{LL;M}(\hat{r}) , \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

donde se ha introducido el factor $\frac{1}{\sqrt{2\Omega_N}}$ para garantizar la regla de conmutación entre el campo gluónico \mathbf{A} y su conjugado $\mathbf{\Pi}$ [1].

En la expresión (C.3) se puede notar que $\mathbf{T}_{L,L;M}(\hat{r}) = \mathbf{T}_{L,L';M}(\hat{r})\delta_{L'L}$.

Es posible reescribir a (C.3) en términos de los armónicos esféricos escalares como se muestra a continuación.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, m) = \sum_{NLMm\mu} \frac{R_{NL}(r)}{\sqrt{2\Omega_N}} \langle Lm, 1\mu | LM \rangle Y_{Lm}(\hat{r}) \boldsymbol{\xi}_\mu. \quad (\text{C.4})$$

Se puede garantizar la ortogonalidad del componente eléctrico respecto al magnético al construirlo como el rotacional de este último, por lo cual

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, e) &= \frac{-i}{\sqrt{\gamma}} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, m) = \frac{-i}{\sqrt{\gamma}} \nabla \times \left(\sum_{NLM} \frac{R_{NL}(r)}{\sqrt{2\Omega_N}} \mathbf{T}_{LL;M}(\hat{r}) \right) \\ &= \sum_{NLM} \frac{1}{\sqrt{2\Omega_N}} \left\{ \left(\frac{L+1}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N+L+1}{2} \right)^{1/2} R_{N-1,L-1} \mathbf{T}_{L,L-1;M} \right. \\ &\quad + \left(\frac{L+1}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N-L+2}{2} \right)^{1/2} R_{N+1,L-1} \mathbf{T}_{L,L-1;M} \\ &\quad - \left(\frac{L}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N+L+3}{2} \right)^{1/2} R_{N+1,L+1} \mathbf{T}_{L,L+1;M} \\ &\quad \left. - \left(\frac{L}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N-L}{2} \right)^{1/2} R_{N-1,L+1} \mathbf{T}_{L,L+1;M} \right\}, \quad (\text{C.5}) \end{aligned}$$

y una vez más, reescribiendo los armónicos esféricos vectoriales en términos de los escalares se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, e) &= \sum_{NLM\mu} \frac{1}{\sqrt{2\Omega_N}} \\ &\times \left\{ \left(\frac{L+1}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N+L+1}{2} \right)^{1/2} \langle L-1M-\mu, 1\mu | LM \rangle R_{N-1,L-1} Y_{L-1,M-\mu} \boldsymbol{\xi}_\mu \right. \\ &\quad + \left(\frac{L+1}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N-L+2}{2} \right)^{1/2} \langle L-1M-\mu, 1\mu | LM \rangle R_{N+1,L-1} Y_{L-1,M-\mu} \boldsymbol{\xi}_\mu \\ &\quad - \left(\frac{L}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N+L+3}{2} \right)^{1/2} \langle L+1M-\mu, 1\mu | LM \rangle R_{N+1,L+1} Y_{L+1,M-\mu} \boldsymbol{\xi}_\mu \\ &\quad \left. - \left(\frac{L}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N-L}{2} \right)^{1/2} \langle L+1M-\mu, 1\mu | LM \rangle R_{N-1,L+1} Y_{L+1,M-\mu} \boldsymbol{\xi}_\mu \right\}. \quad (\text{C.6}) \end{aligned}$$

Es posible mostrar que dichas construcciones satisfacen automáticamente la norma de Coulomb. Por ejemplo, de tomar la divergencia de la ecuación (C.4) se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, m) &= \sum_{NLMm\mu} \frac{\langle Lm, 1\mu | LM \rangle}{\sqrt{2\Omega_N}} \boldsymbol{\xi}_\mu \cdot \nabla \left(R_{NL}(r) Y_{Lm}(\hat{r}) \right) \\
 &= \sum_{NLMm\mu\mu'} \frac{\langle Lm, 1\mu | LM \rangle}{\sqrt{2\Omega_N}} \overbrace{\boldsymbol{\xi}_{\mu'}^* \cdot \boldsymbol{\xi}_\mu}^{\delta_{\mu\mu'}} \\
 &\times \left[\left(\frac{L+1}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{dR_{NL}}{dr} - \frac{L}{r} R_{NL} \right) Y_{L+1, m+\mu'} \langle Lm, 1\mu' | L+1, m+\mu' \rangle \right. \\
 &- \left. \left(\frac{L}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{dR_{NL}}{dr} + \frac{L+1}{r} R_{NL} \right) Y_{L-1, m+\mu'} \langle Lm, 1\mu' | L-1, m+\mu' \rangle \right] \\
 &= \sum_{NLMm'} \frac{1}{\sqrt{2\Omega_N}} \left[\left(\frac{L+1}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{dR_{NL}}{dr} - \frac{L}{r} R_{NL} \right) Y_{L+1, m'} \right. \\
 &\quad \left. \overbrace{\left(\sum_{m\mu} \langle Lm, 1\mu | LM \rangle \langle Lm, 1\mu | L+1, m' \rangle \right)}^{\delta_{L, L+1} \delta_{Mm'}} \right. \\
 &\times \left. \left(\sum_{m\mu} \langle Lm, 1\mu | LM \rangle \langle Lm, 1\mu | L-1, m' \rangle \right) \right. \\
 &- \left. \left(\frac{L}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{dR_{NL}}{dr} + \frac{L+1}{r} R_{NL} \right) Y_{L-1, m'} \right. \\
 &\quad \left. \overbrace{\left(\sum_{m\mu} \langle Lm, 1\mu | LM \rangle \langle Lm, 1\mu | L-1, m' \rangle \right)}^{\delta_{L, L-1} \delta_{Mm'}} \right] = 0. \tag{C.7}
 \end{aligned}$$

Debido a las reglas de ortogonalidad de los coeficientes de Clebsch-Gordan $\delta_{L, L-1} = \delta_{L, L+1} = 0$.

Análogamente, de tomar la divergencia de la ecuación (C.6) se encuentra que

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, e) &= \sum_{NLM\mu} \frac{1}{\sqrt{2\Omega_N}} \\
 &\times \left\{ \left(\frac{L+1}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N+L+1}{2} \right)^{1/2} \langle L-1M-\mu, 1\mu | LM \rangle \boldsymbol{\xi}_\mu \cdot \nabla (R_{N-1, L-1} Y_{L-1, M-\mu}) \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{L+1}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N-L+2}{2} \right)^{1/2} \langle L-1M-\mu, 1\mu | LM \rangle \boldsymbol{\xi}_\mu \cdot \nabla (R_{N+1, L-1} Y_{L-1, M-\mu}) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{L}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N+L+3}{2} \right)^{1/2} \langle L+1M-\mu, 1\mu | LM \rangle \boldsymbol{\xi}_\mu \cdot \nabla (R_{N+1,L+1} Y_{L+1,M-\mu}) \\
 & - \left. \left(\frac{L}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N-L}{2} \right)^{1/2} \langle L+1M-\mu, 1\mu | LM \rangle \boldsymbol{\xi}_\mu \cdot \nabla (R_{N-1,L+1} Y_{L+1,M-\mu}) \right\} .
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

Expresión en la cual se pueden sustituir -utilizando el valor adecuado de N y L-, las siguientes identidades [11]:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\xi}_\mu \cdot \nabla (R_{N,L} Y_{L,M-\mu}) & = \left(\frac{L}{2L-1} \right)^{1/2} \left(\frac{dR_{N,L}}{dr} + \frac{L+1}{r} R_{N,L} \right) \langle LM-\mu, 1\mu | L-1M \rangle Y_{L-1,M} \\
 & - \left(\frac{L+1}{2L+3} \right)^{1/2} \left(\frac{dR_{N,L}}{dr} - \frac{L}{r} R_{N,L} \right) \langle LM-\mu, 1\mu | L+1M \rangle Y_{L+1,M} ,
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dR_{N,L}}{dr} + \frac{L+1}{r} R_{N,L} \right) & = \left(\frac{N+L+1}{2} \right) \frac{N_{N,L}}{N_{N-1,L-1}} R_{N-1,L-1} \\
 & + \left(\frac{N-L+2}{2} \right) \frac{N_{N,L}}{N_{N+1,L-1}} R_{N+1,L-1} , \\
 \left(\frac{dR_{N,L}}{dr} - \frac{L}{r} R_{N,L} \right) & = -\gamma \frac{N_{N,L}}{N_{N+1,L+1}} R_{N+1,L+1} - \gamma \frac{N_{N,L}}{N_{N-1,L+1}} R_{N-1,L+1} , \\
 N_{N,L} & = \left[\frac{2 \left(\frac{N-L}{2} \right)!}{\Gamma \left(\frac{N+L+3}{2} \right)} \right]^{1/2} \gamma^{3/4+L/2} .
 \end{aligned} \tag{C.10}$$

Para demostrar que con la elección de coeficientes mostrados a continuación se satisface la norma de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, \Xi) = 0$.

$$\begin{aligned}
 \alpha_{L'L}^m & = \delta_{L'L} , \\
 N' = N-1 \implies \alpha_{L'L}^e & = \left(\frac{L+1}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N+L+1}{2} \right)^{1/2} \delta_{L',L-1} \\
 & - \left(\frac{L}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N-L}{2} \right)^{1/2} \delta_{L',L+1} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N' = N + 1 \implies \alpha_{L',L}^e &= \left(\frac{L+1}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N-L+2}{2} \right)^{1/2} \delta_{L',L-1} \\
 &- \left(\frac{L}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N+L+3}{2} \right)^{1/2} \delta_{L',L+1} . \quad (C.11)
 \end{aligned}$$

De modo que $\alpha_{L',L}^{\Xi} = 0$ en cualquier caso en que $L' \neq \{L-1, L, L+1\}$.

Así pues, es posible imponer las reglas de selección anteriores mediante la introducción de un nuevo índice $N' = \{N-1, N, N+1\}$ tal que

$$\begin{aligned}
 \alpha_{N'NL'L}^{\Xi} &= \delta_{N',N} \delta_{L',L} \delta^{\Xi m} \\
 &+ \left(\frac{L+1}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N+L+1}{2} \right)^{1/2} \delta_{N',N-1} \delta_{L',L-1} \delta^{\Xi e} \\
 &+ \left(\frac{L+1}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N-L+2}{2} \right)^{1/2} \delta_{N',N+1} \delta_{L',L-1} \delta^{\Xi e} \\
 &- \left(\frac{L}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N-L}{2} \right)^{1/2} \delta_{N',N-1} \delta_{L',L+1} \delta^{\Xi e} \\
 &- \left(\frac{L}{2L+1} \right)^{1/2} \left(\frac{N+L+3}{2} \right)^{1/2} \delta_{N',N+1} \delta_{L',L+1} \delta^{\Xi e} , \quad (C.12)
 \end{aligned}$$

con la ventaja de resumir las expresiones para los componentes magnético y eléctrico en una única expresión

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(\mathbf{r}, \Xi) &= \sum_{N'=N-1}^{N+1} \sum_{L'=L-1}^{L+1} \sum_{NLM\mu} \frac{\alpha_{N'NL'L}^{\Xi}}{\sqrt{2\Omega_N}} \langle L'M - \mu, 1\mu | LM \rangle R_{N'L'}(r) Y_{L',M-\mu}(\hat{r}) \boldsymbol{\xi}_{\mu} \\
 &= \sum_{N'NL'LM} \frac{\alpha_{N'NL'L}^{\Xi}}{\sqrt{2\Omega_N}} R_{N'L'}(r) \mathbf{T}_{L,L';M}(\hat{r}) . \quad (C.13)
 \end{aligned}$$

Así pues, el campo gluónico se escribe de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}^C(\mathbf{r}) = \sum_{\Xi N'NL'LM} \frac{\alpha_{N'NL'L}^{\Xi}}{\sqrt{2\Omega_N}} R_{N'L'}(r) \mathbf{T}_{L,L';M}(\hat{r}) \left(\boldsymbol{\beta}^{\dagger\Xi;(N',L',1)LMC} + \boldsymbol{\beta}^{\Xi;(N',L',1)LMC} \right) . \quad (C.14)$$

De acuerdo a (3.7), una vez garantizada la ortogonalidad de los componentes gluónicos, se puede interpretar a $\Omega_N = \sqrt{2\gamma(N + \frac{3}{2})}$ como la energía característica del gluón, por lo que la energía de un par de gluones acoplados a color cero (*glueball*) predicha por este modelo usando $\sqrt{\gamma} = 0,3287 \text{ GeV}$ ($N' = 0, N = 1$) corresponde aproximadamente a $1,47 \text{ GeV}$. En la teoría se predice una energía para la glueball entre $1,2$ y $1,6 \text{ GeV}$ [6].

Apéndice D

Deducción del Término de Interacción

En el presente apéndice se lleva a cabo un desarrollo análogo al presentado en [1] para deducir el Hamiltoniano de interacción, con la diferencia de que la base utilizada a continuación es la del oscilador armónico.

Del capítulo 2 se tenía que $H_{int} = -g \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r})$ representa la interacción entre quarks y anti-quarks con el campo gluónico correspondiente a la potencia más baja en la constante de interacción fuerte g , donde $\boldsymbol{\alpha}$ son las matrices de Dirac, por lo cual

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(\mathbf{r})[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}] \psi(\mathbf{r}) &= \begin{pmatrix} \psi_1^\dagger & \psi_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \\ &= \psi_1^\dagger(\mathbf{r})[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}] \psi_2(\mathbf{r}) + \psi_2^\dagger(\mathbf{r})[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}] \psi_1(\mathbf{r}) , \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

donde $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}$ es un operador que actúa en los espacios de color y espín, cuyos elementos de matriz están dados por [19]:

$$\begin{aligned} \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})_c^{c'} \right]_{\sigma'\sigma} &= \left[2\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})_c^{c'} \right]_{\sigma'\sigma} = 2 \left[\chi_{\sigma'}^\dagger \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})_c^{c'} \chi_\sigma \right] \\ &= \sum_\mu \sqrt{3} (-1)^{1-\mu} \langle 1\mu, \frac{1}{2}\sigma | \frac{1}{2}\sigma' \rangle [A(\mathbf{r})_{-\mu}]_c^{c'} . \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

De la ecuación (C.14) se tenía que

$$\begin{aligned}
 [A(\mathbf{r})_{-\mu}]_c^{c'} &= \sum_C [A^C(\mathbf{r})_{-\mu}] [T_C]_c^{c'} \\
 &= \sum_{\Xi N' NL' LMC} \frac{\alpha_{N' NL' L}^{\Xi}}{\sqrt{2\Omega_N}} R_{N' L'}(r) [\mathbf{T}_{L, L'; M}(\hat{\mathbf{r}})]_{-\mu} [T_C]_c^{c'} \\
 &\times \left(\beta^{\dagger \Xi; (N', L', 1) LMC} + \beta^{\Xi; (N', L', 1) LMC} \right) .
 \end{aligned} \tag{D.3}$$

Se requiere entonces considerar el elemento de matriz del generador de color T_C

$$\begin{aligned}
 [T_C]_c^{c'} &= \langle (10) || T^{(11)} || (10) \rangle \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)C \rangle \\
 &= \sqrt{3}(-1)^{x_{c_2}} \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)C \rangle ,
 \end{aligned} \tag{D.4}$$

mientras que la componente $-\mu$ del armónico esférico vectorial está dado por [19]

$$[\mathbf{T}_{L, L'; M}(\hat{\mathbf{r}})]_{-\mu} = \sum_m (-1)^{-\mu} \langle L'm, 1\mu | LM \rangle Y_{L'm}(\hat{\mathbf{r}}) . \tag{D.5}$$

Utilizando las expresiones para ψ_1 y ψ_2 mostradas en (A.4) con la representación acoplada de los operadores de creación-aniquilación fermiónicos presentada en (A.9), e introduciendo el índice $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ para el pseudo-espín; se tiene que el término de interacción se escribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 H_{int} &= -g \sum_{\alpha N_1 l_1 m_1 j_1 \lambda_1 \sigma_1 c_1 f_1} \sum_{\alpha N_2 l_2 m_2 j_2 \lambda_2 \sigma_2 c_2 f_2} \sum_{\Xi N' NL' LMC m \mu} \langle l_1 m_1, \frac{1}{2} \sigma_1 | j_1 \lambda_1 \rangle \langle l_2 m_2, \frac{1}{2} \sigma_2 | j_2 \lambda_2 \rangle \\
 &\times \int r^2 dr R_{N_1 l_1}^*(r) R_{N L}(r) R_{N_2 l_2}(r) \int d\hat{\mathbf{r}} Y_{l_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{L' m}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{l_2 m_2}(\hat{\mathbf{r}}) \frac{\alpha_{N' NL' L}^{\Xi}}{\sqrt{2\Omega_{(N, L, 1)J}^{\Xi}}} \\
 &\times (-1)^{x_{c_2}} (-1)^{1-2\mu} \langle L'm, 1\mu | LM \rangle \sqrt{3} \langle 1\mu, \frac{1}{2} \sigma_2 | \frac{1}{2} \sigma_1 \rangle \sqrt{3} \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)C \rangle \\
 &\times \mathbf{b}_{\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f_1}^{\dagger} \left(\beta^{\dagger \Xi; (N', L', 1) LMC} + \beta^{\Xi; (N', L', 1) LMC} \right) \mathbf{b}^{-\alpha(N_2, l_2, \frac{1}{2}) j_2 \lambda_2 c_2 f_2} \delta_{f_1 f_2} .
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

La expresión anterior se puede simplificar utilizando la siguiente identidad [19, 20]:

$$\begin{aligned}
 \int d\hat{\mathbf{r}} Y_{l_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{L' m}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{l_2 m_2}(\hat{\mathbf{r}}) &= (-1)^{m_1 - m} \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2L' + 1)}} \\
 &\times \langle l_2 0, l_1 0 | L' 0 \rangle \langle l_2 m_2, l_1 - m_1 | L' - m \rangle .
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

Del segundo coeficiente C-G en la expresión anterior se tiene que $m_2 = m_1 - m$, de modo que H_{int} toma la forma

$$\begin{aligned}
 H_{int} &= -g \sum_{\alpha N_i l_i m_i j_i \lambda_i \sigma_i c_i f_i} \sum_{\Xi N' L' L M C m \mu} \int r^2 dr R_{N_1 l_1}^*(r) R_{N L}(r) R_{N_2 l_2}(r) \frac{3\alpha_{N' N L' L}^{\Xi}}{\sqrt{2\Omega_{(N, L, 1)J}^{\Xi}}} \\
 &\times (-1)^{m_2+1} \langle 1\mu, \frac{1}{2}\sigma_2 | \frac{1}{2}\sigma_1 \rangle \langle l_2 m_2, l_1 - m_1 | L' - m \rangle \langle l_1 m_1, \frac{1}{2}\sigma_1 | j_1 \lambda_1 \rangle \langle l_2 m_2, \frac{1}{2}\sigma_2 | j_2 \lambda_2 \rangle \\
 &\times (-1)^{x_{c_2}} \langle L' m, 1\mu | L M \rangle \langle l_2 0, l_1 0 | L' 0 \rangle \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)C \rangle \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2L' + 1)}} \\
 &\times \mathbf{b}_{\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2})j_1 \lambda_1 c_1 f_1}^{\dagger} \left(\boldsymbol{\beta}^{\dagger \Xi; (N', L', 1) L M C} + \boldsymbol{\beta}^{\Xi; (N', L', 1) L M C} \right) \mathbf{b}^{-\alpha(N_2, l_2, \frac{1}{2})j_2 \lambda_2 c_2 f_2} \delta_{f_1 f_2} . \quad (\text{D.8})
 \end{aligned}$$

Si además se desea acoplar los 4 coeficientes C-G del segundo renglón de la expresión anterior a un símbolo 9-j de Wigner, se utiliza que

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\beta \gamma \epsilon \phi} \langle b\beta, c\gamma | a\alpha \rangle \langle e\epsilon, f\phi | d\delta \rangle \langle e\epsilon, b\beta | g\eta \rangle \langle f\phi, c\gamma | j\mu \rangle \\
 &= \sqrt{(2a+1)(2d+1)(2g+1)(2j+1)} \sum_{K\kappa} \langle g\eta, j\mu | K\kappa \rangle \langle d\delta, a\alpha | K\kappa \rangle \left\{ \begin{array}{ccc} c & b & a \\ f & e & d \\ j & g & K \end{array} \right\} , \quad (\text{D.9})
 \end{aligned}$$

por lo que es necesario reordenar los C-G utilizando que $\lambda_2 = m_2 + \sigma_2$ tal como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
 &\sum_{m_i \sigma_i} (-1)^{m_2+1} \langle 1\mu, \frac{1}{2}\sigma_2 | \frac{1}{2}\sigma_1 \rangle \langle l_2 m_2, l_1 - m_1 | L' - m \rangle \\
 &\times \langle l_1 m_1, \frac{1}{2}\sigma_1 | j_1 \lambda_1 \rangle \langle l_2 m_2, \frac{1}{2}\sigma_2 | j_2 \lambda_2 \rangle \\
 &= \sum_{m_i \sigma_i} (-1)^{m_2+1} (-1)^{\frac{1}{2}+\sigma_2} \sqrt{\frac{2}{3}} \langle \frac{1}{2} - \sigma_2, \frac{1}{2}\sigma_1 | 1\mu \rangle \langle l_2 m_2, l_1 - m_1 | L' - m \rangle \\
 &\times \langle l_1 m_1, \frac{1}{2}\sigma_1 | j_1 \lambda_1 \rangle \langle l_2 m_2, \frac{1}{2}\sigma_2 | j_2 \lambda_2 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m_i \sigma_i} (-1)^{\lambda_2+1+\frac{1}{2}} (-1)^{l_2+\frac{1}{2}-j_2} \sqrt{\frac{2}{3}} \langle \frac{1}{2} - \sigma_2, \frac{1}{2} \sigma_1 | 1\mu \rangle \langle l_2 m_2, l_1 - m_1 | L' - m \rangle \\
 &\times \langle l_1 m_1, \frac{1}{2} \sigma_1 | j_1 \lambda_1 \rangle \langle l_2 - m_2, \frac{1}{2} - \sigma_2 | j_2 - \lambda_2 \rangle \\
 &= \sum_{m_i \sigma_i} (-1)^{l_2+j_2-\lambda_2} \sqrt{\frac{2}{3}} \langle \frac{1}{2} \sigma_1, \frac{1}{2} - \sigma_1 | 1\mu \rangle \langle l_1 m_1, l_2 - m_2 | L' m \rangle \\
 &\times \langle l_1 m_1, \frac{1}{2} \sigma_1 | j_1 \lambda_1 \rangle \langle l_2 - m_2, \frac{1}{2} - \sigma_2 | j_2 - \lambda_2 \rangle \\
 &= (-1)^{l_2+j_2-\lambda_2} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2L'+1)(2(1)+1)} \\
 &\times \sum_{K\kappa} \langle L' m, 1\mu | K\kappa \rangle \langle j_1 \lambda_1, j_2 - \lambda_2 | K\kappa \rangle \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & l_2 & j_2 \\ \frac{1}{2} & l_1 & j_1 \\ 1 & L' & K \end{Bmatrix} . \tag{D.10}
 \end{aligned}$$

Así pues, si se sustituye lo anterior en H_{int} y se usa la ortogonalidad de los coeficientes Clebsch-Gordan

$$\sum_{m\mu} \langle L' m, 1\mu | K\kappa \rangle \langle L' m, 1\mu | LM \rangle = \delta_{LK} \delta_{\kappa M} , \tag{D.11}$$

se obtiene finalmente que

$$\begin{aligned}
 H_{int} &= -g \sum_{\alpha N_i l_i j_i \lambda_i c_i f_i} \sum_{\Xi N N' L' L M C} \int r^2 dr R_{N_1 l_1}(r) R_{N' L'}(r) R_{N_2 l_2}(r) \frac{3\alpha_{N' N L' L}^{\Xi}}{\sqrt{4\pi\Omega_N}} \\
 &\times (-1)^{\chi_{c_2}} (-1)^{j_2-\lambda_2+l_2} \sqrt{(2l_2+1)(2j_2+1)(2j_1+1)(2l_1+1)} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & l_2 & j_2 \\ \frac{1}{2} & l_1 & j_1 \\ 1 & L' & L \end{Bmatrix} \\
 &\times \langle l_2 0, l_1 0 | L' 0 \rangle \langle j_1 \lambda_1, j_2 - \lambda_2 | LM \rangle \langle (10)_{c_1}, (01)_{\bar{c}_2} | (11)_{C'} \rangle \\
 &\times \mathbf{b}_{\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f_1}^{\dagger} \left(\beta^{\dagger \Xi; (N', L', 1) L M C} + \beta^{\Xi; (N', L', 1) L M C} \right) \mathbf{b}^{-\alpha(N_2, l_2, \frac{1}{2}) j_2 \lambda_2 c_2 f_2} \delta_{f_1 f_2} , \tag{D.12}
 \end{aligned}$$

donde $i=1,2$ para los índices de quarks.

Esta última expresión se trabaja en el Capítulo 5.

Bibliografía

- [1] T. Yépez-Martínez, **Un modelo motivado de la Cromodinámica Cuántica a bajas energías para los niveles orbitales S y P**, PCF-UNAM (2011).
- [2] T. Yépez-Martínez, P. O. Hess, **Solvable model for many-quark systems in QCD Hamiltonians**, Phys. Rev. C 81, 045204 (2010).
- [3] P. O. Hess, A. P. Szczepaniak, **Exactly solvable model of low energy QCD**, Phys. Rev. C 73, 025201 (2006).
- [4] T. Yépez-Martínez, P. O. Hess, et. all. **QCD at low energy: A many-body approach**, J. Phys. Conf. Ser., 322, 012016 (2011).
- [5] O. Civitarese, P. O. Hess, **Modelling the non-perturbative vacuum of QCD**, Int. Jour. Mod. Phys. E 15, 1233, (2006).
- [6] A. P. Szczepaniak, E. S. Swanson, **Coulomb gauge QCD, confinement, and the constituent representation**, Phys. Rev. D 65, 025012 (2001).
- [7] F. Halzen, A. D. Martin, **Quarks and Leptons**, John Wiley (1984).
- [8] M. Aygun, O. Bayrak, I. Boztosum, **Solution of the Radial Schrödinger Equation for the Potential Family $V(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} + Cr$ using the Asymptotic Iteration Method**, J. Phys. B, 40, 537 (2007).
- [9] T.D. Lee, **Particle Physics and Introduction to Field Theory**, Science Press (1988).

- [10] N. H. Christ, T. D. Lee, **Operator ordering and Feynman rules in gauge theories**, Phys. Rev., D 22, 939 (1980).
- [11] J. M. Eisenberg, W. Greiner, **Excitation Mechanisms of the Nucleus**, Elsevier Science Publishers (1988).
- [12] W. Greiner, S. Schramm, **Quantum Chromodynamics**, Springer-Verlag (2002).
- [13] W. Greiner, J. Reinhardt, **Field Quantization**, Springer-Verlag (1996).
- [14] J. Escher, J. P. Draayer, J. Math Phys., Vol. 39, No. 10, Octubre (1998).
- [15] T. DeGrand and C. DeTar, **Lattice Methods for Quantum Chromodynamics**, World Scientific (2006).
- [16] C. E. Carlson, T. H. Hansson y C. Peterson, **Meson, baryon, and glueball masses in the MIT bag model**, Phys. Rev. D, 27, 1556-1564, (1983).
- [17] K. T. Hecht, **The vector Coherent State Method and Its Application to Problems of Higher Symmetries**, Springer-Verlag (1988).
- [18] A. Auerbach, **Interacting Electrons and Quantum Magnetism**, Springer-Verlag (1994).
- [19] D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev, V. K. Khersonskii, **Quantum Theory of angular momentum**, World Scientific (1988).
- [20] W. J. Thompson, **Angular Momentum**, John Wiley (1994).
- [21] A. deShalit, H. Feshbach, **Theoretical Nuclear Physics Vol. I: Nuclear Structure**, John Wiley, Nueva York (1974).
- [22] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, **Table of integrals, Series and Products**, Academic Press (2007).
- [23] C. Bahri, D. J. Rowe and J. P. Draayer, Comp. Phys. Commun., **159**, 121-143 (2004).