



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE INGENIERÍA

Hidrodinámica entre dos burbujas en fluidos  
no-newtonianos

TESIS

*que para obtener el título de:*

**Ingeniero Mecánico**

*presenta:*

**Diego Sámano García**

Director de Tesis:

Dr. José Roberto Zenit Camacho

Dr. Juan Rodrigo Vélez Cordero



2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>3</b>
<b>Resumen</b>	<b>5</b>
<b>Motivación</b>	<b>7</b>
<b>Objetivos</b>	<b>9</b>
<b>1. Antecedentes</b>	<b>11</b>
1.1. Flujo alrededor de burbujas . . . . .	11
1.1.1. Burbujas en fluidos newtonianos . . . . .	12
1.1.1.1. Burbuja aislada . . . . .	12
1.1.1.2. Par de burbujas . . . . .	15
1.1.2. Burbujas en fluidos no newtonianos . . . . .	17
1.1.2.1. Fluidos no newtonianos . . . . .	17
1.1.2.2. Burbuja aislada . . . . .	19
1.1.2.3. Cauda negativa . . . . .	20
1.1.2.4. Par de burbujas . . . . .	22

1.2. Objetivos de la tesis . . . . .	22
<b>2. Arreglo experimental y técnica de medición</b>	<b>25</b>
2.1. Equipo y técnicas experimentales . . . . .	25
2.1.1. Arreglo experimental . . . . .	25
2.2. Técnicas de visualización . . . . .	28
2.2.1. Cámara rápida . . . . .	28
2.2.2. Análisis digital de imágenes . . . . .	28
2.3. Caracterización reologica de fluidos . . . . .	31
2.3.1. Fluido newtoniano . . . . .	33
2.3.2. Fluidos adelgazantes inelásticos . . . . .	33
<b>3. Resultados</b>	<b>35</b>
3.1. Burbujas en fluido newtoniano . . . . .	37
3.1.1. Verticalmente alineadas . . . . .	37
3.1.2. Horizontalmente alineadas . . . . .	43
3.2. Burbujas en fluido adelgazante inelástico . . . . .	46
3.2.1. Verticalmente alineadas . . . . .	46
3.2.2. Horizontalmente alineadas . . . . .	52
<b>4. Discusión</b>	<b>55</b>
4.1. Burbujas alineadas verticalmente . . . . .	55
4.2. Burbujas alineadas horizontalmente . . . . .	56





# Índice de figuras

1.1. Burbujas de casquete . . . . .	13
1.2. Mapa de forma de burbujas . . . . .	14
1.3. Curvas características de fluidos no newtonianos . . . . .	18
2.1. Arreglo experimental . . . . .	26
2.2. Detalle de la parte inferior de la columna . . . . .	27
2.3. Fuente de voltaje . . . . .	27
2.4. Cámara de alta velocidad . . . . .	28
2.5. Patrón de puntos . . . . .	28
2.6. Etapa 1 de procesamiento de imágenes . . . . .	29
2.7. Etapa 2 de procesamiento de imágenes . . . . .	29
2.8. Etapa 3 de procesamiento de imágenes . . . . .	30
2.9. Etapa 4 de procesamiento de imágenes . . . . .	30
2.10. Etapa 5 de procesamiento de imágenes . . . . .	31
2.11. Geometría cono plato. . . . .	32
2.12. Reología de los fluidos. . . . .	34

3.1. Cd vs. Re . . . . .	36
3.2. Y(n) vs. n . . . . .	37
3.3. Esquema del sistema de burbujas en línea . . . . .	39
3.4. Secuencia de imágenes.(Newtoniano) . . . . .	40
3.5. Gráficas d vs t. (Newtoniano) . . . . .	41
3.6. Gráficas velocidad de la burbuja líder contra tiempo . . . . .	42
3.7. Gráficas velocidad de la burbuja aveniente contra tiempo . . . . .	43
3.8. Esquema del sistema de burbujas alineadas horizontalmente . . . . .	44
3.9. Gráficas d vs t. Burbujas horizontalmente alineadas. (Newtoniano) . . . . .	44
3.10. Gráficas velocidad de la burbuja izquierda contra tiempo.(Newtnoniano) . . . . .	45
3.11. Gráficas velocidad de la burbuja derecha contra tiempo. (Newtnoniano) . . . . .	45
3.14. Gráficas d vs t. (Adelgazantes) . . . . .	48
3.12. Secuencia de imágenes. (Adelgazante n=0,85) . . . . .	49
3.13. Secuencia de imágenes. (Adelgazante n=0,55) . . . . .	50
3.15. Gráficas v1 vs t. (Adelgazantes) . . . . .	50
3.16. Graficas v2 vs t. (Adelgazantes) . . . . .	51
3.17. Gráficas d vs t. (Adelgazantes). Alineadas horizontalmente . . . . .	52
3.18. Gráficas d* vs t. (Adelgazantes). Alineadas horizontalmente . . . . .	53
3.19. Graficas v1 vs t. (Adelgazantes). Alineadas horizontalmente . . . . .	53
3.20. Graficas v2 vs t. (Adelgazantes). Alineadas horizontalmente . . . . .	54
4.1. Gráficas de un caso específico. Solución acuosa de Xanthan 0,1 % (n=0,55). . . . .	57

# Índice de cuadros

2.1. Propiedades de los fluidos. . . . .	34
3.1. Datos de las burbujas individuales. . . . .	38
3.2. Datos de los experimentos en línea, (Newtoniano) . . . . .	41
3.3. Datos de burbujas alineadas verticalmente en adelgazante $n=0,85$ . . . . .	47
3.4. Datos de burbujas alineadas verticalmente en adelgazante $n=0,55$ . . . . .	48



# Agradecimientos

Gracias Universidad Nacional Autónoma de México por haberme brindado la oportunidad de desarrollarme personalmente, académicamente y profesionalmente a lo largo de la licenciatura y el haberme permitido encontrarme a tanta gente tan valiosa que con sus enseñanzas y concejos me han hecho crecer como individuo a nivel académico, personal y profesional. En especial al Instituto de Investigaciones en Materiales por abrirme las puertas.

Agradezco a:

Mis padres por todo el apoyo, amor y cariño brindado a lo largo de mi vida

Mi tutor Roberto Zenit que me abrió las puertas de su laboratorio, conocimiento y amistad.

A mi mentor Baltasar Mena por el conocimiento, oportunidades y amistad.

A Felix Nuñez un excelente maestro que marco mi estancia en la facultad.

A Jose Luis Fernandez por todo el apoyo y amistad brindada.

A Rodrigo (*mijito*), Santos, Ernesto, Charly, Rene, Fede, Enrique Soto, Enrique Sandoval y Enrique Guzmán por todos esos momentos alegres en el laboratorio.

A Barbie por todo el amor y apoyo que me ha brindado

A mi hermanita, muchas gracias por tu apoyo.



# Resumen

El presente trabajo trata sobre la interacción de dos burbujas en ascenso libre en fluidos newtonianos y no newtonianos. Este trabajo difiere de muchos otros que se han realizado acerca del ascenso libre de más de una burbuja. La característica principal que diferencia este trabajo sobre demás trabajos sobre pares de burbujas es que se sigue la evolución del ascenso de las dos burbujas. La segunda característica importante de este trabajo es que estudia el efecto del adelgazamiento del fluido en la interacción de las dos burbujas. El estudio que se realizó fue completamente experimental.

Los experimentos se llevaron a cabo en una columna de sección transversal rectangular. Se controló el volumen de las burbujas y la separación entre ellas. El arreglo experimental permitió una gran repetibilidad en los experimentos. Se realizaron mediciones en tres fluidos diferentes, un fluido newtoniano y dos adelgazantes ( $n=0,55$  y  $n=0,85$ ). Los fluidos adelgazantes fueron hechos con soluciones de xantana. Para cada fluido se realizaron pruebas de dos burbujas alineadas verticalmente y alineadas horizontalmente.

En este trabajo se reportan las mediciones de 12 experimentos de burbujas alineadas verticalmente en cada fluido y 12 experimentos de burbujas alineadas horizontalmente en cada fluido. Los resultados obtenidos indican que las burbujas en fluidos adelgazantes tienen un comportamiento similar al caso de las burbujas en fluidos newtonianos antes del contacto. En todos los casos se encontró una trayectoria divergente (repulsión) cuando están alineadas horizontalmente y convergente (atracción) para burbujas verticalmente alineadas. Sin embargo, en el caso de los fluidos adelgazantes cuando las burbujas se alcanzan estas tienden a mantenerse juntas. Este comportamiento se acentúa con el aumento del adelgazamiento. Sin embargo, se reduce a medida que los efectos inerciales incrementan.



# Motivación

Los flujos burbujeantes se ocupan en muchas aplicaciones industriales como intercambiadores de calor, reactores de aereación. La estructura de un flujo burbujeante cambia considerablemente debido a las interacciones entre burbujas, la fluctuación de velocidad de las burbujas individuales, la coalescencia entre burbujas o la formación cúmulos. Para poder entender los flujos burbujeantes es necesario entender primero el comportamiento de las burbujas.

El comportamiento de una burbuja individual (Duineveld, 1995) y el de un par de burbujas (Kok, 1993b) se han estudiado en una aproximación de flujo potencial. Sin embargo, la construcción teórica de un modelo del comportamiento de las burbujas en una nube o cúmulo de burbujas no es una extensión del comportamiento de una burbuja individual. La formación de cúmulos se ha encontrado experimentalmente en fluidos newtonianos (Zenit et al., 2001; Figueroa-Espinoza and Zenit, 2005; Takagi et al., 2008 ) y en fluidos no newtonianos (Joseph, 1994, Gheissary, 1996, Mu, 2001, Radl, 2007, Velez, 2008). Los cúmulos de burbujas reducen considerablemente el área de contacto de la burbuja con el medio, haciendo mas ineficiente la transferencia de masa. Hasta la fecha no se han estudiado los criterios de formación de los cúmulos. Sin embargo, no se desean en ninguna aplicación de burbujeo. Para entender la interacción entre burbujas hay que comenzar con el caso mas simple que es la interacción entre dos burbujas. Actualmente no se encuentra en la literatura un estudio de la interacción entre dos burbujas enfocado a los fenómenos de atracción y repulsión entre burbujas.



# Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es entender las condiciones que determinan cuándo se forman cúmulos de burbujas en fluidos no newtonianos. Los objetivos particulares son:

- Construir un dispositivo para producir pares de burbujas alineados verticalmente u horizontalmente. El dispositivo debe permitir variar el tamaño de las burbujas y la separación entre ellas.
- Construir un dispositivo para seguir las burbujas con una cámara de alta velocidad.
- Observar y describir el comportamiento de un par de burbujas en ascenso en distintos fluidos adelgazantes inelásticos.
- Elaborar un programa de análisis de imágenes para determinar la posición de las burbujas con respecto a una referencia, la forma y tamaño de las burbujas.
- Determinar las condiciones de atracción y repulsión entre las burbujas.



# Capítulo 1

## Antecedentes

### 1.1. Flujo alrededor de burbujas

Existen numerosos reportes del comportamiento de burbujas en fluidos newtonianos. Esta información se encuentra recopilada en los libros de Clift et al. (1978) y Michaelides (2006). A pesar de que estos libros son un compendio completo, existen aun fenómenos en flujos multifásicos que no han sido comprendidos cabalmente.

Cuando tenemos dos fluidos inmiscibles estos forman una interfaz con la menor área posible. Esto es resultado de que los sistemas tienden a buscar un estado de equilibrio con menor energía. Cuando tenemos una pequeña porción de un fluido inmiscible en otro, la forma más óptima es la esfera. Esto ocurre cuando la fuerza dominante es la tensión interfacial. Cuando intervienen otras fuerzas la burbuja se puede deformar. Por ejemplo, una burbuja deja de ser esférica si las fuerzas inerciales dominan.

El flujo alrededor de un objeto no es un flujo homogéneo simple. Generalmente además de un flujo cortante simple, existe flujo extensional unidireccional en la estela y bidireccional en el frente. Debido a esto, no es sencillo describir los flujos. Sin embargo, considerando un número de Reynolds pequeño, se han logrado obtener soluciones analíticas. Este es uno de los problemas clásicos de mecánica de fluidos conocido como flujo lento (*creeping flow*).

El número de Reynolds es un parámetro adimensional que compara los efectos inerciales con los efectos viscosos en un flujo. Un número pequeño de Reynolds indica que los esfuerzos viscosos dominan el flujo. El número de Reynolds se define como:

$$Re = \frac{\rho d_e U}{\mu} \quad (1.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad,  $d_e$  es el diámetro de la burbuja,  $U$  es la velocidad de la burbuja y  $\mu$  es la viscosidad.

Existen dos soluciones analíticas del flujo alrededor de una esfera. La diferencia entre las dos soluciones es la condición de frontera que se considera. La primer solución considera como condición de frontera que en la interfaz no hay deslizamiento. Esta suposición da origen a la ley de Stokes (Stokes, 1880). El otro caso es considerar que la interfaz se puede mover generando una circulación interna. Se supone que los dos fluidos son inmiscibles y que la tensión superficial en la interfaz es suficiente para mantener la burbuja en forma esférica. La velocidad en la interfaz se considera que  $v_r = v_\theta = v_s$ , donde  $v_r, v_\theta$  y  $v_s$  son la velocidad radial, angular y la de superficie respectivamente, y  $v_z = v_\infty$  lejos de la burbuja. Considerando esto para un flujo lento, donde el número de Reynolds es pequeño, entonces la solución analítica nos describe un flujo de Hadamard (Hadamard, 1911, Rybczynski).

Las soluciones al flujo de Stokes para la velocidad terminal y el coeficiente de arrastre de la gota o burbuja son:

$$v_\infty = \frac{r^2(\rho_g - \rho)g}{18\mu} \quad (1.2) \quad C_d = \frac{24}{Re} \quad (1.3)$$

Y para el flujo de Hadamard:

$$v_\infty = \frac{r^2(\rho_g - \rho)g}{12\mu} \quad (1.4) \quad C_d = \frac{16}{Re} \quad (1.5)$$

### 1.1.1. Burbujas en fluidos newtonianos

#### 1.1.1.1. Burbuja aislada

Cuando una burbuja se somete a un flujo externo, ésta se deforma hasta que los esfuerzos normales y cortantes lleguen a un equilibrio en la interfaz. Las formas que adquieren éstas son limitadas, en estado estacionario, ya que estas no pueden tener formas afiladas o esquinas debido a las fuerzas interfaciales. Existen numerosos estudios acerca de la forma de burbujas.

a) Esféricas : En general, las burbujas y las gotas se aproximan a una esfera si la tensión interfacial y/o de las fuerzas viscosas son mucho más importantes que las fuerzas de inercia.

Se define una partícula esférica si la diferencia de dimensiones entre el eje menor y el eje mayor es menor del 10 %.

b) Elipsoidales : Las burbujas y gotas que tengan una geometría construida por la rotación de una elipse alrededor de un diámetro principal con interfaz convexa alrededor de toda la superficie. Con frecuencia estas burbujas o gotas no se corresponden exactamente con elipsoides perfectos. Por otra parte, las burbujas y las gotas elipsoidales comúnmente sufren deformaciones periódicas lo que complica la caracterización de la forma.

c) Casquete esférico o casquete elipsoidal: Son las burbujas que adoptan una forma plana o tienen una base cóncava. Estas tienen un aspecto de elipsoides cortados. Si tiene una base cóncava existe un término en inglés “dimpled” para referirse a esa forma, en castellano sería decir que tiene hoyuelos, como los que se forman al sonreír, por ejemplo. Estas burbujas pueden tener faldones delgados alargados. Ver figura 1.1.

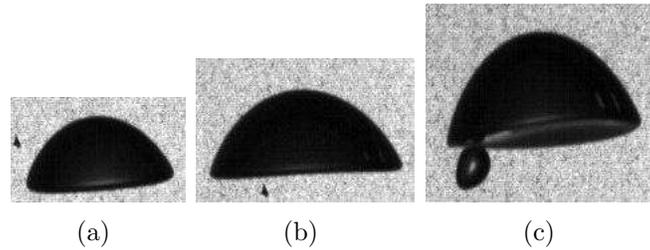


Figura 1.1: Burbujas de casquete. La figura 1.1(a) muestra una burbuja de casquete esférico. En medio, en la figura 1.1(b), se observa una burbuja de casquete elipsoidal. Finalmente a la derecha, en la figura 1.1(c), se muestra el hoyuelo al que nos referimos con “dimpled”.

La forma de la burbuja no solo depende de la velocidad terminal de ascenso, también tiene un papel importante en la transferencia de masa y de calor así como su comportamiento de coalescencia. Se puede construir una mapa de correlación de las formas que adoptan las burbujas en términos de los números adimensionales:

$$E_o = \frac{g\Delta\rho d_e^2}{\sigma} \quad (1.6)$$

$$M_o = \frac{g\mu^4\Delta\rho}{\rho\sigma} \quad (1.7)$$

$$Re = \frac{\rho d_e U}{\mu} \quad (1.8)$$

donde  $g$  es la gravedad;  $\Delta\rho$  es la diferencia de densidades entre las fases;  $d_e$  es el diámetro de la burbuja;  $\sigma$  es la tensión superficial y  $\mu$  es la viscosidad.  $E_o$  es el número de Eötvös, que compara las fuerzas de flotación con respecto a las fuerzas superficiales. Entre mayor sea el número de Eötvös la burbuja es mas deformable ya que las fuerzas superficiales son menores a la flotación que tiene.  $M_o$  es el número de Morton, describe las propiedades del sistema. El número de Reynolds compara las fuerzas inerciales con las viscosas. El gráfico utilizado tiene en la ordenada al número de Reynolds y en la abscisa el número de Eötvös. El gráfico resultante se puede ver en la figura 1.2 Las curvas que atraviesan en diagonal el

gráfico son curvas de número de Morton constante. Este gráfico no puede ser usado para valores extremos de las relaciones de densidad,  $(\rho_g/\rho_l)$ , o viscosidad,  $(\mu_g/\mu_l)$ .

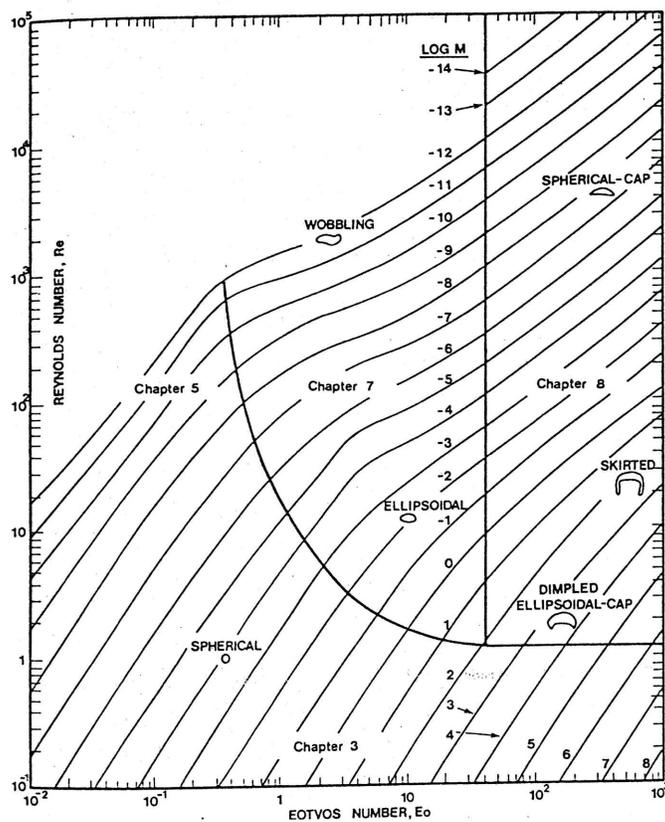


Figura 1.2: Gráfica de los regímenes de forma de burbujas y gotas en movimiento debido a efectos gravitacionales.(Clift et al., 1978)

Para una burbuja que asciende libremente, de volumen pequeño, la velocidad terminal se comporta de acuerdo a la ley de Stokes. Esto implica que el flujo alrededor de la burbuja no es lo suficientemente fuerte para deformar la interfaz de ésta y por lo tanto se puede considerar como partícula rígida. Esta consideración está respaldada por algunos experimentos que demuestran que el interior de la burbuja esférica sin deformación no tiene recirculaciones interiores. Cuando el volumen de la burbuja incrementa, la velocidad terminal incrementa y se mantiene entre el régimen de la ley de Stokes y el flujo de Hadamard, hasta que lo alcanza. A un volumen crítico, la velocidad cae por debajo de el valor de Hadamard y para grandes volúmenes cae por debajo de la solución de Stokes. Esto se atribuye a la aparición de los efectos inerciales. Por último para volúmenes muy grandes se ha observado una inestabilidad en la trayectoria. La burbuja se vuelve elipsoidal y esto provoca un incremento en el arrastre.

### 1.1.1.2. Par de burbujas

El estudio de ensambles de burbujas es importante para entender el desempeño de reactores donde se ve involucrado el burbujeo para algún proceso industrial. El primer paso para entender flujos burbujeantes es el estudio de un par de burbujas, con el objetivo de entender la interacción una con otra. Los primeros en estudiar el movimiento de dos burbujas fueron Stimson and Jeffery (1926) de forma analítica. Usaron un sistema de coordenadas biesférico para resolver analíticamente las velocidades en función de la distancia de dos esferas que se mueven verticalmente alineadas para un flujo lento. Encontraron que dos cuerpos adquieren una velocidad mayor a la velocidad de un solo objeto. Entre menor distancia exista entre los objetos mayor es la velocidad.

Crabtree and Bridgwater (1971) propusieron que la velocidad de la segunda burbuja (burbuja aveniente) de un par alienado verticalmente, debe ser igual a una superposición de la velocidad terminal más la velocidad de la estela a la distancia donde se encuentra la segunda burbuja. Esta idea fue referida por Bhaga and Weber (1980) como principio de superposición. En los trabajos de Narayanan et al. (1974), Bhaga and Weber (1980), Zhang (2003) se confirmó la hipótesis de Crabtree and Bridgwater (1971) para un par de burbujas que ascienden a un número de Reynolds de  $O(100)$ . Crabtree y Bridgwater reportaron que la segunda burbuja sufre una deformación importante, aun no explicada, donde la burbuja se deforma momentos antes de tocar a la burbuja de arriba. Esta deformación fue reportada y fotografiada por Narayanan et al. (1974). Estos últimos trabajaron con burbujas de distintos tamaños provocando dos tipos de estelas, una estela delgada y una estela que forma un vórtice estable. Para el caso de la estela delgada, el modelo de Stimson and Jeffery (1926) describió bien las velocidades de ascenso a pesar de que fue elaborado para flujo lento. Para el caso de la estela con vórtice estable se propuso un modelo similar al propuesto por Crabtree and Bridgwater (1971).

Bhaga and Weber (1980) también trabajaron con burbujas cuya estela formaba un vortice estable alrededor de un número de Reynolds de 80 y un Eötvös aproximado de 70. Las mediciones experimentales de la velocidad de la estela y la información obtenida del principio de superposición fueron las esperadas para las distintas separaciones.

Por otro lado se ha estudiado la interacción de un par de burbujas en flujo potencial es decir ua un  $Re$  alto. Este trabajo fue realizado por Biesheuvel and Wijngaarden (1982), Kok (1993a). Con estos trabajos se estableció que un par de burbujas ascendiendo en flujo potencial experimentan una fuerza atractiva si el ángulo de acercamiento esta entre  $54^\circ$  y  $-54^\circ$  con respecto a la horizontal. La fuerza de atracción, relacionada con un coeficiente de empuje negativo Legendre et al. (2003), Vasseur and Cox (1977), se debe a que el fluido entre las burbujas pasa a mayor velocidad y forma una zona de baja presión. En el caso que estan alineadas a un angulo mayor a  $54^\circ$  ó  $-54^\circ$  las burbujas se repelen . Esto se debe a la presión dinámica que ejerce una burbuja cobre la otra. El comportamiento en flujo potencial

es opuesto a lo que ocurre en un flujo viscoso (Legendre et al., 2003, Happel and Pfeffer, 1960, Vasseur and Cox, 1977).

En el caso de flujo viscoso las burbujas experimentan una fuerza de atracción cuando están alineadas verticalmente y se repelen cuando la alineación entre ellas es horizontal. La explicación a este comportamiento radica en el vórtice que genera el paso de la burbuja en el fluido y a la capa límite alrededor de ésta. Cuando las burbujas van lado a lado, alineadas horizontalmente, los vórtices interactúan causando la repulsión entre ellas. Se genera un coeficiente de empuje positivo y se separan. Esto ocurre también cuando están cerca de una pared vertical (Vasseur and Cox, 1977). Cuando las burbujas se encuentran alineadas verticalmente el vórtice de la primer burbuja produce succión sobre la segunda burbuja y esto provoca que se atraigan. En la interacción del par de burbujas se puede dar una posición de equilibrio donde los efectos viscosos (atracción) y los efectos inerciales (repulsión) se anulen. Esta posición de equilibrio se dará cuando la burbuja tenga la misma succión provocada por la primer burbuja que la repulsión causada por la estela superior propia. Yuan and Prosperetti (1994) analizaron numéricamente esta condición de equilibrio. Encontraron la condición de equilibrio para un par de burbujas ascendiendo en un rango de números de Reynolds amplio ( $20 < Re < 200$ ). Esta distancia de equilibrio no se ha reportado en experimentos, solamente en simulaciones numéricas.

Se han realizado numerosos experimentos y simulaciones para asociar el flujo potencial y el flujo lento (Legendre et al., 2003, Sanada et al., 2009, Kim et al., 1993, Katz and Meneveau, 1996, Kok, 1993b). Estos reportes han revelado que un par de burbujas ascendiendo verticalmente alineadas se comportan como un flujo viscoso. Siempre, la segunda burbuja alcanza a la primera. Kok (1993b) observó en condiciones de coalescencia inhibida lo que se ha llamado como “drafting-kissing-tumbling” (alcance, toque y rebote) (Brennen, 2005). Esto consiste en que las burbujas se alcancen, se toquen, giren alineándose horizontalmente y se separen. Por otro lado las burbujas que se liberan horizontalmente alineadas, se repelen para  $Re < 30$  y se atraen para  $Re > O(200)$  y en el rango intermedio existe una transición que depende de la distancia de separación Legendre et al. (2003).

En el caso de las burbujas verticalmente alineadas se puede establecer que el arrastre promedio en las burbujas es menor que el de la burbuja individual. Entre menor distancia exista entre las burbujas menor arrastre. Esto es debido a las dos burbujas alineadas se pueden tomar como un cuerpo alineado a la dirección del flujo. Para las burbujas horizontalmente alineadas, con ayuda de mediciones experimentales del coeficiente de arrastre en partículas rígidas Liang et al. (1996) y con ayuda de los trabajos de Legendre et al. (2003), Kim et al. (1993), se postuló que dos burbujas horizontalmente alineadas tendrán menor arrastre que la burbuja individual para flujos con un Reynolds bajo ( $Re < 50$ ) y un mayor arrastre para  $Re > 100$ . Otro factor que afecta el arrastre de las burbujas horizontalmente alineadas es la distancia de separación entre ellas. Este disminuirá para números de Reynolds bajos entre menor sea la distancia y para números de Reynolds altos aumentará entre mas cerca estén las burbujas, tendiendo al valor de la burbuja individual entre mas separados estén.

## 1.1.2. Burbujas en fluidos no newtonianos

### 1.1.2.1. Fluidos no newtonianos

Reología es el estudio de la deformación y el flujo de la materia sometida a un esfuerzo. El término fue adoptado por Eugene Bingham, un profesor de la Universidad de Lehigh, en 1920. El término fue inspirado por la famosa frase: *Panta rei, panta hwrei kai ouden menei* (Heráclito, c. 500 BC) “Todo fluye, todo avanza y nada sigue igual”. Es posible definir dos tipos de materia: fluido (líquido o gas) y sólido. Cuando se aplica un esfuerzo débil cortante, los fluidos fluyen y los sólidos se resisten.

Los materiales que son puramente sólidos o líquidos son excepciones. En general todos los materiales manifiestan un comportamiento que es combinación de ambos comportamientos (viscoelásticos). Algunos materiales tienen un comportamiento más elástico que viscoso o viceversa, el carácter de este comportamiento se define por la relación entre el tiempo de relajamiento y el tiempo característico de la deformación. A esta relación se le conoce como el número de Deborah

$$De = \frac{Tr}{Tc} \quad (1.9)$$

donde  $Tr$  es el tiempo de relajamiento del fluido y  $Tc$  es el tiempo característico de la deformación

Cuando el número de Deborah es muy pequeño quiere decir que el tiempo de relajamiento del material es muy grande y tiene un comportamiento viscoso; mientras sea más grande el número de Deborah el material tiene un comportamiento elástico.

Los fluidos no newtonianos se pueden clasificar dependiendo de la forma en la que su viscosidad cambia cuando fluyen (figura 1.3). El fluido newtoniano se caracteriza por una dependencia lineal entre la rapidez de corte y el esfuerzo cortante, y por consecuencia la viscosidad se mantiene constante para cualquier rapidez de deformación. Los fluidos adelgazantes y espesantes se caracterizan por tener una dependencia no lineal entre el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación. Para los adelgazantes la pendiente de la curva esfuerzo de deformación - rapidez de deformación disminuye, lo que significa que la viscosidad disminuye con la rapidez de deformación. Con los fluidos espesantes ocurre lo opuesto. También hay fluidos que necesitan un esfuerzo inicial que rompa la estructura inicial y comiencen a fluir. A estos fluidos se les llama fluidos de Bingham. Al esfuerzo necesario para vencer esta estructura y comience a fluir se le llama esfuerzo de fluencia. Todos estos fenómenos se atribuyen al arreglo molecular del fluido, que sometido a esfuerzos cambia de estructura. Existen otro tipo de fenómenos interesantes en los fluidos. El fenómeno que ocurre cuando la viscosidad cambia de valor con el tiempo para una misma condición de flujo. Si la viscosidad incrementa

entonces es un fluido reopéctico y si la viscosidad disminuye entonces es un fluido tixotrópico.

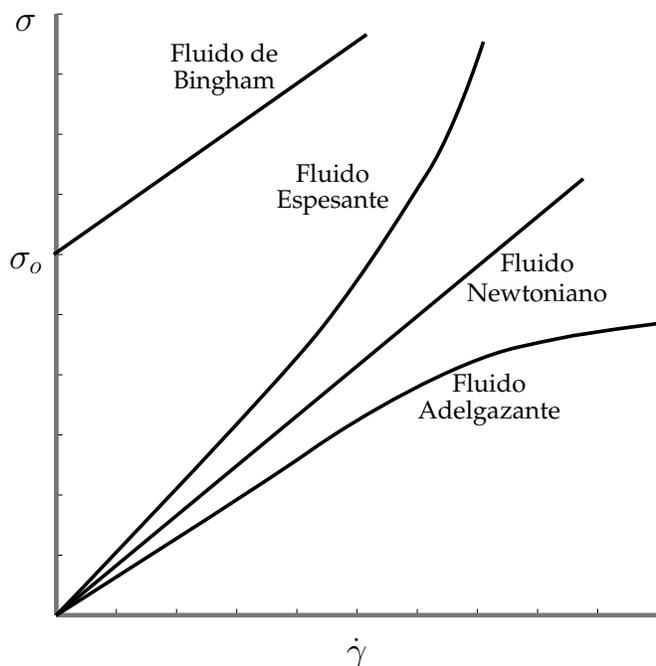


Figura 1.3: Curvas esfuerzo-velocidad de deformación para distintos comportamientos de fluidos.

Aparte de la no linealidad de la viscosidad los fluidos no newtonianos pueden presentar efectos elásticos. Estos fluidos se clasifican como fluidos viscoelásticos. Estos fluidos se pueden clasificar de distintas formas según el comportamiento. Cuando un fluido tiene una viscosidad constante pero presenta efectos elásticos, se denomina fluido de Boger. Para los demás comportamientos se les clasifica como viscoelásticos. Los fluidos viscoelásticos presentan fenómenos muy interesantes. A continuación se discuten tres fenómenos interesantes.

El flujo de sifón en los fluidos newtonianos se da a través de un tubo por la diferencia de presiones entre la entrada y la salida, donde la presión atmosférica empuja el fluido por el tubo. Cuando el fluido tiene moléculas de cadenas largas, estas cadenas se alinean en la dirección del flujo resultando un incremento en la viscosidad extensional. El flujo induce una estructura que se comporta como un sólido en la dirección del flujo, lo que permite que el fluido se mantenga fluyendo sin que se necesite de un tubo para conducir el fluido. Otro fenómeno común es el hinchamiento. Este fenómeno ocurre cuando un fluido viscoelástico en un flujo en una tubería, sale a la atmósfera. Debido a los esfuerzos normales en tensión que se encuentran dentro de la tubería y al salir el relajamiento provoca el hinchamiento del filamento de fluido. Otro fenómeno común que ocurre con los fluidos viscoelásticos es el efecto de Weissenberg. Cuando se pone a girar un eje en un fluido newtoniano éste es empujado

hacia el exterior por fuerzas centrífugas y se forma un vórtice cóncavo hacia abajo. En un fluido viscoelástico, para altas rapidezces de giro, el fluido sube por el eje.

### 1.1.2.2. Burbuja aislada

Actualmente se sabe que en contraste a las burbujas en fluidos newtonianos, en los fluidos no newtonianos las burbujas adoptan formas diferentes (De Kee et al., 1996b,a, 2002). En general, la diferencia es que en las burbujas en fluidos no newtonianos aparece de una pequeña cúspide en las burbujas. Esta cúspide forma una burbuja tipo lagrima y ésta se va haciendo elipsoidal conforme aumenta el volumen. Algunas de estas formas presentan una cauda plana para la cual aun no se ha determinado el criterio de formación (Soto, 2008, Liu et al., 1995). Aunado a las formas que adoptan las burbujas se han logrado identificar dos fenómenos en el ascenso de burbujas en fluidos no-newtonianos, la discontinuidad en la velocidad y la cauda negativa.

#### Discontinuidad en la velocidad

Como se mencionó anteriormente, en un medio newtoniano las burbujas pequeñas se comportan como un sólido y la transición entre la condición en la interfaz de no deslizamiento a corte libre no es abrupta. A diferencia de los líquidos no newtonianos, la transición se puede manifestar como una discontinuidad en la velocidad terminal a un tamaño crítico de burbuja. Este efecto es característico de las burbujas en movimiento en fluidos adelgazantes con elasticidad. Este fenómeno fue reportado inicialmente por Astarita and Apuzzo (1965) y ha sido confirmada por numerosos autores (Leal et al., 1971, Acharya et al., 1977, Haque et al., 1988, De Kee et al., 1996b, Rodrigue et al., 1998, Rodrigue and De Kee, 1999, Herrera-Velarde, 2003).

Astarita and Apuzzo (1965) atribuyeron la aparición de la discontinuidad al cambio en el régimen de flujo de Stokes a un flujo de Hadamard, un cambio en la condición de frontera de rígida a libre. Sin embargo, esta explicación no es satisfactoria ya que la discontinuidad en la velocidad no se presenta en los líquidos newtonianos y sí el cambio de régimen de flujo.

Liu et al. (1995) propusieron que la discontinuidad se debe a la reducción del arrastre debido al cambio de forma de la burbuja antes y después del volumen crítico. Rodrigue et al. (1998) atribuyen este comportamiento a un balance de la elasticidad y las inestabilidades de Marangoni. En un estudio relacionado Rodrigue et al. (1996) reportan el efecto de surfactantes en un líquido y concluyen para que ocurra un salto en velocidad tienen que estar presentes simultáneamente los agentes activos en la superficie así como las fuerzas elásticas. Por otro lado Herrera-Velarde (2003) sugieren una fuerte relacion de la discontinuidad con la formación de una cauda negativa en la parte posterior de la burbuja. Aubry and Singh (2007) no solo apoyan el argumento anterior, sino que sostienen que la cauda negativa impulsa a la

burbuja.

### 1.1.2.3. Cauda negativa

Sigli and Coutanceau (1977) realizaron experimentos de visualización de flujo con un fluido viscoelástico adelgazante de óxido de polietileno. En sus resultados se muestra la aparición de una zona secundaria de recirculación después del punto de estancamiento en la región de la cauda de la esfera. Después de este punto, el fluido se mueve en dirección opuesta al movimiento de la esfera. Posteriormente, Hassagar (1979) nombró este fenómeno como “cauda negativa” cuando reportó el mismo tipo de recirculación en las caudas generadas por burbujas que ascienden en líquidos viscoelásticos (poliacrilamida y glicerol al 1 %).

Sigli reportó que a medida que aumenta la relación de diámetros esfera-columna, el efecto elástico se incrementa. En otras palabras la magnitud de la cauda negativa aumenta y cuando aumenta la inercia, el efecto elástico disminuye. Sin embargo, Bisgaard (1983) reportó que el valor de la cauda negativa es independiente del valor de la relación de diámetros esfera-columna al realizar experimentos de descenso de esferas en una solución adelgazante de poliacrilamida en glicerol y relaciones de diámetro entre 0,04 y 0,18.

En los experimentos realizados por Maalouf and Sigli (1984) se reportó como primer requisito para la formación de caudas negativas, la presencia de adelgazamiento en el fluido. Maalouf et al. analizaron el flujo alrededor de objetos con diferentes geometrías para cuatro diferentes tipos de fluidos. La formación de caudas negativas solamente fue observada para objetos que se sedimentan en fluidos que presentan propiedades elásticas y de adelgazamiento.

Se ha intentado obtener soluciones numéricas donde aparezca la cauda negativa. El primero en reportar una simulación por elemento finito exitosa fue Jin et al. (1991) con la ecuación constitutiva de fluido adelgazante de Phan-Thien-Tanner. En estas soluciones numéricas se confirmó que la presencia de elasticidad y de adelgazamiento son necesarias para la formación de la cauda negativa. En los estudios anteriores se llegó a la misma descripción cualitativa del fenómeno de la cauda negativa; no obstante, se utilizaron diferentes tipos de fluidos y diferentes relaciones de diámetros esfera-columna, complicando la comparación entre los diferentes casos.

Bush (1994) realizó experimentos utilizando cuatro soluciones viscoelásticas adelgazantes de poliacrilamida. En estos experimentos, todos los fluidos tuvieron la misma concentración de poliacrilamida pero diferente concentración de glucosa, modificando de esta forma la curva de adelgazamiento del fluido. Lo que se concluyó de estos experimentos es que la respuesta neta está influenciada fuertemente por las propiedades elongacionales del fluido y que el número de Weissenberg por si solo no es una base para caracterizar el flujo.

A través de las simulaciones numéricas, Bush propuso que, cuando el efecto elástico es el que predomina, se puede observar la formación de la cauda negativa. Para el caso contrario, cuando los efectos extensionales son los que predominan, se observa un alargamiento de la cauda por detrás de la esfera, sin que exista la aparición de la cauda negativa. Por lo tanto, Bush propuso que un valor grande de la relación de  $We/Tr$ , donde  $We$  es el número de Weissenberg y  $Tr$  es la relación de Trouton, ocasionará la aparición de la cauda negativa.

Satrape and Crochet (1994) demostraron la existencia, a través de simulación numérica, de la cauda negativa para un fluido de Boger. Los resultados muestran que la formación de la cauda se encuentra íntimamente relacionada con las propiedades extensionales del modelo constitutivo, particularmente con el parámetro de extensibilidad. Satrape y Crochet encontraron que, para valores pequeños de la longitud máxima de un modelo de dos esferas unidas por un resorte, es posible observar la formación de una cauda negativa en el fluido de Boger. Contrario a lo mencionado por Maalouf and Sigli (1984), Jin et al. (1991), la formación de la cauda negativa no se debe al efecto combinado de la presencia de elasticidad y adelgazamiento en el fluido. De acuerdo con los resultados de Bush (1994), Huang and Feng (1995), Harlen (2002), la formación de la cauda negativa parece estar más bien relacionada con las características extensionales del fluido.

Siguiendo las ideas de Bush, Arigo and McKinley (1998) realizaron una investigación de caudas negativas para esferas que sedimentan en un fluido adelgazante de poliacrilamida y proponen dos criterios, sin poder diferenciar entre ambos cuál es el factor clave para la formación de la cauda. Dou and Phan-Thien (2003) encontraron que la magnitud de los esfuerzos normales y su gradiente son los responsables de la formación de la cauda negativa, mientras que otros factores solo aumentan, disminuyen o retrasan la formación de la cauda negativa. El gradiente de esfuerzos normales propuesto por Dou y Phan-Thien se origina de un balance entre el esfuerzo de corte y la presión alrededor de la cauda. En su análisis, Dou y Phan-Thien encontraron que la formación de la cauda negativa no depende del desplazamiento de las líneas de corriente del fluido y que el adelgazamiento al corte debilita la formación de la cauda negativa.

Evaluando los criterios de formación de la cauda negativa, Mendoza-Fuentes et al. (2009) reportó que las propiedades extensionales y las características la rapidez de elongación son los factores mas importantes en la aparición de la cauda negativa. La formación de la cauda negativa se encuentra cuando la rapidez de elongación coincide con el pico de la zona espesante, donde inicia el adelgazamiento extensional de la viscosidad extensional. Estos experimentos concluyeron que el criterio de Dou y Phan-thien es el que describe mejor el mecanismo físico de la generación de la cauda negativa.

#### 1.1.2.4. Par de burbujas

Sobre la interacción entre pares de burbujas en fluidos no newtonianos no existen tantos estudios como en el caso de líquidos newtonianos (Li, 1998, Sousa et al., 2007, Wenyuan et al., 2009). Estos reportes se han enfocado al estudio de fluidos viscoelásticos. Li (1998) reportaron que la reducción de arrastre es mayormente influenciada por el esfuerzo residual. Estos experimentos fueron realizados en un reómetro donde se somete a periodos de deformación y periodos de relajamiento como pulsos. De esta manera se simula el paso de las burbujas. A este tipo de experimentos se les llama simulación reológica. En la estela de la burbuja se da una reducción de viscosidad para la cual se requiere un tiempo de recuperación del material. Debido a este gradiente de viscosidades la influencia de la primer burbuja sobre una segunda es mayor cuando están verticalmente alineadas. Este efecto se debe a las propiedades adelgazantes del fluido.

Sousa et al. (2007) han estudiado el comportamiento de burbujas de Taylor en soluciones de poliacrilamida (PAAm) y carboximetilcelulosa sódica (CMC). Para estos experimentos se ha observado un efecto repulsivo debido a la cauda negativa. Sin embargo, este efecto se ha observado solo en regímenes de flujo donde el diámetro de la burbuja es igual al diámetro de la tubería. Fuera de estas peculiaridades reportadas, aparentemente la interacción entre burbujas en fluidos no newtonianos sigue las reglas generales encontradas para fluidos newtonianos. Wenyuan et al. (2009) estudiaron burbujas ascendiendo horizontalmente alineadas. Los fluidos que utilizaron eran poco adelgazantes ( $0,9 < n < 0,94$ ). Los resultados fueron similares a los esperados en un fluido newtoniano.

## 1.2. Objetivos de la tesis

El objetivo principal de este trabajo es entender las condiciones que determinan cuándo se forman cúmulos de burbujas en fluidos no newtonianos. Los objetivos particulares son:

- Construir un dispositivo para producir pares de burbujas alineados verticalmente u horizontalmente. El dispositivo debe permitir variar el tamaño de las burbujas y la separación entre ellas.
- Construir un dispositivo para seguir las burbujas con una cámara de alta velocidad.
- Observar y describir el comportamiento de un par de burbujas en ascenso en distintos fluidos adelgazantes inelásticos.
- Elaborar un programa de análisis de imágenes para determinar la posición de las burbujas con respecto a una referencia, la forma y tamaño de las burbujas.

- Determinar las condiciones de atracción y repulsión entre las burbujas.



# Capítulo 2

## Arreglo experimental y técnica de medición

En este trabajo se visualizó el ascenso de un par de burbujas. Se midió la velocidad y la distancia entre ellas durante el ascenso en una columna. Para esto, se diseñó un experimento en el cual se generaban un par de burbujas horizontalmente o verticalmente alineadas, dependiendo el caso. El arreglo experimental permitió seguir a las burbujas con una cámara rápida durante su trayectoria.

### 2.1. Equipo y técnicas experimentales

#### 2.1.1. Arreglo experimental

El arreglo experimental consistió en una columna de acrílico transparente y una base móvil para seguir las burbujas con la cámara. La columna de acrílico se eligió de sección transversal rectangular. Esto evita los problemas por refracción de luz. En la figura 2.1 se muestra el diagrama del arreglo general.

La columna se conforma de 3 piezas. La tapa inferior que tiene un capilar de acero inoxidable, de 1,6 mm de diámetro interno. A través de este capilar se inyectan las burbujas en el centro de la columna. Este capilar tiene, en el lado exterior de la columna, una conexión de presión hembra la cual a su vez está unida a un capilar de 0,2 mm de diámetro para generar una caída de presión. Del lado interno de la columna, se tiene una conexión de presión macho en la cual se conecta el capilar en el cual se forma la burbuja. Esta configuración permite cambiar el tamaño del capilar y así formar burbujas de distintos tamaños.

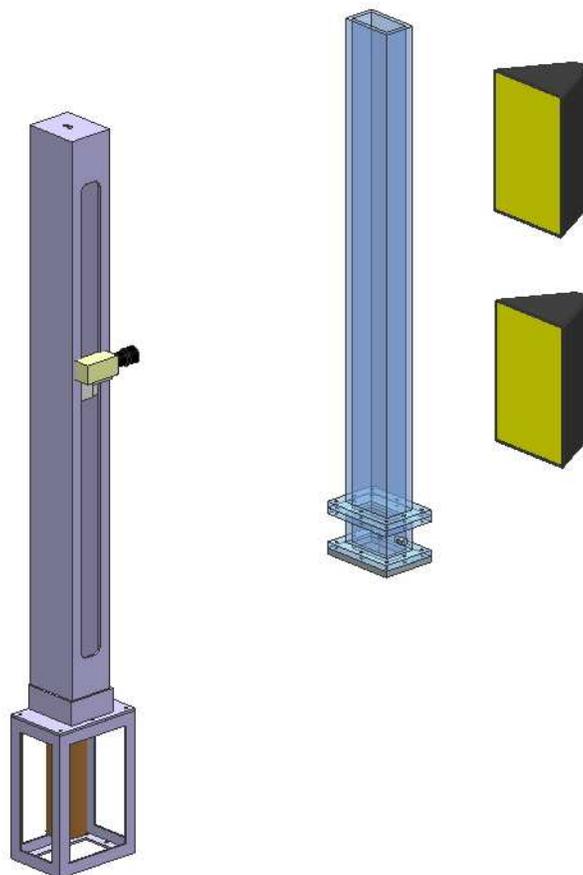


Figura 2.1: Arreglo experimental.

La segunda pieza que conforma la columna es la parte donde se forman las burbujas. Tiene una sección transversal de 5 cm por 10 cm y una altura de 6 cm. En una de las paredes laterales tiene un pasa muros de  $3/4$  de pulgada. Por este pasa muros se insertó un capilar de acero inoxidable y diámetro interno de 1,6 mm. Este capilar tiene en el extremo interior de la columna una conexión de presión hembra y a ésta se une un capilar de 0,2 mm para generar una caída de presión. En el otro extremo se conecta una manguera para alimentar de aire el arreglo. Esta configuración permite que el capilar se mueva en el interior de la columna para generar las burbujas en distintas posiciones. En la figura 2.2 se muestra a detalle la base de la columna.

La tercer pieza de la columna es el canal de visualización. Este canal tiene una altura de 102 cm y una sección transversal de 5 cm por 10 cm. Esta columna tiene en la parte inferior un agujero de drenado. A esta columna se le colocó un patrón de puntos como referencia para realizar el análisis digital de imágenes. La columna se iluminó por la parte posterior con

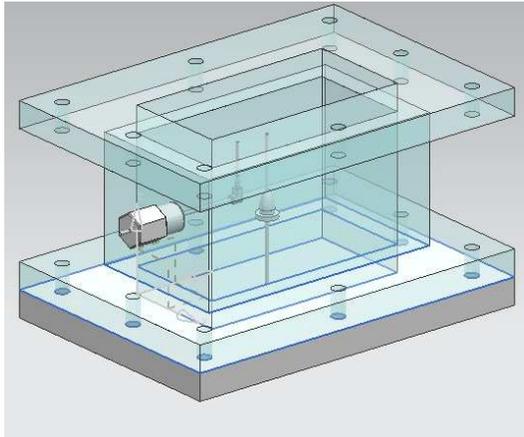


Figura 2.2: Detalle de la parte inferior de la columna.

luz difusa. Se colocaron dos reflectores de 500 watts para iluminar y papel albanene como difusor. Con ésto se logró un buen contraste de las burbujas con el fondo.

La base móvil para la cámara se colocó frente a la columna. Esta base móvil está conformada por un carro con seis rodamientos cilíndricos a 45°. Los rodamientos se fijaron al carro por la parte central de estos. La parte externa hace contacto con una barra guía lisa, la cual al girar transmite el par al carro por medio de fricción. La barra está fija en los extremos por otros dos rodamientos. El extremo inferior de la barra está unida a un motor de 108 V de corriente directa por medio de una unión universal.



Figura 2.3: Fuente de voltaje.

El motor se controla por medio de una fuente de voltaje Agilent E3632A (Figura 2.3 ). El rango de voltaje que se utilizó fue 14 - 30 V. La activación de la base móvil se realizaba manualmente. Dependiendo del fluido y del tamaño de burbuja se seleccionaba el voltaje. El rango de velocidades en el que se trabajó fue entre 45 y 130  $\frac{mm}{s}$ .

## 2.2. Técnicas de visualización

Una vez montado el experimento se obtuvieron imágenes por medio de una cámara rápida. Cada secuencia de imágenes se analizó por medio de la técnica de análisis digital de imágenes. Por medio de esta técnica se calculó la distancia entre burbujas, la velocidad de ascenso, el coeficiente de arrastre y la forma de la burbuja.

### 2.2.1. Cámara rápida



Figura 2.4: Cámara de alta velocidad Motion Scope PCI-8000.

Para tomar las fotos a lo largo del ascenso de las burbujas se usó una cámara de alta velocidad PCI-8000 marca Motion Scope. Ésta es capaz de grabar hasta 8000 cuadros por segundo, a una resolución de 460 x 420 pixeles. Las imágenes son blanco y negro. Para esta investigación, las imágenes se adquirieron a una tasa de 60 cuadros por segundo. Se eligió esta tasa de adquisición para visualizar la evolución del ascenso completo.

### 2.2.2. Análisis digital de imágenes

Para el análisis digital de imágenes se utilizó MATLAB<sup>®</sup>. Se escribió un código con el cual se determinó el desplazamiento de la cámara, se localizó el centroide de cada burbuja y se calculó la distancia entre burbujas, altura recorrida, velocidad y deformación. El reto de este análisis es que la referencia se iba desplazando y existían pequeñas vibraciones.

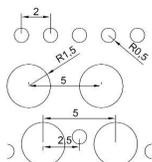


Figura 2.5: Patrón de puntos.  
Todas las dimensiones están en [mm].

Para eliminar el error provocado por vibraciones se consideró patrón de puntos mostrado en la figura 2.5. Este patrón de puntos consistía en tres líneas de puntos. Cada línea era diferente a la otra.

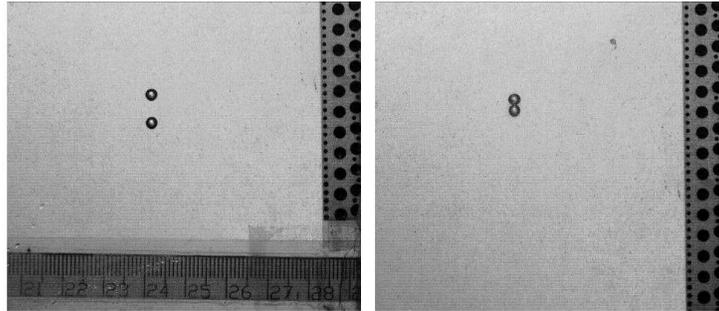


Figura 2.6: Imágenes adquiridas.

El código de MATLAB<sup>®</sup> trata las imágenes por etapas; éstas se pueden dividir en 4. La primera etapa consistió en determinar el desplazamiento de la cámara. Se elegía manualmente en la secuencia de imágenes los puntos de referencia. Se elegían dos puntos en una imagen anterior y en la actual. Se determinaba la posición en cada imagen y con esto, el desplazamiento en el sentido vertical y horizontal entre una imagen y la otra. Este dato se almacenaba en una variable. Se muestra un esquema en la figura 2.7.

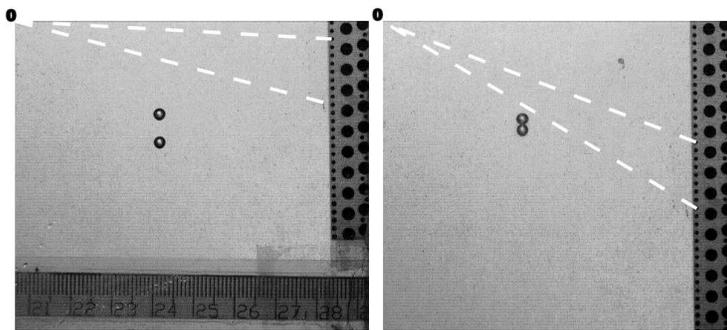


Figura 2.7: Etapa 2 cálculo del desplazamiento de la cámara en un sistema absoluto.

Una vez que se determina el desplazamiento de la cámara, la siguiente etapa consistió en binarizar la imagen. Este proceso iniciaba con una selección de un rango de la escala de grises. Los píxeles que se encontraran en el rango se convertían en 1 y lo demás en 0. Este proceso nos entregaba una imagen con muchos objetos como se muestra en la figura 2.8. Los espacios rodeados por un mismo cuerpo se rellenaban para completar el cuerpo.

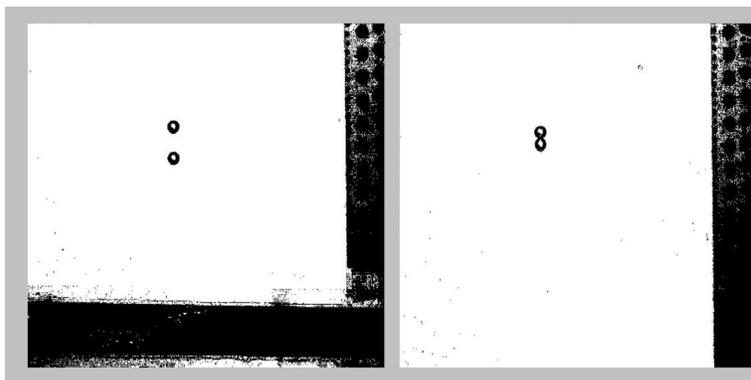


Figura 2.8: Etapa 3: binarización de la imagen y los objetos del área del rango de las burbujas se retienen y el resto se descarta.

El siguiente paso consistió en discriminar que objetos eran burbujas o no. Para lograr esto se definió un rango de áreas que dependía del tamaño de la burbuja. Todos los objetos que no estuvieran en este rango se descartan, esto permitió eliminar el ruido. El siguiente criterio que se aplicó consta de eliminar cualquier cuerpo que su relación de radios fuera muy pequeña. Esto se ve reflejado en la proporción del cuerpo, si la relación de radios es muy pequeña quiere decir que es un cuerpo alargado y como las burbujas con las que se trabajó eran prácticamente esféricas la relación de radios no debía de ser menor a 0,5. Esto nos permitió aun tener la trayectoria cuando las burbujas estaban juntas. El resultado de esto se muestra en la figura 2.9

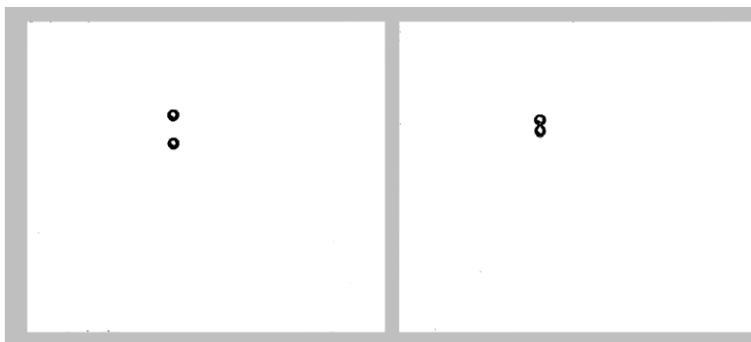


Figura 2.9: Etapa 4: Cálculo del centro geométrico de cada burbuja en el sistema referenciado.

Una vez que se procesó la imagen se determinó la posición de los centros de masa de las burbujas. A esta información se le agregó el desplazamiento de la cámara para tener las posiciones absolutas. Con la posición absoluta y el tiempo en el instante se calcularon las velocidades y las distancias entre burbujas. El método para determinar la velocidad fue por

diferencia central es:

$$v_n = \frac{Y_{n+1} - Y_{n-1}}{2\delta T} \quad (2.1)$$

donde  $Y_{n+1}$  y  $Y_{n-1}$  son las posiciones verticales en los cuadros  $n + 1$  y  $n - 1$ ;  $\delta T$  es el tiempo entre los cuadros  $n + 1$  y  $n - 1$ . En nuestro caso  $\delta T = \frac{1}{30}[s]$

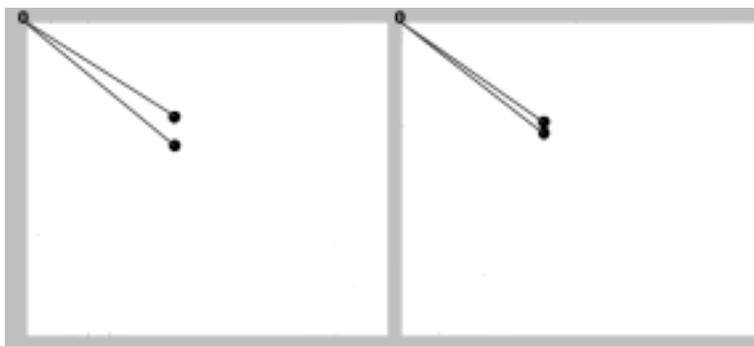


Figura 2.10: Cálculo del centro geométrico de cada burbuja en el sistema referenciado.

### 2.3. Caracterización reologica de fluidos

Se utilizaron cuatro fluidos para realizar este trabajo: un fluido newtoniano, dos fluidos adelgazantes inelásticos (con  $n=0,5$  y  $n=0,8$ ) y finalmente un fluido de Boger. Con esto se estudió los efectos elásticos de los efectos adelgazantes. Fue necesario inhibir la coalescencia. El carácter no coalescente se logró añadiendo a los líquidos  $0,04 \text{ M}$  ( $9,8 \text{ g/L}$ ) de  $\text{MgSO}_4$ . (Lessard R.R., 1971).

Debido a que los fluidos se prepararon en el laboratorio, fue necesario determinar las propiedades reológicas de estos. La viscosidad se determinó por medio de un flujo de Couette. Este método consta de un arreglo con un par de fronteras con movimiento relativo. Comúnmente este tipo de flujo se ejemplifica mediante dos placas paralelas e infinitas. Una se mantiene en reposo y la otra se mueve aplicando un esfuerzo cortante al fluido. Muchos tipos de flujos de Couette se utilizan para determinar viscosidad, los más conocidos, cilindros concéntricos, platos paralelos y cono - plato.

Dado que la geometría cono y plato (figura 2.11) es la que produce un flujo más cercano a un flujo homogéneo, fue la que se utilizó en este estudio. Las relaciones para calcular la rapidez de corte  $\dot{\gamma}$ , esfuerzo de corte  $\tau_{12}$  y viscosidad  $\mu$  son;

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega(t)}{\alpha} \quad (2.2)$$

$$\tau_{12} = \frac{3T\alpha}{2\pi R^3} \quad (2.3)$$

$$\mu = \frac{\tau_{12}}{\dot{\gamma}} = \frac{3T\alpha^2}{2\pi R^3}\Omega \quad (2.4)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo del cono,  $\Omega$  es la velocidad angular,  $R$  es el radio de la geometría y  $T$  es el par aplicado. Con esta geometría también es posible determinar la primer diferencia de esfuerzos normales por la ecuación:

$$N_1 = \frac{2F_N}{\pi R^2} \quad (2.5)$$

donde  $F_N$  es el empuje que el fluido ejerce verticalmente en la placa horizontal.

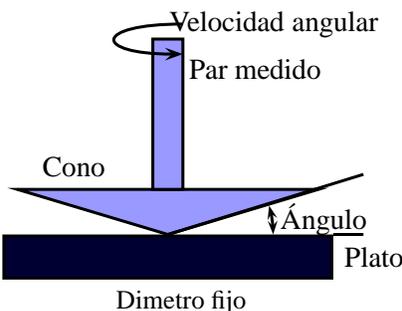


Figura 2.11: Geometría cono plato.

La caracterización reológica de los fluidos se realizó en un reómetro de esfuerzo controlado AR 1000-N de T.A. Instruments. El intervalo de rapidezces de corte en el que se trabajó fue de  $0,01 \text{ s}^{-1}$  hasta  $100 \text{ s}^{-1}$ . El cono que se utilizó fue de 4 cm de diámetro y un ángulo de  $1^{\circ}59'14''$ .

No se realizó un precorte antes de realizar cualquier tipo de medición reométrica. Se aseguró que la muestra no contuviera burbujas de aire ya que alteran las mediciones de la viscosidad. Todas las pruebas reológicas se realizaron a  $23 \text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Para garantizar el estado estacionario y que el flujo sea lo mas cercano a homogéneo en este tipo de pruebas de tal suerte que se asegure que los valores de la viscosidad son correctos,

se realiza tres mediciones de la viscosidad. En ellas el esfuerzo de corte generado por el equipo se mantiene constante durante un tiempo de medición de 10 segundos para cada rapidez de corte. Se permite un error máximo de medición del 1 %. Una vez obtenidas las tres mediciones, el equipo entrega el valor promedio de las viscosidades, garantizándose de esta manera valores confiables de la viscosidad.

### 2.3.1. Fluido newtoniano

Para el fluido newtoniano se empleó una mezcla agua-glicerina(Drogería Cosmopolita). Las constantes físicas de dicha mezcla a distintas proporciones son bien conocidas (Stanbury and Whitaker, 1989). La mezcla que se eligió fue 83 % glicerina -27 % agua. Este fluido permitió que la velocidad de ascenso de las burbujas fuera lo suficientemente lenta para trabajar en condiciones de  $Re < 2.5$ . Las propiedades de este fluido se encuentran en la tabla 2.1. Las mediciones de la viscosidad se encuentran en la figura 2.12 y esta representada por los símbolos (+).

### 2.3.2. Fluidos adelgazantes inelásticos

Las soluciones adelgazantes se elaboraron con goma Xantán (Keltrol E 415, KELCO, EUA) disuelta en mezclas de glicerina(Drogeria Cosmopolitan)-agua. Se hicieron dos fluidos diferentes para tener distintos adelgazamientos. Se eligieron dos proporciones que tuvieran una viscosidad similar a la viscosidad del fluido newtoniano. Una solución tenía 0,02 % de Xantán y una proporción 75 % glicerina-25 % agua. La otra solución estaba compuesta de 0,1 % de Xantán y 60 % glicerina-40 % agua. El modelo de viscosidad aparente que se eligió para estos fluidos fue ley de potencias ( $\mu = k\dot{\gamma}^{-n}$ ). En la figura 2.12 se muestran las curvas de viscosidad con respecto a la rapidez de corte y en la tabla 2.1 se pueden ver las demás propiedades. Las viscosidades medidas para estos fluidos se encuentran graficadas en la figura 2.12. Los símbolos • representan los datos obtenidos para la solución con 0,02 % de Xantán y una proporción 75 % glicerina-25 % agua y los símbolos \* representan la solución de 0,1 % de Xantán y 60 % glicerina-40 % agua

Fluido	composicion	$\rho[kg\ m^{-3}]$	viscosidad o k [mPa.s]	n	$\sigma[mN\ m^{-1}]$
Newtoniano	27 vol. % H <sub>2</sub> O - 83 vol. % gli.	1214,6	104,2	1	61,955
Adelgazantes	Xantán 0,02 wt % 25 vol. % H <sub>2</sub> O - 75 vol. % gli.	1193,1	143,4	0,85	63
	Xantán 0,1 wt % 40 vol. % H <sub>2</sub> O - 60 vol. % gli.	1152,1	496,9	0,55	65

Cuadro 2.1: Propiedades de los fluidos.

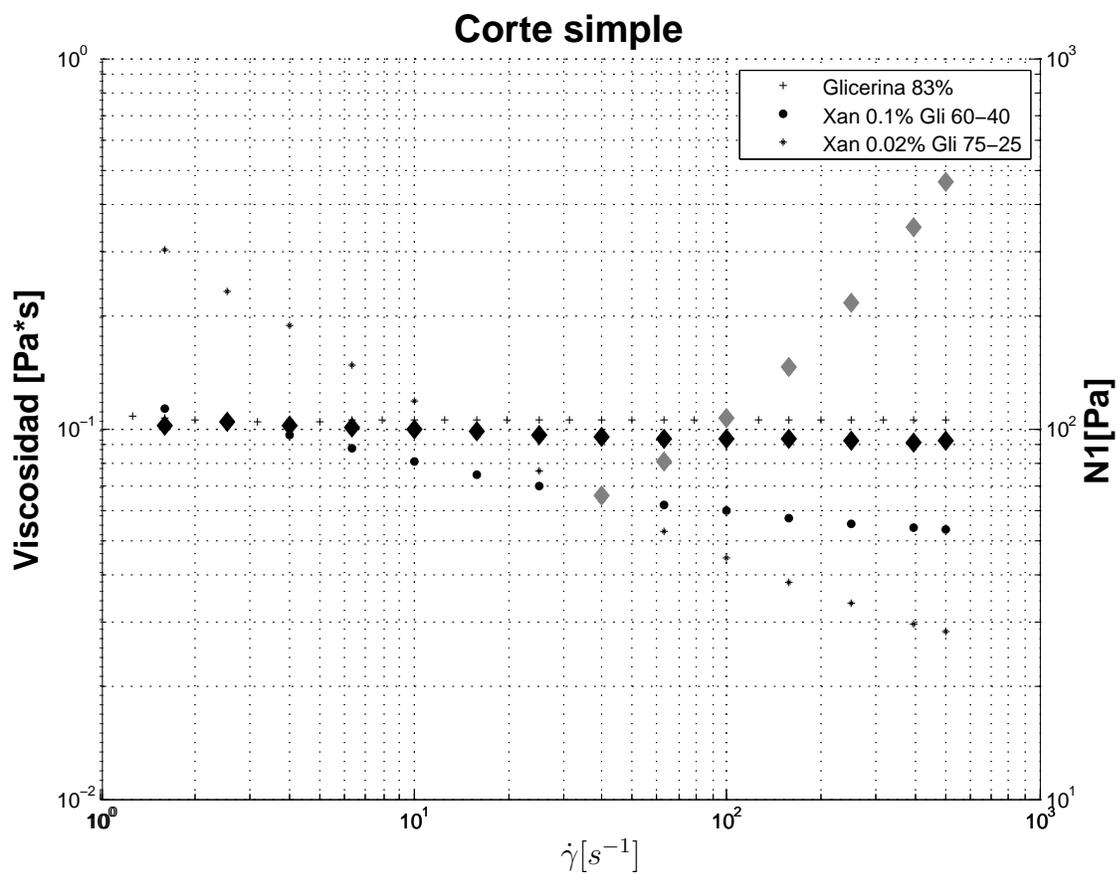


Figura 2.12: Reología de los fluidos.

# Capítulo 3

## Resultados

Los primeros experimentos que se realizaron fueron con burbujas individuales. Con estos experimentos se determinaron las características de las burbujas con las que se trabajó. Se presenta en la figura 3.1 una gráfica del coeficiente de arrastre como función del Reynolds. En esta gráfica se puede observar que el comportamiento del fluido newtoniano se encuentra entre las dos soluciones teóricas (ecuaciones 1.3 y 1.5). Se observa que para Reynolds iguales se tiene un mayor arrastre para los fluidos adelgazantes.

En la figura 3.2 se muestran los coeficientes de arrastre normalizados con respecto al coeficiente de arrastre newtoniano. El arrastre normalizado se utiliza para estudiar las fuerzas de arrastre en fluidos adelgazantes Rodrigue et al. (1999), Kishore et al. (2008), Zhu et al. (2003), Hirose and Moo-Young (1969), Bahavaraju et al. (1978). El arrastre normalizado se define como:

$$Y(n) = \frac{C_{D_{adelgazante}}}{C_{D_{newtoniano}}} \quad (3.1)$$

donde el  $C_{D_{adelgazante}} = \frac{(4/3)\pi r^3 \rho g}{(1/2)\pi r^2 \rho U^2}$  y  $C_{D_{newtoniano}} = 24/Re$

En la figura 3.2 se presentan los valores teóricos obtenidos por Hirose and Moo-Young (1969) y Bahavaraju et al. (1978). En la literatura el comportamiento teórico, numérico y experimental muestra la misma tendencia para bajos Reynolds. A medida que el comportamiento adelgazante incrementa, las burbujas experimentan mayor arrastre. En este trabajo se utilizó el valor teórico de arrastre de Stokes (eq. 1.3) ya que como se observa en la figura 3.1 el comportamiento de las burbujas se acerca mas a la solución de Stokes. Esto se debe a que los fluidos utilizados no son puros (interfaz rígida). Se graficaron (línea continua y línea punteada fig. 3.2) los varoles teóricos obtenidos por Hirose and Moo-Young (1969) y

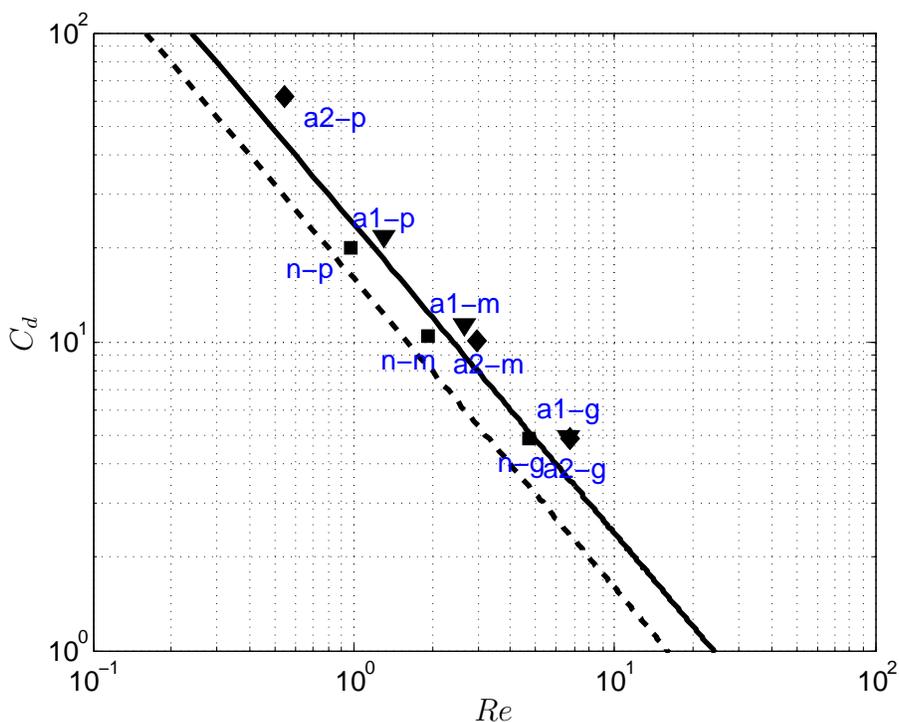


Figura 3.1: Coeficiente de arrastre en función del Reynolds para burbujas individuales. (■) Fluido newtoniano, (▼)  $n=0,85$ , (◆)  $n=0,55$ , (—) Solución de Stokes, (---) Solución de Hadamard.

Bahavaraju et al. (1978). El comportamiento teórico, numérico y experimental muestra la misma tendencia para bajos Reynolds.

En la figura 3.2 se muestra el arrastre normalizado para todas las burbujas con las que se trabajó en pares. Como se puede apreciar en la figura 3.2 el arrastre normalizado para las burbujas pequeñas tiene una tendencia similar a los valores teóricos, a medida que el fluido presenta más efectos adelgazantes éste muestra un mayor arrastre normalizado. Para las burbujas medianas y grandes se observa que hay un ligero cambio en el arrastre normalizado. Entre menor carácter adelgazante tenga el fluido es un poco mayor el arrastre normalizado. Esto se debe a que el Reynolds en estos casos es lo suficientemente grande para no cumplir con los modelos teóricos.

Es destacable que tanto en las burbujas medianas como en las grandes el arrastre normalizado es similar en los distintos fluidos. Se observa en la figura 3.2, que el arrastre normalizado es ligeramente mayor en el fluido  $n = 0,85$ . Esto se debe a que para ambos casos la rapidez de corte y el Reynolds es similar. A esa rapidez de corte la viscosidad en ambos fluidos es similar y ligeramente mayor en el fluido  $n=0,85$ .

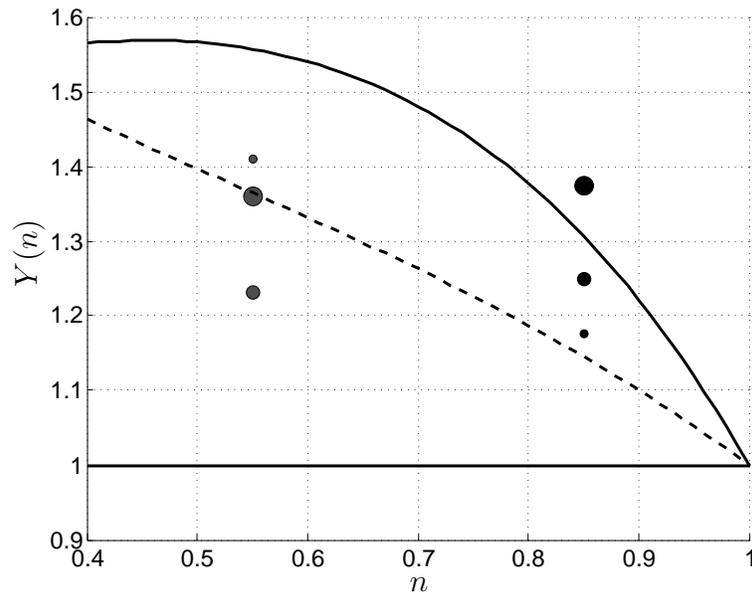


Figura 3.2: Coeficiente de arrastre normalizado  $Y(n)$  en función del índice de flujo. ( $\bullet$ )  $n=0,85$ , ( $\odot$ )  $n=0,55$ , (—) Bahavaraju et al. (1978), (---) Hirose and Moo-Young (1969). El tamaño de los símbolos negros representa el tamaño de las burbujas

En la tabla 3 se resumen los resultados de las pruebas con burbujas individuales.

## 3.1. Burbujas en fluido newtoniano

En esta sección se presentan los resultados de los experimentos con los pares de burbujas en ascenso libre en la solución acuosa 83 % Glicerina- 27 % Agua con 0,4M  $\text{MgSO}_4$ . Se realizaron experimentos con tres tamaños diferentes de burbujas. Para las burbujas verticalmente alineadas se realizaron 4 experimentos para cada tamaño de burbuja, variando la distancia inicial entre burbujas. Se siguió al par de burbujas en todo el ascenso con la cámara. Para cada experimento se determinó la distancia entre las burbujas, la velocidad de ascenso de cada burbuja y el factor de forma a lo largo de el ascenso.

### 3.1.1. Verticalmente alineadas

La primera etapa de experimentos se llevó acabo liberando las burbujas en el centro del canal. Se definió el sistema como se muestra en la figura 3.3. Donde se define la burbuja

Fluido	Composición	$\varnothing_{ind}$ [mm]	$U_{ind}$ [ $\frac{mm}{s}$ ]	Re	Cd	$t_c = \frac{\varnothing_{ind}}{U_{ind}}$ [s]
Newtoniano	27 vol. % H <sub>2</sub> O - 83 vol. % gli.	3,91	102,60	4,68	4,86	0,038
		2,80	59,40	1,94	10,38	0,047
		2,21	38,00	0,99	20,02	0,058
		4,93	137,28	7,88	3,42	0,036
		3,53	87,15	3,58	6,07	0,040
		2,78	58,41	1,89	10,67	0,047
Adelgazantes	Xantán 0,02 wt % 25 vol. % H <sub>2</sub> O - 75 vol. % gli.	3,70	99,20	6,70	4,92	0,037
		2,70	55,90	2,65	11,30	0,048
		2,13	35,80	1,30	21,74	0,059
		4,93	134,61	12,11	3,56	0,037
		3,53	84,78	5,25	6,42	0,042
		2,78	55,09	2,61	12,00	0,050
	Xantán 0,1 wt % 40 vol. % H <sub>2</sub> O - 60 vol. % gli.	3,54	97,65	6,72	4,85	0,036
		2,80	60,50	2,95	10,00	0,046
		2,10	20,99	0,54	62,34	0,100
		4,93	189,98	18,20	1,78	0,026
		3,53	96,94	5,96	4,91	0,036
		2,78	49,82	1,71	14,67	0,056

Cuadro 3.1: Datos de las burbujas individuales. Donde  $\varnothing_{ind}$  es el diámetro de la burbuja,  $U_{ind}$  es la velocidad terminal de la burbuja individual y  $t_c$  es el tiempo característico de la burbuja que esta definido como  $t_c = \varnothing_{ind}/U_{ind}$  (Leal, 2007).

1 como la burbuja líder y 2 la burbuja aveniente y con el número correspondiente como subíndice se etiquetarán los datos de cada burbuja. También se definen los parámetros que se analizaron en cada experimento,  $d$  es la distancia entre burbujas y de ahí se definió una distancia adimensional entre burbujas. La cual se define como  $d^* = d/\varnothing_{ind}$ , donde  $\varnothing_{ind}$  es el diámetro de la burbuja individual. Para adimensionalizar el tiempo se utilizó el tiempo característico de la burbuja  $t_c$ . El tiempo adimensional se define como  $t^* = t/t_c$ .

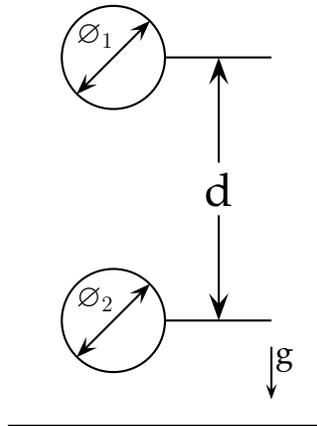


Figura 3.3: Esquema del sistema de burbujas en línea. Donde  $\varnothing_1$  es el diámetro de la burbuja de líder y  $\varnothing_2$  es el diámetro de la burbuja

Para las burbujas grandes y medianas se observan las tres etapas de acercamiento, toque y rebote (*drafting, kissing and tumbling*) como se ha mencionado en la literatura. (Brennen, 2005) Para las burbujas pequeñas estas al alcanzarse se mantenían juntas, sin embargo giraban y terminaban ascendiendo lado a lado. En ninguno de los experimentos realizados se observó separación entre las burbujas pequeñas. En la figura 3.4 podemos observar una secuencia de imágenes para cada caso.

En las secuencias de imágenes que se presentan en la figura 3.4 se ve claramente en las imágenes 3.4(a), burbujas grandes, y 3.4(b), burbujas medianas, las tres etapas acercamiento, toque y rebote (*drafting, kissing and tumbling*). En la imagen 3.4(c) se observa como se juntan las burbujas pequeñas y comienzan a girar. Otro aspecto notable es la rapidez en con la que ocurren los eventos en cada caso. En el caso de las burbujas grandes el proceso es ligeramente más rápido que en el caso de las medianas pero no significativamente. En el caso de las pequeñas el proceso es mucho más lento. Este comportamiento es de esperarse ya que el el Reynolds en las burbujas pequeñas es alrededor de 1, en las medianas es el doble y en las grandes 4.5 veces mayor.

Para cada secuencia de imágenes se realizó el análisis de imágenes descrito en la sección 2.2.2. Con este análisis se obtuvieron la distancia entre burbujas, velocidad y forma a lo largo del ascenso de las burbujas. En la tabla 3.2 se encuentran los valores de distancia inicial

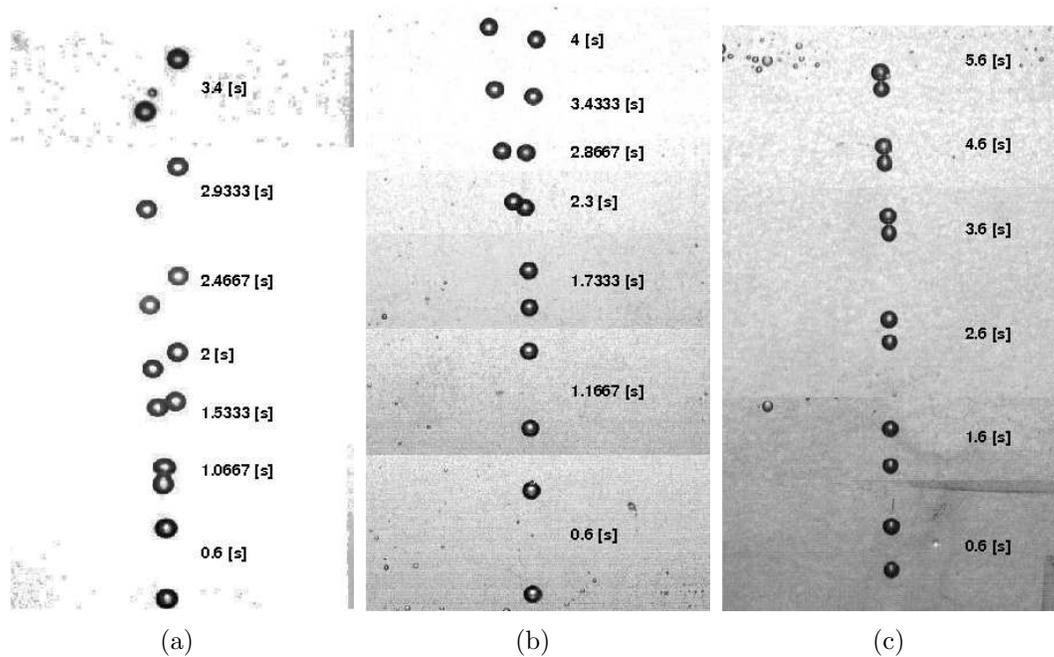


Figura 3.4: Secuencia de imágenes de la evolución en el ascenso entre las dos burbujas. La figura 3.4(a) muestra la evolución entre dos burbujas de 3,91[mm]. La imagen 3.4(b) es de dos burbujas de 2,8[mm] y finalmente la figura 3.4(c) es de dos burbujas de 2,21[mm]

(dimensional y adimensional) entre burbujas, el tiempo en el que se juntan (dimensional y adimensional) y la distancia final entre las burbujas (dimensional y adimensional).

Con estos datos, se construyó una gráfica donde se hizo coincidir el momento en el que se tocan las burbujas para todos los casos. En la figura 3.5 se muestran las curvas que se obtuvieron graficando la distancia entre burbujas como función del tiempo, 3.5(a) dimensional y 3.5(b) adimensional. Se puede observar que la tendencia en las burbujas grandes y medianas es similar. Las burbujas pequeñas tienen un comportamiento diferente. En ellas depende cual sea la separación inicial entre ellas. Como se puede notar en la figura 3.5(b) cuando hay una diferencia alrededor de 1.5 diámetros de distancia entre las burbujas, la velocidad de acercamiento para las burbujas medianas y chicas cambia. Entre mayor es la distancia más aumenta la velocidad. Para las burbujas grandes la tendencia de acercamiento es similar en todos los casos. Como se puede observar en la gráfica 3.5(a) los datos prácticamente están empalmados en los cuatro casos.

Tamaño	Exp	$d_0$ [mm]	$d_0^*$ [1]	$t_c$ [s]	$t_c^*$ [1]	$d_f$ [mm]	$d_f^*$ [1]
<b>cap_ g</b> 3,91 mm	1	20,07	5,13	1,07	26,24	10,06	2,57
	2	26,90	6,88	1,80	47,44	9,87	2,52
	3	30,59	7,83	2,47	63,78	7,73	1,98
	4	33,07	8,46	2,55	66,93	10,60	2,71
<b>cap_ m</b> 2,80 mm	1	16,42	5,87	1,40	29,72	8,49	3,03
	2	18,41	6,57	1,80	38,21	10,44	3,73
	3	19,97	7,16	2,3	48,83	12,00	4,28
	4	22,20	7,84	2,00	42,46	9,25	3,30
<b>cap_ p</b> 2,21 mm	1	5,01	2,27	1,45	24,91	2,19	0,99
	2	5,73	2,54	2,75	43,81	2,12	0,96
	3	8,70	3,89	2,55	43,81	2,05	0,93
	4	13,85	6,19	2,55	43,81	1,96	0,88

Cuadro 3.2: Datos de los experimentos de burbujas en solución agua-glicerina verticalmente alineadas, Donde  $d_0$  y  $d_0^*$  son la distancia inicial entre burbujas (dimensional y adimensional),  $t_c$  y  $t_c^*$  son el tiempo (dimensional y adimensional). Finalmente  $d_f$  y  $d_f^*$  son la distancia inicial entre burbujas (dimensional y adimensional)

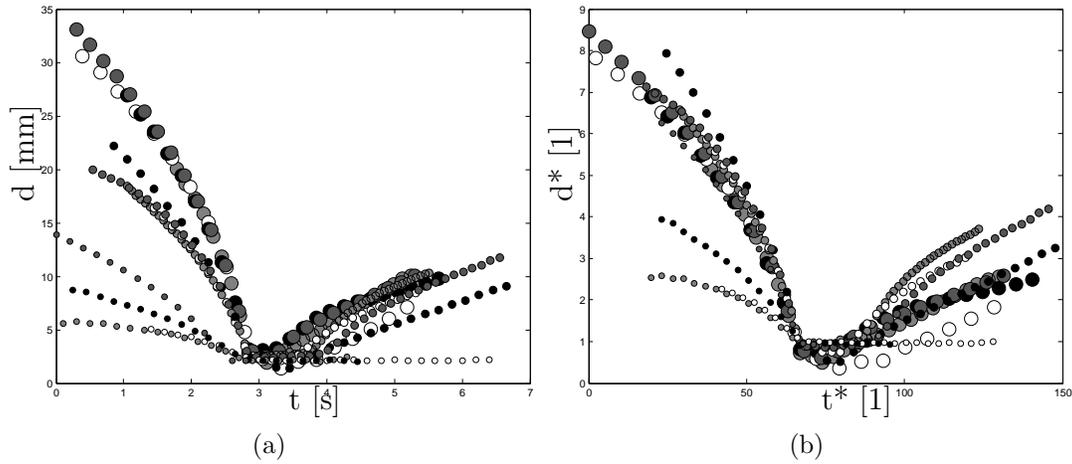


Figura 3.5: Gráficas distancia entre burbujas contra tiempo

En las figuras 3.6 y 3.7 se muestran las gráficas de velocidad contra tiempo. Los datos en las gráficas 3.6(a) y 3.6(b) son los datos de la burbuja líder y los datos en las gráficas 3.6(a) y 3.6(b) son los datos de la burbuja aveniente. El tamaño de los símbolos corresponde

al tamaño de las burbujas. La línea vertical corresponde al tiempo en el que colisionan las burbujas y las líneas horizontales a la velocidad de la burbuja individual de volumen equivalente a dos burbujas. La línea discontinua ( - - - - ) representa la velocidad terminal de una burbuja de volumen equivalente a dos burbujas grandes. La línea punteada ( ..... ) representa la velocidad terminal de una burbuja de volumen equivalente a dos burbujas medianas. Finalmente a línea de puntos y guiones ( - . - . - ) representa la velocidad terminal de una burbuja de volumen equivalente a dos burbujas pequeñas.

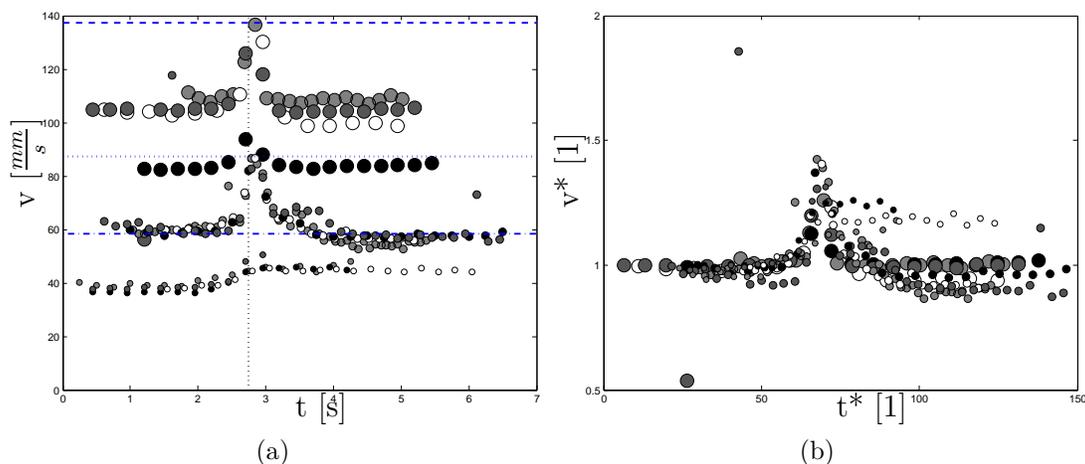


Figura 3.6: Gráficas velocidad de la burbuja líder contra tiempo

Los resultados obtenidos para las burbujas pequeñas, burbujas a un bajo Reynolds ( $0,4 < Re < 1,3$ ), se mantienen en contacto (figura 3.4(c)). Estos resultados soportan la idea de que dos cuerpos deformables moviéndose en un fluido a bajo  $Re$  tienden a moverse como un solo cuerpo. Es conveniente enfatizar la condición de deformabilidad ya que en los estudios de partículas rígidas no se observa esta condición, incluso a bajos números de Reynolds.

Como se puede observar en los casos de las burbujas grandes y medianas existe un pico en la velocidad que coincide con el momento del choque entre ellas. En ambos casos después de la colisión la velocidad disminuye. En el caso de las burbujas grandes la velocidad de las burbujas cuando se están separando es la misma que la velocidad terminal de la burbuja y que la que llevaban antes de acercarse una a otra. En el proceso de las medianas se observa que después de la colisión la velocidad disminuye entre un 5 % y 10 % de la velocidad terminal de las burbujas individuales y que la velocidad que tenían inicialmente. Para las burbujas pequeñas la velocidad después de la colisión es mayor debido a que estas se queda unidas. Como se puede observar en el gráfico las dos burbujas juntas en ascenso tienen una velocidad menor que una burbuja de volumen equivalente. Esto nos da idea de que la configuración que adoptan las dos burbujas tiene mayor arrastre que la burbuja de volumen equivalente. En los casos de las burbujas medianas y grandes la velocidad máxima que alcanzan, que es

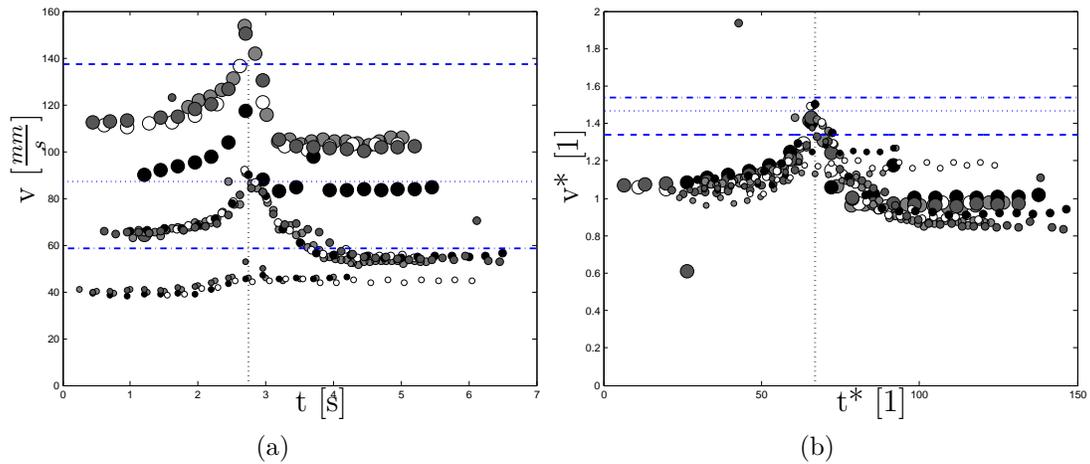


Figura 3.7: Gráficas velocidad de la burbuja aveniente contra tiempo

cuando chocan, es una velocidad similar a la velocidad de la burbuja equivalente en volumen a las dos burbujas.

### 3.1.2. Horizontalmente alineadas

Los experimentos de burbujas horizontalmente alineadas se realizaron a cuatro distancias. Las distancias se seleccionaron desde la distancia mínima posible hasta 20mm. Las distancias iniciales entre burbujas fueron: 6,3 [mm], 10 [mm], 15 [mm] y 20 [mm]. Para adimensionalizar la distancia, velocidad y tiempo se utilizaron el diámetro de la burbuja, la velocidad terminal de la burbuja y el tiempo característico de la burbuja, mencionado y definido anteriormente. Para el caso de las burbujas pequeñas se realizaron experimentos para las tres separaciones menores.

En el esquema que se muestra en la figura 3.8 se define la burbuja izquierda, la que sale al centro del canal, como la burbuja 1 y la burbuja derecha como la burbuja 2. Los datos referentes a cada burbuja adoptaran el subíndice 1 ó 2 dependiendo a que burbuja se refieren. Para este caso la distancia adimensional se define como  $d^* = d/d_{ind}$ . La velocidad adimensional la definimos como  $v^* = v/v_{ind}$ . Las distancias adimensionales para las burbujas grande son 1,61, 2,56, 3,84 y 5,11 y para las burbujas pequeñas son 2,85, 4,52 y 6,79.

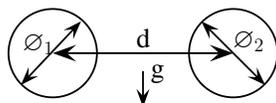


Figura 3.8: Esquema del sistema de burbujas horizontalmente alineadas. Donde  $d_1$  es el diámetro de la burbuja de la izquierda y  $d_2$  es el diámetro de la derecha.

Para el caso de burbujas alineadas horizontalmente se ha reportado, Kim et al. (1993), Liang et al. (1996), Legendre et al. (2003), que para números de Reynolds menores a 30 las burbujas experimentan una fuerza de repulsión entre sí, debido a las interacciones entre los vórtices de éstas. Como se aprecia en la figura 3.9 en estos experimentos el comportamiento corresponde a lo anteriormente reportado. En todos los casos se puede observar un incremento en la separación entre las burbujas.

En la figura 3.9(b) se observa que a mayor distancia entre las burbujas la influencia entre ellas es menor. Esto concuerda con lo reportado por Kim et al. (1993), Liang et al. (1996), Legendre et al. (2003). Esto se ve en las pendientes, que van cambiando, de las curvas de datos. Para las burbujas grandes este cambio de pendiente es más claro en las separaciones de 6,3 mm, 10 mm y 15 mm. En el caso de las burbujas pequeñas se puede observar la diferencia entre la separación de 6,3 mm y 15 mm. Como se puede observar las burbujas pequeñas el incremento de distancia entre ellas es muy poco en forma dimensional, sin embargo en las gráficas con datos adimensionales es similar para distancias cercanas entre sí.

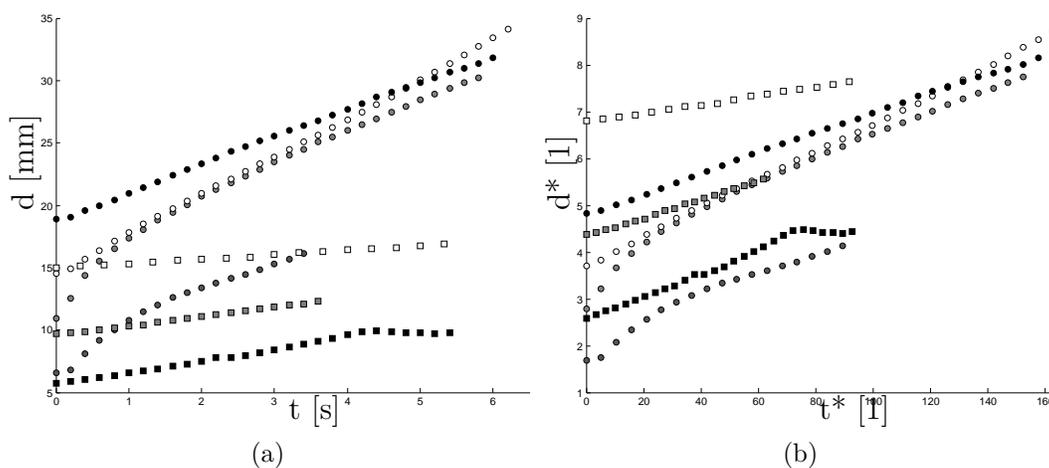


Figura 3.9: Gráficas distancia entre burbujas contra tiempo

En las figuras 3.10 y 3.11 se observa que el arrastre es ligeramente mayor cuando están cerca

las burbujas, incrementando con respecto al incremento de la separación entre ellas. Esto también concuerda con lo descrito por Kim et al. (1993), Liang et al. (1996), Legendre et al. (2003). Como se observa en las gráficas 3.10 y 3.11 el efecto es mayor entre menor sea el número de Reynolds.

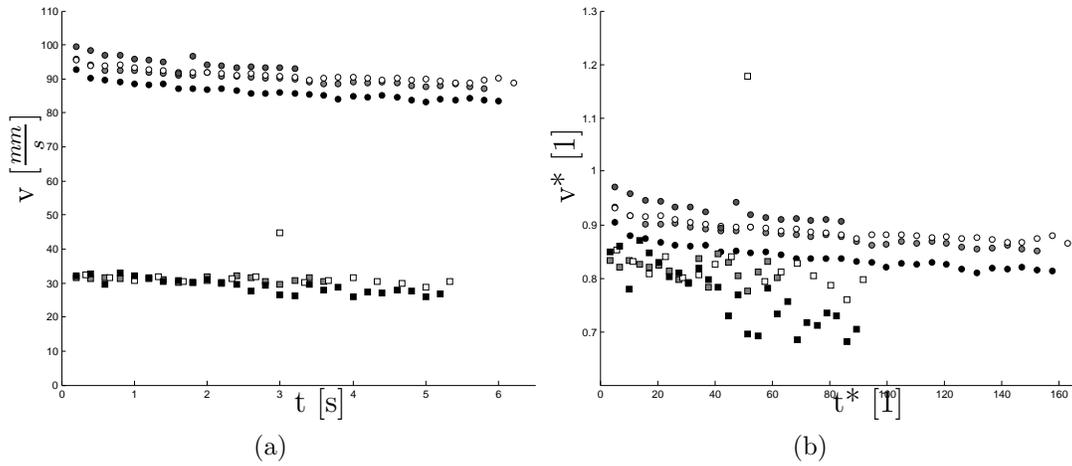


Figura 3.10: Gráficas velocidad de la burbuja izquierda contra tiempo

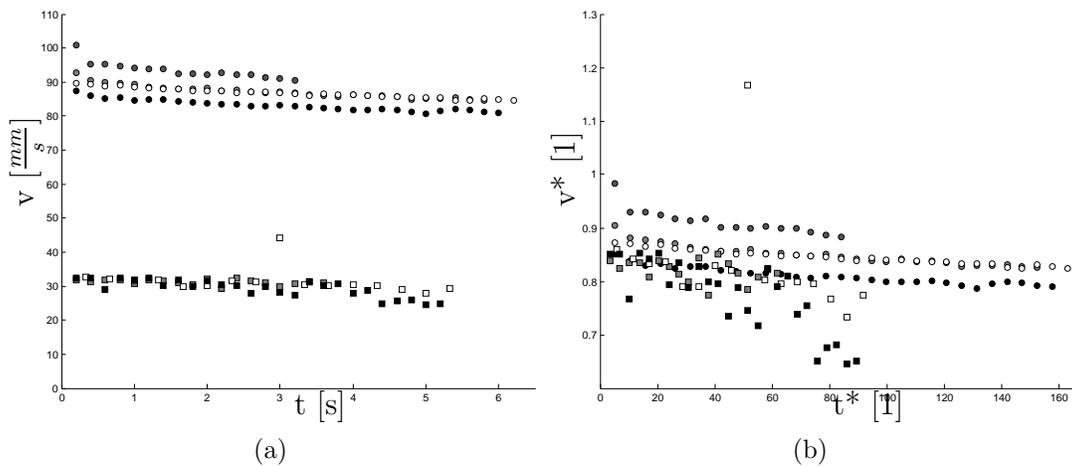


Figura 3.11: Gráficas velocidad de la burbuja derecha contra tiempo

## 3.2. Burbujas en fluido adelgazante inelástico

En el caso de los fluidos adelgazantes se llevaron a cabo los mismos experimentos que para los fluidos newtonianos. Los datos de los tamaños de burbujas, velocidades terminales de burbuja individual y tiempo característico de la burbuja se muestran en la tabla ???. Como ya se mencionó anteriormente se utilizaron dos fluidos adelgazantes cuya composición se encuentra en la tabla 2.1. Para facilitar la nomenclatura, los datos del fluido adelgazante con concentración de 0,1 % wt de Xantán se denominarán N0,5 y los datos del fluido con 0,02 % wt de Xantán se identificarán con N0,8. Respecto a la posición de la burbuja, a la distancia entre burbujas y diámetros de las burbujas, se mantendrá la nomenclatura establecida en la sección anterior.

### 3.2.1. Verticalmente alineadas

En estos experimentos, al igual que en el fluido newtoniano, se liberaron las burbujas en el centro del canal. Se definió el sistema como se muestra en la figura 3.3. Al igual que en el fluido newtoniano. Se utilizaron las mismas variables,  $d$  (distancia entre burbujas),  $d^*$  la distancia entre burbujas adimensional y  $t^*$ .

Para las burbujas grandes, para ambos fluidos, se observan las tres etapas de acercamiento, toque y rebote (*drafting, kissing and tumbling*) como se ha mencionado en la literatura (Brennen, 2005), como se observó en el fluido newtoniano. Sin embargo, para las burbujas medianas se observó un comportamiento diferente. En el fluido N0,8, que es el de mayor índice de flujo, se presentaron las tres etapas al igual que en el caso de las burbujas grandes y los fluidos newtonianos. En las figuras 3.12 y 3.13 podemos observar una secuencia de imágenes para cada caso. En este caso se compara directamente el comportamiento para los diferentes fluidos.

Al igual que en el fluido newtoniano se realizó un análisis de imagen y se obtuvieron los datos contenidos en las tablas 3.3 y 3.4 (distancia inicial (dimensional y adimensional) entre burbujas, el tiempo en el que se juntan (dimensional y adimensional) y la distancia final entre las burbujas (dimensional y adimensional). Se graficaron los datos obtenidos para cada instante, al igual que en los fluidos newtonianos, obteniendo las gráficas que se presentan en las figuras 3.14, 3.15 y 3.16. También se hizo coincidir, en la gráfica, el momento en el que se tocan las burbujas para todos los casos. La figura 3.14 se muestran las curvas que se obtuvieron graficando la distancia entre burbujas como función del tiempo. En este caso, al igual que en las burbujas ascendiendo en fluido newtoniano se puede dividir al proceso en tres etapas. La primer etapa, acercamiento, tiene pendiente negativa. La segunda etapa en la cual se acercan las burbujas. Finalmente una última etapa donde difieren a los newtonianos. En la última etapa las burbujas grandes se comportan similarmente a las burbujas en los

Tamaño	Exp	$d_0$ [mm]	$d_0^*$ [1]	$t_c$ [s]	$t_c^*$ [1]	$d_f$ [mm]	$d_f^*$ [1]
<b>cap_ p</b> 2,13 mm	1	25,76	12,09	5,5	92,44	2,13	1
	2	10,44	4,90	1,77	29,69	2,13	1
	3	9,325	4,38	1,58	26,61	2,13	1
	4	6,96	3,14	0,83	14,00	2,13	1
<b>cap_ m</b> 2,70 mm	1	9,775	3,62	1,7	35,20	1,81	0,67
	2	7,155	2,65	2,26	46,81	7,88	2,92
	3	10,16	3,76	1,67	34,51	3,19	1,18
	4	9,81	3,62	0,67	13,80	8,49	3,14
<b>cap_ g</b> 3,70 mm	1	22,56	6,10	1,48	37,99	6,72	1,82
	2	36,34	9,82	3,28	88,02	15,94	4,31
	3	24,51	6,62	1,65	44,24	10,9	3,00
	4	24,1	6,51	1,5	40,22	9,86	2,66

Cuadro 3.3: Datos de los experimentos de burbujas en solución adelgazante  $n=0,85$ , Donde  $d_0$  y  $d_0^*$  son la distancia inicial entre burbujas (dimensional y adimensional),  $t_c$  y  $t_c^*$  son el tiempo (dimensional y adimensional). Finalmente  $d_f$  y  $d_f^*$  son la distancia final entre burbujas (dimensional y adimensional)

fluidos newtonianos, las burbujas se acercan y luego se separan. En los acercamientos de las burbujas medianas, en el fluido ( $n=0,85$ ) las burbujas se separan después del acercamiento. En este caso difiere el proceso en las burbujas liberadas en el fluido ( $n=0,55$ ) donde las burbujas se mantienen cerca una de otra. En los casos de las burbujas pequeñas en todos los casos se acercaron las burbujas y no hubo separación.

Tamaño	Exp	$d_0$ [mm]	$d_0^*$ [1]	$t_c$ [s]	$t_c^*$ [1]	$d_f$ [mm]	$d_f^*$ [1]
<b>cap_ g</b> 3,54 mm	1	39,51	11,16	5,58	153,72	3,88	1,10
	2	36,2	8,53	1,67	46,00	4,27	1,21
	3	38,09	10,76	2,3	63,36	5,89	1,66
	4	31,46	8,89	2,93	80,72	3,17	0,89
<b>cap_ m</b> 2,80 mm	1	16,58	5,92	0,73	15,83	2,96	1,06
	2	23,23	8,30	2,23	48,23	2,58	0,92
	3	12,45	4,45	0,45	9,72	2,61	0,93
	4	12,33	4,4	0,95	20,52	2,90	1,04
<b>cap_ p</b> 2,10 mm	1	8,63	4,11	2,00	20,00	2,03	1
	2	16,63	7,92	5,05	50,50	2,05	0,98
	3	7,11	3,39	0,90	9,00	2,39	1,14
	4	7,75	3,69	1,77	17,70	2,08	0,99

Cuadro 3.4: Datos de los experimentos de burbujas en solución adelgazante  $n=0,85$ , Donde  $d_0$  y  $d_0^*$  son la distancia inicial entre burbujas (dimensional y adimensional),  $t_c$  y  $t_c^*$  son el tiempo (dimensional y adimensional). Finalmente  $d_f$  y  $d_f^*$  son la distancia final entre burbujas (dimensional y adimensional)

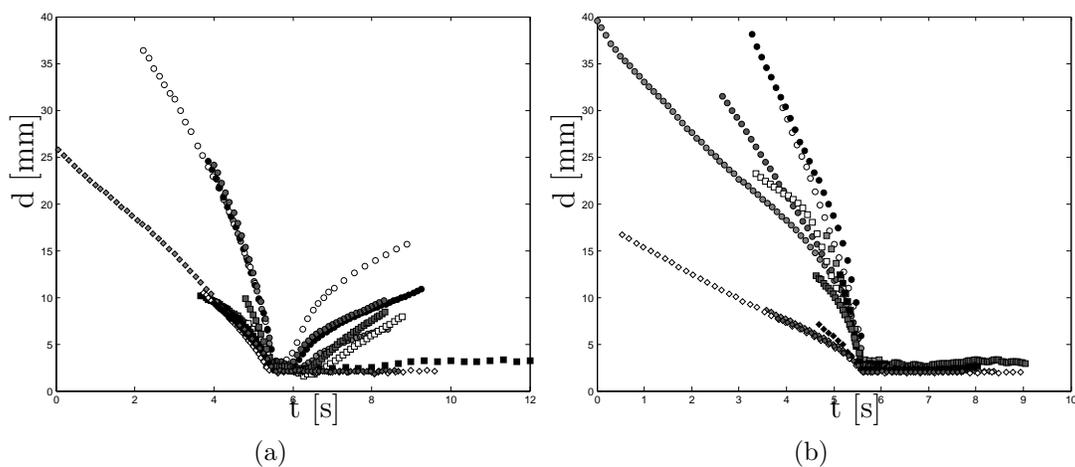


Figura 3.14: Gráficas distancia entre burbujas contra tiempo para las burbujas en fluidos adelgazantes. 3.14(a) Fluido con  $n=0,85$  y 3.14(b) Fluido con  $n=0,55$

Se puede observar que en el adelgazante ( $n=0,85$ ) las burbujas medianas y las pequeñas tienen la misma velocidad de acercamiento. Esto se aprecia en la pendiente de las curvas de distancia

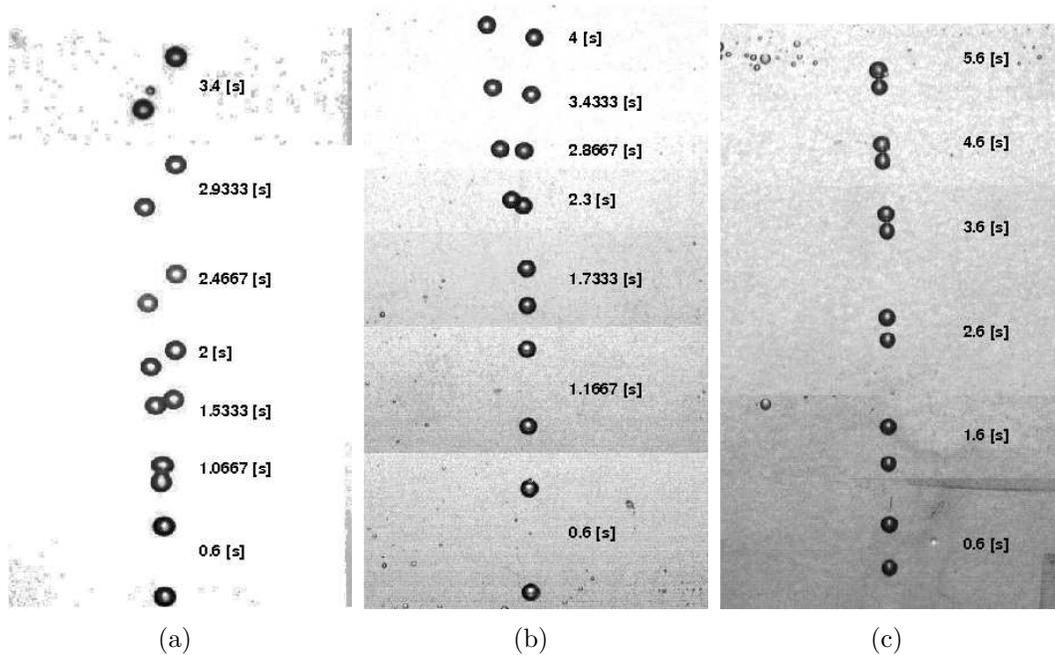


Figura 3.12: Secuencia de imágenes de la evolución en el ascenso entre las dos burbujas. La figura 3.12(a) muestra la evolución entre dos burbujas de 3,91[mm]. La imagen 3.12(b) es de dos burbujas de 2,8[mm] y finalmente la figura 3.12(c) es de dos burbujas de 2,21[mm]

como función del tiempo. En el otro caso, el fluido mas adelgazante se puede observar que la velocidad de acercamiento entre burbujas es diferente en los distintos tamaños. Para las burbujas pequeñas la velocidad es similar. Sin embargo, en los otros tamaños cambia la velocidad de aproximación dependiendo de la distancia a la que se encuentran. Se puede observar en la figura 3.14(b) que incluso hay casos en los que la velocidad de aproximación va cambiando conforme cambia la distancia a la que se encuentran. Entre mas cerca mayor velocidad de aproximación tienen.

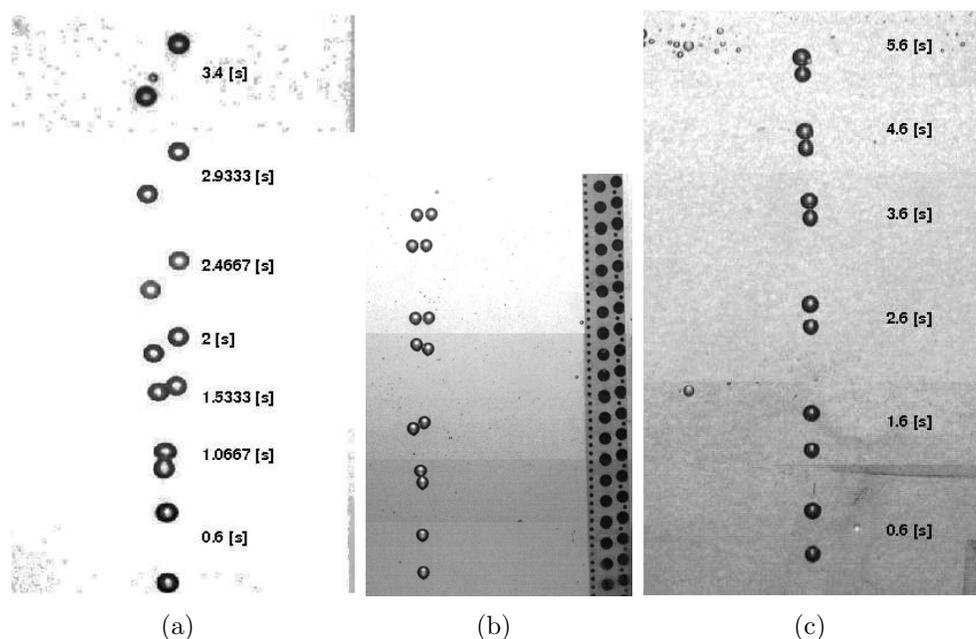


Figura 3.13: Secuencia de imágenes de la evolución en el ascenso entre las dos burbujas. La figura 3.13(a) muestra la evolución entre dos burbujas de 3,91[mm]. La imagen 3.13(b) es de dos burbujas de 2,8[mm] y finalmente la figura 3.13(c) es de dos burbujas de 2,21[mm]

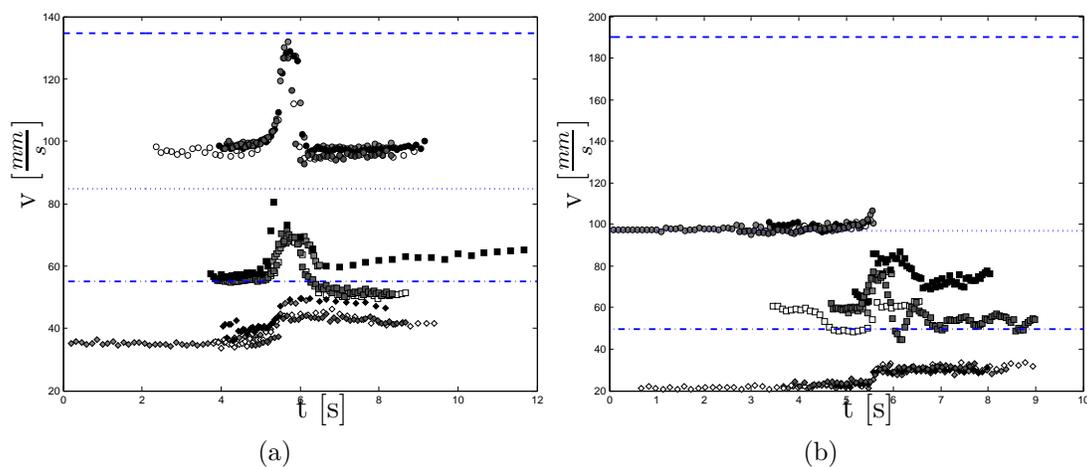


Figura 3.15: Gráficas de la velocidad en función del tiempo para la burbuja líder en fluidos adelgazantes. 3.15(a) Fluido con  $n=0,85$  y 3.15(b) Fluido con  $n=0,55$

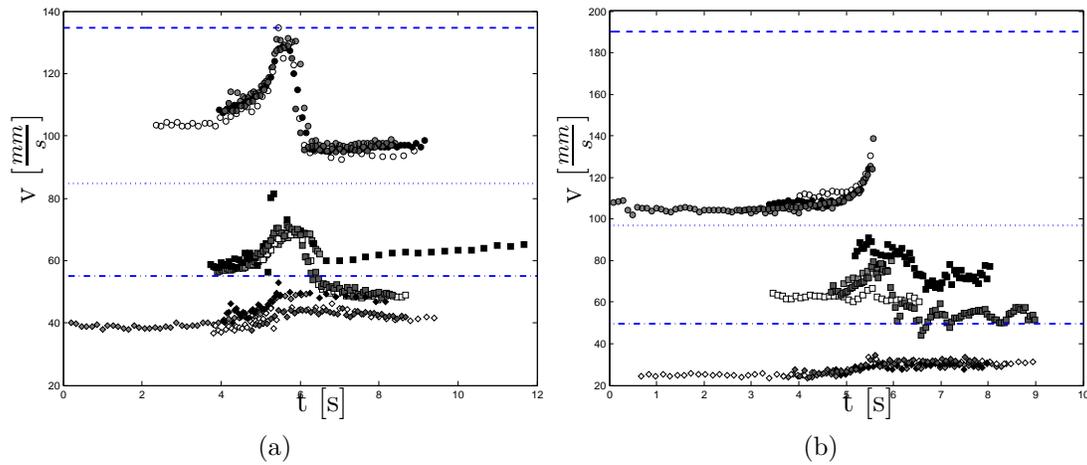


Figura 3.16: Gráficas de la velocidad en función del tiempo para la burbuja aveniente en fluidos adelgazantes. 3.16(a) Fluido con  $n=0,85$  y 3.16(b) Fluido con  $n=0,55$

En las figuras 3.15 y 3.16 se muestran las gráficas de velocidad contra tiempo. Los datos en las gráficas 3.15(a) y 3.16(a) son los datos de las burbujas en el fluido  $n=0,85$  y los datos en 3.15(b) y 3.16(b) son los datos para las burbujas en el fluido  $n=0,55$ . El tamaño de los símbolos corresponde al tamaño de las burbujas. La línea vertical corresponde al tiempo en el que colisionan las burbujas y las líneas verticales a la velocidad de la burbuja individual de volumen equivalente a dos burbujas. La línea discontinua ( - - - - ) representa la velocidad terminal de una burbuja de volumen equivalente a dos burbujas grandes. La línea punteada ( ..... ) representa la velocidad terminal de una burbuja de volumen equivalente a dos burbujas medianas. Finalmente a línea de puntos y guiones ( - . - . - ) representa la velocidad terminal de una burbuja de volumen equivalente a dos burbujas pequeñas.

Como se puede observar en estos casos solo la burbuja grande en el fluido  $n=0,85$  alcanzó una velocidad similar a la velocidad de la burbuja que tiene el doble de volumen. Esto ocurre unos instantes después de que chocan las burbujas. En el caso del adelgazante  $n=0,55$  solo se observa un incremento de velocidad; sin embargo, las burbujas coalescen y no cumplen con las condiciones que requerimos para el estudio de la interacción entre burbujas que deseamos. Como se puede observar en las figuras 3.15 y 3.16 cuando se separan las burbujas la velocidad de cada burbuja es menor a la velocidad de la burbuja individual.

Cuando las burbujas se quedan juntas la velocidad incrementa; sin embargo, la velocidad de las burbujas juntas no llega a ser la velocidad de una burbuja equivalente al volumen de las dos. Para el caso específico de una distancia inicial de 12,33 mm en las burbujas medianas se observa una oscilación en la velocidad de las burbujas. En este caso las burbujas se mantuvieron en juntas "jugando" entre ellas. Esto se observa en la figura 3.13(b).

### 3.2.2. Horizontalmente alineadas

Los experimentos de burbujas horizontalmente alineadas se realizaron a las mismas cuatro distancias que en el caso de los fluidos newtonianos: 6,3 [mm], 10 [mm], 15 [mm] y 20 [mm]. Para adimensionalizar la distancia, velocidad y tiempo se utilizaron el diámetro de la burbuja, la velocidad terminal de la burbuja y el tiempo característico de la burbuja, mencionado y definido anteriormente. Para el caso de las burbujas pequeñas se realizaron experimentos para las tres separaciones menores.

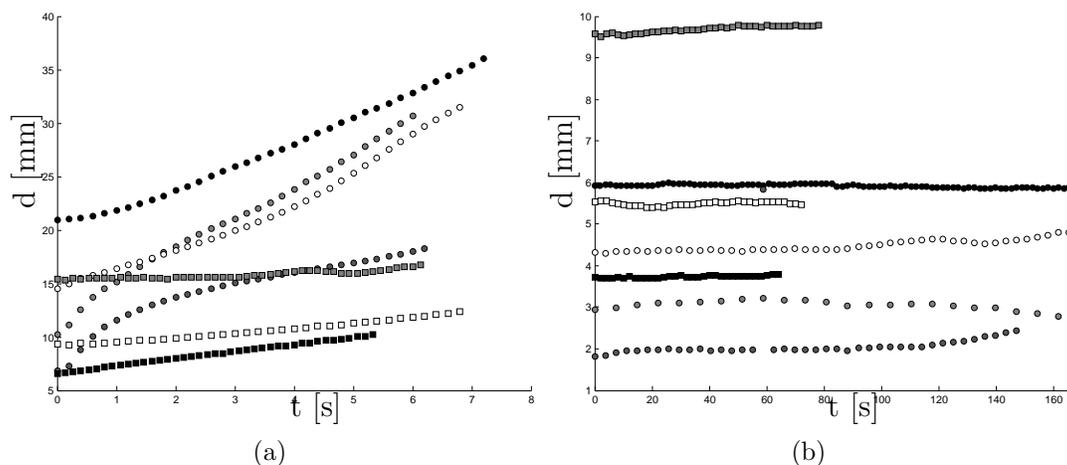


Figura 3.17: Curvas de la distancia en función del tiempo de burbujas ascendiendo horizontalmente alineadas en fluidos adelgazantes con dimensiones. 3.17(a) Solución acuosa de Xanthan 0.02% con una  $n=0.85$  y 3.17(b) Solución acuosa de Xanthan 0.1% con una  $n=0.55$

Como se puede observar en la figura 3.18 la pendiente de la curva de la separación entre burbujas para el el fluido  $n = 0,85$  es mayor que para las burbujas en el fluido  $n = 0,55$ . Incluso en el caso de  $n = 0,55$  la separación entre burbujas es casi imperceptible en las curvas. Aparentemente se mantienen a la misma distancia. Este comportamiento revela que entre mayor sea la propiedad adelgazante disminuye la interacción de repulsión entre las burbujas disminuyendo la tasa de separación entre burbujas. Este comportamiento es diferente al reportado en fluidos viscoelásticos donde existe una fuerza de atracción entre las burbujas.

Se realizó en este caso una comparación de las velocidades en función de la distancia adimensional entre ellas de las burbujas con respecto a la burbuja individual. En todos los casos se puede observar que para los fluidos adelgazantes esta curva inicialmente crece hasta ser un poco mayor que 1 y después decrece.

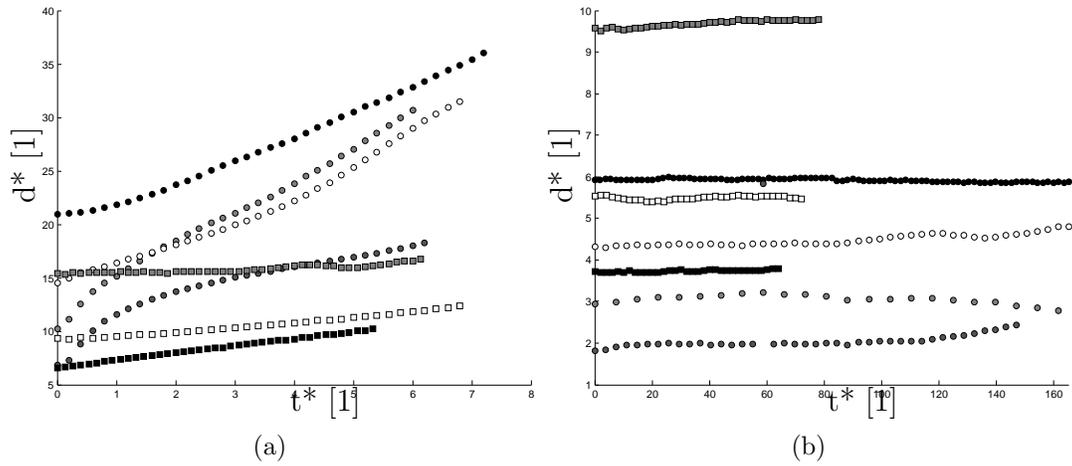


Figura 3.18: Curvas adimensionalizadas de la distancia en función del tiempo de burbujas ascendiendo horizontalmente alineadas en fluidos adelgazantes. 3.17(a) Solucion acuosa de Xanthan 0.02 % con una  $n=0.85$  y 3.17(b) Solucion acuosa de Xanthan 0.1 % con una  $n=0.55$

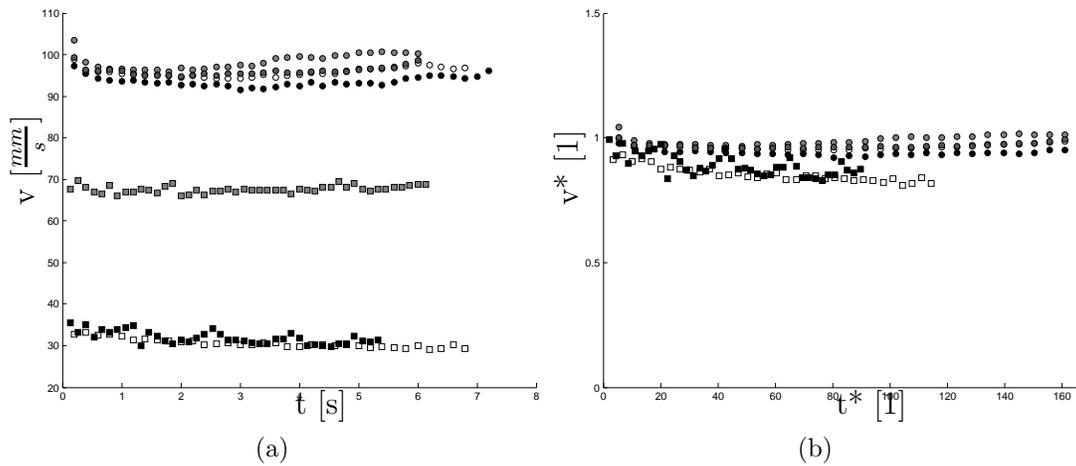


Figura 3.19: Gráficas velocidad de la burbuja izquierda contra tiempo

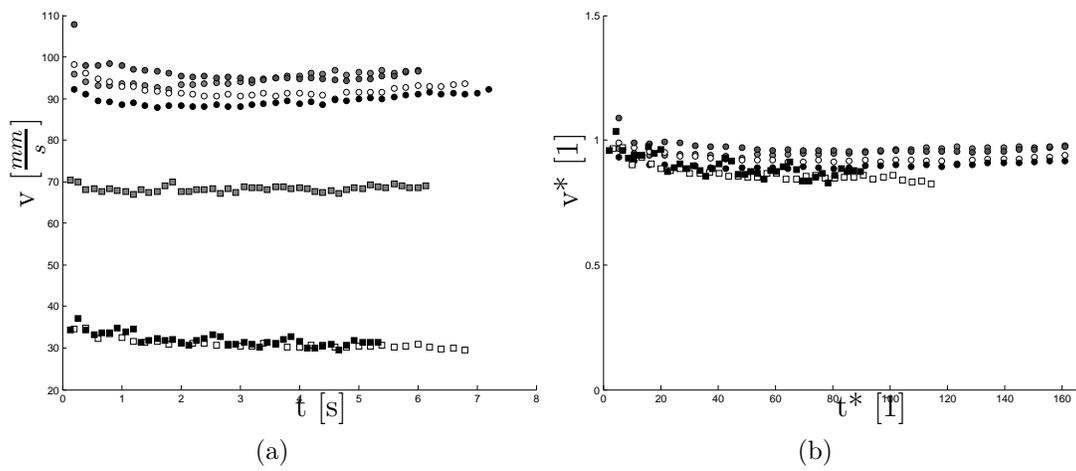


Figura 3.20: Gráficas velocidad de la burbuja derecha contra tiempo

# Capítulo 4

## Discusión

Este capítulo está compuesto en dos secciones; la primera habla sobre las burbujas verticalmente alineadas y la segunda sobre las burbujas horizontalmente alineadas. Se encontró una mayor influencia de los efectos no newtonianos del fluido en las burbujas ascendiendo alineadas verticalmente.

### 4.1. Burbujas alineadas verticalmente

En las gráficas  $d^*$  vs  $t^*$  se pueden observar claramente las tres etapas de interacción entre las burbujas en todos los casos. La primera etapa (*drafting* o acercamiento) es similar para todos los casos. Ésta se caracteriza por la pendiente negativa que tiene la curva de datos, lo cual indica que se está acortando la distancia entre ellas. Es importante notar que a medida que el número de Reynolds incrementa, el valor de las pendientes tiende a ser similar. Este comportamiento sugiere que para  $Re < 6$  el carácter adelgazante no es tan importante en la interacción entre las burbujas. Estos resultados nos indican que para estas condiciones las fuerzas inerciales son más importantes y dominan el fenómeno.

La segunda etapa (*kissing*) es claramente visible en todos los casos. Esta se presenta en el cambio abrupto de pendiente de la curva e indica que las burbujas chocaron. En esta etapa las burbujas grandes y medianas sufren deformaciones. En el caso de las burbujas en el fluido newtoniano se observa en las curvas  $\chi$  vs  $t^*$  que la burbuja aveniente no se deforma significativamente; la burbuja líder llega a tener una deformación de 50%. Cuando el par comienza a girar, la burbuja líder recobra su forma. Las burbujas colisionando en los fluidos adelgazantes tuvieron una diferencia significativa, ya que la burbuja aveniente sufrió deformación importante. A diferencia de la burbuja líder, que siempre se deformó a

una burbuja oblata, la burbuja aveniente se deformaba en una burbuja prolata. Esto se puede observar claramente en las imágenes que se presentan en la figura. Otra característica de la colisión entre las burbujas en fluidos adelgazantes fue que la burbuja aveniente llegaba a presentar cauda como se observa en la imagen de la figura.

En la tercer etapa (*tumbling*) es donde existe una mayor diferencia en el comportamiento de las burbujas en los distintos fluidos. En el fluido newtoniano las burbujas giraron y ascendieron lado a lado, sin embargo en los fluidos adelgazantes las burbujas continuaron ascendiendo alineadas verticalmente. Al igual que en el caso de las burbujas pequeñas, el comportamiento de las burbujas grandes fue similar. En los tres casos el comportamiento fue de repelerse después de la colisión. Donde se presentó una mayor diferencia en el comportamiento fue en el caso de las burbujas medianas donde para el adelgazante  $n=0,55$  las burbujas se mantuvieron juntas, lado a lado, en el ascenso.

El hecho de que se mantuvieran juntas las burbujas medianas en el ascenso dentro del fluido  $n=0,55$ , el mas adelgazante, sugiere una influencia importante en el adelgazamiento del fluido. Esto se puede explicar debido a la perturbación que genera una burbuja al ascender por un fluido. Ésta deja una estela, fluido en movimiento. En el caso de un fluido newtoniano este movimiento influye en la reducción de el arrastre en la burbuja aveniente. Esto no ha sido reportado por varios autores. Sin embargo, la estela genera un precorte en el fluido adelgazante, por lo que alrededor de una burbuja se va generando una estela de distintas viscosidades. Cerca de la burbuja la viscosidad se reduce. Cuando la burbuja aveniente entra en esta estela con una viscosidad menor se encuentra con una oposición menor y esto contribuye a una mayor reducción del arrastre de la burbuja. Esto provoca que si los esfuerzos viscosos dominan en el flujo, la burbuja preferirá seguir el camino de menor viscosidad que es junto a la otra burbuja. Cuando las fuerzas inerciales dominan este efecto puede perderse. Este comportamiento se puede observar en la figura 4.1

## 4.2. Burbujas alineadas horizontalmente

En los experimentos realizados en las burbujas alineadas horizontalmente se pudo observar un comportamiento similar entre los fluidos newtonianos y adelgazantes. La diferencia entre los distintos fluidos radica en que entre mas adelgazante es el fluido menos influencia se ejerce sobre la la burbuja que asciende lateralmente. Esto refleja que la zona de baja viscosidad que se producida por el paso de las burbujas no contrarresta la fuerza repulsiva que se genera entre las burbujas alineadas horizontalmente, pero si reduce la tasa de separación entre las burbujas. En todos los casos la velocidad de cada burbuja fue menor a la velocidad de la burbuja individual, de acuerdo con la teoría para las burbujas en fluidos newtonianos. Esto sugiere que el comportamiento general en los fluidos adelgazantes concuerda con el comportamiento general en los fluidos newtonianos.

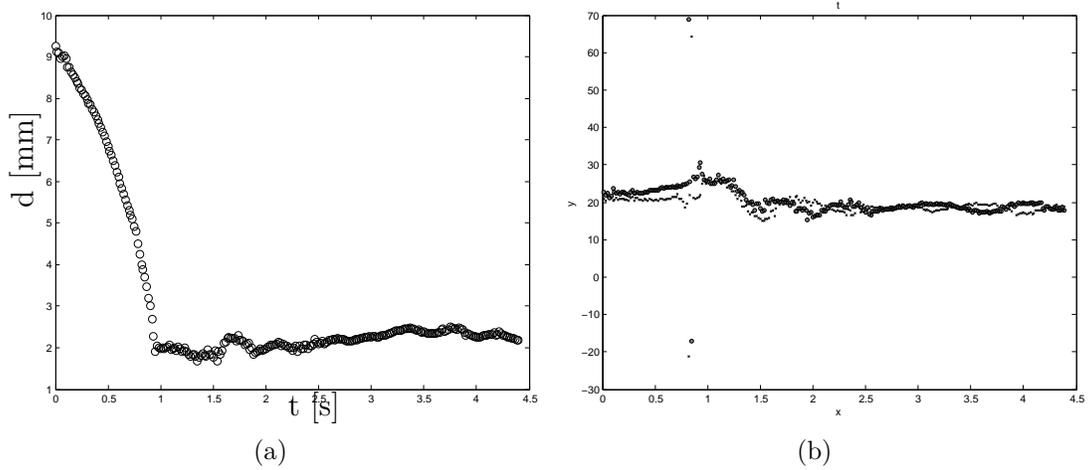


Figura 4.1: Gráficas de un caso específico. Burbujas alineadas horizontalmente en una solución acuosa de Xanthan 0,1% con una  $n=0,55$ . Iniciando a 9,25 mm de separación. Un ejemplo claro donde se juntan y se mantienen las burbujas buscando el campo de menor viscosidad.



# Capítulo 5

## Conclusiones

La interacción de dos burbujas ascendiendo en fluidos adelgazantes inelásticos ( $0,55 < n < 1,0$ ) se estudió siguiendo la trayectoria de burbujas con una cámara móvil permitiendo que se estudiara la evolución en el ascenso de la interacción entre ellas. Este dispositivo permitió repetibilidad en los experimentos permitiendo que los datos obtenidos fueran confiables. Las burbujas se liberaron por medio de capilares en dos orientaciones, verticalmente alineadas y horizontalmente alineadas.

Se observó que en todos los casos las trayectorias de las burbujas antes del contacto se comportaron de forma similar al caso newtonianos para  $Re < 30$ . Se encontró una trayectoria divergente (repulsión) cuando están alineadas horizontalmente y convergente (atracción) para burbujas verticalmente alineadas.

La cauda de gradientes de viscosidad que se forma detrás de la burbuja líder atrae a la burbuja aveniente. Esta atracción entre las burbujas se incrementa con el aumento de adelgazamiento. Sin embargo, este efecto se reduce a medida que crecen los efectos inerciales.

Después de las etapas de acercamiento y colisión entre las burbujas, en fluidos adelgazantes, tienden a mantenerse juntas. Esto depende de la inercia y la deformabilidad de la burbuja individual. Esto es una diferencia significativa al comportamiento de las burbujas en fluidos newtonianos. Para los fluidos newtonianos solo las burbujas ascendiendo a un  $Re < 1$  forman pares. Los pares de burbujas mostraron un movimiento oscilatorio debido a los gradientes de viscosidad formados por la burbuja líder, que después de un instante se convierte en la burbuja aveniente y así subsecuentemente.

En este trabajo se obtuvieron resultados experimentales importantes en el estudio de la interacción de un par de burbujas lo cual es importante para mejorar el entendimiento de flujos multifásicos. Estos datos pueden servir para hacer una comparaciones con simulaciones

numéricas. Sería importante llevar a cabo experimentos para otros ángulos de interacción. sin embargo, esto no es posible, de manera controlada, con el arreglo propuesto en este trabajo.

Aunque no se tiene una visión completa de la naturaleza de las interacciones hidrodinámicas en pares de burbujas en líquidos adelgazantes, se han encontrado algunas ideas básicas que servirán para entender la formación de cúmulos en este tipo de líquidos no-newtonianos.

El arreglo propuesto en esta tesis se podrá usar de igual manera para estudiar otros líquidos no-newtonianos(elásticos, viscoelásticos, etc.).

# Bibliografía

- A. Acharya, R.A. Mashelkar, and J. Ulbrecht. Mechanics of bubble motion and deformation in non-Newtonian media. *Chem. Eng. Sci.*, 32:863, 1977.
- M. T. Arigo and G. H. McKinley. An experimental investigation of negative wakes behind spheres settling in a shear-thinning viscoelastic fluid. *Rheol. Acta.*, 37:307, 1998.
- G Astarita and G Apuzzo. Motion of gas bubbles in non-Newtonian liquids. *AIChE*, 11:815, 1965.
- N. Aubry and P. Singh. Transient and steady state of a rising bubble in a viscoelastic fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 589:215–252, 2007.
- S. M. Bahavaraju, R. A. Mashelkar, and H. W. Blanch. Bubble Motion and Mass Transfer in Non-Newtonian Fluids; Part 1: Single Bubble in Power-law and Bingham Fluids. *A.I.Ch.E. J.*, 24:1063 – 1070, 1978.
- D. Bhaga and M. E. Weber. In-line interaction of a pair of bubbles in a viscous liquid. *Chem. Eng. Sci.*, 35:2467, 1980.
- A. Biesheuvel and L. Wijngaarden. The motion of pairs of gas bubbles in a perfect liquid. *Journal of Engineering Mathematics*, 16(4):349–365, December 1982.
- C. Bisgaard. Velocity fields around spheres and bubbles investigated by laser-Doppler anemometry. *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, 12:283, 1983.
- C.E. Brennen. *Fundamentals of Multiphase Flow*. Cambridge University Press, 2005.
- M. B. Bush. On the stagnation flow behind a sphere in a shear-thinning viscoelastic liquid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 55(229), 1994.
- Roland Clift, John Grace, and Martin E. Weber. *Bubbles, Drops, And Particles*. Academic Press, New York, 1978.
- J.R. Crabtree and J. Bridgwater. Bubble coalescence in viscous liquids. *Chem. Eng. Sci.*, 26:839, 1971.

- D De Kee, D Rodrigue, and C. F. Chan Man Fong. The motion of bubbles in non-newtonian fluids. *American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Division, AMD*, 217:37–42, 1996a.
- D De Kee, D Rodrigue, and R.P. Chhabra. *Hydrodynamics of free-rise of bubbles in non-Newtonian polymer solutions*, pages 87–123. Marcel Dekker, New York, 1996b.
- D De Kee, C. F. Chan Man Fong, and J Yao. Bubble shape in non-Newtonian fluids. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 69(5):703 – 705, 2002.
- H. S. Dou and N. Phan-Thien. Negative wake in the uniform flow past a cylinder. *Rheol. Acta.*, 42:383, 2003.
- Hadamard. Mouvement permanent lent d’ une sphere liquide et visqueuse dans un liquide visqueux. *J. C. R. Acad. Sci*, (152):1735, 1911.
- J. Happel and R. Pfeffer. The motion of two spheres following each other in a viscous fluid. *A.I.Ch.E. J.*, 6:129, 1960.
- M.W. Haque, K.D.P. Nigam, K. Viswanathan, and J.B. Joshi. Studies on bubble rise velocity in bubble columns employing non-Newtonian solutions. *Chem. Eng. Commun.*, 73:31, 1988.
- O. G. Harlen. The negative wake generation behind a sphere sedimenting through a viscoelastic fluid. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 108:411, 2002.
- O. Hassagar. Negative wake behind bubbles in non-Newtonian liquids. *Nature*, 279:402, 1979.
- J Herrera-Velarde. The flow of non-Newtonian fluids around bubbles and its connection to the jump discontinuity. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 111(2-3):199–209, 2003.
- T. Hirose and M. Moo-Young. Bubble Drag and Mass Transfer in Non-Newtonian Fluids: Creeping Flow with Power-law Fluids. *Can. J. Chem. Eng.*, (47):265 –267, 1969.
- P. Y. Huang and J. Feng. Wall effects on the flow of viscoelastic fluids around. *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 60:179, 1995.
- H. Jin, N. Phan-Thien, and R. I. Tanner. A finite element analysis of the flow past a sphere in a cylindrical tube: PTT fluid model. *Comput. Mech.*, 8:409, 1991.
- J. Katz and C. Meneveau. Wake-induced relative motion of bubbles rising in line. *International Journal of Multiphase Flow*, 22(2):239–258, 1996.
- I. Kim, S. Elghobashi, and W.A. Sirignano. Three-dimensional flow over two spheres placed side by side. *J. Fluid Mech.*, 246:465, 1993.

- 
- N Kishore, R Chhabra, and V Eswaran. Drag on ensembles of fluid spheres translating in a power-law liquid at moderate Reynolds numbers. *Chemical Engineering Journal*, 139(2): 224–235, 2008.
- J.B.W. Kok. Dynamics of a pair of gas bubbles moving through liquid. Part I. Theory. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 12:515, 1993a.
- J.B.W. Kok. Dynamics of a pair of gas bubbles moving through liquid. Part II. Experiment. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 12:541, 1993b.
- L. Gary Leal. *Advanced transport phenomena: fluid mechanics and convective transport processes*. Cambridge University Press, 1 edition, 2007.
- L.G. Leal, J. Skoog, and A. Acrivos. On the motion of gas bubbles in a viscoelastic liquid. *Can. J. Chem. Eng.*, 49:569, 1971.
- D. Legendre, J. Magnaudet, and G. Mougin. Hydrodynamic interactions between two spherical bubbles rising side by side in a viscous liquid. *J. Fluid Mech.*, 497:133, 2003.
- Zieminski S A Lessard R.R. Bubble coalescence and gas transfer in aqueous electrolytic solutions. *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals*, 10(2):260–269, 1971.
- H Li. Evidence for in-line bubble interactions in non-Newtonian fluids. *Chemical Engineering Science*, 53(12):2219–2230, June 1998.
- S.-C. Liang, T. Hong, and L.-S. Fan. Effects of Particle Arrangements on the Drag Force of a Particle in the Intermediate Flow Regime. *Int. J. Multiphase Flow*, 22:285, 1996.
- Y J Liu, T Y Liao, and D D Joseph. A two-dimensional cusp at the trailing edge of an air bubble rising in a viscoelastic liquid. *Journal of Fluid Mechanics*, 304:321–342, 1995.
- A. Maalouf and D. Sigli. Effects of body shape and viscoelasticity on the slow flow around and obstacle. *Rheol. Acta.*, 23:497, 1984.
- a. J Mendoza-Fuentes, R Montiel, R Zenit, and O Manero. On the flow of associative polymers past a sphere: Evaluation of negative wake criteria. *Physics of Fluids*, 21(3): 33104, 2009.
- Efstathios E Michaelides. *Particles, Bubbles and Drops. Their Motion, Heat and Mass Transfer*. World Scientific, Singapore, 2006.
- S. Narayanan, L.H.J. Goossens, and N.W.F. Kossen. Coalescence of two bubbles rising in line at low Reynolds numbers. *Chem. Eng. Sci.*, 29:2071, 1974.
- D Rodrigue and D De Kee. Bubble velocity jump discontinuity in polyacrylamide solutions: a photographic study. *Rheologica Acta*, 38(2):177–182, July 1999.

- D Rodrigue, D De Kee, and C. F. Chan Man Fong. An experimental study of the effects of surfactants on the free rise bubble. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 66:213, 1996.
- D Rodrigue, D De Kee, and C.F. Fong Chan Man. Bubble velocities: further developments on the jump discontinuity. *J NonNewtonian Fluid Mech*, 79:45–55, 1998.
- D Rodrigue, D. De Kee, and C.F. Chan Man Fong. A Note on the Drag Coefficient of a Single Gas Bubble in a Power-Law Fluid. *Can. J. Chem. Eng.*, (77):766, 1999.
- Rybczynski. Uber die Fortschreitende Bewegung einer-ussigen Kugel in einem zahren Medium. *W. Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie, Ser. A*, (40):1911.
- Takayuki Saito, Yusuke Ozawa, Keisuke Matsuda, and Shin-Ichiro Aoshima. *Bubbles and Droplets Measurement via Optical Fiber Probe Processed by Femtosecond Pulse Laser*. ASME, 2008.
- Toshiyuki Sanada, Ayaka Sato, Minori Shiota, and Masao Watanabe. Motion and coalescence of a pair of bubbles rising side by side. *Chemical Engineering Science*, 64(11):2659–2671, 2009.
- J. V. Satrape and M. J. Crochet. Numerical simulation of the motion of a sphere in a Boger fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 55:91, 1994.
- D. Sigli and M. Coutanceau. Effect of finite boundaries on the slow laminar isothermal flow of a viscoelastic fluid around a spherical obstacle. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2:1, 1977.
- Enrique Soto. *Flow of Single Air Bubbles in Complex Fluids*. Ph. d., UNAM, 2008.
- R Sousa, a Pinto, and J Campos. Interaction between Taylor bubbles rising in stagnant non-Newtonian fluids. *International Journal of Multiphase Flow*, 33(9):970–986, 2007.
- Peter Stanbury and Allan Whitaker. *Principles of fermentation technology*. Pergamon Press, Gran Bretaña, 1989.
- M. Stimson and G.B. Jeffery. The Motion of Two Spheres in a Viscous Fluid. *Proc. Roy. Soc.*, A111:110, 1926.
- G. G. Stokes. *Mathematical and Physical Papers*. Cambridge University Press, England, 1880.
- P. Vasseur and R.G. Cox. The lateral migration of spherical particles sedimenting in a stagnant bounded fluid. *J. Fluid Mech.*, 80:561, 1977.
- F. Wenyuan, M. Youguang, L. Xiaolei, and L. Huaizhi. Study on the Flow Field around Two Parallel Moving Bubbles and Interaction Between Bubbles Rising in CMC Solutions by PIV. *Chin. J. Chem. Eng.*, 17:904, 2009.

- H. Yuan and A. Prosperetti. On the in-line motion of two spherical bubbles in a viscous fluid, *J. Fluid Mech.* 278, 325 (1994). *J. Fluid Mech.*, 278:325, 1994.
- J Zhang. On the rise velocity of an interactive bubble in liquids. *Chemical Engineering Journal*, 92(1-3):169–176, April 2003.
- C. Zhu, K. Lam, H.-H. Chu, X.-D. Tang, and G. Liu. Drag Forces of Interacting Spheres in Power-law Fluids. *Mech. Res. Commun.*, (30):651, 2003.