Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

EL PROBLEMA DEL ÁNGEL DE CONWAY Y GRÁFICAS ANGELICALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
LEONARDO IGNACIO MARTÍNEZ SANDOVAL

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JAVIER BRACHO CARPIZO

2011

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del Alumno
   Martínez
   Sandoval
   Leonardo Ignacio
   26 52 23 29
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   408017974

2. Datos del Tutor
   Dr.
   Javier
   Bracho
   Carpizo

3. Datos del Sinodal 1
   M. en C.
   José Antonio
   Gómez
   Ortega

4. Datos del Sinodal 2
   Dra.
   Hortensia
   Galeana
   Sánchez

5. Datos del Sinodal 3
   Dr.
   Ricardo
   Gómez
   Aiza

6. Datos del Sinodal 4
   Dr.
   Ricardo
   Strausz
   Santiago

7. Datos del trabajo escrito
   El Problema del Ángel de Conway y Gráficas Angelicales
   104 pp.
   2011

Agradecimientos

Primero, algunos agradecimientos fundamentales.

- A mi mamá, María de la Luz Perla Sandoval Rodríguez, que me dio la vida y me ha apoyado en todo su transcurso en una cantidad inumerable de formas. Por enseñame que detrás de toda cosa que sale mal viene algo mejor. También por ofrecerme su cariño y su comprensión.
- A mi papá, José Ignacio Martínez Medel, que se que en el fondo también me apoya y comparte mis alegrías y sufrimientos. También a él por que recuerdo muy bien cómo de chiquito yo estaba aburrido y él me ponía a hacer sistemas de ecuaciones que me parecían muy divertidos. Creo que esto desencadenó muchas cosas buenas.
- A mi hermano, Emilio Alonso Martínez Sandoval, por el apoyo fraternal que me ha brindado. Por los chistes que hacemos juntos y de los cuales a veces sólo nosotros tenemos el humor de entender. Por seguirme la corriente tantas veces y también por tener la confianza de compartir conmigo sus gustos y pasiones.
- Al resto de mi familia que de una u otra forma me manifiesta su apoyo con la decisión de estudiar matemáticas.

Existe una cadena muy específica de eventos que me hizo estudiar matemáticas y que culminó en este trabajo. Esta cadena me ha hecho disfrutar la decisión de estudiar matemáticas de manera enorme. En este transcurso en muchos momentos me encontraba en cruces de caminos que podían tener muchos destinos. Sin embargo, en cada cruce me he encontrado con una persona que me ayudó a tomar uno de los caminos, y con todos ellos estoy profundamente agradecido. Agradezco siguiendo un orden cronológico.

- A Loreto Cruz Hernández, por mencionarme que existía la Olimpiada Mexicana de Matemáticas y por ser de los profesores que más transmiten pasion por las matemáticas en sus clases.

- A Rafael Moreno Ferrer por recomendarme asistir al campamento de matemáticas SUMaC en la Universidad de Stanford. A todos lo que hicieron posible este evento pues fue una de las experiencias preuniversitarias más importantes en mi vida matemática.

- A Arturo Gómez, por avisarme de la fecha de inscripción a la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, primera y última en la cual pude participar. Por compartir conmigo la resolución de problemas y llevarme algunas veces a los entrenamientos en el Distrito Federal y de regreso a mi casa. Por ser un buen amigo en preparatoria.

- A Diego Calzadilla Estrada (Gogo), por creer en mis capacidades y motivarme a desarrolarlas. Por explicarme cómo era el concurso nacional y a qué me iba a enfrentar. Por seguir con el apoyo más allá del nacional de matemáticas. Por que es un muy buen amigo.

- A Álvaro Martínez, por ser entrenador en la Olimpiada de Matemáticas del Distrito Federal y enseñarme que realmente lo importante en la Olimpiada y en todo lo que hagas es divertirte. Por ayudarme a dar mis primeros pasos para usar LaTeX. Por invitarme a entrar a cursar la materia de Topología, lo cual desencadenó muchas experiencias gratas en mi carrera.

- A Luis Alberto Briceño Aguirre y a José Antonio Gómez Ortega (Toño), pues han sido los dos profesores que más me han apoyado en mi desarrollo dentro de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Les agradezco profundamente la confianza que me tienen y las oportunidades, consejo y orientación que me han brindado. A Luis por insistirme a entrar a la carrera de Matemáticas en la UNAM. A Toño por escuchar con atención mis problemas matemáticos y por la excelente fórmula de trabajo que hemos tenido dando clases.

- A Javier Bracho Carpizo (el Roli), por que sin el esta Tesis no podría ser lo que es ahora. Por las sesiones en que estuvimos trabajando y

por la confianza que me tuvo en todo momento. Por otras pláticas que tuvimos, de las cuales he aprendido mucho y por su apoyo en otros proyectos que he tenido. Agradezco la suerte de haberlo tenido como profesor en mi primer semestre de la licenciatura.

En la Facultad de Ciencias ha habido varios profesores y profesoras que me enseñaron distintas lecciones. También me gustaría agradecerles.

- A Ana Meda Guardiola por su increíble clase en la Ceremonia de Bienvenida acerca de problemas de urnas con infinitas bolas, pues eso me ayudó a descubrir un gusto por la probabilidad que creo que no hubiera descubierto de otra forma. Por sus clases y posteriormente por darme la oportunidad de dar clase con ella. Por las ocasiones en que fui a platicar con ella y me orientó y dio consejos.

- A Judith Campos Cordero por sus increíbles clases. A ella y a Pablo Soberón Bravo por un ejemplo a seguir. A ambos por compartir conmigo su experiencia en cuanto a trámites, la carrera y demás.

- A Mónica Clapp, a Francisco Marmolejo, a Gabriela Campero y a César Rincón por sus clases ejemplares y exigentes, de las cuales aprendí mucho.

Para andar por un camino uno siempre agradece la compañía de amigos. Estos hacen el camino más fácil de recorrer y lo apoyan mucho en las circunstancias difíciles.

- A Fernando Campos García, por ser un muy buen amigo. Por ser de los primeros en animarme a salir a fiestas. Por su apoyo emocional y por la confianza que tenemos para platicarnos cosas. Por el muy buen equipo de trabajo que puedo hacer con él. Sobre todo por esos ocacionales, pero padres momentos en los cuales mutuamente sabemos qué esta pensando el otro.

- A Lalo y a Alex, por ser los dos muy buenos amigos, en quien se que puedo confiar para platicar de lo que sea.

- A Mariana Gleason y a Ian Gleason, pues ambos son muy buenos amigos y de los dos he aprendido muchas cosas de manera directa o indirecta.

- A José Martínez, por echarme siempre muchas ganas, hacerme preguntar qué sigue y por escuchar atentamente.

- A Valente Ramírez García-Luna, por ser de las personas con quien más pude hablar de matemáticas al principio de la carrera. A Karla Fara por soportar al inicio dichas pláticas y posteriormente volverse una buena amiga.
- A Paco, Daniel, Irving, Martín, Andrea, Isabel, Ilse, Abi, Iván, Rodrigo, Raquel, Alan, Rígel, Diana por todas las tardes divertidas frente al Café Ciencias y por las salidas y fiestas.
- A David (Gato), David (Panda), Marco (Niño), Juan (Yogui), Hugo, Ross, Jorge, César, Alejandro Jiménez, por que también siguen haciendo divertido paticipar en la Olimpiada de Matemáticas con distintos roles.

Finalmente, me gustaría agradecer a algunas instituciones que hacen posible que la gente entre en este maravilloso mundo de las matemáticas.

- A la Olimpiada Mexicana de Matemáticas,
- a la Facultad de Ciencias de la UNAM,
- al Instituto de Matemáticas de la UNAM y
- a la UNAM.

Índice general

CAPÍTULO 1

Introducción

La teoría de juegos es una rama de las matemáticas que ha ocupado un lugar importante desde 1928. No sólo es una rama de las matemáticas puras, sino que también ha tenido un impacto muy grande en otras áreas del conocimiento humano como la economía y la política. La respuesta principal que se responde con la teoría de juegos es "¿qué es lo mejor que puedo hacer frente a una situación que involucra como jugador a mi y a otras personas?".

En el ámbito de las matemáticas la teoría de juegos también abarca muchos temas. Nosotros nos centraremos en la teoría de juegos de conocimiento completo y de acciones controladas. En esta teoría entran muchos de los juegos populares, como gato, timbiriche, ajedrez, damas, entre otros. Tenemos a dos jugadores que juegan por turnos cambiando el estado de juego bajo ciertas reglas. Además los jugadores tienen control completo sobre sus acciones y saben todo lo que está haciendo el otro jugador. En estos juegos hay una "condición ganadora" para cada jugador. Cuando se alcanza esta condición para alguno de los jugadores entonces gana y el juego termina.

Aunque aquí mencionemos tan sólo unos pocos juegos, la verdad es que hay una cantidad enorme de juegos que cumplen estas condiciones. En el libro "Winning ways for your mathematical plays" [5], Berkeley, Conway y Gut discuten cientos juegos de este estilo (y otros cientos de juegos con algunas variaciones). Además de esto, este tipo de juegos han sido el tema de numerosos problemas en competencias matemáticas, a nivel secundaria, preparatoria e incluso a nivel universitario. En problemas de este estilo se plantea algún juego abstracto y se pide a los concursantes encontrar una estrategia ganadora para alguno de los jugadores, es decir, una forma de jugar que garantice ganar sin importar cómo juegue el otro jugador.

Usualmente la teoría de tuegos se desarrolla en un ambiente finito. Es decir, la cantidad de estados de juego y la cantidad de tiempo necesaria para terminar de jugar son variables finitas. Hay muchos tipos de condiciones para que un jugador gane o pierda. En una gran parte de la teoría de juegos desarrollada, una condición para perder frecuente consiste en "ya no poder mover". Como se juega en tiempo finito, habrá un jugador que sea el último en jugar, de modo que será el ganador. Sin embargo, cuando cruzamos las barreras entre lo finito y lo infinito, comienza a haber condiciones extraas para ganar. El Problema del Ángel de Conway es de los juegos que queda en estas fronteras.

A grandes rasgos, el Problema del Ángel de Conway trata de lo siguiente. Un Ángel, que es una pieza de ajedrez generalizada, intenta escapar del Diablo, quien en cada turno elimina uno de los cuadrados de un tablero infinito de ajedrez que se extiende hacia todas las direcciones. El Diablo gana el juego si logra encerrar al Ángel para que ya no se pueda mover. El Ángel gana si logra escapar indefinidamente del Diablo.

El Problema del Ángel de Conway es un juego muy profundo en la teoría de juegos infinita. Hace reflexionar qué quiere decir que un jugador tenga una estrategia y una estrategia ganadora cuando un juego contina indefinidamente. Es un problema que su planteamiento y sus soluciones se pasean por muchas áreas de las matemáticas. Al inicio parece un problema inocente de ajedrez. Conforme uno lo estudia se da cuenta que están involucrados muchos conceptos importantes de las matemáticas como la continuidad de curvas en $\mathbb{R}^2$, problemas de la latiz entera, la geometría y la topología del plano. Al ir avanzando hacia la solución del problema uno se da cuenta que requiere argumentos de cardinales, de caminos en gráficas, de topología y de dimensiones. Finalmente, el problema también se presta a generalizaciones que utilizan fuertemente la teoría de gráficas y digráficas, gráficas de Cayley, teselaciones del plano y teoría de grupos.

No es la primera vez que surge un problema de este estilo, en el cual un jugador intenta escapar de otro. El problema del chofer homicida [11] es un problema similar que se plantea en términos contínuos. Este otro problema consiste en ver si un coche que puede hacer movimientos rápidos pero poco controlados puede atrapar a un objetivo que puede hacer movimientos más lentos pero con mejor control. El problema del chofer homicida está relacionado con ecuaciones diferenciales y el cálculo de variaciones.

Tanto la teoría desarrollada en el problema del chofer homicida como en el Problema del Ángel de Conway tienen varias aplicaciones. Al generalizar el Problema del Ángel de Conway nos enfrentamos a la situación de un objeto que se debe mover por un tablero en el cual se pierden conexiones. Esto puede tener aplicación en el transporte de objetos y de información en entornos que pueden ir deteriorándose poco a poco.

Sin embargo, la principal motivación para trabajar en problemas de este tipo es el desarrollo de toda la maquinaria matemática necesaria para su solución y la satisfacción que se obtiene al resolverlos. El trabajo intenso en el Problema del Ángel de Conway comenzó con una oferta de John Conway de 100 dólares para quien demostrara que el Ángel con suficiente poder podía escapar, y una oferta de 1000 dólares para quien demostrara que el Diablo puede atrapar al Ángel de cualquier poder.

En esta tesis básicamente nos enfocamos en tres objetivos principales. El primero es plantear el Problema del Ángel de Conway. El segundo es dar una solución al Problema del Ángel de Conway. El tercero es plantear una generalización robusta y decir lo que podamos decir al respecto. Es con estos tres objetivos en mente que se ha escrito esta Tesis, pero no por eso nos hemos limitado a escribir esto.

En muchas ocasiones el desarrollo histórico de la solución de un problema nos puede ilustrar y mostrar las dificultades encontradas en el camino. La historia de la solución del Problema del Ángel de Conway es un bonito cuento de cómo poco a poco se pueden hacer avances modestos hacia la solución de un problema matemático. Por esta razón, hemos procurado que esta historia no desaparezca, y por lo tanto hemos tratado de mostrar los avances que se obtuvieron a lo largo del estudio del problema. En el siguiente capítulo hablaremos más específicamente de los temas que vamos a tratar en este trabajo.

CAPÍTULO 2

El Problema del Ángel de Conway

En el artículo "The Angel Problem" de 1996 [4], John Conway plantea el siguiente problema:

Dos jugadores, un Ángel y un Diablo, juegan en un tablero infinito de ajedrez, extendido hacia todas las direcciones. El Ángel ocupa un lugar en el tablero. En su turno, el Ángel puede moverse a una casilla a hasta k movidas de rey de ajedrez de su casilla actual. A esta k se le llama el poder del Ángel. En cambio, el Diablo no ocupa ninguna casilla y en su turno puede eliminar cualquier casilla del tablero. El objetivo del Diablo es encerrar al Ángel de modo que ya no pueda hacer ningún movimiento. El Ángel gana si puede evitar esto con una estrategia que le permita moverse indefinidamente sin importar qué cuadrados elimine el Diablo.

¿Existirá alguna k para la cual el Ángel de poder k pueda escapar del Diablo?

En esta sección veremos el origen del problema y cómo podemos contextualizarlo en términos matemáticos. Por el momento hablaremos informalmente de qué significa que el Ángel o el Diablo tengan una *estrategia ganadora*, pues formalizaremos esto en un contexto más general cuando hablemos del problema en términos de teoría de gráficas en el Capítulo 7.

2.1. El Diablo y el Rey

La pregunta de Conway está inspirada en el juego entre el Diablo y el rey de ajedrez. Se habla acerca de este juego en “Winning ways for your mathematical plays” [5]. El juego se desarrolla como sigue.

Dos jugadores, un Rey y un Diablo, juegan en un tablero en el cual cada casilla es un elemento de la latiz entera $\mathbb{Z}^2$. El Diablo, en su turno, puede elegir un elemento de $\mathbb{Z}^2$ en el cuál no esté el Rey y eliminarlo. El Rey puede pasar de la casilla (x, y) a alguna otra casilla (w, z) de modo que $|w-x| \leq 1$ y $|z-y| \leq 1$, siempre y cuando la casilla (w, z) no haya sido eliminada por el Diablo. El Diablo gana si deja al Rey en una posición en la cual ya no pueda hacer jugadas permitidas y el Rey gana si puede moverse indefinidamente. ¿Qué jugador tiene una estrategia ganadora?

Este problema fue resuelto por Berlekamp, y en el Capítulo 4 veremos una demostración de que el Diablo derrota al Rey, encerrándolo en un cuadrado de 83×83. Nuestra demostración usa cuentas muy holgadas, y de hecho Berlekamp demuestra que se puede atrapar al Rey en un tablero de 34×34, y que el Rey se puede escapar de un tablero de 33×33.

Con el fin de variar un poco el problema, se intentó resolver para un caballo de ajedrez. Este problema resultó más difícil de lo esperado. En la búsqueda de una pieza de ajedrez que pudiera escapar del Diablo, John Conway definió al Ángel de poder k.

2.2. El Ángel

La pregunta natural es: ¿qué sucede si consideramos a un jugador con más movilidad que el Rey? Para hacer este cambio, consideramos a un nuevo personaje, *el Ángel*, el cual tendrá cierto poder k. El problema es muy similar al del Rey y el Diablo.

Dos jugadores, un Ángel y un Diablo, juegan en un tablero en el cual cada casilla es un elemento de $\mathbb{Z}^2$. El Diablo, en su turno, puede elegir un elemento de $\mathbb{Z}^2$ en el cual no esté el Ángel y eliminarlo. El Ángel puede pasar de la casilla (x, y) a alguna otra casilla (w, z) de modo que $|w-x| \leq k$ y $|z-y| \leq k$, siempre y cuando la casilla (w, z) no haya sido eliminada por el Diablo. El Diablo gana si deja al Ángel en una posición en la cual ya no pueda hacer jugadas permitidas, y el Ángel gana si puede moverse indefinidamente.

La siguiente figura muestra al Ángel de poder 3. Los cuadrados sombreados marcan las casillas a las que se puede mover. Los cuadrados oscuros son aquellos que ya fueron eliminados por el Diablo.

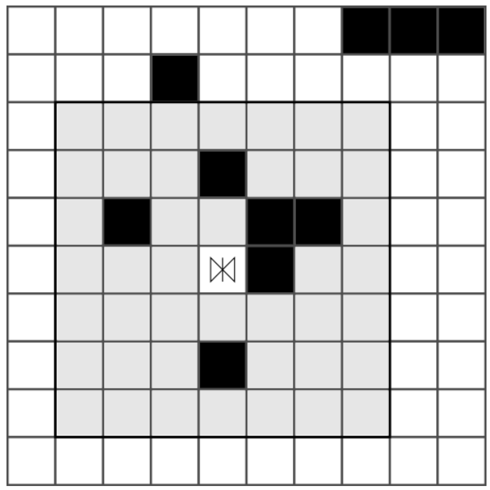


Figura 2.1: El Ángel por moverse a alguno de los cuadrados sombreados claro.

La pregunta que hace Conway [4], y a la cual llamamos el Problema del Ángel de Conway, es la siguiente:

¿Existirá alguna k para la cual el Ángel de poder k pueda escapar del Diablo?

Si existe una k para la cual el Ángel de poder k escape, entonces un Ángel de poder mayor también puede escapar. De este modo, la pregunta también tenía otra pregunta implícita:

Si existe una k para la cuál el Ángel escape, ¿cuál es la menor de esas k?

Por supuesto, el caso del Ángel de poder 1 es precisamente el del Rey, quien ya se sabe que pierde. Los primeros avances de cómo tiene que ser la estrategia ganadora para un Ángel que se pudiera escapar los documenta Conway [4]. Su artículo consiste, a grandes rasgos, en mostrar que una estrategia para que escape el Ángel tiene que estar bien hecha. Haremos una recapitulación de estos avances en el Capítulo 3.

Sin embargo, por mucho tiempo fue difícil dar una estrategia ganadora para un Ángel, incluso de un poder muy grande. De cualquier forma, la conjetura por mucho tiempo fue que el Ángel de poder 2 ya podía escapar. Antes de que se pudiera hacer algún avance en este sentido, surgieron variantes del problema.

2.3. Los problemas intermedios

En el transcurso de los intentos de solución del Problema del Ángel de Conway, surgieron muchos replanteamientos y versiones alternativas del problema. Ya que demostrar que un Ángel se podía escapar resultó una labor difícil, algunos matemáticos comenzaron a probar algunos resultados un poco más débiles. Las dos variantes que surgieron fueron las siguientes.

Por un lado, comenzó la búsqueda de piezas un poco más fuertes que el rey de ajedrez, pero no tan poderosas. El brinco de un Ángel de poder 1 a un Ángel de poder 2 era demasiado grande. Es por esto que Martin Kutz, en su tesis doctoral [9], definió reyes fraccionarios para un poder k con $1 < k < 2$. Kutz demostró que el Diablo puede atrapar a todos estos reyes. El hecho de que su demostración dejara de funcionar para $k = 2$ parecía ser una indicación de que el Ángel de poder 2 ya podía escapar. Veremos en el Capítulo 4 estas ideas.

Por otro lado, también comenzó la búsqueda de piezas que sí se pudieran escapar. Ya que no era fácil demostrar que un Ángel con poder suficientemente grande se escapa, se decidió pensar en aumentar su libertad de movimiento en otro sentido. Es por esto que Martin Kutz, Bella Bollobas e Imre Leader plantean el Problema del Ángel de Conway en tres dimensiones[2]. Con este incremento de movilidad fue posible demostrar que el Ángel escapa si tiene un poder suficientemente grande. Esta variante la trataremos en el Capítulo 5.

2.4. Las soluciones

El Problema del Ángel de Conway fue resuelto finalmente en 2006, cuando cuatro pruebas independientes, de Máthé, de Kloster, de Bowditch y de Gács, mostraron que existía una estrategia para el Ángel de algún poder. No sólo esto, si no que dos de estas pruebas confirmaron que el Ángel de poder 2 puede escapar. Veremos a fondo una de estas demostraciones en el Capítulo 6. También hablaremos un poco acerca de las otras tres en ese mismo capítulo.

2.5. Los nuevos problemas

Aunque ya fue resuelto el Problema del Ángel de Conway, aún quedan muchas direcciones en las cuales se puede generalizar. Un ejemplo de esto es preguntarnos qué sucede con el Problema del Ángel de Conway en otras geometrías. Por ejemplo, podemos ahora teselar regularmente el plano hiperbólico con la teselación regular $(5, 4)$ y preguntarnos si el Ángel, que avanza a pentágonos adyacentes, puede escapar en este caso.

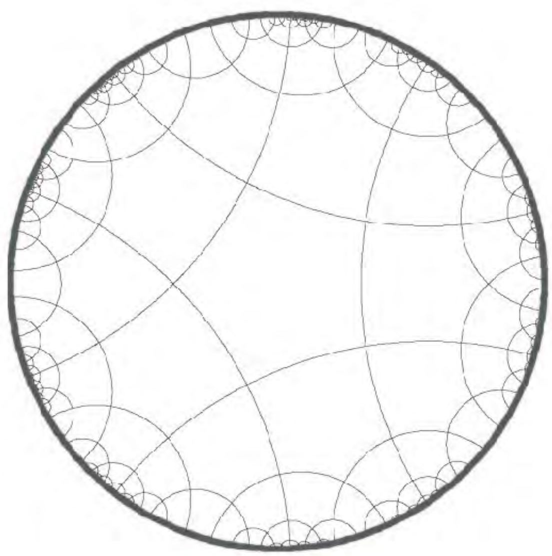


Figura 2.2: Una teselación regular $(5, 4)$

¿Qué podemos decir del juego del Ángel y el Diablo en otras teselaciones regulares?

De hecho, podemos plantearnos el problema más en general y ver qué sucede con el Problema del Ángel de Conway en una gráfica que cumple ciertas condiciones. Permitimos al Ángel moverse a un vértice adyacente y al Diablo eliminar un vértice de la gráfica. Si G es una gráfica y u es un vértice, llamamos a (G, u) una pareja angelical si el Ángel puede moverse indefinidamente por esa gráfica iniciando en u sin que el Diablo lo atrape.

¿Qué podemos decir acerca de las parejas angelicales?

La estrategia de resolución del Problema del Ángel de Conway es una estrategia muy *ad hoc*, pero esto no evita que podamos desarrollar teoría que nos permita resolver el problema en otros contextos. Veremos cómo plantear este problema formalmente y algunos resultados al respecto en el Capítulo 7.

Debido a que usaremos herramientas de varias áreas de las matemáticas, hemos incluído un apéndice de teoría en el cual se enuncian las definiciones que tomaremos. Así mismo, en el apéndice se pueden encontrar varias proposiciones que se usan a lo largo del trabajo.

CAPÍTULO 3

Las primeras dificultades del Ángel

El primer artículo referente al Problema del Ángel de Conway lo escribe John H. Conway en el año 1996 [4]. Aunque es un artículo que muestra que muchas de las estrategias más evidentes para el Ángel no funcionan, finalmente Conway termina confiando en que para algún poder el Ángel se puede escapar. Es un artículo lleno de ideas muy interesantes.

Lo primero que se descarta es una estrategia en la cual el Ángel siempre avanza hacia arriba. Después, poco a poco se va extendiendo la información que se obtiene a partir de esta estrategia para obtener restricciones todavía más fuertes para una estrategia del Ángel. Conway demuestra que para que una estrategia del Ángel funcione, el Ángel tiene que regresar un poco a cada punto del plano.

Además de esto, en el artículo se demuestra que el Ángel puede regalar todos los cuadrados que en algún momento pudo haber estado, pero que decidió no hacerlo.

En esta sección recuperamos las observaciones que Conway hace en este artículo. En el artículo las demostraciones están muy "platicadas", de modo que en esta sección las formalizamos. En muchas ocasiones, como en las demostraciones del Lema 3.1.3, el Lema 3.1.4 y el Teorema 3.2.2 nuestros estimados claramente no serán los más óptimos, pero serán suficientes para demostrar que algunas estrategias del Diablo funcionan bien.

3.1. El Tonto

Recordemos que el juego se lleva a cabo en un tablero infinito de ajedrez, el cual a veces nos convendrá pensarlo como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Pensándolo de esta manera, podemos decir, sin pérdida de generalidad, que el Ángel comienza en el punto $(0, 0)$. Recordemos que, si el Ángel tiene poder k, en su turno tiene permitido moverse de su casilla (x, y) a otra casilla (a, b) aún no eliminada que cumpla que $|x - a| \leq k$ y $|y - b| \leq k$. Comenzaremos por descartar la estrategia en la que el Ángel se mueve siempre hacia arriba, haciendo sólo movimientos laterales para evitar obstáculos. Para esto daremos la siguiente definición:

Definición 3.1.1. *El Tonto de poder k es un Ángel de poder k que en cada movimiento aumenta estrictamente su coordenada en y. Dicho de otra forma, es un Ángel que de la casilla (x, y) se mueve a otra casilla (a, b) aún no eliminada que cumpla que $|x - a| \leq k$ y $0 < b - y \leq k$.*

Teorema 3.1.2. *El Diablo puede atrapar al Tonto de cualquier poder k.*

Veremos primero un esbozo de la demostración.

La primer observación que nos ayudará para demostrar este teorema es que el Tonto de poder k siempre permanece en el cono superior que tiene vértice en el origen, y cuyos lados pasan por el origen y tienen pendiente $\pm\frac{1}{k}$. Dicho de otra forma, si el tonto tiene su coordenada y igual a y', entonces su coordenada x está en el intervalo $[-ky', ky']$ (y es entera, por supuesto). Esto lo ilustramos con la siguiente figura.

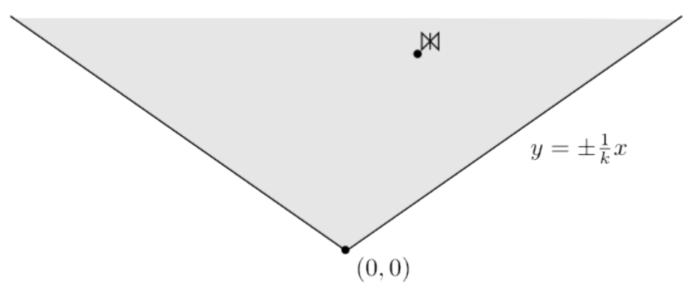


Figura 3.1: El cono en el cuál se queda el Tonto.

La estrategia del Diablo consistirá en lo siguiente. Eligirá una altura muy lejana H que sea una potencia de 2 para empezar a eliminar los cuadritos de la línea a esa altura que intersecten al cono del Tonto. Comenzará a la izquierda de esa línea, eliminará el primero, luego el $M-$ésimo siguiente, luego el $M-$ésimo siguiente, donde M será suficientemente grande para que el Diablo pueda eliminar un cuadrado de cada M en la línea a altura H cómodamente antes de que el Ángel llegue a la altura $\frac{1}{2}H$. Luego, dentro del cono que el Tonto todavía pueda alcanzar, eliminará uno de cada M de los cuadrados que faltan. Al llegar el Tonto a la altura $\frac{3}{4}H$, el Diablo habrá terminado con los segundos cuadritos de cada M.

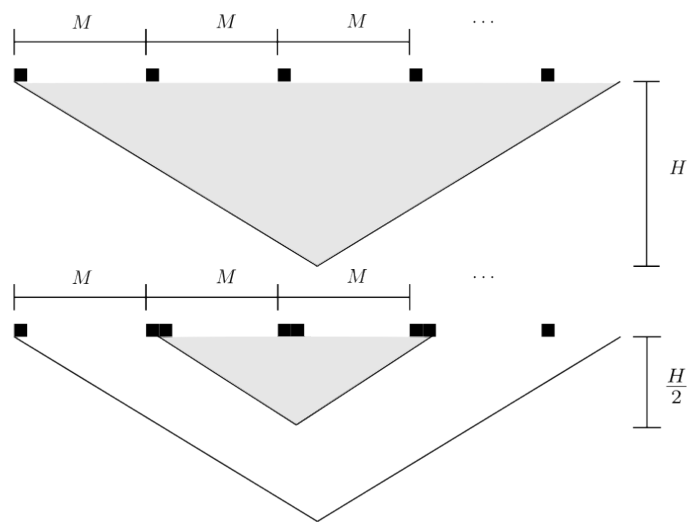


Figura 3.2: El Diablo elimina uno de cada M cuadrados disponibles para el Ángel

Siguiendo de este modo, el Diablo podrá eliminar un segmento completo que corta al cono del Tonto antes de que el Tonto llegue a la altura $\frac{2^M-1}{2^M}H$. El Diablo puede entonces comenzar a eliminar el segmento que está a altura $H+1$ de nuevo eliminando 1 de cada M, luego eliminar el segmento a altura $H+2$ y así hasta el segmento a altura $H+k-1$. Si desde el inicio toma la altura H suficientemente grande, resulta que alcanzará a hacer un hoyo de longitud vertical k, el cual el Tonto ya no podrá evitar.

Hagamos la demostración de que en efecto existen H y M adecuadas para que el Diablo pueda cumplir su propósito. Recordemos que k es el poder del Ángel.

Lema 3.1.3. *Si $M = 4k(k+1)+4$, y se tiene una línea a $H > 2k(k^2+k+1)$ unidades arriba de la posición de un Tonto de poder k, entonces se puede eliminar 1 de cada M cuadrados que el Tonto aún pueda alcanzar en esa línea antes de que el Tonto se acerque a $\frac{H}{2}$ unidades de la línea.*

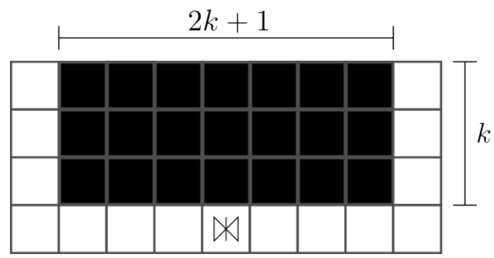


Figura 3.3: Un hoyo que el Tonto no va a poder evitar.

Demostración. Como el Tonto queda siempre en el cono superior con vértice en él y lados que pasan por él y de pendiente $\pm\frac{1}{k}$, entonces el Tonto a lo más puede alcanzar $2kH + 1$ cuadrados de la línea H unidades arriba (ver la Figura 3.4).

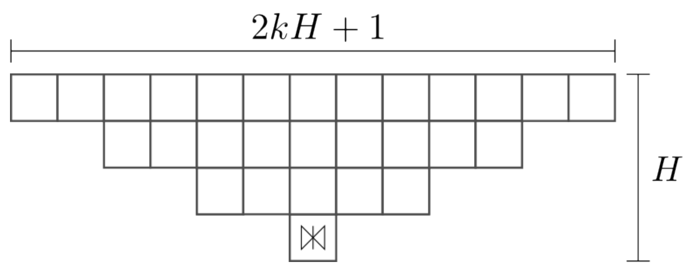


Figura 3.4: El Tonto alcanza a lo más $2kH+1$ cuadrados en la línea a H de altura.

De modo que al Diablo le tomará $\left\lceil \frac{2kH+1}{M} \right\rceil$ turnos en eliminar uno de cada M de estos cuadrados[1]. Además, llegar a acercarse a $\frac{H}{2}$ unidades de la línea le tomará al Ángel al menos $\left\lceil \frac{H}{2k} \right\rceil$ turnos. Pero tenemos:

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{2kH+1}{M} \right\rceil &\leq \frac{2kH+1}{M} + 1 = \frac{2kH+1}{4k(k+1)+4} + 1 \\ &< \frac{H}{2k} < \left\lceil \frac{H}{2k} \right\rceil \end{aligned}$$

En la segunda desigualdad usamos que $H > 2k(k^2+k+1)$. Esto muestra que el Diablo necesita menos turnos para eliminar uno de cada M cuadrados

[1] Aquí $\lceil x \rceil$ denota al menor entero mayor o igual a x.

en la línea a altura H que los que necesita el Ángel para acercarse a $\frac{H}{2}$ unidades de la línea.

$\square$

Como consecuencia inmediata obtenemos lo siguiente.

Lema 3.1.4. *Si $M = 4k(k+1)+4$, y se tiene una línea l a $H > 2^M k(k^2 + k + 1)$ unidades arriba de la posición de un Tonto de poder k, entonces se puede eliminar un segmento del cono de l que el Tonto todavía puede alcanzar antes de que llegue a acercarse a $\frac{H}{2^{M-1}}$ unidades de la línea l.*

Demostración. Aplicamos repetidas veces el Lema 3.1.3. Primero nos encargamos de eliminar los cuadrados cuya coordenada en x deja residuo 0 al dividirse entre M (son uno de cada M). Esto lo podemos hacer antes de que el Tonto llegue a la altura $\frac{H}{2}$. Luego, en lo que el Tonto todavía puede alcanzar, eliminamos los que su coordenada en x deja resduo 1 al dividirse entre M. Como el Tonto ya está a la mitad de la altura, ahora sólo hay que eliminar la mitad de cuadrados, por lo cual lo podremos hacer antes de que el Tonto avance $\frac{H}{4}$ unidades hacia arriba.

Siguiendo así, habremos acabado con todas las congruencias módulo M para la coordenada en x antes de que el Tonto llegue a acercarse a la línea $H - \frac{H}{2} - \frac{H}{4} - \ldots - \frac{H}{2^{M-1}} = \frac{H}{2^{M-1}}$ unidades. $\square$

Modificando un poquito más este último lema, podemos demostrar que el Diablo atrapa a cualquier Tonto.

Demostración. Tomando a M como en el Lema 3.1.4, si el Diablo comienza a una altura H mayor a $2^{kM+1}k(k^2 + k + 1)$, entonces le dará tiempo de hacer k segmentos, uno arriba del otro, en la parte del cono que el Tonto aún puede alcanzar. Al hacer esto, logrará hacer un hoyo de tamaõ vertical k, que para cuando el Tonto llegue a él, ya no podrá atravesar.

Así, esta estrategia muestra que el Diablo puede atrapar a un Tonto de poder k para cualquier k. $\square$

Esta estrategia, como veremos en la siguiente sección, es la base para confrontar otras estrategias similares en las cuales el Ángel limita sus movimientos.

3.2. Ángeles no tan tontos

Supongamos ahora que tenemos un Ángel que promete nunca disminuir su coordenada en y. Es similar al Tonto, sólo que de vez en cuando este Ángel se desplazará únicamente en dirección horizontal. Formalmente lo definimos como sigue.

Definición 3.2.1. *El Tonto flojo de poder k es un Ángel de poder k que en cada movimiento no disminuye su coordenada en y. Dicho de otra forma, es un Ángel que de la casilla (x, y) se mueve a otra casilla (a, b) aún no eliminada que cumpla que $|x - a| \leq k$ y $0 \leq b - y \leq k$.*

Teorema 3.2.2. *El Diablo puede atrapar al Tonto flojo de cualquier poder k.*

La idea clave de esta demostración, y de las siguientes que contemplan otras posibles estrategias para el Ángel, es utilizar que el Diablo puede atrapar al Tonto de cualquier poder. Así, cuando el Diablo se enfrente con otras estrategias contra un Ángel de poder k, quizás le convenga pensar que en realidad es simplemente un Tonto, pero de poder mucho más grande (quizás k^2, $1000k$ ó 2^k).

Demostración. Afirmamos que el Diablo puede garantizar que el Tonto flojo no se quede en la misma coordenada en y por más de $3k^2 + 2k + 1$ turnos. En efecto, si el Ángel lo intenta, el Diablo deberá actuar de la siguiente forma.

Mientras el Tonto flojo permanezca con la misma coordenada en y, el Diablo hará lo siguiente. Comenzará k^2+1 cuadrados a la izquierda del Tonto flojo quitando un cuadrado por turno y continuando quitando cuadrados hacia la izquierda hasta que haya quitado k de ellos. Como el Tonto flojo no puede llegar en k turnos para escapar por la izquierda, el Diablo puede terminar de hacer un hoyo de longitud horizontal k. Una vez que el Diablo termine con esto, comezará ahora a $2k^2+1$ cuadrados a la derecha del Tonto flojo a quitar cuadrados hacia la derecha. De nuevo, el Tonto flojo necesita al menos $2k$ turnos para llegar a intentar escapar por la derecha, pero para cuando llegue, el Diablo ya habrá hecho de nuevo un hoyo de longitud k. Para cuando el Diablo termine de hacer estos hoyos, dejará al Tonto flojo con dos hoyos como en la Figura 3.5.

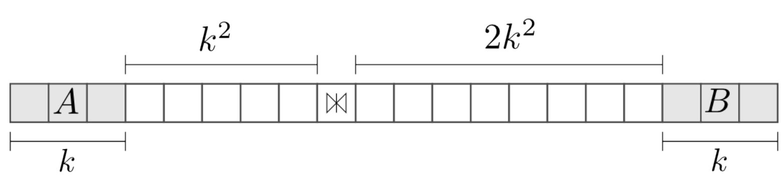


Figura 3.5: El Diablo prepara trampas laterales muy lejos.

A partir de esto, el Diablo seguirá quitando cuadrados hasta que deje al Tonto flojo en un cuadrado, lo cual lo forzará a ir hacia arriba (cf. Proposicion 7.1.5 del Capítulo 7).

Si en algún momento el Tonto flojo avanza hacia arriba, el Diablo de nuevo vigila que no se quede mucho tiempo con la misma coordenada en y siguiendo esta misma estrategia pero en la nueva línea del Tonto flojo.

De este modo, el Diablo ya sabe qué hacer si el Tonto flojo se queda en la misma coordenada en y. Así, fijémonos únicamente en los momentos en que el Tonto flojo avanza hacia arriba. En estos momentos se comporta como un Tonto, pero de poder más grande, pues tuvo la oportunidad de desplazarse hacia los lados hasta $2k^2$ unidades antes de desplazarse hacia arriba. Vamos a indicarle al Diablo que en estos momentos actúe como si estuviera enfrentando a un Tonto de poder $2k^2 + k$. Veamos que esto es suficiente para atrapar cómodamente al Tonto flojo de poder k.

Primero, el Tonto flojo tiene a lo más $2k^2$ movimientos laterales antes de cambiar de coordenada en y. Cuando cambia de coordenada en y puede moverse otras k unidades laterales. Así, cuando el Tonto flojo se mueve en y es más débil que un Tonto de poder $2k^2+k$. Así cuando el Tonto se tope con la trampa a altura H del Teorema 3.1.2 ya no podrá continuar hacia arriba. Pero además, lateralmente el Diablo tendrá de cada lado $2k^2+k$ cuadrados, lo cual ya vimos que le da tiempo suficiente para también encerrar el Tonto flojo horizontalmente. □

Ahora supongamos que el Ángel se permite a veces disminuir su coordenada en y de vez en cuando, pero promete que nunca hará una sucesión de movimientos que lo dejen más de 10000 unidades por debajo de donde se encuentra. Visualmente, lo que el Ángel se está prometiendo es quedarse en la región marcada de la Figura 3.6. Para dejar más claro esto, definimos al Tonto relajado.

Definición 3.2.3. *El Tonto relajado de poder k y laxitud r es un Ángel de poder k que no hace una sucesión de movimientos que disminuya su coordenada en y en más de r. En otras palabras, si en algún momento está en la casilla (x, y), entonces nunca estará en una casilla (a, b) con $b < y - r$.*

Teorema 3.2.4. *El Diablo puede atrapar al Tonto relajado de cualquier poder k y cualquer laxitud r.*

Demostración. De nuevo, el Diablo se asegurará de que el Tonto relajado incremente su coordenada en y de vez en cuando. Nos referiremos a la siguiente figura:

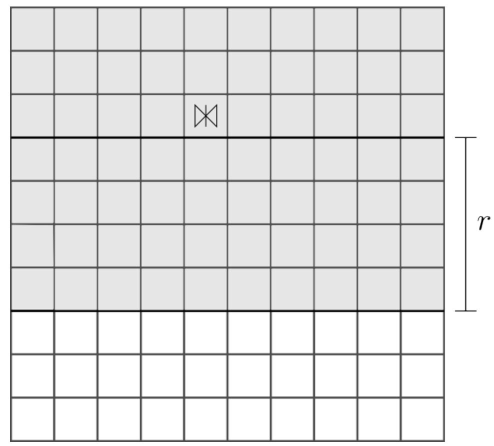


Figura 3.6: El semiplano en el cual se queda el Tonto relajado

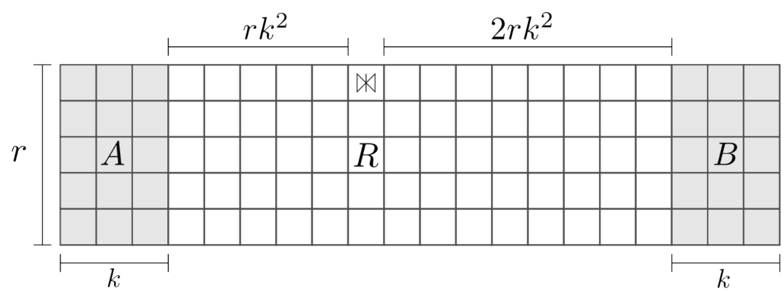


Figura 3.7: El Diablo prepara hoyos a los lados suficientemente grandes.

Supongamos que el Tonto relajado está en determinado momento en la casilla marcada. Si el Tonto relajado se mueve a un cuadrado dentro de la región R, el Diablo comenzará a eliminar los cuadrados de la región A que está a $rk^2 + 1$ unidades a la izquierda de la posición original del Tonto relajado. El argumento se sigue como arriba, pues el Tonto relajado no puede interferir con eliminar totalmente la región A.

Después de esto, el Diablo procederá a eliminar la región marcada con B, que está a $2rk^2 + 1$ unidades a la derecha del cuadrado inicial del Tonto relajado. Tras eliminar la región A y B, el Diablo procede a eliminar los cuadrados de la región R uno por uno. Así, el Tonto relajado eventualmente debe abandonar R, y en estos momentos se comporta como un Tonto.

De este modo, si el Diablo juega en estos momentos como si atrapara al Tonto de poder $2rk^2 + k + 1$, al final el Tonto relajado quedará frente a un hoyo de longitud vertical $2rk^2 + k + 1$ y de longitud horizontal $2(2rk^2 + k + 1) + 1$, en el cual el Diablo tiene suficientes turnos para atraparlo por la izquierda y por la derecha.

$\square$

3.3. Variantes del problema

El personaje que hemos consierado, el Ángel, es la generalización de un rey de ajedrez. Por este motivo, se mueve como un rey generalizado, de modo que hace movimientos discretos a puntos a distancias medidas con la "métrica del rey", en donde las bolas unitarias son los cuadrados de lado 1 con lados paralelos a los ejes. Sin embargo, podemos alterar el problema cambiando de métrica y hacer el problema un poco más contínuo.

Ejemplo 1 Un primer ejemplo es permitir al Ángel no sólo moverse en las casillas de un tablero de ajedrez, si no que también moverse a cualquier punto en el cuadrado de radio 1 del cual es centro, cuyos lados son paralelos a los ejes. En este juego, ahora el Diablo puede eliminar cualquier cuadrito unitario con lados paralelos a los ejes. Este problema está relacionado con el problema original. Primero, el problema original es un caso particular de este juego. A la vez, si el Ángel también ahora decide siempre incrementar su coordenada en y, una adaptación de la prueba del Teorema 3.1.2 nos dirá que el Diablo lo puede atrapar.

Ejemplo 2 Otro ejemplo de esto es considerar el problema en el plano euclideano, con la distancia euclideana. En este juego, el $\mathbb{E}$-Ángel de poder r tiene permitido moverse a cualquier punto a distancia (euclideana) a lo más r de su posición actual. Por su parte, el $\mathbb{E}$-Diablo puede eliminar del plano todos los puntos de cualquier disco cerrado unitario del plano siempre y cuando este disco no tenga al $\mathbb{E}$-Ángel.

El nuevo problema es parecido al original, y si sabemos información acerca del problema original, podemos obtener información del problema variante. Por ejemplo, supongamos que tenemos al $\mathbb{E}$-Ángel de poder $r = 1$. En cada turno puede moverse menos que el Ángel de poder $k = 1$. Pero en un turno, el $\mathbb{E}$-Diablo puede comerse un cuadrado de lado 1, de hecho, puede comerse un cuadrado de lado $\sqrt{2}$, como muestra la Figura 3.8.

De este modo:

- El $\mathbb{E}$-Ángel de poder $r = 1$ es más débil que el Ángel de poder 1,
- el Ángel de poder 1 pierde contra el Diablo, y

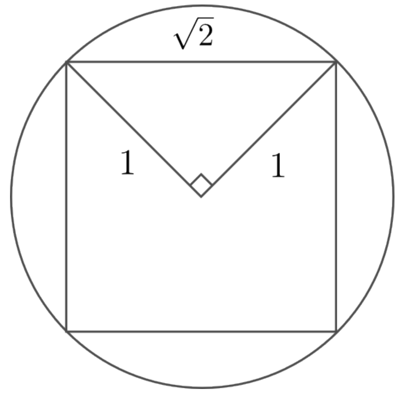


Figura 3.8: Un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ dentro de un círculo de radio 1.

- el $\mathbb{E}$-Diablo es más poderoso que el Diablo.

Por lo tanto, el $\mathbb{E}$-Diablo le gana al $\mathbb{E}$-Ángel de poder 1. De hecho, como el $\mathbb{E}$-Diablo puede comerse un cuadrado de lado $\sqrt{2}$, podemos afirmar que el $\mathbb{E}$-Diablo le gana al $\mathbb{E}$-Ángel de poder $\sqrt{2}$, simplemente escalamos por $\sqrt{2}$ todo el tablero en el problema del Rey contra el Diablo.

Ejemplo 3 Estas ideas nos deben sugerir que no sólo podemos cambiar la métrica, sino que también podemos aplicar ciertas distorsiones que dejan el problema invariante, o lo dejan en un problema del cual podemos obtener mucha información a través del problema original.

Una situación en la que sucede esto es la siguiente. Tomemos una transformación T del plano en sí mismo. Supongamos que la T-distorsión de cada bola de radio r contiene una bola no distorsionada de radio $\frac{1}{2}r$ y está contenida en una bola no distorsionada de radio $2r$. Esto lo podemos ver en la siguiente figura.

Supongamos además que el Diablo puede jugar para ganar en el tablero no distorsionado contra el Ángel de poder $4r$. Escalando todo el problema por $\frac{1}{2}$, el Diablo que hace hoyos de la mitad de una bola unitaria le gana al Ángel de poder $2r$.

Entonces, el T-Ángel de poder r (que puede moverse a cualquier punto de la distorsión de la bola de radio r de la cual es centro) es más débil que el Ángel de poder $2r$ y el T-Diablo (que elimina T-imágenes de bolas unitarias) es más poderoso que el Diablo de poder $\frac{1}{2}$. Pero el Diablo de poder $\frac{1}{2}$ le gana al T-Ángel de poder $2r$, de modo que el T-Diablo le gana al T-Ángel de poder r.

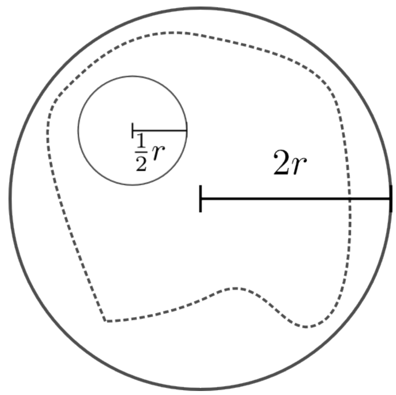


Figura 3.9: Cada bola de radio r distorsionada está dentro de una bola no distorsionada de radio $2r$ y contiene una bola distorsionada de radio $\frac{1}{2}r$

Para fijar bien las ideas, veamos ejemplos de transformaciones concretas y sus aplicaciones para el Problema del Ángel de Conway original.

Ejemplo 4 Regresemos al Problema del Ángel de Conway, donde el Ángel de poder k avanza discretamente y el Diablo se come cuadrado por cuadrado.

Supongamos que el Ángel promete permanecer en el sector circular infinito H de la Figura 3.10, y además nunca disminuir r, su distancia hacia el vértice O del sector circular. Entonces el Diablo puede distorsionar el sector al cono de la figura, cambiando la coordenada en r a la coordenada en y. Pero ahí, el Ángel se comporta como un Tonto (de poder quizás mayor), de modo que el Diablo lo puede atrapar.

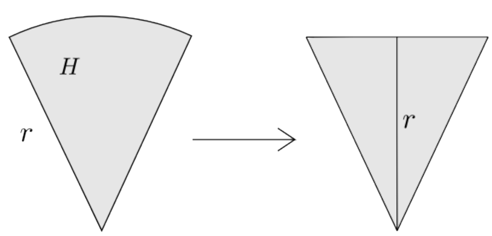


Figura 3.10: Un sector circular convertido en triángulo

Este último ejemplo nos servirá para demostrar que si el Ángel quiere ganar, entonces no puede alejarse mucho del origen.

3.4. Los caleidoscopios atrapan Tontos-hacia-afuera

Un Ángel tiene que ser al menos un poco valiente para poder escapar del Diablo. La siguiente definición y el teorema inmediato nos dicen por qué.

Definición 3.4.1. *Un Tonto-hacia-afuera de poder k es un Ángel de poder k que en cada turno se aleja del origen. Es decir, para pasar de (x, y) a (a, b) necesita que $|x - a| \leq k$, $|y - b| \leq k$ y $a^2 + b^2 > x^2 + y^2$.*

Teorema 3.4.2. *El Diablo puede atrapar al Tonto-hacia-afuera de cualquier poder.*

Demostración. El Diablo se imaginará que el plano queda dividido por 8 sectores, y que estos son los espejos de un caleidoscopio. De esta forma, el Tonto-hacia-afuera siempre estará reflejado en los 8 sectores, como lo muestra la Figura 3.11. El Diablo usará sus turnos alternadamente para jugar en estos ocho sectores.

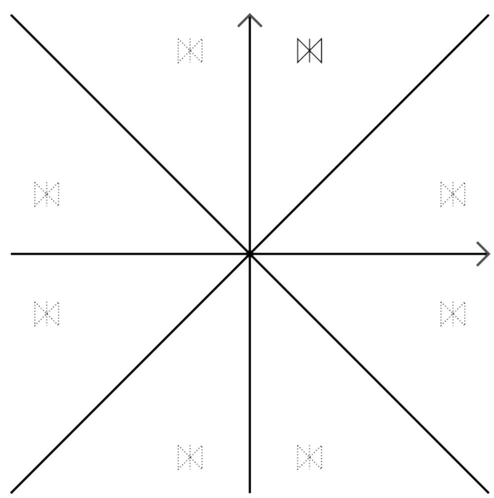


Figura 3.11: El Ángel reflejado en los espejos de un caleidoscopio.

En cada uno de estos sectores el Tonto-hacia-afuera está incrementando su distancia al vértice, y ya vimos que estos Ángeles se pueden atrapar. Pero el Diablo además debe de jugar como si tuviera cada uno de ellos 8 veces más poder que el Tonto-hacia-afuera que queremos atrapar, pues sólo juega en cada sector uno de cada 8 turnos. Esto le garantizará atrapar al Tonto-hacia-afuera en todos los sectores, y para cuando llegue este momento, habrá atrapado al Tonto-hacia-afuera verdadero. □

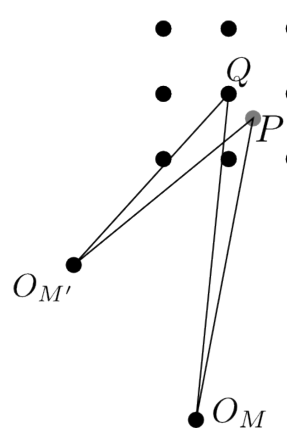
El Diablo también puede atrapar a un Tonto relajado-hacia-afuera de cualquier laxitud r, es decir, a un Ángel que promete nunca hacer ninguna sucesión de movimientos que reduzca su distancia al origen en más de r unidades.

3.5. La estrategia desviante

Hasta aquí lo que hemos demostrado es que si un Ángel quiere escapar de ciertas estrategias del Diablo, irónicamente deberá hacer regresos arbitrariamente grandes hacia el origen. Por ejemplo, aunque se aleje 10000 unidades, en algún momento tiene que regresar 10, o cuando se aleje 100000000, en algún momento tiene que regresar 10000. Hasta ahora el argumento sólo sirve para el origen, pero el siguiente teorema muestra que el Diablo puede forzar todavía mucho más la estrategia del Ángel forzándolo a regresar distancias arbitrariamente grandes a cualquier punto.

Teorema 3.5.1. *(La estrategia desviante) Existe una estrategia para el Diablo la cual, cuando se usa, tiene la siguiente propiedad. Para cualquier punto P del plano y para cualquier distancia D, si el Ángel quiere escapar, habrá dos momentos M y M' de modo que M' pasa después que M y de modo que en el momento M' el Ángel está al menos D unidades más cerca de P que en el momento M.*

Demostración. Primero veremos que basta que demostremos que la proposición es cierta para puntos P con coordenadas enteras y para distancias D enteras, así que supongamos por un momento que ya demostramos esto.



Tomemos cualquier punto arbitrario P y cualquier distancia D. Supongamos que el Ángel está en el punto O. Consideremos $E = \lceil D \rceil + 3$. Consideremos Q un punto de coordenadas enteras más cercano a P. Sabiendo que se vale para distancias enteras y puntos de coordenadas enteras, tomemos los momentos M y M' como en el enunciado y O_M, $O_{M'}$ el punto en el que está el Ángel en esos momentos.

Así, tenemos usando desigualdad del triángulo y que $|P - Q| \leq \sqrt{2}$ que:

$$
\begin{aligned}
|O_{M'} - P| &\leq |O_{M'} - Q| + |Q - P| \leq |O_M - Q| - E + |Q - P| \\
&\leq |O_M - P| - E + 2|P - Q| \leq |O_M - P| - E + 2\sqrt{2} \\
&= |O_M - P| - (\lceil D \rceil + 3) + 2\sqrt{2} < |O_M - P| - D
\end{aligned}
$$

De modo que en el momento M' el Ángel está más que D unidades cerca que en el momento M, que es lo que queríamos probar.

Ahora sólo falta ver cómo el Diablo puede asegurar acercar al Ángel distancias enteras a puntos de coordenadas enteras. Consideremos todas las posibles parejas (P, D) con P punto de coordenadas enteras y D entero no negativo. Hay una cantidad numerable de estas, de modo que podemos numerarlas (P_0, D_0), (P_1, D_1), (P_2, D_2), $\ldots$.

En cada turno el Diablo escribirá su número de turno de la forma $2^i j$ con i entero no negativo y j entero impar (lo cual se puede hacer de manera única por el Teorema Fundamental de la Aritmética). En los turnos así actuará como si quisiera atrapar a un Tonto relajado-hacia-afuera que se aleja del punto P_i de laxitud D_i y de poder $2^{i+1}k$.

De este modo, para cualquier pareja (P_i, D_i), si el Ángel no regresa al menos D_i unidades a P_i en un momento posterior a otro, el Diablo lo atrapará en los turnos 2^i, $3 \cdot 2^i$, $5 \cdot 2^i$, $\ldots$, y por tanto se sigue la conclusión del teorema.

$\square$

Hay que hacer la observación de que el Teorema 3.5.1 sólo nos garantiza que el Ángel “regresa” distancias arbitrariamente grandes, lo cual es distinto a “acercarse” al punto distancias arbitrariamente chicas. Es por esto que sus regresos, aunque sí afecten su estrategia considerablemente, quizás sólo son una pequea distracción en un plan mucho más grande.

3.6. El Ángel es su peor enemigo

En cada turno el Diablo elimina un cuadrado del tablero. John Conway observa que en cierto sentido el Ángel elimina muchos más. Pensémoslo de la siguiente manera. Si el Ángel regresa a su cuadrado inicial y luego de ahí continúa su recorrido, entonces está en una posición "estrictamente peor", pues en el tiempo que dio la vuelta el Diablo ha eliminado más cuadrados. Así, cualquier cosa que haga después de ese segundo momento que llegó a ese cuadrado, le convenía más hacerla desde el principio, "ahorrarse la vuelta" y así enfrentarse a un tablero con menos cuadrados eliminados.

La observación de Conway es un poco más fuerte.

Teorema 3.6.1. *Al Ángel de cualquier poder entero positivo k no le afecta en cada paso que da regalar todos los cuadrados a los que se pudo haber movido, pero no lo hizo.*

Aún no hemos hablado de estrategias ganadoras, lo cual es una parte fundamental para enunciar con precisión qué está diciendo el Teorema 3.6.1. De todos modos, daremos la demostración de Conway para ver las ideas que están detrás. Cuando lleguemos al Capítulo 7, enunciaremos formalmente el Problema del Angel de Conway en una gráfica y hablaremos de estrategias ganadoras. En ese mismo capítulo enunciaremos una generalización del Teorema 3.6.1 y lo demostraremos con precisión.

Demostración. Sea S el cuadrado de $2k + 1 \times 2k + 1$ que el Ángel puede alcanzar desde su primer movimiento. Supongamos que el Ángel tiene una estrategia que le permita moverse indefinidamente sin importar lo que haga el Diablo. Supongamos que hay alguna situación en la cual el Ángel tiene que entrar a S una cantidad infinita de veces. Entonces, cada vez que lo haga el Diablo puede ir haciendo un hoyo de tamaõ k alrededor de S del cual el Ángel no podrá escapar, lo cual es contradictorio con que el Ángel escape con su estrategia.

Así, el Ángel tiene una última ocasión en la cual visita S, digamos, en el cuadrado q. Entonces, en vez de dar todas las vueltas que dio por el tablero, el Ángel puede simplemente moverse a q y después hacer lo necesario para escapar de q. Al adaptar así su estrategia, no necesita volver a pasar por S, de modo que puede regalar al Diablo todos los cuadrados de S, excepto q.

El Ángel repite el mismo argumento para el cuadrado de $2k+1\times 2k+1$ que encierra a cada cuadrado por el cual pase, de modo que puede ir regalando todos los cuadrados por los que pudo pasar, pero que decidió no pasar por ellos.

□

Así, cada que el Ángel se mueve, va dejando un rastro de muchos cuadrados eliminados, como lo muestra la Figura 3.12.

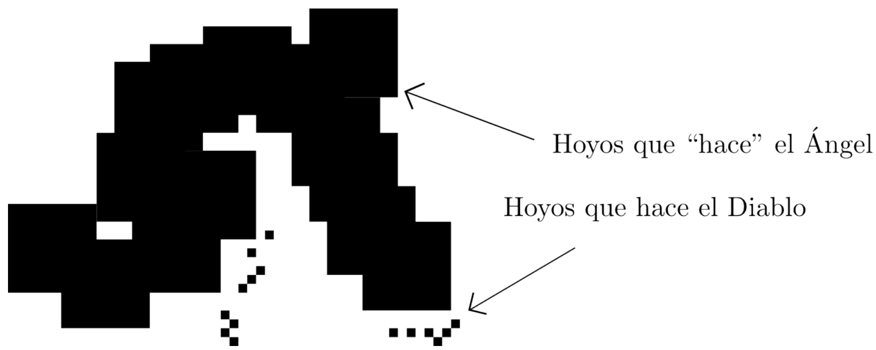


Figura 3.12: Los hoyos que hace el Diablo son pequeos comparados con el rastro que deja el Ángel

Todas estas observaciones que hace Conway en su artículo son una indicación de algo. Si en efecto el Ángel puede escapar, debe ser por que su estrategia está cuidadosamente planeada.

CAPÍTULO 4

Los reyes de poder menor a 2

El problema que antecede al Problema del Ángel de Conway es el del enfrentamiento del Diablo contra el Rey de ajedrez. El Rey es una pieza flexible en el ajedrez. Puede moverse sólo una casilla de distancia, pero en la dirección que quiera. En este capítulo veremos cuál es el desenlace de enfrentar al Rey contra el Diablo.

Después de resolver este problema, veremos qué sucede si hacemos al Rey un poco más fuerte. Cuando tenemos un Rey y lo convertimos en un Ángel de poder 2, le estamos incrementando mucho poder. El Ángel puede saltar hoyos, por lo que hay que encerrarlo con paredes muy anchas. Si somos un poco más cuidadosos en aumentar el poder del Rey, quizás sea fácil ver si es atrapable o no. Es precisamente esta la idea de Martin Kutz, quien en su tesis doctoral define reyes de poder entre 1 y 2. La segunda parte de este capítulo habla acerca de estas ideas.

4.1. El Diablo le gana al rey

Veremos que el Diablo puede atrapar al Rey de ajedrez. Hay varias formas de demostrar este resultado, pero nosotros hemos optado por introducir un juego intermedio, interesante por sí mismo.

4.1.1. El Rey apresurado

Un Rey comienza en la casilla marcada con una corona en el tablero de la Figura 4.1.

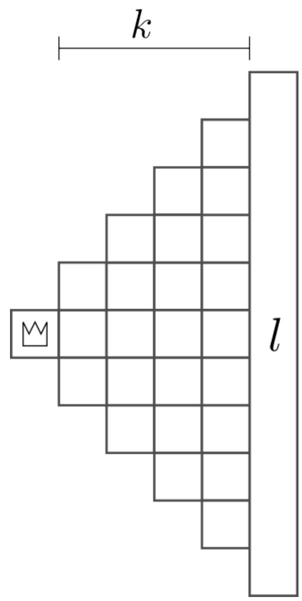


Figura 4.1: El tablero del juego del Rey apresurado

El Rey quiere llegar a la línea de cuadrados l que está a k cuadrados de distancia de la casilla marcada con una corona. La figura muestra esto para $k = 4$. Sin embargo, el Diablo quiere evitar que el Rey haga esto y en cada turno va a eliminar un cuadrado de la línea justo a la izquierda de l, es decir, eliminará uno de los $2k+1$ cuadrados en la línea a $k-1$ cuadrados de distancia. Como el Rey tiene prisa, en cada turno puede hacer un movimiento de Rey (de ajedrez) siempre y cuando éste lo acerque a la línea l. El Rey gana si puede llegar a la línea l y el Diablo gana si puede evitar esto. El Diablo comienza a jugar y no puede eliminar un cuadrado si el Rey lo ocupa.

Es claro que el Rey puede ganar si la distancia k a la línea a la que quiere llegar es muy pequea. Por ejemplo, es inmediato ver que si quiere llegar a la tercer línea entonces puede hacerlo sin importar qué haga el Diablo. Sin embargo, si el Rey quiere llegar a una línea muy lejana, a lo mejor esto le de tiempo al Diablo para preparar trampas para que el Rey no pueda llegar.

Una de las trampas que el Diablo puede construir es la del siguiente lema.

Lema 4.1.1. *Si el Diablo logra conseguir una posición en la cual tapa tres cuadrados como en la Figura 4.2, entonces puede lograr conseguir que el Rey nunca cruce la recta determinada por esos tres cuadrados.*

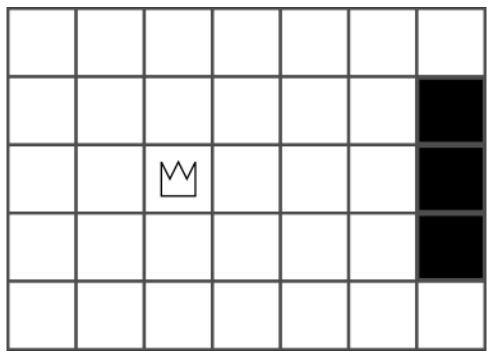


Figura 4.2: Tres cuadrados que no dejarán pasar al Rey

Demostración. Cada vez que el Rey se mueve, lo hace a lo más un cuadrado hacia arriba o hacia abajo. Si el Rey se mueve hacia arriba, el Diablo continúa el bloque hacia arriba. Si el Rey se mueve hacia abajo, el Diablo continúa el bloque hacia abajo. En ambos casos deja al Rey de nuevo en una posición similar. Para cuando el Rey llegue a la línea, se enfrentará con estos tres cuadrados que no lo dejarán pasar. □

Los valores de k para los cuales gana el Rey quedan enunciados en el siguiente teorema.

Teorema 4.1.2. *El Rey apresurado puede cruzar la línea si y sólo si* $k < 5$.

Demostración. Si el Rey puede llegar a la línea a distancia k, entonces puede llegar a la línea a distancia k' para toda $k' < k$. Entonces basta probar que el Rey puede llegar a la línea si $k = 4$ y que el Diablo puede evitar que el Rey llegue a la línea si $k = 5$.

La demostración para derrotar al Rey apresurado para $k = 5$ es un análisis de casos para el cual nos basaremos en la Figura 4.3. Lo primero que hará el Diablo es eliminar la casilla marcada con w. A esto el Rey tiene dos posibilidades: moverse a la casilla a de la figura izquierda o a la casilla a' de la figura derecha.

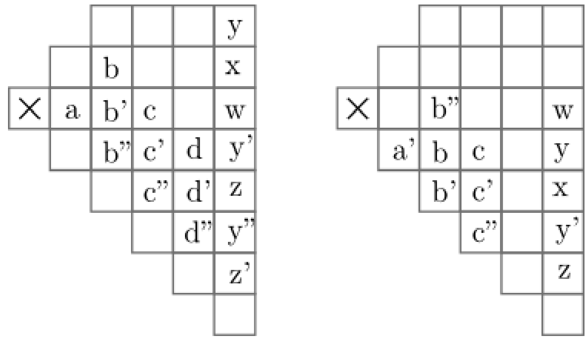


Figura 4.3: Estrategia para atrapar al Rey

Veremos primero el caso en el que el Rey se mueve a la casilla a. En este caso el Diablo deberá eliminar la casilla x. Si el Rey se mueve a la casilla b o b', entonces el Diablo responde, respectivamente, y o y' y consigue su bloque de tres casilllas consecutivas. Así, el Rey debe moverse a b'', tras lo cual el Diablo contestará en y''.

Si el Rey se mueve a c, el Diablo contesta y' y termina. Si el Rey se mueve a c' entonces el Diablo contesta z y sin importar lo que haga el Rey después el Diablo completa el bloque de tres con y'. Así, el tercer movimiento del Rey es a c''. Tras esto indicaremos al Diablo que conteste con z.

Si el cuarto movimiento del Rey es a d o a d' entonces y' completa el bloque. Finalmente si el Rey se mueve a d'', entonces z' completa el bloque. Esto termina el caso de la figura de la izquierda.

Ahora, si el primer movimiento del Rey es a a', nos referiremos a la figura de la derecha. Ahí el Diablo elimina x. Si el Rey va a b, entonces el Diablo elimina y y hace el bloque de tres. Los casos b' y b'' son simétricos, así que sólo haremos uno de ellos. La respuesta a b' debe ser y'.

Si tras esto el Rey se mueve a c o c', entonces tirar en y hace el bloque de tres. Finalmente, si el Rey se mueve a c'' entonces con z se completa el bloque.

De modo similar, un análisis de casos muestra cómo un Rey apresurado siempre puede llegar a la línea de distancia 4. Ahora nos basaremos en la Figura 4.4 para demostrar que el Rey puede llegar a la línea a distancia 4.

Supongamos primero que el Diablo no elimina la casilla v. Entonces, sin pérdida de generalidad elimina alguna de las casillas w', x', y' o z'. El Rey, no importa lo que haga el Diablo, avanzará primero a la casilla a y luego a la b. Al siguiente turno, a lo más dos de las casillas v, w, x, y y z estarán

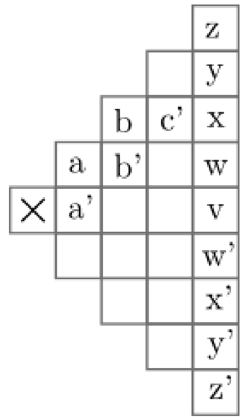


Figura 4.4: Estrategia para que escape el Rey

ocupadas. Entonces, o hay dos juntas, o v, x y z están desocupadas. Si hay dos juntas, entonces el Rey se mueve frente a ellas y el Diablo en el siguiente turno sólo puede bloquear una, por lo que el Rey se va a la otra y por tanto gana. Si v y x están desocupadas, entonces el Rey se mueve enfrente de w y después toma la desocupada entre v y x y de nuevo gana.

Si el Diablo como movimiento inicial toma v, entonces el Rey se moverá a a'. Sin pérdida de generalidad, supondremos que el segundo movimiento del Diablo elimina alguna de las casillas w', x', y' o z'. Entonces de ahí el Rey se mueve a b' y luego a c'. Al siguiente turno, a lo más dos de las casillas w, x y y fueron ocupadas, de modo que al Rey le queda una libre, con lo cual gana.

□

4.1.2. El Diablo y el Rey

Regresemos al problema original del Diablo contra el Rey. Afirmamos que el Diablo puede atrapar al Rey en el tablero infinito de ajedrez. Más aún, mostraremos que el Diablo puede atrapar al Rey en un subtablero de 83×83.

Lema 4.1.3. *Si el Rey está a* 5 *cuadrados de distancia o más de una línea de cuadrados paralela a los ejes, entonces el Diablo puede lograr que nunca la cruce.*

Demostración. El juego del Rey apresurado nos dice que si el Rey se acerca en cada turno estrictamente a la línea que quiere cruzar, entonces el Diablo puede evitar que la cruce. De hecho, nos dice que el Diablo tiene tiempo para construir una trampa como la del Lema 4.1.1.

Ahora, supongamos que el Diablo juega contra el Rey (normal) y quiere evitar que cruce una línea vertical a 5 cuadrados a la derecha. Para lograr esto, simplemente imaginará que juega contra el Rey apresurado en sus primeros 6 turnos. Por ejemplo, si el Rey se mueve hacia arriba, el Diablo pensará que se movió hacia arriba y hacia la derecha. Si el Rey se mueve hacia abajo a la izquierda, el Diablo pensará que se movió hacia abajo a la derecha y así.

Según el análisis de casos que hicimos, el Diablo dejará al Rey apresurado imaginario en la situación del Lema 4.1.1. Así, dejará al Rey (normal) en una situación como la del Lema 4.1.1, pero quizás más lejos de la línea, a partir de lo cual el Diablo puede jugar como en el Lema 4.1.1 para que el Rey no cruce la línea.

Un argumento análogo funciona si el Rey quiere atravesar una línea vertical 5 unidades a la izquierda, o una línea horizontal a 5 unidades hacia arriba o abajo.

□

Por supuesto, intentar usar directamente este lema no es de gran utilidad, pues esto sólo nos permite afirmar, por ejemplo, que el Rey se mueve indefinidamente hacia arriba o hacia abajo, lo cual no es suficiente para atraparlo. Combinaremos este lema con una trampa en forma de caja con esquinas eliminadas para atrapar al Rey.

Teorema 4.1.4. *El Diablo puede atrapar al Rey en un tablero de* 83×83*.*

Demostración. Lo primero que hará el Diablo es trazar un cuadrado imaginario de 83×83 con centro en el Rey una vez que éste haya hecho su primer movimiento. En sus primeros 36 turnos se dedicará a eliminar cuadrados de las esquinas de modo que queden hoyos con forma de L de lado 5, como se muestra en la Figura 4.5. Cuando acabe esto, el Rey se habrá alejado a lo más 36 cuadrados de su posición, de modo que permanecerá en el cuadrado central de 73×73.

Ahora el Diablo tiene que estar atento de qué hace el Rey. Si el Rey quiere escapar por la parte de la derecha, el Diablo usará el Lema 4.1.3 para garantizar que no lo haga. Esto lo puede hacer pues el Rey está al menos a 5 unidades de distancia de salir por la derecha. Las esquinas que el Diablo elimina al inicio garantizan que no tenga que jugar para tapar dos líneas al mismo tiempo.

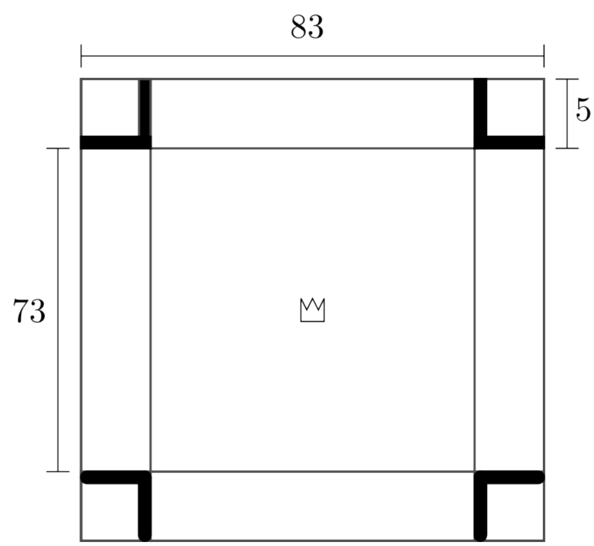


Figura 4.5: El Diablo prepara una caja para encerrar al Rey

De este modo, el Diablo puede bloquear al Rey no importa por qué lado del tablero quiera salir. Esto garantiza que en una cantidad finita de turnos el Diablo puede terminar de cerrar los lados de la caja y así encerrar al Rey en el tablero de 83×83. Para concluir con su victoria, una vez que logre encerrar al Rey en este tablero, puede ir eliminando los cuadrados del tablero uno por uno hasta inmovilizar al Rey.

$\square$

4.2. Los reyes fraccionarios de Martin Kutz

En 2004 Martin Kutz define en su tesis doctoral [9] al Rey de poder fraccionario. Aquí veremos brevemente el tipo de argumentos que usa para demostrar que el Rey fraccionario de poder mayor a 1 y menor a 2 puede ser atrapado por el Diablo. No nos enfocaremos en dar las pruebas formalmente. El lector interesado puede consultar los detalles en la tesis de Kutz.

4.2.1. Velocidades intermedias

La primera observación que hace Kutz es que cuando pasamos del Ángel de poder 1 al Ángel de poder 2 no estamos simplemente duplicando sus habilidades. El Ángel de poder 2 no sólo puede moverse de dos en dos cada turno, sino que además puede saltar obstáculos de tamao 1. Para atrapar a un Ángel de poder 2 hay que rodearlo con 24 cuadrados, y no sólo con los 16 que sería el doble de los necesarios para el Ángel de poder 1. Siendo la velocidad uno de los parámetros más importantes del juego del Ángel, vale la pena pensar en contrincantes con poder intermedio. Tomaremos el camino de Kutz para definir esto.

Lo primero que queremos es deshacernos del efecto secundario de que un Ángel de poder 2 pueda saltar obstáculos. Para esto definimos al Rey de poder k, que en su turno puede hacer k movimientos de rey de ajedrez. Esto, por supuesto, debilita al jugador, pues ahora no puede "volar sobre los obstáculos". Si un Rey de poder k puede escapar del Diablo, entonces un Ángel de poder k también. Siendo piezas un poco distintas, es importante ver que de cierta forma sí están relacionados ambos problemas. La siguiente proposición ayuda a justificar el estudio de los reyes como herramienta para entender el problema con ángeles.

Proposición 4.2.1. *Si el Ángel de poder k puede escapar del Diablo, entonces el Rey de poder $99k^2$ también.*

En particular, esta proposición nos dice que si el Diablo puede atrapar a reyes de poder arbitrariamente grande, entonces también puede atrapar a ángeles de poder arbitrariamente grande.

4.2.2. Preparar cercas

La demostración del Teorema 4.1.4 deja la sensación de que se hacen las cuentas muy holgadamente. Tras hacer las L de las esquinas, el Diablo ya sólo tiene que esperar a que el Rey llegue. Quizás en este tiempo el Diablo podría preparar paredes un poco más fuertes, de modo que un Ángel de poder mayor, digamos 2, pueda ser atrapado.

Por ejemplo, supongamos primero que logramos dejar al Rey de poder 2 en una situación como la de la Figura 4.6. Con un argumento muy similar al del Lema 4.1.1, podríamos garantizar que el Rey nunca pase de la línea que está arriba de él. Si lograramos encerrar al Rey de poder 2 en una caja con paredes como las de la figura, entonces podríamos encerrarlo. Casi es posible encerrar al Rey de poder 2 con una idea así, de hecho, Kutz demuestra que es posible encerrar a un Rey de poder $2-\epsilon$ para cualquier $\epsilon > 0$. Por supuesto, para que esta afirmación tenga sentido, hay que definir qué quiere decir que un Rey tenga poder racional o real.

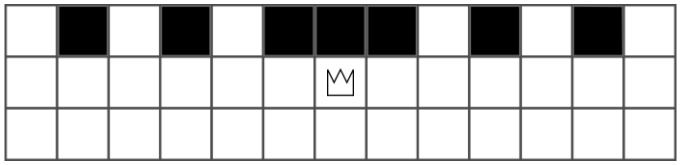


Figura 4.6: Una pared que puede evitar que pase un Ángel de poder 2.

4.2.3. Reyes reales

Queremos definir una dinámica de juego que nos permita poder hablar, por ejemplo, del Rey de poder $\frac{3}{2}$. Nos gustaría que cada tres movimientos de este Rey hubiera dos movimientos del Diablo. Por ejemplo, podríamos pedir al Rey y al Diablo que jugaran con la siguiente secuencia de movimientos: $RRRDDRRRDDRRR\ldots$, donde una R significa que el Rey hace un movimiento de rey de ajedrez y una D significa que el Diablo elimina una casilla del tablero.

Un primer intento es que para el número racional $\frac{p}{q}$ el Rey y el Diablo jueguen alternadamente p y q movimientos:

$$R^p D^q R^p \ldots = RR \ldots RRDD \ldots DDRR \ldots.$$

El problema con jugar así es que la dinámica de juego depende mucho de qué representación del número racional estamos tomando. Si nos limitamos a usar fracciones irreducibles, también tenemos problemas. El juego con un Rey de poder $\frac{1000}{8}$ sería simplemente el juego con un Rey de poder 125, pero se comportaría muy distinto al Rey de poder $\frac{1001}{8}$. De hecho, los 8 movimientos seguidos que tiene el Diablo jugando contra el Rey de poder $\frac{1001}{8}$ pueden ser usados para encerrar al Rey inmediatamente. Además, esta idea aún no contempla la posibilidad de reyes de poder irracional.

De este modo, para definir el juego para el Rey de poder $\alpha \in \mathbb{R}^+$ Kutz usa la siguiente regla. Se define la sucesión $\{u_n\}$ como $u_n = \lfloor (n+1)\gamma + \phi \rfloor - \lfloor n\gamma + \phi \rfloor$, en donde $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha+1}$ y ϕ es una cierta constante de desfase. Resulta que esta es una sucesión de ceros y unos. Si u_n es 0, entonces al momento n le toca jugar al Diablo y si es 1, le toca al Rey.

Lo que hace la sucesión $\{u_n\}$ es comparar términos consecutivos de la sucesión aritmética $\{n\gamma + \phi\}$. El término u_n vale 1 si hay un entero entre $n\gamma+\phi$ y $(n+1)\gamma+\phi$. Se puede mostrar que en efecto a la larga la proporción de turnos entre el Rey y el Diablo es α. Para α irracional, estas sucesiones se llaman sucesiones strumianas y se han estudiado a profundidad [8].

Definición 4.2.2. *El Rey de poder k es aquel que tiene una sucesión de movimientos según la sucesión u_n con parámetro α y con $\phi = 0$.*

El desfase $\phi = 0$, aunque natural, parece un poco arbitrario. El siguiente lema muestra que en realidad no impora qué desfase pongamos.

Lema 4.2.3. *Supongamos que R y R' son reyes con secuencia de movimientos establecida por dos $\{u_n\}$ con parámetros α iguales, pero con desfases ϕ y ϕ' quizás distintos. Entonces el Diablo puede atrapar a R si y sólo si puede atrapar a R'.*

La demostración de este lema para el caso de α racional es sencilla, pues se basa en que $\{u_n\}$ resulta periódica en este caso. Para α irracional se usan hechos conocidos de sucesiones strumianas acerca de cómo son las subpalabras de $\{u_n\}$. Por supuesto, esta definición de un Rey de poder α generaliza la definición que teníamos para cuando α es entero.

Definición 4.2.4. *Una sucesión de ceros y unos se le llama (s,t)-acotada si cada subpalabra que tenga estrictamente más de s unos tiene al menos t ceros. Decimos que un Rey con cierta sucesión de movimientos es (s,t)-acotado si su sucesión de movimientos lo es.*

El siguiente lema nos dice a grandes rasgos que el Diablo obtiene una cantidad justa de movimientos.

Lema 4.2.5. *Un Rey de poder α es $(s,t)-$acotado para cualquier par $s,t \in \mathbb{N}^+$ tal que $\alpha \leq \frac{s}{t}$.*

4.2.4. Atrapar al Rey de poder menor a 2

En esta sección veremos las ideas detrás de la demostración del siguiente teorema, de Martin Kutz y Attila Pór.

Teorema 4.2.6. *El Diablo puede atrapar a cualquier Rey de poder $\alpha < 2$.*

La idea principal es generalizar la demostración de que le Diablo puede atrapar a un Rey de ajedrez. De cierto modo, el Diablo puede preparar cercas con cierta densidad. La densidad de las cercas (la concentración de hoyos que tienen) está cuidadosamente planeada para que el Diablo pueda hacer los hoyos en un tiempo adecuado y para que cuando el Rey de poder $\alpha < 2$ se enfrente a una cerca, este no pueda pasarla. Estas cercas servirán para preparar una trampa con forma de caja alrededor del Rey, la cual finalmente lo atrapará.

El esbozo de la demostración es el siguiente. Se definen los siguientes conceptos.

- Se define una (s,t)-cerca horizontal infinita como una banda de cuadrados, con algunos eliminados, que horizontalmente cubre todo el plano y verticalmente tiene un cierto ancho, la cual si un Rey (s,t)-acotado llega por la parte de abajo, entonces el Diablo puede jugar para que el Rey no llegue a la parte de arriba. Análogamente se define una (s,t)-cerca vertical infinita. Una (s,t)-cerca infinita es una (s,t)-cerca horizontal infinita o una (s,t)-cerca vertical infinita.

- Se dice que una (s,t)-cerca infinita es periódica si trasladando en la dirección en la cual es infinita se puede llegar a ella misma (en el sentido de tener los mismos cuadrados eliminados). Para una (s,t)-cerca infinita periódica se define la densidad como razón entre la cantidad de cuadrados eliminados en un periodo y la longitud del periodo. La densidad de cierta forma mide qué tantos cuadrados están eliminados, de modo que una cerca con poca densidad, aunque tiene pocos cuadrados eliminados, es fácil de construir.

- Se define una (s,t)-cerca horizontal finita como una caja de cuadrados, con algunos eliminados, de cierta longitud l y ancho w, de modo que:

    - Los cuadrados en los lados de longitud w están todos eliminados.
    - Cuando un Rey (s,t)-acotado entra por uno de los lados de longitud l, entonces el Diablo puede jugar para que el Rey no pueda salir por el otro lado.

- La densidad de una (s,t)-cerca horizontal finita es la razón entre la cantidad de cuadrados eliminados que tiene y su longitud.

Notemos que las definiciones de cercas precisamente están basadas en que puedan atrapar reyes. Por supuesto, el Diablo no puede construir una (s,t)-cerca infinita en tiempo finito, de modo que las cercas infinitas son sólo una herramienta teórica para la demostración. Tras definir estos conceptos, Kutz y Pór muestran los siguientes lemas.

- Si s y t son enteros positivos con $\frac{s}{t} \leq 2$, entonces existe una (s,t)-cerca infinita periódica con densidad $1 - \frac{t}{s}$ cuyo ancho depende sólo de s.

- Si existe una (s,t)-cerca infinita periódica de densidad σ y ancho w, entonces para cualquier longitud l hay (s,t)-cercas finitas del mismo ancho y con densidad no mayor a $\sigma + \frac{2w}{l}$.

- Si existen (s,t)-cercas finitas para $\frac{s}{t} \leq 2$ para cualquier longitud mayor o igual a cierta constante l_0 y todas ellas del mismo ancho w y densidad acotada por una $\sigma < \frac{1}{2}$, entonces también existe una (s,t)-cerca infinita periódica con densidad menor a $\frac{s}{t}\sigma^2$.

Este tercer lema es un lema clave. Lo que nos dice es que para reyes de poder $\alpha < 2$ hay una forma de construir (s,t)-cercas de densidad tan baja como queramos iterando cierto procedimiento. La idea de la demostración es usar muchas (s,t)-cercas finitas para "armar" una (s,t)-cerca infinita de menor densidad.

Una vez que se demuestran estos lemas, la idea es meter al Rey en una trampa con forma de caja. Si tenemos un Rey con poder $\alpha < 2$, entonces es (s,t)-acotado para $\frac{s}{t} \leq 2$. De este modo, existen $(s,t)-$cercas infinitas que pueden no dejar pasar al Rey.

Por los lemas mostrados, se pueden encontrar $(s,t)-$cercas finitas de densidad arbitrariamente pequea que no dejen pasar al Rey. Quizás sean muy largas, o muy anchas, pero estas cercas se pueden construir rápidamente. De este modo, comenzando a una distancia suficientemente lejana, el Diablo tiene tiempo para hacer una caja cuyas paredes sean (s,t)-cercas finitas de densidad baja.

Una vez que logra construir la trampa con $(s,t)-$cercas en sus paredes, el Rey pierde, pues al intentar salir por cualquiera de los lados el Diablo puede bloquear sus movimientos, continuar para bloquear todas las paredes de la trampa y finalmente eliminar todos los cuadrados de la trampa para que el Rey ya no se pueda mover.

Por supuesto, aquí presentamos estas ideas únicamente como un pequeño vistazo a este resultado. La demostración con sus detalles técnicos se encuentran en la tesis doctoral de Martin Kutz.

CAPÍTULO 5

El Ángel en 3D

El hecho de que la demostración de Martin Kutz dejara de funcionar para los Reyes de poder 2 hizo sospechar que $k = 2$ era justo el punto crítico en el cual el Ángel puede empezar a escapar. Antes de que esto se pudiera probar hubo avances del Problema del Ángel en otros sentidos. Ya que en el espacio el Ángel "tiene más espacio para moverse", un contexto natural para intentar lograr que el Ángel escapara era trabajar en tres dimensiones. Y en efecto, Martin Kutz también prueba en su tesis doctoral en 2004 [9] que el Ángel escapa en tres dimensiones. Esta parte de la tesis doctoral de Martin Kutz posteriormente se volvió un artículo [10].

Independientemente, pero con ideas similares, Imre Leader y Béia Bollobás también prueban que el Ángel escapa en tres dimensiones y lo publican en su artículo "The Angel and the Devil in three dimesions" [2]. Además de probar que el Ángel puede escapar, también enuncian algunas conjeturas interesantes para juegos alternativos en tres dimensiones. Finalmente, comentan la relación que tiene el problema en tres dimensiones con el problema en el plano.

La idea de ambas pruebas que muestran que el Ángel escapa en tres dimensiones es hacer una estrategia de "jerarquías de cubos". Para esto, se fija una N suficientemente grande. Luego, todo el espacio se divide en cubos de tamaño N, N^2, N^3, ..., contenidos los pequeños en los grandes. En cada momento, cada cubo tendrá una noción de "seguridad" y una noción de "conectabilidad". Un cubo de tamaño N^k, será peligroso, seguro o muy seguro según que tantos de sus subcubos de tamaño N^{k-1} lo son. Un cubo será conectable si se puede salir de él relativamente rápido.

En esta sección daremos una breve reseña de la demostración de Leader y Bollobás. Trataremos de dar las ideas intuitivas que están detrás de la prueba. Vamos a evitar las demostraciones de los lemas y teoremas para mantener lo más claro posible la discusión y referimos al lector al artículo para consultar los detalles. Así mismo, el lector interesado también puede consultar “Conway’s Angel in three dimensions” para conocer la prueba de Martin Kutz.

5.1. La idea

Leader y Bollobás se concentran en demostrar que para una c suficientemente grande, el Ángel de poder c puede escapar en tres dimensiones. Aunque conjeturan que el Ángel de poder 1 puede escapar en tres dimensiones, resulta que es mucho más sencillo probar que algún Ángel se puede escapar. Es por esto que la prueba no intenta optimizar el valor de c. La ventaja es que esto hace una prueba muy clara.

Comenzamos con una N suficientemente grande, digamos $N = 20000$. Imaginaremos que $\mathbb{Z}^3$ está dividido en cubos de $N \times N \times N$ puntos. Imaginaremos también que N^3 de estos cubos están metidos en cubos de $N^2 \times N^2 \times N^2$, y que luego los cubos de lado N^2 están metidos en cubos de lado N^3 y así sucesivamente. Formalmente, para cada k definimos un k-cubo como un cubo de lado N^k de puntos en $\mathbb{Z}^3$ de la forma $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, en donde cada a_i es múltiplo de N^k y $b_i - a_i = N^k - 1$ para toda i.

Cada k-cubo tendrá un nivel de seguridad definido por la proporción de cubos eliminados que tenga. Informalmente nos referiremos a la “densidad” de un cubo según a cuantos subcubos no seguros tenga (de modo que un cubo “muy denso” no es seguro). Nuestra definición implicará que un k-cubo seguro tiene muchos $k-1$-subcubos seguros.

Cuando el Ángel está moviéndose en un k-cubo C, éste poco a poco puede volverse más denso, poniendo en peligro al Ángel. Así, el Ángel debe de poder escapar de ese cubo pronto. Para esto, el Ángel planeará un camino de $k-1$-cubos seguros que lo ayuden a moverse a otro k-cubo seguro. Para moverse de un $k-1$-cubo a otro, necesitará caminos de $k-2$-cubos seguros y así sucesivamente. Así, un Ángel puede tener que moverse de un k-cubo a otro ya sea por que el k-cubo se está volviendo denso, o por que su $k+1$-cubo se está volviendo denso y necesita que el Ángel recorra k-cubos para salir.

Ahora, si el k-cubo del Ángel está en peligro, el Ángel necesita planear un camino de $k-1$-cubos seguros para escapar. Al comenzar a recorrer estos $k-1$-cubos, al principio eran seguros, pero es posible que al llegar al último este ya se haya vuelto inseguro. De este modo, necesitamos encargarnos de dos cosas:

- Que la noción de seguridad que planteemos de oportunidad para que el Ángel pueda tardarse en llegar a un cubo y este siga siendo seguro.
- Que el camino para salir de un k-cubo no sea muy largo para que un cubo seguro no pueda volverse inseguro en lo que el Ángel llega a él.

Sin embargo, precisamente por que poco a poco se van haciendo hoyos en el tablero, no podemos siempre hacer los caminos óptimos que quisiéramos. En cierta forma, va habiendo un error que se va acumulando de nivel en nivel. Por ejemplo, los obstáculos que tenemos al recorrer un camino de $k-2$-cubos hacen que el camino de $k-2$-cubos se vuelva un poco más lento. Pero esto a su vez hace que el camino de $k-1$ cubos que también estemos recorriendo se afecte y se vuelva un poco más lento. Esto da un poco más de tiempo al Diablo para eliminar cubos para el camino de k-cubos, así que también alentará al camino de k-cubos que se está recorriendo y así sucesivamente.

Por otro lado, hay otro problema que tiene que ver con la "conectabilidad" de un cubo. Imaginemos que justo llegamos a un k cubo C de un $k+1$-cubo nuevo. Por más que C sea seguro, si los cinco k-cubos que lo rodean en el $k+1$-cubo son muy poco seguros, entonces habremos llegado a una trampa, pues ya no vamos a poder salir de C libremente. Esto es una noción muy distinta a la de densidad, pues no tiene que ver con la proporción de cubos no seguros, si no con la posición de cubos no seguros.

En la siguiente sección diremos precisamente qué quiere decir que los cubos sean seguros y conectables.

5.2. Definiciones

Definición 5.2.1. *Diremos que un k-cubo es seguro si a lo más* $12(3N)^k$ *de sus* N^{3k} *cubos han sido eliminados.*

Definición 5.2.2. *Diremos que un k-cubo es muy seguro si a lo más* $10(3N)^k$ *de sus* N^{3k} *cubos han sido eliminados.*

Definición 5.2.3. *Diremos que un k-cubo es súper seguro si a lo más* $9(3N)^k$ *de sus* N^{3k} *cubos han sido eliminados.*

Algunas observaciones

Observación 5.2.4.

- *Un k-cubo es muy seguro si y sólo si tras eliminarle otros $2(3N)^k$ cubos permanece seguro. Así, si el Ángel está relativamente cerca de un cubo muy seguro, entonces puede llegar a él de modo que todavía siga siendo seguro.*

- *Un k-cubo es súper seguro si y sólo si tras eliminarle otros $(3N)^k$ cubos permanece muy seguro. Similarmente, un cubo súper seguro cercano al Ángel será muy seguro cuando el Ángel llegue a él.*

- *Si S es un k-cubo seguro, entonces casi todos sus $k-1$-subcubos son seguros. De hecho a lo más $4N$ de ellos no serán súper seguros.*

Definición 5.2.5. *Un camino de k-cubos es una sucesión de k cubos de modo que los cubos consecutivos son adyacentes (comparten una cara). La longitud del camino es la cantidad de k-cubos que tenga.*

Definición 5.2.6. *Sea S un $k-1$-subcubo de un k-cubo T. Diremos que S está en la frontera de T si S comparte cara con algún $k-1$-cubo que no sea subcubo de T.*

La siguiente definición explica formalmente lo que quiere decir la conectabilidad. A grandes rasgos, es un concepto que refleja la idea de que un $k-1$-subcubo al que se llega sirva para salir del k cubo “por muchos lados”

Definición 5.2.7. *Sea S un $k-1$-subcubo frontera de un k-cubo T. Diremos que S es conectable si S es seguro y si para cada una de las otras 5 caras de T, más de la mitad de los $k-1$-cubos R en esa cara cumplen que hay un camino de $k-1$ cubos tal que:*

- *Se queda en T.*

- *Va de S a R.*

- *Tiene longitud a lo más $3N$.*

- *Cada $k-1$-cubo en el camino, salvo quizás S, es muy seguro.*

Definición 5.2.8. *Sea S un $k-1$-subcubo frontera de un k-cubo T. Diremos que S es muy conectable si S es conectable y tras eliminar $(3N)^{k-1}$ cubos de T, el subcubo S permanece conectable.*

5.3. Los resultados principales

El siguiente lema justifica las definiciones de conectabilidad y de seguridad. Lo que afirma es que casi todos los subcubos de la cara inferior de un cubo seguro son conectables.

Lema 5.3.1. *Supongamos que el cubo de $N \times N \times N$ tiene a lo más $24N$ puntos eliminados. Entonces más de la mitad de los puntos P en la cara inferior del cubo tienen la propiedad de que para cada una de las otras cinco caras, más de la mitad de los cubos en esa cara pueden ser conectados con P por un camino de longitud a lo más $3N$ que evita los cubos eliminados.*

El siguiente teorema es el resultado principal del artículo de Leader y Bollobás. Lo que nos dice es que sí el Ángel está en una posición suficientemente segura, entonces puede moverse de nuevo a una posición suficientemente segura.

Teorema 5.3.2. *Supongamos que el Ángel está en la cara inferior de un k-cubo T. Sea T' uno de los cubos adyacentes a T, pero que no sea el inferior. Supongamos además que para cada $l < k$, el l-cubo que ocupa el Ángel es conectable y que T' es seguro. Entonces hay una sucesión de movimientos para el Ángel que cumple lo siguiente:*

- *Termina en la cara de T' que es adyacente a T.*
- *Evita cualquier cubo eliminado por el Diablo.*
- *Es de longitud a lo más $(3N)^{k-1}$.*
- *Para cada $l < k$ el l-cubo en el cual termina el Ángel es conectable.*

Como al principio del juego todos los k-cubos en los que está el Ángel son seguros, lo que dice el Teorema 5.3.2 es que inductivamente podemos probar que el Ángel se puede mover cuanto quiera. Como corolario se obtiene lo siguiente.

Corolario 5.3.3. *Un Ángel de suficiente de poder $c = N$, para N suficientemente grande, gana la versión en 3D del Problema del Ángel de Conway.*

5.4. Optimalidad

Además de probar que el Ángel gana en tres dimensiones, Bollobás y Leader también estudian algunos resultados interesantes y algunas variantes del problema. En esta sección mencionamos brevemente algunas de las observaciones adicionales que hacen.

La primer observación que hacen es que sus demostraciones de que el Ángel escapa muestran que el poder $k = 20000$ es suficiente para que el Ángel escape. Sin embargo, sus nociones de conectabilidad pueden relajarse todavía más. De quererse, su demostración puede adaptarse fácilmente para que el poder $k = 50$. Aún así, Bollobás y Leader conjeturan que bastaría $k = 1$ para que el Ángel gane.

Otra observacíon es que hay un sentido en el cual el resultado es óptimo dimesionalmente. Supongamos que tenemos una cantidad numerable de diablos y ciertas distancias d_0, d_1, d_2, …, con $d_0 = 0$. En su turno, el Ángel brinca a algún cuadrado a distancia k de su posición original. En el turno del Diablo, el Diablo puede eliminar una familia de cuadrados, uno a distancia al menos d_0 de la posición del Ángel, uno a distancia al menos d_1 y así sucesivamente. Tras adaptar un poco la prueba del Teorema 5.3.2, se puede demostrar que el Ángel también tiene un poder suficientemente grande para escapar en este juego. Sin embargo, el Ángel no puede ganar una versión en dos dimensiones de este juego.

5.5. La bomba de tiempo

Siguiendo un poco con las ideas del artículo original de Conway, podemos preguntarnos qué sucede en 3D si el Ángel siempre tiene que moverse hacia arriba. Bollobás y Leader conjeturan que incluso el Ángel de poder 1 puede ganar en 3D aunque siempre tenga que subir. Esto da una variante interesante del juego en dos dimensiones. Podemos pensar que el eje z es un eje de tiempo. Así, el juego en 3D en el cual el Ángel siempre sube, es el juego en 2D en el cual el Diablo en vez de eliminar un cuadrado del tablero, anuncia un turno en el cual ese cuadrado no va a estar disponible. A este juego se le llama el juego de la bomba de tiempo. Comparado con el juego original, esto debilita mucho el Diablo, pues ahora sólo puede hacer hoyos en el tablero que duren un turno.

Aunque no se ha podido encontrar algún poder k para el cual el Ángel gane el juego de la bomba de tiempo, se han encontrado algunos resultados al respecto. Por ejemplo, Bollobás y Leader demuestran la siguiente proposición.

Proposición 5.5.1. *Si en el juego de la bomba de tiempo el Diablo siempre elimina cuadrados de un tiempo fijo t, entonces el Ángel de poder* 1 *puede ganar.*

El juego de la bomba de tiempo también puede pensarse en tres dimensiones (es decir, con un Ángel en cuatro dimensiones que siempre se mueva hacia arriba). Curiosamente, para el juego de la bomba de tiempo en tres dimensiones hay una estrategia muy natural para que el Ángel escape, que resulta ser "local". Esto quiere decir que el Ángel puede moverse pensando únicamente en el presente, sin pensar demasiado en qué sucederá en turnos posteriores y sin necesidad de tener un "plan a largo plazo". Por supuesto, estas nociones quedan muy vagamente descritas aquí, pero de nuevo, se refiere al lector interesado al artículo de Bollobás y Leader.

CAPÍTULO 6

Las soluciones al Problema del Ángel de Conway

En 2003 se publica el Problema del Ángel de Conway en el libro "Mathematical Puzzles" de Peter Wrinkler[15]. Esto, junto con la oferta de Conway por su solución, estimuló la participación en resolver el problema, y fue a finales de 2006 que finalmente surgen cuatro pruebas independientes de que el Ángel puede escapar.

La demostración de Oddvar Kloster [7] es considerada la más elegante, pues prueba de una manera sencilla que el Ángel de poder 2 puede escapar. Su estrategia se basa en el concepto de "paredes". En cada turno el camino del Ángel es guiado por una pared. Esta pared se actualiza en cada turno. Las actualizaciones son hechas de forma que el Ángel no tenga que desviarse mucho a menos que el desviarse le ayude a evitar muchos cuadrados que el Diablo ha eliminado.

Veremos a detalle la prueba de Kloster y al final de este Capítulo comentaremos las otras tres.

6.1. La prueba de Kloster

En esta sección veremos la solución para el Problema del Ángel de Conway por Oddvar Kloster. Como el objetivo es demostrar que el Ángel de poder 2 escapa, fijaremos $k = 2$ durante toda la discusión. La estrategia se basa en cierta “regla de la mano izquierda”[1]. El esbozo de la solución es el siguiente:

1. El Ángel declara todo el semiplano izquierdo como territorio prohibido.
2. Siempre el Ángel tiene una zona prohibida que irá modificando en cada turno. La curva de segmentos que separa la parte prohibida de la no prohibida se llama la pared y está orientada de atrás hacia adelante.
3. El Ángel tiene una marca en la pared.
4. En cada turno, el Ángel hace lo siguiente:
   - Actualiza la pared bajo una cierta “regla de actualización”.
   - Mueve la marca en la pared dos unidades hacia adelante.
   - Se pone en el cuadro que está a la derecha de la marca

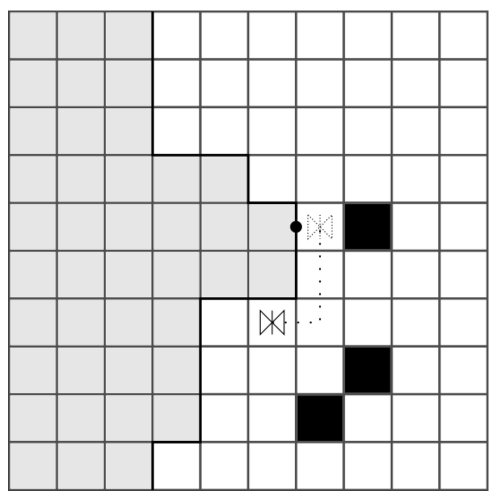


Figura 6.1: El Ángel moviéndose según la estrategia de Kloster

De modo que el principal objetivo es mostrar que la regla de actualización siempre deja el cuadrado a la derecha de la marca como un espacio que sí se pueda ocupar. Veamos cómo se pueden formalizar estas ideas. Aunque en esencia preservamos la demostración de Kloster, hemos cambiado un poco

[1]Es una regla conocida que una forma de salir de un laberinto que cumple ciertas condiciones es dejar la mano derecha o izquierda pegada a la pared y caminar.

los términos que usa. Seguiremos el espíritu del artículo original y dejaremos las pruebas de los lemas técnicos para el final de la sección.

6.1.1. Paredes

La estrategia del Ángel está basada en *paredes*. Lo primero que haremos es definirlas y estudiar algunas de sus propiedades.

Definimos un *segmento* como el borde entre dos cuadrados adyacentes del tablero. Si en un segmento s nombramos a sus extremos u y v, entonces podemos darle una dirección al segmento, diciendo que el segmento va de u a v. A u lo llamamos el *extremo inicial* y a v el *extremo final*. Al cuadrado que queda a la derecha cuando se recorre s en su dirección lo llamamos su *cuadrado derecho* y al cuadrado que queda a la izquierda cuando recorremos s en su dirección lo llamamos su *cuadrado izquierdo*.

Podemos construir curvas contínuas tomando una sucesión infinita de segmentos dirigidos $\{s_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ de modo que para cada i el extremo final de s_i coincida con el extremo inicial de s_{i+1}. Una curva formada de este modo la llamaremos una *pre-pared*. Una pre-pared tiene una dirección natural heredada por las direcciones de los segmentos que la forman. Diremos que la pre-pared va de su *parte pasada* a su *parte futura*.

Las pre-paredes pueden ser de muchos tipos. Por ejemplo, podemos dar vueltas infinitamente a un cuadrado. O bien, podemos recorrer un segmento muchas veces. Sin embargo, nos interesan las pre-paredes que separan al plano en dos conjuntos, uno izquierdo y uno derecho, y que además cumplan algunas propiedades más.

Definición 6.1.1. *Una pared es una pre-pared κ en la cual ningún segmento del tablero se repite más de dos veces y además existe un conjunto V_κ de cuadrados en el tablero tal que:*

1. *Si un segmento está exactamente una vez en κ, entonces su cuadrado izquierdo está en V_κ y su cuadrado derecho no.*

2. *Si un segmento está dos veces en κ, entonces las ocurrencias tienen direcciones distintas y ambos cuadrados adyacentes están en V_κ.*

3. *Si un segmento no aparece en κ, entonces sus cuadrados adyacentes o están ambos en v_κ o están ambos en su complemento.*

4. *Tanto V_κ como su complemento (en el conjunto de todos los cuadrados del tablero) son infinitos.*

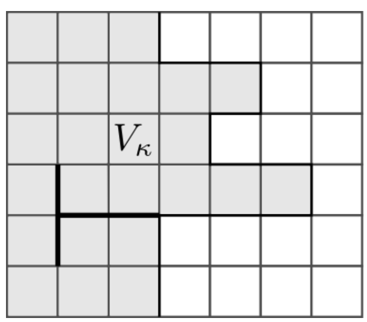
5. *El conjunto V_κ es conexo bajo separación por κ. Esto quiere decir que los cuadrados de V_κ forman una sola componente conexa cuando consideramos a dos cuadrados adyacentes si y sólo si comparten un borde que no sea un segmento de κ.*

Llamamos a V_κ el conjunto izquierdo de κ, y a su complemento, que denotaremos por R_κ, el conjunto derecho de κ.

Nos gustaría poder hablar de *el* conjunto izquierdo o *el* conjunto derecho de una pared. El siguiente lema nos permite hacer esto:

Lema 6.1.2. *Los conjuntos derecho e izquierdo de una pared son únicos.*

Aunque parezcan demasiadas condiciones para definir una pared, intuitivamente lo que estamos haciendo es separar al plano en dos partes infinitas por una barrera, en donde podemos hablar precisamente de un *lado izquierdo* y un *lado derecho*. La parte izquierda de esa barrera es conexa, mientras que la derecha puede tener islas y callejones. En la Figura 6.2 se muestran algunos ejemplos de paredes.



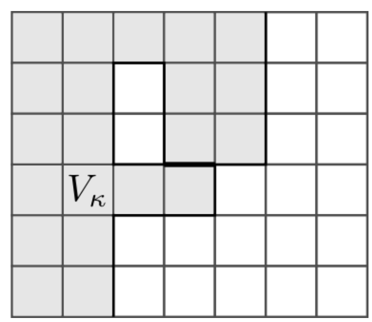


Figura 6.2: Ejemplos de paredes

La estrategia que daremos para el Ángel está basada en ir cambiando la pared, por lo que tenemos que definir qué tipos de cambios de pared están permitidos. Definimos las siguientes dos operaciones para una pared κ:

- *Extensión* Tomamos un segmento de κ cuyo cuadrado derecho c no esté en V_k. Cambiamos a ese segmento por los otros tres de c, orientados de modo que c quede a su lado izquierdo.

- *Contracción* Tomamos un segmento que aparezca dos veces consecutivamente en κ y eliminamos ambas apariciones.

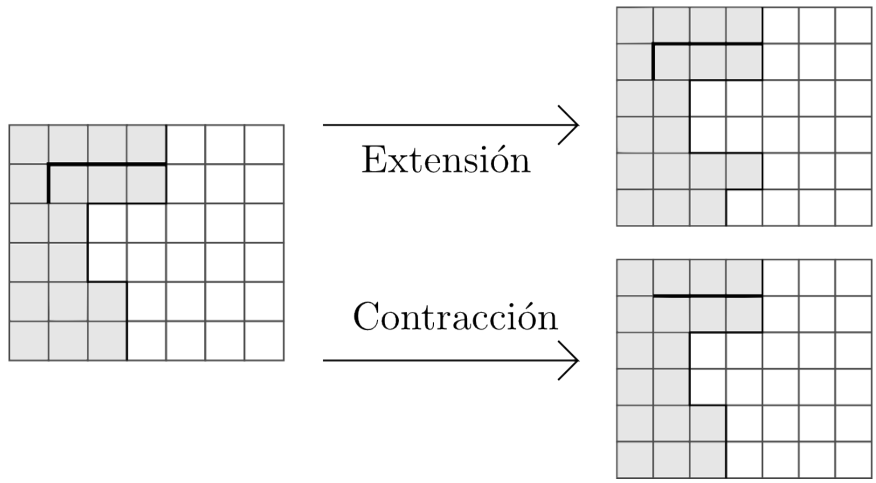


Figura 6.3: Extensiones y contracciones

En efecto, estas operaciones nos vuelven a dar paredes, como lo afirma el siguiente lema.

Lema 6.1.3. *Sea κ una pared, μ una extensión de κ que involucre al cuadrado c y ν una contracción de κ. Entonces μ y ν son paredes y sus conjuntos izquierdos son $V_\mu = V_\kappa \cup \{c\}$ y $V_\nu = V_\kappa$. Notemos que, en particular, $V_\kappa \subseteq V_\mu$ y $V_\kappa \subseteq V_\nu$.*

Definición 6.1.4. *Si una pared κ puede ser transformada a una pared μ por medio de una secuencia finita (quizás vacía) de extensiones y contracciones, entonces decimos que μ es descendiente de κ.*

Observación 6.1.5. *La observación final del Lema 6.1.3 nos permite afirmar que si μ es descendiente de κ, entonces $V_\kappa \subseteq V_\mu$.*

Algunas veces, una pared κ puede dejar "islas" o "callejones" del conjunto derecho encerradas en cuadrados del conjunto izquierdo. Nos gustaría ver que deshacernos de estas estructuras efectivamente nos vuelve a dar una pared. Por ejemplo, en la Figura 6.4, nos gustaría deshacernos de la región A.

Esto es lo que nos garantiza el siguiente lema.

Lema 6.1.6. *Sea κ una pared en la cual ocurre dos veces el segmento s. Sea ν la curva obtenida quitando de κ todos los segmentos entre la primera y segunda apariciones de s. Entonces ν es descendiente de κ.*

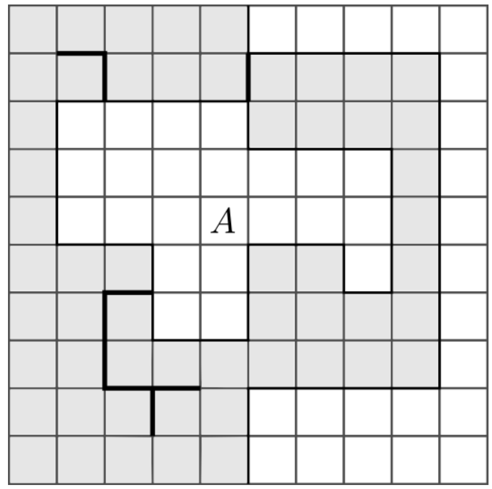


Figura 6.4: Una “isla” A de la cual nos queremos deshacer.

6.1.2. La estrategia del Ángel

La estrategia del Ángel está basada en paredes. En cada momento, el Ángel tiene establecida una pared que dirá cómo se va a mover. El Ángel permanecerá en el lado derecho de la pared. En alguno de los segmentos de la pared el Ángel tiene una *marca*, que determinará su posición exacta. En cada turno el Ángel hará a grandes rasgos lo siguiente:

1. Verá si es conveniente actualizar la pared para evitar más cuadrados.
2. Moverá dos segmentos hacia el futuro su marca.
3. Se moverá al cuadrado derecho de la marca.

La Figura 6.5 muestra algunos de los movimientos que puede hacer el Ángel si no actualiza la pared.

Cuando el Ángel mueve su marca dos segmentos hacia el futuro, es fácil ver que el cuadrado a la derecha del nuevo segmento está al alcance del Ángel de poder 2. De este modo, la esencia de la estrategia consiste en definir cómo actualizar la pared y mostrar que tras mover la marca el Ángel en efecto puede ocupar el cuadrado derecho.

Para iniciar su estrategia, el Ángel tomará como pared a la curva que va de sur a norte que pasa entre el cuadrado inicial del Ángel y el cuadrado a la izquierda de éste. Esta curva es una pared cuyo conjunto izquierdo es el

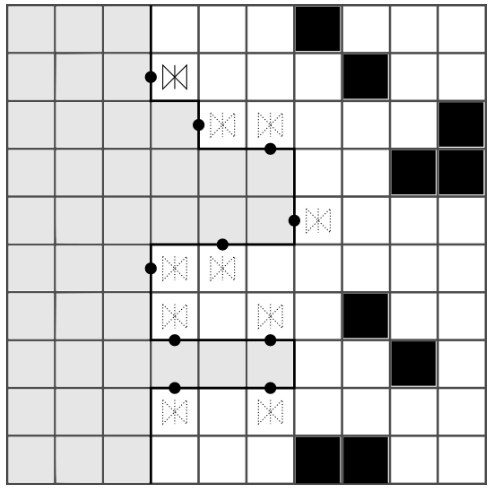


Figura 6.5: El Ángel moviendo la marca y moviéndose al cuadrado derecho.

semiplano izquierdo que determina. La marca comenzará siendo el segmento justo entre el Ángel y esta pared.

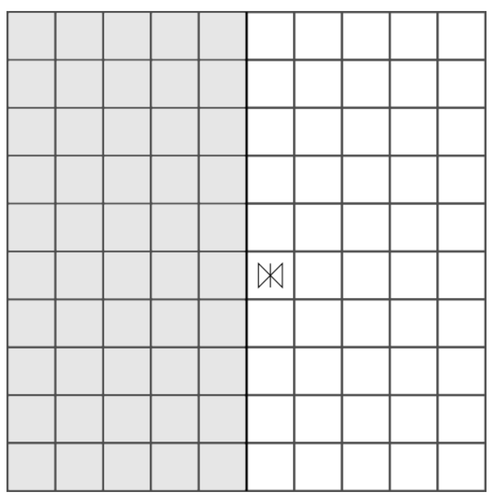


Figura 6.6: La posición inicial en la estrategia de Kloster.

Cada vez que el Diablo elimine un cuadrado del tablero, el Ángel verá si hay trampas cerca de la pared. Si encuentra muchos cuadrados eliminados cerca de la pared, va a decidir actualizar esta pared de modo que los cuadrados peligrosos queden al lado izquierdo de la pared, y así logre evitarlos. Para realizar una actualización, la pared nueva tiene que ser descendiente de la anterior, y debe diferir únicamente en la parte que está en el futuro a partir de la marca. Veremos que tras actualizar la pared, el cuadrado derecho de la marca siempre va a estar libre, de modo que el Ángel siempre podrá moverse ahí.

Para diferenciar entre los distintos tipos de cuadrados que el tablero tendrá, definiremos lo siguiente.

Definición 6.1.7. *En cualquier momento del juego clasificaremos cada cuadrado en uno de tres estados: Libre, Eliminado y Evadido. El conjunto de cuadrados Evadidos es el conjunto izquierdo de la pared actual. Un cuadrado Eliminado es uno que esté en el conjunto derecho de la pared actual y que ha sido eliminado por el Diablo. El resto de los cuadrados derechos son Libres.*

Observación 6.1.8.

- *Notemos que para que un cuadrado eliminado esté Eliminado, debe de pertenecer al conjunto derecho de la pared actual. Si no, simplemente es un cuadrado Evadido.*
- *Inicialmente todo el semiplano izquierdo del tablero está Evadido y todo el semiplano derecho está Libre.*
- *En el transcurso del juego el Ángel siempre elige paredes descendientes de la actual. Así, en vista de la Observación 6.1.5, una vez que un cuadrado se vuelve Evadido, permanece Evadido durante todo el juego.*
- *El Diablo puede transformar cuadrados Libres en Eliminados, sin embargo, no puede transformar cuadrados Evadidos en Eliminados. Si decide eliminar un cuadrado Evadido, prácticamente habrá sido como desperdiciar un turno.*

Introduciremos un poco de notación para enunciar formalmente la regla de actualización de pared del Ángel.

Definición 6.1.9. *Enumeraremos los turnos del Ángel por* $1, 2, \ldots$. *Definiremos* λ_i *el camino tras ser actualizado en el turno* i*;* λ_0 *es el camino inicial. Definiremos* p_i *como la posición de la marca después de ser movida en el turno* i*;* p_0 *es la posición inicial de la marca.*

Nos gustaría definir la longitud de una pared, sin embargo, dado que las paredes siempre son infinitas, no tiene sentido definir la longitud como la cantidad de segmentos que tiene. Sin embargo, podemos aprovechar el hecho de que una pared descendiente de otra varía sólo en una cantidad finita de segmentos. De este modo, definiremos una noción de "longitud con respecto a λ_0".

Definición 6.1.10. *Sea κ un descendiente de λ_0. Como λ_0 se puede transformar en κ por una cantidad finita de movimientos, entonces κ y λ_0 son iguales suficientemente en el pasado y en el futuro. De este modo, definiremos L_κ, la longitud de κ, como el número de segmentos en κ menos el número de segmentos en λ_0 ignorando las partes iguales en el futuro y el pasado.*

Finalmente, nos gustaría contar cuántos cuadrados podemos convertir en Evadidos si actualizamos una pared. Esta noción queda plasmada en la siguiente definición.

Definición 6.1.11. *Sea j un turno y κ una pared. Definiremos por $n_\kappa(j)$ como el número de cuadrados en V_κ que el Diablo ha transformado de Libres a Eliminados antes del turno j. En otras palabras, $n_\kappa(j)$ es la cantidad de cuadrados en V_κ que han sido eliminados, pero sin contar aquellos que fueron eliminados después de ser Evadidos.*

Para acortar la notación, dados dos turnos i y j definiremos $L_i := L_{\lambda_i}$ y $n_i(j) := n_{\lambda_i}(j)$.

En términos informales, la regla de actualización de pared consiste en lo siguiente. El Ángel debe hacer la parte futura de la pared tan corta como sea posible. Sin embargo, se va a permitir incrementar la longitud la pared en $2k$ unidades si esto hace que al menos k cuadrados Eliminados se conviertan en Evadidos. Sujeto a estas restricciones, el Ángel siempre tiene que evadir tantos cuadrados Eliminados como sea posible.

En la Figura 6.7 se muestran algunos ejemplos de situaciones en las cuales el Ángel realiza una actualización de pared.

Definiremos algunas cosas para enunciar formalmente la regla de actualización. Cuando comienza el turno i, la pared es λ_{i-1} y la marca está en el punto p_{i-1}.

Consideremos A_i como el conjunto de paredes μ tales que son descendientes de λ_{i-1} y que son iguales a λ_{i-1} en su parte pasada hasta p_{i-1}. Este conjunto A_i considera muchas posibles paredes, pero es solamente un conjunto inicial para de ahí elegir paredes cortas o que evadan muchos cuadrados Eliminados. Notemos, sin embargo, que $\lambda_{i-1} \in A_i$, de modo que A_i no es vacío.

Para una pared $\kappa \in A_i$ podemos observar cómo se comporta la expresión

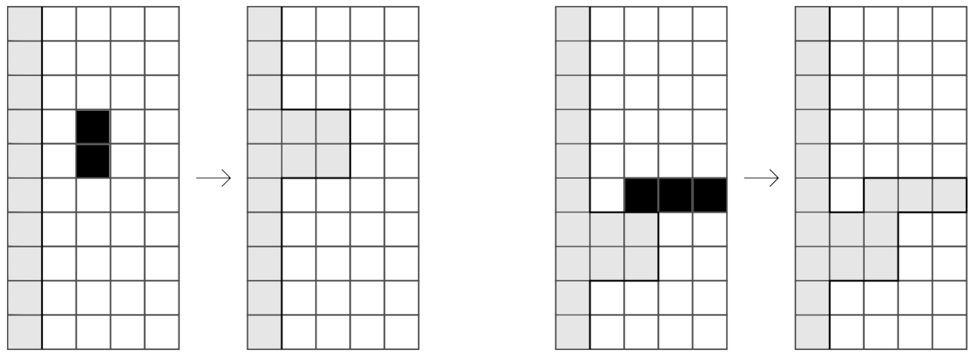


Figura 6.7: Algunas formas de acualizar la pared.

$$L_\kappa - 2n_\kappa(i) \tag{6.1}$$

Esta es una expresión entera. Además, notemos que $L_\kappa - 2n_\kappa(i) > -2n_\kappa(i) > -2i$, pues al turno i el Diablo sólo pudo haber Eliminado cuando mucho i cuadrados. De modo que la expresión $L_\kappa - 2n_\kappa(i)$ es entera, tiene una cota inferior y alcanza al menos el valor $L_{i-1} - 2n_{i-1}(i)$ (pues $\lambda_{i-1} \in A_i$), por lo que por el Principio del Buen Orden tiene un mínimo. Sea B_i el conjunto de paredes μ que alcanzan el mínimo de la expresión (6.1).

Notemos que, en particular, para cualquier $\mu \in B_i$ tenemos que $L_\mu - 2n_\mu(i) \leq L_{i-1} - 2n_{i-1}(i)$. Esto refleja la idea de que "el Ángel puede aumentar la longitud siempre y cuando aumente máximo en 2 por cada cuadrado Eliminado que evita". Sólo falta considerar la condición de que el Ángel debe evitar tantos cuadrados Eliminados como sea posible.

Para esto, definimos el conjunto C_i que consiste de los elementos μ de B_i tales que hacen a la expresión $n_\mu(i)$ máxima. De nuevo, se puede mostrar que C_i no es vacío pues $n_\mu(i)$ está acotada superiormente por i.

Entonces la regla de actualización queda formalmente definida por:

- Considerar el conjunto A_i.
- Construir el conjunto $B_i \subseteq A_i$.
- Construir el conjunto $C_i \subseteq B_i$.
- Actualizar la pared λ_{i-1} a cualquier pared λ_i de C_i.

Observación 6.1.12.

- *El hecho de que los elementos de B_i minimicen la expresión 6.1, hace que en general las paredes de la estrategia del Ángel no tengan "ciclos", en el sentido de que son paredes sin segmentos repetidos, pues un ciclo se puede eliminar para disminuir la longitud. En efecto, posteriormente probaremos que una pared nunca tiene ciclos de la marca hacia el futuro.*

  Sin embargo, como se construye primero el conjunto A_i, que no debe diferir de la pared actual hasta la marca, es posible que haya un ciclo que "encierre" al Ángel. De este modo, en la prueba de que la estrategia funciona una parte muy importante es restringir estas situaciones que encierran al Ángel tras hacer una actualización.

- *Los conjuntos A_i, B_i y C_i pueden ser infinitos. Sin embargo, para encontrar una pared en C_i el Ángel puede hacerlo en una cantidad finita de pasos. En efecto, ya observamos que para cualquier $\mu \in B_i$ tenemos $L_\mu - 2n_\mu(i) \leq L_{i-1} - 2n_{i-1}(i)$, de modo que $L_\mu \leq L_{i-1} - 2n_{i-1}(i) + 2n_\mu(i) \leq L_{i-1} - 2n_{i-1}(i) + 2i$, así que las paredes en B_i a lo más incrementan en una cantidad finita su longitud. Además, no vale la pena hacer actualizaciones más al norte que el cuadrado Eliminado más al norte, pues estas no evaden más cuadrados Eliminados ni son más cortas.*

  Pero las paredes que se obtienen de cambiar una porción finita de λ_0 por una porción de pared de longitud acotada son finitas. Kloster menciona que esto son "buenas noticias para el Ángel".

Como la expresión (6.1) se minimiza en cada paso y el Diablo no puede eliminar cuadrados en el conjunto izquierdo de la pared, podemos demostrar que $L_i - 2n_i(i) \geq L_{i-1} - 2n_{i-1}(i-1)$. Así, con un argumento inductivo podemos concluir el siguiente resultado.

Lema 6.1.13. *Si i y j son turnos con $j > i$, entonces $L_j - 2n_j(j) \leq L_i - 2n_i(i)$.*

6.1.3. Prueba de que el Ángel Gana

Demostraremos que en efecto la estrategia propuesta le permite al Ángel moverse indefinidamente. Para esto veremos que casi siempre que se haga la regla de actualización y se mueva la marca, el cuadrado a la derecha de la marca permanecerá Libre. La única excepción a esto es que el cuadrado derecho de la marca quede Evadido tras actualizar, pero veremos que en este caso el Ángel "justo puede dar el brinco" para salir de la región evadida. El esbozo del argumento es el siguiente.

1. Consideremos un segmento s en el futuro de la pared y su cuadrado derecho q.

2. El cuadrado q no puede estar Eliminado, pues la regla de acualización hubiera preferido evadirlo. Esto se debe a que es un cuadrado junto a la pared, que aumenta la longitud de la pared a lo más en 2.

3. Supongamos entonces que q está Evadido. Entonces, por definición de pared, tenemos que s aparece dos veces en la pared, formando un ciclo. Este ciclo puede estar completamente en el futuro de la marca o puede encerrarla (y por tanto encerrar al Ángel).

   a) No es posible que el ciclo esté completamente en el futuro de la marca. Eliminar ese ciclo es válido por el Lema 6.1.6, se evaden más cuadrados Eliminados y la longitud disminuye. Así pues la regla de actualización siempre evade los ciclos en el futuro.

   b) Supongamos que el ciclo encierra la marca. Entonces regresemos al momento en que el Ángel iba a entrar al ciclo, es decir, la primera vez que cruza el segmento s. Si en realidad el Diablo tenía tiempo de completar un ciclo que encierre "bien" al Ángel, veremos que era por que en realidad ya tenía tantos cuadrados eliminados que la regla de acualización evitará esa región por completo.

      Sin embargo, cabe la posibilidad de que sí se encierre al Ángel, pero veremos que esto será justo cuando el Ángel pasa por segunda vez por s, de modo que justo en ese momento puede brincar de la zona Evadida que hace su regla de actualización y estar a salvo.

Vamos a probar cada una de estas cosas.

Lema 6.1.14. *Sea s un segmento de λ_j en el futuro de la marca p_{j-1} y sea q el cuadrado derecho de s. Entonces, tras la actualización del turno j, el cuadrado q no está Eliminado.*

Demostración. Con el fin de encontrar una contradicción, supongamos que q está Eliminado. Entonces, no está en V_{λ_j} y es cuadrado derecho de s. Así, podemos considerar la extensión μ de λ_j que involucra a q. Como s está en el futuro de p_{j-1}, entonces $\mu \in A_j$. Además, $L_\mu = L_j + 2$ y $n_\mu(j) = n_j(j) + 1$.

Como $\lambda_j \in B_j$, y $L_\mu - n_\mu(j) \geq L_j - 2n_j(j)$, entonces tenemos que $\mu \in B_j$. Pero como la regla de actualización elegió a λ_j, es por que estaba en C_j y por tanto se cumplía que $n_j(j) \geq n_\mu(j) = n_j(j) + 1$. Esto último es una contradicción que nos dice que en realidad q no podía estar Eliminado.

□

El siguiente lema es la parte clave de la demostración. Muestra que la única vez en que la marca queda encerrada en un ciclo es justo al final del ciclo.

Lema 6.1.15. *Sea s un segmento de λ_j en el futuro de la marca p_{j-1}, y sea q su cuadrado derecho. Supongamos que q queda Evadido al final del turno j. Entonces s es el segmento de λ_j justo después de p_{j-1}.*

Demostración. Como segmento del tablero, s aparece al menos una vez en λ_j, pero sus dos cuadarados a los lados están en V_{λ_j}, de modo que la definición de pared nos dice que s aparece exactamente dos veces y con sentidos distintos. Para distinguir ambas apariciones llamaremos s_1 a la primera (de pasado a futuro) y s_2 a la segunda.

Definamos a κ a la pared que se obtiene de quitar la porción de λ_j que aparece entre s_1 y s_2 inclusive. Por el Lema 6.1.6, tenemos que κ es descendiente de λ_j. Su longitud es

$$L_\kappa = L_j - l \tag{6.2}$$

donde $l \geq 2$ es la cantidad de segmentos en λ_j entre s_1 y s_2 inclusive. Por el Lema 6.1.3, se tiene que $V_{\lambda_j} \subseteq V_\kappa$, de modo que:

$$n_j(j) \leq n_\kappa(j) \tag{6.3}$$

Estas dos observaciones nos dicen que, de poder elegirse, κ es un mejor candidato que λ_j para haber hecho la actualización en el turno j. Es decir, si s_1 aparece al futuro de p_{j-1}, entonces tendríamos $\kappa \in A_j$. Además, por (6.2) y (6.3) se cumple que $L_j - 2n_j(j) > L_\kappa - 2n_\kappa(j)$, lo cual entra en contradicción con haber elegido λ_j pues la expresión $L_j - 2n_j(j)$ debió haber sido mínima.

La observación del párrafo anterior nos dice que s_1 esá en el pasado de p_{j-1} o coincide con p_{j-1}. Entonces estaríamos en una situación como la de la Figura 6.8, en la que el Ángel queda encerrado en el ciclo entre s_1 y s_2.

Sea i el turno en el cual el Ángel decidió entrar por primera vez a la trampa que se iba a formar. Es decir, i es el turno en el cual la marca p_i se mueve a o justo después de s_1. Además p_{j-1} está antes de s_2 (en λ_j).

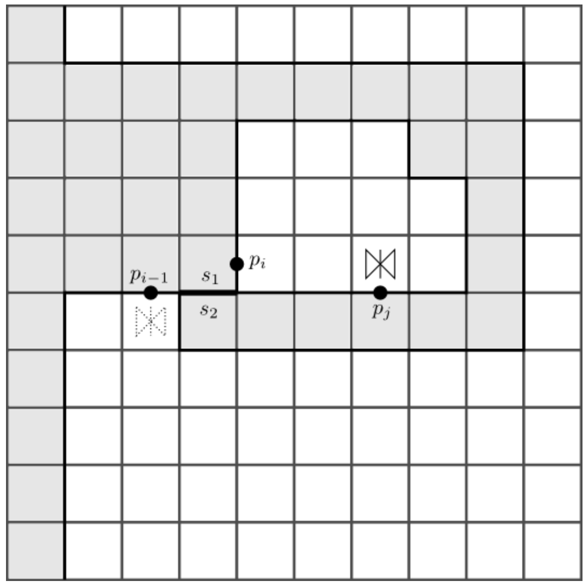


Figura 6.8: El Ángel queda encerrado en un ciclo de su estrategia.

Con la notación de arriba, de p_i a p_{j-1} el Ángel mueve la marca a lo más $l-2$ segmentos a dos segmentos por turno, y el Ángel mueve $j-1-i$ veces la marca, así tenemos que $l-2 \geq 2(j-1-i)$, o bien

$$2(j-i) \leq l \tag{6.4}$$

con igualdad si y sólo si $p_i = s_1$ y p_{j-1} es el segmento justo antes de s_2 sobre λ_j. De modo que para concluir el lema, nos gustaría demostrar que la igualdad se da en (6.4). Por el Lema 6.1.13, tenemos que

$$L_j - 2n_j(j) \leq L_i - 2n_i(i). \tag{6.5}$$

Además, entre los turnos i y j, el Diablo ha eliminado exactamente $j-i$ cuadrados, de modo que

$$n_\kappa(j) - n_\kappa(i) \leq j-i. \tag{6.6}$$

A continuación recopilamos toda la información de (6.2), 2· (6.3), (6.4), (6.5) y 2· (6.6).

$$\begin{aligned} L_\kappa &= L_j - l \\ 2n_j(j) &\leq 2n_\kappa(j) \\ 2(j-i) &\leq l \\ L_j - 2n_j(j) &\leq L_i - 2n_i(i) \\ 2(n_\kappa(j) - n_\kappa(i)) &\leq 2(j-i) \end{aligned}$$

Al sumar todas estas ecuaciones obtenemos que $L_\kappa - 2n_\kappa(i) \leq L_i - n_i(i)$. Al turno i tenemos que $\kappa \in A_i$, de modo que la elección de λ_i en vez de κ nos adicionalmente la desigualdad $L_\kappa - 2n_\kappa(i) \geq L_i - n_i(i)$.

Esto nos dice $L_\kappa - 2n_\kappa(i) = L_i - n_i(i)$ y por tanto que se debe alcanzar la igualdad en todas las desigualdades que sumamos, en particular, se debe de dar la igualdad en (6.4). Pero como lo observamos anteriormente, la igualdad en (6.4) nos dice que p_{j-1} es justamente el segmento antes de s_2.

□

Estamos listos para demostrar que el Ángel se escapa.

Teorema 6.1.16. *El Ángel de poder* 2 *derrota al Diablo en el Problema del Ángel de Conway*

Demostración. Supongamos que el Ángel juega con la estrategia planteada. Sea j cualquier turno y q el cuadrado derecho de p_j. Tenemos que p_j está dos segmentos hacia el futuro de p_{j-1}. Al final del turno j, el cuadrado j no puede estar Eliminado por el Lema 6.1.14, y no puede estar Evadido por el Lema 6.1.15. Así, q está libre y por tanto el Ángel puede caer ahí tras realizar la acualización y mover la marca. □

6.1.4. Observaciones finales

Kloster termina su artículo con algunas observaciones que enunciamos a continuación.

Observación 6.1.17. *El Diablo en realidad puede hacer muy pocos ciclos.*

Suponiendo por un momento que el Diablo puede eliminar el cuadrado en el que está el Ángel, la figura siguiente muestra el tipo de trampas que "casi" pueden atrapar al Ángel.

El Diablo construye una pequeña pared para que cuando el Ángel tenga que dar la vuelta, el Diablo justo elimine el cuadrado en el que está el Ángel.

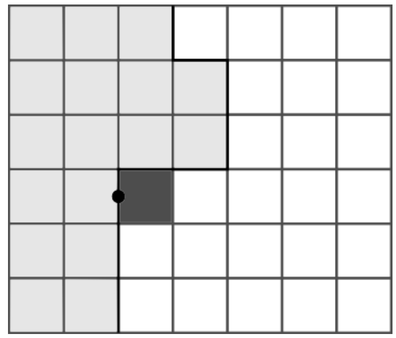


Figura 6.9: El Diablo elimina un cuadrado y deja un ciclo trivial en el camino del Ángel

El Ángel hace la regla de actualización, la cual mueve la marca justo fuera del ciclo (de dos segmentos) recién formado para evadirlo. De hecho, se puede probar que este tipo de ciclos son los únicos que se pueden formar

Observación 6.1.18. *Una pequeña modificiación a la estrategia de hecho da una estrategia ganadora para el Rey de poder* 2*, que no puede saltar hoyos.*

Cuando el Ángel mueve la marca por una pared de modo que se gire en sentido horario en realidad el Ángel no avanza dos cuadrados, si no sólo uno. De modo que si cambiamos la regla a avanzar la marca dos segmentos *sin contar las vueltas en sentido horario*, entonces el Ángel aún tiene el cuadrado derecho de la marca a su alcance. Más aún, para que el Diablo pueda hacer un ciclo no trivial al menos necesita una vuelta en sentido horario, de modo que ahí el Ángel avanzará dos segmentos y por tanto no se podrá dar la igualdad en (6.4), lo cual entraría en contradicción con la regla de actualización.

Con esta modificación se muestra que el Ángel nunca entra a ningún ciclo no trivial, y por tanto nunca tiene que brincar un hoyo. Así, con la estrategia modificada obtenemos una estrategia ganadora para el Rey de poder 2.

Observación 6.1.19. *La prueba es congruente con la afirmación de Conway, en donde se indica que el Diablo puede hacer que un Ángel con estrategia ganadora tenga algunas desviaciones.*

En efecto, si el Ángel sigue la estrategia de Kloster el Diablo puede actuar como sigue y hacer que el Ángel avance en algunos periodos de tiempo por caminos que le determine el Diablo.

El Diablo puede ir muy lejos sobre la pared, digamos a n cuadrados de distancia de la posición original del Ángel, y construir una barrera de ancho 1 y longitud $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ que salga hacia el este. Hará esto de modo que justo en el último momento eliminará el cuadrado junto a la pared. Justo en ese momento la regla de actualización incorporará la barrera a la pared, por lo que el Ángel tendrá que avanzar hacia el este por al menos $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ cuadrados.

Luego, el Diablo puede comenzar a construir una segunda barrera hacia el sur al final de la barrera recién construida. Esta vez del Diablo sólo podrá hacerla de tamaño como $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$. El Diablo puede seguir así sucesivamente, como en la Figura 6.10. Por supuesto, el Ángel podrá escapar cuando $\left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor = 0$ y entonces el Diablo ya no tenga tiempo de construir más barreras. Pero si n es suficientemente grande, el Diablo puede hacer que el Ángel gire tantas veces como quiera.

6.1.5. Pruebas de los lemas

Los conjuntos derecho e izquierdo de una pared son únicos.

En el artículo de Kloster se da una demostración un poco distinta a la que daremos a continuación.

Demostración. Por supuesto, basta demostrar que el conjunto izquierdo de una pared es único. Sea κ una pared y V un conjunto que sirva como conjunto izquierdo. Sea además s uno de los segmentos de κ y c su cuadrado izquierdo. Diremos que un cuadrado c es adyacente a otro cuadrado con respecto a κ si comparten un segmento que no esté en κ.

Consideremos el conjunto V_κ de los cuadrados d para los cuales existe un camino de cuadrados adyacentes con respecto a κ que conecten a c con d. Veremos que $U = V_\kappa$ y que por tanto el conjunto izquierdo queda únicamente determinado.

Ya sea por la condición 1 o la condición 2 de la definición de pared, el cuadrado c está en U y en V_κ. Por la condición 5, cualquier cuadrado de U conecta con c con respecto a κ, por lo cual tenemos que $U \subseteq V_\kappa$.

Para la otra contención, tomemos un cuadrado d de V_κ conectado con c a través de los cuadrados $c_1 = c$, c_2, …, $c_n = d$. Daremos un argumento inductivo para ver que todos estos cuadrados están en U. Sabemos que $c_1 = c$ está en U. Supongamos que c_k está en U. Como c_k es adyacente a c_{k+1} con respecto a κ, entonces comparten un segmento que no está en κ. Por la condición 3 de la definición de pared concluímos que o ambos c_k y c_{k+1} están en U o no lo están, pero c_k sí lo está. Entonces, c_{k+1} también lo

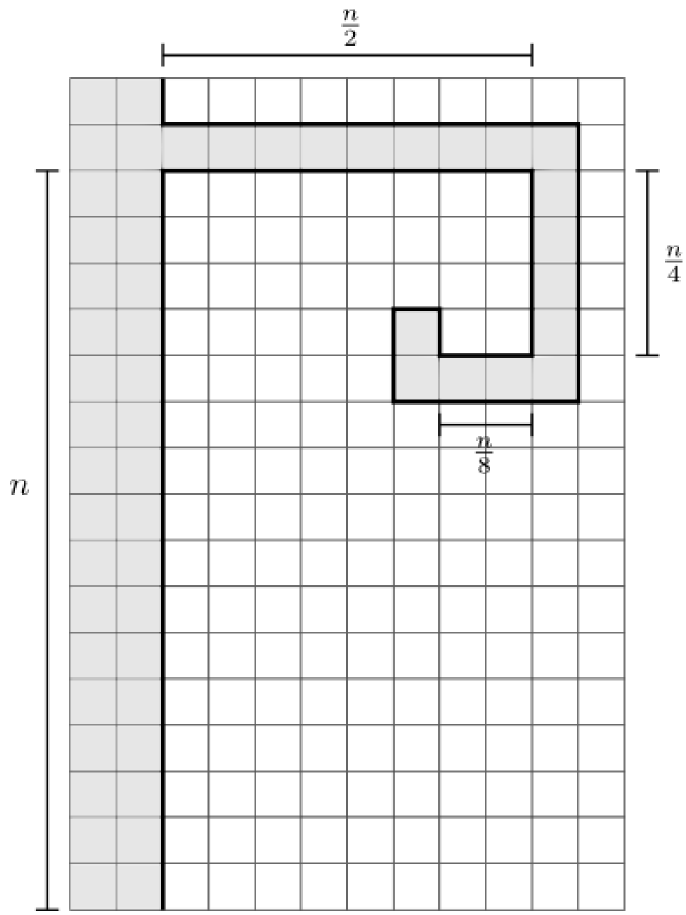


Figura 6.10: El movimiento en espiral que puede forzar el Diablo

está. Así, concluímos que $V_\kappa \subseteq U$. Esto demuestra que $V_\kappa = U$ y por tanto la unicidad del conjunto izquierdo de κ.

La unicidad del conjunto derecho se sigue por que el complemento de un conjunto es único.

□

Sea κ una pared, μ una extensión de κ que involucre al cuadrado c y ν una contracción de κ. Entonces μ y ν son paredes y sus conjuntos izquierdos son $V_\mu = V_\kappa \cup \{c\}$ y $V_\nu = V_\kappa$.

Demostración. Necesitamos verificar que tras hacer una extensión o contracción de la pared κ para obtener una curva λ, se sigue cumpliendo la definición de pared para λ con el conjunto izquierdo que indica el lema.

Extensión Supongamos que hacemos una extensión tal que absorbe el cuadrado derecho q del segmento s. Llamemos a, b y c a los otros tres lados del cuadrado. Como q no está en V_κ, entonces a, b y c no pueden aparecer dos veces en κ. De este modo, cuando se hace la actualización y se substituye s por a, b y c, estos aparecen a lo más dos veces en λ. El segmento s deja de ser parte de λ, por lo que aparece a lo más dos veces en λ.

1. Tomemos alguno de a, b o c, sin pérdida de generalidad, digamos a. Si a aparece en λ sólo una vez, es por que en κ no aparecía. Además, en κ era lado de q y q no estaba en V_κ, de modo que el otro cuadrado q' del cual es lado a tampoco está en V_κ. Pero entonces ahora el cuadrado derecho de a es q' y no está en V_λ y el cuadrado izquierdo es q que ya está en V_λ.

   Por s no nos tenemos que preocupar pues ya no está en λ.

2. Supongamos que a aparece en λ dos veces. Entonces en κ aparecía una vez. Para distinguir ambas apariciones, llamaremos a' a la aparición de a en κ. Como q no está en V_κ, entonces q debe ser el cuadrado derecho de a', y por tanto su cuadrado izquierdo está en V_κ, y así, en V_λ. Al agregar a q a V_λ, ahora ambos cuadrados a los lados de a están en V_λ.

   De nuevo, no tenemos que contemplar a s pues ya no aparece en λ.

3. El único segmento que estaba en κ y ahora no está en λ es s, de modo que sólo hay que verificar esta propiedad para s. Como q no estaba en V_κ, entonces el cuadrado izquierdo r de s sí estaba en V_κ. Tras hacer la extensión, ambos cuadrados al lado de s están en V_λ.

4. Alteramos a lo más en uno la cantidad de cuadrados en V_κ al transformarlo en V_λ. Como V_κ y su complemento eran infinitos, entonces V_λ y su complemento también lo son.

5. Tomemos dos cuadrados en V_λ. Si ninguno de esos es q, entonces el camino que servía en V_κ sirve en V_λ. Si alguno de esos es q, entonces conectando a q a través de s (que ya no está en λ) al cuadrado izquierdo r de λ, y luego r al otro cuadrado, logramos conectar a q con cualquier cuadrado en V_λ sin cruzar λ.

Contracción Supongamos que hacemos una contracción que elimina al segmento repetido s de κ para convertirlo en una curva λ. Como una contracción sólo elimina segmentos y en κ los segmentos aparecen a lo más dos veces, entonces en λ cada segmento también aparece a lo más dos veces.

1. No hay que checar nada, pues no se hicieron segmentos nuevos y no se modificó V_κ.

2. No hay que checar nada, pues no se hicieron segmentos nuevos y no se modificó V_κ.

3. Sólo hay que ver que ambos cuadrados al lado de s estén o no estén en V_λ. Como el segmento s aparecía dos veces en V_κ, entonces ambos cuadrados de los cuales era frontera estaban en V_κ, de modo que también están en V_λ.

4. No alteramos a V_κ al transformarlo en V_λ. Como V_κ y su complemento eran infinitos, entonces V_λ y su complemento también lo son.

5. No alteramos V_κ y quitamos segmentos de κ de modo que cualquier camino que conectara a dos cuadrados en V_κ sin cruzar κ también los conectará en V_λ sin cruzar λ.

Esto demuestra el lema.

□

Sea κ una pared en la cual ocurre dos veces el segmento s. Sea ν la curva obtenida quitando de κ todos los segmentos entre la primera y segunda apariciones de s. Entonces ν es descendiente de κ.

De nuevo daremos una demostración distinta a la del artículo original. Esta demostración usa un poco de la teoría de árboles en teoría de gráficas.

Demostración. Lo primero que veremos es que podemos conseguir una pared parecida a un árbol (en el sentido de teoría de gráficas). Para esto, tenemos que deshacernos de todos los cuadrados en R_κ que encierra κ entre ambas apariciones de s.

De acuerdo con la condición 2, el segmento s aparece exactamente dos veces y en direcciones distintas. Llamaremos μ a la parte de κ que está entre ambas apariciones de s (inclusive). Los cuadrados adyacentes a S, que llamaremos c y d, están en V_κ.

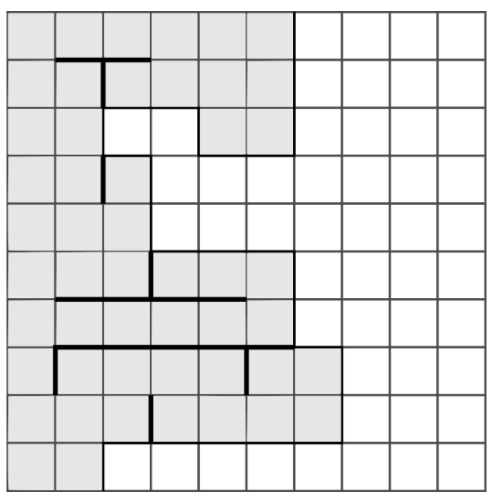
Como V_κ es conexa con respecto a κ, hay un camino C de cuadrados $c_1 = c$, c_2, …, $c_n = d$ que conectan a c con d. Este camino C de cuadrados encierra a μ. Así, la región que encierra μ es finita y por tanto el número de cuadrados en R_κ dentro de C es finito. Haremos lo siguiente varias veces para transformar a κ y a μ:

Si existe algún segmento t en μ tal que alguno de sus cuadrados adyacentes esté en R_κ, entonces extendemos κ agregando ese cuadrado.

Tras realizar esta operación, el camino C sigue conectando a c y d pues por la Observación 6.1.5, no perdemos cuadrados en V_κ. Además, en cada paso el número de cuadrados en R_κ dentro de la región delimitada por C decrece en 1, de modo que podemos hacer esta operación sólo un número finito de veces.

Afirmamos que al momento de ya no poder hacer esta operación entonces ya no hay cuadrados de R_κ en la región delimitada por C. En efecto, si hubiera uno, podemos conectarlo con una sucesión de cuadrados D hasta c. En algún segmento t esta sucesión cruza κ por primera vez, y ahí podríamos aplicar la operación.

Además, al momento que ya no podamos hacerla es por que todos los segmentos de κ entre ambas apariciones de s tienen ambos cuadrados derechos en V_κ, por lo que todos estos segmentos aparecen exactamente dos veces en κ. De este modo, obtenemos una pared como la de la Figura 6.1.5.



Consideremos la gráfica cuyos vértices son vértices de algún segmento de μ y en donde dos vértices son adyacentes si inciden con un mismo segmento.

Dos vértices de esta gráfica están conectados pues κ es conexa. Además, no tiene ciclos pues un ciclo encerraría a un cuadrado de V_κ, contradiciendo la conexidad según κ de V_κ, o un cuadrado de R_κ, lo cual no es posible pues ya nos deshicimos de éstos. Así, esta gráfica es un árbol, y por tanto tiene al menos dos hojas. Una de esas es el vértice inicial de la primer aparición de s. Sin embargo, hay otra hoja distinta a este vértice, lo cual quiere decir que podemos aplicarle una contracción a κ en ese vértice, pues sus segmentos en κ son adyacentes y consecutivos.

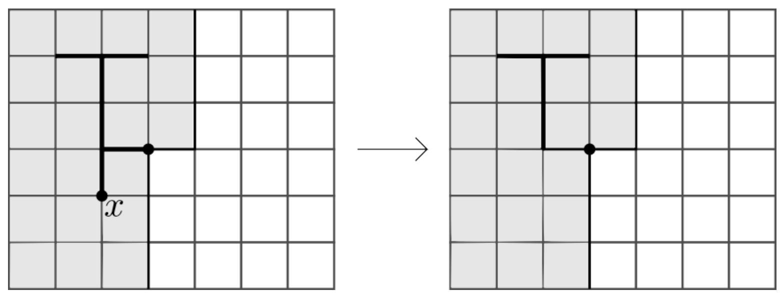


Figura 6.11: La hoja x se elimina con una contracción

Al hacer este proceso eliminamos un vértice en cada paso y seguimos teniendo un árbol. Este proceso se debe detener pues la cantidad de vértices es finita. Cuando esto suceda es que el único vértice que queda es el vértice inicial de la primera aparición de s, es decir, hemos logrado ver a la pared ν enunciada en el teorema como descendiente de κ.

$\square$

6.2. Otras pruebas de que el Ángel escapa

András Máthé [12] da una prueba que aprovecha la observación de Conway de que un Ángel que puede ganar también debería poder hacerlo sin repetir los cuadrados por los que pasa. Su estrategia se basa en definir a un Diablo Buena Onda que promete nunca eliminar cuadrados por los que el Ángel haya pasado. Mathé reformula el problema en términos del Diablo Buena Onda, y demuestra que si el Ángel puede derrotar al Diablo Buena Onda entonces puede derrotar al Diablo. Sus cuentas iniciales muestran que el Ángel de poder 11 puede escapar fácilmente del Diablo, pero tras refinar algunos argumentos también concluye que el Ángel de poder 2 puede escapar.

Brian Bowditch [3] da una demostración que involucra el cambio a dos juegos. Su demostración se basa en el Ángel de poder 5. Bowdich cambia el juego a un juego A, en donde agrupa las casillas en "cruces". Cada cruz requiere que el Diablo juegue 5 veces en ella para ser eliminada y el Ángel sólo puede moverse a cruces adyacentes. El segundo cambio, al juego B, consiste en ver que el Diablo puede jugar sin eliminar casillas por las que haya pasado el Ángel (algo parecido al Diablo Buena Onda de Mathé). Bowditch demuestra que el Ángel gana en el juego B, que si el Ángel gana el juego B entonces gana el juego A y que si gana el juego A entonces derrota al Diablo en el Problema del Ángel de Conway.

Peter Gacs [6] resuelve el problema también por cuenta propia. El objetivo de Gacs es dar una demostración que utilice una “táctica de informes”, parecida a la que se usó inicialmente para demostrar que el Ángel puede escapar en tres dimensiones. Su demostración es bastante más elaborada, y no da un poder específico para el cual el Ángel pueda ganar.

Además, surge en 2008 una prueba de Johan Wastlund [14] que un Ángel todavía más limitado puede ganar. La prueba de Wastlund es un poco distinta a las demás. Lo que hace es cambiar de tablero totalmente. Wastlund tesela el plano regularmente con triángulos (triángulos equiláteros de modo que en cada vértice se junten seis). El Ángel puede moverse de un triángulo a otro siempre y cuando compartan al menos un punto. El Diablo puede eliminar uno de los triángulos del tablero. En este juego, Wastlund muestra que el Ángel puede moverse indefinidamente, y luego muestra cómo a partir de este resultado se puede ver que el Ángel de poder 2 gana en el plano cuadriculado.

CAPÍTULO 7

Gráficas angelicales

El Problema del Ángel de Conway también se puede poner en términos de Teoría de Gráficas. Fijemos un poder para el Ángel, por ejemplo 2. Consideraremos la gráfica que tiene como vértices los puntos con coordenadas enteras en el plano. Dos vértices estarán unidos por una arista si el Ángel puede moverse de uno a otro. En cada turno, el Diablo quita un vértice y el tablero ahora se transforma en la gráfica generada por los vértices restantes. El objetivo del Diablo es dejar al Ángel en una componente conexa finita. El objetivo del Ángel de nuevo es moverse indefinidamente.

En esta sección planteamos el problema en un contexto más general.

7.1. Gráficas angelicales

Consideremos una gráfica G sin lazos en la cual cada vértice tiene grado finito. El Ángel y el Diablo jugarán en esta gráfica. El estado del juego en cada momento será una pareja ordenada (H, v), donde H es una subgráfica de G y v es un vértice de H. Inicialmente, $H = G$ y entonces v simplemente es un vértice de G. El Ángel y el Diablo juegan alternadamente a cambiar el estado del juego con las siguientes reglas:

- El Ángel puede cambiar la pareja (H, v) a la pareja (H, w) siempre y cuando w sea adyacente a v en H.

- El Diablo puede cambiar la pareja (H, v) a la pareja $(H - w, v)$ siempre y cuando $w \in H$ y $w \neq v$.

El Diablo gana si logra conseguir una posición (H, w) en la cual w esté en una componente conexa finita de H. El Ángel gana si puede evitar esto.

Diremos que una pareja (G, u) es *angelical* si el Ángel gana en el juego iniciado en (G, u). En otro caso, diremos que la pareja es *no-angelical.* En algunos casos, como en gráficas transitivas en vértices, no importa qué vértice sea u o queda implícito. En casos así simplemente diremos "G es angelical" o "G no es angelical".

Observación 7.1.1.

- *Si G es finita, entonces el Diablo gana instantáneamente y por tanto ninguna pareja (G, u) con G gráfica finita es angelical. Para mantener el problema controlado supondremos que G tiene una cantidad numerable de vértices.*

- *Si en una posición (H, v) el Diablo quita un vértice que no está en la componente conexa de v en H entonces está desperdiciando turnos. De manera similar, el Ángel nunca podrá llegar a un vértice fuera de la componente conexa de v en H. De modo que podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que en cada turno H es conexa.*

La condición de quedar en una componente conexa finita parece ser distinta a la condición de pedir que el Ángel ya no se pueda mover. Sin embargo, el siguiente resultado muestra por que ambas condiciones nos dan juegos equivalentes.

Proposición 7.1.2. *Cambiar la condición de victoria para el Diablo a llegar a una posición (H, v) en la cual v es un vértice aislado de H no cambia al ganador del juego.*

Demostración. Si el Diablo puede aislar el vértice v entonces ha logrado que quede en una componente conexa finita (formada únicamente por el vértice v).

Supongamos ahora que el Diablo puede dejar al vértice v en una componente conexa finita con n vértices. Probaremos por inducción sobre n que el Diablo puede aislar al vértice del Ángel. Si $n = 1$, entonces el único vértice en la componente conexa es v y terminamos. En otro caso, el Ángel sólo puede moverse a otro vértice w en su componente conexa, después de lo cual el Diablo puede quitar a v (pues G no tiene lazos). Esto reduce al menos en 1 la cantidad de vértices en la componente conexa de w y por tanto, por hipótesis inductiva, el Diablo puede aislar a w. □

Veamos algunos ejemplos:

Proposición 7.1.3. *La gráfica en la cual los vértices son los cuadrados de un tablero infinito de ajedrez extendido hacia todas las direcciones y en la cual dos vértices están unidos si y sólo si un rey de ajedrez puede llegar de uno a otro en n pasos es angelical para $n \geq 2$ y no lo es para $n = 1$.*

La Figura 7.1 muestra cómo se vería una parte de la gráfica para $n = 1$.

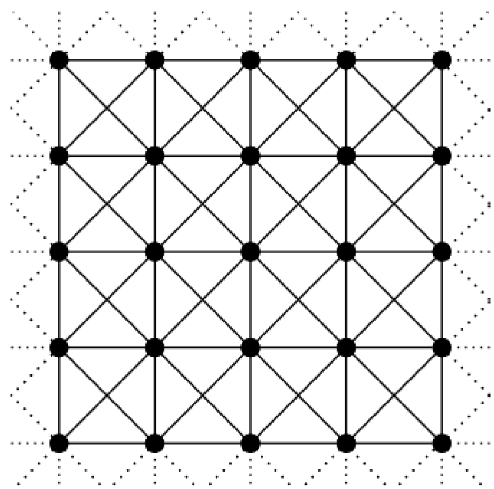


Figura 7.1: La gráfica juega el Rey contra el Diablo.

Demostración. El resultado para $n = 1$ es consecuencia del Teorema 4.1.4. El resultado para $n \geq 2$ es resultado del Teorema 6.1.16. □

Proposición 7.1.4. *Si G es el árbol binario completo infinito, entonces G es angelical.*

Demostración. Colocamos el árbol binario de modo que el vértice inicial del Ángel esté hasta arriba y de modo que hacia abajo se vaya bifurcando. En la gráfica inicial, a cada vértice v le asociamos sus *decendientes izquierdos*, que son los vértices a los que se puede llegar con un camino cuya primer arista es la arista que baja por la izquierda. Analogamente le asociamos sus *decendientes derechos*. Estos son dos conjuntos ajenos cuya unión tiene a todos los decendientes del vértice.

Si al primer turno el Diablo pasó de (G, v) a $(G - w, v)$, supondremos sin pérdida de generalidad que w está en los decendientes derechos de v.

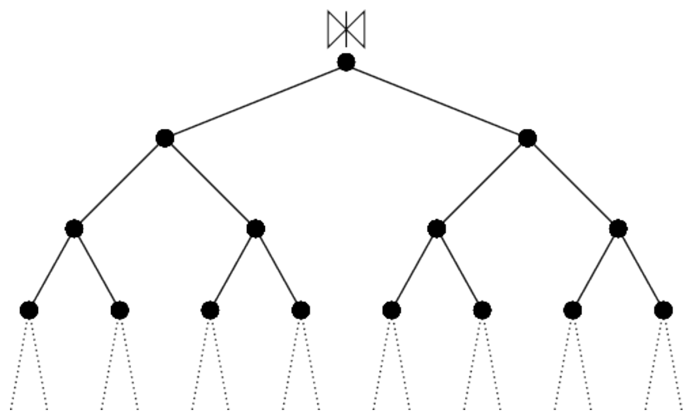


Figura 7.2: El árbol binario.

Entonces el Ángel puede moverse a su decendiente izquierdo u. Notemos que ningún decendiente izquierdo de v está eliminado, y por tanto ningún decendiente de u está eliminado. Por lo tanto el Ángel llega de nuevo a la posición inicial. Así, repitiendo esta estrategia en cada vértice, el Ángel puede moverse indefinidamente. □

Proposición 7.1.5. *Sea k un entero positivo. Si G es la gráfica cuyos vértices son los enteros y en donde dos vértices i y j son adyacentes si y sólo si $|i-j| \leq k$ entonces G no es angelical.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el vértice inicial es el 0. El Diablo eliminará en sus turnos los siguientes vértices: $-k^2-k$,$-k^2-k+1$,..., $-k^2-1$, $2k^2+1$, $2k^2+2$, ..., $2k^2+k$. Demostraremos que en efecto puede hacer estos movimientos y que al final encierra al Ángel en el intervalo $[-k^2, 2k^2]$.

Primero veremos que el Ángel no puede interferir con los k primeros movimientos del Diablo, es decir, que no puede estar en una de las casillas que el Diablo quiere quitar. Como en cada movimiento el Ángel puede moverse a lo más k enteros a la izquierda, entonces en k movimientos llegará máximo a $-k^2$. Pero todos los pasos del Diablo están más a la izquierda que eso. Notemos que a partir de este momento el Ángel ya no puede ir más a la izquierda que el entero $-k^2$ pues el primer entero a la izquerda aún disponible es el $-k^2-k-1$ y $-k^2-(-k^2-k-1) = k+1 > k$.

Ahora veremos que no puede interferir con los siguientes k. De manera similar al caso anterior, en $2k$ pasos el Ángel máximo puede llegar al entero

$2k^2$. Pero los pasos $k+1$, $k+2$, …, $2k$ del Diablo están a la derecha de este entero. Además, de manera similar al caso anterior el Ángel ya no puede avanzar más a la derecha del entero $2k^2$ pues de nuevo tendría que moverse al menos $k+1$ enteros, lo cual no es posible.

Así, el Diablo ha logrado atrapar al Ángel en el intervalo $[-k^2, 2k^2]$ y por tanto gana el juego

□

Lo que nos dice este último ejemplo es que el Ángel de cualquier poder pierde en $\mathbb{Z}$.

Después de desarrollar herramientas podremos dar algunos otros ejemplos.

7.2. La formalización del Problema del Ángel

En esta sección estableceremos formalmente el Problema del Ángel en una gráfica. Hasta ahora hemos podido decir muchas cosas tan sólo con la intuición que tenemos de "tener estrategia sin importar cómo juegue el otro". Sin embargo, para poder enunciar algunos resultados precisamente, necesitamos una definición más formal. Esta sección es un poco técnica, pero nos facilitará probar algunos resultados después.

7.2.1. La digráfica de juego

Recordemos que habíamos planteado el problema como sigue. El Ángel y el Diablo juegan en una gráfica G con ciertas condiciones. El estado del juego en cada turno es una pareja (H, v) con $v \in H$. El Diablo puede cambiar el estado a $(H - w, v)$, donde $w \in H$ es distinto de v y el Ángel puede cambiar el estado a (H, w), donde w es adyacente a v en H. El Diablo gana si logra conseguir una posición (H, v) en la cual v esté en una componente finita de H. El Ángel gana si puede evitar esto.

El problema con esta forma de decir las cosas es que estamos permitiendo a los jugadores tener turnos, y decir "juegan alternadamente" aún no queda claro como un concepto formal. Del mismo modo, que el Diablo "consiga" hacer algo o que el Ángel "pueda escapar sin importar qué" también es algo informal. Para hacer estos conceptos más tangibles, seguiremos el ejemplo de la teoría de juegos finita.

Para empezar, queremos reflejar formalmente la idea de que los jugadores están jugando por turnos. Para esto agregaremos a los estados de juego un tercer elemento. Es decir, a cada estado (H, v) le añadiremos un tercer elemento $j \in \{A, D\}$, el cual indicará "a qué jugador le toca". Vamos a plantear la digráfica del Probema del Ángel como sigue.

Definición 7.2.1. *La digráfica del Probema del Ángel para la pareja inicial* (G, u), *a la cual denotaremos* $\mathcal{D}_{(G,u)}$, *es la digráfica que está definida como sigue:*

- *Los vértices son las ternas* (H, v, j) *con* H *una subgráfica de* G *obtenida a partir de quitar una cantidad finita de vértices de* G, v *un vértice en* H *y* $j \in \{A, D\}$.
- *Las flechas son de alguno (y sólo de alguno) de los siguientes tipos:*
  - *De* (H, v, A) *a* (H, w, D) *si* w *es adyacente a* v *en* H.
  - *De* (H, v, D) *a* $(H - w, v, A)$ *si* w *es un vértice de* H *distinto de* v.

Hagamos algunas observaciones.

Observación 7.2.2. *La digráfica* $\mathcal{D}_{(G,u)}$:

- *Es bipartita. En un lado ponemos a las ternas con* $j = A$ *y en el otro ponemos a las ternas con* $j = D$. *Al subconjunto de vértices con* $j = A$ *lo llamaremos el "lado del Ángel" y lo denotaremos por* L_A. *De modo similar, al subconjunto de vértices con* $j = D$ *lo llamaremos el "lado del Diablo" y lo denotaremos por* L_D.
- *No tiene ciclos. Esto se debe a que cada que el Diablo juega cambia* H *a una subgráfica propia.*
- *Es muy distinta a la gráfica original* G. *La gráfica* G *es en donde el Ángel y el Diablo juegan, mientras que* $D_{(G,u)}$ *nos dice todas las formas en las que podrían jugar. En realidad* $D_{(G,u)}$ *es una digráfica muy grande.*

En la digráfica de juego una trayectoria es una posible forma de jugar. Es decir, mientras el Diablo y el Ángel juegan en la gráfica G moviéndose y eliminando cuadrados, en la digráfica se va haciendo una trayectoria que guarda la información de todo lo que sucede.

Con esta digráfica ya podemos enunciar el concepto clave de "estrategia ganadora".

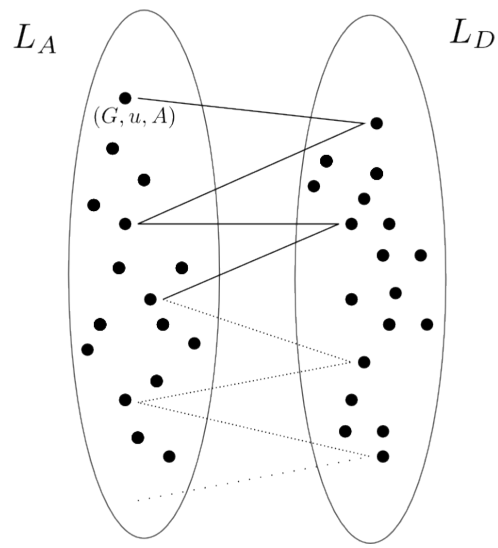


Figura 7.3: La digráfica de juego $\mathcal{D}_{(G,u)}$

Definición 7.2.3. *(Estrategia ganadora para el Ángel)*

Diremos que el Ángel tiene estrategia ganadora si existe un conjunto ganador $E_A \subseteq L_A$ y un conjunto respuesta $R_A \subseteq L_D$ que cumplen lo siguiente:

- $(G, u, A) \in E_A$.
- *Para cada elemento de E_A, existe una flecha hacia un elemento de R_A.*
- *Para cada elemento de R_A, todas las flechas son hacia elementos de E_A.*

Definición 7.2.4. *(Estrategia ganadora para el Diablo)*

Diremos que el Diablo tiene estrategia ganadora si existe un conjunto ganador $E_D \subseteq L_D$ y un conjunto respuesta $R_D \subseteq L_A$ que cumplen lo siguiente: Llamaremos a un subconjunto E_D de L_D una estrategia ganadora para el Diablo si cumple las siguientes condiciones:

- $(G, u, A) \in R_D$.
- *Para cada elemento de E_D, existe una flecha hacia un elemento de R_D.*

- *Para cada elemento de R_D, todas las flechas son hacia elementos de E_D.*
- *Todas las trayectorias dirigidas en $E_D \cup R_D$ son finitas.*

Ambas definiciones de estrategia conservan las ideas de la teoría de juegos finita. La primera condición nos dice que el jugador sabe qué hacer al inicio del juego. La segunda nos dice que el jugador siempre tiene una respuesta. Y la tercera nos dice que no importa qué haga el oponente tras la respuesta, de nuevo el jugador sabe qué hacer.

7.2.2. Equivalencias e incompatibilidad de estrategias

Es un hecho conocido que en todo juego finito con ciertas condiciones razonables existe un jugador que tiene estrategia ganadora. La prueba de esto es inmediata. Bajo las definiciones de estrategia que acabamos de plantear no es totalmente claro que algún jugador tenga estrategia ganadora. Así mismo, tampoco es totalmente claro que una estrategia ganadora del Ángel sea incompatible con una estrategia ganadora para el Diablo. Veremos que las respuestas a estos problemas estan relacionadas con el hecho de que en las gráficas que tomamos los vértices tengan grado finito.

Otra observación es que la definición que dimos de estrategia ganadora para cada jugador no es totalmente claro que sea la del juego original. Trataremos estos asuntos ordenadamente. Primero veremos que la existencia de una estrategia ganadora para el Diablo hace que pueda atrapar al Ángel. De acuerdo con la Proposición 7.1.2, basta ver que el Diablo puede dejar al Ángel en un vértice aislado.

Proposición 7.2.5. *Si el Diablo tiene estategia ganadora, entonces puede jugar de modo que deje al Ángel en un vértice aislado.*

Demostración. Cada que el Diablo se encuentra con que el Ángel dejó una posición (H, v, D) en E_D, entonces por definición de estrategia ganadora para el Diablo existe un vértice que puede quitar para dejar la posición $(H - w, v, D)$ en R_D para la cual todas las flechas que salen caen de nuevo en E_D. Como además la posición inicial (G, u, A) está en R_D, entonces el Diablo puede garantizar que la trayectoria de juego esté en $E_D \cup R_D$. Pero de acuerdo a la definición de estrategia ganadora del Diablo, cualquier trayectoria en $E_D \cup R_D$ es finita.

Tomemos el último vértice (H, v, j) de la trayectoria de juego. No es posible que $j = D$, pues el Diablo siempre tenía una respuesta. De modo que $j = A$, es decir, el Ángel se encontró con una situación en la cual ya no podía hacer nada. Pero esto sólo puede ser posible si v es un vértice aislado en H.

Así, el hecho de que exista una estrategia ganadora para el Diablo, permite que éste pueda dejar al Ángel en un vértice aislado.

□

Ahora veremos que la definición de estrategia ganadora que tenemos de Ángel en realidad refleja la idea de que “se mueva indefinidamente”.

Proposición 7.2.6. *Si el Ángel tiene una estrategia ganadora, entonces cualquier trayectoria dirigida finita en $E_A \cup R_A$ (con la notación como en la definición) que comienza en (G, u, A) se puede extender.*

Demostración. Tomemos una trayectoria dirigida finita en $E_A \cup R_A$.

Si su vértice final (H, v, j) está en E_A, entonces por definición de tener estrategia ganadora sabemos que existe una flecha que sale de (H, v, j) hacia un vértice en R_A, de modo que esta flecha extiende a la trayectoria.

Si el vértice final (H, v, D) esá en R_A, entonces no puede ser (G, u, A) (pues este estado está en E_A), de modo que tiene un vértice antecesor (H, w, A) con w adyacente a v en H y $w \neq v$ pues $H \subset G$ y G no tenía lazos.

Así, podemos extender la trayectoria hacia $(H - w, v, A)$, y este vértice en efecto está en E_A pues por la definición de estrategia ganadora, toda flecha desde (H, v, D) cae en E_A. □

Proposición 7.2.7. *Si el Ángel tiene una estrategia ganadora, entonces cualquier trayectoria finita en $E_A \cup R_A$ que comienza en (G, u, A) se puede extender a una trayectoria infinita.*

Demostración. De acuerdo a la proposición anterior, cualquier trayectoria τ como la de la hipótesis se puede extender repetidamente a trayectorias $\tau\omega_1$, $\tau\omega_1\omega_2$, ... Esto nos da una forma recursiva de extender la trayectoria de $\tau\omega_1 \dots \omega_n$ agregando un vértice ω_{n+1}.

Una trayectoria infinita es una sucesión de vértices conectados, y una sucesión es una función de dominio $\mathbb{N}$. De este modo, con la forma recursiva de encontrar vértices, el Teorema de Recursión (Teorema 9.1.1) nos garantiza la existencia de una trayectoria infinita. □

Así, demostramos que si el Ángel tiene estrategia ganadora según nuestra definición, entonces podemos extender una trayectoria en $E_A \cup R_A$ tanto como queramos, incluso hasta volverla infinita. Regresando al Problema del

Ángel, esto da instrucciones al Ángel para que, sin importar qué vértices elimine el Diablo, pueda escapar indefinidamente en (G, u), de modo que en realidad el escape del Ángel en G está en correspondencia con un tipo de "escape" en $\mathcal{D}_{(G,u)}$.

Las observaciones anteriores son una muy buena pista de que sólo un jugador puede ganar. Esto es lo que afirma el siguiente teorema.

Teorema 7.2.8. *(Incompatibilidad de las estrategias ganadoras) Sólo un jugador puede tener estrategia ganadora.*

Demostración. La demostración de esta proposición requiere un poco de cuidado. No podemos usar simplemente la Proposición 7.2.7, pues esta da mucha libertad a las flechas que salen de L_D, sin embargo, para realmente llegar a una contradicción, tenemos que incorporar la información de que el Diablo tiene estrategia ganadora. Sin embargo, recuperaremos varias de las ideas de las demostraciones anteriores.

La idea es la siguiente. Supondremos que ambos jugadores tienen estrategias ganadoras. Usando la estrategia del Ángel, alargaremos una trayectoria. Usando la estrategia del Diablo, veremos que esta trayectoria se queda en $E_D \cup R_D$. Por el Teorema de Recursión, podremos construir una trayectoria infinita en $E_D \cup R_D$. Esto entrará en contradicción con el último punto de la estrategia ganadora del Diablo.

Supongamos entonces que el Ángel y el Diablo tienen estrategias ganadoras y tomemos E_A, R_A, E_D y R_D como en la definición.

Primero veremos que cualquier trayectoria dirigida finita en $(R_D \cap E_A) \cup (R_A \cap E_D)$ que comience en (G, u, A) puede extenderse. Tomemos una de tales trayectorias y consideremos su vértice final ω.

- Si $\omega \in L_A$, entonces $\omega \in R_D \cap E_A$. Por definición de estrategia ganadora para el Ángel, existe una flecha de ω hacia un vértice $\omega' \in R_A$. Pero como $\omega \in R_D$, entonces por la estrategia ganadora del Diablo tenemos $\omega' \in E_D$. De este modo, el vértice ω' extiende la trayectoria.

- Si $\omega \in L_D$, entonces $\omega \in R_A \cap E_D$. Por definición de estrategia ganadora para el Díablo, existe una flecha de ω hacia un vértice $\omega' \in R_D$. Pero como $\omega \in R_D$, entonces por la estrategia ganadora del Ángel tenemos $\omega' \in E_A$. De este modo, el vértice ω' extiende la trayectoria.

Esto nos da una forma recursiva de conseguir nuevos vértices en $(R_D \cap E_A) \cup (R_A \cap E_D)$ que extiendan indefinidamente una trayectoria, y por tanto, por el Teorema de Recursión (Teorema 9.1.1), existe una trayectoria infinita en $(R_D \cap E_A) \cup (R_A \cap E_D) \subseteq E_D \cup R_D$. Por supuesto, la trayectoria formada por el vértice (G, u, A) está en $(R_D \cap E_A) \cup (R_A \cap E_D)$, de modo que esta trayectoria se puede extender a una trayectoria infinita en $E_D \cup R_D$.

Pero la existencia de trayectorias infinitas en $E_D \cup R_D$ entra en contradicción con el tercer punto de la estrategia ganadora del Diablo, y por tanto no es posible que ambos jugadores tengan estrategia ganadora. □

En los juegos infinitos, aunque no existan los empates, es posible que ningún jugador tenga estrategia ganadora. El siguiente teorema enuncia que en este juego el Diablo o el Ángel pueden forzar una victoria.

Teorema 7.2.9. *(Existencia de una estrategia ganadora) Alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora.*

Demostración. Consideremos el conjunto V de vecinos de la posición inicial (G, u, A). Pueden pasar una de dos cosas:

- Para cualquier vecino v de u en G, hay un vértice $w \neq v$ tal que el Diablo tiene estrategia ganadora en el juego cuando se juega con posición inicial $(G \setminus w, v, A)$. En este caso el Diablo también tiene estrategia ganadora comenzando en (G, u, A), añadiendo (G, u, A) al conjunto R_D y todos los vértices de la forma (G, v, D) con v vecino de u al conjunto E_D.
- Hay un vecino v de u en G tal que para ninguno de los vértices $w \neq v$ el Diablo tiene estrategia ganadora en el juego cuando se juega con posición inicial $(G \setminus w, v, A)$. A este vértice vecino lo nombraremos v_1.

En el segundo caso encontramos un vértice v_1 que hace que "a partir de ese momento" el Diablo no tenga estrategia ganadora. Repitiendo el argumento, pero ahora iniciando en v_1, no es posible que se de el primer caso, pues si no el Diablo tendría estrategia ganadora, contradiciendo la elección de v_1. De modo que caemos en el segundo caso de nuevo, y por tanto podemos encontrar un vértice v_2 a partir del cual el Diablo tampoco tiene estrategia ganadora. Siguiendo inductivamente, variando las w podemos encontrar familias de vértices v_1, v_2, v_3, ... que forman una estrategia ganadora para el Ángel.

□

En juegos infinitos no necesariamente alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora. El hecho de que en este tipo de juegos sí se debe a la condición ganadora del Ángel, que simplemente consiste en "seguirse moviendo".

7.3. Algunos resultados de gráficas angelicales

Si el Ángel puede ganar en una gráfica, entonces también debería poder ganar en una gráfica que la contenga. Esto es lo que enuncia el siguiente resultado.

Proposición 7.3.1. *Si* (G, u) *es una pareja angelical y* G *es subgráfica de* K*, entonces* (K, u) *también es una pareja angelical.*

Demostración. Supongamos que el Ángel tiene una estrategia ganadora para (G, u) con conjuntos E_A y R_A. Como los movimientos del Diablo siempre dejan al Ángel en una posición de E_A y sabemos que ahí el Ángel siempre tiene una flecha de salida en la digráfica, entonces siempre tiene un vértice al cual moverse.

Lo que hará el Ángel para ganar en (K, u) es "pretender" que están jugando en (G, u). Recordemos que G tiene una cantidad numerable de vértices, así que numerémoslos v_1, v_2, ... Lo que queremos demostrar es que no importa qué vértices elimine el Diablo en K, tenemos que el Ángel siempre puede jugar al menos un turno más. Supongamos que el Diablo decide eliminar el vértice w_i en su i-ésimo turno. Entonces le diremos al Ángel que se mueva como sigue:

- Si el vértice que elimina el Diablo está en G, entonces el Ángel debe actuar según le dice la estrategia de G que actúe.

- Si el vértice que elimina el Diablo está en $K \setminus G$, entonces el Ángel actuará como si el Diablo hubiera eliminado el vértice v_j con el menor índice j que aún no ha sido eliminado. Así, como v_j está en G, el Ángel sabe cómo responder.

Ahora, observamos lo siguiente. Como el Ángel actúa bajo la estrategia de G, entonces siempre se está moviendo en vértices de G. Así, los vértices que el Diablo elimina en $K \setminus G$ no afectan el movimiento del Ángel. De este modo, podemos pensar que todo el juego se lleva a cabo en G, por lo que E_A y R_A también dan una estrategia ganadora para el Ángel en la pareja (K, u).

□

Si el Ángel puede ganar, entonces debería poder ganar sin pasar dos veces por un mismo vértice. La intuición nos dice que la segunda vez que pase por un vértice que ya había pasado, las cosas "van a estar peores", de modo que en realidad no le convenía regresar.

Proposición 7.3.2. *Sea G una gráfica sin lazos con vértices de grado finito y u un vértice. Supongamos que el Ángel y el Diablo juegan como se ha propuesto en este capítulo, sólo que ahora el Ángel cambia una pareja (H, v) a una pareja $(H - v, w)$ con w adyacente a v en H. Supongamos que el Diablo tiene una estrategia ganadora en este juego. Entonces, el Diablo tiene una estrategia ganadora para el juego original en (G, u).*

Demostración. Si fueramos muy formales todavía, tendríamos que decir precisamente qué quiere decir que el Ángel "prometa" no pasar dos veces por un mismo vértice, y qué quiere decir que el Diablo tenga una estrategia ganadora en el nuevo juego. Esto resulta oscurecer la demostración. Aprovecharemos varias de las observaciones de la sección pasada para valernos de nuestra intuición (de una manera justificada). Es por esto que la demostración de esta proposición la daremos no en los términos formales que hemos usado en este capítulo, sino en términos del Ángel que escapa del Diablo.

Supongamos que el Ángel y el Diablo están jugando en la gráfica G y que el Ángel esá en el vértice u. Supongamos también que cuando el Ángel sale del vértice u este desaparece y a partir de aquí el Diablo tiene una forma de jugar J que le garantice atrapar al Ángel. Veremos que el Diablo tiene una forma de jugar que le asegure atrapar al Ángel aunque no desaparezca el vértice u. Supongamos entonces que el Ángel está en u, que no desaparece y que le toca jugar al Diablo.

Sean u_1, u_2, …, u_k los vecinos de u. Al principio el Ángel está en u y por tanto la forma de jugar J le indica al Diablo un vértice v que tiene que eliminar. El Diablo lo elimina. El Diablo seguirá jugarando según J mientras el Ángel no pase de nuevo por u. Cuando el Ángel pase por u, el Diablo eliminará uno de los vértices u_i, pero fingirá que nunca lo hizo. La parte clave es que esto no retrasa al Diablo con la forma de jugar establecida por J, pues el Diablo ya eliminó al principio v. Si la estrategia establecida por J le pide al Diablo eliminar vértices que ya fueron eliminados, entonces el Diablo "pasa" ese turno (por la Proposición 7.3.1 esto no afecta su objetivo).

El Diablo nunca se retrasa con la forma de jugar J, de modo que si a partir de un momento el Ángel deja de pasar por el vértice u entonces el Diablo lo atrapa con J. Por otro lado, si el Ángel no deja de pasar por u entonces el Diablo eliminará todos sus vecinos tras la k-ésima vez que el Ángel pase por ahí, y por tanto el Diablo también lo atrapa.

□

Intuitivamente, una de las condiciones necesarias para que el Ángel pueda escapar es que tenga a su disposición muchos vértices en el futuro. Esto se debe a que, si por el contrario, tuviera menos de n vértices disponibles dentro de n turnos, entonces el Diablo podría eliminarlos y dejar encerrado al Ángel. La siguiente proposición muestra esto formalmente. Recordemos que $S_r(u)$ denota al conjunto de vértices a distancia r del vértice u.

Proposición 7.3.3. *Si en la pareja* (G, u) *se tiene para alguna* r *que* $|S_r(u)| < r$*, entonces la pareja* (G, u) *no es angelical.*

Demostración. Si $|S_r(u)| = 0$, esto quiere decir que el Ángel no puede alejarse a una distancia mayor a r de u. Como cada vértice tiene grado finito, entonces la componente conexa en la que está es finita y por tanto el Diablo gana al primer turno. Supongamos entonces que $|S_r(u)| > 0$.

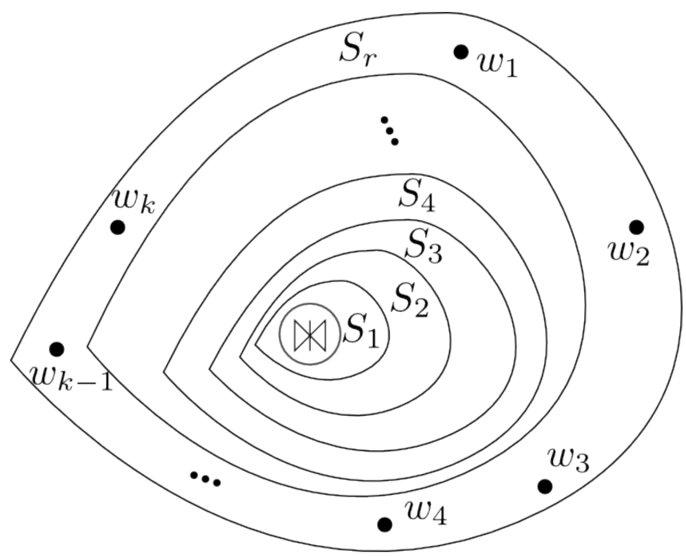


Figura 7.4: Las esferas alrededor de la posición del Ángel

Sean w_1, w_2, ..., w_k con $k < r$ los vértices en $S_r(u)$. El Diablo en sus primeros k turnos deberá quitar en su $i-$ésimo turno el vértice w_i. El Ángel no podrá interferir con ninguno de estos movimientos pues para llegar a $S_r(v)$ necesita al menos r turnos. Los vértices w_i eran la única forma en la cual el Ángel podía alejarse más de r unidades de su posición inicial, pues para llegar a $S_{r+1}(u)$ se tiene que pasar por un vértice de $S_r(u)$.

Así, el Ángel ha quedado atrapado en $B_r(u)$. Como cada vértice tiene grado finito, el Ángel queda en una componente conexa finita. $\square$

Corolario 7.3.4. *Si una pareja (G, u) es angelical, entonces $|\overline{B}_r(u)|$ crece al menos cuadráticamente con r.*

Demostración. Usando la proposición anterior, tenemos que;

$$\begin{aligned}
|\overline{B}_r(u)| &= |S_0(u) \cup S_1(u) \cup \ldots \cup S_r(u)| \\
&= |S_0(u)| + |S_1(u)| + \ldots + |S_r(u)| \\
&\geq 0 + 1 + 2 + \ldots + r = \frac{r(r+1)}{2}
\end{aligned}$$

Esta última expresión es cuadrática en r. □

La Proposición 7.3.3 nos permite detectar muchas parejas (G, u) que no son angelicales. Por ejemplo, retomemos el ejemplo 7.1.5. Dos enteros eran adyacentes si su diferencia era menor o igual a una constante k. De este modo, cada $S_r(v)$ tiene $2k$ elementos. Así, tomando $r = 2k + 1$ tenemos que $|S_r(v)| = 2k < 2k + 1 = r$, de modo que por la Proposición 7.3.3 tenemos una gráfica no angelical.

El siguiente ejemplo muestra una pareja (G, u) que es angelical, en la cual si a G se le quita cualquier vértice, entonces ya no es angelical. En cierto sentido nos dice que el resultado de la Proposición 7.3.3 es justo para encontrar gráficas no angelicales.

Proposición 7.3.5. *Tomemos la gráfica G cuyos vértices son los puntos de coordenadas enteras no negativas (x, y) tales que:*

- $x = 0$ *y* $y = 0$ *ó*
- $x > y$

Hay una arista entre el vértice (a, b) y el (c, d) si $|a - c| = 1$. La pareja $(G, (0, 0))$ es angelical, sin embargo, si tomamos un vértice (a, b) de G distinto de $(0, 0)$ entonces la pareja $(G - (a, b), (0, 0))$ no es angelical.

Demostración. Veamos que en efecto $(G, (0, 0))$ es angelical. Recordemos que el Ángel juega primero. Así, cuando al Ángel le toque jugar su k-ésimo turno el Diablo a lo más ha eliminado $k - 1$ de los k vértices $(k, 0)$, $(k, 1)$, $\ldots$, $(k, k - 1)$. La estrategia del Ángel será en su k-ésimo turno moverse al vértice de estos que el Diablo no ha eliminado.

Probemos inductivamente que en efecto puede hacer esto. En su primer turno el Diablo no ha eliminado nada y por tanto el Ángel puede moverse de $(0,0)$ a $(1,0)$. Supongamos que al turno k se movió a un vértices de la forma (k,a). Por lo que argumentamos, hay un vértice de la forma $(k+1,b)$ libre y, por definición de la gráfica, es adyacente a (k,a). De este modo, el Ángel puede moverse a $(k+1,b)$ en su turno $k+1$.

Ahora veremos que si $(a,b) \neq (0,0)$ entonces $(G-(a,b),(0,0))$ no es angelical. Tenemos que $S_a(0,0)$ le falta uno de sus a elementos. De este modo, $|S_a(0,0)| = a-1 < a$. De este modo, por la Proposición 7.3.3, la gráfica no es angelical. Notemos, sin embargo, que el Ángel sí puede jugar por al menos $a-1$ turnos. $\square$

Sin embargo, no hay que irnos con la finta de que la Proposición 7.3.3 es suficiente para detectar todas las gráficas no angelicales. De hecho, un problema con la Proposición 7.3.3 es que es muy cuantitativa, y poco cualitativa. Por ejemplo, es suceptible a no detectar cuellos de botella, incluso en gráficas en donde $|S_r(u)|$ crece muy rápido con r. Consideremos la gráfica de la Figura 7.5.

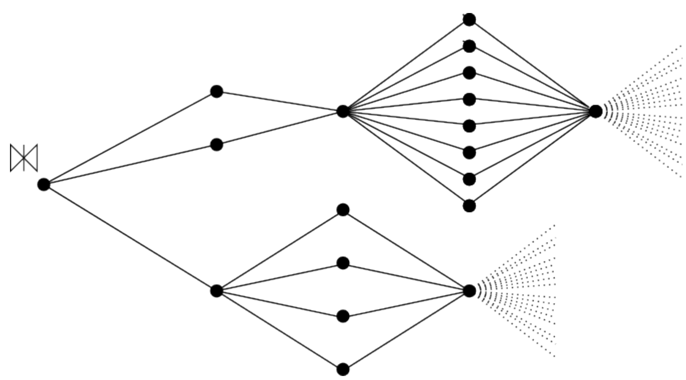


Figura 7.5: Una gráfica con muchos vértices en cada esfera pero con cuellos de botella.

En esta gráfica, $|S_r(u)|$ crece exponencialmente con r, pero los cuellos de botella en ambas direcciones permiten que el Diablo capture al Ángel en 2 turnos. Ejemplos como este nos muestran que el problema para gráficas en general puede ser muy salvaje. Tal vez el problema sea más noble en gráficas más controladas, como gráficas regulares, o gráficas de Cayley.

Terminamos nuestras investigaciones con una pregunta interesante. Supongamos que iniciamos con cierta pareja (G,v). Sabemos que pasa lo siguiente. Para cada natural n, existe una estrategia del Ángel que le permite sobrevivir al menos n turnos. ¿Será cierto que hay una estrategia que le permita escapar indefinidamente? Esta es una pregunta un poco delicada, pues el orden de los cuantificadores es importante. No sabemos si hay una estrategia que funcione para todas las n, sino que para cada n hay una estrategia (que depende de n) que permite que el Ángel escape al menos n.

Para entender la delicadeza del asunto, daremos un ejemplo en el cual el Ángel tiene estrategias para cada n, pero que no puede escapar del Diablo. Para dar este ejemplo le daremos oportunidad a un vértice de la gráfica que tenga grado infinito. Después nos preguntaremos qué sucede si el grado de todos los vértices es finito.

Proposición 7.3.6. *Hay una gráfica G con un vértice $u \in G$ tal que para cada n el Ángel tiene estrategias para sobrevivir al menos n turnos comenzando en (G, u), pero tal que la pareja (G, u) no es angelical.*

Demostración. Consideremos la gráfica de la Proposición 7.3.5. Para cada $i \geq 2$ entera llamaremos G_i a la gráfica obtenida a partir de esta al quitar el vértice $(i, 0)$. Armaremos una nueva gráfica G como sigue. Tomaremos un vértice base u. A u lo conectaremos con los vértices $(0, 0)$ de cada una de las gráficas G_i que construimos. Esto lo podemos ver en la Figura 7.6. Afirmamos que la pareja (G, u) cumple lo pedido en el problema.

Por un lado, tomemos un entero positivo n y supongamos que el Ángel quiere sobrevivir al menos n turnos. Entonces puede lograr esto jugando de la siguiente manera:

- Si está en u, entonces se mueve al vértice $(0, 0)$ de G_m, donde m es el menor entero mayor a n en donde el Diablo no ha eliminado vértices en G_m.

- Si esá en un vértice $(0, 0)$ y el Diablo no eliminó el vértice u, entonces el Ángel regresa a u.

- Si esá en un vértice $(0, 0)$ de G_m y el Diablo ya eliminó el vértice u, entonces el Ángel juega como en la demostración de la Proposición 7.3.5 para jugar al menos m turnos.

Si el Diablo no elimina el vértice u en los primeros n turnos, entonces el Ángel pasea repetidamente entre vértices $(0, 0)$ y el vértice u y por tanto se mueve al menos n turnos. De este modo, hay un momento en los primeros n turnos que el Diablo debe eliminar el vértice u. Por la manera en la que juega el Ángel, en este momento el Ángel está en un vértice $(0, 0)$ de una gráfica G_m con $m > n$. Por la demostración de la Proposición 7.3.5, a partir

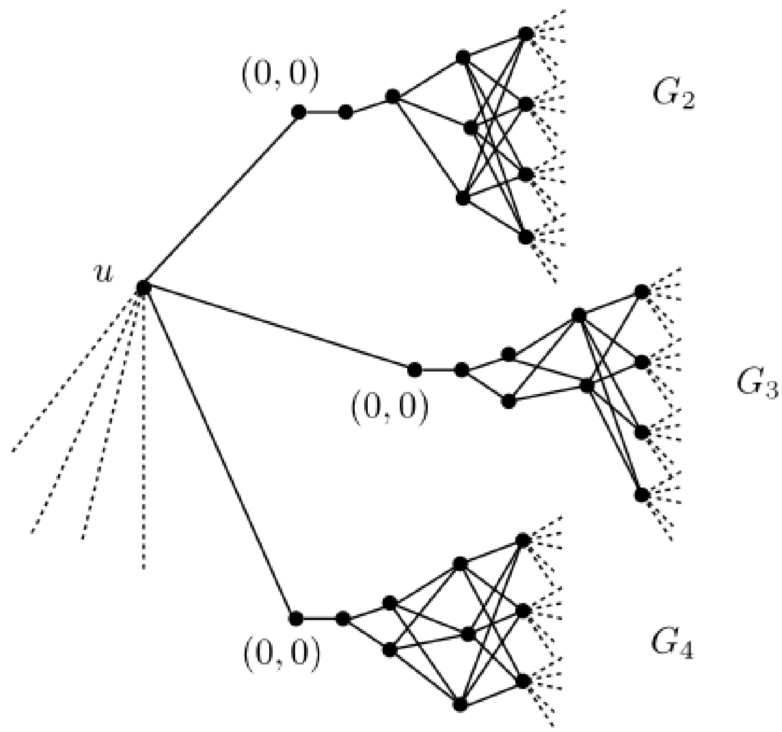


Figura 7.6: Una gráfica en la cual el Ángel puede sobrevivir cuanto quiera, pero no escapar.

de aquí el Ángel puede jugar al menos $m-1$ turnos, en particular, al menos n.

Sin embargo, el Diablo puede jugar de la siguiente forma para atrapar al Ángel, aunque tarde mucho. Supongamos que el primer movimiento del Ángel es al vértice $(0,0)$ de G_m. Entonces el Diablo en su primer turno elimina el vértice u. Así, el juego se lleva acabo totalmente en G_m. Por la Proposición 7.3.5, el Diablo puede atrapar al Ángel.

De este modo, sin importar que haga el Ángel, del Diablo gana en (G,u) y por tanto (G,u) no es una pareja angelical.

□

Bajo la luz de este ejemplo, el siguiente teorema es algo sorprendente. Basta agregar la hipótesis de finitud de los grados para garantizar que un Ángel con estrategias para cada n tiene una estrategia para escapar indefinidamente. Conversamente, lo que muestra el siguiente resultado es que si el Diablo puede ganar en una gráfica así, entonces puede ganar en menos de una cantidad finita fija de turnos que no depende de cómo juegue el Ángel.

Teorema 7.3.7. *Si G es una gráfica sin lazos, en donde cada vértice tiene grado finito, $u \in G$ y para cada n el Ángel tiene estrategias para sobrevivir al menos n turnos comenzando en (G, u), entonces la pareja (G, u) es angelical.*

Demostración. Probaremos el contrapositivo, es decir, que si el Diablo puede ganar, entonces puede ganar en una cantidad acotada de turnos. Supongamos que el Diablo tiene una estrategia ganadora, es decir, en la digráfica de juego $\mathcal{D}_{(G,u)}$ hay ciertos conjuntos E_D y R_D que cumplen con la definición. Consideremos la subdigráfica $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}_{(G,u)}$ generada por estos conjuntos. Por definición de estrategia ganadora para el Diablo, el Diablo puede jugar para que todo el juego se lleve acabo en $\mathcal{D}'$.

A los vértices de E_D (en $\mathcal{D}'$) les quitaremos todas sus flechas hacia afuera excepto una (esto es para que el Diablo tenga bien definido qué tiene que hacer en cada turno). El juego sigue llevándose acabo en $\mathcal{D}'$. Tras hacer este cambio, también nos deshacemos de todos los vértices que no puedan ser alcanzados desde (G, u, A) con una trayectoria dirigida. A la gráfica finalmente así obtenida la llamamos $\mathcal{C}$.

Afirmamos que C es finita. De no serlo, cumpliría todas las hipótesis del lema de König (Proposición 9.2.5). En efecto, cada vértice de la forma (H, v, A) tiene exgrado finito por que en G los grados son finitos. Cada vértice de la forma (H, v, D) tiene exgrado 1. Además, nos deshicimos de todo lo no alcanzable desde (G, u, A). Así, por el lema de König, tendría una trayectoria infinita. Pero esto entra en contradicción con la definición de estrategia ganadora para el Diablo.

Como C es finita, hay un camino dirigido que comienza en (G, u, A) de longitud máxima m. Esta m es una cota para la longitud del juego si el Diablo juega con la estrategia que le define $\mathcal{C}$, y por tanto el Ángel sin importar cómo juegue, no puede tener una estrategia que lo haga jugar más de m turnos. □

CAPÍTULO 8

Conclusiones

Como se mencionó al inicio de este trabajo, la historia del Problema del Ángel de Conway es un bonito cuento. Es un relato interesante y motivacional que muestra la variedad de herramientas de las cuales nos valemos los matemáticos para resolver los problemas que encuentramos. Es realmente interesante también la cantidad de temas de las matemáticas que se pueden reunir para resolver un problema que parece tan inocente.

La historia, como tuve el gusto de conocerla en este viaje, termina aquí. Por supuesto, quedaron muchas cosas por decir, y al lector interesado de nuevo hacemos la invitación de consultar la bibliografía.

Creemos que todos estos resultados dejan abiertas puertas hacia caminos muy interesantes. El Problema del Ángel de Conway aún se presta a muchas generalizaciones más, hacia el terreno de lo contínuo y hacia el terreno de la probabilidad. Por otros lados, también se puede preguntar qué sucede con fichas de ajedrez menos poderosas. Está también la posibilidad de trabajar con el problema en otras geometrías.

¿Qué pasa si el Diablo puede cortar curvas de longitud 1 en el plano? ¿Será cierto que si el Ángel de poder muy alto juega, entonces gana con probabilidad 1? ¿Qué pasó con el caballo de ajedrez? ¿Qué sucede si el Ángel y el Diablo juegan en el plano hiperbólico? ¿O en el toro? ¿O en un cono infinito?

Estas y muchas otras preguntas más quedan en espera de una respuesta. No dudamos que haya otros espíritus aventureros que se animen a escribir otro capítulo más de este cuento.

CAPÍTULO 9

Apéndice: Teoría

En este apéndice recopilamos algunas definiciones, proposiciones y teoremas que se usan a lo largo de esta tesis. En la mayoría de los casos no damos las demostraciones, pues son hechos conocidos que se pueden encontrar en un libro. Referimos al lector a textos como [13] y [1].

9.1. Conjuntos

En esta sección recordaremos algunos conceptos de teoría de conjuntos. Daremos por conocido las definiciones y propiedades básicas. Dados dos conjuntos A y B denotaremos por $A \setminus B$ a la diferencia entre A y B, es decir, al conjunto que tiene a los elementos de A que no estén en B. Denotaremos por $|A|$ a la cantidad de elementos de un conjunto cuando este sea finito.

Diremos que un conjunto infinito A es numerable si existe una biyección de A al conjunto de los naturales $\mathbb{N}$. En otro caso diremos que A es no numerable.

En algunas ocasiones usaremos implícitamente el Axioma de Elección. Recordemos que el Axioma de Elección dice que si tenemos una familia de conjuntos $A = \{A_i\}_{i \in I}$, todos ellos no vacíos, entonces existe una función que “elige un elemento” de cada conjunto, es decir, existe $f : A \to \bigcup_{i \in I} A_i$ de modo que $f(A_i) \in A_i$.

Para algunas pruebas usaremos el Teorema de Recursión. Éste afirma lo siguiente.

Teorema 9.1.1. *Sea S un conjunto y $f : S \to S$ una función. Tomemos además un elemento s_0 de s. Entonces existe una única función $g : \mathbb{N} \to S$ que satisface las siguientes dos condiciones:*

- $g(0) = s_0$
- $g(n+1) = f(g(n))$

9.2. Gráficas y digráficas

Una gráfica G es una pareja (V, E) de conjuntos de modo que E es una relación simétrica en V. A V le llamamos el conjunto de vértices de G y a E el conjunto de aristas. Si en E no hay ninguna pareja de la forma (v, v) para $v \in V$, decimos que G no tiene lazos. A una gráfica la podemos representar con un dibujo poniendo un punto por cada vértice y una línea entre dos puntos si sus vértices están relacionados por E.

Si el contexto es claro, a veces nos referiremos a los vértices en V como vértices de G y a las aristas en E como a las aristas de G. Si dos vértices están relacionados por E diremos que son adyacentes, que estan unidos por una arista o que son vecinos. El grado de un vértice es la cantidad de vértices con los cuales es vecino. Notemos que no le hemos dado ningúna condición de finitud al conjunto de vértices ni al conjunto de aristas, de modo que el grado podría ser un cardinal.

Diremos que dos gráficas $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son isomorfas si existe una función biyectiva entre sus vértices que preserve adyacencias. En otras palabras, dos gráficas son isomorfas si existe $f : V \to V'$ biyectiva de modo que para cualesquiera u y v vértices de g se tiene que u y v son adyacentes si y sólo si $f(u)$ y $f(v)$ lo son. La noción de isomorfismo en gráficas nos permite decir cuándo dos gráficas “son iguales” si lo único que nos importa es la adyacencia. La relación “ser isomorfas” es una relación de equivalencia.

Una clase especial de gráficas son las gráficas bipartitas. Decimos que una gráfica es bipartita si existe una partición de sus vértices X, Y de modo que no haya aristas entre elementos de X ni entre elementos de Y. Quizás la partición de vértices de una gráfica bipartita no sea única.

Una subgráfica de una gráfica G es un subconjunto S de vértices en G que forman una gráfica cuyas aristas también son aristas de G y unen vértices de S. Sin embargo, muchas veces abusaremos de la notación al decir que una gráfica H es subgráfica de una gráfica G otra cuando en realidad nos estemos refiriendo a que H es isomorfa a una subgráfica de G.

Una gráfica siempre es subgráfica de sí misma. Si tomamos un subconjunto de vértices S de una gráfica G podemos considerar la gráfica generada por S, que tiene como vértices a todos los elementos de S y como aristas a todas las aristas entre ellos que sean aristas en G. Si tenemos v un vértice de G, denotaremos por $G-v$ a la subgráfica generada por $V-\{v\}$. En otras palabras, $G-v$ es la gráfica que se obtiene de eliminar al vértice v y todas las aristas que lleguen a él.

Una camino en una gráfica es un conjunto de vértices v_0, v_1, …, v_k de modo que v_i sea adyacente a v_{i+1} para cada $i \in \{0,\ldots,k-1\}$. A v_0 le llamamos el vértice inicial del camino y a v_k el vértice final. A k le llamamos la longitud del camino. Una trayectoria es un camino que no repite vértices. Un ciclo es un camino con $k \geq 3$ de modo que v_0 y v_k son la única pareja de vértices iguales.

Proposición 9.2.1. *Si en una gráfica G hay un camino de un vértice u a un vértice v entonces hay una trayectoria de u a v.*

Tomemos dos vértices u y v de una gráfica. Si $u=v$, diremos que la distancia de u a v es cero. Si existe un camino de u a v diremos que u y v están conectados y diremos que ese camino los une. En este caso definiremos la distancia de u a v como la longitud del camino más corto que los une. En caso de que no exista un camino de u a v diremos que u y v no están conectados. En este caso diremos que la distancia de u a v es ∞. Una gráfica en la cual todo par de vértices estan conectados la llamaremos una gráfica conexa.

Proposición 9.2.2. *La distancia así definida en una gráfica conexa es una métrica, es decir, es simétrica, la distancia a un elemento a otro es cero si y sólo si son iguales y cumple la desigualdad del triángulo.*

Para un natural r y un vértice v de una gráfica, denotaremos por $B_r(v)$, $\overline{B}_r(v)$ y $S_r(v)$ a la bola abierta, la bola cerrada y la esfera de radio r con centro en v. La bola abierta consiste de los puntos a distancia menor a r de v. La bola cerrada consiste de los puntos a distancia menor o igual a r de v. La esfera de radio r consiste de los puntos a distancia r de v.

Proposición 9.2.3. *Si cada vértice de una gráfica tiene grado finito, entonces $B_r(v)$, $\overline{B}_r(v)$ y $S_r(v)$ son finitos para cada natural r y vértice v.*

A una gráfica conexa en la cual no hay ciclos la llamaremos un árbol. Un vértice de grado 1 en una gráfica se le conoce como una hoja.

Proposición 9.2.4. *Todo árbol con una cantidad finita de vértices y al menos dos vértices tiene al menos dos hojas.*

Una gráfica también puede tener trayectorias infinitas. Una trayectoria infinita "hacia un lado" en una gráfica es una sucesión de vértices distintos $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de modo que si dos índices son consecutivos entonces los vértices son adyacentes. De modo similar se puede definir una trayectoria infinita "hacia ambos lados". En este caso es una sucesión de vértices distintos $\{v_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, que de nuevo cumple que dos vértices son adyacentes si sus índices son consecutivos.

Podemos pensar a una digráfica como una gráfica a la cual a cada arista le asignamos una dirección o la transformamos en dos aristas, una en cada dirección. A las aristas con dirección les llamamos flechas. Si a la arista uv le asignamos la dirección "de u a v", entonces diremos que la flecha sale de u y llega a v. El concepto de digráfica bipartita se define igual que el de gráfica bipartita, con "aristas" cambiadas por "flechas".

Para hacer trayectorias dirigidas v_0, v_1, ..., v_k en una digráfica necesitamos que haya una flecha de v_i a v_{i+1} para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Como lo hicimos para gráficas, también podemos definir trayectorias infinitas que se extienden hacia ambos lados.

Proposición 9.2.5. *(Lema de König versión dirigida). Sea D una digráfica conexa infinita en la cual un vértice u tiene para cada vértice u de la digráfica un camino de u a v y en la cual cada vértice tiene exgrado finito. Entonces D tiene una trayectoria dirigida infinita que comienza en u.*

Demostración. Para cada vértice v de la gráfica tomemos una trayectoria σ_v tal que conecte a u con v. El conjunto S_1 de todas estas trayectorias es infinito. El segundo vértice de cada una de estas trayectorias es vecino exterior de u. Además, u tiene exgrado infinito. De este modo, hay un subconjunto infinito $S_2 \subseteq S_1$ tales que tienen el mismo segundo vértice. A este segundo vértice le llamaremos u_1.

Ahora, S_2 tiene una infinidad de trayectorias, y su tercer vértice es vecino exterior de u_1 así, hay un subconjunto $S_3 \subseteq S_2$ de trayectorias que coinciden en su tercer vértice. Llamaremos a este vértice u_3. Siguiendo así recursivamente, podemos a la trayectoria $uu_1u_2\ldots u_n$ agregarle un vértice u_{n+1}. Así, el Teorema de Recursión (Teorema 9.1.1) nos garantiza la existencia de una trayectoria infinita. $\square$

Bibliografía

[1] U.S.R Murty Adrian Bondy. *Graph Theory.* 2008, Springer.

[2] I. Leader B. Bollobas. The angel and the devil in three dimensions. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 113, 2006.

[3] Brian Bowditch. The angel game in the plane. *Combinatorics, Probability and Computing*, 16, 2007.

[4] John H. Conway. The angel problem. *Games of No Chance, MSRI publications*, 29, 1996.

[5] R.K. Guy E.R. Berlekamp, J.H. Conway. *Winning Ways for your Mathematical Plays.* Academic Press, 1982.

[6] Peter Gács. The angel wins. 2007.

[7] Oddvar Kloster. A solution to the angel problem. *Theoretical Computer Science*, 389, 2007.

[8] Petr Kurka. *Topological & Symbolic Dynamics.* Société Mathématique de France, 2003.

[9] Martin Kutz. *The Angel Problem, Positional Games, and Digraph Roots.* PhD thesis, Freie Universitat Berlin, 2004.

[10] Martin Kutz. Conway's angel in three dimensions. *Theoretical Computer Science*, 345(3), 2005.

[11] Christian Marchal. Analytical study of a case of the homicidal chauffeur game problem. In *Optimization Techniques IFIP Technical Conference Novosibirsk, July, 1974*, volume 27 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 472–481. Springer Berlin / Heidelberg, 1975.

[12] András Mathé. The angel of power 2 wins. *Combinatorics, Probability and Computing*, 16, 2007.

[13] Jose Alfredo Amor Montao. *Teora de Conjuntos para estudiantes de ciencias*. Las Prensas de Ciencias, 2008.

[14] Johan Wastlund. An angel theorem for triangulations of the plane. 2008.

[15] Peter Wrinkler. *Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection*. A K Peters/CRC Press, 2003.