Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

INVARIANZA TOPOLÓGICA FUERTE DEL GRUPO DE MONODROMÍA AL INFINITO PARA CAMPOS VECTORIALES CUADRÁTICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:

VALENTE RAMÍREZ GARCÍA LUNA

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA

2011

Hoja de Datos del Jurado

1 DATOS DEL ALUMNO	1 DATOS DEL ALUMNO
Apellido Paterno:	Ramírez
Apellido Materno:	García Luna
Nombre(s):	Valente
Universidad:	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad:	Facultad de Ciencias
Carrera:	Matemáticas
Número de Cuenta:	40800068-0
2 DATOS DEL TUTOR	2 DATOS DEL TUTOR
Grado:	Dra.
Nombre(s):	Laura
Apellido Paterno:	Ortiz
Apellido Materno:	Bobadilla
3 DATOS DEL SINODAL 1	3 DATOS DEL SINODAL 1
Grado:	Dr.
Nombre(s):	José Antonio
Apellido Paterno:	Seade
Apellido Materno:	Kuri
4 DATOS DEL SINODAL 2	4 DATOS DEL SINODAL 2
Grado:	M. en C.
Nombre(s):	Jessica Angélica
Apellido Paterno:	Jaurez
Apellido Materno:	Rosas
5 DATOS DEL SINODAL 3	5 DATOS DEL SINODAL 3
Grado:	Dr.
Nombre(s):	Xavier
Apellido Paterno:	Gómez Mont
Apellido Materno:	Ávalos
6 DATOS DEL SINODAL 4	6 DATOS DEL SINODAL 4
Grado:	Dr.
Nombre(s):	Santiago
Apellido Paterno:	López de Medrano
Apellido Materno:	Sánchez
7 DATOS DEL TRABAJO ESCRITO	7 DATOS DEL TRABAJO ESCRITO
Título:	Invarianza Topológica Fuerte del Grupo de Monodromía al Infinito para Campos Vectoriales Cuadráticos
Subtítulo:	
Número de Páginas:	28 p
Año:	2011

Agradecimientos

Antes que nada quiero agradecer a las personas que me han acompañado durante todos estos años, con quienes he compartido cada alegría y cada tristeza y a quienes dedico mi trabajo:

A mi mamá por ser siempre mi más grande apoyo, por su eterno cariño y devoción, por ser mi amiga, porque sin importar cuál sea el obstáculo siempre ha encontrado la manera en que todo resulte bien y porque es gracias a ti que he llegado a ser quien soy; a mis padrinos por hacer tan buen honor a ese nombre; a mis hermanos y a mis primos y su amistad infalible; a mi abuela y a mis tíos; a mis hermanos de otra madre por los tantos años en esto; a María por los años de amistad y estos increíbles meses de caminar a tu lado; y a mi papá y a mi abuelo quienes estuvieron siempre presentes sin estarlo.

Quiero agradecer a Laura Ortiz por haber aceptado dirigir esta tesis, por todo lo que he aprendido de ella, por su infinita disposición y por las incontables horas que me ha dedicado a mi y a cada uno de sus estudiantes y principalmente porque sólo con su ejemplo nos obliga a ser mejores matemáticos y mejores personas. De igual forma quiero agradecer a Ernesto Rosales por su gran apoyo y su interés; por su entusiasmo y buena disposición y por compartir tan valiosas ideas conmigo. Le agradezco a Yu.S. Ilyashenko su interés y el haber mejorado el punto de vista que yo mismo tenía de mi propio trabajo.

También quiero agradecer a todos mis profesores y a esta Universidad por darme la oportunidad de acceder a una excelente formación académica. A mis compañeros, a mis ayudantes y a mis *hermanitos académicos*.

Gracias a todos mis amigos por los buenos momentos que hemos pasado juntos. Gracias a mi tío Neto y a Sergio Sánchez Armass por su constante apoyo. A la *Foreign Legion* y a todos aquellos que compartieron parte de estos años conmigo.

Finalmente quiero agradecer a todas las instituciones que me apoyaron para la realización de este trabajo y al Instituto de Matemáticas de la UNAM por brindarme un excelente lugar de trabajo a través de una Beca de Lugar.

[1]Este trabajo fue apoyado por los proyectos CONACYT 80065 y PAPIIT 103010-3 al igual que por el Programa Educativo de Fundación Telmex y el Programa de Becas para la Educación Superior de la SEP.

Prefacio

El estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias se remonta al siglo XVII con los inicios del cálculo de Leibniz y Newton. Sin embargo, no fue hasta finales del sigo XIX que Poincaré y Lyapunov sentaron las bases de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. Poincaré hizo un uso exhaustivo de métodos geométricos al considerar las soluciones de una ecuación como curvas en el espacio de las fases y de inmediato se planteó el estudio de ecuaciones polinomiales en el plano de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q}(x, y), \tag{1}$$

dónde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y P, Q son polinomios reales. Fue Poincaré quién introdujo el concepto de *ciclo límite* como una órbita cerrada aislada de otras órbitas cerradas y demostró que una ecuación diferencial polinomial en el plano sin conexiones de silla sólo puede tener una cantidad finita de ciclos límite. En el año de 1900 Hilbert, en su famosa lista de problemas, plantea la siguiente pregunta:

> ¿Qué se puede decir acerca del máximo número y la posición de los ciclos límite de una ecuación diferencial de primer orden de la forma $\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$, dónde X y Y son funciones polinomiales del n-ésimo grado en x y y?

Esta segunda parte del Problema 16 de Hilbert permanece sin resolver aún en el caso de polinomios cuadráticos.

A mediados de los años cincuenta I.G. Petrovskii y E.M. Landis publicaron un trabajo que pretendía dar una solución completa al Problema 16 [9]. En este trabajo se extiende el dominio de definición de la ecuación (1) al plano complejo $\mathbb{C}^2$. En este caso las soluciones de la ecuación, fuera del conjunto singular

$$\mathbf{\Sigma} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid P(x, y) = Q(x, y) = 0\},$$

son curvas analíticas complejas (parametrizadas por una variable $t \in \mathbb{C}$) que topológicamente corresponden a superficies reales. La partición de $\mathbb{C}^2 \setminus \Sigma$ por las soluciones de (1) determinan una *foliación holomorfa.* Las superficies integrales de (1) son llamadas *las hojas* de la foliación. Los conceptos de solución cerrada, ciclo límite y transformación de Poincaré se pueden extender naturalmente al caso complejo. La estrategia seguida por Petrovskii y Landis consistía en acotar la cantidad de ciclos límite complejos que pueden aparecer en la complejificación de la ecuación diferencial (1) y así obtener una cota sobre los ciclos límite reales que pueden aparecer en la ecuación original. A mediados de los años sesenta Yu.S. Ilyashenko y S.P. Novikov encontraron un error fundamental en dicha demostración que la invalidó por completo.

La historia del Problema 16 de Hilbert ha sido bastante dramática, sin embargo dicho problema ha inspirado un gran avance en la teoría geométrica de ecuaciones diferenciales planas y planteó un punto de partida para el estudio de ecuaciones diferenciales polinomiales en el plano complejo $\mathbb{C}^2$.

Toda foliación holomorfa del plano complejo que proviene de una ecuación diferencial polinomial se puede extender analíticamente a una foliación holomorfa del plano proyectivo complejo. La clase de foliaciones de $\mathbb{C}P^2$ que están determinadas por un campo vectorial polinomial en $\mathbb{C}^2$ se denota por $\mathcal{A}_n$. Este espacio se puede identificar naturalmente con la proyectivización del espacio vectorial de parejas de polinomios de grado n, lo que nos permite hablar de *propiedades genéricas* en dicha clase. Una propiedad será considerada genérica si el conjunto de foliaciones que cumplen dicha propiedad contiene un abierto en la topología de Zariski. De este modo nos podemos preguntar cuáles son las propiedades globales que tiene una foliación genérica de esta clase. En particular nos podemos preguntar qué pasa con la topología de una foliación cuando perturbamos los coeficientes del campo vectorial que la determina. Sabemos que en el caso real una ecuación diferencial polinomial genérica es estructuralmente estable. Sin embargo la situación en el caso complejo es drásticamente distinta; de hecho, no existen foliaciones estructuralmente estables en la clase $\mathcal{A}_n$ para ningún $n \geq 2$. En vista de este resultado surge la pregunta de cuándo pueden ser topológicamente equivalentes dos foliaciones genéricas de la clase $\mathcal{A}_n$ y cuáles son los invariantes topológicos de estas foliaciones.

Las foliaciones polinomiales de $\mathbb{C}P^2$ presentan fenómenos de *rigidez topológica.* La rigidez topológica es una idea vaga, más que una definición formal, que sugiere que para foliaciones genéricas de la clase $\mathcal{A}_n$ la equivalencia topológica de dos de ellas implica su equivalencia afín.

En esta tesis se presentan dos resultados originales sobre foliaciones holomorfas genéricas de la clase $\mathcal{A}_2$. El resultado principal es un resultado de invarianza topológica del grupo de monodromía al infinito. Como corolario se deduce que una foliación genérica de esta clase es *idealmente rígida*; es decir, tiene una vecindad en la clase $\mathcal{A}_2$ en la que no existen otras foliaciones topológicamente equivalentes a ella salvo aquellas que pertenecen a su órbita bajo la acción del grupo afín de $\mathbb{C}^2$. Esto nos dice que en tal vecindad la cantidad de foliaciones topológicamente equivalentes a la foliación dada es la mínima posible; completamente en contraste con el concepto de estabilidad estructural.

Uno de los resultado más importantes de rigidez topológica es el de rigidez absoluta, descubierto por Ilyashenko en 1978 [3]. Este resultado afirma que si dos foliaciones genéricas y cercanas en la clase $\mathcal{A}_n$ son topológicamente equivalentes entonces éstas son necesariamente afín equivalentes, siempre y cuando el homeomorfismo que transforma una foliación en la otra sea *suficientemente cercano* al homeomorfismo identidad del plano proyectivo complejo. De este modo el resultado presentado en esta tesis simplemente elimina la hipótesis de la cercanía entre el homeomorfismo que conjuga las foliaciones y el homeomorfismo identidad en el teorema de Ilyashenko para el caso de foliaciones cuadráticas.

Genéricamente una foliación de la clase $\mathcal{A}_n$ mantiene la recta al infinito $\mathbb{I} = \mathbb{C}P^2 \setminus \mathbb{C}^2$ invariante y ésta contiene exactamente $n+1$ puntos singulares de la foliación. La clase de foliaciones que cumplen esta propiedad es llamada $\mathcal{A}'_n$. De este modo la recta $\mathbb{I}$ menos tales puntos singulares es una hoja de la foliación llamada *la hoja al infinito*. Los puntos singulares en $\mathbb{I}$ son llamados *puntos singulares al infinito*. La hoja al infinito tiene un grupo fundamental libre en n generadores. Las transformaciones de holonomía asociadas a la hoja al infinito forman un grupo de gérmenes de transformaciones conformes $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ llamado *el grupo de monodromía al infinito*. Las propiedades de este grupo están fuertemente relacionadas con las propiedades de la foliación correspondiente y tal grupo ha sido una herramienta fundamental en el estudio de esta clase de foliaciones.

El grupo de monodromía al infinito de una foliación de la clase $\mathcal{A}'_n$ es, por lo general, no soluble [11]. Esta propiedad se traduce al hecho que la órbita de un punto $z \in \mathbb{C}$ bajo composiciones finitas de elementos del grupo (cuando éstas estén bien definidas) presenta cierta propiedad de densidad [7]. Si además suponemos que la foliación en cuestión tiene únicamente singularidades hiperbólicas[1] esto implicará que todas las hojas de la foliación en $\mathbb{C}^2$ se hacen densas en todo el plano proyectivo [10]. Actualmente se sabe que de hecho la condición de no solubilidad del grupo de monodromía, la cual recordemos ocurre genéricamente, implica la existencia de una infinidad de ciclos límite complejos, homológicamente independientes, para la foliación correspondiente [12].

Tomemos dos foliaciones genéricas $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$ de la clase $\mathcal{A}_n$ y supongamos que son topológicamente equivalentes. Denotemos por $G_{\mathcal{F}}$ y $G_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ a sus grupos de monodromía. La densidad de las hojas en $\mathbb{C}^2$ implica que el homeomorfismo que conjuga a las foliaciones necesariamente se restringe a un homeomorfismo entre las hojas al infinito. Esto permite concluir que existe el germen de un homeomorfismo $h\colon (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ que conjuga a los grupos de monodromía; es decir, existen generadores $f_1, ..., f_n$ de $G_{\mathcal{F}}$ y generadores $g_1, ..., g_n$ de $G_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ de modo que

$$h \circ f_j = g_j \circ h, \quad j = 1, ..., n.$$

Más aún, la no solubilidad de dichos grupos implica que el germen h tiene que ser un germen analítico [11].

Supongamos ahora que las foliaciones $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$ son cercanas en la clase $\mathcal{A}_n$. Entonces los puntos singulares al infinito de $\mathcal{F}$ también son cercanos a los puntos singulares al infinito de $\widetilde{\mathcal{F}}$; de modo que podemos tomar curvas cerradas $\gamma_1, ..., \gamma_n$

[1]Una singularidad plana es hiperbólica en el sentido complejo si el cociente de los valores propios de la parte lineal del campo vectorial que la genera es no real.

en la recta $\mathbb{I}$ de modo que formen un sistema canónico de generadores de los grupos fundamentales de *ambas* hojas al infinito. Sean $\Delta_1, ..., \Delta_n$ y $\widetilde{\Delta}_1, ..., \widetilde{\Delta}_n$ las transformaciones de monodromía asociadas a las curvas $\gamma_1, ..., \gamma_n$ correspondientes a las foliaciones $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$ respectivamente. Dichas transformaciones generan a los grupos $G_{\mathcal{F}}$ y $G_{\widetilde{\mathcal{F}}}$. En caso de que el homeomorfismo que conjuga a las foliaciones $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$ sea muy cercano a la transformación identidad podemos concluir que los grupos de monodromía son conjugados de una forma canónica: existe un germen analítico $h\colon (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ de modo que

$$h \circ \Delta_j = \widetilde{\Delta}_j \circ h, \quad j = 1, ..., n.$$

En tal caso diremos que los grupos de monodromía $G_{\mathcal{F}}$ y $G_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ son *fuertemente analíticamente equivalentes.*

Si dos foliaciones $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$ genéricas y cercanas en $\mathcal{A}_n$ son topológicamente equivalentes y sus grupos de monodromía al infinito son fuertemente analíticamente equivalentes se puede construir una deformación a un parámetro de $\widetilde{\mathcal{F}}$ a $\mathcal{F}$ que consista únicamente en foliaciones topológicamente equivalentes a $\mathcal{F}$ y de modo que los homeomorfismos que conjugan a cada foliación con la foliación $\mathcal{F}$ converjan al homeomorfismo identidad conforme dichas foliaciones se aproximan a la foliación $\mathcal{F}$. Más aún, se puede demostrar que una deformación topológicamente trivial de este estilo consiste únicamente en foliaciones afín equivalentes entre sí [3]. Esto demuestra que una foliación genérica de la clase $\mathcal{A}_n$ es idealmente rígida.

El resultado principal de esta tesis consiste en demostrar que en la clase $\mathcal{A}_2$ dos foliaciones topológicamente equivalentes *siempre* tienen sus grupos de monodromía al infinito fuertemente analíticamente equivalentes. Esta propiedad es llamada *invarianza topológica fuerte del grupo de monodromía al infinito*. Esto nos permite concluir que si las foliaciones son cercanas entonces deben ser afín equivalentes; sin necesidad de hacer suposición alguna sobre el homeomorfismo que las conjuga.

Tal resultado de invarianza topológica fuerte se obtiene estudiando el homeomorfismo que aparece entre las hojas al infinito. Supongamos por un momento que las foliaciones $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$ tienen el mismo conjunto de puntos singulares al infinito Σ. Sea $\mathcal{L} = \mathbb{I} \setminus \Sigma$ la hoja al infinito de ambas foliaciones y $H\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ la restricción a la hoja al infinito del homeomorfismo que conjuga a las dos foliaciones. Tal homeomorfismo induce automorfismos

$$H_*\colon \pi_1(\mathcal{L}) \to \pi_1(\mathcal{L}) \;\text{ y }\; H_*\colon H_1(\mathcal{L}) \to H_1(\mathcal{L})$$

en el grupo fundamental y en el primer grupo de homología de la hoja al infinito $\mathcal{L}$. Es fácil notar que si la acción en el grupo fundamental $H_*\colon \pi_1(\mathcal{L}) \to \pi_1(\mathcal{L})$ es la identidad entonces los grupos de monodromía $G_{\mathcal{F}}$ y $G_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ son fuertemente analíticamente equivalentes.

Se demuestra que, por razones dinámicas, la acción en homología $H_1(\mathcal{L}) \to H_1(\mathcal{L})$ es siempre la identidad. Esto implica que, por razones topológicas y algebráicas, necesariamente la acción en grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{L}) \to \pi_1(\mathcal{L})$

corresponde a un automorfismo interior. Este argumento usa fuertemente el hecho que $\pi_1(\mathcal{L})$ es libre en *dos* generadores y no se puede repetir si tal grupo fundamental fuera de rango mayor (esto impide extender los resultados de la Tesis a foliaciones genéricas de la clase $\mathcal{A}_n$ para cualquier $n > 2$). La sencillez de los automorfismos interiores nos permitirá concluir que aún en el caso en el que la acción en grupo fundamental no sea la identidad, los grupos de monodromía al infinito serán fuertemente analíticamente equivalentes; lo que demuestra la invarianza topológica fuerte del grupo de monodromía.

Es importante recalcar la necesidad de las hipótesis de genericidad que hemos impuesto. Existen ejemplos explícitos de foliaciones holomorfas de $\mathbb{C}P^2$ que no son rígidas. En [13] L. Teyssier demuestra que la familia de foliaciones definidas por la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + x^2 + \alpha x^3}{x^3}, \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\} \tag{2}$$

son todas topológicamente equivalentes entre sí, mientras que dos ecuaciones de la forma (2) con distinta α no pueden ser analíticamente equivalentes.

Este resultado no contradice los teoremas enunciados anteriormente ya que las foliaciones definidas por la ecuación (2) tienen su grupo de monodromía al infinito *soluble*. Además sus singularidades no son hiperbólicas ya que tienen una singularidad del tipo silla-nodo en el origen.

Actualmente se sabe que el conjunto de foliaciones en la clase $\mathcal{A}_n$ que son absolutamente rígidas forma un conjunto abierto y denso en dicha clase [8], [10]. Las ecuaciones definidas por (2) pertenecen a la familia de foliaciones Liouville-integrables. Recientemente B. Scárdua ha sugerido (*sin publicar*, ver [4]) que toda foliación en la clase $\mathcal{A}_n$ es o absolutamente rígida o Darboux-integrable.

Índice General

Capítulo 1

Introducción

Es un resultado conocido que todo campo vectorial polinomial en $\mathbb{C}^2$ se puede extender analíticamente a un campo de líneas en $\mathbb{C}P^2$. En este trabajo consideraremos foliaciones holomorfas de $\mathbb{C}P^2$ que, en una carta afín *fija*, son generadas por un campo vectorial cuadrático.

1.1. Foliaciones holomorfas de la clase $\mathcal{A}_2$

Definición 1. *Tomemos una recta $\mathbb{I}$ en $\mathbb{C}P^2$ que quedará fija a lo largo de todo este trabajo. Definimos $\mathcal{A}_n$ como el espacio de foliaciones de $\mathbb{C}P^2$ tales que en la carta afín $\mathbb{C}^2 \approx \mathbb{C}P^2 \setminus \mathbb{I}$ están generadas por un campo vectorial polinomial de grado a lo más n con singularidades aisladas.*

En este trabajo trataremos exclusivamente con foliaciones de la clase $\mathcal{A}_2$. Teniendo la carta afín fija el espacio $\mathcal{A}_2$ puede ser naturalmente identificado con la proyectivización del espacio vectorial de campos vectoriales cuadráticos; dos campos que difieren por un escalar generan la misma foliación. Denotemos por $\mathcal{A}_2'$ la subclase de foliaciones de $\mathcal{A}_2$ que mantienen invariante la recta al infinito $\mathbb{I}$ y tienen exactamente tres puntos singulares en $\mathbb{I}$. El espacio $\mathcal{A}_2'$ constituye un abierto de Zariski del espacio $\mathcal{A}_2$.

Definición 2. *Diremos que dos foliaciones $\mathcal{F}, \widetilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{A}_2$ son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo $\mathcal{H}\colon \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ que transforma homeomorfamente las hojas de $\mathcal{F}$ en las hojas de $\widetilde{\mathcal{F}}$ y preserva simultáneamente la orientación de $\mathbb{C}P^2$ y la orientación de las hojas. En tal caso diremos que $\mathcal{H}$ conjuga topológicamente $\mathcal{F}$ con $\widetilde{\mathcal{F}}$. Si el homeomorfismo $\mathcal{H}$ es una transformación analítica (afín) diremos que las foliaciones son analíticamente (afín) equivalentes.*

Sean $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$ en $\mathcal{A}_2'$ foliaciones con el mismo conjunto singular en el infinito $\Sigma = \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap \mathbb{I}$ y sea b un punto arbitrario en la hoja al infinito $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} = \mathbb{I} \setminus \Sigma$. Consideremos, para cada elemento γ del grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{I} \setminus \Sigma, b)$, las transformaciones de monodromía Δ_γ y $\widetilde{\Delta}_\gamma$ asociadas a las foliaciones $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$ respectivamente.

Definición 3. *Decimos que los grupos de monodromía al infinito* $G_{\mathcal{F}}$ *y* $G_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ *de dos foliaciones en* $\mathcal{A}'_2$ *con el mismo conjunto singular al infinito son fuertemente analíticamente equivalentes si existe el germen de una transformación conforme* $h\colon (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$ *tal que*

$$h \circ \Delta_\gamma = \widetilde{\Delta}_\gamma \circ h$$

para cualquier elemento γ *del grupo fundamental de la hoja al infinito.*

1.2. Enunciado de los resultados principales

Teorema 1. *Si dos foliaciones genéricas de la clase* $\mathcal{A}_2$ *con los mismos puntos singulares en el infinito son topológicamente equivalentes y el homeomorfismo que las conjuga fija dichos puntos singulares entonces sus grupos de monodromía al infinito son fuertemente analíticamente equivalentes.*

A esta propiedad la llamaremos invarianza topológica fuerte de los grupos de monodromía al infinito. Nótese que para cualesquiera dos foliaciones topológicamente equivalentes en $\mathcal{A}'_2$ podemos suponer, después de hacer un cambio de coordenadas afín, que las dos foliaciones tienen los mismos puntos singulares al infinito y que el homeomorfismo que las conjuga fija estos puntos.

Anteriormente sólo se conocía el siguiente resultado sobre la invarianza topológica de los grupos de monodromía:

Proposición 1 ([1])**.** *Sean* $\mathcal{F}$ *y* $\widetilde{\mathcal{F}}$ *foliaciones en* $\mathcal{A}_2$ *genéricas, topológicamente equivalentes y con las mismas singularidades en el infinito. Para cualquier par de generadores* γ_1 *y* γ_2 *del grupo fundamental de la hoja al infinito existe algún par de generadores* ρ_1 *y* ρ_2 *y el germen de una transformación conforme* $h\colon (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$ *tales que*

$$h \circ \Delta_{\gamma_i} = \widetilde{\Delta}_{\rho_i} \circ h, \quad i = 1, 2.$$

A diferencia de esta proposición el Teorema 1 afirma que el segundo par de generadores se puede escoger de modo que coincida con el par original de generadores. Un importante corolario del Teorema 1 es el siguiente resultado:

Teorema 2. *Toda foliación genérica de la clase* $\mathcal{A}_2$ *tiene una vecindad en esta clase tal que cualquier otra foliación en esta vecindad topológicamente equivalente a dicha foliación es necesariamente afín equivalente a la foliación original.*

Cabe notar que en el teorema anterior no se está haciendo suposición alguna sobre el homeomorfismo que conjuga a las foliaciones. Esta propiedad es definida en [5] como *rigidez ideal.* Sin embargo es enunciada como *una propiedad que no se conoce* para foliaciones polinomiales.

1.3. Esquema de las demostraciones

Una equivalencia topológica entre foliaciones genéricas de la clase $\mathcal{A}_2$ que tienen los mismos puntos singulares al infinito se restringe a un homeomorfismo $H\colon \mathcal{L}_{\mathcal{F}} \to \mathcal{L}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ de la hoja al infinito en sí misma. Para demostrar el Teorema 1 vamos a analizar los isomorfismos que dicho homeomorfismo induce en el grupo fundamental y en el primer grupo de homología de la hoja al infinito. Se va a demostrar que si el homeomorfismo que conjuga fija los puntos singulares entonces el isomorfismo inducido en el primer grupo de homología es la identidad y por lo tanto se está induciendo un automorfismo interior en el grupo fundamental. De este hecho se sigue fácilmente que los grupos de monodromía al infinito son fuertemente analíticamente equivalentes.

La demostración del Teorema 1 no funciona para la clase de foliaciones inducidas por campos vectoriales polinomiales de grado $n > 2$ debido a una obstrucción de índole algebraica que se refleja en el hecho de que en caso de tener un grupo fundamental libre en más de dos generadores una acción trivial en el grupo de homología no implica que la acción en grupo fundamental sea un automorfismo interior.

El concepto de rigidez ideal está fuertemente relacionado un concepto llamado *rigidez absoluta* que fue introducido por primera vez en [3]. Sin embargo, en el Teorema 2 no se impone ninguna restricción sobre el homeomorfismo que conjuga a las foliaciones.

Definición 4. *Diremos que una foliación $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_n$ es absolutamente rígida en la clase $\mathcal{A}_n$ si existe una vecindad $U \subseteq \mathcal{A}_n$ de $\mathcal{F}$ y una vecindad $\mathcal{U}$ del homeomorfismo identidad $id\colon \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ en el espacio de homeomorfismos de $\mathbb{C}P^2$ en sí mismo $Homeo(\mathbb{C}P^2)$ tal que toda foliación $\mathcal{F}' \in U$ topológicamente equivalente a $\mathcal{F}$ mediante un homeomorfismo $\mathcal{H} \in \mathcal{U}$ es afín equivalente a $\mathcal{F}$.*

Proposición 2 ([3])**.** *A Una foliación genérica de la clase $\mathcal{A}_n$ es absolutamente rígida.*

En la demostración de la proposición anterior la cercanía entre la equivalencia topológica y el homeomorfismo identidad es necesaria para garantizar que los grupos de monodromía al infinito son fuertemente analíticamente equivalentes. En el caso de campos vectoriales cuadráticos, en presencia del Teorema 1, tal hipótesis se puede descartar y así deducir el Teorema 2.

1.4. Hipótesis de genericidad

De ahora en adelante consideraremos solo foliaciones $\mathcal{F}$ de la clase $\mathcal{A}_2$ tales que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\mathcal{F}$ mantiene la recta al infinito $\mathbb{I}$ invariante;
(ii) La foliación $\mathcal{F}$ sólo tiene singularidades hiperbólicas;
(iii) El grupo de monodromía al infinito $G_{\mathcal{F}}$ es no soluble.

Las primeras dos condiciones definen abiertos de Zariski (complejo y real, respectivamente) en el espacio $\mathcal{A}_2$. La genericidad de la condición (*iii*) es discutida en [10].

Capítulo 2

Automorfismos inducidos en grupo fundamental y primer grupo de homología

A continuación consideraremos foliaciones en $\mathcal{A}_2'$ cuyas ternas de puntos singulares al infinito son *cercanas*, más no necesariamente iguales.

Sea $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_2'$ una foliación genérica y sea $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3\}$ el conjunto de puntos singulares al infinito de $\mathcal{F}$. Tomemos D_1, D_2, D_3 discos abiertos en $\mathbb{I}$ centrados en a_1, a_2, a_3 respectivamente de modo que sus cerraduras sean disjuntas y sea $D = \cup D_i$. Tomemos ahora $b \in \mathbb{I} \setminus \overline{D}$ un punto arbitrario.

Sea $\widetilde{U} \subseteq \mathcal{A}_2$ el conjunto de todas las foliaciones en $\mathcal{A}_2'$ con la propiedad de que toda $\widetilde{\mathcal{F}} \in \widetilde{U}$ tiene sus puntos singulares al infinito en D y cada D_i contiene exactamente un punto singular. De este modo $\widetilde{U}$ es una vecindad abierta de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{A}_2$.

Definición 5. *Sea $\mathcal{T}_{\mathcal{OP}}(\mathcal{F}, b)$ el conjunto de todas las parejas $(\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{H})$ en $\widetilde{U} \times$ Homeo$(\mathbb{C}P^2)$ tales que $\mathcal{H}$ es una equivalencia topológica entre $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$ que fija el punto b.*

Tomemos $(\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{H}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{OP}}(\mathcal{F}, b)$. Sabemos que $\mathcal{F}$, y por lo tanto también $\widetilde{\mathcal{F}}$, tiene una única hoja algebraica; la recta al infinito menos los puntos singulares. Esto implica que el homeomorfismo $\mathcal{H} \colon \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ necesariamente preserva la recta al infinito $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{C}P^2$ y transforma biyectivamente el conjunto de puntos singulares al infinito $\Sigma = \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap \mathbb{I}$ en $\widetilde{\Sigma} = \mathrm{Sing}(\widetilde{\mathcal{F}}) \cap \mathbb{I}$.

De ahora en adelante si $\mathcal{H}$ es un homeomorfismo de $\mathbb{C}P^2$ en sí mismo que preserva la recta al infinito $\mathbb{I}$, denotaremos por H a su restricción $H = \mathcal{H}|_{\mathbb{I}}$.

Si $\Sigma \neq \widetilde{\Sigma}$ los grupos fundamentales $\pi_1(\mathbb{I} \setminus \Sigma, b)$ y $\pi_1(\mathbb{I} \setminus \widetilde{\Sigma}, b)$ no coinciden. Sin embargo, las superficies $\mathbb{I} \setminus \Sigma$ y $\mathbb{I} \setminus \widetilde{\Sigma}$ se retraen por deformación fuerte a $\mathbb{I} \setminus D$. De modo que los grupos fundamentales antes mencionados son naturalmente isomorfos al grupo $\pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b)$.

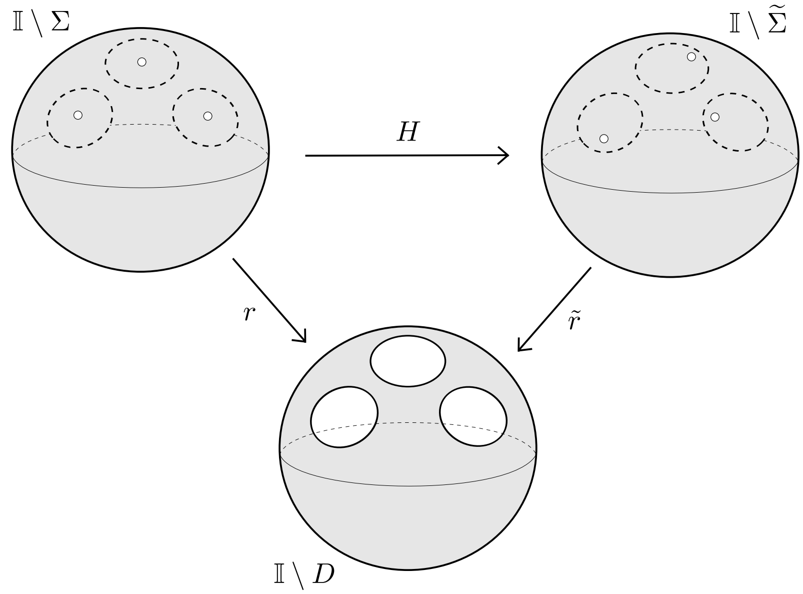

Figura 1

De hecho, para cualquier curva cerrada γ en $\mathbb{I} \setminus \Sigma$ y basada en b podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que se queda completamente contenida en $\mathbb{I} \setminus D$. De este modo podemos pensar que γ representa un elemento de $\pi_1(\mathbb{I} \setminus \Sigma, b)$ o de $\pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b)$ indistintamente. Con esto en mente, el concepto de equivalencia analítica fuerte para grupos de monodromía al infinito puede ser fácilmente adaptado a pares de foliaciones cuyos puntos singulares al infinito son *suficientemente cercanos*. En particular esto se puede hacer si la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$ pertenece a la vecindad $\widetilde{U}$ de $\mathcal{F}$ construida previamente.

Definición 3'. *Sea $\widetilde{\mathcal{F}} \in \widetilde{U}$. Decimos que los grupos de monodromía al infinito $G_{\mathcal{F}}$ y $G_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ son fuertemente analíticamente equivalentes si existe el germen de una transformación conforme $h \colon (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ tal que*

$$h \circ \Delta_\gamma = \widetilde{\Delta}_\gamma \circ h$$

para cualquier elemento γ del grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b)$.

A continuación vamos a definir *la acción que tiene H en los grupos fundamentales* asignando a cada pareja $(\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{H}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{OP}}(\mathcal{F}, b)$ un elemento del grupo de automorfismos de $\pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b)$ de la siguiente forma:
Consideremos las retracciones antes mencionadas $r \colon \mathbb{I} \setminus \Sigma \to \mathbb{I} \setminus D$ y $\tilde{r} \colon \mathbb{I} \setminus \widetilde{\Sigma} \to \mathbb{I} \setminus D$. Al ser equivalencias homotópicas inducen isomorfismos $r_* \colon \pi_1(\mathbb{I} \setminus \Sigma, b) \to \pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b)$ y $\tilde{r}_* \colon \pi_1(\mathbb{I} \setminus \widetilde{\Sigma}, b) \to \pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b)$ en los respectivos grupos fundamen-

tales basados en b. Análogamente el homeomorfismo $H|_{\mathbb{I}\setminus\Sigma}$ induce un isomorfismo $H_*\colon \pi_1(\mathbb{I}\setminus\Sigma, b) \to \pi_1(\mathbb{I}\setminus\widetilde{\Sigma}, b)$. Existe un único automorfismo de grupos $\Phi(H)\colon \pi_1(\mathbb{I}\setminus D, b) \to \pi_1(\mathbb{I}\setminus D, b)$ que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{I}\setminus\Sigma, b) \arrow[r, "H_*"] \arrow[d, "r_*"'] & \pi_1(\mathbb{I}\setminus\widetilde{\Sigma}, b) \arrow[d, "\tilde{r}_*"] \\
\pi_1(\mathbb{I}\setminus D, b) \arrow[r, "\Phi(H)"'] & \pi_1(\mathbb{I}\setminus D, b)
\end{tikzcd}$$

De este modo obtenemos una aplicación bien definida

$$\Phi\colon \mathcal{T}_{\mathcal{OP}}(\mathcal{F}, b) \to \mathrm{Aut}(\pi_1(\mathbb{I}\setminus D, b)),$$

donde $\mathrm{Aut}(\pi_1(\mathbb{I}\setminus D, b))$ es el grupo de automorfismos del grupo $\pi_1(\mathbb{I}\setminus D, b)$. Por simplicidad escribiremos $\Phi(H)$ en vez de $\Phi(\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{H})$.

2.1. Automorfismos interiores del grupo fundamental

Sea $(\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{H}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{OP}}(\mathcal{F}, b)$ y supongamos que $\Phi(H) = id$. Para cualquier transversal Γ basada en b y transversal a las hojas de $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$ existe (Proposición 1) el germen de una transformación analítica

$$h\colon (\Gamma, b) \to (\Gamma, b)$$

inducido por $\mathcal{H}$ que conjuga los grupos de monodromía al infinito de la siguiente forma:

$$h \circ \Delta_{\gamma_i} = \widetilde{\Delta}_{\rho_i} \circ h, \quad i = 1, 2$$

donde ρ_i se define como la composición $\rho_i = H \circ \gamma_i$ y γ_1, γ_2 son generadores canónicos de $\pi_1(\mathbb{I}\setminus D, b)$. Sin embargo, la condición $\Phi(H) = id$ implica que las curvas ρ_i son homotópicas a las correspondientes γ_i y por lo tanto los grupos de monodromía al infinito son fuertemente analíticamente equivalentes.

El siguiente lema prueba que se puede deducir la equivalencia analítica fuerte de los grupos de monodromía aún en el caso en el que la acción en grupo fundamental no es la identidad; siempre y cuando la acción inducida sea un automorfismo interior.

Lema 1. *Si $(\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{H}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{OP}}(\mathcal{F}, b)$ y $\Phi(H)$ es un automorfismo interior de $\pi_1(\mathbb{I}\setminus D, b)$ entonces los grupos de monodromía $G_{\mathcal{F}}$ y $G_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ son fuertemente analíticamente equivalentes.*

Demostración. Sea $(\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{H}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{OP}}(\mathcal{F}, b)$ y supongamos que $\Phi(H)$ es un automorfismo interior; es decir, existe un elemento $\lambda \in \pi_1(\mathbb{I}\setminus D, b)$ tal que para todo $\gamma \in \pi_1(\mathbb{I}\setminus D, b)$

$$\Phi(H)(\gamma) = \lambda \cdot \gamma \cdot \lambda^{-1}.$$

Para cualquier $\gamma \in \pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b)$ la curva $H \circ \gamma$ es homotópica a $\Phi(H)(\gamma)$ y por lo tanto existe el germen de una transformación analítica $h\colon (\Gamma, b) \to (\Gamma, b)$ tal que

$$h \circ \Delta_\gamma = \widetilde{\Delta}_{\lambda\cdot\gamma\cdot\lambda^{-1}} \circ h.$$

Esto implica que

$$h \circ \Delta_\gamma = \widetilde{\Delta}_{\lambda^{-1}} \circ \widetilde{\Delta}_\gamma \circ \widetilde{\Delta}_\lambda \circ h,$$

y por lo tanto

$$h_0 \circ \Delta_\gamma = \widetilde{\Delta}_\gamma \circ h_0,$$

donde h_0 se define como $h_0 = \widetilde{\Delta}_\lambda \circ h$. □

2.2. Acción inducida en el primer grupo de homología

De la misma forma como hicimos para definir $\Phi(H)$ podemos, pasando a los primeros grupos de homología singular, definir una aplicación

$$\begin{aligned} \eta \,:\, \mathcal{T}_{\mathcal{OP}}(\mathcal{F}, b) &\longrightarrow \operatorname{Aut}(H_1(\mathbb{I} \setminus D; \mathbb{Z})) \\ (\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{H}) &\longmapsto \eta(H) \end{aligned}$$

donde $\eta(H)$ es el único automorfismo de grupos abelianos que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} H_1(\mathbb{I} \setminus \Sigma; \mathbb{Z}) \arrow[r, "H_*"] \arrow[d, "r_*"'] & H_1(\mathbb{I} \setminus \widetilde{\Sigma}; \mathbb{Z}) \arrow[d, "\tilde{r}_*"] \\ H_1(\mathbb{I} \setminus D; \mathbb{Z}) \arrow[r, "\eta(H)"'] & H_1(\mathbb{I} \setminus D; \mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

Lema 2. *Sea* $(\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{H}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{OP}}(\mathcal{F}, b)$ *y supongamos que* $H(a_i) \in D_i$ *para cada* $i = 1, 2, 3$. *Entonces* $\eta(H) = id$.

Demostración. Podemos elegir 1-ciclos[1] $\sigma_1, \sigma_2\colon \Delta^1 \to \mathbb{I}\setminus\Sigma$ generadores canónicos de $H_1(\mathbb{I} \setminus \Sigma; \mathbb{Z})$ de modo que $\sigma_i(\Delta^1) \subseteq D_i$ y $H(\sigma_i(\Delta^1)) \subseteq D_i$.

Sea $\beta_i = r \circ \sigma_i$. Así β_1 y β_2 son generadores canónicos del grupo $H_1(\mathbb{I} \setminus D; \mathbb{Z})$ que satisfacen $\beta_i(\Delta^1) \subseteq \partial D_i$.

[1] Δ^1 es el 1-simplejo estándar $\Delta^1 = \{(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2 \mid t_0 + t_1 = 1 \text{ y } t_1, t_2 \geq 0\}$.

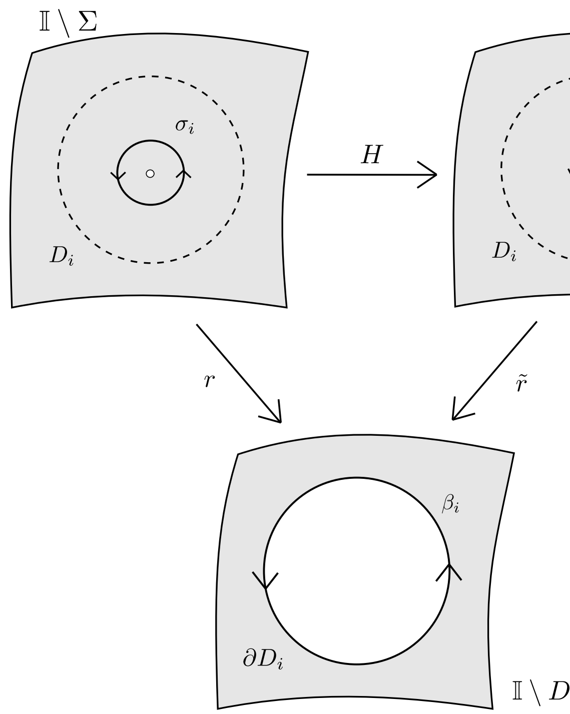

Figura 2

Como $H(\sigma_i(\Delta^1)) \subseteq D_i$ entonces $\tilde{r} \circ H \circ \sigma_i(\Delta^1) \subseteq \partial D_i$. De este modo concluimos que $(\tilde{r} \circ H)_* \sigma_i$ es homólogo a algún múltiplo entero de β_i. Esto implica que el automorfismo $\eta(H)$ se puede escribir de la forma

$$\eta(H)(\beta_1) = m\beta_1, \quad \eta(H)(\beta_2) = n\beta_2.$$

para algunos enteros m, n.

Por otro lado, la composición $\tilde{r} \circ H \colon \mathbb{I} \setminus \Sigma \to \mathbb{I} \setminus D$ es una equivalencia homotópica y por lo tanto debe inducir un isomorfismo en el grupo de homología. Así $m\beta_1$ y $n\beta_2$ generan al grupo $H_1(\mathbb{I} \setminus D; \mathbb{Z})$. Esto sólo es posible si $m, n = \pm 1$, es decir, $(\tilde{r} \circ H)_* \sigma_i \simeq \pm \beta_i$, $i = 1, 2$. Pero tanto $\tilde{r}$ como H preservan la orientación y por lo tanto $(\tilde{r} \circ H)_* \sigma_i \simeq \beta_i$. Concluimos entonces que $\eta(H)$ es la identidad. $\square$

Capítulo 3

Demostración de los resultados principales

3.1. Demostración del Teorema 1

Demostración del Teorema 1. Supongamos que $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$ son foliaciones genéricas de la clase $\mathcal{A}_2$ topológicamente conjugadas por el homeomorfismo $\mathcal{H}$. Supongamos además que las dos foliaciones tienen los mismos puntos singulares al infinito y que la equivalencia topológica fija estos puntos singulares. Sin pérdida de generalidad podemos suponer también que el homeomorfismo $\mathcal{H}$ fija al punto base b. De este modo $(\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{H}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{OP}}(\mathcal{F}, b)$ y claramente se cumple que $H(a_i) \in D_i$ para cada $i = 1, 2, 3$. Por el Lema 2 la acción en el primer grupo de homología $\eta(H)$ es el automorfismo identidad.

Por el Teorema de Hurewicz $H_1(\mathbb{I} \setminus D; \mathbb{Z})$ es naturalmente isomorfo a la abelianización de $\pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b)$. Sea $q\colon \pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b) \to H_1(\mathbb{I} \setminus D; \mathbb{Z})$ la proyección canónica. Todo automorfismo f de $\pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b)$ desciende a un automorfismo de $H_1(\mathbb{I} \setminus D; \mathbb{Z})$ por medio de la proyección q. Esta correspondencia da lugar a un homomorfismo suprayectivo y natural $T\colon \mathrm{Aut}(\pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b)) \to \mathrm{Aut}(H_1(\mathbb{I} \setminus D; \mathbb{Z}))$ con la propiedad de que $\forall f \in \mathrm{Aut}(\pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b))$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & \pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b) \arrow[d, "q"] \\
H_1(\mathbb{I} \setminus D; \mathbb{Z}) \arrow[r, "T(f)"'] & H_1(\mathbb{I} \setminus D; \mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Además el kernel de dicho homomorfismo esta conformado exactamente por los automorfismos interiores[1] de $\pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b)$ [6]; es decir $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Inn}(\pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b))$.

[1] Esta afirmación no sería cierta si $\pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b)$ fuera libre en más de dos generadores. Este

El homeomorfismo H satisface que $q \circ \Phi(H) = \eta(H) \circ q$; es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b) \arrow[r, "\Phi(H)"] \arrow[d, "q"'] & \pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b) \arrow[d, "q"] \\ H_1(\mathbb{I} \setminus D; \mathbb{Z}) \arrow[r, "\eta(H)"'] & H_1(\mathbb{I} \setminus D; \mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

es conmutativo y por lo tanto $\eta(H) = T(\Phi(H))$. Sabemos que $\eta(H) = id$ de modo que $\Phi(H) \in \mathrm{Ker}(T)$; es decir, $\Phi(H)$ es un automorfismo interior de $\pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b)$. Por el Lema 1 los grupos de monodromía al infinito $G_{\mathcal{F}}$ y $G_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ son fuertemente analíticamente equivalentes. $\square$

3.1.1. Existencia de equivalencias topológicas con acción trivial en grupo fundamental

El Teorema 1 ha sido demostrado exhibiendo explícitamente el germen de una transformación conforme $h_0 \colon (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ que conjuga fuertemente los grupos de monodromía. A continuación se demuestra que de hecho este germen se puede realizar como la componente transversa de una equivalencia topológica entre $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Lema 3. *Sea $(\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{H}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{OP}}(\mathcal{F}, b)$ y sea Γ una transversal a las hojas de $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$ basada en el punto b. Si $H(a_i) \in D_i$ para cada $i = 1, 2, 3$ entonces existe otra equivalencia topológica $\mathcal{H}_0 \colon \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ entre $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$ tal que su componente transversa en b*

$$h_0 = \mathcal{H}_{0}{}_b^{\pitchfork} \colon (\Gamma, b) \longrightarrow (\Gamma, b)$$

es una equivalencia analítica fuerte entre los grupos de monodromía $G_{\mathcal{F}}$ y $G_{\widetilde{\mathcal{F}}}$;

$$h_0 \circ \Delta_\gamma = \widetilde{\Delta}_\gamma \circ h_0$$

para todo $\gamma \in \pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b)$.

Demostración. La equivalencia topológica $\mathcal{H}$ satisface $H(a_i) \in D_i$. Por el Lema 2 sabemos que la acción en el primer grupo de homología $\eta(H)$ es trivial y por lo tanto $\Phi(H)$ es un automorfismo interior de $\pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b)$. Por los mismos argumentos usados en la Sección 2.1 existe el germen de una transformación conforme

$$h \colon (\Gamma, b) \to (\Gamma, b)$$

inducido por $\mathcal{H}$ (es decir, su componente transversa en b) y un elemento $\lambda \in \pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b)$ de modo que los grupos de monodromía $G_{\mathcal{F}}$ y $G_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ son conjugados de la siguiente forma

$$h \circ \Delta_\gamma = \widetilde{\Delta}_{\lambda^{-1}} \circ \widetilde{\Delta}_\gamma \circ \widetilde{\Delta}_\lambda \circ h,$$

hecho es precisamente la obstrucción para demostrar un resultado análogo para foliaciones polinomiales de grado $n > 2$.

por lo tanto
$$(\widetilde{\Delta}_\lambda \circ h) \circ \Delta_\gamma = \widetilde{\Delta}_\gamma \circ (\widetilde{\Delta}_\lambda \circ h).$$

Supongamos que podemos encontrar un homeomorfismo $\widetilde{\mathcal{H}} \colon \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ que conjugue la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$ consigo misma, preserve la transversal Γ y tal que su componente transversa en b

$$\widetilde{\mathcal{H}}_b^{\pitchfork} \colon (\Gamma, b) \to (\Gamma, b)$$

coincida con el germen $\widetilde{\Delta}_\lambda$. En tal caso la composición $\mathcal{H}_0 = \widetilde{\mathcal{H}} \circ \mathcal{H}$ sería una equivalencia topológica entre $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$ cuya componente transversa en b

$$h_0 = \widetilde{\mathcal{H}}_b^{\pitchfork} \circ h = \widetilde{\Delta}_\lambda \circ h$$

conjuga fuertemente los grupos $G_{\mathcal{F}}$ y $G_{\widetilde{\mathcal{F}}}$.

Tal homeomorfismo $\widetilde{\mathcal{H}}$ puede ser fácilmente construido de la siguiente forma: Consideremos la transformación de monodromía $\widetilde{\Delta}_\lambda$ correspondiente a la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$. Las transformaciones de holonomía a lo largo de una curva cerrada se construyen componiendo una cantidad finita de transformaciones de correspondencia
$$\Delta_j \colon (\tau_j, p_j) \to (\tau_{j+1}, p_{j+1})$$
donde τ_j, τ_{j+1} son transversales a las hojas de la foliación basadas en puntos p_j, p_{j+1} y tales que pertenecen a una misma caja de flujo. Podemos suponer que, en las coordenadas apropiadas, dichas transformaciones de correspondencia están dadas por la transformación a tiempo uno del flujo asociado a un campo vectorial constante. Si la caja de flujo es suficientemente pequeña dicho campo vectorial se puede extender suavemente (C^∞ real) a un campo vectorial definido en todo $\mathbb{C}P^2$ tangente a las hojas de $\widetilde{\mathcal{F}}$ de modo que se anula fuera de una vecindad compacta de la caja de flujo. La transformación a tiempo uno del flujo asociado al nuevo campo será un homeomorfismo $\mathcal{H}_j \colon \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ que preserva la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$, transforma la transversal (τ_j, p_j) en (τ_{j+1}, p_{j+1}) y su restricción

$$\mathcal{H}_j|_{(\tau_j, p_j)} \colon (\tau_j, p_j) \to (\tau_{j+1}, p_{j+1})$$

coincide con la transformación de correspondencia preestablecida Δ_j.

La composición de todos los homeomorfismos $\mathcal{H}_j$ será un homeomorfismo $\widetilde{\mathcal{H}} \colon \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ que conjuga la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$ consigo misma y cuya componente transversa en b, por construcción, coincide con la transformación de monodromía $\widetilde{\Delta}_\lambda$.

Esto concluye la demostración del lema. $\square$

Observación 1. El homeomorfismo construido $\widetilde{\mathcal{H}}$ es isotópico a la transformación identidad de $\mathbb{C}P^2$. Igualmente su restricción a la hoja al infinito $\mathcal{L}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ es un homeomorfismo isotópico a la identidad; la isotopía se obtiene *deslizando* el punto base b a lo largo de la curva λ. Para cualquier curva $\gamma \in \pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b)$ la composición $\widetilde{H} \circ \gamma$ resulta ser una curva homotópica a $\lambda^{-1} \cdot \gamma \cdot \lambda$.

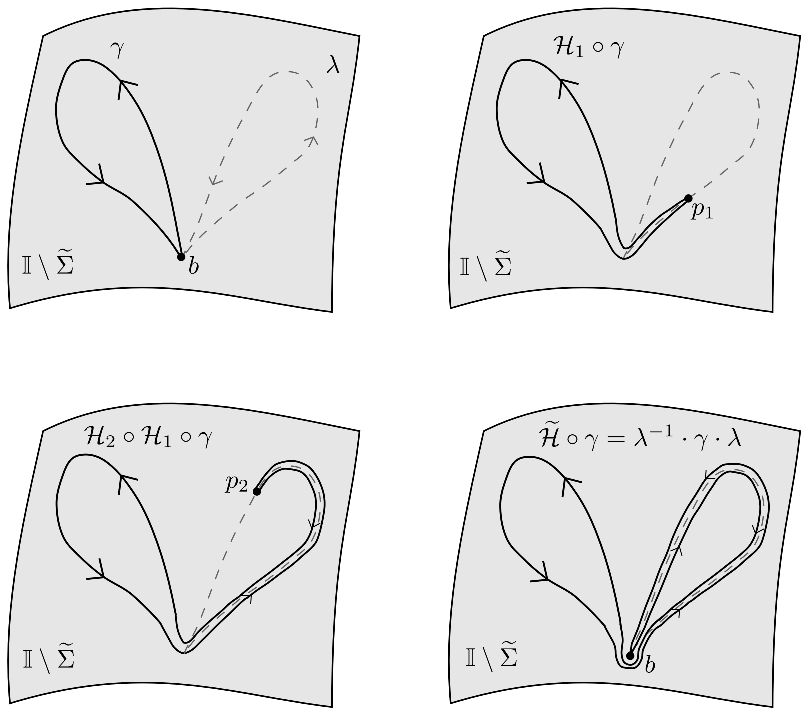

Figura 3

Esta acción es exactamente la inversa a la inducida por la equivalencia topológica original entre $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$. Por lo tanto la composición $\mathcal{H}_0 = \widetilde{\mathcal{H}} \circ \mathcal{H}$ tiene una acción trivial en el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{I} \setminus D, b)$. Es decir, $(\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{H}_0) \in \mathcal{T}_{\mathcal{OP}}(\mathcal{F}, b)$ y $\Phi(H_0) = id$.

3.2. Invarianza topológica de los números característicos de los puntos singulares al infinito

En esta sección vamos a definir la vecindad U de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{A}_2$ a la que hace referencia el Teorema 2. Su propiedad fundamental es que si $(\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{H}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{OP}}(\mathcal{F}, b)$ y $\widetilde{\mathcal{F}} \in U$ entonces el homeomorfismo H cumple que $H(a_i) \in D_i$ para $i = 1, 2, 3$. Cuando esto suceda diremos que el homeomorfismo H preserva la numeración de los puntos singulares al infinito.

Lema 4. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación genérica de $\mathcal{A}_2'$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ los números característicos asociados a los puntos singulares a_1, a_2, a_3 de la foliación $\mathcal{F}$ respectivamente. Entonces se cumple que $\lambda_j \neq \lambda_k$ si $j \neq k$.*

Demostración. Supongamos $j \neq k$. Sean γ_j, γ_k lazos al rededor de a_j, a_k respectivamente basados en b. Entonces γ_j y γ_k generan al grupo fundamental

$\pi_1(\mathbb{I} \setminus \Sigma, b)$. Si f_j, f_k son las transformaciones de monodromía de la foliación $\mathcal{F}$ correspondientes a γ_j y γ_k se tiene que

$$f_j'(0) = e^{2\pi i \lambda_j}, \quad f_k'(0) = e^{2\pi i \lambda_k}.$$

Por otro lado, el grupo de monodromía al infinito $G_{\mathcal{F}}$ es generado por f_j y f_k. Las hipótesis de genericidad impuestas sobre $\mathcal{F}$ implican que el subgrupo multiplicativo de $\mathbb{C}^*$ generado por $f_j'(0)$ y $f_k'(0)$ es denso en $\mathbb{C}$ [11]. Esto sólo es posible si $f_j'(0) \neq f_k'(0)$. En particular $\lambda_j \neq \lambda_k$. □

Si $\widetilde{\mathcal{F}} \in \widetilde{U}$ denotaremos por $a_i(\widetilde{\mathcal{F}})$ a la única singularidad que $\widetilde{\mathcal{F}}$ tiene en el disco D_i. Denotaremos también por $\lambda(a_i(\widetilde{\mathcal{F}}))$ al número característico de $a_i(\widetilde{\mathcal{F}})$ correspondiente a la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$. Seguiremos escribiendo $a_i = a_i(\mathcal{F})$ y $\lambda_i = \lambda(a_i(\mathcal{F}))$.

Sea $M \colon \widetilde{U} \to \mathbb{C}^3$ la aplicación $M(\widetilde{\mathcal{F}}) = (\lambda(a_1(\widetilde{\mathcal{F}})), \lambda(a_2(\widetilde{\mathcal{F}})), \lambda(a_3(\widetilde{\mathcal{F}})))$. Por el lema anterior existe $\epsilon > 0$ tal que si $j \neq k$ entonces $|\lambda_j - \lambda_k| \geq 2\epsilon$. Sea V_i el disco $V_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |\lambda_i - z| < \epsilon\}$ y $U = M^{-1}(V_1 \times V_2 \times V_3)$. Como la aplicación M es continua (de hecho es algebraica [4]) U es una vecindad abierta de $\mathcal{F}$ contenida en $\widetilde{U}$.

Lema 5. *Si $\mathcal{F}$ es una foliación genérica entonces para toda foliación $\widetilde{\mathcal{F}} \in U$ topológicamente equivalente a $\mathcal{F}$ mediante un homeomorfismo $\mathcal{H} \colon \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ se cumple que H preserva la numeración de los puntos singulares al infinito; es decir, para cada $i = 1, 2, 3$ se tiene que $H(a_i) \in D_i$.*

Demostración. Sea $\widetilde{\mathcal{F}} \in U$ y supongamos que el homeomorfismo $\mathcal{H} \colon \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ conjuga topológicamente a $\mathcal{F}$ con $\widetilde{\mathcal{F}}$. Las condiciones de genericidad impuestas sobre $\mathcal{F}$ implican que los números característicos de los puntos singulares al infinito son invariantes topológicos en el siguiente sentido [4]: si $\mathcal{H}$ conjuga topológicamente a $\mathcal{F}$ con $\widetilde{\mathcal{F}}$ entonces se cumple que $\lambda(H(a_i)) = \lambda_i$. Por otro lado del hecho que $\widetilde{\mathcal{F}} \in U$ y de la definición de U se sigue que

$$|\lambda(a_j(\widetilde{\mathcal{F}})) - \lambda_k| < \epsilon \ \text{ si } j = k$$

$$|\lambda(a_j(\widetilde{\mathcal{F}})) - \lambda_k| \geq \epsilon \ \text{ si } j \neq k,$$

lo cual implica que necesariamente $H(a_i) = a_i(\mathcal{F})$; es decir H preserva la numeración de los puntos singulares al infinito. □

3.3. Rigidez ideal de foliaciones genéricas de la clase $\mathcal{A}_2$

Para concluir que una foliación genérica de $\mathcal{A}_2$ es idealmente rígida vamos a utilizar una versión modificada de la Proposición 2 que aparece en [5].

Definición 6. *Sea* $S = \{a_1, ..., a_{n+1}\} \subseteq \mathbb{I}$ *un conjunto de* $n+1$ *puntos distintos;* $D_1, ..., D_{n+1}$ *una colección de* $n+1$ *discos abiertos en* $\mathbb{I}$ *con cerraduras disjuntas y que cubran al conjunto* S*; sea* $D = \cup D_i$ *y* $b \in \mathbb{I} \setminus \overline{D}$*.*

Un homeomorfismo $H\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ *es llamado homotópicamente trivial sobre* $\mathbb{I} \setminus D$ *si* $H(b) = b$*, para cada* $i = 1, ..., n+1$ $H(a_i) \in D_i$ *y las imágenes* $H(\alpha_i)$ *de los segmentos* $\alpha_i = [b, a_i]$ *que conectan el punto base* b *con cada* a_i *son curvas homotópicas a los respectivos segmentos* α_i *por medio de una homotopía que fija al punto* b *y que cumple que los extremos* $a_{i,t}$ *se mantienen en los correspondientes discos* D_i *para todo* $t \in [0, 1]$*.*

Diremos que un homeomorfismo es homotópicamente trivial sin especificar el sistema de discos si es homotópicamente trivial respecto a *algún* sistema de discos.

Definición 7. *Una foliación* $\mathcal{F} \in \mathcal{A}'_n$ *es razonablemente rígida, si tiene una vecindad* U *en* $\mathcal{A}_n$ *tal que cualquier foliación* $\mathcal{F}' \in U$ *topológicamente equivalente a* $\mathcal{F}$ *es afín equivalente a* $\mathcal{F}$ *siempre y cuando la equivalencia topológica induzca un homeomorfismo homotópicamente trivial de la recta al infinito* $\mathbb{I}$ *en sí misma.*

Proposición 3 ([5])**.** *Una foliación genérica de la clase* $\mathcal{A}_n$ *es razonablemente rígida.*

A continuación demostramos el Teorema 2.

Demostración del Teorema 2. Sea $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_2$ una foliación genérica. Sea U la vecindad de $\mathcal{F}$ construida en la Sección 3.2. Como la foliación $\mathcal{F}$ es razonablemente rígida dicha foliación tiene una vecindad U' en $\mathcal{A}_2$ tal que cualquier foliación $\mathcal{F}' \in U'$ topológicamente equivalente a $\mathcal{F}$ es afín equivalente a $\mathcal{F}$ siempre y cuando la equivalencia topológica induzca un homeomorfismo homotópicamente trivial de la recta al infinito $\mathbb{I}$ en sí misma.

Supongamos que $\widetilde{\mathcal{F}} \in U \cap U'$ es topológicamente equivalente a $\mathcal{F}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la equivalencia topológica fija al punto base b. Como $\widetilde{\mathcal{F}} \in U$ se cumple que la equivalencia topológica $\mathcal{H}$ preserva la numeración de los puntos singulares al infinito y, de acuerdo al Lema 3 y la Observación 1, podemos también suponer que la equivalencia satisface que $\Phi(H) = id$. Esta condición es equivalente a que H sea un homeomorfismo homotópicamente trivial. Como $\widetilde{\mathcal{F}} \in U'$ concluimos que las foliaciones son afín equivalentes. $\square$

Bibliografía

[1] X. Gómez-Mont and L. Ortiz. *Sistemas Dinámicos Holomorfos en Superficies.* Aportaciones Matemáticas, Notas de Investigación (Sociedad Matemática Mexicana), 2nd edition, 2004.

[2] Yu. Ilyashenko. Centennial history of hilbert's 16th problem. *Bull. of the American Math. Soc. 39 (2002), no.3, p.301-354.*

[3] Yu. Ilyashenko. The topology of phase portraits of analytic differential equations in the complex projective plane. *Trudy. Sem. Im. I.G.Petrovsk. (1978), vol.4, p.83-136, English transl. Selecta Math. Sov. (1986), vol.5, p.141-199.*

[4] Yu. Ilyashenko and V. Moldavskis. Total rigidity of generic quadratic vector fields. *Moscow Mathematical Journal (2011), vol.11, no.3, p.521-530.*

[5] Yu. Ilyashenko and S. Yakovenko. *Lectures on Analytic Differential Equations.* American Mathematical Society, GSM, 2007.

[6] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar. *Combinatorial Group Theory: Presentation of Groups in Terms of Generators and Relations.* Dover Publications, Inc., 2nd edition, 1976.

[7] I. Nakai. Separatrices for nonsolvable dynamics on $(\mathbb{C}, 0)$. *Ann. Inst. Fourier 44 (1994), no.2, p.569-599.*

[8] A. Lins Neto, P. Sad, and B. Scárdua. On topological rigidity of projective foliations. *Bull. Soc. Math. France 126 (1998), no.3, p.381-406.*

[9] I. Petrovskii and E. Landis. On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = p(x, y)/q(x, y)$, where p and q are polynomials (russian). *Mat. Sb. N.S. 85 (1957), p.149-168.*

[10] A. Shcherbakov. The dynamics of local groups of conformal mappings and the generic properties of differential equations on $\mathbb{C}^2$. *Tr. Mat. Inst. Steklova 254 (2006), Nelinein. Anal. Differ. Uravan., p.111-129, English transl. Proc. Steklov Inst. Math. 3(254) (2006), p.103-120.*

[11] A. Shcherbakov. Topological and analytic conjugation of noncommutative groups of germs of conformal mappings. *Trudy Sem. Petrovsk. (1984), no.10, p.170-196, English transl. J. Soviet Math. 35 (1986), p.2827-2850.*

[12] A. Shcherbakov, E. Rosales, and L. Ortiz. Countable set of limit cycles for the equation $dw/dz = p_n(x,y)/q_n(x,y)$. *Dynam. Control Systems 4 (1998), no.4, p.539-581.*

[13] L. Teyssier. An example of a topologically non-rigid foliation of the complex projective plane. *Int. Math. Res. Notices (2011) Vol.2011 Issue 18, p.4089-4104.*