UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Q-ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

RICARDO CASTAÑEDA HERNÁNDEZ

M. EN C. GUILLERMO GOMEZ ALVAREZ

2011

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Hoja de Datos del Jurado

1.Datos del alumno	1. Datos del alumno
Apellido paterno	Castañeda
Apellido materno	Hernández
Nombre(s)	Ricardo
Teléfono	57 55 11 24
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	406040174
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	M. en C.
Nombre(s)	Guillermo
Apellido paterno	Gómez
Apellido materno	Alcaraz
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	Dr.
Nombre(s)	José Lino
Apellido paterno	Samaniego
Apellido materno	Mendoza
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado	M. en C.
Nombre(s)	Miguel
Apellido paterno	Lara
Apellido materno	Aparicio
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado	Mat
Nombre(s)	Luis Manuel
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Gallardo
6. Datos del sinodal 4	6. Datos del sinodal 4
Grado	Dr.
Nombre(s)	Pedro Eduardo
Apellido paterno	Miramontes
Apellido materno	Vidal
7.Datos del trabajo escrito.	7. Datos del trabajo escrito
Título	q-Cálculo y sus Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Subtitulo	
Número de páginas	155 p
Año	2011

Q-CÁLCULO Y SUS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Castañeda Hernández Ricardo

Indice

Chapter 1

Introducción

El Cálculo ha sido la base de muchas y variadas teorías, dentro y aún fuera, en otras áreas de las Matemáticas. Una en especifico en la cual ha sido la base y piedra angular de su formación son las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) y Parciales (EDP), en particular en estas dos, su desarrollo y ambiente de trabajo se ha centrado en términos surgidos y manejados por el Cálculo. Es por ello que aunque el Cálculo juegue el papel de herramienta para las Ecuaciones Diferenciales dentro de los métodos aplicados en la resolución de problemas, esto se debe prácticamente a las raíces de las cuales provienen las ecuaciones con las que se trabajan y en donde nos involucraremos como parte del trabajo siguiente.

Indudablemente, hay ramas de las Matemáticas entre las cuales podemos mencionar: Álgebra Lineal, Geometría Analítica y Diferencial, Análisis Matemático, Variable Compleja en una estrecha relación con las EDO y EDP por su relación con los conceptos fundamentales del Cálculo. En las próximas paginas se harán nuevas formulaciones de dos de estos conceptos: la derivación y la diferenciación, conceptos centrales y fundamentales de su teoría.

La busqueda, con la reformulación de tales conceptos va en la dirección de investigar cómo quedan algunos de los principales resultados del Cálculo, pero tambien determinar cuales resultados no se cumplen, para tener claro que tanto se pierde de la potencialidad del Cálculo usual.

En el Cálculo Diferencial e Integral el proceso de límite es crucial en la construcción de los conceptos de derivada e integral de una función, fundamentales en el estudio e interpretación matemática de muchos fenomenos.

El proceso de límite lo omitiremos de nuestro concepto de derivación y a partir de ahí reformularemos la terminología necesaria para crear toda una serie de términos análogos a los empleados tanto en el Cálculo Diferencial e Integral, como en lo que nos centraremos posteriormente, que serán las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Algunas de las preguntas que surgen de inmediato y que trataremos de contestar, son las siguientes:

- - ¿Cómo cambia el Cálculo en aquellos puntos donde la derivada interviene?

  - ¿A qué otros aspectos o teorías nos enfrentaríamos en donde el Cálculo, y más en especifico la derivada, tiene intervención?

- ¿Seriamos capaces y sería factible el asociar a través de "puentes" los resultados del Cálculo tradicional con el nuevo Cálculo que llamaremos q-Cálculo?
- ¿Podría este q-Cálculo brindar directa o indirectamente aplicaciones en campos donde ya lo hacia con las estructuras anteriores?

Y bien, en la primera parte nos enfocaremos en el q-Cálculo Diferencial y abordaremos temas de él que consideramos son importantes para su manejo y posterior utilización, para ello estudiamos las propiedades de la q-derivación y el significado geométrico de la definición. La construcción de funciones que representan un análogo a las trabajadas en el Cálculo tradicional y aunque algunas de ellas, por ejemplo las trigonométricas no surgen de la derivación, las podremos crear a través de ella usando definiciones alternativas surgidas de la exponencial. Veremos que varias funciones que se introducirán tienen como relación con las ya manejadas, las propiedades que se observan al derivarlas. Por ejemplo la exponencial es la función que al derivarla se obtiene ella misma, así es como crearemos analogías y nuevas funciones con propiedades en algunos casos similares y en otras no validas. De igual forma en esta parte también trataremos el tema de la representación de funciones en términos de series finitas e infinitas con las funciones creadas, y servirá para sustentar algunos métodos que usaremos en las Ecuaciones Diferenciales.

En la segunda parte se estudiará el Cálculo Integral y se definirá análogo del concepto de antiderivada, del cual estudiaremos sus propiedades y un método para determinar algunas q-antiderivadas.Y de la misma manera daremos una versión del Teorema Fundamental del Cálculo para q-integrales, y a través de de la misma poder dar paso a algunos desarrollos que nos ayuden a solucionar problemas de q-integración.

En la última parte haremos uso de todo lo anterior para tratar de resolver algunos problemas típicos de las EDO en términos de la q-derivada, y para lo cual hablaremos de lo que representara una solución y los tipos de ecuaciones que podemos enfrentar, así como una posible interpretación de los mismos problemas y sus respectivas soluciones.

Algunas de las anteriores problemáticas serán objeto de este análisis, otras saldrán como consecuencia de resultados necesarios para la teoría y otras se dejarán como futuras lineas de investigación.

Chapter 2

Q-Cálculo Diferencial

2.1 q-Derivada

Abordaremos en este capítulo la definición al concepto de diferenciación y derivación en un sentido distinto del usual. Podremos establecer algunas de las diferencias y semejanzas que existen.

Definition 1 *Si $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, decimos que*

$$f(qx) - f(x) \tag{2.1}$$

es la q-diferencial de f y se denota $d_q f(x)$.

En particular, para la función identidad tenemos que $d_q x = (q-1)x$. Esto nos sirve para poder definir nuestro concepto de derivada.

Definition 2 *La expresión correspondiente al cociente de las q-diferenciales siguientes*

$$\frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} \tag{2.2}$$

lo cual significa que de ahora en adelante llamaremos a (2.2) q-derivada asociada a la función $f(x)$ de variable real con respecto a x, y en donde $q \in A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2.1.1 Propiedades de la q-diferenciación y derivación

Ahora trabajaremos con algunas de las propiedades que se obtienen a partir de las definiciones (2.1) y (2.2).

Proposition 1 *La q-diferencial es un operador lineal en el Espacio de Funciones sobre el campo de los reales.*

Proof. Sean f y g dos funciones arbitrarias y $a \in \mathbb{R}$, entonces aplicando directamente la definición

$$\begin{aligned} d_q(af(x)+g(x)) &= af(qx)+g(qx)-af(x)-g(x) \\ &= a\{f(qx)-f(x)\}+\{g(qx)-g(x)\} \\ &= ad_qf(x)+d_qg(x) \end{aligned} \tag{2.3}$$

■

Proposition 2 *Si f y g son funciones arbitrarias, entonces $d_qf(x)g(x) = f(qx)d_qg(x) + g(x)d_qf(x)$ ó $d_qf(x)g(x) = f(x)d_qg(x) + g(qx)d_qf(x)$ y con respecto al cociente $d_q\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)d_qf(x)-f(x)d_qg(x)}{g(x)g(qx)}$, si $g(x) \neq 0$.*

Proof. Consideremos las funciones f, g y apliquemos la definición en cada caso

$$\begin{aligned} d_qf(x)g(x) &= f(qx)g(qx)-f(x)g(x) \\ &= f(qx)g(qx)-f(x)g(x)+\{f(qx)g(x)-f(qx)g(x)\} \\ &= f(qx)\{g(qx)-g(x)\}+g(x)\{f(qx)-f(x)\} \\ &= f(qx)d_qg(x)+g(x)d_qf(x) \end{aligned} \tag{2.4}$$

lo cual prueba el primer resultado, el otro resultado se obtiene de modificar la forma del cero que se suma en lugar de $f(qx)g(x)-f(qx)g(x)$ por $g(qx)f(x)-g(qx)f(x)$.De igual forma, para la comprobación de la tercera igualdad recurriremos a la definición. ■

Ahora veremos que algunas de las propiedades anteriores se trasladan a lo que es la definición de derivada dada en (2.2) por lo siguiente.

Proposition 3 *La q-derivada es un operador lineal en el Espacio de Funciones sobre el campo de los reales.*

Proof. Para demostrar esta parte tomamos f y g funciones arbitrarias y $a \in \mathbb{R}$. Aprovechando lo demostrado con la q-diferencial tenemos que

$$\begin{aligned} D_q(af(x)+g(x)) &= \frac{d_q(af(x)+g(x))}{(q-1)x} \\ &= \frac{ad_qf(x)+d_qg(x)}{(q-1)x} \\ &= aD_qf(x)+D_qg(x) \end{aligned} \tag{2.5}$$

lo cual demuestra la proposición. ■

Por último, dentro de las propiedades que demostraremos están las referentes a las operaciones de producto y cociente entre funciones de variable real

Proposition 4 *Sean f y g funciones arbitrarias con $g(x) \neq 0$, entonces $D_q\left(f(x)g(x)\right) = g(x)D_qf(x)+f(qx)D_qg(x)$ ó equivalente $D_q\left(f(x)g(x)\right) = f(x)D_qg(x)+g(qx)D_qf(x)$ y que $D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_qf(x)-f(x)D_qg(x)}{g(x)g(qx)}$.*

Proof. Nos basaremos en la Proposición 2 para poder demostrar ambas igualdades

$$\begin{aligned} D_q\left(f(x)g(x)\right) &= \frac{d_q\left(f(x)g(x)\right)}{(q-1)\,x} \\ &= \frac{f(qx)d_qg(x)+g(x)d_qf(x)}{(q-1)\,x} \\ &= f(qx)D_qg(x)+g(x)D_qf(x) \end{aligned} \tag{2.6}$$

la igualdad propuesta para la q-derivada del cociente se obtiene usando el resultado para la q-diferencial del cociente en la Proposición 2.

$$\begin{aligned} D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{d_q\frac{f(x)}{g(x)}}{(q-1)\,x} \\ &= \frac{\frac{g(x)d_qf(x)-f(x)d_qg(x)}{g(x)g(qx)}}{(q-1)\,x} \\ &= \frac{g(x)d_qf(x)-f(x)d_qg(x)}{(q-1)\,xg(x)g(qx)} \\ &= \frac{1}{g(x)g(qx)} * \left(\frac{g(x)d_qf(x)}{(q-1)\,x} - \frac{f(x)d_qg(x)}{(q-1)\,x}\right) \\ &= \frac{1}{g(x)g(qx)} * \left(g(x)D_qf(x) - f(x)D_qg(x)\right) \\ &= \frac{g(x)D_qf(x)-f(x)D_qg(x)}{g(x)g(qx)} \end{aligned} \tag{2.7}$$

■

2.1.2 Ejemplos

Antes de terminar este primer Capítulo consideremos 2 ejemplos en los cuales veremos ejemplificadas situaciones que marcaran muchos de los aspectos fundamentales del q-Cálculo y que nos servirán, en uno de ellos, para desarrollar Teoría y en el otro para evitar ciertos métodos utilizados con frecuencia.

Example 5 $f(x) = x^n$*, esta función es una de las más trabajadas al comienzo del desarrollo de derivadas, pues al resolverla, y dadas las propiedades que tiene la misma, se logra resolver cualquier polinomio de variable y coeficientes reales.*

En el caso de la q-derivada, igualmente trataremos a x^n como punto inicial para poder basarnos no solo en la definición dada al estudiar otras funciones. A partir de la definición obtenemos

$$\begin{aligned} D_q x^n &= \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)\,x} \\ &= \frac{(q^n - 1)\,x^n}{(q-1)\,x} \\ &= \frac{q^n - 1}{q-1} x^{n-1} \end{aligned}$$

Como vemos, la q-derivada de la función x^n nos da algo parecido a lo que nos daría la derivada normal, solo que con una constante diferente de la de n. Para fines prácticos y convenientes en nomenclatura, hagamos

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q-1}, \;\; n \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

y entonces se tiene, $D_q x^n = [n]\,x^{n-1}$, que cuando $q = 1$, usando la igualdad $[n] = \frac{q^n-1}{q-1} = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, implica que $[n] = n$. La simplificación con la notación introducida no es lo único que se obtiene, pues más adelante trataremos de manera rápida algunas de las propiedades que tienen este tipo de números, que surgen como una necesidad estetica para el manejo del q-Cálculo, y que sin embargo contienen estructuras y comportamientos interesantes.

Example 6 *Al ver que para las funciones se cumplen propiedades de q-derivación de productos y linealidad que ya se tenían con la respectiva derivación, se podría pensar que tal vez exista un análogo para la Regla de la Cadena, que es el siguiente paso lógico en la deducción de las propiedades, sin embargo veamos dos casos que son relevantes para la resolución de EDO, en cuanto a métodos, en los cuales la Regla de la Cadena cambia o no se cumple.*

1. *Sean $f(x)$ y $u(x)$ funciones de variable real, con $u(x) = \alpha x^{\beta}$, donde α y $\beta \in \mathbb{R}$. Entonces al q-derivar la composición f con u, suponiendo que la composición es*

una función g, obtenemos

$$\begin{aligned}
D_q\left(f\circ u\right)(x) &= D_q g\left(x\right)=\frac{g\left(qx\right)-g\left(x\right)}{qx-x}\\
&= \frac{\left(f\circ u\right)\left(qx\right)-\left(f\circ u\right)\left(x\right)}{qx-x}=\frac{f\left(\alpha q^{\beta}x^{\beta}\right)-f\left(\alpha x^{\beta}\right)}{qx-x}\\
&= \frac{f\left(\alpha q^{\beta}x^{\beta}\right)-f\left(\alpha x^{\beta}\right)}{qx-x}*\frac{\alpha q^{\beta}x^{\beta}-\alpha x^{\beta}}{\alpha q^{\beta}x^{\beta}-\alpha x^{\beta}}\\
&= \frac{f\left(\alpha q^{\beta}x^{\beta}\right)-f\left(\alpha x^{\beta}\right)}{\alpha q^{\beta}x^{\beta}-\alpha x^{\beta}}*\frac{\alpha q^{\beta}x^{\beta}-\alpha x^{\beta}}{qx-x}\\
&= \frac{f\left(q^{\beta}u\right)-f\left(u\right)}{q^{\beta}u-u}*\frac{u(qx)-u(x)}{qx-x}\\
&= D_{q^{\beta}}f\left(u\right)*D_q u\left(x\right) \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

2. *Sea $f(x)$ como en el ejemplo anterior pero ahora con $u(x) = x+\alpha$, donde $\alpha\in\mathbb{R}$ es constante, el resultado que tenemos de q-derivar la composición de las funciones anteriores es el siguiente*

$$\begin{aligned}
D_q f\left(u(x)\right) &= D_q\left(f\circ u\right)(x)\\
&= \frac{\left(f\circ u\right)\left(qx\right)-\left(f\circ u\right)\left(x\right)}{qx-x}\\
&= \frac{f\left(qx+\alpha\right)-f\left(x+\alpha\right)}{qx-x}\\
&= \frac{f\left(q\left(x+a\right)+\left(1-q\right)\alpha\right)-f\left(u\right)}{qx-x}\\
&= \frac{f(qu+\left(1-q\right)\alpha)-f(u)}{qu+\left(1-q\right)\alpha-u}\\
\textit{como } D_q u\left(x\right) &= \frac{qx+\alpha-\left(x+\alpha\right)}{\left(q-1\right)x}\\
&= \frac{qx-x}{\left(q-1\right)x}=1\\
& \textit{ entonces concluimos}\\
D_q f\left(u(x)\right) &= \frac{f(qu+(1-q)a)-f(u)}{qu+(1-q)a-u}*D_q u(x) \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

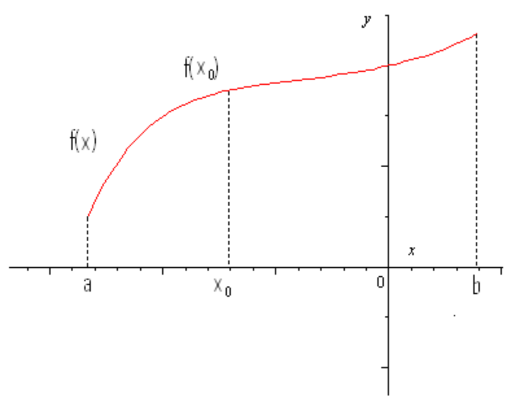
Con estos ejemplos vemos como algunas propiedades, no resultan semejantes a las del Cálculo usual o ni siquiera son validas en el q-Cálculo. En el primer ejemplo, nos damos cuenta de que la regla de la cadena se aplica con una variación en el valor de q con respecto al que se deriva y sin embargo la acción que tiene α al multiplicarse por la variable con respecto a la que se trabaja es nula, es decir, solo en aquellos cambios en los que tomemos un múltiplo de la variable se podrá aplicar el análogo de la regla de la cadena sin cambio alguno y solo derivando en el sentido q. Con respecto al caso 2, vemos que definitivamente tratar de obtener q-derivadas que representen el lado izquierdo en el producto de (2.10) no es posible y de esta forma los cambios que tengan que ver con una traslación en el dominio no nos representa un análogo para la regla de la cadena.

2.1.3 Aspectos Geometricos

Si tomamos la definición de q-derivada de una función $f(x)$, $D_q f(x) = \frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}$ en donde $q \in A \subseteq \mathbb{R}\backslash\{1\}$, nuestro concepto geométrico es un conjunto de cocientes, es decir

$$D_q f(x_0) = \left\{ \frac{f(qx_0) - f(x_0)}{(q-1)x_0} | \; q \in A \subseteq \mathbb{R}\backslash\{1\} \right\}$$

pero donde además tenemos que considerar algunos atributos de $f(x)$, como el estar definida sobre un dominio que puede no ser todo $\mathbb{R}$, ya que del tipo de dominio que se tenga, dependerá en donde puede variar q.



Funcion con dominio [a,b] a trabajar.

Luego entonces definimos

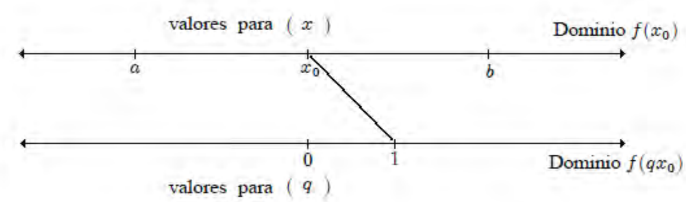
$$Dom\ f = \{x \ \in \mathbb{R} | \exists y \in \mathbb{R} \text{ para el cual } y = f(x)\}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a =$ Infimo $Dom\ f$ y $b =$ Supremo $Dom\ f$. Tomemos un punto $x_0 \in Dom\ f$ y sobre este punto chequemos la q-derivada de f

$$D_q f(x_0) = \left\{ \frac{f(qx_0) - f(x_0)}{(q-1)x_0} | \; q \in ß_{x_0}(f) \right\}$$

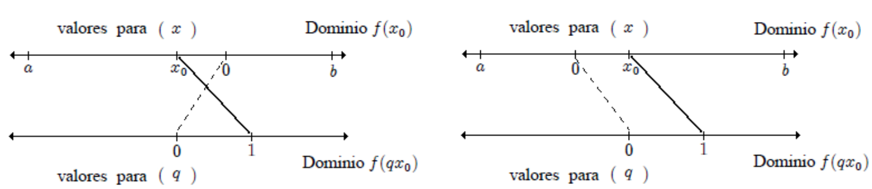
donde $ß_{x_0}(f)$ es el conjunto de valores $q \in \mathbb{R}$ para los cuales $qx_0 \in Dom\ f$.

Vamos a trabajar en la descripción del conjunto $ß_{x_0}(f)$ en términos de lo que ya sabemos acerca del dominio de f.



Comparacion de dominios para la funcion f.

Con la anterior gráfica estamos buscando para que valores de q tiene sentido el evaluar qx_0 en f, sabiendo que la función es valida sólo para valores entre a y b. Sabemos que en la recta que contiene los valores de q, ir de 0 a 1 es la forma positiva de recorrer la recta, luego al ubicarse en x_0 (que pertenece a los valores de x), este tiene relación directa con el valor $q = 1$, pues se cumple que $x_0 = (1)x_0 = (q)x_0 = qx_0$, luego entonces para definir el sentido positivo de recorrer la recta de valores para x, tenemos que encontrar otro punto que lo podamos relacionar con algún valor de la recta de q, de estos el más sencillo es el cero pues sabemos que $qx_0 = (0)x_0 = 0$, por lo que solo tenemos que ubicar el valor cero dentro de la recta de x para tener claro como se recorrerá el conjunto $ß_{x_0}(f)$. Sin embargo aquí es donde tenemos que observar 2 casos, ya que es posible tanto que el cero se encuentre a la derecha como a la izquierda del punto x_0 .



Casos posibles para la comparacion de los dominios. A la izquierda el caso $x_0 < 0$ y a la derecha $x_0 > 0$.

Como vemos se definen los conjuntos posibles para $ß_{x_0}(f)$ según sea el caso de la ubicación de x_0 respecto del valor cero, sin embargo, el caso cuando $x_0 = 0$ no está definido, pues aquí ocurre que geométricamente al querer obtener un múltiplo de q, nos volvemos a quedar en el mismo sitio y esto mismo se observa en el cociente de la definición.

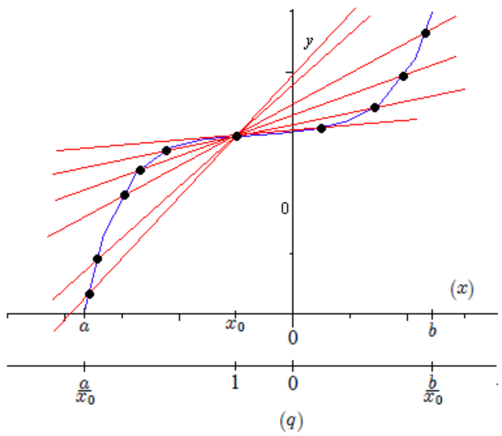
$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} \text{ cuando } x = 0 \; D_q f(0) = \frac{f(q0) - f(0)}{(q-1)0} = \frac{f(0) - f(0)}{0}$$

en especifico en el denominador tendríamos problemas directamente sin simplificar nada, a menos claro que estemos trabajando por ejemplo con un polinomio como en uno de los ejemplos que vimos en la sección anterior, donde sabemos que la q-derivada de x^n está dada como $D_q x^n = [n]\, x^{n-1}$ y por tanto para el caso particular del valor $x = 0$ obtendríamos como resultado el valor 0, pero en general tenemos que hacer un análisis distintivo con respecto a la q-derivada en punto cercanos a cero. Lo que si podemos afirmar es que si la función es derivable en el sentido ordinario, entonces la q-derivada de f en $x = 0$ coincide con $f'(0)$ y $ß_0(f)$ son todos los reales.

Por lo tanto, concluimos que

$$D_q f(x_0) = \left\{ \frac{f(qx_0) - f(x_0)}{(q-1)x_0} \;\middle|\; \begin{array}{l} q \in \left(\frac{b}{x_0}, \frac{a}{x_0}\right) \text{ si } x_0 < 0 \\ q \in \left(\frac{a}{x_0}, \frac{b}{x_0}\right) \text{ si } x_0 > 0 \end{array} \right\}$$

Ahora sí estamos listos para examinar lo que pasa cuando q-derivamos una función $f(x)$ y evaluamos en un punto x_0, que suponemos puede ser tanto positivo como negativo y se encuentre en el Dominio natural de la función.



Conjunto de rectas que representan la q-derivada
de una funcion en un punto en especifico.

A partir de la gráfica anterior donde se ven las rectas que representarían las pendientes asociadas a los números que obtendríamos de evaluar en la q-derivada de $f(x)$ un valor $q \in ß_{x_0}(f)$ y $x = x_0$. Es por esto que nos lleva a concluir que $D_q f(x_0)$ se ve como una función de q y entonces se tiene la proposición siguiente:

Proposition 7 *Si f es una función continua en $[a, b]$ y $(x_0 \neq 0) \in [a, b]$, entonces $D_q f(x_0)$ es continua con respecto de q en $ß_{x_0}(f)$ excepto quizás para $q = 1$ cuando $f(x)$ sea derivable en $x = x_0$.*

Proof. La demostración se basa en que por hipótesis

$$\lim_{x \longrightarrow \tilde{x}} f(x) = f(\tilde{x}), \ \forall \tilde{x} \in [a, b]$$

entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{q \longrightarrow q_0} D_q f(x_0) &= \lim_{q \longrightarrow q_0} \frac{f(qx_0) - f(x_0)}{(q-1)x_0} \\
&= \frac{\lim_{q \longrightarrow q_0} \{f(qx_0) - f(x_0)\}}{\lim_{q \longrightarrow q_0} (q-1)x_0} \\
&= \frac{\lim_{q \longrightarrow q_0} f(qx_0) - f(x_0)}{(q_0 - 1)x_0}
\end{aligned}$$

pero dado que $q \in ß_{x_0}(f)$, se cumple siempre que $q \in Dom\ f$, y por tanto

$$\begin{aligned} \lim_{q \longrightarrow q_0} f(qx_0) &= \lim_{x \longrightarrow q_0 x_0} f(x) \\ & \quad \text{siempre y cuando se considere} \\ qx_0 &= x \quad \text{y que} \\ \lim_{q \longrightarrow q_0} qx_0 &= \lim_{x \longrightarrow q_0 x_0} x \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \lim_{q \longrightarrow q_0} D_q f(x_0) &= \frac{\lim_{q \longrightarrow q_0} f(qx_0) - f(x_0)}{(q_0 - 1)\, x_0} \\ &= \frac{\lim_{x \longrightarrow q_0 x_0} f(x) - f(x_0)}{(q_0 - 1)\, x_0} \\ &= \frac{f(q_0 x_0) - f(x_0)}{(q_0 - 1)\, x_0} \\ &= D_{q_0} f(x_0) \end{aligned}$$

Para el caso cuando $q = 1$, se tiene una indeterminación de la forma cero sobre cero, y para analizar el límite tendriamos que verificar que la función tuviera derivada en $x = x_0$ pues es en ese punto donde nos estamos manteniendo fijos y el variar q sólo hace que los cocientes que calculamos, sean las secantes que pasan por $(x_0, f(x_0))$ y puntos con abscisas cada ves más cerca de $(x_0, f(x_0))$, y el limite cuando $q = 1$ es de hecho la recta tangente a la funcion en $(x_0, f(x_0))$. Por ello mismo solo es cierta cuando dicha función cuenta con derivada en el punto x_0. ■

De la misma forma través de la definición y descripción del concepto de q-derivada de una función, evaluado en un punto $x_0 \in Dom\ f$, podemos enunciar el resultado siguiente.

Proposition 8 *Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en $[a, b]$, definamos $₣ = \{f\,'(x) \mid x \in (a, b)\}$, entonces $D_q f(x_0) \subseteq ₣$ para $x_0 \in Dom\ f$ y $q \in ß_{x_0}(f)$*

Proof. Para demostrar la contención, tomemos un elemento en $D_q f(x_0)$

$$\frac{f(\tilde{q}x_0) - f(x_0)}{(\tilde{q} - 1)\, x_0} \text{ donde } x_0 \in Domf \text{ y } \tilde{q} \in ß_{x_0}(f)$$

Por el teorema del valor medio, sabemos que para cualesquiera elementos en el dominio de una función f, en particular para x_0 y $\tilde{q}x_0$, y donde f es continua y derivable, se cumple que $\exists\, c \in (x_0, \tilde{q}x_0)$ ó $c \in (\tilde{q}x_0, x_0)$, según sea el caso, tal que

$$\begin{aligned} f(\tilde{q}x_0) - f(x_0) &= f\,'(c)\,(\tilde{q}x_0 - x_0) \\ \text{o equivalente} \quad \frac{f(\tilde{q}x_0) - f(x_0)}{(\tilde{q} - 1)\, x_0} &= f\,'(c) \end{aligned}$$

considerando que $c \in (x_0, \tilde{q}x_0)$ ó $c \in (\tilde{q}x_0, x_0)$, y dado que $(x_0, \tilde{q}x_0) \subseteq (a,b)$ ó $(\tilde{q}x_0, x_0) \subseteq (a,b)$ entonces $c \in (a,b)$ y por tanto $f'(c) \in$ ₣, lo que implica a su vez que

$$\begin{aligned} \frac{f(\tilde{q}x_0) - f(x_0)}{(\tilde{q}-1)x_0} &\in \text{₣} \\ &\therefore \ D_q f(x_0) \subseteq \text{₣} \end{aligned}$$

■

Sobre la base de la definición de q-derivada, queremos hacer una identificación para poder caracterizar a la q-derivada de una función arbitraria, y como al ser $f(x)$ continua, $D_q f$ es continua con $q \in ß_{x_0}(f)$, excepto para $x = a$, $x = b$ ó cuando $f\,'(x)$ no exista en algún punto de su dominio, podemos verificar que $D_q f$ es continua en $q = 1$.

Por ende, podemos jugar con el aspecto de la q-derivada de una función suponiendo $q \neq 1$ y $x_0 \neq 0$

$$\begin{aligned} D_q f(x_0) &= \frac{f(qx_0) - f(x_0)}{(q-1)x_0} \\ &\Longleftrightarrow (q-1)x_0 D_q f(x_0) = f(qx_0) - f(x_0) \\ &\Longleftrightarrow f(x_0) = f(qx_0) + (1-q)x_0 D_q f(x_0) \end{aligned}$$

Si definimos una función auxiliar como sigue

$$f_{x_0}(q) \left\{ \begin{array}{cc} D_q f(x_0) = \frac{f(qx_0)-f(x_0)}{(q-1)x_0} & q \in ß_{x_0}(f) \setminus \{1\} \\ f\,'(x_0) & q = 1 \end{array} \right\}$$

donde $f_{x_0}(q)$ es continua con respecto de q cuando la función f es derivable en x_0

$$\therefore \ f(x_0) = f(qx_0) + (1-q)x_0 f_{x_0}(q)$$

Con lo que podemos concluir que f es q-derivable en $x = x_0$, suponiendo que f es diferenciable en $x = x_0$, si y sólo si existe una función $f_{x_0}(q)$ tal que sea continua con respecto de $q \in ß_{x_0}(f)$. Podríamos extender está definición sin suponer que f sea diferenciable en $x = x_0$ y por tanto sólo pidiendo que $f_{x_0}(q)$ sea continua con respecto de q excepto quizás en $q = 1$.

Usando está función auxiliar, vamos a tratar de demostrar nuevamente como es que la q-derivada cumple con ser un operador lineal.

Si f, g son funciones continuas y diferenciables en $x_0 \in Dom\ f \cap Dom\ g$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces (αf) y $(f+g)$ es q-derivable en x_0, teniendo que f y g sean a la vez q-derivables.

Por hipótesis existen funciones auxiliares $f_{x_0}(q)$ y $g_{x_0}(q)$, continuas con respecto de q y para las cuales es valida la igualdad siguiente

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= f(qx_0) + (1-q)\,x_0 f_{x_0}(q) && (2.11)\\
g(x_0) &= g(qx_0) + (1-q)\,x_0 g_{x_0}(q) && (2.12)
\end{aligned}
$$

la primera igualdad multiplicada por α, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
& \alpha\{f(x_0) = f(qx_0) + (1-q)\,x_0 f_{x_0}(q)\}\\
\alpha f(x_0) &= \alpha f(qx_0) + \alpha(1-q)\,x_0 f_{x_0}(q)\\
&= \alpha f(qx_0) + (1-q)\,x_0 \alpha f_{x_0}(q)\\
\therefore &\quad (\alpha f)(x_0) = (\alpha f)(qx_0) + (1-q)\,x_0(\alpha f_{x_0})(q)
\end{aligned}
$$

donde como $f_{x_0}(q)$ cumple con ser continua con respecto de $q \in ß_{x_0}(f)$, entonces tambien lo es $\alpha f_{x_0}(q)$ un múltiplo de ella.

Para el caso de la suma de funciones, precisamente hacemos la suma con las igualdades de la hipótesis y obtenemos que

$$
\begin{aligned}
f(x_0) + g(x_0) &= \{f(qx_0) + (1-q)\,x_0 f_{x_0}(q)\} + \{g(qx_0) + (1-q)\,x_0 g_{x_0}(q)\}\\
(f+g)(x_0) &= (f+g)(qx_0) + (1-q)\,x_0(f_{x_0} + g_{x_0})(q)
\end{aligned}
$$

donde también se cumple que $(f_{x_0} + g_{x_0})(q)$ es continua con respecto de q por ser una suma de funciones continuas con respecto de q.

No menos importante son las reglas para el producto y el cociente de funciones.

Sean f y g funciones que cumplan las mismas condiciones como en el caso anterior, por las igualdades en (2.11) y (2.12)se cumple que

$$
\begin{aligned}
& g(x_0)\{f(x_0) = f(qx_0) + (1-q)\,x_0 f_{x_0}(q)\}\\
f(x_0)\,g(x_0) &= f(qx_0)\,g(x_0) + (1-q)\,x_0 f_{x_0}(q)\,g(x_0)\\
&= f(qx_0)\{g(qx_0) + (1-q)\,x_0 g_{x_0}(q)\} + (1-q)\,x_0 f_{x_0}(q)\,g(x_0)\\
&= f(qx_0)\,g(qx_0) + (1-q)\,x_0 g_{x_0}(q)\,f(qx_0) + (1-q)\,x_0 f_{x_0}(q)\,g(x_0)\\
&= f(qx_0)\,g(qx_0) + (1-q)\,x_0\{g_{x_0}(q)\,f(qx_0) + f_{x_0}(q)\,g(x_0)\}
\end{aligned}
$$

o lo que es lo mismo

$$
f(x_0)\,g(x_0) = f(qx_0)\,g(qx_0) + (1-q)\,x_0\{f(qx_0)\,g_{x_0}(q) + g(x_0)\,f_{x_0}(q)\}
$$

Por tanto, y dado que $f(qx_0)\,g_{x_0}(q) + g(x_0)\,f_{x_0}(q)$ es una suma de productos de funciones continuas, está misma es una función continua y por la forma en la que se definió la función auxiliar tendríamos que $D_q(fg)(x_0) = f(qx_0)\,g_{x_0}(q)+g(x_0)\,f_{x_0}(q)$ $= f(qx_0)\,D_q g(x_0) + g(x_0)\,D_q f(x_0)$, lo que ya habíamos comprobado con las definiciones iniciales.

Para el caso del cociente, haremos 2 casos en los cuales consideraremos primero que el numerador es la función constante 1 y en el denominador la función $f(x)$, así como el caso de una función arbitraria tanto en el numerador como en el denominador.

1. El hecho de que f es una función q-diferenciable nos da la igualdad con que trabajaremos.

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= f(qx_0) + (1-q)\,x_0 f_{x_0}(q) \\
f(qx_0) &= f(x_0) - (1-q)\,x_0 f_{x_0}(q) \text{ dividiendo entre } f(x_0)\,f(qx_0) \\
\frac{f(qx_0)}{f(x_0)\,f(qx_0)} &= \frac{f(x_0) - (1-q)\,x_0 f_{x_0}(q)}{f(x_0)\,f(qx_0)} \\
\frac{1}{f}(x_0) &= \frac{1}{f}(qx_0) + (1-q)\,x_0 \frac{-f_{x_0}(q)}{f(x_0)\,f(qx_0)}
\end{aligned}$$

lo cual a su vez nos muestra, que la q-derivada de la inversa de f es igual a

$$D_q \frac{1}{f}(x_0) = \frac{-f_{x_0}(q)}{f(x_0)\,f(qx_0)} = \frac{-D_q f(x_0)}{f(x_0)\,f(qx_0)}$$

2.Trabajemos ahora con el caso de $D_q \frac{f}{g}(x_0)$, donde usaremos algunas igualdades obtenidas en el caso anterior y con la regla de la q-derivación de un producto.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_0)}{g(x_0)} &= f(x_0)\left\{\frac{1}{g}(qx_0) + (1-q)\,x_0 \frac{\{-g_{x_0}(q)\}}{g(x_0)\,g(qx_0)}\right\} \\
&= \frac{f(x_0)}{g(qx_0)} + (1-q)\,x_0 \frac{\{-f(x_0)\,g_{x_0}(q)\}}{g(x_0)\,g(qx_0)} \\
&= \frac{f(qx_0) + (1-q)\,x_0 f_{x_0}(q)}{g(qx_0)} + (1-q)\,x_0 \frac{\{-f(x_0)\,g_{x_0}(q)\}}{g(x_0)\,g(qx_0)} \\
&= \frac{f(qx_0)}{g(qx_0)} + \frac{(1-q)\,x_0 f_{x_0}(q)}{g(qx_0)} + (1-q)\,x_0 \frac{\{-f(x_0)\,g_{x_0}(q)\}}{g(x_0)\,g(qx_0)} \\
&= \frac{f(qx_0)}{g(qx_0)} + \frac{(1-q)\,x_0 g(x_0)\,f_{x_0}(q)}{g(x_0)\,g(qx_0)} + (1-q)\,x_0 \frac{\{-f(x_0)\,g_{x_0}(q)\}}{g(x_0)\,g(qx_0)} \\
&= \frac{f(qx_0)}{g(qx_0)} + (1-q)\,x_0 \frac{\{g(x_0)\,f_{x_0}(q) - f(x_0)\,g_{x_0}(q)\}}{g(x_0)\,g(qx_0)}
\end{aligned}$$

Tenemos que la q-derivada del cociente es pues igual a

$$D_q \frac{f}{g}(x_0) = \frac{g(x_0)\,f_{x_0}(q) - f(x_0)\,g_{x_0}(q)}{g(x_0)\,g(qx_0)} = \frac{g(x_0)\,D_q f(x_0) - f(x_0)\,D_q g(x_0)}{g(x_0)\,g(qx_0)}$$

2.1.4 Rutinas y Scripts

Como parte de un complemento para la mejor comprensión y análisis de los resultados que hemos obtenido en la sección, proporcionaremos Scripts que fueron desarrollados y ejecutados para Matlab 5.3. Muchos de los cuales nos ayudaran a realizar gráficas que ilustren algunos de los comportamientos que se obtienen con funciones que desarrollaremos más adelante, y que sin embargo muestran situaciones algunas veces similares y otras distintas de las ya acostumbradas. Es por ello que comenzaremos con una forma de calcular los q-números que son de la forma $[n] = \frac{1-q^n}{1-q}$, para cualquier valor de q y n.

```
% Script para el cálculo de los q-números, utilizados
% en todo lo que al q-Cálculo se refiere.
function qnum = qnumero (q,j)

%Se realiza una toma de decisión sobre la base del valor de q, ya que
%que este marca la diferencia entre el q-Cálculo y el
%ordinario.
if q==1

%Cuando tomamos el caso q=1, de la formula [j]=(1-q^j)/(1-q)
%aplicamos limite y nos da como resultado j mismo.
qnum=j;

else
%En caso contrario al anterior, no tenemos problema con
%aplicar directamente la formula de [j], solo que hacemos
%otra toma de decisión por si es positivo o negativo.
residuo = rem(j,1);
if residuo==0 & j>0
          qnum=1;
          for k=1:j-1
          %En caso de ser entero positivo sabemos que podemos
        %hacer cociente de (1-q^j)/(1-q)=1+q+q^2+...+q^(j-1)
        qnum=qnum+q^(k);
          end
else
%Cuando no podemos simplificar la expresión, aplicamos
%directamente la fórmula y calculamos.
qnum = (1-q^j)/(1-q);
end
end
```

2.2 q-Binomiales $(x-a)^n$

2.2.1 Introducción

En esta sección trataremos de generalizar algunos resultados, ya sabemos que si $f(x) = x^n$ entonces $D_q f(x) = [n]\, x^{n-1}$, con la notación respectiva para $[n]$. Ahora, como al tratar de q-derivar la función $g(x) = (x-a)^n$ lo que obtenemos es que $D_q g(x) = \frac{(qx-a)^n-(x-a)^n}{(q-1)x}$, que a partir del Binomio de Newton nos lleva a $D_q g(x) = \frac{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(qx)^{n-j}(-a)^j - \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(x)^{n-j}(-a)^j}{(q-1)x} = \frac{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(x)^{n-j}(-a)^j\left(q^{n-j}-1\right)}{(q-1)x}$, que como se observa consta de términos q en cada parte del desarrollo y no se pueden eliminar con el cociente $(q-1)\,x$, por lo que nos preguntamos si existen, por así decirlo, q-funciones Binomiales tales que al q-derivarlos sólo obtengamos una q-constante que multiplique al Binomio elevado en una unidad menos de la original, y que además se tenga que al evaluar el q-Binomial en $x = a$ este al igual que su análogo se anule en cualquiera de sus potencias, excepto claro cuando la potencia sea cero.

Para determinar los q-Binomiales, en lugar de dar arbitrariamente funciones y ver cuales son aquellas que cumplen con las condiciones que pedimos, lo que haremos es aplicar un poco de lo que más adelante definiremos como q-antiderivadas, sin someternos al formalismo de definiciones, sólo consideraremos está operación en el sentido inverso de leer la igualdad $D_q x^n = [n]\, x^{n-1}$ para Polinomios. Es por lo anterior, que comenzaremos con la base de nuestros q-Binomiales que serán $(x-a)$, con $a \in \mathbb{R}$ una constante. Al q-derivarlo obtenemos $D_q\,(x-a) = \frac{qx-a-(x-a)}{(q-1)x} = \frac{qx-x}{(q-1)x} = 1$, lo cual comienza siendo una buena analogía de lo que pasa con la derivada y los Binomiales. Para el polinomio de grado 2 que debe cumplir con el aspecto de q-binomial, tratamos de obtener las q-antiderivadas tanto de x y $-a$, es decir, $D_q h_1(x) = x$ y $D_q h_2(x) = -a$, entonces basándonos en que $D_q x^n = [n]\, x^{n-1}$, podemos concluir que $h_1(x) = \frac{x^2}{[2]}$ y que $h_2(x) = -ax$. Luego $D_q h(x) = D_q h_1(x) + D_q h_2(x) = x - a$, y bajo las propiedades de operador de la q-derivada tenemos que $h(x) = \frac{x^2}{[2]} - ax$, y ya que está función también debe ser un q-Binomial, se tiene que cumplir que $h(a) = 0$, por lo que agregamos constantes en nuestra función $h\,(x)$ para que lo cumpla y dado que la q-derivada de constantes es cero, entonces no se altera el hecho de que $D_q h(x) = x-a$. Entonces podemos concluir que $h(x) = \frac{x^2}{[2]} - ax - \frac{a^2}{[2]} + a^2$, la cual se puede factorizar de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{[2]} - ax - \frac{a^2}{[2]} + a^2 &= \frac{x^2 - a^2}{[2]} - a\,(x-a) \\
&= (x-a)\left\{\frac{x+a}{[2]} - a\right\} \\
&= (x-a)\left\{\frac{x+a-[2]\,a}{[2]}\right\} \\
&= (x-a)\left\{\frac{x+a-\left(\frac{q^2-1}{q-1}\right)a}{[2]}\right\} \\
&= (x-a)\left\{\frac{x+a-(q+1)\,a}{[2]}\right\} \\
&= (x-a)\left\{\frac{x+a-qa-a}{[2]}\right\} \\
&= (x-a)\left\{\frac{x-qa}{[2]}\right\} \\
&= \frac{(x-a)\,(x-qa)}{[2]}
\end{aligned}$$

Luego hemos obtenido que $h(x) = \frac{(x-a)(x-qa)}{[2]}$ es la forma del q-Binomial tal que al q-derivar nos da como resultado el q-Binomio $(x-a)$ y que además cumple con anularse al ser evaluada en a.

Antes de proceder con la forma general de un q-Binomial de grado $n \in \mathbb{N}$, trabajaremos con la forma del q-Binomial para $n = 3$, con el fin de darnos una mejor idea del caso general, y por lo cual recurriremos a lo ya obtenido con $h(x)$ y pediremos lo mismo que con él. Buscamos un polinomio $g(x)$ tal que $D_q g(x) = h(x)$, que $g(a) = 0$, y así como se fue obteniendo la q-antiderivada para cada uno de los elementos en $(x-a)$ tendremos que aplicar nuestro proceso inverso de q-derivada para los elementos en $h(x)$ basados en el conocimiento de la fórmula $D_q x^n = [n]\, x^{n-1}$, que suponemos se puede leer de izquierda a derecha y viceversa, y es esto lo que tomamos como la q-antiderivada de Polinomios en forma provisional.

Si se supone que $h(x) = \frac{(x-a)(x-qa)}{[2]} = \frac{x^2}{[2]} - ax - \frac{a^2}{[2]} + a^2$, y se usa la forma de la q-antiderivada para cada uno de los términos daremos una primera aproximación a $g(x) = \frac{x^3}{[2][3]} - \frac{ax^2}{[2]} - \frac{a^2}{[2]}x + a^2 x$. Sin embargo como en el caso anterior, este $g(x)$ solo cumple con que al q-derivar nos dé $h(x)$ y no con la condición $g(a) = 0$, por lo que también como en el caso anterior nos faltaría agregar constantes para que lo cumplan y que no afectarían con la q-derivación por la propiedad de sus q-derivadas. La forma definitiva de $g(x) = \frac{x^3}{[2][3]} - \frac{ax^2}{[2]} - \frac{a^2}{[2]}x + a^2x - \frac{a^3}{[2][3]} + \frac{a^3}{[2]} + \frac{a^3}{[2]} - a^3$ y en donde tenemos nuevamente, que cambiar la apariencia para poder ver alguna semejanza con los 2 casos que ya se tienen y dar una forma general.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x^3}{[2]\,[3]} - \frac{ax^2}{[2]} - \frac{a^2}{[2]}x + a^2x - \frac{a^3}{[2]\,[3]} + \frac{a^3}{[2]} + \frac{a^3}{[2]} - a^3 \\
&= \frac{x^3 - [3]\,ax^2 - [3]\,a^2x + [2]\,[3]\,a^2x - a^3 + [3]\,2a^3 - [2]\,[3]\,a^3}{[2]\,[3]} \\
&= \frac{x^3 - \left(1+q+q^2\right)ax^2 - \left(1+q+q^2\right)a^2x + (1+q)\left(1+q+q^2\right)a^2x}{[2]\,[3]} \\
&\quad + \frac{-a^3 + \left(2+2q+2q^2\right)a^3 - (1+q)\left(1+q+q^2\right)a^3}{[2]\,[3]} \\
&= \frac{x^3 - \left(1+q+q^2\right)ax^2 + \left(-1-q-q^2+1+2q+2q^2+q^3\right)a^2x}{[2]\,[3]} \\
&\quad + \frac{\left(-1+2+2q+2q^2-1-2q-2q^2-q^3\right)a^3}{[2]\,[3]} \\
&= \frac{x^3 - \left(1+q+q^2\right)ax^2 + \left(q+q^2+q^3\right)a^2x + \left(-q^3\right)a^3}{[2]\,[3]} \\
&= \frac{x^3 - (1+q)\,ax^2 - q^2ax^2 + qa^2x + \left(q^2+q^3\right)a^2x - q^3a^3}{[2]\,[3]} \\
&= \frac{x\left(x^2 - (1+q)\,ax + qa^2\right) - q^2a\left(x^2 - (1+q)\,ax + qa^2\right)}{[2]\,[3]} \\
&= \frac{\left(x-q^2a\right)\left(x^2 - qax - ax + qa^2\right)}{[2]\,[3]} \\
&= \frac{\left(x-q^2a\right)\left(x\,(x-qa) - a\,(x-qa)\right)}{[2]\,[3]} \\
&= \frac{\left(x-q^2a\right)(x-qa)\,(x-a)}{[2]\,[3]} = \frac{(x-a)\,(x-qa)\left(x-q^2a\right)}{[2]\,[3]}
\end{aligned}$$

Haciendo un resumen de los q-Binomiales que hemos obtenido hasta el momento y por su grado son:

$$
\begin{aligned}
&(x-a) \\
&\frac{(x-a)(x-qa)}{[2]} \\
&\frac{(x-a)(x-qa)\left(x-q^2a\right)}{[2][3]}
\end{aligned}
$$

Antes de seguir introduzcamos la notación para el producto de los q-números $[n]$, donde solo consideraremos que $n \in \mathbb{N}$.

Definition 3 *Siendo n un número natural, denotaremos el producto de los primeros n q-números como*

$$
[n]! = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & si\ n = 0 \\ [n][n-1][n-2]\ldots[2][1] & si\ n = 1, 2, \ldots \end{array} \right\} \tag{2.13}
$$

y nos referiremos a este producto como el q-factorial de n.

En este momento ya estamos listos para definir el análogo de los Binomiales en el sentido q.

Definition 4 *Para cualquier número natural n mayor o igual que 0, se tiene que*

$$
(x-a)_q^n = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & si\ n = 0 \\ (x-a)(x-qa)\ldots\left(x-q^{n-1}a\right) & si\ n = 1, 2, \ldots \end{array} \right\} \tag{2.14}
$$

Demostremos que los q-Binomiales tienen las propiedades que queremos.

Proposition 9 *Para cada uno de los naturales mayores que cero, la definición dada en (2.14) cumple que*

$$
D_q (x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1} \text{ o equivalente} \tag{2.15}
$$

$$
D_q \frac{(x-a)_q^n}{[n]} = (x-a)_q^{n-1} \tag{2.16}
$$

Proof. Por tratarse de una demostración en la que nos interesa verificar que se cumple una igualdad para los naturales, vamos a realizarla por Inducción.

De lo que se desarrolló anteriormente, tenemos que la igualdad (2.16) es valida para $n = 1, 2$ y 3, en particular para $n = 1$ y tenemos la base de la inducción.

Supondremos que la igualdad es valida para $n = k$

$$
D_q (x-a)_q^k = [k](x-a)_q^{k-1} \tag{2.17}
$$

Ahora toca probar que la definición (2.15) es valida para $n = k+1$, y lo hacemos usando lo que ya tenemos para la q-derivada de un producto y con el siguiente razonamiento.

$$\begin{aligned}
D_q\,(x-a)_q^{k+1} &= D_q\left((x-a)_q^k \cdot (x-q^k a)\right) \\
&= (x-a)_q^k + (qx-q^k a)D_q\,(x-a)_q^k \\
&= (x-a)_q^k + (qx-q^k a)\,[k]\,(x-a)_q^{k-1} \\
&= (x-a)_q^k + q(x-q^{k-1}a)\,[k]\,(x-a)_q^{k-1} \\
&= (x-a)_q^k + q\,[k]\,(x-a)_q^{k-1}\,(x-q^{k-1}a) \\
&= (x-a)_q^k + q\,[k]\,(x-a)_q^k \\
&= (1+q\,[k])\,(x-a)_q^k \\
&= \left(1+q\left(1+q+q^2+...+q^{k-1}\right)\right)(x-a)_q^k \\
&= \left(1+q+q^2+q^3+...+q^k\right)(x-a)_q^k \\
&= [k+1]\,(x-a)_q^k
\end{aligned}$$

■

Este nuevo tipo de Polinomios, al igual que su símil en el Cálculo usual, tiene propiedades que pueden no ser las mismas o parecidas, es por eso, y para poder acostumbrarnos al manejo de los mismos, que vamos a revisar algunas propiedades.

2.2.2 Propiedades

Como parte de la extensión de la propiedad $D_q\,(x-a)_q^n = [n]\,(x-a)_q^{n-1}$ a enteros, necesitaremos definir lo que significa $(x-a)_q^n$ con $n \in \mathbb{Z}^-$, para esto veamos como se comporta un q-Binomial al elevarse a una suma de números naturales.

$$\begin{aligned}
(x-a)_q^{m+n} &= (x-a)(x-qa)\left(x-q^2a\right)...\left(x-q^{m-1}a\right)(x-q^m a)\left(x-q^{m+1}a\right)... \\
&\quad ...\left(x-q^{m+n+-1}a\right) \\
&= (x-a)(x-qa)\left(x-q^2a\right)...\left(x-q^{n-1}a\right)(x-q^n a)\left(x-q^{n+1}a\right)... \\
&\quad ...\left(x-q^{m+n-1}a\right) \\
&= (x-a)(x-qa)\left(x-q^2a\right)...\left(x-q^{m-1}a\right)(x-(q^m a))(x-q(q^m a))... \\
&\quad ...\left(x-q^{n-1}(q^m a)\right) \\
&= (x-a)(x-qa)\left(x-q^2a\right)...\left(x-q^{n-1}a\right)(x-(q^n a))(x-q(q^n a))... \\
&\quad ...\left(x-q^{m-1}(q^n a)\right) \\
&= (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n \qquad (2.18) \\
&= (x-a)_q^n (x-q^n a)_q^m \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

lo cual también nos muestra que no se cumple la distributividad de una suma sobre la potencia, i.e., $(x-a)_q^{m+n} \neq (x-a)_q^m (x-a)_q^n$.

Sean m, n tales que $m+n=0 \iff m=-n$ entonces se cumple

$$\begin{aligned}
1 &= (x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n \\
&= (x-a)_q^{-n} \left(x-q^{-n}a\right)_q^n
\end{aligned}$$

de donde al despejar se obtiene la extensión de la definición (2.14) para enteros negativos,

$$(x-a)_q^{-n} = \frac{1}{(x-q^{-n}a)_q^n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \qquad (2.20)$$

Al estar verificando las propiedades que ya se cumplían para los Binomios, podemos definir lo que vamos a entender por la potencia de una potencia de un q-Binomial, para esto recurriremos a la definición (2.14) y a las propiedades anteriores.

$$\begin{aligned}
(x-a)_q^{nm} &= (x-a)(x-qa)\left(x-q^2a\right)...\left(x-q^{m-1}a\right) \\
&\quad (x-q^m a)\left(x-q^{m+1}a\right)...\left(x-q^{2m-1}a\right) \\
&\quad \vdots \\
&\quad \left(x-q^{(n-2)m}a\right)\left(x-q^{(n-2)m+1}a\right)...\left(x-q^{(n-1)m-1}a\right) \\
&\quad \left(x-q^{(n-1)m}a\right)\left(x-q^{(n-1)m+1}a\right)...\left(x-q^{nm-1}a\right) \\
&= (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^m \left(x-q^{2m}a\right)_q^m ... \qquad (2.21) \\
&\quad ...\left(x-q^{(n-2)m}a\right)_q^m \left(x-q^{(n-1)m}a\right)_q^m
\end{aligned}$$

Claro que en la igualdad anterior, podemos conmutar la posición de m por n y tener una versión análoga como

$$\begin{aligned}(x-a)_q^{mn} &= (x-a)_q^n (x-q^n a)_q^n \left(x-q^{2n}a\right)_q^n \ldots \\ &\ldots \left(x-q^{(m-2)n}a\right)_q^n \left(x-q^{(m-1)n}a\right)_q^n\end{aligned} \tag{2.22}$$

En consecuencia se puede dar una definición que generaliza nuestras propiedades anteriores y las resume en una sola.

Definition 5 *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ entonces*

$$\begin{aligned}\left((x-a)_q^m\right)_q^n &= (x-a)_q^m \left(x-(q^m)^1 a\right)_q^m \left(x-(q^m)^2 a\right)_q^m \ldots \\ &\ldots \left(x-(q^m)^{(n-2)} a\right)_q^m \left(x-(q^m)^{(n-1)} a\right)_q^m .\end{aligned} \tag{2.23}$$

para $n \geq 1$

$$\left((x-a)_q^m\right)_q^n = 1 \textit{ para } n = 0 \tag{2.24}$$

Como una de las primeras propiedades que podemos mencionar, es el hecho de que la potencia de potencia de un q-Binomial se entiende como el q-Binomial elevado al producto de las potencias y que dichas potencias conmutan debido a la definición,

$$\left((x-a)_q^m\right)_q^n = (x-a)_q^{mn} = (x-a)_q^{nm} = \left((x-a)_q^n\right)_q^m \tag{2.25}$$

Igualmente tenemos la extensión de la definición (2.23) a números enteros, usando las igualdades sig. considerando también que $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}1 &= \left((x-a)_q^m\right)_q^0 = \left((x-a)_q^m\right)_q^{n-n} \\ &= (x-a)_q^{m(n-n)} = (x-a)_q^{mn+m(-n)} \\ &= (x-a)_q^{m(-n)} \left(x-q^{m(-n)}a\right)_q^{mn}\end{aligned}$$

por consiguiente, se concluye

$$\left((x-a)_q^m\right)_q^{-n} = \frac{1}{\left(x-q^{m(-n)}a\right)_q^{mn}} \tag{2.26}$$

Regresando a la propiedad original $(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n$, que solo la teníamos definida para Naturales, ahora nos encargaremos de extender y probar la igualdad para cualesquiera $m, n \in \mathbb{Z}$. Para ello necesitamos considerar 3 casos que atacaremos individualmente y otros 2 más que se demostraran de forma directa sobre la base de las definiciones o propiedades ya verificadas.

1. Cuando $m = 0$, $n = 0$ ó ambos son cero. Por definición

$$\begin{aligned} (x-a)_q^{m+n} &= (x-a)_q^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

y por otra parte

$$\begin{aligned} (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n &= (x-a)_q^0 \left(x-q^0 a\right)_q^0 \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Si $m = 0$ entonces $(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^n$, y también que

$$\begin{aligned} (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n &= (x-a)_q^0 \left(x-q^0 a\right)_q^n \\ &= 1\,(x-1a)_q^n \\ &= (x-a)_q^n \end{aligned}$$

El subcaso restante es análogo a este último y por tanto queda finalizado este apartado.

2. Cuando $m, n > 0$ es precisamente la demostración inicial de la propiedad

$$(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n$$

para Naturales.

3. Sean m y n tales que $m = -\tilde{m} < 0$ y $n = \tilde{n} > 0$, a partir de esto verifiquemos si $(x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n$ puede llevarnos al otro lado de la igualdad

$$\begin{aligned} (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n &= (x-a)_q^{-\tilde{m}} \left(x-q^{-\tilde{m}} a\right)_q^{\tilde{n}} \\ \text{Usando la fórmula } (2.20) \quad &= \frac{1}{(x-q^{-\tilde{m}}a)_q^{\tilde{m}}} \left(x-q^{-\tilde{m}} a\right)_q^{\tilde{n}} \\ &= \frac{\left(x-q^{-\tilde{m}}a\right)_q^{\tilde{n}}}{(x-q^{-\tilde{m}}a)_q^{\tilde{m}}} \end{aligned}$$

El cociente al cual hemos llegado tiene 2 posibles caminos a seguir haciendo distinción de que la potencia del numerador puede o no ser mayor que la potencia del denominador, y en base a esto usamos la propiedad (2.18) en las siguientes formas

$$\begin{aligned} (x-a)_q^{m+n} &= (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n \\ \frac{(x-a)_q^{m+n}}{(x-a)_q^m} &= (x-q^m a)_q^n \end{aligned} \tag{2.27}$$

donde el numerador, del cociente del lado izquierdo, es más grande que la potencia del denominador y ambos tienen misma base.

$$\begin{aligned} (x-a)_q^{m+n} &= (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n \\ \frac{1}{(x-q^m a)_q^n} &= \frac{(x-a)_q^m}{(x-a)_q^{m+n}} \end{aligned} \tag{2.28}$$

y aqui, sucede lo inverso que en el caso anterior, la potencia del denominador es mayor que la del numerador, aunque con la misma base y tanto en (2.27) como en (2.28) las potencias deben ser positivas.

$$\begin{aligned} (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n &= \frac{\left(x-q^{-\tilde{m}}a\right)_q^{\tilde{n}}}{(x-q^{-\tilde{m}}a)_q^{\tilde{m}}} \\ \text{Por } (2.27) \text{ y } (2.28) &= \left\{ \begin{array}{cc} \left(x-q^{\tilde{m}}\left(q^{-\tilde{m}}a\right)\right)_q^{\tilde{n}-\tilde{m}} & \text{si } \tilde{n} \geq \tilde{m} \\ \frac{1}{(x-q^{\tilde{n}}(q^{-\tilde{m}}a))_q^{\tilde{m}-\tilde{n}}} & \text{si } \tilde{m} > \tilde{n} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} (x-a)_q^{\tilde{n}-\tilde{m}} & \text{si } \tilde{n} \geq \tilde{m} \\ \frac{1}{\left(x-q^{-(\tilde{m}-\tilde{n})}a\right)_q^{\tilde{m}-\tilde{n}}} & \text{si } \tilde{m} > \tilde{n} \end{array} \right\} \\ \text{A partir de } (2.20) &= (x-a)_q^{\tilde{n}-\tilde{m}} \\ &= (x-a)_q^{m+n} \end{aligned}$$

4.Tomemos m, n de forma tal que ahora $m = \tilde{m} > 0$ y que $n = -\tilde{n} < 0$

$$\begin{aligned} (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n &= (x-a)_q^{\tilde{m}} \left(x-q^{\tilde{m}}a\right)_q^{-\tilde{n}} \\ \text{Haciendo uso de } (2.20) &= (x-a)_q^{\tilde{m}} \frac{1}{(x-q^{-\tilde{n}}(q^{\tilde{m}}a))_q^{\tilde{n}}} \\ &= \frac{(x-a)_q^{\tilde{m}}}{(x-q^{\tilde{m}-\tilde{n}}a)_q^{\tilde{n}}} \end{aligned}$$

Aquí tenemos que hacer uso de modificaciones en la igualdad

$$(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m \, (x-q^m a)_q^n$$

como en el apartado anterior.

$$\begin{aligned}
(x-a)_q^{m+n} &= (x-a)_q^m \, (x-q^m a)_q^n \\
\frac{(x-a)_q^{m+n}}{(x-q^m a)_q^n} &= (x-a)_q^m
\end{aligned} \tag{2.29}$$

y el caso inverso

$$\begin{aligned}
(x-a)_q^{m+n} &= (x-a)_q^m \, (x-q^m a)_q^n \\
\frac{1}{(x-a)_q^m} &= \frac{(x-q^m a)_q^n}{(x-a)_q^{m+n}}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Regresando a la igualdad en la cual nos habíamos quedado y usando lo que ya sacamos anteriormente,

$$\begin{aligned}
(x-a)_q^m \, (x-q^m a)_q^n &= \frac{(x-a)_q^{\tilde{m}}}{(x-q^{\tilde{m}-\tilde{n}} a)_q^{\tilde{n}}} \\
\text{Por } (2.29) \text{ y } (2.30) &= \left\{ \begin{array}{cc} (x-a)_q^{\tilde{m}-\tilde{n}} & \text{si } \tilde{m} \geq \tilde{n} \\ \frac{(x-a)_q^{\tilde{m}}}{(x-q^{\tilde{m}-\tilde{n}} a)_q^{\tilde{n}-\tilde{m}+\tilde{m}}} & \text{si } \tilde{n} > \tilde{m} \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} (x-a)_q^{\tilde{m}-\tilde{n}} & \text{si } \tilde{m} \geq \tilde{n} \\ \frac{(x-a)_q^{\tilde{m}}}{(x-q^{\tilde{m}-\tilde{n}} a)_q^{\tilde{n}-\tilde{m}} (x-q^{\tilde{n}-\tilde{m}}(q^{\tilde{m}-\tilde{n}} a))_q^{\tilde{m}}} & \text{si } \tilde{n} > \tilde{m} \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} (x-a)_q^{\tilde{m}-\tilde{n}} & \text{si } \tilde{m} \geq \tilde{n} \\ \frac{(x-a)_q^{\tilde{m}}}{\left(x-q^{-(\tilde{n}-\tilde{m})} a\right)_q^{\tilde{n}-\tilde{m}} (x-a)_q^{\tilde{m}}} & \text{si } \tilde{n} > \tilde{m} \end{array} \right\} \\
\text{Usando } (2.20) &= \left\{ \begin{array}{cc} (x-a)_q^{\tilde{m}-\tilde{n}} & \text{si } \tilde{m} \geq \tilde{n} \\ \frac{1}{\left(x-q^{-(\tilde{n}-\tilde{m})} a\right)_q^{\tilde{n}-\tilde{m}}} = (x-a)_q^{-(\tilde{n}-\tilde{m})} & \text{si } \tilde{n} > \tilde{m} \end{array} \right\} \\
&= (x-a)_q^{\tilde{m}-\tilde{n}} = (x-a)_q^{m+n}
\end{aligned}$$

5.El último caso a considerar es cuando $m = -\tilde{m} < 0$ y $n = -\tilde{n} < 0$

$$\begin{aligned}
(x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n &= (x-a)_q^{-\tilde{m}} \left(x-q^{-\tilde{m}}a\right)_q^{-\tilde{n}} \\
\text{Usando (2.20)} &= \frac{1}{(x-q^{-\tilde{m}}a)_q^{\tilde{m}}} \frac{1}{(x-q^{-\tilde{n}}(q^{-\tilde{m}}a))_q^{\tilde{n}}} \\
&= \frac{1}{(x-q^{-\tilde{m}}a)_q^{\tilde{m}} (x-q^{-\tilde{n}-\tilde{m}}a)_q^{\tilde{n}}} \\
&= \frac{1}{(x-q^{-\tilde{n}-\tilde{m}}a)_q^{\tilde{n}} (x-q^{\tilde{n}}(q^{-\tilde{n}-\tilde{m}}a))_q^{\tilde{m}}} \\
\text{Aplicando la def. (2.18)} &= \frac{1}{\left(x-q^{-(\tilde{n}+\tilde{m})}a\right)_q^{\tilde{n}+\tilde{m}}} \\
\text{Utilizando (2.20)} &= (x-a)_q^{-(\tilde{n}+\tilde{m})} \\
&= (x-a)_q^{m+n}
\end{aligned}$$

Como consecuencia del hecho de que se cumpla para todo par de enteros m y n, $(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n$, tenemos la siguiente proposición.

Proposition 10 *Para cualquier entero n, es valida la igualdad $D_q (x-a)_q^n = [n] (x-a)_q^{n-1}$*

Proof. Si $n=0$, entonces la igualdad es valida debido a $D_q (x-a)_q^0 = D_q(1) = 0 = [0](x-a)_q^{0-1}$, tomando en cuenta que $[0]=0$.

Si $n>0$, es la demostración inicial para la igualdad.

Si $n=-\tilde{n}<0$ hacemos uso de la regla para la q-derivación de un cociente

$$\begin{aligned}
D_q (x-a)_q^n &= D_q (x-a)_q^{-\tilde{n}} \\
&= D_q \frac{1}{(x-q^{-\tilde{n}}a)_q^{\tilde{n}}} \\
&= \frac{-[\tilde{n}]\left(x-q^{-\tilde{n}}a\right)_q^{\tilde{n}-1}}{(x-q^{-\tilde{n}}a)_q^{\tilde{n}} (qx-q^{-\tilde{n}}a)_q^{\tilde{n}}}
\end{aligned}$$

Como por definición

$$\begin{aligned}
\left(x-q^{-\tilde{n}}a\right)_q^{\tilde{n}} &= \left(x-q^{-\tilde{n}}a\right)\left(x-q^{-\tilde{n}+1}a\right)\left(x-q^{-\tilde{n}+2}a\right)... \\
&\quad ...\left(x-q^{-\tilde{n}+\tilde{n}-2}a\right)\left(x-q^{-\tilde{n}+\tilde{n}-1}a\right)
\end{aligned}$$

entonces aplicando la misma definición pero ahora al q-Binomio $\left(x-q^{-\tilde{n}}a\right)_q^{\tilde{n}-1}$, tenemos una relación entre ambos, a través de la igualdad

$$\left(x-q^{-\tilde{n}}a\right)_q^{\tilde{n}}=\left(x-q^{-\tilde{n}}a\right)_q^{\tilde{n}-1}\left(x-q^{-\tilde{n}+\tilde{n}-1}a\right)=\left(x-q^{-\tilde{n}}a\right)_q^{\tilde{n}-1}\left(x-q^{-1}a\right)$$

o en forma equivalente $\frac{\left(x-q^{-\tilde{n}}a\right)_q^{\tilde{n}-1}}{\left(x-q^{-\tilde{n}}a\right)_q^{\tilde{n}}}=\frac{1}{\left(x-q^{-1}a\right)}$. Sustituyendo esto en la igualdad $D_q\left(x-a\right)_q^n$, que nos habíamos quedado.

$$\begin{aligned}
D_q\left(x-a\right)_q^n &= \frac{-\left[\tilde{n}\right]\left(x-q^{-\tilde{n}}a\right)_q^{\tilde{n}-1}}{\left(x-q^{-\tilde{n}}a\right)_q^{\tilde{n}}\left(qx-q^{-\tilde{n}}a\right)_q^{\tilde{n}}}\\
&= \frac{-\left[\tilde{n}\right]}{\left(qx-q^{-\tilde{n}}a\right)_q^{\tilde{n}}\left(x-q^{-1}a\right)}\\
&= \frac{-\left[\tilde{n}\right]}{\left\{\left(qx-q^{-\tilde{n}}a\right)\left(qx-q^{-\tilde{n}+1}a\right)...\left(qx-q^{-1}a\right)\right\}\left(x-q^{-1}a\right)}\\
&= \frac{-\left[\tilde{n}\right]}{\left\{q\left(x-q^{-\tilde{n}-1}a\right)q\left(x-q^{-\tilde{n}}a\right)...q\left(x-q^{-2}a\right)\right\}\left(x-q^{-1}a\right)}\\
&= \frac{-\left[\tilde{n}\right]}{q^{\tilde{n}}\left(x-q^{-\tilde{n}-1}a\right)\left(x-q^{-\tilde{n}}a\right)...\left(x-q^{-2}a\right)\left(x-q^{-1}a\right)}\\
&= \frac{-\left(\frac{q^{\tilde{n}}-1}{q-1}\right)}{q^{\tilde{n}}\left(x-q^{-\tilde{n}-1}a\right)_q^{\tilde{n}+1}}\\
&= \frac{-\left(\frac{1-q^{-\tilde{n}}}{q-1}\right)}{\left(x-q^{-\tilde{n}-1}a\right)_q^{\tilde{n}+1}}\\
&= \frac{\left(\frac{q^{-\tilde{n}}-1}{q-1}\right)}{\left(x-q^{-\tilde{n}-1}a\right)_q^{\tilde{n}+1}}\\
&= \frac{\left[-\tilde{n}\right]}{\left(x-q^{-\tilde{n}-1}a\right)_q^{\tilde{n}+1}}=\frac{\left[n\right]}{\left(x-q^{n-1}a\right)_q^{-n+1}}=\left[n\right]\left(x-a\right)_q^{n-1}
\end{aligned}$$

■

2.2.3 Casos Especiales

La fórmula $D_q\left(x-a\right)_q^n=\left[n\right]\left(x-a\right)_q^{n-1}\ \forall n\in\mathbb{Z}$, no se aplica directamente a cierto tipo de problemas por el papel que desempeña q dentro de los q-Binomiales al momento de, por ejemplo: multiplicar por un -1 en el interior del q-Binomial; subir o bajar los q-Binomiales en un cociente y esto solo afectando al signo de la potencia o combinaciones de las anteriores como se muestra enseguida.

$$\frac{1}{(x-a)_q^n}, \quad (a-x)_q^n, \quad \frac{1}{(a-x)_q^n}$$

Para tratar de encontrar su q-derivada se analizan cambiando su apariencia con las propiedades que hemos obtenido hasta aquí, y un poco de definiciones.

Q-derivemos la primera expresión.

$$\begin{aligned} D_q \frac{1}{(x-a)_q^n} &= D_q \frac{1}{(x-q^{-n}(q^n a))_q^n} \\ &= D_q (x-q^n a)_q^{-n} \\ &= [-n] (x-q^n a)_q^{-n-1} \\ &= \frac{[-n]}{(x-q^{-n-1}(q^n a))_q^{n+1}} \\ &= \frac{[-n]}{(x-q^{-1}a)_q^{n+1}} \end{aligned}$$

Antes de iniciar con la q-derivada de $(a-x)_q^n$, aplicaremos un cambio en la apariencia de dicho q-Binomial para llevarlo a algo más conocido, que mostramos enseguida.

$$\begin{aligned} (a-x)_q^n &= (a-x)(a-qx)\left(a-q^2x\right)...\left(a-q^{n-1}x\right) \\ &= (a-x)\, q\left(q^{-1}a-x\right) q^2\left(q^{-2}a-x\right)...q^{n-1}\left(q^{-n+1}a-x\right) \\ &= q^{\frac{n(n-1)}{2}}(a-x)\left(q^{-1}a-x\right)\left(q^{-2}a-x\right)...\left(q^{-n+1}a-x\right) \\ &= (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}(x-a)\left(x-q^{-1}a\right)\left(x-q^{-2}a\right)...\left(x-q^{-n+1}a\right) \\ &= (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(x-q^{-n+1}a\right)\left(x-q^{-n+2}a\right)... \\ &\quad ...\left(x-q^{-2}a\right)\left(x-q^{-1}a\right)(x-a) \\ &= (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(x-q^{-n+1}a\right)_q^n \end{aligned}$$

lo cual ya nos ayuda para obtener su q-derivada

$$
\begin{aligned}
D_q (a-x)_q^n &= D_q (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(x - q^{-n+1} a\right)_q^n \\
&= (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} [n] \left(x - q^{-n+1} a\right)_q^{n-1} \\
&= (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} [n] \left(x - q^{-n+1} a\right) \left(x - q^{-n+2} a\right) ... \left(x - q^{-1} a\right) \\
&= (-1) q^{\frac{n(n-1)}{2}} [n] \left(q^{-1} a - x\right) \left(q^{-2} a - x\right) ... \left(q^{-n+2} a - x\right) \left(q^{-n+1} a - x\right) \\
&= (-1) [n] q \left(q^{-1} a - x\right) q^2 \left(q^{-2} a - x\right) ... q^{n-2} \left(q^{-n+2} a - x\right) q^{n-1} \left(q^{-n+1} a - x\right) \\
&= (-1) [n] (a - qx) \left(a - q^2 x\right) ... \left(a - q^{n-2} x\right) \left(a - q^{n-1} x\right) \\
&= (-1) [n] (a - qx)_q^{n-1}
\end{aligned}
$$

Y finalmente tenemos el caso en el que hacemos una combinación de los 2 anteriores en uno solo,

$$
\begin{aligned}
D_q \frac{1}{(a-x)_q^n} &= \frac{-D_q (a-x)_q^n}{(a-x)_q^n (a-qx)_q^n} \\
&= \frac{-\left\{(-1) [n] (a-qx)_q^{n-1}\right\}}{(a-x)_q^n (a-qx)_q^n} \\
&= \frac{[n] (a-qx) \left(a - q^2 x\right) ... \left(a - q^{n-2} x\right) \left(a - q^{n-1} x\right)}{(a-x)_q^n (a-qx) (a-q^2 x) ... (a - q^{n-1} x) (a - q^n x)} \\
&= \frac{[n]}{(a-x)_q^n (a - q^n x)} \\
&= \frac{[n]}{(a-x)_q^{n+1}}
\end{aligned}
$$

2.2.4 Rutinas y Scripts

A continuación, seguimos con las rutinas desarrolladas en Matlab 5.3. Tenemos 2 scripts en los que podremos calcular el q-factorial como fue definido en está sección, para números naturales, y para cualquier valor de q. El segundo nos permitirá trabajar con los q-Binomiales $(x+a)_q^n$, ya sea para evaluar una pareja de números en especifico junto con valores para q y una potencia n, ó poder calcular de forma simbólica la función que representaría para dichos valores y junto con la variable x.

%Script con el cual se hace un análogo del operador

```
%factorial con números naturales, a q-números.
function qfact = qfactorial (q,j)
residuo = rem (j,1);

%Hacemos dos posibles casos, cuando el valor de j es natural
% y cuando no, para entonces enviar una alerta.
if residuo==0 & j>=0
qfact=1;
for k=1:j

%En el caso cuando tenemos a j como un natural, aplicamos
%la recursividad para el cálculo del q-factorial.
qfact = qfact*qnumero(q,k);
end
else

%En caso de que j no sea natural, mostramos en pantalla
%una alerta con el error cometido.
disp ('El número debe ser un entero positivo.')
end
```

```
%Sript con el cual podemos ya sea calcular, simbólicamente un q-Binomial
%(x+a)q ^n como función, ó evaluar directamente para cualesquiera valores
%que no se encuentren registrados.
function qbin = qbinomial (x,a,n,q)
residuo = rem (n,1);

%Consideramos el primer caso de potencias naturales, para las cuales tenemos
%una fórmula en especifica, y es por ellos mismo la distinción de casos.
if residuo==0 & n>=0
qbin = 1;
for k= 1:n

%Con este término calculamos cada uno de los factores que intervienen
%dentro del producto de un q-Binomial.
suma = x+a*q^(k-1);

%Aquí hacemos el producto respectivo de cada uno de los términos
%que se obtuvieron en el paso previo.
qbin = qbin*suma;
end
```

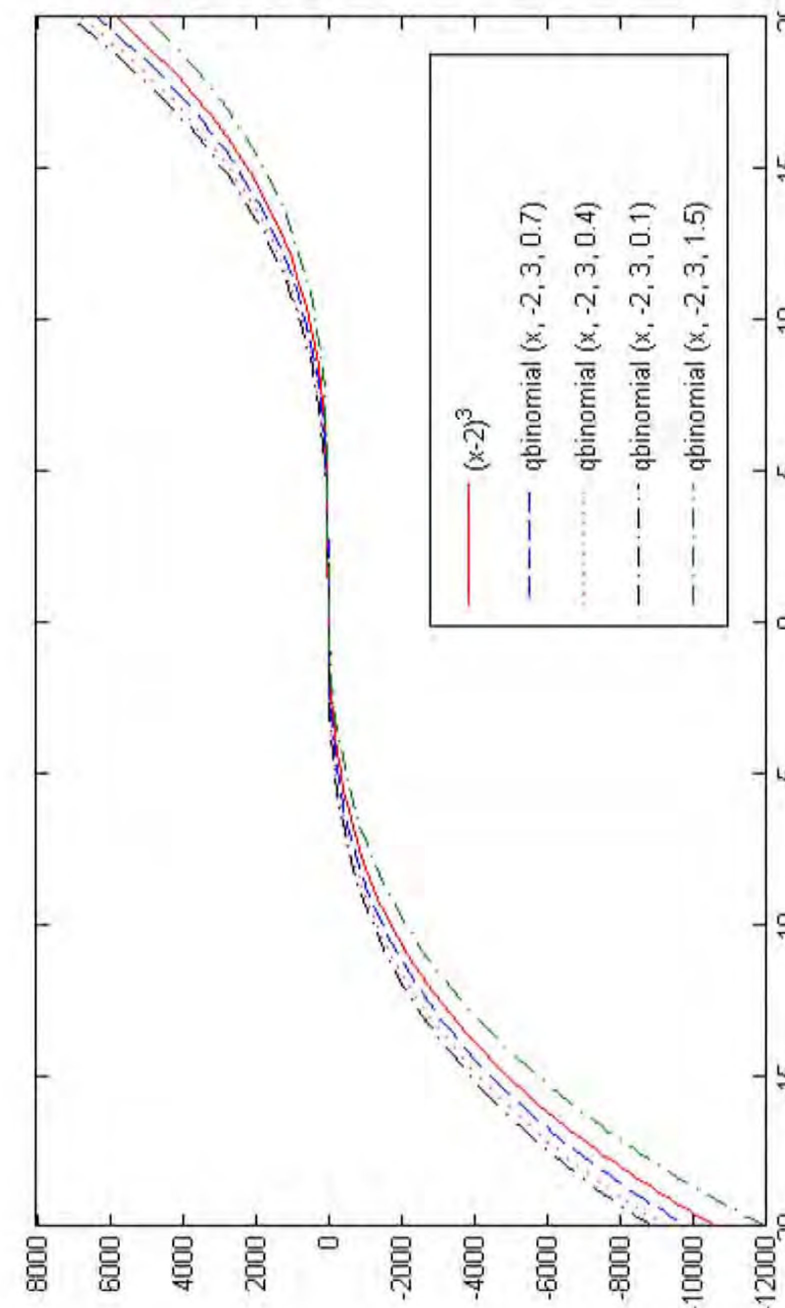
```
%Aquí el caso con potencias negativas.
elseif residuo==0 & n<0
qbin=1;
for k=1:-n
```

```
%Con este término calculamos cada uno de los factores que intervienen
%dentro del producto de un q-Binomial.
        suma= x+a*q^(n+k-1);
```

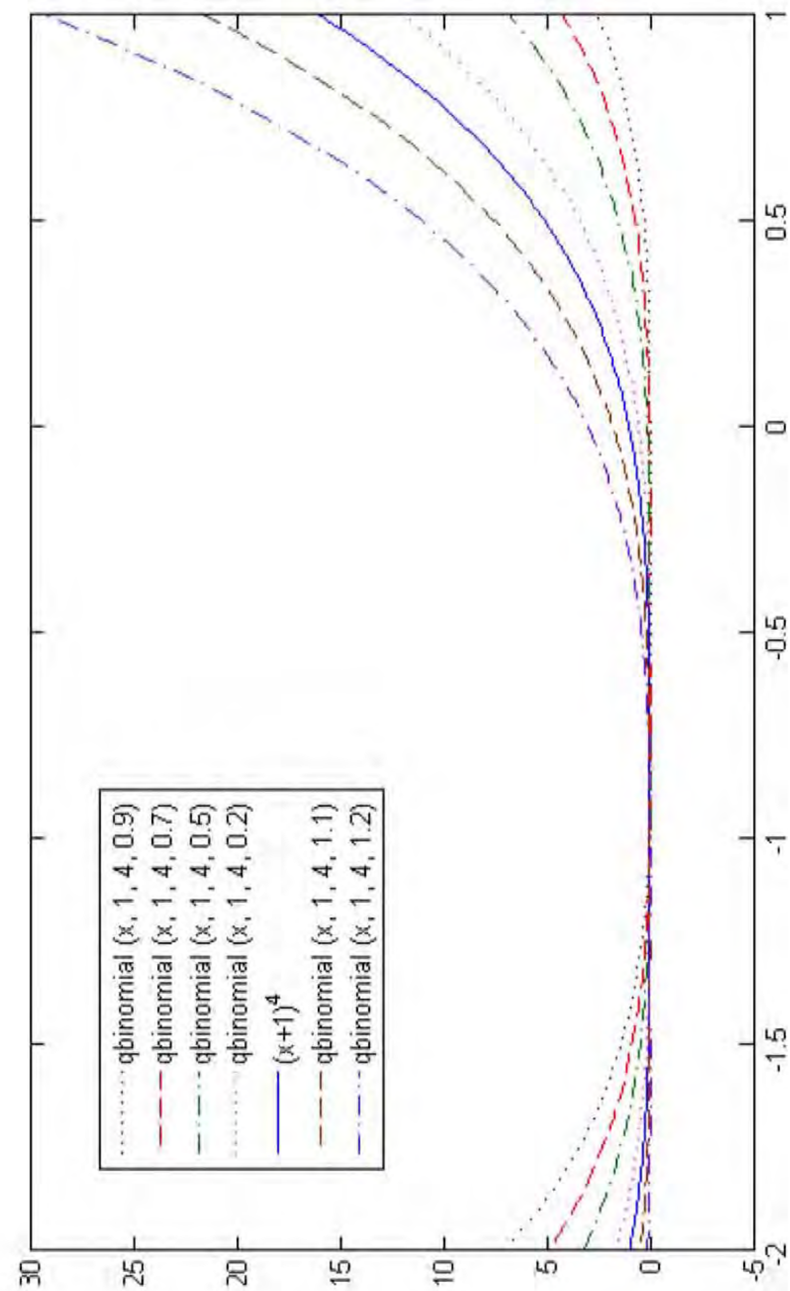
```
%Aquí hacemos el producto respectivo de cada uno de los términos
%que se obtuvieron en el paso previo.
qbin= qbin/suma;
end
else
```

```
%En está parte enviamos una alerta cuando la potencia no es entera.
disp ('La potencia debe ser entera.')
end
```

Las imágenes que presentamos en seguida, son resultado del uso de los anteriores programas al ser ejecutados en Matlab, y para lo cual hemos hecho uso de valores y funciones particulares, y de está forma se han calculado las siguientes gráficas con sus respectivas anotaciones.



Grafica de la funcin $(x-2)_q^3$ bajo diferentes valores de q.



Grafica de la funcin $(x+1)_q^4$ usando variaciones en los valores a q.

2.3 Desarrollos en series de Potencias

2.3.1 Generalización para Polinomios

Estamos listos para dar el q-desarrollo análogo al desarrollo en polinomios de una función. Necesitamos hacer uso de los q-Binomiales y q-Coeficientes Binomiales ya desarrollados, esto a su vez nos va servir en la sección siguiente para abordar el tema de las q-Funciones especiales.

Mientras tanto vamos a considerar algunos teoremas iniciales que se limiten a darnos un desarrollo finito de funciones, y que estén apoyados por una serie de hipótesis como un conjunto de Polinomios Base, como el que a continuación damos.

Theorem 11 *Si $a \in \mathbb{R}$, D es un operador lineal sobre el espacio de Polinomios y $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x), ...\}$ es un conjunto de Polinomios en los cuales se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. (a) $P_0(a) = 1$ y $P_n(a) = 0 \; \forall n \geq 1$
   (b) Grado $P_n = n$
   (c) $D\{P_n(x)\} = P_{n-1}(x) \; \forall n \geq 1$ y $D\{1\} = 0$

Theorem 12 *Entonces para cualquier polinomio $f(x)$, cuyo grado sea $N \in \mathbb{N}$, su representación a través del conjunto de Polinomios dados, es de la forma:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} (D^n f)(a) P_n(x) \tag{2.31}$$

Proof. Designemos por V el espacio de Polinomios de grado natural menor o igual a N. En consecuencia la dimensión de V es igual a $N+1$. Si tomamos el conjunto de Polinomios $\beta = \{P_0(x), P_1(x), P_2(x), ..., P_N(x)\}$, estos constituyen una base para V por 2 razones: el grado de cada polinomio del conjunto es distinto del resto por el inciso b) de las hipótesis; es un conjunto de $N+1$ polinomios en V. Entonces cualquier elemento de V lo podemos representar como una combinación lineal de elementos de nuestra base β como a continuación se muestra.

$$\begin{aligned} \text{si } f(x) &\in V \\ f(x) &= \sum_{j=0}^{N} c_j P_j(x) \end{aligned} \tag{2.32}$$

donde c_j son constantes únicas para cada $j \in \{0, 1, 2, 3, ..., N\}$. Al evaluar (2.32) en $x = a$ y apoyarnos en los incisos a) y c).

$$\begin{aligned}
f(a) &= \sum_{j=0}^{N} c_j P_j(a) \\
&= c_0 P_0(a) + c_1 P_1(a) + c_2 P_2(a) + \ldots + c_N P_N(a) \\
&= c_0(1) + c_1(0) + c_2(0) + \ldots + c_N(0) \\
&= c_0
\end{aligned}$$

Aplicando el operador D sobre (2.32), evaluando en $x = a$ y haciendo uso de los incisos antes comentados, se obtiene

$$\begin{aligned}
D(f(x)) &= D\left(\sum_{j=0}^{N} c_j P_j(x)\right) \\
&= c_0 D(P_0(x)) + c_1 D(P_1(x)) + c_2 D(P_2(x)) + \ldots + c_N D(P_N(x)) \\
&= c_0(0) + c_1(P_0(x)) + c_2(P_1(x)) + \ldots + c_N(P_{N-1}(x)) \\
\Longrightarrow\ & D(f)(a) = c_0(0) + c_1(P_0(a)) + c_2(P_1(a)) + \ldots + c_N(P_{N-1}(a)) \\
&= c_0(0) + c_1(1) + c_2(0) + \ldots + c_N(0) \\
&= c_1
\end{aligned}$$

En general para el operador $D^k = D(D(\ldots(D)))$,

$$\begin{aligned}
D^k(f(x)) &= D^k\left(\sum_{j=0}^{N} c_j P_j(x)\right) \text{ para } 1 \leq k \leq N \\
&= c_0 D^k(P_0(x)) + c_1 D^k(P_1(x)) + c_2 D^k(P_2(x)) + \ldots + \\
&\quad + c_k D^k(P_k(x)) + c_{k+1} D^k(P_{k+1}(x)) + \ldots + c_N D^k(P_N(x)) \\
&= c_0 D^{k-1}(0) + c_1 D^{k-2}(0) + c_2 D^{k-3}(0) + \ldots + \\
&\quad + c_k(P_0(x)) + c_{k+1}(P_1(x)) + \ldots + c_N(P_{N-k}(x)) \\
\Longrightarrow\ & D^k(f)(a) = c_0 D^{k-1}(0) + c_1 D^{k-2}(0) + c_2 D^{k-3}(0) + \ldots + \\
&\quad + c_k(P_0(a)) + c_{k+1}(P_1(a)) + \ldots + c_N(P_{N-k}(a)) \\
&= c_k(1) + c_{k+1}(0) + \ldots + c_N(0) \\
&= c_k \\
\therefore\ & c_k = D^k(f)(a) \quad \forall k \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j P_j(x) = \sum_{j=0}^{N} D^j(f)(a) P_j(x)$$

■

Este teorema en particular, bajo las condiciones en las cuales tomamos al operador $D = \frac{d}{dx}$ y $P_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}$, nos da como resultado la expansión de Taylor para un polinomio de grado N alrededor de $x = a$. Como queremos formular la q-versión de está expansión, añadimos nuestros polinomios base, que ya construimos en secciones anteriores, y el operador que sera por supuesto la q-derivada.

2.3.2 q-Teorema de Taylor

Theorem 13 *Para cualquier polinomio de grado N, y cualquier número c, tenemos la q-expansión de Taylor como*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} \left(D_q^j f\right)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]!} \tag{2.33}$$

Proof. La demostración es inmediata del teorema (2.31), simplemente tomando en cuenta que ya tenemos probado que D_q es un operador lineal y por la definición de los q–Binomiales $(x-c)_q^j$, tenemos que su grado es j, luego para cada $j \in \{0, 1, 2, ..., N\}$, $(x-c)_q^j$ es un q-polinomio de grado distinto de los demás y así tenemos un conjunto linealmente independiente que se anulan en c. Además de que al formar los q-Binomiales $\frac{(x-c)_q^j}{[j]!}$ y q-derivarlos, esto nos da como resultado el q-polinomial $\frac{(x-c)_q^{j-1}}{[j-1]!}$, así pues el teorema se cumple. ■

2.3.3 q-Fórmula de Taylor para series de potencias formales

Una ves que ya tenemos los elementos suficientes acerca de los desarrollos finitos de Polinomios de grado N, vamos a pasar con expansiones de funciones en serie de potencias formales, en los cuales al igual que con los polinomios de grado finito, primero expondremos un teorema que generaliza para cualquier operador D y conjunto de Polinomios $\{P_0, P_1, P_2, ..., P_N, ...\}$, un resultado acerca de la representación de dichas series infinitas. Para después pasar al caso particular del operador D_q junto con el conjunto infinito de q-Binomiales representando a dichas series de potencias formales. Por último, vamos a dar algunos ejemplos útiles, para secciones posteriores, de algunas funciones que crearemos pero surgen solo en expansiones infinitas en el Cálculo tradicional.

Theorem 14 *Supóngase que D es un operador lineal sobre el espacio de series de potencias formales y $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), ...\}$ es un conjunto de polinomios tales que se satisfacen las condiciones siguientes para a un real arbitrario:*

1. *(a)* $P_0(a) = 1$ *y* $P_n(a) = 0$ *para cualquier* $n \geq 1$

   (b) $Grado\ P_n = n$

   (c) $DP_n(x) = P_{n-1}(x)$ *para cualquier* $n \geq 1$, *y* $D(1) = 0$

   (d) $D\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Dg_k(x)$, $\forall x \in Domg_k(x)$ *y siendo* $g_k(x)$ *un polinomio de grado* k

Entonces, cualquier serie de potencias formal $f(x)$ puede ser expresado como una serie de Taylor generalizada alrededor de a, es decir, como una serie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(D^k f\right)(a) P_k(x) \tag{2.34}$$

Proof. Estamos suponiendo que tenemos una serie formal de potencias

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

en la cual se esta ignorando, en un principio, los problemas de convergencia, esto entre comillas porque realmente no lo usaremos.

Sabemos por la formula de Taylor (2.31) para polinomios finitos que

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} D^j(f)(a) P_j(x)$$

y queremos demostrar que está definición se puede extender a polinomios infinitos, como es el caso de z. En particular es valida para x^k, como polinomio finito, podemos darle una representación en una q-expansión de Taylor alrededor de $x = a$ con el conjunto de polinomios $\{P_0, P_1, P_2, ..., P_k\}$

$$x^k = \sum_{j=0}^{k} \left(D^j x^k\right)(a) P_j(x)$$

y usarla para cambiar la forma de z

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

entonces combinando ambos resultados podemos tener

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left\{ \sum_{j=0}^{k} \left(D^j x^k \right)(a) \, P_j(x) \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} c_k \left(D^j x^k \right)(a) \, P_j(x) \end{aligned}$$

en la que podemos hacer un cambio de variable para tener un reordenamiento en cuanto a las sumas y sus limites superiores, para ello consideramos el cambio $k = j+n$, lo que implica que

$$z = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{j+n} \left(D^j x^{j+n} \right)(a) \, P_j(x)$$

Como suponemos que el operador D conmuta con una suma infinita de polinomios, entonces podemos sacarlo de la primera suma, ya que este no depende del índice n, con el que se está sumando, además podemos sacar el factor de los polinomios que se están contabilizando con j

$$z = \sum_{j=0}^{\infty} D^j \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{j+n} x^{j+n} \right)(a) \, P_j(x) \tag{2.35}$$

a partir de aquí vamos a considerar lo siguiente, como $z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ... + c_t x^t + ...$ para todo $t \in \mathbb{N}$, y en particular para cuando $t = j$, el j que interviene en una de las 2 sumas infinitas iteradas anteriores. Lo que nos permite hacer la siguiente igualdad y reordenación

$$\begin{aligned} z &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ... + c_j x^j + ... \\ &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ... + c_{j-1} x^{j-1} + c_j x^j + c_{j+1} x^{j+1} + ... \\ &= \sum_{r=0}^{j-1} c_r x^r + \sum_{s=j}^{\infty} c_s x^s \\ &= \sum_{r=0}^{j-1} c_r x^r + \sum_{s=0}^{\infty} c_{s+j} x^{s+j} \end{aligned}$$

de la ultima igualdad vemos que el segundo término de la suma, es idéntico a $\sum_{n=0}^{\infty} c_{j+n} x^{j+n}$, con excepción del parámetro con el que recorremos la suma, en consecuencia al despejar obtenemos

$$\sum_{s=0}^{\infty} c_{s+j} x^{s+j} = z - \sum_{r=0}^{j-1} c_r x^r$$

que sustituimos en (2.35)

$$\begin{aligned} z &= \sum_{j=0}^{\infty} D^j \left(z - \sum_{r=0}^{j-1} c_r x^r \right)(a)\, P_j(x) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ D^j(z) - D^j \left(\sum_{r=0}^{j-1} c_r x^r \right) \right\}(a)\, P_j(x) \end{aligned} \tag{2.36}$$

pero el operador aplicado j-veces a la suma $\sum_{r=0}^{j-1} c_r x^r$ es cero debido a que es un polinomio de grado $j-1$, luego debe tener una representación en q-serie de Taylor finita con el conjunto de polinomios que tenemos y bajo las propiedades que ellos cumplen junto con D obtenemos

$$\sum_{r=0}^{j-1} c_r x^r = \sum_{m=0}^{j-1} h_m P_m(x)$$

como $P_0(a) = 1$ y éste tiene grado cero, debe ser una función constante y valer lo mismo para todo x en su dominio, por lo tanto $P(x) = 1$, y como $D(1) = 0$ eso implica que $D(P_0(x)) = 0$. Entonces podemos probar la afirmación que hicimos hace unos momentos, como sigue

$$\begin{aligned} D^j \left(\sum_{r=0}^{j-1} c_r x^r \right) &= D^j \left(\sum_{m=0}^{j-1} h_m P_m(x) \right) \\ &= D^j \left(h_0 P_0(x) + h_1 P_1(x) + ... + h_{j-1} P_{j-1}(x) \right) \\ &= D^{j-1} \{ h_0 D P_0(x) \} + D^{j-2} \left\{ h_1 D^2 P_1(x) \right\} + ... \\ &\quad ... + h_{j-1} D^j P_{j-1}(x) \\ &= D^{j-1} \{ h_0 * 0 \} + D^{j-2} \{ h_1 * 0 \} + ... + h_{j-1} * 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

por lo que al tomar en cuenta esto en la igualdad (2.36) concluimos que

$$z = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ D^j(z) \right\}(a)\, P_j(x)$$

lo que queríamos probar. ■

Ahora probemos un resultado que necesitamos para obtener un corolario inmediato y necesario en los desarrollos infinitos de funciones, con la q-derivada y los q-binomiales.

Theorem 15 *Sea $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones q-derivables en x_0, entonces la q-derivada de $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ es igual a $\sum_{n=0}^{\infty} D_q(f_n(x_0))$*

Proof. Aplicamos directamente la definición de q-derivada a la serie infinita y hacemos uso de las propiedades que se tienen para sumas infinitas de funciones

$$\begin{aligned}
D_q\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\left(x_0\right)\right) &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} f_n\left(qx_0\right)-\sum_{n=0}^{\infty} f_n\left(x_0\right)}{(q-1)\,x_0} \\
&= \frac{1}{(q-1)\,x_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{f_n\left(qx_0\right)-f_n\left(x_0\right)\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{f_n\left(qx_0\right)-f_n\left(x_0\right)}{(q-1)\,x_0}\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{D_q f_n\left(x_0\right)\right\} \\
\therefore\ & D_q\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\left(x_0\right)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{D_q f_n\left(x_0\right)\right\} \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

lo que prueba nuestra afirmación. ■

El siguiente resultado es una aplicación directa del teorema 14 apoyandose del teorema 15, en el que hemos sustituido como caso particular el operador D por la q-derivada, y el conjunto de polinomios por los q-Binomiales. Sabemos que estos 2 datos satisfacen las condiciones de los 3 primeros incisos del teorema, el cuarto inciso que se agregó con respecto del teorema generalizado de Taylor, se ha comprobado en el anterior teorema, por lo cual es evidente el corolario siguiente.

Corollary 16 *Cualquier serie de potencias formal $f(x)$ puede ser expresado como una q-serie de Taylor*

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(D_q^j f\right)(a)\,\frac{(x-a)_q^j}{[j]!} \qquad (2.38)$$

para cualquier a que sea real.

2.3.4 Ejemplos de desarrollos en q-serie de Taylor finitos e infinitos

Los siguientes casos a estudiar con la q-expansión de Taylor, tanto de forma finita como infinita, son ejemplos de como emplear los teoremas anteriores, pero además los mismos casos que veremos nos servirán para representar funciones útiles y necesarias más adelante.

Sea $f(x)=(x+a)_q^n$ el q-Binomial de grado n con las características que ya conocemos, apliquemos el desarrollo de tipo (2.33) alrededor de $x=0$. Para esto tenemos que cuando $j\leq n$, el operador D_q^j sobre la función f es igual a

$$\left(D_q^j f\right)(x)=[n]\,[n-1]\ldots[n-j+1]\,(x+a)_q^{n-j}$$

si consideramos

$$(x+a)_q^{n-j}=(x+a)\,(x+qa)\ldots\left(x+q^{n-j-1}a\right)$$

que al evaluarse en $x=0$ da como resultado

$$(0+a)_q^{n-j}=q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}}a^{n-j}$$

entonces

$$\left(D_q^j f\right)(0)=[n]\,[n-1]\ldots[n-j+1]\,q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}}a^{n-j}$$

y la q-expansión de Taylor queda así

$$\begin{aligned}(x+a)_q^n &= \sum_{j=0}^{n}\frac{[n]\,[n-1]\ldots[n-j+1]\,q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}}a^{n-j}}{[j]!}x^j\\ &= \sum_{j=0}^{n}\frac{[n]\,[n-1]\ldots[n-j+1]\,[n-j]!q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}}a^{n-j}}{[j]!\,[n-j]!}x^j\\ &= \sum_{j=0}^{n}\frac{[n]!}{[j]!\,[n-j]!}q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}}a^{n-j}x^j\\ &= \sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix} n\\ j\end{bmatrix}q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}}a^{n-j}x^j\end{aligned}$$

Aqui hemos hecho uso de una notación particular, en la cual estamos considerando que al tomar el cociente de $\frac{[n]!}{[j]![n-j]!}$, lo identificaremos con el simbolo $\begin{bmatrix} n\\ j\end{bmatrix}$, que corresponde de alguna forma, a lo que pasa en el cociente $\frac{(n)!}{(j)!(n-j)!}$ y $\begin{pmatrix} n\\ j\end{pmatrix}$.

En particular se tiene que cuando $q\longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}
\lim_{q\longrightarrow 1}(x+a)_q^n &= \lim_{q\longrightarrow 1}\sum_{j=0}^{n}\left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right] q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}} a^{n-j}x^j \\
&= \sum_{j=0}^{n}\lim_{q\longrightarrow 1}\left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right] q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}} a^{n-j}x^j \\
&= \sum_{j=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right) a^{n-j}x^j \\
&= (x+a)^n
\end{aligned}$$

debido a que $\lim_{q\longrightarrow 1}[n]=n$, lo cual implica que $\lim_{q\longrightarrow 1}[n]!=(n)!$, y esto a su vez que $\lim_{q\longrightarrow 1}\left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right]=\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right)$.

Antes de pasar a los desarrollos infinitos, veamos una relación importante; la de los Binomiales $(x+y)^n$, con los q-desarrollos de Taylor siempre y cuando los factores que intervienen en el q-Binomial, cumplan con la regla de conmutatividad $yx=qxy$. Enunciémoslo como un Teorema.

Theorem 17 *Si $x,y\in\mathbb{R}$, son tales que se satisface la igualdad $yx=qxy$, donde q es un real que conmuta con x e y, entonces*

$$(x+y)^n=\sum_{j=0}^{n}\left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right] x^j y^{n-j} \tag{2.39}$$

Proof. Haremos la demostración por inducción sobre n.

Si $n=1$.

$$\begin{aligned}
(x+y) &= \sum_{j=0}^{1}\left[\begin{array}{c} 1 \\ j \end{array}\right] x^j y^{1-j} \\
&= \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right] x^0 y^{1-0}+\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right] x^1 y^{1-1} \\
&= \frac{[1]!}{[0]!\,[1]!}y+\frac{[1]!}{[1]!\,[0]!}x \\
&= 1*y+1*x
\end{aligned}$$

es decir, se cumple (2.39).

A partir de suponer que se cumple (2.39) para $n=k$.

$$(x+y)^k = \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} x^j y^{k-j}$$

demostremos que se cumple cuando $n = k+1$.
Notemos que por la propiedad $yx = qxy$, se tiene que

$$y^k x = qy^{k-1}xy = q^2 y^{k-2} x y^2 = ... = q^k x y^k$$

en consecuencia

$$\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} &= (x+y)^k (x+y) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} x^j y^{k-j} \right) (x+y) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} x^j y^{k-j} x + \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} x^j y^{k-j} y \\
&= \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} x^j \left(q^{k-j} x y^{k-j} \right) + \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} x^j y^{k-j+1} \\
& \quad \text{si recorremos la primera suma, haciendo un cambio} \\
\text{de variable } j &= r-1 \text{, y por fines prácticos, regresamos} \\
& \quad r \text{ al subindice } j. \\
(x+y)^{k+1} &= \sum_{j=1}^{k+1} q^{k-j+1} \begin{bmatrix} k \\ j-1 \end{bmatrix} x^j y^{k-j+1} + \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} x^j y^{k-j+1} \\
&= x^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} q^{k-j+1} \begin{bmatrix} k \\ j-1 \end{bmatrix} x^j y^{k-j+1} + \\
& \quad + \sum_{j=1}^{k} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} x^j y^{k-j+1} + y^{k+1} \\
&= x^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \left(q^{k-j+1} \begin{bmatrix} k \\ j-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} \right) x^j y^{k-j+1} + y^{k+1} \\
&= x^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \left(\begin{bmatrix} k+1 \\ j \end{bmatrix} \right) x^j y^{k-j+1} + y^{k+1} \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \left(\begin{bmatrix} k+1 \\ j \end{bmatrix} \right) x^j y^{k+1-j}
\end{aligned}$$

lo que prueba la inducción y por ello la propiedad (2.39). ■

En la anterior demostración, usamos una propiedad de los q-números que no habíamos demostrado, pero que a continuación comprobaremos.

Proposition 18 *Para $n, j \in \mathbb{N}$ y $n-1 \geq j \geq 1$, se cumplen las identidades siguientes*

$$\left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ j-1 \end{array}\right] + q^j \left[\begin{array}{c} n-1 \\ j \end{array}\right] \tag{2.40}$$

y la igualdad

$$\left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right] = q^{n-j} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ j-1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} n-1 \\ j \end{array}\right] \tag{2.41}$$

Proof. Considerando que $n-1 \geq j \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} [n] &= 1 + q + ... + q^{n-1} \\ &= \left(1 + q + q^2 + ... + q^{j-1}\right) + q^j \left(1 + q + ... + q^{n-j-1}\right) \\ &= [j] + q^j [n-j] \end{aligned}$$

que aplicandolo en $\left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right]$

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right] &= \frac{[n]!}{[j]!\,[n-j]!} = \frac{[n-1]!\,[n]}{[j]!\,[n-j]!} \\ &= \frac{[n-1]!\left([j] + q^j [n-j]\right)}{[j]!\,[n-j]!} \\ &= \frac{[n-1]!}{[j-1]!\,[n-j]!} + q^j \frac{[n-1]!}{[j]!\,[n-j-1]!} \\ &= \left[\begin{array}{c} n-1 \\ j-1 \end{array}\right] + q^j \left[\begin{array}{c} n-1 \\ j \end{array}\right] \end{aligned}$$

lo cual prueba la igualdad en (2.40).

Para la propiedad (2.41), usamos la igualdad (2.40) ya probada, y el hecho de que

$$\left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right] = \frac{[n]!}{[j]!\,[n-j]!} = \frac{[n]!}{[n-j]!\,[j]!} = \left[\begin{array}{c} n \\ n-j \end{array}\right] \tag{2.42}$$

Entonces, podemos hacer lo siguiente

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{c} n \\ n-j \end{array}\right], \text{por } (2.42) \\ &= \left[\begin{array}{c} n-1 \\ n-j-1 \end{array}\right] + q^{n-j} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ n-j \end{array}\right], \text{por } (2.40) \\ &= \left[\begin{array}{c} n-1 \\ j \end{array}\right] + q^{n-j} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ j-1 \end{array}\right], \text{por } (2.42) \end{aligned}$$

■

De esta forma queda demostrado y concluido el detalle que nos hacía falta para la demostración del Teorema anterior, y al mismo tiempo nos permite concluir la parte de los desarrollos finitos y comenzar con lo siguiente.

Ahora procedamos con las expansiones, pero con q-series de Taylor infinitas, de las funciones $\frac{1}{(x-a)_q^n}$, $(a-x)_q^n$ y $\frac{1}{(a-x)_q^n}$. Todas y cada una de ellas alrededor de $x=0$.

Consideremos $f(x)=(a-x)_q^n$, sabemos que

$$
\begin{aligned}
D_q f(x) &= -[n](a-qx)_q^{n-1} \\
D_q^2 f(x) &= -[n] D_q (a-qx)_q^{n-1} \text{ haciendo el cambio } u=qx \\
\text{y considerando que } D_q u &= q \\
-[n] D_q (a-qx)_q^{n-1} &= -[n] D_q (a-u)_q^{n-1} \\
&= -[n]\left(-[n-1](a-qu)_q^{n-2}\right) D_q u \\
&= (-1)^2 [n][n-1]\left(a-q^2x\right)_q^{n-2} q \\
&\therefore \quad D_q^2 f(x) = (-1)^2 [n][n-1]\left(a-q^2x\right)_q^{n-2} q \\
&\vdots \\
D_q^j f(x) &= (-1)^j [n][n-1]\ldots[n-j+1]\left(a-q^jx\right)_q^{n-j} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \\
&= (-1)^j \frac{[n]!}{[n-j]!}\left(a-q^jx\right)_q^{n-j} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \\
&\Longrightarrow \quad \left(D_q^j f\right)(0) = (-1)^j \frac{[n]!}{[n-j]!} a^{n-j} q^{\frac{j(j-1)}{2}}
\end{aligned}
$$

por lo cual la q-serie de Taylor que representa a dicha función f está dado por la fórmula

$$
\begin{aligned}
(a-x)_q^n &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{[n]!}{[n-j]!\,[j]!}\left(a-q^jx\right)_q^{n-j} q^{\frac{j(j-1)}{2}} x^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} a^{n-j} q^{\frac{j(j-1)}{2}} x^j
\end{aligned}
$$

Estos fueron algunos desarrollos finitos, vamos ahora a realizar con dos desarrollos infinitos tan importantes como los anteriores. Tomemos $f(x)=\frac{1}{(x-a)_q^n}$, e igual que antes desarrollémosla alrededor del cero, suponiendo que está función y la que sigue ya de entrada tienen una expansión en serie de potencias formal, por lo que pueden tener su desarrollo infinito de Taylor.

$$\begin{aligned}
D_q f(x) &= \frac{[-n]}{(x-q^{-1}a)_q^{n+1}} \\
D_q^2 f(x) &= \frac{[-n][-n-1]}{(x-q^{-1}(q^{-1}a))_q^{n+2}} = \frac{[-n][-n-1]}{(x-q^{-2}a)_q^{n+2}} \\
&\vdots \\
D_q^j f(x) &= \frac{[-n][-n-1]\ldots[-n-j+1]}{(x-q^{-j}a)_q^{n+j}} \\
&\Longrightarrow \left(D_q^j f\right)(0) = \frac{[-n][-n-1]\ldots[-n-j+1]}{(0-q^{-j}a)(0-q^{-j+1}a)(0-q^{-j+2}a)\ldots(0-q^{n-1}a)} \\
&= \frac{[-n][-n-1]\ldots[-n-j+1]}{(-1)^{n+j}a^{\frac{(n+j)(n+j+1)}{2}}q^{\frac{n(n-1)-j(j+1)}{2}}}
\end{aligned}$$

por lo cual la representación está dada en la forma

$$\frac{1}{(x-a)_q^n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[-n][-n-1]\ldots[-n-j+1]}{(-1)^{n+j}a^{\frac{(n+j)(n+j+1)}{2}}q^{\frac{n(n-1)-j(j+1)}{2}}[j]!}x^j$$

Por último, consideremos la función $f(x) = \frac{1}{(a-x)_q^n}$

$$\begin{aligned}
D_q f(x) &= \frac{[n]}{(a-x)_q^{n+1}} \\
D_q^2 f(x) &= \frac{[n][n+1]}{(a-x)_q^{n+2}} \\
&\vdots \\
D_q^j f(x) &= \frac{[n][n+1]\ldots[n+j-1]}{(a-x)_q^{n+j}} \\
&\Longrightarrow \left(D^j f\right)(0) = \frac{[n][n+1]\ldots[n+j-1]}{a^{n+j}}
\end{aligned}$$

y nuestro desarrollo queda así

$$\frac{1}{(a-x)_q^n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[n][n+1]\ldots[n+j-1]}{a^{n+j}[j]!}x^j$$

Pongamos especial atención en 2 representaciones muy particulares, para las cuales encontraremos aplicación en la sección siguiente, sin embargo desde ahora veamos algunas características de las expresiones

$$(1+x)_q^n \text{ y } \frac{1}{(1-x)_q^n}$$

Si suponemos $|q| < 1$ y tomamos el limite cuando $n \longrightarrow \infty$ en las fórmulas respectivas que hemos encontrado para cada función, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{Por un lado } \lim_{n\longrightarrow\infty}[n] &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} \\
&\Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{[n]!}{[j]!\,[n-j]!} \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{[n]\,[n-1]\,...\,[n-j+2]\,[n-j+1]}{[1]\,[2]\,...\,[j-1]\,[j]} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{1-q}\right)^j}{\frac{(1-q)(1-q^2)...(1-q^{j-1})(1-q^j)}{(1-q)^j}} \\
&= \frac{1}{(1-q)\,(1-q^2)\,...\,(1-q^{j-1})\,(1-q^j)}
\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{[n]\,[n+1]\,...\,[n+j-2]\,[n+j-1]}{[1]\,[2]\,...\,[j-1]\,[j]} &= \frac{\left(\frac{1}{1-q}\right)^j}{\frac{(1-q)(1-q^2)...(1-q^{j-1})(1-q^j)}{(1-q)^j}} \\
&= \frac{1}{(1-q)\,(1-q^2)\,...\,(1-q^{j-1})\,(1-q^j)}
\end{aligned}$$

lo cual nos permite escribir

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty}(1+x)_q^n &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{j=0}^{n} q^{\frac{j(j-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j \\
(1+x)_q^\infty &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{j(j-1)}{2}}x^j}{(1-q)\,(1-q^2)\,...\,(1-q^j)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{j(j-1)}{2}}\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{\left(\frac{1-q}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)...\left(\frac{1-q^j}{1-q}\right)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{j(j-1)}{2}}\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{[j]!}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{(1-x)_q^n} &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[n]\,[n+1]\,...\,[n+j-1]}{[j]!}x^j \\
\frac{1}{(1-x)_q^{\infty}} &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{(1-q)\,(1-q^2)\,...\,(1-q^j)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{\left(\frac{1-q}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)\cdots\left(\frac{1-q^j}{1-q}\right)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{[j]!}
\end{aligned}$$

es decir,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{j(j-1)}{2}}x^j}{[j]!} = (1+(1-q)\,x)_q^{\infty} \tag{2.43}$$

y

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{[j]!} = \frac{1}{(1-(1-q)\,x)_q^{\infty}} \tag{2.44}$$

2.4 q-Funciones Especiales

2.4.1 Definición de dos q-Funciones Exponenciales

En general las funciones que conocemos como exponencial y logarítmica, no dependen directamente de la forma en que se derivan las funciones, sin embargo, cumple un aspecto fundamental en cuanto al resultado que se obtiene bajo el operador que tengamos como derivada con respecto de la función que se deriva. Por ejemplo, la misma función $\exp(x)$ cuando le aplicamos la derivación común, obtenemos como resultado la misma $\exp(x)$, lo cual se traduce en que cuando se tiene la ecuación diferencial $\acute{y}(x) = y(x)$, $\exp(x)$ es una solución salvo por una constante. De aquí mismo nos damos cuenta que el operador que entendamos como "Derivación", obliga a que las propiedades que cumplían ciertas funciones, se puedan generalizar para cualquier operador que propongamos como el análogo de la derivación. Es por eso que podemos determinar ciertas funciones a las que llamaremos q-Funciones Especiales en base de los Teoremas de Taylor para Polinomios y Series de Potencia Infinitas.

Definition 6 *Una primera función q-exponencial análoga a la función exponencial está dada en serie de potencias, en la forma*

$$e_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]!}$$

la cual al q-derivarla, se obtiene

$$\begin{aligned} D_q\left(e_q^x\right) &= D_q\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} D_q\left(\frac{x^n}{[n]!}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]\, x^{n-1}}{[n]!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{[n-1]!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]!} = e_q^x \end{aligned}$$

que por la igualdad (2.44) se escribe así

$$\frac{1}{(1-(1-q)\,x)_q^{\infty}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x)^j}{[j]!} = e_q^x$$

lo cual nos da una interpretación opcional de la q-exponencial partiendo de los q-Binomiales que ya teníamos y nos da la ventaja de ser mas manejable y asi poder determinar algunas propiedades en lugar de operar con las sumas infinitas.

Para ilustrar lo que decimos, veamos si se cumple la propiedad de que $e_q^x * e_q^{-x} = 1$ usando precisamente la forma de q-Binomial para la q-Exponencial. Sea $R\,(x)$ la función tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e_q^x * R\,(-x) = 1$, lo que implica que $R\,(-x) = \frac{1}{e_q^x} = (1-(1-q)\,x)_q^{\infty}$, pero para dar un aspecto de serie de potencias a la función $R\,(x)$, usaremos la expansión que trabajamos con el q-Binomial $(1+x)_q^n$ y lo extenderemos cuando $n \longrightarrow \infty$.

$$
\begin{aligned}
R(x) &= (1+(1-q)x)_q^{\infty} \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}(1+(1-q)x)_q^{n} \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{j=0}^{n} q^{\frac{j(j-1)}{2}}\left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right]((1-q)x)^{j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}}\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right]\right)((1-q)x)^{j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}}\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{[n]!}{[j]!\,[n-j]!}\right)((1-q)x)^{j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}}\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{[n]\,[n-1]\,...\,[n-j+1]}{[j]!}\right)((1-q)x)^{j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}}\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{\left(\frac{1-q^{n}}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^{n-1}}{1-q}\right)\cdots\left(\frac{1-q^{n-j+1}}{1-q}\right)}{[j]!}\right)((1-q)x)^{j}\,, \quad |q|<1 \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}}\frac{\left(\frac{1}{1-q}\right)^{j}((1-q)x)^{j}}{[j]!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}}\frac{(x)^{j}}{[j]!} \neq e_q^{x}
\end{aligned}
$$

Aunque no se obtuvo lo que esperábamos con respecto de la q-Exponencial, está nueva $R(x)$ nos permite definir la segunda q-Exponencial que cumple con las características que pedíamos y además hemos podido obtener su representación en forma de q-Binomial.

Definition 7 *Sea E_q^x otra q-Exponencial dada en la forma*

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}}\frac{x^{j}}{[j]!}$$

tal que satisface que $e_q^x E_q^{-x} = 1$ y además E_q^x se puede representar alternativamente, por (2.43)*, como*

$$E_q^x = (1+(1-q)x)_q^{\infty}$$

2.4.2 Propiedades

Hasta el momento ya hemos visto algunas características y propiedades que definen en cierta forma a nuestras q-Exponenciales y que ahora recalcaremos junto con otras más para concluir con estas 2 funciones.

- – La q-derivada de la función e_q^x es ella misma, i. e.,

$$D_q\left(e_q^x\right) = e_q^x \tag{2.45}$$

  – La q-derivada de la función E_q^x es igual a E_q^{qx}, dado que

$$\begin{aligned}
D_q\left(E_q^x\right) &= D_q\left(\sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^j}{[j]!}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} D_q\left(\frac{x^j}{[j]!}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^{j-1}}{[j-1]!} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} q^{\frac{(j-1)(j-2)}{2}} q^{(j-1)} \frac{x^{j-1}}{[j-1]!} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} q^{\frac{(j-1)(j-2)}{2}} \frac{(qx)^{j-1}}{[j-1]!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{(j)(j-1)}{2}} \frac{(qx)^{j}}{[j]!} \\
&= E_q^{qx} \\
\therefore \quad & D_q\left(E_q^x\right) = E_q^{qx} \qquad (2.46)
\end{aligned}$$

  – Para ambas funciones q-Exponenciales, una operación que las une es el producto

$$e_q^x E_q^{-x} = 1 \tag{2.47}$$

  – Suponiendo que se cumple la hipótesis de que dados x, y tales que satisfacen la regla de conmutatividad expresada como $yx = qxy$, entonces es valida la expresión $e_q^x e_q^y = e_q^{x+y}$.

$$\begin{aligned}
e_q^x e_q^y &= \left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{[j]!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{[k]!}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^j}{[j]!}\frac{y^k}{[k]!}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[j+k]!}{[j]!\,[k]!}\frac{x^j y^k}{[j+k]!}
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $n = j + k$, se tiene

$$\begin{aligned}
e_q^x e_q^y &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{[n]!}{[j]!\,[n-j]!}\frac{x^j y^{n-j}}{[n]!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j}\right)\frac{1}{[n]!}
\end{aligned}$$

usando el resultado (2.39) que tenemos acerca de los números que satisfacen la igualdad $yx = qxy$,

$$\begin{aligned}
e_q^x e_q^y &= \sum_{n=0}^{\infty}(x+y)^n\frac{1}{[n]!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{[n]!}\\
&= e_q^{x+y}\\
\therefore\ & e_q^x e_q^y = e_q^{x+y} \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

– Para las q-Exponenciales E_q^x se cumple la misma propiedad anterior siempre y cuando los elementos x, y que intervienen cumplan con la regla de conmutatividad $yx = qxy$. Para la demostración usaremos las propiedades anteriores. He aquí la demostración.

$$\begin{aligned}
e_q^x E_q^{-x} &= 1 \text{ y } e_q^y E_q^{-y} = 1 \; \forall x, y \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow e_q^x 1 E_q^{-x} = 1 \\
&\Longrightarrow e_q^x \left(e_q^y E_q^{-y} \right) E_q^{-x} = 1 \\
\text{Como } x, y \text{ satisfacen la igualdad } yx &= qxy \\
&\Longrightarrow e_q^{x+y} E_q^{-y} E_q^{-x} = 1 \\
&\Longleftrightarrow E_q^{-y} E_q^{-x} = \frac{1}{e_q^{x+y}} \\
&\Longleftrightarrow E_q^{-y} E_q^{-x} = \frac{1}{\frac{1}{(1-(1-q)(x+y))_q^{\infty}}} = (1-(1-q)(x+y))_q^{\infty} \\
&\Longrightarrow E_q^{-y} E_q^{-x} = (1+(1-q)(-y-x))_q^{\infty} \\
&\Longleftrightarrow E_q^{-y} E_q^{-x} = E_q^{-y-x} \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

- Para $x = 0$, la función q-Exponencial e_q^x, es igual a 1. Esto debido directamente a la definición de la función partiendo de la serie de potencias.

$$e_q^0 = 1 \qquad (2.50)$$

- Para $x = 0$, la función E_q^x igualmente vale 1 no importando el valor de q. La prueba se basa en que tenemos como propiedad el hecho de que para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple $e_q^x E_q^{-x} = 1$ y en particular para $x = 0$, lo que nos da la igualdad $e_q^0 E_q^{-0} = 1$ y por tanto,

$$E_q^0 = 1 \qquad (2.51)$$

- Por último, consideremos una propiedad en la que podemos establecer una igualdad entre las 2 q-Exponenciales, la cual es válida para cualquier real que tengamos, $e_{\frac{1}{q}}^x = E_q^x$.

$$
\begin{aligned}
e^{x}_{\frac{1}{q}} &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{[j]!}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{\left(\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)}{1-\left(\frac{1}{q}\right)}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{q}\right)}\right)...\left(\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^j}{1-\left(\frac{1}{q}\right)}\right)}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(1-\left(\frac{1}{q}\right)\right)^j x^j}{\left(1-\left(\frac{1}{q}\right)\right)\left(1-\left(\frac{1}{q}\right)^2\right)...\left(1-\left(\frac{1}{q}\right)^j\right)}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^j x^j}{\left(\frac{1-q}{q}\right)\left(\frac{1-q^2}{q^2}\right)...\left(\frac{1-q^j}{q^j}\right)}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{qq^2q^3...q^j}{q^j}\frac{(1-q)^j x^j}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^j)}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}q^{\frac{j(j-1)}{2}}\frac{\left(\frac{1-q}{1-q}\right)^j x^j}{\left(\frac{1-q}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)...\left(\frac{1-q^j}{1-q}\right)}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}q^{\frac{j(j-1)}{2}}\frac{x^j}{[j]!} = E^x_q\\
\therefore &\quad e^{x}_{\frac{1}{q}} = E^x_q
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

2.4.3 Rutinas y Scripts

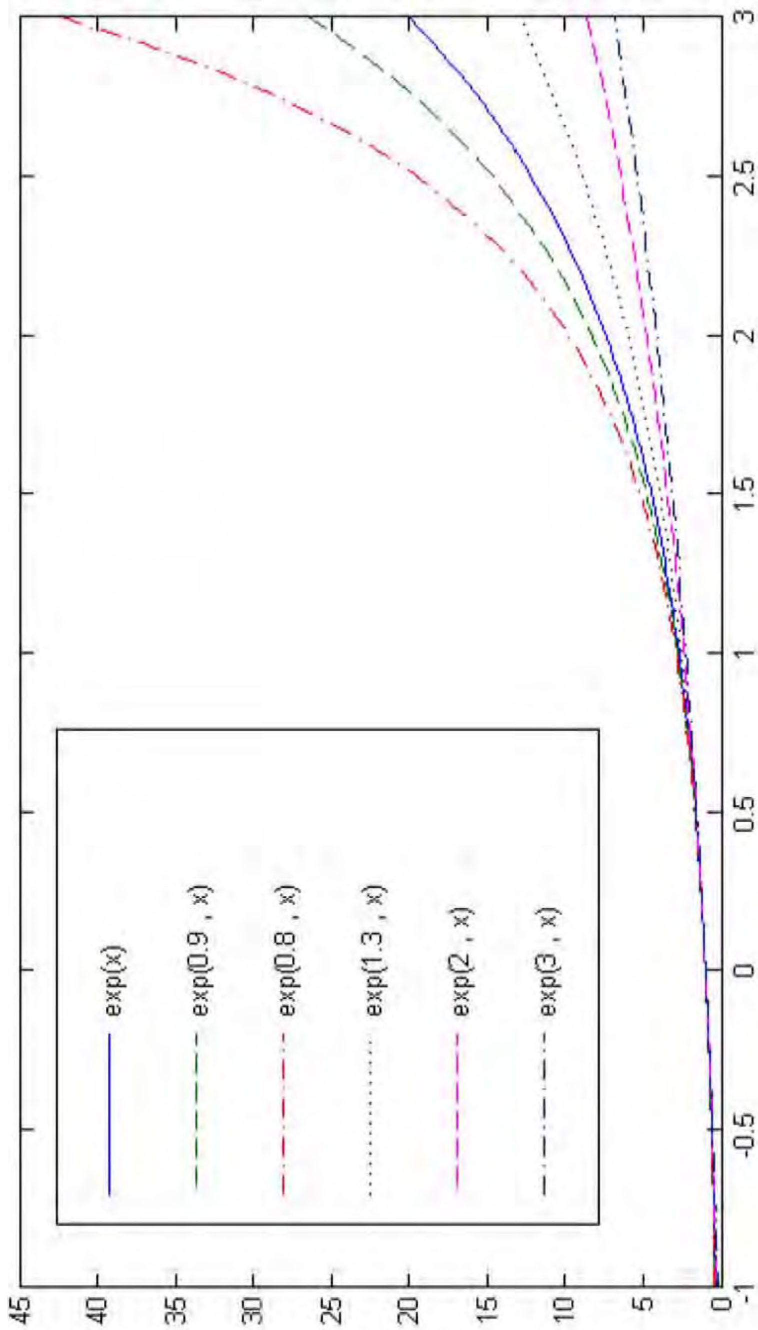
En está parte damos el Script para el cálculo de las funciones q-exponenciales que hemos desarrollado, el cual permite graficarlas en cualquier intervalo real y con cualquier valor asignado a q. Por lo que de alguna forma estamos calculando una generalización para el caso en el q-Cálculo como en el Ordinario.

```
%Archivo que nos da la función q-exponencial en su forma e q(x), para ser
%evaluada en un punto en especifico o en intervalos.
function qexp = qexponencial(q,x)

%Damos la opción al usuario de que elija la función con la que desea
```

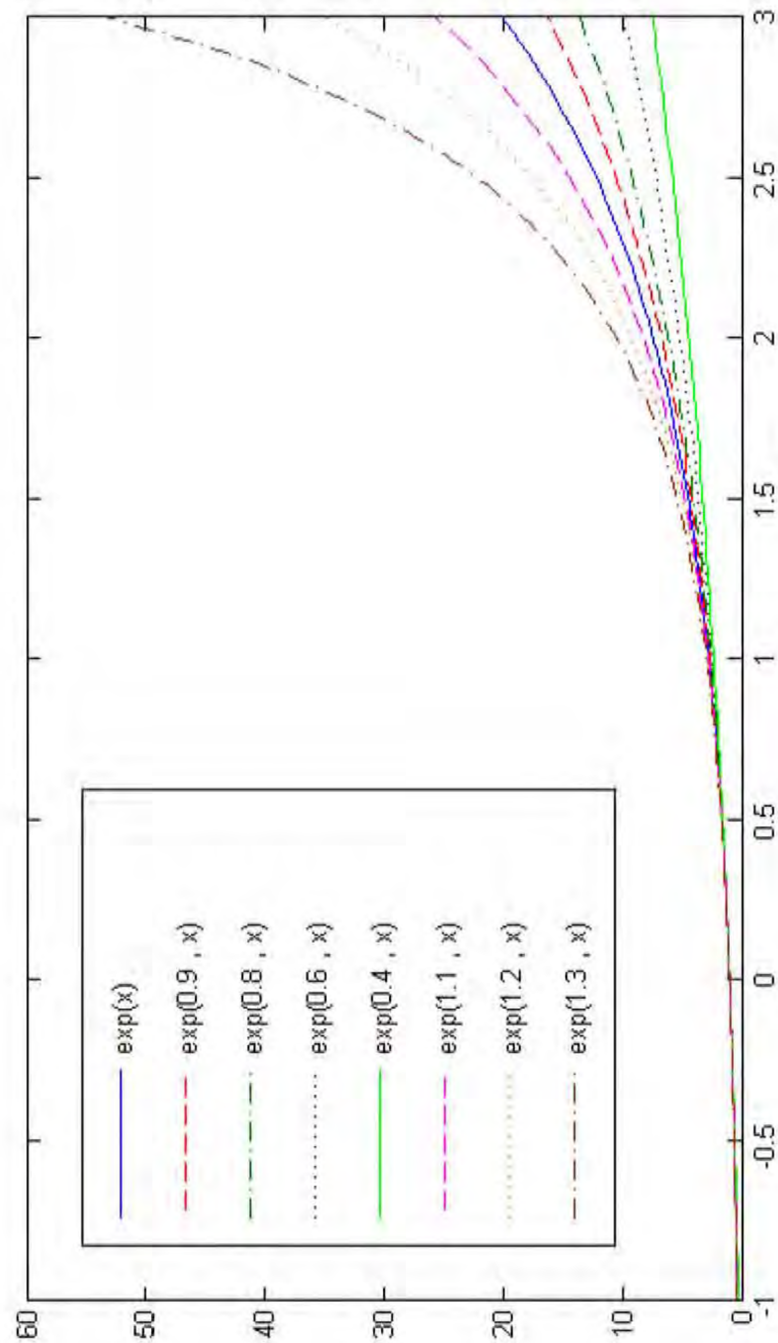
```
%trabajar entre las dos opciones.
tipo = input ('Elija entre la q-exp ó la q-Exp para trabajar. ','s')

%Usamos una variable para validar la función que se entra
error=0;

%Usamos un switcheo para que en base a la opción elegida, se realicen
%las operaciones concernientes con esa función.
switch tipo
case 'q-exp'
qexpo=1;

%Realizamos un ciclo para el cálculo de la suma que en teoría debe ser
%infinita, pero que a través de pruebas, se ha visto que con una expansión
%de 55 caracteres el error es menor a 0.0001.
for k=1:55

%Aplicamos la fórmula de recursividad.
qexpo=qexpo+(x^(k))/qfactorial(q,k);
    end
case 'q-Exp'
qexpo=1;

%Realizamos un ciclo para el cálculo de la suma que en teoría debe ser
%infinita, pero que a través de pruebas, se ha visto que con una expansión
%de 55 caracteres el error es menor a 0.0001.
for k=1:55

%Aplicamos la fórmula de recursividad.
qexpo=qexpo+(q^((k)*(k-1)/2))*(x^(k))/qfactorial(q,k);
    end
otherwise

%En caso de que la función entrada no sea ninguna de las 2 que se
%consideran, se cambia el valor de la variable auxiliar para mandar
%una alerta.
error=1;
end
if error

%Se muestra en pantalla el error cometido
disp ('La función entrada no corresponde a ninguna de las 2 opciones dadas.')
else
```

```
%Se asigna el valor calculado a la variable de salida para ser
%mostrada en pantalla.
qexp = qexpo;
end
```

De igual forma, veremos cómo es el resultado de aplicar los anteriores pasos para una situación particular y poder visualizar el comportamiento de las funciones que se desarrollaron en esta sección.



Grafica de $e_q(x)$ usando valores para q que se limitan en torno a 1, debido a la velocidad con la que crecen las funciones para q demasiado grandes.



Grafica de la segunda funcion exponencial que determinamos $E_q(x)$, y de igual forma se toman valores para q alrededor de 1.

2.5 q-Funciones Trigonometricas

2.5.1 Definición en base a las q-Exponenciales

Como habíamos mencionado con respecto a las funciones Exponenciales, en su definición no interviene directamente lo que entendemos como derivación. Sin embargo, podemos obtener una relación entre el operador "derivada" que manejemos al momento, con la función que llamemos "Exponencial" a través de las propiedades que en general sabemos debe cumplir está función "Exponencial". En cierto modo, es darle la vuelta a la forma en como surgen las definiciones de ciertas funciones, así mismo en está Sección daremos un tipo de funciones que nombraremos q-Funciones Trigonométricas, que surgirán no tanto de nuestra forma de "Derivar", sino más bien procediendo de otra forma. En este caso también vamos a darle la vuelta a la definición usual que se tienen para las funciones conocidas como Trigonométricas.

Definition 8 *Decimos que las q-Funciones dadas en términos de*

$$sen_q(x) = \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i}, \; Sen_q(x) = \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i} \tag{2.53}$$

$$\cos_q(x) = \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2}, \; Cos_q(x) = \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2} \tag{2.54}$$

son las q-funciones trigonométricas básicas.

A estas funciones las hemos denominado básicas, porque las demás funciones se pueden expresar partiendo de ellas, como en el Cálculo usual las otras funciones $\tan(x)$, $\cot(x)$, $\sec(x)$ y $\csc(x)$ se definen a partir de $sen(x)$ y $\cos(x)$. De está manera procedemos y definimos las q-Trigonométricas siguientes.

Definition 9 *El resto de las q-Funciones Trigonométricas están definidas auxiliándonos de las q-trigonométricas básicas.*

$$\tan_q(x) = \frac{sen_q(x)}{\cos_q(x)}, \qquad Tan_q(x) = \frac{Sen_q(x)}{Cos_q(x)} \tag{2.55}$$

$$\sec_q(x) = \frac{1}{\cos_q(x)}, \qquad Sec_q(x) = \frac{1}{Cos_q(x)} \tag{2.56}$$

$$\csc_q(x) = \frac{1}{sen_q(x)}, \qquad Csc_q(x) = \frac{1}{Sen_q(x)} \tag{2.57}$$

$$\cot_q(x) = \frac{1}{\tan_q(x)} = \frac{\cos_q(x)}{sen_q(x)}, \; Cot_q(x) = \frac{1}{Tan_q(x)} = \frac{Cos_q(x)}{Sen_q(x)} \tag{2.58}$$

Obtengamos algunas propiedades de las q-Funciones Trigonométricas y comparémoslas con las del Cálculo usual.

2.5.2 Propiedades e Identidades

Aunque se tienen definidas dos q-Funciones Trigonométricas para cada tipo conocido en el Cálculo usual, trataremos de relacionarlas en la medida de lo posible y en un primer intento aplicamos la propiedad (2.52), que de hecho relaciona a e_q^x con E_q^x.

- – Tanto para $sen_q(x)$ como para $\cos_q(x)$, existe una igualdad con sus similares $Sen_q(x)$ y $Cos_q(x)$, tal que

$$\begin{aligned} sen_{\frac{1}{q}}(x) &= \frac{e_{\frac{1}{q}}^{ix} - e_{\frac{1}{q}}^{-ix}}{2i} \\ &= \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i} \text{ por } (2.52) \\ sen_{\frac{1}{q}}(x) &= Sen_q(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos_{\frac{1}{q}}(x) &= \frac{e_{\frac{1}{q}}^{ix} + e_{\frac{1}{q}}^{-ix}}{2} \\ &= \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2} \text{ por } (2.52) \\ \cos_{\frac{1}{q}}(x) &= Cos_q(x) \end{aligned}$$

  En general también se tendrán igualdades parecidas entre las q-Trigonométricas que no son básicas, i. e., entre las funciones: $\tan_q(x)$ y $Tan_q(x)$; $\sec_q(x)$ y $Sec_q(x)$; $\csc_q(x)$ y $Csc_q(x)$; $\cot_q(x)$ y $Cot_q(x)$. Todo debido a las definiciones de las mismas, en base a que ya hemos comprobado que se satisface dicha igualdad.

  – Al relacionar las q-funciones trigonométricas básicas por medio del producto, tenemos una identidad muy conocida en el Cálculo y que sirve para otras identidades así como para la derivación e integración.

$$\begin{aligned} \cos_q(x)\,Cos_q(x) &= \left(\frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2}\right) \\ &= \frac{e_q^{ix}E_q^{ix} + e_q^{-ix}E_q^{ix} + e_q^{ix}E_q^{-ix} + e_q^{-ix}E_q^{-ix}}{4}, \text{ usando } (2.47) \\ &= \frac{e_q^{ix}E_q^{ix} + 2 + e_q^{-ix}E_q^{-ix}}{4} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
sen_q(x)\,Sen_q(x) &= \left(\frac{e_q^{ix}-e_q^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{E_q^{ix}-E_q^{-ix}}{2i}\right)\\
&= \frac{e_q^{ix}E_q^{ix}-e_q^{-ix}E_q^{ix}-e_q^{ix}E_q^{-ix}+e_q^{-ix}E_q^{-ix}}{-4}, \text{ usando } (2.47)\\
&= \frac{-e_q^{ix}E_q^{ix}+2-e_q^{-ix}E_q^{-ix}}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos_q(x)\,Cos_q(x)+sen_q(x)\,Sen_q(x) &= \frac{e_q^{ix}E_q^{ix}+2+e_q^{-ix}E_q^{-ix}}{4}+\\
&\quad+\frac{-e_q^{ix}E_q^{ix}+2-e_q^{-ix}E_q^{-ix}}{4}\\
\cos_q(x)\,Cos_q(x)+sen_q(x)\,Sen_q(x) &= 1 \qquad (2.59)
\end{aligned}
$$

- También cada una de las q-Funciones Trigonométricas básicas, llevan en si propiedades que cumplen al igual que sus análogas del Cálculo debido al tipo de definición de la cual partimos para obtenerlas. Ahora veamos una clasificación de las q-funciones trigonométricas básicas como q-funciones pares o impares.

$$
\begin{aligned}
sen_q(-x) &= \frac{e_q^{i(-x)}-e_q^{-i(-x)}}{2i}\\
&= \frac{e_q^{-ix}-e_q^{ix}}{2i}\\
&= -\frac{e_q^{ix}-e_q^{-ix}}{2i}, \text{ es decir,}\\
sen_q(-x) &= -\,sen_q(x)\text{, luego } sen_q(x) \text{ es impar}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Sen_q(-x) &= \frac{E_q^{i(-x)}-E_q^{-i(-x)}}{2i}\\
&= \frac{E_q^{-ix}-E_q^{ix}}{2i}\\
&= -\frac{E_q^{ix}-E_q^{-ix}}{2i}, \text{ es decir,}\\
Sen_q(-x) &= Sen_q(x)\text{, luego } Sen_q(x) \text{ es impar}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos_q(-x) &= \frac{e_q^{i(-x)} + e_q^{-i(-x)}}{2} \\
&= \frac{e_q^{-ix} + e_q^{ix}}{2} \\
&= \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2}, \text{ es decir,} \\
\cos_q(-x) &= \cos_q(x), \text{ luego } \cos_q(x) \text{ es par}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Cos_q(-x) &= \frac{E_q^{i(-x)} + E_q^{-i(-x)}}{2} \\
&= \frac{E_q^{-ix} + E_q^{ix}}{2} \\
&= \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2}, \text{ es decir,} \\
Cos_q(-x) &= Cos_q(x), \text{ luego } Cos_q(x) \text{ es par}
\end{aligned}
$$

– Otra propiedad que normalmente satisfacen las funciones trigonométricas es la forma en la cual se puede separar una suma de números a la cual se le ha aplicado previamente alguna de las funciones $sen(x)$ ó $\cos(x)$. Para verificar bajo que condiciones podemos obtener un símil de lo que acabamos de mencionar, vamos a necesitar más que las simples definiciones y la aritmética, pues sabemos que para que las q-exponenciales (de las cuales parten las q-Trigonométricas) puedan separar una suma de exponentes en un producto de bases iguales con diferente exponente, es necesario que se cumpla la regla de conmutatividad $yx = qxy$. Sin embargo, esto no basta cuando queremos ver como es que se descompone ya sea $sen_q(x+y)$ ó $\cos_q(x+y)$, sino que más allá de esto vamos a tener que expandir la regla para pedir que dichos números cumplan con que $(iy)(ix) = q(ix)(iy)$.

$$\begin{aligned}
sen_q(x+y) &= \frac{e_q^{i(x+y)} - e_q^{-i(x+y)}}{2i} \\
&= \frac{e_q^{ix+iy} - e_q^{-ix-iy}}{2i}, \text{ dado que } (iy)(ix) = q(ix)(iy) \\
&= \frac{e_q^{ix}e_q^{iy} - e_q^{-ix}e_q^{-iy}}{2i} \\
&= \frac{2e_q^{ix}e_q^{iy} + \left\{e_q^{ix}e_q^{-iy} - e_q^{ix}e_q^{-iy}\right\} + \left\{e_q^{-ix}e_q^{iy} - e_q^{-ix}e_q^{iy}\right\} - 2e_q^{-ix}e_q^{-iy}}{2\cdot 2i} \\
&= \frac{e_q^{ix}e_q^{iy} + e_q^{ix}e_q^{-iy} - e_q^{-ix}e_q^{iy} - e_q^{-ix}e_q^{-iy}}{2\cdot 2i} + \\
&\quad + \frac{e_q^{ix}e_q^{iy} + e_q^{-ix}e_q^{iy} - e_q^{ix}e_q^{-iy} - e_q^{-ix}e_q^{-iy}}{2\cdot 2i} \\
&= \left(\frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e_q^{iy} + e_q^{-iy}}{2}\right) + \left(\frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e_q^{iy} - e_q^{-iy}}{2i}\right) \\
sen_q(x+y) &= sen_q(x)\cos_q(y) + \cos_q(x)\, sen_q(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos_q(x+y) &= \frac{e_q^{i(x+y)} + e_q^{-i(x+y)}}{2} \\
&= \frac{e_q^{ix+iy} + e_q^{-ix-iy}}{2}, \text{ dado que } (iy)(ix) = q(ix)(iy) \\
&= \frac{e_q^{ix}e_q^{iy} + e_q^{-ix}e_q^{-iy}}{2} \\
&= \frac{2e_q^{ix}e_q^{iy} + \left\{e_q^{ix}e_q^{-iy} - e_q^{ix}e_q^{-iy}\right\} + \left\{e_q^{-ix}e_q^{iy} - e_q^{-ix}e_q^{iy}\right\} + 2e_q^{-ix}e_q^{-iy}}{2\cdot 2} \\
&= \frac{e_q^{ix}e_q^{iy} + e_q^{ix}e_q^{-iy} + e_q^{-ix}e_q^{iy} + e_q^{-ix}e_q^{-iy}}{2\cdot 2} + \\
&\quad + \frac{e_q^{ix}e_q^{iy} - e_q^{ix}e_q^{-iy} - e_q^{-ix}e_q^{iy} + e_q^{-ix}e_q^{-iy}}{2\cdot 2} \\
&= \left(\frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e_q^{iy} + e_q^{-iy}}{2}\right) + \left(\frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e_q^{iy} - e_q^{-iy}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e_q^{iy} + e_q^{-iy}}{2}\right) - \left(\frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e_q^{iy} - e_q^{-iy}}{2i}\right) \\
\cos_q(x+y) &= \cos_q(x)\cos_q(y) - sen_q(x)\, sen_q(y)
\end{aligned}$$

– Una vez que hemos podido casi reproducir las propiedades que se tienen en el Cálculo usual, salvo algunas hipótesis sobre las variables, hagamos uso de otros recursos y de lo que ya se ha demostrado. Por ejemplo, una de las anteriores propiedades (2.59), nos dice la relación que tiene el sumar productos de las funciones $\cos_q$ con Cos_q más sen_q con Sen_q, pero qué pasa si ahora realizamos un producto cruzado y comparamos los respectivos resultados.

$$\begin{aligned}
sen_q\left(x\right)Cos_q\left(x\right) &= \left(\frac{e_q^{ix}-e_q^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{E_q^{ix}+E_q^{-ix}}{2}\right)\\
&= \frac{e_q^{ix}E_q^{ix}-e_q^{-ix}E_q^{ix}+e_q^{ix}E_q^{-ix}-e_q^{-ix}E_q^{-ix}}{2\cdot 2i}, \text{por } (2.47)\\
&= \frac{e_q^{ix}E_q^{ix}-e_q^{-ix}E_q^{-ix}}{2\cdot 2i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos_q\left(x\right)Sen_q\left(x\right) &= \left(\frac{e_q^{ix}+e_q^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{E_q^{ix}-E_q^{-ix}}{2i}\right)\\
&= \frac{e_q^{ix}E_q^{ix}+e_q^{-ix}E_q^{ix}-e_q^{ix}E_q^{-ix}-e_q^{-ix}E_q^{-ix}}{2\cdot 2i}, \text{por } (2.47)\\
&= \frac{e_q^{ix}E_q^{ix}-e_q^{-ix}E_q^{-ix}}{2\cdot 2i}
\end{aligned}$$

Entonces ambos productos son iguales, y de está singular igualdad obtenida es de donde vamos a determinar 4 distintas igualdades que nos ayudaran a comprobar otras identidades más.

$$sen_q\left(x\right)Cos_q\left(x\right)=\cos_q\left(x\right)Sen_q\left(x\right) \tag{2.60}$$

$$\frac{sen_q\left(x\right)}{\cos_q\left(x\right)}=\frac{Sen_q\left(x\right)}{Cos_q\left(x\right)} \tag{2.61}$$

$$\frac{Cos_q\left(x\right)}{Sen_q\left(x\right)}=\frac{\cos_q\left(x\right)}{sen_q\left(x\right)} \tag{2.62}$$

$$\frac{sen_q\left(x\right)}{Sen_q\left(x\right)}=\frac{\cos_q\left(x\right)}{Cos_q\left(x\right)} \tag{2.63}$$

$$\frac{Cos_q\left(x\right)}{\cos_q\left(x\right)}=\frac{Sen_q\left(x\right)}{sen_q\left(x\right)} \tag{2.64}$$

– La primera de las identidades que mostraremos con ayuda de las anteriores, serán aquellas que se desprenden a su vez de la identidad (2.59)

$$\cos_q\left(x\right)Cos_q\left(x\right)+sen_q\left(x\right)Sen_q\left(x\right)=1$$

dividiendo por el factor $\cos_q(x)\,Cos_q(x)$ la identidad "Canonica"

$$\begin{aligned}\frac{\cos_q(x)\,Cos_q(x)}{\cos_q(x)\,Cos_q(x)}+\frac{sen_q(x)\,Sen_q(x)}{\cos_q(x)\,Cos_q(x)} &= \frac{1}{\cos_q(x)\,Cos_q(x)}\\ 1+\frac{sen_q(x)\,Sen_q(x)}{\cos_q(x)\,Cos_q(x)} &= \sec_q(x)\,Sec_q(x)\end{aligned}$$

En está última igualdad podemos tomar 2 caminos distintos, ya sea aplicar la identidad (2.61) de izquierda a derecha o viceversa, hagamos ambas para mostrar a que nos referimos.

$$\begin{aligned}1+\frac{sen_q(x)\,Sen_q(x)}{\cos_q(x)\,Cos_q(x)} &= \sec_q(x)\,Sec_q(x)\\ &\Longrightarrow\quad 1+\frac{Sen_q^2(x)}{Cos_q^2(x)}=\sec_q(x)\,Sec_q(x)\\ &\Longrightarrow\quad 1+Tan_q^2(x)=\sec_q(x)\,Sec_q(x) \qquad (2.65)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1+\frac{sen_q(x)\,Sen_q(x)}{\cos_q(x)\,Cos_q(x)} &= \sec_q(x)\,Sec_q(x)\\ &\Longrightarrow\quad 1+\frac{sen_q^2(x)}{\cos_q^2(x)}=\sec_q(x)\,Sec_q(x)\\ &\Longrightarrow\quad 1+\tan_q^2(x)=\sec_q(x)\,Sec_q(x) \qquad (2.66)\end{aligned}$$

- – Aclararemos aquí, el que hayamos presentado dos identidades como resultado de nuestra primera operación sobre (2.59), que podemos observar desde la propiedad (2.61), que esto nos muestra que las funciones $\tan_q(x)$ y $Tan_q(x)$ de hecho son la misma. Lo que a su vez afecta también la definición de las funciones $\cot_q(x)$ y $Cot_q(x)$, para dejarlas también como iguales y nos confirma la propiedad (2.62). Aunque habíamos comenzado con 12 q-Funciones Trigonométricas, hasta el momento hemos podido concluir que de las definiciones solo eran necesarias 10. Seguiremos analizando la posibilidad de que podamos definir como iguales a otras q-Trigonométricas, si no en todo $\mathbb{R}$ al menos en un dominio restringido.

dividiendo por el factor $sen_q(x)\,Sen_q(x)$ la identidad "Canonica"

$$\begin{aligned}\frac{\cos_q(x)\,Cos_q(x)}{sen_q(x)\,Sen_q(x)}+\frac{sen_q(x)\,Sen_q(x)}{sen_q(x)\,Sen_q(x)} &= \frac{1}{sen_q(x)\,Sen_q(x)}\\ \frac{\cos_q(x)\,Cos_q(x)}{sen_q(x)\,Sen_q(x)}+1 &= \csc_q(x)\,Csc_q(x)\end{aligned}$$

- – Procedemos con la aplicación de la propiedad (2.62), tanto en un sentido como en el inverso, y como ya habíamos visto anteriormente ambas igualdades serán la misma.

$$\cot_q^2(x)+1=\csc_q(x)\,Csc_q(x) \tag{2.67}$$

$$Cot_q^2(x)+1=\csc_q(x)\,Csc_q(x) \tag{2.68}$$

Entonces la identidad "Canónica", tiene un parecido con la que se maneja en el Cálculo usual, sin embargo, el parecido no es total debido a la ausencia de la suma de los cuadrados tanto de los pares de funciones $sen_q(x)$ y $\cos_q(x)$, así como $Sen_q(x)$ y $Cos_q(x)$. Lo único que hemos verificado es que tipo de combinación de las q-Trigonométricas nos da la identidad, ahora veamos a qué es igual la suma de los cuadrados de dichos pares de funciones.

$$\cos_q(x)\,Cos_q(x)+sen_q(x)\,Sen_q(x)=1$$

Dividiendo la igualdad por $\cos_q(x)$, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\cos_q(x)\,Cos_q(x)}{\cos_q(x)}+\frac{sen_q(x)\,Sen_q(x)}{\cos_q(x)} &= \frac{1}{\cos_q(x)}, \text{ es decir,}\\ Cos_q(x)+\frac{sen_q(x)}{\cos_q(x)}Sen_q(x) &= \frac{1}{\cos_q(x)}, \text{ por } (2.61)\\ \text{luego } Cos_q(x)+\frac{Sen_q(x)}{Cos_q(x)}Sen_q(x) &= \frac{1}{\cos_q(x)}, \text{ multiplicando } Cos_q(x)\\ Cos_q^2(x)+Sen_q^2(x) &= \frac{Cos_q(x)}{\cos_q(x)}=\sec_q(x)\,Cos_q(x) \qquad (2.69)\end{aligned}$$

Al dividir por $sen_q(x)$ se prueba la igualdad (2.64),

Hagamos la división de la igualdad por $sen_q(x)$

$$\frac{\cos_q(x)\,Cos_q(x)}{sen_q(x)}+\frac{sen_q(x)\,Sen_q(x)}{sen_q(x)}=\frac{1}{sen_q(x)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\cos_q(x)}{sen_q(x)}Cos_q(x)+Sen_q(x) &= \csc_q(x)\text{, por }(2.62)\text{, es decir,}\\
\frac{Cos_q(x)}{Sen_q(x)}Cos_q(x)+Sen_q(x) &= \csc_q(x)\text{, multiplicando }Sen_q(x)\\
Cos_q^2(x)+Sen_q^2(x) &= \csc_q(x)\,Sen_q(x) \qquad (2.70)
\end{aligned}$$

Si $\cos_q(x)\,Cos_q(x)+sen_q(x)\,Sen_q(x)=1$

se divide por $Sen_q(x)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\cos_q(x)\,Cos_q(x)}{Sen_q(x)}+\frac{sen_q(x)\,Sen_q(x)}{Sen_q(x)} &= \frac{1}{Sen_q(x)}\text{, es decir,}\\
\cos_q(x)\frac{Cos_q(x)}{Sen_q(x)}+sen_q(x) &= Csc_q(x)\text{, por }(2.62)\\
\text{luego }\cos_q(x)\frac{\cos_q(x)}{sen_q(x)}+sen_q(x) &= Csc_q(x)\text{, multiplicando }sen_q(x)\\
\cos_q^2(x)+sen_q^2(x) &= sen_q(x)\,Csc_q(x)\text{, por }(2.63) \qquad (2.71)\\
\cos_q^2(x)+sen_q^2(x) &= \cos_q(x)\,Sec_q(x) \qquad (2.72)
\end{aligned}$$

A continuación, trataremos de dar un panorama del tipo de funciones y comportamiento que se obtienen al aplicar la q-derivada al conjunto de las q-Funciones Trigonométricas y apoyándonos en las propiedades arriba descritas, mejorar su apariencia para realizar una comparación con las que ya tenemos conocidas en el Cálculo usual. Empezamos con las q-funciones Trigonométricas básicas apoyándonos en la definición dada en (2.53) y (2.54).

- – $D_q(sen_q(x))=\cos_q(x)$

$$\begin{aligned}
D_q(sen_q(x)) &= D_q\left(\frac{e_q^{ix}-e_q^{-ix}}{2i}\right)\\
&= \frac{D_q\left(e_q^{ix}\right)-D_q\left(e_q^{-ix}\right)}{2i}\\
&= \frac{ie_q^{ix}+ie_q^{-ix}}{2i}\\
&= \frac{e_q^{ix}+e_q^{-ix}}{2}\\
&= \cos_q(x)
\end{aligned}$$

- $D_q(\cos_q(x)) = -sen_q(x)$

$$\begin{aligned}
D_q(\cos_q(x)) &= D_q\left(\frac{e_q^{ix}+e_q^{-ix}}{2}\right)\\
&= \frac{D_q\left(e_q^{ix}\right)+D_q\left(e_q^{-ix}\right)}{2}\\
&= \left(\frac{ie_q^{ix}-ie_q^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{i}{i}\right)\\
&= \frac{-e_q^{ix}+e_q^{-ix}}{2i}\\
&= -\left(\frac{e_q^{ix}-e_q^{-ix}}{2i}\right)\\
&= -sen_q(x)
\end{aligned}$$

- $D_q(Sen_q(x)) = Cos_q(x)$

$$\begin{aligned}
D_q(Sen_q(x)) &= D_q\left(\frac{E_q^{ix}-E_q^{-ix}}{2i}\right)\\
&= \frac{D_q\left(E_q^{ix}\right)-D_q\left(E_q^{-ix}\right)}{2i}\\
&= \frac{iE_q^{ix}+iE_q^{-ix}}{2i}\\
&= \frac{E_q^{ix}+E_q^{-ix}}{2}\\
&= Cos_q(x)
\end{aligned}$$

- $D_q(Cos_q(x)) = -Sen_q(x)$

$$\begin{aligned}
D_q\ (Cos_q(x)) &= D_q\ \left(\frac{E_q^{ix}+E_q^{-ix}}{2}\right)\\
&= \frac{D_q\left(E_q^{ix}\right)+D_q\left(E_q^{-ix}\right)}{2}\\
&= \frac{iE_q^{ix}-iE_q^{-ix}}{2}\\
&= \frac{-E_q^{ix}+E_q^{-ix}}{2i}\\
&= -Sen_q(x)
\end{aligned}$$

Por último, determinemos las q-derivadas de las otras q-funciones trigonométricas y de las cuales vamos obtener una ecuación que nos resultara adecuada para comprender mejor el comportamiento de las q-funciones trigonométricas básicas.

- – $D_q\left(\tan_q(x)\right) = \sec_q(qx)\, Sec_q(x)$

$$\begin{aligned} D_q\left(\tan_q(x)\right) &= D_q\left(\frac{sen_q(x)}{\cos_q(x)}\right) \\ &= \frac{\cos_q^2(x) + sen_q^2(x)}{\cos_q(x)\cos_q(qx)}, \text{ aplicando } (2.7) \\ &= \frac{\cos_q(x)\, Sec_q(x)}{\cos_q(x)\cos_q(qx)}, \text{por } (2.72) \\ &= \frac{Sec_q(x)}{\cos_q(qx)} = \sec_q(qx)\, Sec_q(x) \end{aligned}$$

  – $D_q\left(Tan_q(x)\right) = \sec_q(x)\, Sec_q(qx)$

$$\begin{aligned} D_q\left(Tan_q(x)\right) &= D_q\left(\frac{Sen_q(x)}{Cos_q(x)}\right) \\ &= \frac{Cos_q^2(x) + Sen_q^2(x)}{Cos_q(x)\, Cos_q(qx)}, \text{aplicando } (2.7) \\ &= \frac{\sec_q(x)\, Cos_q(x)}{Cos_q(x)\, Cos_q(qx)}, \text{por } (2.69) \\ &= \frac{\sec_q(x)}{Cos_q(qx)} = \sec_q(x)\, Sec_q(qx) \end{aligned}$$

  – $D_q\left(\cot_q(x)\right) = -\csc_q(qx)\, Csc_q(x)$

$$\begin{aligned} D_q\left(\cot_q(x)\right) &= D_q\left(\frac{\cos_q(x)}{sen_q(x)}\right) \\ &= \frac{-sen_q^2(x) - \cos_q^2(x)}{sen_q(x)\, sen_q(qx)} \\ &= -\frac{sen_q(x)\, Csc_q(x)}{sen_q(x)\, sen_q(qx)}, \text{usando } (2.71) \\ &= -\frac{Csc_q(x)}{sen_q(qx)} = -\csc_q(qx)\, Csc_q(x) \end{aligned}$$

– $D_q\left(Cot_q\left(x\right)\right)=-\csc_q\left(x\right)Csc_q\left(qx\right)$

$$\begin{aligned} D_q\left(Cot_q\left(x\right)\right) &= D_q\left(\frac{Cos_q\left(x\right)}{Sen_q\left(x\right)}\right) \\ &= \frac{-Sen_q^2\left(x\right)-Cos_q^2\left(x\right)}{Sen_q\left(x\right)Sen_q\left(qx\right)} \\ &= -\frac{\csc_q\left(x\right)Sen_q\left(x\right)}{Sen_q\left(x\right)Sen_q\left(qx\right)}, \text{ usando } (2.70) \\ &= -\frac{\csc_q\left(x\right)}{Sen_q\left(qx\right)}=-\csc_q\left(x\right)Csc_q\left(qx\right) \end{aligned}$$

Ahora estamos en condiciones de mostrar la ecuación que habíamos mencionado anteriormente, y que a partir de ella obtendremos una mejor caracterización de las q-funciones trigonométricas. Para ello, nos detendremos a comparar los resultados de las q-derivadas de las q-funciones $\tan_q\left(x\right)$ con $Tan_q\left(x\right)$ y $\cot_q\left(x\right)$ con $Cot_q\left(x\right)$. Estas como habíamos comentado anteriormente, son esencialmente las mismas q-trigonométricas, por lo que al aplicar la q-derivada se mantiene la igualdad con los respectivos resultados, que son los que presentamos a continuación.

$$\begin{aligned} \tan_q\left(x\right) &= Tan_q\left(x\right) \\ &\Longrightarrow D_q\left(\tan_q\left(x\right)\right)=D_q\left(Tan_q\left(x\right)\right) \\ \sec_q\left(qx\right)Sec_q\left(x\right) &= \sec_q\left(x\right)Sec_q\left(qx\right) \\ \frac{1}{\cos_q\left(qx\right)Cos_q\left(x\right)} &= \frac{1}{\cos_q\left(x\right)Cos_q\left(qx\right)} \\ &\Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{\cos_q(x)}{\cos_q(qx)}=\frac{Cos_q(x)}{Cos_q(qx)} \\ \frac{\cos_q(x)}{Cos_q(x)}=\frac{\cos_q(qx)}{Cos_q(qx)} \end{array}\right\} \end{aligned} \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned} \cot_q\left(x\right) &= Tan_q\left(x\right) \\ &\Longrightarrow D_q\left(\cot_q\left(x\right)\right)=D_q\left(Tan_q\left(x\right)\right) \\ -\csc_q\left(qx\right)Csc_q\left(x\right) &= -\csc_q\left(x\right)Csc_q\left(qx\right) \\ \frac{1}{sen_q\left(qx\right)Sen_q\left(x\right)} &= \frac{1}{sen_q\left(x\right)Sen_q\left(qx\right)} \\ &\Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{sen_q(x)}{sen_q(qx)}=\frac{Sen_q(x)}{Sen_q(qx)} \\ \frac{sen_q(x)}{Sen_q(x)}=\frac{sen_q(qx)}{Sen_q(qx)} \end{array}\right\} \end{aligned} \tag{2.74}$$

De ambas identidades obtenidas, podemos establecer una relación en su comportamiento más general para cada natural. Por ejemplo, al conocer las identidades podemos iterarlas una y otra vezl, tantas veces como queramos y definir la siguiente regla en general.

$$\begin{aligned}
\frac{\cos_q(x)}{Cos_q(x)} &= \frac{\cos_q(qx)}{Cos_q(qx)}, \forall x \in Dom(f) \\
&\Longrightarrow \text{ si elegimos } x = qx_1 \\
\text{tal que } x_1 &\in Dom(f) \\
\frac{\cos_q(qx_1)}{Cos_q(qx_1)} &= \frac{\cos_q\left(q^2x_1\right)}{Cos_q(q^2x_1)} \\
\text{pero al } x_1 &\in Dom(f), \text{ se cumple que} \\
\frac{\cos_q(x_1)}{Cos_q(x_1)} &= \frac{\cos_q(qx_1)}{Cos_q(qx_1)} \\
&\therefore \frac{\cos_q(x_1)}{Cos_q(x_1)} = \frac{\cos_q\left(q^2x_1\right)}{Cos_q(q^2x_1)} \\
\text{repitiendo el procedimiento anterior n-veces } \forall n &\in \mathbb{N} \\
\frac{\cos_q(x_{n-1})}{Cos_q(x_{n-1})} &= \frac{\cos_q(q^nx_{n-1})}{Cos_q(q^nx_{n-1})}, \\
\text{donde } x_{n-1} &\in Dom(f)
\end{aligned}$$

Análogamente para el caso con la identidad (2.74) podemos establecer un símil al anterior, haciendo el mismo número de iteraciones y comparaciones entre las igualdades.

$$\begin{aligned}
\frac{sen_q(x)}{Sen_q(x)} &= \frac{sen_q(qx)}{Sen_q(qx)}, \forall x \in Dom(f) \\
&\Longrightarrow \frac{sen_q(x_{n-1})}{Sen_q(x_{n-1})} = \frac{sen_q(q^nx_{n-1})}{Sen_q(q^nx_{n-1})}, \text{ donde } x_{n-1} \in Dom(f)
\end{aligned}$$

2.5.3 Rutinas y Scripts

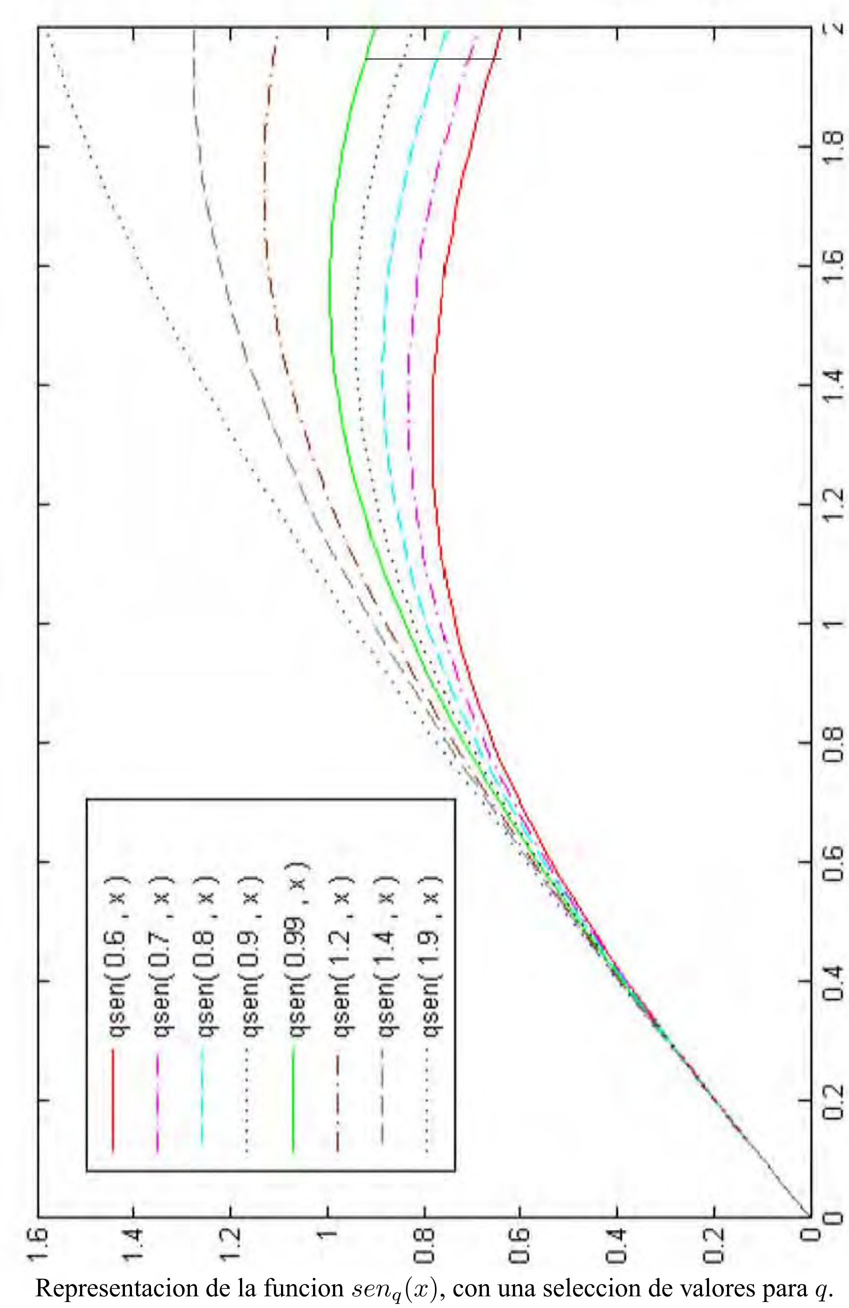
En está sección, nos enfocaremos a la graficación de las q-funciones trigonométricas, para lo cual realizamos el siguiente script que trabaja con las 5 funciones básicas y a través de las cuales podemos generar a las demás.

```
%En este script se reúnen las 5 principales funciones
%q-trigonométricas que se trabajan, para poder evaluar
%en un valor o intervalo.
function qtrig = qtrigonometricas (q,x)
```

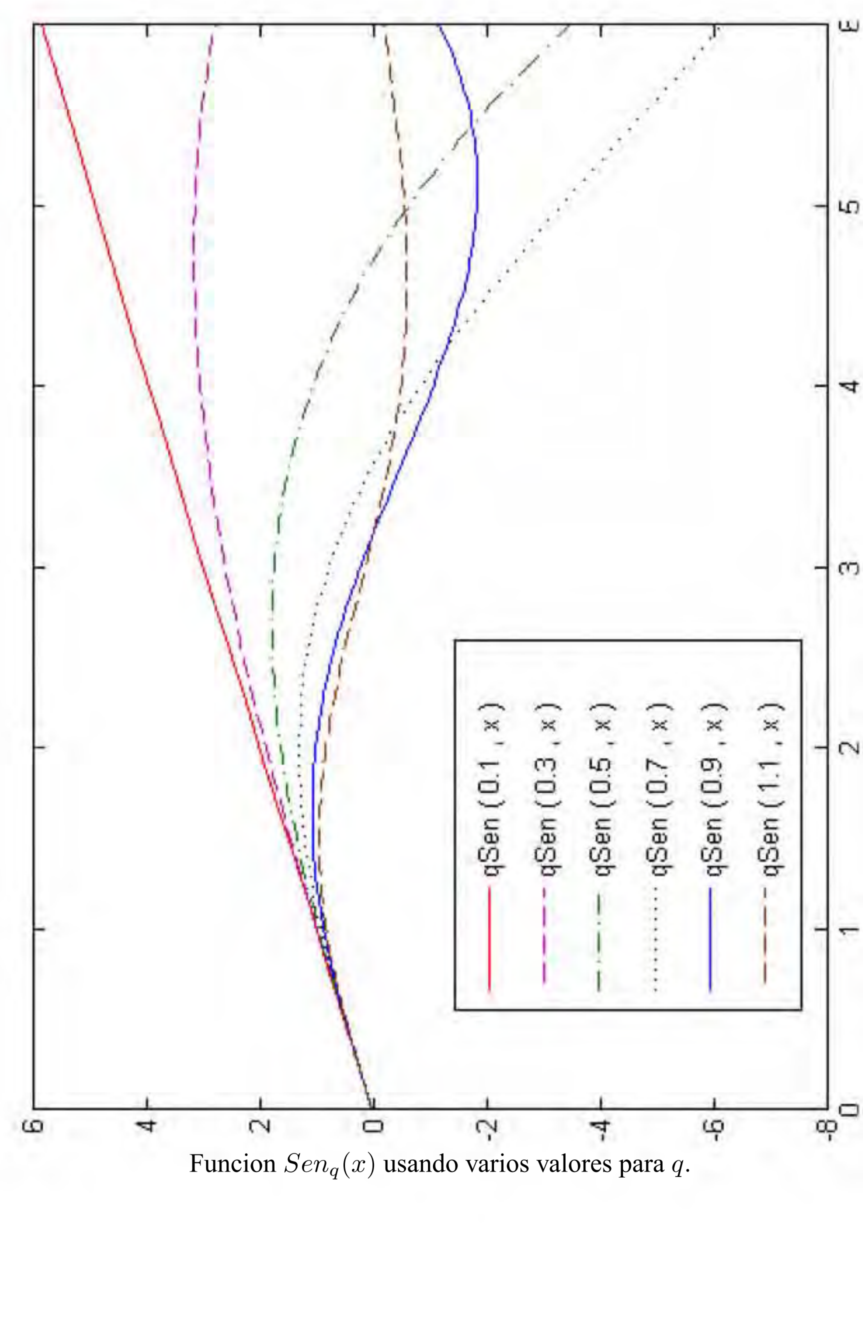
```
%Mostramos un aviso para que sea elegida la función
%q-trigonométrica que se quiere trabajar para que
%posteriormente sea elegido la función q-exponencial.
%que se usara.
tipo = input ('Elija la función que desee evaluar: sin, cos, ó tan y después el tipo de
q-exponencial. ','s');

%Usamos una variable para que sea la que nos indique
%si se introduce una función valida o no.
error = 0;

%Usamos una toma de decisión con el switcheo para las
%diferentes funciones que se pueden entrar.
switch tipo

%Uso de la forma exponencial en la cual se pueden
%definir cada una de las funciones trigonométricas,
%por ende hacemos uso de los 2 tipos de exponenciales
%que tenemos para cada una de las funciones a
%continuación definidas.
case 'sin'
qtrigs = ( qexponencial(q,i*x)-qexponencial(q,-i*x) )/(2*i);
case 'cos'
qtrigs = ( qexponencial(q,i*x)+qexponencial(q,-i*x) )/(2);
case 'tan'
qtrigs = (qexponencial(q,i*x)-qexponencial(q,-i*x))/(i*(qexponencial(q,i*x)+qexponencial(q,-
i*x)));
otherwise

%Aquí hacemos la distinción si es que se introduce
%una función desconocida.
error=1;
end
if error

%En caso de que la función entrada sea desconocida
%se envía una alerta.
disp ('La función entrada no es valida.')
else

%En caso de que todo se haya calculado sin error, se
%muestra en pantalla el resultado.
qtrig = qtrigs ;
```

```
end
```

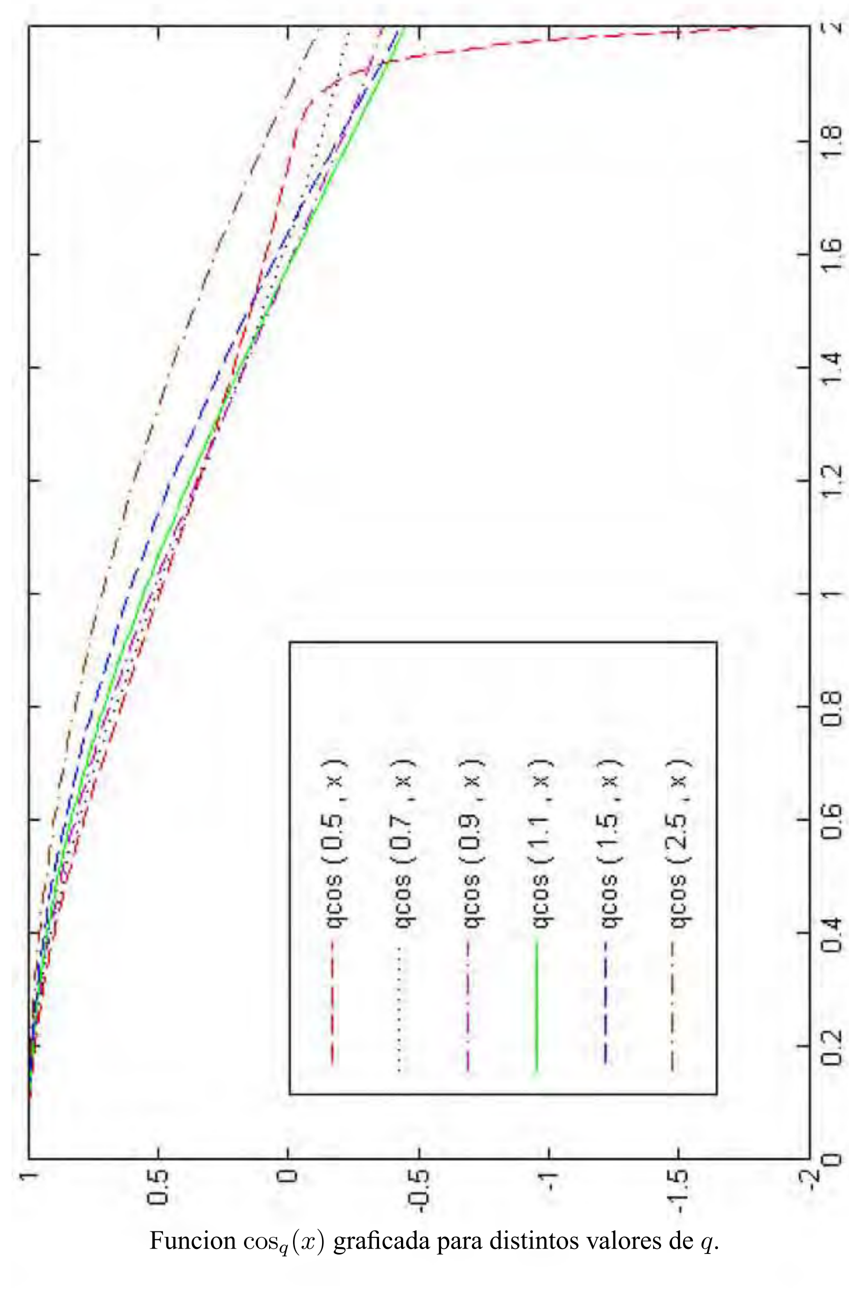
A continuación daremos paso a las gráficas de las funciones respectivas a está sección, haciendo uso de los anteriores scripts.



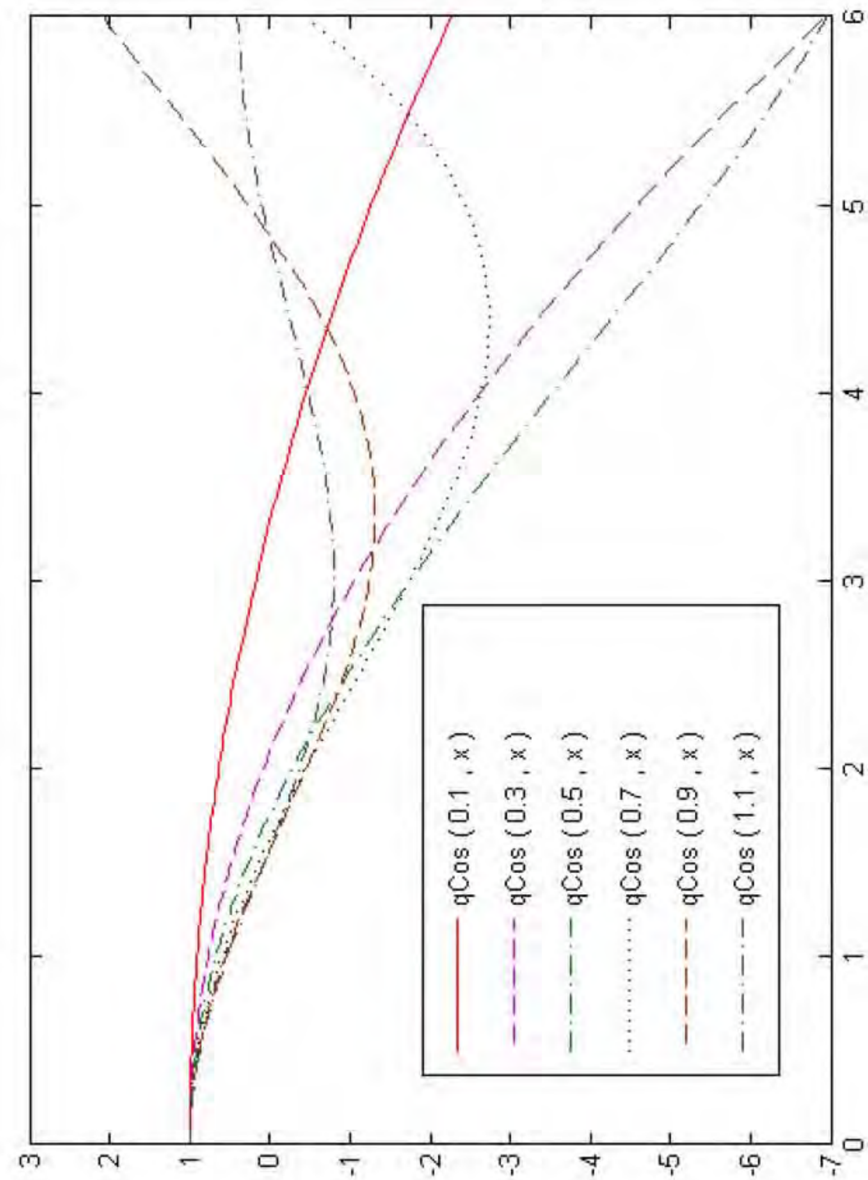
Representacion de la funcion $sen_q(x)$, con una seleccion de valores para q.



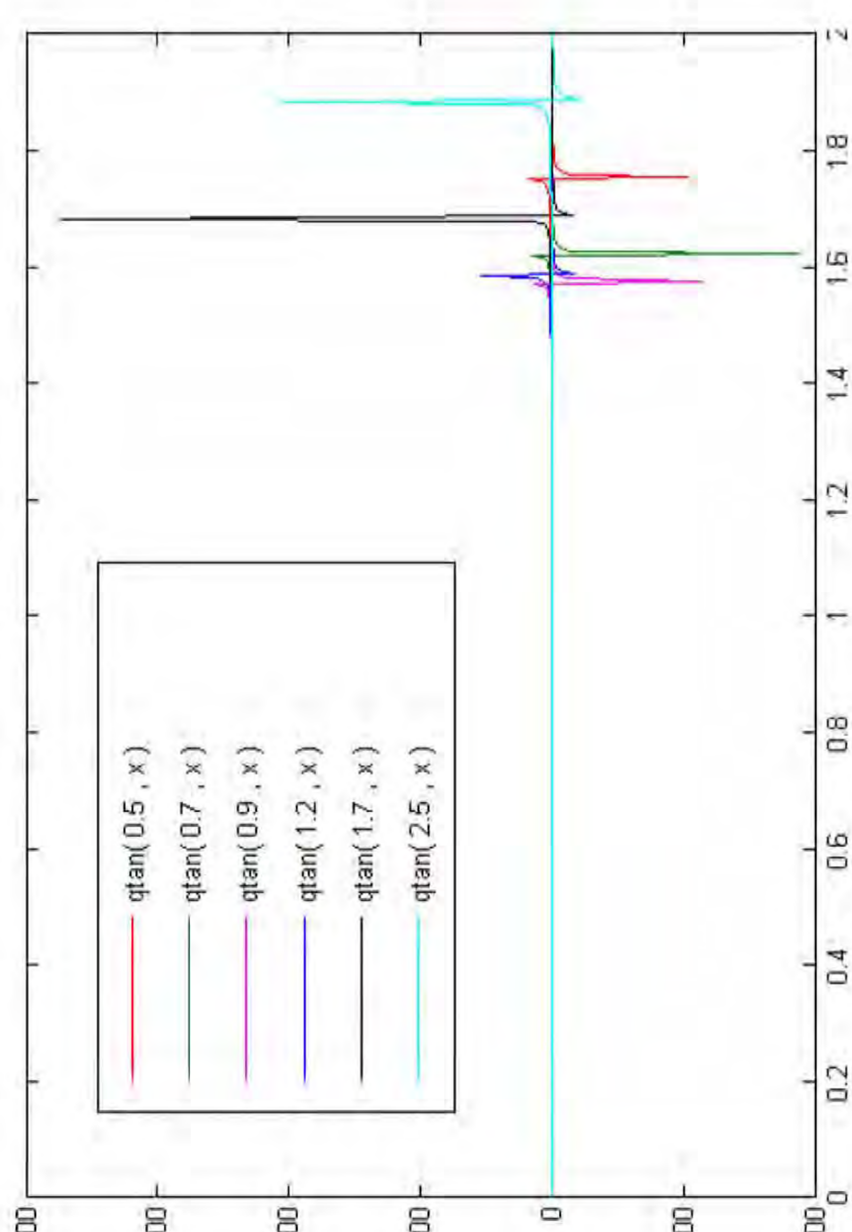
Funcion $Sen_q(x)$ usando varios valores para q.



Funcion $\cos_q(x)$ graficada para distintos valores de q.



Funcion $\mathrm{Cos}_q(x)$ usando valores para q alrededor de 1.



Funcion $\tan_q(x)$ evaluada como unica por ser igual que $Tan_q(x)$.

Chapter 3

q-Cálculo Integral

Ahora estudiaremos la q-integración con un enfoque parecido al de la integración en el Cálculo Integral usual. Muy importante para el estudio de las q-Ecuaciones Diferenciales, porque como tal necesitamos ser capaces de hacer el proceso inverso de la q-derivada al momento de intentar resolver una q-Ecuación Diferencial.

3.1 q-Antiderivada

Definition 10 *Consideraremos que una función $F(x)$ es una q-antiderivada (q-integral) de $f(x)$, si $D_q F(x) = f(x)$. Lo anterior lo representamos con el símbolo*

$$F(x) = \int f(x)\, d_q x \tag{3.1}$$

Comenzaremos el estudio de la q-Antiderivada con las propiedades básicas que sabemos se cumplen en el cálculo usual. Por ejemplo, sabemos por la definición de q-derivada que $D_q cte = 0$, pero si ahora suponemos que una función cumple con que $D_q F(x) = 0$, entonces ¿Esto significa que $F(x) = cte$? Esta pregunta es la primera que abordaremos junto con la existencia de las q-antiderivadas, ¿ambos nos representaran la existencia y unicidad para una q-antiderivada? Claro está que normalmente para la existencia de antiderivadas, ya se tenían condiciones impuestas sobre la función, ahora veamos que tanto para la existencia, como la unicidad, necesitamos de hipótesis adicionales.

Empecemos con el análisis de la unicidad para q-Antiderivadas. Si estamos en busca de una solución al problema $D_q F(x) = f(x)$, donde $f(x)$ es conocida, para delimitar toda una posible familia de funciones solución, le sumamos una función $\varphi(x)$ a $F(x)$, entonces por la linealidad que hay con el operador D_q, podemos separar a la suma como sigue

$$\begin{aligned} D_q\left\{\varphi(x)+F(x)\right\} &= D_q\varphi(x)+D_qF(x) \\ &= D_q\varphi(x)+f(x) \\ &= f(x) \\ &\Longrightarrow D_q\varphi(x)=0 \end{aligned}$$

La función $\varphi(x)$ nos particulariza una única solución que puede satisfacer alguna restricción o condición impuesta sobre el desplazamiento de dicha solución. Sin embargo, para que el objetivo de ser q-antiderivada de $f(x)$ no se pierda, vemos al final de las anteriores igualdades, que se debe cumplir que dicha función que le sumamos a una ya conocida, debe tener como q-derivada a la función cero. De aquí el problema de determinar aquellas funciones que bajo la q-derivada sean nulas.

Sabemos como dijimos antes que si $\varphi(x)=cte$, cumple lo que pedimos por la definición (2.2), pero que pasara en general con la función $\varphi(x)$. Para ello podemos establecer un primer camino para verificar sus características.

Si suponemos que $\varphi(x)$ es una función con una representación en serie de potencias alrededor del cero, entonces $\varphi(x)$ puede escribirse en la forma

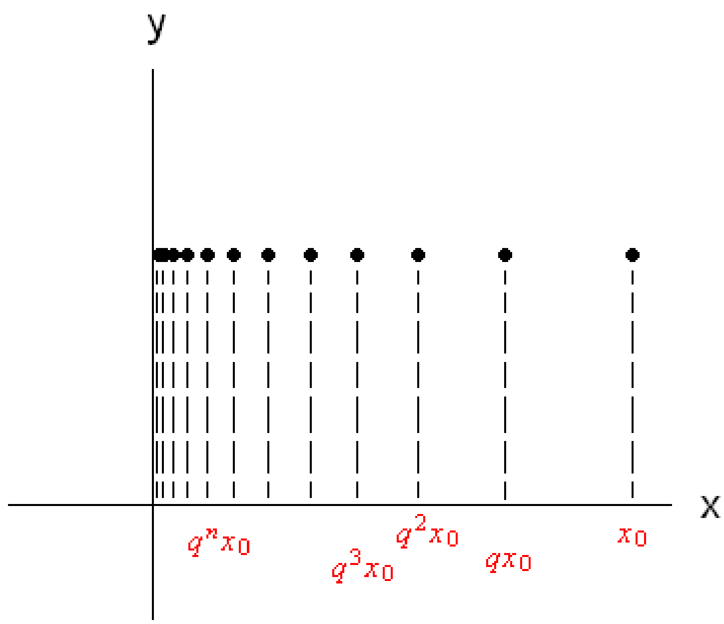
$$\varphi(x)=\sum_{j=0}^{\infty}c_jx^j$$

pero la condición de que $D_q\varphi(x)=0$, se traduce en que

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(qx)-\varphi(x)}{(q-1)x} &= 0 \\ \varphi(qx) &= \varphi(x)\ \forall x\in Dom(f) \end{aligned}$$

lo cual cual nos lleva a que se cumpla $\sum_{j=0}^{\infty}c_j(qx)^j=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$, lo cual implica a su ves que $\sum_{j=0}^{\infty}c_jx^j\left(q^j-1\right)=0$. Como $q\neq 1$, entonces no queda de otra que $c_j=0\ \forall j\geq 1$, lo cual prueba que $\varphi(x)=c_0$, es decir, $\varphi(x)$ es constante si se puede expresar como una serie de potencias formal.

Pero en general como no necesariamente cualquier función se puede expresar como una serie de potencias, pediremos algo menos a partir de una función general $\varphi(x)$, tal que $\varphi(qx)=\varphi(x)$.



Comportamiento la funcion que cumple que su q-derivada es cero en su dominio.

Como se cumple que $\varphi(qx) = \varphi(x)\ \forall x \in Dom(f)$, en particular para una sucesión de iteraciones de q, tal que haga que el producto con un elemento del dominio de φ, este producto siga perteneciendo al dominio.

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= \varphi(qx_0) = \varphi(q(qx_0)) \\ &= \varphi(q(q(qx_0))) = \ldots = \varphi(q(q\ldots(q(qx_0)))) \\ &\therefore\ \varphi(x_0) = \varphi(q^n x_0)\ \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Donde sabemos que $\{x_0, qx_0, q^2x_0, \ldots, q^n x_0, \ldots\}$ es una sucesión convergente a cero siempre y cuando $0 < q < 1$.

Cuando n se va tomando cada ves más grande, la distancia entre $q^n x_0$ y $q^{n+1}x_0$ es cada vez menor, y dado que la condición $\varphi(qx) = \varphi(x)\ \forall x \in Dom(f)$, tiene forma de una condición similar a lo que se pide para funciones periodicas, los intervalos semicerrados que los componen, deben igual ser periodicos. Si en algunos de estos intervalos se tiene una linea recta no horizontal, entonces al tener que repetirse cada vez más frecuentemente, se tendria una discontinuidad al llegar al valor $x = 0$, por lo que por este lado es por donde caracterizaremos a las funciones $\varphi(x)$ tal que $D_q\varphi(x) = 0$.

Proposition 19 *Sea $0 < q < 1$, entonces una función $\varphi(x)$ tiene a los más una q-antiderivada que es continua en $x = 0$ al sumarsele una constante.*

Proof. Sean F_1 y F_2 2 q-antiderivadas de f que son continuas en $x = 0$ y formamos la función $\varphi = F_1 - F_2$ Esta función tiene la propiedad de que es continua en $x = 0$ y que $\varphi(qx) = \varphi(x)$ en cualquier $x \in Dom(\varphi)$, dado que $D_q\varphi(x) = 0$.

Sea $x_0 \in Dom(\varphi)$ y $0 < q < 1$, entonces formamos la sucesión

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{x_0, qx_0, q^2x_0, ..., q^nx_0, ...\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

está es una sucesión acotada por el cero y dependiendo del signo de x_0, es creciente o decreciente. De igual forma converge y lo hace a cero.

Como φ es continua en $x = 0$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a cero cuando n tiende a ∞, entonces podemos afirmar que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \varphi(q^nx_0) = \varphi\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} q^nx_0\right) = \varphi(0)$$

pero como

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= \varphi(qx_0) \implies \varphi(x_0) = \varphi(q^nx_0)\, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\implies \lim_{n\longrightarrow\infty} \varphi(x_0) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \varphi(q^nx_0) = \varphi(0) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow\infty} \varphi(x_0) &= \varphi(x_0) \\ \therefore\ & \varphi(x_0) = \varphi(0) \end{aligned}$$

y como no usamos un x_0 en particular, el resultado vale $\forall x_0 \in Dom(\varphi)$ y de está manera $\varphi(x)$ es constante. Lo que implica a su vez que $F_1 - F_2 = cte \iff F_1 = F_2 + cte$. ■

Por lo tanto, cualquier q-antiderivada de $f(x)$ que sea continua en $x = 0$ difiere de otra en una constante. Por lo que concluimos que la única forma de que tengamos unicidad en la q-antiderivada, es que pidamos la continuidad en $x = 0$ de la función que sumemos al final.

Para resolver el problema de la existencia de las q-antiderivadas, usaremos un método conocido como método de la Integral de Jackson.

3.2 Metodo de la Integral de Jackson

Analizaremos la existencia de la q-antiderivada, a través de una prueba constructiva y así mismo verificaremos las condiciones para las cuales se da la existencia. Con este propósito definamos un operador $\hat{M}_q$ que es lineal sobre el espacio de Polinomios, cuya acción sobre un polinomio $f(x)$ es el siguiente,

$$\hat{M}_q\left(f\left(x\right)\right)=f\left(qx\right)$$

M_q es lineal porque $\hat{M}_q\left(af\left(x\right)+g\left(x\right)\right)=af\left(qx\right)+g\left(qx\right)=a\hat{M}_q\left(f\left(x\right)\right)+\hat{M}_q\left(g\left(x\right)\right)$. Luego si suponemos que $F\left(x\right)$ es una q-antiderivada de $f\left(x\right)$, se cumple que $D_qF\left(x\right)=f\left(x\right)$ y esto si y sólo si $\frac{1}{(q-1)x}\left(\hat{M}_q-1\right)F\left(x\right)=\frac{F(qx)-F(x)}{(q-1)x}=f\left(x\right)$. De donde al despejar como operadores, se obtiene

$$F\left(x\right)=\frac{1}{1-\hat{M}_q}\left(1-q\right)xf\left(x\right)$$

y usando la expansión de la serie geometrica $\frac{1}{1-x}=\sum_{j=0}^{\infty}x^j$, solo que aquí $x=\hat{M}_q$ y la potencia se interpreta como el número de veces que aplicamos el operador, en consecuencia

$$F\left(x\right)=\left(1-q\right)\sum_{j=0}^{\infty}\hat{M}_q^j\left(xf\left(x\right)\right)$$

y como $F\left(x\right)$ se denota por $\int f\left(x\right)d_qx$, entonces

$$\int f\left(x\right)d_qx=\left(1-q\right)x\sum_{j=0}^{\infty}{}_q^jq^jf\left(q^jx\right)$$

está serie es la llamada Integral de Jackson de $f\left(x\right)$.

En forma más general si necesitamos hacer la q-integración de $\int f\left(x\right)D_qg\left(x\right)d_qx$, recurrimos a tomar como función de integración a todo $f\left(x\right)D_qg\left(x\right)$, lo cual implica según la integral de Jackson que

$$\begin{aligned}\int f\left(x\right)D_qg\left(x\right)d_qx &= \left(1-q\right)x\sum_{j=0}^{\infty}q^jf\left(q^jx\right)D_qg\left(q^jx\right)\\ &= \left(1-q\right)x\sum_{j=0}^{\infty}q^jf\left(q^jx\right)\left\{\frac{g\left(q^{j+1}x\right)-g\left(q^jx\right)}{\left(q-1\right)x}\right\}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}q^jf\left(q^jx\right)\left\{g\left(q^jx\right)-g\left(q^{j+1}x\right)\right\}\end{aligned}$$

pero aplicando las definiciones de q-diferenciales y q-derivadas, podemos cambiar la apariencia de $f\left(x\right)D_qg\left(x\right)d_qx$

$$\begin{aligned}f\left(x\right)D_qg\left(x\right)d_qx &= f\left(x\right)\left\{\frac{g\left(qx\right)-g\left(x\right)}{\left(q-1\right)x}\right\}d_qx\\ &= f\left(x\right)\left\{g\left(qx\right)-g\left(x\right)\right\}\\ &= f\left(x\right)d_qg\left(x\right)\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\int f(x)\, d_q g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right)\left\{g\left(q^j x\right) - g\left(q^{j+1} x\right)\right\}$$

El siguiente teorema facilita la tarea de probar la existencia, al dar las condiciones suficientes para la convergencia de la serie.

Theorem 20 *Si $0 < q < 1$ y $|f(x)\, x^{\alpha}|$ es acotado en el intervalo $(0, A]$ para algún $0 \leq \alpha < 1$ entonces la Integral de Jackson converge a una función $F(x)$ en $(0, A]$, la cual es una q-antiderivada de $f(x)$. Más aún, $F(x)$ es continua en $x = 0$ y $F(0) = 0$.*

Proof. Como la función $|f(x)\, x^{\alpha}|$ es acotada existe $M > 0$ tal que $0 < |f(x)\, x^{\alpha}| < M$ para cualquier $x \in (0, A]$ y $\alpha \in [0, 1)$. Como $q \in (0, 1)$ y al tomar $j \geq 0$, entonces se cumple que $q^j \in (0, 1)$ y por lo tanto $0 < x \leq A \iff 0 < q^j x \leq A$. Por lo que podemos evaluar $q^j x$ en $|f(x)\, x^{\alpha}|$

$$\begin{array}{rcl} 0 & < & \left|f\left(q^j x\right)\left(q^j x\right)^{\alpha}\right| < M \\ & \iff & 0 < \left|f\left(q^j x\right)\right| \left|\left(q^j x\right)^{\alpha}\right| < M \\ & \iff & 0 < \left|f\left(q^j x\right)\right| < M \left|\left(q^j x\right)\right|^{-\alpha} = M\left(q^j x\right)^{-\alpha} \\ \text{ya que } q^j & > & 0 \\ \text{entonces } q^j \left|f\left(q^j x\right)\right| & < & M q^j \left(q^j x\right)^{-\alpha} \\ \text{es decir, } \left|q^j f\left(q^j x\right)\right| & < & M x^{-\alpha} q^{(1-\alpha) j} \end{array}$$

lo cual nos lleva a

$$\begin{array}{rcl} (1-q)\, x \sum_{j=0}^{\infty} \left|q^j f\left(q^j x\right)\right| & < & (1-q)\, x \sum_{j=0}^{\infty} M x^{-\alpha} (q)^{(1-\alpha) j} \\ & = & (1-q)\, x M x^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (q)^{(1-\alpha) j} \text{ donde } 1 - \alpha > 0 \text{ y } q \in (0, 1) \end{array}$$

pero

$$\begin{array}{rcl} \sum_{j=0}^{\infty} (q)^{(1-\alpha) j} & = & \dfrac{1}{1 - q^{(1-\alpha)}} \\ & & \text{ya que es una serie geométrica} \end{array}$$

Como la serie es acotada superiormente y cada uno de sus términos son positivos, entonces la serie converge absolutamente, en consecuencia la serie $(1-q)\, x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right)$

converge para cada $x \in (0, A]$, en este caso tenemos una convergencia puntual a una función, que llamamos $F(x)$.

Ahora veamo que $F(x) = (1-q)\,x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right)$ es una q-antiderivada de $f(x)$ se debe a que sí

$$
\begin{aligned}
D_q F(x) &= \frac{F(qx) - F(x)}{(q-1)\,x} \\
&= \frac{(1-q)\,qx\sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^{j+1}x\right) - (1-q)\,x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right)}{(q-1)\,x} \\
&= -q\sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^{j+1}x\right) + \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right) - \sum_{j=0}^{\infty} q^{j+1} f\left(q^{j+1}x\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right) - \sum_{k=1}^{\infty} q^k f\left(q^k x\right) \\
&= f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right) - \sum_{k=1}^{\infty} q^k f\left(q^k x\right) \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

Para probar que la función $F(x) = (1-q)\,x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right)$ es continua en cero, mostremos que $F(0) = 0$ y $\lim_{x \longrightarrow 0} F(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
\text{Como } F(x) &= (1-q)\,x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right) \\
\text{Entonces } F(0) &= 0\left(\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(0)\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\text{Como } 0 &\leq |F(x)| = \left|(1-q)\,x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right)\right| \\
&\leq |(1-q)\,x| \sum_{j=0}^{\infty} \left|q^j f\left(q^j x\right)\right| \\
&< |(1-q)\,x| \sum_{j=0}^{\infty} M x^{-\alpha} q^{(1-\alpha)j} \\
&= |(1-q)\,x|\, M x^{-\alpha} \frac{1}{1-q^{1-\alpha}} \\
&= \frac{M\,(1-q)\,x^{1-\alpha}}{1-q^{1-\alpha}} \\
&\therefore\ |F(x)| < \left(\frac{M\,(1-q)}{1-q^{1-\alpha}}\right) x^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

y $\left(\frac{M(1-q)}{1-q^{1-\alpha}}\right) x^{1-\alpha} \longrightarrow 0$, cuando $x \to 0$, entonces $\lim_{x\to 0} F(x) = 0$. ■

Cuando las condiciones necesarias no se cumplen, no podemos hablar de una aplicación directa de los métodos construidos, este es el caso de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, para la cual la integral de Jackson nos da

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x} d_q x &= (1-q)\,x \sum_{j=0}^{\infty} q^j \left(\frac{1}{q^j x}\right) \\
&= (1-q)\,x \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{x} \\
&= (1-q) \sum_{j=0}^{\infty} 1 = \infty
\end{aligned}$$

esto en consecuencia de que para $f(x) = \frac{1}{x}$, $|f(x)\,x^{\alpha}|$ no es acotada en el intervalo $(0, A]$ para $\alpha \in [0, 1)$. Esto no significa que no podamos determinar una q-antiderivada para $\frac{1}{x}$. Podemos hacerlo indirectamente a partir de la definición de q-derivada para el logaritmo natural.

$$\begin{aligned}
D_q \ln(x) &= \frac{\ln(qx) - \ln(x)}{(q-1)x} \\
&= \frac{\ln(q) + \ln(x) - \ln(x)}{(q-1)x} \\
&= \frac{\ln(q)}{q-1}\frac{1}{x} \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{q-1}{\ln(q)} D_q \ln(x) \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{x} = D_q\left(\frac{q-1}{\ln(q)}\ln(x)\right)
\end{aligned}$$

es decir,

$$\int \frac{1}{x} d_q x = \frac{q-1}{\ln(q)} \ln(x)$$

3.3 q-Función Logaritmo

Un caso más general que puede ser resuelto por la Integral de Jackson, es el de determinar la q-antiderivada de $f(x) = \frac{1}{x+a}$, donde $a > 0$, en la cual pedimos algunas condiciones para tener asegurada la convergencia de la suma infinita.

Proposition 21 *Si $0 < q < 1$ y $a > 0$, entonces para cualquier $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq 0$, la integral de Jackson de la función $\frac{1}{x+a}$ converge a una función que denotaremos por $\ln_q(x+a)$.*

Proof. Como

$$\begin{aligned}
0 &< q < 1 \\
\text{Si } q &= \frac{1}{r} \\
\text{entonces } 1 &< r < \infty \\
\text{por lo cual } 0 &< q^j < 1 \text{ y } 1 < r^j < \infty \text{ para todo } j \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \text{Como } 0 &\leq x \\ \text{y } a &> 0 \text{ entonces } 0 < ar^j \\ \text{es decir, } 0 &< ar^j \leq ar^j + x \\ \text{de donde se obtiene } \frac{1}{ar^j + x} &\leq \frac{1}{ar^j} \ \forall j \in \mathbb{N} \\ \text{en consecuencia } \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{ar^j + x} &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{ar^j} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1-q}\right) \end{aligned}$$

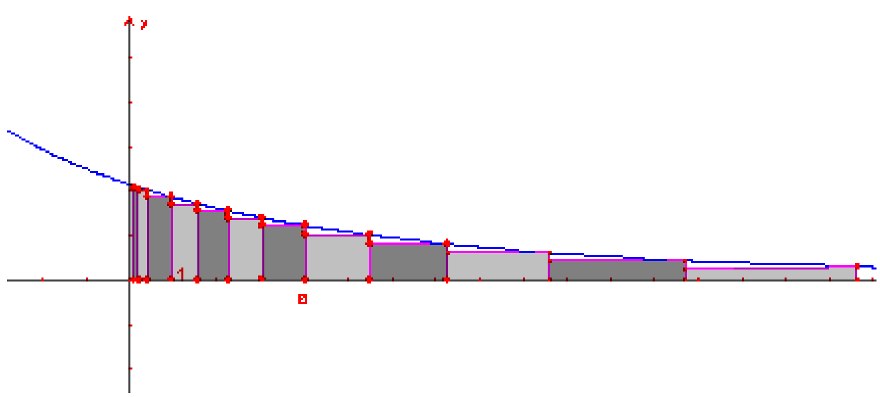
Por lo tanto

$$\int \frac{1}{x+a} d_q x = (1-q)\, x \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{x + aq^{-j}}$$

Denotemos esta función como

$$\ln_q (x+a) = (1-q)\, x \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{x + aq^{-j}} \tag{3.2}$$

está función tiene algunas características similares a la función logaritmo que ya conocemos, aunque algunas otras muy distintas, como por ejemplo el hecho de que para cualquier $a > 0$ se cumple que $D_q \ln_q (x+a) = \frac{1}{x+a}$, aunque por la integral de Jackson y la definición antes dada en (3.2) para cualquier $a > 0$ pero evaluando en $x = 0$ se tiene que $\ln_q (0+a) = \ln_q (a) = 0$



■

3.4 q-Integral Definida

Ahora definamos una q-integral definida sobre un intervalo, utilizando la Integral de Jackson. Además podemos darle una interpretación geometrica, en forma parecida a la integral de Riemann para intervalos cerrados.

Definition 11 *Si $0 < a < b$, entonces la q-integral definida la consideraremos como*

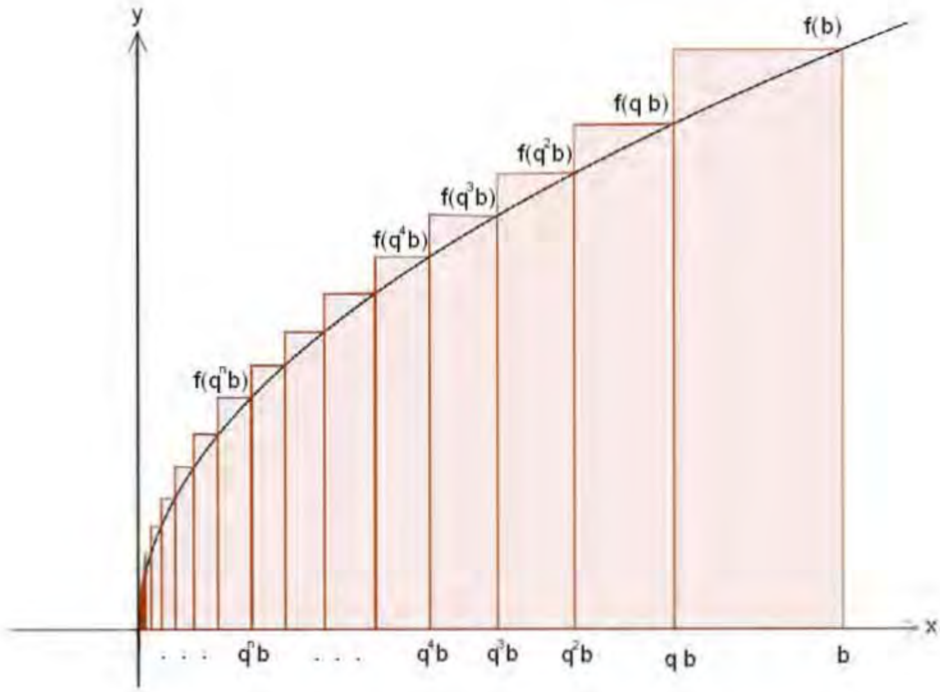
$$\int_0^b f(x)\, d_q x = (1-q)\, b \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j b\right)$$

y

$$\int_a^b f(x)\, d_q x = \int_0^b f(x)\, d_q x - \int_0^a f(x)\, d_q x$$

Sabemos que si $0 < q < 1$ entonces $q^n b \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ es decir, $\forall$ $\epsilon > 0$ $\exists$ $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < q^n b < \epsilon$ si $n > N$, por lo que en el intervalo $[\epsilon, b]$ la q-integral o suma, consiste de muchos términos pero al fin una suma finita, que en analogía corresponde a una suma de Riemann. Dado que cada base de los rectángulos en la suma finita mide $q^{n-1} b\,(1-q)$, cuando $q \longrightarrow 1$, $q^{n-1} b\,(1-q) \longrightarrow 0$ en tanto que la altura $f(q^n b) \longrightarrow f(b)$, y de está manera en el intervalo $[\epsilon, b]$, la suma tiende a una suma de Riemann. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, entonces hemos probado la convergencia a la suma de Riemann en $[0, b]$

$$\lim_{q \longrightarrow 1} \int_0^b f(x)\, d_q x = \int_0^b f(x)\, dx$$



Podemos hacer una extensión de este resultado a intervalos infinitos haciendo uso de la siguiente q-integral particular, la cual vamos a resolver directamente, suponiendo $|q| < 1$.

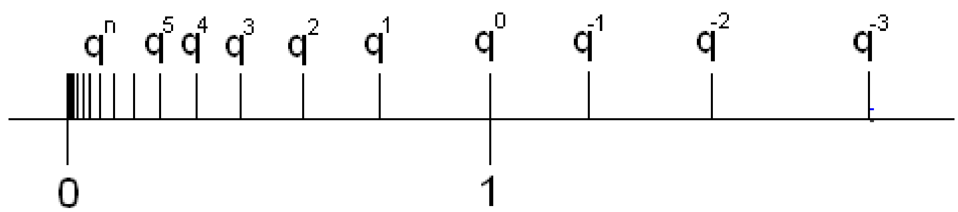
$$\begin{aligned}
\int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)\, d_q x &= \int_0^{q^j} f(x)\, d_q x - \int_0^{q^{j+1}} f(x)\, d_q x \\
&= (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k} f\left(q^{j+k}\right) - (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k+1} f\left(q^{j+k+1}\right) \\
&= (1-q)\left\{\sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k} f\left(q^{j+k}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k+1} f\left(q^{j+k+1}\right)\right\} \\
&= (1-q)\left\{q^j f\left(q^j\right) + \sum_{k=1}^{\infty} q^{j+k} f\left(q^{j+k}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k+1} f\left(q^{j+k+1}\right)\right\} \\
&= (1-q)\left\{q^j f\left(q^j\right) + \sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k+1} f\left(q^{j+k+1}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k+1} f\left(q^{j+k+1}\right)\right\} \\
&= (1-q)\, q^j f\left(q^j\right)
\end{aligned}$$

Si $0 < q < 1$, entonces

$$q^{n+1} < q^n \qquad \text{y} \qquad q^{n+1}, q^n \in (0,1) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Para $-m \in \mathbb{Z}^-$ se tiene que

$$q^{-m+1} < q^{-m} \quad \leftrightarrow \quad q < 1, \text{ donde } q^{-m+1}, q^{-m} \in [1,\infty)$$

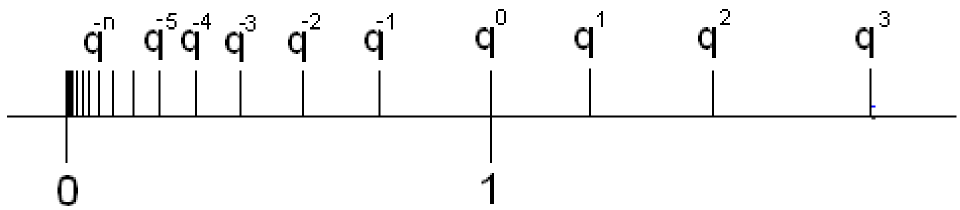


Con lo cual podemos barrer todo el intervalo $[0,\infty)$ y darle sentido de q-integral, si consideramos como suma infinita de todas las potencias tanto positivas como negativas de q, al estar entre 0 y 1, i. e., podemos definir

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x)\, d_q x &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)\, d_q x \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (1-q)\, q^j f\left(q^j\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

En tanto que el caso cuando $q > 1$, se reduce simplemente a considerar $q^{n+1} > q^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $q^{-n+1} > q^{-n}$, así que para este caso tenemos el que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x)\, d_q x &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{q^k}^{q^{k+1}} f(x)\, d_q x \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (q-1)\, q^k f\left(q^k\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$



Luego $\forall q\in\mathbb{R}^{+}\setminus\{0,1\}$

$$\int_0^{\infty} f(x)\,d_qx = |1-q|\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^k f\left(q^k\right) \tag{3.5}$$

Pero como

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^k f\left(q^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{-k} f\left(q^{-k}\right) + f(1) + \sum_{k=1}^{\infty} q^k f\left(q^k\right) \tag{3.6}$$

hay una simetría para $q\in(0,1)$ y $\tilde{q}\in(1,\infty)$ tal que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^k f\left(q^k\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{q}^k f\left(\tilde{q}^k\right) \text{ si } q=\frac{1}{\tilde{q}} \text{ ó } \tilde{q}=\frac{1}{q} \tag{3.7}$$

Vamos como ultima parte de está sección, a comprobar el que la definición para q-integrales impropias es consistente y puede converger la serie a la que es igual.

Proposition 22 *La definición de q-integral impropia converge si $x^{\alpha} f(x)$ es acotado en una vecindad de $x=0$ con $\alpha<1$ y para x suficientemente grande cuando $\alpha>1$.*

Proof. Como tenemos la propiedad (3.7), en la demostración solo será necesario considerar un caso $q<1$ ó $q>1$, por lo que solo tomaremos el primero. Si consideramos que para la convergencia de (3.5) es necesario la de las dos series que lo definen en (3.6), entonces a su vez haremos 2 comprobaciones,

Como

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j f\left(q^j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j\right) + \sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} f\left(q^{-j}\right)$$

Si tomamos $q\in(0,1)$, podemos hacer la demostración por medio del teorema en el cual probamos la existencia de la Integral de Jackson

$$\begin{aligned}
\text{Como } \left|x^{\alpha} f(x)\right| &< M \quad \text{si } \ 0<\alpha<1 \\
\text{entonces } \left|q^{j} f\left(q^{j} x\right)\right| &< M x^{-\alpha}\left(q^{1-\alpha}\right)^{j} \\
\text{al tomar } \ x &= 1 \text{ se tiene} \\
\left|q^{j} f\left(q^{j}\right)\right| &< M\left(q^{1-\alpha}\right)^{j} \\
&\therefore \quad \sum_{j=0}^{\infty} q^{j} f\left(q^{j}\right) \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|q^{j} f\left(q^{j}\right)\right|<\sum_{j=0}^{\infty} M\left(q^{1-\alpha}\right)^{j} \\
&= M \sum_{j=0}^{\infty}\left(q^{1-\alpha}\right)^{j}, \text{ pero } q \in(0,1) \ \text{ y } 1-\alpha>0 \\
&= \frac{M}{1-q^{1-\alpha}} \\
&\therefore \quad \sum_{j=0}^{\infty} q^{j} f\left(q^{j}\right) \ \text{ converge}
\end{aligned}$$

Bajo las hipótesis de que si x es suficientemente grande entonces $x^{\alpha} f(x)$ es acotada para $\alpha>1$, lo cual implica que

$$\left|x^{\alpha} f(x)\right|<M \ \text{ para } x>x_{0} \in \mathbb{R}^{+} \text{ y } 1<\alpha$$

luego tomando $q \in(0,1) \iff q^{-1}>1$, podemos tomar j suficientemente grande tal que $q^{-j}>x_{0}$, y que a su vez se tenga

$$
\begin{aligned}
\left|q^{-j\alpha} f\left(q^{-j}\right)\right| &< M \text{ para } \alpha > 1 \\
\text{de donde } q^{j(\alpha-1)}\left|q^{-j\alpha} f\left(q^{-j}\right)\right| &< M q^{j(\alpha-1)} \\
\text{pero } q^{j(\alpha-1)}\left|q^{-j\alpha} f\left(q^{-j}\right)\right| &= \left|q^{j\alpha-j} q^{-j\alpha} f\left(q^{-j}\right)\right| \\
&= \left|q^{-j} f\left(q^{-j}\right)\right| \\
\text{Entonces } \sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} f\left(q^{-j}\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{-j} f\left(q^{-j}\right) - f(1) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|q^{-j} f\left(q^{-j}\right)\right| - f(1) \\
&< \sum_{j=0}^{\infty} M q^{j(\alpha-1)} - f(1) \\
&= \frac{M}{1-q^{\alpha-1}} - f(1) \\
&\therefore \sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} f\left(q^{-j}\right) \text{ converge} \\
&\therefore \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j} f\left(q^{j}\right) \text{ converge}
\end{aligned}
$$

■

3.5 Teorema Fundamental del q-Cálculo

En esta sección veremos la relación entre la q-derivada y la q-integral (introducida inicialmente como q-antiderivada). Esto corresponde a lo que en el cálculo usual se conoce como Teorema Fundamental del Cálculo o fórmula de Newton-Leibniz.

Theorem 23 (*Fundamental del q-Cálculo*). *Si $F(x)$ es una q-antiderivada de $f(x)$ y $F(x)$ es continua en $x = 0$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\, d_q x = F(b) - F(a)$$

para $0 \leq a < b \leq \infty$

Proof. Como $F(x)$ es continua en $x = 0$, por la proposición acerca de la unicidad de la q-antiderivada, tenemos que $F(x)$ difiere de la integral de Jackson de $f(x)$ por una constante para toda x en su dominio, por ser ambas continuas y q-antiderivadas. De está forma, tenemos que

$$F(x)-(1-q)\,x\sum_{j=0}^{\infty}q^{j}f\left(q^{j}x\right)=cte$$

y para $x=0$ se tiene

$$\begin{aligned}
F(0)-(1-q)(0)\sum_{j=0}^{\infty}q^{j}f(0) &= cte\\
F(0) &= cte\\
\therefore & \quad F(x)-(1-q)\,x\sum_{j=0}^{\infty}q^{j}f\left(q^{j}x\right)=F(0)\\
\therefore & \quad F(x)-F(0)=(1-q)\,x\sum_{j=0}^{\infty}q^{j}f\left(q^{j}x\right)\\
\Longrightarrow & \quad \int_a^b f(x)\,d_qx=\int_0^b f(x)\,d_qx-\int_0^a f(x)\,d_qx\\
&= (1-q)\,b\sum_{j=0}^{\infty}q^{j}f\left(q^{j}b\right)-(1-q)\,a\sum_{j=0}^{\infty}q^{j}f\left(q^{j}a\right)\\
&= (F(b)-F(0))-(F(a)-F(0))\\
&= F(b)-F(a)
\end{aligned}$$

Ahora solo nos falta ver que para cualquier número c se cumple que

$$\int_c^{\infty}f(x)\,d_qx=F(\infty)-F(c)$$

siempre y cuando $F(\infty)$ tenga sentido. Si usamos las propiedades que ya tenemos se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_c^{\infty}f(x)\,d_qx &= \int_0^{\infty}f(x)\,d_qx-\int_0^{c}f(x)\,d_qx\\
\text{pero sabemos que}\ \int_0^{c}f(x)\,d_qx &= F(c)-F(0)
\end{aligned}$$

por lo que solo queda probar que el teorema es valido para $\int_0^{\infty}f(x)\,d_qx$. Pero por la definición dada de q-integrales impropias,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f(x)\, d_q x &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)\, d_q x \text{ si } q \in (0,1) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{q^j}^{q^{j+1}} f(x)\, d_q x \text{ si } q > 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & \int_0^{\infty} f(x)\, d_q x = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)\, d_q x \quad \text{si } q \in (0,1) \\ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{q^j}^{q^{j+1}} f(x)\, d_q x \quad \text{si } q > 1 \end{array} \right\} \\
= \quad & \left\{ \begin{array}{c} \sum_{j=-\infty}^{\infty} F\left(q^j\right) - F\left(q^{j+1}\right) \quad \text{si } q \in (0,1) \\ \sum_{j=-\infty}^{\infty} F\left(q^{j+1}\right) - F\left(q^j\right) \quad \text{si } q > 1 \end{array} \right\} \\
= \quad & \left\{ \begin{array}{c} F\left(q^{-\infty}\right) - F\left(q^{\infty}\right) \quad \text{si } q \in (0,1) \\ F\left(q^{\infty}\right) - F\left(q^{-\infty}\right) \quad \text{si } q > 1 \end{array} \right\} \\
= \quad & \left\{ \begin{array}{c} F(\infty) - F(0) \quad \text{si } q \in (0,1) \\ F(\infty) - F(0) \quad \text{si } q > 1 \end{array} \right\} \\
= \quad & F(\infty) - F(0) \\
\therefore \quad & \int_c^{\infty} f(x)\, d_q x = \int_0^{\infty} f(x)\, d_q x - \int_0^{c} f(x)\, d_q x \\
= \quad & F(\infty) - F(0) - (F(c) - F(0)) \\
= \quad & F(\infty) - F(c)
\end{aligned}$$

■

3.5.1 Método de q-Integración por Partes

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones que tienen derivada ordinaria en una vecindad de $x = 0$ y además cada una de las funciones es continua en $x = 0$, entonces a partir que al q-derivar el producto de dichas funciones se obtiene

$$D_q\left(f(x)\, g(x)\right) = f(x)\, D_q g(x) + g(qx)\, D_q f(x) \tag{3.8}$$

aunado al hecho de que la función $f(x)\, g(x)$ hereda las características de f y g en el cálculo ordinario, por lo que $(f * g)(x)$ se vuelve una función derivable en una vecindad cerca de $x = 0$ y continua en $x = 0$. Podemos pues aplicar el corolario antes ya mencionado, el cual nos dice que

$$\int_a^b D_q f(x)\, d_q x = f(b) - f(a)$$

por lo que la igualdad (3.8) se transforma en

$$\begin{aligned}
\int_a^b D_q\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right)d_qx &= f\left(b\right)g\left(b\right)-f\left(a\right)g\left(a\right)\\
\int_a^b D_q\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right)d_qx &= \int_a^b \left(f\left(x\right)D_qg\left(x\right)+g\left(qx\right)D_qf\left(x\right)\right)d_qx\\
&= \int_a^b f\left(x\right)D_qg\left(x\right)d_qx+\int_a^b g\left(qx\right)D_qf\left(x\right)d_qx\\
&= \int_a^b f\left(x\right)d_qg\left(x\right)+\int_a^b g\left(qx\right)d_qf\left(x\right)
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}
f\left(b\right)g\left(b\right)-f\left(a\right)g\left(a\right) &= \int_a^b f\left(x\right)d_qg\left(x\right)+\int_a^b g\left(qx\right)d_qf\left(x\right)\\
\int_a^b f\left(x\right)d_qg\left(x\right) &= f\left(b\right)g\left(b\right)-f\left(a\right)g\left(a\right)-\int_a^b g\left(qx\right)d_qf\left(x\right)
\end{aligned}$$

3.5.2 Método de q-Integración por Fracciones Parciales

Este método nos permitirá integrar cierta clase de funciones racionales (cociente de polinomios), y que a diferencia del Método usado para el Cálculo usual, omitiremos ciertos casos por la dificultad del tipo de q-integrales que resultan. Sin embargo, aquellos en los cuales tengamos una descomposición, en el denominador, de factores distintos podrán ser resueltos sin problema alguno, solo tomando en cuenta una de las secciones anteriores, en la cual tenemos ya definida nuestra función q-logarítmica con las propiedades ya establecidas y que nos servirán para atacar dichos problemas. Esta forma de tratar las q-integrales, realmente sabemos que funciona en gran parte por el álgebra aplicada y solo cambia la apariencia de la parte a q-integrar, por lo que no es del Cálculo usual muy diferente.

En general, si queremos q-integrar un cociente de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en el que el grado de $P(x)$ es mayor o igual al grado de $Q(x)$, procederemos aplicando el algoritmo de la división y obtener que

$$P\left(x\right)=Q\left(x\right)q\left(x\right)+r\left(x\right) \tag{3.9}$$

donde $r(x)=0$ ó grado $r(x)<$grado $Q(x)$, y la q-integral buscada es

$$\int_a^b \frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}d_qx=\int_a^b q\left(x\right)d_qx+\int_a^b \frac{r\left(x\right)}{Q\left(x\right)}d_qx$$

se reduce a calcular la q-integral de un polinomio $q(x)$ y la q-integral de una función racional en la cual el numerador tiene grado menor que el denominador.

A continuación, describiremos los unicos casos de descomposición de fracciones racionales (en los cuales el polinomio del numerador tiene grado menor que el denominador) como una suma de fracciones parciales, las cuales son fáciles de q-integrar en casos especificos.

Si $Q(x)$ tiene todas sus raices reales y distintas, entonces la factorización del polinomio $Q(x)$ es en factores lineales y distintos, es decir:

$$Q(x) = (x + a_1)(x + a_2)(x + a_3)...(x + a_n)$$

por lo que podemos hacer la siguiente descomposición:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x + a_1} + \frac{A_2}{x + a_2} + \frac{A_3}{x + a_3} + ... + \frac{A_n}{x + a_n}$$

donde $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ son constantes reales.

Nótese que una vez efectuada la descomposición, la q-integración es inmediata bajo la suposición de que los $a_i \geq 0$, pues:

$$\int \frac{A_i}{x + a_i} d_q x = \left\{ \begin{array}{ll} \ln_q (x + a_i) & \text{si } a_i > 0 \\ \frac{q-1}{\ln(q)} \ln (x) & \text{si } a_i = 0 \end{array} \right\}$$

3.5.3 Tabla de q-Integrales

Podemos concretar los resultados obtenidos, por medio de la siguiente tabla elemental de q-integrales.

$$\begin{aligned}
\int c\, d_qx &\longrightarrow cx, \text{ donde } c = \text{constante} \\
\int x^n d_qx &\longrightarrow \frac{x^{n+1}}{[n+1]} \\
\int \frac{d_qx}{x} &\longrightarrow \left(\frac{q-1}{\ln(q)}\right)\ln(x) \\
\int \frac{d_qx}{x+a} &\longrightarrow \ln_q(x+a)\,, \text{ donde } a>0 \\
\int (x-a)_q^n\, d_qx &\longrightarrow \frac{(x-a)_q^{n+1}}{[n+1]}, n\neq -1 \\
\int (a-x)_q^n\, d_qx &\longrightarrow \frac{-q\left(a-q^{-1}x\right)_q^{n+1}}{[n+1]},\ \ n\neq -1 \\
\int \frac{d_qx}{(x-a)_q^n} &\longrightarrow \frac{1}{q\,[1-n]\,(x-qa)_q^{n-1}},\ \ n\neq 1 \\
\int \frac{d_qx}{(a-x)_q^n} &\longrightarrow \frac{1}{[n-1]\,(a-x)_q^{n-1}},\ \ n\neq 1 \\
\int e_q^{ax} d_qx &\longrightarrow \frac{1}{a}e_q^{ax} \\
\int E_q^{ax} d_qx &\longrightarrow \frac{q}{a}e_q^{q^{-1}ax} \\
\int \cos_q(ax)\, d_qx &\longrightarrow \frac{1}{a}sen_q(ax) \\
\int sen_q(ax)\, d_qx &\longrightarrow -\frac{1}{a}\cos_q(ax) \\
\int Cos_q(ax)\, d_qx &\longrightarrow \frac{q}{a}Sen_q\left(q^{-1}ax\right) \\
\int Sen_q(ax)\, d_qx &\longrightarrow \frac{-q}{a}Cos_q\left(q^{-1}ax\right) \\
\int \sec_q(qx)\, Sec_q(x)\, d_qx &\longrightarrow \tan_q(x) \\
\int \sec_q(x)\, Sec_q(qx)\, d_qx &\longrightarrow \tan_q(x) \\
\int \csc_q(qx)\, Csc_q(x)\, d_qx &\longrightarrow -\cot_q(x) \\
\int \csc_q(x)\, Csc_q(qx)\, d_qx &\longrightarrow -\cot_q(x)
\end{aligned}$$

Como parte final de esta sección, daremos algunas propiedades de la q-integral, que sirven para un mejor manejo de ella y la posibilidad de extender los conocimientos de esta tabla para una infinidad de funciones que podemos crear como combinaciones lineales de las funciones que intervienen en dicha tabla.

Si para 2 funciones arbitrarias f y g, se cumple que $\int f(x)\,d_qx = F(x)$ y $\int g(x)\,d_qx = G(x)$. Entonces

- $\int (f+g)(x)\,d_qx = \int f(x)\,d_qx + \int g(x)\,d_qx$

  Por la definición de q-integral con la cual partimos y las hipótesis se cumple que

$$\begin{aligned} D_qF(x) &= f(x) \\ D_qG(x) &= g(x) \end{aligned}$$

como quedo probado que la q-derivada de una suma de funciones es igual a la suma de sus q-derivadas por (2.3), entonces

$$D_q(F+G)(x) = D_qF(x) + D_qG(x) = (f+g)(x)$$

Por lo tanto, $(F+G)(x)$ es una q-integral y podemos demostrar que

$$\begin{aligned} \int (f+g)(x)\,d_qx &= F+G \\ \int (f+g)(x)\,d_qx &= \int f(x)\,d_qx + \int g(x)\,d_qx \end{aligned}$$

- $\int cf(x)\,d_qx = c\int f(x)\,d_qx$. donde $c \in \mathbb{R}$

  Como

$$D_qcF(x) = cD_qF(x) = cf(x)$$

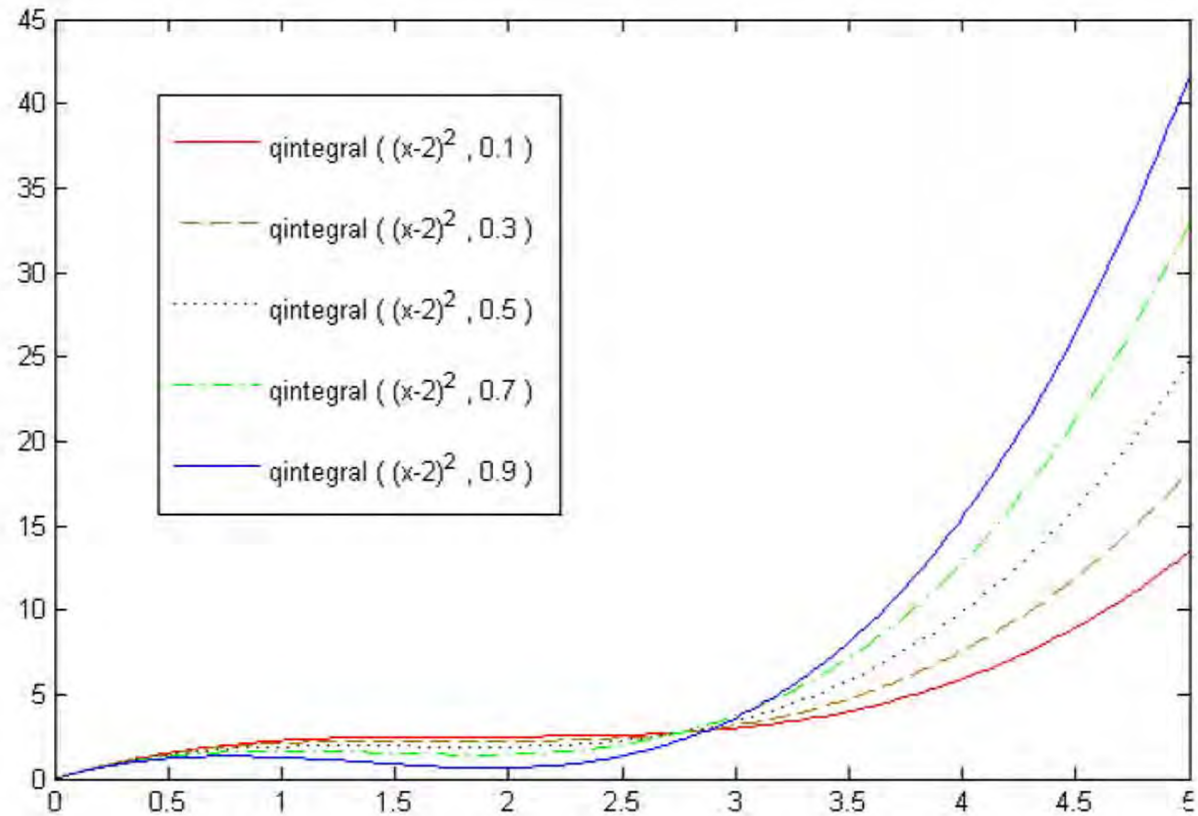
lo cual por la definición (3.1) nos lleva a

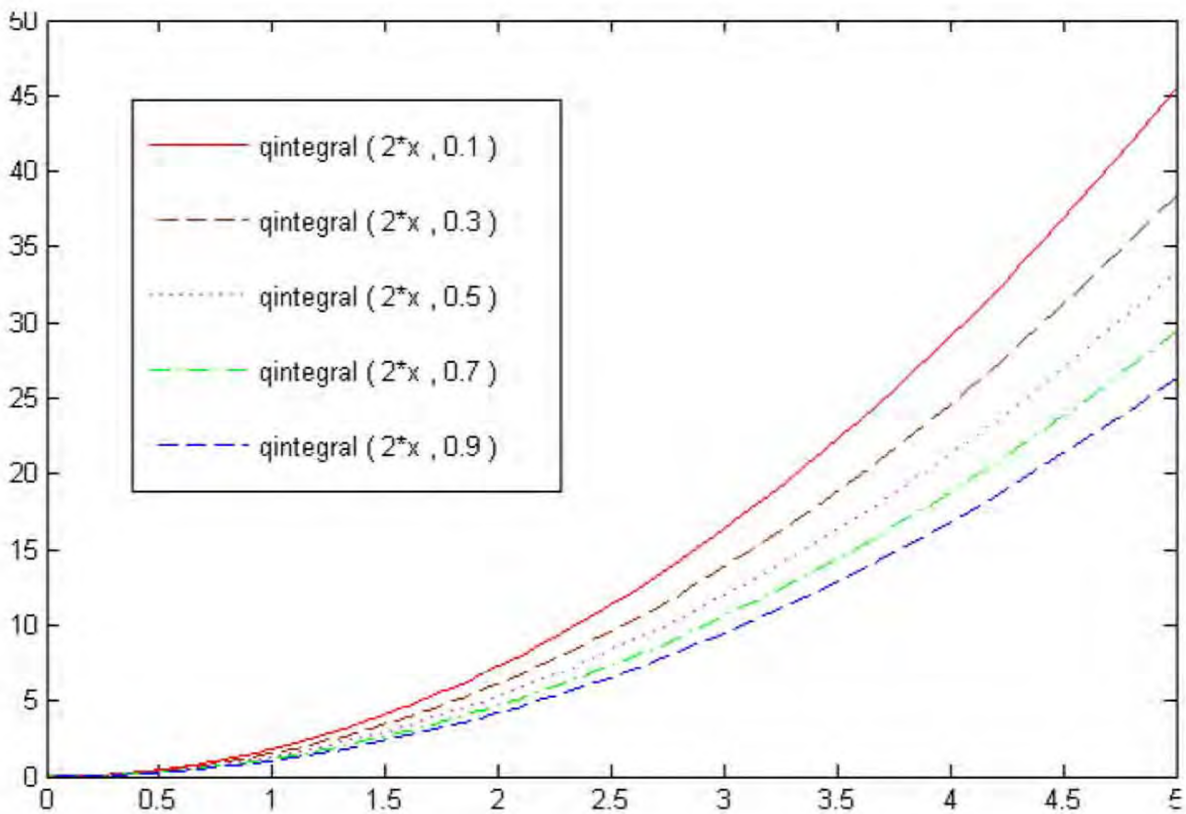
$$\begin{aligned} \int cf(x)\,d_qx &= cF(x) \\ \text{es decir, } \int cf(x)\,d_qx &= c\int f(x)\,d_qx \end{aligned}$$

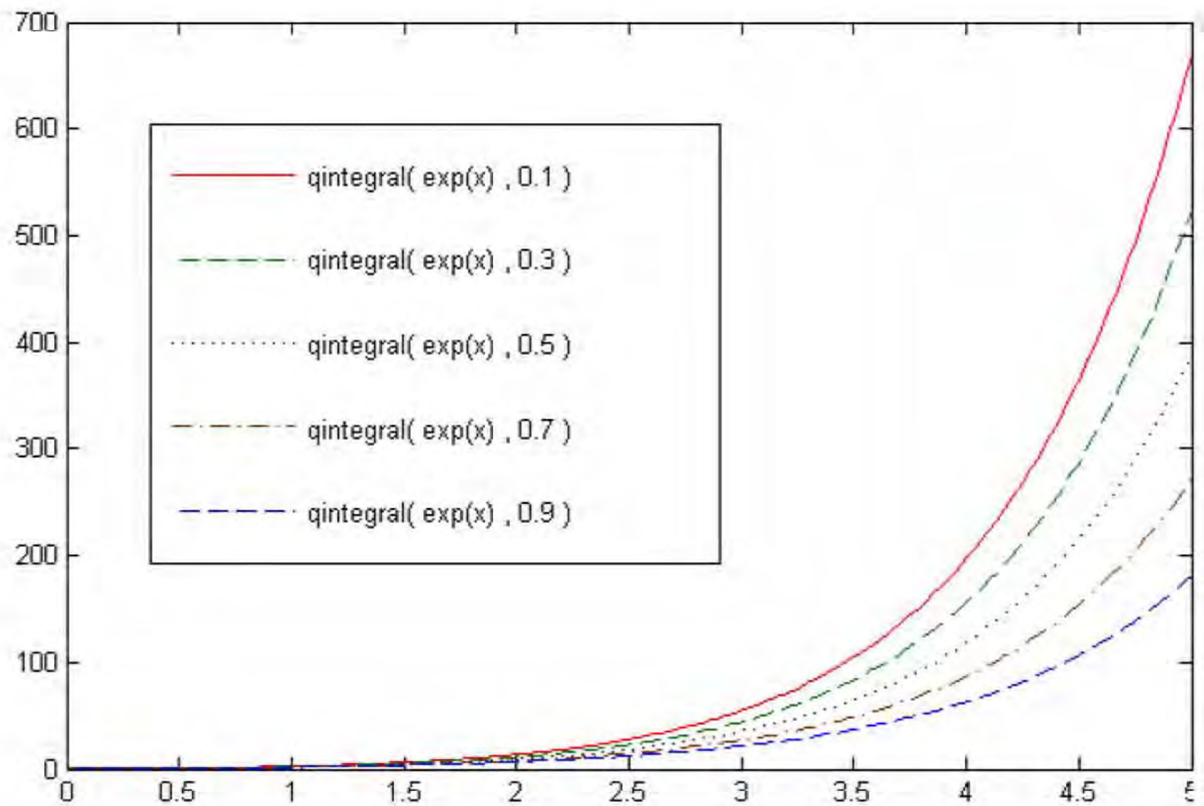
3.6 Rutinas y Scripts

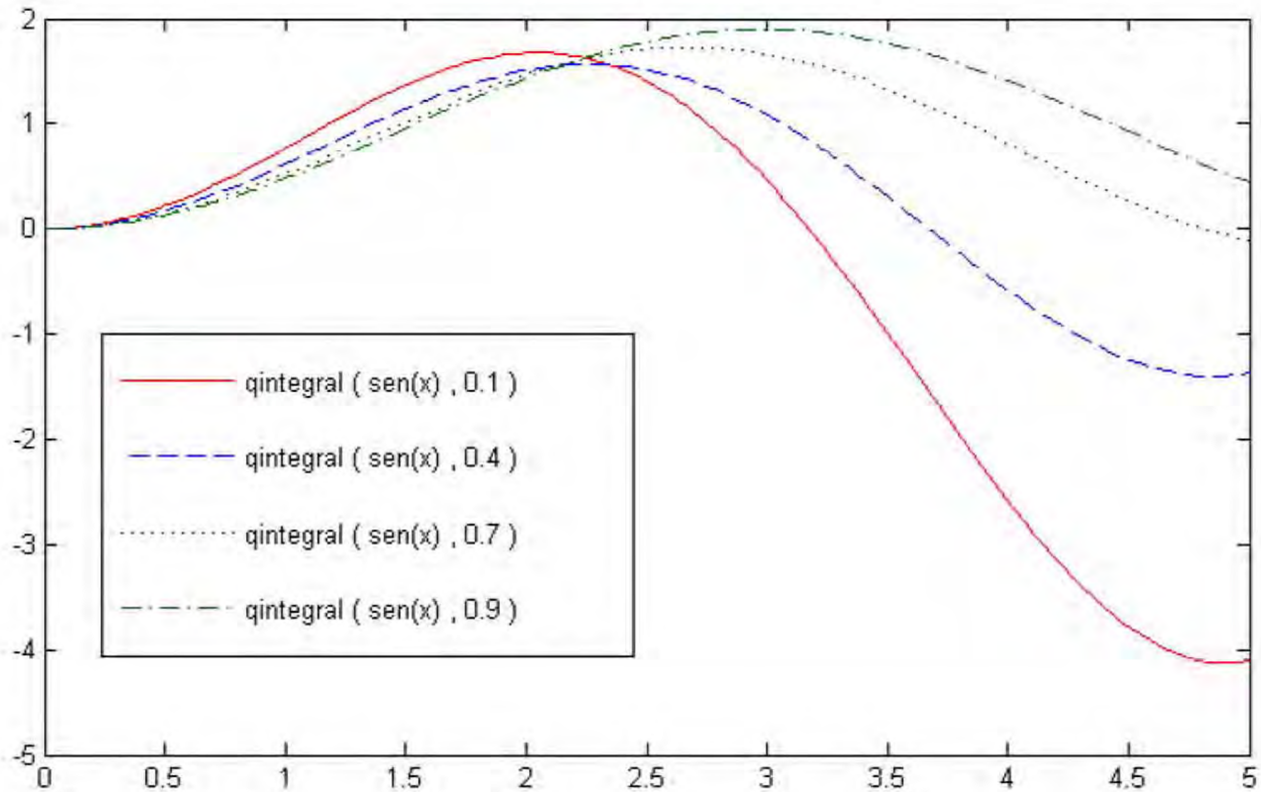
Como parte final de estas secciones, ilustraremos algunas de las funciones que hemos manejado, así como la implementación del Método de la Integral de Jackson en un Script, para poder aplicar dichas q-integrales a funciones conocidas.

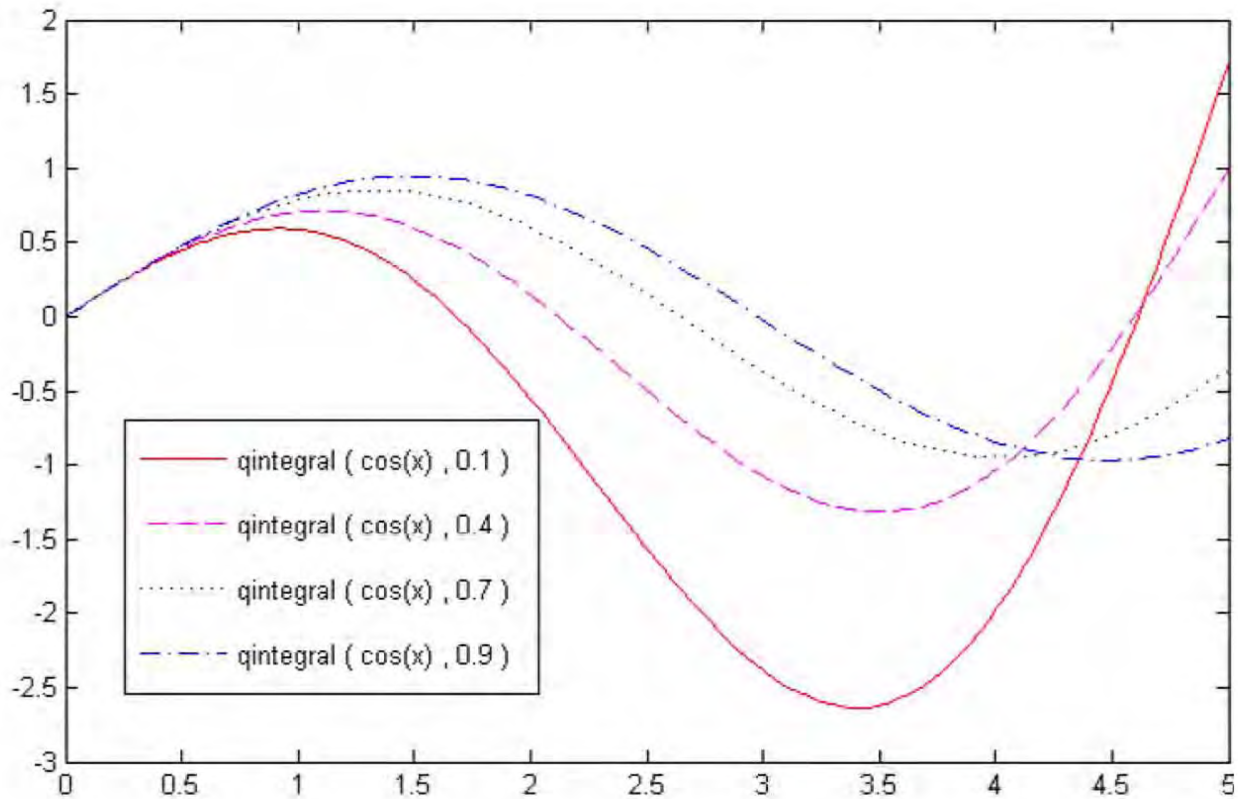
```
%Script para calcular la q-integral con el método de Jackson, en la cual
%podemos hacerla de forma definida por intervalos positivos o hacer que
%alguno de los límites sea independiente.
function qint = qintegral (f,q,a,b)

%Verificamos que los limites dados cumplan con ser positivos ambos
%y que el primero sea menor que el segundo.
if a>=0 & b>=0 & b>=a

%Convertimos la función introducida, en una que podamos evaluar en
%cualquier valor.
función = inline ( char(f) );
qinta = (1-q)*a*función(a);
qintb = (1-q)*b*función(b);

%Aunque la iteración en el método de Jackson es de forma infinita
%a través de experimentación se ha visto que con un ciclo de 60
%iteraciones el error es menor a 0.0001.
for k = 1:60

%Aplicamos recursividad para el cálculo de las sumas respectivas.
qinta = qinta + (1-q)*a*(q^(k))*función(a*q^k);
qintb = qintb + (1-q)*b*(q^(k))*función(b*q^k);
end

%Según la definición de q-integral, evaluamos en el límite superior y
%restamos lo que obtenemos de evaluar en el límite inferior.
qint = qintb - qinta;
else

%En caso de que los límites no cumplan con las restricciones, se muestra
%en pantalla dicho error.
disp ('Los límites de Integración deben ser positivos, y el primero, menor que el segundo')
end
```


qintegral ((x-2)^2 , 0.1)
qintegral ((x-2)^2 , 0.3)
qintegral ((x-2)^2 , 0.5)
qintegral ((x-2)^2 , 0.7)
qintegral ((x-2)^2 , 0.9)
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5


qintegral (2*x , 0.1)
qintegral (2*x , 0.3)
qintegral (2*x , 0.5)
qintegral (2*x , 0.7)
qintegral (2*x , 0.9)
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5


qintegral(exp(x) , 0.1)
qintegral(exp(x) , 0.3)
qintegral(exp(x) , 0.5)
qintegral(exp(x) , 0.7)
qintegral(exp(x) , 0.9)
0
100
200
300
400
500
600
700
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5


qintegral (sen(x) , 0.1)
qintegral (sen(x) , 0.4)
qintegral (sen(x) , 0.7)
qintegral (sen(x) , 0.9)
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5


qintegral (cos(x) , 0.1)
qintegral (cos(x) , 0.4)
qintegral (cos(x) , 0.7)
qintegral (cos(x) , 0.9)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Chapter 4

q-Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

4.1 Definición de una q-EDO

A partir de aquí introduciremos y nos enfocaremos a desarrollar el concepto de q-Ecuación Diferencial, para la cual trataremos de dar una motivación de la misma y las definiciones pertinentes para poder entender el caso análogo de las ecuaciones diferenciales, que tienen como base la teoría del Cálculo Diferencial e Integral, por lo cual nosotros también recurriremos a muchos conceptos anteriores.

Nos enfocaremos al caso que llamaremos q-Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, pues por la teoría de q-Cálculo que se ha desarrollado, solo tenemos el caso unidimensional para el dominio, por lo que las clasificaciones y definiciones posteriores que hagamos serán referentes a está.

Por ejemplo de la tabla de q-derivadas e integrales tenemos que sí $y = sen_q x$, entonces $D_q y = \cos_q x$ y al volver a q-derivar nos da que $D_q^2 y = -sen_q x$, lo cual nos regresa a la función original salvo por un signo. Lo que poniendo en términos de la función y nos queda que sí $y = sen_q x$, entonces

$$D_q^2 y = -y \tag{4.1}$$

La ecuación (4.1) es un ejemplo de una q-ecuación diferencial. Nos centraremos en dada una ecuación del tipo (4.1) tratar de dar una metodología, en algunos casos en forma parecida a la de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, que nos permita resolver dicha ecuación y así mismo poder encontrar una forma gráfica de representar las "soluciones" y como estas se comportan con respecto al parámetro que hemos venido manejando en cada una de las secciones.

Definition 12 *Una ecuación en la que intervienen una función dependiente de una variable real independiente así como sus q-derivadas, es lo que llamaremos una q-Ecuación Diferencial.*

En general denotaremos una q-ecuación diferencial por la expresión matemática

$$F\left(x, y\left(x\right), D_q y\left(x\right), D_q^2 y\left(x\right), ..., D_q^n y\left(x\right)\right) = 0 \tag{4.2}$$

donde $F : Dom\left(F\right) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función de* $n+2$ *variables, y como se observa en la expresión, a* x *lo consideramos la variable real independiente y tanto* y *como sus q-derivadas, dependientes de* x.

4.2 Clasificación de las q-EDO

A partir de aquí centraremos nuestra atención en una terminología apropiada que nos permita abordar una amplia variedad de casos para (4.2) y algunas definiciones importantes en este tema.

- El orden de una q-ecuación diferencial se refiere al orden mas grande de la q-derivada que aparece en la q-ecuación diferencial que se está tratando. En (4.1), el orden es 2. Mientras que para (4.2) un orden n, suponiendo que $n \neq 0$.
- La linealidad o no linealidad de una q-ecuación diferencial, tiene que ver con la estructura de F en (4.2), pues si se considera que F sea una combinación lineal de $y\left(x\right)$, así como de sus q-derivadas, y funciones de la variable independiente x jueguen el papel de "constantes" en la combinación lineal, y esta combinación se iguale a una función que dependa solo de x. La siguiente ecuación representa la linealidad a la que nos referimos

  $$c_n\left(x\right) D_q^n y\left(x\right) + c_{n-1}\left(x\right) D_q^{n-1} y\left(x\right) + ... + c_0\left(x\right) y\left(x\right) = c\left(x\right) \tag{4.3}$$

  Si una ecuación cumple la estructura anterior, como por ejemplo (4.2), entonces diremos que es lineal. Si por el contrario dicha estructura no se cumple, diremos que es no lineal. El caso (4.1) es un ejemplo de q-Ecuación Diferencial lineal, pues en la ecuación tanto $y\left(x\right)$ como cualquiera de sus q-derivadas tienen potencia 1, así como los factores que los acompañan son funciones de x, que en particular son constantes. Aunque las ecuaciones $D_q^2 y(x) = sen_q y(x)$ y $D_q y(x) = e_q^y$, las consideramos como no lineales, siguiendo el hecho de que como analogías de funciones $sen(x)$ y e^x que tomábamos en el Cálculo usual, se clasificaban como no lineales. En el caso de una q-ecuación diferencial lineal podemos manejar 2 subcasos, simplemente como aclaración, pues las funciones que acompañan a $y(x)$ como a sus q-derivadas en (4.3), pueden realmente ser funciones constantes, como por ejemplo ya se vio en (4.1) o ser funciones arbitrarias distintas de constantes. Con lo cual cambia la expresión al referirnos a una q-ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes o simplemente q-ecuación diferencial lineal, en la que ya entenderemos aquí que las funciones $c_n(x), c_{n-1}(x), ..., c_1(x), c_0(x)$ son no todas constantes. Así mismo tomando el caso cuando la función $c(x)$ es como caso especial idénticamente cero, nos referimos a la ecuación como homogénea, de lo contrario la llamaremos como no homogénea.

4.3 Solución a una q-EDO

En esta sección definiremos el concepto de solución a una q-ecuación diferencial.

Definition 13 *Una función ϕ definida en un dominio $I \subseteq \mathbb{R}$ n-veces q-derivable y cada una de sus q-derivadas se está bien definida en I, es una solución para* (4.2)*, si al sustituir ϕ en* (4.2) *se obtiene una identidad para todo $x \in I$.*

Podemos al igual que con los tipos de q-ecuaciones diferenciales, dar una terminología a las soluciones que podemos encontrar y de está forma tratar de jerarquizarlas.

4.3.1 Tipos de soluciones

- - Soluciones explicitas de una q-ecuación diferencial. Son soluciones en las cuales la variable dependiente puede ser expresada solo en términos de la variable independiente y constantes. Es decir, la solución como $y = \phi(x)$.
  - Soluciones implícitas de una q-ecuación diferencial. Son soluciones dadas por una relación G de la variable dependiente e independiente igualada a cero, en la cual ninguna de las 2 se puede despejar en términos de la otra.

Consideremos el caso especial de la q-ecuación diferencial

$$D_q y(x) = f(x, y) \tag{4.4}$$

está es una q-ecuación diferencial de primer orden y dependiendo de la forma de f, puede ser lineal o no lineal, homogénea o no homogénea. Supongamos que $y = y(x)$ es una solución de (4.4), para la cual podemos aplicar el Teorema Fundamental del q-Cálculo. Entonces q-integrando desde t_0 hasta t, con $0 \leq t_0 \leq t$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} D_q y(x) d_q x &= \int_{t_0}^{t} f(x,y)\, d_q x \\
&\Longleftrightarrow \quad y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))\, d_q x \\
\text{luego } \ y(t) &= \int_{t_0}^{t} \tilde{f}(x)\, d_q x + y(t_0) \qquad (4.5) \\
\text{donde } \tilde{f}(x) &= f(x, y(x))
\end{aligned}
$$

Siempre y cuando supongamos que $\tilde{f}(x)$ es q-integrable en el intervalo $[t_0, t]$, (4.5) será una solución de (4.4). Por ello mientras tomemos supongamos que $\tilde{f}(x)$ cuenta con lo necesario para poder q-integrarse, (4.4) tiene lo que llamaremos una familia de soluciones que dependen del parámetro $y(t_0)$, por lo cual también las nombraremos como familia mono-parametrica de soluciones. Con esto también se observa que las q-ecuaciones diferenciales pueden tener una cantidad infinita de soluciones y cuando seleccionamos un valor determinado para el parámetro , que en el caso tratado es $y(t_0)$, está se vuelve una solución particular.

4.4 q-Metodo de Euler

Ahora expondremos un método para determinar una aproximación gráfica de las soluciones a un tipo de q-EDO muy particular y bajo condiciones iniciales dadas. Para ello vamos a necesitar considerar la definición de q-derivada

$$D_q y(x) = f(x,y) \tag{4.6}$$

para mostrar cómo funciona el método, usaremos el problema (4.6)

$$\left\{ \begin{array}{c} x = x_0\ ,\ x_0 > 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right\} \tag{4.7}$$

A partir de la definición (2.2) y trabajamos con la igualdad

$$
\begin{aligned}
D_q y(x) &= \frac{y(qx) - y(x)}{(q-1)\,x} = f(x,y) \\
y(qx) - y(x) &= (q-1)\, x f(x,y) \\
y(qx) &= y(x) + (q-1)\, x f(x,y) \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

En (4.8) lo que hemos obtenido, es la forma para encontrar puntos que pertenezcan a una solución de (4.6), que satisfagan las restricciones de (4.7). Aunque la aproximación que podemos lograr con el método depende mucho del número de iteraciones y el valor que se esté tomando para q, esto nos puede dar una idea del tipo de comportamiento que tiene la solución en ciertos intervalos que no se alejen demasiado del punto de partida, lo cual requiere un gran número de iteraciones, esto debido a que como los valores del dominio sobre los que se evaluaran serán de la forma $q^k x_0$, el término q^k puede crecer enormemente o decrecer de igual forma, ya sea que consideremos que $q > 1$ ó $0 < q < 1$ respectivamente, con respecto del punto inicial. Se omiten los valores negativos para q, pues al estar iterando cada uno de los puntos que se obtienen, como ya dijimos antes constan de la forma $q^k x_0$, lo cual hace que dichos valores se alternen entre negativos y positvos dependiendo si es impar ó par el valor k, por lo que resultaría en una gráfica poco coherente en la unión de los puntos que se calcularian con algún software.

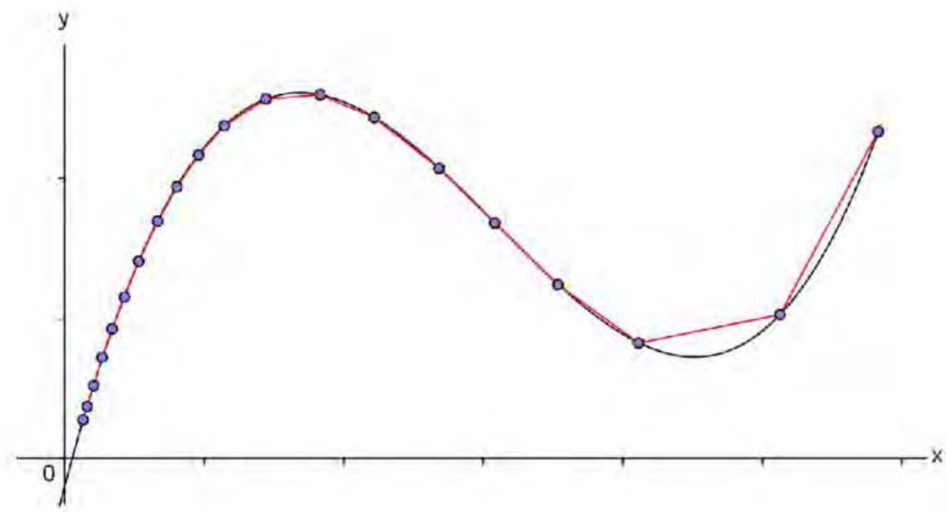
Cuando necesitemos verificar puntos mayores ó menores (con respecto al valor de la abscisa), y solo podamos determinar uno de los dos, podemos recurrir a analizar (4.6) ya que en lugar de despejar $y\left(qx\right)$, necesitariamos poder despejar $y\left(x\right)$, pero como está aparace en al menos dos lugares distintos que son como término independiente y variable de la función f en (4.8), tendríamos que pedir que f fuera tal que se pudiera factorizar a $y(x)$ ó que de la forma $y\left(qx\right) = y\left(x\right) + \left(q-1\right)xf\left(x,y\right)$ se pudiera despejar a $y(x)$, para así tener una ecuación del estilo

$$y(x) = g\left(x, y(qx)\right) \tag{4.9}$$

a través de la cual ampliaríamos el dominio sobre el cual podemos gráficar la solución de (4.6) con las condiciones (4.7), por lo siguiente:

- –
    - Si $0 < q < 1$ y usamos (4.8), dado el x_0 del cual partimos obtendremos como siguiente iteración qx_0 que es menor que x_0, posteriormente $q^2x_0 < qx_0$ y así sucesivamente, lo cual nos permite graficar en el intervalo $[0, x_0]$. Si por el contrario usamos (4.9), en la cual se observa que lo que tendríamos que sustituir en una de las variables de la función g, es el valor de qx, que en teoría sería el valor x_0 de (4.7) lo cual nos da que sí $qx = x_0$, entonces $x = \frac{1}{q}x_0$ es lo que obtenemos al evaluar $y(x) = y\left(\frac{1}{q}x_0\right)$, y dado que $0 < q < 1$, entonces $\frac{1}{q} > 1$, lo cual nos da valores del dominio, mayores que el x_0 inicial, con lo cual se puede cubrir el intervalo $[x_0, \infty)$, y en consecuencía con ambas funciones aplicadas se cubre todo $\mathbb{R}^+$.
    - De forma análoga, si $q > 1$ entonces elegiríamos (4.8) para gráficar, pero ahora sobre el intervalo $[x_0, \infty)$ y posteriormente (4.9) en la parte con dominio $[0, x_0]$.

Ambos métodos basándonos en el supuesto de que hemos podido obtener una función como en (4.9), para realizar la parte complementaria de dichas gráficas, de lo contrario solo podríamos recorrerlas en un sentido a partir del punto de inicio.



El procedimiento anterior nos proporciona una serie de puntos pertenecientes a una función en particular (dando un punto de inicio), y que al unir dichos puntos, los segmentos que resultan forman un ángulo θ, tal que la $\tan(\theta)$ es igual a la función f de (4.6) evaluada en el punto, de los 2 del segmento correspondiente, que fue el primero que se obtuvo según las iteraciones del método propuesto.

A continuación, mostraremos el código de un scrpt que nos sirve para aplicar el algoritmo anterior a ciertos problemas de la forma (4.6), y que se desarrolló sobre Matlab 5.3.

```
%Script para el cálculo y graficación de soluciones tanto con
%Cálculo normal y q-Cálculo al problema y´(x)=f(x,y) como
%Dqy(x)=f(x,y), respectivamente.

%Declaración de las 2 únicas variables que se usaran.
syms x y;

%Requerimientos de valores para las condiciones iniciales, el
%número de iteraciones el valor de la constante "q" y la
%función f que se manejara en el problema, así como especificar
%el número de variables que se usaran para f, en la cual
%temporalmente consideramos solo los casos donde aparece (x) ó (x,y).
q=input ('El valor usado para la constante q es: ');
```

```
x0=input ('El valor inicial de la variable independiente es: ');
y0=input ('El valor inicial de la variable dependiente es: ');
n=input ('EL número de iteraciones del método es: ');
función=inline(input('función a trabajar en (x,y) es: ','s'));
tipo=input ('¿La función depende de 1 ( x ó y ) 0 las 2 ( x,y ) variables? ');

%Se realiza una toma de decisión sobre la base del número de variables
%de "f" introducida.
if tipo==1

%Aquí a su vez haremos 2 casos, para poder abarcar lo que es
%una función que depende de una variable y que puede ser
%tanto "x" como "y".
subtipo = input ('Entre el número 1 si la función depende de x ó 2 si depende de y:
');
if subtipo==1

%Se identifica la función con la que se trabajara y se aplica
%integración normal, en el caso de que "f" solo dependa de "x",
%para poder mostrar un comparativo entre la gráfica que se
%obtendría con las EDO y la que se obtiene con q-EDO.
        integ=inline(char(int(función(x))));

    %Se albergan como primeras entradas a las condiciones iniciales,
%en un par de vectores que representaran el dominio y
%contradominio de la función solución.
    dominio(1,1)=x0;
    contradominio(1,1)=y0;

        %Se da comienzo a un ciclo para realizar el número de iteraciones
        %pedidas en los datos iniciales y cada uno de ellos se almacenan
        %en los vectores dominio y contradominio anteriormente declarados.
for k=2:n+1

    %Se aplica el algoritmo analizado para el método de q-Euler.
                y0=y0+(q-1)*x0*función(x0);
                x0=x0*q;

%Se almacenan los valores calculados en vectores.
dominio(1,k)=x0;
contradominio(1,k)=y0;
                end

%Se crea la solución particular al problema en el Cálculo ordinario
```

```
%con las condiciones iniciales pedidas y se prepara para gráficar junto
%con la otra solución.
        integral=integ(x)+contradominio(1,1)-integ(dominio(1,1));

%Se da la orden para gráficar los vectores en los cuales se acumuló
%la información de las abscisas y ordenadas de los puntos correspondientes
%a la solución del problema con condiciones iniciales en el q-Cálculo.
        plot(dominio, contradominio)

%Se calcula el máximo valor que se alcanzó en el vector definido como
%dominio.
        máximo=max(dominio);

%Se mantiene abierta la ventana de la gráfica para trazar ahí mismo
%ambas soluciones, tanto con el q-Cálculo como el tradicional.
        hold on

%Se gráfica la solución que se obtendría con el Cálculo tradicional.
        fplot(char(integral),[0,máximo],'–r')

%Se cierra la orden de gráficar en la misma ventana.
hold off

%En el caso de que tratemos con una función que solo depende de "y".
    elseif subtipo==2

%Almacenamos las condiciones iniciales en nuevas variables de formato
%string, para poder usarlas posteriormente al resolver la EDO de
%forma usual.
    condinix=num2str(x0);
    condiniy=num2str(y0);

%Se albergan como primeras entradas a las condiciones iniciales,
%en un par de vectores que representaran el dominio y contradominio
%de la función solución.
    dominio(1,1)=x0;
contradominio(1,1)=y0;

%Realizamos un ciclo para cada una de las iteraciones y guardamos
%cada resultado en los vectores dominio y contradominio.
for k=2:n+1

%Se aplica el algoritmo analizado para el método de q-Euler.
```

```
                        y0=y0+(q-1)*x0*función(y0);
x0=x0*q;

%Se almacenan los valores calculados en vectores.
                        dominio(1,k)=x0;
contradominio(1,k)=y0;
end

%Se da la orden para gráficar los vectores en los cuales
%se acumuló la información de las
%abscisas y ordenadas de los puntos correspondientes a la
%solución del problema con condiciones iniciales en el q-Cálculo.
          plot(dominio, contradominio)

%Declaramos nuevas variables en formato string, para poder resolver
%la EDO en el caso de que la función f depende de y.
funcion2=char(función(y));
          operador='Dy=';
          EDO=strcat(operador,funcion2);
          aux1='y(';
          aux2=')=';
          aux3=strcat(aux1,condinix);
          aux4=strcat(aux2,condiniy);
          condicion=strcat(aux3,aux4);
          solnormal=dsolve(EDO,condicion,'x');
          solucion=char(solnormal)

%Se calcula el máximo valor que se alcanzó en el vector definido
%como dominio.
          máximo=max(dominio);

%Mantenemos abierta la ventana para gráficar ambas soluciones
%en una misma.
hold on

%Damos la orden para gráficar la solución con el Cálculo ordinario.
fplot(solucion,[0,máximo],'–r')

%Cerramos la posibilidad de gráficar en la misma ventana.
          hold off

%Consideramos el caso cuando el número introducido no corresponde con
%ninguno de los que se ofrecieron.
```

```
else
    %Mandamos el aviso para alertar al usuario del tipo de error ocurrido.
    disp('La opción entrada no corresponde con las ofrecidas.')
end

%En caso de que el número de variables cuente con ambas.
elseif tipo==2

%Almacenamos las condiciones iniciales en nuevas variables de formato
%string, para poder usarlas posteriormente al resolver la EDO de forma usual.
    condinix=num2str(x0);
    condiniy=num2str(y0);

%Creamos los vectores donde se guardaran los valores para gráficar.
    dominio(1,1)=x0;
    contradominio(1,1)=y0;

%Realizamos un ciclo para cada una de las iteraciones y guardamos cada
%resultado en los vectores dominio y contradominio.
for k=2:n+1

%Se aplica el algoritmo analizado para el método de q-Euler.
                y0=y0+(q-1)*x0*función(x0,y0);
                x0=x0*q;

%Se almacenan los valores calculados en vectores.
                dominio(1,k)=x0;
                contradominio(1,k)=y0;
            end

%Declaramos nuevas variables en formato string, para poder resolver
%la EDO en el caso de que la función f depende tanto de x como de y.
        funcion2=char(función(x,y));
        operador='Dy=';
        EDO=strcat(operador,funcion2);
        aux1='y(';
        aux2=')=';
        aux3=strcat(aux1,condinix);
        aux4=strcat(aux2,condiniy);
        condicion=strcat(aux3,aux4);
        solnormal=dsolve(EDO,condicion,'x');
        solucion=char(solnormal);

%Se calcula el máximo valor que se alcanzó en el vector definido como dominio.
```

máximo=max(dominio);

%Graficamos las coordenadas que hemos acumulado con los dos vectores declarados.

plot(dominio, contradominio)

%Mantenemos abierta la ventana para gráficar ambas soluciones en una misma.
hold on

%Damos la orden para gráficar la solución con el Cálculo ordinario.
fplot(solucion,[0,máximo],'–r')

%Cerramos la posibilidad de gráficar en la misma ventana.
hold off

%Consideramos el caso cuando el número de variables introducidas no sea el
%adecuado, por lo que se envía una alerta.
else

%Mandamos el aviso para alertar al usuario del tipo de error ocurrido.
disp('Numero de variables no valido')
end

Chapter 5

Aplicaciones

La elaboración y en su caso la aceptación de nuevas hipótesis de trabajo están sujetas a la validez en cada aplicación de las tesis que se deriven de ellas. Además el estudio de la realidad exige modelos cada vez más adecuados. Pero el uso de dichos modelos que pueden reflejar con exactitud o dar una mejor aproximación que otros, no se ponen en funcionamiento de inmediato como primer intento de entender el entorno que nos rodea, necesitamos de un uso progresivo y la capacidad de manejar una cantidad suficientemente grande de funciones y de variables que ayuden a introducir al sistema creado las características más importantes y relevantes del objeto de estudio. Por ello y como ha sido tratada la mayoría (por no decir todos) de los Modelos en EDO, nos enfocaremos en algunas de las ecuaciones diferenciales, que se propusieron inicialmente para el estudio de los fenómenos físicos, biológicos y químicos más analizados como primeros casos de práctica para la aplicación de la modelación con EDO.

De la inmensa variedad de temas en los que se puede hacer analogía con las EDO, abordaremos como aplicaciones de las q-EDO aquella en la cual se elige como objeto de análisis, el cambio en el crecimiento o decrecimiento de poblaciones. Este tipo de estudios tambien pueden requerir información acerca de la composición y distribución de las poblaciones, sus patrones de cambio a lo largo de los años en función de nacimientos, defunciones y migración, y los determinantes y consecuencias de estos cambios. EL estudio de las distintas poblaciones funcionan como medio de información para la toma de decisiones en cuanto a las tareas de planificación administrativas en sectores como salud, educación, vivienda, seguridad social, empleo y conservación del medio ambiente. Todos estos tipos de estudios proporcionan o arrojan datos necesarios para: formular políticas gubernamentales de población; modificar tendencias demográficas; lograr objetivos socioeconómicos.

5.1 q-Ecuación Malthusiana

Supongamos que P(t) es el número de individuos en una población al tiempo t. En el año 1798, el economista britanico Thomas Robert Malthus publico su libro "Ensayo sobre el principio de la Población", que marcó el inicio de la Demografía como disciplina, para estudiar las relaciones entre la tendencia constante del crecimiento de la población humana y la producción de alimentos. El modelo de la ecuación que propuso, conocido también como Modelo Malthusiano, consistía en una ecuación en donde la incógnita era la función P(t), y daba la relación con la tasa de crecimiento de la población misma (la que se considera como la constante K, normalmente). Esta relación en base al cambio de la función misma conforme transcurre el tiempo, es lo que entendíamos como la derivada usual de la función con respecto a la variable de la cual depende. Aunque el modelo en sí, no se adaptó fielmente a los sucesos para los cuales se empleaba (esto para tiempos grandes), fue el origen de la dinámica de poblaciones a través de ecuaciones diferenciales, de ahí su importancia y el hecho por el cual tenemos interés en recrear un análogo con las condiciones del q-Cálculo y las q-EDO. Verificar su comportamiento gráficamente en comparación con los usuales para las mismas condiciones iniciales y dar un enfoque a través de las q-EDO.

$$D_q y\left(x\right) = cy\left(x\right) \tag{5.1}$$

5.1.1 Metodo 1

Al transformar la ecuación (5.1) usando la definición de la q-derivada obtenemos la igualdad

$$\frac{y\left(qx\right) - y\left(x\right)}{\left(q-1\right)x} = cy\left(x\right) \tag{5.2}$$

Si consideramos que la solución a (5.1) tiene la forma de una función potencia, esto imitándolo del Cálculo usual, entonces la solución es de la forma

$$y\left(x\right) = \alpha\lambda^{x} \tag{5.3}$$

donde suponemos $\alpha \in \mathbb{R}$ constante y λ^{x} es nuestra función en forma de potencia, con λ la base que tenemos que determinar. Sustituyendo (5.3) en (5.2) y transformando algebraicamente para sintetizar la expresión resultante, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\frac{y(qx)-y(x)}{(q-1)x} &= cy(x) \\
\frac{\alpha\lambda^{qx}-\alpha\lambda^{x}}{(q-1)x} &= c\alpha\lambda^{x} \\
\alpha\lambda^{qx}-\alpha\lambda^{x} &= c\alpha\lambda^{x}(q-1)x \\
\alpha\lambda^{qx} &= c\alpha\lambda^{x}(q-1)x+\alpha\lambda^{x} \\
&= \alpha\lambda^{x}\{c(q-1)x+1\} \\
\lambda^{(q-1)x} &= c(q-1)x+1 \\
\lambda^{x} &= \{c(q-1)x+1\}^{\frac{1}{q-1}} \\
&\therefore \quad y(x)=\alpha\{c(q-1)x+1\}^{\frac{1}{q-1}}
\end{aligned}
$$

5.1.2 Metodo 2

Supongamos que la solución $y(x)$ se puede expandir en una serie infinita de Taylor alrededor del cero

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \tag{5.4}$$

entonces sustituimos la forma de la solución (5.4) en (5.1) para determinar los coeficientes $c_n\in\mathbb{R}$ y obtenemos

$$
\begin{aligned}
D_qy(x) &= D_q\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}c_nD_q(x^n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}c_n\left([n]x^{n-1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}[n]c_nx^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}[n+1]c_{n+1}x^n
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

Igualando (5.4) y (5.5) para obtener (5.1) se obtiene la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
D_q y(x) &= cy(x) \\
\sum_{n=0}^{\infty} [n+1]\, c_{n+1} x^n &= c \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
\sum_{n=0}^{\infty} [n+1]\, c_{n+1} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} c c_n x^n \\
\Longrightarrow & \quad [n+1]\, c_{n+1} = c c_n
\end{aligned} \tag{5.6}$$

La igualdad (5.6) es una sucesión de números que depende originalmente del valor inicial c_0, y el cual es el valor de $y(x)$ en $x = 0$. A partir de la igualdad (5.6), se obtiene poir inducción para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
c_0 &= c_0 \\
c_1 &= \frac{c_0 c}{[1]!} \\
c_2 &= \frac{c_0 c^2}{[2]!} \\
&\vdots \\
c_n &= \frac{c_0 c^n}{[n]!}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Por lo tanto, (5.7) nos da exactamente los valores de los coeficientes de la solución propuesta en serie de potencias, lo último que nos faltaría asociar a la serie ya conocida, es una función que la simplifique.

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_0 c^n}{[n]!} x^n \\
&= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n x^n}{[n]!} \\
&= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cx)^n}{[n]!}
\end{aligned}$$

Debido a que ya se había considerado una q-exponencial, donde se definía una de las q-exponenciales como

$$e_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]!}$$

entonces podemos escribir la solución de (5.1) como

$$y\left(x\right) = c_0 e_q^{cx}$$

5.1.3 Graficación de las ecuaciones

Las gráficas que a continuación mostramos contienen una gama de condiciones iniciales y valores para los parámetros de la ecuación de Malthus, que fueron resueltas por medio del algoritmo desarrollado antes y al que hemos denominado como q-método de Euler.

Estas imágenes no son todo lo que podremos observar de la ecuación de Malthus, también aplicaremos dicha ecuación en el área particular para la que fue desarrollada, el crecimiento poblacional, en los casos de las poblaciones de México y Venezuela.

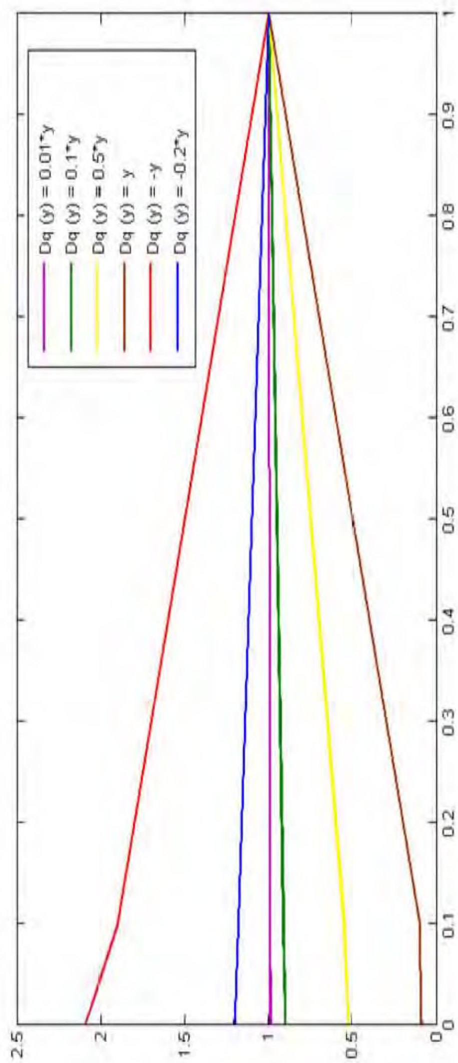


Imagen que representa las soluciones a la ecuacion Malthusiana con valor de constante $q = 0.1$.

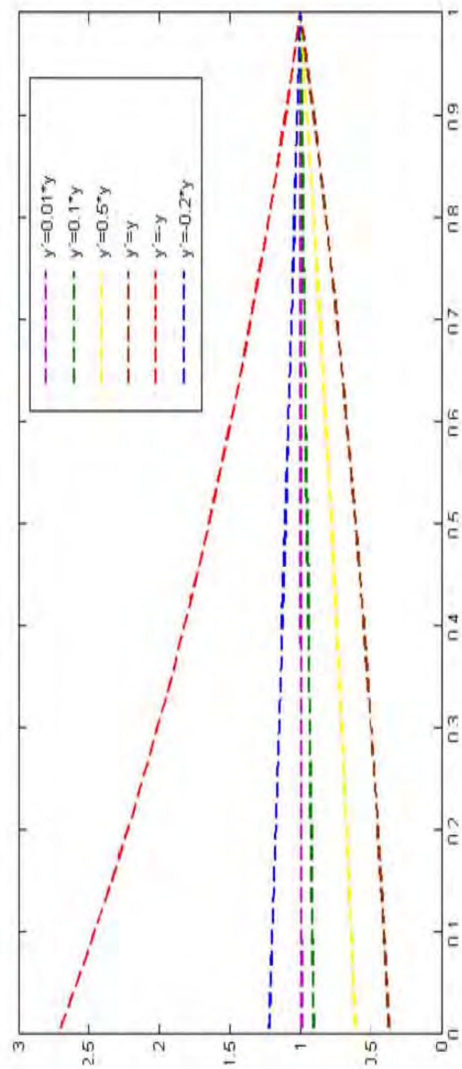
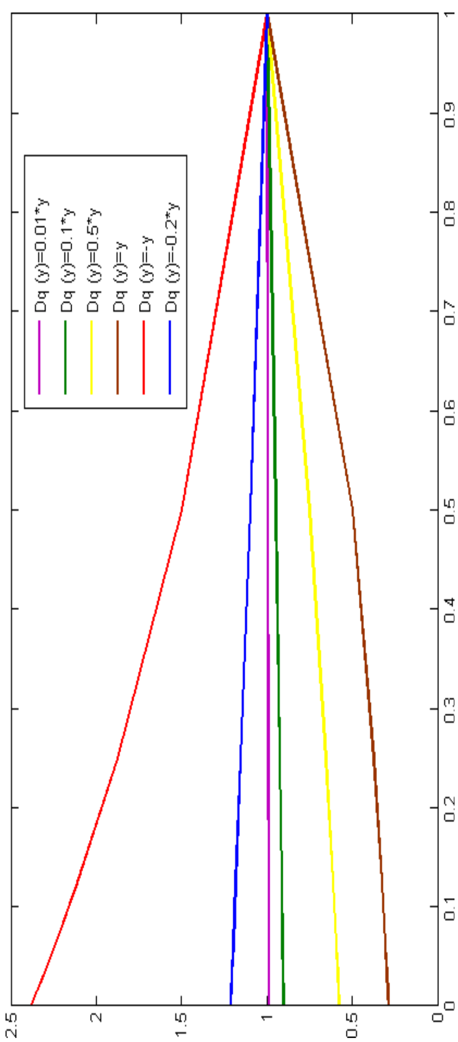
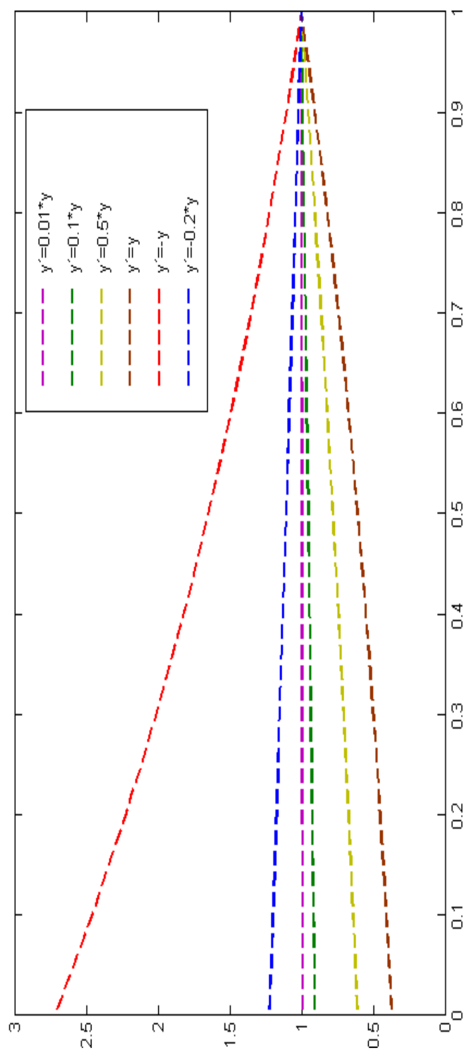


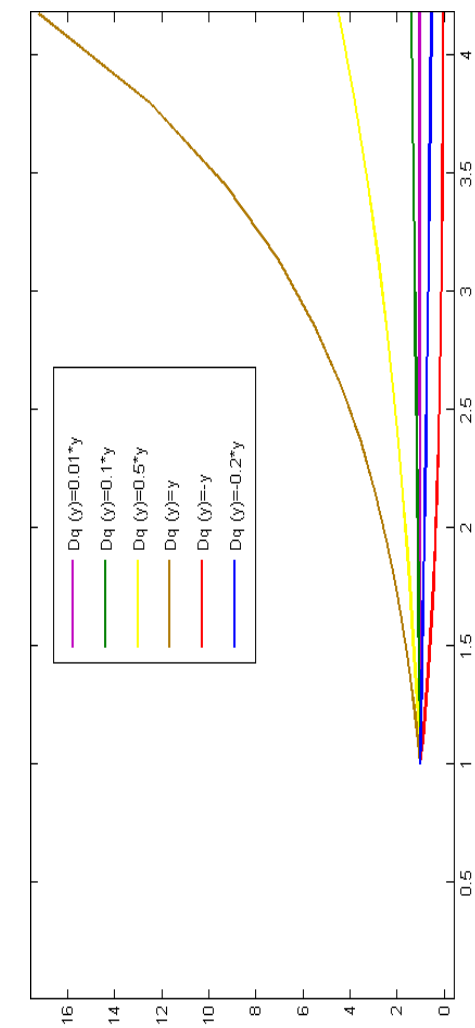
Imagen que representa las soluciones a la ecuacion Malthusiana con el Calculo tradicional.



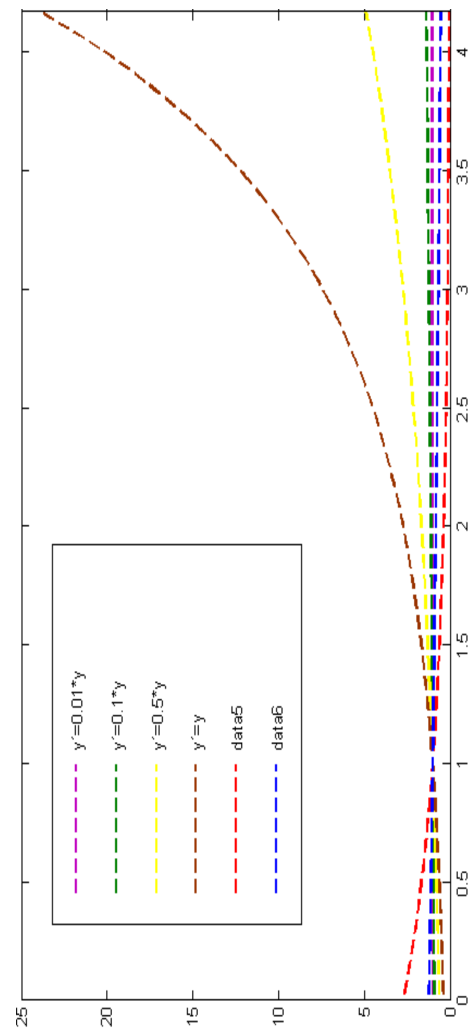
Grafica de soluciones a la ecuacion Malthusiana con valor $q = 0.5$.



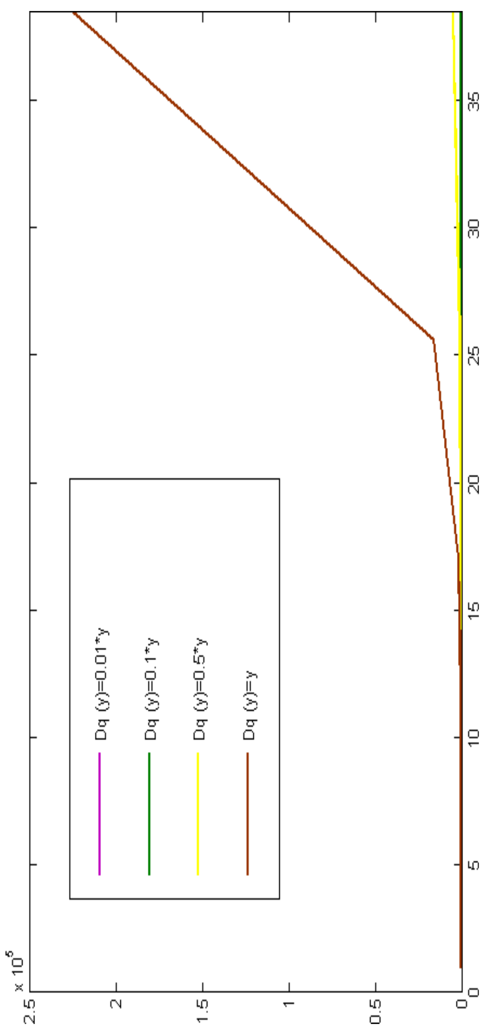
Grafica de soluciones a la ecuacion Malthusiana en el Calculo tradicional.



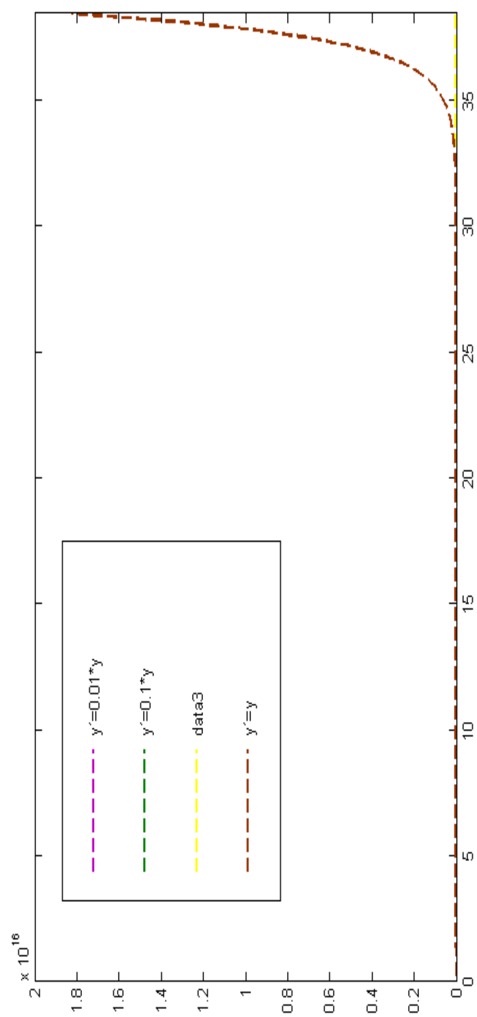
Representacion de soluciones en el q-Calculo de la ecuacion de Malthus con $q = 1.1$.



Soluciones de la ecuacion de Malthus para diferentes constantes de crecimiento en el Calculo Ordinario.



Caso analogo de la ecuacion de Malthus en el q-Calculo, usando un valor $q = 1.5$.



Caso ordinario, mostrando las soluciones analogas que se tendrian con el Calculo.

5.1.4 Ejemplo 1: Población de Venezuela

Ahora haremos uso de la ecuación Malthusiana, en el crecimiento poblacional de 2 países (México y Venezuela), para darnos una idea de la capacidad que puede tener el enfoque desarrollado.

Para ello consideraremos las cifras estadisticas del conteo de población, de ambos países, con un tiempo aproximado de 200 años y basándonos para ello en los estudios demograficos que cada país ha hecho de sí mismo en algunos textos y paginas como lo son: [4] y [5] .

Para el caso de Venezuela, tomaremos las condiciones iniciales, así como la constante de proporcionalidad, del estudio demografico para ese país. Haremos el estudio tanto con la teoría de las EDO como la de las q-EDO, usaremos las condiciones iniciales de la siguiente manera: Para las EDO, nuestro año de inicio se tomará como cero y la cantidad de habitantes convirtiendo 1 Millón en la unidad de nuestra escala del dominio. Para las q-EDO y en particular para el q-método de Euler no podemos tomar la condición inicial $x = 0$, debido a que esto ocasionaría que el método fallara, pues consiste en tomar multiplos de la variable independiente por q, como sucesivo valor de x_0 (condición inicial), con $x = 0$, los múltiplos serían esencialmente los mismos y no podríamos seguir: Por esta razón debemos elegir una condición inicial suficientemente cercana a cero, o elegir directamente $x = 1$. Esto último es lo que haremos para aplicar el método y trazar la gráfica de la solución.

Como la constante de crecimiento (ó decrecimiento), la tomaremos de los estudios que se haya realizado para el modelo de Malthus con las EDO, sólo falta o es necesario definir el valor de q. Para lo cual recurriremos precisamente a los valores que ocuparan el lugar del dominio, que son los años, tomados ya en una forma en la que el año inicial se considere como 1.

Como los siguientes valores que se tomarán después de $x = 1$, deberán ser una forma aproximada a estos, los años para los cuales tenemos datos de la población, buscamos el valor para el cual, estos años puedan ser múltiplos unos de otros en el orden en el que se fueron dando. Y es así que obtenemos una tabla con los cocientes de los años, de tal forma que nuestros datos a considerar serán, un año dividido por el año anterior el cual tengamos como dato, es decir, por ejemplo tenemos como datos los años 1881 y 1891, estos se corresponden con los números, en nuestra escala, 82 y 92, respectivamente. Según que el año inicial, que es 1800, se toma como 1, luego entonces formamos el cociente 92/82=1.1219, y este es un dato que se va a la tabla para analizar los múltiplos que obtenemos.

En este análisis, usaremos algunas fórmulas y conceptos conocidos en Estadistica, para: la mediana, la media, la desviación, la varianza, etc., tanto para medir el punto de concentración de los datos, como la dispersión entre ellos. Tomaremos para q el valor que a través de lo considerado anteriormente, sea más representativo de los datos y pueda reflejar bien las condiciones iniciales al momento de aplicar nuestro método.

La siguiente tabla contiene lo antes mencionado, proporciona los datos en forma organizada y resalta los valores que consideraremos como mejores para q, según el análisis hecho.

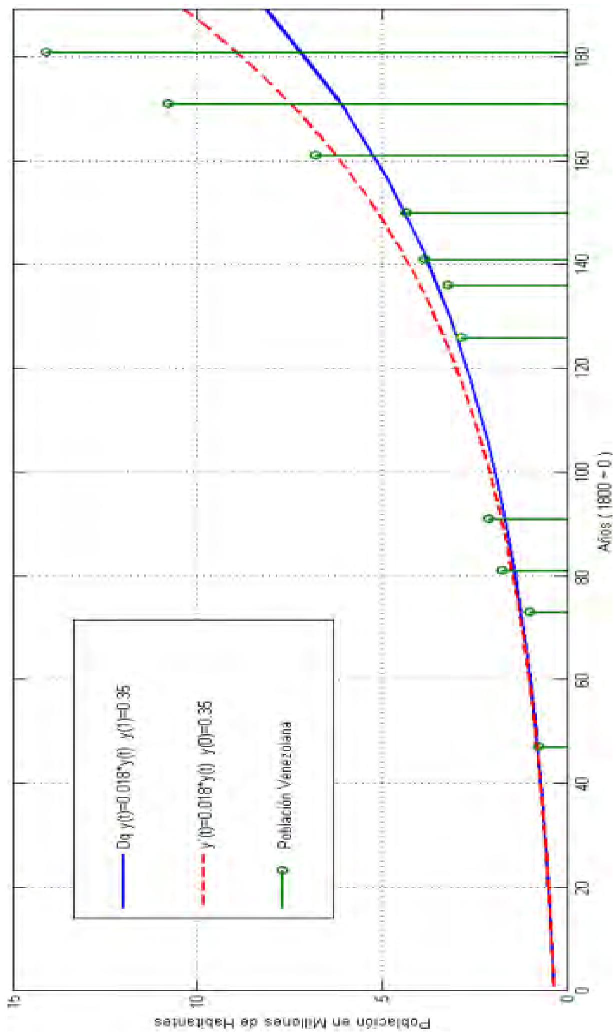
Años	Tiempo	Poblacion	Constante k de crecimiento	Proporcion entre tiempos
1800	1	0.35	0	46
1847	46	0.75	0.016215746	1.565217391
1873	72	1	0.011064695	1.111111111
1881	80	1.75	0.069951973	1.125
1891	90	2.1	0.018232156	1.388888889
1926	125	2.85	0.00872519	1.08
1936	135	3.2	0.011583182	1.037037037
1941	140	3.85	0.036984468	1.064285714
1950	149	4.35	0.013566966	1.073825503
1961	160	6.8	0.040613342	1.0625
1971	170	10.8	0.046262352	1.058823529
1981	180	14.1	0.026662866	

Tabla conteniendo en sus columnas los datos de la poblacion de Venezuela, asi como proporciones entre tiempos y tamaos de los datos de dicha poblacion.

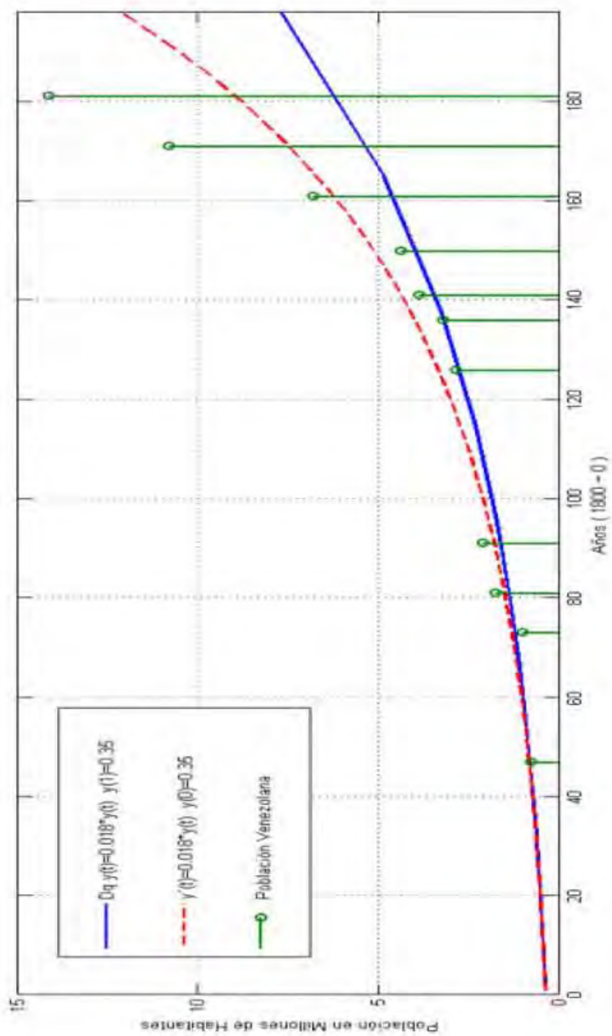
Datos de la constante de crecimiento			Datos de Proporcion entre tiempos	
Media	***0.027260267***		***Media***	***1.156668918***
Error típico	0.00579929		Error típico	0.055572326
Mediana	***0.018232156***		***Mediana***	***1.076912752***
Desviación estándar	0.019234069		Desviación estándar	0.175735125
Varianza de la muestra	0.000369949		Varianza de la muestra	0.030882834
Curtosis	0.919348161		Curtosis	2.823915968
Coeficiente de asimetría	1.182628513		Coeficiente de asimetría	1.926928768
Rango	0.061226784		Rango	0.528180354
Mínimo	0.00872519		Mínimo	1.037037037
Máximo	0.069951973		Máximo	1.565217391
Suma	0.299862937		Suma	11.56668918
Cuenta	11		Cuenta	10
Nivel de confianza(95.0%)	0.012921623		Nivel de confianza(95.0%)	0.125713335

Analisis estadistico tanto de los tamaos de poblaciones como de los intervalos de tiempo entre ellas, para Venezuela.

Una vez determinado el valor correspondiente para q, alimentaremos el algoritmo dado para el q-método de Euler, haciendo un uso de iteraciones lo suficientemente grande como para que alcancemos el valor de $x \approx 200$. Mostramos a continuación la imagen comparativa entre los resultados gráficos de las EDO, q-EDO y los conteos de dicha población en los diferentes años.



Graficas comparativas entre los conteos poblacionales y los modelos aplicados de EDO y q-Edo, considerando un valor de $q = 1.1$, como multiplo de avanza para el dominio.



Comparativas de las graficas de los conteos de poblacion de Venezuela y modelos Malthusianos con EDO y q-EDO, tomando ahora un valor $q = 1.2$.

A simple vista podemos comparar la diferencia o semejanza que existe entre ambos modelos en las dos situaciones que estamos considerando, una en la cual tomamos como múltiplo de avance $q = 1.1$ y en la otra $q = 1.2$, siendo que en los valores de la tabla $(5.1.4)$ hemos obtenido valores centrales con 1.15 y 1.07, debido a ello hemos tomado uno intermedio y otro un poco más alejado. En $(5.1.4)$ el comportamiento de la solución según las q-EDO es el de apegarse localmente a la solución de EDO, y conforme transcurre el tiempo el de separarse pero siguiendo un comportamiento muy similar al que tiene el tamaño de la población y de encontrarse a nivel de la misma, ya que comparado con la solución de las EDO, ésta ya se ha alejado bastante y en un momento dado ambas soluciones se separan considerablemente de los tamaños respectivos de la población, sin embargo, lo que apreciamos es que mantiene una mejor descripción de los hechos cuantitativos la solución dada con el q-Cálculo por un mayor tiempo que la que se trabaja con el Cálculo usual.

Por otro lado, para la gráfica $(5.1.4)$ en la cual hemos elegido un múltiplo de avance para la variable independiente, alejada de los datos que hemos recolectado en $(5.1.4)$, se nota que el comportamiento es cualitativamente parecido, aunque en el dominio cercano a $x \approx 140$, se tiene una pérdida de a proximidad con los datos demográficos de la población. Con esto además hemos podido ver que el factor de multiplicidad para los valores del dominio, son de gran importancia, pues ellos marcan la sucesión sobre la que se graficará y los valores que le corresponderán a dichos puntos.

5.1.5 Ejemplo 2: Población de México

Aquí se usarán los datos que aparecen [5], desde hace cerca de 200 años. se hará un desarrollo semejante al realizado por la población Venezuela, incluyendo el cálculo del coeficiente de crecimiento que mejor se aproxime para diferentes tiempos, de acuerdo con la fecha inicial que se tome.

Comenzamos con la serie de datos de la población mexicana, tanto con año como con número de habitantes (manejando los datos que vienen en millones, como unidad de nuestra escala a manejar), proporción entre los tiempos, usando los correspondientes para el caso, según se tome como 1 al año inicial del que partamos. Y las constantes de crecimiento que hay, sí tomamos una fecha y el tamaño de la población correspondiente, como inicial, y el mismo tipo de datos, pero para el sucesor inmediato. De esta forma, llenaremos las columnas de la tabla que a continuación mostramos, y en base a ella exhibimos el mismo tipo de características que su símil con la de Venezuela, para posteriormente remarcar aquellos datos que nos servirán como constante de proporcionalidad q, constante de crecimiento k, y los datos iniciales de las variables dependiente e independiente, a usar con el q-metodo de Euler. El número de iteraciones que se necesita tambien para el algoritmo, es inicialmente, un tanto subjetivo, por el hecho de que necesitamos conocer el multiplo q con el cual avanzaremos y la longitud de dominio a cubrir.

Años	Tiempo	Poblacion	Constante k de crecimiento	Proporcion entre tiempos
1836	1	7.8	0	11
1846	11	7.5	-0.003922071	2.090909091
1858	23	8.3	0.008446041	1.173913043
1862	27	8.8	0.014624052	1.37037037
1872	37	9	0.002247286	1.108108108
1876	41	9.5	0.013516805	1.585365854
1900	65	13.6	0.014949083	1.153846154
1910	75	15.2	0.011122564	1.253333333
1929	94	15.6	0.001367131	1.117021277
1940	105	19.6	0.020750787	1.095238095
1950	115	25.8	0.027484493	1.086956522
1960	125	34.5	0.029058483	1.08
1970	135	48.2	0.03343997	1.074074074
1980	145	66.8	0.032634406	1.068965517
1990	155	81.2	0.019521217	1.064516129
2000	165	97.5	0.018293713	1.060606061
2010	175	112	0.013864649	1.057142857
2020	185	121	0.007729167	1.054054054
2030	195	130	0.00717439	1.051282051
2040	205	140	0.007410797	1.048780488
2050	215	150	0.006899287	

Tabla que muestra los datos referentes a la poblacion Mexicana desde 1836 y algunas predicciones al 2050.

Datos proporcion entre tiempos 1836		Datos de la constante k 1836	
Media	***1.18918332***	***Media***	***0.01433061***
Error típico	0.05888025	Error típico	0.00233136
Mediana	***1.08695652***	***Mediana***	***0.01369073***
Desviación estándar	0.25665305	Desviación estándar	0.01042614
Varianza de la muestra	0.06587079	Varianza de la muestra	0.0001087
Curtosis	8.76127959	Curtosis	-0.50102348
Coeficiente de asimetría	2.86460025	Coeficiente de asimetría	0.38134957
Rango	1.0421286	Rango	0.03736204
Mínimo	1.04878049	Mínimo	-0.00392207
Máximo	2.09090909	Máximo	0.03343997
Suma	22.5944831	Suma	0.28661225
Cuenta	19	Cuenta	20
Nivel de confianza(95.0%)	0.12370281	Nivel de confianza(95.0%)	0.00487958

Analisis de los datos de la poblacion Mexicana desde 1836 para calcular el mejor valor para q y la constante de crecimiento.

Datos proporcion entre tiempos 1900		Datos de la constante k 1900	
Media	***1.09041547***	***Media***	***0.01691079***
Error típico	0.01471298	Error típico	0.00282965
Mediana	***1.0715198***	***Mediana***	***0.01607918***
Desviación estándar	0.05505095	Desviación estándar	0.01058757
Varianza de la muestra	0.00303061	Varianza de la muestra	0.0001121
Curtosis	5.89962577	Curtosis	-1.26805137
Coeficiente de asimetría	2.32488707	Coeficiente de asimetría	0.29639579
Rango	0.20455285	Rango	0.03207284
Mínimo	1.04878049	Mínimo	0.00136713
Máximo	1.25333333	Máximo	0.03343997
Suma	15.2658166	Suma	0.23675105
Cuenta	14	Cuenta	14
Nivel de confianza(95.0%)	0.03178547	Nivel de confianza(95.0%)	0.00611308

Analisis de valores centrales para el crecimiento poblacional y la distribucion entre estos tiempos, de Mexico, desde 1900.

Datos proporcion entre tiempos 1950			Datos de la constante k 1950	
Media	***1.06463778***		***Media***	***0.01760261***
Error típico	0.00402242		Error típico	0.00341697
Mediana	***1.06256109***		***Mediana***	***0.01607918***
Desviación estándar	0.01272		Desviación estándar	0.01080541
Varianza de la muestra	0.0001618		Varianza de la muestra	0.00011676
Curtosis	-0.81171299		Curtosis	-1.51119677
Coeficiente de asimetría	0.51440455		Coeficiente de asimetría	0.48946392
Rango	0.03817603		Rango	0.02654068
Mínimo	1.04878049		Mínimo	0.00689929
Máximo	1.08695652		Máximo	0.03343997
Suma	10.6463778		Suma	0.17602608
Cuenta	10		Cuenta	10
Nivel de confianza(95.0%)	0.00909934		Nivel de confianza(95.0%)	0.00772972

Muestra de valores centrales, de la poblacion de Mexico desde 1950, para los valores de q y constante de crecimiento en el Modelo Malthusiano.

Las anteriores tablas presentan la recolección de datos con diferentes fechas de inicio: 1836, 1900 y 1950. Debido en gran parte, a que se presentaron situaciones dentro de la población que modificaron su comportamiento y que ignoramos para el módelo propuesto. Estamos considerando que solo el tamaño de la población afecta a su comportamiento, y esto no se sigue para nuestro problema actual, por hechos historicos que se fueron presentando en periodos cercanos a cada una de las fechas, en un inicio mencionadas.

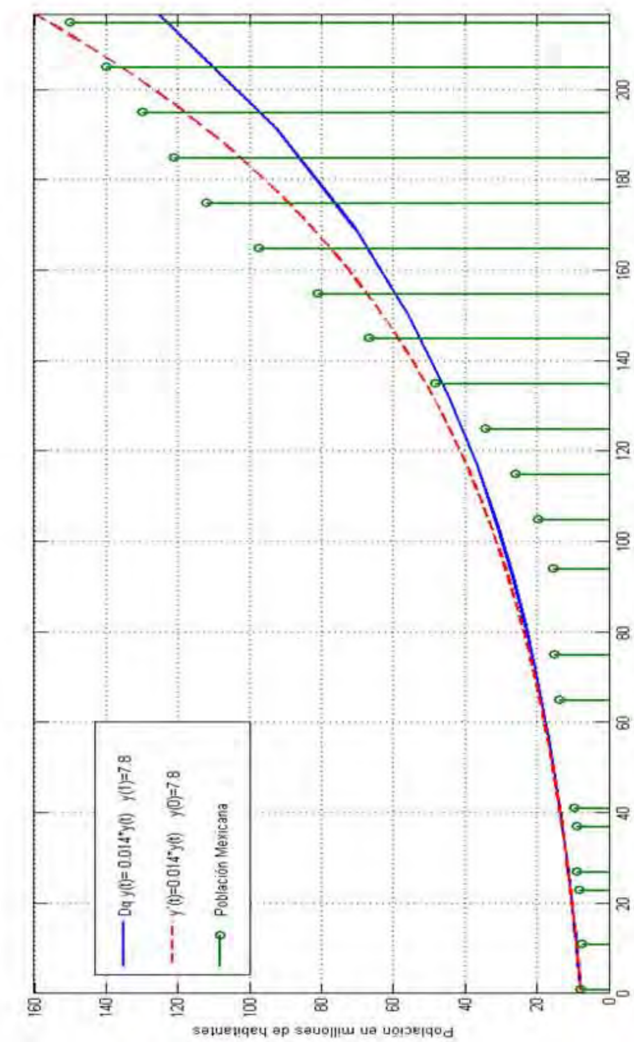
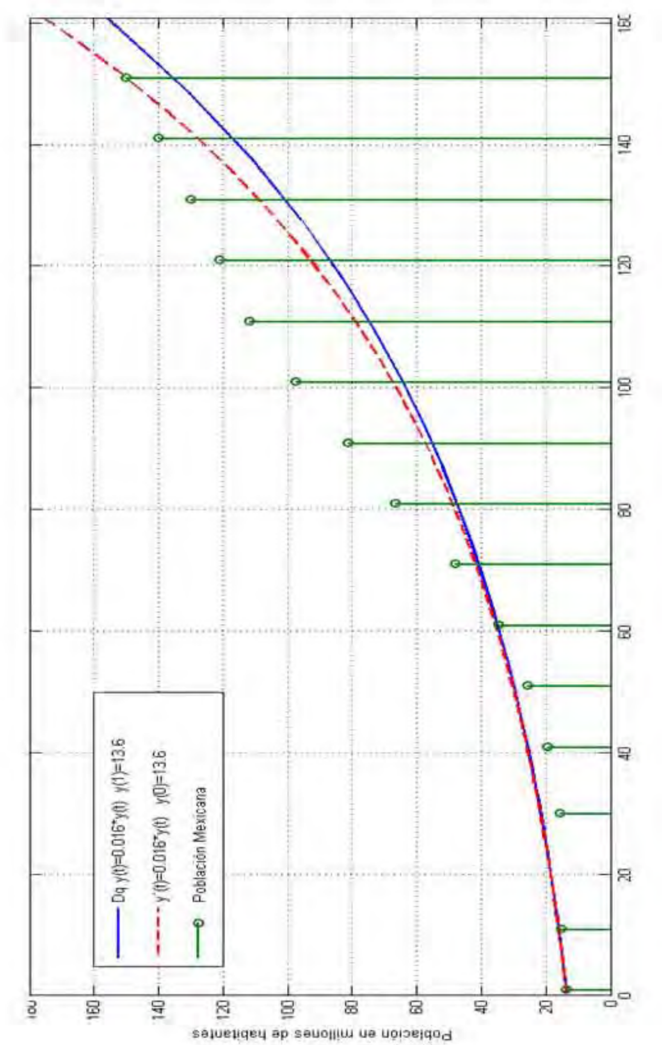
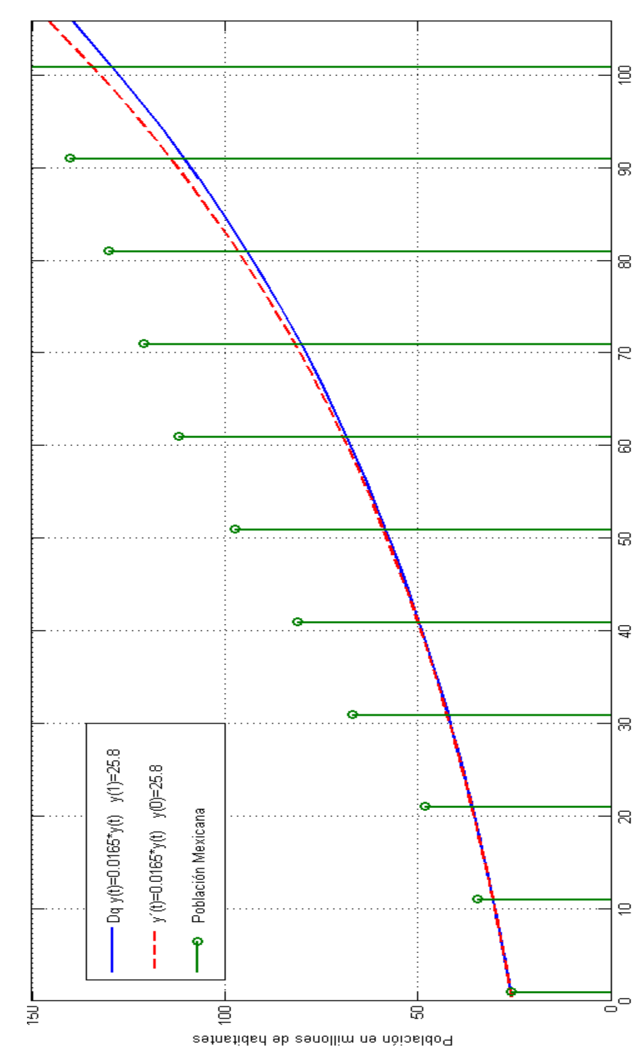


Imagen que muestra el comportamiento de los Modelos, y las estadisticas tomadas para la poblacion Mexicana desde 1836



Comportamiento de los Modelos , y las estadisticas, para la poblacion Mexicana pero desde 1900.



Grafica, al igual que las 2 anteriores, pero considerando los datos desde el ao de 1950.

5.2 q-Ecuación Logistica

La ecuación logística de crecimiento poblacional fue propuesta por P. Verhulst como una posible solución al dilema del crecimiento exponencial de Malthus. Aunque Alfonso Quetelet, matemático y astrónomo belga (1795-1874), fue uno de los primeros en considerar que el modelo exponencial de crecimiento de Malthus, no era adecuado para explicar la expansión demográfica de cualquier país. Si bien el crecimiento exponencial podía reflejar la situación de un país joven y casi vacío (por aquellos tiempos), como lo era Estados Unidos, su aplicación a otras sociedades conduciría a valores imposibles.

Los argumentos de Quetelet se basaban en que una población no podía crecer indefinidamente, sino que existían fuerzas externas e internas, que tienden a regular este crecimiento. Precisamente Quetelet fue profesor, en la Universidad de Gante, de Pierre-Francois Verhulst (1804-1849) con quien trabajo durante un largo tiempo y sobre quien tuvo una gran influencía en sus obras.

Verhulst abordó el problema del crecimiento de una población adaptando la hipótesis de Quetelet y, consideró que éste es un proceso limitado. Demostró que la tasa de crecimiento de una población, esta limitada directamente por su propía densidad. Por este motivo añadio al modelo propuesto por Malthus, un término adicional, que representa la resistencia al crecimiento. Esta idea se puede expresar mediante la ecuación:

$$\dot{P}\left(t\right)=kP\left(t\right)\left(P_{M}-P\left(t\right)\right) \tag{5.8}$$

donde P_M denota el término máximo o nivel de saturación de la magnitud de tamaño poblacional $P\left(t\right)$. El crecimiento en (5.8) es proporcional tanto al tamaño poblacional en el momento t, como al crecimiento potencial de la población $\left(P_M-P\left(t\right)\right)$. La solución a esta ecuación diferencial, no lineal, fue a lo que Verhulst llamó función logística. Consideremos la q-ecuación logística

$$D_{q}y\left(x\right)=cy\left(x\right)\left(y_{M}-y\left(x\right)\right)$$

5.2.1 Método 1

En este tipo de problemas podemos aplicar el siguiente método, teniendo en cuenta que

$$
\begin{aligned}
d_q y(x) &= y(qx) - y(x) \\
&= (y(qx) - y(x)) * \frac{(qx - x)}{(qx - x)} \\
&= \frac{y(qx) - y(x)}{qx - x} * (qx - x) \\
&= D_q y(x) \, d_q x
\end{aligned}
$$

que al sustituir el problema que tenemos ahora, obtenemos como igualdad válida

$$
\begin{aligned}
d_q y(x) &= c y(x) (y_M - y(x)) \, d_q x \\
\frac{1}{y(y_M - y)} d_q y &= c d_q x \\
\int \frac{1}{y(y_M - y)} d_q y &= \int c d_q x \\
\int \frac{1}{y(y_M - y)} d_q y &= cx + cte
\end{aligned}
$$

Para poder q-integrar el lado izquierdo de la anterior igualdad, recurriremos al método de fracciones parciales, donde ya tendríamos algo de menor grado y una de las q-integrales ya la conocemos.

$$
\frac{1}{y(y_M - y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y_M - y}
$$

lo que implica que los coeficientes A y B son ambos iguales a $\frac{1}{y_M}$. Entonces se debe calcular la q-integral siguiente

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{y(y_M - y)} d_q y &= cx + cte \\
\text{es decir, } \int \frac{1}{y_M y} d_q y + \int \frac{1}{y_M (y_M - y)} d_q y &= cx + cte \\
\text{luego } \frac{1}{y_M} \frac{q-1}{\ln(q)} \ln(y) + \int \frac{1}{y_M (y_M - y)} d_q y &= cx + cte
\end{aligned}
$$

Para resolver la q-integral $\int \frac{1}{y_M(y_M-y)} d_q y = \frac{1}{y_M} \int \frac{1}{y_M - y} d_q y$, usaremos la representación en serie infinita de la función $\frac{1}{1+x}$ con dominio de convergencia $|x| < 1$.

$$
\begin{aligned}
\text{Como } \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x)^n \text{, para } |x| < 1 \\
\text{entonces } \frac{1}{c-x} &= \frac{1}{c} \frac{1}{1 + \left(-\frac{x}{c}\right)} \\
&= \frac{1}{c} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{x}{c}\right)^n \text{, para } \left|\frac{x}{c}\right| < 1 \\
&= \frac{1}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{c}\right)^n \text{, para } \left|\frac{x}{c}\right| < 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c^{n+1}} (x)^n \text{, para } \left|\frac{x}{c}\right| < 1
\end{aligned}
$$

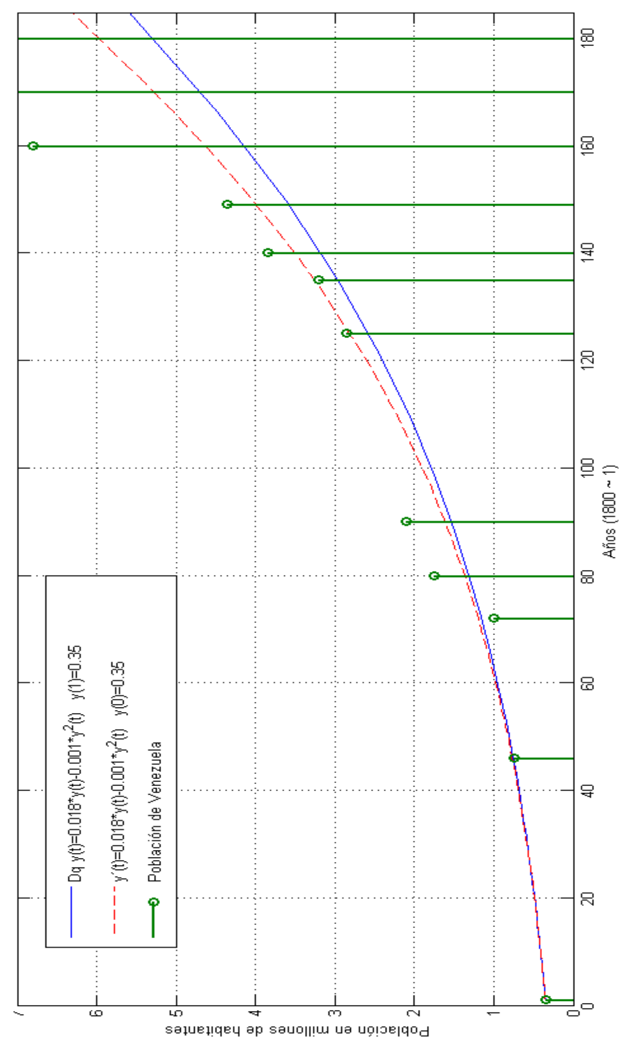
Está forma en la que se puede expresar un cociente, se aplica a nuestro q-integrando término por término

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{y_M} \frac{q-1}{\ln(q)} \ln(y) + \int \frac{1}{y_M (y_M - y)} d_q y &= cx + cte \\
\frac{1}{y_M} \frac{q-1}{\ln(q)} \ln(y) + \frac{1}{y_M} \int \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{y_M^{n+1}} y^n \right\} d_q y &= cx + cte \\
\frac{1}{y_M} \frac{q-1}{\ln(q)} \ln(y) + \frac{1}{y_M} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{y_M^{n+1}} \int y^n d_q y \right\} &= cx + cte \\
\frac{1}{y_M} \frac{q-1}{\ln(q)} \ln(y) + \frac{1}{y_M} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{y_M^{n+1}} \left\{ \frac{y^{n+1}}{[n+1]} \right\} \right\} &= cx + cte \\
\frac{1}{y_M} \frac{q-1}{\ln(q)} \ln(y) + \frac{1}{y_M} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{y^{n+1}}{y_M^{n+1} [n+1]} \right\} &= cx + cte
\end{aligned}
$$

5.2.2 Ejemplo 1: Población de Venezuela

Usemos esta q-EDO, para el caso de Venezuela que ya hemos trabajado en la sección anterior, los valores a considerar serán los que se tienen para el modelo en EDO. No los alteraremos y observaremos que sucede con dicho modelo en comparación con el anterior, que veíamos, tiene un mejor apego a la situación real, el desarrollado con las q-EDO.

En este caso supondremos que λ tiene un valor igual a 0.001, y la constante y_m es igual a 18. Manejaremos valores iniciales y de crecimiento para q, exactamente como las que nos resultaron en el caso de la ecuación Malthusiana, por lo que omitiremos ese tipo de análisis aqui y solo nos enfocaremos en realizar la representación gráfica del modelo, que a continuación presentamos.



Representacion del Modelo de la ecuacion logistica para la poblacion de Venezuela, haciendo un comparativo entre modelos de EDO y q-EDO.

5.3 q-Ecuación de enfriamiento de Newton

Isaac Newton (1641-1727) hasta nuestros dias, es ampliamente reconocido por su vasta investigación y numerosos trabajos que contribuyeron al desarrollo de la ciencía. Dentro de todos estos estudios como parte de su formación académica e inclinación cientifica, probablemente se interesó por la temperatura, calor y el punto de fusión de los metales, motivado por su nombramiento como responsable de supervisar la calidad de la acuñación y detección de falsificaciones, mientras fue funcionario de la casa de moneda en Inglaterra. Newton dentro de experimentos que tenían que ver con la fundición de diferentes metales que se usaban para mezclarse con el oro y así falsificar monedas, observó que al calentar al rojo vivo un bloque de hierro y tras retirarlo del fuego, éste se comportaba de forma distinta cuando su temperatura variaba considerablemente con respecto del medio ambiente. Notó que el hierro se enfriaba más rapídamente cuando estaba muy caliente, y más lentamente cuando su temperatura se acercaba a la del medio en el que se encontraba en ese momento. Con estas observaciones pudo formular lo que hoy en día se conoce con el nombre de Ley de enfriamiento de Newton, y la cual se escribe como

$$\frac{dT(t)}{dt} = k\left(T_M - T\left(t\right)\right)$$

donde la derivada de la función temperatura con respecto del tiempo (consideramos que solo varía con respecto del tiempo), representa la rapidez de enfriamiento, $T(t)$ como tal mide la temperatura en cada instante de un cierto objeto, k es una constante que define el ritmo de dicho enfriamientoy por último, T_M es la temperatura que se registra del medio en el que se encuentra y se toma como constante, a ello es a lo que tiende después de un cierto tiempo la temperatura de un objeto.

$$D_q y\left(x\right) = c\left(y_M - y\left(x\right)\right) \tag{5.9}$$

5.3.1 Método 1

Para dar solución a (5.9) usaremos una forma similar en como se resuelven los problemas de este tipo en EDO de 1er. orden, lineal no homogénea, haciendo uso de factores integrantes. Para ello primero dejaremos de cada lado de la igualdad un tipo de variable, de un lado la dependiente y del otro la independiente.

$$\begin{aligned} & & \text{A parti de } (5.9) \text{ se tiene} \\ D_q y\left(x\right) + cy\left(x\right) &=& cy_M \qquad (5.10) \end{aligned}$$

Buscaremos una función $f(x)$ tal que al multiplicar por (5.10) el lado izquierdo de dicha igualdad pueda interpretarse como la q-derivada de un producto. Ahora debido a que la q-derivada de un producto de 2 funciones $g(x)$ y $y(x)$ tiene la forma

$$\begin{aligned} D_q(g(x)\,y(x)) &= g(x)\,D_q y(x) + y(qx)\,D_q g(x) \text{ ó} \\ D_q(g(x)\,y(x)) &= y(x)\,D_q g(x) + g(qx)\,D_q y(x) \end{aligned}$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} & f(x)\,D_q y(x) + cy(x)\,f(x) = cy_M f(x) \\ \text{se quiere que } f(x)\,D_q y(x) + cy(x)\,f(x) &= y(x)\,D_q g(x) + g(qx)\,D_q y(x) \\ \therefore & \left\{ \begin{array}{c} f(x) = g(qx) \\ cf(x) = D_q g(x) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

De este sistema de funciones obtenemos la q-ecuación diferencial que satisface las condiciones que pedimos

$$D_q g(x) = cg(qx) \tag{5.11}$$

Esta q-ecuación diferencial la resolvemos usando series de Taylor alrededor del cero, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$, que al sustituirla nos da las restricciones

$$\begin{aligned} D_q g(x) &= cg(qx) \\ D_q \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n &= c \sum_{n=0}^{\infty} g_n (qx)^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} g_n D_q(x^n) &= \sum_{n=0}^{\infty} cg_n (qx)^n \\ \sum_{n=1}^{\infty} g_n [n]\, x^{n-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} cg_n q^n x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1} [n+1]\, x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} cg_n q^n x^n \\ &\Longrightarrow g_{n+1}[n+1] = cg_n q^n \\ &\Longleftrightarrow g_{n+1} = \frac{cq^n}{[n+1]} g_n \end{aligned} \tag{5.12}$$

Para resolver (5.12) se supone que $g(0) = g_0$ y entonces

$$\begin{aligned}
g_0 &= g(0) \\
g_1 &= \frac{c}{[1]} g_0 \\
g_2 &= \frac{c^2 q}{[2]!} g_0 \\
g_3 &= \frac{c^3 q^{2+1}}{[3]!} g_0 \\
&\vdots \\
g_n &= \frac{c^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[n]!} g_0
\end{aligned}$$

Con lo que hemos podido encontrar la solución a la ecuación (5.11) y de acuerdo con la definición de una de las exponenciales, tenemos que

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[n]!} g_0 x^n \\
&= g_0 \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(cx)^n}{[n]!} \\
&= g_0 E_q^{cx} \\
\text{ya que } f(x) &= g(qx) \\
&\therefore \; f(x) = g_0 E_q^{qcx}
\end{aligned}$$

Esta función es la que necesitamos para poder convertir nuestra ecuación (5.10) en una q-derivada de un producto, lo que en términos de las EDO seria un factor integrante para la resolución.

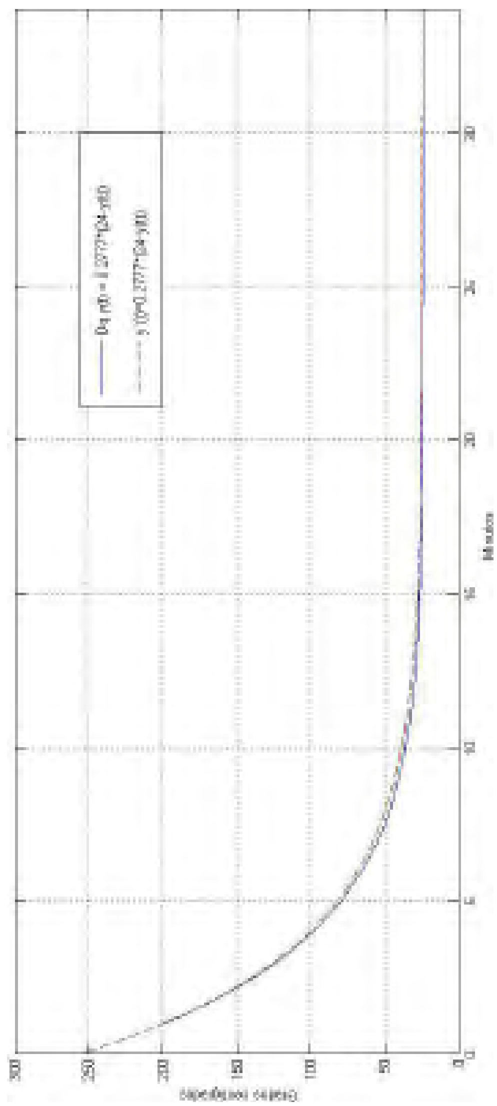
$$
\begin{aligned}
& f(x)\{D_q y(x) + cy(x) = cy_M\} \\
& g_0 E_q^{qcx}\{D_q y(x) + cy(x) = cy_M\} \\
g_0 E_q^{qcx} D_q y(x) + cy(x)\, g_0 E_q^{qcx} &= cy_M g_0 E_q^{qcx} \\
D_q\left(g_0 E_q^{cx} y(x)\right) &= cy_M g_0 E_q^{qcx} \\
D_q\left(g_0 E_q^{cx} y(x)\right) &= D_q\left(y_M g_0 E_q^{cx}\right) \\
g_0 E_q^{cx} y(x) &= y_M g_0 E_q^{cx} + cte \\
y(x) &= \frac{y_M g_0 E_q^{cx}}{g_0 E_q^{cx}} + \frac{cte}{g_0 E_q^{cx}} \\
&= y_M + cte\left(e_q^{-cx}\right)
\end{aligned}
$$

5.3.2 Ejemplo 1: Carne asada

En este ejemplo lo que tratamos de hacer, es describir una situación en la cual es posible observar el fenomeno, a traves del cual, se realiza un intercambio de calor y la aplicación de la q-EDO de enfriamiento de Newton. Supongamos que nos encontramos en un dia de campo, en el cual se intenta asar un pedazo de carne congelada. Para ello se ha calentado previamente un comal, y despues se coloca encima de él la carne. Despues de un tiempo la carne adquiere rapidamente el calor transmitido por el comal, pero este último, al quitar la carne, pierde el calor acumulado por el fuego, y lo que se realiza posteriormente es recolocar dicho trozo de carne en otra parte que tenga mas calor que la carne, para que pueda cocerce. Este intercambio de calor entre un objeto con mayor temperatura que otro es el que vamos a intentar modelar con ambas teorías. Para ello igual, sabemos que despues de que la carne ha absorbido suficiente calor y se ha cocido, si la dejamos al aire libre, pasa de una temperatura alta a una muy baja, casi comparandose con la del medio donde se encuentra. Si suponemos que las condiciones del medio donde estamos y de los objetos que tenemos están dados como sigue: la temperatura del medio ambiente es de alrededor de 24°C y permanece constante; la carne se ha cocido a una temperatura de 200 °C y es nuestra temperatura inicial; el proceso de enfriamiento ocurrio cuando al pasar 2 minutos, la carne bajo a una temperatura de 125 °C. Entonces tenemos todos los datos necesarios para describir ambos modelos con las constantes que nos resultarían. Según el modelo normal para las EDO las constantes serían dadas por

$$
\begin{aligned}
T_M &= 24 \\
T_0 &= 200 \\
k &= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{101}{176}\right)
\end{aligned}
$$

Lo que nos crearía el modelo que podemos graficar con ayuda del q-método de Euler y representarlo en la siguiente imagen.



Comparativa de modelos para la q-EDO de la ley de enfriamiento de Newton.

Chapter 6

Conclusiones

A lo largo de los capítulos y secciones anteriores, hemos podido darnos cuenta de grandes similitudes y diferencias que se suscitan al modificar un aspecto del Cálculo, que sienta las bases de múltiples teorías y cuestiones practicas, de un uso muy cotidiano en ramas de las Matemáticas. No obstante, estas variaciones en cuanto a resultados conocidos, también se han presentado casos en los cuales que mantienen una estructura compatible con las versiones originales, y podrían considerarse como situaciones más generales que los referidos. Nuestro objetivo con dicho punto, no es afirmar categóricamente, que dicha alteración que se ha producido en la Teoría del Cálculo, significa una mejora o la generalización de la materia. Se necesitaría bastante tiempo de investigación, para generar condiciones necesarias, las cuales permitan la posibilidad de asegurarlo. Lo que se ha intentado generar con este trabajo, es una pequeña aportación al tema y que las fuentes de referencia en el campo se puedan ampliar, para que más personas tengan diferentes puntos de vista con que avanzar en este estudio, que como hemos ya mencionado, tiene mucho camino por recorrer para lograr tener un lugar al igual que el Cálculo Diferencial e Integral.

En cuanto al código desarrollado para Matlab, que hemos venido sugiriendo en ciertos apartados, según se ha visto la oportunidad, necesidad y apego al tema tratado, son el esbozo de un primer intento por sistematizar e introducir algunos programas computacionales, que complementen la teoría y algunas cuestiones practicas en el sentido visual y además permitir el uso, como por ejemplo, del q-Método de Euler, que de otra forma, por la cuestión de iteraciones es un tanto complicado realizarlas de forma manual. estas rutinas no son una versión definitiva y completa, pues hay muchas mejoras de carácter estético y de optimización que se pueden aún realizar, y que sin embargo, en este momento aún al no tenerlas presentes, cumplen con su objetivo. Esperamos que no por ello, dejen de servir para futuras aplicaciones que se realicen en este campo, y puedan surgir de ellos programas similares que se tienen en la actualidad para Cálculo.

En cuanto a los ejemplos mostrados en el penúltimo capitulo, son solo algunos de una basta cantidad que se han desarrollado por mucho tiempo, en muchos niveles de complejidad, para modelar lo que se pretende. Hemos querido comparar los modelos que se tendrían con los métodos de solución del Cálculo y el q-Cálculo, graficarlos y verificar si existe un mejor apego por parte de uno que del otro. Y aunque inicialmente pudimos notar que teníamos mejores resultados con el q-Cálculo, bajo las hipótesis y valores, ya manejados, en ciertos problemas, se pueden crear condiciones propias (como se hizo en casos siguientes) que ayuden a los modelos en las q-EDO a reflejar mejor una situación. Todo dependerá del análisis que hagamos de las condiciones iniciales y los valores que se introduzcan en las q-EDO que se propongan, y de igual forma en el nivel de avance que se haga en la teoría, pues como con las EDO, estas tuvieron una teoría siguiente que fueron las EDP, que por su complejidad, se adaptaron mejor para la modelación de ciertos fenomenos.

Puntualizando, la teoría presentada en cada una de las paginas precedentes, contempla una visión distinta del Cálculo, no por ello es mejor o peor, pero si es una alternativa en cuanto al manejo de muchos términos y su posible inserción en el mundo de las aplicaciones. Antes de poder avanzar y ampliar estos conceptos en más dimensiones (que es una alternativa muy lógica), sería de considerable ayuda, el que se pueda avanzar con lo que se tiene al momento y tratar de clarificar más y más cosas, que de igual forma, sirven para sentar las bases de situaciones un poco más complicadas.

La visión que hemos presentado de Ecuaciones Diferenciales es muy inicial y se puede ampliar más, sumar teoremas que fundamenten la existencia y unicidad de soluciones, que modelen el comportamiento gráfico de las mismas y propongan nuevos métodos de solución para aquellos que fallan en esta Teoría, por citar alguna, el método de separación de variables, que depende fuertemente en considerar el cociente de diferenciales y operarlos en una igualdad. Sin embargo, por las mismas diferencias con los cuales se planteó el q-Cálculo, es normal que cuestiones que integran diferenciales, cambios de variable y por ende la regla de la cadena, no funcionen como lo acostumbrado. Pero aún creemos que es posible, alternativas que resuelvan este conflicto y le den en el futuro próximo, una salida.

Bibliography

[1] Victor Kac y Pokman Cheung, *"Quantum Calculus"*, Springer-Verlag (Universitext), New York, 2002.

[2] Amos Gilat, *"MATLAB, An Introduction with Applications"*, John Wiley and Sons, Inc., 2007.

[3] Jorge Toro Gonzalez, *"Módelos Matemáticos con Ecuaciones Diferenciales Ordinarias"*, *Agosto* 2003

[4] L. A. Nuñez , *Métodos Matempaticos 2. Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden*, Centro de Astrofísica Teórica, Departamento Física, Facultad de Ciencias y el Centro Nacional de Cálculo Científico, Universidad de los Andes, Merida 5101, Venezuela, Septiembre 2003 versión α

[5] *http://www.inegi.org.mx*

[6] Elena Martínez Rodríguez, *Logit Model como Modelo de elección discreta: origen y evolución*, Anuario Jurídico y Económico Escurialense, XLI (2008) 469-484/ISSN: 1133-3677, Universidad Complutense de Madrid