Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Generación de problemas de optimización cuya solución es predeterminada

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
ACTUARIO

PRESENTA:
MARTÍN MARTINEZ ESTRADA

DIRECTOR DE TESIS:
JESÚS AGUSTÍN CANO GARCÉS

2011

Datos del jurado

Alumno
Martinez
Estrada
Martín
mrstmraiea@yahoo.com.mx
55 37 09 58 36
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
094277834

Tutor
M. en C.
Jesús Agustín
Cano
Garcés

Sinodal
Mat.
Adrián
Girard
Islas

Sinodal
Dra.
Idalia
Flores
de la Mota

Sinodal
Dra.
María De Luz
Gasca
Soto

Sinodal
Act.
Leonardo
López
Monroy

Datos del trabajo escrito
Generación de problemas de optimización cuya solución es predeterminada
105 p
Noviembre, 2011

Dedicado a los profesores que: destacaron en su desempeño, vocación y conocimiento de las materias, durante el tiempo que adquirí la formación de actuario. Lograron transmitir su conocimiento y además, un gusto por las matemáticas, respeto y exigencia académica.

Agradecimientos

Al profesor Jesús Agustín Cano Garcés por enseñarme el muy interesante tema de optimización, del cual tomé un gusto especial y también, por su dirección en la realización de la tesis.
A los profesores que formaron parte del jurado, por sus valiosas aportaciones durante la revisión de la tesis.

A Ricardo Ríos Pérez compañero de la facultad, que en su servicio social me apoyó en la elaboración de la tesis con el procesador de textos LaTeX, sobre todo en las gráficas, figuras y tablas que fueron abundantes.

En especial a mi tía Eugenia Estrada García por su gran apoyo para la realización de mis estudios.

Por último, pero indispensable, al personal administrativo de diferentes instancias, que cumplió con su trabajo y me apoyó en el largo proceso que llevó a la conclusión de este trabajo; vigilancia, sección escolar, personal academico.

Índice general

Introducción

Siendo ayudante de la materia de Investigación de Operaciones en la Facultad de Ciencias, tuve la tarea de proponer y resolver ejercicios para la clase. Advertí que inventar problemas con números al azar, generalmente no garantiza que su solución sea del tipo que se desea ilustrar, o que el número de iteraciones sea el adecuado para terminar el ejemplo en una clase. Por ello, fue necesario construir los ejercicios de forma que se conozca su tipo de solución.

En un problema de programación lineal con muchas variables, sólo es posible identificar su tipo de solución en la tabla final del algoritmo simplex, por lo que es útil ilustrar cada caso con un ejemplo.

En consecuencia, los propósitos de este trabajo son:

- Desarrollar la forma de crear problemas, cuya solución sea predeterminada en problemas de programación lineal, transporte, asignación, ruta más corta, flujo máximo y teoría de juegos. Visualizando la situación geométrica correspondiente en los casos donde es posible, o analizando la situación algebraica. Analizar algunas soluciones que se pueden presentar en cada familia de problemas.

- Acelerar el aprendizaje de los temas de Investigación de Operaciones que se abordan, así como brindar una herramienta para la construcción de ejemplos a los ayudantes y alumnos de dicha materia.

La creación de problemas adquiere relevancia cuando se plantea de antemano un tipo de solución, adecuado a un fin determinado. Si además, al aplicar el algoritmo simplex para resolverlos, las iteraciones de la tabla no generan "fracciones complicadas", entonces estos problemas tienen cualidades que facilitan su utilización en un salón de clase.

Se propone este trabajo como material de apoyo didáctico para la construcción de ejemplos con énfasis en su tipo de solución, suponiendo que se conoce toda la teoría necesaria para resolver los problemas. Sin embargo, se anexa un apéndice donde se pueden recordar los métodos de solución. La mayor parte del material teórico está basado en el libro de Bazaraa [4].

Al final de la tesis se presenta un glosario, que incluye definiciones de términos relevantes de la teoría, distinguidas con letra cursiva.

Para el desarrollo del presente trabajo, se utilizaron resultados de álgebra, geometría y análisis; lo que subraya la importancia de estas herramientas.

El material de esta tesis está organizado de la siguiente manera:

El Capítulo 1 (Programación Lineal), se desarrolla más, debido a que en el curso se analizan más casos de este tema; en este capítulo se abordan los diferentes tipos de solución de problemas de programación lineal, presentando para cada uno de ellos, la forma de construir un ejemplo.

En el Capítulo 2 se abordan los problemas de transporte, asignación y algunos de redes, como el problema de la ruta más corta y el de flujo máximo.

El Capítulo 3 se dedica a problemas de juegos; se construyen problemas cuya solución gráfica se determina de antemano. Si el lector desea abundar en el tema, puede consultar el libro de Barron [3].

Capítulo 1

Programación Lineal

La programación lineal tiene una amplia gama de aplicaciones, por ejemplo, en la industria, el gobierno y el ejercito. En 1947, el matemático G.B. Dantzig desarrolló un algoritmo llamado el método simplex para resolver problemas de programación lineal, aunque se han propuesto nuevos algoritmos, el método simplex sigue siendo un medio viable para resolver problemas de este tipo.

Como es sabido, la tabla inicial del algoritmo simplex corresponde a una solución básica factible (punto extremo) y en cada iteración la nueva tabla corresponde a una solución básica factible adyacente (las bases difieren por un índice), el algoritmo simplex mejora las soluciones básicas factibles hasta lograr optimalidad, o bien, hasta concluir que el problema no tiene valor óptimo, a través de los coeficientes de costo reducido y demás elementos de la tabla simplex [4].

1.1. Notación

En el texto se hará uso de la notación que se observa en la mayoría de los libros de matemáticas e investigación de operaciones. Sin embargo, aquí se especifica la notación que requiere atención porque su uso es poco frecuente, o bien, porque existe la posibilidad de confundirla con expresiones similares.

Se denotará a los vectores con letras minúsculas, por ejemplo: x, b, c y en el caso correspondiente se indicarán sus dimensiónes; en algunos casos agregamos una tilde, por ejemplo $\overline{u}$, $\overline{x_0}$; el vector x transpuesto se denotará por x^T. Las matrices se denotarán con letras mayúsculas, por ejemplo A, B, N. La referencia a los renglones y columnas de la matriz A será frecuente, denotaremos al i-ésimo renglón de la matriz A por A_i, la j-ésima columna de la matriz A se denotará por A^j.

En el contexto de programación lineal las soluciones básicas son citadas frecuentemente; las variables básicas se denotarán por x_B y las variables no básicas se denotarán por x_N. De igual manera c_B y c_N denotarán los coeficientes del vector c asociados a las variables básicas y no básicas, respectivamente.

1.2. Solución factible óptima única en $\mathbb{R}^2$

Este primer caso es básico en la construcción de ejemplos, pues es el caso ideal de la modelación matemática (el modelo tiene solución factible óptima, es única y existe un procedimiento para encontrarla), particularmente en problemas de optimización. Es la situación en donde hay un conjunto no vacío de soluciones factibles dentro del cual se alcanza siempre el único valor óptimo de la función objetivo.

1.2.1. Región de soluciones factibles

La manera de construir una región de soluciones factibles para este caso consiste en ubicar una región en el primer cuadrante, se desea una región acotada y tal que el origen pertenezca a la misma. Esta región estará delimitada por segmentos de recta con extremos cuyas coordenadas sean enteras. De esta forma, se garantiza que en las iteraciones del algoritmo simplex se generen soluciones enteras, porque en las iteraciones del algoritmo simplex se cambia a puntos extremos adyacentes. La forma de la región delimitada debe ser la de un polígono convexo. La Figura 1 ilustra la forma de un polígono convexo.

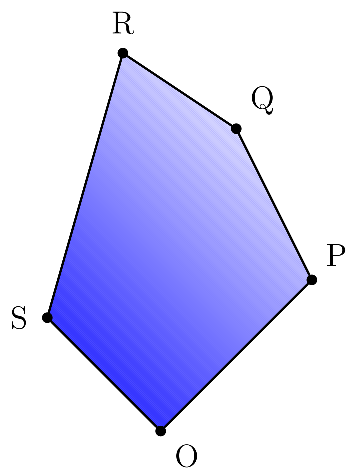


Figura 1. Polígono convexo

Se sugiere que el número de segmentos de recta que delimitan la región sea 2 ó 3, además de los segmentos asociados a las restricciones de no negatividad; esto genera planteamientos de tamaño adecuado para un ejemplo de clase.

1.2.2. Restricciones

Una vez delimitada la región de soluciones factibles, cada restricción estará asociada a la ecuación $\mathbf{a}x+\mathbf{b}y = \mathbf{c}$ que extiende cada segmento de recta. El sentido de la desigualdad ($\leq$ ó $\geq$) corresponde al semiplano que contiene a la región de soluciones factibles. Para conocer el sentido de la desigualdad tomamos un punto (x_0, y_0) de la región de soluciones factibles que no esté sobre la recta y comparamos $\mathbf{a}x_0 + \mathbf{b}y_0$ con $\mathbf{c}$, si $\mathbf{a}x_0 + \mathbf{b}y_0 < \mathbf{c}$, la restricción es $\mathbf{a}x + \mathbf{b}y \leq \mathbf{c}$; si $\mathbf{a}x_0 + \mathbf{b}y_0 > \mathbf{c}$, la restricción es $\mathbf{a}x + \mathbf{b}y \geq \mathbf{c}$. Como la recta divide al plano en dos semiplanos, si un punto satisface una desigualdad entonces, todo el semiplano que contiene al punto también satisface la desigualdad. La Figura 2 ilustra esta situación.

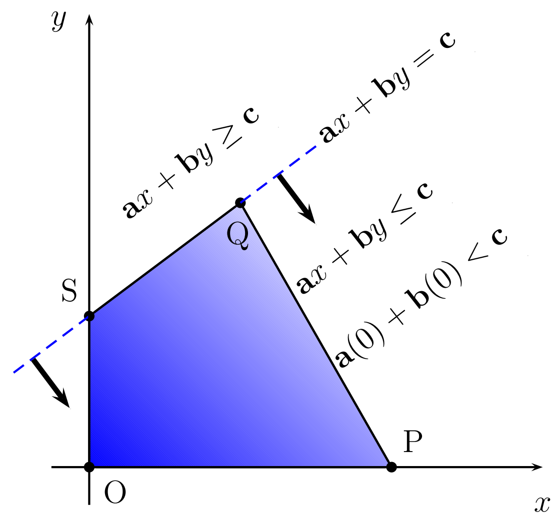


Figura 2

1.2.3. Función objetivo

Sin pérdida de generalidad, los diferentes planteamientos se desarrollarán para una función objetivo a maximizar; si se requiere el caso de minimizar la construcción es la misma, pero en vez de usar $z = c_1x + c_2y$ utilizamos $z' = -c_1x - c_2y$.

Elegimos el punto extremo de la región de soluciones factibles que se pretende que sea óptimo. Construir una función objetivo, $z = c_1x + c_2y$, que tenga su valor óptimo en el punto extremo elegido, consiste esencialmente en encontrar un vector $c = (c_1, c_2)$ o gradiente de la función. Debido a que el método simplex reconoce la optimalidad de un punto extremo basado en consideraciones locales, los vectores gradientes que sirven al propósito de hacer óptimo al punto extremo elegido, son los múltiplos positivos de cualquier combinación lineal convexa estricta de los dos vectores ortogonales $\overline{n}_1, \overline{n}_2$ (orientados hacia afuera de la región de soluciones factibles) de las dos rectas que pasan por el punto extremo elegido. La Figura 3 ilustra esta situación.

Con base en lo anterior, podemos elegir $\alpha \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in (0, 1)$ de la siguiente forma: sea $\lambda = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$ y $\alpha = q$, calculando c obtenemos:

$$c = \alpha(\tfrac{p}{q}\overline{n}_1 + (1 - \tfrac{p}{q})\overline{n}_2) = p\overline{n}_1 + (q - p)\overline{n}_2.$$

Entonces, si $\overline{n}_1$ y $\overline{n}_2$ tienen componentes enteras el resultado de la expresión anterior es un vector con componentes enteras. De esta manera, el gradiente puede ser $p\overline{n}_1 + (q-p)\overline{n}_2$, o algún múltiplo positivo de este vector cuyas componentes no tengan factores en común y sean números enteros, para iniciar con un vector gradiente de componentes enteras.

Ejemplo 1. Solución factible óptima única en $\mathbb{R}^2$.

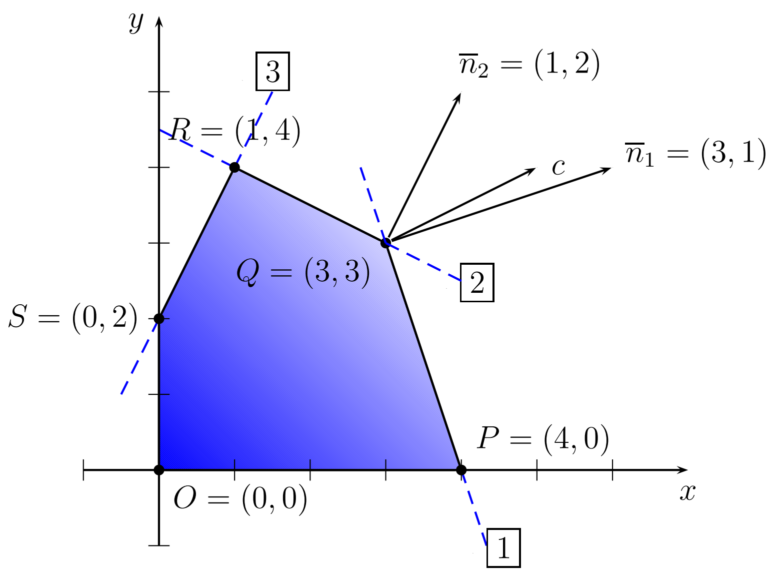


Figura 3

Región de soluciones factibles

Se toma como ejemplo a los puntos $O = (0,0)$, $P = (4,0)$, $Q = (3,3)$, $R = (1,4)$, $S = (0,2)$ para delimitar la región de soluciones factibles, dicha región tiene la propiedad de ser un conjunto convexo. Esto se ilustra en la Figura 3.

Restricciones

Las primeras restricciones son de no negatividad: $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$; los segmentos $\overline{OS}$ y $\overline{OP}$ están asociados con estas restricciones, respectivamente. Luego, para el segmento $\overline{PQ}$ tenemos la recta[1] $3x + y = 12$. Si $\overline{x}_0 = \overline{0}$ tenemos que $3(0) + 0 < 12$, entonces la restricción correspondiente es $\mathbf{3x + y \leq 12}$ (restricción 1); para $\overline{QR}$ la ecuación de la recta que lo contiene es $x + 2y = 9$, $\overline{x}_0 = \overline{0}$, $0 + 2(0) < 9$ entonces, la restricción es: $\mathbf{x + 2y \leq 9}$ (restricción 2) y, por último, para $\overline{RS}$ la ecuación de la recta es: $2x - y = -2$; si $\overline{x}_0 = \overline{0}$ tenemos $2(0) - 0 > -2$ entonces, la restricción es $2x - y \geq -2$, o bien $\mathbf{-2x + y \leq 2}$ (restricción 3); buscamos que el lado derecho de la desigualdad sea no negativo para tener una solución básica factible inicial.

[1]Para obtener la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ utilizamos la fórmula siguiente: $(p_2 - q_2)x + (q_1 - p_1)y = p_2q_1 - p_1q_2$ muy sencilla de calcular; se puede verificar que efectivamente esta recta pasa por los puntos P y Q.

Función objetivo

Si deseamos que Q sea la solución factible óptima, entonces construimos la función objetivo que lo garantice; $\overline{n}_1 = (3,1)$ y $\overline{n}_2 = (1,2)$ son dos vectores ortogonales a las rectas (1) y (2) que se intersectan en Q y estos vectores están orientados hacia afuera de la región de soluciones factibles; sean $p = 3$, $q = 4$ y $\alpha = 4$, $\frac{p}{q} = \frac{3}{4}$, calculando el gradiente como se dijo antes:
$c = 4(\frac{3}{4}\overline{n}_1 + (1 - \frac{3}{4})\overline{n}_2) = (9,3) + (1,2) = (10,5)$. Para simplificar, se multiplica por $\frac{1}{5}$. El gradiente es $(c_1, c_2) = (2,1)$ entonces, $\mathbf{z = 2x + y}$.

El problema $\mathbb{P}$ planteado es el siguiente:

$$\mathbb{P}: \quad \begin{array}{lrl} Max & z = 2x + \ y & \\ s.a. & 3x + \ y & \leq 12 \ldots\ldots\ldots \boxed{1} \\ & x + 2y & \leq 9 \ldots\ldots\ldots \boxed{2} \\ & \text{-}2x + \ y & \leq 2 \ldots\ldots\ldots \boxed{3} \\ & x, \quad y & \geq 0. \end{array}$$

Si se resuelve geométricamente el problema $\mathbb{P}$ es claro que la solución óptima es $x^* = (3,3)^T$ con $z_{\text{Máx}} = 9$. Al aplicar el algoritmo simplex tenemos:

	x	y	h_1	h_2	h_3	
h_1	$\boxed{3}$	1	1	0	0	12
h_2	1	2	0	1	0	9
h_3	-2	1	0	0	1	2
-z	$\boxed{2}$	1	0	0	0	0
x	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	4
h_2	0	$\boxed{\frac{5}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	5
h_3	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	10
-z	0	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	-8
x	1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	3
y	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	3
h_3	0	0	1	-1	1	5
-z	0	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	-9

Efectivamente cumple la expectativa de tener solución factible óptima única, puesto que los coeficientes de costo reducido de las variables no básicas son negativos.

Un procedimiento análogo se puede aplicar en $\mathbb{R}^3$.

1.3. Solución factible óptima única en $\mathbb{R}^3$

Para construir la región de soluciones factibles elegimos los puntos de coordenadas enteras, de manera que se obtenga un *poliedro* convexo en el primer octante, como se ilustra en la Figura 4. En esta figura, la terna de puntos PQR define un plano y éste a su vez define dos *semiespacios*; los puntos O y S deben pertenecer al interior de cada uno de los semiespacios definidos por el plano PQR. Luego, procedemos a construir las restricciones. Al construir estos problemas incluso es posible decidir el número de iteraciones del método simplex, agregando restricciones adecuadamente. En ciertos casos se puede inducir la secuencia que seguirá el algoritmo, inclinando adecuadamente el vector gradiente c dentro del rango permitido.

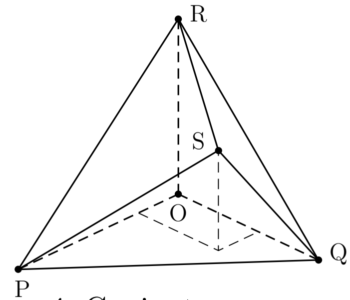


Figura 4. Conjunto convexo en $\mathbb{R}^3$

1.3.1. Restricciones

En este caso las restricciones se obtienen a partir de una terna de puntos que definen un plano $\mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}z = d$; el vector normal $\overline{n} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ se obtiene del producto cruz de los dos vectores que comparten el vértice de origen (un punto de la terna) y llegan a los puntos restantes de la terna. Para obtener d, se calcula el producto punto, $\langle \overline{n}, P \rangle$, donde P es un punto de la terna; esto es, $d = \langle \overline{n}, P \rangle$. La Figura 5 ilustra lo antes mencionado.

La desigualdad se obtiene de manera similar al caso de $\mathbb{R}^2$. Si $\overline{x}_0$ es un punto factible que no está en el plano y $\mathbf{a}x_0 + \mathbf{b}y_0 + \mathbf{c}z_0 < d$, entonces la desigualdad será $\mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}z \leq d$.

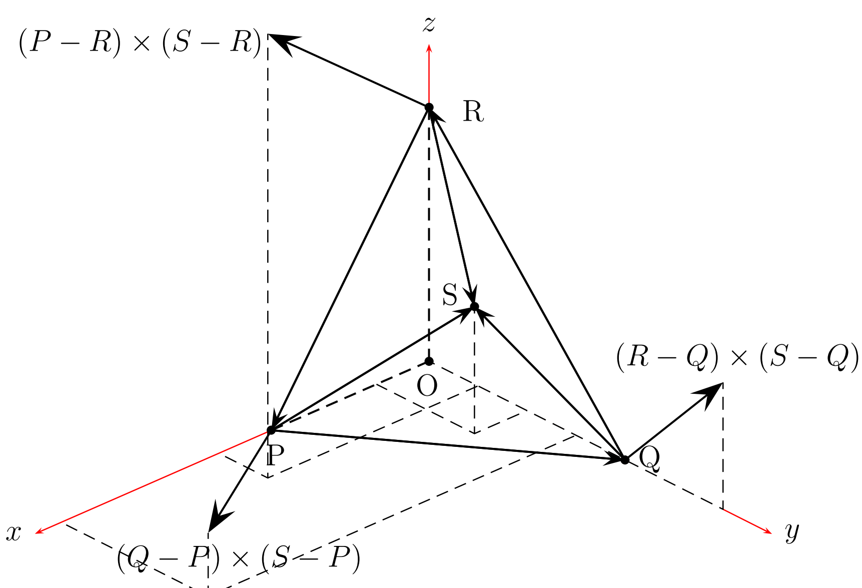


Figura 5

1.3.2. Función objetivo

Como se desea el caso en que la solución factible óptima sea única, el vector gradiente de la función objetivo debe cumplir más condiciones. En los otros casos, hay menos condiciones para construir dicho vector.

De igual manera, elegimos un punto extremo que será el óptimo; nos interesa que el gradiente de la función, anclado en el punto que será óptimo, esté dirigido hacia afuera de la región de soluciones factibles, esto se logra de la siguiente forma:

Consideremos la Figura 5 y partimos de que S es el punto elegido. En este punto coinciden tres planos diferentes, así que a su vez se tienen tres aristas que coinciden en S, cada una de ellas es un segmento contenido en la intersección de dos de los planos.

Para la siguiente construcción, sí importa el orden en que sean dadas las aristas y será útil darles nombre: $\overline{u} = S - P$, $\overline{v} = S - Q$, $\overline{w} = S - R$. La Figura 6 ilustra esta situación.

Ahora damos un orden a los vectores $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{w}$: observando el punto S con la perspectiva desde afuera de la región de soluciones factibles, ordenamos estos vectores en sentido positivo (contrario al sentido en que giran las manecillas del reloj), por ejemplo, que el orden sea $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ y luego calculamos los siguientes vectores: $\overline{u} \times \overline{v}$, $\overline{v} \times \overline{w}$, $\overline{w} \times \overline{u}$. Nótese el orden[2] en que se toma cada producto cruz. La información importante del vector gradiente es su dirección y para facilitar las operaciones con el vector, en los casos que convenga se toma un múltiplo de éste.

Finalmente el gradiente que buscamos es:

$$c = (c_1, c_2, c_3) = \overline{u} \times \overline{v} + \overline{v} \times \overline{w} + \overline{w} \times \overline{u}.$$

La razón por la cual este vector hace que la solución sea única, es porque si calculamos el producto punto de c con alguno de los vectores $-\overline{u}$, $-\overline{v}$ o $-\overline{w}$ el resultado es negativo, lo que indica que no es posible mejorar el valor de la función objetivo en las direcciones $-\overline{u}$, $-\overline{v}$, $-\overline{w}$ y éstas son todas las direcciones posibles en las que el algoritmo simplex puede cambiar de punto extremo; esto muestra que el óptimo es único. Sin pérdida de generalidad, veamos un caso (los otros son similares): tomemos el producto de c con $-\overline{u}$, consideramos al vector $-\overline{u}$ porque $\overline{u}$ termina en S y nos interesa saber si en dirección hacia el punto P es posible mejorar el valor de la función objetivo, es decir, en la dirección $-\overline{u}$. Observamos que $\langle c, -\overline{u} \rangle = \langle \overline{v} \times \overline{w}, -\overline{u} \rangle$ puesto que $\langle \overline{u} \times \overline{v}, -\overline{u} \rangle = \langle \overline{w} \times \overline{u}, -\overline{u} \rangle = 0$; además $\langle \overline{v} \times \overline{w}, -\overline{u} \rangle = -\langle \overline{v} \times \overline{w}, \overline{u} \rangle$ así que el signo de $\langle c, -\overline{u} \rangle$ lo determina $\langle \overline{v} \times \overline{w}, \overline{u} \rangle$, pero $\langle \overline{v} \times \overline{w}, \overline{u} \rangle = \|\overline{v} \times \overline{w}\| \, \|\overline{u}\| \cos \alpha$ y el ángulo α formado por los vectores $\overline{v} \times \overline{w}$ y $\overline{u}$ es menor a 90^o entonces, el coseno de α es positivo por lo que $\langle \overline{v} \times \overline{w}, \overline{u} \rangle > 0$ lo cual implica que $\langle c, -\overline{u} \rangle < 0$.

A continuación explicamos por qué el ángulo α formado por los vectores $\overline{v} \times \overline{w}$ y $\overline{u}$ es menor a 90^o: los tres planos que coinciden en S son diferentes, así que considerando

[2]Esto es porque el resultado está direccionado en función del orden de los vectores y queremos la dirección hacia afuera de la región de soluciones factibles.

el ángulo θ formado por dos de los tres planos, éste se encuentra en $(0, \pi)$, pero nos interesa el ángulo entre un vector $\overline{u}$ que pertenece al Plano 1 y un vector ortogonal al Plano 2 ($\overline{v} \times \overline{w}$), denotado por α, entonces α siempre resulta en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. La Figura 7 ilustra una perspectiva de esta situación, considerando que observamos a la recta que resulta de la intersección de los Planos 1 y 2 como un punto.

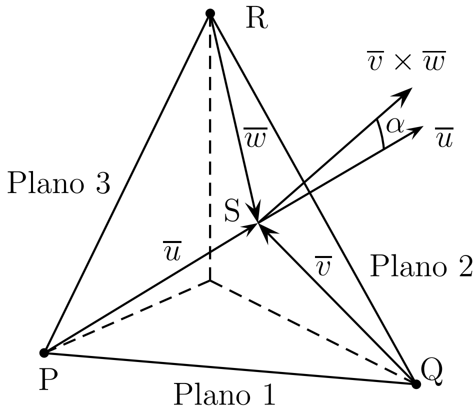


Figura 6

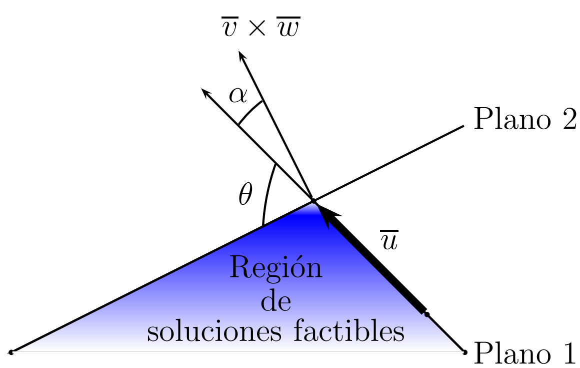


Figura 7. Una perspectiva de la Figura 6

Observando la Figura 7 verificamos que para cualquier valor de $\theta \in (0, \pi)$, el ángulo α que nos interesa es siempre menor a $\frac{\pi}{2}$.

Ejemplo 2. Solución factible óptima única en $\mathbb{R}^3$.

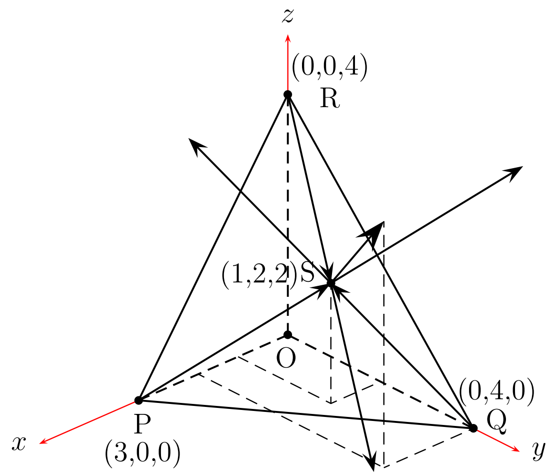


Figura 8

Región de soluciones factibles

Tomando como ejemplo a los puntos $O = (0,0,0)$, $P = (3,0,0)$, $Q = (0,4,0)$, $R = (0,0,4)$, $S = (1,2,2)$ para delimitar a la región de soluciones factibles, podemos verificar que dicha región tiene la propiedad de ser un poliedro convexo. La Figura 8 ilustra la ubicación de estos puntos en el espacio $\mathbb{R}^3$.

Restricciones

Las restricciones indispensables son las de no negatividad: $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$. Luego, la primera restricción se obtiene con la terna P, Q, S que define un plano. Fijamos el punto P para iniciar vectores que terminen en Q y S respectivamente y luego, calculamos su producto cruz:

$\overline{u} = Q - P$, $\overline{v} = S - P$,

$\overline{u} = (-3,4,0)$, $\overline{v} = (-2,2,2)$,

$\overline{u} \times \overline{v} = (8,6,2)$.

Para facilitar los cálculos podemos tomar el vector que resulta de multiplicar a $\overline{u} \times \overline{v}$ por $\frac{1}{2}$, es decir, $\overline{n}_1 = (4,3,1)$; evitar factores comunes en las componentes simplificará las operaciones entre ellas. Ahora falta encontrar d, de acuerdo a la indicación tenemos que $d = \langle \overline{n}_1, P \rangle$, $d = 12$, la ecuación del plano es $4x+3y+z = 12$. Si $\overline{x}_0 = (0,0,0)$ tenemos que $4(0)+3(0)+0 < 12$ y $\overline{x}_0$ es un punto de la región de soluciones factibles que no está en el plano, por lo que tenemos la primera restricción $\mathbf{4x + 3y + z \leq 12}$.

Para la siguiente terna Q, R, S procedemos de manera similar:

$\overline{u} = R - Q$, $\overline{v} = S - Q$,

$\overline{u} = (0,-4,4)$, $\overline{v} = (1,-2,2)$,

$\overline{u} \times \overline{v} = (0,4,4)$.

Así que, para simplificar podemos multiplicar a $\overline{u} \times \overline{v}$ por $\frac{1}{4}$, $\overline{n}_2 = (0,1,1)$; $d = \langle \overline{n}_2, Q \rangle$, $d = 4$ la ecuación del plano es $y + z = 4$. Si $\overline{x}_0 = (0,0,0)$ y sustituimos

$\overline{x}_0$ en la ecuación tenemos que $0+0 < 4$ entonces, el signo de la desigualdad es menor o igual, la segunda restricción es $\mathbf{y + z \leq 4}$.

Finalmente, para R, P, S:

$\overline{u} = P - R$, $\overline{v} = S - R$,

$\overline{u} = (3, 0, -4)$, $\overline{v} = (1, 2, -2)$,

$\overline{u} \times \overline{v} = (8, 2, 6)$.

Un múltiplo no cambia la ortogonalidad, por lo tanto tomaremos: $\frac{1}{2}(\overline{u} \times \overline{v})$, es decir, $\overline{n}_3 = (4, 1, 3)$; $d = \langle \overline{n}_3, P \rangle$, $d = 12$, la ecuación del plano es $4x + y + 3z = 12$. Si consideramos $\overline{x}_0 = (0, 0, 0)$ tenemos que $4(0) + 0 + 3(0) \ < \ 12$ entonces, la tercera restricción es $\mathbf{4x + y + 3z \leq 12}$.

Función objetivo

Si se desea que S sea el punto óptimo entonces construimos al vector gradiente de la función objetivo como se indicó: las tres aristas que coinciden en S son $\overline{u} = S - P$, $\overline{v} = S - Q$, $\overline{w} = S - R$; observamos que el extremo final de estos vectores es S. Además, viendo al punto S desde afuera del conjunto de soluciones factibles, el orden positivo de las aristas es justamente $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$. Tenemos que $\overline{u} = (-2, 2, 2)$, $\overline{v} = (1, -2, 2)$, $\overline{w} = (1, 2, -2)$, $\overline{u} \times \overline{v} = (8, 6, 2)$, $\overline{v} \times \overline{w} = (0, 4, 4)$, $\overline{w} \times \overline{u} = (8, 2, 6)$. Entonces, $c = (\overline{u} \times \overline{v}) + (\overline{v} \times \overline{w}) + (\overline{w} \times \overline{u}) = (16, 12, 12)$; la información importante de este vector es la dirección por lo que podemos multiplicarlo por $\frac{1}{4}$ y se simplifican sus componentes, así la función objetivo resulta $F = \mathbf{4x + 3y + 3z}$.

Por lo tanto, nuestro planteamiento final es el siguiente:

$$\mathbb{P}: \begin{array}{lr} Max & F = 4x + 3y + 3z \\ s.a. & 4x + 3y + z \leq 12 \\ & y + z \leq 4 \\ & 4x + y + 3z \leq 12 \\ & x \ , \ \ y, \ \ z \ \geq 0. \end{array}$$

Resolviendo el problema con el algoritmo simplex:

	x	y	z	h_1	h_2	h_3	
h_1	$\boxed{4}$	3	1	1	0	0	12
h_2	0	1	1	0	1	0	4
h_3	4	1	3	0	0	1	12
$-F$	$\boxed{4}$	3	3	0	0	0	0
x	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	3
h_2	0	1	1	0	1	0	4
h_3	0	-2	$\boxed{2}$	-1	0	1	0
$-F$	0	0	$\boxed{2}$	-1	0	0	-12
x	1	1	0	$\frac{3}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	3
h_2	0	$\boxed{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	4
z	0	-1	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
$-F$	0	$\boxed{2}$	0	0	0	-1	-12
x	1	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	1
y	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	2
z	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	2
$-F$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	-16

Ciertamente hay óptimo único, ya que los coeficientes de costo reducido de las variables no básicas son negativos; $x^* = (1, 2, 2, 0, 0)^T$ y $F_{\text{Máx}} = 16$.

1.4. Solución factible óptima alternativa en $\mathbb{R}^2$

Otra situación que se presenta en los problemas de programación lineal es que la solución factible óptima no es única, es decir, hay solución factible óptima alternativa. Para construir la región de soluciones factibles y las restricciones en problemas de este tipo, aplicamos el mismo procedimiento utilizado en el caso de la solución factible óptima única en $\mathbb{R}^2$.

1.4.1. Función objetivo

La diferencia entre la construcción de un problema con solución factible óptima única y otro con solución factible óptima alternativa está en la construcción de la función objetivo. Para un problema con solución óptima alternativa la función se construye a partir de los puntos extremos que serán óptimos alternativos. Primero se eligen dos puntos extremos adyacentes, por ejemplo: los puntos R y S, con estos puntos definimos un vector $\overline{u} = (u_1, u_2) = R - S$ y calculamos su vector ortogonal $(-u_2, u_1)$; $c = (c_1, c_2)$ se define como el vector ortogonal de $\overline{u}$ que apunta hacia afuera de la región de soluciones factibles. Entonces la función objetivo es $z = c_1x + c_2y$. En la Figura 9 podemos observar una gráfica que muestra esta situación.

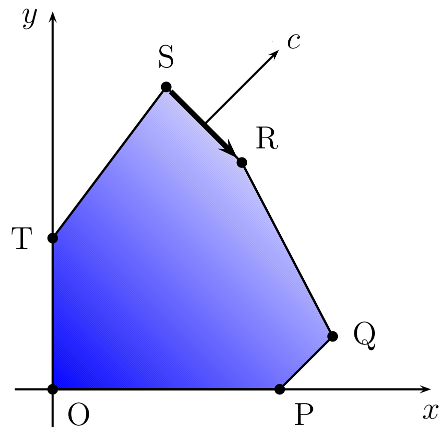


Figura 9

Ejemplo 3. Solucion óptima alternativa en $\mathbb{R}^2$.

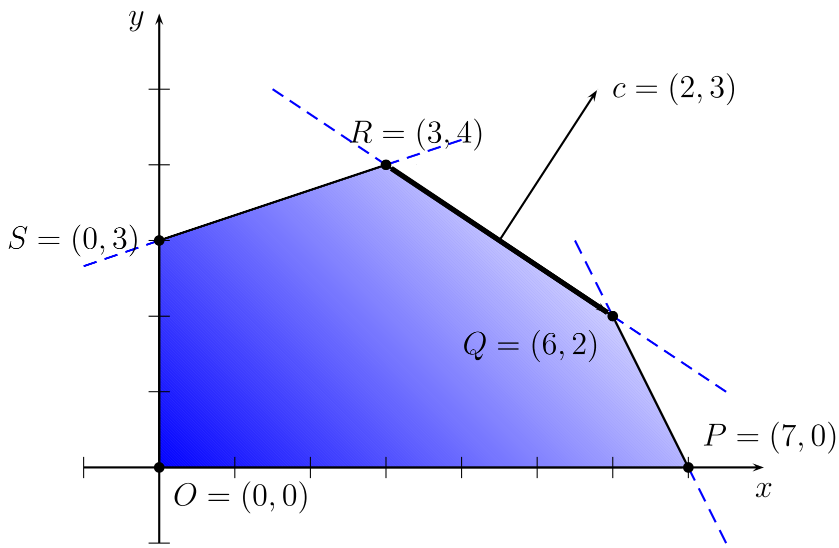


Figura 10

Región de soluciones factibles

Se toma como ejemplo a los puntos $O = (0,0)$, $P = (7,0)$, $Q = (6,2)$, $R = (3,4)$ y $S = (0,3)$ para delimitar la región de soluciones factibles, dicha región tiene la propiedad de ser un conjunto convexo. Estos puntos y la región que delimitan se ilustran en la Figura 10.

Restricciones

Las primeras restricciones a considerar son las de no negatividad: $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$; luego, para el segmento $\overline{PQ}$ tenemos la recta $2x + y = 14$; $\overline{x}_0 = (0,0)$ es un punto factible que no está en la recta y se tiene que $2(0) + 0 < 14$ entonces, la restricción correspondiente es: $\mathbf{2x + y \leq 14}$; para $\overline{QR}$ la ecuación de la recta es $2x + 3y = 18$ y aplicando el procedimiento anterior, se obtiene la restricción $\mathbf{2x + 3y \leq 18}$. Por último, para $\overline{RS}$ la ecuación de la recta es $x - 3y = -9$. Para tener una tabla inicial asociada a una solución básica factible buscamos que el lado derecho de la ecuación sea positivo, por lo que escribimos la ecuación anterior en la forma $-x+3y=9$. Si $\overline{x}_0=(0,0)$ tenemos que $-(0)+3(0) \ < \ 9$ entonces, la restricción correspondiente es $\mathbf{-x+3y\leq 9}$.

Función objetivo

Elegimos Q y R como los óptimos alternativos, entonces definimos el vector $\overline{u}$ como $\overline{u}=Q-R=(3,-2)$; luego, calculamos un vector ortogonal a este y obtenemos $c=(2,3)$; observamos que efectivamente apunta hacia afuera de la región de soluciones factibles; así, la función objetivo es $\mathbf{z=2x+3y}$. En la Figura 10 podemos observar el gradiente de la función y los puntos que son óptimos.

Finalmente, el planteamiento queda:

$$\mathbb{P}: \quad \begin{array}{lrl} Max & z=2x+3y & \\ s.a. & 2x+\ \ y & \leq 14 \\ & 2x+3y & \leq 18 \\ & -x+\ 3y & \leq 9 \\ & x\ ,\ \ y & \geq 0. \end{array}$$

Por construcción, la solución geométrica del problema tiene óptimos alternativos; si aplicamos el algoritmo simplex confirmaremos que las soluciones óptimas son como se planeó.

iteración		x	y	h_1	h_2	h_3	
	h_1	2	1	1	0	0	14
	h_2	2	3	0	1	0	18
	h_3	-1	$\boxed{3}$	0	0	1	9
$\boxed{0}$	-z	2	$\boxed{3}$	0	0	0	0
	h_1	$\frac{7}{3}$	0	1	0	-$\frac{1}{3}$	11
	h_2	$\boxed{3}$	0	0	1	-1	9
	y	-$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	3
$\boxed{1}$	-z	$\boxed{3}$	0	0	0	-1	-9
	h_1	0	0	1	-$\frac{7}{9}$	$\boxed{\frac{4}{9}}$	$\boxed{4}$
	x	1	0	0	$\frac{1}{3}$	-$\frac{1}{3}$	3
	y	0	1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	4
$\boxed{2}$	-z	0	0	0	-1	$\boxed{0}$	-18
	h_3	0	0	$\frac{9}{4}$	-$\frac{7}{4}$	1	9
	x	1	0	$\frac{3}{4}$	-$\frac{1}{4}$	0	6
	y	0	1	-$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	2
$\boxed{3}$	-z	0	0	0	-1	0	-18

Considerando los elementos señalados por rectángulos en la segunda iteración de la tabla, podemos identificar que hay óptimos alternativos. Porque el coeficiente de costo reducido de la variable no básica h_3 es cero y en su columna correspondiente hay un *pivote* positivo, además, es positivo el elemento que está a la derecha del renglón al que pertenece el pivote.

Una solución óptima es ${x_1}^* = (3, 4, 4, 0, 0)^T$, otra solución factible óptima alternativa es ${x_2}^* = (6, 2, 0, 0, 9)^T$ y todas las soluciones factibles óptimas son de la forma:

$$\lambda(3, 4, 4, 0, 0)^T + (1 - \lambda)(6, 2, 0, 0, 9)^T,\ \lambda \in [0, 1] \text{ con } z_{\text{Máx}} = 18.$$

1.5. Solución factible óptima alternativa en $\mathbb{R}^3$

Las soluciones factibles óptimas alternativas pueden ser: un segmento de recta, como en $\mathbb{R}^2$, o una *cara del poliedro* que define la región de soluciones factibles.

Para construir la región de soluciones factibles y las restricciones, procederemos de manera análoga al caso de solución factible óptima única en $\mathbb{R}^3$.

1.5.1. Función objetivo

Elegimos el número de puntos extremos que serán óptimos, dos o tres. Si son tres puntos, el gradiente de la función objetivo será el vector normal al plano que definen estos puntos, apuntando hacia afuera de la región de soluciones factibles.

En otro caso, si el número de puntos extremos óptimos será dos, tenemos que dichos puntos definen un segmento de recta contenido en la intersección de dos de los planos que delimitan la región de soluciones factibles. El vector gradiente será algún múltiplo positivo de la combinación lineal convexa estricta de los vectores normales a dichos planos, apuntando hacia afuera de la región de soluciones factibles.

A continuación, construimos un ejemplo con valores específicos.

Ejemplo 4. Solución factible óptima alternativa en $\mathbb{R}^3$.

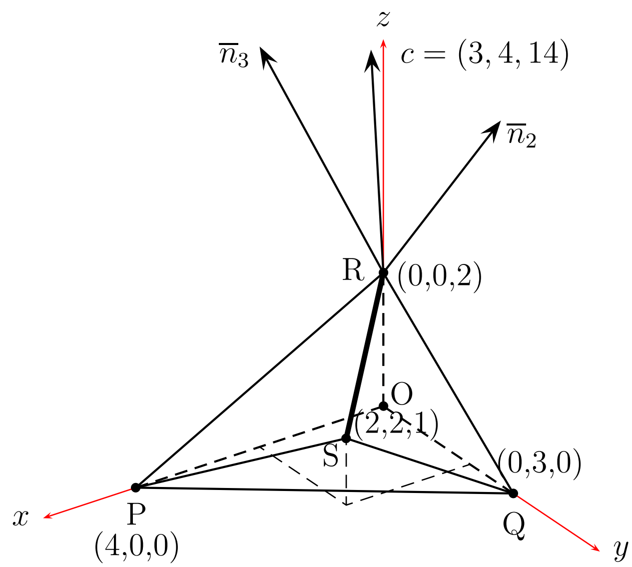


Figura 11

Región de soluciones factibles

Se toma como ejemplo a los puntos $O = (0, 0, 0)$, $P = (4, 0, 0)$, $Q = (0, 3, 0)$, $R = (0, 0, 2)$, $S = (2, 2, 1)$ para delimitar la región de soluciones factibles, dicha región tiene la propiedad de ser un poliedro convexo. La Figura 11 ilustra esta situación.

Restricciones

Iniciamos con las restricciones de no negatividad: $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$. Luego, la primera restricción la vamos a obtener con la terna P, Q, S que define un plano. Fijamos el punto P para iniciar vectores que terminen en Q y S respectivamente y luego calculamos su producto cruz:

$\overline{u} = Q - P$, $\overline{v} = S - P$,
$\overline{u} = (-4, 3, 0)$, $\overline{v} = (-2, 2, 1)$,
$\overline{u} \times \overline{v} = (3, 4, -2)$, $\overline{n}_1 = (3, 4, -2)$.

Para encontrar d, $d = \langle \overline{n}_1, P \rangle$, $d = 12$, la ecuación del plano es $3x + 4y - 2z = 12$, así que sólo falta ver el signo de la desigualdad, pero notamos que $\overline{x}_0 = (0, 0, 0)$ es un punto factible y no está en el plano además, $3(0) + 4(0) - 2(0) < 12$ por lo que la primera restricción es: $\mathbf{3x + 4y - 2z \leq 12}$.

Para la siguiente terna Q, R, S procedemos de manera similar:

$\overline{u} = R - Q$, $\overline{v} = S - Q$,
$\overline{u} = (0, -3, 2)$, $\overline{v} = (2, -1, 1)$,
$\overline{u} \times \overline{v} = (-1, 4, 6)$, $\overline{n}_2 = (-1, 4, 6)$.

Para encontrar d, $d = \langle \overline{n}_2, Q\rangle$, $d = 12$; la ecuación del plano es $-x+4y+6z = 12$; el punto $(0,0,0)$ no está en el plano, es factible y se cumple que:
$-(0)+4(0)+6(0) \ < \ 12$, por ello, la segunda restricción es $\mathbf{-x+4y+6z \leq 12}$.

Finalmente, para P, S, R se tiene que:

$\overline{u} = S - P$, $\overline{v} = R - P$,

$\overline{u} = (-2,2,1)$, $\overline{v} = (-4,0,2)$,

$\overline{u} \times \overline{v} = (4,0,8)$.

En vez de tomar $\overline{u} \times \overline{v}$ consideramos $\overline{n}_3 = \frac{1}{4}(\overline{u} \times \overline{v})$, $\overline{n}_3 = (1,0,2)$; $d = \langle \overline{n}_3, \ P\rangle$, $d = 4$, la ecuación del plano es $x + 2z = 4$. El punto $(0,0,0)$ está en la región de soluciones factibles y no está en el plano además, $0+2(0) \ < \ 4$ entonces, la restricción correspondiente es $\mathbf{x+2z \leq 4}$.

Función objetivo

Para construir la función objetivo consideramos a los puntos extremos que serán óptimos, los cuales podemos elegir que sean, por ejemplo, R y S. El segmento que une estos puntos satisface la segunda y la tercera restricción, sus vectores normales apuntando hacia afuera de la región son (-1,4,6) y (1,0,2), respectivamente. Entonces, un vector gradiente es:
$c = 5(\frac{1}{5}(-1,4,6) + \frac{4}{5}(1,0,2)) = (3,4,14)$. Así, la función objetivo es:
$\mathcal{F} = \mathbf{3x+4y+14z}$.

Por lo tanto, nuestro planteamiento final es:

$$\begin{array}{lrl} & Max & \mathcal{F} = 3x+4y+14z \\ & s.a. & 3x+4y-2z \leq 12 \\ \mathbb{P}: & & -x+4y+6z \leq 12 \\ & & x + \qquad 2z \leq 4 \\ & & x, \quad y, \quad z \geq 0. \end{array}$$

Resolviendo el problema con el algoritmo simplex confirmamos lo propuesto.

$\boxed{\text{iteración}}$		x	y	z	h_1	h_2	h_3	
	h_1	3	4	-2	1	0	0	12
	h_2	-1	4	$\boxed{6}$	0	1	0	12
	h_3	1	0	2	0	0	1	4
$\boxed{0}$	-F	3	4	$\boxed{14}$	0	0	0	0
	h_1	$\frac{8}{3}$	$\frac{16}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	16
	z	-$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{6}$	0	2
	h_3	$\boxed{\frac{4}{3}}$	-$\frac{4}{3}$	0	0	-$\frac{1}{3}$	1	0
$\boxed{1}$	-F	$\boxed{\frac{16}{3}}$	-$\frac{16}{3}$	0	0	-$\frac{7}{3}$	0	-8
	h_1	0	$\boxed{8}$	0	1	1	-2	$\boxed{16}$
	z	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	2
	x	1	-1	0	0	-$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
$\boxed{2}$	-F	0	$\boxed{0}$	0	0	-1	-4	-8
	y	0	1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	-$\frac{1}{4}$	2
	z	0	0	1	-$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1
	x	1	0	0	$\frac{1}{8}$	-$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	2
$\boxed{3}$	-F	0	0	0	0	-1	-4	-8

Considerando los elementos señalados por rectángulos en la tabla de la segunda iteración, identificamos que hay óptimos alternativos. El coeficiente de costo reducido de la variable no básica y es cero y, en la columna correspondiente a esta variable hay un pivote positivo, además, es positivo el elemento que está a la derecha del renglón al que pertenece el pivote.

Una solución factible óptima es ${x_1}^* = (0, 0, 2, 16, 0, 0)^T$, otra es ${x_2}^* = (2, 2, 1, 0, 0, 0)^T$ con $F_{\text{Máx}} = 8$, todas las soluciones factibles óptimas alternativas son $\lambda {x_1}^* + (1 - \lambda){x_2}^*$, $\lambda \in [0, 1]$.

El ejemplo de óptimos en al menos tres puntos extremos es más sencillo: c debe ser múltiplo del vector normal del plano definido por los tres puntos extremos elegidos como óptimos.

1.6. Solución no acotada

Otra posibilidad que se puede presentar en un problema de programación lineal es que el óptimo esté no acotado, es decir, que la función objetivo siempre se puede mejorar. En esta sección se construirá un ejemplo con esta característica.

La construcción de la región factible y las restricciones para un problema de este tipo es similar a la descrita en los casos anteriores, pero la región factible debe ser un poliedro convexo no acotado. La Figura 12 ilustra esta situación.

1.6.1. Función objetivo

Para construir la función objetivo, vamos a considerar las *direcciones extremas* del conjunto de soluciones factibles. El gradiente de la función objetivo debe ser algún múltiplo positivo de una combinación lineal convexa estricta de las direcciones extremas de la región factible. De esta forma, la función no tendrá óptimo.

Ejemplo 5. Solución no acotada.

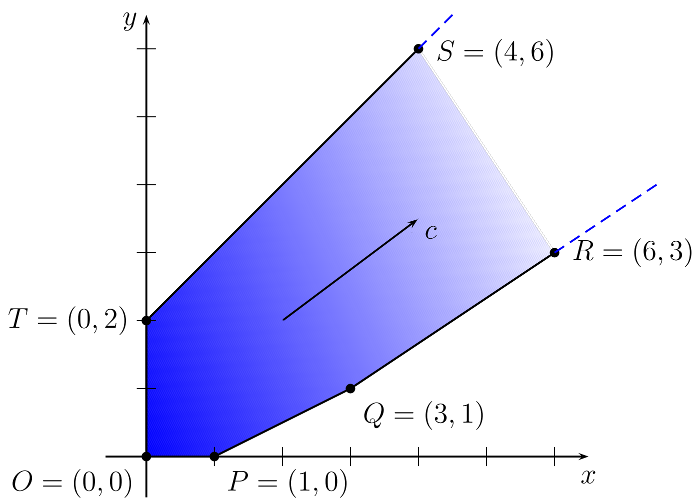


Figura 12

Región de soluciones factibles

Se toma como ejemplo a los puntos $O = (0, 0)$, $P = (1, 0)$, $Q = (3, 1)$, $R = (6, 3)$, $S = (4, 6)$, $T = (0, 2)$ para construir la región de soluciones factibles, los segmentos $\overline{QR}$ y $\overline{TS}$ se extienden indefinidamente para que la región sea no acotada, dicha región tiene la propiedad de ser un conjunto convexo no acotado. Esto se ilustra en la Figura 12.

Restricciones

En primer lugar consideramos las restricciones de no negatividad $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$; estas corresponden a los segmentos $\overline{OT}$ y $\overline{OP}$. Para el segmento $\overline{PQ}$ tenemos la recta $x - 2y = 1$. Si $\overline{x}_0 = (0, 0)$ tenemos que $0 - 2(0) < 1$ y este punto pertenece a la región de soluciones factibles además, $\overline{x}_0$ no está en la recta. Con lo anterior la restricción resulta $\mathbf{x} - \mathbf{2y} \leq \mathbf{1}$. Para $\overline{QR}$ la ecuación de la recta es $2x - 3y = 3$, con el procedimiento anterior obtenemos la restricción $\mathbf{2x} - \mathbf{3y} \leq \mathbf{3}$, por último, para $\overline{TS}$ la ecuación de la recta es $-x + y = 2$ y la restricción resultante es $-\mathbf{x} + \mathbf{y} \leq \mathbf{2}$.

Función objetivo

Las direcciones extremas del conjunto de soluciones factibles son
$d_1 = (1, 1)$ y $d_2 = (3, 2)$, así que c puede ser igual a $2(\frac{1}{2}d_1 + \frac{1}{2}d_2) = d_1 + d_2$, es decir, $c = (4, 3)$. Entonces, la función objetivo es $\mathbf{z} = \mathbf{4x} + \mathbf{3y}$.

Finalmente, el planteamiento queda:

$$\mathbb{P}: \quad \begin{array}{rr} Max & z = 4x + 3y \\ s.a. & x - 2y \leq 1 \\ & 2x - 3y \leq 3 \\ & -x + \quad y \leq 2 \\ & x \ , \quad y \ \geq 0. \end{array}$$

Aplicando el algoritmo simplex confirmamos lo propuesto:

	x	y	h_1	h_2	h_3	
h_1	$\boxed{1}$	-2	1	0	0	1
h_2	2	-3	0	1	0	3
h_3	-1	1	0	0	1	2
-z	$\boxed{4}$	3	0	0	0	0
x	1	-2	1	0	0	1
h_2	0	$\boxed{1}$	-2	1	0	1
h_3	0	-1	1	0	1	3
-z	0	$\boxed{11}$	-4	0	0	-4
x	1	0	$\boxed{-3}$	2	0	3
y	0	1	$\boxed{-2}$	1	0	1
h_3	0	0	$\boxed{-1}$	1	1	4
-z	0	0	$\boxed{18}$	-11	0	-15

En la tabla final observamos que puede ingresar h_1 a la base, pero no hay un límite para el valor que puede tomar esta variable, puesto que la columna asociada a esta variable es menor o igual que cero. Entonces, tenemos un conjunto de soluciones factibles de la forma: $x^* = (3 + 3\lambda, 1 + 2\lambda, \lambda, 0, 4 + \lambda)^T$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ arbitrariamente grande y $z = 15 + 18\lambda$, así que $z \underset{\lambda \to \infty}{\to} \infty$. Por tanto, no hay óptimo finito.

1.7. Rayo óptimo

En esta sección vamos a construir problemas cuyas soluciones óptimas conforman un *rayo* y además, el valor óptimo es finito.

1.7.1. Región de soluciones factibles y restricciones

La construcción de la región factible y las restricciones para este tipo de problemas es similar a la descrita en los casos anteriores, añadiendo que la región factible sea no acotada. Entonces la región factible debe ser un poliedro convexo no acotado. Las gráficas de la Figura 13 muestran ejemplos de regiones factibles de este tipo.

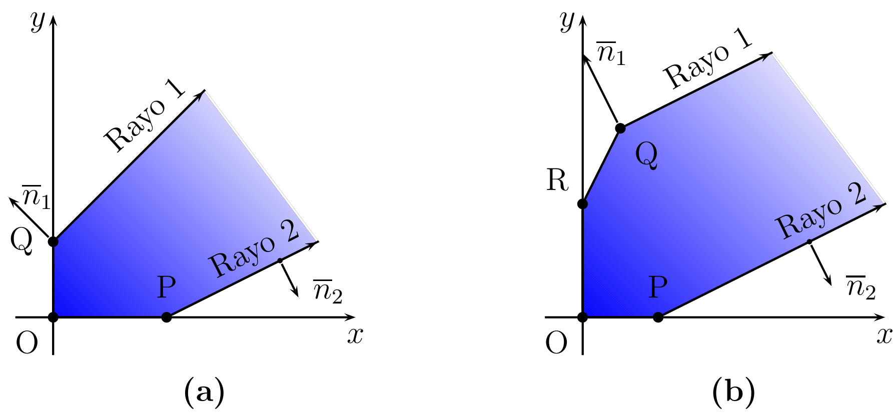


Figura 13

1.7.2. Función objetivo

Elegimos un rayo dentro del conjunto de soluciones factibles que sea un *rayo extremo*. Cada punto de este rayo extremo será una solución óptima. Un rayo como el que buscamos es una semi recta cuyo vértice es un punto extremo y hace activa[3] una de las restricciones que definen la región factible. La Figura 13 muestra dos ejemplos de regiones factibles donde se ilustran los rayos para cada una de ellas. El gradiente de la función objetivo será un vector ortogonal a la dirección que define al rayo extremo, apuntando hacia afuera de la región de soluciones factibles.

Ejemplo 6. Rayo óptimo.

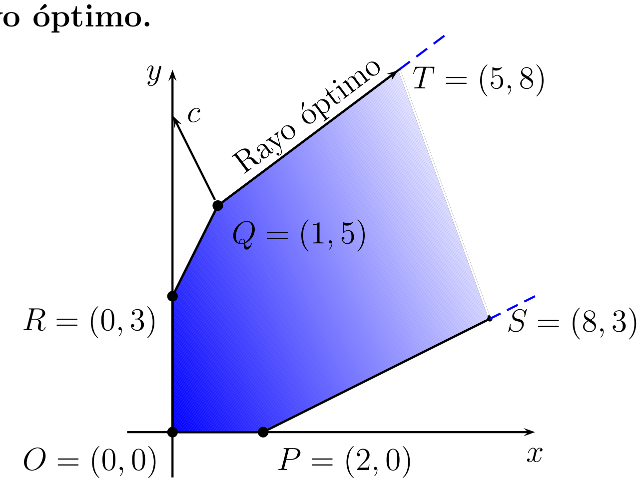


Figura 14

[3]Una restricción del tipo $ax+by \leq d$ se hace activa en los puntos para los cuales se da la igualdad estricta, es decir, $ax + by = d$.

Región de soluciones factibles

Como ejemplo vamos a tomar los puntos:
$O = (0,0)$, $P = (2,0)$, $Q = (1,5)$, $R = (0,3)$, $S = (8,3)$ y $T = (5,8)$ para definir la región de soluciones factibles; los segmentos que unen P con S y Q con T se extienden indefinidamente para hacer la región no acotada. La Figura 14 ilustra esto.

Restricciones

Las restricciones indispensables son las restricciones de no negatividad $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$. Para el segmento $\overline{PS}$ tenemos la recta $3x - 6y = 6$ y como $3(0) - 6(0) < 6$ se cumple para $(0,0)$ el cual es un punto factible que no está en la recta, la restricción resulta $\mathbf{3x - 6y \leq 6}$. Para $\overline{QT}$ la ecuación de la recta es $3x - 4y = -17$, pero buscamos que el lado derecho de la ecuación sea positivo entonces, consideramos $-3x + 4y = 17$ y aplicando el procedimiento anterior la restricción resultante es $\mathbf{-3x + 4y \leq 17}$ y por último, para $\overline{RQ}$ la ecuación de la recta es $2x - y = -3$, con el procedimiento anterior obtenemos la restricción $\mathbf{-2x + y \leq 3}$.

Función objetivo

Elegimos el rayo que inicia en Q y hace activa la segunda restricción ($-3x + 4y \leq 17$). Para que éste sea el rayo óptimo, consideramos el vector ortogonal de la restricción: (-3,4); observemos que apunta hacia afuera de la región de soluciones factibles, así que $c = (-3, 4)$ y entonces la función objetivo es $\mathbf{z = -3x + 4y}$.

Nuestro planteamiento es el siguiente:

$$\mathbb{P}: \quad \begin{array}{lrl} Max & z = -3x + 4y & \\ s.a. & 3x - 6y & \leq 6 \\ & -3x + 4y & \leq 17 \\ & -2x + y & \leq 3 \\ & x \,,\ \ y & \geq 0. \end{array}$$

Aplicando el algoritmo simplex confirmamos lo propuesto:

iteración		x	y	h_1	h_2	h_3	
	h_1	3	-6	1	0	0	6
	h_2	-3	4	0	1	0	17
	h_3	-2	$\boxed{1}$	0	0	1	3
$\boxed{0}$	-z	-3	$\boxed{4}$	0	0	0	0
	h_1	-9	0	1	0	6	24
	h_2	$\boxed{5}$	0	0	1	-4	5
	y	-2	1	0	0	1	3
$\boxed{1}$	-z	$\boxed{5}$	0	0	0	-4	-12
	h_1	0	0	1	$\frac{9}{5}$	$\boxed{-\frac{6}{5}}$	33
	x	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\boxed{-\frac{4}{5}}$	1
	y	0	1	0	$\frac{2}{5}$	$\boxed{-\frac{3}{5}}$	5
$\boxed{2}$	-z	0	0	0	-1	$\boxed{0}$	-17

Observamos en la tabla que en la segunda iteración hay una variable no básica cuyo coeficiente de costo reducido es igual a 0 además, su columna asociada es menor o igual que $\overline{0}$ entonces, se tiene un rayo óptimo:
$x^* = (1, 5, 33, 0, 0)^T + \lambda(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0, 1)^T$, $\lambda \geq 0$ con $z_{\text{Máx}} = 17$.

1.8. Solución factible óptima degenerada

Otro caso que se puede presentar en la solución de problemas es que, una variable básica tenga valor cero en la tabla final del algoritmo simplex. En esta sección construimos un caso de este tipo. Una solución básica es degenerada si alguna variable básica es cero.

1.8.1. Región de soluciones factibles y restricciones

La construcción de la región factible y restricciones para este tipo de problemas es como en los casos anteriores, pero en el punto que será óptimo vamos a incluir una condición adicional, una restricción redundante que provocará la degeneración. La Figura 15 ilustra geométricamente este caso.

1.8.2. Función objetivo

Para este caso, no hay cambio en la función objetivo. El gradiente de la función objetivo sigue siendo algún múltiplo positivo de una combinación lineal convexa estricta de dos vectores ortogonales a las rectas que pasan por el punto óptimo y que apuntan al exterior de la región de soluciones factibles.

Ejemplo 7. Solución factible óptima degenerada.

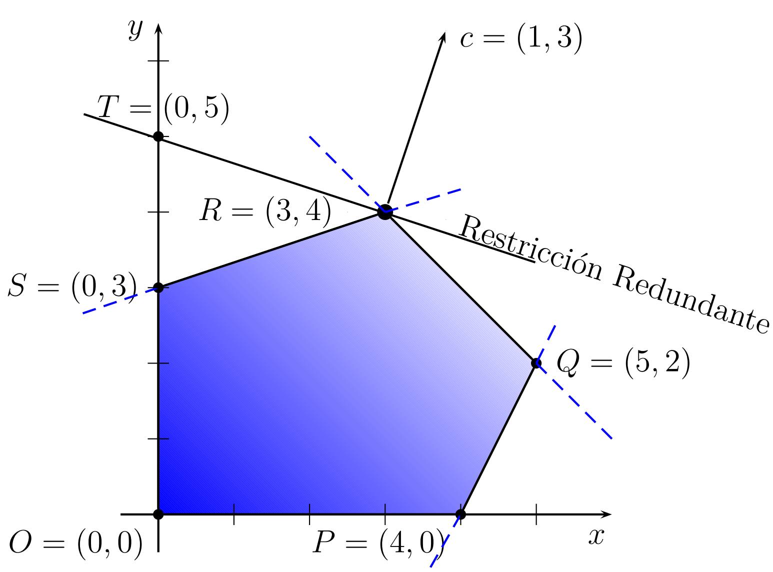


Figura 15

Región de soluciones factibles

Como ejemplo vamos a considerar los puntos $O = (0,0)$, $P = (4,0)$, $Q = (5,2)$, $R = (3,4)$, $S = (0,3)$ para delimitar la región de soluciones factibles, esta región tiene la propiedad de ser un conjunto convexo; agregamos el punto $T = (0,5)$ para construir la restricción redundante. Esto se ilustra en la Figura 15.

Restricciones

Las restricciones indispensables son las de no negatividad: $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$; para el segmento $\overline{PQ}$ tenemos la recta $2x - y = 8$, pero ocurre que $2(0) - 0 < 8$ y el punto $(0,0)$ pertenece a la región de soluciones factibles y no está en la recta entonces, la restricción resultante es $\mathbf{2x - y \leq 8}$; para $\overline{QR}$ la ecuación de la recta es $x + y = 7$, con el procedimiento anterior obtenemos la restricción $\mathbf{x + y \leq 7}$. Para $\overline{RS}$ tenemos la restricción $\mathbf{-x + 3y \leq 9}$, por último para la restricción redundante que extiende al segmento $\overline{TR}$ la ecuación de la recta es $x+3y = 15$; así, la restricción es $\mathbf{x + 3y \leq 15}$.

Función objetivo

Habiendo seleccionado a R como el punto que será el óptimo, procedemos a construir la función objetivo correspondiente. Los vectores ortogonales de la segunda y la tercera restricción (con la dirección adecuada) son $\overline{n}_2 = (1,1)$ y $\overline{n}_3 = (-1,3)$, $c = 2(\frac{3}{4}\overline{n}_2 + \frac{1}{4}\overline{n}_3)$, es decir, $c = (1,3)$, así que, la función objetivo es: $\mathbf{z = x + 3y}$.

Nuestro planteamiento final es:

$$\mathbb{P}: \quad \begin{array}{rrl} Max & z = x + 3y & \\ s.a. & 2x - y & \leq 8 \\ & x + y & \leq 7 \\ & -x + 3y & \leq 9 \\ & x + 3y & \leq 15 \\ & x \ , \ \ y & \geq 0. \end{array}$$

Aplicando el algoritmo simplex:

$\boxed{\text{iteración}}$		x	y	h_1	h_2	h_3	h_4	
	h_1	2	-1	1	0	0	0	8
	h_2	1	1	0	1	0	0	7
	h_3	-1	$\boxed{3}$	0	0	1	0	9
	h_4	1	3	0	0	0	1	15
$\boxed{0}$	-z	1	$\boxed{3}$	0	0	0	0	0
	h_1	$\frac{5}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	11
	h_2	$\frac{4}{3}$	0	0	1	-$\frac{1}{3}$	0	4
	y	-$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	3
	h_4	$\boxed{2}$	0	0	0	-1	1	6
$\boxed{1}$	-z	$\boxed{2}$	0	0	0	-1	0	-9
	h_1	0	0	1	0	$\frac{7}{6}$	-$\frac{5}{6}$	6
	h_2	0	0	0	1	$\boxed{\frac{1}{3}}$	-$\frac{2}{3}$	$\boxed{0}$
	y	0	1	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	4
	x	1	0	0	0	-$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
$\boxed{2}$	-z	0	0	0	0	$\boxed{0}$	-1	-15
	h_1	0	0	1	-$\frac{7}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6
	h_3	0	0	0	3	1	-2	0
	y	0	1	0	-$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	4
	x	1	0	0	$\frac{3}{2}$	0	-$\frac{1}{2}$	3
$\boxed{3}$	-z	0	0	0	0	0	-1	-15

Observamos en la segunda iteración de la tabla que hay una variable básica con valor cero, por lo que la solución correspondiente es degenerada, es decir, es posible asociar dos bases al mismo punto extremo. En este caso, las bases asociadas a las soluciones 2 y 3 de la tabla corresponden al mismo punto extremo. La solución factible óptima es: $x^* = (3,4,6,0,0,0)^T$ con $z_{\text{Máx}} = 15$.

Capítulo 2

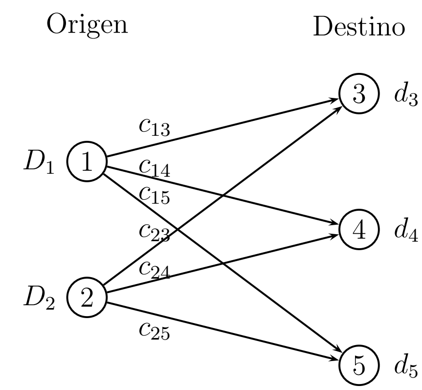
Transporte, Asignación y otros problemas

2.1. El Problema de Transporte

El problema de transporte se presenta rutinariamente en problemas de distribución de productos entre varios orígenes (fábricas) y diferentes destinos (almacenes). Generalmente, se tienen m lugares de origen, cada uno tiene cierta disponibilidad de productos y se tienen n destinos con su correspondiente demanda. En la *red* asociada al problema de transporte, cada arco que une el origen i con el destino j, (i, j), tiene un costo asociado c_{ij} por cada unidad de producto enviada. El problema es determinar las cantidades de producto a transportar entre los orígenes y los destinos satisfaciendo la demanda y minimizando el costo total de transporte.

Las características de la red, $G = (N, A)$, asociada al problema son las siguientes: (1) es una red dirigida con costos c_{ij} asociados a cada arco (i, j) en A; (2) el conjunto N está particionado en dos subconjuntos N_1 y N_2, de cardinal posiblemente distinto; (3) para cada arco (i, j) en A, $i \in N_1$ y $j \in N_2$; (4) cada nodo de N_1 tiene asociado un número $D(i)$, $D(i) > 0$, el cual indica disponibilidad de productos; (5) cada nodo de N_2 tiene asociado un número $d(i)$, $d(i) > 0$, el cual indica demanda de productos. Cada origen y destino está representado por un nodo de la red, el arco que une dos nodos representa un camino entre el origen y destino correspondientes.

Para plantear el modelo lineal consideramos una red de este tipo, en la cual $|N_1| = 2$, $|N_2| = 3$.



$D_i. - Disponibilidad \qquad d_j. - demanda$

Se define x_{ij} como la cantidad de productos a enviar del origen i al destino j, $i = 1, 2$; $j = 3, 4, 5$.

El problema de programación lineal asociado es:

$$
\mathbb{P}: \quad
\begin{array}{llllllll}
\text{Min} & z = c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14} + c_{15}x_{15} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{25}x_{25} & & & & & & \\
\text{s.a.} & x_{13}+ & x_{14}+ & x_{15} & & & & \leq D_1 \\
 & & & & x_{23}+ & x_{24}+ & x_{25} & \leq D_2 \\
 & x_{13} & & + & x_{23} & & & \geq d_3 \\
 & & x_{14} & & + & x_{24} & & \geq d_4 \\
 & & & x_{15} & & + & x_{25} & \geq d_5 \\
 & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2; \ j = 3, 4, 5. & & & & & &
\end{array}
$$

Se dice que un problema es balanceado cuando el total de la demanda es igual al total de la disponibilidad. Si el problema no está balanceado, para balancearlo en el caso que la oferta excede la demanda se inventa un destino ficticio, con costos cero y cuya demanda sea el excedente existente. Podemos suponer que cualquier problema de transporte está balanceado, sea $d = \sum_{i=1}^{m} D_i = \sum_{j=m+1}^{m+n} d_j$, donde $m = |N_1|$ y $n = |N_2|$.

El problema de transporte tiene, al menos, la solución factible dada por x_{ij}, con $x_{ij} = \frac{D_i d_j}{d}$; $i = 1, ..., m$, $j = m+1, ..., m+n$. La región de soluciones factibles es acotada, pues $x_{ij} \leq \text{mín}\{D_i, d_j\}$, así que el conjunto de soluciones factibles es: no vacío, cerrado y acotado además, la función objetivo es continua, entonces el problema tiene solución factible óptima. Se analizarán dos casos que se pueden presentar: la solución factible óptima es única o hay solución factible óptima alternativa.

2.1.1. Solución factible óptima única y óptima alternativa

Para construir ejemplos con solución factible óptima alternativa o solución factible óptima única, vamos a usar la red que modela el problema de transporte y la relación que tiene la solución factible óptima con los elementos de la red.

La construcción de un problema de transporte consiste en asignar valores específicos a los datos del problema; a continuación se propone una forma de hacer esto de modo que la solución factible óptima sea como se busca.

Empezamos por definir la cantidad de nodos que forman la red asociada al problema, orígenes y destinos, el arco entre cada origen y destino pertenece a los arcos de la red; luego, se determina un *árbol* en esta red, los arcos que forman el árbol determinarán el patrón de embarque óptimo. Se hace una asignación de números enteros positivos en los nodos origen, a partir de estos valores definimos un *flujo* en los arcos del árbol de modo que: la suma de los valores que tiene el flujo en los arcos que salen de cada origen, coincida con la disponibilidad de dicho origen. También se asigna a cada arco del árbol un número que representa el costo de transporte unitario; el flujo y el costo asociado al arco, en la red se denota como una pareja (f, c), f indica el flujo y c el costo. Para que el árbol determinado corresponda al patrón de embarque óptimo, la asignación de costos en los arcos que no forman parte del árbol se hace como se explica en seguida:

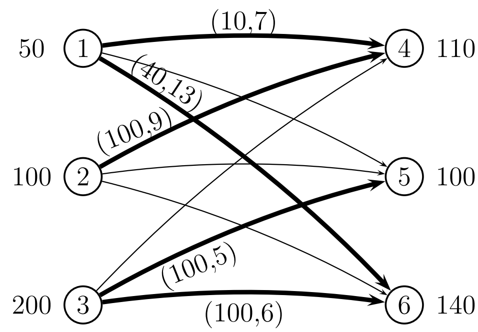
Se agrega un nuevo arco (i, j) al árbol; al agregar este arco se tiene una gráfica con exactamente un ciclo; el costo que se asocie al arco (i, j) debe cumplir ciertas características.

Considerando que el ciclo es único, también es única la cantidad que se obtiene de sumar y restar los costos asociados a los arcos del ciclo; esta cantidad se obtiene sumando los costos de los arcos del ciclo recorridos en sentido origen-destino y restando los costos de los arcos recorridos en sentido destino-origen. A esta cantidad la denotamos con CA_{ij}. El número asociado al arco (i, j) debe ser tal que $CA_{ij} > 0$ para que el árbol determinado corresponda a la solución factible óptima.

La solución factible óptima es única si a todos los arcos de la red que no están en el árbol se les asocian costos tales que $CA_{ij} > 0$. Si deseamos que el problema tenga solución óptima alternativa, entonces algún CA_{ij} debe ser cero.

Ejemplo 8. Solución factible óptima única y óptima alternativa.

A continuación, construimos un problema de transporte con tres orígenes y tres destinos. En la siguiente red se ilustran: las cantidades de productos asociados a los nodos que representan los orígenes, el árbol que determinará el patrón de embarque óptimo, el flujo a través de los arcos del árbol, los costos asociados a los arcos del árbol, así como la demanda de los nodos que representan los destinos.



Ahora, procedemos a determinar los costos que se asocian al resto de los arcos: para el arco $(1,5)$ se debe cumplir que $CA_{15} = c_{15} - 5 + 6 - 13 \ > \ 0$, es decir, $c_{15} \ > \ 12$. Si $c_{15} = 13$, entonces se tiene que $CA_{15} = 1 \ > \ 0$. Repitiendo el procedimiento anterior en el resto de los arcos tenemos:

$CA_{25} = c_{25} - 5 + 6 - 13 + 7 - 9 \ > \ 0$, si $c_{25} = 16$, entonces se tiene que $CA_{25} = 2 \ > \ 0$,

$CA_{26} = c_{26} - 13 + 7 - 9 \ > \ 0$, si $c_{26} = 18$, entonces se tiene que $CA_{26} = 3 \ > \ 0$,

$CA_{34} = c_{34} - 7 + 13 - 6 \ > \ 0$, si $c_{34} = 4$, entonces se tiene que $CA_{34} = 4 \ > \ 0$.

Con lo anterior, se tienen los datos para un problema de transporte en el cual, la solución factible óptima es única; esta información se puede resumir en la tabla siguiente.

	4	5	6	Disp.
1	7	13	13	50
2	9	16	18	100
3	4	5	6	200
Dem.	110	100	140	

donde los elementos en el interior de cada casilla representan los costos de transporte unitarios de los orígenes a los destinos.

La solución[1] óptima de este problema es única y se puede observar en la tabla siguiente.

[1]En el Apéndice B se puede consultar una forma de resolver el problema de transporte.

	4	5	6	Disp.
1	$\boxed{7}$ 10	$\boxed{13}$	$\boxed{13}$ 40	50
2	$\boxed{9}$ 100	$\boxed{16}$	$\boxed{18}$	100
3	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$ 100	$\boxed{6}$ 100	200
Dem.	110	100	140	

los elementos en cada casilla representan las unidades a enviar de los orígenes a los destinos; $z_{min} = 2590$.

Para que el problema que construimos tenga solución óptima alternativa, asignamos el número 12 al arco $(1, 5)$ y con esto tenemos que $CA_{15} = 0$. En la tabla siguiente agrupamos estos datos; la solución óptima alternativa del problema se muestra bajo la tabla.

	4	5	6	Disp.
1	$\boxed{7}$ 10	$\boxed{12}$	$\boxed{13}$ 40	50
2	$\boxed{9}$ 100	$\boxed{16}$	$\boxed{18}$	100
3	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$ 100	$\boxed{6}$ 100	200
Dem.	110	100	140	

$$\begin{array}{lll}
x^*_{14} = 10, & x_{15} = \delta, & x^*_{16} = 40 - \delta, \\
x^*_{24} = 100, & x_{25} = 0, & x_{26} = 0, \\
x_{34} = 0, & x^*_{35} = 100 - \delta, & x^*_{36} = 100 + \delta,
\end{array}$$
$$z_{min} = 2590, \ \delta \in [0, 40].$$

2.2. Problema de Asignación

El problema consiste en asignar n candidatos a n puestos con el menor costo total; c_{ij} es el costo de asignar el candidato i al puesto j. De manera directa hay $n!$ posibles asignaciones y alguna o varias de ellas deben tener el menor costo total, por lo que estos problemas siempre tienen solución. Pero calcular todas las posibilidades y evaluarlas es poco manejable, incluso con ayuda de una computadora. Sin embargo, hay un procedimiento muy ingenioso para resolver este tipo de problemas: el método húngaro [4].

2.2.1. Solución factible óptima única y óptima alternativa

Los problemas de asignación al igual que los problemas de transporte siempre tienen solución; se construirán ejemplos para dos casos que se pueden presentar: asignación óptima única o asignación óptima alternativa.

En esta subsección proponemos una forma de definir la matriz con tamaño 4×4 asociada a un problema de asignación con costos, donde la asignación óptima sea predeterminada además, al resolver el problema con el método húngaro se implementen todos los pasos del método, particularmente el paso que utiliza *tiras para cubrir los ceros*; este concepto de *tiras* se puede consultar en los ejemplos resueltos del Apéndice B.

El primero de los pasos ordenados para definir la matriz consiste en señalar las componentes de la misma que determinarán la asignación óptima, como se ilustra en la tabla siguiente.

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square & \underline{A_1^4} \\ \square & \underline{A_2^2} & \square & \square \\ \square & \square & \underline{A_3^3} & \square \\ \underline{A_4^1} & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

En las componentes $\underline{A_i^j}$ señaladas se asignan números positivos que representan el costo de asignar el candidato i al puesto j, el número de la primera columna debe ser mayor que o igual a 16. En estos números que se asignan, vamos a observar que guarden un orden, pedimos que tengan un orden decreciente con respecto a las columnas; es decir, en la componente señalada de la columna $i+1$ se asigna un número menor que el asignado en la componente señalada de la columna i además, pedimos que el decremento en los números que se asignan sea de al menos cuatro unidades. Luego, en las primeras tres columnas asignamos números mayores que el asignado en la componente señalada de la columna, con una diferencia de al menos tres unidades. En las componentes no señaladas de la columna cuatro asignamos el número $\underline{A_1^4}+3$.

Por último, modificamos tres componentes de la matriz, las ubicadas debajo de las componentes señaladas en las primeras tres columnas, si la componente señalada en la columna se encuentra en el último renglón entonces se modifica la primera componente de dicha columna. En dichas componentes asignamos el número $\underline{A_i^j}-1$ correspondiente; lo anterior se ilustra en la tabla siguiente.

$$\begin{bmatrix} A_4^1\text{-}1 & \square & \square & \underline{A_1^4} \\ \square & \underline{A_2^2} & \square & \square \\ \square & A_2^2\text{-}1 & \underline{A_3^3} & \square \\ \underline{A_4^1} & \square & A_3^3\text{-}1 & \square \end{bmatrix}$$

Notamos que, por el orden decreciente de las componentes señaladas por columna y los números asignados en la columna cuatro, la mínima componente por renglón se encuentra en la columna cuatro.

Luego de aplicar el procedimiento descrito obtenemos una matriz como se ilustra en seguida.

$$A = \begin{bmatrix} A_4^1\text{-}1 & A_1^2 & A_1^3 & \underline{A_1^4} \\ A_2^1 & \underline{A_2^2} & A_2^3 & A_1^4{+}3 \\ A_3^1 & A_2^2\text{-}1 & \underline{A_3^3} & A_1^4{+}3 \\ \underline{A_4^1} & A_4^2 & A_3^3\text{-}1 & A_1^4{+}3 \end{bmatrix}$$

A continuación, verificamos que la matriz así definida tiene la asignación óptima que se determinó inicialmente y cuando se resuelve el problema, es necesario implementar todos los pasos del método húngaro.

Primero analizamos por qué la asignación óptima resulta ser la que se determina inicialmente.

Consideremos dos posiciones señaladas cualesquiera de la matriz A, por ejemplo, A_i^j y A_k^l. Ahora, analicemos el costo de permutar la asignación asociada a dichas componentes, es decir, cómo se modifica el costo de la asignación si el candidato i se asigna al puesto l y el candidato k se asigna al puesto j, para ello, comparamos las cantidades $A_i^j + A_k^l$ y $A_k^j + A_i^l$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $j < l$ si además, $i < k$ entonces, por las condiciones que cumplen las columnas de la matriz tenemos que: $A_i^j - 1 \leq A_k^j$ y $A_k^l + 3 \leq A_i^l$, sumando ambas desigualdades podemos deducir que $A_i^j + A_k^l \leq A_k^j + A_i^l$.

Por otro lado, si $i > k$ entonces por las condiciones que cumplen las columnas de la matriz tenemos dos casos: a) $A_i^j + 3 \leq A_k^j$ y $A_k^l - 1 \leq A_i^l$,
b) $A_i^j - 1 \leq A_k^j$ y $A_k^l + 3 \leq A_i^l$. En cualquiera de los casos podemos deducir que $A_i^j + A_k^l \leq A_k^j + A_i^l$.

Observamos que para cualesquiera dos posiciones señaladas A_i^j y A_k^l se cumple que $A_i^j + A_k^l \leq A_k^j + A_i^l$, esto significa que la asignación predeterminada no se puede mejorar y por ello es óptima.

Ahora, analizamos la solución del problema aplicando el método húngaro en la matriz A, restando primero el mínimo por renglones; como la mínima componente por renglón se encuentra en la columna cuatro, luego de realizar este paso obtenemos la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} B_4^1+2 & B_1^2 & B_1^3 & \underline{0} \\ B_2^1 & \underline{B_3^2}+1 & B_2^3 & 0 \\ B_3^1 & B_3^2 & \underline{B_4^3}+1 & 0 \\ \underline{B_4^1} & B_3^2 & B_4^3 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $B_i^j = A_i^j - A_i^4 \ \forall\, i,\ \forall\, j,\ i = 1,2,3,4;\ j = 1,2,3,4.$

Para obtener la matriz B restamos el mismo número a los renglones dos, tres, cuatro y tomando en cuenta cómo se definieron las columnas de la matriz A, entonces en la matriz B: el mínimo de la primera columna es la componente B_4^1, el mínimo de la segunda columna es la componente B_3^2, el mínimo de la tercera columna es la componente B_4^3. Luego, restamos el mínimo por columna en la matriz B y con esto obtenemos la siguiente matriz.

$$C = \begin{bmatrix} C_1^1 & C_1^2 & C_1^3 & \underline{0} \\ C_2^1 & \underline{1} & C_2^3 & 0 \\ C_3^1 & 0 & \underline{1} & 0 \\ \underline{0} & C_3^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $C_i^j = B_i^j - min\{B_i^j :\ i = 1,2,3,4\} \ \forall\, i,\ \forall\, j,\ i = 1,2,3,4;\ j = 1,2,3,4.$ Esta matriz ya tiene un cero en cada columna y cada renglón, pero los ceros se pueden cubrir con tres tiras, así que es necesario aplicar todos los pasos del método húngaro para resolver el problema.

En seguida, explicamos por qué se pueden cubrir los ceros de la matriz C con menos de cuatro tiras, donde C es la matriz que se obtiene luego de restar los mínimos por renglones y columnas para cualquier asignación predeterminada. Así mismo, B representa la matriz que se obtiene luego de restar los mínimos por renglones en la matriz A.

En la explicación nos referimos al primero y segundo renglón de arriba, en caso de que arriba del renglón citado no haya otro, el renglón de arriba se considera al cuarto renglón.

El renglón que tiene señalada su componente en la columna cuatro es citado varias veces y para simplificar la referencia a dicho renglón lo llamaremos el renglón alfa.

Denotemos por A_i^j, A_k^l y A_m^n a las componentes señaladas del segundo renglón que esta arriba del renglón alfa, del renglón que está arriba del renglón alfa y del renglón alfa, respectivamente.

Tomando en cuenta cómo se define la matriz A podemos hacer las siguientes observaciones:

1) Las componentes mínimas por renglón en la matriz A se encuentran en la columna cuatro y, al restar dichos elementos a cada renglón se obtienen ceros en esta columna.

2) En la columna j de la matriz B las menores componentes son:
$A_i^j-(A_m^n+3)$, $A_i^j-1-(A_m^n+3)$; la menor es la segunda y se encuentra en el renglón k, que está ubicado arriba del renglón alfa.

3) En la columna l de la matriz B ocurre que las menores componentes son: $A_k^l-(A_m^n+3)$ y $A_k^l-1-A_m^n$, de las cuales la primera es la menor y se encuentra arriba del renglón alfa.

4) En la columna distinta de i, l, n y columna cuatro de la matriz C, hay otro cero.

De lo anterior, observamos que habiendo calculado la matriz C, esta tiene ceros en la columna cuatro, el renglón que está arriba del renglón alfa y en otra columna, estos ceros se pueden cubrir con sólo tres tiras y efectivamente este número es menor que cuatro.

Ahora, aplicamos el método húngaro en la matriz A restando primero el mínimo por columnas.

$$A=\begin{bmatrix} A_4^1\text{-}1 & A_1^2 & A_1^3 & \underline{A_1^4} \\ A_2^1 & \underline{A_2^2} & A_2^3 & A_1^4+3 \\ A_3^1 & A_2^2\text{-}1 & \underline{A_3^3} & A_1^4+3 \\ \underline{A_4^1} & A_4^2 & A_3^3\text{-}1 & A_1^4+3 \end{bmatrix}$$

Los mínimos por columnas son los números A_4^1-1, A_2^2-1, A_3^3-1, A_1^4; restando dichos números a cada columna obtenemos la siguiente matriz.

$$E=\begin{bmatrix} 0 & E_1^2 & E_1^3 & \underline{0} \\ E_2^1 & \underline{1} & E_2^3 & 3 \\ E_3^1 & 0 & \underline{1} & 3 \\ \underline{1} & E_4^2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego, restamos el mínimo por renglón y obtenemos la siguiente matriz.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & F_1^2 & F_1^3 & \underline{0} \\ F_2^1 & \underline{0} & F_2^3 & 2 \\ F_3^1 & 0 & \underline{1} & 3 \\ \underline{1} & F_4^2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

En esta matriz observamos que es posible cubrir los ceros con sólo tres tiras y por ello, es necesario aplicar todos los pasos del método húngaro para resolver el problema.

A continuación, hacemos una serie de observaciones para explicar por qué. Para cualquier asignación predeterminada, luego de restar los mínimos por columnas y renglones, el número mínimo de tiras que se requieren para cubrir los ceros es menor que cuatro. La letra E representa la matriz que se obtiene luego de restar los mínimos por columna en la matriz A y, F representa la matriz que se obtiene luego de restar los mínimos por renglón en la matriz E.

En la explicación que sigue nos referimos al renglón de arriba y al renglón de abajo, en caso de que abajo del renglón citado no haya otro, el renglón de abajo se considera el primer renglón y en caso de que arriba del renglón citado no haya otro, el renglón de arriba se considera al cuarto renglón. Aquí, también denotamos por alfa al renglón que tiene señalada su componente en la columna cuatro.

En la matriz E el renglón alfa, el primer renglón, tiene dos ceros: el de la posición señalada y el cero ubicado debajo de la posición señalada del renglón de arriba. Estos dos ceros aparecen siempre en la matriz E y F independientemente de la asignación predeterminada además, se pueden cubrir con una tira.

En la matriz E, también se observa que el único renglón sin ceros es el que se encuentra debajo del renglón alfa, en el caso que ejemplifica es el segundo renglón; esto siempre ocurre sin importar la asignación predeterminada. Cuando se resta el mínimo por renglón al renglón que no tiene ceros en la matriz E, aparece un cero en la columna correspondiente a su componente señalada, pero debajo de este cero hay otro que apareció en el paso anterior. Estos dos ceros en la matriz F se pueden cubrir con otra tira.

Por último, en la matriz F sólo queda un cero que se puede cubrir con una tira más, así que, para cualquier asignación predeterminada con sólo tres tiras se pueden cubrir los ceros de la matriz F.

Con esto, se comprueba que la matriz A cumple con los propósitos; a continuación, ejemplificamos el procedimiento.

Ejemplo 9. Solución factible óptima predeterminada.

Definir una matriz de tamaño 4×4 para un problema de asignación con costos, de manera que la asignación óptima sea la siguiente.

$$\begin{aligned} C_1 &\longrightarrow P_2 \\ C_2 &\longrightarrow P_3 \\ C_3 &\longrightarrow P_1 \\ C_4 &\longrightarrow P_4. \end{aligned}$$

Las componentes de la matriz correspondientes a esta asignación y una posible asignación de números en dichas componentes se ilustran a continuación.

$$\begin{bmatrix} \square & \boxed{27} & \square & \square \\ \square & \square & \boxed{15} & \square \\ \boxed{31} & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \boxed{10} \end{bmatrix}$$

Ahora, en las primeras tres columnas asignamos números mayores que el asignado en su componente señalada, con una diferencia de al menos tres unidades; en las componentes no señaladas de la columna cuatro ponemos el número 13. Una posibilidad para esta asignación de números se ilustra en la tabla siguiente.

$$\begin{bmatrix} 64 & 27 & 70 & 13 \\ 35 & 65 & 15 & 13 \\ 31 & 40 & 34 & 13 \\ 56 & 79 & 67 & 10 \end{bmatrix}$$

Por último, modificamos las tres componentes ubicadas debajo de las componentes señaladas en las primeras tres columnas. En este caso son las componentes A_4^1, A_2^2, A_3^3 y aquí ponemos 30, 26 y 14, respectivamente. Con lo anterior, obtenemos finalmente la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 64 & 27 & 70 & 13 \\ 35 & 26 & 15 & 13 \\ 31 & 40 & 14 & 13 \\ 30 & 79 & 67 & 10 \end{bmatrix}$$

Si resolvemos el problema de asignación asociado a esta matriz de costos con el método húngaro, podemos verificar que la solución óptima corresponde a la que se predeterminó y es necesario implementar todos los pasos del método de solución.

$$\begin{aligned} C_1 &\longrightarrow P_2 \\ C_2 &\longrightarrow P_3 \\ C_3 &\longrightarrow P_1 \\ C_4 &\longrightarrow P_4 \\ z_{min} &= 83. \end{aligned}$$

Los problemas construidos con el procedimiento que se acaba de presentar además de tener como solución óptima la asignación predeterminada, tienen otra solución con el mismo costo, es decir, son problemas que tienen soluciones óptimas alternativas. Si observamos como queda definida la matriz A, podemos identificar una asignación distinta a la predeterminada inicialmente, pero con el mismo costo. Las componentes que definen la otra asignación óptima se encuentran debajo de las componentes que definen la asignación predeterminada inicial; con el entendido de que abajo del renglón cuatro se considera al primer renglón. Si $\underline{A_i^j}$ son las componentes señaladas de la matriz, las componentes de la otra asignación óptima corresponden a donde se colocan los costos $\underline{A_{i_1}^1} - 1$, $\underline{A_{i_2}^2} - 1$, $\underline{A_{i_3}^3} - 1$, $\underline{A_{i_4}^4} + 3$; en el listado anterior la última componente se encuentra debajo de la componente señalada de la columna cuatro.

En el ejemplo anterior las dos asignaciones óptimas del problema son:

$$\begin{aligned} C_1 &\longrightarrow P_2 \\ C_2 &\longrightarrow P_3 \\ C_3 &\longrightarrow P_1 \\ C_4 &\longrightarrow P_4 \\ z_{min} &= 83. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} C_1 &\longrightarrow P_4 \\ C_2 &\longrightarrow P_2 \\ C_3 &\longrightarrow P_3 \\ C_4 &\longrightarrow P_1 \\ z_{min} &= 83. \end{aligned}$$

Si se desea que el problema tenga asignación óptima única, hay que hacer la siguiente modificación: se aumenta en una unidad el valor de la componente ubicada debajo de la componente señalada del renglón alfa. Aumentar una unidad el costo de asignación de una componente no señalada no afecta la optimalidad de la solución, al contrario, la reafirma. Al realizar esta modificación cambia el costo de una de las dos soluciones óptimas y así, el problema tiene solución óptima única. A continuación, aplicamos este procedimiento.

Ejemplo 10. Solución factible óptima única.

Definir una matriz de tamaño 4×4 para un problema de asignación con costos, de manera que el problema tenga asignación óptima única. Vamos a partir de la matriz del ejemplo anterior, en la cual ya conocemos sus soluciones óptimas.

La matriz de costos es la siguiente.

$$A = \begin{bmatrix} 64 & \underline{27} & 70 & 13 \\ 35 & 26 & \underline{15} & 13 \\ \underline{31} & 40 & 14 & 13 \\ 30 & 79 & 67 & \underline{10} \end{bmatrix}$$

Las asignaciones óptimas del problema asociado a esta matriz de costos son:

$$\begin{array}{ll} C_1 \longrightarrow P_2 & \qquad C_1 \longrightarrow P_4 \\ C_2 \longrightarrow P_3 & \qquad C_2 \longrightarrow P_2 \\ C_3 \longrightarrow P_1 & \qquad C_3 \longrightarrow P_3 \\ C_4 \longrightarrow P_4 & \qquad C_4 \longrightarrow P_1 \\ z_{min} = 83. & \qquad z_{min} = 83. \end{array}$$

Ahora, identificamos la componente de la matriz que se debe modificar, ésta se ubica debajo de la componente señalada del renglón alfa. En este caso, es la componente A_4^1 y en esta componente se aumenta una unidad. Con esta modificación la nueva tabla tendrá asignación óptima única. La matriz que obtenemos es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 64 & 27 & 70 & 14 \\ 35 & 26 & 15 & 13 \\ 31 & 40 & 14 & 13 \\ 30 & 79 & 67 & 10 \end{bmatrix}$$

Si resolvemos el problema de asignación de la tabla anterior, podemos verificar que efectivamente tiene asignación óptima única.

$$\begin{array}{l} C_1 \longrightarrow P_2 \\ C_2 \longrightarrow P_3 \\ C_3 \longrightarrow P_1 \\ C_4 \longrightarrow P_4 \\ z_{min} = 83. \end{array}$$

2.2.2. Asignación predeterminada con utilidades

En esta subsección proponemos una forma de construir la matriz asociada a un problema de asignación con utilidades, donde la asignación óptima sea predeterminada y además, se implementen todos los pasos que conforman el método de solución. El método que se propone es útil para construir matrices de tamaño 4×4.

El primero de los pasos ordenados para definir la matriz consiste en señalar las componentes de la misma que determinarán la asignación óptima, como se ilustra en la tabla siguiente.

$$
\begin{bmatrix}
\square & \square & \boxed{\text{x}} & \square \\
\boxed{\text{x}} & \square & \square & \square \\
\square & \boxed{\text{x}} & \square & \square \\
\square & \square & \square & \boxed{\text{x}}
\end{bmatrix}
$$

En las componentes $\underline{A_i^j}$ señaladas se asignan números positivos que representan la utilidad de asignar el candidato i al puesto j, el primero de estos números debe ser mayor que o igual a 4. En estos números que se asignan, vamos a observar que guarden un orden, pedimos que tengan un orden creciente con respecto a las columnas, es decir, en la componente señalada de la columna $j+1$ se asigna un número mayor que el asignado en la componente señalada de la columna j además, pedimos que el incremento en los números que se asignan sea de al menos cuatro unidades. Luego, identificamos el renglón que tiene señalada su componente en la columna cuatro, en lo sucesivo a dicho renglón lo llamaremos el renglón alfa. En las componentes no señaladas del renglón alfa ponemos el número $\underline{A_{i_4}^4} - 3$ correspondiente. En las componentes no señaladas restantes, asignamos números menores que el asignado en la componente señalada del renglón, con una diferencia de al menos tres unidades.

Por último, modificamos tres componentes de la matriz, las ubicadas delante de las componentes señaladas en las primeras tres columnas. En dichas componentes asignamos el número $\underline{A_i^j} + 1$ correspondiente; lo anterior se ilustra en la tabla siguiente.

$$
A = \begin{bmatrix}
\square & \square & \underline{A_1^3} & A_1^3{+}1 \\
\underline{A_2^1} & A_2^1{+}1 & \square & \square \\
\square & \underline{A_3^2} & A_3^2{+}1 & \square \\
A_4^4\text{-}3 & A_4^4\text{-}3 & A_4^4\text{-}3 & \underline{A_4^4}
\end{bmatrix}
$$

Luego de aplicar el procedimiento descrito obtenemos una matriz como se ilustra en seguida.

$$A = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \underline{A_1^3} & A_1^3{+}1 \\ \underline{A_2^1} & A_2^1{+}1 & A_2^3 & A_2^4 \\ A_3^1 & \underline{A_3^2} & A_3^2{+}1 & A_3^4 \\ A_4^4\text{-}3 & A_4^4\text{-}3 & A_4^4\text{-}3 & \underline{A_4^4} \end{bmatrix}$$

A continuación, verificamos que la matriz así definida tiene la asignación óptima que se determinó inicialmente y cuando se resuelve el problema, es necesario implementar todos los pasos del método húngaro.

Primero analizamos por qué la asignación óptima resulta ser la que se determina inicialmente.

Consideremos cualesquiera dos posiciones señaladas de la matriz A, por ejemplo, A_i^j y A_k^l. Ahora, analicemos cómo cambia el valor de la utilidad si se permuta la asignación asociada a dichas componentes; es decir, si el candidato i se asigna al puesto l y el candidato k se asigna al puesto j, para ello, comparamos las cantidades $A_i^l + A_k^j$ y $A_i^j + A_k^l$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $j < l$; por las condiciones que cumplen los renglones de la matriz tenemos que: $A_i^l \leq A_i^j + 1$ y $A_k^j \leq A_k^l - 3$, sumando ambas desigualdades podemos deducir que $A_i^l + A_k^j \leq A_i^j + A_k^l$.

Observamos que para cualesquiera dos posiciones señaladas A_i^j y A_k^l se cumple que $A_i^l + A_k^j \leq A_i^j + A_k^l$, esto significa que la asignación predeterminada no se puede mejorar y por ello es óptima.

Ahora, analizamos la solución del problema aplicando el método húngaro. Primero se multiplica por -1 la matriz A para tener una matriz de costos y poder aplicar el método de solución. Luego, calculamos los costos de oportunidad; como la mínima componente por columna de la matriz -A se encuentra en el renglón alfa y, restamos la componente mínima a cada columna entonces, la matriz de costos de oportunidad que se obtiene es como la que se muestra en seguida.

$$B = \begin{bmatrix} B_1^1 & B_1^2 & \underline{B_1^3} & B_1^3{+}2 \\ \underline{B_2^2{+}1} & B_2^2 & B_2^3 & B_2^4 \\ B_3^1 & \underline{B_3^3{+}1} & B_3^3 & B_3^4 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{0} \end{bmatrix}$$

donde $B_i^j = -A_i^j - mín\{-A_i^j :\ i = 1, 2, 3, 4\}$.

Tomando en cuenta las operaciones que se realizan para obtener la matriz B y cómo se definen los renglones de la matriz A podemos concluir que: 1) la mínima componente por renglón en la matriz B para los renglones que tienen señalada su componente en las columnas uno y dos se encuentra delante de las posiciones señaladas; 2) la mínima componente por renglón de la matriz B para el renglón que tiene señalada su componente en la columna tres se encuentra en la componente señalada de dicho renglón. Así que, cuando se restan los mínimos por renglón en la matriz B se van a generar ceros en las columnas dos y tres. Estos ceros y los ceros del renglón alfa se pueden cubrir con sólo tres tiras y por ello, es necesario aplicar todos los pasos del método de solución. A continuación, ejemplificamos este procedimiento.

Ejemplo 11. Asignación predeterminada con utilidades.

Definir una matriz de tamaño 4×4 para un problema de asignación con utilidades de manera que la asignación óptima sea:

$$\begin{aligned} C_1 &\longrightarrow P_3 \\ C_2 &\longrightarrow P_1 \\ C_3 &\longrightarrow P_2 \\ C_4 &\longrightarrow P_4. \end{aligned}$$

Las posiciones de la matriz correspondientes a esta asignación y una posible asignación de números en dichas posiciones se ilustran a continuación.

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \boxed{84} & \square \\ \boxed{68} & \square & \square & \square \\ \square & \boxed{72} & \square & \square \\ \square & \square & \square & \boxed{89} \end{bmatrix}$$

En las componentes no señaladas del renglón alfa, el renglón cuatro, ponemos el número 86. Luego, en cada renglón asignamos números menores que el asignado en su componente señalada, con una diferencia de al menos tres unidades; una posibilidad para esta asignación de números se ilustra en la tabla siguiente.

$$\begin{bmatrix} 15 & 20 & 84 & 50 \\ 68 & 60 & 54 & 43 \\ 69 & 72 & 60 & 73 \\ 86 & 86 & 86 & 89 \end{bmatrix}$$

Por último, modificamos las tres componentes ubicadas delante de las componentes señaladas de las primeras tres columnas, en este caso son las componentes A_1^4, A_2^2, A_3^3 y aquí ponemos los números 85, 69 y 73, respectivamente. Con lo anterior, obtenemos finalmente la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 20 & 84 & 85 \\ 68 & 69 & 54 & 43 \\ 69 & 72 & 73 & 34 \\ 86 & 86 & 86 & 89 \end{bmatrix}$$

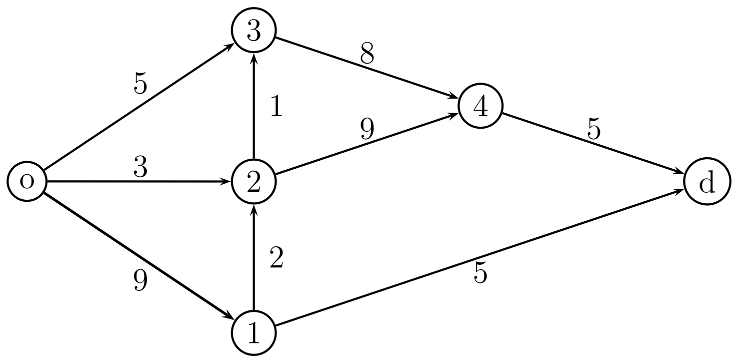
Si resolvemos el problema de asignación asociado a esta tabla de utilidades con el método húngaro, podemos verificar que la solución óptima corresponde a la que se predeterminó y es necesario implementar todos los pasos del método de solución.

$$\begin{aligned} C_1 &\longrightarrow P_3 \\ C_2 &\longrightarrow P_1 \\ C_3 &\longrightarrow P_2 \\ C_4 &\longrightarrow P_4 \\ z_{\text{Máx}} &= 313. \end{aligned}$$

2.3. Problema de la ruta más corta

Sea $G = (N, A)$ una red dirigida y conexa, donde cada arco (i, j) tiene asociado un número c_{ij} que puede representar distancia costo o tiempo; en adelante sólo nos referiremos a distancias. En esta red se cumplen las condiciones siguientes: (1) la red tiene dos nodos distinguidos o y d (origen y destino), (2) todos los costos asociados a los arcos son números enteros no negativos, (3) existe al menos una ruta de o a d. El problema consiste en encontrar la ruta más corta (menos costosa, más rápida) entre los nodos o y d. En redes con las características antes mencionadas el problema de la ruta más corta siempre tiene solución y hay un método eficiente para resolver este tipo de problemas: el método de etiquetación de Dijkstra [4, 5]. En esta sección, vamos a construir ejemplos para los cuales la ruta más corta es única, o existen dos rutas más cortas; en adelante cuando nos referimos a distancias debemos pensar en números enteros positivos.

A continuación, presentamos una red con las características que mencionamos.



2.3.1. Ruta más corta única

En esta subsección se propone un procedimiento para construir redes en las cuales la ruta más corta está predeterminada y es única.

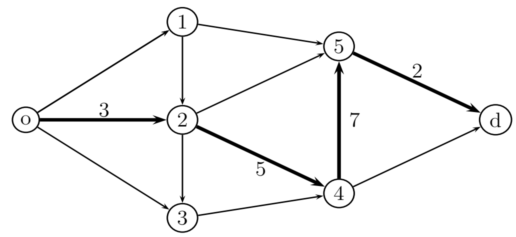
Partimos de una gráfica $G = (N, A)$ dirigida y conexa con dos nodos distinguidos o y d (origen y destino), en la cual existe al menos una ruta de o a d.

En esta gráfica se determina una ruta de o a d que se pretende que sea la más corta y se asignan distancias en los arcos que la forman; en lo sucesivo, a esta ruta la llamaremos la ruta seleccionada. Consideremos que dicha ruta está dada por la secuencia de nodos y arcos: $o \to n_1 \to n_2 \ldots n_r \to d$. A continuación, se describe el procedimiento para asignar distancias en los arcos de la gráfica que no forman parte la ruta seleccionada.

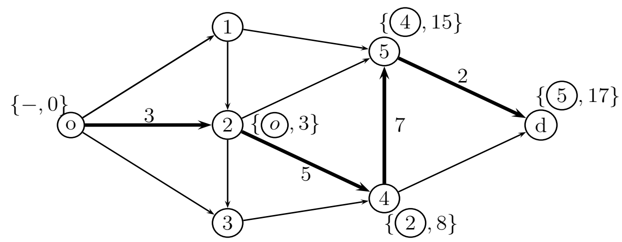
Primero se etiquetan los nodos de la ruta seleccionada conforme al algoritmo de etiquetas de Dijkstra, es decir, cada nodo tiene en su etiqueta al nodo antecesor y la distancia acumulada. Luego, se consideran los nodos de la ruta seleccionada en el orden que forman dicha ruta, una vez considerado el nodo i de la ruta seleccionada, se asignan distancias en los arcos de la red necesarios, de forma que todas las rutas posibles desde el nodo o hasta el nodo i tengan una distancia mayor que la distancia en la etiqueta del nodo i. Es posible que al asignar distancias en los arcos de esta manera, se tenga que reasignar distancias mayores en arcos que ya tengan asignada una distancia. Esto se realiza para cada nodo de la ruta seleccionada. A los arcos de la red que falte asociarles una distancia, se les puede asociar una distancia positiva arbitrariamente y la ruta más corta de la red será la que se determinó inicialmente. A continuación, ejemplificamos este procedimiento.

Ejemplo 12. Ruta más corta única.

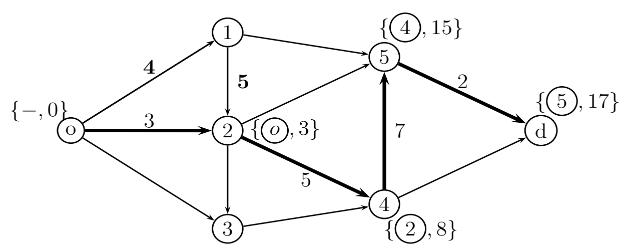
Construya una red a partir de la gráfica siguiente, de manera que la ruta más corta resulte: $o \to 2 \to 4 \to 5 \to d$. Las distancias asociadas a los arcos de esta ruta pueden ser, por ejemplo, los números 3, 5, 7, 2, como se ilustra a continuación.



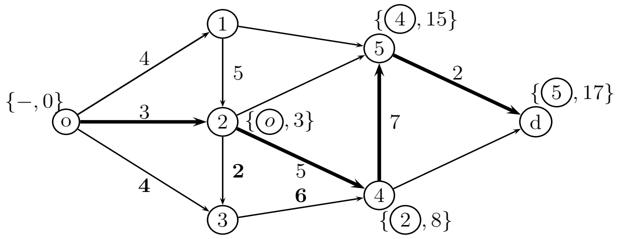
Primero etiquetamos los nodos de la ruta seleccionada.



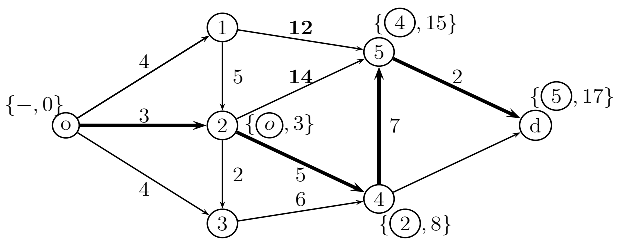
Ahora consideramos el segundo nodo de la ruta seleccionada, en este caso es el nodo 2, sólo hay una ruta desde o hasta el nodo 2, a saber, $o \rightarrow 1 \rightarrow 2$, así que podemos asignar las distancias 4, 5 en los arcos $(o, 1)$ $(1, 2)$, respectivamente. Con esto, la distancia de la ruta $o \rightarrow 1 \rightarrow 2$ es 9 y es mayor que la distancia indicada en la etiqueta del nodo 2 que es 3. Luego de realizar esta asignación de distancias, obtenemos la siguiente red.



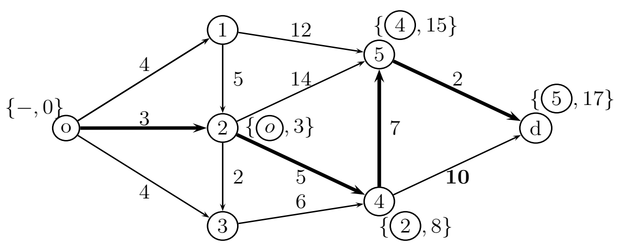
Para el nodo 4 de la ruta seleccionada tenemos tres rutas:
$o \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$,
$o \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ y $o \rightarrow 3 \rightarrow 4$. Si se asignan las distancias 4, 2 y 6 en los arcos $(o, 3)$, $(2, 3)$ y $(3, 4)$ respectivamente, las distancias de las tres rutas resultan mayores que la distancia indicada en la etiqueta del nodo 4, la cual es 8. Luego de asignar las distancias en los arcos, la red que obtenemos es la siguiente.



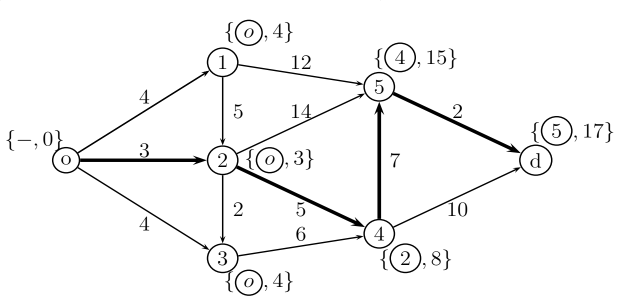
Para el nodo 5 tenemos cuatro rutas:
$o \rightarrow 1 \rightarrow 5$, $o \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$,
$o \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$, $o \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$. De estas rutas las dos últimas ya cumplen que su distancia es mayor que 15, así que sólo falta asignar distancias en los arcos $(1,5)$ y $(2,5)$ de tal forma que la distancia de las dos primeras rutas sea mayor que 15, una posibilidad para las distancias de dichos arcos es: 12 y 14, respectivamente. La siguiente red ilustra esta asignación de distancias.



Por último, para el nodo d se debe cumplir que todos las rutas desde o hasta d tengan una distancia mayor que 17, esto se cumple si al arco $(4,d)$ se asigna la distancia 10. Con esto, completamos la red.



Aplicando el algoritmo de etiquetas de Dijkstra verificamos que la ruta más corta en esta red es la que se deteminó inicialmente, la distancia de esta ruta es 17.



2.3.2. Ruta más corta alternativa

Considerando redes con las características señaladas al inicio de esta sección, el problema de la ruta más corta tiene solución; una variante puede ser que la ruta más corta no sea única, es decir, que existan dos rutas con la misma distancia. En esta subsección proponemos un procedimiento para construir ejemplos de este tipo.

Primero se distinguen en la red las dos rutas que se pretende que sean las más cortas, dichas rutas no deben tener nodos en común excepto el origen y el destino; en lo sucesivo a estas rutas se les llamará las rutas seleccionadas. Luego, se asignan distancias en los arcos de estas rutas; la distancia total de ambas rutas obviamente debe ser la misma.

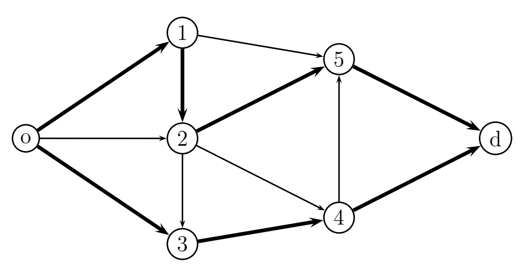
En los arcos de la red que no forman parte de las rutas seleccionadas se asignan distancias cumpliendo ciertas características.

Se etiquetan los nodos de las rutas seleccionadas de acuerdo al algoritmo de etiquetas de Dijkstra, es decir, la etiqueta de cada nodo tiene al nodo antecesor y la distancia acumulada. Luego, se asignan distancias en los arcos cumpliendo lo siguiente: la distancia de todas las rutas que inician en el nodo o y llegan hasta un nodo de la ruta seleccionada debe ser mayor que la distancia indicada en la etiqueta del nodo. Esto se realiza con cada nodo de las dos rutas seleccionadas. Es posible que al asignar distancias en los arcos de esta manera, se tenga que reasignar distancias mayores en arcos que ya tengan asignada una distancia, pero este proceso es finito.

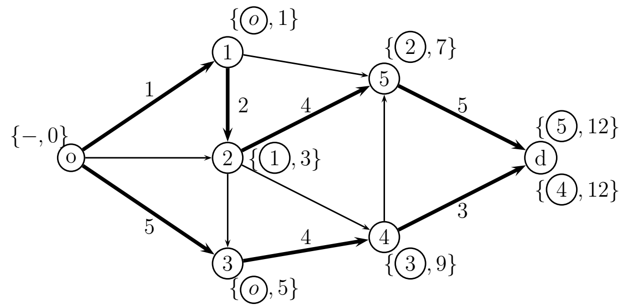
Si quedan arcos en la red sin asignarles distancia, a estos arcos se les asignan números positivos arbitrariamente, esta asignación no afecta la distancia de las rutas seleccionadas puesto que dichos arcos no forman parte de las rutas posibles que llegan al destino. De esta manera las rutas seleccionadas en la red serán las más cortas. Para ilustrar lo anterior, veamos un ejemplo.

Ejemplo 13. Ruta más corta alternativa.

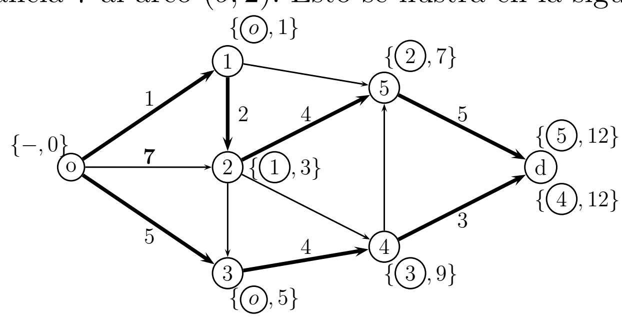
Definir una red con dos rutas más cortas a partir de la gráfica que se presenta.



Las rutas más cortas serán las distinguidas con linea gruesa en la gráfica. Ahora, asignamos distancias en los arcos de estas rutas, por ejemplo las que se indican en la siguiente red. Además, en los nodos de las rutas ponemos las etiquetas correspondientes.



Para el nodo 2 de la primera ruta seleccionada sólo hay una ruta desde el origen hasta este nodo y está formada por el arco $(o,2)$, entonces la distancia de este arco debe ser mayor que la distancia de la etiqueta del nodo 2, que es 3; por ejemplo, asignamos la distancia 7 al arco $(o,2)$. Esto se ilustra en la siguiente red.



Para el nodo 5 hay cuatro rutas desde el origen hasta este nodo, son las siguientes:

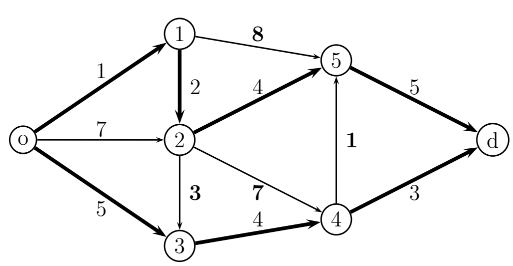
$o \to 1 \to 5$,

$o \to 2 \to 4 \to 5$,

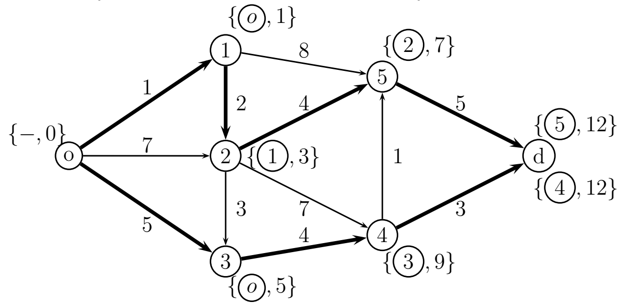
$o \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$,

$o \to 3 \to 4 \to 5$.

Los arcos involucrados en estas rutas que no tienen distancia asignada son: $(1,5)$ para la primera ruta; $(2,4)$, $(4,5)$ para la segunda ruta; $(2,3)$, $(4,5)$ para la tercera ruta; $(4,5)$ para la cuarta ruta. En estos arcos podemos asignar, por ejemplo, las distancias que se ilustran en la siguiente red y con ello se cumple que la distancia de estas rutas resulta mayor que 7 (7 aparece en la etiqueta del nodo 5).

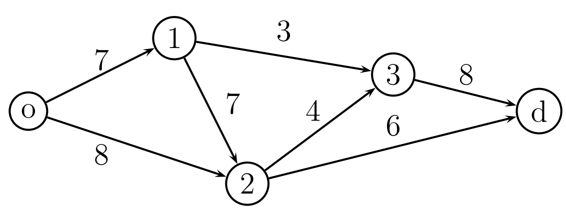


Se puede verificar que esta asignación de distancias en los arcos también cumple que: las distancias de todas las rutas que inician en el nodo o y llegan hasta un nodo de la segunda ruta seleccionada son mayores que la distancia acumulada del nodo. Esto significa que no es necesario reasignar distancias mayores en arcos que no forman parte de las rutas seleccionadas. Con esto, completamos los datos de la red para lograr nuestro propósito; si aplicamos el algoritmo de etiquetas de Dijkstra podemos verificar que hay dos rutas más cortas y son las rutas seleccionadas.



2.4. Problema de flujo máximo, cortadura mínima

Sea $G = (N, A)$ una red dirigida y conexa, en esta red puede circular un tipo de bien. Cada arco (i, j) de la red, tiene asociada una capacidad k_{ij} que limita las unidades del bien que pueden pasar por el arco. En esta red se cumplen las condiciones siguientes: (1) la red tiene dos nodos distinguidos o y d (origen y destino), (2) todas las capacidades asociadas a los arcos son números enteros no negativos, (3) existe al menos una ruta de o a d. El problema consiste en encontrar la máxima cantidad de flujo que puede circular del nodo o al nodo d. A continuación, presentamos una red con las características antes mencionadas.



La notación utilizada y los conceptos se pueden consultar en el Apéndice B y glosario.

2.4.1. Flujo máximo y cortadura mínima determinados

El objetivo de esta subsección es definir una red en la que su cortadura de capacidad mínima y el flujo máximo que puede circular por la red sean predeterminados. Partimos de una gráfica dirigida; primero definimos la cortadura que será mínima y luego, asignamos las capacidades en los arcos que la forman, la suma de dichas capacidades corresponde al flujo que será máximo.

A partir de las capacidades asignadas en los arcos que formarán la cortadura mínima, se continúa asignando capacidades en los arcos cumpliendo las siguientes condiciones: si el nodo de la red ya tiene asignadas las capacidades en todos sus arcos de salida, entonces la suma de las capacidades que se asignen en los arcos de llegada de este nodo debe ser tal que la suma de estas, sea mayor a la suma de las capacidades de los arcos de salida. En el otro caso, cuando el nodo ya tiene asignadas las capacidades en todos sus arcos de llegada, entonces la asignación de capacidades en los arcos de salida del nodo, debe ser tal que la suma de estas sea mayor que la suma de las capacidades de los arcos de llegada.

Al asignar capacidades de flujo en los arcos de esta manera, es posible que algunos nodos no tengan asignadas capacidades en todos sus arcos de salida o en todos sus arcos de llegada, en ese caso se pueden asignar valores positivos en los arcos necesarios para que el nodo tenga asignadas capacidades en todos los arcos que necesite: los de llegada o los de salida, pero siempre cumpliendo la característica correspondiente: o que la suma de las capacidades que se asignen en los arcos de llegada sea mayor que o igual a la suma de las capacidades ya asignadas en los arcos de salida del nodo, o que la suma de las capacidades que se asignen en los arcos de salida sea mayor que o igual a la suma de las capacidades ya asignadas en los arcos de llegada del nodo.

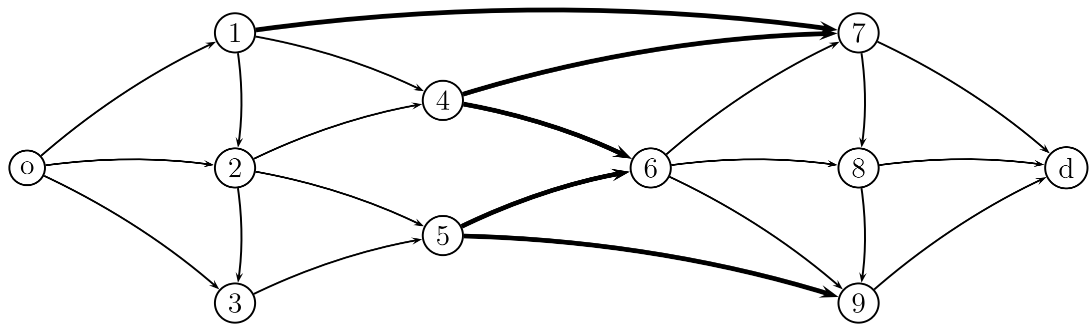
Una vez que se tiene definida la red y la cortadura de capacidad mínima, $C = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), ..., (i_n, j_n)\}$, agregamos un arco más en la red cuya capacidad sea dos. Dicho arco debe ser de la forma (j_m, i_k), donde los arcos (i_k, j_k) y (i_m, j_m) pertenecen a C.

Con esta forma de definir la red se consigue que el flujo máximo y la cortadura de capacidad mínima sean los predeterminados.

Con base en los teoremas correspondientes a flujo máximo-cortadura mínima [5, p.195], si la primera ruta por la que se incrementa el flujo en la red incluye el arco (j_m, i_k), antes mencionado, entonces será necesario incrementar el flujo a través de cadenas para resolver el problema de flujo máximo; esto se ilustra en el Ejemplo 14.

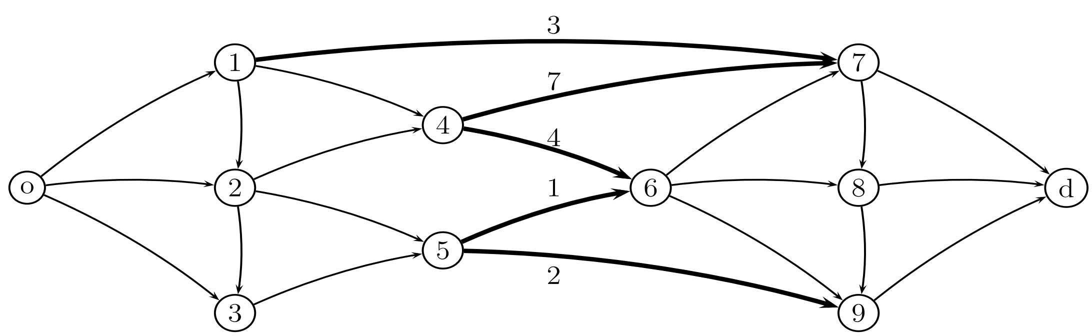
Ejemplo 14. Flujo máximo y cortadura mínima determinados.

Considere la siguiente gráfica:

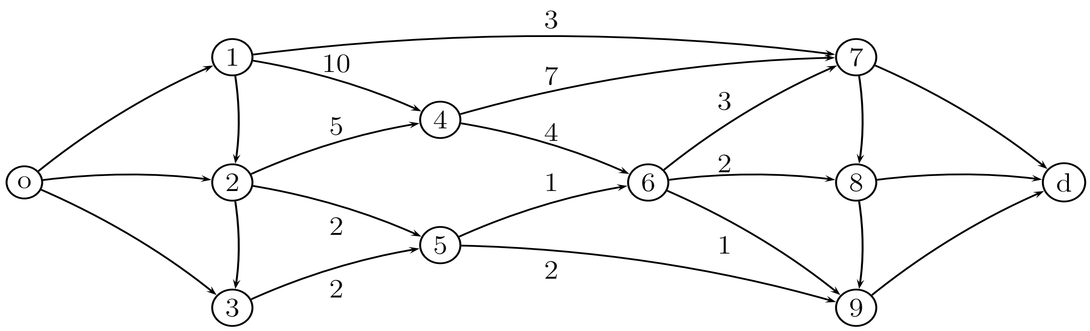


La cortadura de capacidad mínima deseamos que esté formada por los arcos {(1,7), (4,7), (4,6), (5,6), (5,9)} y el flujo máximo en esta red deseamos que sea 17, las capacidades de flujo en los arcos que forman la cortadura son: 3, 7, 4, 1, 2; asignadas en el orden que aparece el listado de los arcos.

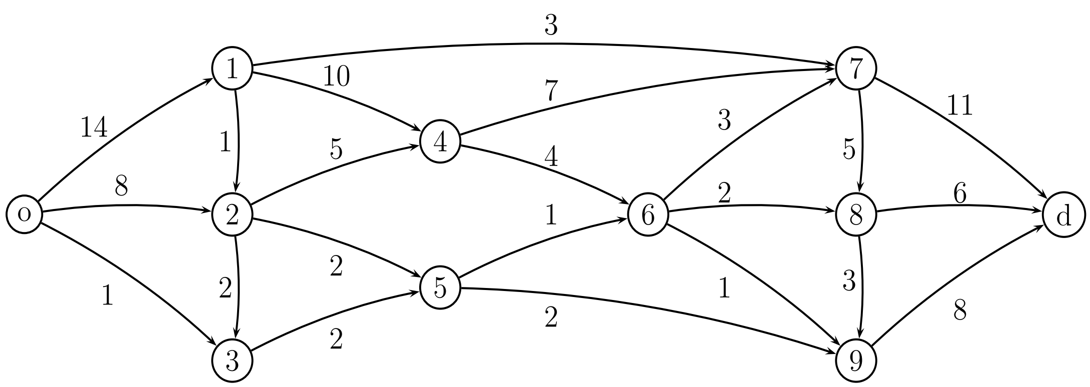
Procedemos a asignar las capacidades en la cortadura definida.



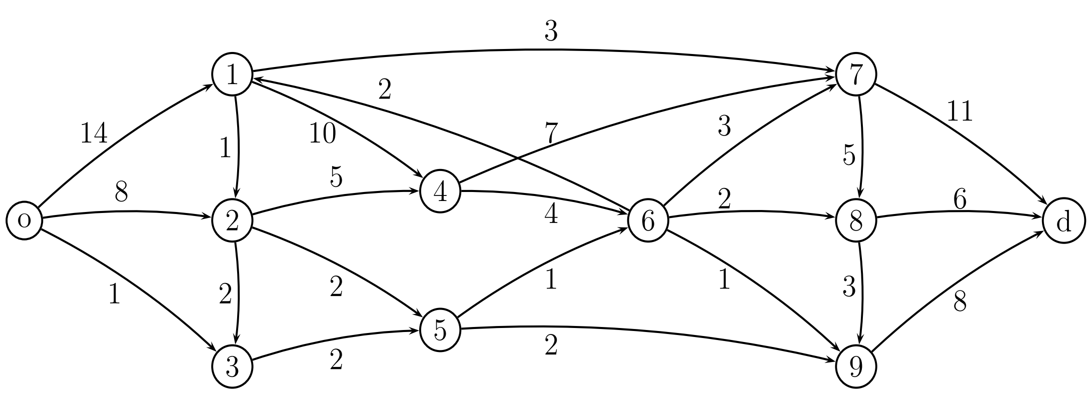
Ahora iniciamos la asignación de capacidades en el resto de los arcos como se explicó anteriormente. Para ilustrar esto, empezamos asignando las capacidades en los arcos de los nodos 4, 5 y 6:



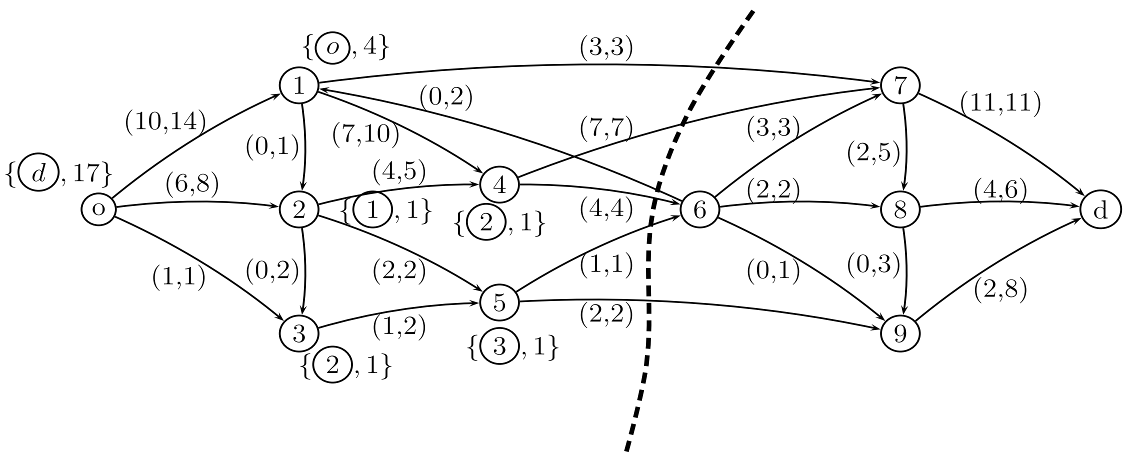
De esta manera continuamos asignando las capacidades en los arcos que conectan al resto de los nodos. Con esto obtenemos la red siguiente.



Por último, agregamos el arco $(6,1)$ con capacidad dos y obtenemos la red con las características que nos interesan.



Aplicando el algoritmo de Ford y Fulkerson obtenemos que el flujo máximo es 17 y la cortadura de capacidad mínima es la esperada. En seguida damos una lista de las rutas por las cuales se incrementó el flujo.



$o \to \underset{8}{2} \to \underset{5}{4} \to \underset{4}{6} \to \underset{2}{1} \to \underset{2}{7} \to \underset{2}{d}$ el flujo se incrementa en 2.

$o \to \underset{10}{1} \to \underset{10}{4} \to \underset{7}{7} \to \underset{7}{d}$ el flujo se incrementa en 7 unidades.

$o \to \underset{4}{1} \to \underset{1}{7} \to \underset{1}{d}$ el flujo se incrementa en 1.

$o \to \underset{8}{2} \to \underset{3}{4} \to \underset{3}{6} \to \underset{2}{8} \to \underset{2}{d}$ el flujo se incrementa en 2.

$o \to \underset{4}{2} \to \underset{2}{5} \to \underset{2}{9} \to \underset{2}{d}$ el flujo se incrementa en 2.

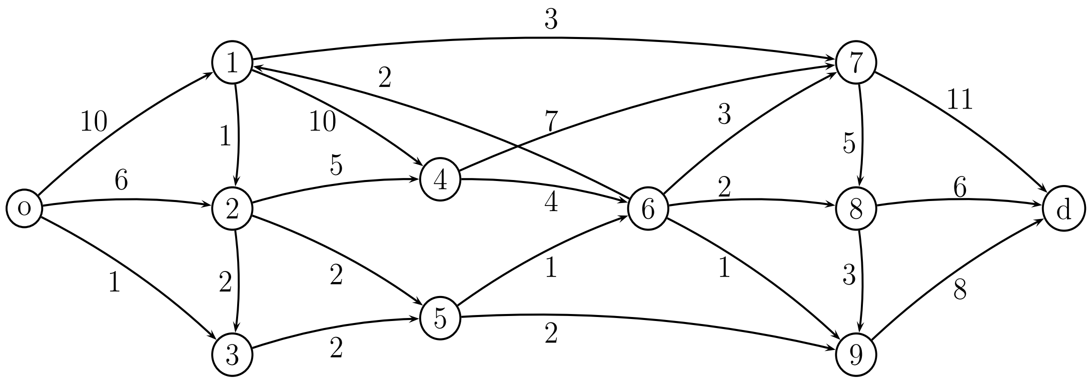
$o \to \underset{1}{3} \to \underset{1}{5} \to \underset{1}{6} \to \underset{1}{7} \to \underset{1}{d}$ el flujo se incrementa en 1.

$o \to \underset{6}{1} \leftarrow \underset{2}{6} \to \underset{2}{7} \to \underset{2}{8} \to \underset{2}{d}$ el flujo se incrementa en 2 unidades.

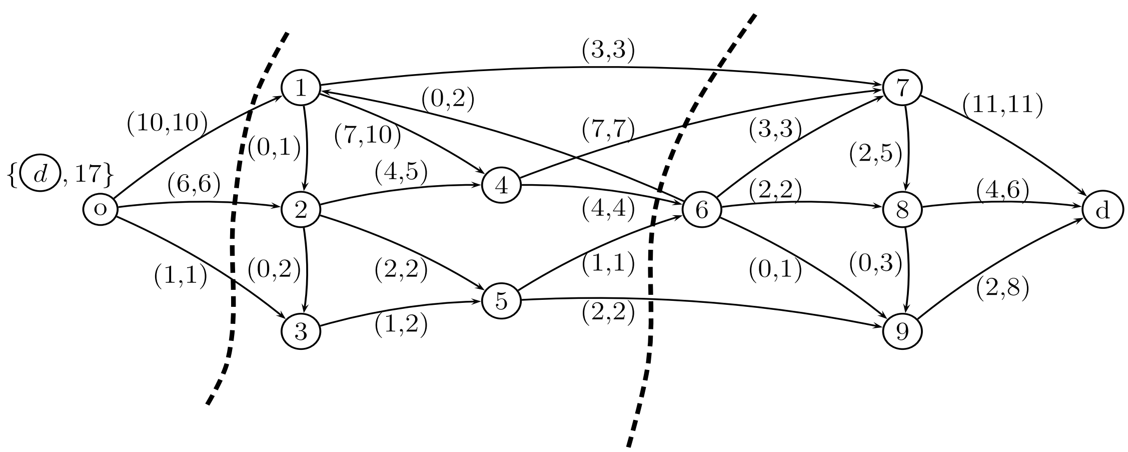
Ejemplo 15. Cortaduras mínimas alternativas.

Una vez que se define la red en la que determinamos la cortadura de capacidad mínima, aplicando el procedimiento descrito en esta subsección, es sencillo definir en la misma red otra cortadura de igual capacidad, de la siguiente forma: observando la red con el flujo máximo, asignamos en otra cortadura la capacidad mínima, a través de hacer coincidir la capacidad de los arcos de la que será otra cortadura mínima con el flujo que tiene cada arco.

Por ejemplo, en la red anterior cuya cortadura está definida por $\{(1{,}7), (4{,}7), (4{,}6), (5{,}6), (5{,}9)\}$, vamos a definir otra cortadura mínima formada por los arcos $\{(o{,}1), (o{,}2), (o{,}3)\}$. Entonces, las capacidades de estos arcos pueden ser por ejemplo, 10, 6, 1, respectivamente. Consideremos la siguiente red.



Calculando el flujo máximo y cortadura mínima obtenemos las dos cortaduras mínimas.



Podemos observar que una vez encontrada la cortadura mínima donde se propuso, las cortaduras mínimas alternativas se pueden colocar donde se requiera de manera sencilla.

Capítulo 3

Teoría de Juegos

Una clase importante de juegos son los llamados juegos de suma constante, en los cuales la suma de las ganancias de los jugadores es constante. En el presente capítulo abordamos la construcción de ejemplos para juegos que involucran sólo dos jugadores y la cantidad de estrategias para cada jugador es finita; además, en cada partida la suma de las ganancias de ambos jugadores es cero, es decir, son juegos de suma constante y la constante es cero. Estos juegos se denominan juegos bipersonales finitos de suma cero, o bien, juegos matriciales porque es posible asociarles una matriz.

Los juegos matriciales se pueden resolver encontrando el *punto silla* de la ganancia esperada, ya sea con estrategias puras o con *estrategias mixtas*.

En las siguientes secciones proponemos una forma de construir la *matriz de pagos de un juego*, de manera que la *solución del juego* sea predeterminada, por ejemplo: el juego se resuelve con *punto silla de estrategias puras*, la solución del juego tiene estrategia mixta óptima predeterminada, o bien, la estrategia mixta óptima para un jugador es un segmento de recta.

3.1. Solución con punto silla de estrategias puras

Cuando se intenta resolver un juego matricial, generalmente primero se trata de identificar un punto silla de estrategias puras. En esta sección proponemos un procedimiento para construir matrices que tengan un punto silla de estrategias puras como solución del juego al que están asociadas.

La construcción de la matriz se hace de la siguiente forma: primero se determina el tamaño de la matriz, $m \times n$, que se desea construir y se asigna un número en la posición A_i^j que será el punto silla, dicho número será el valor del juego. Luego, se asignan números en el renglón i y la columna j de forma que A_i^j sea la máxima componente de su columna y simultáneamente sea la mínima componente de su renglón. Una vez que se asignaron números en el renglón y la columna donde se ubicará el punto silla, se asignan números en el resto de las componentes de la matriz de forma arbitraria. A continuación, construimos una matriz que tiene punto silla de estrategias puras.

El tamaño de la matriz será de 3×4, en la posición A_2^2 se encontrará el punto silla y el valor del juego será 9.

$$A= \begin{vmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \boxed{9} & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{vmatrix}$$

Ahora que conocemos el valor del juego y la posición en la que se encontrará éste, asignamos números en las componentes de la matriz correspondientes al renglón 2 y columna 2. Como se indicó antes, debemos asignar números tales que: que el número 9 sea la máxima componente de la columna 2 y simultáneamente sea la mínima componente del renglón 2, una posible asignación de números con esta característica se ilustra en la siguiente matriz.

$$A= \begin{vmatrix} \square & \boxed{7} & \square & \square \\ \boxed{11} & \boxed{9} & \boxed{10} & \boxed{13} \\ \square & \boxed{5} & \square & \square \end{vmatrix}$$

Luego, asignamos números en el resto de las componentes de la matriz sin un criterio particular, una posibilidad para tales números se ilustra enseguida.

$$A= \begin{vmatrix} \boxed{5} & 7 & \boxed{4} & \boxed{8} \\ 11 & 9 & 10 & 13 \\ \boxed{6} & 5 & \boxed{7} & \boxed{9} \end{vmatrix}$$

Si calculamos el punto silla de esta matriz podemos verificar que se obtiene el punto silla predeterminado.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 5 & 7 & 4 & 8 & 4 \\ A= & 11 & \boxed{9} & 10 & 13 & \boxed{9} \\ & 6 & 5 & 7 & 9 & 5 \\ \multicolumn{1}{c}{} & 11 & \boxed{9} & 10 & \multicolumn{1}{c}{13} & \end{array}$$

La solución del juego es: $(i^*, j^*) = (2, 2)$, el valor del juego es $\nu = 9$.

3.2. Estrategia mixta óptima, $\overline{x}^*$, predeterminada

Si la matriz de pagos asociada a un juego no tiene un punto silla de estrategias puras, el juego se puede resolver a través de *estrategias mixtas*.

En esta sección proponemos un procedimiento para construir una matriz de pagos de un juego que se resuelve con estrategias mixtas y una de las estrategias óptimas, así como el valor del juego serán predeterminados. Cuando el número de renglones o columnas de la matriz es 2, es posible analizar gráficamente el juego y con base en este análisis plantear la solución, es decir, si el tamaño de la matriz es $2 \times n$ ó $m \times 2$ las estrategias mixtas están determinadas por una sola variable x, $x \in [0,1]$ y las ganancias esperadas son función de esta variable, así que la solución del juego se puede plantear gráficamente en $\mathbb{R}^2$.

A continuación, se describe el análisis geométrico a partir del cual se construye la matriz, A, con las características antes mencionadas.

Si tenemos un juego con matriz de pagos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y el jugador II usa su estrategia pura 1 y el jugador I usa su estrategia mixta $(x^*, 1-x^*)$, con $x^* \in (0,1)$. Entonces, la ganancia esperada para el jugador I es
$E(\overline{x}, 1) = ax + c(1-x) = (a-c)x + c$. De la misma manera,
$E(\overline{x}, 2) = bx + d(1-x) = (b-d)x + d$.

Notemos que, los extremos de la linea asociada a la ganancia esperada $E(\overline{x}, 1)$ son los puntos $(0, c)$ y $(1, a)$; las ordenadas de estos puntos son las componentes de la columna uno de A, para ilustrar esto, consideremos la Figura 16.

Si deseamos que la estrategia mixta óptima para el jugador I sea $(x^*, 1-x^*)$ con $x^* = \frac{p}{q}$; p, q números enteros positivos y además, que el valor del juego sea ν. Entonces, la solución gráfica está basada en el principio maximin; una posible gráfica de las ganancias esperadas $E(\overline{x}, 1)$ y $E(\overline{x}, 2)$ se ilustra en la Figura 16.

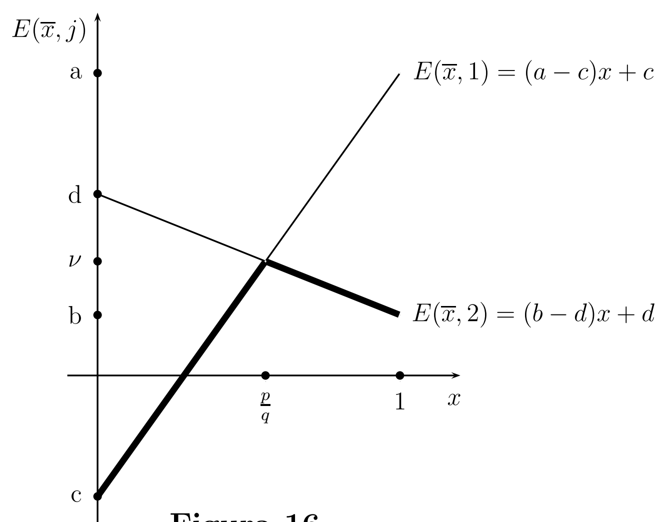


Figura 16

Como el valor del juego será ν y $x^* = \frac{p}{q}$ entonces, los segmentos de recta se deben intersectar en el punto $(\frac{p}{q}, \nu)$. Para que esto ocurra, debemos encontrar las pendientes m_1 y m_2, una de ellas positiva y la otra negativa, tales que:
$m_1 x^* + c = \nu$ y $m_2 x^* + d = \nu$. Si proponemos $m_1 = q$ y $m_2 = -q$ tenemos que las

pendientes son de signo contrario además, $c = \nu - p$ y $d = \nu + p$. De lo anterior: $a - c = q$ y $b - d = -q$, lo cual implica que $a = q + \nu - p$ y $b = -q + \nu + p$.

Por lo tanto, si deseamos que ν sea el valor del juego y $(\frac{p}{q}, 1 - \frac{p}{q})$ la estrategia mixta óptima para el jugador I entonces, la matriz de pagos del juego debe ser la siguiente.

$$A = \begin{pmatrix} q + \nu - p & -q + \nu + p \\ \nu - p & \nu + p \end{pmatrix}$$

Si deseamos que haya una tercera estrategia para el jugador II, pero que la solución del juego sea la misma, debemos agregar una tercera columna en la matriz A y ésta debe cumplir ciertas condiciones que se explican enseguida. Llamemos B a la matriz con las tres columnas, $B = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix}$.

La ganancia esperada $E(\overline{x}, 3)$ se obtiene a partir de la tercera columna de B, vamos a pedir que la ordenada al origen del segmento de recta asociado a esta ganancia esperada sea $c - 1$, esto implica que $f = c - 1$, por lo que se hizo notar antes.

Para que el valor del juego sea el mismo, se debe cumplir que los segmentos de recta asociados a $E(\overline{x}, 1)$ y $E(\overline{x}, 3)$ se intersecten en un punto del plano cuya abscisa sea menor que $\frac{p}{q}$. Si planteamos esta condición definiendo que la pendiente de $E(\overline{x}, 3)$, m_3, sea de la forma rq, encontramos que si $r = 2$ se cumple la condición que nos interesa y además, resulta que e es un número entero.

En resumen, tenemos que: $f = c - 1 = \nu - p - 1$ y $m_3 = (e - f)$; despejando e, tenemos $e = 2q + \nu - p - 1$. Entonces, la matriz B que obtenemos es la siguiente.

$$B = \begin{pmatrix} q + \nu - p & -q + \nu + p & 2q + \nu - p - 1 \\ \nu - p & \nu + p & \nu - p - 1 \end{pmatrix}$$

A continuación, ejemplificamos este procedimiento.

Ejemplo 16. Solución predeterminada para el jugador I.

Definir una matriz de pagos de un juego, $A_{2\times 3}$, de manera que el valor del juego, ν, sea 4 y la estrategia mixta óptima para el jugador I sea $(\frac{5}{8}, \frac{3}{8})$. En la Figura 17 se ilustra un diagrama de la solución gráfica que tendrá este juego.

Ahora, deseamos determinar B a partir de $\frac{p}{q} = \frac{5}{8}$ y $\nu = 4$. Entonces, sólo hay que sustituir los valores de acuerdo a las fórmulas encontradas: $a = q + \nu - p = 7$, $b = -q + \nu + p = 1$, $c = \nu - p = -1$, $d = \nu + p = 9$, $f = \nu - p - 1 = -2$. De donde, $e = 2q + \nu - p - 1 = 14$. Por lo tanto, la matriz que obtenemos es:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 14 \\ -1 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

.

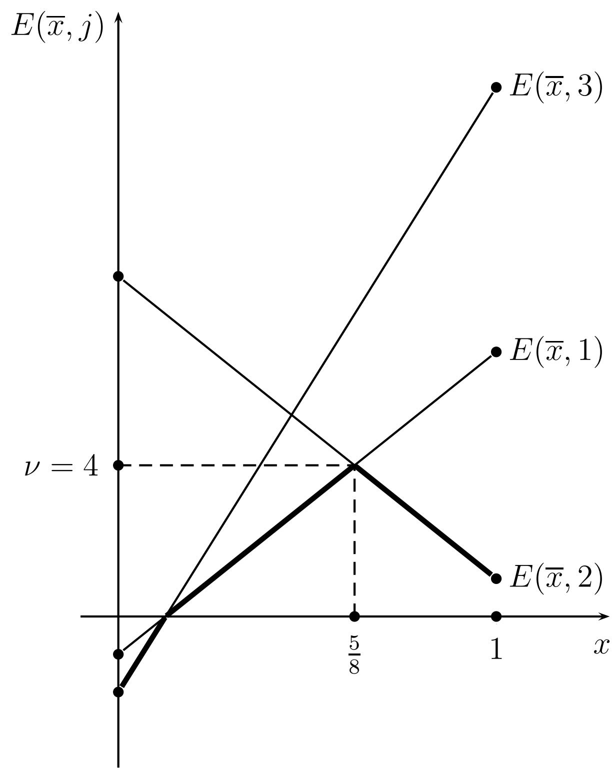


Figura 17

Si resolvemos el juego asociado a la matriz B, podemos verificar que efectivamente la solución del juego es como se planeó:

$$\overline{x}^* = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right), \ \overline{y}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \ \nu(A) = 4.$$

3.3. Solución con óptimos múltiples

Para construir la matriz de un juego cuya solución tenga óptimos múltiples, vamos a usar algunas de las observaciones hechas en el caso anterior.

Buscamos definir las compenentes de una matriz, $C = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix}$, asociada a un juego, cuya solución tenga al menos dos estrategias mixtas óptimas para el jugador I y además, el valor del juego sea un valor, ν, específico. Las estrategias mixtas óptimas para el jugador I serán de la forma: $\overline{x}_1^* = (\frac{p}{q}, 1 - \frac{p}{q})$ y $\overline{x}_2^* = (\frac{r}{s}, 1 - \frac{r}{s})$, con $p, \ q, \ r$ y s números enteros positivos y $\frac{p}{q} \neq \frac{r}{s}$. La solución gráfica se realizará para el jugador I entonces, se usará el principio maximin para dicha solución.

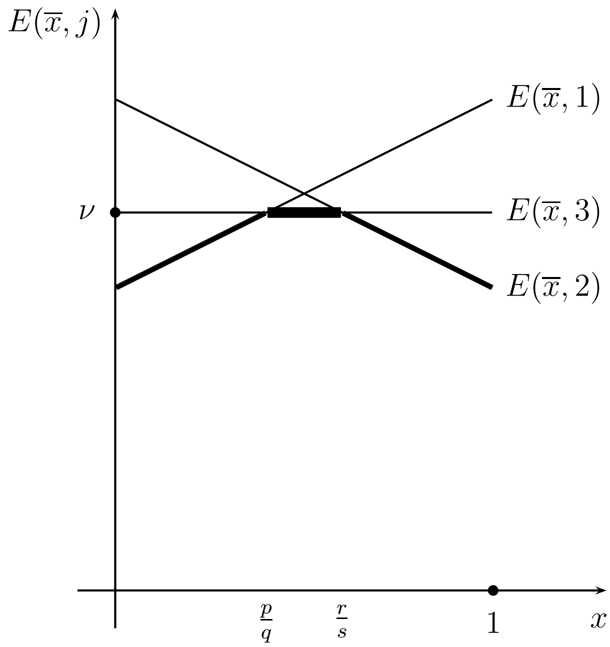


Figura 18

Haciendo las operaciones correspondientes encontramos que:
$E(\overline{x}, 1) = (a - c)x + c$,
$E(\overline{x}, 2) = (b - d)x + d$,
$E(\overline{x}, 3) = (e - f)x + f$.

Deseamos que el jugador I tenga, al menos, las estrategias mixtas óptimas $\overline{x}_1^*$ y $\overline{x}_2^*$, además, que el valor del juego sea ν. Esto significa que en el punto $x = \frac{p}{q}$ el valor de $E(\overline{x}, 1)$ debe ser ν y también, que en $x = \frac{r}{s}$ el valor de $E(\overline{x}, 2)$ debe ser ν. Con esto y considerando las observaciones de la sección anterior entonces, $E(\overline{x}, 3)$ debe ser constante y debe valer ν. Lo cual implica que la ordenada al origen del segmento asociado a $E(\overline{x}, 3)$ es ν y a su vez, implica que $e = f = \nu$.

Una posible ubicación de los segmentos asociados a $E(\overline{x}, 1)$ y $E(\overline{x}, 2)$ se ilustra en la Figura 18. Considerando todo esto, debemos encontrar valores para las componentes de C tales que: $m_1(\frac{p}{q}) + c = \nu$, $m_2(\frac{r}{s}) + d = \nu$, donde $m_1 = (a - c)$ y $m_2 = (b - d)$. Una posibilidad es que $m_1 = q$ y $m_2 = -s$ entonces, $c = \nu - p$ y $d = \nu + r$. Lo cual implica a su vez que:
$a = q + \nu - p$ y $b = -s + \nu + r$. Por lo tanto, una posibilidad para definir C es:

$$C = \begin{pmatrix} q + \nu - p & -s + \nu + r & \nu \\ \nu - p & \nu + r & \nu \end{pmatrix}$$

A continuación, aplicamos este procedimiento.

Ejemplo 17. Solución con óptimos múltiples.

Definir una matriz de pagos en la que el valor del juego, ν, sea 10 y las estrategias óptimas par el jugador I sean: $\overline{x}_1^* = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ y $\overline{x}_2^* = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7})$.

Dado que ya tenemos las fórmulas para encontrar la matriz, sólo basta sustituir los valores en las fórmulas; haciendo los cálculos correspondientes tenemos que:

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 10 \\ 8 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

.

Resolviendo el problema podemos verificar que efectivamente la solución es como se planeó.

La solución 1 es $\overline{x}_1^* = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$, $\overline{y}^* = (0, 0, 1)$, $\nu = 10$.
La solución 2 es $\overline{x}_2^* = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7})$, $\overline{y}^* = (0, 0, 1)$, $\nu = 10$.

Todas las soluciones son: $\overline{x}^* = (\lambda, 1 - \lambda)$, $\overline{y}^* = (0, 0, 1)$, $\nu = 10$, $\lambda \in [\frac{2}{5}, \frac{4}{7}]$.

Conclusiones

De acuerdo con el desarrollo de este trabajo, podemos destacar las siguientes conclusiones:

Se encontró una manera de plantear problemas cuya solución se determina de antemano, para problemas de programación lineal, transporte, asignación, ruta más corta, flujo máximo y juegos.

Los problemas que se pueden plantear geométricamente, proporcionan todos los elementos para construir ejemplos cuya solución sea del tipo deseado (solución factible óptima única, solución factible óptima alternativa, entre otras). A diferencia de los problemas que no se pueden graficar, los cuales restringen la posibilidad de usar una representación geométrica para construir el problema como se desea; en estos casos hay que hacer otro tipo de análisis.

Los problemas del Capítulo 1 se construyen a partir de propiedades geométricas y dependiendo del ejemplo que se desea construir, el gradiente de la función objetivo o los vectores involucrados deben cumplir ciertas características, pero lo importante de estos vectores es la dirección. Una vez encontrada la dirección o el cono donde puede variar esta, el vector que interesa tiene muchas posibilidades porque puede pertenecer al cono correspondiente, por consiguiente la restricción o función que dependa del vector puede variar. Sin embargo, en este trabajo sólo se consideraron algunas de tales posibilidades para hacer más clara la explicación.

En los problemas de transporte se puede tener solución factible óptima alternativa o solución factible única, modificando al menos un costo de envío de un origen a un destino. En los problemas de asignación se consiguió que un problema tenga asignación óptima predeterminada y además, que sea necesario implementar todos los pasos del método de solución para resolver el problema.

En los métodos que se proponen para construir redes con ruta más corta predeterminada y ruta más corta alternativa se analizan diferentes rutas, si la red que se desea definir tiene un gran número de nodos y arcos, entonces la cantidad de rutas que se deben analizar también es grande, por experiencia en la construcción de estos problemas, para que la cantidad de rutas que se analice sea un número manejable, se sugiere que las redes tengan una cantidad de nodos entre 7 y 9 y un número de arcos entre 10 y 17.

Visualizar geométricamente los problemas ayuda a la discusión de los mismos y también ayuda a comprender mejor su solución.

En el Capítulo 3 se proponen métodos para definir matrices cuya solución está predeterminada para el jugador I, un análisis similar se puede aplicar para construir las matrices de forma que la solución predeterminada sea para el jugador II.

En un juego cuya matriz de pagos es de 2×2, es muy interesante comparar el punto silla de la ganancia esperada $E(\overline{x}, \overline{y})$ con las soluciones geométricas para cada jugador por separado.

Apéndice A

Forma explícita de un problema respecto a una base

Consideremos un problema de programación lineal

$$\mathbb{P}: \begin{array}{ll} Max & z = cx \\ s.a. & Ax \leq b \\ & x \geq \overline{0}, \end{array}$$

donde A es una matriz de tamaño $m \times n$ con rango m, x y $\overline{0}$ son vectores de tamaño $n \times 1$, b es un vector de tamaño $m \times 1$ y c es un vector de tamaño $1 \times n$. Una base para el espacio vectorial generado por las columnas de la matriz A, se construye con m columnas linealmente independientes de la misma matriz.

Si el conjunto de soluciones factibles es no vacío podemos elegir x_0, una solución básica factible construida a partir de una base B. Considerando las restricciones del problema $\mathbb{P}$, observamos que la variable x_j está asociada a la columna A^j de la matriz, por lo que una elección de columnas también se obtiene eligiendo los índices de las variables asociadas a dichas columnas, es decir, $\{i_1, \ldots, i_m\}$. Se hará un abuso con la letra B, que según el contexto denotará una matriz cuadrada formada por columnas de A o también el conjunto de índices de las variables asociadas a dichas columnas $\{i_1, \ldots, i_m\}$; de igual manera la letra N puede denotar la matriz formada por las columnas restantes de la matriz A, además de los índices $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_m\}$.

Una solución básica obtenida a partir de una base B se puede expresar de la siguiente forma: $x_0 = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$, donde $x_B = B^{-1}b$ y los valores de las variables no básicas x_N son cero; el valor de la función objetivo en esta solución está dado por $z_0 = (c_B, c_N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = c_B x_B + c_N x_N = c_B(B^{-1}b)$.

Las restricciones del problema $\mathbb{P}$ se pueden expresar de la siguiente forma: $Bx_B + Nx_N = b$, si multiplicamos este sistema por B^{-1} y reordenamos los términos obtenemos $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$. Denotamos por Y^j a la j-ésima columna de la matriz $B^{-1}N$, es decir, $Y^j = B^{-1}N^j$, sustituyendo esto en el sistema anterior obtenemos lo siguiente.

$$x_B = B^{-1}b - \sum_{j\in N} Y^j x_j.$$

Sustituyendo x_B en la función objetivo $z = c_B x_B + c_N x_N$ obtenemos:

$$\begin{aligned} z &= c_B(B^{-1}b - \sum_{j\in N} Y^j x_j) + c_N x_N \\ &= c_B(B^{-1}b - \sum_{j\in N} Y^j x_j) + \sum_{j\in N} c_j x_j; \end{aligned}$$

si recordamos que $z_0 = c_B B^{-1} b$ y definimos $z_j = c_B Y^j$ para sustituirlo en la expresión anterior obtenemos:

$$z = z_0 + \sum_{j\in N} (c_j - z_j) x_j.$$

El coeficiente $c_j - z_j$ se denomina coeficiente de costo reducido de la variable x_j.

Con lo anterior, podemos plantear el problema en la forma siguiente.

$$\mathbb{P}: \quad \begin{array}{ll} Max & z = z_0 + \sum_{j\in N} (c_j - z_j) x_j \\ s.a. & \\ & \sum_{j\in N} Y^j x_j + x_B = B^{-1}b \\ & x_j \geq\ 0,\ j \in N \text{ y } x_B \geq \overline{0}. \end{array}$$

Escribir el problema $\mathbb{P}$ de esta manera es lo que aquí entendemos por expresar el problema en *forma explícita respecto a la base* B.

Con esta forma de expresar el problema tenemos varias ventajas, la más importante es que se conoce la situación del problema, veamos:

Situación 1: si los coeficientes de la función objetivo cumplen que $c_j - z_j \leq 0, \forall\ j$, $j \in N$, significa que incrementar el valor de la variable x_j, $j \in N$ implica disminuir o no modificar el valor de la función objetivo, así entonces, tenemos la condición de optimalidad.

Por otro lado, si se tiene que $c_j - z_j > 0$ para alguna $j \in N$ entonces, es posible mejorar el valor de la función objetivo en la cantidad $c_j - z_j$ por cada unidad que se incremente el valor de la variable x_j. A partir de este caso se tienen a su vez dos opciones:

Situación 2: si la columna Y^j asociada a la variable x_j tiene todas sus componentes negativas, entonces podemos dar a la variable x_j un valor λ arbitrariamente grande y pasar al lado derecho del sistema de ecuaciones un múltiplo de la columna Y^j, es decir, $x_B = B^{-1}b - \lambda Y^j$ lo cual genera una clase de soluciones factibles que conforman un rayo y el valor de la función objetivo, $z = z_0 + \lambda(c_j - z_j)$, se incrementa arbitrariamente en función de λ. Esto significa que no hay un óptimo finito para el problema. Por último, el otro caso.

Situación 3: cuando hay al menos una componente positiva en la columna Y^j y el vector $B^{-1}b$ no tiene componentes iguales a cero[1]. Entonces, es posible mejorar el valor de la función objetivo incrementando el valor de la variable x_j cuyo coeficiente $c_j - z_j$ es positivo. El límite para el incremento de la función objetivo está dado por el máximo incremento de la variable x_j, que puede ser hasta[2] $\underset{i\ /\ Y_i^j > 0}{min} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{Y_i^j} \right\}$.

Entonces, ver escrito el problema en forma explícita respecto a una base tiene la ventaja de mostrar la situación del problema.

[1]Esto significa que no tenemos más de una base asociada al punto extremo, es decir, el punto no es degenerado; este caso es uno de los que se construye en este trabajo.

[2]Pues se busca una mejor solución que siga siendo factible; el máximo incremento de la variable x_j se hará mientras se mantenga la factibilidad y esta se rompe con la primera componente $(B^{-1}b)_i - x_j Y_i^j < 0$; se está disminuyendo una cantidad positiva así que el máximo decremento (manteniendo el resultado ≥ 0) es cuando se igualan las cantidades, es decir, $(B^{-1}b)_i = x_j Y_i^j$, por lo que el mayor valor de x_j es $\frac{(B^{-1}b)_i}{Y_i^j}$.

APÉNDICE A

Algoritmo Simplex

(0) Se parte de una base B tal que la solución básica asociada es factible y se escribe el problema en forma explícita con respecto a la base B.

(1) Se analizan los coeficientes de costo reducido $c_j - z_j$.

- Si $c_j - z_j \leqslant 0 \ \forall \ j, \ j \in N$, terminar, la solución que se tiene es óptima.
- Si existe al menos un índice j, $j \in N$, tal que $c_j - z_j > 0$, sea $c_k - z_k = \underset{j \in N}{max} \{c_j - z_j\}$ e ir al paso[3] (2).

(2) Dos opciones:

- Si $Y^k \leqslant \overline{0}$ entonces, existe una clase de soluciones factibles tal que el valor de $z \to \infty$ cuando $x_k \to \infty$, es decir:
  $x_i = x_i - Y_i^k x_k \quad i \in B,$
  $x_k = \lambda > 0$, arbitrariamente grande,
  $x_j = 0 \ \forall \ j, j \in N \setminus \{k\}$.
  Terminar, no existe solución optima finita.
- Si $Y^k \nleqslant \overline{0}$ ir al paso (3).

(3) Se escoge $l \in B$ tal que $\frac{(B^{-1}b)_l}{Y_l^k} = \underset{i \ / \ Y_i^k > 0}{min} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{Y_i^k} \right\}$ y se pivotea sobre Y_l^k, con ello se cambia de base y simultáneamente se escribe el problema en forma explícita respecto a la nueva base, luego se regresa al paso (1).

A continuación, describimos la forma de resolver un problema de programación lineal implementado el algoritmo simplex.

Ejemplo A1. Resolver el problema $\mathbb{P}$ con el algoritmo simplex.

$$\mathbb{P}: \quad \begin{array}{rr} Max & z = x + 5y \\ s.a. & x - 2y \leq 1 \\ & x - \ y \leq 2 \\ & -x + 7y \leq 28 \\ & x, \quad y \ \geq 0. \end{array}$$

Se agregan variables de holgura para escribir el problema en forma estándar.

[3] Este criterio para elegir la variable x_j no es indispensable, basta que el coeficiente $c_j - z_j$ sea positivo. Tomar el máximo $c_j - z_j$ no necesariamente garantiza que se llegue más rápido a la solución factible óptima, como se puede ver en algunos ejemplos, pero permite seguir un procedimiento.

$$
\mathbb{P}: \quad \begin{array}{ll} Max & z = x + 5y \\ s.a. & \quad x - 2y + h_1 \qquad\quad = 1 \\ & \quad x - \ \ y \ \ + h_2 \qquad = 2 \\ & -x + 7y \qquad\ \ + h_3 = 28 \\ & \quad x,\ y,\ h_1,\ h_2,\ h_3 \geq 0. \end{array}
$$

En esta forma del problema observamos que las columnas asociadas a las variables de holgura forman una base para el espacio vectorial generado por las columnas de la matriz además, la solución básica obtenida con esta base es factible. Entonces podemos iniciar el algoritmo simplex a partir de esta solución básica, para ello escribimos la información en la tabla simplex.

iteración		x	y	h_1	h_2	h_3	
	h_1	1	-2	1	0	0	1
	h_2	1	-1	0	1	0	2
	h_3	-1	$\boxed{7}$	0	0	1	28
$\boxed{0}$	-z	1	$\boxed{5}$	0	0	0	0

Tabla que corresponde a la forma explícita del problema con respecto a la solución básica factible inicial.

	h_1	$\frac{5}{7}$	0	1	0	$\frac{2}{7}$	9
	h_2	$\boxed{\frac{6}{7}}$	0	0	1	$\frac{1}{7}$	6
	y	-$\frac{1}{7}$	1	0	0	$\frac{1}{7}$	4
$\boxed{1}$	-z	$\boxed{\frac{12}{7}}$	0	0	0	-$\frac{5}{7}$	-20

Para hacer la primera iteración se eligió la variable no básica y cuyo coeficiente de costo reducido es 5; la variable h_3 sale de la base por tener el cociente mínimo; el pivote está señalado con un rectángulo, es el número 7 de la tabla inicial.

	h_1	0	0	1	-$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	4
	x	1	0	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{6}$	7
	y	0	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	5
$\boxed{2}$	-z	0	0	0	-2	-1	-32

Para hacer la segunda iteración se eligió la variable no básica x cuyo coeficiente de costo reducido es $\frac{12}{7}$; la variable h_2 sale de la base de acuerdo al criterio de salida para la variable; el pivote está señalado con un rectángulo, es el número $\frac{6}{7}$ de la segunda tabla.

En la tabla que corresponde a la segunda iteración, los coeficientes de costo reducido de las variables no básicas son negativos entonces, se tiene la solución factible óptima del problema $\mathbb{P}$: $x^* = (7, 5, 4, 0, 0)^T$ con $z_{\text{Máx}} = 32$.

En el ejemplo anterior, a partir de las restricciones del problema en forma estándar se identificó una solución básica factible inicial y con ella inició el algoritmo simplex.

En general, las restricciones de un problema no siempre permiten identificar una solución básica factible inicial, en esos casos se utiliza un método para obtener una solución de este tipo; los métodos más usados son: el método de las dos fases y el método de la gran M [4].

Apéndice B

Problema de transporte

Un procedimiento para resolver el problema de transporte es el siguiente:

i) Encontrar una solución factible que corresponda a un punto extremo[4], con algún método.

ii) Comprobar si es óptima; si no es así, se obtiene una mejor. El método más utilizado es el *stepping-stone* [11].

Hay varios métodos para encontrar soluciones iniciales factibles:

a) Método de la casilla de costo mínimo;

b) Método de Vogel;

c) Método de la esquina noroeste.

A continuación, presentamos un ejemplo para ilustrar un procedimiento que resuelve el problema de transporte. La solución inicial la obtendremos con el método de la esquina noroeste, los otros métodos se pueden consultar en la literatura que aborde el problema de transporte [4].

[4]Una solución factible corresponde a un punto extremo si la subgráfica asociada a la solución, es un árbol en la red que modela el problema de transporte.

Ejemplo B1. Resolver el problema de transporte.

La información del problema se resume en la tabla siguiente:

	4	5	6	Disp.
1	$\boxed{8}$	$\boxed{13}$	$\boxed{7}$	33
2	$\boxed{11}$	$\boxed{9}$	$\boxed{5}$	16
3	$\boxed{10}$	$\boxed{4}$	$\boxed{12}$	21
Dem.	15	37	18	

donde los elementos en el interior de cada casilla representan los costos de transporte unitarios de los orígenes a los destinos. El método de la esquina noroeste comienza tomando la posición situada al noroeste de la tabla, es decir, (1,4). En esta casilla se asigna el mayor número posible de unidades, que será el mínimo entre la disponibilidad del origen 1 y la demanda del destino 4.

En este caso, $x_{11} = min\{15, 33\} = 15$. Luego, se resta el valor asignado a la disponibilidad en 1 y a la demanda de 4. La tabla queda así:

	4	5	6	Disp.
1	$\boxed{8}$ 15	$\boxed{13}$	$\boxed{7}$	18
2	$\boxed{11}$	$\boxed{9}$	$\boxed{5}$	16
3	$\boxed{10}$	$\boxed{4}$	$\boxed{12}$	21
Dem.	0	37	18	

Entonces, se elimina ya sea un renglón o una columna, dependiendo de que la disponibilidad quede agotada o la demanda quede satisfecha. En este caso, la columna 1 ya tiene demanda 0 entonces se elimina, obteniendo así la tabla reducida con demanda y disponibilidad actualizada.

	5	6	Disp.
1	[13]	[7]	18
2	[9]	[5]	16
3	[4]	[12]	21
Dem.	37	18	

Repetimos el procedimiento en esta tabla, se coloca 18 en la casilla (1,5)[5] por lo que se disminuyen 18 unidades en la demanda de 5 y en la disponibilidad de 1. Puesto que se agota la disponibilidad del origen 1 se elimina el primer renglón:

	5	6	Disp.
2	[9]	[5]	16
3	[4]	[12]	21
Dem.	19	18	

El procedimiento continua de esta manera hasta agotar la tabla. El resultado de esta asignación es la siguiente.

	4	5	6	Disp.
1	[8] 15	[13] 18	[7]	33
2	[11]	[9] 16	[5]	16
3	[10]	[4] 3	[12] 18	21
Dem.	15	37	18	

Se puede verificar que la solución obtenida es factible; el costo total de esta solución es:

$$z = 8 \times 15 + 13 \times 18 + 9 \times 16 + 4 \times 3 + 12 \times 18 = 726.$$

[5] La casilla (1,5) también la podemos denotar por (1,5).

En este tipo de soluciones iniciales factibles se asignan valores en algunas casillas de la tabla y otras quedan vacías; las casillas ocupadas se denominan *casillas básicas* y las vacías se llaman *casillas no básicas*.

Con la solución inicial obtenida podemos aplicar el método de *stepping-stone*: que empieza calculando los costos adicionales de cada casilla no básica a partir de la construcción de un ciclo para cada una. El ciclo para una casilla no básica está asociado a un ciclo en la gráfica del problema de transporte. En la tabla, el ciclo para la casilla no básica comienza y termina en esta casilla y está formado por segmentos alternados horizontales y verticales o viceversa, con extremos en casillas básicas. Se designarán alternativamente las casillas del ciclo con + y -, empezando con + en la casilla no básica de partida. El costo adicional resulta de sumar y restar los costos de transporte unitarios de las casillas que forman el ciclo, sumando los costos de las casillas con signo + y restando los costos de las casillas con signo -.

Para ejemplificar, calculamos el costo adicional de 1 a 6 denotado por CA_{16}:

	4	5	6
1	$\boxed{8}$ 15	$\boxed{13}$ - 18	$\boxed{7}$ +
2	$\boxed{11}$	$\boxed{9}$ 16	$\boxed{5}$
3	$\boxed{10}$	$\boxed{4}$ + 3	$\boxed{12}$ - 18

En este caso $CA_{16} = 7 - 13 + 4 - 12 = \boxed{-14}$. El ciclo inicia en la casilla no básica (1,6), llega a la casilla básica (1,5), después a (3,5) de donde pasa a (3,6) y regresa a (1,6). De esta manera calculamos el resto de los costos adicionales:

$$\begin{aligned} CA_{24} &= 11 - 9 + 13 - 8 = 7, \\ CA_{26} &= 5 - 9 + 4 - 12 \;\; = -12, \\ CA_{34} &= 10 - 4 + 13 - 8 = 11. \end{aligned}$$

Si todos los costos adicionales son mayores que o iguales a cero, la solución actual es óptima, pero en este caso no es así. Entonces, se toma la casilla con el menor costo adicional: $CA_{16} = -14$ y se genera una nueva solución sumando y restando una cantidad δ en las casillas del ciclo, la suma y resta es de acuerdo a los signos de las casillas, $\delta = \underset{(i,j)^-}{min}\{x_{ij}\}$, donde $(i,j)^-$ es una casilla del ciclo designada con el signo menos, si hay empate en casillas marcadas con signo menos sólo una se hace no básica (se deja vacía), de esta manera la solución sigue correspondiendo a un punto extremo.

Para la casilla CA_{16}, $\delta = min\{18, 18\} = 18$; la nueva solución se describe en la tabla siguiente.

$\boxed{8}$ 15	$\boxed{13}$ 0	$\boxed{7}$ 18
$\boxed{11}$	$\boxed{9}$ 16	$\boxed{5}$
$\boxed{10}$	$\boxed{4}$ 21	$\boxed{12}$

Así, $z = 726 - 14(18) = 474$ y coincide con el resultado de calcular el costo directamente. Ahora los costos adicionales de esta tabla son:

$$\begin{aligned} CA_{24} &= \quad 11 - 9 + 13 - 8 \quad = 7, \\ CA_{26} &= \quad 5 - 7 + 13 - 9 \quad = 2, \\ CA_{34} &= \quad 10 - 4 + 13 - 8 \quad = 11, \\ CA_{36} &= \quad 12 - 7 + 13 - 4 \quad = 14. \end{aligned}$$

Como todos son positivos termina el procedimiento, la solución factible óptima es única:

$$\begin{gathered} x^*_{14} = 15,\ x^*_{15} = 0,\ x^*_{16} = 18, \\ x_{24} = 0,\ x^*_{25} = 16,\ x_{26} = 0, \\ x_{34} = 0,\ x^*_{35} = 21,\ x_{36} = 0, \\ z_{min} = 474. \end{gathered}$$

Problema de Asignación

Un procedimiento para resolver el problema de asignación es el método húngaro [4]. Para describir el método hacemos un ejemplo.

Ejemplo B2. Problema de asignación.

La tabla siguiente muestra los costos de un problema de asignación, donde la posición $[C_i, P_j]$ representa el costo de asignar el candidato i al puesto j.

$$\begin{array}{cc} & \text{Puestos} \\ & \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \text{Candidatos} \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 14 & 17 & 15 & 18 \\ 26 & 24 & 11 & 17 \\ 19 & 22 & 18 & 22 \\ 25 & 23 & 19 & 20 \end{bmatrix} \end{array}$$

El primer paso consiste en restar a cada renglón su elemento mínimo, luego de esto, se hace lo mismo con las columnas.

A continuación, restamos el mínimo por renglones. Para la ejemplificación, se presenta a la derecha de la tabla el elemento mínimo de cada renglón con signo menos:

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 14 & 17 & 15 & 18 \\ 26 & 24 & 11 & 17 \\ 19 & 22 & 18 & 22 \\ 25 & 23 & 19 & 20 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} (-14) \\ (-11) \\ (-18) \\ (-19) \end{array} \end{array}$$

Así, obtenemos.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & (-3) & & (-1) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 4 \\ 15 & 13 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ahora restamos el mínimo en las columnas que no tienen ceros, la tabla resultante es la siguiente.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 15 & 10 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Supongamos que cubrimos con tiras de papel las columnas y renglones que tienen ceros. En la tabla siguiente se ejemplifica esta acción.

La tabla asociada a un problema de asignación tiene una *asignación independiente de ceros* cuando el número mínimo de tiras horizontales o verticales que se requieren para cubrir los ceros es n (número de candidatos). Si el número mínimo de tiras es menor a n , todavía no hay una asignación independiente de ceros.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 15 & 10 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego de cubrir los ceros de la tabla con el menor número de tiras posible, analizamos si hay una asignación independiente de ceros; en la tabla anterior: el número mínimo de tiras para cubrir los ceros es tres, el cual es menor que cuatro, el número de candidatos. Entonces todavía no hay asignación independiente de ceros, continuamos generando ceros adicionales en la tabla con el siguiente procedimiento:

a) Identificamos el menor costo no cubierto por las tiras del paso anterior, que será positivo porque todos los ceros están cubiertos. En la tabla anterior es 1.

b) Restamos esta cantidad a todos los elementos no cubiertos, la sumamos a los elementos cubiertos que estén en la intersección de tiras horizontales y verticales, el resto permanece igual.

Para obtener una asignación independiente de ceros es posible que sea necesario aplicar más de una vez este último procedimiento.

Vamos a considerar la tabla anterior para generar más ceros:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 15 & 10 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

el menor costo no cubierto por las tiras es 1 y luego de aplicar el procedimiento descrito en el inciso b), obtenemos la tabla siguiente.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 14 & 9 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En esta tabla el número mínimo de tiras para cubrir los ceros es 4. Entonces, ya podemos encontrar una asignación independiente de ceros.

Las dos asignaciones con menor costo son las siguientes:

$$\begin{array}{cc} \text{I} & \text{II} \\ C_1 \longrightarrow P_1 & C_1 \longrightarrow P_2 \\ C_2 \longrightarrow P_3 & C_2 \longrightarrow P_3 \\ C_3 \longrightarrow P_2 & C_3 \longrightarrow P_1 \\ C_4 \longrightarrow P_4 & C_4 \longrightarrow P_4 \end{array}$$

En la asignación I el candidato 1 se asigna al puesto 1; el candidato 2, al puesto 3 y así sucesivamente. En la asignación II el candidato 1 se asigna al puesto 2; el candidato 2 al puesto 3 y así sucesivamente.

En ambas soluciones $z_{min} = 67$, ya que:

$$\begin{aligned} z_{min} &= c_{11} + c_{23} + c_{32} + c_{44} = 14 + 11 + 22 + 20 = 67 \\ &= c_{12} + c_{23} + c_{31} + c_{44} = 17 + 11 + 19 + 20 = 67. \end{aligned}$$

Otro problema importante de asignación es cuando se tienen utilidades en lugar de costos y se trata de encontrar la asignación que maximice la utilidad. Este problema se resuelve transformando el problema de maximizar a minimizar, para resolverlo con el método ya conocido, una vez resuelto, $w_{Máx}$ está en términos de z_{min}, es decir, $w_{Máx} = -z_{min}$. A continuación, desarrollamos un ejemplo de este tipo.

Ejemplo B3. Asignación con utilidades.

Encontrar la asignación que maximice la utilidad en un problema que tiene asociada la siguiente tabla de utilidades.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Puestos} \\
 & \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\
\text{Candidatos} \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 12 & 68 & 64 & 43 \\ 85 & 27 & 13 & 42 \\ 29 & 84 & 12 & 88 \\ 20 & 55 & 24 & 71 \end{bmatrix} \text{tabla de utilidades}
\end{array}
$$

Primero transformamos la tabla de utilidades en una tabla de costos, en cuyo caso sabemos encontrar z_{min} con el método húngaro.

La tabla de costos se describe a continuación.

$$
\begin{bmatrix} -12 & -68 & -64 & -43 \\ -85 & -27 & -13 & -42 \\ -29 & -84 & -12 & -88 \\ -20 & -55 & -24 & -71 \end{bmatrix}
$$

Luego, encontramos el mínimo de las columnas y lo restamos a cada columna.

$$
\begin{array}{c}
-(-85)-(-84)-(-64)-(-88) \\
\begin{bmatrix} -12 & -68 & -64 & -43 \\ -85 & -27 & -13 & -42 \\ -29 & -84 & -12 & -88 \\ -20 & -55 & -24 & -71 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Haciendo las operaciones correspondientes, obtenemos.

$$
\begin{bmatrix} 73 & 16 & 0 & 45 \\ 0 & 57 & 51 & 46 \\ 56 & 0 & 52 & 0 \\ 65 & 29 & 40 & 17 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{Esta es la tabla de} \\ \text{costos de oportunidad} \end{array}
$$

Restamos 17 al cuarto renglón generar la siguiente tabla.

$$\begin{bmatrix} 73 & 16 & 0 & 45 \\ 0 & 57 & 51 & 46 \\ 56 & 0 & 52 & 0 \\ 48 & 12 & 23 & 0 \end{bmatrix}$$

En la tabla anterior, tenemos una asignación independiente de ceros pues el número mínimo de tiras para cubrir los ceros es 4.

$$\begin{bmatrix} 73 & 16 & \boxed{0} & 45 \\ \boxed{0} & 57 & 51 & 46 \\ 56 & \boxed{0} & 52 & 0 \\ 48 & 12 & 23 & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{array}{c} C_1 \longrightarrow P_3 \\ C_2 \longrightarrow P_1 \\ C_3 \longrightarrow P_2 \\ C_4 \longrightarrow P_4 \\ z_{min} = -304 \end{array}$$

La solución del problema maximizar w tiene la misma asignación y $w_{Máx} = -z_{min} = 304$.

Verificamos que $w_{Máx} = u_{13} + u_{21} + u_{32} + u_{14} = 64 + 85 + 84 + 71 = 304$, donde la variable u_{ij} es la utilidad de asignar el candidato i al puesto j.

Problema de la ruta más corta

Si el problema de la ruta más corta tiene asociada una red que cumple las siguientes condiciones: (1) es una red dirigida y conexa, (2) la red tiene dos nodos distinguidos o y d (origen y destino), (3) todos los costos asociados a los arcos son números enteros no negativos, (4) existe al menos una ruta de o a d. Entonces, el problema se puede resolver con el método de etiquetación de Dijkstra [4,5], el cual, además, encuentra la ruta más corta desde el origen al resto de los nodos.

Las etiquetas para este método son de la forma $\{i, d_j\}$, donde d_j es la distancia de una ruta más corta del nodo o al nodo j, i representa al nodo antecesor de j en dicha ruta. A continuación, se describe el método de etiquetación de Dijkstra.

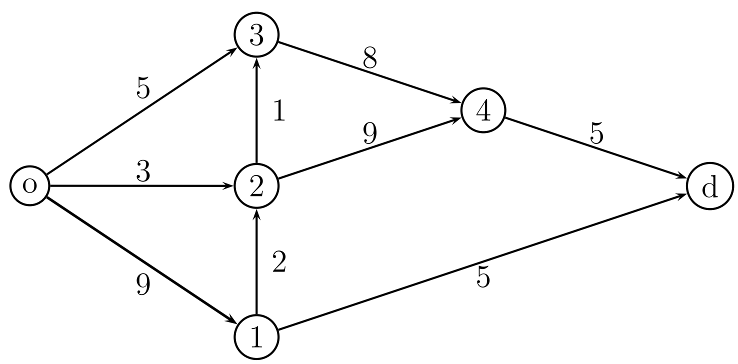
El paso 1 consiste en poner la etiqueta $\{-, 0\}$ al origen. El guión de la etiqueta significa que no tiene antecesor.

El paso 2 consiste en calcular las distancias de los nodos etiquetados a los nodos sucesores de los nodos etiquetados y se etiqueta sólo un *nodo sucesor* cuya d_j sea mínima, $d_j = d_i + c_{ij}$. Si hay empate elegimos arbitrariamente cualquiera de ellos.

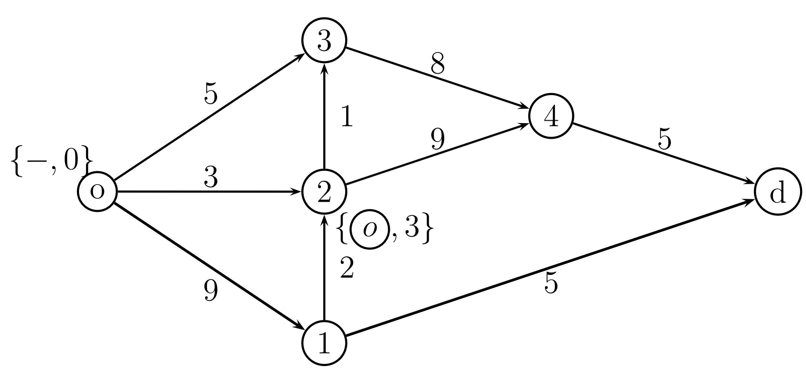
El Paso 3 verifica si el nodo destino d ya ha sido etiquetado; de ser así, se ha encontrado la ruta más corta del origen o al destino d. La ruta más corta se identifica a través de los antecesores indicados en las etiquetas y la distancia mínima es la d_j que aparece en la etiqueta del nodo destino. Si el nodo destino aún no tiene etiqueta, regresamos al paso 2.

Ejemplo B4. Ruta más corta.

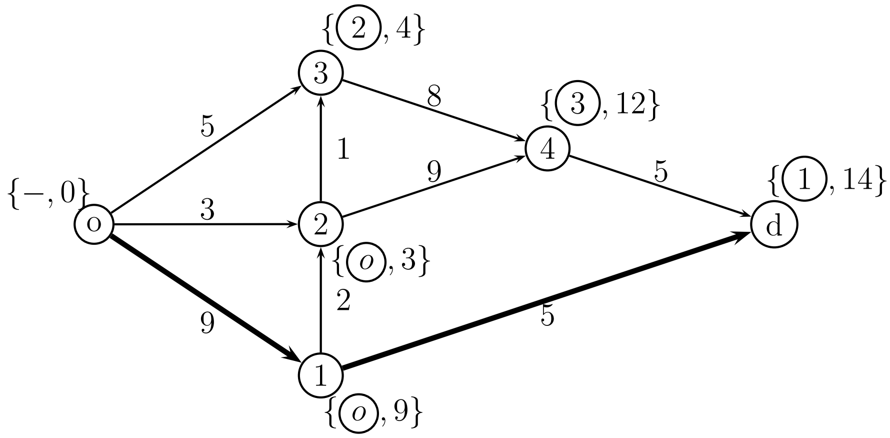
Encontrar la ruta más corta del origen (o) al destino (d) en la siguiente red.



Primero ponemos la etiqueta $\{-, 0\}$ al origen (este nodo no tiene antecesor), luego, calculamos las distancias de los nodos sucesores del origen, es decir, los nodos 1, 2 y 3, sus distancias son 9, 3, 5, respectivamente. La distancia mínima es $d_j = d_2 = 3$. Etiquetamos el nodo 2 con $\{o, 3\}$. La red hasta este paso es la siguiente.



Aún no hemos etiquetado el nodo d, continuamos calculando las distancias de los nodos etiquetados a sus nodos sucesores, en este caso los sucesores de los nodos etiquetados son 1, 3, 4 y sus distancias son 9, 4, 12, respectivamente; d_3 es la mínima, entonces etiquetamos al nodo 3.



Continuando con el algoritmo, llegamos a etiquetar con $\{1, 14\}$ al destino, entonces el último arco de la ruta más corta es $(1, d)$, la etiqueta del nodo 1 es $\{o, 9\}$ así que el penúltimo arco de la ruta es $(o, 1)$, por lo tanto, la ruta más corta es $o \underset{9}{\rightarrow} 1 \underset{5}{\rightarrow} d$ y la distancia mínima es 14.

Problema de flujo máximo, cortadura mínima

Para resolver el problema de flujo máximo vamos a utilizar el método de etiquetación de Ford y Fulkerson [4, 5], que inicia con un *flujo factible* y consiste en lo siguiente.

i) Se determinan rutas del origen al destino, tales que ningún arco esté saturado, es decir, que el flujo sea menor a la capacidad del arco; esto mediante la etiquetación y luego se actualiza el flujo, hasta agotar las rutas.

ii) Si ya no hay rutas que incrementen el flujo en la red, buscamos cadenas del origen al destino tal que los arcos en sentido directo no deben estar saturados y los arcos que estén en sentido contrario deben llevar flujo positivo, esto mediante la etiquetación y luego se actualiza el flujo, hasta agotar las cadenas.

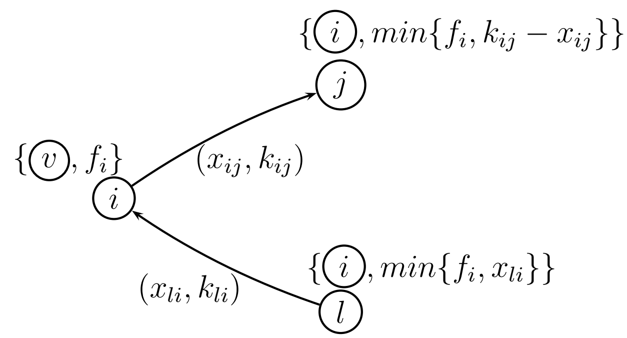
iii) Si no hay cadenas con esta propiedad, entonces se tiene que el flujo es máximo.

La etiquetación se realiza de la siguiente manera:

> Iniciamos poniendo la etiqueta $\{d, \infty\}$ al origen. Si el arco (i, j) pertenece a la red y se desea etiquetar el nodo j a partir del nodo i, la etiqueta es $\{i, f_j\}$ donde $f_j = min\{f_i, k_{ij} - x_{ij}\}$.

Si el arco (l, i) pertenece a la red y se desea etiquetar el nodo l a partir del nodo i, pero $x_{li} > 0$, la etiqueta del nodo l a partir del nodo i es $\{i, f_l\}$ donde $f_l = min\{f_i, x_{li}\}$. En este caso, se está etiquetando un nodo a partir de otro donde el arco que los une está recorrido en sentido contrario.

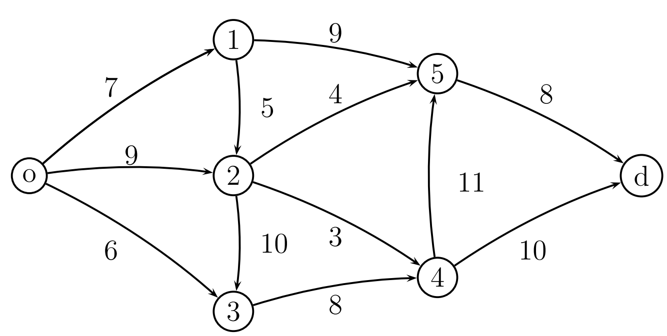
El siguiente diagrama ejemplifica la etiquetación.



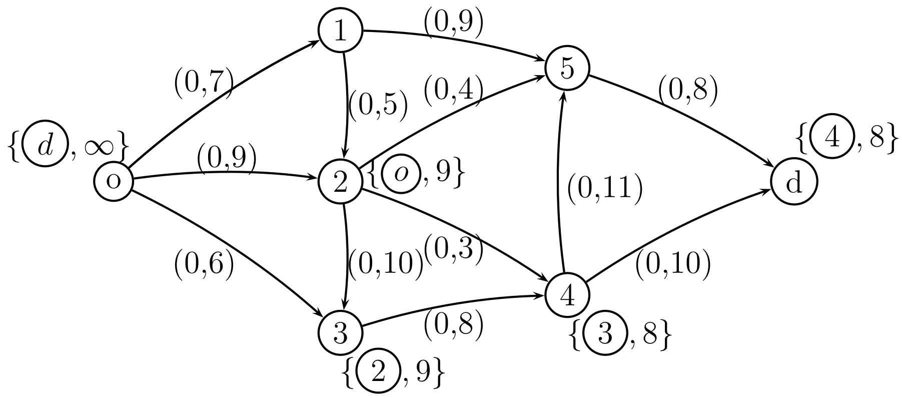
Una vez etiquetado el destino con $\{v, f_d\}$ a través de una ruta o cadena, la actualización del flujo se hace incrementando f_d unidades en los arcos de la ruta encontrada; o si fue cadena, la actualización consiste en aumentar el flujo en f_d unidades en los arcos de la cadena recorridos en sentido directo y restarlo en los arcos recorridos en sentido contrario. En el Ejemplo B5 se implementan las formas de actualización del flujo para ruta y cadena.

Ejemplo B5. Problema de flujo máximo.

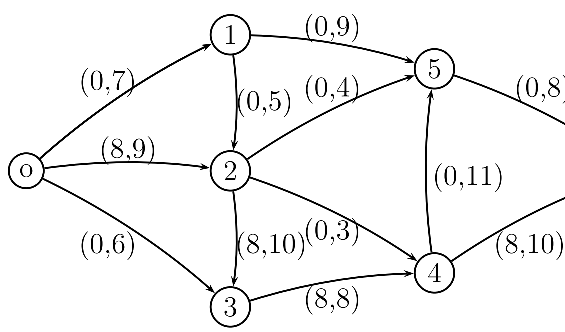
Encontrar el flujo máximo que puede circular de o a d en la siguiente red.



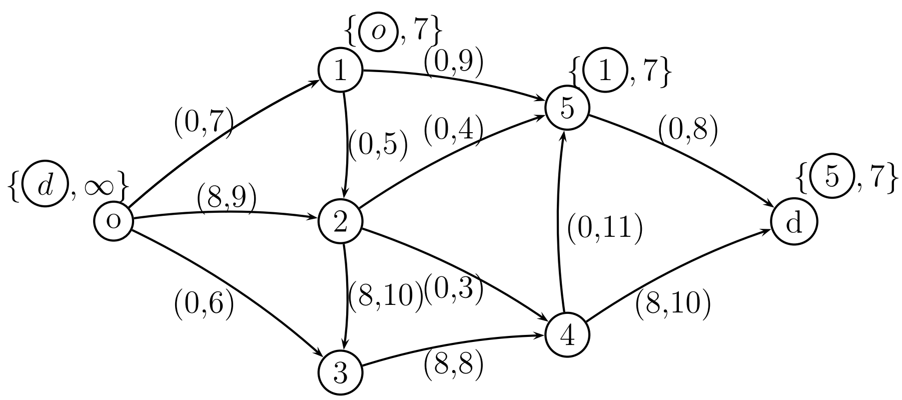
Iniciamos con el flujo factible cero en todos los arcos y empezamos a buscar rutas de o hacia d con las etiquetas; el origen tiene etiqueta $\{d, \infty\}$. Esto se ilustra a continuación.



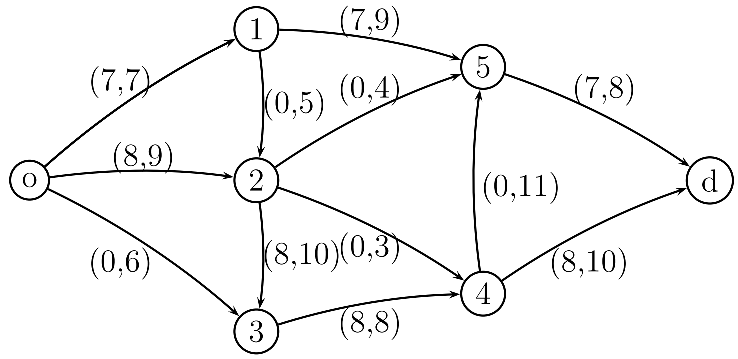
La ruta que encontramos es: $o \to \underset{9}{2} \to \underset{9}{3} \to \underset{8}{4} \to \underset{8}{d}$ y permite incrementar el flujo en 8 unidades; procedemos a actualizar el flujo. Para fines de ilustrar el procedimiento, luego de actualizar el flujo borramos las etiquetas y continuamos buscando rutas o cadenas.



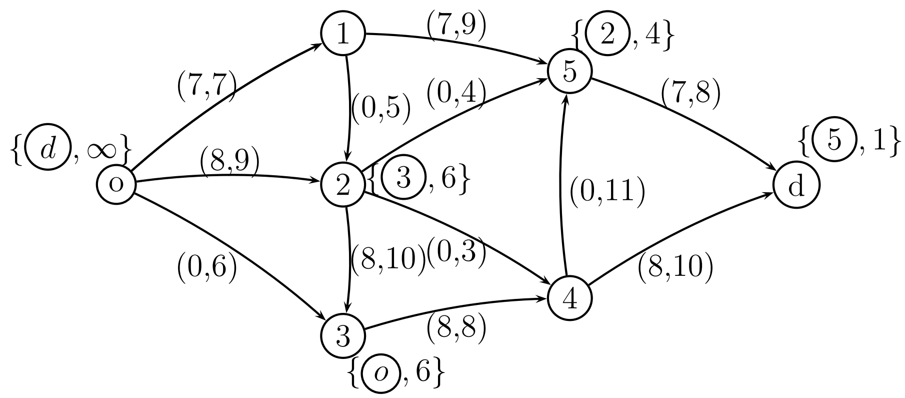
En esta red tenemos otra ruta.



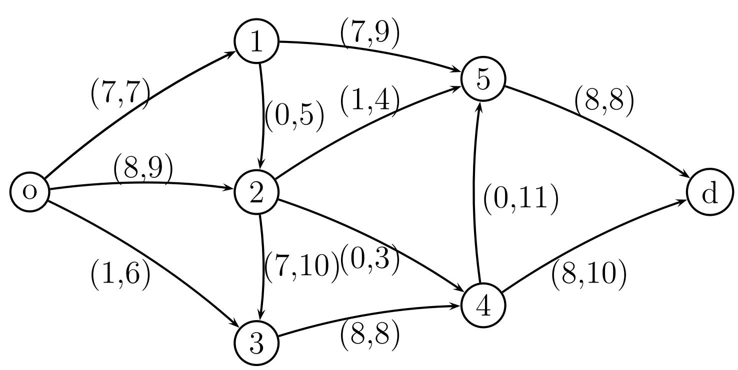
La segunda ruta es $o \to \underset{7}{1} \to \underset{7}{5} \to \underset{7}{d}$ y el incremento del flujo es de 7 unidades; procedemos a actualizar el flujo y borramos las etiquetas.



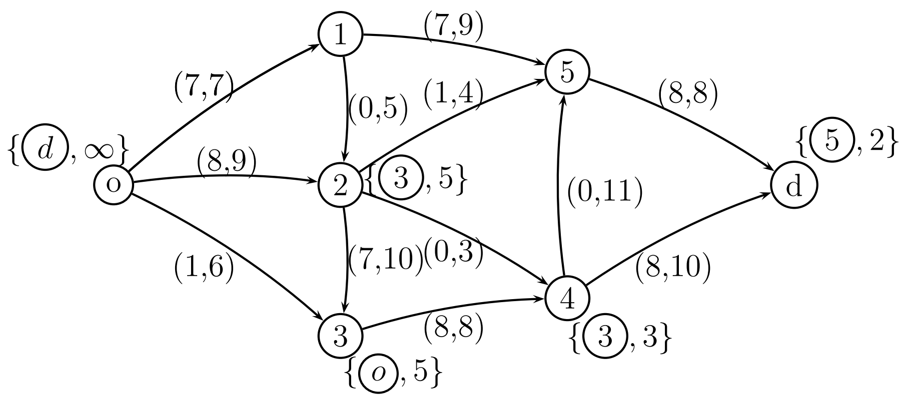
En la red anterior ya no hay rutas, ahora encontramos una cadena.



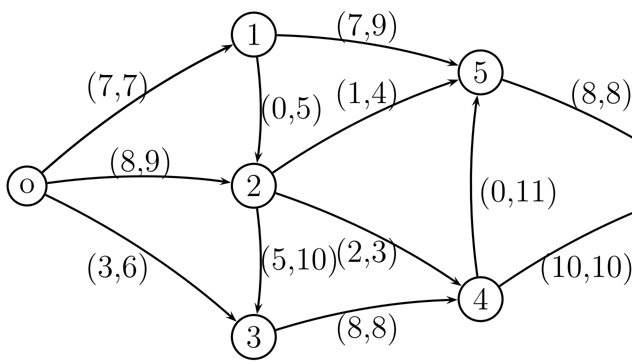
la cadena es $o \to \underset{6}{3} \leftarrow \underset{6}{2} \to \underset{4}{5} \to \underset{1}{d}$ el incremento en el flujo es 1, el flujo actualizado se muestra en la siguiente red.



Continuando con el proceso encontramos otra cadena



la cadena es $o \to \underset{5}{3} \leftarrow \underset{5}{2} \to \underset{3}{4} \to \underset{2}{d}$ el incremento del flujo es de 2 unidades; veamos el flujo actualizado en la siguiente red.

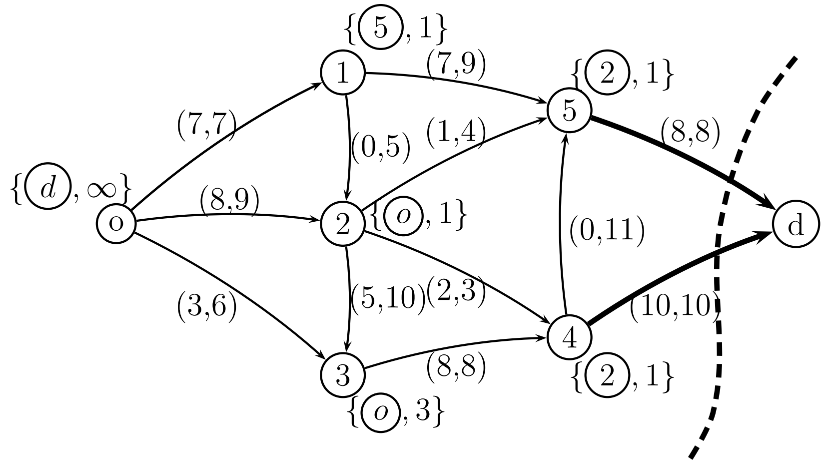


En esta última red las etiquetas ya no pueden llegar hasta d entonces, ya encontramos el flujo máximo que puede circular del origen al destino, $z_{Máx} = 18$.

El método también resuelve el problema de la cortadura mínima en este tipo de redes.

Para encontrar la cortadura de capacidad mínima en la red usando el método de Ford y Fulkerson se hace lo siguiente: una vez encontrado el flujo máximo que puede circular en la red se continúa etiquetando todos los nodos que sea posible etiquetar con el método de Ford y Fulkerson, el subconjunto de nodos etiquetados obviamente no contiene a d, ese subconjunto define la cortadura de capacidad mínima.

Vamos a ilustrar esto aplicándolo al ejemplo anterior. Si continuamos etiquetando los nodos en la red con el flujo máximo, obtenemos lo siguiente.



Así que la cortadura generada por $X = \{o, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $(X, X^c) = \{(5, d), (4, d)\}$ es la de menor capacidad además, $K(X, X^c) = 8 + 10$ coincide con $z_{Máx}$.

Apéndice C

Conceptos de juegos

A continuación, describimos algunos conceptos básicos que se usan en teoría de juegos y el tipo de juegos que abordamos en este trabajo.

Juego matricial de suma cero. Es un juego que involucra a dos jugadores y el número de estrategias que tiene cada jugador es finito además, la suma de las ganancias de ambos jugadores es cero.

Matriz de pagos de un juego. Un juego matricial de suma cero lo podemos representar con una matriz $A = (A_i^j), i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$.

Donde A_i^j es el pago que recibe el jugador I del jugador II si el jugador I elige jugar con la estrategia i y el jugador II elige su estrategia j.

$$
\begin{array}{cc|ccc|}
 & & & \text{J II} & \\
 & & \text{Estrategia 1} & \cdots & \text{Estrategia n} \\
\hline
 & \text{Estrategia 1} & A_1^1 & \cdots & A_1^n \\
\text{J I} & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & \text{Estrategia m} & A_m^1 & \cdots & A_m^n
\end{array}
$$

Los renglones son llamados *estrategias puras* para el jugador I y las columnas son llamadas *estrategias puras* para el jugador II.

Valor inferior y valor superior del juego. En un juego matricial de suma cero que tiene asociada la matriz de pagos $A_{m\times n}$ se definen:

$$\text{el } \textit{valor inferior del juego} \quad \alpha = \max_{i=1,\ldots,m} \min_{j=1,\ldots,n} A_i^j$$

$$\text{y el } \textit{valor superior del juego} \quad \beta = \min_{j=1,\ldots,n} \max_{i=1,\ldots,m} A_i^j,$$

α representa el menor monto que el jugador I puede garantizar recibir y β representa el monto más grande que el jugador II puede perder.

Valor del juego. Si en la matriz de pagos de un juego el valor inferior del juego coincide con el valor superior del juego, dicho valor se denomina valor del juego y se denota por ν, es decir, $\nu = \alpha = \beta$. En el otro caso, cuando $\alpha < \beta$ el valor del juego ν se define como la ganancia esperada $E(\overline{x}^*, \overline{y}^*)$, donde $\overline{x}^*$ y $\overline{y}^*$ son las estrategias mixtas óptimas para cada jugador. Una forma de interpretar el valor del juego es tomándolo como una medición de la ventaja; es decir, si $\nu > 0$ el jugador I deberá pagar un monto ν al jugador II para hacer el juego justo.

Punto silla de estrategias puras. Se dice que (i^*, j^*) es un punto silla de estrategias puras del juego si:

$$A_i^{j^*} \leq A_{i^*}^{j^*} \leq A_{i^*}^{j} \;\forall\; i, j,\; i = 1, ..., m,\; j = 1, ..., n.$$

Como es sabido, un juego matricial tiene *punto silla de estrategias puras* si y sólo si el *valor inferior del juego* (α) es igual al *valor superior del juego* (β) [3, p.12] además, el renglón i^* y la columna j^* que corresponden al pago $A_{i^*}^{j^*} = \alpha = \beta$ se denomina punto silla de estrategias puras. Las estrategias i^* y j^* también se llaman estrategias óptimas, porque si cualquier jugador se desvía de jugar su correspondiente estrategia i^* o j^* entonces el otro jugador puede tomar ventaja y mejorar su ganancia, en este sentido cada parte de la silla es la *mejor respuesta* para el oponente.

Estrategia mixta. Dada una matriz asociada a un juego, $A_{m\times n}$, una estrategia mixta para un jugador es un vector $\overline{x} = (x_1, ..., x_k)$, donde $k = m$ ó n dependiendo de cual jugador sea la estrategia y se cumple que:

$$x_i \geq 0,\; i = 1, ..., k,\; \sum_{i=1}^{k} x_i = 1.$$

Las componentes x_i representan la probabilidad con la que la estrategia pura i será usada por el jugador.

Solución del juego. La solución del juego consta de las estrategias óptimas para cada jugador, así como del valor del juego. Ya sean estrategias puras óptimas, o bien, estrategias mixtas óptimas.

En el siguiente ejemplo ilustramos la forma de resolver un juego que tiene punto silla de estrategias puras.

Ejemplo C1. Solución del juego con estrategias puras.

Encontrar la solución del juego con la siguiente matriz de pagos:

$$\begin{array}{cc} \text{A=} & \left|\begin{array}{cccc} 11 & 10 & \boxed{7} & 13 \\ 16 & 21 & 5 & 3 \\ 14 & 17 & 2 & 19 \end{array}\right| \begin{array}{c} \boxed{7} \\ 3 \\ 2 \end{array} \\ & \begin{array}{cccc} 16 & 21 & \boxed{7} & 19 \end{array} \end{array}$$

Calculando el mínimo por renglones y el máximo por columnas encontramos una posición donde coinciden estos números, entonces el punto silla es (1,3) y el valor del juego es $\nu = 7$.

El propósito del siguiente ejemplo es ilustrar las estrategias.

Ejemplo C2. Adivina y Pon.

El juego consiste en mostrar 1 ó 2 dedos y al mismo tiempo adivinar lo que mostrará el oponente, por ejemplo, si el jugador I pone 1 y dice 2, significa que muestra un dedo y adivina que el otro jugador mostrará 2 dedos; si sólo un jugador le adivina al otro los dedos mostrados entonces, gana una cantidad igual al número de dedos que se ven, en otro caso es empate.

En este juego, la primera entrada de cada pareja ordenada representa el número de dedos mostrados y la segunda indica lo que se espera mostrará el oponente.

La matriz de pagos para el jugador I es la siguiente.

$$\begin{array}{c|cccc|} & (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \\ (1,1) & 0 & 2 & -3 & 0 \\ (1,2) & -2 & 0 & 0 & 3 \\ (2,1) & 3 & 0 & 0 & -4 \\ (2,2) & 0 & -3 & 4 & 0 \end{array}$$

Estrategias mixtas

Si consideramos la matriz de pagos del juego Adivina y Pon, notamos que no es posible resolverlo a través de un punto silla de estrategias puras. Si se elige siempre la misma estrategia, el oponente sabrá sacar ventaja de ello, entonces conviene cambiar de estrategia, pero sin una secuencia determinada para evitar que se use esta información en contra, entonces la elección de las estrategias debe ser aleatoria y surge la pregunta: ¿con qué distribución de probabilidad vamos a elegir las estrategias? Elegir una combinación de estrategias puras a partir de un proceso probabilístico es lo que se entiende por *estrategia mixta*.

En un juego que tiene asociada la matriz de pagos $A_{m\times n}$, si el jugador I usa una estrategia mixta con la distribución de probabilidad $\overline{x} = (x_1, ..., x_m)$ y el jugador II utiliza su estrategia j, la ganancia esperada para el jugador I, denotada por $E(\overline{x}, j)$, es $x_1A_1^j + ... + x_mA_m^j$. De forma similar $E(i, \overline{y})$ es la pérdida esperada para el jugador II cuando toma una estrategia mixta $\overline{y}$ y el jugador I elige la estrategia i.

Para elegir la distribución de probabilidad con la que se elegirán las estrategias $\overline{x} = (x_1, ..., x_m)$, $\overline{y} = (y_1, ..., y_n)$ y conocer cuál será la ganancia esperada del juego, nos basamos en el siguiente resultado.

Todas las matrices $A_{m\times n}$ definen funciones continuas, cóncavas en $\overline{x}$, convexas en $\overline{y}$, $f : C \times D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \overline{x}A\overline{y}^T$.

Donde $\overline{x} \in \mathbb{R}^m$, $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$ son vectores renglón. Si los conjuntos C y D se definen como:

$C = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^m / \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \overline{x} \geq \overline{0}\}, \quad D = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n / \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \overline{y} \geq \overline{0}\}.$

Entonces C y D son conjuntos convexos cerrados y acotados, pero todas éstas condiciones son las hipótesis del teorema de Von Neumann (minimax) [3], que garantiza que existe un punto silla en $C \times D$ para tales funciones. Esto significa que todos los juegos matriciales de suma cero tienen solución con estrategias mixtas. A continuación, ejemplificamos la solución de un juego a través de estrategias mixtas.

Ejemplo C3. Estrategias mixtas.

Resolver el juego con la siguiente matriz de pagos:

$$\begin{pmatrix} -10 & 40 \\ 30 & -20 \end{pmatrix}$$

Si el jugador I usa una estrategia mixta aleatoria con la distribución de probabilidad $\overline{x} = (x, 1-x)$ y el jugador II usa su estrategia 1, la ganancia esperada para I es:
$E(\overline{x}, 1) = -10x + 30(1-x) = -40x + 30$,
$E(\overline{x}, 2) = 60x - 20$.

La Figura 19 muestra la gráfica de las ganancias esperadas para el jugador I, en función de la variable x.

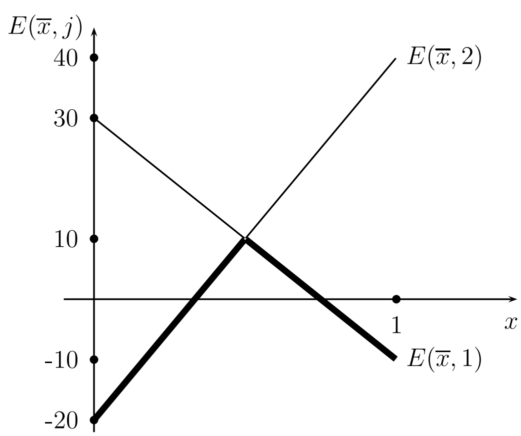


Figura 19

La menor ganancia esperada para el jugador I está indicada con línea gruesa en la gráfica. De esta situación, el mayor valor posible (maximin) es cuando $E(\overline{x}, 1) = E(\overline{x}, 2)$; es decir, cuando $-40x + 30 = 60x - 20$, $x = \frac{1}{2}$ entonces, $\overline{x}^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y la ganancia esperada es $E(\overline{x}^*, j) = 10$.

Ahora, buscamos la estrategia óptima para el jugador II; si el jugador II usa una estrategia mixta aleatoria con la distribución de probabilidad $\overline{y} = (y, 1-y)$ y el jugador I usa su estrategia pura 1, la ganancia esperada para el jugador II es:

$$E(1, \overline{y}) = -10y + 40(1-y) = -50y + 40, \quad E(2, \overline{y}) = 50y - 20.$$

La Figura 20 muestra la gráfica de las pérdidas para el jugador II (ganancias para el jugador I), en función de la variable y.

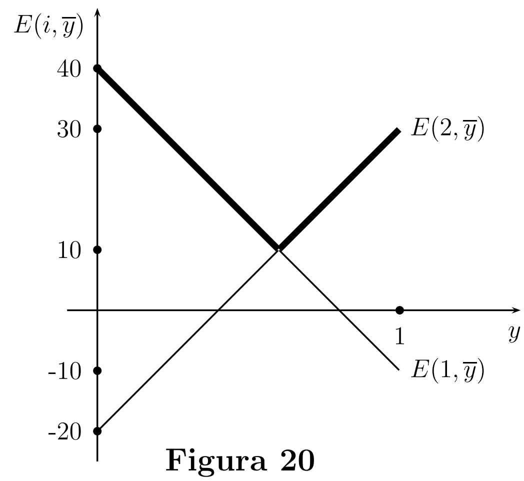


Figura 20

La mayor pérdida esperada para el jugador II es la poligonal de línea gruesa y el menor valor de esta pérdida (minimax) se encuentra cuando $E(1,\overline{y}) = E(2,\overline{y})$; es decir:
$-50y + 40 = 50y - 20$, $60 = 100y \Longrightarrow\ y = \frac{3}{5}$.

Entonces, $\overline{y}^* = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ y la ganancia esperada del juego es $\nu = 10$; como el valor del juego es positivo, podemos decir que hay ventaja para el jugador I.

Veamos el ejemplo anterior con el enfoque del teorema de Von Neumann; la ganancia esperada a partir de la matriz de pagos se define como:

$$E(\overline{x},\overline{y}) = (x, 1\text{-}x) \begin{pmatrix} \text{-}10 & 40 \\ 30 & \text{-}20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1\text{-}y \end{pmatrix},$$

$$E(\overline{x},\overline{y}) = (x, 1\text{-}x) \begin{pmatrix} \text{-}10y + 40(1-y) \\ 30y\text{-}20(1\text{-}y) \end{pmatrix},$$

después de las operaciones necesarias obtenemos:

$$E(\overline{x},\overline{y}) = 60x - 100xy + 50y - 20.$$

Hagamos un análisis en el corte perimetral de la superficie $E(\overline{x},\overline{y})$ definida en el conjunto $[0,1] \times [0,1]$; para simplificar la notación definimos $z = E(\overline{x},\overline{y})$.

Si $x = 0$ y $y = \begin{cases} 0 & z = \text{-}20 \\ 1 & z = 30. \end{cases}$

Si $x = 1$ y $y = \begin{cases} 0 & z = 40 \\ 1 & z = \text{-}10. \end{cases}$

Si $y = 0$ y $x = \begin{cases} 0 & z = \text{-}20 \\ 1 & z = 40. \end{cases}$

Si $y = 1$ y $x = \begin{cases} 0 & z = 30 \\ 1 & z = \text{-}10. \end{cases}$

La Figura 21 presenta la gráfica de $E(\overline{x}, \overline{y})$, $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

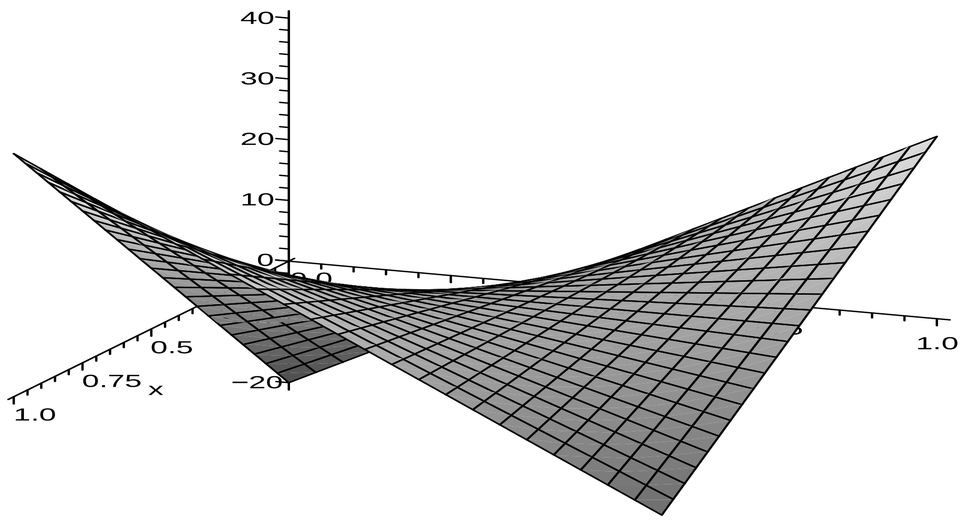


Figura 21

El teorema de Von Neumann garantiza que $E(\overline{x}, \overline{y})$ tiene un punto silla en $[0, 1]\times[0, 1]$; utilizando la solución obtenida con el primer procedimiento identificamos que el punto silla de $E(\overline{x}, \overline{y})$ es: $(\frac{1}{2}, \frac{3}{5})$, la ganancia esperada $E(\overline{x}^*, \overline{y}^*) = 10$.

Observamos que el primer método empleado para resolver el juego consiste en encontrar las intersecciones de las rectas que resultan de las proyecciones de la frontera de la gráfica en el plano XZ para el jugador I y, respectivamente, para el jugador II en el plano YZ.

Glosario

Programación Lineal

Conjunto de soluciones factibles. Dado un problema de programación lineal

$$\mathbb{P}: \begin{array}{rr} Max & z = cx \\ s.a. & Ax \leq b \\ & x \geq \overline{0}, \end{array}$$

donde A es una matriz de tamaño $m \times n$, x y $\overline{0}$ son vectores de tamaño $n \times 1$, b es un vector de tamaño $m \times 1$ y c es un vector de tamaño $1 \times n$. El conjunto de soluciones factibles está formado por todos los vectores x tales que $Ax \leq b$ y $x \geq \overline{0}$.

Hiperplano. Es el conjunto de puntos definido por
$\{x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle n, x - x_0 \rangle = 0\}$, donde n es un vector de dimensión $1 \times n$ y es llamado el vector normal al plano, x y x_0 son vectores de tamaño $n \times 1$.

Semiespacio. Es el conjunto de puntos definido por
$\{x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle n, x - x_0 \rangle \leq 0\}$, o bien, $\{x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle n, x - x_0 \rangle \geq 0\}$.

Poliedro. Es la intersección de un número finito de semiespacios.
Los hiperplanos asociados a los semiespacios que definen al poliedro se llaman hiperplanos definitorios del poliedro.

Cara del poliedro. Dado un poliedro E, una cara de E es el conjunto de puntos que resulta de intersectar E con un conjunto no vacío de hiperplanos definitorios linealmente independientes de E.

Conjunto convexo. Un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ se denomina conjunto convexo, si dados dos puntos cualesquiera x_1 y $x_2 \in X$, entonces $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$ para todo $\lambda \in [0, 1]$, es decir, el segmento de recta que une dichos puntos también está en el conjunto X.
Además, cualquier punto de la forma $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ con $\lambda \in [0, 1]$ se llama combinación lineal convexa de x_1 y x_2. Si $\lambda \in (0, 1)$ se dice que es una combinación lineal convexa estricta.

Punto extremo. Un punto x que pertenece a un conjunto convexo X se denomina punto extremo, si no se puede expresar como una combinación lineal convexa estricta de dos puntos distintos en X. En otras palabras, si $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ con $\lambda \in (0,1)$ y x_1, $x_2 \in X \Longrightarrow x = x_1 = x_2$.

Rayo. Es un conjunto de puntos de la forma $\{\overline{x}_0 + \lambda d : \lambda \geq 0\}$, en donde d es un vector distinto de cero; $\overline{x}_0$ se denomina vértice del rayo y d es la dirección del rayo.

Dirección de un conjunto convexo. Dado un conjunto convexo, un vector d distinto de cero, se denomina dirección del conjunto si, para todo $\overline{x}_0$ en el conjunto, el rayo $\{\overline{x}_0 + \lambda d : \lambda \geq 0\}$ también pertenece al conjunto.

Dirección extrema. Una dirección extrema de un conjunto convexo, es una dirección del conjunto que no es posible representar como una combinación lineal positiva de dos direcciones distintas del conjunto. Dos direcciones d_1 y d_2 son distintas si son vectores no paralelos.

Rayo extremo. Dado un conjunto convexo, un rayo extremo de este conjunto es un rayo del conjunto cuya dirección es una dirección extrema del conjunto.

Operaciones elementales. Útiles para encontrar el rango de una matriz, las operaciones elementales (por renglones) son:
1.- Intercambio de renglones.
2.- Multiplicación de un renglón por un número distinto de cero.
3.- Sumar a un renglón otro renglón.

Pivote. Una vez seleccionados los índices de las variables que entran y salen de la base, k y l no básica y básica respectivamente, el número Y_l^k es el *pivote*; *pivotear* significa hacer operaciones elementales por renglón para tener 1 en la posición del pivote y ceros en el resto de su columna, con esto se obtiene una nueva forma explícita del problema respecto a la nueva base. Después del pivoteo, las nuevas variables básicas están formadas por las variables básicas iniciales menos la variable de salida más la variable de entrada.

Cono. Es un conjunto convexo C con la propiedad adicional de que $\lambda x \in C\ \forall x \in C$ y todo $\lambda \geq 0$.

Redes

Gráfica. Una gráfica $G = (N, A)$ consiste en un conjunto N de nodos y un conjunto A de aristas cuyos elementos son parejas no ordenadas de nodos distintos.

Gráfica dirigida. Una gráfica dirigida $G = (N, A)$ consiste en un conjunto N de nodos y un conjunto A de arcos cuyos elementos son parejas ordenadas de nodos distintos.

Red. Es una gráfica cuyos nodos y arcos tienen asociados valores numéricos.

Red dirigida. Es una gráfica dirigida cuyos nodos y/o arcos tienen asociados valores numéricos.

Sub-gráfica. Una gráfica $G' = (N', A')$ es una sub gráfica de $G = (N, A)$ si $N' \subseteq N$ y $A' \subseteq A$.

Cadena. (del nodo n_1 al nodo n_r) Una cadena en una gráfica dirigida $G = (N, A)$ es una sub gráfica de G consistente de un secuencia alternada de nodos y arcos $n_1 - a_1 - ... - a_{r-1} - n_r$ que satisface la propiedad de que para todo k, $1 \leq k \leq r-1$, $(n_k, n_{k+1}) \in A$ o $(n_{k+1}, n_k) \in A$.

Gráfica conexa. Si para cualquier par de nodos de la gráfica hay una cadena que los conecta.

Ruta. (del nodo n_1 al n_r) Una ruta en una gráfica dirigida $G = (N, A)$ es una sub-gráfica de G consistente de una secuencia alternada de nodos y arcos $n_1 - a_1 - ... - a_{r-1} - n_r$ que satisface la propiedad de que para todo k, $1 \leq k \leq r-1$, $(n_k, n_{k+1}) \in A$ y además, los arcos son distintos y los nodos son distintos. Una ruta también se puede denotar como $n_1 \to n_2 \to n_3 \ ... \ n_{r-1} \to n_r$.

Nodo sucesor. Dada una gráfica $G = (N, A)$, los nodos sucesores del nodo i son todos los nodos j tal que (i, j) es un arco de la gráfica.

Ciclo. Un ciclo es una cadena $n_1 - a_1 - n_2 - ... - a_{r-1} - n_r$ en la que se agrega el arco (n_r, n_1) ó (n_1, n_r).

Árbol. Es una gráfica conexa que no contiene ciclos.

Sea $G = (N, A)$ un árbol donde $|N| = m$, a continuación presentamos algunas caracterizaciones equivalentes de G:

(a) G tiene $m - 1$ arcos y ningún ciclo.

(b) G no tiene ciclos, pero al agregar cualquier arco nuevo a G se obtiene una gráfica con exactamente un ciclo.

Flujo factible: Es un conjunto de valores para x_{ij}, $(i,j) \in A$ donde se cumple lo siguiente:

a) $0 \leq x_{ij} \leq k_{ij}$, $(i,j) \in A$

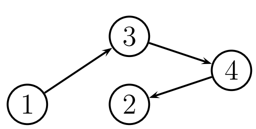
b) $\displaystyle\sum_{\{l\ :\ (l,i)\in A\}} x_{li} - \sum_{\{k\ :\ (i,k)\in A\}} x_{ik} = 0\ \forall\ i \in N\backslash\{o,d\}.$

Para indicar el flujo y la capacidad del arco (i,j) vamos a poner (x_{ij}, k_{ij}) en este arco.

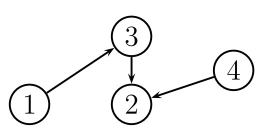
Cortadura. Sea $G = (N, A)$ una gráfica dirigida y sea $\{X, X^c\}$ una partición del conjunto de nodos N; el conjunto de todos los arcos de G cuyo extremo inicial pertenece a X y cuyo extremo final pertenece a X^c es llamado una *cortadura* de G y se denota por (X, X^c). Notemos que las cortaduras (X, X^c) y (X^c, X) son diferentes, porque si el arco (i,j) pertenece a la cortadura (X, X^c), entonces no pertenece a la cortadura (X^c, X).

Para cualesquiera dos nodos n_1, $n_2 \in N$, una cortadura (X, X^c) tal que $n_1 \in X$ y $n_2 \in X^c$ se dice que *separa* n_1 *de* n_2, en ese orden.

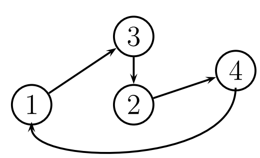
Capacidad de una cortadura. Es la suma de las capacidades de los arcos que forman la cortadura, se denotará por $K(X, X^c)$.
Veamos ejemplos para ilustrar algunos de los conceptos



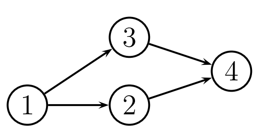
Ruta de 1 a 2



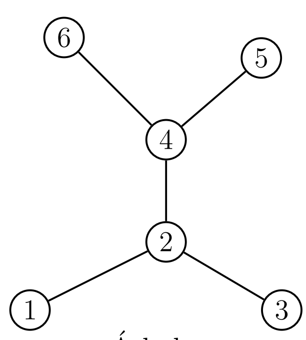
Cadena de 1 a 4



Circuito



Ciclo



Árbol

Juegos

Función convexa. Una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa si:

$$f(\lambda\overline{x} + (1-\lambda)\overline{y}) \leq \lambda f(\overline{x}) + (1-\lambda) f(\overline{y})\ \ \forall\ \overline{x},\ \overline{y} \in D,\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Función cóncava. Una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es cóncava si:

$$f(\lambda \overline{x} + (1-\lambda)\overline{y}) \geq \lambda f(\overline{x}) + (1-\lambda) f(\overline{y}) \;\; \forall\, \overline{x},\; \overline{y} \in D,\; 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Bibliografía

[1] Ahuja, R.K., *Network flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall, U.S.A., 1993.

[2] Balinski, M.L., *Integer Programming: Methods, Uses, Computation*, INFORMS, U.S.A., 1965.

[3] Barron, E.N., *Game Theory An Introduction*, John Wiley Sons, U.S.A., 2008.

[4] Bazaraa, M.S., *Programación Lineal y Flujo en Redes*, Limusa, Segunda Edición, México, 1999.

[5] Bondy, J.A., *Graph theory with applications*, North-Holland, New York-Amsterdam-Oxford, 1979.

[6] Carre, B., *Graphs and networks*, Oxford University Press, Inglaterra, 1979.

[7] Chartrand, G. *Applied and Algorithmic Graph Theory*, Mc Graw-Hill, Inc. U.S.A., 1993.

[8] Cotlar M., *An Introduction to Functional Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1974.

[9] Kaufmann, A., *Métodos y modelos de la Investigación de Operaciones*, Compañia Editorial Continental, España, 1976.

[10] Minieka E., *Optimization Algorithms for Networks and Graphs*, Marcel Dekker, U.S.A., 1992.

[11] Taha H., *Operations Research: An Introduction*, Macmillan Publishing Company, Fifth Edition, U.S.A., 1992.