



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

USO DE MAPAS COGNITIVOS PARA EL ESTUDIO
DE LA ESTABILIDAD EN SISTEMAS CLIMÁTICOS
TERRESTRES

TESIS

QUE COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

PRESENTA:

ALEJANDRO IVÁN PAZ ORTIZ

JURADO EXAMINADOR:
VICTOR MANUEL MENDOZA CASTRO
PABLO PADILLA LONGORIA
CARLOS GAY GARCÍA
BENJAMÍN MARTÍNEZ LÓPEZ
JUAN RUBÉN GONZÁLEZ CÁRDENAS



México D.F.

Noviembre 2011



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Uso de Mapas Cognitivos para el Estudio de la Estabilidad en Sistemas Climáticos Terrestres

*Centro de Ciencias de la Atmósfera
UNAM*

Para todas aquellas cosas que simplemente no son . . .
y aquellas que son . . .
i.e $\forall (x, \mu(x))$

Índice general

0.1.	Motivación	2
0.2.	Estabilidad del sistema climático terrestre	2
0.2.1.	Industrialización	5
0.2.2.	Cambio climático	5
0.2.3.	Aumento en la concentración de CO_2	6
0.2.4.	Pérdida de la biodiversidad	7
0.2.5.	Ciclos de fósforo y nitrógeno	8
0.2.6.	Acidificación del Océano	10
0.2.7.	Uso de suelo	10
0.2.8.	Uso de agua dulce	10
0.2.9.	Disminución del ozono estratosférico	11
0.2.10.	Contaminación Química	11
0.2.11.	Dispersión de Aerosoles	11
1..	<i>Modelación</i>	13
1.1.	Mapas Cognitivos	13
1.2.	Representación de la Causalidad a través de Conjuntos Difusos	16
1.2.1.	Cantidades Causales y Modificadores	17
1.3.	Álgebra <i>Causal</i> Difusa	18
1.3.1.	Criterio Mínimo-Máximo	18
1.4.	Propiedades de la matriz adyacente de un Mapa Cognitivo	19
1.5.	Codificación de Señales	20
1.5.1.	Teoría de Hebb	20
1.6.	Redes Neuronales	21
1.7.	Sistemas Difusos	22
1.8.	Señales	22
1.9.	Sistemas dinámicos neuronales	23
2..	<i>El Modelo</i>	27
2.1.	Mapa Cognitivo del Sistema Climático	27
2.2.	Retroalimentación	32

2.3. Análisis del Sistema Considerando el Valor Anterior	39
2.4. Efecto indirecto y efecto total	40
2.5. Análisis de efectos en el mapa cognitivo	41
2.6. Modificación de la Red de Cuatro Nodos	45
3.. Conclusiones	47
4.. Referencias	53
Bibliografía	53
Apéndice	56
A.. Funciones de Liapunov	57
B.. Algoritmos	68

Agradecimientos

Quiero agradecer y, a la vez, dedicar esta tesis, a todos aquellos que me han acompañando durante este tiempo, y que como yo, creen en la necesidad de una nueva relación de nosotros mismos con nuestro entorno. A todos aquellos que entendemos cómo la realidad se construye desde las pequeñas acciones, esas que nos definen y que nos hacen ser quienes somos. A las personas que sentimos profundamente que el hacer del hombre no está determinado y que desde el pensamiento crítico y el simple gusto por vivir, generamos imágenes de la realidad sin aferrarnos a ellas de ninguna manera. Y me siento feliz de poder reconocer entre ellos a todos aquellos que hicieron posible el desarrollo de esta tesis: Mi asesor, mis sinodales, mis amigos, mi chica, y Manolla (aunque a ella no pueda atribuirle más que una voz). La urgencia siempre vigente de interpretar y reinterpretar el mundo en que vivimos ha sido *el impulso* inagotable de cada uno. Quiero agradecer también a las cosas. Especialmente al sonido y a lo que como fenómeno hace al integrarse con el cerebro humano, hecho que nunca ha dejado de fascinarme. A mis alumnos, mis maestros, y a aquellos que sin darse cuenta han determinado mi vida. Y finalmente a lo dado, a mi familia que me ha otorgado un pasado desde donde puedo entenderme ahora . . .

Tlalpan, 8 Noviembre de 2011.

INTRODUCCIÓN

0.1. Motivación

El presente trabajo estudia la implementación de mapas cognitivos para el análisis cualitativo de la dinámica de sistemas climáticos. La idea original fue concebida durante la revisión del artículo “*A safe operating space for humanity*” de Johan Rockström (Nature 2009), en el que se proponen subsistemas que, en conjunto, determinan la estabilidad del sistema climático terrestre. Dada la importancia que tienen en la actualidad los estudios sobre cambio climático, es preciso diversificar los métodos de análisis. La implementación de mapas cognitivos permite elaborar redes con base en las relaciones documentadas entre los subsistemas, incluyendo además ligas no cuantificadas, estos pueden aportar una nueva herramienta de análisis para los sistemas climáticos. Además la implementación de herramientas de este tipo permiten obtener información de la dinámica general estructurada como red, lo que posibilita establecer sistemas de control y toma de decisiones para modificar la dinámica global, aunado a que es posible analizar la red en conjunto o partes de la misma. Así la intención de la presente tesis es sentar las bases para el uso de nuevas herramientas en sistemas climáticos, que junto con los métodos tradicionales, permitan nuevos enfoques en la solución y el estudio de problemas.

0.2. Estabilidad del sistema climático terrestre

La creación del Panel Intergubernamental de Cambio Climático (IPCC, por sus siglas en inglés) el 6 de Diciembre 1988, con el objetivo preciso de generar, recopilar y revisar información sobre el cambio climático y sus posibles consecuencias ambientales y socio-económicas, pone en el centro de la mesa la problemática del cambio climático antropogénico. Desde ese momento se ha trabajado en el uso de modelos climáticos que permitan generar escenarios para la planeación. No obstante, las predicciones de los modelos no son consistentes entre sí, y existen muchos elementos, tanto ambientales como sociales, de los que no se tiene información precisa. Esto hace imprescindible trabajar con distintos modos de análisis que nos permitan entender la

estructura del sistema climático a distintos niveles. Es en este punto donde el uso de mapas cognitivos resulta interesante. Los mapas cognitivos permiten analizar información no necesariamente precisa, combinándola con datos duros y con los elementos intuitivos y formales del análisis de los especialistas que elaboran el mapa. De ellos podemos obtener información sobre la estructura, las relaciones, la importancia de los componentes, y la dinámica del sistema.

El día de hoy, corriendo el año 2011, sabemos que el clima ¹ de la tierra esta cambiando. El cambio climático resulta evidente en muchas de las variables que medimos día a día (IPCC)², la temperatura y la precipitación son los ejemplos más claros, sobre todo cuando se presentan los llamados eventos extremos³. Las series de tiempo que han registrado la temperatura desde hace más de 100 años muestran un incremento sostenido en el promedio global. Según el informe sobre Cambio Climático del IPCC publicado en 2007, en el periodo comprendido entre 1995 - 2006 se encuentran once años que figuran entre los años más cálidos registrados en la superficie mundial desde 1850. En este mismo informe se indica que la tendencia lineal ajustada a las mediciones de 100 años (1906-2005) de 0,74 °C [entre 0,56 a 0,92 °C] ⁴ que equivale a 0.07 °C por década; es mayor que la tendencia correspondiente de 0,6 [entre 0,4 a 0,8 °C] para (1901-2000) que equivale a 0.06 °C por década. Mientras que la tendencia lineal de calentamiento sobre los 50 años transcurridos desde 1956 hasta 2005 es de 0,13 °C [entre 0,10 a 0,16 °C], lo que representa un incremento neto de casi el doble comparada con los 100 años comprendidos de 1906 a 2005 (IPCC 2007).

Si bien sabemos que la tierra ha experimentado ciclos glaciales e interglaciales, Berger, A. & Loutre, M. F. en el 2002, afirman que el equilibrio climático interglacial establecido hace 10 000 años, se mantendrá aproximadamente estable por al menos 50 000 años más. Particularmente, estos últimos 10 000 años comprenden el periodo conocido por los geólogos como Holoceno durante el cual se ha producido el naci-

¹ El clima se determina con valores estadísticos de las variables del tiempo atmosférico, recopilados de manera sistemática en una región durante un período representativo de 30 años o más según la latitud del lugar. Las variables principales son: temperatura, humedad, presión, vientos y precipitación.

² La actividad principal del IPCC es producir reportes regulares sobre el estado del cambio climático.

³ Un evento extremo meteorológico es un evento “raro” en un lugar en particular y época del año. La definición de “raro” puede variar, pero un evento extremo meteorológico puede considerarse cuando se encuentra por encima o por debajo del percentil 90 o 10 de la función de probabilidad observada. Glosario IPCC.

⁴ Las cifras entre corchetes indican un intervalo de incertidumbre del 90% alrededor de la estimación.

miento y desarrollo de las civilizaciones humanas.

Sin embargo, durante la Revolución Industrial (proceso histórico que se desarrolla de finales del siglo XVIII hasta finales del XIX, comenzando en Inglaterra para extenderse al resto de Europa), los grupos humanos sufren el mayor conjunto de transformaciones socioeconómicas, tecnológicas y culturales de la historia de la humanidad desde el Neolítico. El proceso de industrialización, cuyo comienzo algunos autores sitúan al final del siglo XVIII, pero que en Europa toma auge hasta la mitad del siglo XIX comenzando con los textiles en Inglaterra, seguido del ferrocarril y la industria siderúrgica, marcará la entrada a una nueva era: el Antropoceno, en la cual las acciones humanas se han convertido en el principal forzante de los cambios en el ambiente.

Desde entonces las actividades humanas se han desarrollado, necesitando cada vez más recursos energéticos, mayor suministro de materia prima y territorio, hasta llevar al sistema tierra fuera de su estabilidad ambiental establecida en el Holoceno, cuando los cambios ocurrían naturalmente y la capacidad de regulación de la tierra mantenía las condiciones aptas para el desarrollo humano. Recursos como agua potable, minas y bosques se consideraban inagotables, así como la temperatura y los flujos biogeoquímicos se mantenía estables y adecuados para la vida.

En un marco de *cambio climático*, es muy importante conocer el estado del sistema y su respuesta a forzantes externos, así como los posibles estados de equilibrio dentro de su dinámica. Esto permite responder a preguntas como: ¿Son estos cambios reversibles? ¿O la presión de la actividad humana llevará al sistema climático hasta un nuevo estado de equilibrio que podría no ser propicio para la vida en la tierra, al menos no como la conocemos? No obstante esto, para analizar el sistema hay que definir primero sus componentes principales.

Existen distintos modelos para el estudio de la estructura, la dinámica y la estabilidad del sistema climático. Estos incluyen elementos (asociados con subsistemas biofísicos y procesos terrestres) del sistema global y sirven para evaluar la interacción entre ellos y el resultado producido por el conjunto. Algunos subsistemas fueron analizados y discutidos por un grupo de científicos encabezados por Johan Rockström del *Stockholm Resilience Center* (Rockström et al. *Nature* 2009), para construir un marco de estudio de los procesos terrestres considerados clave dentro de la dinámica planetaria. Además, estos subsistemas también han sido considerados clave para la estabilidad del sistema climático por el Grupo Intergubernamental de Expertos sobre el Cambio Climático del IPCC en el Cuarto Informe de Evaluación del IPCC sobre Cambio Climático (IPCC 2007), así como por otras organizaciones gubernamentales

(y no gubernamentales) y centros de investigación.

Es importante considerar también ¿cómo responde el sistema en conjunto a presiones en cada elemento? La respuesta es: no lo sabemos con absoluta exactitud. Aunque los sistemas complejos de la Tierra a veces responden de manera suave a las presiones, ocurre que muchos subsistemas reaccionan en forma no lineal y en ocasiones de forma abrupta siendo particularmente sensibles a variaciones alrededor de valores umbrales en ciertas variables clave. Si estos límites son cruzados, subsistemas importantes podrían cambiar hacia un nuevo estado de equilibrio, donde la distribución energética podría traer consecuencias desastrosas para la humanidad. La mayoría de los umbrales para un subsistema específico pueden ser definidos por un valor crítico para una o más variables de control, tal como la concentración de dióxido de carbono. Sin embargo, no todos los procesos tienen umbrales bien definidos (de aquí que el método de análisis sea propuesto a través de mapas cognitivos). Según el grupo de trabajo de Rockström, nueve procesos se consideran importantes para el equilibrio del sistema y sobre los cuales se propone establecer límites de operación. Estos son: Cambio climático, Acidificación del océano, Disminución del ozono estratosférico, Los ciclos de fósforo y nitrógeno, Uso de agua dulce, Uso de suelo, Pérdida de la biodiversidad (marina o terrestre), Dispersión de aerosoles y Contaminación química. A éstos se ha agregado el proceso de industrialización como forzante, y se ha separado el cambio climático como forzante externo para otros subsistemas (como la biodiversidad), y la concentración de CO_2 . A estos procesos les llamaremos conceptos de ahora en adelante. Con estos conceptos se elaboraron los mapas cognitivos que analizaremos más adelante (Capítulo 3). A continuación presentamos una discusión de los conceptos y una definición en el contexto en que serán utilizados.

0.2.1. Industrialización

El proceso de industrialización comprende: el desarrollo social y económico, las líneas que sigue el desarrollo tecnológico y sus aplicaciones, **el crecimiento de la industria**, así como los cambios demográficos relacionados con estos procesos. (IPCC 2007).

0.2.2. Cambio climático

Las variables establecidas como límites planetarios para el cambio climático permiten trabajar con dos umbrales separados los cuales diferencian cualitativamente

los diferentes sistemas climáticos (más cálidos o más fríos), estos son: la concentración atmosférica de dióxido de carbono y el forzamiento radiativo (que es el cambio en la razón de energía que incide en una unidad de área promediada sobre el globo). En nuestro análisis trabajaremos con el cambio climático definido como sigue:

Definimos el **Cambio Climático** como: El aumento en la temperatura promedio de la tierra. Es decir, “los cambios en la variabilidad climática, en los extremos y en los valores medios” (IPCC 2007). En particular, haremos referencia al llamado Cambio Climático Antropogénico, que es consecuencia de la actividad humana.

0.2.3. Aumento en la concentración de CO_2

Este se define como el aumento del número de partes por millón de moléculas de CO_2 en la atmósfera. La medida “ppm (partes por millón) o ppb (partes por mil millones) es la relación del número de moléculas de gas de efecto invernadero con el número total de moléculas de aire seco. Por ejemplo, 300 ppm quiere decir 300 moléculas de gas de efecto invernadero por un millón de moléculas de aire seco” (IPCC 2007).

Los cambios producidos por el humano en las **concentraciones de dióxido de carbono** CO_2 atmosférico no deben exceder las 350 partes por millón por unidad de volumen ($\frac{350 \text{ moléculas de } CO_2}{10^6 \text{ moléculas de aire}}$) (Rockström et al. Nature 2009). Esto debido a que el dióxido de carbono absorbe longitudes de onda larga de la radiación electromagnética. La radiación llega a la tierra desde el sol en longitudes de onda corta, y es reemitida por la tierra en longitudes de onda larga. El CO_2 evita que estas longitudes salgan al espacio (después de ser absorbidas y vueltas a emitir por la superficie), calentando por tanto la atmósfera y la superficie de la tierra. A este fenómeno se le conoce como efecto invernadero.

Respecto al forzamiento radiativo este no debe exceder 1Watt por metro cuadrado por arriba de los niveles pre-industriales (Rockström et al. Nature 2009). Hay que decir que los niveles actuales están en 387 partes por millón por unidad de volumen para las concentraciones de CO_2 y en $1.5Wm^2$ el forzamiento radiativo. Operar por encima de estos niveles puede derivar en un mayor cambio climático irreversible aumentando la temperatura lo que ocasiona un derretimiento de los casquetes polares que generarían inundaciones, afectando el clima del planeta, cambiando la distribución de la vegetación y con esto, actividades humanas como la agricultura.

“Para los dos próximos decenios las proyecciones indican un calentamiento de aproximadamente 0,2°C por decenio para toda una serie de escenarios de emisiones IEEEE ⁵. Aunque se hubieran mantenido constantes las concentraciones de todos los gases de efecto invernadero y aerosoles en los niveles de 2000, cabría esperar un calentamiento de aproximadamente 0,1°C por decenio.” (IPCC 2007).

Las proyecciones realizadas por el IPCC sugieren que un incremento en la temperatura amenaza alrededor del 20-30 % de las especies vegetales y animales evaluadas hasta la fecha (2007), así como los arrecifes de coral si el aumento del promedio mundial de temperatura excediese de 1.5-2.5°C por encima de los niveles de 1980-1999, en cuyo caso las proyecciones sugieren además una mayor vulnerabilidad de las comunidades indígenas de la región ártica y de las comunidades que habitan en islas pequeñas. El Informe Especial del IPCC sobre escenarios de emisiones (IEEEE, 2000) proyecta un aumento de las emisiones mundiales de GEI de entre 25 % y 90 % (CO_2 -eq) entre 2000 y 2030, suponiendo que los combustibles de origen fósil mantengan su posición dominante en el conjunto mundial de fuentes de energía hasta 2030 como mínimo.

0.2.4. Pérdida de la biodiversidad

Es la tasa de extinción definida como número de especies que se pierden por millón de especies por año. Mace, G. et al 2005, definen Biodiversidad como “la variabilidad de organismos vivos de cualquier fuente, incluidos, entre otras cosas, los ecosistemas terrestres y marinos y otros ecosistemas acuáticos y los complejos ecológicos de los que forman parte; comprende la diversidad dentro de cada especie, entre las especies y de los ecosistemas. También enfatiza estos tres niveles (el genético, el de las especies y el de los ecosistemas).”

La pérdida de biodiversidad durante el período industrial se ha acelerado notablemente. La tasa de extinción de especies se estima con los registros fósiles. En ellos encontramos que las tasas de extinción por millón de especies por año, oscilan, para la vida marina entre 0.1 y 1, y cuando tratamos con mamíferos entre 0.2 y 0.5. Entonces, si bien la extinción de especies es un proceso natural, y ha ocurrido durante las distintas eras, Mace, G. et al. en sus trabajos sobre Biodiversidad (2005) indican que la acción del hombre ha incrementado la tasa de extinción hasta el nivel de la

⁵ (El término IEEEE designa los escenarios descritos en el Informe Especial del IPCC sobre escenarios de emisiones (IEEEE, 2000)).

última gran extinción masiva. Es decir, si consideramos las tasas mencionadas como normales; hoy la extinción se encuentra alrededor de 100 a 1000 veces por encima de estas. Una vez más la acción humana es el principal forzante, relacionada esta vez con el cambio de uso de suelo, en el que zonas naturales se convierten en urbanas y agrícolas. Al cambiar el uso de suelo cambian las condiciones (factores bióticos y abióticos) en los que se desenvuelven las especies, haciendo que compitan por territorio al encontrar menos lugares para conseguir alimento. Por ejemplo, en zonas agrícolas se introducen especies ajenas a los ecosistemas, aumenta la extracción de agua y se incrementan también los incendios forestales.

Las especies en si son reguladores del ecosistema, ya que sus interacciones con otras especies y con el medio, permiten la estabilidad de los ciclos naturales. Modificar la biodiversidad es modificar el entorno. No obstante, ¿Cómo establecer un umbral sobre la tasa de extinción? Si bien sabemos que el equilibrio en los ecosistemas se encuentra basado en la diversidad de especies que lo habitan, aún no es posible establecer cuantitativamente el tipo y la cantidad de especies que pueden perderse hasta que el equilibrio del ecosistema cambie abruptamente. Entonces si bien este indicador se mantiene únicamente en términos cualitativos, podemos decir con seguridad que la tierra no puede sostener el ritmo actual de pérdida sin que eventualmente ocurran cambios importantes en la estabilidad de los ecosistemas.

0.2.5. Ciclos de fósforo y nitrógeno

Las modificaciones en los ciclos de P y N_2 se miden en la cantidad de P que va hacia los océanos, medido en millones de toneladas por año, y en la cantidad de N_2 eliminado de la atmósfera para uso humano, medido también en millones de toneladas por año.

La alteración en los ciclos de fósforo y nitrógeno se origina principalmente por el cambio de uso de suelo. La agricultura moderna desde la revolución verde incrementó el uso de fertilizantes para la producción de alimentos y forrajes para ganado, siendo la causa más importante en la contaminación del medio ambiente. Cuando observamos estas alteraciones a escala planetaria las cantidades adicionales de nitrógeno y fósforo activados por los seres humanos son tan grandes que que perturban de manera significativa los ciclos globales de estos importantes elementos. La elaboración de fertilizantes convierte alrededor de 120 millones de toneladas de N_2 de la atmósfera por año en formas reactivas, cantidad que excede la producida por todos los procesos terrestres de manera natural. Pero ¿qué ocurre con el nitrógeno reactivo?

Pues bien, gran parte de este nitrógeno se introduce al medio ambiente, contaminando vías fluviales y zonas costeras. Además contribuye a generar una serie de gases a la atmósfera que destruyen la capacidad de recuperación de importantes subsistemas terrestres. Por ejemplo el óxido nitroso es uno de los gases de efecto invernadero más importantes (aparte del CO_2), y por lo tanto aumenta directamente forzamiento radiativo (es decir, modifican la radiación atrapada en la tierra) aumentando consecuentemente la temperatura. Ecosistemas donde hay evidencia de contaminación de los mantos acuíferos, muchas veces cerca de las zonas de cultivo, cambian sus procesos de auto regulación generando cambios en las especies y consecuentemente en el clima del lugar.

¿Cómo podemos fijar un umbral para las cantidades de nitrógeno? Para esta tarea es importante comenzar considerando la fijación de nitrógeno, es decir, la tasa a la cual el nitrógeno cambia de forma reactiva a pasiva. El proceso biológico de fijación de nitrógeno es llevado a cabo por microorganismos, estos lo realizan en ocasiones de manera independiente y en otras en relaciones simbióticas con otros organismos (muchas veces plantas). Para enfrentar el problema del aumento de nitrógeno en la atmósfera se han estudiado diversas opciones como la modificación genética de plantas para optimizar los procesos de fijación. No obstante, estos aún requieren ser estudiados por lo que la acumulación de nitrógeno continua siendo un problema. Para establecer un umbral de seguridad se ha estimado disminuir el nivel de producción de nitrógeno reactivo al 25 % de su valor actual, que oscila alrededor de 35 millones de toneladas por año.

Por otro lado, a diferencia del nitrógeno, el fósforo es un mineral fósil que se acumula como resultado de los procesos geológicos. Se extrae, por tanto, de las rocas y es utilizado en la industria para elaborar fertilizantes principalmente, aunque también se utiliza en nuestra pasta de dientes. La extracción de fósforo oscila alrededor de 20 millones de toneladas anuales, de las cuales aproximadamente 8.5 millones terminan en los océanos después de pasar por las tuberías o ríos. Estas cifras son aproximadamente ocho veces las cantidades naturales en las que se produce el depósito de fósforo. ¿Por qué es esto importante? Los registros terrestres muestran que periodos de anoxia (falta de oxígeno) ocurren precisamente cuando las cantidades en los flujos de fósforo hacia los océanos aumentan por encima ciertos valores considerados críticos, los cuales se alcanzan, según modelos, cuando los flujos naturales se ven excedidos por encima de 20 %. Esto claramente produce resultados catastróficos para la vida marina a base de oxígeno, y consecuentemente para todas las actividades humanas relacionadas con ella, como la pesca.

0.2.6. Acidificación del Océano

Definida como “el aumento en el PH del océano, principalmente en la capa superficial.”

El proceso de acidificación del océano se encuentra estrechamente relacionado con el nivel de emisiones de CO_2 . Cuando la concentración de CO_2 en la atmósfera aumenta, crece la cantidad de dióxido de carbono que se disuelve en el agua en forma de ácido carbónico, modificando el pH de la superficie. Para establecer una medida estándar de la acidificación del océano, podemos decir que los océanos son “naturalmente” básicos con un pH aproximado de 8,2. No obstante, las observaciones muestran una caída situándolo con un pH de 8 y con tendencia a decrecer. Estas estimaciones han sido realizadas siguiendo los niveles de aragonita (forma del carbonato de calcio) que se crea en la capa superficial. En este punto se establece una relación con la pérdida de biodiversidad ya que muchos organismos (desde corales hasta fitoplancton) son básicos en la cadena alimenticia, y sus esqueletos o conchas están hechos de aragonita. Al descender su número se debilitan los ecosistemas oceánicos y disminuye la producción en las pesqueras. (Foley et al. 2010).

0.2.7. Uso de suelo

El IPCC define el Cambio de Uso de Suelo, como el porcentaje de uso de suelo global convertido en tierras de cultivo. Una definición general de uso de suelo abarca cualquier tipo de utilización humana de un terreno. El aumento en el uso de suelo, ya sea para cultivo o para urbanización, favorece la pérdida de biodiversidad que se encuentra asociada con la destrucción de los ecosistemas. Si bien los valores preindustriales del porcentaje de uso de suelo convertido en tierras de cultivo eran despreciables, con la llegada de la industrialización se produce un aumento sostenido. Hoy el porcentaje de tierra convertida para cultivo se encuentra alrededor de 11,7%, mientras que la frontera estimada se ha fijado en 15%.

0.2.8. Uso de agua dulce

El Aumento en el uso de agua dulce se considera como un aumento en la utilización corriente. Actualmente en todo el mundo se extraen anualmente 2600 kilómetros cúbicos de agua de los ríos, lagos, y mantos acuíferos. De estos 70% se ocupan en irrigación, 20% en la industria y 10% en uso doméstico. Esta extracción ocasiona la desecación y disminución en el flujo de ríos, lagos, etc. (IPCC 2007). El proceso de

industrialización es el forzante principal de el aumento en la demanda de agua dulce. El uso estimado en tiempos preindustriales era de apenas 415 kilómetros cúbicos por año, mientras que el uso corriente se estima como mencionamos alrededor de 2600 km³. La frontera se ha establecido en 4000 km³.

0.2.9. Disminución del ozono estratosférico

La disminución de O₃ se estima respecto a la Concentración de ozono en la estratosfera, medido en unidades Dobson.⁶

El ozono presente en la atmósfera tiene importantes repercusiones para la vida, a pesar de que se encuentra en cantidades muy bajas. El ozono de la estratosfera impide que las radiaciones ultravioletas lleguen a la superficie. Uno de los principales problemas ambientales detectados en los últimos años ha sido la destrucción de este ozono estratosférico por átomos de Cloro libres liberados por los CFC's emitidos a la atmósfera por la actividad humana. El nivel preindustrial en unidades Dobson era de 290, mientras que el nivel actual es de 283, el umbral se ha establecido en 276.

0.2.10. Contaminación Química

La contaminación química se refiere, por ejemplo, a la cantidad emitida, a la concentración o persistencia de contaminantes orgánicos, plásticos, metales pesados, residuos químicos, nucleares, etc., que afectan la dinámica de los ecosistemas. La contaminación química ocurre cuando residuos químicos o sustancias producidas por la actividad humana entran al ambiente, contaminando agua, aire y suelos. La lluvia ácida y los gases de efecto invernadero son ejemplos de contaminación química. Si bien no puede establecerse una medida precisa y general de este proceso, si puede estimarse cuantitativamente su efecto sobre los distintos subsistemas considerados.

0.2.11. Dispersión de Aerosoles

Por dispersión de aerosoles entenderemos "La concentración de partículas en la atmósfera". Estas pueden ser de plomo, cobre, magnesio, fierro, residuos de incendios,

⁶ La unidad Dobson es una medida del espesor de la capa de ozono, equivale a 0,01 mm de espesor de capa en condiciones normales de presión y temperatura (1 atm y 0 °C respectivamente), expresado en número de moléculas, una DU representa la existencia de 2,69 x 10¹⁶ moléculas por centímetro cuadrado

ceniza, etc. Al igual que la contaminación química, tampoco se tiene un cuantificador preciso, no obstante, la acción de las partículas suspendidas sobre los otros subsistemas es importante.

Con estas definiciones, estructuraremos un mapa cognitivo, en el cual se establecen las interacciones entre los distintos subsistemas. Es el análisis del mapa el que nos permite obtener una visión global de la dinámica del sistema climático, evaluando la respuesta del sistema a los distintos forzantes en cada uno de los componentes así como la importancia de estos. A continuación presentamos de manera formal el modelo matemático empleado.

1. MODELACIÓN

1.1. Mapas Cognitivos

Los mapas cognitivos permiten modelar un sistema dinámico como una colección de conceptos variables en el tiempo, interrelacionados entre sí. Si el mapa cognitivo es además difuso, las relaciones entre los conceptos aceptan valores “no precisos” que pueden tomarse de las opiniones de expertos. Estos cuantificadores determinan el peso de las conexiones entre nodos, que a su vez, determinan la dinámica de las iteraciones de la red. Dadas las condiciones del sistema, forzamos un estado específico del mismo, manteniendo uno o varios conceptos activos; esto permite que las interacciones lleven al sistema a un estado de equilibrio o no, dado por los valores a los que convergen los conceptos.

Formalmente, los mapas cognitivos son arreglos gráficos de nodos (C_1, C_2, \dots, C_n) interconectados entre sí, donde cada nodo C_i representa un concepto y las relaciones dirigidas e_{ij} que se establecen entre el concepto C_i y el concepto C_j (denotadas como $C_i \rightarrow C_j$), expresan en qué medida C_i causa C_j . Las relaciones variables entre conceptos (indicadas por flechas) pueden ser negativas o positivas, una relación positiva $C_i \rightarrow +C_j$, indica que, en tanto C_i crece C_j también, mientras que una relación negativa entre $C_i \rightarrow -C_j$ indica que mientras C_i crece C_j decrece.

Los nodos representan conceptos variables de la forma $C_i(t)$, y, de acuerdo a su ubicación, ya sea en el origen o al final de una flecha son llamados “causa variable” o “efecto variable” respectivamente. Es importante mencionar que es la condición de variabilidad la que permite que el sistema pueda ser dinámico, de otro modo el modelo carece de sentido en tanto que el comportamiento de los nodos no se modifica. Como un ejemplo simple consideremos el problema del carácter de un gato, y supongamos que se llama *tisha*. Nótese que los conceptos no necesitan ser cuantificados ni sumamente precisos, lo que no impide modelar y obtener información. Los conceptos en este caso serán: Aumento de espacio (en el que puede habitar el animal), Mal humor de *tisha*, Momentos de comida, y Convivencia. Los nodos han sido relacionados de la siguiente manera. Un aumento en el espacio disminuye el mal humor del gato.

Si aumenta el mal humor disminuye la comida. Incremento en la comida incrementa la convivencia. Finalmente cuando aumenta la convivencia disminuye el mal humor. El mapa se representa en la siguiente imagen.

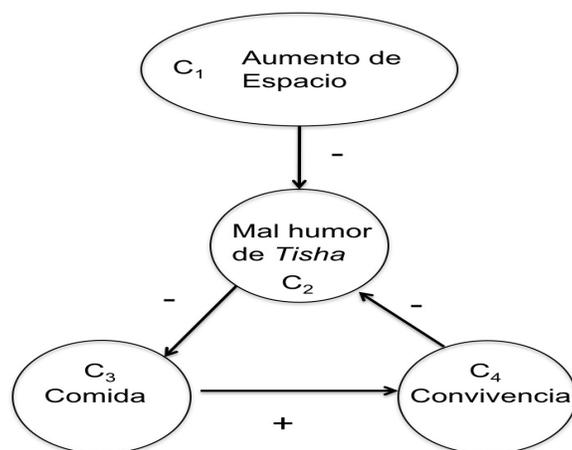


Fig. 1.1: Mapa cognitivo del humor de *tisha*.

La matriz adyacente o adjunta a este sistema es una matriz cuadrada que tiene por entradas las relaciones entre los conceptos, es decir, los valores de las relaciones e_{ij} entre los C_{ij} . En nuestro ejemplo se escribe:

$$M_{tisha} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces M contiene todas las trayectorias posibles en el mapa cognitivo. Como notación, representaremos los vectores transpuestos v^t simplemente como v . Consideramos entonces el vector transpuesto $v = [1, 0, 0, 0]$, donde estamos activando el primer concepto, entonces los vectores v_1 , v_2 , v_3 , y v_4 obtenidos de la forma: $v_1 = v * M$, $v_2 = v_1 * M$, $v_3 = v_2 * M$, $v_4 = v_3 * M$ y están dados por:

$$v_1 = [0, -1, 0, 0]$$

$$v_2 = [0, 0, 1, 0]$$

$$v_3 = [0, 0, 0, 1]$$

$$v_4 = [0, -1, 0, 0]$$

Luego de cada iteración, reiniciamos el primer nodo de tal manera que su valor siempre sea 1 (es decir, lo mantenemos activo), este proceso arroja como resultado un vector que mantiene el valor de cada uno de los nodos (Ross 2004). En este caso después de cuatro iteraciones el vector no cambia y decimos que el sistema ha alcanzado un estado de equilibrio, dado por el forzamiento de mantener activo alguno de los conceptos. En este caso los vectores son los siguientes:

Comenzamos activando el primer concepto:

$$v = [1, 0, 0, 0]$$

Primera iteración $v_1 = [0, -1, 0, 0]$, reiniciando el primer nodo: $v_1 = [1, -1, 0, 0]$

Segunda iteración $v_2 = [0, -1, 1, 0]$, reiniciando el primer nodo: $v_2 = [1, -1, 1, 0]$

Tercera iteración $v_3 = [0, -1, 1, 1]$, reiniciando el primer nodo, $v_3 = [1, -1, 1, 1]$

En este caso el sistema converge en tres iteraciones. Si continuamos iterando el vector que no cambia, ya que hemos recorrido las $n - 1$ (con n el número de nodos) trayectorias del sistema. Notemos que al reiniciar el nodo mantenemos los valores que toman los conceptos. El vector $[1, -1, 1, 1]$ se interpreta de la siguiente manera: Si aumenta el espacio disponible para el gato; disminuye el mal humor; se incrementa la comida; y aumenta la convivencia.

1.2. Representación de la Causalidad a través de Conjuntos Difusos

Los mapas cognitivos involucran la propagación de causalidad entre conceptos dinámicos ($C(t)$) establecidos como nodos. No obstante, es importante dar una representación formal de la causalidad. Esto puede hacerse en términos de conjuntos difusos. Antes que nada diferenciemos nuestra representación causal de la implicación lógica tradicional. Para ello notemos que:

la causalidad es más complicada que la implicación lógica . . .

Para ilustrar esta idea consideremos una causalidad positiva (*incremento causal*). Si “A *causa* B”, se entiende como “A *implica* B”, entonces por contraposición lógica, “A *causa* B” puede reemplazarse por “no-B *causa* no-A”. Pero Kosko (1991). *dixit* fumar *causa* cáncer de pulmón y no tener cáncer de pulmón no *causa* no fumar. Lo que de la experiencia podemos inferir es que no fumar ayuda a no causar cáncer de pulmón. La propagación de la causalidad a través de los mapas cognitivos es distinta a la implicación lógica. Y como mencionamos, para trabajar con ella podemos representar el razonamiento causal dentro de un marco de conjuntos difusos. Estos permiten trabajar con “grados de pertenencia”. Recordemos que en esencia los nodos (que representan objetos causales) son conceptos variables y pueden representarse como subconjuntos difusos en un espacio de conceptos. En este caso, el cambio en el grado de pertenencia al conjunto difuso representa el cambio en la variación de cada concepto. Definimos entonces la causalidad difusa en términos de relaciones entre conjuntos difusos, que a su vez representan conceptos difusos. Para esto definimos un concepto que denotamos C_i como la unión difusa (esta definición puede darse también como disjunción) de alguna cantidad representada en un conjunto difuso Q_i y su conjunto complemento $\sim Q_i$. Recordando que $\sim\sim Q_i = Q_i$. Entonces:

$$C_i = Q_i \cup \sim Q_i$$

Definimos entonces la causalidad en términos de conjuntos difusos como sigue:

Definición: C_i *causa* C_j si y sólo si $Q_i \subset Q_j$ y $\sim Q_i \subset \sim Q_j$.
 C_i *causalmente decrece* C_j si y sólo si $Q_i \subset \sim Q_j$ y $\sim Q_i \subset Q_j$.

Considerando la causalidad representada en términos de conjuntos difusos y que $\sim\sim Q_i = Q_i$ Podemos siempre reemplazar una causalidad negativa por una positiva negando el concepto afectado, por ejemplo: recordando nuestro mapa del gato donde “El aumento de espacio $\xrightarrow{-}$ mal humor del gato” *El aumento de espacio disminuye el mal humor del gato* puede reemplazarse por: “El no-aumento de espacio incrementa el mal humor del gato, es decir *El \sim aumento de espacio $\xrightarrow{+}$ mal humor del gato.*

De esta manera $C_i \xrightarrow{-} C_j$ puede reemplazarse como $C_i \xrightarrow{+} \sim C_j$.

1.2.1. Cantidades Causales y Modificadores

Regresemos de nuevo a nuestro ejemplo y a los nodos “Aumento de Espacio” y “Mal humor del gato” Las cantidades entre las cuales *la causalidad* opera son Espacio y Humor, es decir, el espacio causa un cambio en el humor, mientras que Aumento (\sim Aumento) y Mal (\sim Mal) son los modificadores.

En estos términos la representación de los conjuntos difusos para los conceptos causales se ilustra como sigue.

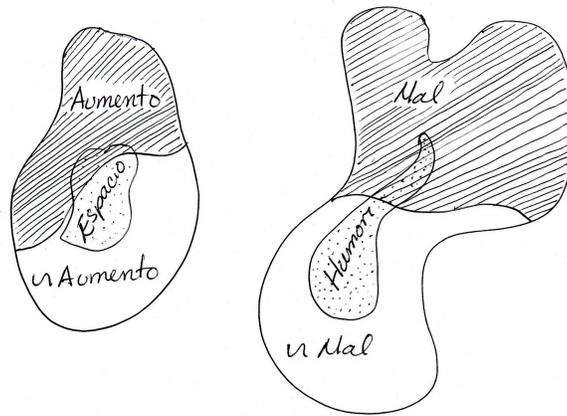


Fig. 1.2: Espacio Causal y Modificadores

Expresado de forma general para cualquier cantidad Q_i dis cantidad $\sim Q_i$ y modificador M_i difusos, donde por definición M_i es el conjunto universo. El concepto C_i queda expresado como: $C_i = (Q_i \cup \sim Q_i) \cap M_i$ lo que permite reescribir nuestras

definiciones como:

C_i causa C_j si y sólo si $(Q_i \cap M_i) \subset (Q_j \cap M_j)$ y $(\sim Q_i \cap M_i) \subset (\sim Q_j \cap M_i)$

C_i causalmente decrece C_j si y sólo si $(Q_j \cap M_i) \subset (\sim Q_j \cap M_j)$ y $(\sim Q_i \cap M_i) \subset (Q_j \cap M_j)$

Esta formalización de la representación causal a través de conjuntos difusos permite que más adelante asignemos pesos a las ligas de nuestro mapa. Además permite construir el criterio mínimo-máximo que discutiremos a continuación, en términos de unión e intersección de conjuntos.

1.3. Álgebra Causal Difusa

1.3.1. Criterio Mínimo-Máximo

La técnica de inferencia min-max, puede usarse para evaluar los efectos indirectos y totales en un mapa cognitivo difuso, para esto, es importante definir los siguientes conceptos utilizados en los mapas cognitivos clásicos.

Trayectorias y Ciclos

Definimos una trayectoria entre los conceptos C_h y C_k , como la secuencia de todos los nodos conectados que se encuentran entre el primer nodo (C_h) y el último (C_k) [Kosko, 1986]. Por otro lado definimos un ciclo como una trayectoria en la cual el primero y el último nodo se encuentran conectados por una flecha.

Efecto indirecto y Efecto total

El efecto indirecto de una trayectoria que parte de la causa variable C_h al efecto variable C_k denotada por $I(h, k)$, es el producto de las relaciones causales e_{ij} que se encuentran en la trayectoria de C_h a C_k [Axelrod 1976]. Si la trayectoria posee un número par de flechas positivas, entonces el efecto indirecto es positivo. Si la trayectoria tiene un número non de flechas negativas, entonces el efecto indirecto es negativo.

Por otro lado el efecto total definido entre una causa variable C_h y un efecto variable

C_k , denotado por $T(h, k)$ es la unión de todos efectos indirectos de todas las trayectorias entre C_h y C_k [Axelrod 1976]. Si todos los efectos indirectos son positivos, el efecto total es positivo también, si todos los efectos indirectos son negativos, el efecto total es negativo. Si se tienen tanto efectos indirectos positivos como negativos, la unión o suma está indeterminada [Kosko 1986].

En los mapas cognitivos difusos las relaciones causales entre conceptos son definidas en muchos casos como variables lingüísticas: palabras que cuantifican o expresan lo “estrecho” de la relación entre los nodos. El valor mínimo entre las uniones de una trayectoria se considera la “cuantificación” o estrechez de la trayectoria. En caso de existir más de una trayectoria entre dos nodos (causa variable y efecto variable) el valor máximo entre las trayectorias se considera como efecto total. Esto puede expresarse como: el efecto indirecto está dado por la variable lingüística “más débil” de la trayectoria, y el efecto total está determinado por la variable “más fuerte” o de mayor peso dentro de las trayectorias. Otro modo de entender esto es pensándolo como sigue: Una cadena no puede ser más fuerte que el más débil de sus eslabones. Por tanto, cuando evaluamos una trayectoria entre dos nodos de un mapa, el efecto de un nodo a otro está determinado por el “eslabón más débil”. Por el contrario, cuando evaluamos varias trayectorias de un concepto a otro, el efecto total es el valor máximo de los efectos (en cada caso el cuantificador más débil) de cada trayectoria, es decir, cuando tenemos varias cadenas, el efecto de un nodo a otro será al menos igual a la cadena más fuerte de estas (cuya fuerza es su eslabón más débil).

1.4. Propiedades de la matriz adyacente de un Mapa Cognitivo

Utilizar la representación matricial de los mapas cognitivos permite trabajar directamente con las propiedades de la matriz, estableciendo criterios para la elaboración de los mismos además extraer información de su comportamiento. Para formalizar esta representación supongamos lo siguiente: Sean C_1, C_2, \dots, C_n conceptos (o nodos) de un mapa cognitivo. Y denotamos como $e_{ij} = e(C_i, C_j)$ las relaciones causales, es decir, la cantidad de *causalidad* que C_i ocasiona en C_j . Denotamos como E a la matriz de todas las relaciones causales en un mapa cognitivo, es decir:

$$E = (e_{ij}) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Cuando trabajamos con mapas cognitivos trabajamos con matrices cuadradas. E es entonces la matriz adyacente. Contiene toda la información de las trayectorias

de *un paso* (*one-edge paths* en inglés) en el mapa cognitivo. $E^2 = [E_{ij}^2] = E \times E$ enlista todas las trayectorias de *dos pasos* (*o bordes*) (*two-edge* en inglés) del mapa cognitivo.

$$e_{ij}^2 = \sum_{k=1}^n e_{ik} \times e_{kj}$$

Donde cada $e_{ij} \neq 0$ sólo si existe k' tal que $e_{ik'}$ y $e_{k'j}$ son distintos de cero. De manera similar E^3, E^4, \dots, E^{n-1} enlistan los efectos de sumar los efectos indirectos de tres pasos, cuatro pasos, \dots , $(n-1)$ pasos. Es importante decir que, dado que los mapas cognitivos son acíclicos, no existen trayectorias con más de $(n-1)$ *pasos*. Entonces T definida como:

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} E^i$$

Es llamada la *matriz de efecto total* y es la suma de las matrices potencia E^i . Un criterio útil para la existencia de ciclos en E puede enunciarse de la siguiente manera: E es acíclica si y sólo si la diagonal principal de T es cero. De otro modo algún concepto se encuentra afectándose a si mismo, lo cual también puede ocurrir.

Como trabajaremos con la matriz de nuestro mapa cognitivo para analizar la dinámica del sistema, es importante formalizar también cómo es que **estos sistemas codifican la información de la red**. Y cómo podemos representar el estado del sistema a través de un vector. Los mapas cognitivos pueden verse como un caso particular de redes neuronales, en donde el número de nodos entre un campo y otro es el mismo, ya que los estados de la red cambian de acuerdo al estado anterior de ésta. Para ello, presentaremos formalmente la codificación de señales y redes, que usaremos más adelante para analizar la convergencia de la red.

1.5. Codificación de Señales

1.5.1. Teoría de Hebb

La teoría desarrollada por Donald Olding Hebb (1904 – 1985) modela la propiedad de *plasticidad en la sinapsis*; es decir, las modificaciones en la eficiencia de la

sinapsis producidas por un estímulo constante entre dos neuronas. El postulado de Hebb puede enunciarse como sigue:

Si una célula A se encuentra suficientemente cerca como para estimular a otra célula B; y además la estimulación ocurre de manera constante, se generan cambios en el metabolismo del sistema (en una o ambas neuronas) que incrementan la comunicación entre las células.

Esta idea suele traducirse como “*neuronas que se activan juntas*”, y si bien constituye una simplificación del sistema nervioso, se utiliza para modelar algunos tipos de aprendizaje asociativo en el que la activación simultánea de células genera un aumento en los procesos de sinapsis. Este aprendizaje se conoce como: aprendizaje Hebbiano (*Hebbian learning*).

Cuando trabajamos con modelos de redes neuronales, la teoría de Hebb se utiliza como un método para describir cómo se alteran los pesos entre las neuronas. Los principios básicos señalan que:

El peso (sinapsis) entre dos neuronas se incrementa cuando estas se activan simultáneamente, y se reduce cuando se activan por separado.

Cuando al mismo tiempo tenemos dos nodos positivos o negativos se tiene un fuerte ponderación positiva entre ellos; mientras que al tener dos nodos de signo opuesto, se tienen fuertes pesos negativos.

Estos criterios son una primera aproximación (la más simple) para seleccionar los pesos entre nodos, pero estos pueden seleccionarse de muchas maneras más.

1.6. Redes Neuronales

Las redes neuronales, son un modelo de procesamiento de señales o estímulos orientado al aprendizaje; basado en el sistema nervioso de los animales, donde una red de neuronas colabora para producir una señal de salida al presentarse un estímulo en la red.

En este caso trabajaremos considerando las redes neuronales como sistemas dinámicos entrenables o adaptativos, entendiendo por sistema dinámico adaptativo aquel que tiene la capacidad de cambiar y aprender de la *experiencia* proveniente de estímulos que se repiten.

La actividad de la red se representa como una trayectoria en un espacio de estados, por ejemplo R^n . En este espacio cada punto corresponde a una “foto instantánea” de alguna posible configuración de la red. El usuario (a veces considerado el ambiente) determina las condiciones iniciales del sistema, estas definen el punto donde comienza la trayectoria en el espacio fase. Los valores de la sinapsis cambian gradualmente durante las iteraciones del sistema, en el caso discreto, mientras las salidas de las neuronas fluctúan. Finalmente la trayectoria termina cuando el sistema alcanza el equilibrio, si es que esto ocurre, ya que en algunos casos la trayectoria diverge. Los atractores del sistema pueden ser puntos fijos (lo que ocurre en sistemas simples y rara vez en sistemas complejos), y ciclos límite.

En nuestro estudio las condiciones iniciales están determinadas por los valores asignados a los nodos, el valor de los conceptos cambia mientras se producen las iteraciones del sistema, y finalmente se obtiene como salida un atractor.

1.7. Sistemas Difusos

Los sistemas difusos permiten codificar estructuras de conocimiento dentro de marcos numéricos (Kosko 1992). Para ello introducimos nuestras asociaciones o pesos difusos (*mucho, poco, algo*) como entradas en una matriz asociada con el sistema. Cada entrada de la matriz es una regla de la memoria asociativa difusa (FAM en inglés) o transformación de *entrada - salida* de la red. En este caso las entradas de la matriz adyacente al mapa cognitivo pueden representarse con entradas difusas, las cuales permiten incorporar información “no precisa” en las relaciones entre nodos. Podemos decir por ejemplo, recordando nuestro problema con el gato, que el mal humor disminuye *mucho* la comida, y aún así poder trabajar con el sistema.

1.8. Señales

Cuando modelamos las señales producidas por cada neurona dentro de la red y la forma como interactúan entre si, consideramos un *campo competitivo*, en el cual cada neurona se excita a si misma a sus vecinos cercanos, inhibiendo a sus vecinos distantes de acuerdo al signo de sus conexiones sinápticas hacia estos. La condición de *campo competitivo* indica que las neuronas compiten por la amplitud de las señales. Estas amplitudes son representadas como una función que toma valores en el intervalo $[0, 1]$, la neurona “gana” en el tiempo t si $S(x(t)) = 1$, y “pierde” si $S(x(t)) = 0$,

en cualquier otro caso posee un valor difuso en el que “*ni gana ni pierde*”, contenido en el intervalo $[0, 1]$.

1.9. Sistemas dinámicos neuronales

Para describir la dinámica del sistema, trabajaremos con campos de neuronas. Para simplificar nuestro análisis, estamos considerando que estas únicamente se encuentran relacionadas por las conexiones sinápticas entre ellas. Denotaremos por F_x cualquier campo de neuronas (puede contener 2, 3, o cualquier número de estas). Un sistema dinámico neuronal será entonces un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que contiene la activación del conjunto de neuronas como función del tiempo. El estado de un sistema dinámico neuronal al tiempo t será el vector de activación:

$$X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Para entender como operan estos sistemas consideremos un ejemplo. Supongamos que tenemos los campos F_x y F_y con 3 y 2 neuronas respectivamente. Una vez que definimos las relaciones sinápticas entre las neuronas tenemos una matriz que conecta ambos campos. Supongamos que las matrices que conectan a F_x con F_y y viceversa son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las señales entre neuronas poseen un valor umbral en el nivel de la señal en cada disparo. Denotamos por S_i y S_j a las funciones que describen la variación de la señal, estas se definen como funciones binarias acotadas por un umbral determinado (en cada tiempo k) de la siguiente forma:

$$S_i(x_i^k) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i^k > U_i \\ S_i(x_i^{k-1}) & \text{si } x_i^k = U_i \\ 0 & \text{si } x_i^k < U_i \end{cases}$$

Donde $U = (U_1, \dots, U_n)$ son valores reales para las neuronas en el campo Fx. De modo análogo para el campo Fy, la función $S_j(y_j^k)$ se define como:

$$S_j(y_j^k) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_j^k > V_j \\ S_j(y_j^{k-1}) & \text{si } y_j^k = V_j \\ 0 & \text{si } y_j^k < V_j \end{cases}$$

Donde $V = (V_1, \dots, V_n)$ son valores reales también. Estas funciones regulan la interacción de las señales entre los campos.

La señal original, contiene el estado de las neuronas en el campo Fx, en el cual cada una de estas puede encontrarse apagada (OFF), o encendida (ON). Este se representa por un vector de estado en el que la entrada “ i ” corresponde con la i -ésima neurona del campo. Por ejemplo el vector $v = (1, 1, 1)$ representa las tres neuronas encendidas en el campo Fx, mientras que el vector $v = (1, 0, 1)$, representa la primera y tercera neuronas activas mientras que la segunda se encuentra apagada. Físicamente el vector representa el estímulo que recibe el sistema, por ejemplo, encendiendo todas las neuronas a un tiempo k . La señal de las neuronas encendidas en un campo pasará a otro a través del filtro M que contiene las relaciones sinápticas entre ellas. El proceso de la señal por la matriz filtro se define como la multiplicación del vector v (llamado vector de estado del sistema) por la matriz M . Cuando vamos del campo Fx a Fy decimos que la información se filtra *hacia adelante* (*forward*); y decimos que el proceso se realiza *hacia atrás* (*backward*) cuando vamos del campo Fy a Fx, utilizando en este caso el vector de estado de Fy y la matriz M^T .

Consideremos el vector $v = (1, 1, 1)$ y la matriz M . Establecemos una señal binaria donde los umbrales son $0 = U_i = V_i$. La primera iteración ($v * M$) produce el

vector:

$$v^{k+1} = (3, -1)$$

Que utilizando los umbrales resulta:

$$v^{k+1} = (1, 0)$$

Es decir, la primera neurona del campo F_y permanece activa mientras que la segunda no. En términos generales este proceso se representa como:

$$S(X_k)M = \left(\sum_{i=1}^3 S_i(x_i^k)m_{i1}, \sum_{i=1}^3 S_i(x_i^k)m_{i2} \right)$$

$$v^{k+1} = (3, -1) = (y_1^{k+1}, y_2^{k+1})$$

$$S(Y_{k+1}) = (1, 0)$$

Ahora podemos calcular $S(Y_{k+1})M^T$ donde la señal codificada en el vector $S(Y_{k+1})$ pasa a través de M^T en el tiempo $(k + 2)$ esto es:

$$\begin{aligned} S(Y_{k+1})M^T &= (1, 0, 2) \\ &= (x_1^{k+2}, x_2^{k+2}, x_3^{k+2}) = X_{k+2} \end{aligned}$$

Cuando consideramos la función umbral el vector $X_{k+2} = (1, 0, 2) = (1, 0, 1)$. Si calculamos ahora:

$$X_{k+2}M = (3, -1) = (1, 0) = Y_{k+3}$$

En este punto el sistema ha alcanzado un equilibrio bidireccional, donde $Y_{k+1} = Y_{k+3}$. El sistema se mantendrá en este estado de equilibrio hasta que algún estímulo externo lo modifique. Decimos entonces que la pareja de vectores binarios $\{(1, 0, 1), (1, 0)\}$ representa un punto fijo del sistema dinámico BAM (*bidirectional associative memory*). Esto puede leerse como: con el estímulo $(1, 1, 1)$ el sistema llega al estado de equilibrio $\{(1, 0, 1) \text{ en } Fx, (1, 0) \text{ en } Fy\}$.

Cuando un estímulo se mantiene presente en un campo de neuronas durante las iteraciones, es decir, si asumimos que una o más de las neuronas del campo está recibiendo un estímulo continuo. El sistema alcanzará un nuevo estado de equilibrio bajo estas condiciones. En el ejemplo anterior, si el estímulo se mantiene presente en la segunda neurona de F_x , el vector $(1, 0, 1)$ se mantendría como $(1, 1, 1)$, y los vectores $\{(1, 1, 1), (1, 0)\}$ representarían el estado de equilibrio del sistema.

No obstante, es importante saber bajo que condiciones podemos asegurar la existencia de puntos de equilibrio en estos sistemas; Esta es la razón por la que hemos incluido a modo de **Apéndice** Funciones de Liapunov y la demostración del teorema de estabilidad para BAM bivalentes.

Cuando trabajamos con mapas cognitivos los campos de neuronas cumplen que $F_x = F_y$, es decir, tenemos la acción del campo sobre si mismo, por lo que la matriz adyacente es siempre una matriz de $n \times n$. En este caso el sistema puede converger a un estado $(X(t))$ fijo, a un ciclo, o diverger en el tiempo.

2. EL MODELO

2.1. Mapa Cognitivo del Sistema Climático

El Mapa cognitivo planteado se muestra a continuación:

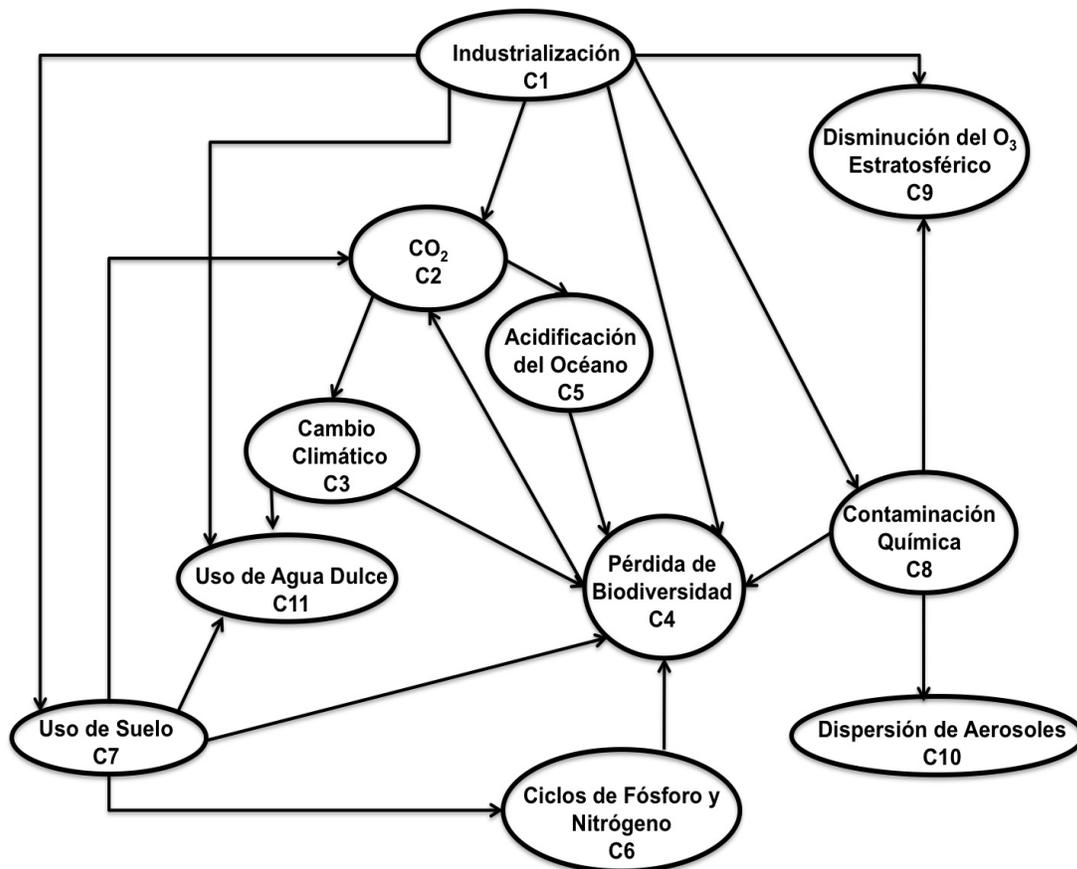


Fig. 2.1: Mapa cognitivo del sistema.

Las relaciones que se establecieron entre los conceptos se hicieron bajo las siguientes referencias:

Industrialización - CO_2

Según el IPCC, los forzantes del aumento en la concentración de CO_2 son los cambios demográficos, el desarrollo social y económico, y las líneas que sigue el desarrollo tecnológico. Todos estos conceptos están estrechamente relacionados con el proceso de industrialización (IPCC 2007). Por ejemplo, sólo el consumo de combustibles fósiles para satisfacer la demanda energética contribuye con alrededor del 80% de la emisiones globales.

CO_2 – Cambio Climático

El reporte del IPCC (Rogner et al, 2007) coloca la concentración de dióxido de carbono (gas de efecto invernadero) creciendo a una tasa de 1.9% anual, lo que favorece el incremento de la temperatura al cerrar la ventana atmosférica del CO_2 aumentando así el efecto invernadero y elevando la temperatura.

CO_2 – Acidificación del Océano

Cuando la concentración de CO_2 aumenta, aumenta la cantidad que se disuelve en forma de ácido carbónico, modificando el PH de la superficie (IPCC, 2002).

Cambio Climático – Pérdida de Biodiversidad

“El clima es el principal factor que controla las pautas mundiales de la vegetación, su estructura, la productividad” y las comunidades de especies animales y vegetales. El cambio en las temperaturas afecta de modo directo e indirecto a las especies. Esta liga representa justamente como el cambio climático causa la extinción y disminución de especies alterando los ecosistemas. “Los cambios en la variabilidad climática, en los extremos y en los valores medios determinan los impactos del cambio climático sobre los ecosistemas.” (IPCC, 2002).

Cambio Climático – Uso de Agua Dulce

“El cambio climático antropógeno agrava la presión que están experimentando ya las naciones ante el problema de la utilización sostenible del agua potable.” La disponibilidad del agua proveniente de fuentes superficiales o pozos poco profundos depende de la variabilidad estacional e interanual del caudal fluvial, y la seguridad de los suministros de agua está determinada por los flujos menores de carácter estacional. En las cuencas en que predomina la nieve, unas temperaturas más elevadas originan caudales menores y, por consiguiente, un menor suministro de agua durante

el verano (IPCC, 2008).

Industrialización – Uso de Suelo

El crecimiento demográfico aumenta la demanda de alimentos y por tanto (especialmente en países subdesarrollados que no poseen tecnología necesaria) aumenta la superficie destinada para la agricultura. Además al carecer de tecnología para evitar la degradación del suelo, suelos que han sido utilizados para cultivo quedan inutilizados por varios años, lo que ocasiona la invasión de nuevas tierras. A este problema se suman las tierras deforestadas para la ganadería y para la extracción de madera (Steffen et al. 2004).

Industrialización – Uso de Agua Dulce

El aumento de zonas de cultivo incrementa la demanda de agua para irrigación (70 % de la demanda). Colaboran en menor medida la demanda de los procesos industriales (20 %) y de uso doméstico (10 %), forzados por el crecimiento demográfico considerado parte del proceso de industrialización.

Uso de Suelo – CO_2

Con la deforestación disminuyen las zonas verdes, lo que tiene un impacto adverso en la fijación de CO_2 atmosférico.

Uso de Suelo – Uso de Agua Dulce

Al aumentar las extensiones de tierra destinadas a la agricultura y ganadería, aumenta la demanda de agua dulce. Por otro lado la pérdida de zonas verdes debilita la recarga de los mantos acuíferos y favorece la degradación de los suelos.

Uso de Suelo – Ciclos de P y N_2

La agricultura aumenta el uso de fertilizantes, los que contribuyen con 120 millones de toneladas de nitrógeno molecular en forma reactiva por año. En el caso del P se extraen de las minas 20 millones de toneladas por año, de las cuales entre 8.5 – 9.5 terminan en los océanos (Foley et al. 2010).

Uso de Suelo – Pérdida de Biodiversidad

El cambio en el uso del suelo genera destrucción del hábitat, siendo el principal forzante de la extinción de especies.

Ciclos de P y N_2 – Pérdida de Biodiversidad

Muchas de las extinciones masivas se encuentran ligadas, según los registros, al incremento en el flujo de fósforo hacia el océano, ocasionando periodos de anoxia (Handoh et al, 2003).

Pérdida de Biodiversidad – CO_2

Las alteraciones ocasionadas por la acción humana sobre la biosfera han ocasionado la pérdida de 20 a 30 % de los bosques que existía antes de 1900. Esta pérdida de la cubierta forestal ha contribuido con el 45 % del incremento observado en el CO_2 atmosférico desde 1850. (Swingland, 2003).

Industrialización – Pérdida de Biodiversidad

Desde la revolución de la agricultura hace 8000 años se ha producido una disminución de la cubierta forestal, no obstante para 1700 solo el 7 % de la cubierta forestal se había perdido (Cambio Climático 2007: Grupo de Trabajo I). La revolución industrial aceleró el proceso y alrededor de 1900 se había perdido entre el 20 – 30 %.

Industrialización – Contaminación Química

La contaminación química ocurre cuando residuos químicos o sustancias producidas por la actividad humana entran al ambiente, contaminando agua, aire y suelos. La lluvia ácida y los gases de efecto invernadero son ejemplos de contaminación química. Con el desarrollo de las actividades industriales y agrícolas, el crecimiento demográfico, etc. Aumenta la contaminación Química.

Industrialización – Disminución del O_3 estratosférico

Las concentraciones de O_3 estratosférico se mantienen a través del equilibrio dinámico que existe entre la producción y destrucción de ozono. No obstante, las trazas de radicales libres de hidrógeno, nitrógeno y halógenos (especialmente cloro y bromo), contribuyen a la disociación del O_3 . Si bien estos radicales libres existen naturalmente estos se han incrementado por la actividad industrial. (Publicaciones OMS 2000).

Contaminación Química – Disminución del O_3 estratosférico

Se refiere al aumento de las trazas de radicales libres de hidrógeno, nitrógeno y halógenos producidos por la actividad industrial. Estas disminuyen el O_3 estratosférico (Publicaciones OMS 2000).

Contaminación Química – Dispersión de Aerosoles

El aumento de la producción de residuos industriales especialmente aquellos que

contaminan el aire, aumentan las cantidades de aerosoles dispersos en la atmósfera. Dados los mecanismos con los que los aerosoles absorben las longitudes de onda (corta y larga) esto resulta un problema para la estabilidad del sistema climático (IPCC, 2007).

Contaminación Química – Pérdida de Biodiversidad

El incremento de CO_2 (entendido como residuo industrial) acidifica el océano causando períodos de anoxia, los que se encuentran ligados a procesos de extinción, aquí las emisiones de dióxido de carbono se consideran contaminación química (Foley et al, 2010). Además la contaminación química de los mantos acuíferos y suelos ocasiona un impacto negativo en las especies.

Cuando planteamos un mapa cognitivo debemos considerar el flujo de causalidad que activa los conceptos. Si dentro de un mapa existe un nodo al cual no llega (o entra) ninguna flecha, este *nodo* no se activará a menos que lo activemos “artificialmente” inicializándolo en el vector de estado, este es el caso de C_1 que en este mapa es el forzante del sistema. Este tipo de nodos pueden pensarse como aquellos que *no tendrían causas* definidas dentro del mapa.

La matriz del sistema queda representada por:

$$M_{sistema} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz representa las relaciones entre conceptos mostradas en el mapa cognitivo. Hay que hacer notar que en el mapa construido todas las relaciones causales son positivas. Iniciamos el primer nodo en el vector de estado $a_0 = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ e iteramos $a * M_{sist}$. En este sistema “el camino más corto” entre el primer nodo (C_1) y cualquier otro es de dos pasos, por lo que al activar el primer nodo el sistema

converge al estado de equilibrio “ a_2 ” en dos pasos, con:

$$a_2 = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

El vector de estado “ a ” que alcanza el sistema, representa *el incremento de cada nodo* debido a la *acción causal* de C_1 , pero no nos dice más que esto, es decir: *que la acción de C_1 causalmente incrementa los nodos de la red*. En este caso se ha mantenido encendido el primer nodo induciendo un forzante en la red.

Cuando no reiniciamos el primer nodo, es decir, no mantenemos el forzante (manteniendo las conexiones en la red) El sistema alcanza un equilibrio entre los nodos en los que existe retro alimentación (*feedback*), como se discute a continuación: Encendemos entonces C_1 sólo en la primera iteración. Obtenemos como vector de estado para la iteración 1.

$$a_1 = [0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1]$$

Es decir, se activan todos los nodos con los que C_1 tiene conexión. La segunda iteración queda:

$$a_2 = [0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1]$$

Se encienden los nodos 3, 5, 6, 10. Es decir, los siguientes nodos conectados en la red con los que fueron activados en la primera iteración, mientras que los nodos 7 y 8 se apagan. Ya que para esta iteración ningún nodo los activa. Al iterar una vez más el sistema converge al vector a_3 :

$$a_3 = [0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1]$$

2.2. Retroalimentación

El equilibrio se establece entre los nodos 2, 3, 4, y 5, donde existe retroalimentación (*feedback*) causal permanece aún cuando los otros nodos se hayan apagado, y el nodo 11 que es activado por el concepto C_3 sin que este a su vez active otro nodo. Esto nos dice información importante del subsistema (o subred). Y de sistemas interconectados de esta manera, donde al encender uno de los nodos el sistema alcanza un equilibrio. Si analizamos la red entre estos nodos (sin considerar el nodo C_{11}) tenemos el siguiente esquema y la siguiente matriz asociada al subsistema:

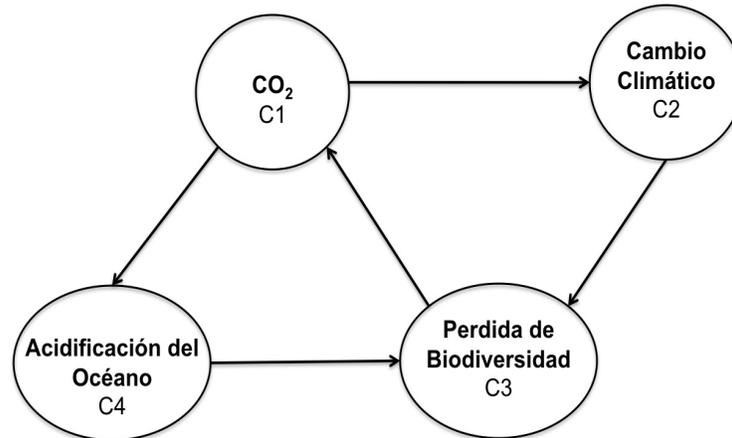


Fig. 2.2: Red entre los nodos 2, 3, 4, y 5 del sistema, llamados aquí 1, 2, 3, y 4 respectivamente.

$$M_{\text{Subsistema}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si mantenemos el forzante en el primer nodo, en dos iteraciones obtenemos $a = [1, 1, 1, 1]$. No obstante cuando activamos el primer nodo únicamente en el vector inicial (a_0), el sistema se comporta como sigue:

$$a_0 = [1, 0, 0, 0]$$

$$a_1 = [0, 1, 0, 1]$$

$$a_2 = [0, 0, 1, 0]$$

$$a_3 = [1, 0, 0, 0]$$

$$a_4 = [0, 1, 0, 1]$$

$$a_5 = [0, 0, 1, 0]$$

$$a_6 = [1, 0, 0, 0]$$

$$a_7 = [0, 1, 0, 1]$$

. . etc.

Es decir, al activarse el primer nodo en un tiempo cualquiera, el sistema converge a un ciclo. Este ciclo es el que mantiene la retroalimentación del flujo causal entre los nodos. Para estudiar el comportamiento del sistema añadimos pesos difusos a las entradas. En este caso se han considerado tres cuantificadores: *poco*, *suficiente*, y *mucho*. A los que se han asociado los valores en el intervalo $[0, 1]$ de $poco=0.3$, $suficiente=0.6$, y $mucho=0.9$. Con estos valores la matriz del sistema se reescribe como:

$$M_{Subsistema} = \begin{bmatrix} 0 & 0,9 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0 \end{bmatrix}$$

Y la red queda planteada como sigue:

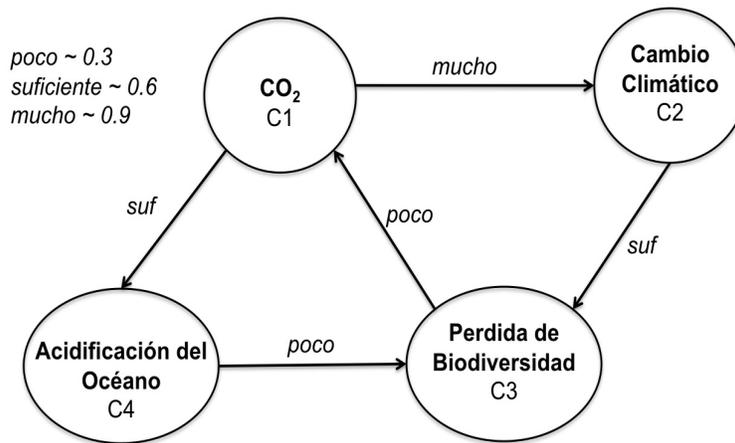


Fig. 2.3: Mapa de 4 nodos con pesos difusos.

Inicializamos el primer nodo e iteramos la matriz, en primer lugar haciendo la primera entrada ($a[1] = 1$) después de cada iteración. En este caso el sistema converge en dos iteraciones al vector:

$$a_2 = [1.00, 0.90, 0.72, 0.60]$$

Cuando encendemos el primer nodo únicamente en la primera iteración, el vector de estado tiende a cero siguiendo la progresión:

$$a_0 = [1, 0, 0, 0]$$

$$a_1 = [0, 0.90, 0, 0.60]$$

$$a_2 = [0, 0, 0.72, 0]$$

$$a_3 = [0.21, 0, 0, 0]$$

$$a_4 = [0, 0.19, 0, 0.12]$$

$$a_5 = [0, 0, 0.15, 0]$$

$$a_6 = [0.04, 0, 0, 0]$$

$$a_7 = [0, 0.04, 0, 0.02]$$

Es decir, cuando forzamos el sistema únicamente en el tiempo cero, el sistema tiende al vector de equilibrio $a_{eq} = [0, 0, 0, 0]$. En este caso, los coeficientes de la matriz representan el amortiguamiento del sistema a la perturbación inicial. El comportamiento del subsistema puede interpretarse en términos del estado actual del sistema climático y de los posibles escenarios y acciones de mitigación que puedan tomarse. Es decir, ¿qué ocurriría si el forzante se mantiene, si este disminuye en intensidad, o si desaparece? En el primer caso, al asignar pesos difusos sabemos en que medida (representada con una “*equivalencia cualitativa numérica*”) al mantener la causa, esta continuará influyendo en los otros nodos. Por otro lado cuando esta desaparece, sabemos que el sistema alcanza un equilibrio donde el incremento causal del sistema (la retroalimentación) disminuye amortiguado por los pesos de las relaciones. Estos pesos pueden modificarse también por acciones de mitigación, o estrategias a seguir. Asignando pesos difusos a las entradas del mapa cognitivo tenemos:

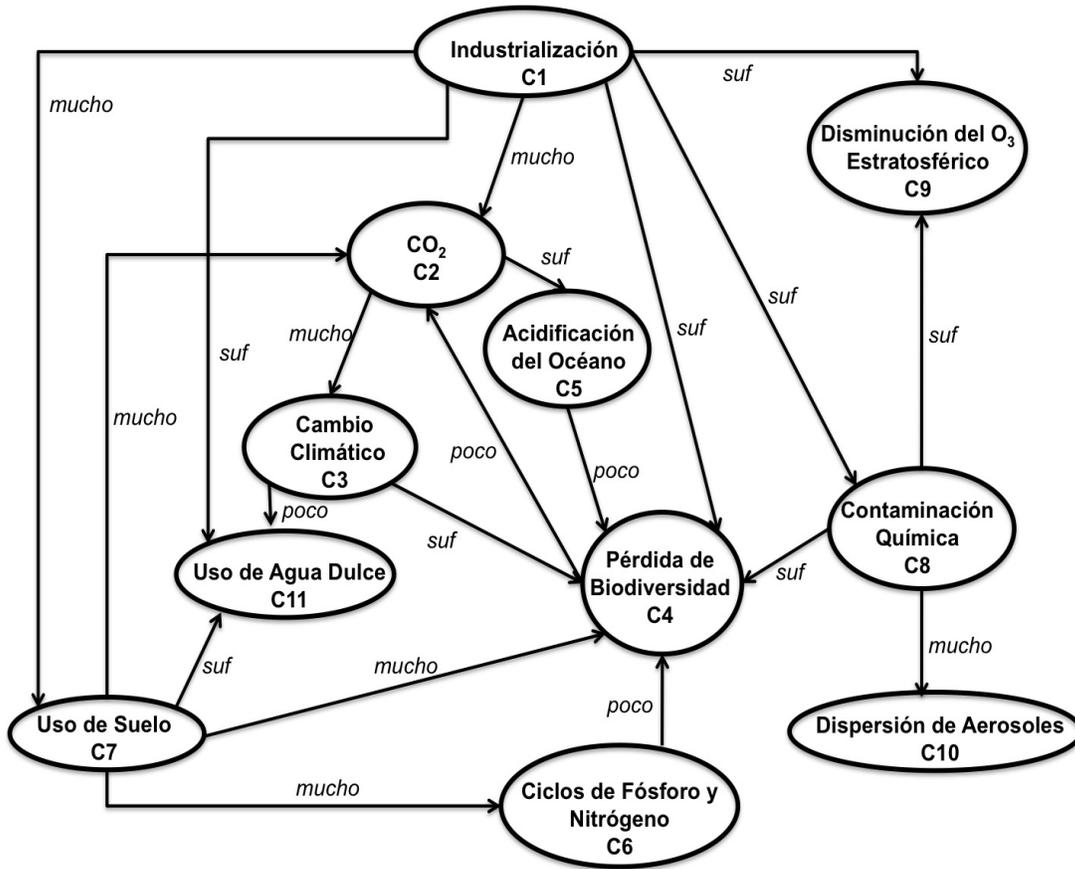


Fig. 2.4: Mapa cognitivo con pesos difusos.

La matriz asociada con el sistema difuso es la siguiente:

$$M_{sistema} = \begin{bmatrix} 0 & 0,9 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0,9 & 0,6 & 0,6 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0,9 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 & 0,9 & 0 & 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iniciando el primer nodo en el vector de estado ($a_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$) e iterando, el sistema converge en tres pasos al vector de estado que denotaremos:

$$a_3^* = [1.00, 1.00, 0.90, 1.00, 0.60, 0.81, 0.90, 0.60, 0.96, 0.54, 1.00]$$

En este caso se ha reiniciado el primer nodo ($a[1] = 1$) en cada iteración. Los nodos 3, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 alcanzan valores estables, mientras que los nodos 2, 4 y 11 se han limitado a 1 por la función umbral. Esto ofrece información importante del sistema en conjunto, ya que el hecho de que los nodos 2, 4 y 11 divergan podría interpretarse como aquellos que resultan más sensibles dentro de la red y como aquellos que no alcanzan un equilibrio con las condiciones presentes. Lo que puede permitir enfocar, por ejemplo, acciones a corto plazo para evitar escenarios no deseados. Es claro que, si bien en este mapa el forzante (la industrialización) es el causante, las acciones de mitigación sobre este deben ir acompañadas por acciones que permitan mantener la estabilidad de los subsistemas relacionados.

Cuando colocamos el forzante sólo para la primera iteración, el sistema se estabiliza amortiguado por los pesos de las relaciones que *filtran la señal de entrada*, así el sistema se comporta como sigue:

$$a_1 = [0, 0.90, 0, 0.60, 0, 0, 0.90, 0.60, 0.60, 0, 0.60]$$

$$a_2 = [0, 0.99, 0.81, 1.17, 0.54, 0.81, 0, 0, 0.36, 0.54, 0.54]$$

$$a_3 = [0, 0.99, 0.81, 1.00, 0.54, 0.81, 0, 0, 0.36, 0.54, 0.54]$$

$$a_4 = [0, 0.30, 0.89, 0.89, 0.59, 0, 0, 0, 0, 0, 0.24]$$

$$a_5 = [0, 0.26, 0.27, 0.71, 0.18, 0, 0, 0, 0, 0, 0.26]$$

$$a_6 = [0, 0.21, 0.24, 0.21, 0.16, 0, 0, 0, 0, 0, 0.08]$$

$$a_7 = [0, 0.06, 0.19, 0.19, 0.12, 0, 0, 0, 0, 0, 0.07]$$

En las iteraciones podemos observar cómo los nodos con retroalimentación se mantienen encendidos, pero convergen a cero conforme las iteraciones avanzan. Otro análisis importante es aquel que parte del sistema en un cierto momento de su dinámica. Por ejemplo, ¿qué ocurre cuando el sistema se encuentra en un estado de equilibrio y cambian las condiciones? posiblemente apagando el forzante. Para analizar la evolución del sistema al retirar el forzante una vez que este se encuentra en el estado de equilibrio, tomamos el vector a_3^* (que obtuvimos manteniendo el forzante), apagamos el primer nodo e iteramos de nuevo $a * M_{sist}$. Tenemos entonces:

$$a_0 = [0, 1.00, 0.90, 1.00, 0.60, 0.81, 0.90, 0.60, 0.96, 0.54, 1.00]$$

$$a_1 = [0, 1.11, 0.90, 2.13, 0.60, 0.81, 0, 0, 0.36, 0.54, 0.81]$$

y utilizando la función (*threshold*) para limitar el valor de los nodos 2 y 4

$$a_1 = [0, 1.00, 0.90, 1.00, 0.60, 0.81, 0, 0, 0.36, 0.54, 0.81]$$

En la segunda iteración tenemos:

$$a_2 = [0, 0.30, 0.90, 0.96, 0.60, 0, 0, 0, 0, 0, 0.27]$$

$$a_3 = [0, 0.28, 0.27, 0.72, 0.18, 0, 0, 0, 0, 0, 0.27]$$

$$a_4 = [0, 0.21, 0.26, 0.21, 0.17, 0, 0, 0, 0, 0, 0.08]$$

$$a_5 = [0, 0.06, 0.19, 0.20, 0.12, 0, 0, 0, 0, 0, 0.07]$$

Es decir, una vez eliminado el forzante, el sistema regresa al estado de equilibrio $a = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$, donde los coeficientes (pesos difusos) de las entradas de la matriz son los coeficientes de *Liapunov* de amortiguamiento.

2.3. Análisis del Sistema Considerando el Valor Anterior

En algunos sistemas (tales como el llenado de tanques interconectados por tubos cuyo flujo es regulados por válvulas), suelen utilizarse redes en donde se considera que el cambio de cada nodo, dado por cada iteración, se suma al estado (valor) anterior del nodo. No obstante dado que en nuestro mapa no se incorporan elementos de control (como la válvula) que disminuyen el valor de los nodos, el resultado sólo muestra que el sistema diverge. No obstante, esto permite ver la necesidad de incorporar elementos de control dentro del trabajo a futuro, un ejemplo de esto se muestra en la sección: “Modificación de la Red de Cuatro Nodos”.

Para analizar la evolución temporal de los conceptos (respecto a las iteraciones) recordemos que cada concepto representa una característica del sistema, la cual se especifica por un número A_i que representa su valor en una iteración específica. Este valor es resultado de las relaciones entre los conceptos del sistema (C_i) y de los pesos que los relacionan (W_{ij} por ejemplo, entre los conceptos C_i y C_j). En los ejemplos anteriores hemos utilizado un modelo matemático que consiste en un vector de estado de $1 \times n$ que en adelante denominaremos A y que incluye los valores para los n conceptos. Una matriz que denominaremos W de $n \times n$ con entradas W_{ij} y con diagonal principal cero ya que ningún concepto (en este caso) se afecta a si mismo. Si consideramos ahora que el valor de cada concepto está determinado por el valor de los conceptos conectados con el (con los pesos apropiados) pero además por el valor anterior del concepto, tenemos que el valor A_i para el concepto C_i se calcula de la siguiente manera:

$$A_i = f \left(\sum_{j \neq i, j=1}^n A_j W_{ij} \right) + A_i^{old}$$

Donde A_i es el nivel de activación del concepto C_i al tiempo $t + 1$, A_j es el nivel de activación del concepto C_j al tiempo t , A_i^{old} es el nivel de activación del concepto C_i al tiempo t , W_{ij} es el peso de la interconexión entre los conceptos C_i y C_j y f es la función umbral (*threshold function*). Entonces:

$$A_{new} = f(A_{old} \circ W) + A_{old}$$

El vector de estado A_{new} muestra el cambio en el valor de un concepto dentro del mapa cognitivo e incluye también el valor A_{old} . Es decir, el mapa cognitivo tiene

capacidad de memoria por lo que existe un pequeño cambio después de cada ciclo en el mapa cognitivo.

Si consideramos la matriz con pesos difusos e iteramos considerando el valor anterior del vector de estado tenemos:

$$a_0 = [0, 1.00, 0.90, 1.00, 0.60, 0.81, 0.90, 0.60, 0.96, 0.54, 1.00]$$

$$f(A_{old} \circ W) = [0, 1.00, 0.90, 1.00, 0.60, 0.81, 0, 0, 0.36, 0.54, 0.81]$$

$$a_1 = f(a_0 \circ W) + a_0$$

$$a_1 = [0, 2.00, 1.80, 2.00, 1.20, 1.62, 0.90, 0.60, 1.32, 1.08, 1.81]$$

Continuando de este modo tenemos:

$$a_2 = [0, 3.00, 2.80, 3.00, 2.20, 2.43, 0.90, 0.60, 1.68, 1.62, 2.81]$$

$$a_3 = [0, 4.00, 3.80, 4.00, 3.20, 3.24, 0.90, 0.60, 2.04, 2.16, 3.81]$$

Entonces si consideramos el valor anterior del vector de estado el sistema diverge, únicamente los nodos 7 y 8 que sólo son activados por el concepto C_1 mantienen el valor de a_0 . Este análisis, con pesos y considerando el estado anterior del vector muestra que el sistema diverge.

2.4. Efecto indirecto y efecto total

Cuando asignamos *pesos difusos* podemos utilizar los operadores de efecto indirecto I y total T , y analizar la acción causal entre nodos.

Analicemos por ejemplo la causalidad entre la **Industrialización** y la **Pérdida de Biodiversidad**. Para ir de C_1 a C_4 existen las trayectorias (1,4), (1,2,3,4), (1,2,5,4), (1,7,4), (1,7,6,4), y (1,8,4) que denotaremos $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ respectiva-

mente. Entonces:

$$I_1(C_1, C_4) = \min\{e_{14}\} = \min\{suf\} = suf$$

Análogamente

$$I_2(C_1, C_4) = \min\{e_{12}, e_{23}, e_{34}\} = \min\{mucho, mucho, suf\} = suf$$

$$I_3(C_1, C_4) = \min\{mucho, suf, poco\} = poco$$

$$I_4(C_1, C_4) = \min\{mucho, mucho\} = mucho$$

$$I_5(C_1, C_4) = \min\{mucho, mucho, poco\} = poco$$

$$I_6(C_1, C_4) = \min\{suf, suf\} = suf$$

$$T(C_1, C_4) = \max\{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6\} = \max\{suf, poco, mucho\} = mucho$$

Es decir, C_1 imparte mucha causalidad en C_4 .

Si analizamos la causalidad que imparte C_2 en C_4 consideramos las trayectorias $I_1(2, 3, 4)$ e $I_2(2, 5, 4)$ entonces:

$$I_1(C_2, C_4) = \min\{mucho, suf\} = suf$$

$$I_2(C_2, C_4) = \min\{suf, poco\} = poco$$

$$T(C_2, C_4) = \max\{I_1, I_2\} = \max\{suf, poco\} = suf$$

Es decir, la relación causal entre C_2 y C_4 establece que C_2 (el aumento de dióxido de carbono) imparte suficiente causalidad en la pérdida de biodiversidad (C_4). Una vez trazado el mapa este análisis nos permite conocer cualitativamente el peso que cada nodo *causalmente* imparte sobre los otros.

2.5. Análisis de efectos en el mapa cognitivo

El análisis del efecto indirecto y el efecto total de C_1 sobre los otros nodos del sistema es el siguiente.

$$C_1 \rightarrow C_1$$

No tiene efecto.

$$C_1 \rightarrow C_2$$

$$I_1(C_1, C_2) = \min\{e_{12}\} \min\{\text{mucho}\} = \text{mucho}$$

$$I_2(C_1, C_2) = \min\{e_{17}, e_{72}\} \min\{\text{mucho}, \text{mucho}\} = \text{mucho}$$

$$I_3(C_1, C_2) = \min\{e_{18}, e_{84}, e_{42}\} \min\{\text{suf}, \text{suf}, \text{poco}\} = \text{poco}$$

$$I_4(C_1, C_2) = \min\{e_{17}, e_{78}, e_{64}, e_{42}\} \min\{\text{mucho}, \text{mucho}, \text{poco}, \text{poco}\} = \text{poco}$$

$$I_5(C_1, C_2) = \min\{e_{17}, e_{74}, e_{42}\} \min\{\text{mucho}, \text{mucho}, \text{poco}\} = \text{poco}$$

$$I_6(C_1, C_2) = \min\{e_{14}, e_{42}\} \min\{\text{suf}, \text{suf}, \text{poco}\} = \text{poco}$$

$$T(C_1, C_2) = \max\{I_1, I_2, I_3\} = \max\{\text{mucho}, \text{mucho}, \text{poco}, \text{poco}, \text{poco}, \text{poco}\} = \text{mucho}$$

$$C_1 \rightarrow C_3$$

$$I_1(C_1, C_3) = \min\{e_{12}, e_{23}\} \min\{\text{mucho}, \text{mucho}\} = \text{mucho}$$

$$T(C_1, C_3) = \max\{I_1\} = \max\{\text{mucho}\} = \text{mucho}$$

$$C_1 \rightarrow C_4$$

$$I_1(C_1, C_4) = \min\{e_{14}\} = \min\{\text{suf}\} = \text{suf}$$

$$I_2(C_1, C_4) = \min\{e_{12}, e_{23}, e_{34}\} = \min\{\text{mucho}, \text{mucho}, \text{suf}\} = \text{suf}$$

$$I_3(C_1, C_4) = \min\{\text{mucho}, \text{suf}, \text{poco}\} = \text{poco}$$

$$I_4(C_1, C_4) = \min\{\text{mucho}, \text{mucho}\} = \text{mucho}$$

$$I_5(C_1, C_4) = \min\{\text{mucho}, \text{mucho}, \text{poco}\} = \text{poco}$$

$$I_6(C_1, C_4) = \min\{\text{suf}, \text{suf}\} = \text{suf}$$

$$T(C_1, C_4) = \max\{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6\} = \max\{\text{suf}, \text{poco}, \text{mucho}\} = \text{mucho}$$

$$C_1 \rightarrow C_5$$

$$I_1(C_1, C_5) = \min\{e_{12}, e_{25}\} \min\{\text{mucho}, \text{suf}\} = \text{suf}$$

$$T(C_1, C_5) = \max\{I_1\} = \max\{suf\} = suf$$

$$C_1 \rightarrow C_6$$

$$I_1(C_1, C_6) = \min\{e_{17}, e_{76}\} \min\{mucho, mucho\} = mucho$$

$$T(C_1, C_6) = \max\{I_1\} = \max\{mucho\} = mucho$$

$$C_1 \rightarrow C_7$$

$$I_1(C_1, C_7) = \min\{e_{17}\} \min\{mucho\} = mucho$$

$$T(C_1, C_7) = \max\{I_1\} = \max\{mucho\} = mucho$$

$$C_1 \rightarrow C_8$$

$$I_1(C_1, C_8) = \min\{e_{18}\} \min\{suf\} = suf$$

$$T(C_1, C_8) = \max\{I_1\} = \max\{suf\} = suf$$

$$C_1 \rightarrow C_9$$

$$I_1(C_1, C_2) = \min\{e_{19}\} \min\{suf\} = suf$$

$$I_2(C_1, C_2) = \min\{e_{18}, e_{89}\} \min\{suf, suf\} = suf$$

$$T(C_1, C_2) = \max\{I_1, I_2\} = \max\{suf, suf\} = suf$$

$$C_1 \rightarrow C_{10}$$

$$I_1(C_1, C_{10}) = \min\{e_{18}, e_{8,10}\} \min\{suf, mucho\} = mucho$$

$$T(C_1, C_{10}) = \max\{I_1\} = \max\{suf\} = suf$$

$$C_1 \rightarrow C_{11}$$

$$I_1(C_1, C_{11}) = \min\{e_{12}, e_{23}, e_{3,11}\} \min\{\text{mucho}, \text{mucho}, \text{poco}\} = \text{poco}$$

$$I_2(C_1, C_{11}) = \min\{e_{1,11}\} \min\{\text{suf}\} = \text{suf}$$

$$T(C_1, C_{11}) = \max\{I_1, I_2\} = \max\{\text{poco}, \text{suf}\} = \text{suf}$$

El efecto total de C_1 sobre los otros nodos se representa en el siguiente arreglo:

$$[\text{nulo}, \text{mucho}, \text{mucho}, \text{mucho}, \text{suf}, \text{mucho}, \text{mucho}, \text{suf}, \text{suf}, \text{suf}, \text{suf}]$$

El análisis de efecto indirecto (I) de un nodo sobre otro nos da información sobre la trayectoria elegida, es decir, sobre la rama de la red que conecta estos nodos. Sin embargo, el efecto total (T) de un nodo sobre otro (para el que hemos considerado el máximo de todas las trayectorias), nos habla básicamente del *mayor efecto causal posible* entre ambos nodos considerándolos dentro de la red. No podemos analizar con el efecto total los procesos particulares de cada trayectoria, sino de la red en conjunto, es decir, la acción de un nodo sobre otro considerando toda la red. Los resultados de este análisis deben leerse de acuerdo a las decisiones que se deseen tomar. Como ejemplo, consideremos los efectos indirectos y total del proceso de Industrialización (C_1) sobre el aumento en la concentración de CO_2 (C_2). Según el mapa planteado, el proceso de Industrialización influye de seis maneras en el Aumento en las concentraciones de CO_2 . Consideremos tres de estos caminos y veamos como podríamos tomar una decisión analizando las trayectorias. Primero consideramos ($C_1 \rightarrow C_2$) con un sólo cuantificador: *mucho*, ya que esta liga se refiere a las emisiones de CO_2 causadas por fabricas y automóviles. Por otro lado, la Industrialización también ocasiona Contaminación Química $C_1 \rightarrow C_8$, que a su vez afecta la Biodiversidad $C_8 \rightarrow C_4$ ambas ligas con cuantificador *suficiente*. La pérdida de Biodiversidad, afecta *poco* el aumento de las emisiones de CO_2 $C_4 \rightarrow C_2$ por lo que el efecto indirecto de esta rama ($C_1 \rightarrow C_8 \rightarrow C_4 \rightarrow C_2$) es *poco*. Consideremos como tercer camino de C_1 a C_2 el denotado ($C_1 \rightarrow C_4 \rightarrow C_2$), La liga $C_1 \rightarrow C_4$ se refiere a la forma en que la industrialización causa Pérdida de Biodiversidad (de manera *suficiente*), aquí el proceso considerado por el que la Industrialización causa la Pérdida de Biodiversidad es la disminución del habitat natural de las especies con la extensión de las tierras de cultivo. El deterioro de la Biodiversidad ocasiona un aumento en las concentraciones de CO_2 . Esta trayectoria tiene como cuantificadores $C_1 \rightarrow C_4$ *suficiente* y $C_4 \rightarrow C_2$ *poco*. Y cuantificador indirecto *poco* al igual que la otra trayectoria. En

este caso hipotético, para disminuir el efecto total (*mucho*) de la red de C_1 sobre C_2 , sólo puede lograrse disminuyendo las Emisiones de gases de efecto invernadero y no así la Contaminación Química o el crecimiento de las zonas de cultivo. Este análisis nos permite tomar decisiones importantes. Si deseamos tomar acciones considerando esta red, sería más eficiente disminuir las Emisiones que la Contaminación Química o la tasa de crecimiento de tierras para cultivo. Claro está que en el proceso de toma de decisiones deben considerarse muchas otras cosas, como la viabilidad de las medidas y el costo. De cualquier forma relacionar y analizar los procesos (Subsistemas) mediante un mapa cognitivo nos permite tomar decisiones con mucho más elementos.

2.6. Modificación de la Red de Cuatro Nodos

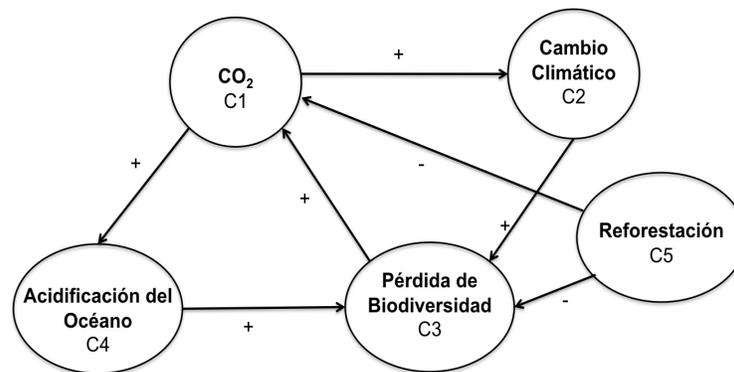


Fig. 2.5: Modificación a la red de cuatro nodos en donde se ha agregado el nodo Reforestación.

Como una muestra de cómo pueden incluirse conceptos que funcionen como elementos de control para la dinámica del sistema, se ha incluido en el mapa estudiado de cuatro nodos un quinto nodo que representa acciones de Reforestación que pudieran llevarse a cabo. El mapa queda planteado entonces con causalidad tanto positiva como negativa, ya que hemos considerado que el incremento de la Reforestación disminuye tanto la Pérdida de Biodiversidad como el Incremento en las Concentraciones de CO_2 . Claramente es posible considerar que también afecta al Cambio Climático, pero bien podemos suponer que no, dado que en este momento nuestro interés es presentar únicamente la acción de este nodo como elemento de control. El mapa modificado queda entonces planteado como se muestra (donde las flechas marcadas

con “+” representan causalidad positiva y las flechas marcadas con “-” representan causalidad negativa).

La matriz adyacente de la red es la siguiente:

$$M_{CincoNodos} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Consideramos entonces el vector al que el sistema converge cuando mantenemos el forzante C_1 , donde todos los nodos están activos, es decir: $a_0 = [1, 1, 1, 1]$. Cuando iteramos este vector deteniendo el forzamiento sobre el primer nodo, el sistema convergía a un ciclo límite en el que los nodos continuaban activándose (Sección Retroalimentación). Al agregar el quinto nodo activo tenemos el vector $a_0 = [1, 1, 1, 1, 1]$. El quinto nodo representa la acción de la Reforestación sobre la red. Si detenemos el forzante en C_1 y mantenemos el forzamiento en C_5 , vemos que el sistema se comporta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_0 &= [1, 1, 1, 1, 1] \\ a_1 &= [0, 1, 1, 1, 1] \\ a_2 &= [0, 0, 1, 0, 1] \\ a_3 &= [0, 0, -1, 0, 1] \\ a_4 &= [-1, 0, -1, 0, 1] \\ a_5 &= [-1, -1, -1, -1, 1] \end{aligned}$$

Es decir, al apagar el forzante sobre C_1 y mantener encendido el nodo C_5 , el sistema cambia su estado final de un ciclo límite a un punto, dado por el vector $a_5 = [-1, -1, -1, -1, 1]$, en donde la función umbral ha mantenido cualquier entrada menor a -1 en -1. Claramente el estado dado por el vector a_5 es un estado deseable para el sistema que estamos modelando. En este caso, el nodo Reforestación se incluyó como una acción que pudiera modificar el estado en que el sistema se encontraba una vez iniciado el nodo C_1

3. CONCLUSIONES

A través del trabajo hemos investigado las posibilidades que permite la implementación de Mapas Cognitivos Difusos para modelar y extraer información sobre el comportamiento dinámico de sistemas climáticos. Esta técnica resulta ser bastante efectiva especialmente cuando las relaciones entre subsistemas que componen un sistema mayor (el cual a su vez puede estar relacionado con otros sistemas) no son cuantificables con la información disponible, o simplemente no se han establecido relaciones precisas con otras herramientas de análisis. También puede ocuparse cuando se tienen distintos modelos que difieren en la *intensidad del efecto* de un subsistema sobre otro, pero que en conjunto puede cuantificarse la tendencia de manera difusa. O cuando las interacciones entre subsistemas sólo pueden cuantificarse con el lenguaje. Además la implementación de Mapas Cognitivos permite distintos niveles de análisis (entre subsistemas y en el sistema global), que pueden utilizarse tanto para toma de decisiones como para la creación de sistemas de control de la dinámica del todo o de las partes, aunado a que, gracias a su naturaleza lógica, pueden usarse para modelar sistemas naturales, sociales, teóricos, e *híbridos*. Y pueden ser elaborados tanto por grupos de trabajo, como por personas aisladas.

En el caso del sistema analizado, elegido por su importancia actual así como por la riqueza de la materia, la construcción del Mapa Cognitivo nos permitió, por ejemplo, establecer relaciones entre la Industrialización y la Pérdida de Biodiversidad a través de distintos procesos como la disminución del hábitat natural, la Contaminación Química, la Acidificación del Océano, el Cambio Climático y el cambio en los Ciclos de Fósforo y Nitrógeno. Pudimos establecer esta relación únicamente bajo el conocimiento de los procesos y de su interacción cualitativa. De intentar modelar estas ligas con un modelo cuantitativo, dada la cantidad de elementos a tener en cuenta, hubiera llevado demasiado tiempo establecer tan sólo cómo la Acidificación del Océano afecta a cada especie del ecosistema marino y habría que precisar también cómo se afecta cada uno de los distintos ecosistemas marinos, dejando de lado los otros procesos. Hay que decir que el trabajo con Mapas Cognitivos en sistemas de estas dimensiones no excluye el trabajo de investigación enfocado a los distintos subsistemas. Claramente entre mayor conocimiento se tenga de éstos, la cuantifica-

ción de la *causalidad* será mucho más precisa. No obstante, si analizamos cómo la Industrialización aumenta la Pérdida de Biodiversidad, considerando el incremento de las zonas de cultivo, probablemente no podríamos (por más que nos esforzáramos con nuestros conocimientos actuales en sistemas sociales de organismos), por ejemplo, conocer con precisión cómo la disminución del hábitat afecta el sistema social de los gorilas en el Congo y cómo al afectarse esta interacción decrece la población de gorilas. Lo que si podemos decir es que claramente la disminución del hábitat afecta *mucho* el tamaño de la población. Es en este punto donde el uso de Mapas Cognitivos aporta otra herramienta de análisis que permite analizar y hablar de sistemas híbridos. Es decir, se puede medir con precisión la disminución de hectáreas, pero no así la afección de una población de organismos tan complejos como los gorilas.

Revisemos los distintos niveles de análisis del Mapa Cognitivo. Para esto, una vez establecidas las relaciones entre los subsistemas que lo conforman, hicimos un primer análisis utilizando la técnica del vector de estado y la matriz adyacente del mapa cognitivo. Esta técnica permite una primera aproximación a la dinámica del sistema. En nuestro caso, cuando inicializamos el primer nodo: La Industrialización (que elegimos como forzante del mapa), e iteramos para conocer la evolución del sistema en el tiempo (discreto), avanzando un paso en cada iteración, nos encontramos con que el mapa alcanza un estado de equilibrio con todos los nodos encendidos después de tan sólo dos iteraciones. Esto nos dice información básica del sistema, pero no por ello despreciable. Sabemos que con las interacciones planteadas, todas ellas con *causalidad* positiva, el mapa llega a un estado de equilibrio con incremento causal en cada subsistema, es decir, se incrementa la Pérdida de Biodiversidad, las emisiones de CO_2 , la Contaminación Química, etc., este resultado interpretado de esta manera nos lleva a un escenario no deseable. Pero no nos dice nada de cómo modificar este posible estado de equilibrio, ni hace diferencia entre los incrementos causales de cada nodo (todos incrementan positivamente). Esto nos lleva a nuestra siguiente prueba, detener nuestro forzante de la red y ver que ocurre. Iniciamos entonces el primer sitio del vector de estado sólo en la primera iteración y eliminamos la parte del *script* que lo mantiene encendido. Lo cual representa lo que ocurriría si pudiéramos detener el forzante en la red y dejamos que las interacciones entre nodos lo lleven a un nuevo estado de equilibrio. Aparece aquí otro elemento interesante: un subsistema con retroalimentación (*feedback*). Éste se hace evidente ya que al apagar el forzante en la red, a medida que las iteraciones continúan, todos los nodos regresan a cero excepto los nodos que mantienen interacción retroalimentándose (en el sistema los nodos 2, 3, 4, 5 y 11). Esta es una nueva información del sistema. No basta con eliminar el forzante, ya que una vez que éste se ha activado estos nodos operan como un sub-

sistema con un ciclo límite en el que los nodos se apagan y se encienden de forma alternada. Hay que aclarar que esto no quiere decir que cese, por ejemplo, la Pérdida de Biodiversidad en el momento en que se encuentra apagada (ya que estamos dentro de un ciclo y no en un punto del espacio de estados), recordemos que el ciclo en que los nodos se apagan y encienden representa el *flujo de causalidad* entre ellos, por lo que el ciclo debe interpretarse como una causalidad sucesiva entre nodos al tiempo que se retroalimentan unos con otros mientras avanzan las iteraciones. Es claro que esto representa también un escenario no deseado. Entonces si quisiéramos modificar el estado del sistema no basta con eliminar el forzante, habría que tomar acciones que modifiquen las interacciones dentro del subsistema. Para hacer un análisis más detallado del subsistema identificado, consideramos sólo los nodos entre los que existe retroalimentación (fue aquí donde se descartó el nodo 11 ya que no retroalimenta a ningún otro), y asignamos *pesos difusos* a las ligas. Con los pesos asignados planteamos una nueva matriz adyacente, iniciamos el vector de estado y revisamos dos casos. Caso 1; encendemos el forzante (que en el subsistema es el CO_2) en el vector de estado y lo mantenemos encendido durante las iteraciones. Caso 2; iniciamos el forzante del sistema sólo en la primera iteración y luego lo apagamos. Los resultados muestran dos comportamientos cualitativamente distintos. En el primer caso el sistema converge al vector $a_2 = [1.00, 0.90, 0.72, 0.60]$ en dos iteraciones. Observamos que el peso de las ligas mantiene un incremento en los nodos del sistema, pero sabemos cómo se encuentran “*regulados*” por los pesos de las ligas entre ellos. En el segundo caso, al apagar el forzante el sistema converge al equilibrio $a_{eq} = [0, 0, 0, 0]$ en n iteraciones, amortiguado por los pesos de los coeficientes de la matriz que representan el amortiguamiento del sistema a la perturbación inicial. Este resultado es importante, ya que podemos esperar que a diferencia del sistema completo con pesos unitarios, al apagar el forzante en el sistema considerando uniones difusas, éste converga a un estado de equilibrio que represente un escenario deseable. Hasta este momento nuestro análisis muestra interpretaciones cualitativamente diferentes en los casos en que el sistema converge a puntos, ciclos límite, así como cuando encontramos subsistemas con retroalimentación, los cuales se integran el sistema global, pero poseen además una dinámica independiente. Cada uno de estos elementos debe tomarse en cuenta para el análisis del conjunto y aporta información importante sobre la dinámica global.

Con los resultados obtenidos en el subsistema, colocamos pesos difusos en todo el mapa cognitivo. Al iniciar el forzante, el sistema converge en tres pasos al equilibrio $a_3 = [1.00, 1.00, 0.90, 1.00, 0.60, 0.81, 0.90, 0.60, 0.96, 0.54, 1.00]$ del cual interpretamos cómo las interacciones entre los nodos “*regulan*” la dinámica global. A

deferencia del equilibrio donde todos los nodos se encuentran encendidos, podemos ver cuáles se afectan en mayor o menor medida en una escala cualitativa. Hay que recordar que no podemos interpretar directamente estos números como una escala precisa, ya que los pesos de las ligas representan la cantidad de flujo de causalidad entre los nodos. Cuando apagamos el forzante después de la primera iteración, el sistema converge al estado de equilibrio, manteniendo el ciclo límite entre los nodos que tienen retroalimentación, amortiguados por los coeficientes de la matriz. Así en la séptima iteración el vector de estado es $a_7 = [0, 0.06, 0.19, 0.19, 0.12, 0, 0, 0, 0, 0, 0.07]$. Podemos ver que aún con pesos difusos, el proceso de retroalimentación permanece.

Otro análisis interesante en el caso desarrollado, es estudiar qué ocurre cuando el sistema comienza en un estado de equilibrio distinto del inicial (representado por el vector que contiene ceros en cada entrada), y evoluciona con las ligas establecidas partiendo de este punto. La interpretación de este resultado es importante cuando se trabaja con sistemas fuera del equilibrio esperado, o que *en el mundo real* sabemos que tienen una tendencia que continuará durante un tiempo sin modificarse. En este caso llevamos al sistema al estado de equilibrio que alcanzará con las condiciones presentes, y partiendo de éste (como estado inicial), modificamos las condiciones e iteramos para conocer la evolución del sistema. En nuestro caso consideramos el vector al cual converge el sistema manteniendo el forzante, el cual es un escenario posible para nosotros, éste está representado por el estado pre calculado $a_3 = a_0 = [1.00, 1.00, 0.90, 1.00, 0.60, 0.81, 0.90, 0.60, 0.96, 0.54, 1.00]$. En la primera iteración obtenemos $a_1 = [0, 1.11, 0.90, 2.13, 0.60, 0.81, 0, 0, 0.36, 0.54, 0.81]$ donde utilizando la función umbral en los nodos 2 y 4, el vector queda como $a_1 = [0, 1.00, 0.90, 1.00, 0.60, 0.81, 0, 0, 0.36, 0.54, 0.81]$. En la siguiente iteración el sistema comienza a decrecer $a_2 = [0, 0.30, 0.90, 0.96, 0.60, 0, 0, 0, 0, 0, 0.27]$. Al continuar iterando el vector de estado converge al equilibrio manteniendo la estructura del subsistema, por ejemplo, en la quinta iteración el vector de estado es $a_5 = [0, 0.06, 0.19, 0.20, 0.12, 0, 0, 0, 0, 0, 0.07]$. El hecho de que los nodos 2 y 4 se disparen por encima del valor umbral tiene que ver con la cantidad de entradas que reciben de los otros nodos. El nodo 2 (con tres entradas) y el nodo 4 (con seis entradas), se disparan ya que al iniciar con el vector de estado con valores distintos a cero e iterar (multiplicar el vector transpuesto por la matriz) sufren desde la primera iteración la acción de los otros nodos. Este comportamiento nos habla de la sensibilidad de cada nodo respecto de la acción de los otros, así como de la sensibilidad respecto a la condición inicial del sistema.

En las redes, como en los mapas cognitivos, puede considerarse que el valor de cada concepto es influenciado por los valores de los conceptos conectados (“filtrados” con sus pesos apropiados), y por su valor previo (los valores representados para cada concepto en el vector de estado). En este caso, el nuevo vector de estado se calcula: $a_{new} = f(a_{old} \circ M_{sist}) + a_{old}$ donde a_{new} es el vector al tiempo $t + 1$, f es la función umbral (que limita cada iteración), a_{old} es el vector al tiempo t , y M_{sist} representa la matriz del sistema. Al multiplicar el vector transpuesto por la matriz, el nuevo vector muestra el efecto del cambio en el valor de los conceptos en todo el mapa cognitivo, mientras que la ecuación para a_{new} incluye el valor anterior de cada concepto, por lo que el mapa cognitivo difuso posee capacidad de “memoria” y existe un cambio antes de cada nueva iteración en el mapa. Es decir, este tipo de análisis considera que el cambio en el vector de estado que ocurre durante cada iteración, se suma (o resta) al estado del sistema **forzando** el valor anterior de los nodos. Este estudio funciona entonces, para sistemas con forzantes que actúan sobre el valor de cada nodo del tiempo t al tiempo $t + 1$.

Para realizar este análisis en nuestro mapa consideramos el vector al que el sistema converge $a_0 = [0, 1.00, 0.90, 1.00, 0.60, 0.81, 0.90, 0.60, 0.96, 0.54, 1.00]$ y lo utilizamos como estado inicial. Realizamos las iteraciones y encontramos que el sistema diverge en algunos nodos. En la tercera iteración tenemos $a_3 = [0, 4.00, 3.80, 4.00, 3.20, 3.24, 0.90, 0.60, 2.04, 2.16, 3.81]$ donde podemos ver que sólo los nodos 7 y 8 que son activados por el concepto C_1 mantienen el valor del sistema en a_0 , ya que en el vector de estado no se ha activado el forzante, pero todos los otros nodos divergen. Interpretamos lo anterior de la siguiente manera. Si el sistema es tal que los nodos poseen elementos que mantienen el valor (o estado) de cada subsistema, el sistema se comportará incrementándose o decreciendo de acuerdo al valor positivo o negativo del incremento causal. En algunas aplicaciones a sistemas de control, por ejemplo, en el problema de llenado de diversos tanques interconectados, el sistema puede mantenerse estable únicamente mediante la aplicación de válvulas de salida. En este caso el tanque funciona como forzante para mantener el nivel (estado del nodo) de cada tanque sin modificaciones entre un tiempo y otro.

Finalmente utilizamos el criterio Mínimo - Máximo para analizar el mapa cognitivo. Este criterio permite extraer información sobre la dinámica del sistema al conocer la acción un nodo sobre otro, en términos de los caminos que describen las relaciones (procesos) entre subsistemas y de los pesos que regulan estas interacciones. El enfoque que podemos dar a este análisis es el de toma de decisiones. Por ejemplo, el caso analizado entre los nodos Industrialización (C_1) y Aumento en las concentraciones de CO_2 (C_2), nos da información que podemos utilizar para enfocar acciones

(o medidas) y disminuir el incremento en la concentración de CO_2 ocasionado por el proceso de Industrialización. Como discutimos, la interacción entre los nodos se da a través de diferentes vías. El mapa cognitivo nos permite identificar estas vías, y los pesos difusos permiten comparar los efectos de cada camino sobre C_2 . En el ejemplo desarrollado arriba, encontramos los caminos siguientes representados abajo con sus respectivos efectos:

$$C_1 \rightarrow \text{mucho } C_2 \quad I_1 = \text{mucho}$$

$$C_1 \rightarrow \text{mucho } C_7 \rightarrow \text{mucho } C_2 \quad I_2 = \text{mucho}$$

$$C_1 \rightarrow \text{suf } C_8 \rightarrow \text{suf } C_4 \rightarrow \text{poco } C_2 \quad I_3 = \text{poco}$$

$$C_1 \rightarrow \text{mucho } C_7 \rightarrow \text{mucho } C_6 \rightarrow \text{poco } C_4 \rightarrow \text{poco } C_2 \quad I_4 = \text{poco}$$

$$C_1 \rightarrow \text{mucho } C_7 \rightarrow \text{mucho } C_4 \rightarrow \text{poco } C_2 \quad I_5 = \text{poco}$$

$$C_1 \rightarrow \text{suf } C_4 \rightarrow \text{poco } C_2 \quad I_6 = \text{poco}$$

Y el efecto total es el máximo de todos los efectos indirectos, $T(1, 2, 3, 4, 5, 6) = \text{mucho}$. No obstante, este es el efecto de la red en conjunto, si analizamos las distintas trayectorias vemos que son las trayectorias Tr_1 y Tr_2 las que determinan que el efecto total sea *mucho*. Estas se refieren al incremento en la concentración de CO_2 por las emisiones de contaminantes (fabricas y autos) (Tr_1), y a cómo la industrialización modifica el uso de suelo para tierras de cultivo (Tr_2). En un primer análisis, sin considerar otros procesos, podríamos decir que para modificar la acción del mapa sobre el aumento en la concentración de CO_2 , las acciones deberían enfocarse en los procesos que describen las trayectorias uno y dos.

4. REFERENCIAS

Axelrod R (1976) Structure of Decision: The Cognitive Map of Political Elites. Princeton University Press, USA

Bates BC, Kundzewicz ZW, Wu S, Palutikof JP (2008) Climate Change and Water. *Technical Paper of the Intergovernmental Panel on Climate Change*, IPCC Secretariat, Geneva.

Berger A, Loutre MF (2002) An Exceptionally Long Interglacial Ahead? *Science*, **297**, 1287-1288.

Foley JA (2010) Boundaries for a Healthy Planet. *Scientific American*, 54–57.

Grupo Intergubernamental de Expertos sobre el Cambio Climático. (2000). Resumen para responsables de políticas. Escenarios de emisiones IEEE. Suiza

Handoh, IC, Lenton TM (2003) Periodic mid-Cretaceous oceanic anoxic events linked by oscillations of the phosphorus and oxygen biogeochemical cycles. *Global Biogeochem. Cycles*, **17**, 1092.

IPCC Intergovernmental Panel on Climate Change (2002). Cambio Climático y Biodiversidad. [En Línea].

Disponible: <http://www.ipcc.ch/pdf/technical-papers/climate-changes-biodiversity-sp.pdf> (Octubre 2011).

IPCC Intergovernmental Panel on Climate Change. Publications and Data / Emissions Scenarios. [En Línea].

Disponible: <http://www.ipcc.ch/ipccreports/sres/emission/index.php?idp=4> (Octubre 2011).

IPCC Intergovernmental Panel on Climate Change (2007) Cambio climático 2007: Informe de síntesis. Contribución de los Grupos de trabajo I, II y III al Cuarto Informe de evaluación del Grupo Intergubernamental de Expertos sobre el Cambio Climático. IPCC, Suiza.

IPCC Intergovernmental Panel on Climate Change Cambio Climático 2007: Grupo de Trabajo I. [En Línea].
Disponible: http://www.ipcc.ch/publications_and_data/ar4/wg1/en/ch2s2-5-3-1.html (Octubre 2011).

Kosko B (1986) Fuzzy Cognitive Maps. *Man-Machine Studies*, 24, 65-75.

Kosko B (1992) Neural Networks and Fuzzy Systems. Prentice Hall USA.

Mace G, Masundire H, Baillie J, Ricketts T, Brooks T (2005), Chapter 4: Biodiversity in “Ecosystems and human well-being: Current state and trends”, Island Press USA.

Publicaciones OMS (2000) Changement climatique et diminution de l’ozone stratosphérique. Les effets précoces sur notre santé en Europe. [En Línea].
Disponible: <http://www.euro.who.int/fr/what-we-publish/abstracts/climate-change-and-stratospheric-ozone-depletion.-early-effects-on-our-health-in-europe> (Octubre 2011).

Rockström J, Steffen W, Noone K, Persson Å, Chapin FS, Lambin EF, Lenton TM, Scheffer M, Folke C, Schellnhuber HJ, Nykvist B, Wit CA, Hughes T, Van der Leeuw S, Rodhe H, Sörlin H, Snyder PK, Costanza R, Svedin U, Falkenmark M, Karlberg L, Corell RW, Fabry VJ, Hansen J, Walker B, Liverman D, Richardson K, Crutzen P, Foley JA (2009) A Safe Operating Space for Humanity. *Nature*, 461,472–475.

Rogner HH, Zhou D, Bradley R, Crabbé P, Edenhofer O, Hare B, Kuijpers L, Yamaguchi M (2007) Assessment Report AR4 WG3 Chapter1 Introduction In Climate Change 2007: Mitigation. Contribution of Working Group III to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change, Cambridge University Press, United Kingdom and USA.

Ross T (2004) Fuzzy logic with engineering applications. Wiley, USA.

Steffen W (2004) Global Change and the Earth System: a Planet under Pressure. Springer-Verlag, USA.

Swingland R (2003) Capturing carbon and conserving biodiversity: the market approach. Earthscan Publications, USA.

Apéndice

A. FUNCIONES DE *LIAPUNOV*

Las funciones de Liapunov ¹ permiten probar la estabilidad global de sistemas dinámicos. Por definición decimos que $L(x, y)$ es una función de Liapunov para un sistema de ecuaciones diferenciales si, para cada solución $(x(t), y(t))$ que no es una solución de equilibrio del sistema ocurre,

$$\frac{d}{dt}L(x(t), y(t)) \leq 0$$

$\forall t$; dándose la igualdad estricta sólo para un conjunto discreto de “tes”. Es decir, el valor de una función de Liapunov nunca crece, sino que disminuye a lo largo de una solución de no equilibrio.

Como ejemplo, analicemos el caso de un oscilador armónico amortiguado expresado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -qy - pv\end{aligned}$$

Donde v es la velocidad, y la posición, q y p son constantes positivas. En particular si $p = 0$, el sistema es hamiltoniano con función hamiltoniana asociada:

$$H(y, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{q}{2}y^2$$

¹ Llamadas así en honor del matemático ruso Aleksandr Mikhailovich Liapunov (1857 - 1918).

Si $p > 0$ y suponemos que $(y(t), v(t))$ es una solución del sistema, podemos calcular la razón de cambio de H a lo largo de la solución $(y(t), v(t))$ como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(y(t), v(t)) &= \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial v} \frac{dv}{dt} \\ &= qy \cdot v + v(-qy - pv) \\ &= -pv^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Es decir, $H(y(t), v(t))$ decrece excepto cuando $v = 0$. Lo que implica que H es una función de Liapunov para el oscilador armónico amortiguado. En este caso H representa la energía del oscilador armónico en un punto (y, v) , con posición y y con velocidad v .

Cuando trabajamos en *teoría de control de sistemas* las funciones de Liapunov usualmente presentan una forma cuadrática, como en el ejemplo anterior. En general una función de Liapunov tiene la forma:

$$\dot{L} = \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \dot{x}_i$$

Eligiendo L cuadrática, con I una matriz identidad de n por n , y $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ el vector de estado del sistema, tenemos lo siguiente:

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{x} I \mathbf{x}^T = \frac{1}{2} \sum_i x_i^2$$

Si suponemos que el sistema dinámico presenta un decaimiento pasivo, es decir:

$$\dot{x}_i = -x_i$$

Sabemos que el sistema de ecuaciones (lineales) tiene soluciones:

$$x_i(t) = x_i(0) e^{-t}$$

Y sabemos que estas soluciones decaen exponencialmente conforme avanza el tiempo desde su valor en el origen. Esto nos da una idea del comportamiento global del sistema. No obstante, podemos comparar si tomamos la derivada parcial de nuestra función cuadrática L .

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = x_i$$

Ahora consideramos que:

$$\dot{L} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \dot{x}_i$$

y

$$\dot{x}_i = -x_i$$

Y obtenemos:

$$\dot{L} = -\sum_i x_i^2 = -\sum_i \dot{x}_i^2$$

Donde en cualquier caso se cumple que:

$$\dot{L} < 0$$

En el equilibrio $\dot{L} = 0$, lo que ocurre si y solo si todas las velocidades son iguales a cero, es decir, $\dot{x}_i = 0$. Estas son las propiedades básicas de las funciones de Liapunov. Como mencionamos la mayoría de los sistemas de redes neuronales son **sistemas gradientes** de la forma:

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial L}{\partial x_i}$$

Los cuales son estables para alguna función de Liapunov (o función potencial). Si analizamos la expresión:

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{x} I \mathbf{x}^T$$

En ella la matriz identidad $n \times n$ tiene todos los eigenvalores iguales a 1. En el caso de matrices simétricas con entradas reales decimos que A es positiva definida si y solo si para todo vector de estado no nulo \mathbf{x} , $\mathbf{x} A \mathbf{x} > 0$, lo que requiere que todos los eigenvalores de A sean reales y positivos. Bajo estas condiciones $\dot{L} < 0$ a excepción del origen donde $\dot{L} = 0$, es decir, la función es estrictamente decreciente y la derivada vale cero (deja de cambiar) si y solo si el vector de estado no cambia (lo que implica que deje de moverse en el espacio de estados).

Las funciones de Liapunov permiten establecer estabilidad en los sistemas dinámicos, según [Elbert 1984] un sistema es estable si alguna función de Liapunov decrece a lo largo de las trayectorias (condición enunciada como $\dot{L} \leq 0$) y es asintóticamente estable si se produce la condición $\dot{L} < 0$. En general encontrar una función de Liapunov asegura que el sistema es estable, no obstante el hecho de que esta no pueda encontrarse no prueba nada, el sistema puede o no ser estable. La construcción de una función cuadrática de Liapunov es la única forma conocida (hasta hoy) para

construir este tipo de funciones.

Retomando nuestro sistema

$$\dot{x}_i = -x_i$$

donde

$$\dot{L} < 0$$

Para dos matrices A y B simétricas, la forma cuadrática

$$L = \mathbf{x}A\mathbf{x}^T$$

Se comporta como una función de Liapunov estrictamente decreciente para cualquier sistema dinámico lineal definido como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}B$$

si y solo si la matriz $AB^T + BA$ es negativa definida, entonces:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \mathbf{x}A\dot{\mathbf{x}}^T + \dot{\mathbf{x}}A\mathbf{x}^T \\ &= \mathbf{x}AB^T\mathbf{x}^T + \mathbf{x}BA\mathbf{x}^T \\ &= \mathbf{x}[AB^T + BA]\mathbf{x}^T \end{aligned}$$

En nuestra elección cuadrática de $L = \frac{1}{2}\mathbf{x}I\mathbf{x}^T$, A es la matriz identidad multiplicada por $\frac{1}{2}$, y en el sistema $\dot{x}_i = -x_i$, B representa el negativo de la matriz identidad. Entonces:

$$\dot{L} = \mathbf{x}[AB^T + BA]\mathbf{x}^T = -\sum_i x_i^2$$

Teorema de Memorias Asociativas Bidireccionales Bivalentes

Cuando trabajamos con redes neuronales es necesario que las funciones de Liapunov asociadas al sistema sean decrecientes y acotadas. Las funciones cuadráticas que hemos presentado pueden crecer sin cota mientras las variables de estado del sistema incrementan su magnitud. Por tanto al trabajar con redes neuronales utilizamos señales acotadas. Intuitivamente pueden usarse funciones decrecientes y acotadas de Liapunov para describir los “*cómputos*” globales en redes neuronales. Los estados transientes del sistema ocurren mientras decrece la función de Liapunov. Como las funciones se encuentran acotadas inferiormente (no decrecen por siempre), el punto donde se detienen corresponde a un equilibrio del sistema que representará el punto de “*programabilidad*” de la red, donde se produce un aprendizaje del patrón de información inicial.

En términos generales una Memoria Asociativa Bidireccional (en inglés BAM) discreta en el tiempo k con funciones acotadas por umbrales arbitrarios, entradas arbitrarias I, J , y cualquier matriz de conexión sináptica M (con la condición de que permanezca constante) se define:

$$x_i^{k+1} = \sum_j^p S_j(y_j^k)m_{ij} + I_i$$

$$y_j^{k+1} = \sum_i^j S_i(x_i^k)m_{ij} + J_i$$

Donde como en el caso de redes S_i y S_j son las funciones que describen la variación de la señal, definidas como:

$$S_i(x_i^k) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i^k > U_i \\ S_i(x_i^{k-1}) & \text{si } x_i^k = U_i \\ 0 & \text{si } x_i^k < U_i \end{cases}$$

Donde $U = (U_1, \dots, U_n)$ son valores reales para las neuronas en el campo Fx. De modo análogo para el campo Fy, la función $S_j(y_j^k)$ se define como:

$$S_j(y_j^k) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_j^k > V_j \\ S_j(y_j^{k-1}) & \text{si } y_j^k = V_j \\ 0 & \text{si } y_j^k < V_j \end{cases}$$

Donde $V = (V_1, \dots, V_n)$ son valores reales también. Estas funciones regulan la interacción de las señales entre los campos. Utilizaremos esta definición para demostrar la convergencia de estos sistemas.

Una demostración del Teorema de Memorias Asociativas Bidireccionales parte de especificar la forma de una función de Liapunov para un sistema bivalente de BAM (si se encuentra una función de Liapunov entonces el sistema llegará a un punto de equilibrio). Para esto podemos suponer que la función de Liapunov L esta dada por la energía promedio de la señal al pasar el vector $S(X)$ de F_x a F_y a través de M y viceversa $S(Y)$ con M^T . El promedio queda expresado como:

$$L = - \frac{S(X)MS(Y)^T + S(Y)M^T S(X)^T}{2}$$

En la expresión de arriba el factor $S(Y)M^T S(X)^T = [S(Y)M^T S(X)^T]^T$ que es igual a $S(X)MS(Y)^T$ (los tres son un mismo escalar) para cualesquiera vectores de estado $S(X)$, $S(Y)$ y cualquier matriz M . Entonces la expresión de la función de Liapunov se transforma en:

$$L = - S(X)MS(Y)^T$$

o

$$L = - \sum_i^n \sum_j^p S_i(x_i) S_j(y_j) m_{ij}$$

Para señales binarias $\{0, 1\}$ o bipolares $\{-1, 1\}$, la función de Liapunov expresada arriba se encuentra acotada (superior e inferiormente), una cota inferior está dada por:

$$L \geq - \sum_i \sum_j |m_{ij}|$$

En el caso de que $S_i(x_i) S_j(y_j)$ fueran -1 para todo m_{ij} . Y acotada superiormente (en caso en que el producto sea 1) por:

$$L \leq \sum_i \sum_j |m_{ij}|$$

Para nuestro sistema BAM compuesto por $(F_x, F_y, M, I, J, U, V)$ con $I = [I_1, \dots, I_n]$ $J = [J_1, \dots, J_p]$ vectores de entrada constantes y vectores umbral constantes dados por $U = [U_1, \dots, U_n]$ y $V = [V_1, \dots, V_p]$, la función de Liapunov toma la forma:

$$L = -S(X)MS(Y)^T - S(X)[I - U]^T - S(Y)[J - V]^T$$

La cual se encuentra acotada inferiormente por:

$$L \geq - \sum_i \sum_j |m_{ij}| - \sum_i [|I - U_i|] - \sum_j [|J_i - V_j|]$$

Por tanto L es efectivamente una función de Liapunov para nuestro sistema BAM, demostraremos a continuación cómo L decrece sobre las trayectorias del sistema, lo que se enuncia como **el teorema de BAM** :

“Toda matriz es bidireccionalmente estable para cambios de estado sincrónicos y asincrónicos”

Consideremos los cambios de estado en el vector señal que ocurren del tiempo k al tiempo $k + 1$. Para esto definimos el cambio de estado en $S(X)$ como:

$$\begin{aligned}\Delta S(X) &= S(X_{k+1}) - S(X_k) \\ &= (\Delta S_1(x_1), \dots, \Delta S_n(x_n))\end{aligned}$$

Y de modo análogo el cambio en en la señal $S(Y)$ se expresa como:

$$\begin{aligned}\Delta S(Y) &= S(Y_{k+1}) - S(Y_k) \\ &= (\Delta S_1(y_1), \dots, \Delta S_p(y_p))\end{aligned}$$

Donde cada uno de los cambios individuales se representa como:

$$\Delta S_i(x_i) = S_i(x_i^{k+1}) - S_i(x_i^k)$$

$$\Delta S_j(y_j) = S_j(y_j^{k+1}) - S_j(y_j^k)$$

Supondremos, sin pérdida de generalidad, que al menos una neurona cambia de estado del tiempo k al tiempo $k + 1$, y supongamos también que el cambio ocurre en un solo campo a la vez. En particular asumimos que el cambio ocurre en F_x .

Si analizamos el cambio de “energía” de la función de Liapunov tenemos:

$$\Delta L = L_{k+1} - L_k$$

Como estamos suponiendo que el cambio ocurre unicamente en el campo F_x , la forma general de nuestra función de Liapunov es:

$$\begin{aligned}
\Delta L &= -\Delta S(X)MS(Y_k)^T - \Delta S(X)[I - U]^T \\
&= -\Delta S(X)[S(Y_k)M^T + I - U]^T \\
&= -\sum_i \sum_j \Delta S_i(x_i)S_j(y_j^k)m_{ij} - \sum_i \Delta S_i(x_i)I_i + \sum_i \Delta S_i(x_i)U_i \\
&= -\sum_i \Delta S_i(x_i) \sum_j S_j(y_j^k)m_{ij} - \sum_i \Delta S_i(x_i)I_i + \sum_i \Delta S_i(x_i)U_i \\
&= -\sum_i \Delta S(x_i) \left[\sum_j S_j(y_j^k)m_{ij} + I_i - U_i \right] \\
&= -\sum_i \Delta S_i(x_i) [x_i^{k+1} - U_i] \\
&< 0
\end{aligned}$$

Es decir, el cambio $\Delta L < 0$, por lo que L decrece a lo largo de las trayectorias del sistema. Como hemos supuesto que $\Delta S_i(x_i) \neq 0$ entonces $x_i^{k+1} \neq U_i$ ya que hemos supuesto que existe un cambio en las neuronas (lo que nos da 1 o 0 en nuestra función umbral). Tenemos por tanto que revisar dos casos.

Supongamos primero que $\Delta S_i(x_i) > 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\Delta S_i(x_i) &= S(x_i^{k+1}) - S_i(x_i^k) \\
&= 1 - 0
\end{aligned}$$

Lo que implica por la forma del umbral que $x_i^{k+1} > U_i$, por lo que el producto es positivo, es decir:

$$\Delta S_i(x_i)[x_i^{k+1} - U_i] > 0$$

Supongamos ahora que $\Delta S_i(x_i) < 0$, entonces:

$$\Delta S_i(x_i) = S(x_i^{k+1}) - S_i(x_i^k)$$

$$= 0 - 1$$

En este caso la forma de la función umbral implica que $x_i^{k+1} < U_i$ por lo que una vez más el producto $\Delta S_i(x_i)[x_i^{k+1} - U_i] > 0$ es positivo.

El análisis y los argumentos empleados parten de la definición general de una BAM y para cualquiera de los $2^n - 1$ subconjuntos positivos de neuronas F_x donde existe un cambio de k a $k + 1$. De modo análogo puede construirse el mismo cambio de energía en F_y . Por tanto $L_{k+1} - L_k < 0$ para todo cambio de estado. Entonces L es acotada y es una función de Liapunov para el sistema. Cómo en la BAM “ M ” se ha elegido arbitrariamente, entonces toda matriz es bidireccionalmente estable.

Q.E.D.

B. ALGORITMOS

Los scripts para calcular las iteraciones del sistema (ya sea con pesos en el conjunto $\{0,1\}$ o con pesos difusos en el intervalo $[0,1]$), consisten en multiplicar el vector de estado expresado como renglón $X(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y la matriz asociada M , es decir, $X(t) * M$. Estos pueden escribirse en Octave (<http://www.gnu.org/software/octave/>). Octave es un lenguaje interpretado de alto nivel con licencia libre del tipo GNU (<http://www.gnu.org/home.es.html>), el cual funciona como plataforma para realizar experimentos numéricos. A continuación se incluyen algunos ejemplos de scripts utilizados.

Script para iterar el subsistema de 4 nodos (2, 3, 4, y 5 del sistema) con pesos no difusos $\in \{0,1\}$

```
%mapa de 4 nodos
clc
a=[1,0,0,0] %declaramos el vector de estado e inicializamos el primer nodo

%construimos la matriz
E=eye(4)
%C1
E(1,1)=0
E(1,2)=1
E(1,3)=0
E(1,4)=1

%C2
E(2,1)=0
E(2,2)=0
E(2,3)=1
E(2,4)=0
```

```

    %C3
    E(3,1)=1
    E(3,2)=0
    E(3,3)=0
    E(3,4)=0

    %C4
    E(4,1)=0
    E(4,2)=0
    E(4,3)=1
    E(4,4)=0

    %iteramos
    for i=1:10 %(en este caso se hacemos 10 iteraciones)
    a=a*E
    a(1)=1 %reiniciamos la primera entrada del vector a

        %normalizamos cada entrada del vector for j=1:4
        if a(j) > 1
        a(j)=1
        end

    end

    end

    i=i+1

    end

```

Script para iterar el subsistema de 11 nodos con pesos no difusos $\in \{0,1\}$

```

    %once nodos mapa cognitivo de los procesos de estabilidad climatica
    clc
    a=[1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] %declaramos el vector de estado e inicializamos el primercli-
    matica nodo
    %construimos la matriz E=eye(11)
    %C1
    E(1,1)=0

```

```
E(1,2)=1
E(1,3)=0
E(1,4)=1
E(1,5)=0
E(1,6)=0
E(1,7)=1
E(1,8)=1
E(1,9)=1
E(1,10)=0
E(1,11)=1
%C2
E(2,1)=0
E(2,2)=0
E(2,3)=1
E(2,4)=0
E(2,5)=1
E(2,6)=0
E(2,7)=0
E(2,8)=0
E(2,9)=0
E(2,10)=0
E(2,11)=0
%C3
E(3,1)=0
E(3,2)=0
E(3,3)=0
E(3,4)=1
E(3,5)=0
E(3,6)=0
E(3,7)=0
E(3,8)=0
E(3,9)=0
E(3,10)=0
E(3,11)=1
%C4
E(4,1)=0
E(4,2)=1
E(4,3)=0
```

```
E(4,4)=0
E(4,5)=0
E(4,6)=0
E(4,7)=0
E(4,8)=0
E(4,9)=0
E(4,10)=0
E(4,11)=0
%C5
E(5,1)=0
E(5,2)=0
E(5,3)=0
E(5,4)=1
E(5,5)=0
E(5,6)=0
E(5,7)=0
E(5,8)=0
E(5,9)=0
E(5,10)=0
E(5,11)=0
%C6
E(6,1)=0
E(6,2)=0
E(6,3)=0
E(6,4)=1
E(6,5)=0
E(6,6)=0
E(6,7)=0
E(6,8)=0
E(6,9)=0
E(6,10)=0
E(6,11)=0
%C7
E(7,1)=0
E(7,2)=1 E(7,3)=0
E(7,4)=1
E(7,5)=0
E(7,6)=1
```

```
E(7,7)=0
E(7,8)=0
E(7,9)=0
E(7,10)=0
E(7,11)=1
%C8
E(8,1)=0
E(8,2)=0
E(8,3)=0
E(8,4)=1
E(8,5)=0
E(8,6)=0
E(8,7)=0
E(8,8)=0
E(8,9)=1
E(8,10)=1
E(8,11)=0
%C9
E(9,1)=0
E(9,2)=0
E(9,3)=0
E(9,4)=0
E(9,5)=0
E(9,6)=0
E(9,7)=0
E(9,8)=0
E(9,9)=0
E(9,10)=0
E(9,11)=0
%C10
E(10,1)=0
E(10,2)=0
E(10,3)=0
E(10,4)=0
E(10,5)=0
E(10,6)=0
E(10,7)=0
E(10,8)=0
```

```
E(10,9)=0
E(10,10)=0
E(10,11)=0
%C11
E(11,1)=0
E(11,2)=0
E(11,3)=0
E(11,4)=0
E(11,5)=0
E(11,6)=0
E(11,7)=0
E(11,8)=0
E(11,9)=0
E(11,10)=0
E(11,11)=0

    %iteramos
for i=1:20 %en este caso hacemos 20 iteraciones

    a=a*E

    %normalizamos cada entrada del vector
for j=1:11
if a(j)>1
a(j)=1

    end
end
end

    i=i+1
end
```

Script para iterar el subsistema de 5 nodos

```
%mapa de 5 nodos
clc
a=[1,1,1,1,1] %declaramos el vector de estado

    %construimos la matriz
E=eye(5)
%C1
E(1,1)=0
E(1,2)=1
E(1,3)=0
E(1,4)=1
E(1,5)=0

    %C2
E(2,1)=0
E(2,2)=0
E(2,3)=1
E(2,4)=0
E(2,5)=0

    %C3
E(3,1)=1
E(3,2)=0
E(3,3)=0
E(3,4)=0
E(3,5)=0

    %C4
E(4,1)=0
E(4,2)=0
E(4,3)=1
E(4,4)=0
E(4,5)=0

    %C5
E(5,1)=-1
E(5,2)=0
```

```
E(5,3)=-1
E(5,4)=0
E(5,5)=0

    %iteramos
for i=1:8
a=a*E
a(5)=1 %mantenemos encendido el quinto nodo

    %normalizamos cada entrada del vector
for j=1:5
if a(j) < 1
a(j)=1
end
end
for j=1:5
if a(j) > 1
a(j)=-1
end
end

    i=i+1
end
```