



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES**

**ARAGÓN**

**"Diseño, Construcción e Instrumentación de un  
Equipo para Pruebas de Flexión en Vigas"**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA

P R E S E N T A:

**DOMÍNGUEZ ALVARADO GUILLERMO**

**ASESOR: Dr. JACINTO CORTÉS PÉREZ**

MÉXICO 2011





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A Dios y a la Virgen de Guadalupe*

*Ya que siempre me enseñaron y guiaron por el buen camino  
gracias por permitirme lograr una meta más en mi vida,  
gracias por sus bendiciones.*

*Gracias por esta gran oportunidad que me han brindado.*

*Gracias por haberme dado una gran familia.*

*A Mis Padres.*

*Papa y Mama gracias por todo lo que me han dado, su amor, cariño, apoyo, ayuda, comprensión y confianza, pues con su gran ejemplo de ser buenos padres, aprendí que la mayor gloria no debe radicar, en no haberse caído jamás, si no en saberse levantar después de cada caída. Gracias por siempre aconsejarme y enseñarme las mejores cosas de la vida, a crecer, a amar, a valorar, a superarme, en fin todo lo que soy es gracias a Ustedes.*

*Son los mejores padres que un hijo puede tener, gracias por ser la luz en mi vida.*

*Este gran logro es para ustedes los quiero PAPA MAMA.*

*Dr. Jacinto Cortes Pérez.*

*Ya que sin su apoyo y ayuda no hubiera concluido este trabajo de investigación, pues después de un largo tiempo de esfuerzo y dedicación hemos logrado concluirlo y perfeccionarlo, reconociendo que sin sus valiosas críticas y aportaciones que enriquecieron este trabajo no hubiese sido posible el día de hoy verlo finalizado.*

*Muchas gracias por su amistad ya que Usted es una persona ejemplar gracias por todo.*

*A Mis Hermanos.*

*Alfredo, Sergio, Efraín, por su apoyo y comprensión que en todo momento me han brindado, porque sin sus valiosos consejos no hubiese llegado a ver concluida esta meta y hecho realidad este sueño, gracias hermanos.*

*Al equipo del Laboratorio.*

*A Fernando Paris Delgado Gomez, Rodrigo Pechuga Taboada, Felipe Porras Camarillo, Arturo Martinez, Alejandro Rios Cortez, M en I Néstor Garcia, José Manuel Zarazúa, René Rodrigo Flores, Jesús Monstafvo, y a todos aquellos que directa o indirectamente no mencione, que me han enriquecido con sus talentos y virtudes, por dejarme ser su amigo, además de todos los momentos que pasamos juntos, a ustedes les dedico este trabajo que simboliza nuestro esfuerzo y dedicación.*

*En agradecimiento en especial al honorable M. en I. Néstor Garcia Castillo, por sus observaciones y valiosas contribuciones a esta tesis, ya que con su ejemplo de dedicación y trabajo logre concluir este documento, que me hará convertirme en un mejor ciudadano y profesionista para mi país.*

*Muchas Gracias Amigos.*

*A Mis Cuñadas*

*Rosario y Cynthia que desde el momento en que formaron parte de nuestra familia siempre me han apoyado en todo momento, gracias por la incondicional motivación.*

*Y en especial a mi sobrinito Damian que es la nueva luz en esta maravillosa familia.*

*Gracias por todo.*

*Al COMEGT.*

*Un agradecimiento muy especial al Comité de Becas del Consejo Mexiquense de Ciencia y Tecnología "COMEGT", por haberme apoyado con la Beca de Tesis de Licenciatura COMEGT - COMEGT 2009.*

*"GRACIAS A TODOS"*



---

|   |    |
|---|----|
| <b>INTRODUCCIÓN</b> .....                                     | i  |
| <b>CAPÍTULO 1 CONCEPTOS GENERALES</b> .....                   | 1  |
| 1.1 Problema general de la teoría de la elasticidad.....      | 2  |
| 1.1.1 Ecuaciones de Equilibrio.....                           | 3  |
| 1.1.2 Relaciones deformación-desplazamiento.....              | 4  |
| 1.1.3 Relaciones esfuerzo deformación (Ley de Hooke).....     | 5  |
| 1.2 Problema Plano.....                                       | 7  |
| 1.3 Estructuras.....  | 8  |
| 1.3.1 Clasificación de estructuras.....                       | 9  |
| 1.4 Columnas.....   | 9  |
| 1.5 Vigas.....  | 10 |
| 1.5.1 Viga estáticamente Determinada.....                     | 10 |
| 1.5.2 Vigas Estáticamente Indeterminadas.....                 | 10 |
| 1.5.3 Tipos de apoyos para una viga.....                      | 11 |
| 1.5.4. Vigas Simplemente Apoyadas.....                        | 14 |
| 1.5.5 Vigas En Cantiléver.....                                | 14 |
| 1.5.6 Viga Con Voladizo.....                                  | 15 |
| 1.5.7 Viga Continua.....                                      | 16 |
| 1.6 Tipos De Cargas.....                                      | 16 |
| 1.7 Tipos De Cargas En Vigas.....                             | 17 |
| 1.8 Solución de problemas clásicos y sus consideraciones..... | 18 |
| 1.8.1 Signos Convenidos Para Las Fuerzas Cortantes.....       | 18 |
| 1.8.2 Convención De Signos Para Momentos Flectores.....       | 19 |
| 1.8.3 Diagramas De Momentos Y Fuerzas De Corte.....           | 20 |



---

|  |           |
|--|-----------|
| 1.8.3.1 Diagrama De Fuerzas De Corte.....                                  | 25        |
| 1.8.3.2 Relación Entre Carga, Fuerza Cortante Y Momento Flexión.....       | 25        |
| 1.9 Teoría De Flexión Simple.....  | 27        |
| 1.10 Solución exacta del problema de flexión.....                          | 35        |
| 1.10.1 Tensor de esfuerzos.....  | 35        |
| 1.11 Extensometría Eléctrica.....  | 36        |
| 1.11.1 Operación del extensómetro.....                                     | 37        |
| 1.11.2 Estructura del extensómetro.....                                    | 37        |
| 1.11.3 Puente de Wheatstone.....   | 38        |
| 1.11.4 Celda de Carga.....   | 39        |
| <b>CAPÍTULO 2 DISEÑO DEL EQUIPO PARA PRUEBAS DE FLEXIÓN EN VIGAS .....</b> | <b>41</b> |
| 2.1 Requerimiento de diseño y planteamiento de problema.....               | 42        |
| 2.2 Descripción del equipo para pruebas de flexión.....                    | 43        |
| 2.2.1 Bastidor principal.....  | 47        |
| 2.2.2 Aplicador de carga.....  | 50        |
| 2.2.3 Elementos de flexión.....  | 53        |
| 2.2.4 Columnas y apoyos de las probetas.....                               | 56        |
| 2.2.4.1 Columna instrumentada.....   | 56        |
| 2.2.4.2 Columna sin instrumentar.....                                      | 59        |
| 2.2.4.3 Columna para empotramiento.....                                    | 61        |
| 2.2.5 Celda de compresión.....   | 63        |
| 2.2.6 Medidor de carga.....  | 63        |
| 2.2.7 Elementos de sujeción de postes y equipos de medición.....           | 64        |



## ÍNDICE



|   |  |            |
|---|--|------------|
| 2.3   | Diseño de detalle.....   | 68         |
| 2.3.1   | Memoria de cálculo.....  | 69         |
| 2.3.1.1                                       | Probeta.....   | 69         |
| 2.3.1.2                                       | Columna para empotre de viga en cantiliver.....                              | 71         |
| 2.3.1.3                                       | Columna para soporte de celda de compresión.....                             | 74         |
| 2.3.1.4                                       | Celda de compresión.....   | 76         |
| 2.3.1.5                                       | Tornillo sujetador de postes.....  | 77         |
| <b>CAPÍTULO 3</b>                             | <b>RESUTADOS DEL DISEÑO.....</b>   | <b>80</b>  |
| 3.1   | Descripción del prototipo.....   | 81         |
| 3.1.1   | Bastidor principal.....  | 82         |
| 3.1.2   | Aplicador de carga.....  | 83         |
| 3.1.3   | Celda de carga.....  | 84         |
| 3.1.4   | Elementos para las pruebas de flexión y apoyos.....                          | 85         |
| 3.1.5   | Columnas de soporte.....   | 88         |
| 3.1.6   | Medidor de desplazamientos.....  | 90         |
| 3.1.7   | Elementos de sujeción al bastidor de las columnas y equipos de medición..... | 91         |
| 3.2   | Practicas propuestas.....  | 94         |
| 3.2.1   | Practica 2 “Viga en cantiliver”.....   | 95         |
| 3.2.2   | Practica 3 “Diagrama de cortante y momento flexionante”.....                 | 102        |
| 3.2.3   | Practica 4 “Viga estáticamente indeterminada”.....                           | 111        |
| <b>CONCLUSIONES.....</b>                      |  | <b>117</b> |
| <b>APÉNDICE 1 PLANOS DE CONSTRUCCIÓN.....</b> |  | <b>119</b> |
|   | Marco de montaje.....  | 120        |
|   | Soporte de marco de montaje.....   | 120        |



## ÍNDICE



---

|  |     |
|--|-----|
| Poste aplicador de carga.....                            | 121 |
| Gancho de ensamble.....                                  | 121 |
| Base del aplicador de carga.....                         | 122 |
| Pesa grande de 5 Newtons.....                            | 122 |
| Pesa chica de 2 Newtons.....                             | 122 |
| Barra de posición de carga.....                          | 123 |
| Soporte de gancho.....                                   | 123 |
| Protector de celda.....                                  | 124 |
| Probeta de acero.....                                    | 125 |
| Probeta de aluminio.....                                 | 125 |
| Apoyo con rodamientos para columna instrumentada.....    | 126 |
| Apoyo con rodamientos para columna sin instrumentar..... | 126 |
| Soporte universal.....                                   | 127 |
| Soporte de viga tipo prensa.....                         | 127 |
| Columna instrumentada.....                               | 128 |
| Columna para empotramiento.....                          | 128 |
| Columna sin instrumentar.....                            | 129 |
| Soporte liso.....  | 129 |
| Buje.....  | 130 |
| Manija de apriete.....                                   | 131 |
| Micrómetro.....  | 131 |
| Soporte para el equipo de medición.....                  | 132 |
| Conector plug.....                                       | 132 |
| Guía de micrómetro.....                                  | 133 |



## ÍNDICE



---

|  |            |
|--|------------|
| Guía de micrómetro secundaria.....                           | 133        |
| Poste guía de sujeción micrómetro.....                       | 134        |
| Varilla para ensamble de sujetadores de micrómetro.....      | 134        |
| <b>APÉNDICE II ENSAMBLES DE LAS PRÁCTICAS.....</b>           | <b>135</b> |
| Practica 1 “Viga en cantiléver”.....                         | 136        |
| Practica 2 “Diagrama de cortante y momento flexionante”..... | 141        |
| Practica 4 “Viga estáticamente indeterminada”.....           | 147        |
| <b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>                       | <b>154</b> |



## INTRODUCCIÓN

---



En general, en la enseñanza de las ingenierías se asume que los equipos didácticos representan un gran apoyo para la adecuada comprensión de los fenómenos físicos que se estudian en diversas asignaturas. Lo anterior, debido a que el estudio de dichos fenómenos involucra cierto nivel de abstracción que a menudo causa confusión en los estudiantes. Como es bien sabido, la mayoría de los fenómenos que se estudian en ingeniería, en particular en ingeniería mecánica, son modelados matemáticamente a partir de representaciones abstractas de las condiciones reales y la aplicación de leyes físicas asumidas como válidas. Dichos modelos dan origen a ecuaciones matemáticas que al ser resueltas deben tener el poder de predecir el fenómeno en estudios bajo diversas condiciones. En este sentido, un equipo didáctico permite visualizar y medir algunos de los parámetros del fenómeno en cuestión además de que permite comprobar predicciones teóricas de manera directa o indirecta.

Considerando lo anterior, se puede asegurar que un equipo didáctico debe cumplir con los siguientes puntos:

- a) Simular con la mayor precisión posible las condiciones asumidas por los modelos teóricos correspondientes.
- b) Permitir la visualización de los efectos asociados al fenómeno en estudio.
- c) Permitir la medición de los parámetros del fenómeno a fin de poder comprobar resultados previstos por los modelos teóricos.

A pesar de que se acepta la importancia del equipo didáctico como un valioso apoyo para la enseñanza, muchos laboratorios no cuentan con ellos debido a su alto costo lo cual se debe a que en su mayoría son de procedencia extranjera. Así mismo, muchos equipos didácticos son diseñados y construidos por los propios alumnos pero en general, carecen de la calidad para asegurar la precisión del experimento o bien no cuentan con los elementos de medición adecuados.

Es claro que en las áreas de conocimiento como la mecánica de sólidos, contar con apoyos didácticos resulta de suma importancia debido, entre otras cosas, a que se manejan conceptos como los de campos de esfuerzos y deformaciones que en general resultan considerablemente difíciles de imaginar debido a su naturaleza matemática. Como se sabe, hoy en día existe una buena cantidad de dispositivos didácticos que emplean técnicas experimentales, tanto de campo como puntuales, que permiten medir las deformaciones en un elemento mecánico sometido a determinadas condiciones de carga y restricciones desplazamiento. No obstante, en general dichos equipos son costosos debido a que son importados de países como Estados Unidos, Inglaterra, Alemania, etc. Lo anterior, trae como consecuencia que muchos laboratorios no cuentan con equipos didácticos para como apoyo en la mecánica de sólidos.



En respuesta a la necesidad de contar con equipos didácticos de bajo costo en la FES Aragón, con el apoyo del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación para la Mejora de la Enseñanza (PAPIME) de la UNAM, se puso en marcha el proyecto denominado: **Rehabilitación del Laboratorio de Mecánica de la FES Aragón** en el cual entre sus objetivos contempla el diseño, e instrumentación de equipos didácticos para el ensayo de fenómenos típicos de la mecánica de sólidos. Entre los equipos que se contempla diseñar, se encuentra el llamado: **Equipo para Ensayos de Flexión en Vigas** el cual permitirá a los alumnos visualizar y medir los fenómenos típicos de flexión en vigas para los tipos comunes de vigas: viga en cantiléver, simplemente apoyada, y viga estáticamente indeterminada.

En el presente trabajo se propone el diseño, construcción e instrumentación de dicho equipo el cual se compone de los siguientes elementos:

- a) Un marco rígido en el cual se pueden montar los diferentes tipos de apoyos para la realización de las diferentes prácticas.
- b) Tres columnas instrumentadas y con apoyo para colocar la probeta.
- c) Dos probetas instrumentadas (empleando transductores instrumentados con galgas extensométricas).
- d) Un sistema para medir las cargas empleando transductores instrumentados con galgas extensométricas.

El equipo será capaz de:

1. Realizar ensayos de flexión en vigas con diferente sección transversal, diferentes materiales y en los diferentes tipos de apoyos.
2. Medir con buena precisión el campo de deformaciones en las vigas.

Con las mediciones realizadas, bosquejar los diagramas de equilibrio típicos de la flexión, es decir los de cortantes y momentos flexionantes así como permitir la caracterización de material de las probetas.

En el primer capítulo se presentan los conceptos generales de la teoría de vigas así como de la elasticidad los cuales son fundamentales tanto para el diseño y la instrumentación del equipo así como para la definición de las prácticas que se pueden realizar en el.

El segundo capítulo, comprende el diseño tanto conceptual como de detalle del equipo para ensayos de flexión en vigas. Aquí se describen las partes componentes del equipo así como los criterios de diseño que fueron empleados y definen las cargas máximas admisibles.



## INTRODUCCIÓN

---



Posteriormente, en el capítulo tres se presenta el prototipo del equipo para ensayos de flexión en vigas que fue construido e instrumentado. Este mismo capítulo se propone una serie de prácticas de laboratorio que pueden realizarse empleando el equipo.

Finalmente, en los apéndices 1 y 2 se presentan los planos de construcción de las partes del equipo así como los diagramas descriptivos de las piezas y los ensambles que deben realizarse para montar y operar el equipo.

# CAPÍTULO I

---

## CONCEPTOS GENERALES



Uno de los conceptos clásicos de la mecánica es el denominado “punto material” el cual asume que la materia se concentra en un punto geométrico sin importar sus dimensiones. Dicho concepto es suficientemente aproximado para poder estudiar fenómenos tan complicados como las moléculas de un gas, pero a la vez tan complejo cuando analizamos partículas subatómicas.

A partir de lo anterior, la mecánica adoptó otros modelos como el de “cuerpo rígido” que asume una distribución continua de la materia sin variación entre las distancias relativas entre puntos del mismo. Otro de estos modelos el denominado “cuerpos deformables” donde el material se considera como un medio continuo el cual admite a su vez una variación continua de las distancias entre sus puntos. Este último concepto es parte fundamental de la denominada “Mecánica de los medios continuos” ya que formula de manera general las leyes que rigen el comportamiento de los fluidos y los sólidos.

En mecánica de sólidos, que es el área en la que se desarrolla el presente trabajo, existen dos áreas principales que son a) La “Mecánica de materiales” y b) La “Teoría de elasticidad”. La diferencia fundamental entre estas dos áreas es la cantidad de información que se obtiene sobre el comportamiento mecánico de los elementos mecánicos en estudio al ser sometidos a cargas. En el caso de la resistencia de materiales las soluciones que se obtienen son limitadas mientras que en el caso de la teoría de elasticidad las soluciones de los problemas comprenden toda la información del cuerpo en forma de campos.

A pesar de que se cuenta ya desde hace décadas con las teorías ya mencionadas y que en la actualidad surgen teorías más recientes debido a la gran diversidad de nuevos materiales y al avance tecnológico dentro de la ingeniería mecánica, en muchos de los planteles de estudios superiores donde se imparten las carreras de ingeniería mecánica se incluyen materias de mecánica de materiales y mecánica de fluidos los cuales se quedan lejos del verdadero enfoque y profundidad con la que se puede analizar un problema general. Es por ello que es indispensable modificar los planes de estudio para que los egresados salgan mejor preparados, ya que hoy en día es necesario un mejor dominio de las teorías antes mencionadas para materiales convencionales y más aun crean la necesidad de desarrollar nuevas y mejores teorías que analicen los elementos mecánicos con mayor detalle. Es por ello que en el presente capítulo se analiza el problema de la flexión desde el punto de vista de la teoría de elasticidad hasta llegar al planteamiento de la mecánica de materiales.

### **1.1 Problema general de la teoría de la elasticidad**

Toda teoría esencialmente parte de restricciones, conceptos y definiciones para los cuales ésta será utilizada y válida. Es por ello que todo diseñador tiene que estar



consciente de ello en todo momento ya que si algún objeto de estudio sale de las suposiciones originales el análisis que se haga no presentara resultados satisfactorios y por lo tanto no puede aplicarse.

Las Suposiciones Fundamentales que la teoría de la elasticidad considera son que los materiales tienen las siguientes idealizaciones:

1. Continuo: El material es continuo
2. Homogéneo: El material tiene las mismas propiedades en todos los puntos
3. Isotrópico: El material tiene las mismas propiedades en todas direcciones
4. Lineal: La relación esfuerzo deformación es lineal
5. Elástico: El material permite deformaciones recuperables lineales

Una vez aceptadas dichas suposiciones el problema general de la teoría de la elasticidad es poder llegar a la solución de 15 ecuaciones (3 ecuaciones de equilibrio, 6 de la relación esfuerzo-deformación y 6 de las relaciones de deformación-desplazamientos) con 15 incógnitas (6 esfuerzos, 6 deformaciones y 3 desplazamientos) las cuales se representan de la siguiente manera:

### 1.1.1 Ecuaciones de Equilibrio:

Las ecuaciones diferenciales surgen de la hipótesis de que los materiales tienen variaciones de esfuerzo de punto a punto las cuales cumplen las condiciones de equilibrio de la estática y pueden ser representadas de forma general de la siguiente manera:

$$\text{div} (T) + b_0 = 0 \tag{1.1}$$

Donde  $b_0$  es el campo vectorial de fuerzas de cuerpo por unidad de volumen y  $T$  campo tensorial de Esfuerzos y  $\text{Div}(T)$  es la divergencia del campo tensorial de esfuerzos.

Que de forma desarrollada se presentan de la siguiente manera:

$$\text{div} (T) = \nabla \cdot T = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$



$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma_x}{\partial_x} + \frac{\tau_{xy}}{\partial_y} + \frac{\tau_{xz}}{\partial_z} \\ \frac{\tau_{yx}}{\partial_x} + \frac{\sigma_y}{\partial_y} + \frac{\tau_{yz}}{\partial_z} \\ \frac{\tau_{zx}}{\partial_x} + \frac{\tau_{zy}}{\partial_y} + \frac{\sigma_z}{\partial_z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = 0 \quad (1.3)$$

Como se puede apreciar, tenemos tres ecuaciones diferenciales con 9 incógnitas de las cuales es posible demostrar que existe una igualdad de esfuerzos de corte en el tensor de esfuerzos quedando 6 incógnitas únicamente. Aun con esta reducción el sistema es estáticamente determinado [1].

### 1.1.2 Relaciones deformación-desplazamiento

Estas relaciones son obtenidas a partir del campo de desplazamientos en particular de la parte simétrica de su gradiente y de manera análoga que las ecuaciones de equilibrio podemos aproximar las variaciones de un punto a otro por medio de una serie de Taylor truncada en segundo término.

Si consideramos un punto

$$f(P) - P = \mu(P) \quad (1.4)$$

La ecuación representa un campo de desplazamientos donde

$$\mu(P) = \begin{pmatrix} \mu_1(P) \\ \mu_2(P) \\ \mu_3(P) \end{pmatrix} = \mu(P_0) + \nabla\mu(x_0)(x - x_0) \quad (1.5)$$

Esta ecuación es una serie de Taylor truncada en el segundo término que se expresa de la siguiente manera:

$$f(x - x_0) = f(x_0) + \left. \frac{d^2f}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \dots + f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) \quad (1.6)$$

De manera general tenemos que el  $\nabla\mu$  es igual a

$$\nabla\mu = \begin{pmatrix} \frac{\partial\mu_1}{\partial x} & \frac{\partial\mu_1}{\partial y} & \frac{\partial\mu_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\mu_2}{\partial x} & \frac{\partial\mu_2}{\partial y} & \frac{\partial\mu_2}{\partial z} \\ \frac{\partial\mu_3}{\partial x} & \frac{\partial\mu_3}{\partial y} & \frac{\partial\mu_3}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \nabla\mu = D + W \quad (1.7)$$

Donde: D es la parte simétrica del tensor y W es la parte anti simétrica del tensor



El llamado campo tensorial de deformaciones es la parte simétrica (D) de gradiente (1.7) la cual se calcula como sigue:

$$D = \frac{1}{2}[\nabla\mu + \nabla\mu^T] = \underline{\varepsilon} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial\mu_1}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial y} + \frac{\partial\mu_2}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial z} + \frac{\partial\mu_2}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial y} + \frac{\partial\mu_2}{\partial x}\right) & \frac{\partial\mu_2}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mu_2}{\partial z} + \frac{\partial\mu_3}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial z} + \frac{\partial\mu_2}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mu_2}{\partial z} + \frac{\partial\mu_3}{\partial y}\right) & \frac{\partial\mu_3}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \delta_{xy} & \delta_{xz} \\ \delta_{yx} & \varepsilon_y & \delta_{yz} \\ \delta_{zx} & \delta_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

De aquí tenemos que

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} \quad \delta_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\delta_{xz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad \delta_{yz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Como se puede ver estas 6 ecuaciones tienen 3 desplazamientos como incógnitas lo que hace también a estas ecuaciones estáticamente indeterminadas [1].

### 1.1.3 Relaciones esfuerzo deformación (Ley de Hooke)

Una de las relaciones más conocidas en ingeniería y física es la denominada ley de Hooke, sin embargo, en mecánica de materiales ésta es presentada de la forma más simple como:

$$\sigma_x = E\varepsilon \quad (1.11)$$

La cual es una relación uniaxial que puede ser empleada para caso de tensión simple mientras para estados de esfuerzos en cuerpos sometidos a cargas distintas a la de tensión simple, es necesario considerar las 9 posibles componentes del campo tensorial de esfuerzos lo cual nos convierta la relación 1.11 en otra en la cual tanto el dominio como el contradominio son campos tensoriales y en lugar de manejar solo un módulo elástico se deben considerar 81 constantes elásticas. Esto es:

$$\sigma = [C]\varepsilon \quad (1.12)$$



Que de forma desarrollada sería:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} & c_{18} & c_{19} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} & c_{28} & c_{29} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} & c_{38} & c_{39} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & c_{47} & c_{48} & c_{49} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} & c_{57} & c_{58} & c_{59} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} & c_{67} & c_{68} & c_{69} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & c_{77} & c_{78} & c_{79} \\ c_{81} & c_{82} & c_{83} & c_{84} & c_{85} & c_{86} & c_{87} & c_{88} & c_{89} \\ c_{91} & c_{92} & c_{93} & c_{94} & c_{95} & c_{96} & c_{97} & c_{98} & c_{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{yx} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{pmatrix} \quad (1.12a)$$

Sin embargo, como se menciona anteriormente los tensores de esfuerzos y deformaciones son simétricos lo que nos reduce las constantes a 36.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad (1.12b)$$

Nuevamente en esta última relación es posible por medio de consideraciones energéticas demostrar que este nuevo tensor es simétrico y reducir las constantes a 21. Continuando con esta idea aun podemos reducir las constantes tomando en cuenta las diferentes condiciones de simetrías de las estructuras cristalinas y reducir el número de constantes elásticas aun más como se puede ver en la siguiente tabla 1.1

Tabla 1.1

| Estructura Cristalina | No. Constantes Independientes |
|-----------------------|-------------------------------|
| Triclínica            | 21                            |
| Monoclínica           | 13                            |
| Ortorrónica           | 9                             |
| Tetragonal            | 6                             |
| Hexagonal             | 5                             |
| Cúbica                | 3                             |
| Isotrópica            | 2                             |



Por ejemplo, para el caso de la celda cúbica, la cual presenta simetría cuatro dado que con respecto a un eje de simetría al rotar  $90^\circ$  sobre éste se obtiene el mismo comportamiento, si consideramos que tiene tres ejes de simetría mutuamente perpendiculares el número de constantes linealmente independientes se reduce a sólo 3. Por lo que el tensor de rigidez para este caso queda como:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Finalmente en el caso de un material isotrópico se obtienen solamente 2 constantes elásticas, por lo que las relaciones esfuerzo - deformación en forma general y desarrollada quedan como sigue:

$$T = \lambda E + \delta \operatorname{tr}(E)I \quad (1.14)$$

Donde  $\lambda$  y  $\delta$  son las llamadas constantes de Lamé [1]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (a); & \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (b); \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (c); \end{aligned}$$

$$\delta_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (d); \quad \delta_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \quad (e); \quad \delta_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad (f). \quad (1.15)$$

## 1.2 Problema Plano

Como puede verse el problema tridimensional de la teoría de la elasticidad es complejo y por ello no siempre es posible usar tal planteamiento como solución, es por ello que con frecuencia se utilizan métodos indirectos de solución o se trata de simplificar el problema y analizar el problema como plano o uniaxial si las condiciones así lo permiten.



Para el caso plano es claro que se tienen las siguientes restricciones para deformaciones y esfuerzos:

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \text{ (a); } \quad \sigma_z = 0 \text{ (b); } \quad \varepsilon_z = 0 \text{ (c); } \quad \delta_{xz} = 0 \text{ (d)} \quad \delta_{yz} = 0 \text{ (e).} \quad (1.16)$$

Por lo que el tensor de esfuerzos, deformaciones, ecuaciones de equilibrio, relaciones deformación desplazamiento y la ley de hooke se representan como:

$$T_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (a);} \quad E = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \delta_{xy} & 0 \\ \delta_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \text{ (b);}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \text{ (c);} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \text{ (d);} \quad \delta_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \text{ (e);}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \mu_1}{\partial x} \text{ (f);} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \mu_2}{\partial y} \text{ (g);} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \mu_3}{\partial z} \text{ (h);}$$

$$\delta_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial y} + \frac{\partial \mu_2}{\partial x} \right) \text{ (i);} \quad 0 = \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial z} + \frac{\partial \mu_3}{\partial x} \right) \text{ (j);} \quad 0 = \left( \frac{\partial \mu_2}{\partial z} + \frac{\partial \mu_3}{\partial y} \right) \text{ (k);}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\mu} [\sigma_x - \nu(\sigma_y)] \text{ (l);} \quad \varepsilon_y = \frac{1}{\mu} [\sigma_y - \nu(\sigma_x)] \text{ (m);} \quad \varepsilon_z = \frac{1}{\mu} [-\nu(\sigma_y + \sigma_x)] \text{ (n).} \quad (1.17)$$

A pesar de que muchos de los problemas que se analizan caen dentro del estudio del caso plano y el estudio es considerablemente más reducido, se cuenta con sus complicaciones como por ejemplo encontrar la función de Airy para el caso de esfuerzos. Pero como se verá más adelante el problema de interés de la presente tesis, es posible analizarlo desde el punto de vista uniaxial aunque no debe olvidarse todas las severas restricciones que se hacen para ello [1].

### 1.3 Estructuras:

Las máquinas o estructuras de Ingeniería, como automóviles, aviones, puentes, edificios, generadores eléctricos y turbinas de vapor, se construyen generalmente uniendo o ensamblando diversos cuerpos, llamados piezas o miembros, de manera tal que la estructura, montaje o máquina, desarrolle una función determinada. En muchas de las distintas estructuras, la función principal de un miembro es resistir las fuerzas



externas, llamadas cargas, que le son aplicadas. Frecuentemente se les llama miembros resistentes a las cargas, pues aunque pueden tener otras funciones en la estructura, la principal condición que deben satisfacer es que resistan a las cargas sin motivar que la estructura deje de trabajar satisfactoriamente.

El comportamiento o reacción del miembro que más probablemente dará lugar a que deje de trabajar satisfactoriamente en cuanto a su resistencia a las cargas, se debe a:

- a) Que la creación de grandes fuerzas internas, necesarias para mantener en equilibrio las cargas, origina frecuentemente la fractura del miembro.
- b) Una deformación excesiva que conduzca a la deformación permanente del miembro. Si la intensidad en éste de las fuerzas internas (fuerza por unidad de área, llamada esfuerzo) originada por las cargas, llega a ser suficientemente grande, el miembro se fractura, especialmente si es de un material frágil; este comportamiento, por supuesto, hará que el miembro deje de trabajar satisfactoriamente y, por tanto, limitará su capacidad para soportar carga. Por otro lado, la capacidad de resistir carga puede limitarse por el cambio de forma del miembro en reacción a las cargas, aun cuando puedan aplicarse cargas mucho mayores antes de que se fracture o se aplaste [2].

### 1.3.1 Clasificación de las estructuras

Las estructuras son un tipo de construcción que con frecuencia se compone de miembros multifuerza conectados por pernos, es decir, que se encuentran sujetos a más de dos fuerzas. Las estructuras son en general estacionarias y se utilizan para soportar cargas. Siempre que una estructura este conformada adecuadamente y no contenga más soportes o miembros de los necesarios como para prevenir el colapso, se pueden determinar las fuerzas que actúan en las uniones y soportes aplicando las ecuaciones de equilibrio en cada miembro.

Existen varias clasificaciones de las estructuras dependiendo del enfoque que se quiera analizar como por ejemplo: debido a los elementos que los componen (lineales, de superficie, volumen), debido a la organización de los elementos que los componen (planas y espaciales), debido a la diferencia entre número de ecuaciones independientes y número de reacciones y acciones internas en una armadura (Isostáticas e Hiperestáticas), debido al material que las constituye (Estructuras hechas con materiales que cumplen o no cumplen con la ley de Hooke) y debido al tipo de esfuerzos (Estructuras a Tensión, Compresión, Cortante y Flexión) [4].

## 1.4 Columnas

Una columna es un elemento axial sometido a compresión, lo bastante delgado respecto de su longitud, para que bajo la acción de una carga gradualmente creciente se rompa por flexión lateral o pandeo ante una carga mucho menor que la necesaria



para romperlo por aplastamiento. Se suele considerar que un elemento a compresión es una columna si su longitud es más de diez veces su dimensión transversal menor [7].

Las columnas se pueden dividir en dos categorías amplias, dependiendo de sus longitudes relativas y de las dimensiones de su sección transversal:

- a) **Columnas Cortas.** Son aquellas columnas gruesas y cortas las cuales suelen fallar por aplastamiento cuando el esfuerzo excede del límite de fluencia del material a la compresión.
- b) **Columnas Largas.** Son aquellas columnas esbeltas y largas, o puntuales que fallan por pandeo antes de que el esfuerzo alcance el límite de fluencia a la compresión.

### 1.5 Vigas

Las vigas son miembros muy importantes para resistir cargas en muchas estructuras y maquinas de ingeniería. Una viga es una barra o miembro que se flexiona por fuerzas que actúan perpendicularmente a su eje. Estas fuerzas se llaman cargas transversales o de flexión. Se supone que las cargas de flexión que actúan sobre una viga están en un plano que contiene al eje central longitudinal de la viga y que este plano es de simetría de la viga. Muchas vigas satisfacen, aproximadamente, estas condiciones. Las cargas de flexión producen, en general, esfuerzos cortantes y normales en cualquier sección transversal de la viga y además hacen que la viga se combe por flexión [2].

Las vigas pueden clasificarse de varias maneras. Una forma de clasificarlas consiste en agruparlas en vigas estáticamente determinadas y estáticamente indeterminadas.

#### 1.5.1 Viga estáticamente Determinada.

Se dice que una viga es estáticamente determinada si todas sus reacciones exteriores pueden calcularse usando solamente las ecuaciones de la estática ( $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$ ,  $\sum M_o = 0$ ), es decir que se desconocen solamente tres componentes reactivas de sus apoyos.

#### 1.5.2. Vigas Estáticamente Indeterminadas.

Se dice que una viga es estáticamente indeterminada si tiene más de tres componentes reactivas desconocidas en los apoyos.



Las vigas también pueden clasificarse de acuerdo con sus condiciones de apoyo como se muestra más adelante pero antes definiremos los tipos de apoyos para una viga.

### 1.5.3. Tipos de apoyos para una viga.

Se reconocen tres tipos de apoyo o soporte para vigas cargadas con fuerzas actuando en el mismo plano, los cuales se identifican por la clase de resistencia que ofrecen a las fuerzas.

Uno de tales tipos es el que proporciona física y materialmente un rodillo o un eslabón, que es capaz de resistir una fuerza con una línea de acción específica. El eslabón de la Figura 1.1 (a) resiste una fuerza únicamente en la dirección de la recta  $AB$ . El rodillo de la Figura 1.1 (b) resiste solamente una fuerza vertical hacia abajo, y el soporte de la Figura 1.1 (c) resiste sólo una fuerza que actúa perpendicularmente al plano  $CD$ . En estos tipos de soporte la reacción corresponde a una sola incógnita cuando se aplican las ecuaciones de la estática. En el caso de reacciones inclinadas, la razón entre sus dos componentes es fija.

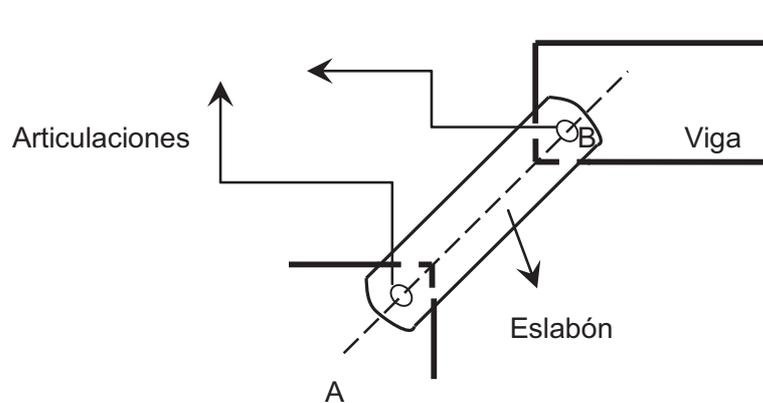


Figura 1.1 (a)

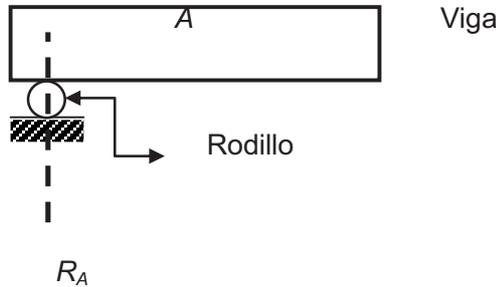


Figura 1.1 (b)

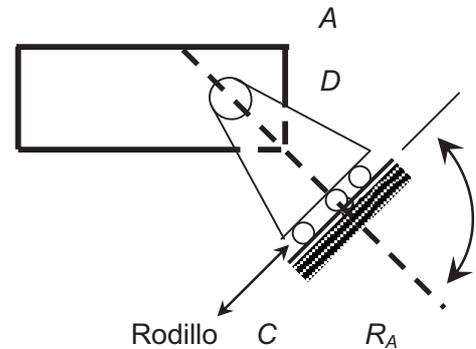


Figura 1.1 (c)

Figura 1.1. Soportes o apoyos de eslabón y de rodillos. (La única línea de acción posible de la reacción se indica con la línea punteada.)

Otro tipo de soporte que se puede utilizar para una viga es el de pasador. En una construcción real tal soporte se obtiene en la forma que se indica en la Figura 1.2. (a). En este caso dicho soporte se representa esquemáticamente como en la Figura 1.2. (b). Un soporte de pasador, que recibe también el nombre de articulación, es capaz de resistir una fuerza que actúe en cualquier dirección en el plano. De manera que, en general, la reacción en el tendrá dos componentes, una horizontal y otra vertical. A diferencia de la razón entre componentes que se tienen entre los soportes de rodillo o de eslabón, la que existe en una articulación entre las dos componentes de la reacción no es fija. Para determinar tales componentes hay que emplear dos ecuaciones de estática.

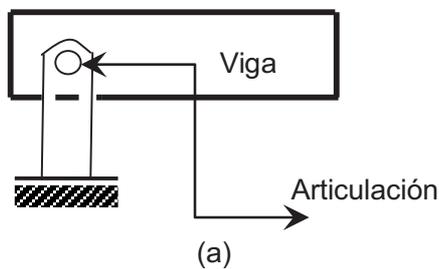


Figura 1.2. Articulación (o apoyo de pasador): (a) forma real, (b) forma esquemática.

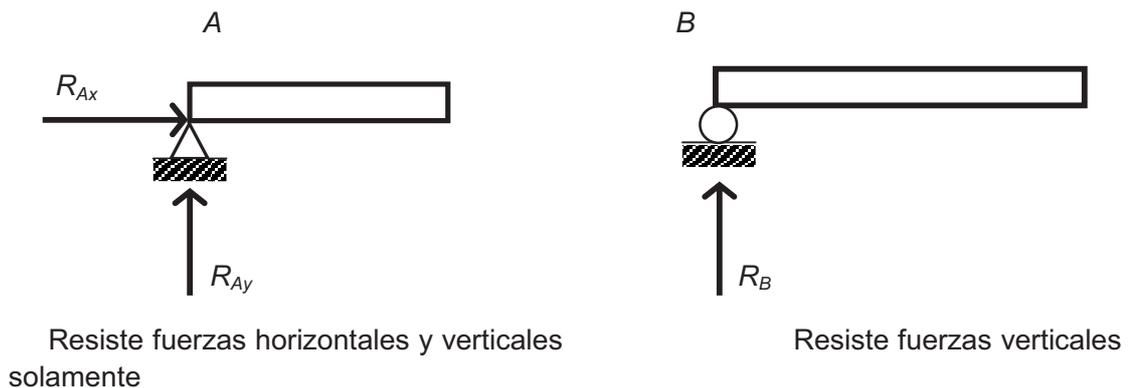


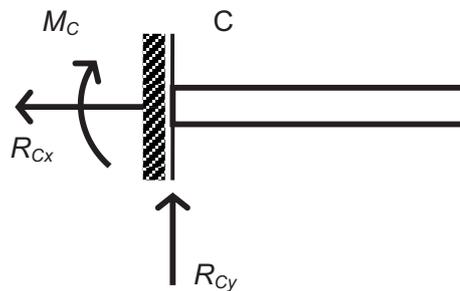
El tercer tipo de soporte que se utiliza en vigas es capaz de resistir una fuerza en cualquier dirección y también puede resistir la acción de un par o momento. Tal soporte se obtiene materialmente empotrando el extremo de una viga a un muro de ladrillo, colándolo en concreto o soldándolo a la estructura de acero principal. En tal soporte existirá un sistema de tres elementos, dos componentes de fuerza y un momento. Este soporte recibe el nombre de empotramiento o apoyo fijo, pues el extremo empotrado no puede tener rotación. Y es representado esquemáticamente como lo indica la Figura 1.3.



Figura 1.3. Empotramiento (o apoyo fijo).

Para distinguir los empotramientos de los soportes de rodillos o pasador, que no pueden resistir la acción de un par o momento, estos últimos se llaman apoyos simples. En la Figura 1.4. se resumen estos tres tipos de soportes y se indica la clase de resistencia que presenta cada uno. Cabe señalar que en la práctica, los ingenieros normalmente suponen por criterio que los soportes son de un de los tres tipos, aunque en las estructuras reales los soportes o apoyos de las vigas no siempre quedan exactamente en estas clasificaciones.





Resiste fuerzas horizontales, verticales y momentos.

Figura 1.4. Los tres tipos de soportes más comunes.

#### 1.5.4. Vigas Simplemente Apoyadas.

Una viga que está apoyada libremente en los dos extremos se llama viga simplemente apoyada. Este término implica que los dos apoyos extremos son capaces de ejercer sobre la barra solamente fuerzas y no momentos. Por tanto, no existe impedimento al giro de los extremos de la barra en los apoyos cuando los flexiona bajo las cargas. A continuación se representa un ejemplo de viga simplemente apoyada Figura 1.5.

Debe observarse que al menos uno de los apoyos ha de ser capaz de sufrir un movimiento horizontal, de modo que no exista ninguna fuerza en la dirección del eje de la viga. Si ninguno de los dos extremos fuera capaz de moverse horizontalmente se producirá alguna fuerza axial en la viga cuando se deformara bajo la carga.

Se dice que la viga de la Figura 1.5 está cargada con una fuerza concentrada.

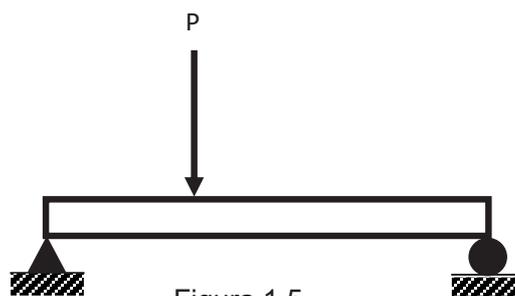


Figura 1.5

#### 1.5.5. Vigas en voladizo o cantiléver.

Si la viga está sujeta solamente en un extremo, de tal manera que su eje no pueda girar en ese punto, se llama viga en voladizo o cantiléver. En la Figura 1.6 se representa este tipo de viga. El extremo izquierdo puede flexionar libremente, mientras que el derecho está sujeto rígidamente. Generalmente, se dice que el extremo derecho



esta “empotrado”. La reacción del muro que soporta la viga, consiste en una fuerza vertical junto con un par que actúan en el plano de las cargas aplicadas [5].

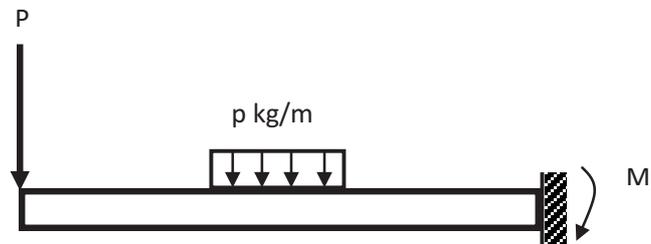


Figura 1.6 Viga en voladizo

### 1.5.6. Viga Con Voladizo.

Una viga apoyada libremente en dos puntos y que tiene uno o los dos extremos que continúan mas allá de esos puntos se llama viga en con voladizos. La Figura 1.7 muestra dos ejemplos de vigas con voladizo

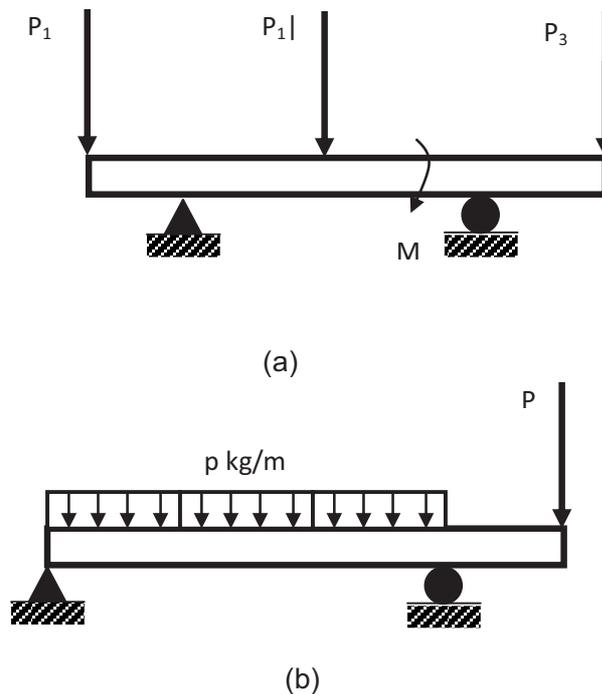


Figura 1.7. Viga simplemente apoyada sujeta dos configuraciones de carga: a) Cargas puntuales y b) Cargas distribuidas y puntuales.



### 1.5.7. Viga Continua.

Es aquella que descansa en más de dos apoyos; en la Figura 1.8. se presenta una viga continua, con tres claros o tramos iguales, que soportan una carga uniformemente distribuida de  $p_1$  sobre dos de sus tramos y otra uniformemente distribuida de  $p_2$  sobre el tercer tramo [2].

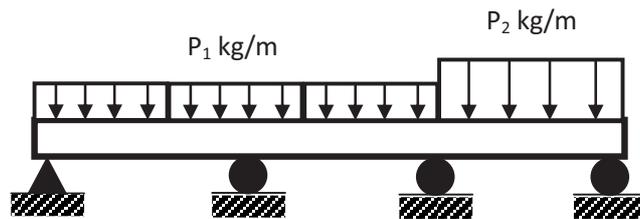


Figura 1.8 Viga continua

### 1.6. Tipos De Cargas

La reacción de un miembro a las cargas y su capacidad de soportarlas depende del tipo de ellas. Las cargas se clasifican en:

- A. Las cargas estáticas o constantes** son fuerzas que se van aplicando poco a poco y no repetidamente, y que permanecen casi constantes después de que se aplican por completo al miembro, o bien que son repetidas relativamente pocas veces, como las que actúan sobre la mayor parte de los miembros de los edificios o la carga aplicada a una barra en una máquina de ensayos o pruebas. Algunas veces conviene considerar la llamada carga estática como compuesta de dos partes: o sea, una carga muerta y una carga viva. Por ejemplo, el peso de un puente es una carga muerta sobre este y el peso de un automóvil que corre por él y la presión del viento sobre el mismo son cargas vivas [2].
- B. Las cargas repetidas** son fuerzas que se aplican, dentro de límites definidos o siguiendo un ciclo determinado un número muy grande de veces, produciendo en el material un esfuerzo que varía continuamente. Las cargas aplicadas al cigüeñal de un motor durante su funcionamiento y las cargas flexionantes que obran sobre el eje de una locomotora en movimiento y sobre muchas piezas de los aeroplanos en vuelo son cargas repetidas [2].
- C. Las cargas de choque o impacto** son fuerzas que se aplican en un periodo de tiempo relativamente corto. Una carga de choque se aplica en general, por un cuerpo en movimiento cuando entra en contacto con el miembro resistente, y la fuerza ejercida por el cuerpo móvil y el periodo de tiempo durante el cual actúa no pueden, de ordinario, determinarse. Por esta razón, en algunos problemas, es más satisfactorio calcular los esfuerzos y deformaciones producidos por una carga de choque a partir de la energía cedida al miembro resistente por el cuerpo móvil [2].



**D. Otras clasificaciones de cargas.** Las cargas se clasifican también en distribuidas y concentradas. Una **carga distribuida** puede ser uniformemente distribuida o no uniformemente distribuida. Así si se extiende un volumen de granos de forma regular sobre un piso de manera que su altura sea constante, el piso quedará sometido a una carga uniformemente distribuida, mientras que si los granos se distribuyen de tal manera que la altura de su capa no sea constante, se dice que el piso soporta una carga no uniformemente distribuida [2].

Una **carga concentrada** es aquella cuya superficie de contacto con el miembro que la resiste es despreciable con relación al área del mismo.

Puede hacerse otra clasificación útil de cargas atendiendo a los tipos más simples de la reacción deformadora del cuerpo resistente. Así, un miembro determinado puede estar sujeto a cargas centrales (axiales), de torsión o de flexión. Sin embargo un miembro puede estar sometido simultáneamente a la acción de dos cualesquiera, o los tres, tipos de carga [2].

### 1.7. Tipos de cargas en vigas.

Las cargas consisten en las fuerzas aplicadas que actúan sobre la viga. Estas pueden provenir del peso mismo de la viga (carga muerta) además de las otras fuerzas que deba soportar. Las cargas aplicadas a una viga pueden parecer bastante complicadas, pero hay solamente cinco tipos básicos de cargas aplicadas. Una viga puede soportar una cualquiera, o una combinación de estas cargas que son:

1. **Sin Carga.** La misma viga se considera sin peso (o al menos muy pequeño comparado con las demás fuerzas que se apliquen) [9].
2. **Carga Concentrada.** Una carga aplicada sobre un área relativamente pequeña (considerada aquí como concentrada en un punto), como P en la Figura 1.5. ó  $P_1, P_2, P_3$  en la Figura 1.7. (a) son ejemplos de cargas concentradas [9].
3. **Cargas Distribuidas.** Estas cargas se caracterizan por su intensidad, que se expresan en unidades de fuerza por unidad de distancia a lo largo del eje de la viga.

La intensidad de la carga se puede expresar en libras por pie, o en newton por metro de longitud. Por ejemplo  $w = 2 \text{ klb/ pie}$  indicaría que cada pie de la porción cargada soporta  $2 \text{ klb}$  [9].

**Carga Uniformemente Distribuida.** En una carga uniformemente distribuida, como las mostradas en las Figuras 1.7. (b) y 1.8. la intensidad es constante, es decir, la carga está igualmente distribuida sobre una porción de longitud de la viga [9].



**CARGA VARIABLE (Generalmente Distribuida).** La carga varía en intensidad de un punto a otro. La Figura 1.9. muestra una carga variable distribuida uniformemente y que varía desde cero en el extremo izquierdo hasta un valor de  $w$  en el extremo derecho [9].

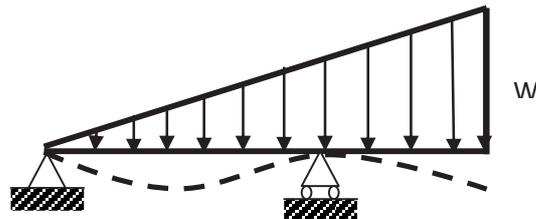


Figura 1.9. Carga variable

4. **Par.** Esta es una torsión aplicada a una viga en alguna parte. La Figura 1.7. (a) muestra el par de reacción  $M$ . [9].

5. **Fuerzas cortantes**

### 1.8. Solución de problemas clásicos y sus consideraciones

Para analizar los diferentes problemas de flexión se toman en cuenta ciertas convenciones y métodos tanto analíticos como gráficos de apoyo para la solución de los mismos, dentro de los que se encuentran los siguientes.

#### 1.8.1. Signos convenidos para las fuerzas cortantes.

Las fuerzas cuyo sentido es hacia arriba a la izquierda de una sección, o hacia abajo, a la derecha de la sección, son positivas. De este modo, en la Figura 1.10 (a) se muestra un sistema de fuerzas cortantes positivas en la sección  $x-x$  en la Figura 1.10 (b) se muestra un sistema de F.C. negativas.

Además, el corte de cada sección de la viga estará sometido a flexión, con lo que se tendrá un momento resultante que es el efecto neto de los momentos de cada una de las cargas individuales. Una vez más, para que exista equilibrio, los valores de cada lado de la sección deben presentar valores iguales. Por consiguiente, el **momento flector (M.F.)** se define como la suma algebraica de los momentos de las fuerzas respecto a la sección, consideradas en uno de los lados de la misma. Como en el caso de las **F.C.** deben convenirse los signos [3].

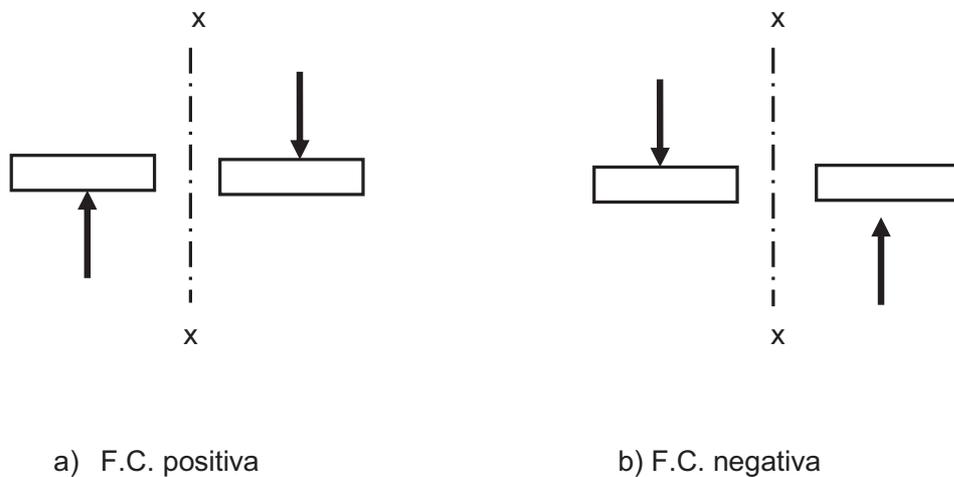


Figura.1.10 Signos convenidos para la fuerza cortante

### 1.8.2. Convención de signos para momentos flectores (M.F.)

Se consideran positivos los momentos que a la izquierda de la sección tienen sentido horario, los que a la derecha, tienen sentido anti horario se consideran negativos. De este modo en la Figura 1.11 (a) se muestra un sistema de momentos de flexión que da por resultado que la viga se “flexione” en el eje  $x - x$  y en la Figura 1.11 (b) se ejemplifica un sistema de **M.F.**, con el “combeo” que conlleva.

Debe observarse que aunque la convención de signos mencionada para **F.C. y M.C.** es un poco arbitraria y puede invertirse completamente, los sistemas elegidos aquí son los únicos que proporcionan los signos matemáticamente correctos para las pendientes y deflexiones de vigas en trabajos subsecuentes, por lo que son muy recomendables.

Los diagramas que ejemplifican la variación de los valores de **F.C. y M.C.** en toda la longitud de una viga o estructura para cualquier condición de carga fija se denominan diagramas de **F.C. y M.C.** consecuentemente, estos constituyen graficas de valores de momentos flectores o de fuerzas cortantes trazadas en la viga como una base y, evidentemente, sirve para ilustrar en las primeras etapas de diseño los puntos en la viga que están sometidas a los máximos esfuerzos cortantes o de flexión y por lo tanto, las zonas que pueden requerir un análisis más exhaustivo o un mayor refuerzo [3].

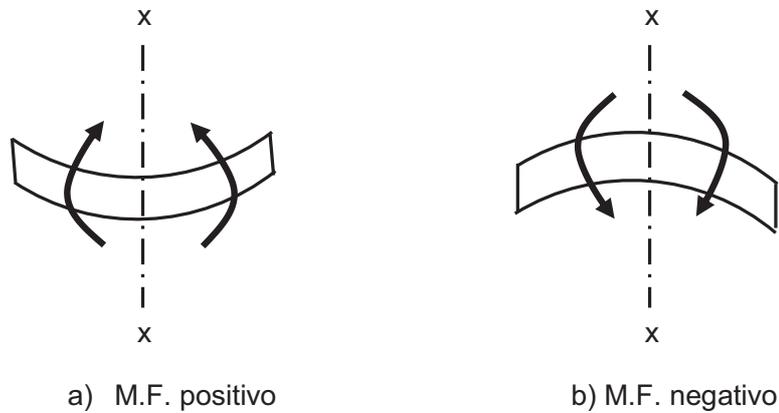


Figura 1.11 Signos convenidos para el momento flector.

### 1.8.3. Diagramas de momentos y fuerzas de corte.

La magnitud y el sentido de la fuerza cortante, la fuerza axial y el momento flexionante se pueden obtener en cualquier sección transversal de la viga. Además con las convenciones de los signos adoptadas para estas cantidades se pueden trazar gráficas de sus funciones en diagramas separados. En tales diagramas, desde una línea base igual a la longitud de la viga, se llevan ordenadas iguales a los valores de las cantidades calculadas. Cuando los puntos así determinados se unen por líneas, se obtiene una representación gráfica de la función. Estos diagramas, según la clase de cantidades que representen, se llaman, respectivamente, **diagrama de fuerza cortante**, **diagrama de fuerza axial** y **diagrama de momento flexionante**. Con ayuda de tales diagramas, se ponen de manifiesto inmediatamente las magnitudes y localizaciones de las diversas cantidades. Es conveniente trazar tales gráficas directamente abajo del diagrama de cuerpo libre de la viga, empleando la misma escala horizontal para la longitud de aquella.

Los diagramas de fuerza axial no se emplean con tanta frecuencia como los de fuerza cortante y momento flexionante, porque la mayoría de las vigas que se investigan en la práctica están cargadas por fuerzas que actúan perpendicularmente al eje de la viga. Para tales cargas en una viga no hay fuerzas axiales en ninguna sección.

Por esta razón son de gran importancia los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Por medio de ellos, el diseñador de estructuras ve de inmediato la clase de funcionamiento que se requiere en una viga en cada sección transversal de ella [8].

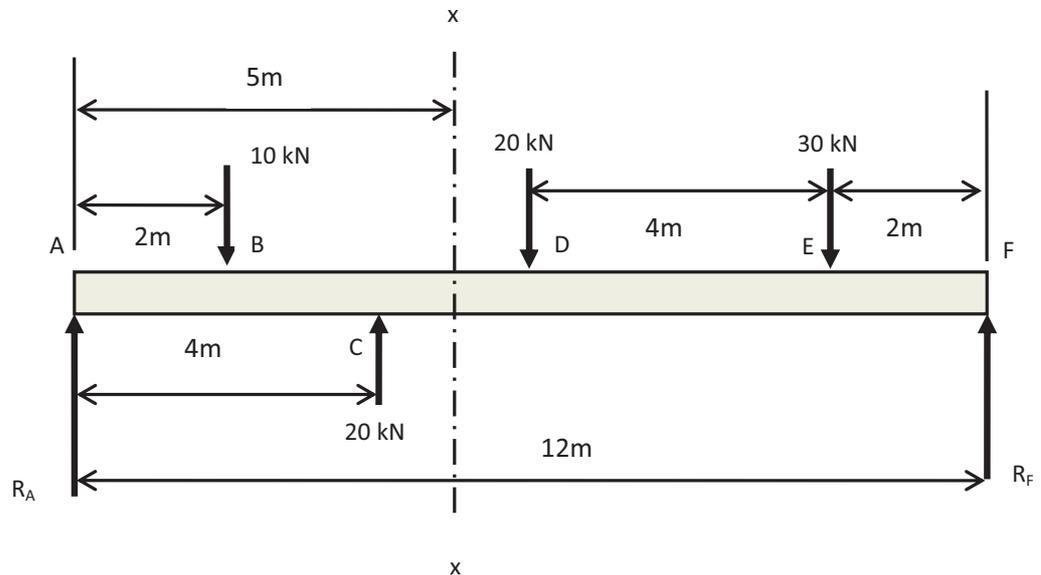


Fig. 1.12 Diagrama de cuerpo libre de la viga simplemente apoyada.

Para dar un ejemplo del procedimiento que se adoptara para calcular los valores de fuerzas cortantes y momentos flexionantes, considérese la viga simplemente apoyada de la Figura 1.12 que solo sostiene cargas concentradas. El termino simplemente apoyada significa que la viga puede suponerse como apoyada en soportes de cuchillo o de cojinetes y puede flexionarse en los apoyos sin restricción alguna.

Los valores de las reacciones en los extremos de la viga pueden calcularse al aplicar condiciones de equilibrio normales, es decir, tomando momentos respecto a F.

De este modo:

$$\sum M_F = 0 \tag{1.18}$$

$$(-R_A \times 12) + (10 \times 10) - (20 \times 8) + (20 \times 6) + (30 \times 2) = 0$$

$$R_A = 10kN$$

Para el equilibrio vertical

Fuerza total hacia arriba = carga total hacia abajo

$$\sum F_x = 0 \tag{1.19}$$

$$R_A + R_F = 10 + 20 + 30 - 20 = 40$$

$$R_F = 30kN$$



En esta etapa resulta conveniente verificar el valor de  $R_F$  tomando los momentos respecto a  $A$ . sumando las fuerzas en cualquier lado de  $x - x$ , tenemos el resultado que se muestra en la Figura 1.13. Al emplear los signos convencionales mencionados anteriormente, la fuerza cortante  $x - x$  es, por consiguiente, 20  $kN$ , por lo que la fuerza resultante en  $x - x$  que tiende a cortar a la viga es 20  $kN$

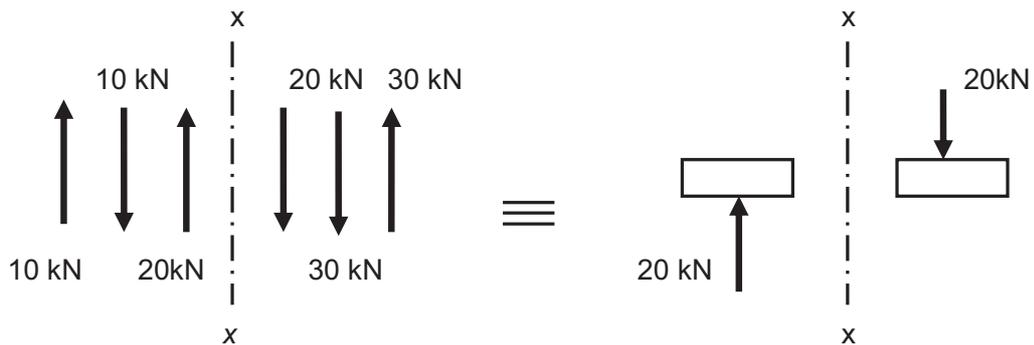


Figura 1.13. Fuerza de corte total en  $x - x$

En forma semejante, en la Figura 1.14. se muestra la suma de los momentos de las fuerzas restantes a  $x - x$ ; de esta manera el momento flector resultante es 40  $kNm$ .

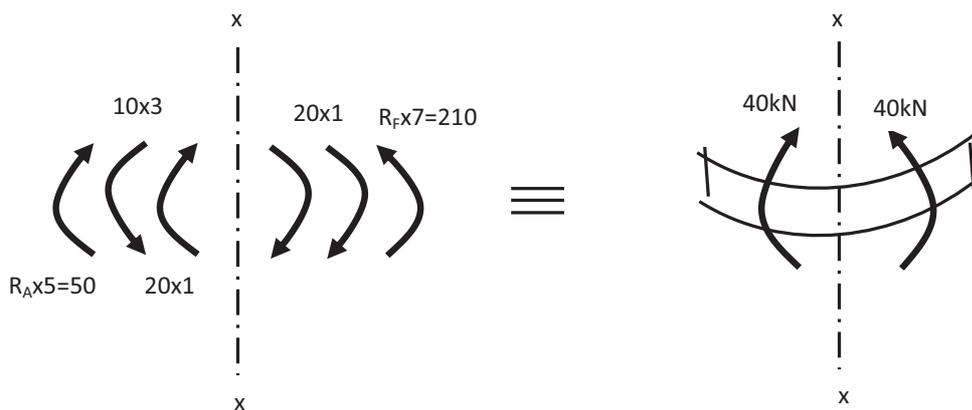


Figura 1.14. Momento flector total en  $x - x$



En la práctica, normalmente sólo se consideran uno de los lados de la sección y las sumas involucradas pueden con frecuencia, realizarse mentalmente. En la Figura 1.15. se muestran los diagramas completos de fuerzas cortantes y momentos flectores para la viga; los valores de los momentos de flexión empleados para construir el diagrama se deducen a continuación:

$$\begin{aligned} \text{M.F. en } A &= 0 \\ \text{M.F. en } B &= + (10 \times 2) = + 20 \text{ kNm} \\ \text{M.F. en } C &= + (10 \times 4) - (10 \times 2) = + 20 \text{ kNm} \\ \text{M.F. en } D &= + (10 \times 6) + (20 \times 2) - (10 \times 4) = + 60 \text{ kNm} \\ \text{M.F. en } E &= + (30 \times 2) = + 60 \text{ kNm} \\ \text{M.F. en } F &= 0 \end{aligned}$$

Todos los valores anteriores se calculan a partir de los momentos de las fuerzas a la izquierda de cada sección considerada, con excepción de **E** para la cual las fuerzas se consideraron a la derecha de la sección.

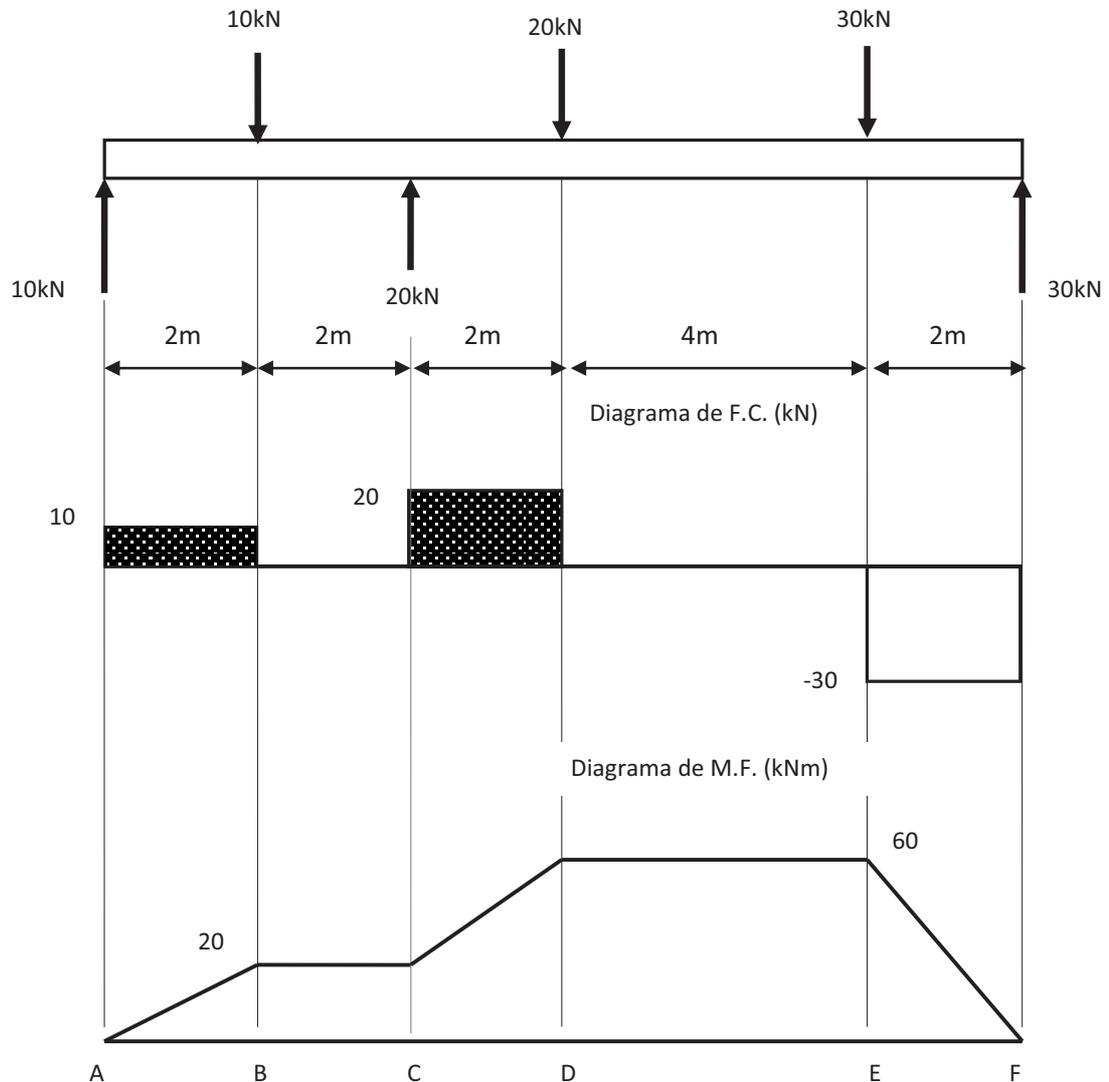


Figura 1.15. Diagrama de Fuerza Cortante y Momento Flexionante

En esta etapa es posible observar que el diagrama de fuerzas cortantes puede obtenerse rápidamente cuando se trabaja a partir del lado izquierdo de la viga ya que después de trazar el valor de la fuerza cortante F.C. en el apoyo, todos los pasos subsiguientes se tienen en la dirección de las cargas y son iguales en magnitud a dichas cargas por ejemplo, 10 kN hacia arriba en el punto A, 10 kN hacia abajo en el punto B, 20 kN hacia arriba en el punto C, etc., con líneas horizontales que unen los pasos mostrándose que las fuerzas cortantes permanecen constantes entre los puntos de aplicación de las cargas concentradas.



Los valores de fuerza constante y de momento flector en el apoyo del extremo izquierdo se determinan al considerar una sección a una distancia infinitamente pequeña a la derecha del apoyo. Entonces la única carga a la izquierda (y por lo tanto la fuerza cortante) es la reacción de 10 kN hacia arriba, es decir positiva, y el momento de flexión será igual a la reacción multiplicada por la distancia cero, lo que resulta cero.

Ahora son evidentes las siguientes características de los diagramas.

- Entre **B** y **C** la fuerza cortante es cero y el momento flector permanece constante;
- Entre **A** y **B** la fuerza cortante es positiva y la pendiente del diagrama del momento flector es positiva; y lo contrario se tiene entre **E** y **F**;
- La diferencia entre los momentos flectores en **A** y **B** = 20 kN/m = área del diagrama F.C. entre **A** y **B** [3].

#### 1.8.3.1. Diagrama de fuerza cortante.

El diagrama de fuerzas de cortes de una viga es una curva cuyas abscisas representan distancias a lo largo de la viga y las ordenadas representan las fuerzas cortantes verticales, en las secciones en donde se trazan las ordenadas.

#### 1.8.3.2. Relación entre carga, fuerza cortante y momento flexionante.

A continuación se deducirán algunas relaciones importantes entre la fuerza cortante,  $V$ , el momento de flexión,  $M$ , y las cargas de una viga. Considérese un elemento que ésta separado por dos secciones rectas distantes  $dx$  Figura 1.16. (a), (b) y (c). Si la fuerza cortante  $V$  y el momento flexionante  $M$  que actúan en el lado izquierdo del elemento son positivos, tendrán los sentidos mostrados en la Figura 1.16. (a), (b) y (c). En general, dicha fuerza y dicho momento varían con la distancia  $x$  medida a lo largo del eje de la viga y, por tanto, se deduce que en la cara de la derecha del elemento, la fuerza  $V$  y el momento  $M$  tendrán valores ligeramente distintos de sus valores de la cara izquierda. Representando los incrementos de  $V$  y  $M$  por  $dV$  y  $dM$ , respectivamente, las cantidades correspondientes en la cara derecha serán  $V + dV$  y  $M + dM$

La carga que actúa en el elemento puede ser una carga distribuida, una carga concentrada o un par. Suponiendo que sea una carga distribuida de intensidad  $q$ , se ve, de la Figura 1.16. (a), que la carga total (supuesta positiva cuando  $q$  actúa hacia abajo es igual a  $qdx$ . Entonces, por el equilibrio de las fuerzas en dirección vertical, se tiene que

$$V - (V+dV) - qdx = 0 \quad (1.20)$$

O sea,



$$\frac{dV}{dx} = -q \tag{1.21}$$

Por tanto cuando una carga repartida de intensidad  $q$  actúa en la viga, la fuerza cortante varía a lo largo de la misma, y su derivada con respecto a  $x$  es  $-q$ . De esto se concluye que si  $q = 0$ , la fuerza de corte  $V$  es constante.

Sumando momentos con respecto al eje horizontal de la cara izquierda del elemento de la Figura 1.16. (a), se halla que

$$M + qdx \left(\frac{dx}{2}\right) + (V + dV)dx - (M + dM) = 0 \tag{1.22}$$

Despreciando los productos de las diferenciales se obtiene de esta ecuación la siguiente relación:

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{1.23}$$

Esta ecuación muestra que la derivada del momento flexionante es igual al valor algebraico de la fuerza cortante, siempre que la carga distribuida (o ninguna carga) actúe sobre la viga.

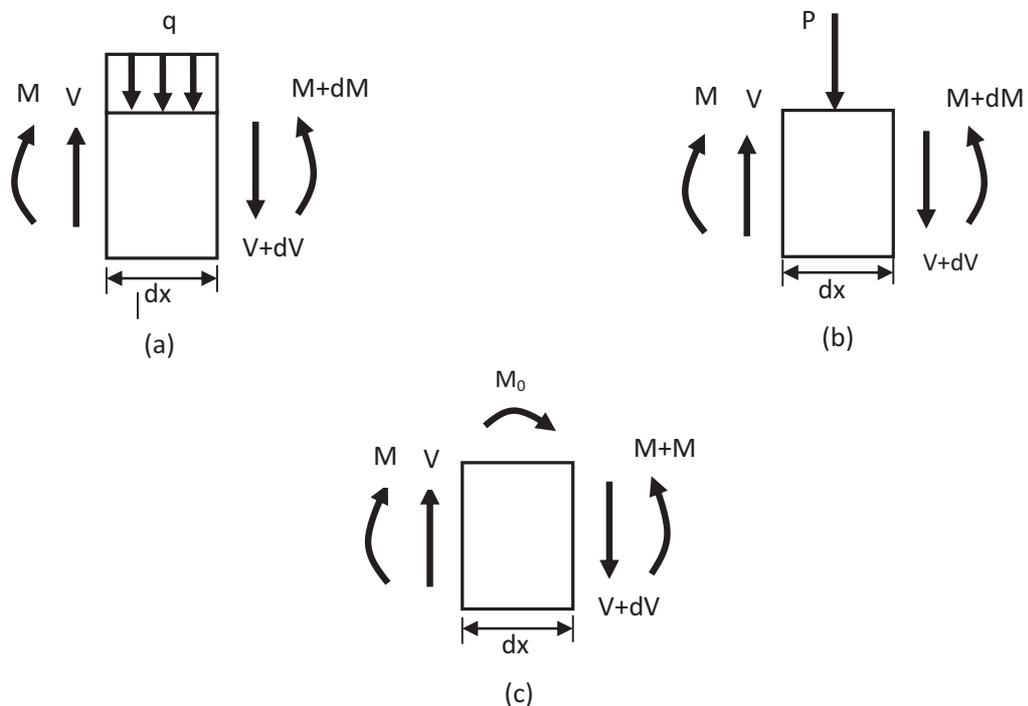


Figura 1.16. Relación Entre Carga, Fuerza Cortante Y Momento Flexionante



Supóngase ahora que en el elemento de la viga actúa una fuerza concentrada,  $P$  Figura 1.16. (b). Por el equilibrio del elemento en la dirección vertical se ve que habrá un cambio brusco, o discontinuidad, en la fuerza cortante entre las dos caras del elemento. El incremento  $V_1$  de tal fuerza es igual a la carga  $P$  con signo negativo

$$V_1 = -P \quad (1.24)$$

Por tanto, la fuerza cortante disminuye bruscamente en una cantidad igual a  $P$  cuando se pasa de la izquierda a la derecha del punto de aplicación de la carga.

En el lado izquierdo de la representación del elemento de la Figura 1.16. (b), la derivada del momento flexionante es  $\frac{dM}{dx} = V + V_1$ . Por consiguiente, se puede concluir que en el punto de aplicación de una fuerza concentrada,  $P$ , la derivada,  $\frac{dM}{dx}$  disminuye bruscamente en una cantidad igual a  $P$ .

El último caso a considerar es una carga en forma de un momento,  $M_0$  figura 1.16. (c). Por el equilibrio en dirección vertical se obtiene  $dV=0$ , lo cual indica que la fuerza cortante permanece constante cuando se pasa de la izquierda a la derecha del punto de aplicación de la carga. El equilibrio de los momentos para el elemento da

$$M + M_0 + Vdx - (M + M_1) = 0 \quad (1.25)$$

O sea

$$M_1 = M_0 \quad (1.26)$$

Donde  $M_1$  es el incremento del momento flexionante. Esta ecuación muestra que hay un aumento repentino del momento de flexión de la viga debido al par aplicado  $M_0$  al ir de izquierda a derecha a lo largo de la viga.

Las ecuaciones (1.21, 1.23, 1.24 y 1.26) son útiles cuando se realiza una investigación completa de la variación de la fuerza cortante y el momento flexionante de una viga [10].

### 1.9. Teoría de flexión simple

Uno de los arreglos más importantes debido a que se encuentra frecuentemente en una gran variedad de aplicaciones es la flexión. Es por ello que hay gran cantidad de información de ello en la literatura, así como diferentes métodos de solución, como son por ejemplo, las denominadas soluciones exactas y aproximadas. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, partimos de la suposición de que una de las dimensiones es mucho más grande que las otras dos. Es claro ahora que el hacer esto implica restricciones fuertes desde el punto de vista del planteamiento general de la teoría de



elasticidad, sin embargo, aun así es posible con ello analizar vigas rectas como las curvas de secciones transversales variadas. A continuación se presentan algunos análisis de deducción de las expresiones que rigen la flexión y sus diferentes métodos de solución.

El caso más simple de flexión es cuando la viga posee un eje de simetría vertical y que se encuentra sometida a un momento flector, que hace que las fibras superiores de la viga estén sometidas a tensión y las inferiores a compresión, por consiguiente resulta razonable suponer que en algún punto entre estas dos zonas existen puntos entre los cuales el esfuerzo es nulo o cero. El lugar geométrico de todos estos puntos se denomina eje neutro. Entonces, el radio de curvatura  $\rho$  se mide con respecto a este eje. Para secciones simétricas el eje neutro es el eje de simetría pero, cualquiera que sea la sección, el **E.N.** siempre pasara a través del centro del área o centroide. Para obtener entonces las fórmulas de flexión nos basamos en la Figura 1.17 (a) y (b) considerando también que las secciones transversales permanecen planas [6].

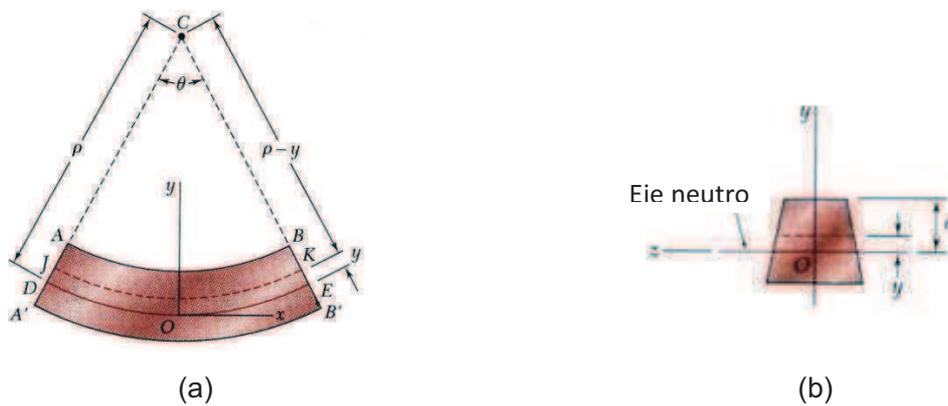


Figura 1.17 (a) Sección longitudinal, vertical (plano de simetría), (b) Sección transversal

Como puede observarse la fibra JK de la parte superior se acorta y la fibra DE se alarga. Si se considera que la deformación se obtiene dividiendo el alargamiento entre la longitud inicial como se muestra a continuación:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{L_f - L_i}{L_i} \tag{1.27}$$

Donde con respecto a la Figura 1.27 (a) se tiene

$$L_i = \rho \theta$$

$$L_f = (\rho - y) \theta$$



$$\varepsilon_x = \frac{(\rho - y)\theta - \rho\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho} \quad (1.28)$$

Por otro lado, suponiendo que el material es homogéneo y obedece a la ley de Hooke, entonces el esfuerzo es

$$\sigma = E\varepsilon = \left(\frac{y}{\rho}\right)E \quad (1.29)$$

Esta expresión indica que el esfuerzo en cualquier fibra es directamente proporcional a su distancia  $y$  a la superficie neutra, ya que se ha supuesto que el módulo elástico es igual a tensión que a compresión, y el radio de curvatura  $\rho$  de la superficie neutra es independiente de la ordenada  $y$  de la fibra. Ahora bien, los esfuerzos no deben sobrepasar el límite de proporcionalidad, pues en caso contrario dejaría de cumplirse la ley de Hooke en la que se ha basado la determinación de la forma de distribución de los esfuerzos.

Para completar la deducción de la fórmula de la flexión se aplican las condiciones de equilibrio. Es decir, las fuerzas exteriores que actúan a un lado de la sección en estudio quedan equilibradas por la fuerza cortante y el momento flexionante resistentes. Para que se produzca este equilibrio, un elemento diferencial cualquiera de la sección de exploración está sometido a las fuerzas que indica la Figura 1.18. La intersección de la superficie neutra con la sección se llama eje neutro.

Para satisfacer la condición de que las fuerzas exteriores no tengan componente según el eje  $x$ , se tiene,

$$[\sum F_x = 0] \quad (a); \quad \int \sigma_x dA \quad (b). \quad (1.30)$$

En donde  $\sigma_x$  equivale a  $\sigma$  de la ecuación (1.29). Sustituyendo  $\sigma_x$  por su valor  $\frac{E y}{\rho}$  resulta,

$$\frac{E}{\rho} \int y dA = 0$$

Los términos  $E$  y  $\rho$ , constantes se han sacado fuera de la integral. Como  $y dA$  es el momento estático del área diferencial  $dA$  respecto de **E.N.**, la integral  $\int y dA$  es el momento estático total del área. Por tanto,

$$\frac{E}{\rho} A \bar{y} = 0 \quad (1.31)$$

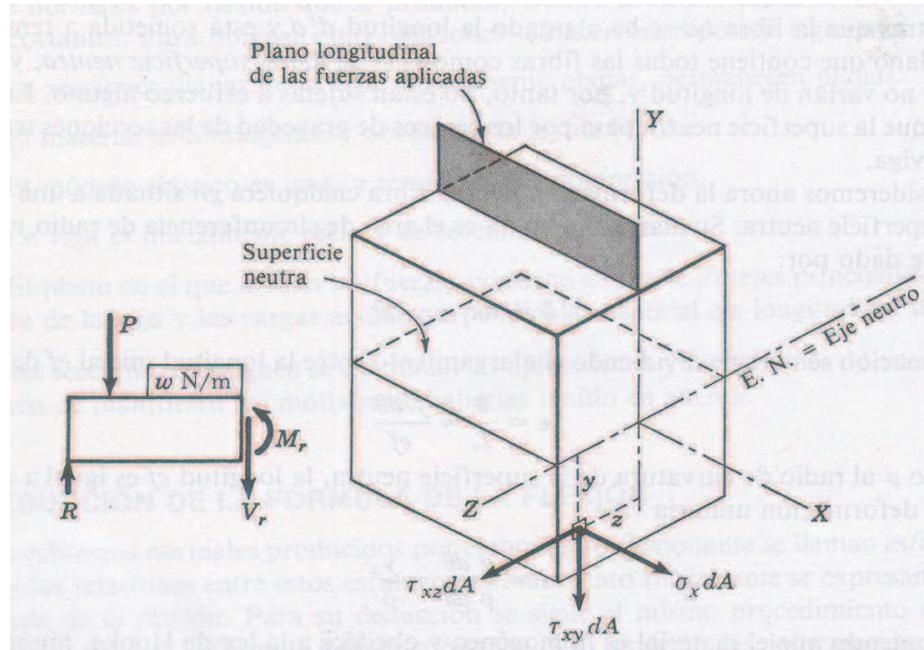


Figura 1.18 Fuerzas que actúan sobre un elemento de área de la sección recta

Sin embargo como solamente  $\bar{y}$  en esta expresión puede ser nulo, se deduce que la distancia al **E.N.**, eje de referencia, del centro de gravedad de la sección recta debe ser cero, es decir, que la línea neutra pasa por el centroide del área de la sección transversal.

La condición  $\Sigma F_y = 0$  que da  $V = V_r$  conduce a la fórmula del esfuerzo cortante, donde la fuerza cortante  $V_r$  es la suma de todas las fuerzas cortantes  $\tau_{xy} dA$ , es decir,

$$V_r = \int \tau_{xy} dA.$$

La condición  $\Sigma F_z = 0$  conduce a que  $\int \tau_{xz} dA = 0$ . Puesto que las fuerzas exteriores no tienen componente según el eje  $z$ , en el sistema de fuerzas cortantes  $\tau_{xz} dA$  está en equilibrio. El plano de las fuerzas puede no ser el plano  $xy$ , sino uno paralelo a él. En estos casos, las cargas producen un momento con respecto al eje  $x$  que es equilibrado por  $\int y(\tau_{xz} dA) - \int z(\tau_{xy} dA)$  para cumplir la ecuación  $\Sigma M_x = 0$ . Esta condición se verifica automáticamente para secciones simétricas respecto del eje  $y$ , ya que cualquier elemento tiene otro simétrico  $y$ , y por tanto, las integrales se anulan. Como consecuencia, para secciones simétricas con respecto al eje  $y$ , el plano de las fuerzas



exteriores debe coincidir con el plano  $xy$ , y si no ocurre así, la viga estará sometida a torsión.

Consideremos ahora la condición  $\Sigma M_y = 0$ . Las fuerzas exteriores no producen momento con respecto al eje  $y$ , ni tampoco las fuerzas cortantes interiores. Por tanto,

$$[\Sigma M_y = 0] \quad \int z (\sigma_x dA) = 0 \quad (1.32)$$

Sustituyendo  $\sigma_x$  por  $\frac{E}{\rho}y$ , resulta,

$$\frac{E}{\rho} \int zy \, dA = 0 \quad (1.33)$$

La integral  $\int zy \, dA$  es el producto de inercia  $I_{zy}$ , que es nulo solamente si  $y$  y  $z$  son ejes de simetría o ejes principales de la sección.

La última condición de equilibrio  $\Sigma M_z = 0$  requiere que el momento flexionante sea equilibrado por el momento resistente, es decir,  $M = M_r$ . El momento resistente con respecto al  $E.N.$  de un elemento cualquiera es  $y(\sigma_x dA)$  y, por tanto,

$$M = \int y(\sigma_x dA) \quad (1.34)$$

Sustituyendo  $\sigma_x$  por  $\frac{E}{\rho}y$ , resulta,

$$M = \frac{E}{\rho} \int y^2 \, dA \quad (1.35)$$

Puesto que  $\int y^2 \, dA$  es el momento de inercia  $I$  del área con respecto al eje de referencia que en este caso es el  $E.N.$ , que pasa por el centro de gravedad, se obtiene finalmente,

$$M = \frac{EI}{\rho} \quad (1.36)$$

La forma más común de escribir la ecuación (1.36) es:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (1.37)$$

Puesto que la curvatura es el recíproco del radio de curvatura, la ecuación (1.37) indica que la curvatura es directamente proporcional al momento flexionante.



Igualando la relación  $\frac{E}{\rho}y$  deducida de (1.37) con el valor de la ecuación (1.29) se obtiene

$$\frac{E}{\sigma} = \frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} \quad (1.38)$$

Que conduce directamente a la fórmula de la flexión, también llamada fórmula de la flexión elástica.

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad (1.39)$$

Esta expresión indica que el esfuerzo debido a la flexión en cualquier sección es directamente proporcional a la distancia del punto considerado a la línea neutra. Una forma más común de la fórmula de la flexión se obtiene sustituyendo  $y$  por la distancia  $c$  del elemento más alejado de la línea neutra. Con esto se obtiene el esfuerzo máximo [7].

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} \quad (1.40)$$

### Deducción de la fórmula del esfuerzo cortante horizontal

Consideremos dos secciones adyacentes (1) y (2) de una viga, separadas una distancia  $dx$  como indica la Figura 1.19, y aislemos la parte rayada del elemento comprendido entre ellas. La Figura 1.20 representa, en perspectiva, esta parte aislada.

Supongamos que el momento flexionante en la sección (2) es mayor que en la sección (1), por lo que los esfuerzos normales también serán distintos,  $\sigma_2$  mayor que  $\sigma_1$  y la resultante horizontal de las fuerzas de compresión en la sección (2) será mayor que la de la sección (1),  $H_2 > H_1$ . Esta diferencia entre  $H_2$  y  $H_1$  solo puede equilibrarse por la fuerza cortante resistente  $dF$  que actúe en la cara inferior del elemento aislado, ya que en las restantes caras de éste no actúa fuerza exterior alguna.

Como  $H_2 - H_1$  es la suma de las diferencias de las compresiones  $\sigma_2 dA$  y  $\sigma_1 dA$  que actúan en cada elemento diferencial contenido en el elemento aislado, como se observa en la Figura 1.20, aplicando la condición de la estática  $\sum H = 0$  resulta,

$$\sum H = 0$$



$$dF = H_2 - H_1 \quad (1.41)$$

$$= \int_{y_1}^c \sigma_2 dA - \int_{y_1}^c \sigma_1 dA \quad (1.42)$$

Sustituyendo  $\sigma$  por su valor  $\frac{My}{I}$ ,

$$dF = \frac{M_2}{I} \int_{y_1}^c y dA - \frac{M_1}{I} \int_{y_1}^c y dA = \frac{M_2 - M_1}{I} \int_{y_1}^c y dA \quad (1.43)$$

De la figura 1.19,  $dF = \tau b dx$ , siendo  $\tau$  el esfuerzo cortante medio en el área diferencial de momento flexionante en la longitud  $dx$ , por lo que la relación anterior se puede escribir en la forma,

$$\tau = \frac{dM}{I b dx} \int_{y_1}^c y dA \quad (1.44)$$

Y como  $\frac{dM}{dx} = V$ , fuerza cortante vertical, el esfuerzo cortante horizontal viene dado por:

$$\tau = \frac{V}{I b} \int_{y_1}^c y dA = \frac{V}{I b} A' \bar{y} = \frac{V}{I b} Q \quad (1.45)$$

Se ha sustituido la integral  $\int_{y_1}^c y dA$ , que representa la suma de los momentos con respecto al E.N. de las áreas diferenciales  $dA$ , por su equivalente  $A' \bar{y}$ , o sea, el momento estático, respecto de la línea neutra, del área parcial  $A'$  situada entre la paralela al E.N. a la altura  $y_1$  donde se va a calcular el esfuerzo cortante y el borde superior de la sección. La distancia de ésta al centro de gravedad de  $A'$  es  $\bar{y}$ . También se puede representar este momento estático de área por  $Q$ .

Multiplicando el esfuerzo cortante  $\tau$  por el ancho  $b$  de la sección se obtiene una cantidad  $q$  denominada flujo cortante, que representa la fuerza longitudinal por unidad de longitud transmitida a través de la sección de ordenada  $y_1$ . Aplicando se obtiene su valor,[7]

$$q = \tau b = \frac{V}{I} Q \quad (1.46)$$

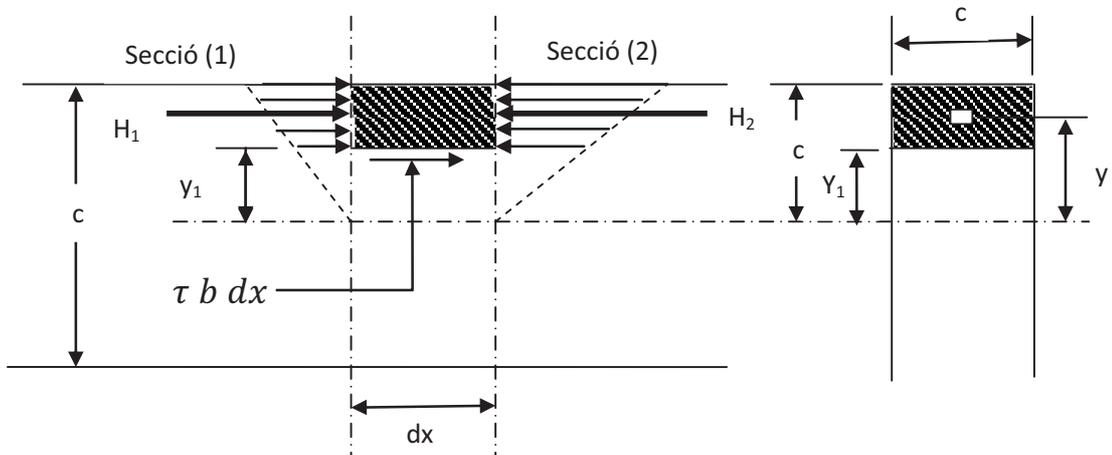


Figura 1.19 Diagrama para determinar el esfuerzo cortante

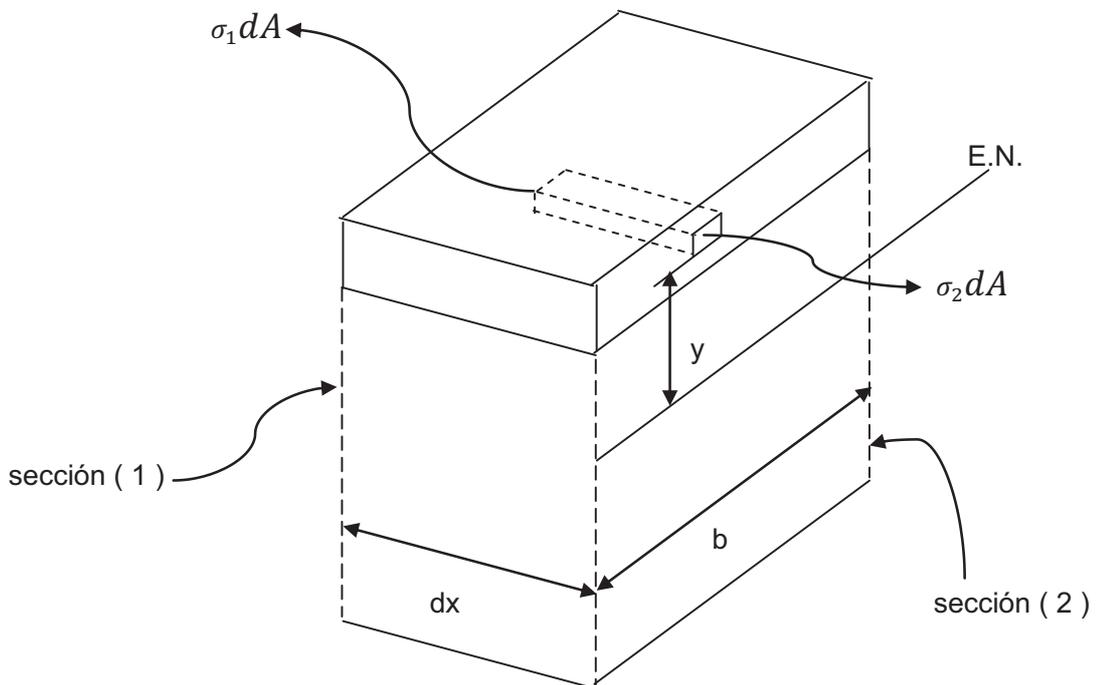


Figura 1.20 Diagrama para determinar el esfuerzo cortante



**1.10. Solución exacta del problema de flexión**

**1.10.1. Tensor de esfuerzos**

Siguiendo la idea de la teoría de elasticidad y debido a que el problema es unidimensional se tienen las siguientes restricciones

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \text{ (a);} \quad \sigma_y = \sigma_z = 0 \text{ (b);} \quad \sigma_x = cy \text{ (c).} \quad (1.47)$$

Donde “c” es constante y “y” es cero cuando se encuentra en el eje neutro. Dado que las condiciones en la frontera requieren que las resultantes de las fuerzas sean cero y que los momentos de las fuerzas internas alrededor del eje neutro sean igual al momento  $M_z$ , entonces se tiene

$$\int \sigma_x dA = 0 \text{ (a);} \quad \int \sigma_x y dA = M_F \text{ (b);} \quad (1.48)$$

Sustituyendo la ecuación (1.32c) en (1.33b) se tiene:

$$\int c y y dA = M_F \quad \int c y^2 dA = M_{(x)} \quad c = \frac{M_{(x)}}{\int y^2 dA}$$

$$\int y^2 dA = I \quad c = \frac{M_{(x)}}{I} \quad (1.49)$$

Lo que nos lleva a la ecuación ya encontrada anteriormente del esfuerzo para flexión a una distancia x

$$\sigma_x = \frac{M_{(x)}}{I} y = \frac{F(l-x)y}{I} \quad (1.50)$$

Por otro lado se puede obtener la expresión para cortantes como sigue

$$\sigma_x \left( y - \frac{h}{2} \right) = \frac{M_{(x)} \frac{h}{2}}{I} \text{ (a);} \quad M_{(x)} = \frac{2I}{h} \sigma_x = M_c \varepsilon_x \left( \frac{2I}{h} \right) \text{ (b);}$$

$$\varepsilon_x = \frac{M_{(x)} h}{M_c 2I} = \frac{h}{M_c 2I} M_x \text{ (c);} \quad M_x = \frac{2 M_c I}{h} \varepsilon_x = \frac{F(l-x)}{I} \text{ (d);}$$

$$\frac{F(l-x)h/2}{I} = \frac{F l h}{2I} - \frac{F h x}{2} \text{ (e).} \quad (1.51)$$

De la ecuación de equilibrio se tiene

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \text{ (a);} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \text{ (b);} \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{F(l-x)y}{I} \right] = -\frac{F y}{I} \text{ (c);}$$

$$-\frac{F y}{I} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \text{ (d);} \quad \int \sigma_x y dA = M_F \text{ (e);} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{F y}{I} \text{ (f);}$$



$$\tau_{xy} = \int \frac{Fy}{I} dy = \frac{Fy^2}{2I} + \phi(x) \quad (g); \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{d\phi(x)}{dx} = 0 \quad (h). \quad (1.52)$$

De donde tenemos que

$$\frac{d\phi}{dx} = 0 \quad (a); \quad \phi = \int 0 dx \quad (b); \quad \phi = c_1 \quad (c); \quad \tau_{xy} = \frac{Fy^2}{2I} + c_1 \quad (d);$$

$$\tau_{xy} \left( y = \pm \frac{h}{2} \right) = 0 = \frac{F\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2I} + c_1 \quad (e); \quad c_1 = -\frac{F\frac{h^2}{4}}{2I} = -\frac{Fh^2}{8I} \quad (f);$$

$$\tau_{xy} = \frac{Fy^2}{2I} - \frac{F\frac{h^2}{4}}{2I} = \frac{F}{2I} \left( y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \quad (g). \quad (1.53)$$

Finalmente el tensor de esfuerzos para esfuerzos quedaría de la siguiente forma [1]

$$T_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F(l-x)y}{I} & \frac{F}{2I} \left( y^2 - \frac{h^2}{4} \right) & 0 \\ \frac{F}{2I} \left( y^2 - \frac{h^2}{4} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

### 1.11. Extensometría Eléctrica.

Se sabe que existen una serie de ecuaciones que permiten obtener el estado de esfuerzos en un elemento estructural en uno o más ejes, por tanto, se cuenta también con ecuaciones donde se puede obtener el estado de esfuerzos a partir de ecuaciones a partir de valores de deformación en esos ejes (estado de deformación).

Si se cuenta con una lectura fiable del estado de deformación, se puede saber que valores de esfuerzo están actuando en el elemento. Esto es de gran ayuda, ya que se pueden verificar los cálculos estructurales y compararlos de manera experimental.

La **Extensometría Eléctrica**, es una técnica la cual nos permite obtener el estado de deformación con un alto grado de exactitud, lo que aunado a su relativa facilidad de instalación y bajo costo, comparado con otras técnicas experimentales, lo convierte en una herramienta indispensable en el campo de la ingeniería.

Una ventaja más de la extensometría eléctrica, es que transforman los cambios de resistencia eléctrica a deformaciones unitarias, lo cual es posible, mediante ecuaciones y arreglos adecuados, para obtener parámetros tales como fuerza, presión, desplazamiento, temperatura, aceleración, par torsional, dilatación térmica, entre otras.

Ya que esta técnica permite obtener con relativa facilidad y economía éstos y muchos más datos, se ocupa para desarrollar transductores según sea la necesidad.



### 1.11.1. Operación del extensómetro

Los métodos de análisis experimental de esfuerzos se basan en la deformación del elemento sometido a cargas. Existen instrumentos de medición eléctricos, acústicos, ópticos, etc., los cuales aseveran lo dicho anteriormente.

El principio de operación de los extensómetros eléctricos se basan en los cambios de resistencia eléctrica que sufre un conductor debido a cambios en su longitud, este principio fue enunciado por Lord William Thomson Kelvin; no fue sino hasta 1938 que Simmons y Ruge emplearon lo que se considera en la actualidad como extensómetro eléctrico.

La ecuación que rige la operación del extensómetro es la resistividad eléctrica la cual está basada en lo siguiente: la resistencia eléctrica de cualquier conductor depende del material que se trate y de sus dimensiones y se expresa de la siguiente forma:

$$\rho = \frac{RA}{L} \quad (1.55)$$

donde  $R$  es la resistencia eléctrica [Ohms],  $L$  es la longitud [m],  $A$  es el área de la sección transversal de el conductor [ $m^2$ ] y  $\rho$  es la resistividad [Ohms \* $m^2$  / $m$ ]<sup>2</sup>.

La resistencia eléctrica de un conductor sujeto a un esfuerzo cambia proporcionalmente a la deformación que éste sufre, lo cual se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{\Delta R}{R} = FE \frac{\Delta L}{L} \quad (1.56)$$

donde  $R$  y  $L$  son la resistencia eléctrica y la longitud del conductor antes mencionado y  $GF$  es el factor de proporcionalidad (**Gage Factor**). Es posible entonces obtener la deformación unitaria de un elemento estructural ( $\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon$ ).

### 1.11.2. Estructura del extensómetro

El extensómetro se encuentra formado de diferentes materiales como se muestra en la Figura 1.21., tanto en la aleación del filamento como en el encapsulado aparte de encontrarlo en infinidad de formas, llámese uniaxial, roseta a 45°, a 120°, con filamentos soldados, con rejilla expuesta etc...

En este apartado se hablará de la estructura física del extensómetro. El filamento ésta encapsulado en una poliamida flexible lo cual se logra por métodos avanzados de foto proyección el cual da características únicas en el momento de pegado, el filamento se encuentra en varias aleaciones tales como constantan o cobre [12].

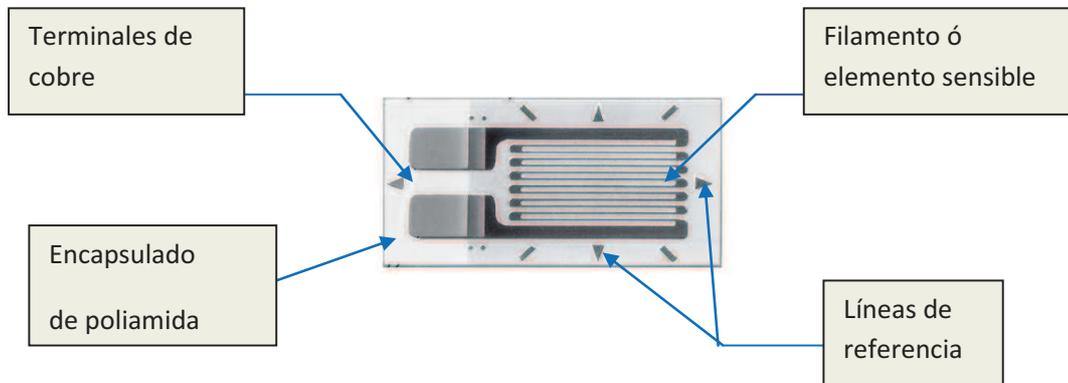


Figura 1.21. Partes de un extensómetro.

### 1.11.3. Puente de Wheatstone

El circuito característico para conectar un extensómetro y poder medir la señal es el Puente de Wheatstone, el cual se muestra en la Figura 1.22. una de sus principales características es dividir el voltaje de entrada  $V_0$ , de la fuente de energía y suministrar una señal de salida  $V_s$ , que es función de  $V_0$  y de la resistencia instantánea de sus ramales ( $R_1, R_2, R_3, R_4$ ) [13]:

$$V_s = V_0 \left[ \frac{R_1}{R_1 + R_4} - \frac{R_2}{R_2 + R_3} \right] \quad (1.57)$$

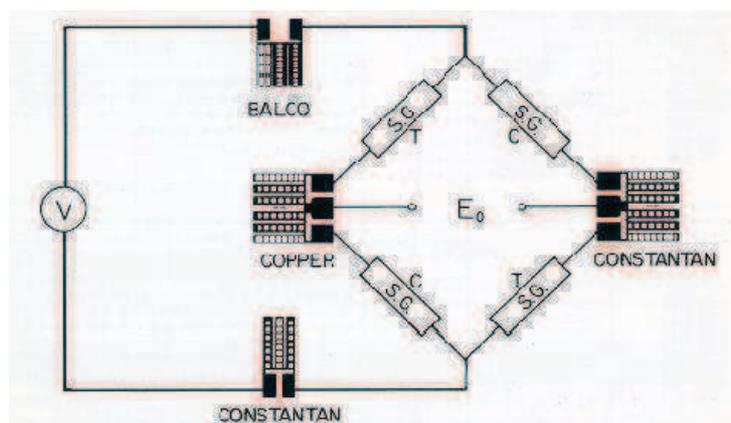


Figura 1.22. Diagrama de Puente de Wheatstone.



Utilizando la Ley de Ohm,  $V_0$  puede ser expresada en términos de la corriente  $I_0$  como:

$$V_0 = I_0 R_b \quad (1.58)$$

en donde  $R_b$  es la resistencia del puente entre nodos de alimentación. Por otro lado  $R_b$  está expresada como:

$$R_b = \frac{(R_1+R_4)(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3+R_4} \quad (1.59)$$

La relación clave para entender el Puente de Wheatstone a través del suministro de corriente, donde la salida puede ser encontrada para cualquier combinación entre las resistencias del puente y la corriente de entrada, es:

$$V_0 = I_0 * \frac{(R_1+R_4)(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3+R_4} \quad (1.60)$$

#### 1.11.4. Celda de Carga

Para hacer un transductor, específicamente una Celda de compresión, se recurre a hacer un arreglo en puente completo, es decir, se deben colocar en la muestra a comprimir, 4 extensómetros conectados entre sí, de los cuales dos irán alineados al eje longitudinal de la muestra y los otros dos en el eje transversal de la misma.

Puesto que la muestra se maquina de forma cuadrada en su parte central no requiere compensador de deformaciones [13].



Figura 1.23. Celda de compresión instalada en el equipo de flexión en vigas.



Las ecuaciones para validar la celda de carga del equipo de flexión en vigas fueron planteadas de la siguiente forma:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1.61)$$

En esta expresión se sustituye la **F** por **P<sub>e</sub>**, de tal forma que la expresión del esfuerzo queda como:

$$\sigma = \frac{\pi^2 E_{Columna} bh^3}{12AL^2} \quad (1.62)$$

Aplicando la Ley de Hooke, se encuentran las deformaciones teóricas que se validarán con las medidas arrojadas por la celda de compresión en el equipo indicador, de aquí la expresión para las deformaciones teóricas queda de la siguiente forma:

$$\varepsilon = \frac{\pi^2 E_{Columna} bh^3}{12AL^2 E_{celda}} \quad (1.63)$$

# CAPÍTULO II

---

## DISEÑO DEL EQUIPO PARA PRUEBAS DE FLEXIÓN EN VIGAS



## 2.1 Requerimiento de diseño y planteamiento del problema.

Hoy en día, la educación en ingeniería en nuestro país se enfrenta a la necesidad de complementar los planes de estudio con equipos didácticos que permitan reafirmar los conceptos teóricos abordados en los planes y programas de estudio. Por otro lado, el desarrollo de tecnología propia en esta área es escaso y por ello los equipos existentes comercialmente provienen de países desarrollados.

Debido a lo anterior las instituciones educativas, ya sean públicas o privadas, enfrentan el problema del alto costo de los equipos didácticos así como el soporte técnico y la capacitación operativa del personal. Lo anterior provoca que los presupuestos de las instituciones sean insuficientes y en consecuencia sólo algunas cuantas escuelas de ingeniería cuentan con el equipo didáctico suficiente y apropiado para reforzar el aprendizaje de los alumnos.

En este mismo contexto, en la FES Aragón existe un laboratorio de Mecánica que cuenta con algunos equipos didácticos para el estudio de fenómenos típicos de estática, mecanismos y vibraciones mecánicas. Dicho equipo se encuentra en desuso, y por ello el laboratorio se encuentra subutilizado, debido a diversas causas entre ellas a que algunas partes se encuentran en malas condiciones y sobre todo no se cuenta con manuales de prácticas o bien, en el caso del equipo de vibraciones mecánicas, el manual existente es poco claro debido a que no cuenta con diagramas de ensamble de cada experimento. Así mismo, el laboratorio no cuenta con equipos para realizar prácticas de mecánica de sólidos a pesar de que ésta área de conocimiento es fundamental para el diseño mecánico.

Con el fin de aprovechar los recursos existentes en el laboratorio de mecánica de la FES Aragón, y considerando la problemática encontrada, se propuso al Programa de Apoyo a Proyectos Institucionales para el Mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME) de la UNAM, el proyecto denominado: Diseño y Rehabilitación de Equipo de Laboratorio de Mecánica de la FES Aragón con clave PE102505.

El proyecto contempló la rehabilitación de los equipos existentes así como el diseño y construcción de tres equipos para el estudio de fenómenos típicos de la mecánica de sólidos. Los equipos que se diseñaron y construyeron fueron:

- a) Un equipo para ensayos de flexión en vigas
- b) Un equipo para el estudio de pandeo en columnas
- c) Un probador mecánico portátil.

Como parte de los alcances correspondientes al proyecto PAPIME PE102505, el presente trabajo se orientó al diseño, construcción e instrumentación de un equipo para ensayos de flexión en vigas el cual tiene como fin, brindar a los estudiantes un apoyo



didáctico importante que les facilite la comprensión de conceptos teóricos como son los de campos de esfuerzo, deformación, desplazamientos en vigas de sección constante fabricadas en diferentes materiales sometidas a los arreglos típicos de flexión tales como:

- a) Simplemente apoyada
- b) Empotrada
- c) Estáticamente indeterminada

Para cada uno de dichos arreglos se buscó que el equipo permitiera al alumno observar los siguientes fenómenos:

- a) Equilibrio estático
- b) Diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes
- c) Distribución de esfuerzos
- d) Propiedades mecánicas del material con fue fabricada la viga.

Así mismo, se impusieron como demandas de diseño los siguientes requerimientos:

- Facilidad de montar y desmontar el equipo.
- Medición digital de la carga crítica aplicada en vigas.
- Reducción de costos de fabricación en comparación con los equipos extranjeros.

## 2.2 Descripción del equipo para pruebas de flexión.

El equipo para ensayos de flexión, que se propone en el presente trabajo se compone de varias partes las cuales se enlistan en la tabla 2.1 y se muestran en las Figuras 2.1 a la 2.5.



Tabla 2.1. Listado de piezas del equipo para pruebas de flexión que se muestra en la Figura 2.1.

| Número de pieza | Nombre de la pieza                                       | Cantidad |
|-----------------|--|----------|
| 1               | Bastidor principal                                       | 1        |
| 2               | Aplicador de carga                                       | 1        |
| 3               | Celda de compresión                                      | 7        |
| 4               | Medidor de carga   | 1        |
| 5               | Elementos de flexión                                     | 4        |
| 6               | Columna instrumentada                                    | 3        |
| 7               | Columna sin instrumentar                                 | 2        |
| 8               | Columna para empotramiento                               | 1        |
| 9               | Equipo de sujeción de las columnas y equipos de medición | 12       |

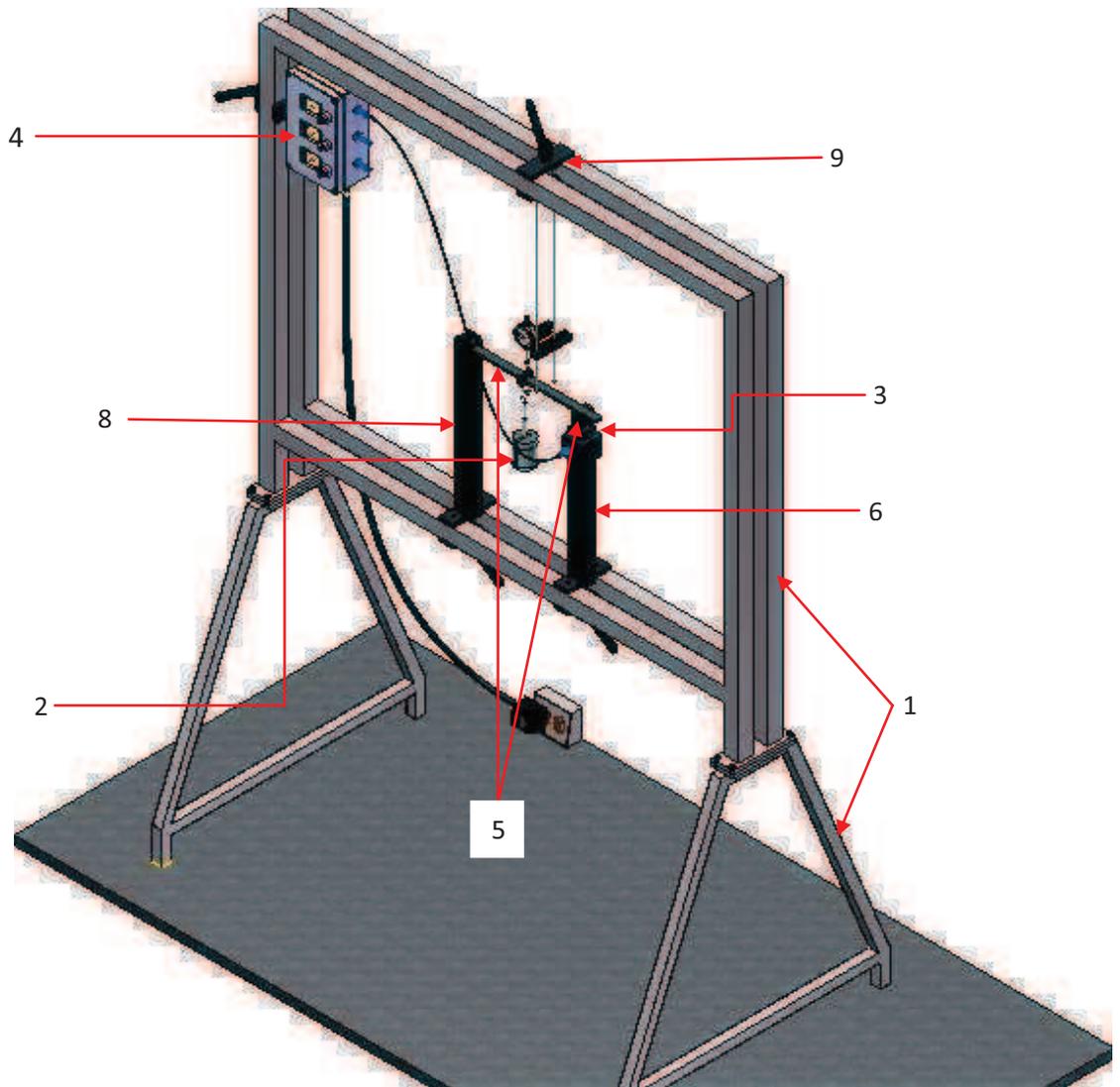


Figura 2.1 Componentes del equipo de flexión.

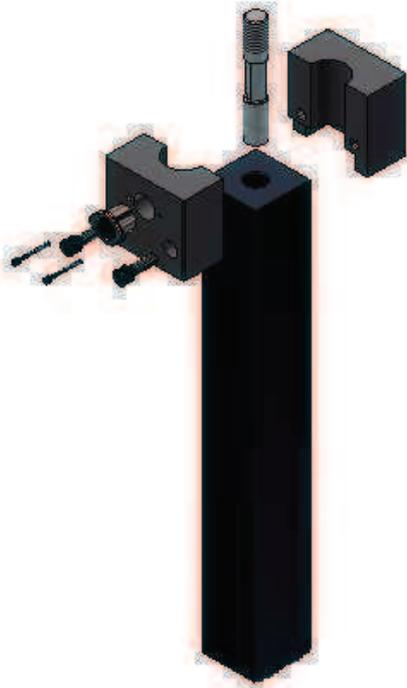


Figura 2.2 Detalle de ensamble de celda de carga



Figura 2.3 Detalle de ensamble del apoyo con rodamientos para columna sin instrumentación.

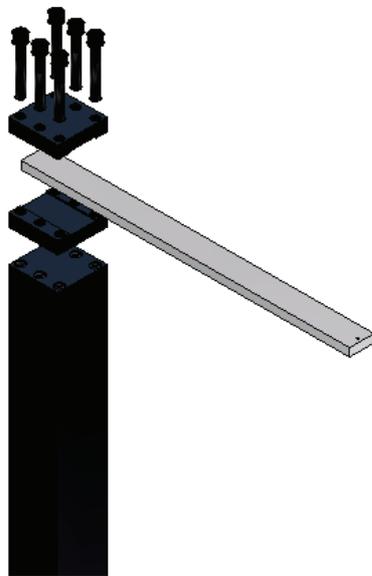


Figura 2.4 Detalle de ensamble de viga y soporte de viga tipo prensa.

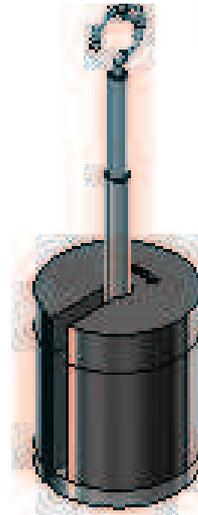


Figura 2.5 Aplicador de carga.



A continuación se presenta una descripción detallada de cada componente del equipo para pruebas flexión en la que se muestran los sub-ensambles correspondientes y su montaje en el equipo.

### 2.2.1 Bastidor principal.

La función principal del bastidor principal, es alojar a todos los elementos del equipo por lo que debe brindar la resistencia estructural suficiente para soportar las deformaciones debidas a las cargas que se aplican en las probetas de tal manera que los deslizamientos sean despreciables.

El bastidor principal, está formado por los elementos que se enlistan en la tabla 2.2 y que se muestran en la Figura 2.6. Así mismo, en la Figura 2.7 se muestran los detalles del ensamble de las partes.

**Tabla 2.2. Relación de partes componentes del bastidor principal que se muestran en la Figura 2.6.**

| No. Del componente | Nombre del componente | Cantidad |
|--------------------|-----------------------|----------|
| 10                 | Marco                 | 1        |
| 11                 | Soportes del marco    | 2        |
| 12                 | Tortillos             | 8        |

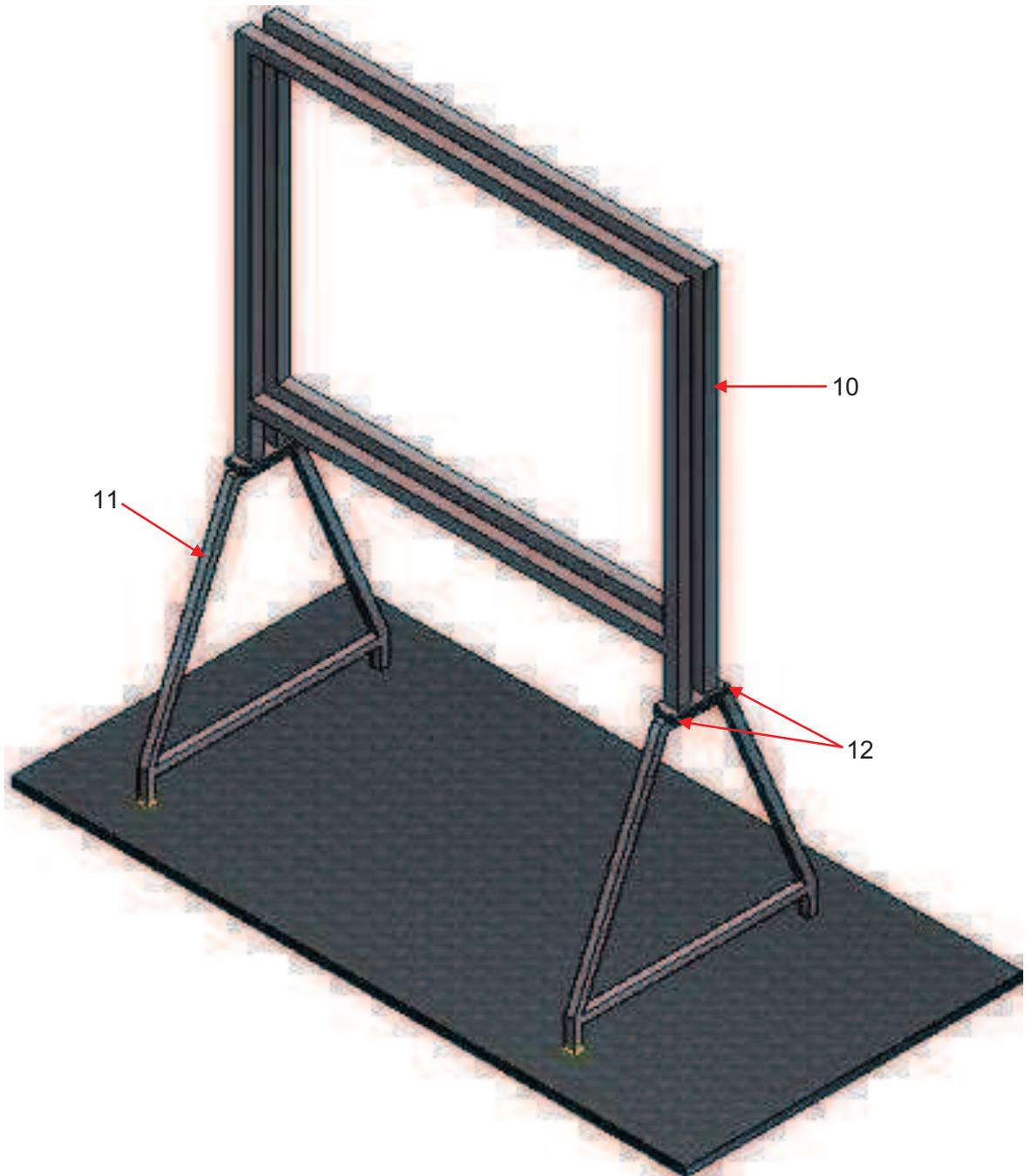


Figura 2.6 Bastidor principal.

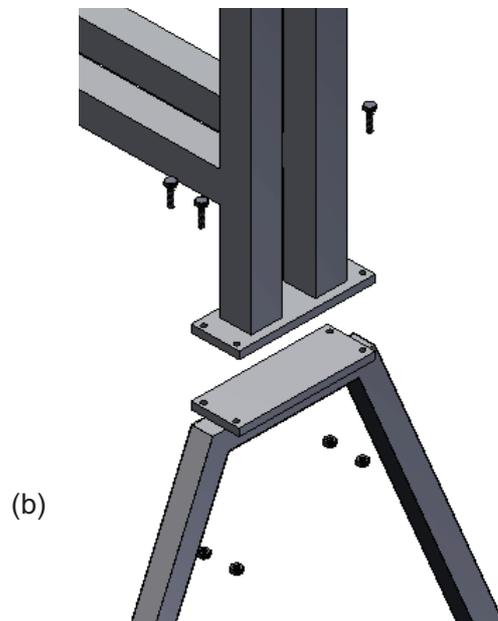
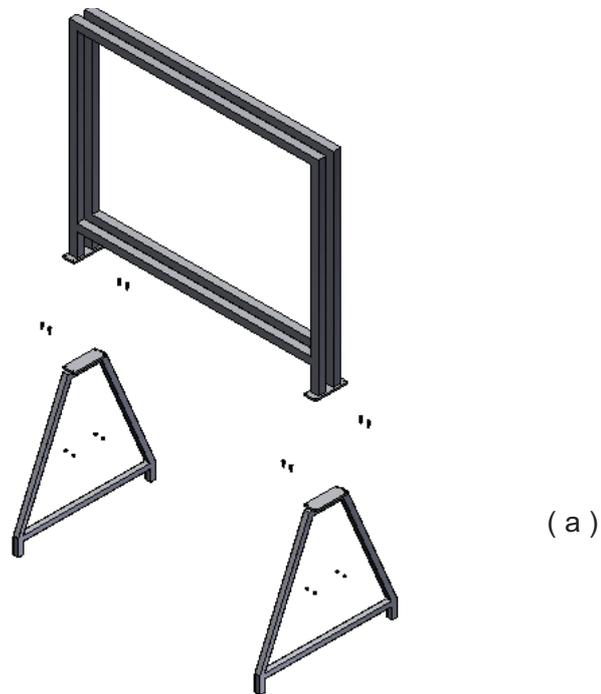


Figura 2.7 Bastidor principal (a) Ensamble de bastidor principal. (b) Detalle de ensamble del bastidor principal.



### 2.2.2 Aplicador de carga.

El aplicador de carga es una parte fundamental de este equipo ya que es donde se colocan las pesas que sirven para aplicar la carga que es necesaria para flexionar la probeta.

Este aplicador de carga está compuesto por un gancho que va atornillado a un poste que en su otro extremo se atornilla también a una pequeña placa circular donde se colocan una serie de pesas que sirven para flexionar la probeta. El gancho, con todo el conjunto se “engancha” a una mordaza que va montada en la probeta que se va a estudiar. Cabe destacar que como las cargas manejadas en los experimentos son pequeñas el aplicador de carga no necesita ser tan robusto.

El aplicador de carga, genera una fuerza vertical hacia abajo, que induce la flexión sobre la probeta.

En la Tabla 2.3, se muestra un listado de los componentes del aplicador de carga cuyo ensamble se puede apreciar en la Figura 2.8. Así mismo, en la Figura 2.9 se muestra el montaje del elemento en la probeta.

**Tabla 2.3. Relación de partes componentes de aplicador de carga que se muestra en la Figura 2.8.**

| No. del componente | Nombre del componente                                       | No. de piezas |
|--------------------|---|---------------|
| 13                 | Poste del aplicador de carga.                               | 1             |
| 14                 | Gancho de ensamble.   | 2             |
| 15                 | Base del aplicador de carga.                                | 1             |
| 16                 | Pesas   | 10            |
| 17                 | Dispositivo de sujeción del aplicador de carga a la probeta | 1             |

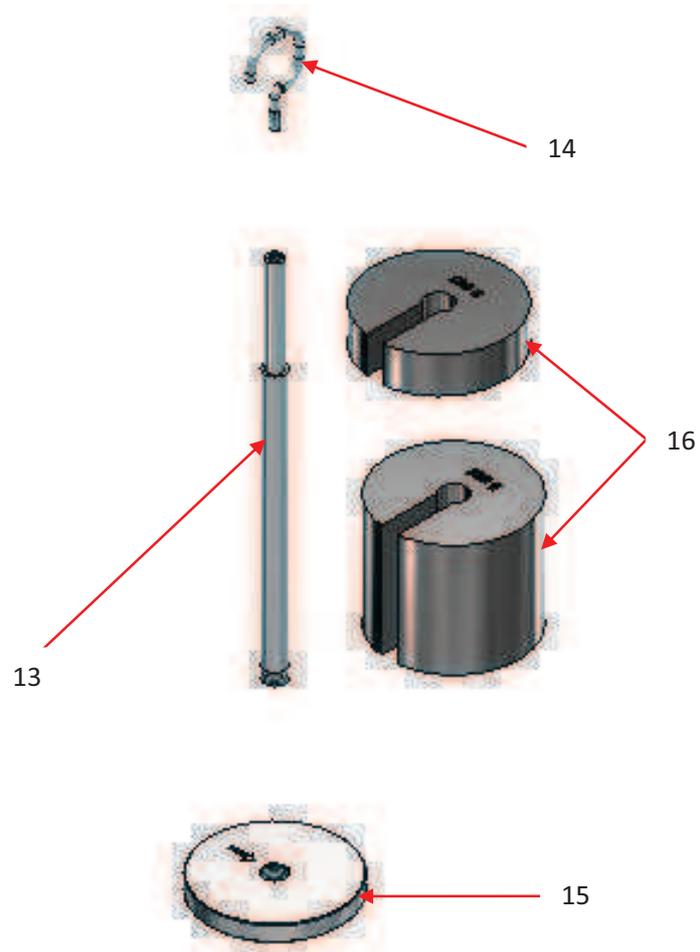


Figura 2.8 Ensamble a detalle del aplicador de carga.

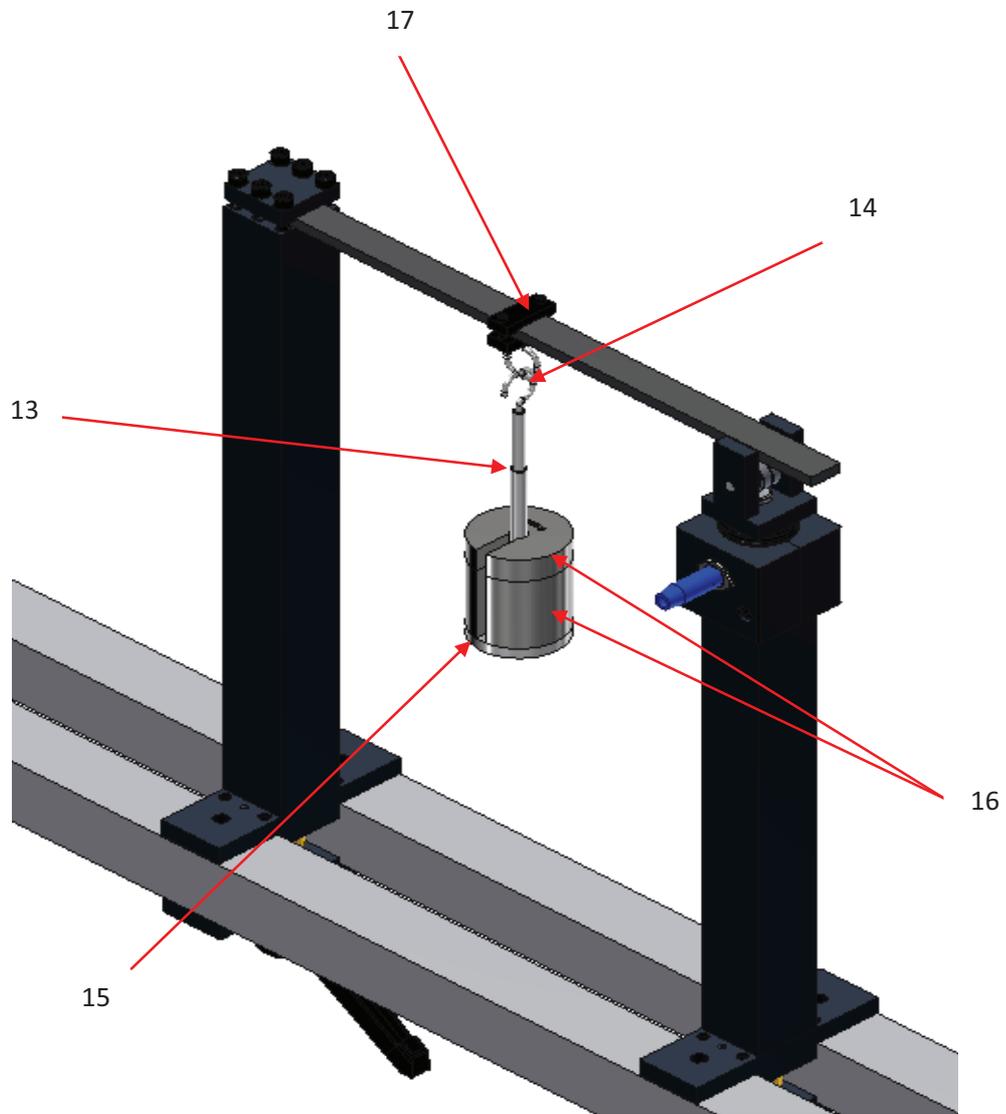


Figura 2.9 Montaje del aplicador de carga en la probeta.



### 2.2.3 Elementos de flexión

Se trata de un conjunto de barras de sección rectangular fabricadas en acero y aluminio en dos tamaños; uno para realizar pruebas en cantiléver y otras para simular una viga simplemente apoyada. Una probeta de cada tamaño y cada material fue instrumentada con galgas extensométricas en varios puntos en la parte superior e inferior a lo largo de su eje longitudinal.

Así mismo, éste sistema comprende tres tipos de apoyos que simulan las condiciones de los dos arreglos mencionados anteriormente, es decir, los apoyos simples y el empotramiento del arreglo en cantiléver.

Los elementos de flexión se describen en la Tabla 2.4 y se muestran en las Figuras de la 2.10 a la 2.14 donde se puede apreciar el montaje en el equipo para cada caso.

**Tabla 2.4. Relación que componen los elementos de flexión que se muestran en las Figuras 2.10 a la 2.14.**

| No. del componente | Nombre del componente                                | No. de piezas |
|--------------------|--|---------------|
| 18                 | Probeta instrumentada.                               | 4             |
| 19                 | Probeta de aluminio.                                 | 4             |
| 20                 | Apoyo con rodamientos para columna instrumentada.    | 2             |
| 21                 | Apoyo con rodamientos para columna sin instrumentar. | 2             |
| 22                 | Apoyo tipo prensa para simular empotramiento.        | 1             |

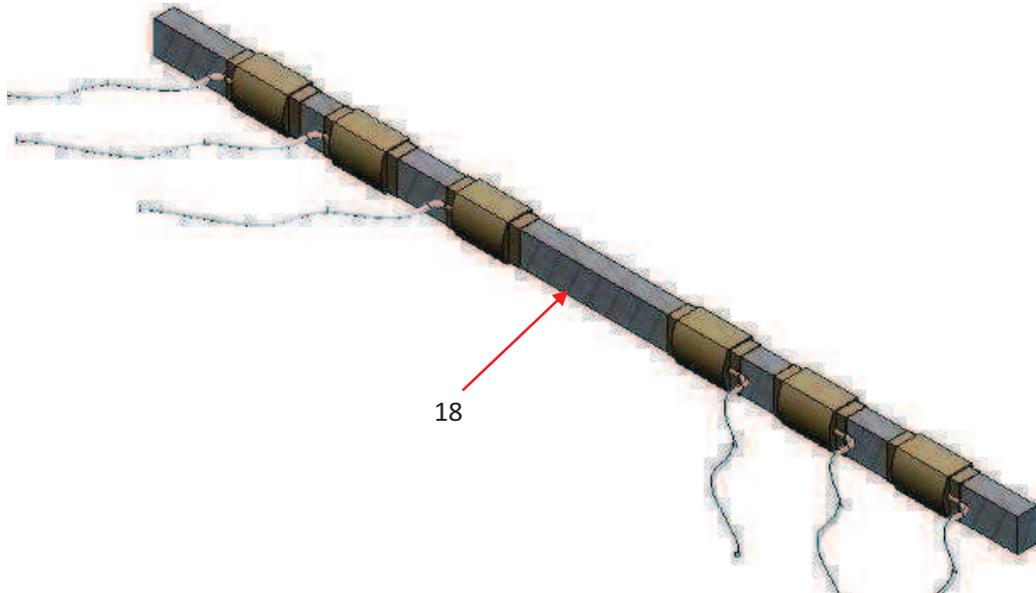


Figura 2.10 Probeta de acero instrumentada

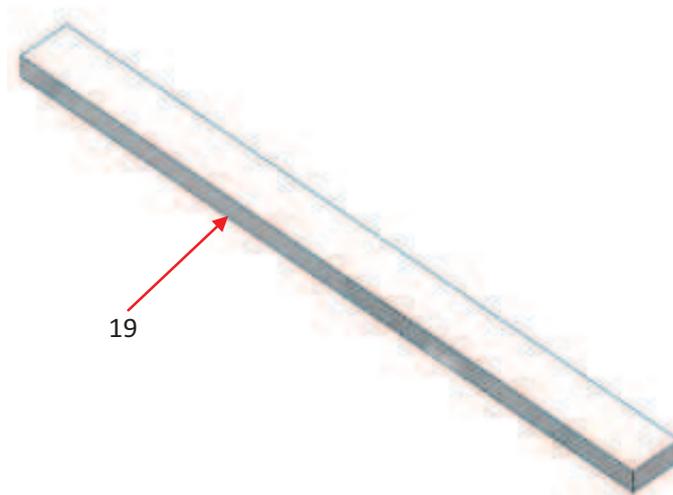


Figura 2.11 Probeta de aluminio.

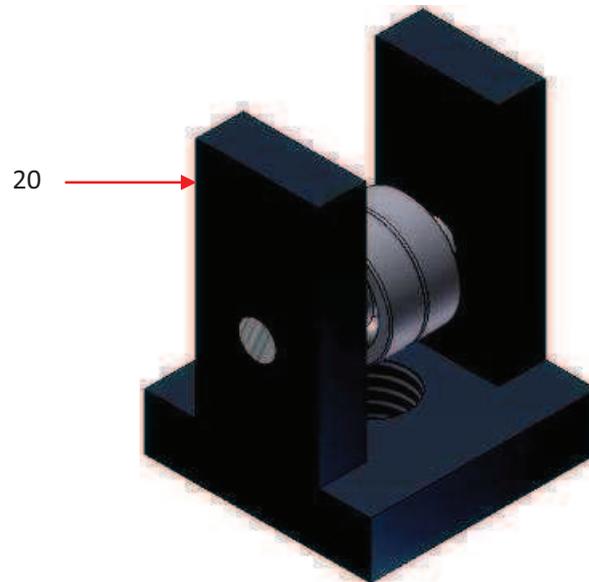


Figura 2.12 Apoyo con rodamientos para columna instrumentada.

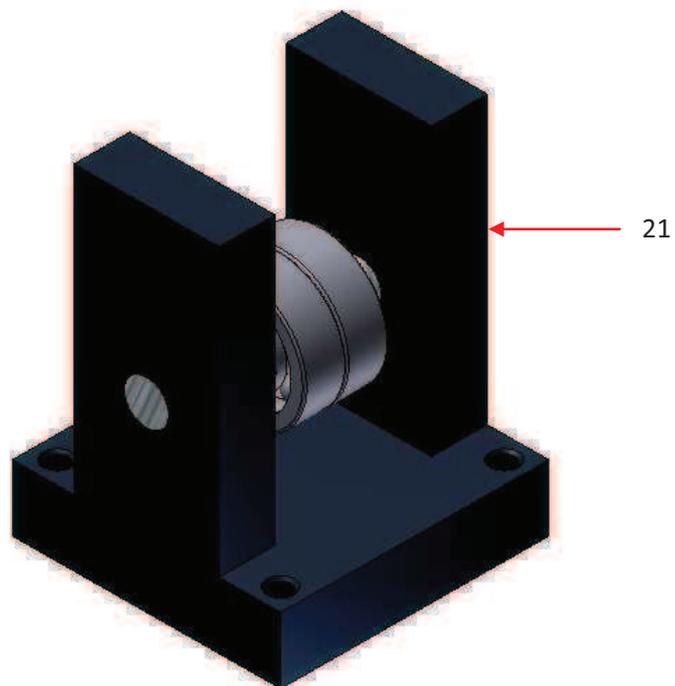


Figura 2.13 Apoyo con rodamientos para columna sin instrumentación.

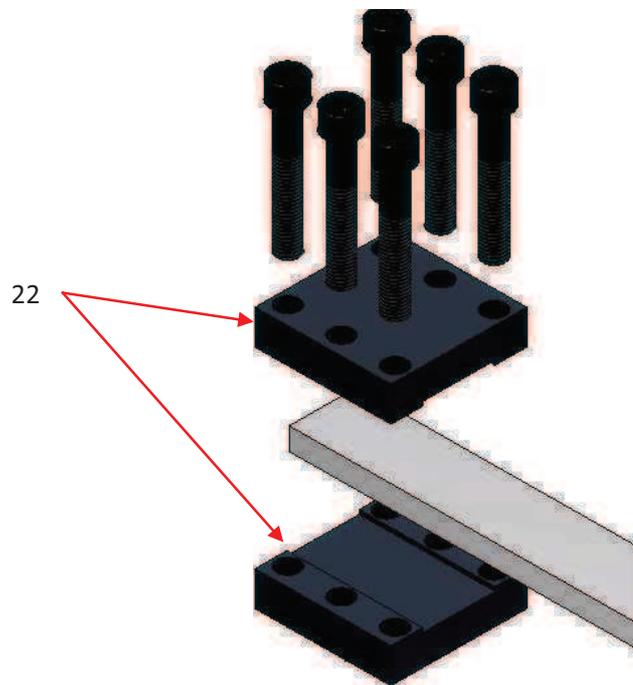


Figura 2.14 Apoyo tipo prensa para simular el empotramiento.

## 2.2.4 Columnas y apoyos de las probetas

El equipo para pruebas de flexión en vigas incluye un juego de columnas a las que van montados los apoyos que se describieron en la sección anterior, es decir, el tipo prensa para simular el empotramiento y los tipo patín, con y sin instrumentar, que simula apoyos simples. Dichas columnas soportan las probetas en estudio y se fijan al bastidor principal mediante elementos de sujeción tipo zapatas que se describen posteriormente.

En función de los tipos de apoyo que se montan en ellas, el equipo de flexión cuenta con tres tipos de columnas las cuales se describen a continuación.

### 2.2.4.1 Columna instrumentada.

Este tipo de columnas llevan montadas las celdas de compresión y acoplada a ella un apoyo tipo patín que permite simular la condición de viga simplemente apoyada. La celda de compresión va alojada en la columna en una cavidad y se mantiene en posición vertical mediante un tornillo prisionero. Alrededor de la celda de compresión se coloca una pieza cuadrada seccionada en dos partes que cubre a la celda y lleva



montado un conector que interconecta la celda de compresión con el instrumento de medición que se describe posteriormente.

En la figura 2.15 se muestra el ensamble de la columna instrumentada así como los componentes que se fijan a ella. Así mismo en la tabla 2.5 se presenta una relación de las partes componentes de la columna instrumentada que se indican en la Figura 2.15.

Tabla 2.5. Componentes de la columna instrumentada que se muestra en la Figura 2.15

| No de parte | Descripción del componente       | Número de piezas |
|-------------|----------------------------------|------------------|
| 6           | Columna instrumentada            | 2                |
| 24          | Protector de la celda            | 2                |
| 3           | Celda de compresión              | 2                |
| 20          | Apoyo para columna instrumentada | 2                |

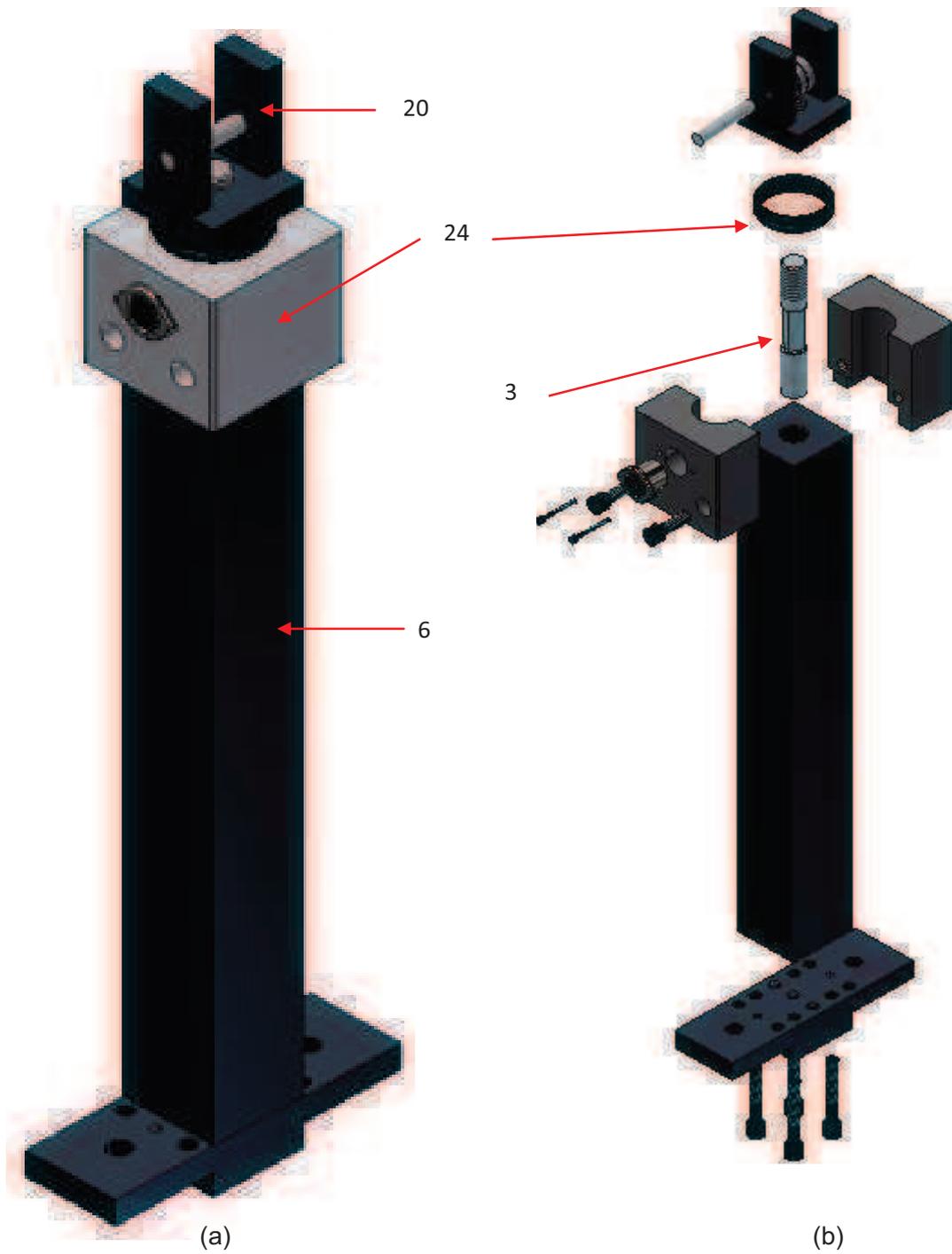


Figura 2.15 (a) Ensamble de los componentes de la columna instrumentada, (b) Explosivo de la columna instrumentada.



### 2.2.4.2 Columna sin instrumentar

Este elemento cumple la misma función que el elemento descrito en el párrafo anterior, es decir, permite simular apoyos simples para las vigas en estudio, sólo que en este caso no va instrumentado con la celda de compresión sino que lleva montado directamente el apoyo simple. Al igual que la columna instrumentada, la columna sin instrumentar se fija al bastidor principal mediante zapatas. En la Figura 2.16 (a) se muestra el ensamble de la columna para soporte de viga con rodamientos y en la Figura 2.16 (b) se muestra el ensamble a detalle de dicha columna. Así mismo, en la tabla 2.6 se presenta listan los componentes de la columna sin instrumentar.

Tabla 2.6. Componentes de la columna sin instrumentar que se muestra en la Figura 2.16

| No de parte | Descripción del componente                 | Número de piezas |
|-------------|--|------------------|
| 7           | Columna sin instrumentada                  | 2                |
| 21          | Apoyo simple para columna sin instrumentar | 2                |

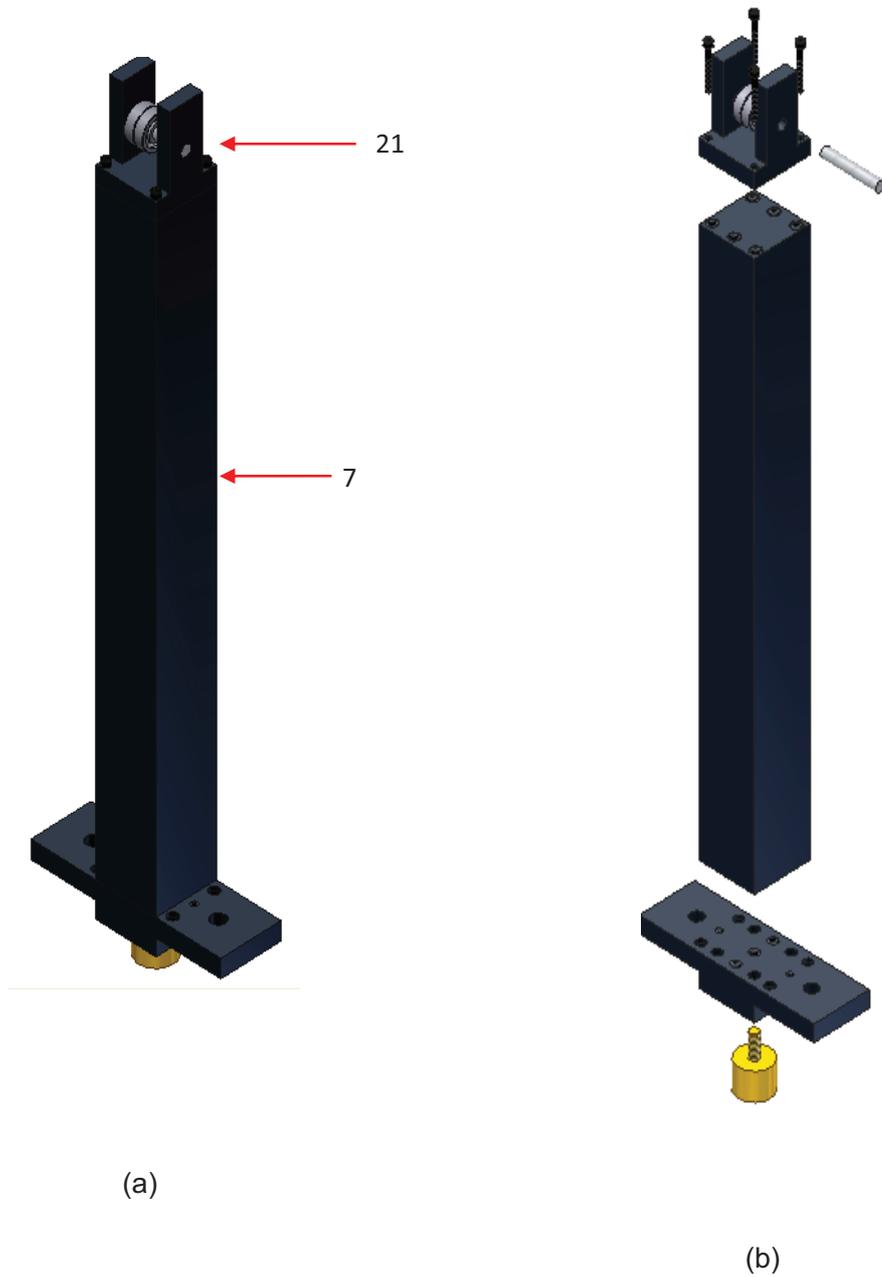


Figura 2.16 (a) ensamble de la columna sin instrumentar, (b) Explosivo de la columna sin instrumentar.



### 2.2.4.3 Columna para empotramiento.

Este elemento es la base en la que se monta el apoyo tipo empotramiento que se usa para simular el caso de una viga en cantiléver con carga puntual en su extremo libre así como en otro caso en el que se simula una viga estáticamente indeterminada. En la Figura 2.17 (a) se muestra el ensamble de la columna para empotramiento de viga en cantiléver mientras que en la Figura 2.17 (b) se muestra el ensamble a detalle de dicha columna. Así mismo en la tabla 2.7 se presenta una lista de los componentes de la columna con empotramiento.

Tabla 2.7. Componentes de la columna para empotramiento que se muestra en la Figura 2.17

| No de parte | Descripción del componente                          | Número de piezas |
|-------------|---|------------------|
| 8           | Columna para empotramiento                          | 1                |
| 19          | Probeta de aluminio                                 | 1                |
| 22          | Apoyo simple tipo prensa para simular empotramiento | 1                |

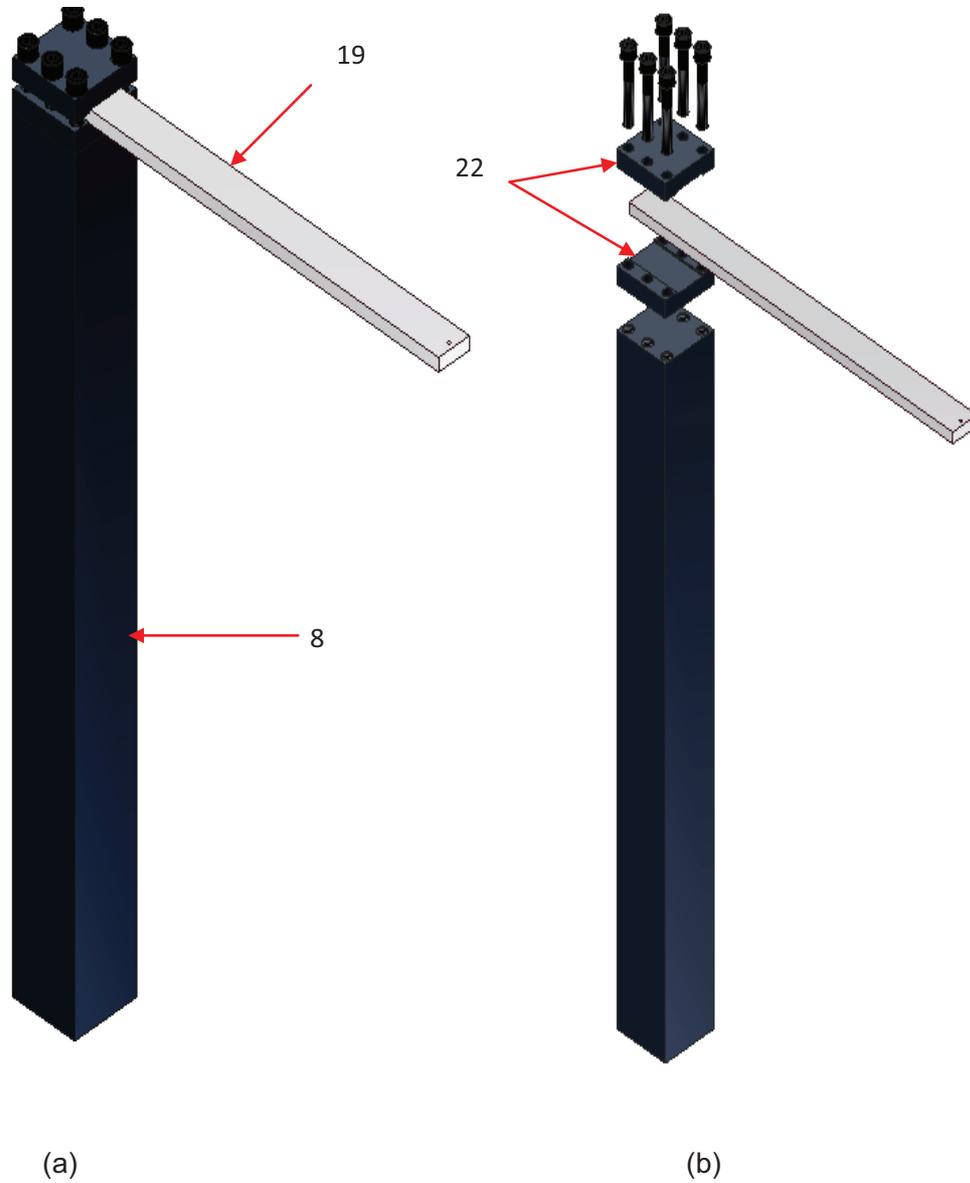


Figura 2.17 (a) Ensamble de la columna para empotramiento (b) Explosivo de la columna para empotramiento.



### 2.2.5 Celda de compresión

La celda de compresión es el elemento que permite medir las fuerzas de reacción en los apoyos simples. Se trata de una pequeña columna instrumentada con 4 galgas extensométricas interconectadas en un arreglo de puente de Wheatstone. La columna fue maquinada a partir de un redondo con una rosca en la parte superior que permite acoplarla al apoyo correspondiente y en la parte inferior se inserta en la columna instrumentada. En la parte central, fue maquinada una sección cuadrada para colocar las galgas extensométricas sin deformarlas como se muestra en la Figura 2.18.

El ensamble de la celda de compresión a la columna instrumentada se mostró en la Figura 2.15.

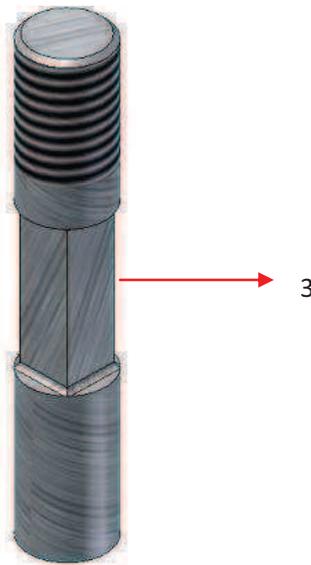


Figura 2.18 celda de compresión.

### 2.2.6 Medidor de carga

El equipo indicador cuenta con tres pantallas de silicio de 5 dígitos, además de tener una perilla de balanceo y ajuste por cada pantalla donde se presentan los valores en Newton. El equipo se alimenta con 12V de AC y recibe la señal de tres celdas de compresión mediante conectores tipo DIM. En la Figura 2.19 se muestra el medidor de carga montado al bastidor principal.

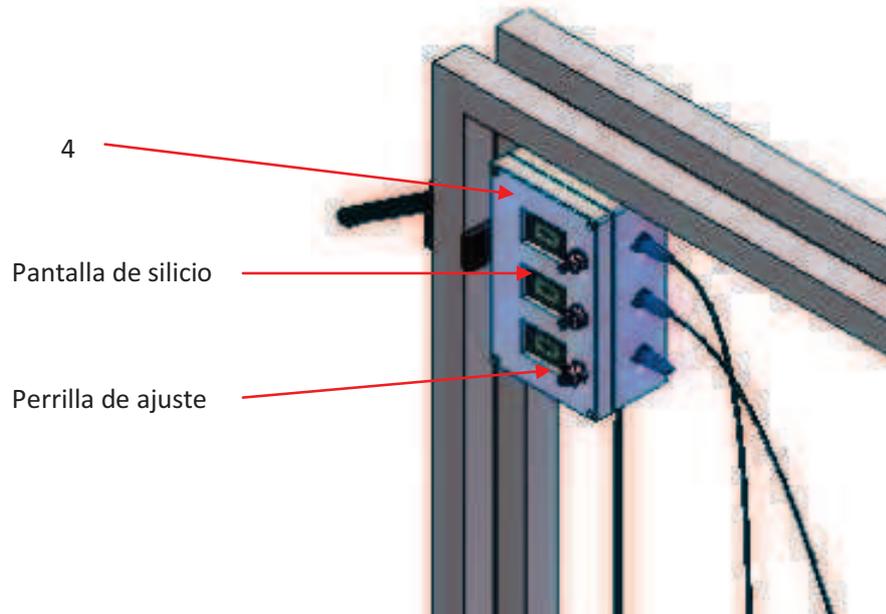


Figura 2.19 Medidor de carga.

### 2.2.7 Elementos de sujeción de postes y equipos de medición

La función principal de estos elementos es la de fijar tanto las columnas como los equipos de medición que son necesarios en cada una de las practicas al marco de montaje y con ello no permitir ningún deslizamiento entre el marco de montaje y los distintos elementos a sujetar. Estos elementos se enlistan y muestran en las Figuras 2.20, 2.21, 2.22 y 2.23.



Tabla 2.7. Elementos de sujeción de columnas y equipos de medición que se muestra en la Figura 2.20 a 2.23

| No de parte | Descripción del componente | Número de piezas |
|-------------|----------------------------|------------------|
| 27          | Soporte universal          | 10               |
| 28          | Buje                       | 10               |
| 29          | Soporte liso               | 10               |
| 30          | Manija de apriete          | 10               |

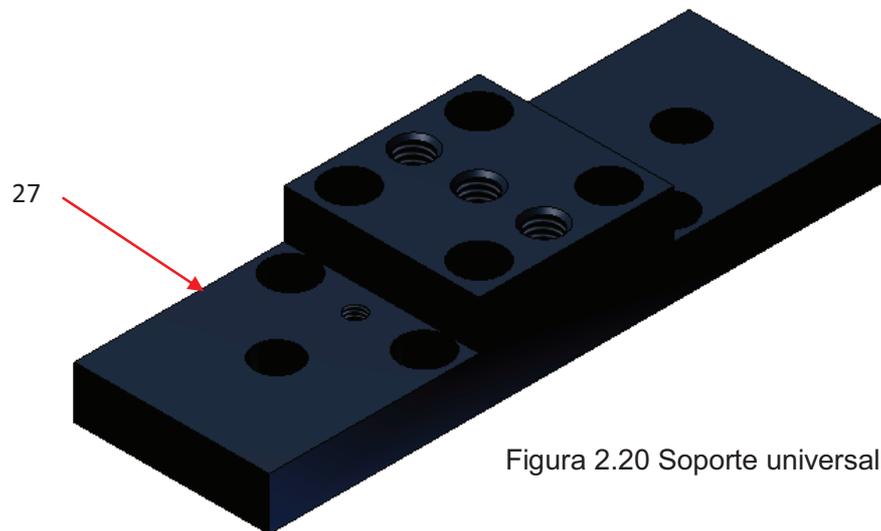


Figura 2.20 Soporte universal

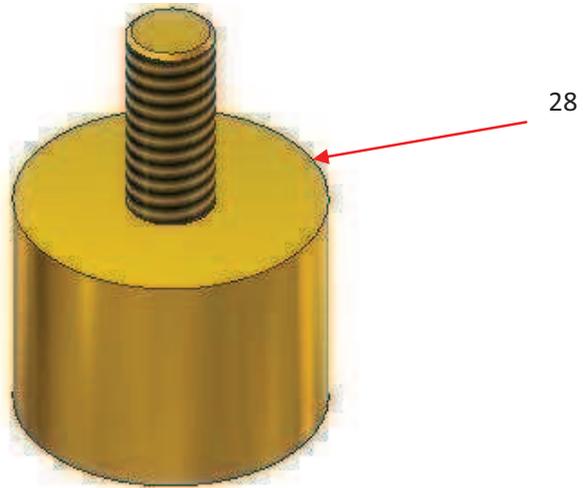


Figura 2.21 Buje

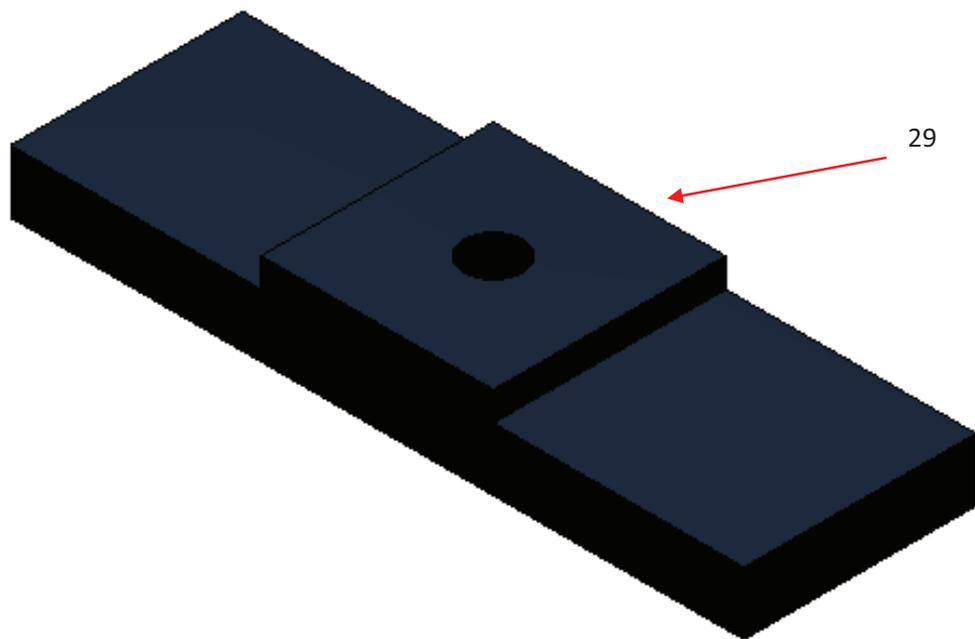


Figura 2.22 Soporte liso

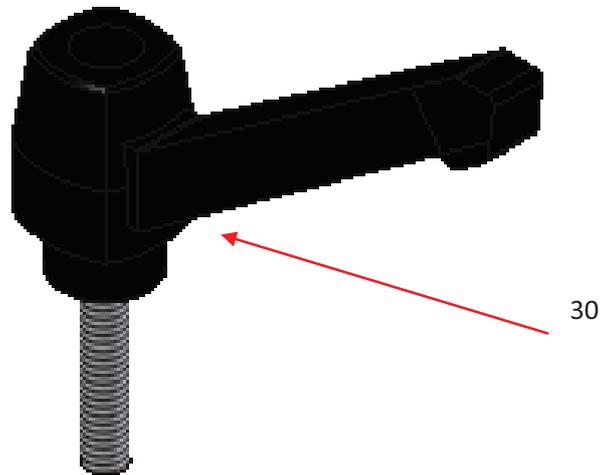


Figura 2.23 Manija de apriete

Estos elementos se ensamblan de la siguiente manera: en la parte superior del marco de montaje se coloca el soporte universal en el cual se atornilló previamente el buje. Una vez atornillado el buje, por la parte de abajo se coloca el soporte liso el cual se sujeta por medio de la manija de apriete hasta que no exista movimiento alguno. En la Figura 2.24 se muestra el ensamble a detalle de estos elementos. Cabe mencionar que antes de colocar el soporte universal se debe fijar al mismo el elemento que se desea montar.

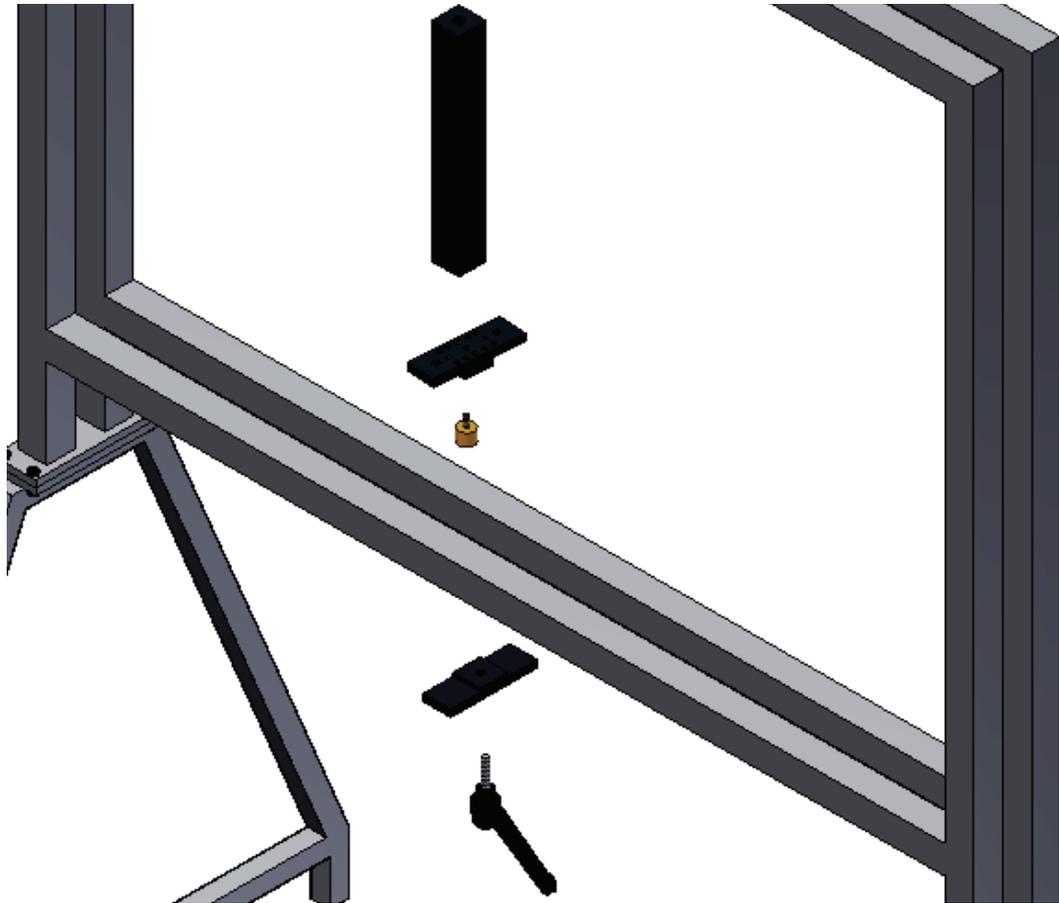


Figura 2.24 ensamble a detalle de los elementos de sujeción.

### 2.3.- Diseño de detalle

En este apartado se presentan los cálculos que fueron realizados para determinar las dimensiones de cada uno de los elementos mecánicos que componen el equipo de flexión. El objetivo fundamental de este apartado es determinar de la carga máxima y el esfuerzo máximo que pueden soportar cada uno de los elementos del equipo de flexión en vigas y las medidas de precaución que deben tomarse para asegurar su buen funcionamiento. Para realizar los cálculos fueron empleadas formulas de diseño disponibles en manuales y libros de ingeniería tanto de resistencia de materiales como de diseño de elementos de máquinas.



### 2.3.1.- Memoria de cálculo

Los cálculos de esta sección se realizaron en las partes críticas del equipo de flexión, considerando que estarán sometidas a tensión o compresión, donde se podrán sufrir fallas debidas a los esfuerzos generados en cada uno de los elementos. Se tomara de todos los resultados obtenidos el menor valor para considerar en el diseño la máxima carga que se podrá aplicar sobre la probeta. En cada caso se muestran las figuras de los elementos analizados, resaltando el material y sus propiedades que se utilizo para su fabricación. Cabe destacar que cuando se analizan dos miembros de diferente material se toman las propiedades del que tiene menor resistencia última. Así mismo se eligió un factor de seguridad de 4, debido a que será un equipo utilizado por gran variedad de alumnos y tomando en cuenta que existen más riesgos de sobrecargar el equipo en un laboratorio.

Se emplean entonces las relaciones de factor de seguridad dado por

$$F_s = \frac{\sigma_y}{\sigma_{adm}} \quad (2.1)$$

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{F_s}$$

Donde:

$F_s$  = Factor de seguridad

$\sigma_{adm}$  = Esfuerzo admisible

$\sigma_y$  = Esfuerzo a la cedencia

#### 2.3.1.1 Probeta

La probeta se puede observar en la Figura 2.25 en donde claramente se observa que se encuentra sujeta a flexión, por otro lado cabe mencionar que existen dos probetas fabricadas de distinto material (acero y aluminio), por lo que, para estos cálculos se emplearon las propiedades del aluminio, para este caso el cálculo de la probeta se muestra a continuación.

Cálculos para la viga que se utilizara en el experimento de la viga en cantiléver mostrada en la figura 2.25:

$$\sigma = \frac{F l y}{I} \quad (2.2)$$

para este caso:



$$y = \frac{h}{2},$$

$$I = \frac{b h^3}{12}$$

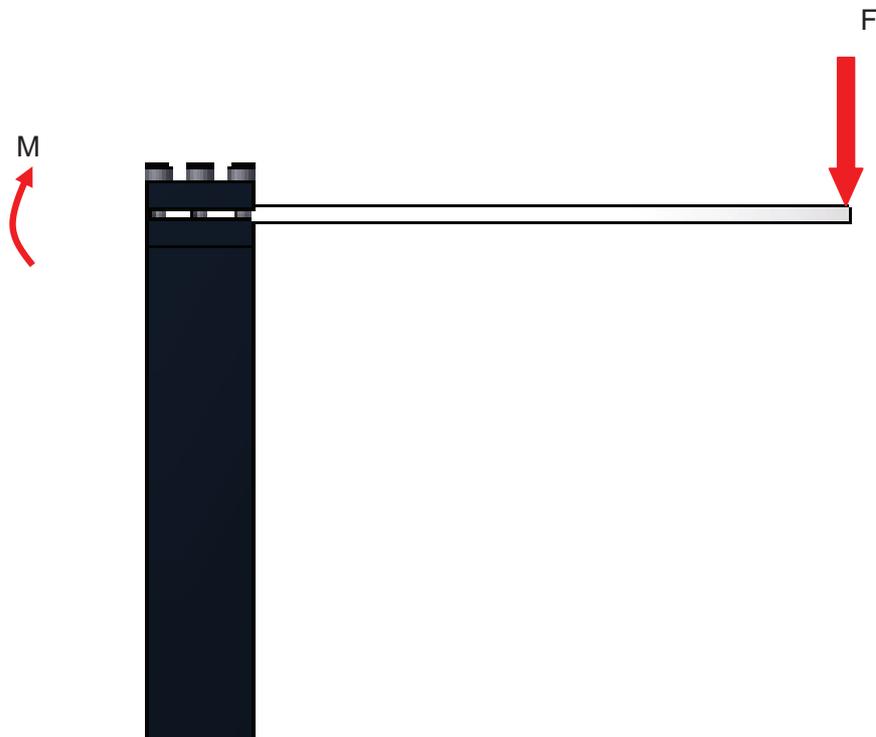


Figura 2.5 Diagrama de cuerpo libre para el análisis de la probeta en el experimento de la viga en cantiléver.

donde:

$l$  = longitud de la viga.

$h$  = espesor de la viga.

$b$  = ancho de la viga.

$F$  = fuerza crítica que soporta la viga.

$I$  = momento de inercia de la viga.

Utilizando la ecuación (2.1) con:

$$I = 533.4 \times 10^{-3} \text{m}$$



$$h = 12.7 \times 10^{-3} \text{m}$$

$$b = 22.225 \times 10^{-3} \text{m}$$

$$\sigma_{\text{aluminio}} = 70 \text{ MPa}$$

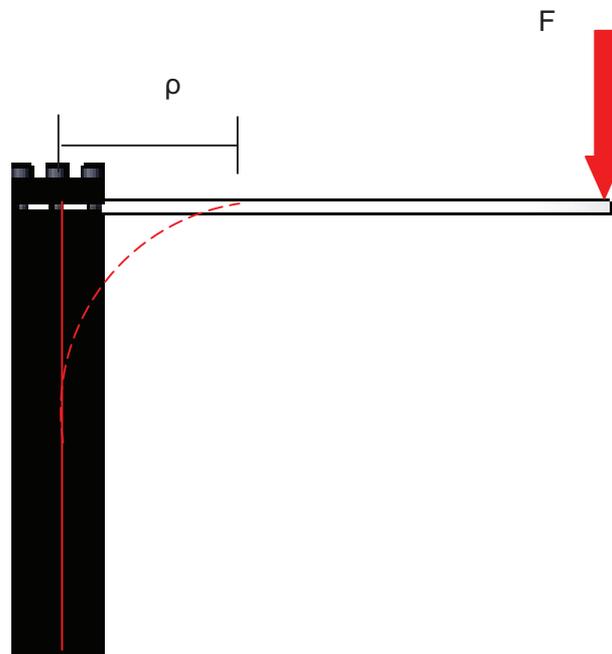
$$F = \frac{\sigma_{\text{aluminio}} b h^2}{6 l}$$

$$F = \frac{(70 \times 10^6 / 2 \text{ Pa})(22.225 \times 10^{-3} \text{m})(12.7 \times 10^{-3})^2}{6(533.4 \times 10^{-3})}$$

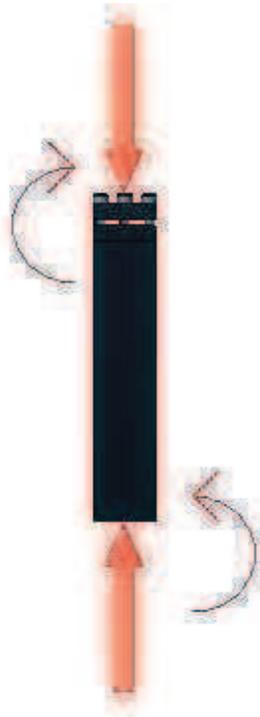
$$F = 39.202 \text{ N}$$

### 2.3.1.2 Columna para empotre de viga en cantiléver.

Esta columna se aprecia claramente en la figura 2.26 y la analizaremos como una columna empotrada en la parte inferior y libre en la parte superior con carga excéntrica ya que la carga que se aplica no se encuentra alineada con su eje longitudinal, por tanto:



(a)



(b)

Figura 2.26 Diagramas de cuerpo libre para el análisis de la columna para empotre de viga en cantiléver.

La deflexión es

$$y = A \sin(Kx) + B \cos(Kx) - e \quad (2.4)$$

El desplazamiento es

$$\rho = e \sec\left(\frac{KL}{2}\right) - e \quad (2.5)$$

En donde para este caso:

$$K = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

$$K = \sqrt{\frac{\sigma_0 b h^2}{6 l E I}} \quad (2.6)$$



Utilizando la ecuación (2.5) con:

$$\sigma_0 = 70 \text{ MPa}$$

$$b = 38.1 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$h = 38.1 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$l = 0.385 \text{ m}$$

$$E = 70 \times 10^9$$

$$e = 514.35 \times 10^{-3}$$

$$\rho = e \sec \left[ \frac{\left( \sqrt{\frac{\sigma_0 b h^2}{6 l E I}} \right) L}{2} \right] - e \quad (2.7)$$

$$\rho = (514.35 \times 10^{-3}) \sec \left[ \frac{\left( \sqrt{\frac{(70 \times 10^6)(38.1 \times 10^{-3})(38.1 \times 10^{-3})^2}{(6)(0.385)(70 \times 10^9) \left( \frac{(38.1 \times 10^{-3})(38.1 \times 10^{-3})^3}{12} \right)}} \right) (0.385)}{2} \right] - 514.35 \times 10^{-3}$$

$$\rho = 395.774 \times 10^{-9} \text{ m}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{comp} + \sigma_{flexión} \quad (2.8)$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \left[ P_e \sec \left( \frac{KL}{2} \right) \right] \frac{h}{I} \quad (2.9)$$



$$\sigma_{max} = \frac{39.202}{(38.1 \times 10^{-3})^2} + \left[ 39.202 \sec \left( \frac{\sqrt{\frac{(70 \times 10^6)(38.1 \times 10^{-3})(38.1 \times 10^{-3})^2}{(6)(.385)(70 \times 10^9) \left( \frac{(38.1 \times 10^{-3})(38.1 \times 10^{-3})^3}{12} \right)}}{2}} \right) (.385) \right] \left( \frac{38.1}{\left( \frac{(38.1 \times 10^{-3})(38.1 \times 10^{-3})^3}{12} \right)} \right)$$

$$\sigma_{max} = 4266194.532 Pa$$

Utilizando la ecuación (2.1)

$$FS = \frac{\sigma_y}{\sigma_{adm}}$$

$$FS = \frac{70 \times 10^6 Pa}{4266194.532 Pa}$$

$$FS = 16.408$$

### 2.3.1.3 Columna para soporte de celda de compresión.

Esta columna se aprecia claramente en la Figura 2.27 y la analizaremos como una columna empotrada en la parte inferior y libre en su parte superior, por tanto se calcula el esfuerzo para la columna:

$$\sigma = \frac{F}{A_{poste}} \quad (2.10)$$

$$\sigma = \frac{39.202 N}{(38.1 \times 10^{-3} m)^2}$$

$$\sigma = 27005.876 Pa$$



$$\sigma_{max} = \sigma \left[ 1 + \frac{e h}{k^2} \sec \left( \frac{L}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{E k^2}} \right) \right] \tag{2.11}$$

$$\sigma_{max} = [27005.876 Pa]$$

$$\left[ 1 + \frac{(247.65 \times 10^{-3} m)(38.1 \times 10^{-3} m)}{\frac{156.85 N}{(70 \times 10^9) \left( \frac{(38.1 \times 10^{-3})(38.1 \times 10^{-3})^3}{12} \right)}} \sec \left[ \frac{385.7 \times 10^{-3}}{2} \right] \sqrt{\frac{108052.4383}{(70 \times 10^9) \frac{156.85 N}{(70 \times 10^9) \left( \frac{(38.1 \times 10^{-3})(38.1 \times 10^{-3})^3}{12} \right)}}} \right]$$

$$\sigma_{max} = 148011.8723 Pa$$

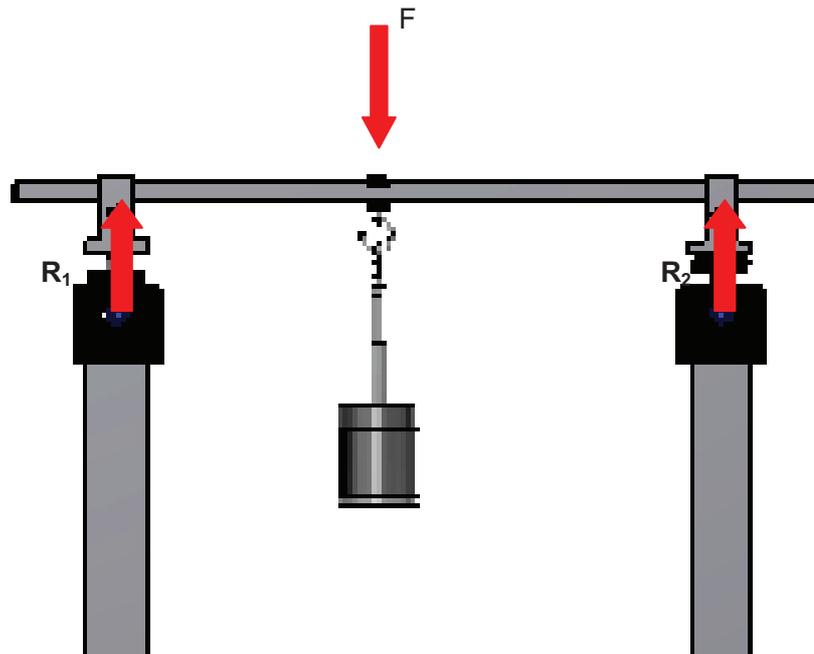


Figura 2.27 Diagrama de cuerpo libre para el análisis de la columna para soporte de celda de compresión



### 2.3.1.4 Celda de compresión.

La celda de carga está diseñada para soportar las cargas críticas que se generan en el experimento de la viga simplemente apoyada. Para el análisis de la celda se tomara como referencia la carga máxima que puede soportar la probeta de aluminio ya que es el elemento más crítico de todo el equipo. La celda de compresión se puede observar en la Figura 2.28.



Figura 2.28 Diagrama de cuerpo libre para el análisis de la celda

De la ecuación (2.10) con

$$\sigma = \frac{F}{A_{celda}}$$

$$\sigma = \frac{39.202N}{(92.583 \times 10^{-4}m)^2}$$

$$\sigma = 457346.885Pa$$

De la ley de Hooke, se obtienen las deformaciones teóricas entonces tenemos.

$$\epsilon = \frac{\sigma_{celda}}{E_{celda}} = \frac{F}{E_{celda}A_{celda}} \quad (2.12)$$

De la ecuación (2.12) con:

$$E_{celda} = 70 \times 10^9 Pa$$



$$\epsilon = \frac{39.202N}{(70 \times 10^9 Pa)(92.583 \times 10^{-4} m)^2}$$

$$\epsilon = 6.533 \times 10^{-6}$$

La máxima deformación y la carga máxima que resistirá la celda se calcula con el valor del esfuerzo de cedencia del aluminio, es decir,

$$\sigma_y = 230 \times 10^6 Pa$$

Entonces con la ecuación (2.12) tenemos:

$$\epsilon = \frac{230 \times 10^6 Pa}{70 \times 10^9 Pa}$$
$$\epsilon = 3285.71 \times 10^{-6}$$

Y para la carga máxima, se despeja la fuerza de la ecuación (2.12) y obtenemos:

$$P_{max} = (3285.71 \times 10^{-6})(70 \times 10^9 Pa)(92.583 \times 10^{-4} m)^2$$

$$P_{max} = 19714.68 N$$

Esta carga es la carga máxima que soporta la celda de carga lo que indica que al realizar en experimento de la viga simplemente apoyada no cederá el transductor.

### 2.3.1.5 Tornillo sujetador de postes

Este tornillo esta ensamblado a una manija la cual nos permite un mejor manejo y un rápido apriete a la hora de montar los postes y los equipos de medición al marco, para el análisis de este tornillo se analizara como una viga en cantiléver como se muestra en la Figura 2.29 con esto podremos determinar la fuerza máxima que resiste el tornillo al aplicar la carga que se calculó para el experimento de la viga en cantiléver.

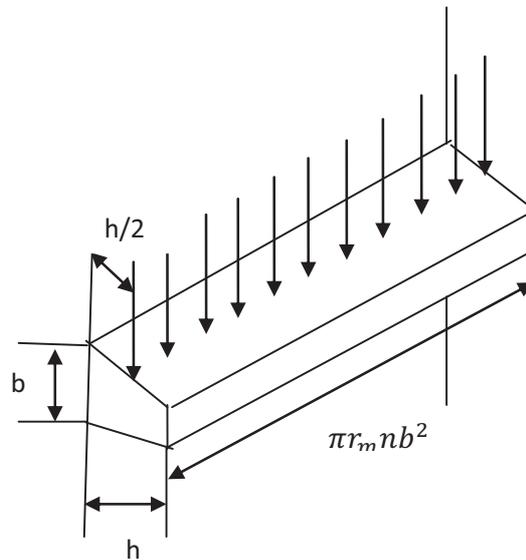


Figura 2.29 Diagrama de fuerzas para el análisis del tornillo

$$F = \frac{2\sigma_u \pi r_m n b^2}{3h} \quad (2.13)$$

Utilizando la ecuación (2.13) con:

$$h = 1.9 \times 10^{-3} m$$

$$r = 4.76 \times 10^{-3} m$$

$$b = 1.95 \times 10^{-3} m$$

$$r_m = 4.71 \times 10^{-3} m$$

$$n = 629.92 \text{ hilos por metro}$$

$$F = \frac{(2)(\pi)(70 \times 10^6 Pa)(4.71 \times 10^{-3} m)(629.92 \text{ hilos por metro})(1.95 \times 10^{-3} m)^2}{(3)(1.9 \times 10^{-3} m)}$$

$$F = 870519.6525 N$$

$$F = \bar{\sigma} A$$



$$F = \frac{2 M_{max} r \frac{\pi r^2}{2}}{l}$$

$$F = \frac{2 F l r \frac{\pi r^2}{2}}{\frac{\pi r^4}{4}}$$

$$F = \frac{2 F l r \pi r^2}{\frac{\pi r^4}{4}}$$

$$F = \frac{(4)(39.202N)(25.4x10^{-3})}{4.76x10^{-3}}$$

$$F = 836.748 N$$

# CAPÍTULO III

---

## RESULTADOS DEL DISEÑO



### 3.1. Descripción del prototipo.

A continuación se presenta el prototipo del equipo de pruebas de flexión en vigas con todos sus componentes cuyo diseño se mostró en el capítulo anterior. Para facilitar la presentación de los elementos, se mostraran algunos sub ensambles que brindan detalles importantes sobre la construcción del equipo. Las dimensiones de cada una de las piezas que conforman cada ensamble así como las especificaciones de los materiales, se detallan en los planos que se muestran en el apéndice 1.

En la tabla 3.1 se muestra una relación de las piezas que componen el equipo para pruebas de flexión así como el número de plano, en el apéndice 1, en el que se dan sus dimensiones.

| Nombre de la pieza                                  | No. de plano |
|---|--------------|
| Bastidor principal                                  | 1            |
| Poste aplicador de carga                            | 2            |
| Gancho de ensamble                                  | 2            |
| Base del aplicador de carga                         | 3            |
| Pesas 2 y 5 newtons                                 | 3            |
| Prensa de sujeción del aplicador de carga           | 4            |
| Protector externo del transductor                   | 5            |
| Probeta de aluminio                                 | 6            |
| Probeta de acero                                    | 6            |
| Apoyo con rodamientos para columna instrumentada    | 7            |
| Apoyo con rodamientos para columna sin instrumentar | 7            |
| Soporte de viga tipo prensa                         | 8            |
| Soporte universal                                   | 8            |
| Columna instrumentada                               | 9            |
| Columna para empotramiento                          | 9            |



|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| Columna sin instrumentar           | 10 |
| Soporte liso                       | 10 |
| Buje                               | 11 |
| Manija                             | 12 |
| Soporte para el equipo de medición | 13 |

### 3.1.1. Bastidor principal.

Como se menciona en el Capítulo 2 el bastidor principal, que se muestra en la Figura 3.1, está formado por: un marco de montaje y un soporte. El marco de montaje fue fabricado a partir de un perfil cuadrado de 1 ½ pulg. dividido en 8 secciones soldadas, también se le soldaron dos secciones de ángulo y dos placas esto con el fin de darle una mayor rigidez. Por otra parte, el soporte de marco de montaje fue fabricado a partir de un perfil cuadrado de 1 ¼ pulg dividido en cuatro secciones soldadas como se muestra en la Figura 3.1., tanto el marco de montaje como el soporte del marco de montaje están unidos por 8 tornillos de cabeza hexagonal de ¼ x 1 pulg.



Figura 3.1. Marco de montaje y soporte del marco de montaje.



### 3.1.2. Aplicador de carga.

El aplicador de carga que se muestra en la Figura 3.2., ésta formado de los siguientes componentes:

- a) Un poste aplicador de carga.
- b) Dos ganchos de ensamble.
- c) Una base del aplicador de carga.
- d) Pesas de dos y cinco Newtons.
- e) Una prensa de sujeción del aplicador de carga.

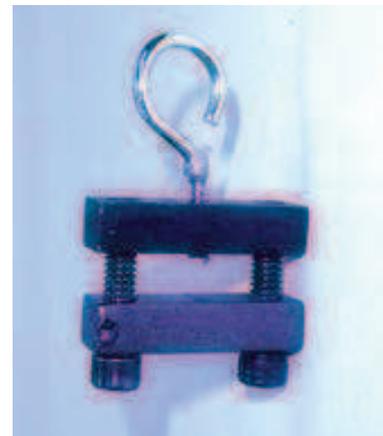


Figura 3.2. Aplicador de carga.



El poste del aplicador de carga fue fabricado de una varilla de acero 1018, en la parte superior de la varilla se maquinó una cuerda interna en donde se ensambla el gancho. Por otro lado, en la parte inferior del poste del aplicador de carga se elaboró una cuerda externa la cual nos permite ensamblar el poste con la base. El gancho de ensamble fue elaborado a partir de una varilla la cual se dobló hasta obtener la geometría deseada, en un extremo del gancho se maquinó una cuerda la cual nos permite ensamblar el gancho con el poste. La base del aplicador de carga fue fabricada a través de una barra redonda de acero 1018 la cual fue cortada hasta llegar a la geometría que se observa en la Figura 3.2. La base tiene un barreno en el centro el cual nos permite ensamblar la base con el poste. Las pesas fueron fabricadas a partir de una barra redonda de la cual se cortó según el espesor que se necesitaba pues en este caso se ocupan pesas de 2 y 5 Newtons. La prensa de sujeción del aplicador de carga fue fabricada a partir de un perfil de aluminio. Cabe señalar que todas las piezas del aplicador de carga fueron cromadas para protegerlas del mal manejo de los usuarios, de la corrosión del medio ambiente así como para dar estética al prototipo.

### 3.1.3. Celda de carga.

La celda de carga consiste esencialmente de un elemento metálico tipo columna de 0.5 pulg de diámetro por 2.5 pulg de largo en el cual en su parte central se maquinó una sección rectangular. Esta columna fue fabricada en dura-aluminio para lograr mayor resistencia, mayor esfuerzo de cedencia, que la de un aluminio convencional pero conservando su bajo módulo elástico. La parte rectangular de esta columna fue instrumentada con cuatro galgas extensométricas colocadas en un arreglo de puente completo de Wheatstone, Figura 3.3. Una vez instrumentado el circuito en la parte rectangular de la probeta, se colocan cuatro cables para conectar la celda al dispositivo de registro y se protege adecuadamente para evitar daños a la celda.



Figura 3.3. Celda de carga



El protector externo del transductor Figura 3.4. es un cubo fabricado en naylamid en dos partes para facilitar su manejo. Este elemento, permite garantizar que el transductor no sufrirá daño por golpes o descuidos durante la operación del equipo.



Figura 3.4. Protector de celda de carga

### 3.1.4. Elementos para las pruebas de flexión y apoyos.

Los elementos de prueba o probetas, son básicamente vigas largas fabricadas en aluminio y acero, instrumentadas con 4 celdas de carga, en la Figura 3.5. se muestra la probeta de aluminio instrumentada con cuatro celdas de carga, la probeta de acero sin instrumentar se muestra en la Figura 3.6.

Por otro lado, en la Figura 3.7. se muestra el apoyo con rodamientos para columna instrumentada mientras que en la Figura 3.8. se muestra el apoyo con rodamientos para columna sin instrumentar. Así mismo en la Figura 3.9. se muestra el soporte de viga tipo prensa. Estos soportes fueron fabricados en aluminio comercial y protegidos contra el maltrato o la corrosión por medio de pintura automotriz de color negro, se utilizan en los distintos experimentos que se puede realizar con el equipo.

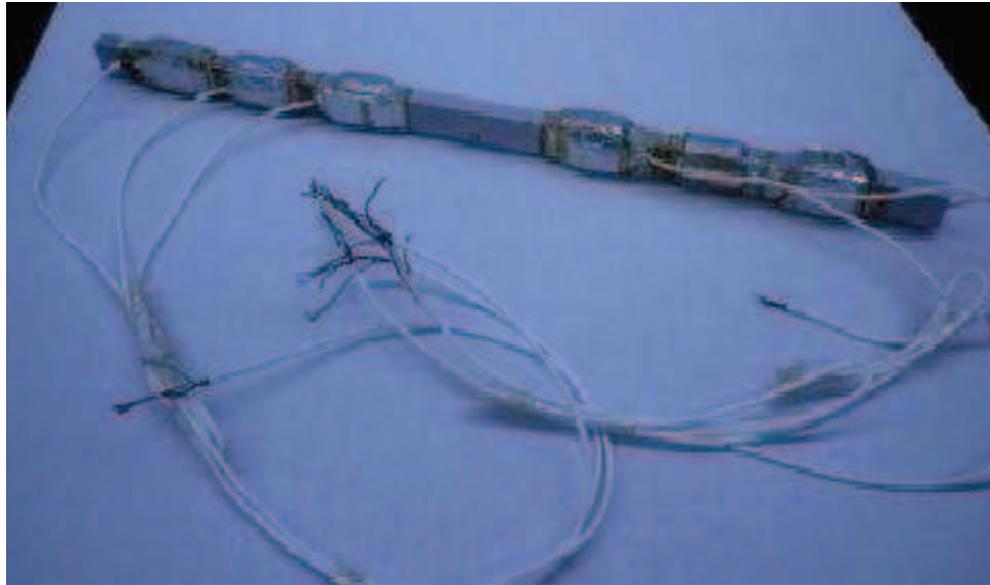


Figura 3.5. Probeta de aluminio instrumentada



Figura 3.6. Probeta de acero sin instrumentar

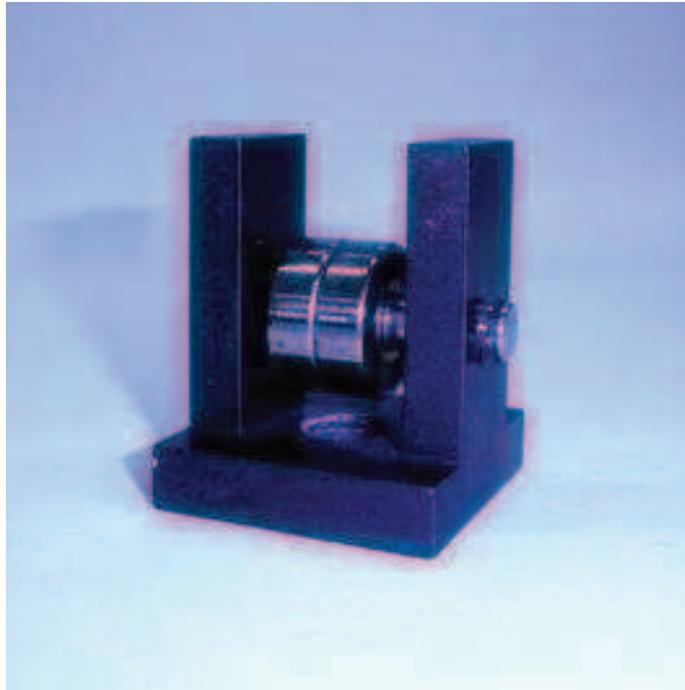


Figura 3.7. Soporte de viga con rodamientos rosca central

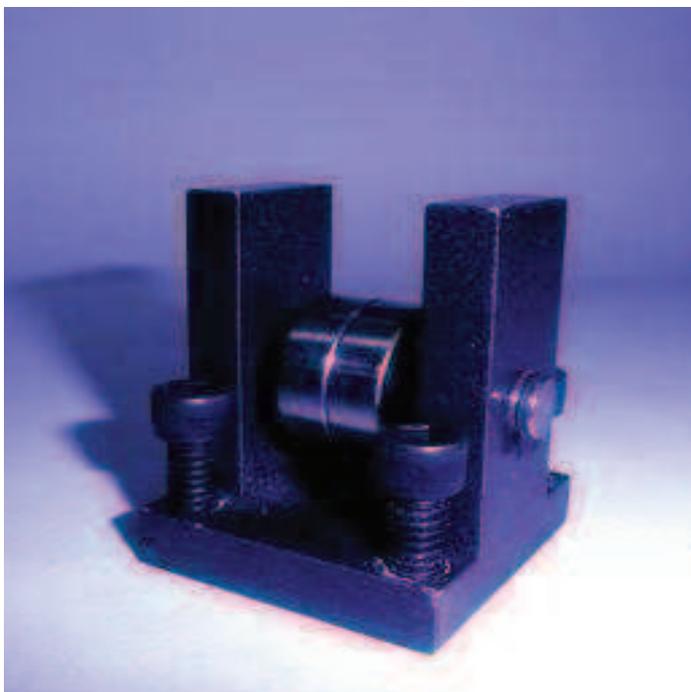


Figura 3.8. Soporte fijo de viga con rodamientos

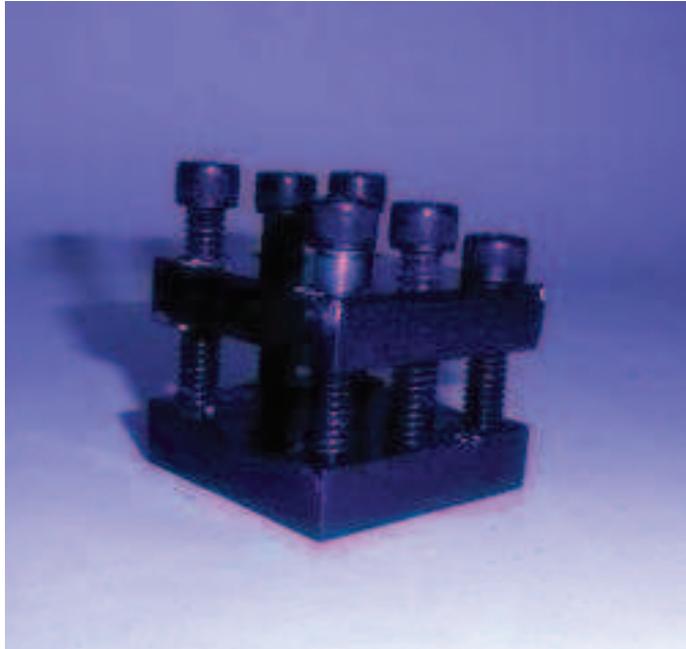


Figura 3.9. Soporte de viga tipo prensa

### 3.1.5. Columnas de soporte

Para este equipo fueron fabricadas tres tipos de columnas:

- a) Columna instrumentada. Esta columna tiene un barreno en la parte superior en el cual se fija la celda de carga, esta columna se muestra en la Figura 3.10.
- b) Columna sin instrumentar. Sobre esta columna se monta y fija por medio de tornillos el soporte fijo de viga con rodamientos, con el cual simularemos el apoyo de la viga simplemente apoyada, dicha columna se muestra en la Figura 3.11.
- c) Columna para empotramiento. En esta columna se fija el soporte de viga tipo prensa por medio de tornillos este soporte nos ayuda a sujetar la viga para el experimento de la viga en cantiléver y con ello obtener un empotre fijo en un extremo de la viga dicho empotre se muestra en la Figura 3.12.

Estas columnas fueron fabricadas en aluminio y para protegerlas del maltrato durante la operación y de la corrosión fueron pintadas con pintura automotriz de color negro.



Figura 3.10. Ensamble de la columna instrumentada.

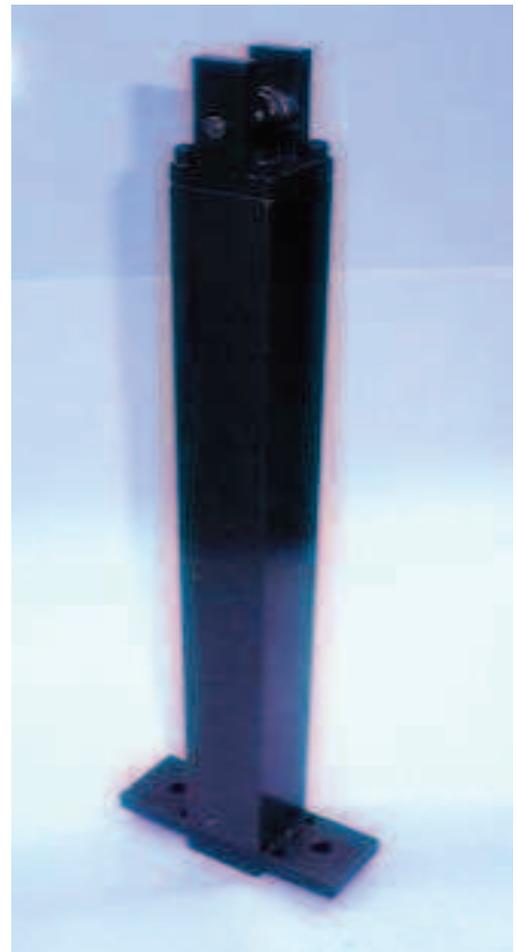


Figura 3.11. Ensamble de la columna sin instrumentar



Figura 3.12. Ensamble de la columna para empotramiento.

### 3.1.6. Medidor de desplazamientos.

El sensor de desplazamientos consiste esencialmente en una lámina en cantiléver de espesor pequeño, instrumentada con extensómetros en configuración de puente completo de Wheatston el cual relaciona la deformación en el empotramiento con las deflexiones en su extremo libre. Este elemento se muestra en la Figura 3.13.

Cabe mencionar que el medidor de desplazamiento viene a sustituir a un micrómetro de caratula que originalmente se contemplaba. Lo anterior debido a que el costo de este instrumentos es menor en comparación con el micrómetro de caratula. Así mismo, la integración de este elemento en el equipo constituye un aporte tecnológico propio al diseño del equipo de flexión.

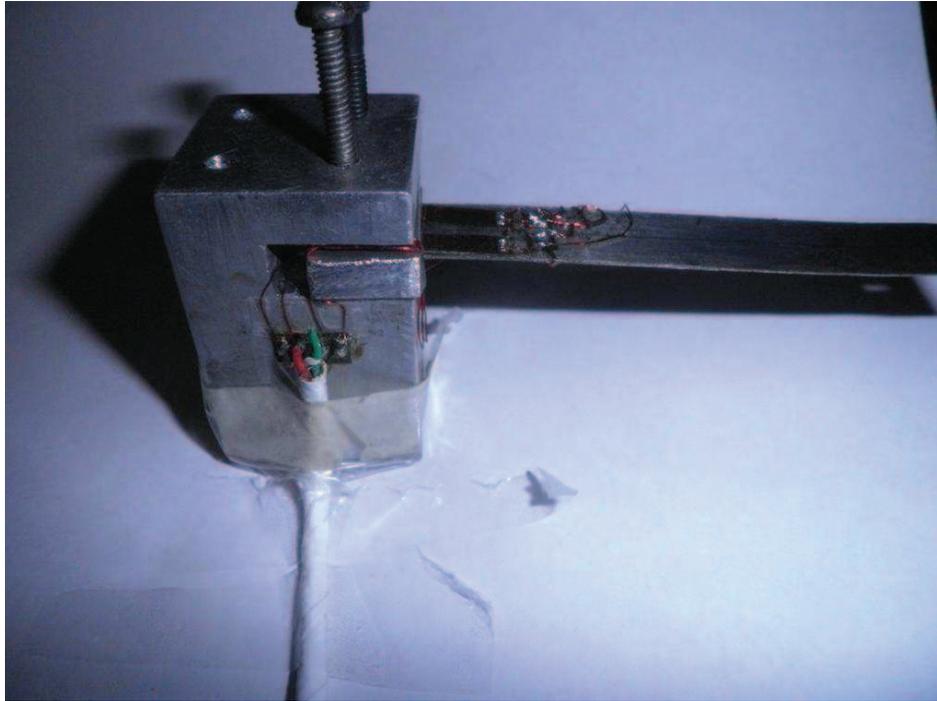


Figura 3.13 Medidor de desplazamientos.

### 3.1.7. Elementos de sujeción al bastidor de las columnas y equipos de medición.

Para este caso, se diseñaron varios elementos que nos permiten deslizar las columnas de soporte a lo largo del bastidor principal y son capaces de mantenerlo fijo durante la aplicación de las cargas. Dichos elementos son:

- a) El soporte universal que fue manufacturo en aluminio comercial, el cual se puede observar en la Figura 3.14.
- b) El buje el cual se manufacturo en latón para dar una mayor resistencia al desgaste este elemento se muestra en la Figura 3.15.
- c) El soporte liso que se manufacturo en aluminio y se muestra en la Figura 3.16.
- d) La manija de apriete la cual consta de un tornillo manufacturado de una varilla de acero y para dar mayor comodidad al usuario se adapto una perilla de plástico como se muestra en la Figura 3.17.
- e) Un soporte para el equipo de medición el cual se manufacturo en aluminio este soporte se muestra en la Figura 3.18.



Cabe mencionar, que todos los soportes se recubrieron con pintura automotriz de color negro esto con el fin de protegerlos del mal trato de los usuarios así como de la corrosión e intemperie.

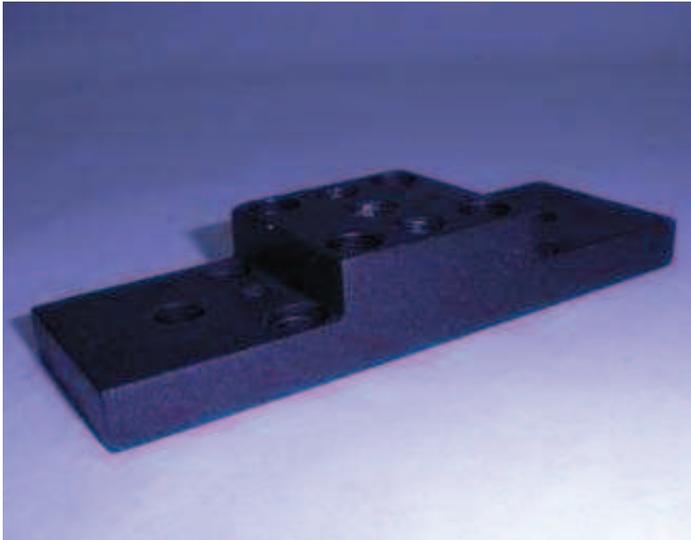


Figura 3.14. Soporte universal.



Figura 3.15. Buje.



Figura 3.16. Soporte liso.

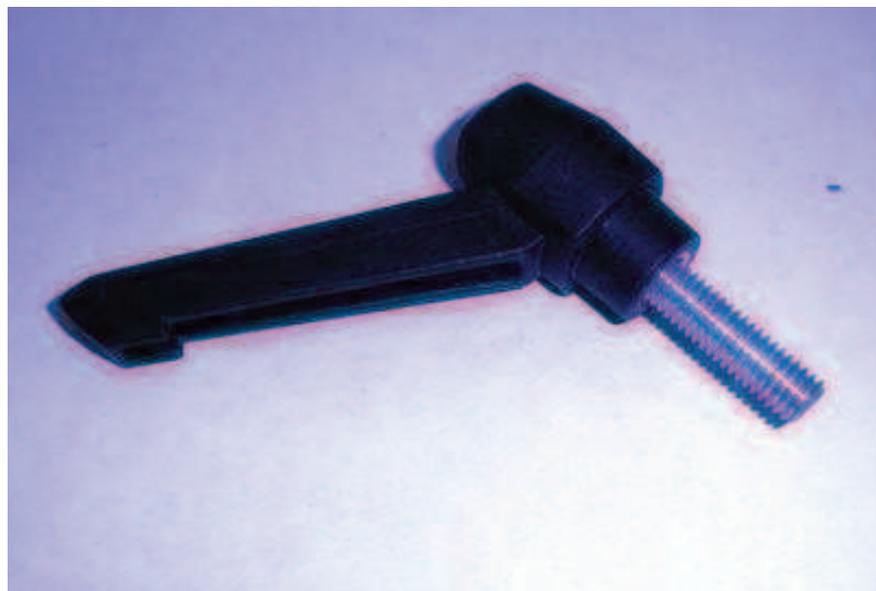


Figura 3.17. Manija de apriete.



Figura 3.18. Soporte para el equipo de medición.

### 3.2. Practicas propuestas

A continuación se presenta la propuesta de 3 prácticas que pueden ser realizadas en el equipo para pruebas de flexión en vigas. La primera práctica consiste en evaluar una viga en cantiléver y analizar la variación de los esfuerzos a lo largo de toda su longitud así como determinar algunas propiedades mecánicas del material con el cual fue fabricada la probeta. Mientras que en la práctica dos analizaremos la construcción del diagrama cortante y momento flexionante. Finalmente, en la práctica tres analizaremos la viga estáticamente indeterminada.



### 3.2.1. PRACTICA 1

#### VIGA EN CANTILEVER

La teoría básica de la resistencia de materiales establece que la deflexión (o desplazamiento vertical) máxima en una viga en cantiléver con carga puntual en su extremo libre puede ser calculada empleando la siguiente expresión.

$$v_{max} = \frac{FL^3}{3EI} \quad (3.1)$$

Donde:

F = es la fuerza aplicada.

L = es la longitud que hay del empotramiento al punto de aplicación de la carga.

I = es el segundo momento de inercia del área que se describe como:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (3.2)$$

Donde:

b = es el ancho de la viga.

h = es el espesor de la viga.

Por otro lado, la teoría de la elasticidad aplicada a vigas en flexión nos permite calcular la variación de los campos de esfuerzo, deformación y desplazamiento. Dicha teoría nos permite determinar experimentalmente una serie de parámetros mecánicos del elemento tales como propiedades elásticas del material, como el módulo de Young y de Poisson, del que fue fabricado. Lo anterior debido a que la teoría de elasticidad, a diferencia de la teoría de vigas, nos permite determinar en la deformación en cualquier punto no solo como una línea.

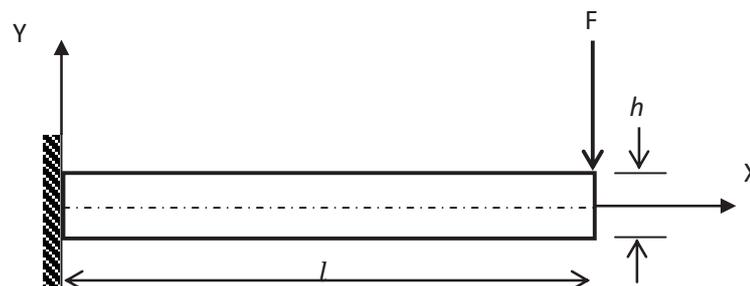


Figura 3.1 diagrama de cuerpo libre para una viga en cantilever.



Según la teoría de elasticidad, el esfuerzo normal en la dirección “x” en el borde superior de la viga, en  $y = h/2$ , está dado por la ecuación (1.44):

$$\sigma_x = \frac{M(x)}{I} y = \frac{F(l-x)h}{2I} \quad (1.44)$$

Empleando la ley de Hooke, esta ecuación se puede igualar a  $E\varepsilon_x$  y se obtiene:

$$\frac{F(l-x)h}{I} = E\varepsilon_x \quad (3.3.a)$$

Donde haciendo referencia a la Figura 3.1:

$\sigma_x$  = esfuerzo normal a lo largo del eje “x”

$F$  = fuerza aplicada sobre la viga

$l$  = longitud de la viga.

$h$  = espesor de la viga.

$E$  = modulo de elasticidad del material.

$\varepsilon_x$  = deformaciones de la viga sobre el eje x.

Luego, de la ecuación (3.3.a) podemos obtener la deformación que sufre la viga a lo largo de su longitud con la siguiente ecuación:

$$\varepsilon_x = \frac{(l-x_0)h}{2IE} F \quad (3.3.b)$$

Donde se ve claramente que la ecuación anterior es una relación lineal entre la fuerza aplicada ( $F$ ) y la deformación normal  $\varepsilon_x$  en el punto  $x_0$  de la viga. Dicha relación nos indica claramente que si en un experimento se toman medidas sucesivas de carga y deformación, es posible determinar la magnitud del modulo de Young.

### Desarrollo de la práctica

Para realizar esta práctica, se requieren los elementos que se listan en la Tabla 3.3. Dichos elementos pueden ser fácilmente identificados en el diagrama que se muestra en la Figura 3.21. El montaje del arreglo de prueba se puede apreciar también en la Figura 3.21., mientras que en la Figura 3.22 se presenta el ensamble completo del equipo para esta práctica.



Tabla 3.1. Listado de piezas para la practica 1 “VIGA EN CANTILEVER”

| No. De la Pieza | Nombre de la pieza  | Cantidad |
|-----------------|---|----------|
| 2               | Aplicador de carga  | 1        |
| 4               | Medidor de carga  | 1        |
| 8               | Columna para empotramiento                                  | 1        |
| 10              | Marco   | 1        |
| 11              | Soporte de marco  | 1        |
| 17              | Dispositivo de sujeción del aplicador de carga a la Probeta | 1        |
| 19              | Probeta de aluminio   | 1        |
| 22              | Apoyo tipo prensa para simular empotramiento                | 1        |
| 27              | Soporte universal   | 3        |
| 28              | Buje  | 3        |
| 29              | Soporte liso  | 3        |
| 30              | Manija de apriete   | 3        |
| 31              | Micrómetro  | 1        |



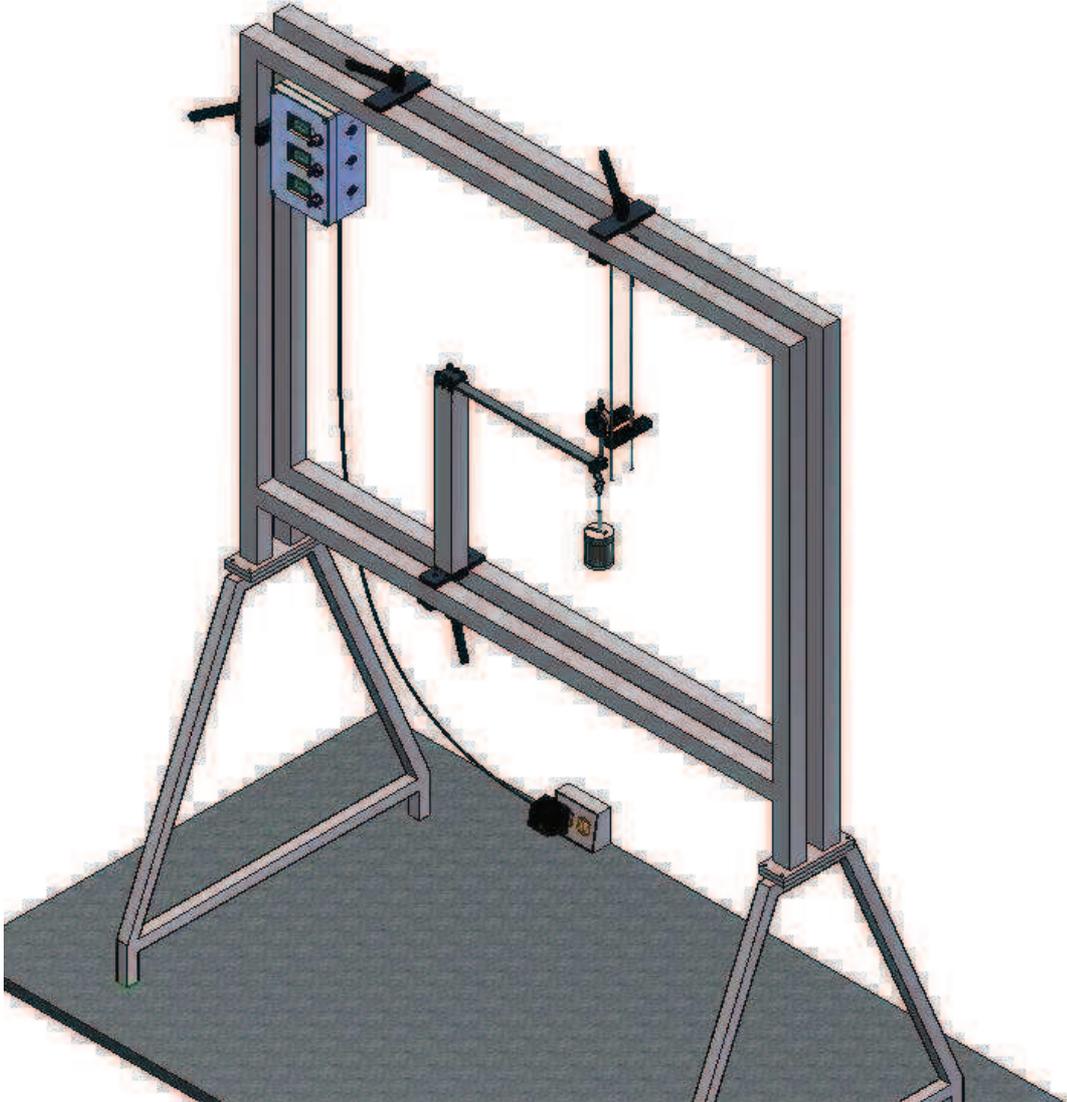


Figura 3.22. Ensamble de practica 1 “VIGA EN CANTILIVER”



**Realización del experimento.**

Una vez montado el arreglo de prueba correspondiente, se procede a realizar el experimento el cual consiste:

1. Tomar las mediciones de la probeta (h, l, xo y b) considerando el diagrama de la Figura 3.23:
2. El paso siguiente consiste en aplicar cargas incrementales a la viga colocando pesas de distintos valores en el aplicador de carga y registrar las deformaciones correspondientes

Cabe destacar que la medición del extensómetro se debe dividir entre cuatro ya que el tipo de arreglo que se maneja (puente de wheatstone completo) nos amplifica la señal cuatro veces.

Con los datos obtenidos en la prueba se debe elaborar la Tabla 3.4

Tabla 3.2. Registro de valores de fuerza y deformación

| Fuerza<br>(N) | $\epsilon_x$<br>( $\mu\text{m}$ ) |
|---------------|-----------------------------------|
| 2             |                                   |
| 4             |                                   |
| 6             |                                   |
| 8             |                                   |
| 10            |                                   |
| 12            |                                   |
| 14            |                                   |
| 16            |                                   |
| 18            |                                   |



3. Una vez que se ha llenado la “Tabla 3.4 deformación - fuerza” se procederá a graficar los puntos obtenidos durante la práctica. En concordancia con la ecuación 3.3b, la gráfica que se debe obtener será una recta que pasa por el origen.



Grafica 3.1 deformación - carga.

4. Una vez que se han graficado todos los puntos encontrados en la Tabla 3.4 deformación – fuerza, el paso siguiente será el de encontrar por el método de mínimos cuadrados la pendiente “*m*” de la recta.
5. Con el valor de la pendiente “*m*” obtenido por el método de mínimos cuadrados se procederá a calcular el modulo de elasticidad “*E*” siguiendo el procedimiento siguiente:

de la ecuación (3.3.b)

$$\epsilon_x = \frac{(l-x_0) h}{2 I E} F \quad (3.3.b)$$

Se sabe que

$$m = \frac{(l-x_0) h}{2 I E} \quad (3.3.c)$$



De donde despejando a  $E$  de la ecuación (3.3.c) obtenemos

$$E = \frac{(l-x_0) h}{2 I m} \quad (3.3.d)$$

6. Comparar en tablas de propiedades de los materiales el valor del módulo de elasticidad que se obtuvo con la ecuación (3.3.d).

### 3.2.2. PRACTICA 2

#### DIAGRAMA DE CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE

El diagrama de fuerzas cortantes puede ser construido conociendo la magnitud de las reacciones generadas por la carga, medidas en los apoyos por las celdas de carga y conociendo la magnitud de la fuerza aplicada.

Debido a que el elemento está sometido a una carga en su punto medio, el diagrama de fuerzas correspondiente es como el que se muestra a continuación.

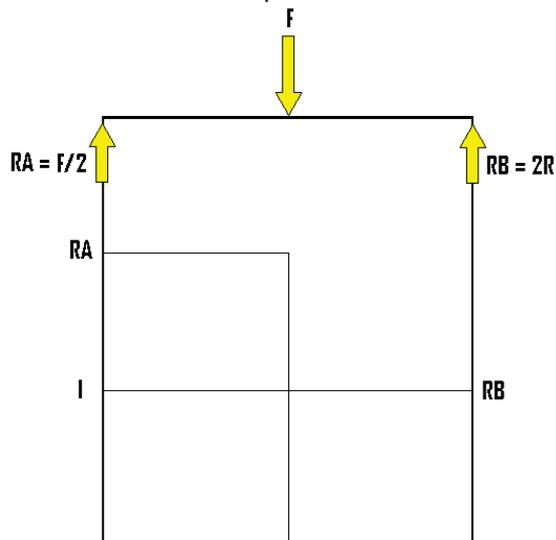


Figura 3.23 Diagrama de fuerzas.



Este diagrama representa una viga simplemente apoyada con apoyos instrumentados (columna instrumentada) y las fuerzas cortantes de reacción que actúan sobre la probeta.

La magnitud de las fuerzas cortantes aumentará proporcionalmente con respecto a la carga aplicada, y la magnitud de las reacciones debe ser igual a la mitad de la carga.

Para construir el diagrama de momentos flexionantes se debe calcular el momento correspondiente a cada punto donde se colocó un extensómetro empleando la siguiente ecuación:

$$M(x_i) = \frac{Ebh^2}{6} x 10^{-6} \epsilon_i \quad (3.4)$$

Donde:

E = es el modulo Young del material de la viga (para el aluminio tome E=70MPa)

b y h son dimensiones de la viga descritas anteriormente.

$M(x_i)$  = es el momento flexionante correspondiente al punto que se encuentra en la posición  $x_i$ .

Por otro lado, la teoría básica de resistencia de materiales establece que para un caso como el que se estudia, el momento flexionante sigue la siguiente relación:

$$M(x) = \frac{F}{2} \left( \frac{l}{2} - |x| \right) \quad (3.5)$$

Donde:  $x$  es la posición del punto en el cual se desea calcular el momento flexionante respecto al centro de la viga.

### Desarrollo de la práctica

Para realizar esta práctica, se requieren los elementos que se listan en la Tabla 3.5. Dichos elementos pueden ser fácilmente identificados en el montaje del arreglo de prueba se puede apreciar en la Figura 3.24., mientras que en la Figura 3.25 se presenta el ensamble completo del equipo para esta práctica.



Tabla 3.3. Listado de piezas para la practica 3, “DIAGRAMA DE CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE”

| No. De la Pieza | Nombre de la pieza  | Cantidad |
|-----------------|---|----------|
| 2               | Aplicador de carga  | 1        |
| 3               | Celda de compresión   | 2        |
| 4               | Medidor de carga  | 1        |
| 6               | Columna instrumentada                                       | 2        |
| 10              | Marco   | 1        |
| 11              | Soporte de marco  | 1        |
| 17              | Dispositivo de sujeción del aplicador de carga a la probeta | 1        |
| 18              | Probeta instrumentada                                       | 1        |
| 20              | Apoyo con rodamientos para columna instrumentada.           | 2        |
| 24              | Protector de celda  | 2        |
| 27              | Soporte universal   | 4        |
| 28              | Buje  | 4        |
| 29              | Soporte liso  | 4        |
| 30              | Manija de apriete   | 4        |
| 31              | Micrómetro  | 1        |

NOTA: Para mayor información de los detalles del ensamble para esta práctica se pueden revisar en el ensamble No. 3 del Apéndice 2.

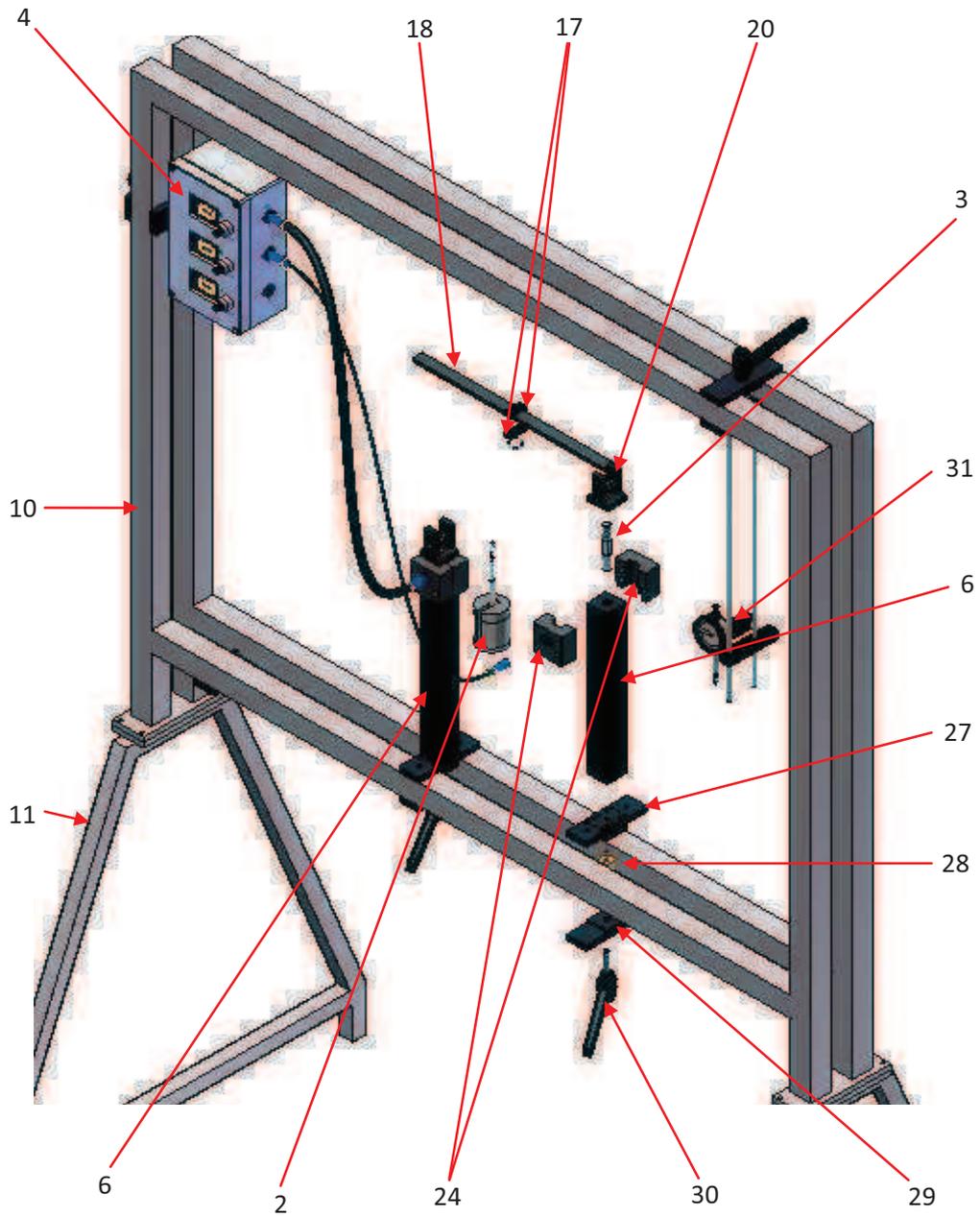


Figura 3.24. Detalle de ensamble de la practica 3

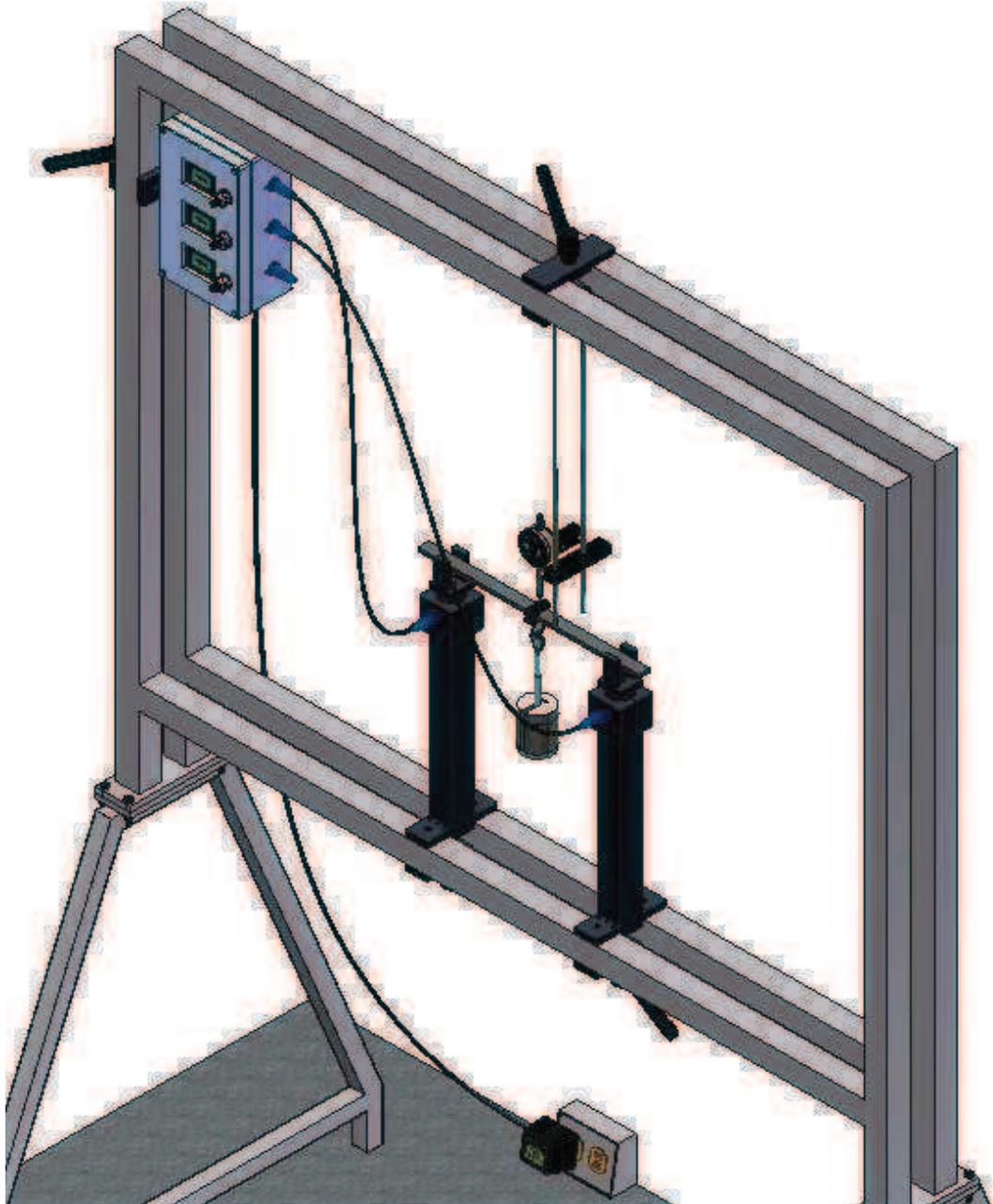


Figura 3.25. Ensamble de la practica 3



### Realización del experimento.

Una vez montado el arreglo de prueba correspondiente, se procede a realizar el experimento el cual consiste:

1. Tomar las mediciones necesarias de la probeta para la realización de la práctica tales como:  
 $h =$   
 $l =$   
 $I =$   
 $x_i =$   
 $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
2. El paso siguiente consiste esencialmente en aplicar cargas incrementales a la viga colocando pesas de distintos valores en el aplicador de carga.

Para cada valor de carga, se debe registrar la deformación que indica el medidor de deformaciones conectado a las celdas 1, 2, 3, 4, 5, 6. Cabe destacar que la medición del extensómetro se debe dividir entre cuatro ya que el tipo de arreglo que se maneja (puente de wheatstone completo) nos amplifica la señal cuatro veces.

3. Con los datos obtenidos en la prueba se debe elaborar la Tabla 3.4



Tabla 3.4. Registro de valores de  $M_{x1}$ ,  $\epsilon_{xi}$

| F | $x_i$ | $\epsilon_{xi}$ | $M_{xi}$ | M (calculado) | Desviación (%) |
|---|-------|-----------------|----------|---------------|----------------|
| 2 | 6.5   |                 |          |               |                |
|   | 12.5  |                 |          |               |                |
|   | 19.5  |                 |          |               |                |
|   | 34    |                 |          |               |                |
|   | 41    |                 |          |               |                |
|   | 47    |                 |          |               |                |
| 4 | 6.5   |                 |          |               |                |
|   | 12.5  |                 |          |               |                |
|   | 19.5  |                 |          |               |                |
|   | 34    |                 |          |               |                |
|   | 41    |                 |          |               |                |
|   | 47    |                 |          |               |                |
| 6 | 6.5   |                 |          |               |                |
|   | 12.5  |                 |          |               |                |
|   | 19.5  |                 |          |               |                |
|   | 34    |                 |          |               |                |
|   | 41    |                 |          |               |                |
|   | 47    |                 |          |               |                |
| 8 | 6.5   |                 |          |               |                |
|   | 12.5  |                 |          |               |                |
|   | 19.5  |                 |          |               |                |
|   | 34    |                 |          |               |                |



### CAPÍTULO III RESULTADOS



|    |      |  |  |  |  |
|----|------|--|--|--|--|
|    | 41   |  |  |  |  |
|    | 47   |  |  |  |  |
| 10 | 6.5  |  |  |  |  |
|    | 12.5 |  |  |  |  |
|    | 19.5 |  |  |  |  |
|    | 34   |  |  |  |  |
|    | 41   |  |  |  |  |
|    | 47   |  |  |  |  |
| 12 | 6.5  |  |  |  |  |
|    | 12.5 |  |  |  |  |
|    | 19.5 |  |  |  |  |
|    | 34   |  |  |  |  |
|    | 41   |  |  |  |  |
|    | 47   |  |  |  |  |
| 14 | 6.5  |  |  |  |  |
|    | 12.5 |  |  |  |  |
|    | 19.5 |  |  |  |  |
|    | 34   |  |  |  |  |
|    | 41   |  |  |  |  |
|    | 47   |  |  |  |  |
| 16 | 6.5  |  |  |  |  |
|    | 12.5 |  |  |  |  |
|    | 19.5 |  |  |  |  |
|    | 34   |  |  |  |  |
|    | 41   |  |  |  |  |



|    |      |  |  |  |  |
|----|------|--|--|--|--|
|    | 47   |  |  |  |  |
| 18 | 6.5  |  |  |  |  |
|    | 12.5 |  |  |  |  |
|    | 19.5 |  |  |  |  |
|    | 34   |  |  |  |  |
|    | 41   |  |  |  |  |
|    | 47   |  |  |  |  |

4. Con los valores de deformación ( $\epsilon_i$ ) obtenidos en la práctica se procederá a calcular el momento flector ( $M_{x1}$ ) para cada uno de los puntos señalados a lo largo de la longitud de la viga, aplicando la ecuación 3.4.

$$M(xi) = \frac{Ebh^2}{6} x10^{-6}\epsilon_i$$

Estos valores se deben registrar en la tabla 3.4

5. Utilizando la ecuación 3.5 realice los cálculos necesarios y compare los valores del momento flector con los resultados anteriores.

$$M(xi) = \frac{F}{2} \left( \frac{l}{2} - |xi| \right)$$

6. Con los resultados experimentales y teóricos, se calcula la desviación correspondiente y se discuten los resultados.



### 3.2.4. PRACTICA 3

#### VIGA ESTÁTICAMENTE INDETERMINADA

La teoría básica de la resistencia de materiales establece, que para resolver un problema de viga estáticamente indeterminada, pueden seguirse distintos métodos entre los cuales se encuentran: el trabajo virtual y el de la curva elástica. Procediendo de cualquiera de las dos formas mencionadas se obtiene que la magnitud de la reacción en el apoyo con patín está dada por:

$$R_A = F \left[ 1 - \frac{a}{L} \right] \left[ 1 + \frac{a}{2L} \right]$$

Donde:

a = Longitud comprendida entre el punto de apoyo y el extremo A de la probeta.

L = Longitud total de la probeta.

F = Carga aplicada a la probeta.

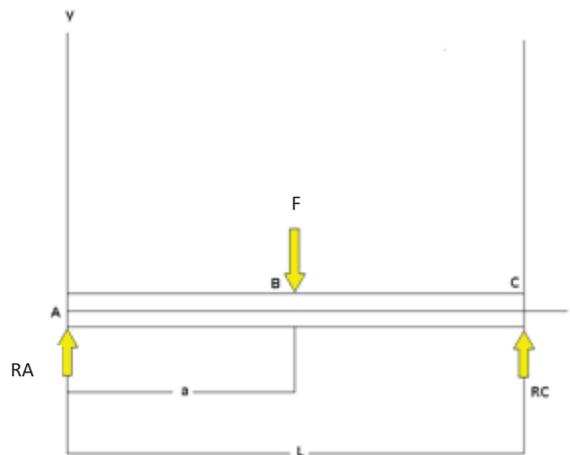


Figura 3.26 Diagrama de una viga indeterminada

#### Desarrollo de la práctica

Para realizar esta práctica, se requieren los elementos que se listan en la Tabla 3.7. Dichos elementos pueden ser fácilmente identificados en el diagrama que se muestra en la Figura 3.27. El montaje del arreglo de prueba se puede apreciar también en la Figura 3.27., mientras que en la Figura 3.28 se presenta el ensamble completo del equipo para esta práctica.



### CAPÍTULO III RESULTADOS



Tabla 3.7. Listado de piezas para la practica 4 “VIGA ESTÁTICAMENTE INDETERMINADA”

| No. De la Pieza | Nombre de la pieza  | Cantidad |
|-----------------|---|----------|
| 2               | Aplicador de carga  | 1        |
| 3               | Celda de compresión   | 1        |
| 4               | Medidor de carga  | 1        |
| 8               | Columna para empotramiento                                  | 1        |
| 6               | Columna instrumentada                                       | 1        |
| 10              | Marco   | 1        |
| 11              | Soporte de marco  | 1        |
| 17              | Dispositivo de sujeción del aplicador de carga a la probeta | 1        |
| 19              | Probeta de aluminio   | 1        |
| 20              | Apoyo con rodamientos para columna instrumentada            | 1        |
| 22              | Apoyo tipo prensa para simular empotramiento                | 1        |
| 24              | Protector de celda  | 1        |

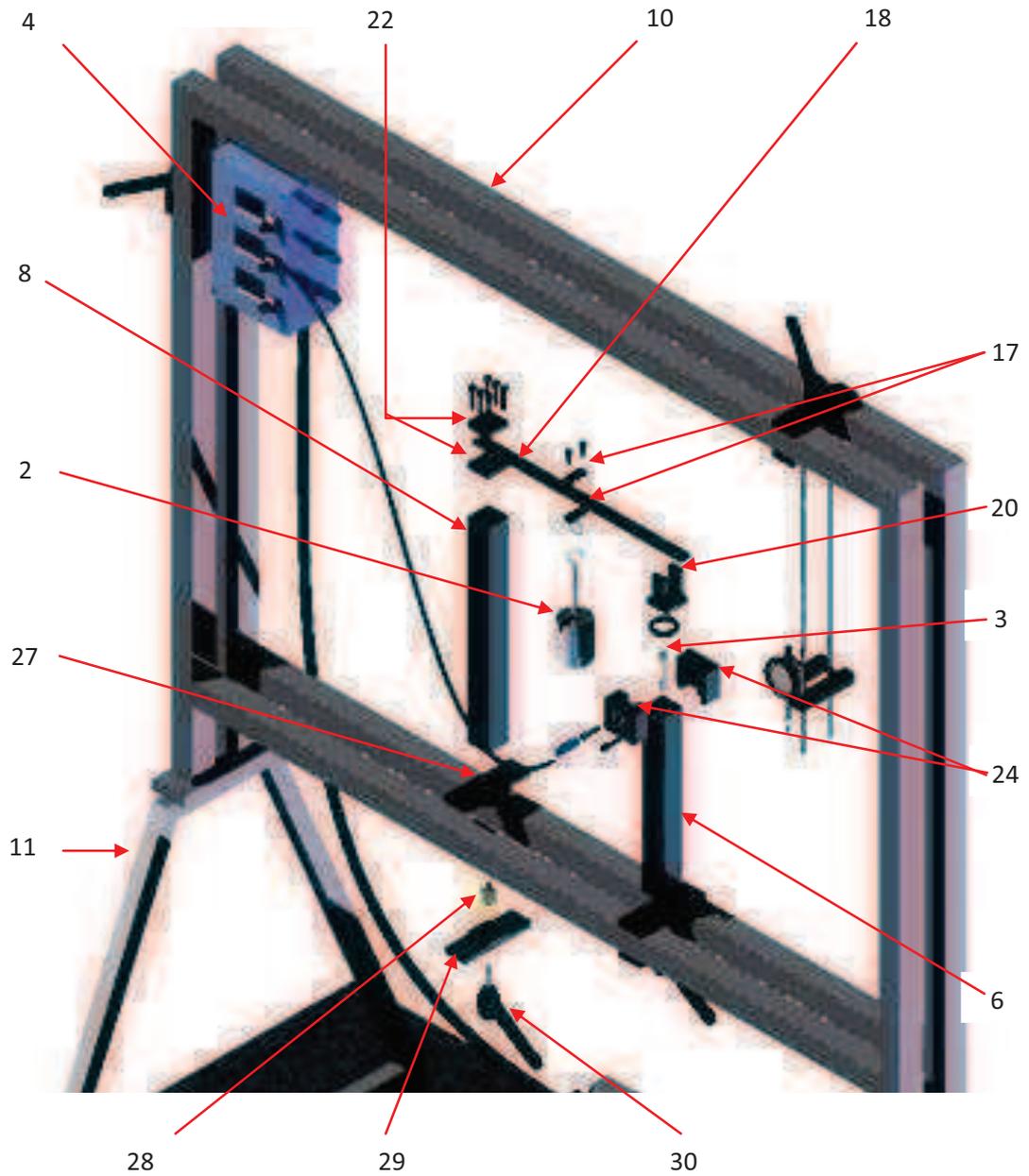


### CAPÍTULO III RESULTADOS

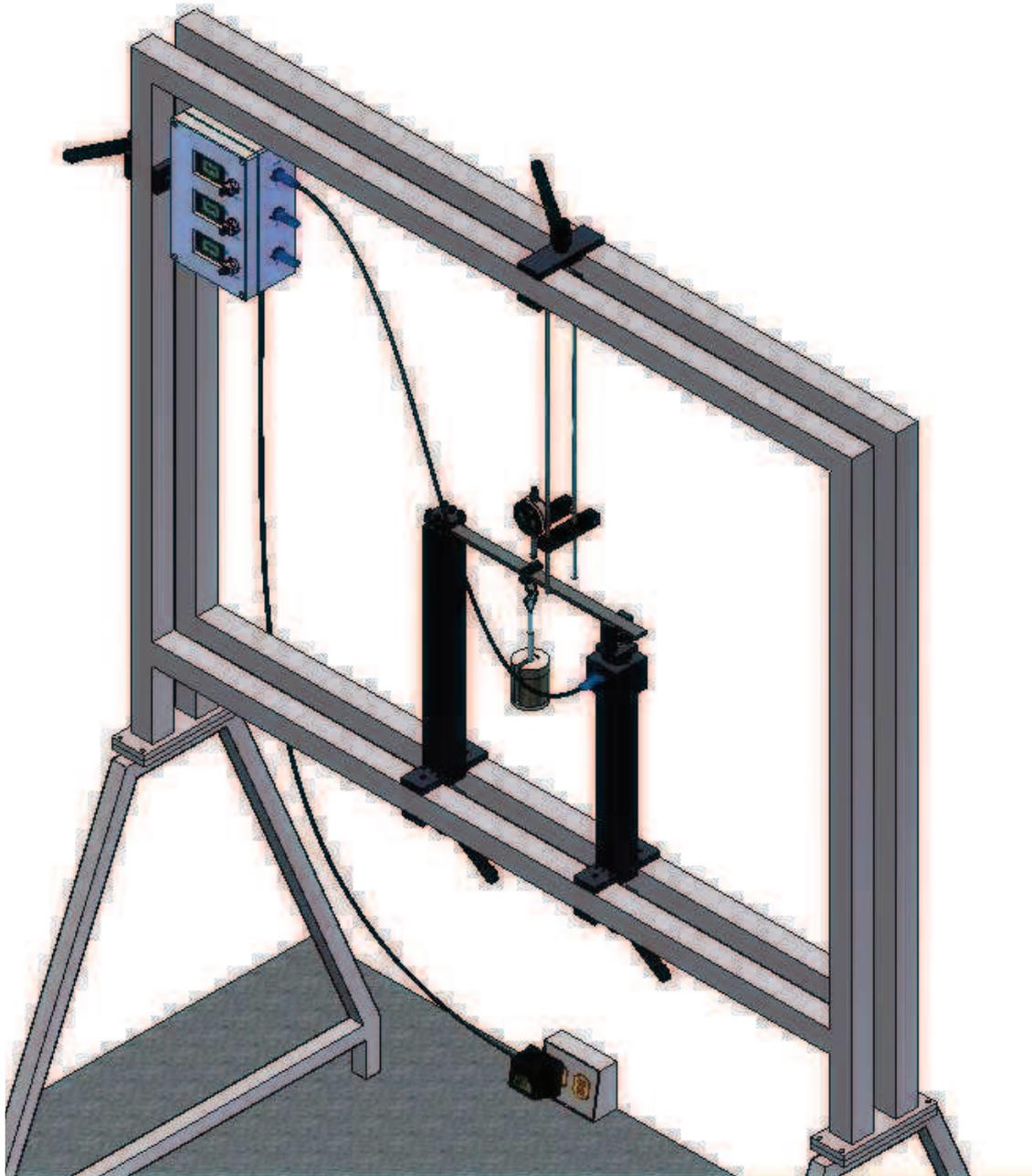


|    |                   |   |
|----|-------------------|---|
| 27 | Soporte universal | 4 |
| 28 | Buje              | 4 |
| 29 | Soporte liso      | 4 |
| 30 | Manija de apriete | 4 |
| 31 | Micrómetro        | 1 |

**NOTA:** Para mayor información de los detalles del ensamble para esta práctica se pueden revisar en el ensamble No. 4 del Apéndice 2.



**Figura 3.27. Detalle de ensamble de practica 4 “VIGA ESTÁTICAMENTE INDETERMINADA”**



**Figura 3.28. Ensamble de la practica 4 “VIGA ESTÁTICAMENTE INDETERMINADA”**

Realización del experimento.



### CAPÍTULO III RESULTADOS



Una vez montado el arreglo de prueba correspondiente, se procede a realizar el experimento el cual consiste esencialmente en aplicar cargas incrementales a la viga colocando pesas de distintos valores en el aplicador de carga.

Tabla3.8. Comparación entre valores calculados y medidos para el caso de la viga estáticamente indeterminada.

| $a_i$ (m) | $R_A$ medida (N) | $R_A$ (calculada) | Desviación (%) |
|-----------|------------------|-------------------|----------------|
| 0.05      | 19               | 17.14             | 10.84          |
| 0.10      | 11               | 10.00             | 9.93           |
| 0.15      | 5                | 4.31              | 15.88          |
| 0.195     | 1                | 1.02              | 2.42           |

# CONCLUSIONES

---



## CONCLUSIONES

---



Se diseñó, construyó e instrumentó un equipo mecánico capaz de simular casos típicos de flexión vigas sometidas a cargas puntuales en los siguientes arreglos:

- a) Simplemente apoyada
- b) En cantiléver
- c) Sobre determinada

El costo de fabricación del equipo fue aproximadamente 50% menor que el costo de un equipo comercial análogo.

La instrumentación del equipo permite obtener la siguiente información sobre el comportamiento mecánico de las vigas:

- a) Fuerzas aplicada y reacciones
- b) Distribución de deformaciones a lo largo de su eje longitudinal

Con dicha información el equipo permite al usuario construir los siguientes diagramas:

- a) Cortantes
- b) Momentos flexionantes

Así como determinar las propiedades del material de la viga siguiendo un procedimiento determinado.

Se propusieron las siguientes prácticas de laboratorio en las que se emplea el equipo:

- a) Viga simplemente apoyada
- b) Viga en cantiléver
- c) Diagrama de cortantes y momentos flexionantes
- d) Viga estáticamente indeterminada

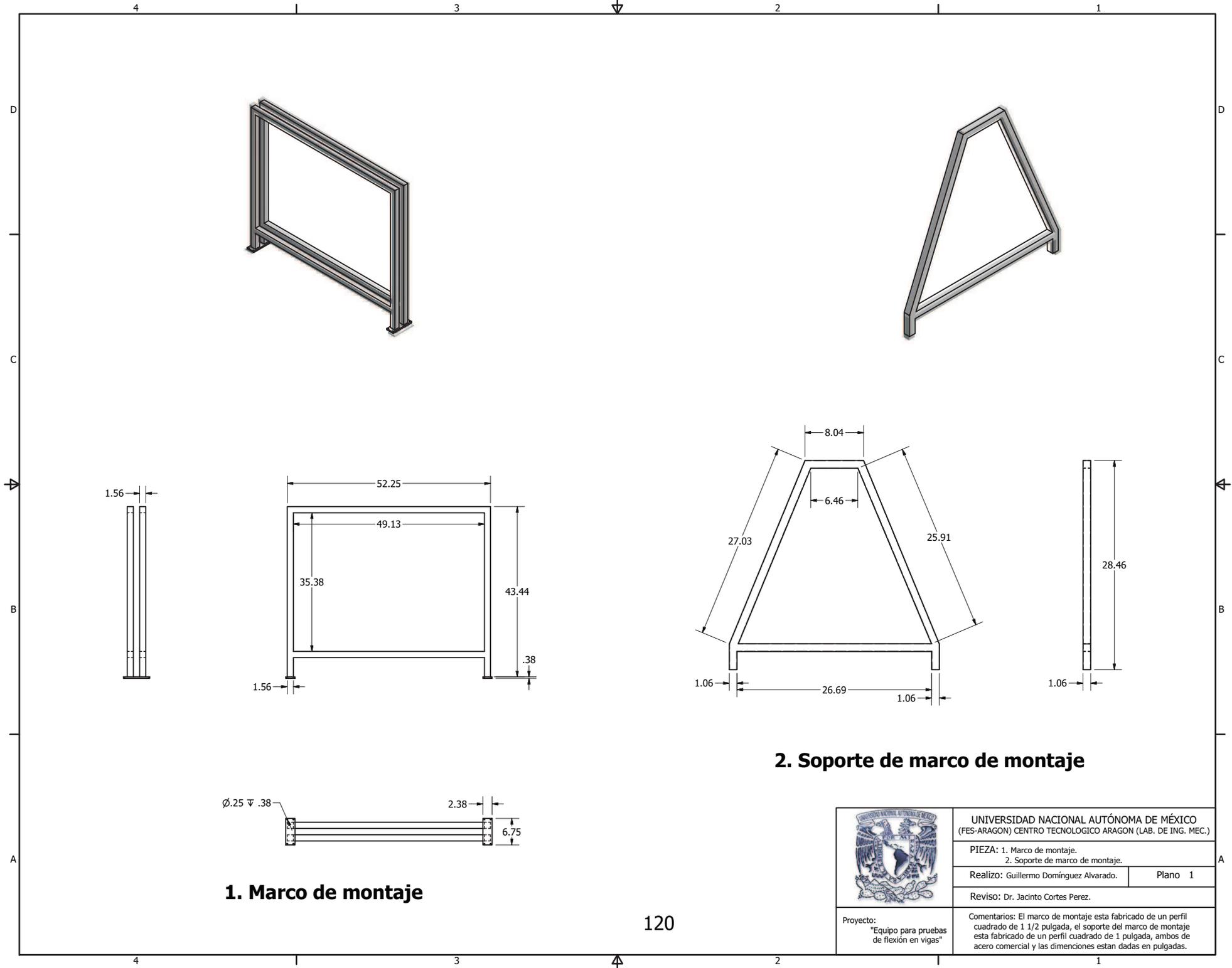
Adicionalmente, el equipo fue diseñado para ser empleado en pruebas en las que se empleen otras técnicas experimentales tales como:

- a) Fotoelasticidad
- b) Análisis de imágenes

# APÉNDICE I

---

## PLANOS DE CONSTRUCCIÓN



**1. Marco de montaje**

**2. Soporte de marco de montaje**



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
(FES-ARAGON) CENTRO TECNOLÓGICO ARAGON (LAB. DE ING. MEC.)

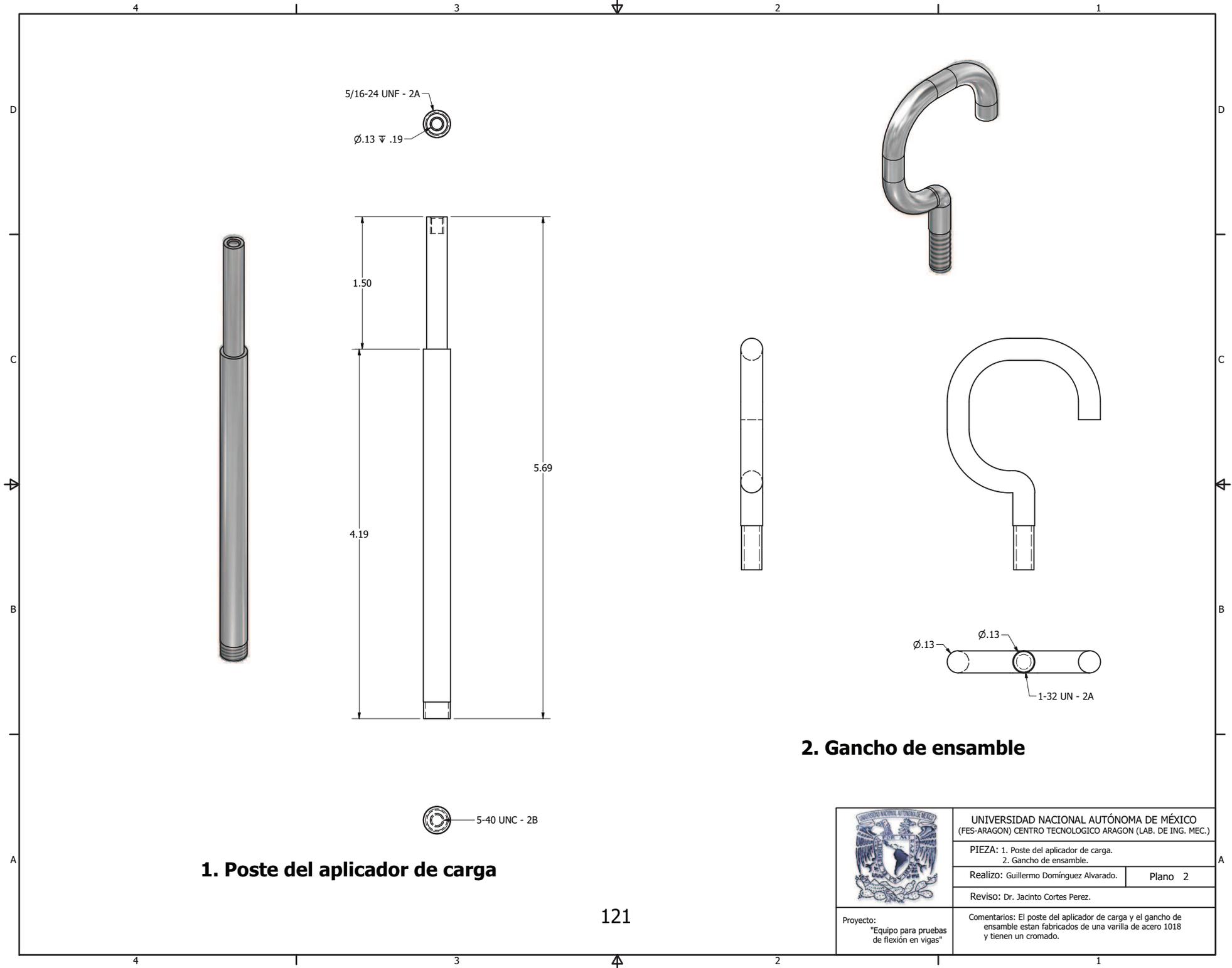
PIEZA: 1. Marco de montaje.  
2. Soporte de marco de montaje.

Realizó: Guillermo Domínguez Alvarado. Plano 1

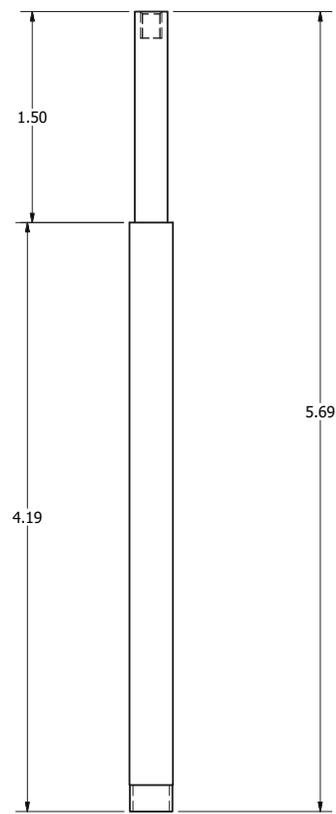
Revisó: Dr. Jacinto Cortes Perez.

Proyecto:  
"Equipo para pruebas  
de flexión en vigas"

Comentarios: El marco de montaje esta fabricado de un perfil cuadrado de 1 1/2 pulgada, el soporte del marco de montaje esta fabricado de un perfil cuadrado de 1 pulgada, ambos de acero comercial y las dimensiones estan dadas en pulgadas.

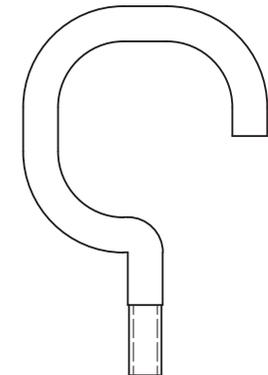
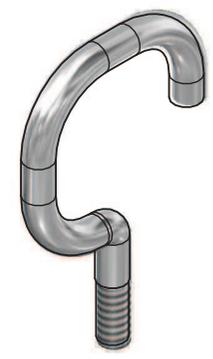


5/16-24 UNF - 2A  
 $\varnothing.13 \nabla .19$



5-40 UNC - 2B

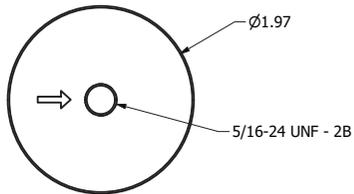
**1. Poste del aplicador de carga**



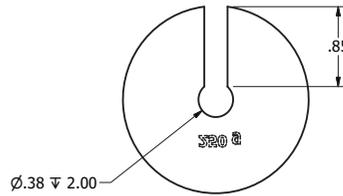
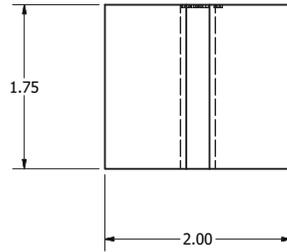
$\varnothing.13$   $\varnothing.13$   
 1-32 UN - 2A

**2. Gancho de ensamble**

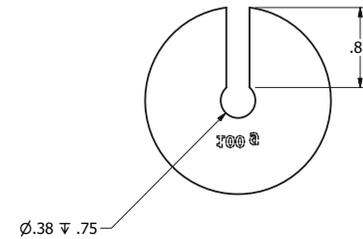
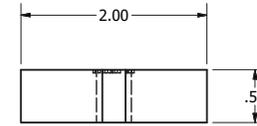
|  |   |         |
|--|---|---------|
|  | UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO<br>(FES-ARAGON) CENTRO TECNOLÓGICO ARAGON (LAB. DE ING. MEC.)                                   |         |
|  | PIEZA: 1. Poste del aplicador de carga.<br>2. Gancho de ensamble.   |         |
|  | Realizo: Guillermo Domínguez Alvarado.  | Plano 2 |
|  | Reviso: Dr. Jacinto Cortes Perez.   |         |
| Proyecto:<br>"Equipo para pruebas de flexión en vigas" | Comentarios: El poste del aplicador de carga y el gancho de ensamble están fabricados de una varilla de acero 1018 y tienen un cromado. |         |



**1. Base del aplicador de carga**



**2. Pesa grande de 5 newton.**



**3. Pesa chica de 2 newton.**



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
(FES-ARAGON) CENTRO TECNOLÓGICO ARAGON (LAB. DE ING. MEC.)

PIEZA: 1. Base del aplicador de carga; 2. Pesa grande de 5 newton  
3. Pesa chica 2 newton

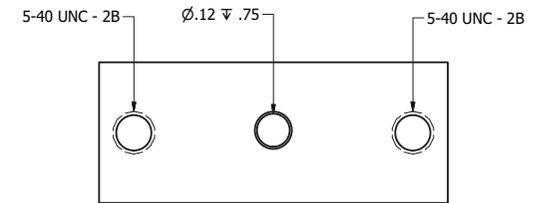
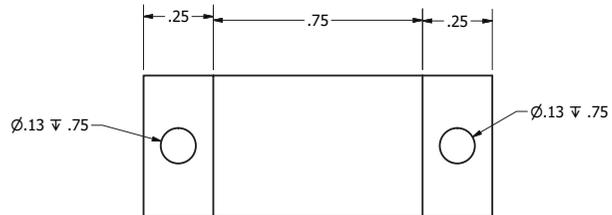
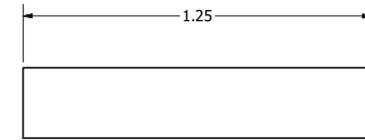
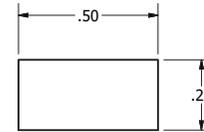
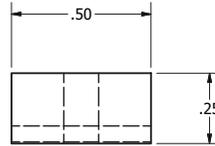
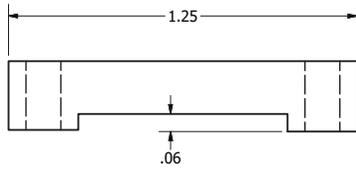
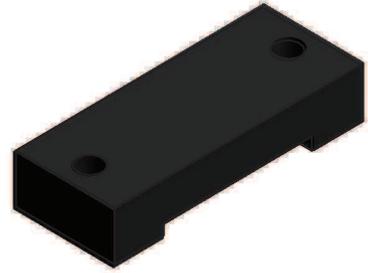
Realizo: Guillermo Domínguez Alvarado.

Plano 3

Reviso: Dr. Jacinto Cortes Perez.

Proyecto:  
"Equipo para pruebas de flexión en vigas"

Comentarios: La base del aplicador de carga esta fabricado de una varilla de acero 1018 y tienen un cromado.



### 1. Barra de posición de carga

### 2. Soporte de gancho



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
(FES-ARAGON) CENTRO TECNOLÓGICO ARAGON (LAB. DE ING. MEC.)

PIEZA: 1. Barra de posición de carga.  
2. Soporte de gancho.

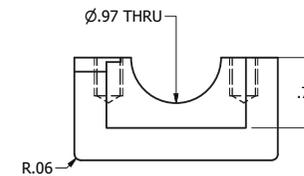
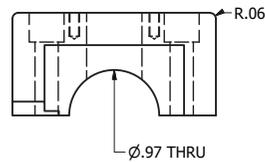
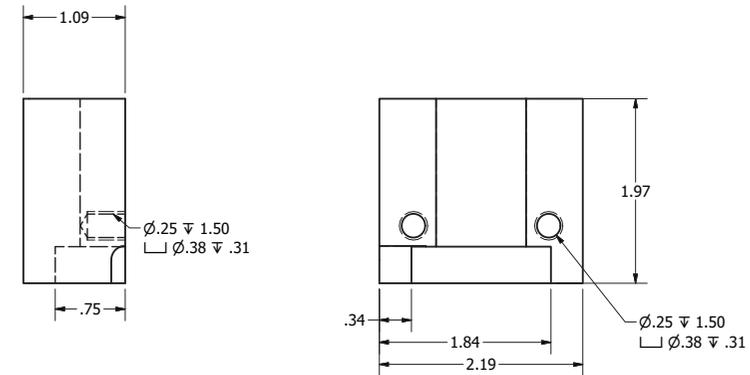
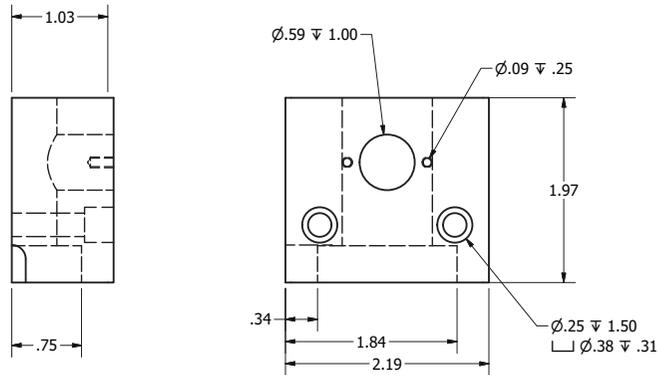
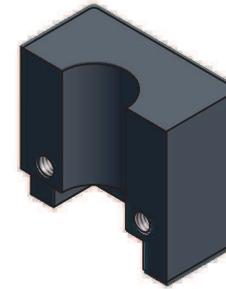
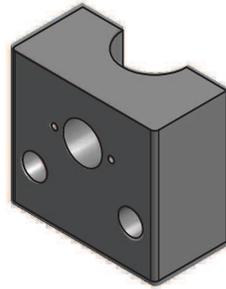
Realizo: Guillermo Domínguez Alvarado.

Plano 4

Reviso: Dr. Jacinto Cortes Perez.

Proyecto:  
"Equipo para pruebas  
de flexión en vigas"

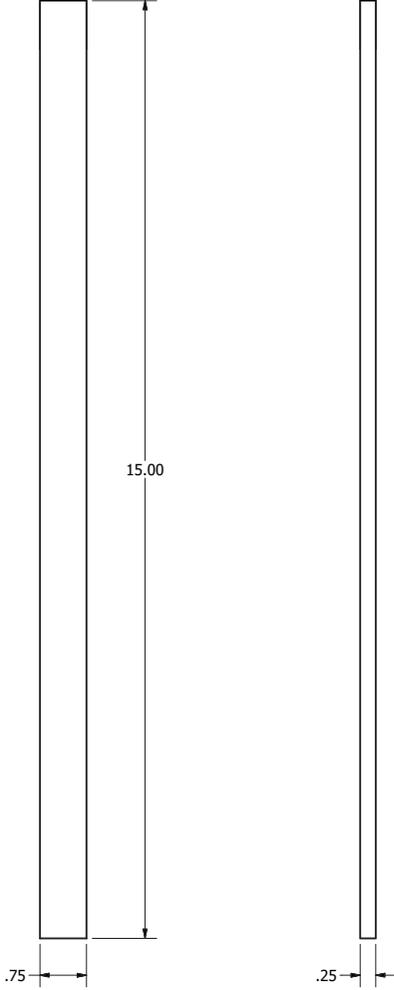
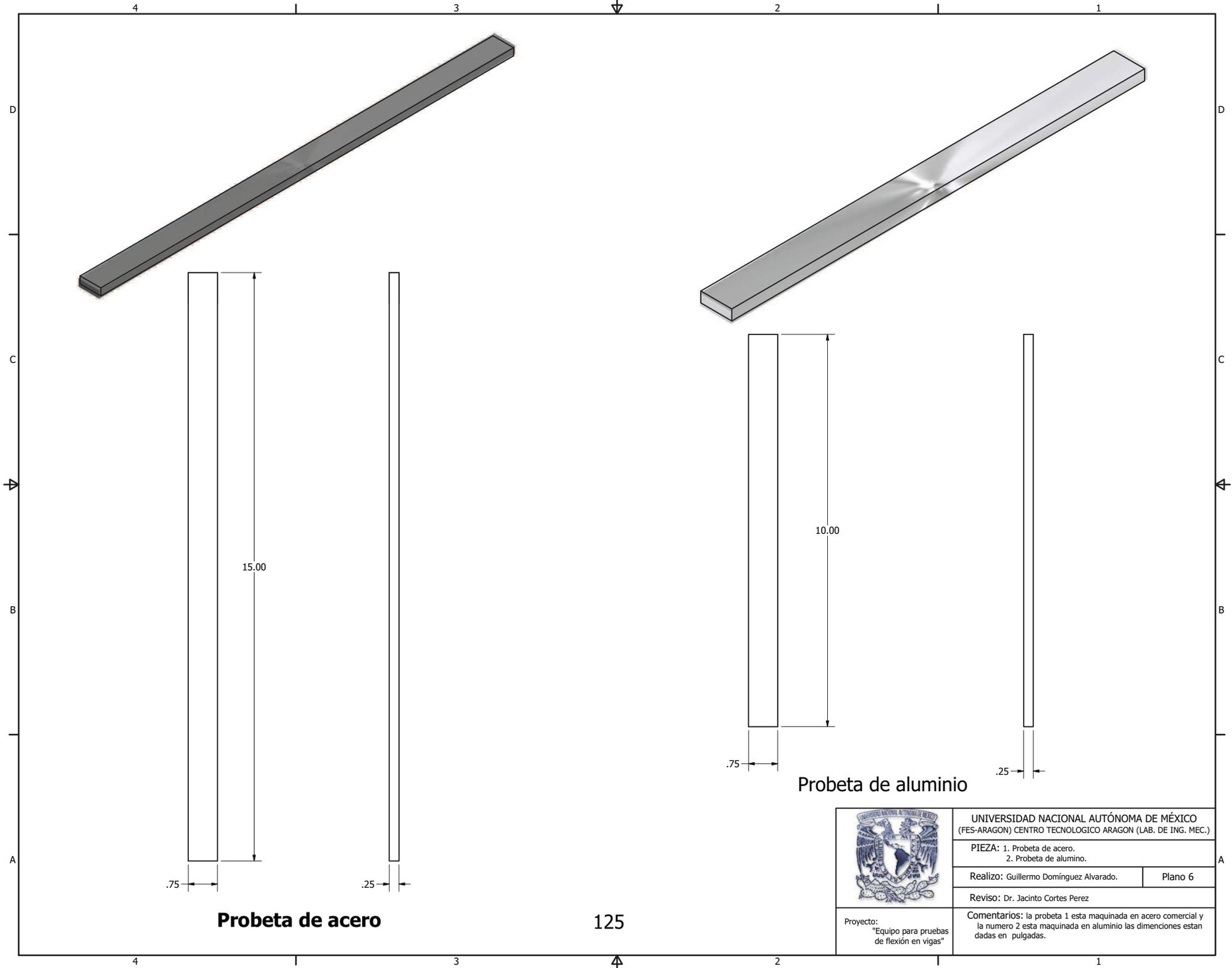
Comentarios: La barra de posición de carga y el soporte de gancho están maquinados en aluminio comercial y las roscas y cuergas son estándar y las dimensiones están dadas en pulgadas.



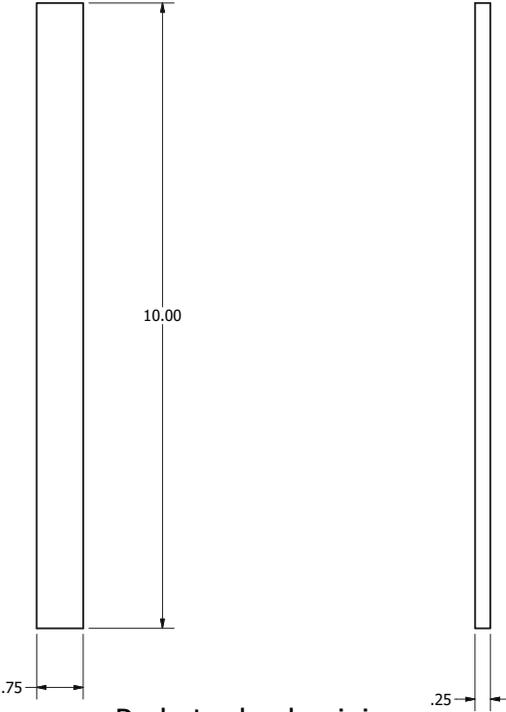
### 1. Protector de celda frontal

### 2. Protector de celda tracero

|   |   |         |
|---|---|---------|
|  | UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO<br>(FES-ARAGON) CENTRO TECNOLÓGICO ARAGON (LAB. DE ING. MEC.)   |         |
|   | PIEZA: 1. Protector de celda frontal.<br>2. Protector de celda tracero.   |         |
|   | Realizo: Guillermo Domínguez Alvarado.  | Plano 5 |
|   | Reviso: Dr. Jacinto Cortes Perez.   |         |
| Proyecto:<br>"Equipo para pruebas de flexión en vigas"                                | Comentarios: El protector de celda frontal y tracero están maquinados en nailamit los barrenos y cuerdas son standar las dimensiones están dadas en pulgadas. |         |

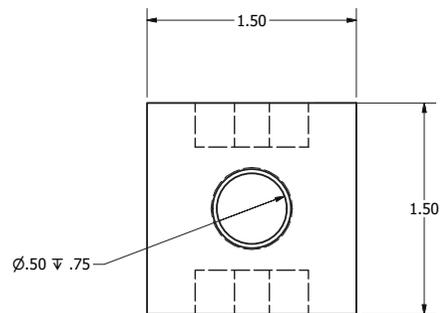
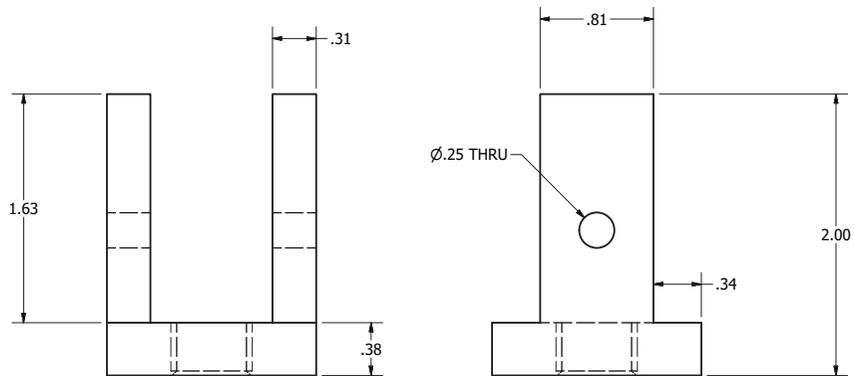
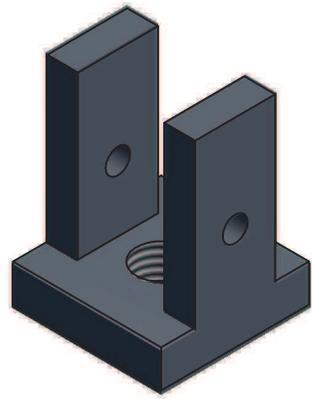


**Probeta de acero**

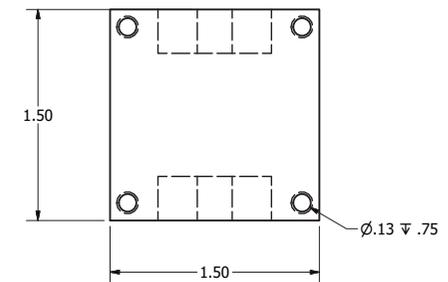
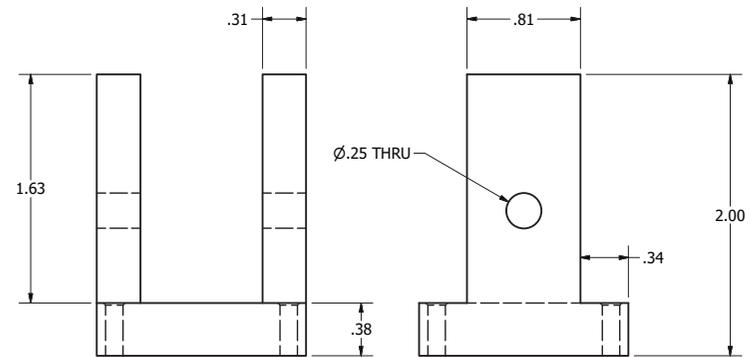
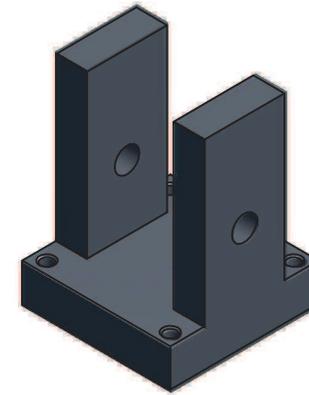


**Probeta de aluminio**

|   |   |         |
|---|---|---------|
|  | UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO<br>(FES-ARAGON) CENTRO TECNOLÓGICO ARAGON (LAB. DE ING. MEC.)   |         |
|   | PIEZA: 1. Probeta de acero.<br>2. Probeta de aluminio.  |         |
|   | Realizo: Guillermo Domínguez Alvarado.  | Plano 6 |
|   | Reviso: Dr. Jacinto Cortes Perez  |         |
| Proyecto:<br>"Equipo para pruebas de flexión en vigas"                                | Comentarios: la probeta 1 esta maquinada en acero comercial y la numero 2 esta maquinada en aluminio las dimensiones estan dadas en pulgadas. |         |



**1. Apoyo con rodamientos para columna instrumentada**



**2. Apoyo con rodamientos para columna sin instrumentar**



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
(FES-ARAGON) CENTRO TECNOLÓGICO ARAGON (LAB. DE ING. MEC.)

PIEZA: 1. Soporte de viga con rodamientos rosca central.  
2. Soporte de viga con rodamientos atornillable.

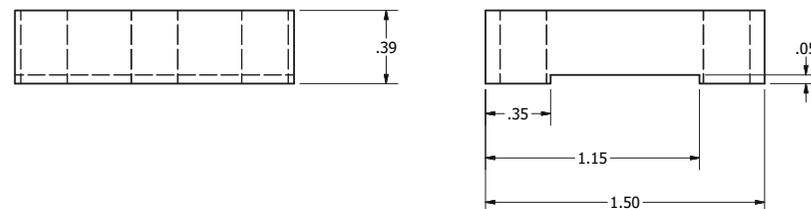
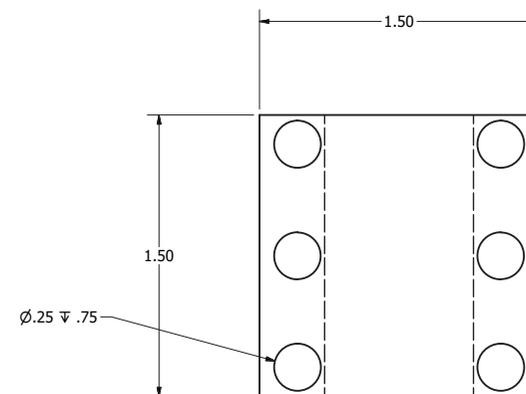
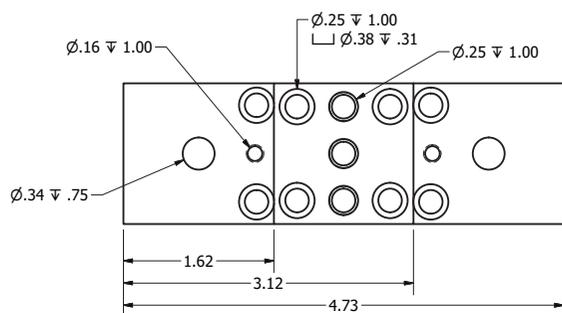
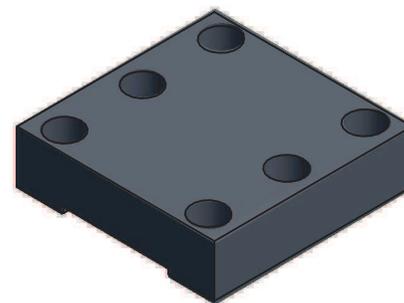
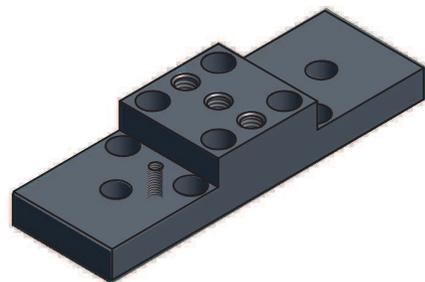
Realizo: Guillermo Domínguez Alvarado.

Plano 7

Reviso: Dr. Jacinto Cortes Perez.

Proyecto:  
"Equipo para pruebas  
de flexión en vigas"

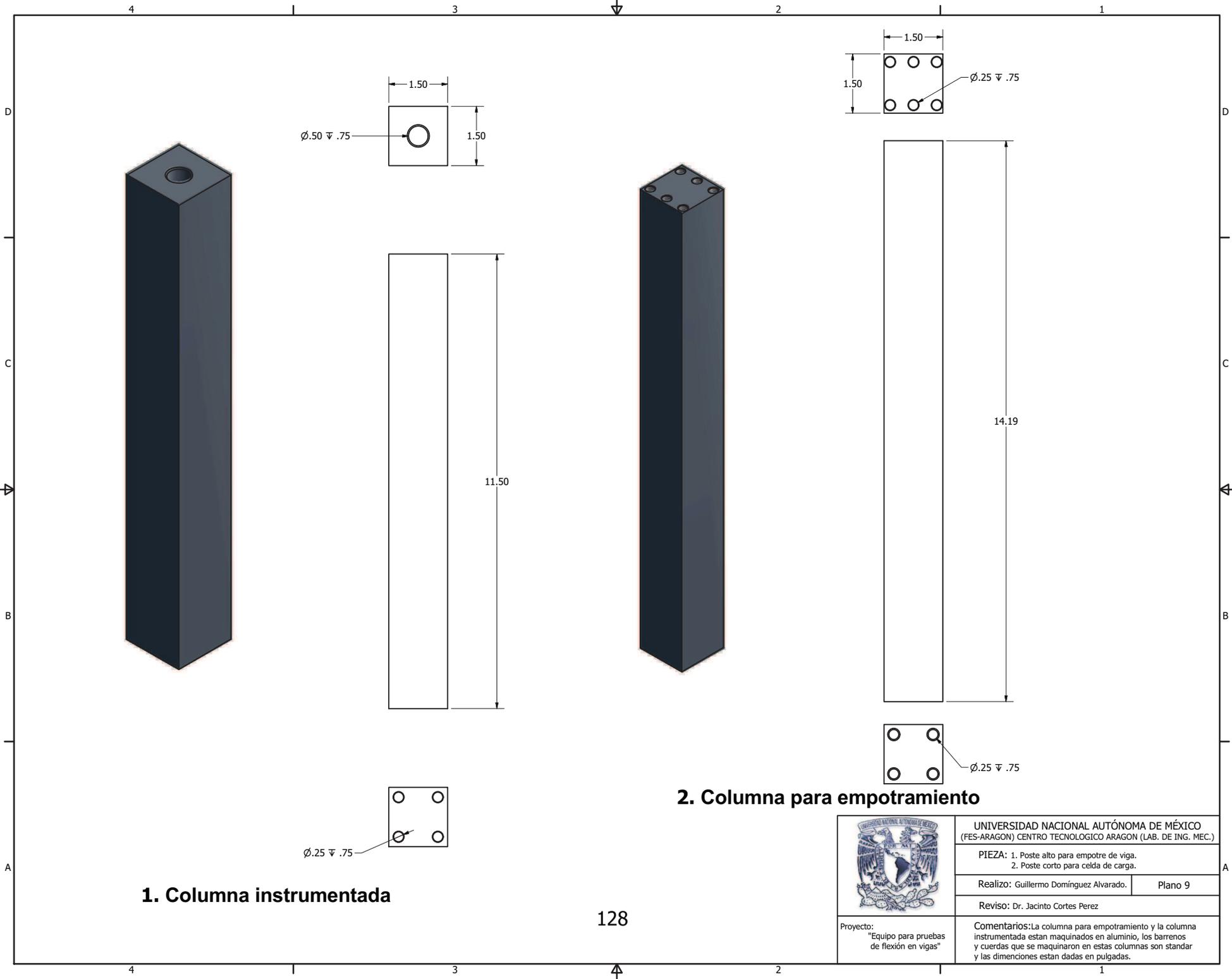
Comentarios: El apoyo con rodamientos para columna instrumentada y el apoyo con rodamientos para columna sin instrumentar están maquinados en aluminio comercial y las roscas y cuerdas maquinadas son de tamaño estándar las dimensiones están dadas en pulgadas.



### 1. Soporte universal

### 2. Soporte de viga tipo prensa

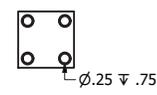
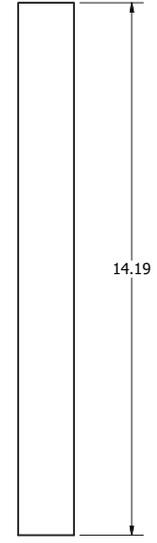
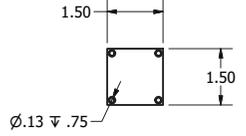
|   |   |         |
|---|---|---------|
|  | UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO<br>(FES-ARAGON) CENTRO TECNOLÓGICO ARAGON (LAB. DE ING. MEC.)   |         |
|   | PIEZA: 1. Soporte universal.<br>2. Soporte de viga tipo prensa.   | Plano 8 |
| Realizo: Guillermo Domínguez Alvarado.  |   |         |
| Reviso: Dr. Jacinto Cortes Perez.   |   |         |
| Proyecto:<br>"Equipo para pruebas<br>de flexión en vigas"                             | Comentarios: El soporte universal y el soporte de viga tipo prensa<br>estan fabricados en aluminio los barrenos y cuerdas son standar y<br>las dimensiones estan dadas en pulgadas. |         |



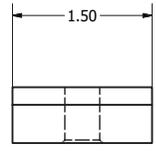
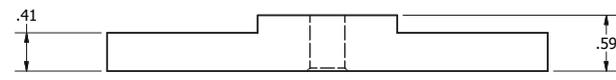
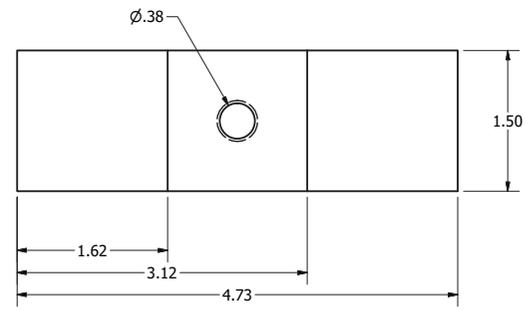
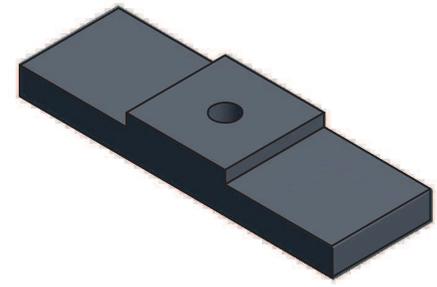
**1. Columna instrumentada**

**2. Columna para empotramiento**

|   |  |         |
|---|--|---------|
|  | UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO<br>(FES-ARAGON) CENTRO TECNOLÓGICO ARAGON (LAB. DE ING. MEC.)  |         |
|   | PIEZA: 1. Poste alto para empotre de viga.<br>2. Poste corto para celda de carga.  |         |
|   | Realizo: Guillermo Domínguez Alvarado.   | Plano 9 |
|   | Revisó: Dr. Jacinto Cortes Perez   |         |
| Proyecto:<br>"Equipo para pruebas de flexión en vigas"                                | Comentarios: La columna para empotramiento y la columna instrumentada están maquinadas en aluminio, los barrenos y cuerdas que se maquinaron en estas columnas son estándar y las dimensiones están dadas en pulgadas. |         |

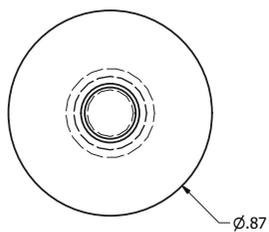
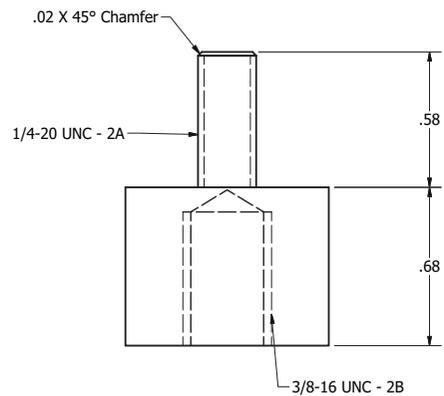


**1. Columna sin instrumentar**



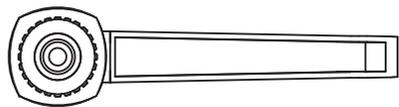
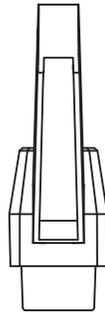
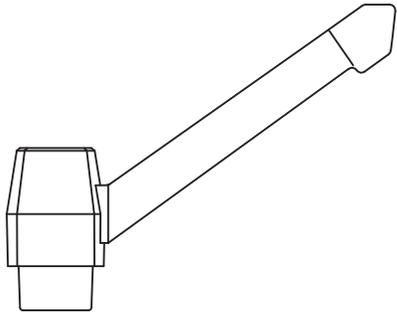
**2. Soporte liso**

|  |   |          |
|--|---|----------|
|  | UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO<br>(FES-ARAGON) CENTRO TECNOLÓGICO ARAGON (LAB. DE ING. MEC.)   |          |
|  | PIEZA: 1. Poste medio para soporte de viga con rodamientos.<br>2. Soporte liso.   |          |
|  | Realizo: Guillermo Domínguez Alvarado.  | Plano 10 |
|  | Reviso: Dr. Jacinto Cortes Perez.   |          |
| Proyecto:<br>"Equipo para pruebas de flexión en vigas" | Comentarios: La columna sin instrumentar esta fabricado en aluminio comercial las roscas que se maquinan son standar, el soporte liso esta fabricado de aluminio comercial y las dimensiones de ambas piezas estan dadas en pulgadas. |          |



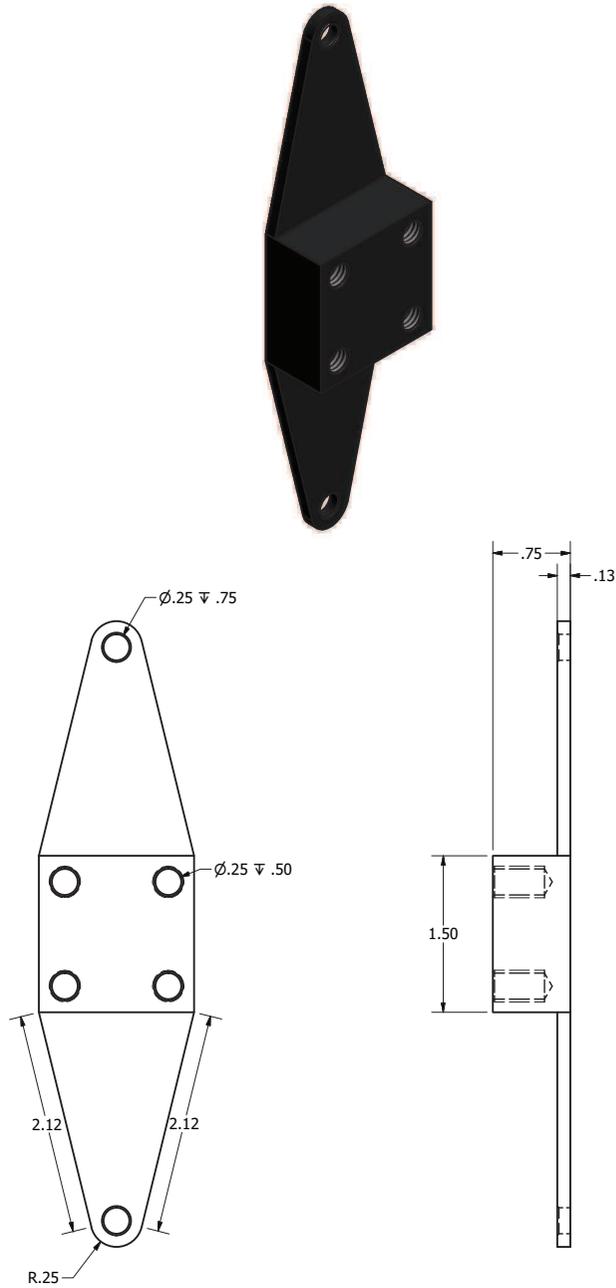
1. Buje

|   |   |          |
|---|---|----------|
|  | UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO<br>(FES-ARAGON) CENTRO TECNOLÓGICO ARAGON (LAB. DE ING. MEC.) |          |
|   | PIEZA: 1. Buje  |          |
|   | Realizo: Guillermo Domínguez Alvarado.  | Plano 11 |
| Reviso: Dr. Jacinto Cortes Perez.   |   |          |
| Proyecto:<br>"Equipo para pruebas<br>de flexión en vigas"                             | Comentarios: El buje fue manufacturado en latón para dar mayor<br>resistencia al desgaste             |          |

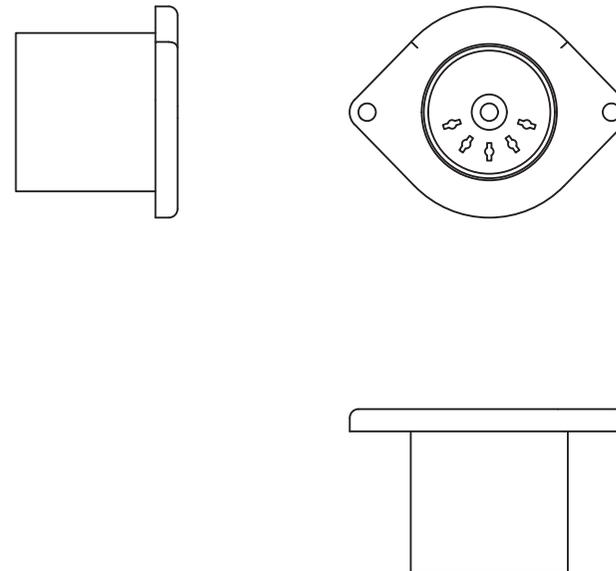


**1. Manija de apriete**

|   |  |          |
|---|--|----------|
|   | UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO<br>(FES-ARAGON) CENTRO TECNOLÓGICO ARAGON (LAB. DE ING. MEC.)  |          |
|   | PIEZA: 1. Manija de apriete<br>2. Micrometro   |          |
|   | Realizo: Guillermo Dominguez Alvarado.   | Plano 12 |
|   | Reviso: Dr. Jacinto Cortes Perez   |          |
| Proyecto:<br>"Equipo para pruebas<br>de flexión en vigas" | Comentarios: La manija de apriete esta fabricada con partes de<br>plastico con un ingerto que tiene una cuerda interior en acero<br>en donde se ensambla el perno que dara el apriete. |          |

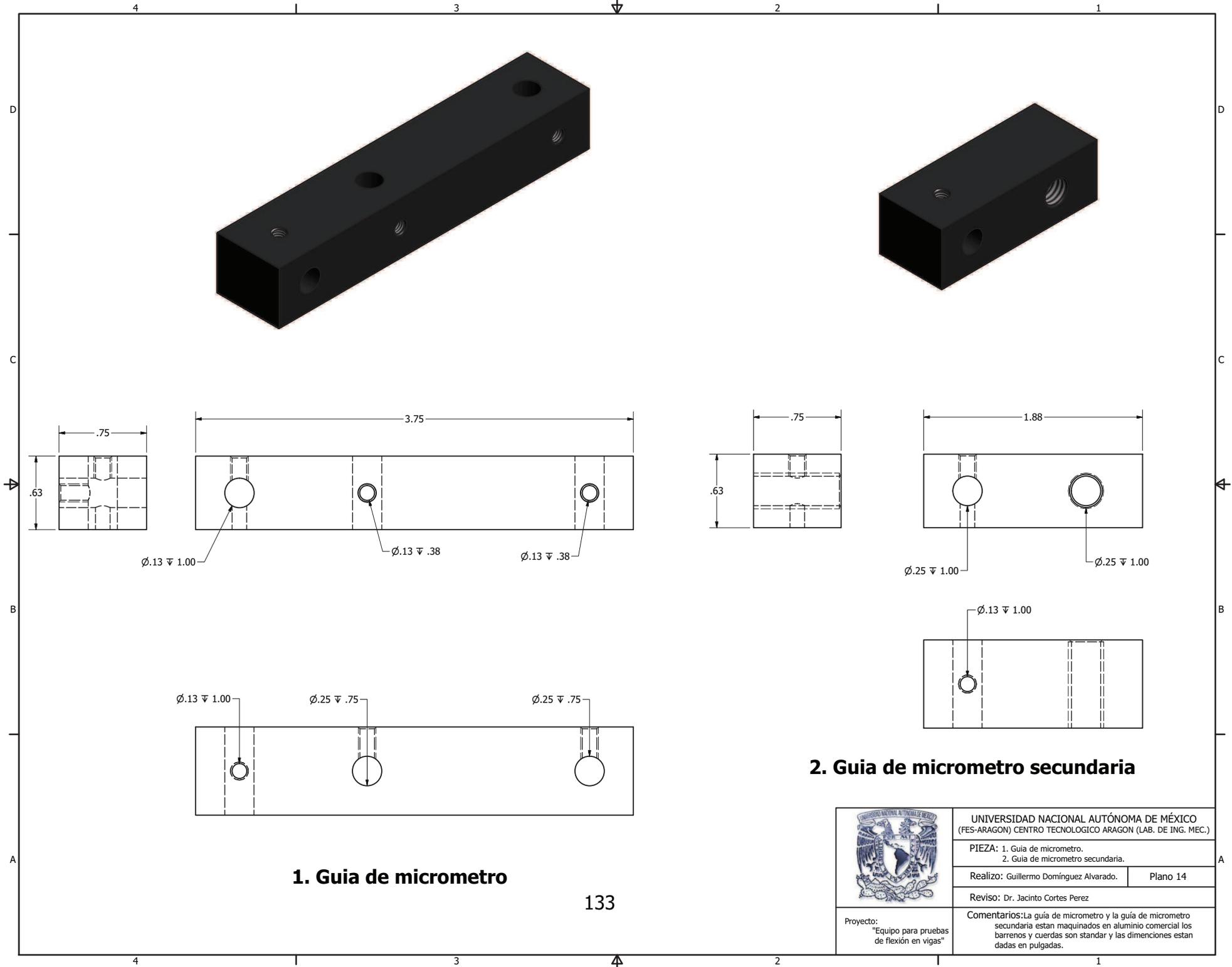


**1. Soporte para el equipo de medición**



**2. Conector plug**

|  |   |          |
|--|---|----------|
|  | UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO<br>(FES-ARAGON) CENTRO TECNOLÓGICO ARAGON (LAB. DE ING. MEC.)   |          |
|  | PIEZA: 1.Zapata de para sujetar el equipo medidor.<br>2.Conector plug.  |          |
|  | Realizo: Guillermo Domínguez Alvarado.  | Plano 13 |
|  | Reviso: Dr. Jacinto Cortes Perez  |          |
| Proyecto:<br>"Equipo para pruebas de flexión en vigas" | Comentarios: El soporte para el equipo de medición fue maquinada en aluminio comercial, los barrenos y cuerdas son standar y las dimensiones estan dadas en pulgadas. |          |

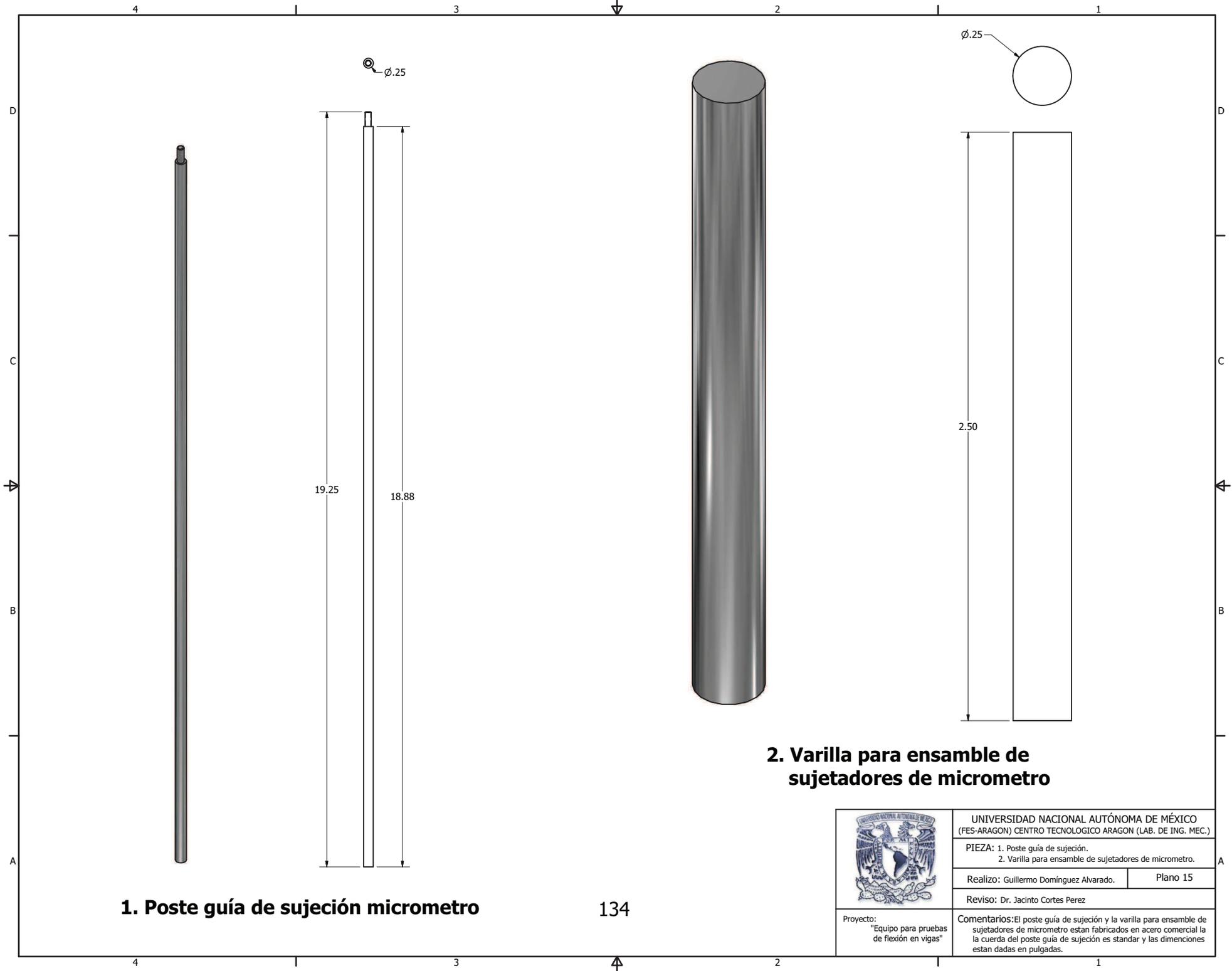


**1. Guia de micrometro**

133

**2. Guia de micrometro secundaria**

|   |   |          |
|---|---|----------|
|  | UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO<br>(FES-ARAGON) CENTRO TECNOLÓGICO ARAGON (LAB. DE ING. MEC.)   |          |
|   | PIEZA: 1. Guia de micrometro.<br>2. Guia de micrometro secundaria.  |          |
|   | Realizo: Guillermo Domínguez Alvarado.  | Plano 14 |
|   | Reviso: Dr. Jacinto Cortes Perez  |          |
| Proyecto:<br>"Equipo para pruebas de flexión en vigas"                                | Comentarios: La guía de micrometro y la guía de micrometro secundaria están maquinados en aluminio comercial los barrenos y cuerdas son estándar y las dimensiones están dadas en pulgadas. |          |



**1. Poste guía de sujeción micrometro**

**2. Varilla para ensamble de sujetadores de micrometro**

|   |  |          |
|---|--|----------|
|  | UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO<br>(FES-ARAGON) CENTRO TECNOLÓGICO ARAGON (LAB. DE ING. MEC.)  |          |
|   | PIEZA: 1. Poste guía de sujeción.<br>2. Varilla para ensamble de sujetadores de micrometro.  |          |
|   | Realizo: Guillermo Dominguez Alvarado.   | Plano 15 |
|   | Reviso: Dr. Jacinto Cortes Perez   |          |
| Proyecto:<br>"Equipo para pruebas de flexión en vigas"                                | Comentarios: El poste guía de sujeción y la varilla para ensamble de sujetadores de micrometro estan fabricados en acero comercial la la cuerda del poste guía de sujeción es standar y las dimensiones estan dadas en pulgadas. |          |

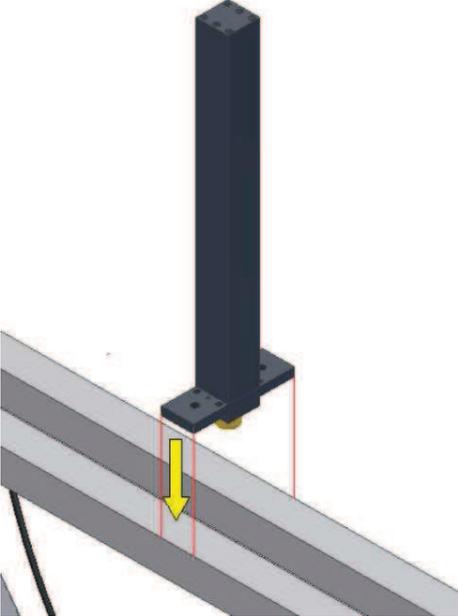
# APÉNDICE II

---

ENSAMBLES DE LAS PRÁCTICAS

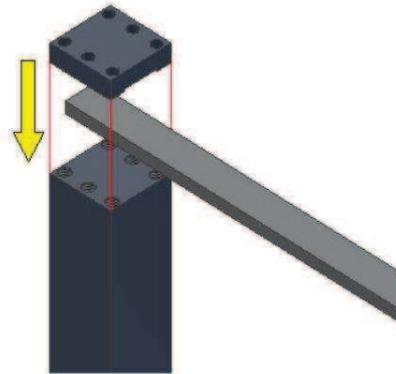


Ensamble No. 1 práctica 1 “VIGA EN CANTILEVER”

|   |  |
|---|--|
| <p><b>Armado:</b></p> <p>Para realizar el experimento, debemos seguir el procedimiento que a continuación se explica:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>▪ Coloque en el bastidor principal la columna para empotramiento a 15 pulg. Tomando como referencia la parte izquierda del mismo.</li></ul>   |   |
| <ul style="list-style-type: none"><li>▪ Por la parte de inferior del bastidor principal coloque el soporte liso e inserte el tornillo de la manija de apriete en el barreno inferior del buje.</li></ul> <p> Ajuste el ensamble teniendo en cuenta el no apretar demasiado ya que se pueden dañar las cuerdas.</p> |  |



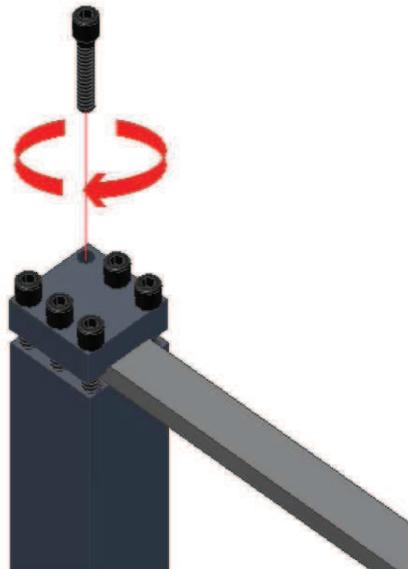
- En la parte superior de la columna para empotramiento se coloca el apoyo tipo prensa para simular empotramiento y la probeta instrumentada como se muestra en la figura.



- Coloque los 6 tornillos UNBRAKO de  $\frac{1}{4}$ \*1 en los barrenos del apoyo tipo prensa para simular empotramiento

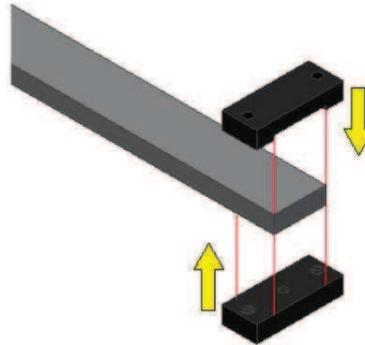


Ajuste el ensamble sin apretar demasiado trate de no dañar las cuerdas tome en cuenta que no debe existir movimiento.





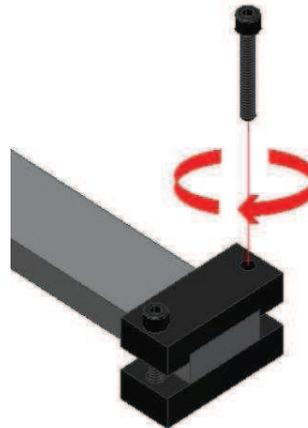
- En otro extremo de la viga instrumentada coloque el dispositivo de sujeción del aplicador de carga a la probeta.



- Coloque los dos tornillos UNBRAKO 1/8\*3/4 en los barrenos del dispositivo de sujeción del aplicador de carga a la probeta



Ajuste el ensamble sin apretar demasiado trate de no dañar las cuerdas tome en cuenta que no debe existir movimiento.





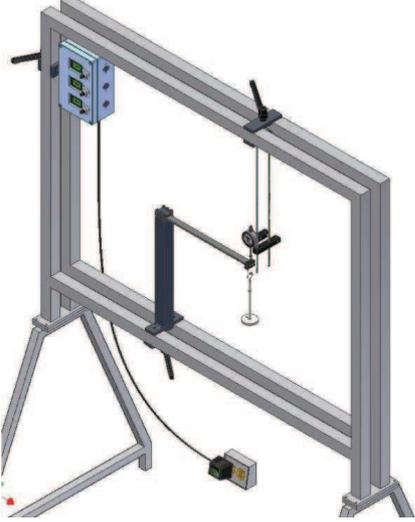
- Coloque el aplicador de carga en el gancho.



- Ajuste la base del micrómetro deslizando en la parte superior del bastidor principal hasta llegar a la posición indicada en la imagen.





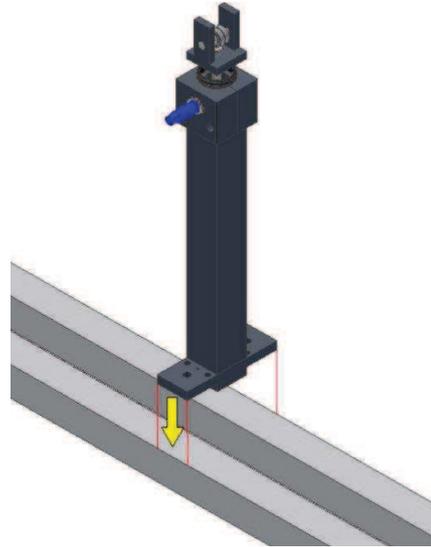
|   |  |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"><li>Finalmente verifique que todos los componentes del ensamble estén bien sujetos en el lugar indicado y que el micrómetro esté calibrado a cero.</li></ul>  |    |
| <ul style="list-style-type: none"><li>Coloque en el aplicador de carga la pesa de 5 N y tome la lectura del aparato de medición y del micrómetro, posteriormente aumente la carga en intervalos de 2N.</li></ul> <p>No olvide tomar las lecturas correspondientes para cada intervalo.</p>  <p>Tenga cuidado de que el sostén de carga (<b>L4</b>) no se balance al colocar las pesas.</p> |  |



## Ensamble No. 2 práctica 2 “DIAGRAMA DE CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE”

Armado :

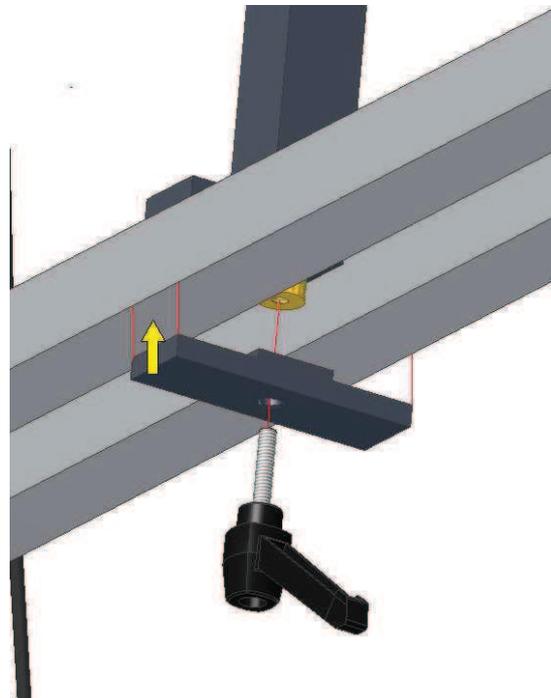
- Coloque en el bastidor principal la columna instrumentada a 12 pulg. tomando como referencia la parte izquierda del mismo.



- En la parte de inferior del bastidor principal coloque el soporte liso e inserte el tornillo de la manija de apriete en el barreno inferior del buje.



Ajuste el ensamble sin apretar demasiado ya que se pueden dañar las cuerdas. Pero tome en cuenta que no debe haber movimiento.

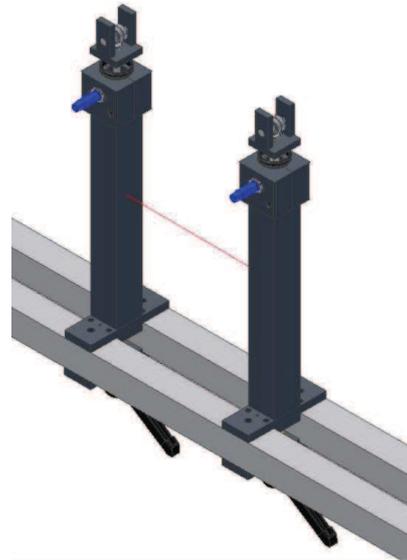




- Del mismo modo coloque otra columna instrumentada a 11 pulg. de la columna instrumentada anterior.



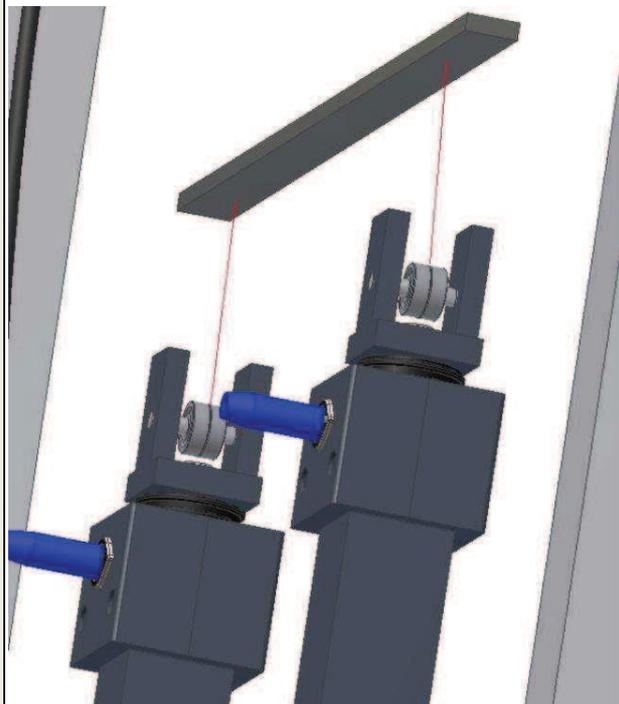
Verifique que la distancia entre postes sea la indicada.



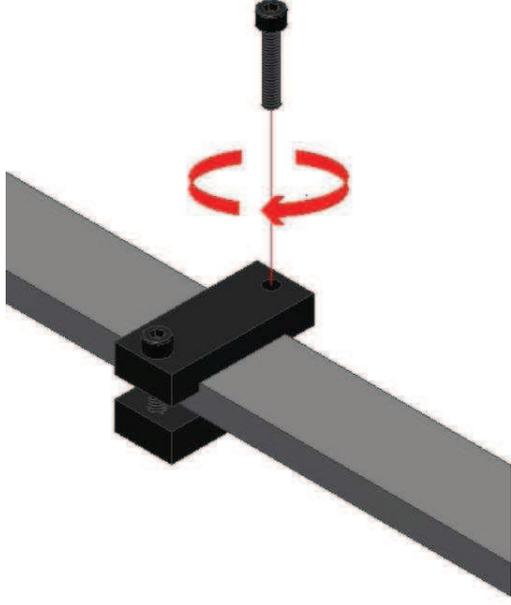
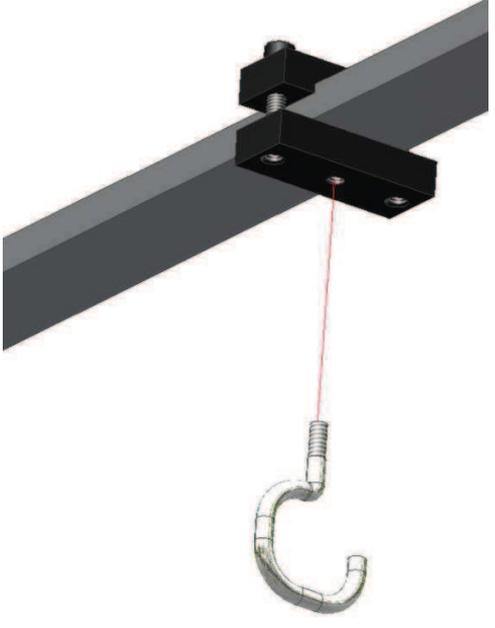
- Coloque la probeta instrumentada sobre el apoyo con rodamientos para columna instrumentada.



Tome en cuenta que debe estar perfectamente centrada y alineada.





|   |  |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"><li>▪ En la parte central de la probeta coloque:<br/>El dispositivo de sujeción del aplicador de carga a la probeta.</li></ul> <p>Coloque los dos tornillos UNBRAKO 1/8*3/4 en los barrenos del dispositivo de sujeción del aplicador de carga a la probeta.</p>  <p>Ajuste el ensamble sin apretar demasiado trate de no dañar las cuerdas tome en cuenta que no debe existir movimiento.</p> |   |
| <ul style="list-style-type: none"><li>▪ Inserte el gancho en el barreno que se encuentra en el dispositivo de sujeción del aplicador de carga a la probeta.</li></ul>   |  |



- Coloque el aplicador de carga en el gancho que se colocó anteriormente.



Evite que el sostén de pesas no se balancee.



- Ajuste la base del micrómetro deslizándola en la parte superior del bastidor principal hasta llegar a la posición indicada en la imagen.

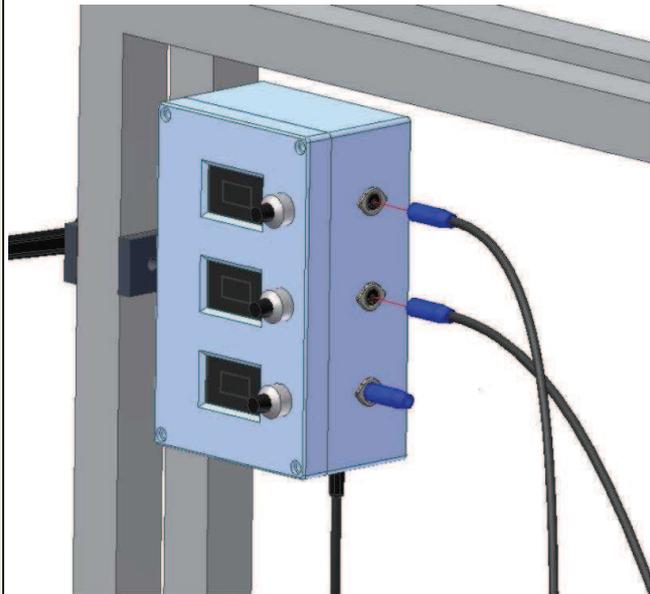




- Conecte los cables al plug del equipo medidor en las líneas 1 y 2.



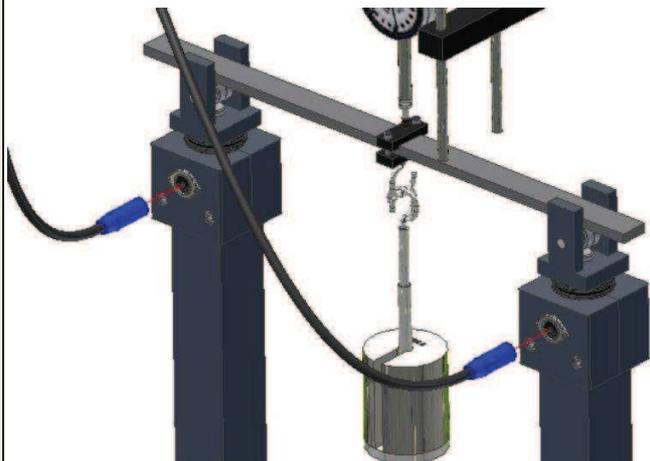
Verifique que los cables estén bien sujetos.



- Conecte los cables al plug de cada celda de carga como se indica en la figura.

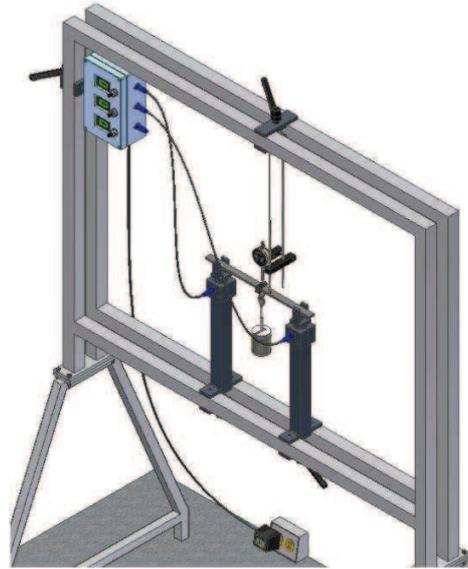


Verifique que los cables estén bien sujetos.





- Finalmente verifique que todos los componentes del ensamble estén bien sujetos en el lugar indicado y que tanto el aparato de medición y el micrómetro esté calibrado a cero.

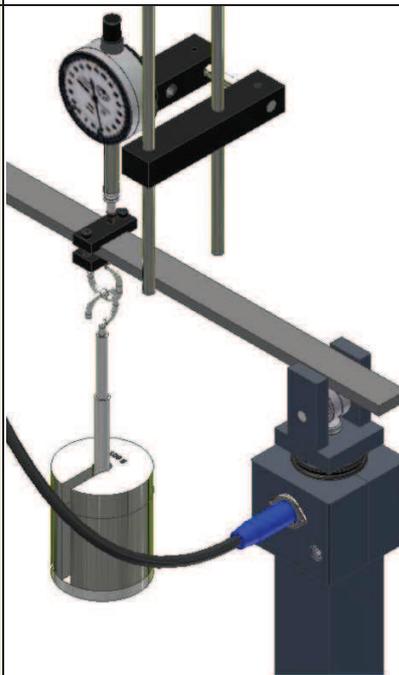


- Coloque en el aplicador de carga la pesa de 5 N y tome la lectura del aparato de medición y del micrómetro, posteriormente aumente la carga en intervalos de 2N.

No olvide tomar las lecturas correspondientes para cada intervalo.



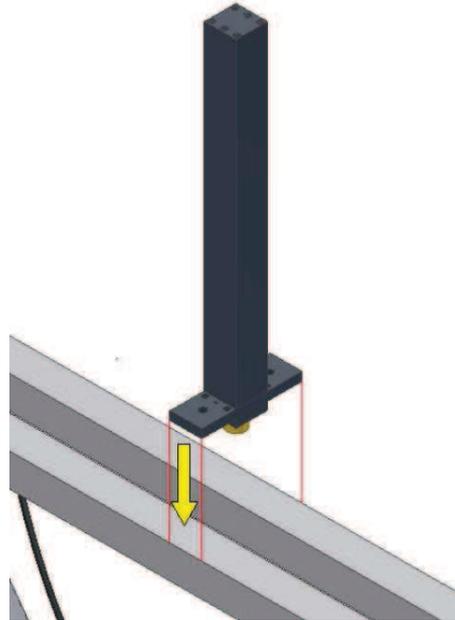
Tenga cuidado de que el aplicador de carga no se balance al colocar las pesas.



**Ensamble No. 3 practica 3 “VIGA INDETERMINADA”**

Armado:

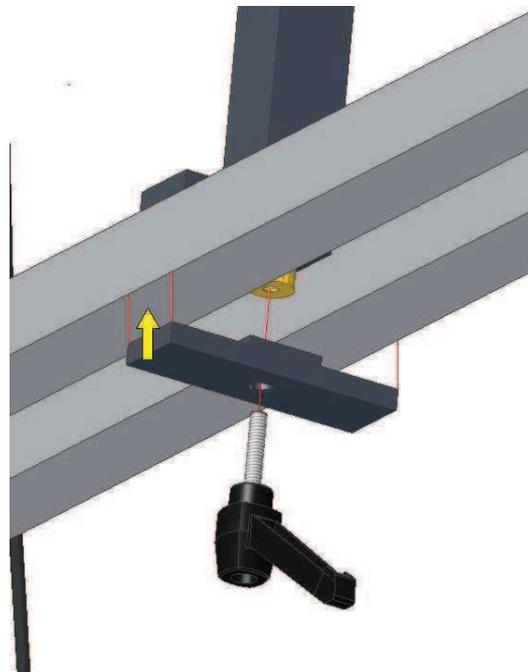
- Coloque en el bastidor principal la columna para empotramiento a 15 pulg, tomando como referencia la parte izquierda del mismo.



- En la parte de inferior del bastidor principal coloque el soporte liso e inserte el tornillo de la manija de apriete en el barreno inferior del buje.



Ajuste el ensamble sin apretar demasiado ya que se pueden dañar las cuerdas. Pero tome en cuenta que no debe haber movimiento.

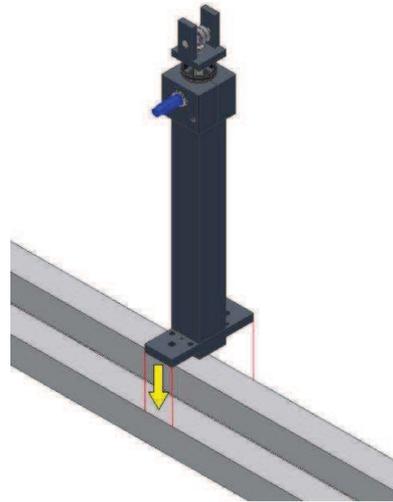




- Del mismo modo coloque la columna instrumentada a 13 pulg. de la columna para empotramiento.



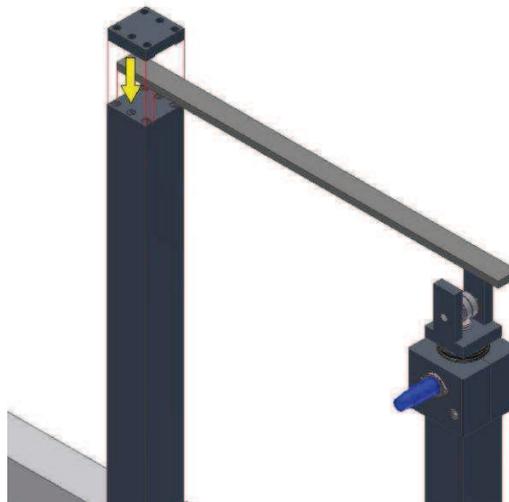
Verifique que la distancia entre postes sea la indicada.



- Sobre la parte superior de la columna para empotramiento coloque el apoyo tipo prensa para simular empotramiento y además ajuste la probeta en el apoyo con rodamientos para columna instrumentada como se muestra en la imagen.



Tome en cuenta que debe estar perfectamente centrada y alineada.

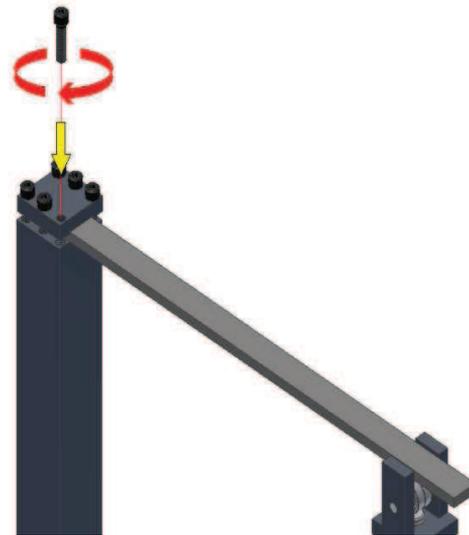




- Una vez que esta bien alineada la probeta en el apoyo con rodamientos para columna instrumentada y en el apoyo tipo prensa para simular empotramiento coloque los tornillos para fijar la probeta.



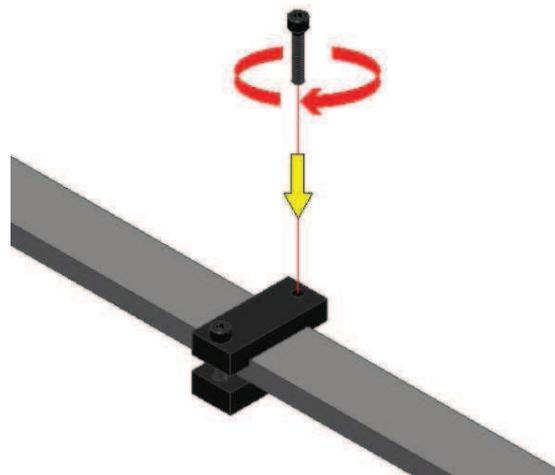
Ajuste el ensamble sin apretar demasiado trate de no dañar las cuerdas tome en cuenta que no debe existir movimiento.



- En la parte central de la probeta instrumentada coloque:

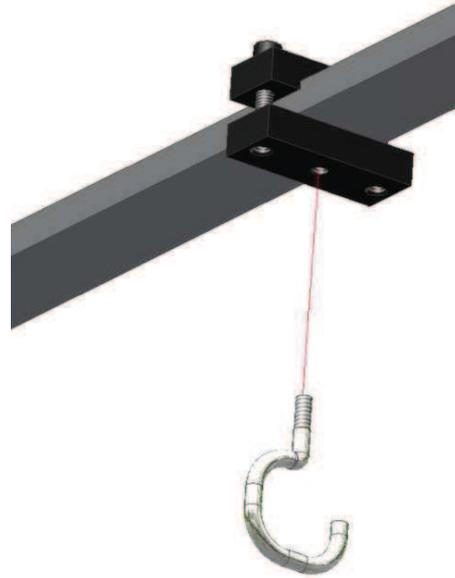
El dispositivo de sujeción del aplicador de carga a la probeta.

Coloque los dos tornillos UNBRAKO 1/8\*3/4 en los barrenos del dispositivo de sujeción del aplicador de carga a la probeta.





- Inserte el gancho en el barreno que se encuentra en la parte inferior del dispositivo de sujeción del aplicador de carga a la probeta.



- Coloque el aplicador de carga en el gancho que se colocó previamente.

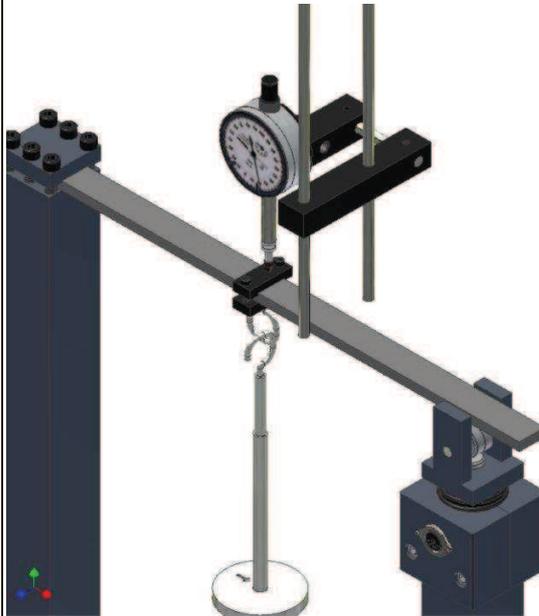


Evite que el sostén de pesas no se balancee.





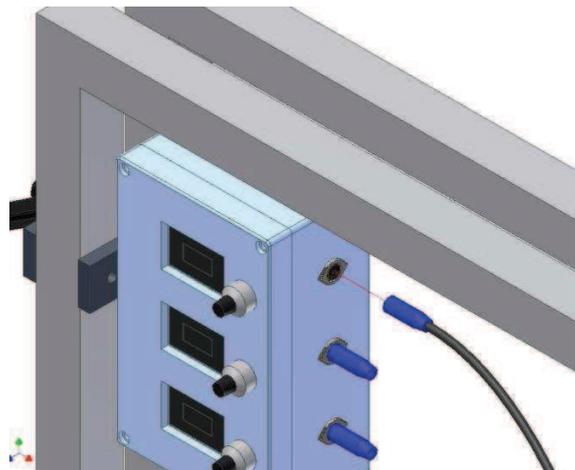
- Ajuste la base del micrómetro deslizando en la parte superior del bastidor principal hasta llegar a la posición indicada en la imagen.



- Conecte el cable al plug del equipo medidor en la líneas 1



Verifique que los cables estén bien sujetos.

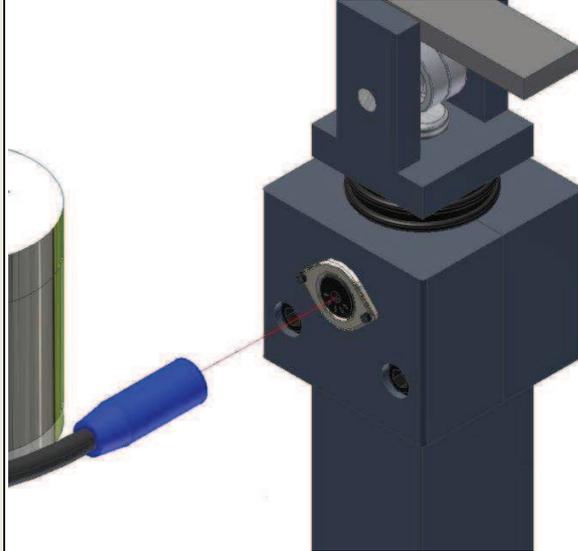




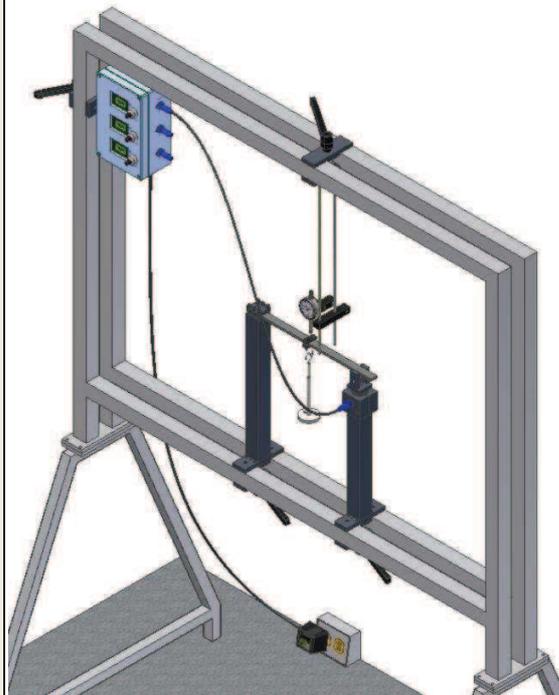
- Conecte el cable al plug de la celda de carga como se indica en la figura.



Verifique que los cables estén bien sujetos.



- Finalmente verifique que todos los componentes del ensamble estén bien sujetos en el lugar indicado, ajuste a cero el aparato de medición con la perilla para la línea 1, de igual manera ajuste el micrómetro.



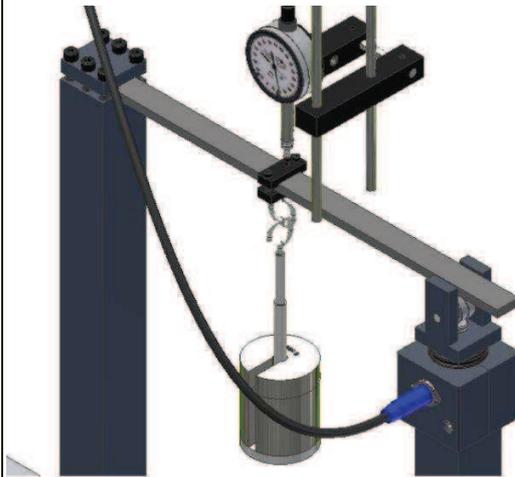


- Coloque en el aplicador de carga la pesa de 5 N y tome la lectura del aparato de medición y del micrómetro, posteriormente aumente la carga en intervalos de 2N.

No olvide tomar las lecturas correspondientes para cada intervalo



Tenga cuidado de que el aplicador de carga no se balancee al colocar las pesas.



# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---



1. A. C. Ugural & S. K. Fenster, *Advanced Strength and Applied Elasticity*, Third Edition, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey, capítulo 3, 4, 5.
2. Fred B. Seely and James O. Smith, *Resistencia de materiales*, traducción al español de la 4ª edición en inglés, Unión tipográfica editorial hispano americana, capítulo 1, 3.
3. E. J. Hearn, *Resistencia de Materiales Diseño de Estructuras y Maquinas*, 1ª edición en español.  
Traducción y adaptación de la primera edición en inglés de la obra *Mechanics*, by Edwin John Hearn  
Copyright under the international copyright union ©  
1977, by Pergamon Press LTD, capítulo 3.
4. *"Diseño y Construcción de un Equipo Didáctico para el Estudio de Reacciones en Armaduras"*, tesis para obtener el título de Ingeniero Mecánico, Presentada por: Fernando Néstor García Castillo, capítulo 1.
5. Serie schaum *Resistencia de materiales*, capítulo 3.
6. Ferdinand P. Beer, *Mecánica de materiales*, traducido de la primera edición en inglés de *MECHANICS OF MATERIALS*, McGRAW-HILL, Capítulo 1, 4.
7. Andrew Pytel & Ferdinand L. Singer, *Resistencia de Materiales*, Traducido de la cuarta edición.  
Traducido de la cuarta edición en inglés de *Strength of Materials*.  
Copyright © 1987, by Andrews Pytel/ Ferdinand S. Singer.  
Published by arrangement with Harper & Row, Capítulo 1, 2.
8. Egor P. Popov, *Introducción a la Mecánica de sólidos*.  
Versión autorizada en español de la obra publicada en inglés por Prentice - Hall, Inc. Bajo el título *Introduction to Mechanics of Solids* © 1968 by Prentice- Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, Capítulo 1.
9. Robert W. Fitzgerald, *Mecánica de Materiales*, edición autorizada.  
Versión en español de la obra *Mechanics of Materials*, second edition, De Robert W. Fitzgerald, publicada originalmente por © Addison – Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, E.U.A.  
Esta edición en español es la única autorizada en español, Capítulo 4.



10. Gere – Timoshenko, Mecánica de materiales, 2ª edición  
Mecánica de Materiales, segunda edición  
Versión en español de la obra Mechanics of Materials – Second Edition,  
Por James M. Gere & Stephen P. Timoshenko.  
Edición original en inglés publicada por PWS Publishers,  
Copyright © 1984, en Estados Unidos de America, capítulo 1, 4.
11. Serie de Compendios Schaum, Teoría y Problemas de Diseño de Maquinas.  
Traducido de la primera edición en inglés de  
Machine Design Theory and Problems  
Copyright © 1967, by McGraw – Hill, Book, Co., Inc., U.S.A
12. Instruction bulletin B-127-14, Vishay Micro – Measurements, documento No. 11127,  
revision 17 - Enero – 05
13. W. Dally James, F. Riley William, Experimental Stress Analysis, 3a ed., Mc Graw Hill,  
pag. 129-134