



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

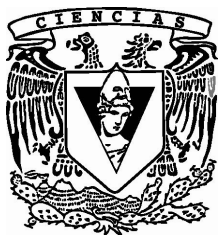
---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**Ecuaciones diferenciales parciales de primer  
orden para describir  
sistemas ópticos anisotrópicos**

**T E S I S**  
**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**  
**MATEMÁTICO**  
**P R E S E N T A:**  
**MANRIQUE GARCÍA FLORES**



**DIRECTOR DE TESIS:**  
**DR. JUAN ADRIÁN REYES CERVANTES**  
**2011**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de Datos del Jurado

### 1. Datos del alumno

Apellido paterno  
Apellido materno  
Nombre(s)  
Teléfono  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Carrera  
Número de cuenta

### 1. Datos del alumno

García  
Flores  
Manrique  
21579662  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
077790398

### 2. Datos Tutor

Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

### Datos Tutor

Dr.  
Juan Adrián  
Reyes  
Cervantes

### 3. Datos del sinodal 1

Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

### Datos del sinodal 1

Dra.  
Catherine  
García  
Reimbert

### 4. Datos del sinodal 2

Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

### Datos del sinodal 2

Dr.  
Carlos Ignacio  
Mendoza  
Ruiz

### 5. Datos del sinodal 3

Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

### Datos del sinodal 3

Dr.  
Fidel  
Casarrubias  
Segura

### 6. Datos del sinodal 4

Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

### Datos del sinodal 4

Dr.  
Enrique  
Camarillo  
García

### 7. Datos del trabajo escrito

Título

### Datos del trabajo escrito

Ecuaciones diferenciales parciales de primer orden para describir sistemas ópticos anisotrópicos

Subtítulo

Número de páginas

Año

78 p

2011

## ***Agradecimientos***

Ahora celebro el fin de una etapa especial en mi vida, por lo que agradezco a mi familia. A quienes jamás encontraré la forma de agradecer el cariño y comprensión brindada en los momentos buenos y malos de mi vida, hago este triunfo compartido, y solo espero que comprendan que mis ideales y esfuerzos son inspirados en cada uno de ellos.

A mi esposa Rosa Hernández. Gracias por estar siempre conmigo.  
A mi hijo Eduardo. Gracias por la simpleza con que ve las cosas.  
En especial a mi hija Laura Itzel. Gracias por demostrarme que se puede.

Agradezco a mis padres

A mi madre Isabel por creer siempre en mí. †

A mi padre Guillermo por el apoyo brindado y por haber comprendido que siempre debimos estar juntos.

Agradezco también a mi hermano Sinhué por haber compartido juntos parte de nuestras vidas.

Finalmente al Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes por haber confiado en mí, gracias por su paciencia y certera dirección de éste trabajo.

Gracias a todos.

# Índice general

0.1. Introducción . . . . .	4
<b>1. Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden</b>	<b>7</b>
1.0.1. Definiciones previas . . . . .	7
1.0.2. Ecuaciones diferenciales totales . . . . .	8
1.0.3. Generación de ecuaciones en derivadas parciales . . . . .	9
1.0.4. Ecuaciones diferenciales parciales de primer orden . . . . .	11
1.0.5. Eliminación de funciones arbitrarias . . . . .	11
1.0.6. Ecuaciones diferenciales de primer orden en $n$ variables .	18
1.0.7. Superficies ortogonales para un sistema dado de superficies	19
1.0.8. Ecuaciones diferenciales parciales no lineales de primer orden. Método de Charpit . . . . .	22
<b>2. Mesofases</b>	<b>28</b>
2.0.9. Estructuras moleculares . . . . .	29
2.0.10. Clasificación y tipos . . . . .	32
2.0.11. Nemáticos . . . . .	33
2.1. Propiedades elásticas . . . . .	34
2.1.1. Deformaciones elásticas . . . . .	35
2.2. Propiedades dieléctricas . . . . .	35
2.3. Energía eléctrica . . . . .	35
<b>3. Fundamentos de óptica geométrica</b>	<b>37</b>
3.0.1. Aproximación asintótica para longitudes de onda pequeñas	37
3.1. Ecuación Eikonal . . . . .	39
<b>4. Medios anisotrópicos</b>	<b>44</b>
4.1. Óptica geométrica de cristales . . . . .	44
4.1.1. Descomposición de Magnético Transversal, TM, y Eléc- trico Transversal, TE. . . . .	45

<b>5. Aplicaciones ópticas de las ecuaciones diferenciales parciales</b>	<b>51</b>
5.1. Trayectorias en un medio inhomogéneo . . . . .	51
5.1.1. Ecuación característica utilizando el formalismo de Charpit	55
5.2. Propagación del rayo a través de una celda plana . . . . .	61
5.2.1. Ecuación para la configuración axial . . . . .	62
<b>6. Notas Finales y Perspectivas</b>	<b>74</b>

# Índice de figuras

1.1.	Sea la superficie $z = f(x, y)$ y el punto arbitrario $M$ en ésta. . .	15
1.2.	Superficies $f = c_1$ , $f = c_2$ , y $f = c_3$ normales a $z = \varphi(x, y)$ . . .	21
2.1.	Secuencias posibles de un material cristal líquido. . . . .	29
2.2.	Estructura química para el cristal líquido nemático 5CB, el cual consta de dos anillos de benceno, unidos por un enlace rígido. .	30
2.3.	Estructura general para cristales líquido calamítico. . . . .	31
2.4.	Esquema de la configuración de un cristal líquido nemático. . . .	34
5.1.	Dibujo esquemático de las frente de ondas (líneas rectas que cruzan el origen) y de las trayectorias de los rayos (círculos concéntricos). . . . .	53
5.2.	Rayos deflactados en una gota de cristal líquido nemático en configuración radial. . . . .	60
5.3.	Trayectoria del rayo dentro de la celda variando el ángulo de incidencia $\alpha$ . . . . .	63
5.4.	Representación de una configuración axial en el plano cartesiano.	64
5.5.	Trayectoria del rayo para diferentes ángulos de incidencia. . . .	65
5.6.	Trayectoria del rayo con $q$ fija y variando a $p$ en diferente ángulo de incidencia $\alpha$ . . . . .	68
5.7.	Frente de onda correspondientes al modelo bidimensional. . . . .	71
5.8.	Trayectorias de rayo correspondientes al modelo anisotrópico axial . . . . .	72

## 0.1. Introducción

El estudio de la propagación de la luz en cristales líquidos es un problema difícil de resolver debido a que estos materiales son medios anisotrópicos e inhomogéneos, lo cual hace que las ecuaciones de propagación que los describen tengan coeficientes dependientes de las coordenadas y estén acopladas a través de las componentes del tensor dieléctrico del medio. Esta razón junto con su potencial de aplicación han despertado un gran interés en la óptica de cristales líquidos en los últimos años, sin embargo la mayoría de los estudios se han limitado a considerar geometrías planas. Así por ejemplo, para describir una onda plana incidente en un nemático estratificado en una dirección se han utilizado formalismos numéricos como el de las matrices de  $4 \times 4$  de Barreman [1] y otras aproximaciones basadas en la óptica geométrica [2]. Se han estudiado también los modos electromagnéticos en cavidades cilíndricas utilizando tanto esquemas numéricos [3] como la bien conocida aproximación WKB [4]. Si bien es cierto que la propagación de ondas en medios lineales es un problema común en óptica los medios involucrados dependen de más de una coordenada, la propagación por estos medios pueden calcularse numéricamente en un tiempo razonable, solamente para muestras cuyo tamaño no excedan  $10^4$  longitudes de onda cúbica [5]. Estas limitaciones han originado un nuevo interés por aproximaciones asintóticas de los campos electromagnéticos como las de la óptica geométrica motivado a su vez por necesidades tecnológicas. Así por ejemplo, se describen configuraciones tridimensionales que sobrepasan los límites de cómputo mencionados, las cuales surgen al diseñar pantallas de cristal líquido con ángulos de visión amplia [6]. En efecto, debido a que la intensidad de la luz reflejada por una celda de cristal líquido, cuya configuración está estratificada en la dirección normal, depende críticamente del ángulo de observación, se han diseñado celdas en donde mediante la aplicación de campos eléctricos paralelos



a la superficie de la celda nemática se consigue distorsionar adicionalmente la configuración en direcciones distintas a la normal. De esta manera, el ángulo de máxima intensidad de reflexión será distinto para cada uno de los sectores del nemático en donde actúa el campo por lo que dichos sectores contribuirán a la luz reflejada con ángulo de máxima intensidad distinto, dando lugar en conjunto mediante la superposición a una pantalla de ángulo de visión amplia. Esto muestra que las muestras de cristal líquido cuyas configuraciones bidimensionales y tridimensionales son también de interés tecnológico.

Los trabajos pioneros dedicados a analizar la propagación de la luz en gotas nemáticas [7] consideran una anisotropía dieléctrica pequeña y suponen que a pesar de que los rayos ópticos cambian su fase pero no cambian de dirección, es decir, los efectos refractivos que derivan de los cambios locales en el índice de refracción ocasionados por la configuración nemática son completamente despreciados. Estos refractivos son importantes en medios birrefringentes e inhomogéneos tales como los cristales líquidos aún para valores moderados de la anisotropía dieléctrica, y son capaces de curvar los haces ópticos e inducir cambios locales en la fase que den lugar a patrones de difracción más complejos. De hecho los efectos refractivos son los responsables de la dispersión múltiple, responsable de la apariencia turbia de los cristales líquidos polidispersos en ausencia de un campo eléctrico [8].

El propósito de esta tesis es revisar los métodos que permiten resolver de manera formal la ecuación de la Eikonal anisotrópica que es una ecuación diferencial parcial de primer orden que describe en el límite óptico la propagación de ondas electromagnéticas en medios anisotrópicos e inhomogéneos. Para este fin se divide la tesis en los siguientes capítulos.

En el capítulo 1 se revisan las ecuaciones en derivadas parciales de primer grado. Se define la terminología en general, se plantean ecuaciones diferenciales totales o de Pfaff, se revisan algunos teoremas para encontrar la solución

general de una ecuación diferencial parcial lineal. Se presentan ejemplos de superficies ortogonales para un sistema dado de superficies, se hace una revisión del método de Charpit [9] para encontrar la integral completa de ecuaciones diferenciales parciales no lineales de primer orden y otros casos particulares. Este formalismo de Charpit lo aplicaremos en el último capítulo.

En el capítulo 2 se explican las clasificaciones más comunes de los cristales líquidos y las propiedades que serán importantes para nuestro objetivo. En el capítulo 3 se presentan los fundamentos de óptica geométrica en medios homogéneos, isotrópicos y a través de las ecuaciones de Maxwell se deduce la ecuación Eikonal para medios isotrópico.

En el capítulo 4 se introduce el tensor dieléctrico obteniendo las ecuaciones de Maxwell para medios anisotrópicos e inhomogéneos deduciendo las ecuaciones Eikonales, válidas en el límite óptico geométrico para los modos transversos eléctricos y magnéticos.

Las ecuaciones eikonales en éste límite son ecuaciones de primer orden no lineales. En el último capítulo se resuelven ecuaciones tipo eikonal que son ecuaciones diferenciales parciales de primer orden utilizando el método de Charpit. Se encuentra la solución que cumple las condiciones iniciales a través de sus curvas características las cuales se interpretan como una expresión que nos permite describir su trayectoria.

# Capítulo 1

## Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

En este capítulo realizaremos una revisión de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden y sus métodos de solución. Empezaremos con una serie de definiciones de lo más general.

Veremos la forma de las ecuaciones diferenciales totales y la generación de ecuaciones en derivadas parciales. Seguiremos con la aplicación de ecuaciones lineales diferenciales parciales.

Para finalizar analizaremos la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales, veremos el método de Charpit, así como una serie de casos particulares que nos facilitaran algunos de los pasos del método general. Este método lo utilizaremos en las secciones siguientes para resolver ecuaciones ópticas en medios anisotrópicos.

### 1.0.1. Definiciones previas

Se llaman *ecuaciones diferenciales parciales* o *ecuaciones en derivadas parciales* (EDP) a aquellas ecuaciones diferenciales en las que la función incógnita depende de más de una variable independiente.

Trataremos el caso de dos variables independientes, que las denotaremos por  $x$  e  $y$ , mientras que la función incógnita la denotaremos por  $z(x, y)$ .

Las ecuaciones se expresan de la siguiente forma:

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dots) = 0.$$

También podemos escribir las derivadas parciales de forma compacta

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, \dots) = 0. \tag{1.1}$$

Definimos el *orden* de una EDP como el mayor de los órdenes de las derivadas parciales que ocurren en la ecuación.

Una *solución* o *integral* de una EDP es una función  $z = z(x, y)$  que satisface la ecuación al sustituir en ella dicha función y sus derivadas parciales.

Si interpretamos  $x, y$  y  $z$  como las coordenadas cartesianas de un punto en el espacio, una integral  $z = z(x, y)$  de la ecuación (1.1) representa una superficie que se conoce con el nombre de *superficie integral* [10].

## 1.0.2. Ecuaciones diferenciales totales

La expresión

$$\sum_{i=1}^n F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i$$

en la que  $F_i$  con  $(i = 1, 2, \dots, n)$  son funciones de alguna o todas las variables independientes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , se llama una forma diferencial de *Pfaff* [9], en  $n$  variables. Similarmente la relación

$$\sum_{i=1}^n F_i dx_i = 0 \tag{1.2}$$

se llama *ecuación diferencial total* o *ecuación de Pfaff* [10].

En el caso de dos variables podemos escribir la ecuación (1.2) en la forma

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{1.3}$$

la cual es equivalente a

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.4)$$

si escribimos

$$f(x, y) = -\frac{P}{Q}.$$

Las funciones  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  son funciones conocidas de  $x$  y  $y$ , de modo que  $f(x, y)$  está definida únicamente en cada punto del plano  $XY$  en el que las funciones de  $P$  y  $Q$  se definen. En particular, si estas funciones son univaluadas, entonces  $\frac{dy}{dx}$  es un solo valor, por lo que la solución de la Ec. (1.3), que cumple las condiciones de contorno  $y = y_0$  cuando  $x = x_0$  consiste en la curva que pasa por este punto y cuya tangente en cada punto se define por la Ec. (1.4). Este argumento geométrico simple muestra que la ecuación diferencial (1.3) define una familia de curvas de un parámetro en el plano  $XY$ . En otras palabras, se encuentra al menos en cierta región del plano  $XY$ , una función  $\varphi(x, y)$  tal que la relación

$$\varphi(x, y) = c, \quad (1.5)$$

donde  $c$  es una constante, define una función  $y(x)$  que satisface idénticamente la ecuación diferencial (1.3).

Puede suceder que la forma diferencial  $Pdx + Qdy$ , se puede escribir en forma  $d\varphi(x, y)$ , en cuyo caso se dice ser exacta o integrable. Aún cuando la forma no es exacta, se deduce de la ecuación (1.5) y la escribimos de la forma diferencial

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0$$

### 1.0.3. Generación de ecuaciones en derivadas parciales

Dada la familia biparamétrica de superficies regulares

$$f(x, y, z, a, b) = 0, \quad (1.6)$$

existe una ecuación en derivadas parciales de primer orden que es satisfecha por dicha familia. Para encontrar la derivamos (1.6) con respecto a  $x$  e  $y$ , obteniendo

$$f_x + f_z z_x = 0; \quad f_y + f_z z_y = 0. \quad (1.7)$$

Cuando sea posible la eliminación de  $a$  y  $b$  entre (1.6) y (1.7), se llegará a una expresión de la forma

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad (1.8)$$

constituye una ecuación en derivadas parciales de primer orden que es satisfecha por todas las superficies de la familia (1.6). A este conjunto de superficies se le llama integral completa de la ecuación (1.8). A continuación pondremos un ejemplo.

Eliminar las constantes de la familia

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = 9 \quad (1.9)$$

para obtener una EDP.

Solución:

Aplicando (1.7) en la ecuación (1.9) se tiene

$$\begin{cases} 2(x - a) + 2zp = 0 \\ 2(y - b) + 2zq = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x - a = -zp \\ y - b = -zq \end{cases}$$

sustituyendo en la ecuación (1.9) se tiene

$$z^2(p^2 + q^2 + 1) - 9 = 0,$$

que es la ecuación de la forma  $F(x, y, z, p, q) = 0$  y satisface a la familia de superficies (1.9).

#### 1.0.4. Ecuaciones diferenciales parciales de primer orden

Se llama *ecuación diferencial parciales no lineal de primer orden* o bien en algunos libros la llaman *ecuación en derivadas parciales cuasilineales de primer orden* [11] a una ecuación de la forma

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z), \quad (1.10)$$

donde supondremos que las funciones  $P, Q$  y  $R$  son continuas y tienen derivadas parciales de primer orden y también continuas.

Si  $R(x, y, z) = 0$  la ecuación recibe el nombre de ecuación en derivadas parciales cuasilineal *homogénea de primer orden*.

A la Ec.(1.10) la denotaremos como

$$Pp + Qq = R, \quad (1.11)$$

donde

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad y \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

#### 1.0.5. Eliminación de funciones arbitrarias

En la sección anterior vimos cómo generar ecuaciones en derivadas parciales genéricas a partir de una familia biparamétrica. Veamos ahora cómo generar una ecuación diferencial parcial.

Sean las superficies determinadas por las ecuaciones

$$f(x, y, z) = c_1 \quad y \quad g(x, y, z) = c_2,$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son contantes arbitrarias y sea la familia de curvas determinadas por la ecuación

$$\varphi(f(x, y, z), g(x, y, z)) = 0.$$

Si las funciones  $\varphi$ ,  $f$  y  $g$  admiten derivadas parciales de primer orden, obtenemos derivando respectivamente a  $x$  e  $y$  respecto a  $x$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial f}(f_x + f_z z_x) + \frac{\partial \varphi}{\partial g}(g_x + g_z z_x) = 0, \quad \text{derivada respecto de } x$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial f}(f_y + f_z z_y) + \frac{\partial \varphi}{\partial g}(g_y + g_z z_y) = 0, \quad \text{derivada respecto de } y.$$

El sistema de ecuaciones homogéneas lineales anterior solo puede ser para una función arbitraria  $f$  si su determinante es nulo, esto es expresando la compatibilidad del sistema

$$\begin{vmatrix} f_x + f_z z_x & g_x + g_z z_x \\ f_y + f_z z_y & g_y + g_z z_y \end{vmatrix} = 0,$$

se tiene una ecuación en derivadas parciales cuasilineal que al ser desarrollado adopta la forma de la Ec.(1.11), siendo

$$\begin{cases} P = f_z g_y - f_y g_z \\ Q = f_x g_z - f_z g_x \\ R = f_y g_x - f_x g_y. \end{cases} \quad (1.12)$$

Por otro lado, dada las curvas

$$\begin{cases} f(x, y, z) = c_1 \\ g(x, y, z) = c_2 \end{cases}, \quad (1.13)$$

si para cada par de valores  $c_1$  y  $c_2$  es posible despejar  $z$  e  $y$  en función de  $x$ , derivando el sistema anterior con respecto a  $x$  se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma



$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)},$$

donde  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son las mismas funciones definidas por la Ec.(1.12).

A continuación veremos un ejemplo.

Sea una solución general  $\varphi(x^2 + y^2 + z^2, xyz) = 0$ . Calcular la EDP en la que es solución  $\varphi$ .

Solución.

Se tiene entonces  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  y  $g(x, y, z) = xyz$ .

Por lo tanto aplicando Ecs.(1.12) obtenemos

$$\begin{cases} P = 2x(z^2 - y^2) \\ Q = 2y(x^2 - z^2) \\ R = 2z(y^2 - x^2) \end{cases}.$$

Así tenemos la EDP de la forma

$$x(z^2 - y^2)p + y(x^2 - z^2)q = x(z^2 - y^2). \square$$

Para poder encontrar una solución general de una ecuación diferencial de primer orden de la forma (1.11) necesitaremos el siguiente

*Teorema 1. La solución general de la ecuación diferencial parcial lineal*

$$Pp + Qq = R, \tag{1.14}$$

es

$$F(u, v) = 0, \tag{1.15}$$

donde  $F$  es una función arbitraria y

$$u(x, y, z) = c_1 \quad y \quad v(x, y, z) = c_2,$$

son una solución de las ecuaciones

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \tag{1.16}$$

Demostración:

La prueba del teorema lo haremos en dos etapas: primero (a) mostraremos que toda superficie integral de la ecuación  $Pp + Qq = R$ , está generada por la curva integral de las ecuaciones  $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ ; (b) y después probaremos que toda superficie generada por curvas integral de las Ecs.(1.16) son superficies integral de la Ec.(1.14).

(a) Sea  $z = f(x, y)$  es una superficie integral de la ecuación diferencial parcial (1.14) entonces la normal para esta superficie está caracterizada por sus cosenos directores y es proporcional a  $(p, q, -1)$  y la ecuación diferencial  $Pp + Qq = R$ , no es más que una representación geométrica el hecho que esta normal es perpendicular a la dirección definida por los cocientes de dirección  $(P, Q, R)$ . En otras palabras, la dirección  $(P, Q, R)$  es tangencial a la superficie integral  $z = f(x, y)$ .

Si, por consiguiente, empezamos en un punto arbitrario  $M$  sobre la superficie ver Figura (1.1), y lo desplazamos de tal manera que la dirección de movimiento sea siempre  $(P, Q, R)$ , trazamos fuera una curva integral de la Ec.(1.16), y después suponiendo que  $P, Q$  y  $R$  son únicos, estos formarán solamente una curva a través de  $M$ . Ya que  $(P, Q, R)$  es siempre tangencial a la superficie, esta curva integral de las Ecs.(1.16) se encuentran completamente en la superficie.

Mostramos que a través de cada punto  $M$  de la superficie, hay una y sólo-mente una curva integral de las Ecs.(1.16) y que éstas se hallan solamente sobre la superficie. Esta superficie integral de la Ec.(1.14) que es generada por curvas integral de las Ecs.(1.16).

(b) Si se supone que la superficie  $z = f(x, y)$  es generada por la integral de las Ecs.(1.16), entonces esta normal en un punto general  $(x, y, z)$  el cual está en la dirección de  $(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1)$  y será perpendicular a la dirección de  $(P, Q, R)$ ,

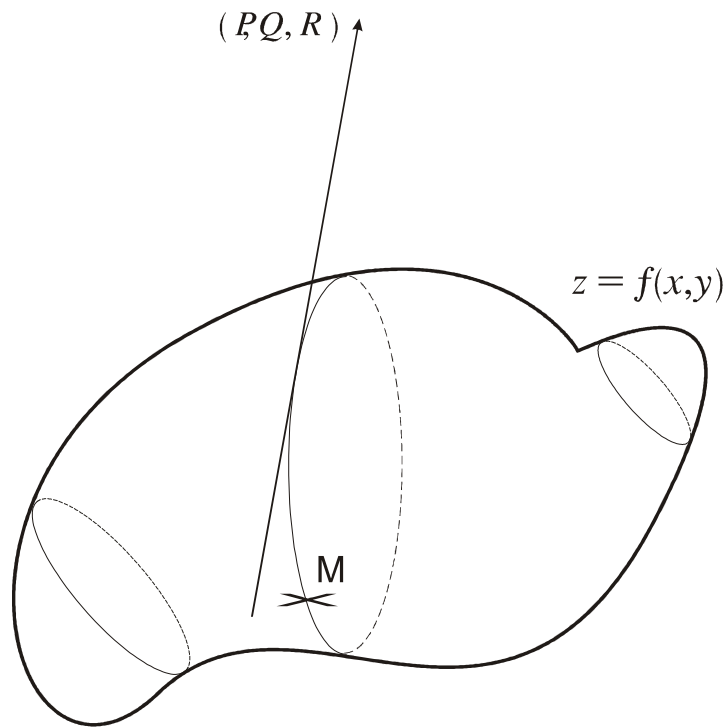


Figura 1.1: Sea la superficie  $z = f(x, y)$  y el punto arbitrario  $M$  en ésta.

de las curvas generadoras de la superficie. Por lo tanto

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} - R = 0, \quad (1.17)$$

lo cual es justamente otra manera de decir que  $z = f(x, y)$  es una superficie integral de la Ec.(1.14). Para completar la prueba tenemos que probar que alguna superficie generada por las curvas integral de las Ecs.(1.16) tiene una ecuación de la forma  $F(u, v) = 0$ .

Sea una curva sobre la superficie la cual no es un miembro particular del sistema

$$u(x, y, z) = c_1, \quad v(x, y, z) = c_2, \quad (1.18)$$

tenemos las ecuaciones

$$\phi(x, y, z) = c_1, \quad \psi(x, y, z) = c_2, \quad (1.19)$$

si la curva (1.18) es una curva generada de la superficie, está interseccionará la curva (1.19). La condición que debe satisfacer se puede obtener por eliminación de  $x, y$  y  $z$  de las cuatro ecuaciones (1.18) y (1.19).

Estas llevarán una relación de la forma

$$F(c_1, c_2) = 0, \quad (1.20)$$

entre las constantes  $c_1$  y  $c_2$ . La superficie es por consiguiente generada por las curvas (1.18) la cual obedece la condición (1.20) y por lo tanto tendrá una ecuación de la forma (1.15)

$$F(u, v) = 0.$$

Complementariamente, alguna superficie de la forma anterior (1.15) es generada por la curvas integrales (1.18) de las Ecs.(1.16). Para esto es que la superficie generada por las curvas del sistema (1.18) la cuales satisfacen la relación

$$F(c_1, c_2) = 0,$$

esto completa la prueba del teorema.†

Por ejemplo para utilizar el teorema anterior, encontraremos la solución general de la siguiente ecuación:

$$x^2p + y^2q = x^2 + y^2$$

Solución:

Aplicando las Ecs.(1.16) del *Teorema 1* se tiene

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{x^2 + y^2},$$

integrando la primera parte de la ecuación anterior se tiene

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} + c_1 \implies f(x, y) = \frac{x - y}{xy} = c_1,$$

por otro lado

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{x^2 + y^2} = \frac{dx + dy - dz}{x^2 + y^2 - x^2 - y^2}$$

$$\implies dx + dy - dz = 0 \implies g(x, y) = x + y - z = c_2.$$

Por tanto la solución general será

$$\varphi = \left( \frac{x - y}{xy}, x + y - z \right) = 0,$$

donde  $\varphi$  es una función arbitraria.□

### 1.0.6. Ecuaciones diferenciales de primer orden en $n$ variables

La teoría que hemos revisado es para el caso de dos variables independientes podemos extender para el caso de  $n$  variables independientes, sin embargo, en este caso es simple haciendo uso de un método analítico de prueba que uno dependa en la apreciación de la idea geométrica. El Teorema general es el siguiente

*Teorema 2.* Si  $u_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ , son soluciones independientes de las ecuaciones

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R} \quad (1.21)$$

entonces la relación  $\Phi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$ , donde  $\Phi$  es una función arbitraria, es una solución general de la ecuación diferencial parcial de la forma

$$P_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = R. \quad (1.22)$$

Demostración

Primero supongamos que si las soluciones de las ecuaciones

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R}$$

son

$$u_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.23)$$

entonces las  $n$  ecuaciones

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial z} dz = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.24)$$

deben ser equivalentes con la Ec.(1.21). En otras palabras, debemos tener

$$\sum_{j=1}^n P_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + R \frac{\partial u_i}{\partial z} = 0 \quad (1.25)$$

resolviendo el conjunto de  $n$ -ecuaciones (1.25) para  $P_i$ , encontramos que

$$\frac{P_i}{\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_n)}} = \frac{R}{\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.26)$$

donde  $\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$  denota el Jacobiano

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Consideremos ahora la relación

$$\Phi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0. \quad (1.27)$$

Diferenciando ésta con respecto a  $x_i$ , obtenemos las ecuaciones

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_i} \right) = 0,$$

en donde hay  $n$  ecuaciones, una para cada valor de  $i$ . Eliminando las  $n$  cantidades  $\partial \Phi / \partial u_1, \dots, \partial \Phi / \partial u_n$  de estas ecuaciones obtenemos la relación

$$\frac{\partial(u_1, \dots, u_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_j} \frac{\partial(u_1, \dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_n)}{\partial(x_1, \dots, x_{j-1}, z, x_{j+1}, \dots, x_n)} = 0. \quad (1.28)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.26) en las ecuaciones (1.28), vemos que la función  $z$  definida por la relación (1.27) es una solución de la ecuación

$$P_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = R, \quad (1.29)$$

así queda demostrado el teorema.†

### 1.0.7. Superficies ortogonales para un sistema dado de superficies

Una aplicación interesante de la teoría de ecuaciones lineales diferenciales parciales de primer orden es la determinación de los sistemas de superficies

ortogonales para un sistema dado de superficies. Supongase tenemos dada una familia de superficies caracterizado por la ecuación.

$$f(x, y, z) = c, \quad c \text{ es una constante} \quad (1.30)$$

y deseamos encontrar un sistema de superficies las cuales cortan a cada una de estas superficies dadas en ángulos rectos Fig.(1.2).

La normal en el punto  $(x, y, z)$  de la superficie del sistema (1.30) el cual pasa a través de ese punto es la dirección dada por los radios de dirección.

$$(P, Q, R) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (1.31)$$

Si  $S$  es la superficie con la ecuación

$$z = \varphi(x, y). \quad (1.32)$$

Esta corta a cada superficie del sistema ortogonal dado, entonces es normal en el punto  $(x, y, z)$  el cual está en la dirección

$$\left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right) = (p, q, -1),$$

y es perpendicular a la dirección  $(P, Q, R)$  de la normal a la superficie del grupo (1.30) en ese punto. Por lo tanto la condición de perpendicularidad nos permite construir una ecuación lineal parcial diferencial

$$Pp + Qq = R, \quad (1.33)$$

para la determinación de las superficies (1.32). Sustituimos de la ecuación (1.31), y vemos que esta ecuación es equivalente a

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$



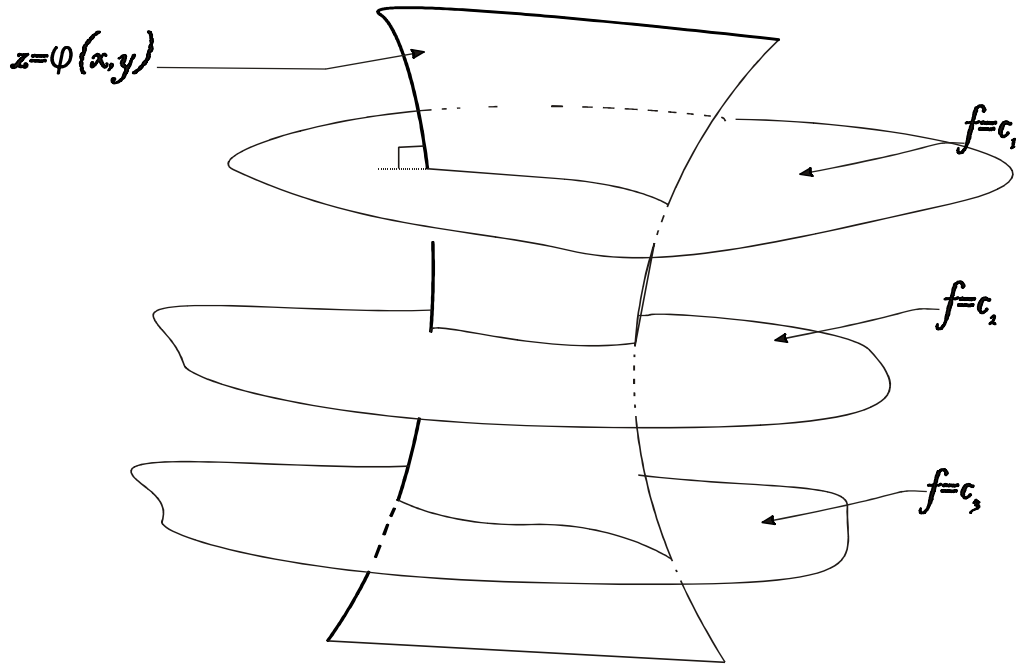


Figura 1.2: Superficies  $f = c_1$ ,  $f = c_2$ , y  $f = c_3$  normales a  $z = \varphi(x, y)$ .

Alguna solución de la ecuación lineal (1.33) es ortogonal a cada superficie del sistema caracterizado por la Ec.(1.30).

La ecuación lineal (1.33) es por tanto la ecuación general parcial diferencial determinando las superficies ortogonales a miembros del sistema (1.30); es decir, las superficies ortogonales al sistema (1.30) son la superficies generadas por la curva integral de las ecuaciones

$$\frac{dx}{\partial f / \partial x} = \frac{dy}{\partial f / \partial y} = \frac{dz}{\partial f / \partial z}. \quad (1.34)$$

Como veremos mas adelante para el caso de la óptica geométrica las superficies ortogonales representan por un lado al frente de onda de fase constante y por el otro a la superficie.

### 1.0.8. Ecuaciones diferenciales parciales no lineales de primer orden. Método de Charpit

Ahora nos proponemos resolver la EDP no lineal

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad (1.35)$$

buscando una familia de superficies que llamaremos integral completa de la ecuación diferencial. Estudiaremos el caso en que la función  $z$  depende de dos variables independientes  $x$  e  $y$ .

#### Método de Charpit para encontrar una integral completa

Dada la ecuación (1.35) supongamos que  $f$  es derivable respecto a todos sus argumentos y con derivadas  $f_p$  y  $f_q$  no simultáneamente nulas.

Para obtener una integral completa, es decir, una familia

$$f(x, y, z, c_1, c_2) = 0,$$

biparamétrica de superficies que satisfagan la Ec.(1.35), con  $c_1$  y  $c_2$  constantes, procederemos según el método.

1. Hallamos una integral  $\varphi(x, y, z, p, q) = c_1$  del sistema característico aplicando el *Teorema 2*.

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{pf_p + qf_q} = \frac{-dp}{f_x + pf_z} = \frac{-dq}{f_y + qf_z}. \quad (1.36)$$

Este sistema es conocida como *ecuaciones de Charpit*.

2. Del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z, p, q) = c_1 \\ f(x, y, z, p, q) = 0 \end{cases}$$

despejando  $p$  y  $q$  se tiene

$$\begin{cases} p = p(x, y, z, c_1) \\ q = q(x, y, z, c_1) \end{cases} \quad (1.37)$$

3. Estas funciones (1.37) las sustituimos en la ecuación  $dz = p dx + q dy$  obteniendo la ecuación de Pfaff:

$$dz = p(x, y, z, c_1)dx + q(x, y, z, c_1)dy, \quad (1.38)$$

integrando se tiene la solución

$$f(x, y, z, c_1, c_2) = 0$$

que será una *integral completa* de la ecuación original

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Enseguida veremos un ejemplo utilizando el método de Charpit pues este método lo utilizaremos en los capítulos 3 y 4 en nuestra aplicación.

*Encuentre la integral completa de la ecuación*

$$p^2 x + q^2 y = z \quad (1.39)$$

Solución:

Las ecuaciones auxiliares son

$$\frac{dx}{2px} = \frac{dy}{2qy} = \frac{dz}{2(p^2 x + q^2 y)} = \frac{dp}{p - p^2} = \frac{dq}{q - q^2},$$

de lo que se sigue

$$\frac{p^2 dx + 2px dp}{p^2 x} = \frac{q^2 dy + 2qy dq}{q^2 y},$$

de aquí se tiene

$$p^2 x = c_1 q^2 y, \quad (1.40)$$

donde  $c_1$  es una constante. Resolviendo las ecuaciones (1.39) y (1.40), tenemos

$$p = \left\{ \frac{c_1 z}{(1 + c_1)x} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad q = \left\{ \frac{z}{(1 + c_1)y} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

sustituyendo  $p$  y  $q$  en la Ec.(1.38) se tiene

$$\left(\frac{1+c_1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} dz = \left(\frac{c_1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx + \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}} dy,$$

integrando se tiene la solución

$$[(1+c_1)z]^{\frac{1}{2}} = (c_1x)^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + c_2,$$

la cual es la integral completa de la Ec.(1.39).□

Haremos una revisión de los principales tipos de este método que se nos pueden presentar mas adelante.

### **Tipos especiales de ecuaciones de primer orden del Metodo de Charpit**

En esta sección considaremos algunos tipos especiales de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, donde las soluciones pueden obtenerse fácilmente por el método de Charpit.

(a) *Ecuaciones involucrando solamente a  $p$  y  $q$ . Para ecuaciones del tipo:*

$$f(p, q) = 0, \tag{1.41}$$

la ecuación de Charpit se reduce a

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{pf_p + qf_q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}. \tag{1.42}$$

Una solución obvia de esta ecuación es

$$p = a,$$

sustituyendo  $p$  en Ec.(1.41) se tiene

$$f(a, q) = 0,$$

así que

$$q = Q(a) \text{ es una constante,}$$

entonces la solución de la ecuación será

$$z = ax + Q(a)y + b,$$

donde  $b$  es una constante arbitraria.

(b) *Ecuaciones que no involucran las variables independientes.*

Si la EDP es del tipo

$$f(z, p, q) = 0, \tag{1.43}$$

la ecuación de Charpit toma la forma

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{pf_p + qf_q} = \frac{dp}{-pf_z} = \frac{dq}{-qf_z}, \tag{1.44}$$

fijandonos del caso anterior se tiene la relación

$$p = aq, \tag{1.45}$$

sustituimos (1.43) en la función (1.45), determinando  $p$  y  $q$  estas las sustituimos en  $dz = pdx + qdy$  aplicamos la integral y concluimos. Para tener una idea más clara de este caso veremos el siguiente;

Ejemplo. Encontrar la integral completa de la ecuación:

$$p^2 z^2 + q^2 = 1$$

Solución:

Sea  $p = aq$ , sustituyendo en la ecuación se tiene

$$a^2 q^2 z^2 + q^2 = 1,$$

obtenemos

$$q = (1 + a^2 z^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad p = a(1 + a^2 z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Por consiguiente

$$(1 + a^2 z^2)^{\frac{1}{2}} dz = a dx + dy,$$

aplicando la integral

$$az(1 + a^2 z^2)^{\frac{1}{2}} + \log \left[ az + (1 + a^2 z^2)^{\frac{1}{2}} \right] = 2a(ax + y + b),$$

obtenemos la integral completa buscada.  $\square$

(c) *Ecuaciones separables.* Decimos que la EDP es separable si podemos escribirla de la forma

$$f(x, p) = g(y, q) \tag{1.46}$$

la ecuación de Charpit empieza

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{-g_q} = \frac{dz}{pf_p - qg_q} = \frac{dp}{-f_x} = \frac{dq}{-g_y}. \tag{1.47}$$

Así que tenemos la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dp}{dx} + \frac{f_x}{f_p} = 0,$$

en  $x$  y  $p$  las cuales podemos resolver para que  $p$  quede como una función de  $x$  y una constante arbitraria  $a$ . Escribamos la ecuación de la forma

$$f_p dp + f_x dx = 0,$$

veremos que la solución es

$$f(x, p) = a,$$

de aquí determinamos  $p$ ,  $q$  de la relación

$$f(x, p) = a, \quad g(y, q) = a, \tag{1.48}$$

y enseguida procedemos como en la teoría general.

(d) *Ecuaciones de Clairaut.* Una ecuación de primer orden parcial diferencial decimos que es del tipo *Clairaut* si puede escribirse de la forma:

$$z = px + qy + h(p, q), \quad (1.49)$$

la ecuación correspondiente de Charpit es

$$\frac{dx}{x + h_p} = \frac{dy}{y + h_q} = \frac{dz}{px + qy + ph_p + qh_q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0},$$

así que podemos tomar  $p = a$  y  $q = b$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes.

Si sustituimos estos valores en (1.49) tenemos ya la integral completa

$$z = ax + by + h(a, b),$$

que se verifica fácilmente por la diferenciación directa.

Ejemplo. Encuentra la integral completa de la ecuación

$$(p + q)(z - xp - yp) = 1.$$

Solución

Escribimos a la ecuación de la forma

$$z = xp + yp + \frac{1}{p + q},$$

vemos una integral completa es

$$z = ax + by + \frac{1}{a + b},$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes arbitrarias.  $\square$

# Capítulo 2

## Mesofases

En la naturaleza existen ciertas fases termodinámicas intermedias entre el estado sólido cristalino y el líquido isotrópico ver Figuras(2.1), las cuales son conocidas como cristales líquidos. Estos estados de agregación de la materia los exhiben sustancias orgánicas que no pasan directamente del estado sólido cristalino al líquido isotrópico o viceversa, sino que muestran una serie de fases intermedias que tienen propiedades hidrodinámicas como los líquidos y orden de largo alcance como los sólidos cristalinos que se manifiesta como propiedades macroscópicas anisotrópicas (dieléctricas, ópticas, de transporte, etc.) de los sólidos cristalinos. Al observar estas propiedades insólitas que presentan los cristales líquidos, el botánico austriaco F. Reinitzner y el cristalógrafo alemán O. Lehmann en 1888 propusieron la existencia de un nuevo estado de la materia. El descubrimiento recibió mucha atención en el momento, pero no así los usos prácticos que no eran evidentes y el interés se redujo.

Posteriormente J. Friedel en Francia, propuso la clasificación de los cristales líquidos en: nemáticos, esmécticos y colestéricos [12]. Por su parte Freedericksz investigó las propiedades ópticas y eléctricas de estos materiales. A partir de los descubrimientos de las propiedades ópticas no lineales de los cristales líquidos en 1960, se renovó el interés en la investigación básica de estos sistemas debido a que son altamente susceptibles a la acción de campos externos



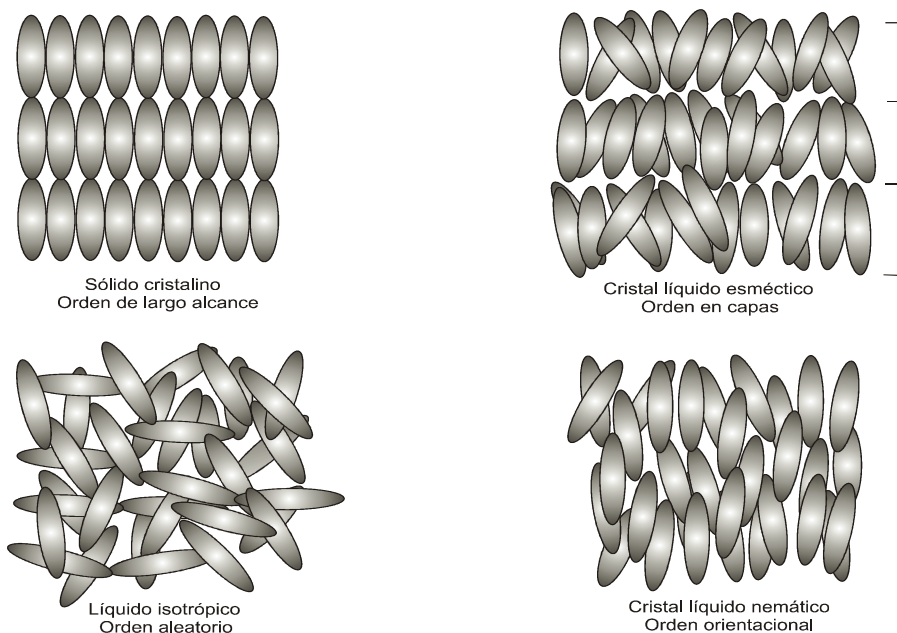


Figura 2.1: Secuencias posibles de un material cristal líquido.

relativamente débiles [13].

El interés en los cristales líquidos creció rápidamente en los últimos años [13], [14] y su potencial tecnológico se incrementó ampliamente [15].

Así pues el estudio de los cristales líquidos es sumamente extenso. Abarca fenómenos como la propagación de la luz, sus propiedades hidrodinámicas y de transporte, su comportamiento bajo la acción de campos externos, el estudio de las diferentes fases líquido cristalinas, y las transiciones de fase que dan lugar a ellas.

### 2.0.9. Estructuras moleculares

Las sustancias orgánicas que exhiben fases líquidas cristalinas son altamente anisotrópicas, y presentan una estructura molecular complicada la cual no se detallará aquí, sin embargo, se sabe que sus moléculas son alargadas, del centro rígidas, flexibles en los bordes y que sus centros de masa son capaces

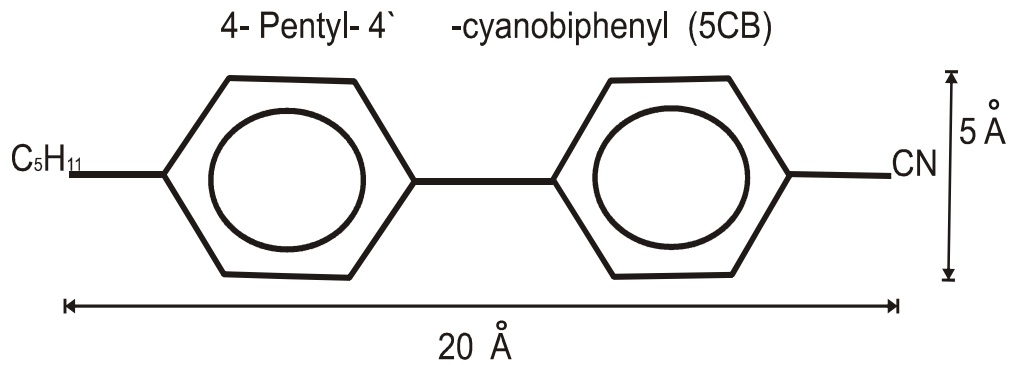


Figura 2.2: Estructura química para el cristal líquido nemático 5CB, el cual consta de dos anillos de benceno, unidos por un enlace rígido.

de moverse libremente dentro del contenedor, pero la orientación colectiva de todas sus moléculas dan origen a un orden orientacional macroscópico [16]. También la mayoría de estas sustancias presentan una polarización permanente o inducida.

Una de las estructuras químicas típicas que se presentan en un cristal líquido nemático es la presencia de anillos de benceno rígidamente enlazados los cuales corresponden a la parte rígida polarizable de la molécula. En la Figura (2.2) se muestra la estructura química para una molécula de cristal líquido nemático denominado 5CB constituido por dos anillos de benceno.

Algunas de las propiedades químicas estructurales de esta molécula y su influencia sobre algunas propiedades físicas se encuentran a continuación:

a) Estas moléculas tienen uno o más sistemas anillados aromáticos (generalmente de benceno) A y B, que son altamente polarizables e intervienen en la formación de estas estructuras moleculares.

b) Los grupos terminales  $R$  y  $R'$  que se muestran en la Figura (2.3), los cuales a medida que aumenta su longitud también refuerzan la anisotropía de la molécula, incrementando la estabilidad del cristal líquido.

c) Los grupos puente o de eslabonamiento  $Y$ , que de acuerdo a la manera en

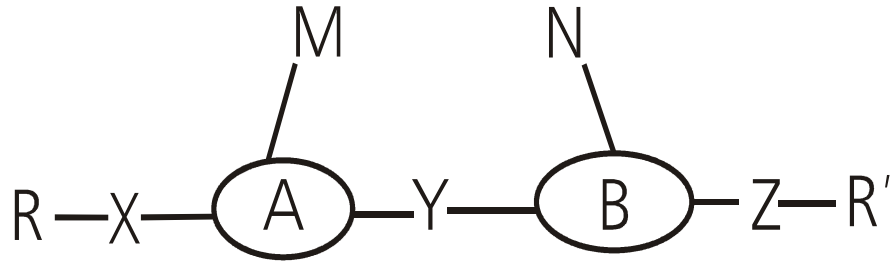


Figura 2.3: Estructura general para cristales líquido calamítico.

que se enlazan con los sistemas anillados determinan la forma de la molécula, así como la flexibilidad y polarizabilidad de la misma.

d) Las cadenas laterales  $M$  y  $N$ , generalmente ensanchan a la molécula evitando así atracciones laterales con otra molécula. Sin embargo, cuando las moléculas son muy largas pierden anisotropía y se reduce también la estabilidad del cristal líquido.

La descripción anterior, corresponde a moléculas para las cuales sus sistemas anillados elaborados con los grupos terminales y cadenas laterales de la manera descrita, presentan una forma alargada, como barra, denominada calamítica. También puede ocurrir que los sistemas anillados al enlazarse con los grupo terminales y sobre todo con cadenas laterales desordenadas [17], [18] den lugar a una estructura molecular plana, de forma de disco llamada discótica.

Las propiedades físicas de los cristales líquidos están determinadas por las características de los grupos que constituyen sus moléculas, y de cómo éstos están sintetizados químicamente, lo cual determina su permitividad eléctrica o el número y tipos mesofases (fases intermedias), que presenta entre otras propiedades.

Un modelo macroscópico que describe a un cristal líquido nemático adecuadamente considera como variable la dirección promedio en que apuntan los ejes de sus moléculas en forma de discos o de barras la cual se conoce como

eje óptico y se representa por el vector director  $\hat{n}$ .

### 2.0.10. Clasificación y tipos

Dependiendo de su estructura molecular, los cristales líquidos pueden poseer una o más mesofases antes de transformarse en un líquido isotrópico o en sólido cristalino. Las transiciones de estos estados intermedios pueden producirse, ya sea por medio de variaciones en la temperatura, o por cambios en la concentración de solventes. Dada la dependencia que presentan con respecto a los parámetros físicos señalados con anterioridad, se clasifica a los cristales líquidos como: termotrópicos si sus cambios de fase dependen de la temperatura; liotrópicos si dichos cambios dependen de sus concentraciones al mezclarse con algún solvente, la clasificación se amplía si se incorporan a los polímeros y compuestos anfifílicos que presentan también fases líquido cristalinas [19], [20].

Los cristales líquidos también se pueden clasificar de acuerdo con su grado de simetría. Los líquidos isotrópicos con moléculas esféricas simétricas,  $O(3)$  son invariantes a cualquier rotación posible en tres dimensiones y  $T(3)$  que son invariantes a toda posible traslación en tres dimensiones; en consecuencia el grupo total de un líquido isotrópico es  $O(3) \times T(3)$ . Pero si la temperatura de este líquido disminuye, usualmente ocurre el rompimiento de la simetría  $T(3)$ . Lo cual corresponde a la transición de líquido isotrópico a sólido. Para un líquido formado por moléculas anisotrópicas al disminuir la temperatura se observa que primero se rompe la simetría rotacional  $O(3)$ , lo que resulta en la formación de un cristal líquido, a las mesofases en que se ha roto la invarianza rotacional pero que conservan la invarianza traslacional, se les llama nemáticos. A las mesofases que sólo exhiben simetría traslacional  $T(2)$  se les llama esmécticas y las que únicamente  $T(1)$  se denominan fases columnares.

### 2.0.11. Nemáticos

Estos cristales líquidos preservan un orden orientacional pero presentan desorden posicional, es decir, sus moléculas se mantienen en promedio apuntando en una dirección  $\hat{n}$ , aunque cada molécula tiene la libertad de vibrar térmicamente en torno al director. No presentan orden posicional debido a que el centro de masa de sus moléculas tiene la libertad de desplazarse arbitrariamente, en otras palabras, este sistema es invariante ante traslaciones arbitrarias y rotaciones en torno al eje óptico.

A continuación presentaremos las características principales de los nemáticos:

1.- La posición de los centros de gravedad de las moléculas son totalmente aleatorias y, en consecuencia, presentan solamente una dispersión difusa en el patrón de difracción de rayos  $x$ . Las correlaciones en la posición entre los centros de gravedad de las moléculas vecinas son similares a las existentes en los líquidos isotrópicos convencionales [21]. De hecho, los nemáticos fluyen como líquidos isotrópicos.

2.- Las moléculas de los nemáticos preservan cierto orden en su dirección, ya que tienden a estar paralelas a un eje común, el cual es representado por el director  $\hat{n}$  (véase Fig. 2.4). Un nemático es un medio uniaxial debido a que tiene su eje óptico a lo largo de la dirección del director  $\hat{n}$ . En todo los casos conocidos existe simetría rotacional completa alrededor del director.

3.- La dirección del vector director  $\hat{n}$  es arbitraria en el espacio, pero en la práctica es posible controlar esta dirección por medio de condiciones de frontera de las paredes del contenedor, o mediante la influencia de campos externos [13].

4.- Debido a la simetría molecular y al hecho de que sus moléculas son no polares, los estados del director  $\hat{n}$  y  $-\hat{n}$  son indistinguibles, es decir, un nemático es considerado centrosimétrico.

## Nemático

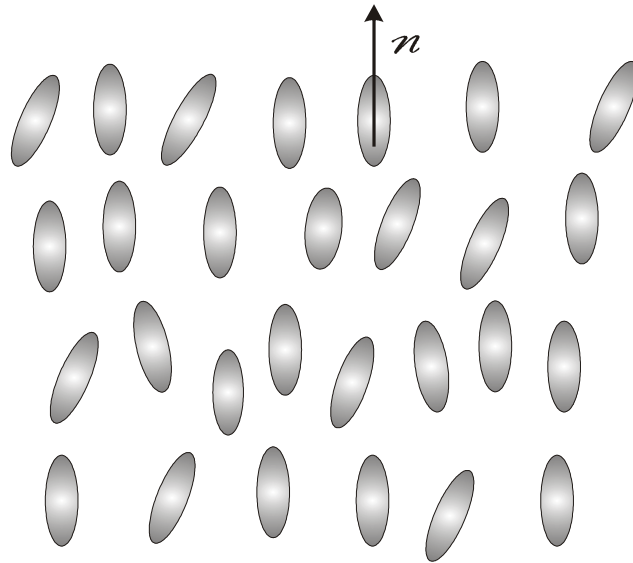


Figura 2.4: Esquema de la configuración de un cristal líquido nemático.

5.- La fase nemática ocurre solo en materiales aquirales, es decir, que no distinguen entre derecha e izquierda ante una reflexión especular; ésto es, cada molécula constituyente es idéntica a su imagen en un espejo.

### 2.1. Propiedades elásticas

En ausencia de agentes externos la orientación colectiva de las moléculas en un cristal líquido nemático es arbitraria. Sin embargo, en las celdas utilizadas comúnmente, el alineamiento de las moléculas puede ser inducido de diversas maneras, por ejemplo es posible someter a los cristales líquidos nemáticos a ciertas condiciones de frontera o campos externos que deforman la orientación molecular natural en ellos.

### 2.1.1. Deformaciones elásticas

Como consecuencia de las distorsiones en el alineamiento, habrá una alteración en el ordenamiento de las moléculas y por ende el director variará de punto a punto. Es posible describir estas deformaciones, despreciando los detalles de la estructura molecular, debido a que las dimensiones típicas de las moléculas de un cristal líquido termotrópico ( $5\overset{0}{\text{Å}} \times 20\overset{0}{\text{Å}}$ ) son mucho menores que las dimensiones típicas de las escalas espaciales de las deformaciones en que ocurre una deformación en las celdas nemáticas ( $\geq 1\mu m$ ).

Los estados distorsionados de un nemático pueden describirse en términos de un campo vectorial unitario  $\hat{n}(r)$  cuyas variaciones a escala molecular son suaves. De hecho, el director es una variable macroscópica que forma parte de las variables hidrodinámicas de un nemático junto con la densidad de masa, la velocidad y la densidad de energía, éstas últimas asociadas con las leyes generales de conservación [22].

## 2.2. Propiedades dieléctricas

El agente externo más común con el que se suele reorientar a los cristales líquidos son los campos eléctricos estáticos o de baja frecuencia así como los campos ópticos los cuales ponen de manifiesto la respuesta anisotrópica uniaxial de la mayoría de estas fases.

## 2.3. Energía eléctrica

Debido a la anisotropía de sus moléculas, los cristales líquidos poseen una constante dieléctrica anisotrópica que vale  $\epsilon_{\parallel}$  a lo largo del director y  $\epsilon_{\perp}$  en la dirección perpendicular, esta puede ser positiva o negativa. dependiendo de la estructura molecular.

Cuando se aplica un campo eléctrico externo  $\mathbf{E}$  a un cristal líquido uniaxial

el vector desplazamiento eléctrico estará dado por

$$\mathbf{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \quad (2.1)$$

en donde el tensor uniaxial dieléctrico está dado por

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \varepsilon_{\perp} \overleftrightarrow{I} + \varepsilon_a \hat{n} \hat{n}. \quad (2.2)$$

En donde  $\overleftrightarrow{I}$  representa el tensor identidad y  $\varepsilon_a = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$ , es la anisotropía dieléctrica, que puede ser positiva o negativa, dependiendo de la estructura molecular de los constituyentes moleculares del cristal líquido. Aquí  $\varepsilon_{\parallel}$  y  $\varepsilon_{\perp}$  son las permitividades dieléctricas paralela y perpendicular a  $\hat{n}$ . La ecuación (2.1) es la relación constitutiva del cristal líquido y muestra que el cristal líquido es un medio uniaxial cuyo eje óptico se encuentra a lo largo de  $\hat{n}$ .



# Capítulo 3

## Fundamentos de óptica geométrica

### 3.0.1. Aproximación asintótica para longitudes de onda pequeñas

El campo electromagnético asociado con la propagación de la luz visible es caracterizado por oscilaciones de muy alta frecuencia (frecuencias de onda del orden de  $10^{14}s^{-1}$ ) y pequeñísimas longitudes de onda (de  $10^{-5}cm$ ). Por consiguiente, una primera buena aproximación para las leyes de propagación, en tales casos puede despreciar completamente la longitud de onda. Está bien establecido que para muchos problemas de óptica tal procedimiento es enteramente suficiente. De hecho, fenómenos que pueden ser considerados desviaciones de esta teoría aproximada (difracción) puede observarse solo en experimentos muy cuidadosos.

La rama de la óptica en la cual se desprecia la longitud de onda, es decir, que corresponde para el caso de limite cuando  $\lambda_o \rightarrow 0$ , es conocida como *óptica geométrica*, en consecuencia en esta aproximación las leyes de óptica pueden ser formuladas en lenguaje geométrico.

La energía puede entonces considerarse como un ente transportado por ondas electromagnéticas. Un modelo físico de un haz de rayos puede ser obtenido permitiendo que la luz de una fuente de extensión despreciable pase a través

de una pequeña abertura en una pantalla opaca. La luz que alcanza el espacio detrás de la pantalla, llenará una región de la frontera (la orilla del haz), la cual a primera instancia, parece ser uniforme. Un exámen más cuidadoso revelará, que la variación no es monótona sino es de caracter oscilatorio, manifestandose a través de la aparición de bandas brillantes y oscuras llamada franjas de difracción.

La región en la cual esta variación rápida es importante, se limita a regiones del orden de magnitud de la longitud de onda. Ahora con tal que este tamaño sea despreciable en comparación con las dimensiones de la abertura, podemos utilizar la óptica geométrica.

Al reducir el tamaño de la abertura, a dimensiones de la longitud de onda aparecen nuevos fenómenos y por tanto surge la necesidad de un estudio más refinado. Sin embargo, considerando solamente el caso de una longitud de onda imperceptible, sin restricción sobre el tamaño de la abertura, podemos decir que en una abertura de dimensiones despreciables define un lápiz delgado o rayo de luz.

Asimismo, mostraremos que para longitudes de ondas pequeñas, el campo tiene la características generales de una onda plana, además dentro del margen de la aproximación de óptica geométrica las leyes de refracción y reflexión establecidas por ondas planas incidentes sobre una frontera plana permanecen válidas bajo condiciones más generales. De aquí, si un rayo de luz incide sobre una frontera (es decir, las superficies de lentes) este se descompone en un rayo reflejado y un rayo transmitido, y los cambios en el estado de polarización así como la reflectividad y transmisividad se pueden calcular.

Las observaciones experimentales muestran que, cuando la longitud de onda es bastante pequeña, el conjunto total de los fenómenos ópticos puede ser deducido de consideraciones geométricas, determinando las trayectorias de rayos de luz y calculando la intensidad asociada y su polarización. Ahora for-

mularemos las leyes apropiadas para considerar las implicaciones de ecuación de Maxwell cuando  $\lambda_0 \rightarrow 0$ .

### 3.1. Ecuación Eikonal

Considerando un campo general cuya dependencia temporal es armónica o de un solo color

$$\mathbf{E}(r, t) = \mathbf{E}_0(r)e^{-i\omega t} \quad \text{y} \quad \mathbf{H}(r, t) = \mathbf{H}_0(r)e^{-i\omega t} \quad (3.1)$$

en un medio conductor isotrópico.  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{H}_0$  denota funciones vectoriales complejas de la posición y satisfacen las ecuaciones de Maxwell, en regiones sin corrientes y ni cargas, estas ecuaciones son

$$\text{rot}\mathbf{H}_0 + ik_0\varepsilon\mathbf{E}_0 = 0, \quad (3.2)$$

$$\text{rot}\mathbf{E}_0 - ik_0\mu\mathbf{H}_0 = 0, \quad (3.3)$$

$$\text{div}\varepsilon\mathbf{E}_0 = 0, \quad (3.4)$$

$$\text{div}\mu\mathbf{H}_0 = 0. \quad (3.5)$$

Aquí las relaciones materiales para un medio isotrópico homogéneo y lineal son

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad (3.7)$$

donde  $\varepsilon$  es la permitividad dieléctrica y  $\mu$  permeabilidad magnética,  $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$ ,  $\lambda_0$  es la longitud de onda. En un medio homogéneo y refractivo de índice de refracción  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ , que se propaga una onda en la dirección especificada por el vector unitario  $\hat{k}$ , estará representado por

$$\mathbf{E}_0 = \vec{e} e^{ik_0n(\hat{k}\cdot r)} \quad \text{y} \quad \mathbf{H}_0 = \vec{h} e^{ik_0n(\hat{k}\cdot r)}, \quad (3.8)$$

donde  $\vec{e}$  y  $\vec{h}$  son vectores complejos, generalmente constantes. Para el campo de un dipolo eléctrico (monocromático) en el vacío se puede mostrar que

$$\mathbf{E}_0 = \vec{e} e^{ik_0 r}, \quad \mathbf{H}_0 = \vec{h} e^{ik_0 r}, \quad (3.9)$$

donde  $r$  denota la distancia al centro del dipolo. Aquí  $\vec{e}$  y  $\vec{h}$  no son vectores constantes, pero a distancias suficientemente grandes y lejos del dipolo ( $r \gg \lambda_0$ ) son independientes de  $k_0$ .

Estos ejemplos sugieren que en las regiones, cuyas dimensiones sean de muchas longitudes de onda, lejos de las fuentes podemos representar tipos más generales de campos en la forma

$$\mathbf{E}_0 = \vec{e}(\vec{r}) e^{ik_0 S(\vec{r})}, \quad \mathbf{H}_0 = \vec{h}(\vec{r}) e^{ik_0 S(\vec{r})}, \quad (3.10)$$

donde  $S(\vec{r})$ , “*el camino óptico*” que es una función real escalar de posición, y  $\vec{e}(\vec{r})$  y  $\vec{h}(\vec{r})$  son funciones vectoriales de posición, los cuales pueden ser en general complejos. Con las ecuaciones (3.10) como una solución de prueba, de las ecuaciones de Maxwell obtenemos un juego de relaciones entre  $\vec{e}$ ,  $\vec{h}$  y  $S$ . Se mostrará que para  $k_0$  muy grande (pequeña  $\lambda_0$ ), estas relaciones demandan que  $S$  deba satisfacer cierta ecuación diferencial, la cual es independiente de la amplitud de los vectores  $\vec{e}$  y  $\vec{h}$ .

Sustituyendo (3.10) en el rotacional de  $\mathbf{H}_0$  y utilizando las propiedades del producto cruz

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_0 &= \nabla \times \vec{h}(\vec{r}) e^{ik_0 S(\vec{r})} \\ &= e^{ik_0 S(\vec{r})} ik_0 \nabla S \times \vec{h}(\vec{r}) + e^{ik_0 S(\vec{r})} \nabla \times \vec{h}(\vec{r}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el rotacional de  $\mathbf{H}_0$

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 = e^{ik_0 S(\vec{r})} (\nabla \times \vec{h}(\vec{r}) + ik_0 \text{grad} S \times \vec{h}(\vec{r})). \quad (3.11)$$

Similarmente obtenemos el rotacional de  $\mathbf{E}_0$

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = e^{ik_0 S(\vec{r})} (\nabla \times \vec{e}(\vec{r}) + ik_0 \text{grad} S \times \vec{e}(\vec{r})). \quad (3.12)$$

Ahora bien sustituyendo las Ecs.(3.10) en la divergencia de Ecs.(3.4) y (3.5), utilizando las propiedades del producto punto se tiene

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}_0) &= \nabla \cdot \varepsilon e^{ik_0 S(r)} \vec{e} \\ &= \varepsilon e^{ik_0 S(r)} ik_0 \nabla S \cdot \vec{e} + e^{ik_0 S(r)} \nabla \varepsilon \cdot \vec{e} + \varepsilon e^{ik_0 S(r)} (\nabla \cdot \vec{e}).\end{aligned}$$

Por lo tanto, la divergencia de  $\varepsilon \mathbf{E}_0$  es de la forma

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}_0) = e^{ik_0 S(r)} (\varepsilon \nabla \cdot \vec{e} + \vec{e} \cdot \nabla \varepsilon + ik_0 \varepsilon \text{grad} S \cdot \vec{e}). \quad (3.13)$$

Análogamente para la Ec.(3.5) obtenemos la divergencia de  $\mu \mathbf{H}_0$  de la forma

$$\nabla \cdot (\mu \mathbf{H}_0) = e^{ik_0 S(r)} (\mu \nabla \cdot \vec{h} + \vec{h} \cdot \nabla \mu + ik_0 \mu \text{grad} S \cdot \vec{h}). \quad (3.14)$$

Así finalmente sustituimos las Ecs. (3.10) a (3.14) en Ecuaciones de Maxwell de (3.2) a (3.5) obteniendo respectivamente las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned}e^{ik_0 S} (\nabla \times \vec{h} + ik_0 \text{grad} S \times \vec{h}) + ik_0 \varepsilon \vec{e} e^{ik_0 S} &= 0 \\ e^{ik_0 S} (\nabla \times \vec{e} + ik_0 \text{grad} S \times \vec{e}) - ik_0 \mu \vec{h} e^{ik_0 S} &= 0 \\ e^{ik_0 S} (\varepsilon \nabla \cdot \vec{e} + \vec{e} \cdot \nabla \varepsilon + ik_0 \varepsilon \text{grad} S \cdot \vec{e}) &= 0 \\ e^{ik_0 S} (\mu \nabla \cdot \vec{h} + \vec{h} \cdot \nabla \mu + ik_0 \mu \text{grad} S \cdot \vec{h}) &= 0.\end{aligned}$$

Tomando de un lado el gradiente de cada ecuación, se pueden reescribir las ecuaciones anteriores de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\text{grad} S \times \vec{h} + \varepsilon \vec{e} &= -\frac{1}{ik_0} \nabla \times \vec{h}, \\ \text{grad} S \times \vec{e} - \mu \vec{h} &= -\frac{1}{ik_0} \nabla \times \vec{e}, \\ \vec{e} \cdot \text{grad} S &= -\frac{1}{ik_0} (\nabla \cdot \vec{e} + \frac{\vec{e} \cdot \nabla \varepsilon}{\varepsilon}), \\ \vec{h} \cdot \text{grad} S &= -\frac{1}{ik_0} (\nabla \cdot \vec{h} + \frac{\vec{h} \cdot \nabla \mu}{\mu}).\end{aligned}$$

Nos interesa la solución para valores muy grandes de  $k_0$ , de aquí los factores que multiplican a  $\frac{1}{ik_0}$  pueden ser ignorados, pues  $\frac{1}{ik_0} \rightarrow 0$ , entonces las Ecuaciones de Maxwell se reducen respectivamente a:

$$\text{grad}S \times \vec{h} + \varepsilon \vec{e} = 0, \quad (3.15)$$

$$\text{grad}S \times \vec{e} - \mu \vec{h} = 0, \quad (3.16)$$

$$\vec{e} \cdot \text{grad}S = 0, \quad (3.17)$$

$$\vec{h} \cdot \text{grad}S = 0. \quad (3.18)$$

Despejando el vector,  $\vec{h}$ , de Ec.(3.16) y sustituyendo en Ec.(3.15) y aplicando las propiedades del triple producto vectorial

$$\begin{aligned} \text{grad}S \times \left( \frac{\text{grad}S \times \vec{e}}{\mu} \right) + \varepsilon \vec{e} &= 0 \\ \left[ \text{grad}S \times (\text{grad}S \times \vec{e}) \right] &= -\mu\varepsilon \vec{e}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos la ecuación

$$\left[ (\vec{e} \cdot \text{grad}S) \text{grad}S - \vec{e} (\text{grad}S)^2 \right] = -\mu\varepsilon \vec{e}. \quad (3.19)$$

Enseguida por la Ec.(3.17) en Ec.(3.19) obtenemos

$$\vec{e} (\text{grad}S)^2 = \mu\varepsilon \vec{e}.$$

Por lo tanto

$$(\text{grad}S)^2 = \mu\varepsilon. \quad (3.20)$$

Denotamos a  $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$  como índice de refracción  $\Rightarrow n^2 = \mu\varepsilon$ .

Escrita explícitamente tenemos la siguiente EDP de primer orden

$$\left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = n^2(x, y, z). \quad (3.21)$$

La función  $S$  a menudo es llamada la *Eikonal* y (3.21) es conocida como la *Ecuación Eikonal*, esta es una ecuación básica de óptica geométrica. Las superficies

$$S(r) = \text{constante}$$

puede ser llamado el *frente geométrico de onda*.

Aquí la *Ecuación Eikonal* fue deducida a el primer-orden de ecuaciones de Maxwell y describe solamente medios isotrópicos como el aire o el agua.

# Capítulo 4

## Medios anisotrópicos

### 4.1. Óptica geométrica de cristales

En este capítulo consideremos que además de tener un medio inhomogéneo, también es anisotrópico, es decir, que sus propiedades físicas dependen de la dirección en la que se observan. La propagación de luz en estos medios ha sido extensamente estudiada recientemente en una geometría plana. De hecho, para el caso de medios estratificados se han usado diversos procedimientos para atacar este problema. Uno de los utilizados más ampliamente en sistemas uniaxiales es el formalismo matricial de Barreman [1], el cual se ha mostrado que sirve para resolver las ecuaciones de Maxwell cuando se considera la propagación en medios lineales estratificados. Adicionalmente, se ha efectuado para estudiar medios anisotrópicos utilizando diversos formalismos que en general son más restrictivos esto es que la anisotropía es muy pequeña que en la óptica geométrica. Por otro lado, existen en la literatura formalismos generales para describir tanto la propagación en éste tipo de ondas acústicas [23], como electromagnéticas [24], las cuales en este tipo de medios se basan en el uso de tensores eikonales. Sin embargo, estos formalismos no hacen uso de la representación completa de los campos dada por la separación en modos: Transversos Magnéticos ( $TM$ ) y Transversos Eléctricos ( $TE$ ), la cual simplifica



considerablemente el tratamiento de medios no magnéticos cuando las condiciones de simetría de los sistemas permiten dicha separación. A continuación revisaremos esta última formulación [25] para posteriormente aplicarla a los sistemas de nuestro interés.

#### 4.1.1. Descomposición de Magnético Transversal, TM, y Eléctrico Transversal, TE.

Al remplazar la constante dieléctrica por el tensor dieléctrico  $\overleftrightarrow{\epsilon}$  en las ecuaciones de Maxwell, toman la forma:

$$\nabla \times \mathbf{H} + ik_0 \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0, \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} - ik_0 \mu \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \cdot (\overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \mathbf{E}) = 0, \quad (4.2)$$

donde  $k_0 = \omega/c$ ,  $\mu$  es la permeabilidad magnética y  $\overleftrightarrow{\epsilon}$  es el tensor dieléctrico. Siguiendo el procedimiento usual los siguientes campos

$$\mathbf{E} = \vec{e}(r) e^{ik_0 W(r)}, \quad y \quad \mathbf{H} = \vec{h}(r) e^{ik_0 W(r)}, \quad (4.3)$$

donde  $W(r)$  es la función que describe “*el camino óptico*” en medios anisotrópicos, llamada función característica de Hamilton [26], la cual es igual a la diferencia en la trayectoria óptica de un rayo de propagación en el medio entre dos puntos fijos, y  $\vec{e}(r)$ ,  $\vec{h}(r)$  son funciones vectoriales de posición.

Sustituyendo (4.3) en la Ec.(4.1) de las ecuaciones de Maxwell y utilizando las propiedades del producto cruz

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{h}(r) e^{ik_0 W(r)} + ik_0 \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{e}(r) e^{ik_0 W(r)} &= 0, \\ \nabla(r) e^{ik_0 W(r)} \times \vec{h} + e^{ik_0 W(r)} \nabla \times \vec{h} + ik_0 \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{e} e^{ik_0 W(r)} &= 0, \\ ik_0 \nabla W \times \vec{h} + \nabla \times \vec{h} + ik_0 \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{e} &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos

$$\nabla W \times \vec{h} + \vec{\epsilon} \cdot \vec{e} = -\frac{1}{ik_0} \nabla \times \vec{h}. \quad (4.4)$$

Ahora sustituyendo Ecs.(4.3) en la segunda ecuación de (4.1), y utilizando propiedades de  $\nabla$  tenemos que

$$\nabla \cdot (\mu \vec{h}(r) e^{ik_0 W(r)}) = 0$$

$$\implies ik_0 e^{ik_0 W(r)} \mu \nabla W \cdot \vec{h} + e^{ik_0 W(r)} \mu \nabla \cdot \vec{h} = 0.$$

Por lo tanto

$$\nabla W \cdot \vec{h} = -\frac{1}{ik_0} \mu \nabla \cdot \vec{h}. \quad (4.5)$$

Análogamente se sustituye Ecs.(4.3) en las ecuaciones de (4.2) y obtenemos

$$\nabla W \times \vec{e} - \mu \vec{h} = -\frac{1}{ik_0} \nabla \times \vec{e}, \quad (4.6)$$

$$\nabla W \cdot \vec{\epsilon} \cdot \vec{e} = -\frac{1}{ik_0} \nabla \cdot \vec{\epsilon} \cdot \vec{e}. \quad (4.7)$$

Ahora tomamos el límite óptico  $k_0 \gg 1$  en ecuaciones (4.4) a (4.7) y obtenemos

$$\nabla W \times \vec{h} + \vec{\epsilon} \cdot \vec{e} = 0, \quad (4.8)$$

$$\nabla W \times \vec{e} - \mu \vec{h} = 0, \quad (4.9)$$

$$\nabla W \cdot \vec{\epsilon} \cdot \vec{e} = 0, \quad (4.10)$$

$$\nabla W \cdot \vec{h} = 0. \quad (4.11)$$

Las ecuaciones anteriores muestran que la naturaleza anisotrópica del medio, expresado por el tensor  $\overleftrightarrow{\epsilon}$ , se pueden expresar a través de las ecuaciones de Maxwell para medios anisotrópicos.

Enseguida obtendremos ecuaciones desacopladas para cada uno de los campos. Para la ecuación los modos  $TE$ , despejamos  $\vec{h}(r)$  de (4.9) y sustituimos en (4.8) se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla W \times \left[ \frac{1}{\mu} (\nabla W \times \vec{e}) \right] + \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{e} &= 0 \\ \implies \nabla W \times (\nabla W \times \vec{e}) &= -\mu \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{e}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Multiplicando por  $\vec{e}$  la Ec.(4.12) y enseguida intercambio la equivalencia en punto por la cruz

$$\begin{aligned} \vec{e} \cdot \left[ \nabla W \times (\nabla W \times \vec{e}) \right] &= -\mu \vec{e} \cdot \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{e} \\ \implies -(\nabla W \times \vec{e}) \cdot (\nabla W \times \vec{e}) &= -\mu \vec{e} \cdot \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{e}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos

$$(\nabla W_{TE} \times \hat{e})^2 = \mu \varepsilon_{ee}, \quad (4.13)$$

definiendo el vector unitario a lo largo del campo eléctrico  $\hat{e} = \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|}$  y donde  $\varepsilon_{ee} = \hat{e} \cdot \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \hat{e}$ . Aquí asignamos el subíndice  $TE$  debido a que esta ecuación se restringe a describir los modos Transversos Eléctricos como se puede ver de hecho de que la Ec.(4.8) sólo involucra componentes de  $\nabla W$  perpendiculares a  $\hat{e}$ .

Cabe mencionar que los correspondientes campos magnéticos  $TM$  se calculan a partir de la Ec.(4.8).

Para obtener la ecuación correspondiente para los modos  $TM$  resolvemos la Ec.(4.8) para  $\vec{e}$

$$\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}^{-1} \cdot \vec{e} = -(\nabla W \times \vec{h}) \vec{\epsilon}^{-1}.$$

Por lo tanto tenemos

$$\vec{e} = -(\nabla W \times \vec{h}) \vec{\epsilon}^{-1},$$

sustituyendo en (4.9)

$$\nabla W \times (\nabla W \times \vec{h}) \vec{\epsilon}^{-1} + \mu \vec{h} = 0,$$

multiplicando por  $\vec{h}$  la ecuación anterior se tiene

$$\vec{h} \cdot \left[ \nabla W \times (\nabla W \times \vec{h}) \vec{\epsilon}^{-1} \right] + \mu \vec{h} \cdot \vec{h} = 0,$$

$$\implies -(\nabla W \times \vec{h}) \cdot \vec{\epsilon}^{-1} \cdot (\nabla W \times \vec{h})^t = -\mu \vec{h} \cdot \vec{h}. \quad (4.14)$$

En la Ec.(4.14) utilizamos la transpuesta de  $(\nabla W \times \vec{h})$  para poder operar con el tensor dieléctrico,  $\vec{\epsilon}^{-1}$ , que es una matriz cuadrada.

Por lo tanto, obtenemos la ecuación

$$(\nabla W_{TM} \times \hat{h}) \cdot \vec{\epsilon}^{-1} \cdot (\nabla W_{TM} \times \hat{h})^t = \mu, \quad (4.15)$$

donde  $\hat{h} = \frac{\vec{h}}{|\vec{h}|}$  y el superíndice  $-1$  indica que es el tensor inverso y de manera similar al caso anterior, esta ecuación sólo involucra componentes de  $\nabla W$  perpendiculares a  $\hat{h}$ , por lo que hemos agregado el subíndice  $TM$ . Sin embargo, y en contraste con los modos  $TE$ , los campos eléctricos  $TM$  que se calculan a partir de la Ec.(4.8), no son perpendiculares a  $\nabla W$ .

Las ecuaciones (4.13) y (4.15) son las ecuaciones eikoniales para los modos  $TE$  y  $TM$  respectivamente, las cuales es conveniente escribir en un sistema de coordenadas generalizadas ortogonales  $\{q_1, q_2, q_3\}$ . Si  $q_1$  es la coordenada a lo largo de  $\hat{e}$  tenemos que

$$\begin{aligned} (\nabla W_{TE} \times \hat{e}) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial W}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial W}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial W}{\partial q_3} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (\nabla W_{TE} \times \hat{e}) &= \left( 0, \frac{1}{h_3} \frac{\partial W}{\partial q_3}, -\frac{1}{h_2} \frac{\partial W}{\partial q_2} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Las coordenadas  $q_2$  y  $q_3$  de  $\hat{e}$  son cero así las hemos escogido. Por lo tanto se tiene

$$(\nabla W_{TE} \times \hat{e})^2 = \frac{1}{h_3^2} \left( \frac{\partial W_{TE}}{\partial q_3} \right)^2 + \frac{1}{h_2^2} \left( \frac{\partial W_{TE}}{\partial q_2} \right)^2 = \mu \epsilon_{11}. \quad (4.17)$$

Por otro lado escribimos la Ec.(4.15) explícitamente queda:

$$\left( 0, \frac{1}{h_3} \frac{\partial W_{TM}}{\partial q_3}, -\frac{1}{h_2} \frac{\partial W_{TM}}{\partial q_2} \right) \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial W_{TM}}{\partial q_3} \\ -\frac{1}{h_2} \frac{\partial W_{TM}}{\partial q_2} \end{pmatrix} = \mu,$$

finalmente obtenemos de estas matrices la ecuación de la forma

$$\frac{\epsilon_{22}^{-1}}{h_3^2} \left( \frac{\partial W_{TM}}{\partial q_3} \right)^2 + \frac{\epsilon_{33}^{-1}}{h_2^2} \left( \frac{\partial W_{TM}}{\partial q_2} \right)^2 - 2 \frac{\epsilon_{23}^{-1}}{h_2 h_3} \left( \frac{\partial W_{TM}}{\partial q_2} \right) \left( \frac{\partial W_{TM}}{\partial q_3} \right) = \mu, \quad (4.18)$$

donde  $\varepsilon_{ij}^{-1}$  denota elementos de la matriz inversa,  $(\varepsilon_{ij})^{-1}$  con  $i, j = 1, 2, 3$  y  $h_2$  y  $h_3$  son factores de escala los cuales en coordenadas cartesianas son vectores unitarios.

Los rayos  $TE$  de Ec.(4.17) se propagan como en un medio isotrópico con índice de refracción  $n^2 = \mu\varepsilon_{11}$ ; lo cual reproduce de tener una única componente eléctrica. Por otro lado, la ecuación (4.18) tiene una estructura diferente, lo cual implica un comportamiento distinto para los rayos  $TM$ .

Notemos que las ecuaciones Eikoniales: (4.17) y (4.18) son ecuaciones diferenciales parciales de primer orden no lineales.

En el siguiente capítulo aplicamos los métodos revisados en el capítulo 1 para resolver las ecuaciones Eikoniales deducidas en este capítulo.

# Capítulo 5

## Aplicaciones ópticas de las ecuaciones diferenciales parciales

### 5.1. Trayectorias en un medio inhomogéneo

A continuación con el objeto de aplicar el uso de la aproximación expuesto en el capítulo anterior, revisaremos un ejemplo simple de medio inhomogéneo para el cual se puede inferir cualitativamente y calcular analíticamente la forma de los rayos.

Consideremos una sustancia isotrópica del tipo de Ec.(3.20) e inhomogénea cuyo índice de refracción depende de la coordenada  $x$  y cuya velocidad de fase es proporcional a  $x$ . Entonces la ecuación de la Eikonal toma la forma

$$(\nabla\mathcal{L})^2 = n(x)^2, \quad (5.1)$$

en donde las componentes de rayo cartesianas están dadas por

$$P_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}, \quad P_y = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} \quad (5.2)$$

y satisfacen por tanto la relación

$$P_x^2 + P_y^2 = n^2(x). \quad (5.3)$$

Si la velocidad es  $v_F = \alpha x$ , entonces el índice de refracción local está dado por  $n(x) = \frac{c}{V_F} = \frac{c}{\alpha x}$ , es decir, es inversamente proporcional a  $x$ .

Antes de formalmente resolver la ecuación de la Eikonal para este sistema, deduciremos la forma de las trayectorias basados en argumentos geométricos y físicos. Consideremos que sobre el eje  $x$  se encuentra un frente de ondas plano, entonces la distancia que recorre cada punto del frente se puede calcular directamente. Por ejemplo si tomamos dos puntos  $x_1$  y  $x_2$  situados sobre el eje  $x$  cuyo frente de onda se mueve a velocidad constante  $v_F$  se tiene que

$$d_1 = V_F t_1 = \alpha x_1 t_1 \quad (5.4)$$

$$d_2 = V_F t_1 = \alpha x_2 t_1 \quad (5.5)$$

de donde la razón  $\frac{d_1}{d_2} = \frac{x_1}{x_2}$  no depende del tiempo. Esto implica que el frente de ondas que partió el eje  $x$  al tiempo 0, se desplazó al tiempo  $t_1$  a una recta que pasa por el origen y forma un ángulo  $\theta$  tal que  $\tan \theta = x_1/x_2$ . Haciendo lo mismo para un tiempo arbitrario se obtiene lo mismo y, por ende, todos los frentes de onda a diferentes tiempos son líneas rectas que pasan por el origen pero que forman diferentes ángulos con el eje  $x$  (véase Fig. 5.1). Ahora bien, debido a que las trayectorias de rayo deben ser perpendiculares a los frentes de ondas en todo punto, se tiene que éstas deben ser círculos concéntricos que pasan por el origen. De esta manera, si se tiene por ejemplo un objeto colocado sobre el eje  $y$  debido a la curvatura de los rayos, se verá una imagen de este o espejismo colcada de frente al eje  $x$ .

Para verificar esto, consideremos la ecuación de la eikonal para este problema que se escribe como

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\right)^2 = \frac{c^2}{\alpha^2 x^2}, \quad (5.6)$$

en donde puede notarse que no existe dependencia explícita en la variable  $y$ .



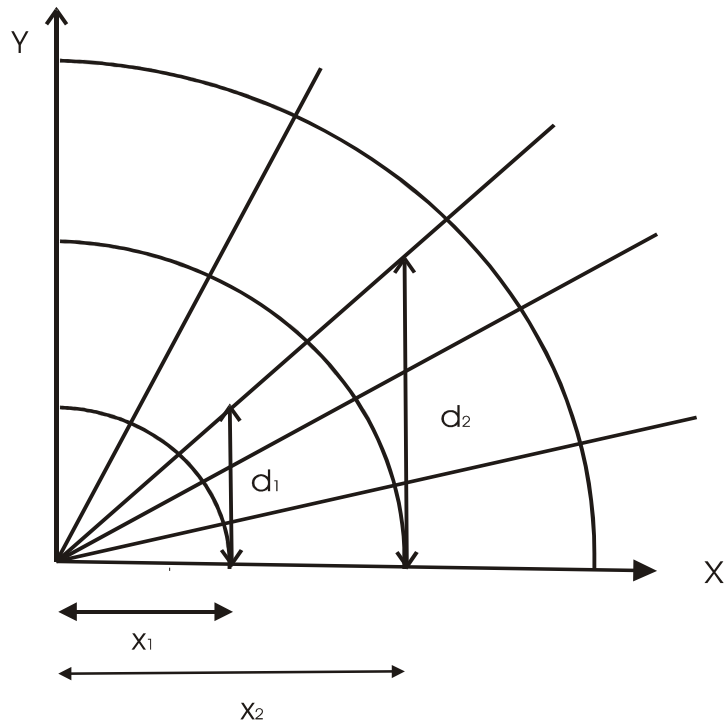


Figura 5.1: Dibujo esquemático de las frentes de ondas (líneas rectas que cruzan el origen) y de las trayectorias de los rayos (círculos concéntricos).

Por esta razón se infiere que la correspondiente componente de rayo asociada  $P_y$  es una constante de movimiento. De este modo conviene efectuar un cambio de variable

$$\mathcal{L} = S(x) + P_y y, \quad (5.7)$$

en donde, como se indica,  $S(x)$  debe ser una función solo de  $x$ . Sustituyendo esta expresión en la Ec.(5.6), obtenemos la ecuación diferencial ordinaria:

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 + P_y^2 = \frac{c^2}{\alpha^2 x^2}, \quad (5.8a)$$

se despeja  $S$  de Ec.(5.8a) y se obtiene

$$S = \int dx \sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2 x^2} - P_y^2}, \quad (5.9)$$

después de despejar  $S$  y sustituirla en Ec. (5.7) se obtiene

$$\mathcal{L} = P_y y + \int dx \sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2 x^2} - P_y^2}. \quad (5.10)$$

Derivando  $\mathcal{L}$  con respecto a  $P_y$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_y} = y - \int \frac{x P_y dx}{\sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2} - P_y^2 x^2}}, \quad (5.11a)$$

haciendo un cambio de variable en la integral de la Ec.(5.11a)  $u = \frac{c^2}{\alpha^2} - P_y^2 x^2$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_y} = y + \frac{1}{2P_y} \int \frac{du}{\sqrt{u}}, \quad (5.12)$$

integrando y reescribiendo el valor de  $u$  se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_y} = y + \frac{\sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2} - P_y^2 x^2}}{P_y}. \quad (5.13)$$

Podemos obtener directamente la ecuación de la trayectoria. Específicamente, la ecuación que relaciona la componente de rayo conservada  $P_y$  con la condición inicial nos conduce a

$$\gamma \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_y} = y + \sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2} - x^2} \quad (5.14)$$

la cual después reorganizarla toma la forma

$$(\gamma - y)^2 + x^2 = \frac{(\frac{c}{\alpha})^2}{P_y^2}, \quad (5.15)$$

en donde  $\gamma$  es una constante.

Este resultado muestra que efectivamente las trayectorias de rayo en forma de círculos concéntricos con el origen son soluciones de la ecuación eikonal, pero además se pueden tener círculos cuyo centro está en cualquier punto del eje  $y$ . Esto último es tan sólo una consecuencia de la invariancia traslacional de la Ec.(5.6) del sistema con respecto al eje  $y$ . Nótese como el radio del círculo depende inversamente al cuadrado de  $P_y$ , es decir, cuando se envía el rayo en la dirección perpendicular al gradiente del índice de refracción ( $P_y = 0$ ), éste no se curva mientras que el rayo adquiere su máxima curvatura cuando se envía paralelo al eje  $y$ .

### 5.1.1. Ecuación característica utilizando el formalismo de Charpit

En esta sección resolveremos la ecuación de Eikonal utilizando la teoría de Charpit para encontrar una expresión que nos permite calcular el camino óptico a través de una gota de cristal líquido nemático cuya configuración orientacional satisface condiciones de frontera homeotrópica, que significa que sus moléculas son perpendiculares a la frontera de la esfera y se halla confinado en una esfera de radio  $R$ . El campo de orientaciones en ausencia de campo eléctrico para el sistema puede adquirir la configuración radial para la cual

$\hat{n} = \hat{e}_r$ . De donde tomando en cuenta la forma explícita del tensor dieléctrico para el nemático dada por la ecuación y sustituyendo en Ec.(4.18) obtenemos

$$\varepsilon_{\parallel} \left( \frac{\partial \mathcal{W}_{TM}}{\partial x} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{\perp}}{x^2} \left( \frac{\partial \mathcal{W}_{TM}}{\partial \theta} \right)^2 = \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}, \quad (5.16)$$

en donde  $x = \frac{r}{R}$ , debido a que la ecuación diferencial no depende explícitamente de la variable  $\theta$  entonces es conveniente buscar una solución para  $\mathcal{W}_{TM}$  con la siguiente forma

$$\mathcal{W}_{TM} = q_0 \theta + S(x) \quad (5.17)$$

en donde  $q_0$  es una constante diferente de cero. Sustituyendo  $S$  en la Ec.(5.16) tenemos

$$\varepsilon_{\parallel} \left( \frac{dS}{dx} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{\perp}}{x^2} q_0^2 = \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel},$$

de donde despejando  $\frac{dS}{dx}$  obtenemos

$$\left( \frac{dS}{dx} \right) = \pm \sqrt{\left( \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} - \frac{\varepsilon_{\perp}}{x^2} q_0^2 \right) / \varepsilon_{\parallel}}, \quad (5.18)$$

$$S = \pm \int \sqrt{\left( \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} - \frac{\varepsilon_{\perp}}{x^2} q_0^2 \right) / \varepsilon_{\parallel}} dx. \quad (5.19)$$

Sustituimos  $S$  en Ec.(5.17) se tiene la función

$$\mathcal{W}_{TM} = q_0 \theta \pm \int \sqrt{\left( \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} - \frac{\varepsilon_{\perp}}{x^2} q_0^2 \right) / \varepsilon_{\parallel}} dx, \quad (5.20)$$

que después de efectuar la integral obtenemos la solución de Ec.(5.16) tomando la forma explícita:

$$\mathcal{W}_{TM}(q_0, \theta, x) = q_0 \theta + \left[ \varepsilon_{\perp} \left( x^2 - \frac{q_0^2}{\varepsilon_{\parallel}} \right) \right]^{1/2} - q_0 \left( \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \right)^{1/2} \arccos \left[ \frac{q_0}{x \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}} \right] + P_0, \quad (5.21)$$

en donde  $P_0$  es una constante de integración.

La ecuación de la trayectoria se obtiene directamente utilizando las ecuaciones de Charpit, de la Ec.(5.16)  $F$  la podemos escribir de la forma

$$F = \varepsilon_{\parallel} p^2 + \frac{\varepsilon_{\perp}}{x^2} q^2 - \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} = 0, \quad (5.22)$$

utilizando las Ecs.(??) de Charpit

$$\frac{dx}{\partial F / \partial p} = \frac{d\theta}{\partial F / \partial q} = \frac{dp}{-(\partial F / \partial x + p \partial F / \partial W)} = \frac{dq}{-(\partial F / \partial \theta + p \partial F / \partial W)} \quad (5.23)$$

notemos que en la ecuación no depende de  $W$  y ni de  $\theta$  entonces

$$\frac{\partial F}{\partial W} = 0 \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0,$$

de la última parte de la ecuación obtenemos

$$q = cte.,$$

por consiguiente despejamos a  $p$  de la ecuación  $F$

$$p = \pm \sqrt{\varepsilon_{\perp} \left(1 - \frac{q^2}{\varepsilon_{\parallel} x^2}\right)}. \quad (5.24)$$

Sustituyendo Ec.(5.24) en la Ecs. (5.23) tenemos

$$\frac{dx}{p \varepsilon_{\parallel}} = \frac{d\theta}{q \frac{\varepsilon_{\perp}}{x^2}}.$$

Así, por lo tanto

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{q \varepsilon_{\perp}}{x^2 \varepsilon_{\parallel} \sqrt{\varepsilon_{\perp} \left(1 - \frac{q^2}{x^2 \varepsilon_{\parallel}}\right)}}, \quad (5.25)$$

integrando en ambos lados se obtiene

$$\theta = \int \left( \frac{q \sqrt{\varepsilon_{\perp}}}{\varepsilon_{\parallel} x^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{x^2 \varepsilon_{\parallel}}}} \right) dx, \quad (5.26)$$

luego, donde utilizando el cambio de variable  $u = \frac{1}{x}$  en la Ec. (5.26) se tiene

$$\theta = -\frac{q\sqrt{\varepsilon_{\perp}}}{\varepsilon_{\parallel}} \int \left( \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{q^2 u^2}{\varepsilon_{\parallel}}}} \right). \quad (5.27)$$

Utilizando un conveniente cambio de variable  $\cos \alpha = \frac{qu}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}}$  en la Ec. (5.27) podemos escribir a  $\theta$  de la forma

$$\theta = \frac{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}} \int \left( \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} \right) d\alpha,$$

y obtener a  $\theta$  de la forma

$$\theta = \frac{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}} (\alpha + c_0) \quad (5.28)$$

donde  $c_0$  es una constante de integración, luego regresamos los cambios de variable que utilizamos y finalmente obtenemos a  $\theta$  de la forma

$$\theta = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}}} \arccos \left( \frac{q}{x\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}} \right) + c_0 \quad (5.29)$$

de esta ecuación despejamos a  $x$  en donde la expresión que se obtiene nos proporciona la trayectoria de los rayos asociados a los campos transversos magnéticos dentro de la gota nemática

$$x = \frac{\frac{q}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}}}{\cos \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} (\theta - c_0)}. \quad (5.30)$$

Haciendo la sustitución  $q = q_0$  y  $\gamma = c_0$  en Ec.(5.29), con la condición frontera, es decir, sobre el borde de la esfera: en  $x = 1$ ,  $\theta = \theta_0$ . Podemos escribir a  $\gamma$  de la forma

$$\gamma = \theta_0 - \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}}} \arccos \left[ \frac{q_0}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}} \right]. \quad (5.31)$$

Por otro lado introduciendo coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\rho(\theta) &= x(\theta) \sin \theta, \\ z(\theta) &= x(\theta) \cos \theta,\end{aligned}$$

derivando con respecto a  $\theta$  a las funciones  $\rho$  y  $z$ . Calcular la tangente se tiene

$$\tan \alpha = \frac{d\rho}{dz} = \frac{q_0 \cos \theta + \sqrt{1 - \frac{q_0^2}{\varepsilon_{\parallel}}} \sqrt{\varepsilon_{\parallel}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} \sin \theta}{\sqrt{1 - \frac{q_0^2}{\varepsilon_{\parallel}}} \sqrt{\varepsilon_{\parallel}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} \cos \theta - q_0 \sin \theta} \quad (5.32)$$

De la ecuación anterior despejamos a  $q_0$  obteniendo la forma

$$q_0 = \frac{\sqrt{2\varepsilon_{\parallel}} \sqrt{\sin^2(\alpha - \theta)}}{\sqrt{(\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}) + (\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \cos 2(\alpha - \theta)}}. \quad (5.33)$$

Por la incidencia del rayo a través de la gota se tiene que  $\alpha - \theta = \phi_2$  entonces haciendo que  $\varepsilon_h$  coincida con  $\varepsilon_{\perp}$ , obtenemos a  $q_0$  de la forma:

$$q_0 = \varepsilon_{\parallel} \sqrt{\frac{\varepsilon_h \varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_h (\varepsilon_{\parallel}^2 - \varepsilon_{\perp}^2) + \varepsilon_{\perp}^2 \varepsilon_{\parallel} \csc^2 \theta_0}}, \quad (5.34)$$

Algunas características de la trayectoria como el ángulo de deflexión se infieren de la Ec.(5.30). En la Figura 5.2 mostramos un conjunto de rayos que se producen a partir del punto 0,0 del lado derecho de la gota, la figura muestra que los rayos divergen del ecuador de tal forma que los más cercanos a este se doblan más. De hecho, aparte del rayo que incide normalmente y se propaga sobre el ecuador, ningún rayo puede alcanzar el sector de ángulo sólido localizado a la izquierda de la esfera cuyo tamaño está dado por la discontinuidad del ángulo de  $\theta = \pi$ , es decir, el desenfocamiento del haz por la presencia de una zona oscura detrás de la gota.

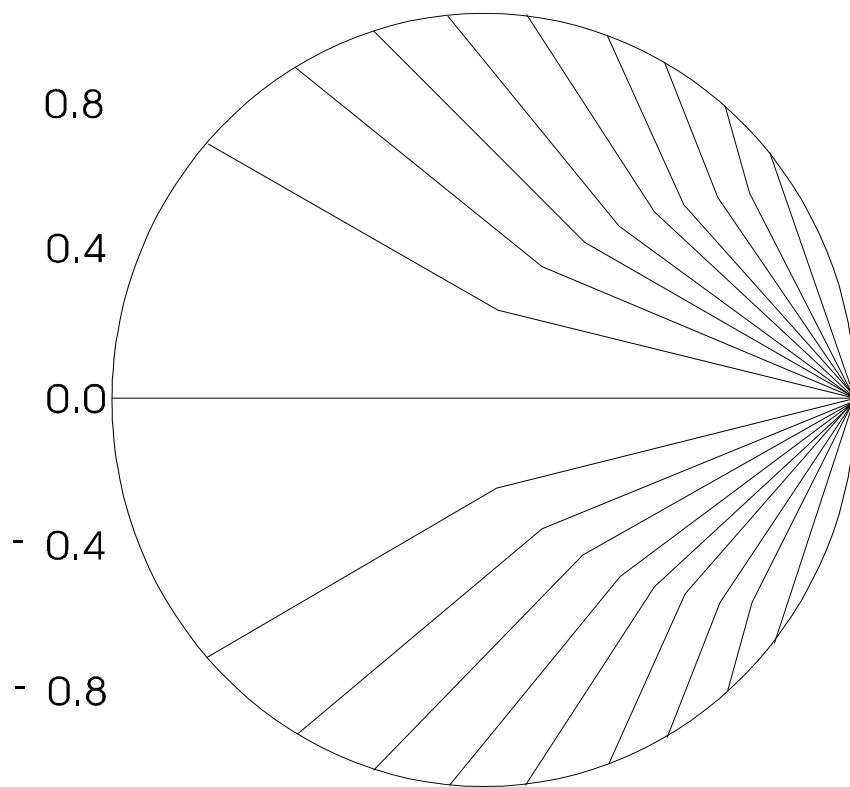


Figura 5.2: Rayos deflectados en una gota de cristal líquido nemático en configuración radial.



## 5.2. Propagación del rayo a través de una celda plana

Calcularemos la trayectoria de un rayo de una baja intensidad, siguiendo el procedimiento usual en óptica geométrica, asumiendo que el  $TM$ , puede escribirse en la forma ya vista en la Ec.(3.1) del Capítulo 3, a saber,

$$\mathbf{E}(r, t) = \mathbf{E}_0(r)e^{ik_0W(r)} \quad \text{y} \quad \mathbf{H}(r, t) = \mathbf{H}_0(r)e^{ik_0W(r)}.$$

donde  $W(r)$  es lo que denominamos función característica de Hamilton [26], como es sabido, es igual a la diferencia en camino óptico de un rayo propagándose entre dos puntos dentro de una celda. En nuestro ejemplo utilizaremos el formalismo de Charpit para encontrar una expresión matemática que nos permita describir la trayectoria del rayo dentro de la celda, utilizaremos la ecuación Eikonal para coordenadas cartesianas, tendrá la forma

$$\varepsilon_{zz} \left( \frac{\partial W}{\partial \chi} \right)^2 + \varepsilon_{xx} \left( \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right)^2 + 2\varepsilon_{xz} \left( \frac{\partial W}{\partial \chi} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right) = \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp},$$

luego donde  $p = \frac{\partial W}{\partial \chi}$  y  $q = \frac{\partial W}{\partial \zeta}$  podemos escribir de la forma

$$\varepsilon_{zz}p^2 + \varepsilon_{xx}q^2 + 2\varepsilon_{xz}pq - \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} = 0. \quad (5.35)$$

Utilizando el formalismo de Charpit

$$\frac{d\chi}{F_p} = \frac{d\zeta}{F_q} = \frac{dW}{pF_p + qF_q} = \frac{-dp}{F_p + pF_W} = \frac{-dq}{F_q + qF_W}, \quad (5.36)$$

aplicando las primeras ecuaciones de (5.36) se tiene

$$\frac{d\chi}{2\varepsilon_{xx}p + 2\varepsilon_{xz}q} = \frac{d\zeta}{2\varepsilon_{zz}q + 2\varepsilon_{xz}p} = \frac{dW}{2\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}},$$

luego se tiene

$$\frac{d\chi}{d\zeta} = \frac{\varepsilon_{xx}q + \varepsilon_{xz}p}{\varepsilon_{zz}p + \varepsilon_{xz}q}, \quad (5.37)$$

despejamos a  $p$  de la ecuación principal (5.35) y obteniendo

$$p = \frac{-\varepsilon_{xz}q \pm \sqrt{\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}(\varepsilon_{zz} - q^2)}}{\varepsilon_{zz}}, \quad (5.38)$$

enseguida sustutimos la Ec.(5.38) en Ec.(5.37)

$$\frac{d\chi}{d\zeta} = \frac{\varepsilon_{xx}q + \varepsilon_{xz} \left( \frac{-\varepsilon_{xz}q \pm \sqrt{\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}(\varepsilon_{zz} - q^2)}}{\varepsilon_{zz}} \right)}{\varepsilon_{zz} \left( \frac{-\varepsilon_{xz}q \pm \sqrt{\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}(\varepsilon_{zz} - q^2)}}{\varepsilon_{zz}} \right) + \varepsilon_{xz}q},$$

y desarrollando obtenemos

$$\frac{d\chi}{d\zeta} = \frac{q\sqrt{\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}}}{\varepsilon_{zz}\sqrt{\varepsilon_{zz} - q^2}} \pm \frac{\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{zz}}.$$

Si suponemos que el medio es estratificado y solo depende de la variable  $\zeta = z/l$  entonces integrando se tiene la ecuación de la trayectoria

$$\chi = \pm \int \left[ \left( \varepsilon_{xz} + q(\sqrt{\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}}/\sqrt{\varepsilon_{zz} - q^2}) \right) / \varepsilon_{zz} \right] d\zeta. \quad (5.39)$$

El parámetro  $q$  esta expresado en terminos del ángulo de incidencia,  $\alpha$ , donde es un ángulo discreto, evaluando  $\frac{d\chi}{d\zeta}$  en  $\zeta = 0$  en la Ec.(5.39) obtenemos

$$q = \frac{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \cot^2 \alpha}}, \quad (5.40)$$

El ángulo de incidencia se varia en el intervalo;  $\alpha \in [0, \pi/2]$ , tomando distintos ángulos de incidencia entonces  $q$  va ir describiendo distintas trayectorias de acuerdo al ángulo incidente. Asi la trayectoria dentro de la celda está representada en la Fig.5.3.

### 5.2.1. Ecuación para la configuración axial

La ecuación eikonal para una gota en una configuración axial se expresa de manera más simple en un sistema coordenado cartesiano ver Figura 5.4 alineado con el vector de onda óptico, esto es

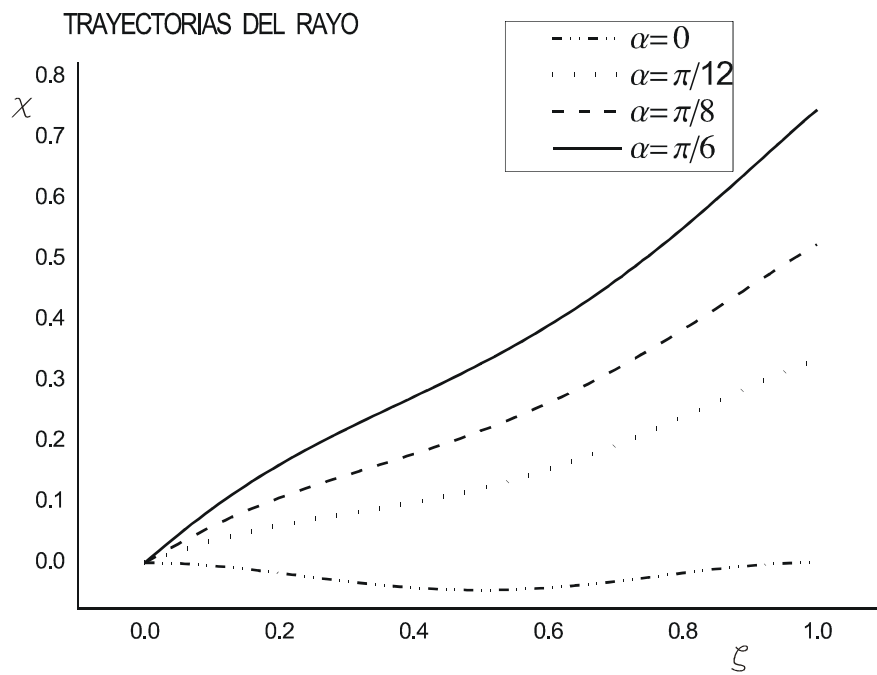


Figura 5.3: Trayectoria del rayo dentro de la celda variando el ángulo de incidencia  $\alpha$ .

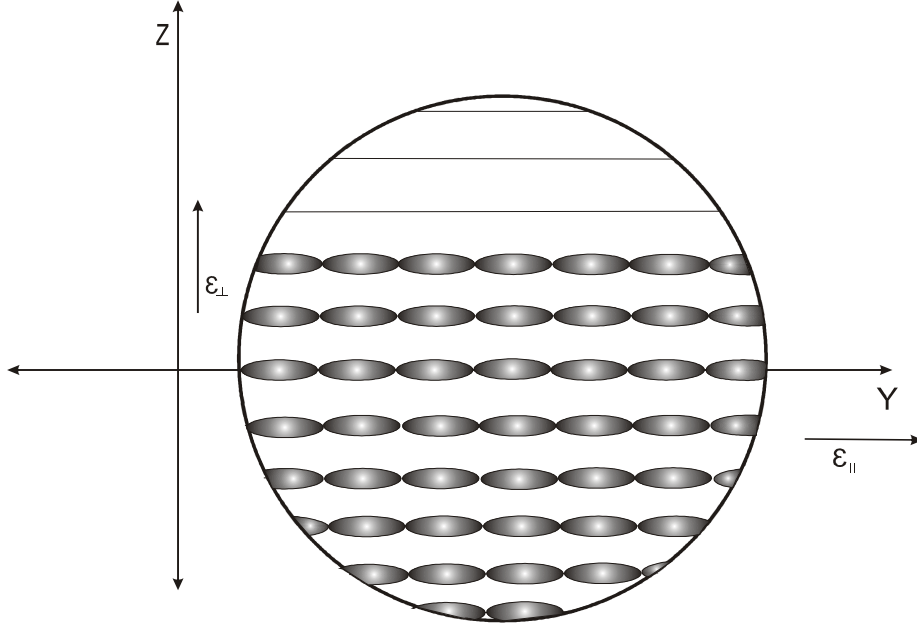


Figura 5.4: Representación de una configuración axial en el plano cartesiano.

$$\varepsilon_{\parallel} \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + \varepsilon_{\perp} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 = \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp},$$

la cual la podemos escribir de la forma

$$\varepsilon_{\parallel} p^2 + \varepsilon_{\perp} q^2 = \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}, \quad (5.41)$$

donde  $p = \frac{\partial W}{\partial z}$ ,  $q = \frac{\partial W}{\partial y}$  y con  $\varepsilon_{\parallel} \succ \varepsilon_{\perp}$ .

Despejamos a  $q$  obtenemos la ecuación

$$q = \pm \sqrt{\varepsilon_{\parallel}} \sqrt{1 - \frac{p^2}{\varepsilon_{\perp}}}. \quad (5.42)$$

Aplicando la teoría de Charpit

$$\frac{dz}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dW}{pF_p + qF_q} \quad (5.43)$$

siguiendo con las dos primeras ecuaciones de (5.43) se tiene

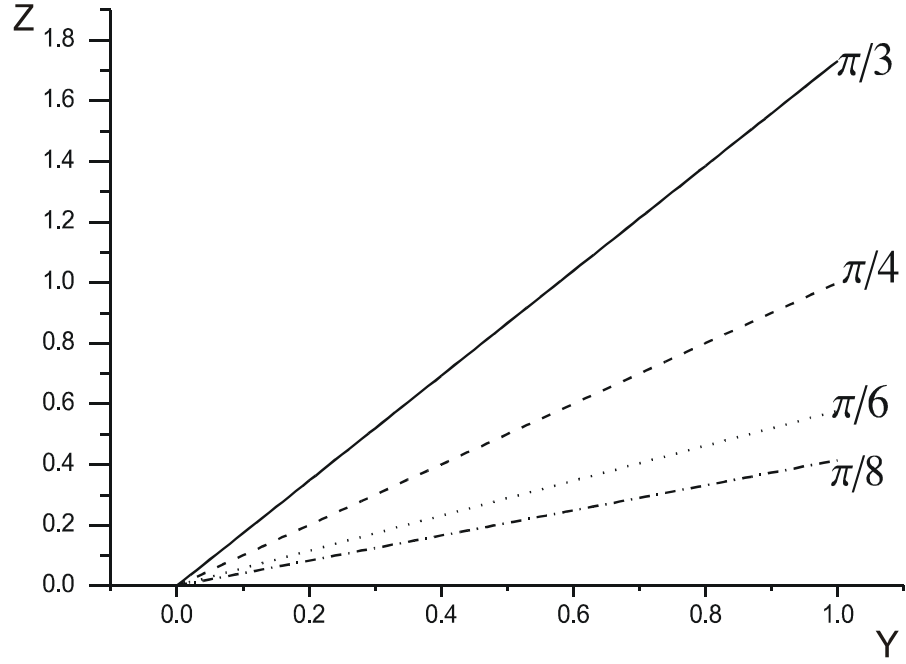


Figura 5.5: Trayectoria del rayo para diferentes ángulos de incidencia.

$$\frac{dz}{2p\varepsilon_{\parallel}} = \frac{dy}{2q\varepsilon_{\perp}},$$

luego donde

$$\frac{dz}{dy} = \frac{p\varepsilon_{\parallel}}{q\varepsilon_{\perp}}$$

sustituyendo  $q$  en la ecuación anterior se tiene

$$\frac{dz}{dy} = \frac{p\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}}{\varepsilon_{\perp}\sqrt{1-p^2/\varepsilon_{\perp}}} \quad (5.44)$$

Aplicamos la integral en ambos lados se obtiene una ecuación del camino óptico

$$z = \pm \int \left( \frac{p\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}}{\varepsilon_{\perp}\sqrt{(1-p^2)/\varepsilon_{\perp}}} \right) dy. \quad (5.45)$$

En seguida integramos para obtener una ecuación del camino óptico y  $k_0$  es una constante de integración

$$\gamma = k_0 \mp \frac{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}} p_z}{\varepsilon_{\perp} \sqrt{1 - \frac{p_z^2}{\varepsilon_{\perp}}}} y + z, \quad (5.46)$$

Obtenemos la configuración plana sometida a campos intensos ver Figura 5.5 la trayectoria del rayo de la Ec.(5.45) .

Ahora para complementar nuestro estudio consideremos una ecuación diferencial parcial de segundo orden y utilizaremos el ejercicio anterior para hallar su trayectoria, veamos la ecuación de *Euler-Lagrange* que es de segundo orden

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} - q \sin 2\theta = 0, \quad (5.47)$$

donde  $q$  es un campo y  $q = \frac{\varepsilon_a V^2}{8\pi k}$ , denota la razón entre la energía eléctrica y las densidades de energía elásticas; en este sentido, mide el acoplamiento entre el campo eléctrico y el nemático. Aquí  $V$  es el voltaje aplicado y  $\varepsilon_a$  es la anisotropía dieléctrica de frecuencia baja como  $q \neq 0$  tenemos la siguiente ecuación

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} \frac{d\theta}{d\zeta} - q \sin 2\theta \frac{d\theta}{d\zeta} = 0,$$

integrando la ecuación anterior se tiene

$$\frac{d}{d\zeta} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{d\zeta} \right)^2 + \frac{q}{2} \cos 2\theta \right],$$

luego desarrollando la ecuación anterior se tiene

$$\left( \frac{d\theta}{d\zeta} \right)^2 = 2C_0 - q \cos 2\theta, \quad (5.48)$$

donde  $C_0$  es una constante de integración, enseguida si  $\theta = 0$  y  $\frac{d\theta}{d\zeta} = 0$  se obtiene

$$2C_0 = q.$$

Esta hipótesis equivale a suponer que el campo eléctrico es muy intenso ya que al exigir  $\frac{d\theta}{d\zeta}(\zeta = 0) = 0$ , se induce que la región de moléculas sin orientar se alejen de la placa  $\zeta = 0$ , aplicando está en Ec.(5.48) y identidad trigonométrica obtenemos finalmente

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \sqrt{2q} \sin \theta, \quad (5.49)$$

integrando ambos lados se tiene

$$\ln \left( \tan \frac{\theta}{2} \right) = \pm \sqrt{2q} \zeta + C_1, \quad (5.50)$$

donde  $C_1$  es una constante de integración.

Así despejamos de la Ec.(5.50) a  $\theta$ , obteniendo

$$\theta = 2 \arctan \left( ce^{\pm\sqrt{2q}\zeta} \right) \quad (5.51)$$

donde  $c = e^{C_1}$ , es una constante.

Las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} \theta &= (\zeta = 0) = 0, \\ \theta &= (\zeta = l) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

es decir, podemos escribir a la Ec. (5.51) de la forma

$$\frac{\pi}{2} = 2 \arctan(\mathbf{y}e^{\pm\sqrt{2q}l}) \quad (5.53)$$

donde debemos de proponer una  $\mathbf{y}$  tal que

$$\theta = 2 \arctan \left( e^{\sqrt{2q}\zeta} \mathbf{y} \right), \quad (5.54)$$

proponemos que  $\mathbf{y} = e^{-\sqrt{2q}\zeta}$ , así finalmente obtenemos a  $\theta$  que es de la forma

$$\theta = 2 \arctan \left( ce^{\sqrt{2q}(\zeta-l)} \right), \quad (5.55)$$

sustituyendo  $\theta$  en la Ec.(5.39) y teniendo la ecuación de la trayectoria del rayo

$$\chi = \int_0^z \left[ \left( \varepsilon_{xz} + p(\sqrt{\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}} / \sqrt{\varepsilon_{zz} - p^2}) \right) / \varepsilon_{zz} \right] d\zeta,$$

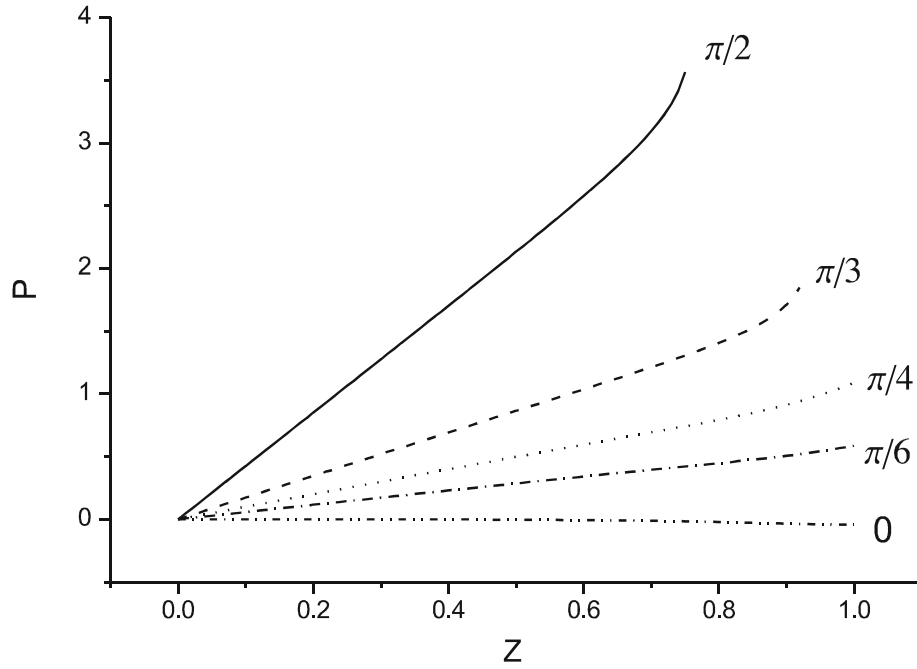


Figura 5.6: Trayectoria del rayo con  $q$  fija y variando a  $p$  en diferente ángulo de incidencia  $\alpha$ .

donde ahora  $p$  es una función que depende del ángulo de incidencia  $\alpha$ . Análogamente, calculando como la Ec.(5.40), haciendo  $\left. \frac{dx}{d\zeta} \right|_{\zeta=0}$  en Ec.(5.39) obtenemos a  $p$  de la forma

$$p = \frac{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \cot^2 \alpha}}.$$

Así sustituimos a  $\varepsilon_{xz}$  y  $\varepsilon_{zz}$  en la ecuación de la trayectoria del rayo

$$\gamma = \int_0^z \left( (-\varepsilon_a \sin \theta \cos \theta + \frac{p\sqrt{\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}}}{\sqrt{\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \cos^2 \theta - p^2}}) \left( \frac{1}{\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \cos^2 \theta} \right) \right) d\theta, \quad (5.56)$$

donde la función de la integral depende de variables de  $p(\alpha)$  y  $\theta(q)$  ver Figura 5.6.



A continuación veamos un modelo óptico utilizando el ejercicio de la Ec. (1.39) del capítulo 1 sección 1.0.8. Sea

$$p^2g(x) + q^2h(y) = z \quad (5.57)$$

luego se sigue que

$$F = p^2g(x) + q^2h(y) - z \quad (5.58)$$

utilizando el formalismo de Charpit

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{-dp}{F_x + pF_z} = \frac{-dq}{F_y + qF_z}$$

obtenemos

$$\frac{dx}{2pg(x)} = \frac{dy}{2qh(y)} = \frac{dz}{2z} = \frac{dp}{p - p^2g'(x)} = \frac{dq}{q - q^2h'(y)}, \quad (5.59)$$

análogamente como ejercicio (1.39) se sigue

$$\frac{p^2g'(x)dx + 2pg(x)dp}{2p^2g(x)} = \frac{q^2h'(y)dy + 2qh(y)dq}{2q^2h(y)},$$

enseguida y tenemos

$$p^2g(x) = c_1q^2h(y). \quad (5.60)$$

Sustituimos (5.60) en Ec.(5.58) obtenemos

$$p = \sqrt{\frac{c_1z}{(c_1+1)g(x)}} \quad y \quad q = \sqrt{\frac{z}{(c_1+1)h(y)}},$$

luego enseguida

$$\left(\frac{c_1+1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} dz = \left(\frac{c_1}{g(x)}\right)^{\frac{1}{2}} dx + \left(\frac{1}{h(y)}\right)^{\frac{1}{2}} dy,$$

integrando se obtiene la integral completa

$$2[z]^{\frac{1}{2}} = \frac{[c_1]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{c_1+1}} \int \frac{dx}{\sqrt{g(x)}} + \frac{1}{\sqrt{c_1+1}} \int \frac{dy}{\sqrt{h(y)}} + c_2 \quad (5.61)$$

con  $c_1$  y  $c_2$  constantes.

Es interesante interpretar la Ec.(5.58), tomado  $W = 2\sqrt{z}$ , como la ecuación eikonal de un medio inhomogéneo anisotrópico cuyo tensor dieléctrico siempre permanece diagonal y en donde  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{xx}(x)$  y  $\epsilon_{yy} = \epsilon_{yy}(y)$ . De esta manera la Ec.(5.61) muestra que el camino óptico total es el resultado de la adición de las contribuciones provenientes de las direcciones ortogonales  $x$  y  $y$ . De hecho esta misma expresión sugiere reescribir la Ec.(5.58) de la siguiente forma

$$\left( \frac{2\partial\sqrt{z}}{\partial \left[ \int \frac{dx}{\sqrt{g(x)}} \right]} \right)^2 + \left( \frac{2\partial\sqrt{z}}{\partial \left[ \int \frac{dy}{\sqrt{h(y)}} \right]} \right)^2 = 1. \quad (5.62)$$

Esta expresión nos dice que el gradiente de la función  $W = 2\sqrt{z}$  en las coordenadas  $\int dx/\sqrt{g(x)}$  y  $\int dy/\sqrt{h(y)}$  es una constante. Por tanto es claro que la distancia al centro de coordenadas satisface esta ecuación diferencial parcial:

$$W = \sqrt{\left( \int \frac{dx}{\sqrt{g(x)}} \right)^2 + \left( \int \frac{dy}{\sqrt{h(y)}} \right)^2}. \quad (5.63)$$

Esta expresión representa una solución del tipo frente de ondas mientras que la Ec.(5.61) nos da soluciones del tipo trayectorias de rayo. De hecho el parametro  $c_1$  se puede expresar en términos del ángulo de incidencia del rayo, consideremos el caso especial para el cual  $g(x)$  y  $h(y)$  son funciones lineales de sus coordenadas. En tal caso la Ec.(5.63) se reduce a

$$W = 2\sqrt{|x| + |y|}, \quad (5.64)$$

despejando a  $y$  de la Ec.(5.64) se tiene

$$y = \pm x + \left( \frac{W}{2} \right)^2, \quad (5.65)$$

la cual se presenta en la Figura 5.7, para distintos valores de  $W$ .

Por otro lado la ecuación para las trayectorias de los rayos se puede expresar como

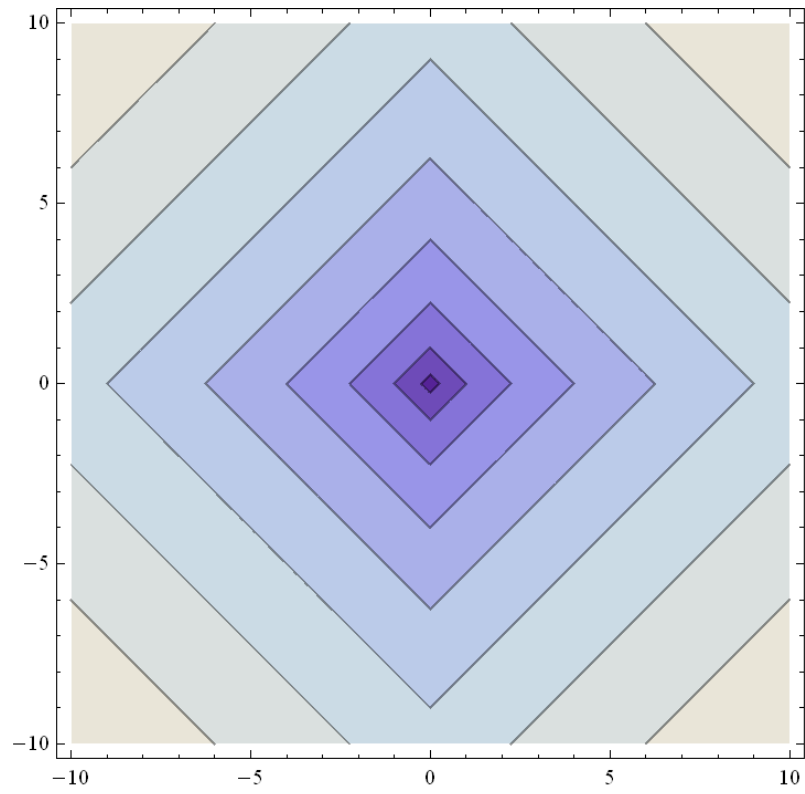


Figura 5.7: Frente de onda correspondientes al modelo bidimensional.

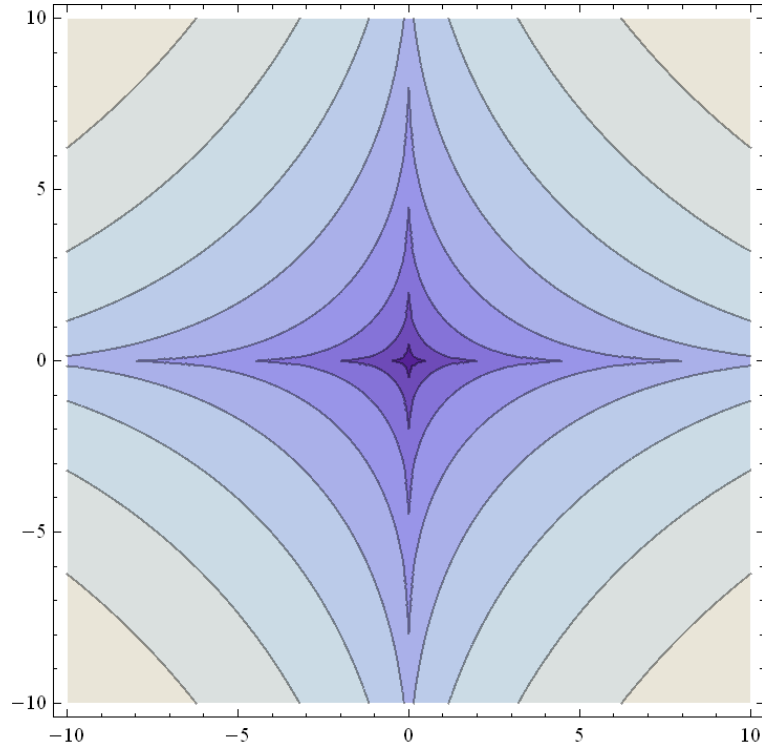


Figura 5.8: Trayectorias de rayo correspondientes al modelo anisotrópico axial

$$f = \cos u \int \frac{dx}{\sqrt{g(x)}} + \sin u \int \frac{dy}{\sqrt{h(y)}} + c_2, \quad (5.66)$$

en donde  $\sin u = 1/\sqrt{c_1 + 1}$  y  $2[z]^{1/2} = f$ . Considerando el caso especial para el cual  $g(x)$  y  $h(y)$  son funciones lineales de sus coordenadas. Integrando tenemos

$$f = 2 \cos u \sqrt{x} + 2 \sin u \sqrt{y} + c_3, \quad (5.67)$$

despejamos  $y$  de la Ec.(5.67) se tiene

$$y = \pm \left( \frac{f_i - 2 \cos u \sqrt{x}}{2 \sin u} \right)^2, \quad (5.68)$$

donde  $f_i = f - c_3$  es una constante.

Las trayectorias de rayos para este modelo se presentan en la Figura 5.8

Con esto concluyen nuestras aplicaciones del formalismo de Charpit en donde todas estas ecuaciones diferenciales parciales no lineales son de primer orden elevadas el cuadrado.

# Capítulo 6

## Notas Finales y Perspectivas

Revisamos y definimos la terminología de las ecuaciones en derivadas parciales de primer grado, ecuaciones diferenciales totales, se revisan algunos teoremas para encontrar la solución general de una ecuación diferencial parcial de primer orden no lineal. Analizamos en particular el formalismo de Charpit para encontrar la solución general de una ecuación diferencial parcial no lineal de primer orden, además se revisaron algunos casos particulares para encontrar la solución general de una ecuación diferencial parcial de primer orden.

Revisamos las características de los cristales líquidos así como clasificación y estructura de los cristales líquidos nemáticos y algunas de sus propiedades.

En la propagación de la luz se consideró que su longitud de onda es muy pequeña en relación a la distancia característica de los sistemas considerados y con esto nos permite aproximar consecuentemente las ecuaciones de Maxwell y de ésta manera deducir la ecuaciones Eikonales.

A partir de un campo general con una función real escalar de posición y funciones vectoriales e introduciendo éste campo a las ecuaciones de Maxwell y considerando una constante de permitividad dieléctrica, en un medio homogéneo y refractivo se dedujo la ecuación Eikonal para describir medios isotrópicos. Posteriormente utilizando nuevamente las ecuaciones de Maxwell y sustituyendo ahora en el campo un tensor dieléctrico en vez de una constante

dieléctrica y la función característica de Hamilton se dedujo un sistema de ecuaciones Eikonales para cada uno de los conjuntos de campos transversales eléctrico y magnético,  $TE$  y  $TM$  respectivamente, éstas son ecuaciones diferenciales parciales no lineales de primer orden y pueden describir sistemas ópticos anisotrópicos inhomogéneos, sistemas isotrópicos e inhomogéneos dependiendo de las cualidades matemáticas del tensor dieléctrico del medio que se utilice en dichas ecuaciones.

Por último se plantearon ecuaciones diferenciales parciales de primer orden del tipo Eikonal para algunos modelos solubles sistemas ópticos uniaxiales, se resolvieron aplicando principalmente el formalismo de Charpit, hallamos para cada ecuación una expresión matemática que describe sus trayectorias y en algunos casos también hallamos sus soluciones tipo frente de ondas del rayo que describe las soluciones de dicha ecuación.

Mediante el formalismo de Charpit para resolver ecuaciones Eikonales se formuló un modelo teórico sencillo e intuitivo para describir sistemas ópticos para medios anisotrópicos e inhomogéneos. Esperamos que estas aplicaciones del formalismo sean bastante útil para estudiar varios tipos de sistemas complejos como mesofases (cristales líquidos), sólidos anisotrópicos y polímeros fotorefractivos. De hecho su solución exacta directamente a partir de las ecuaciones de Maxwell puede dar lugar a problemas numéricos formidables los cuales para los casos en que la hipótesis de una longitud de onda muy pequeña se cumpla, no aportarían significativas mejoras a la descripción óptica de los sistemas.

# Bibliografía

- [1] D. W. Barreman, *J. Opt. Soc. Am* **62** 502 (1972).
- [2] C. Oldano, *Phys. Rev. A* **40**, (1989); E. Santamato y Y. R. Shen, *J. Opt. Soc. Am. A* **4**, 356 (1972).
- [3] H. Lin, P. Pallffy-Muhoray, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **14**, 1977 (1993).
- [4] J. A. Reyes y R. F. Rodríguez, *Opt. Comm.* **134**, 349 (1997); R. F. Rodríguez y J. A. Reyes, *Rev. Mex. Fis.* **45**, 1896-1902 (1999).
- [5] D. Olivero y C. Oldano, *Liq. Cryst.* **30**, 345 (2003); G. Panasyuk, J. Kelly, E. C. Gartland y D. W. Allender, *Phys. Rev. E.* **67**, 041702 (2003).
- [6] G. Panasyuk, J. R. Kelly, P. Bos, et al. *Liq. Cryst.* **31**, (11); 1503-1515 2004; N. D. Amarasinghe, E. C. Gartland, J. R. Kelly, *J. Opt. Soc. Am.* **21**(7); 1344-1361 2004; Panasyuk G., Kelly J. Gartland E. C., et al., *Phys. Rev. E.* **67** (4); 041702 2003.
- [7] S. Zumer and J. W. Doane, *Phys. rev.* **A 34** 3373 (1986); S. Zumer *Phys. rev.* **A 37**, 4006 (1988).
- [8] G. P. Crawford and S. Zumer, *Liquid Crystal in Complex Geometries* (London, Taylor and Francis, 1996).
- [9] I. N. Snedon, *Partial Differential Equations*, (Mc Graw Hill, New york, 1957) Cap. 2.



- [10] J. L. Galan y P. Rodríguez, *Variable Compleja y Ecuaciones en Derivadas Parciales para Ingenieros* (Bellisco, 2001). Cap. 7.
- [11] M. Kenardy y R. C. Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations*, cap 1.
- [12] P. J. Collings, *Liquid Crystal: Nature's Delicate Phase of Matter* (Academic, Bristol, 1990).
- [13] Pikin S. y Blinov I. M. *Cristales Líquidos*, (MIR, Moscú, 1985).
- [14] Chandrasekhar, *Liquid Crystal*, (Cambridge, Gran Bretaña, 1992).
- [15] George H. Heilmeyer, *Sc. Am*, **100** (1970).
- [16] Chaikin P. M. y Lubensky T. C. , *Principles of Condensed Matter Physics*, (Cambridge University, Cambridge, 1995).
- [17] P. J. Collings, *Introduction to Liquid Crystal Chemistry and Physics*, (Taylor and Francis London, 1997).
- [18] D. Krajl y S. Zumer, *Physics Rev. A* **45**, **2461** (1992).
- [19] L. C. Khoo y S. L. Zhuang, *Appl. Physics Lett.* **37**, 6-7, (1980).
- [20] Peter S. Pershan, *Physics Today*, 34-39 (1982).
- [21] P. G. de Gennes y J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, (Oxford, New York, 1995).
- [22] R.F. Rodríguez y J. A. Reyes, *Ciencias Ergo Sun*, 8, 275 (2001).
- [23] L. M. Barkovskii y Tkhi Nguet Khan, *Sov. Physic Acoustics* **36**, 550 (1990).

- [24] L. M. Barkovskii y Tkhi Nguet Khan, *Opt. Spectrosc. (USSR)* **70**(1) 34 (1991).
- [25] J.A. Reyes, *Ray Propagation in Inhomogeneous Anisotropic Media*, J. Phys. A. Math Gen., **32**(18), 3409-3418 (1999).
- [26] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999) Cap.III.