



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS ELÁSTICOS CON
GRIETAS USANDO EL MÉTODO INDIRECTO DE
ELEMENTOS DE FRONTERA**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

ANDREI ENRIQUE RODRÍGUEZ PAREDES

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. URSULA X. ITURRARÁN VIVEROS

MÉXICO D.F., MÉXICO

NOVIEMBRE DE 2011





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

HOJA DE DATOS DEL JURADO

1. Datos del Alumno

Apellido paterno
Apellido materno
Nombre(s)
Teléfono
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Carrera
Número de cuenta

2. Datos del tutor

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

3. Datos del sinodal 1

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

4. Datos del sinodal 2

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

5. Datos del sinodal 3

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

6. Datos del sinodal 4

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

7. Datos del trabajo escrito

Título

Subtítulo
Número de Páginas
Año

1. Datos del Alumno

Rodríguez
Paredes
Andrei Enrique
54402727
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
402032245

2. Datos del tutor

Dra.
Ursula Xiomara
Iturrarán
Viveros

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Pablo
Barrera
Sánchez

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Jesús
López
Estrada

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Pedro
González
Casanova

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Francisco José
Sánchez
Sesma

7. Datos del trabajo escrito

Propagación de ondas en medios elásticos con grietas usando el método indirecto de elementos de frontera
Ninguno
66
Año 2011



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
Secretaría General
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

DR. ISIDRO ÁVILA MARTÍNEZ
Director General
Dirección General de Administración Escolar
Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Propagación de ondas en medios elásticos con grietas usando el método indirecto de elementos de frontera

realizado por **Rodríguez Paredes Andrei Enrique** con número de cuenta **4-0203224-5** quien ha decidido titularse mediante la opción de tesis en la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario Dr. Pablo Barrera Sánchez

Propietario Dr. Jesús López Estrada

Propietario Dra. Úrsula Xiomara Iturrarán Viveros
Tutora

Suplente Dr. Pedro González Casanova

Suplente Dr. Francisco José Sánchez Sesma

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D. F., a 08 de noviembre de 2011
EL JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ

Señor síndico: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

MAG/CZS/cigs

Índice general

Notación	III
Introducción	IV
1. Conceptos preliminares	1
1.1. Conceptos de Elastodinámica	1
1.1.1. Deformación y Desplazamiento	1
1.1.2. Tensor de los esfuerzos	3
1.1.3. Elasticidad	6
1.2. Ondas	7
1.2.1. Ecuación de onda en una dimensión	7
1.2.2. Ondas planas	9
1.2.3. Ondas P y ondas S	9
1.2.4. Reflexión de ondas planas	10
2. Modelo del Sólido Lineal Elástico	12
2.1. Ecuaciones de Navier-Cauchy	12
2.2. Potenciales de Lamé	13
2.3. Completez	15
2.4. Aproximación en dos dimensiones	16
2.5. Representaciones integrales	16
2.6. Tensor de Green	18
2.7. Función de Green para la ecuación de onda escalar	19
2.8. Identidad de Somigliana	21
2.9. Principio de Huygens	23
3. IBEM	25
3.1. Ecuaciones Básicas del IBEM	25
3.2. Planteamiento del problema físico	27
3.3. Expresión numérica de las condiciones de frontera del problema	28

3.4. Solución de la formulación numérica del problema	30
4. Resultados Numéricos	32
4.1. Validación	32
4.2. Pulso de Ricker	32
4.3. Sintéticos	35
4.4. Resultados en el dominio de la frecuencia	37
A. Transformada Rápida de Fourier	40
A.1. Aplicaciones de la DFT	42
A.2. Transformada Rápida de Fourier	42
A.3. La FFT para el caso $N = 2^q$	43
B. Integración Numérica	47
B.1. Fórmulas de cuadratura	47
B.2. Cuadratura gaussiana	49
C. Solución de sistemas de ecuaciones lineales	52
C.1. Matrices triangulares	52
C.2. Descomposición LU	53
C.3. Algoritmo de Crout	54
D. Solución Analítica	57

Notación

El propósito de esta sección es hacer explícitas las convenciones notacionales que aparecerán con mayor frecuencia en el texto; la adopción de éstas tiene la intención de facilitar la lectura y la comprensión del contenido.

El uso de subíndices en el presente trabajo se da principalmente en relación a coordenadas espaciales, o bien, para denotar los componentes de vectores. En consecuencia, dado el contexto del problema, el rango de los índices es de 1 a 3, a menos que se especifique lo contrario. Además del uso de subíndices, no hay una notación especial para distinguir magnitudes vectoriales de escalares (p.ej., escribiremos $x \in \mathbb{R}^3$, $x_i \in \mathbb{R}$) excepto en el caso de campos vectoriales (o *tensores*), p.ej.,

$$\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, \quad \mathbf{u} = (u_i),$$

para los que se utilizan negritas. En cuanto a derivadas parciales con respecto a variables espaciales, éstas se indican como subíndices separados por comas, p. ej., $u_{i,j}$ denota la parcial de la función u_i con respecto a la variable x_j . En ciertos casos también se podrá utilizar la notación más usual $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Las derivadas con respecto al tiempo también se podrán indicar con puntos: \dot{u}, \ddot{u}, \dots

A lo largo del texto se emplea la convención de suma de Einstein: si en un término se repite uno de los subíndices se toma la sumatoria sobre este índice, ya sea en un producto o indicando derivadas parciales, p. ej.,

$$\begin{aligned} a_i a_i &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \\ \sigma_{ij,j} &= \sigma_{i1,1} + \sigma_{i2,2} + \sigma_{i3,3}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= u_{i,i} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}. \end{aligned}$$

Una referencia recomendable para el uso de la convención de suma es (Lai, et. al., 1993).

Introducción

La difracción se refiere al conjunto de fenómenos observados cuando una onda se encuentra con un obstáculo. Ya que ocurre con ondas de todo tipo: en ondas electromagnéticas, como la luz visible, dando lugar a los fenómenos de interferencia y al arcoiris; en ondas elásticas, de las cuáles el sonido es un caso particular; incluso en las ondas que ocurren sobre la superficie de un fluido, por ejemplo, en las olas del mar, cuando se encuentran con el pilar de un muelle.

En la presente tesis se trata el problema de la difracción de ondas elásticas en un sólido elástico isótropo con una grieta plana, es decir, con una discontinuidad en el dominio; el objetivo principal es obtener un modelo numérico que permita calcular el campo difractado empleando el Método Indirecto de Elementos de Frontera (*IBEM*), basándonos en el desarrollo de (Iturrarán-Viveros, et. al., 2005).

Para ello, en el Capítulo 1 introducimos algunas de las nociones básicas empleadas a lo largo de trabajo, empezando por la teoría de elastodinámica, entre las que se encuentran aportaciones de Cauchy, Hooke, y Newton; seguido de algunas definiciones relativas a ondas, en particular a ondas planas, y a la solución de la ecuación de onda en una dimensión.

En el Capítulo 2 tratamos con cierto detalle el modelo del sólido elástico isótropo, dado por las ecuaciones de Navier-Cauchy, incluyendo la existencia de soluciones medio de los llamados potenciales de Lamé, basados en el resultado clásico de descomposición de Helmholtz, y abordando brevemente el tema de la completez de éstas. En este capítulo introducimos las funciones de Green para la elasticidad, con las que desarrollamos la idea de solución fundamental y derivamos un par de resultados para la representación de soluciones, incluyendo la identidad de Somigliana, que será fundamental para el desarrollo del IBEM en el capítulo siguiente. Terminamos este capítulo, y con ello los preliminares teóricos antes de abordar el problema principal, con un comentario acerca del Principio de Huygens.

En el Capítulo 3 explicamos cómo se plantea el problema de difracción en términos del IBEM basándonos en el desarrollo de (Sánchez-Sesma y Campillo, 1991) y cómo se procede su solución, mientras que el Capítulo 4 está dedicado a presentar los resultados concretos obtenidos.

Los apéndices A, B y C conforman una breve exposición de los métodos y principales resultados necesarios para obtener la solución numérica del problema: transformada rápida de Fourier, integración numérica y solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales, respectivamente. En

el apéndice D se presenta una solución analítica para el problema de difracción, con la cual se realiza la validación del método en el Capítulo 4.

CAPÍTULO 1

Conceptos preliminares

1.1. Conceptos de Elastodinámica

1.1.1. Deformación y Desplazamiento

En los capítulos siguientes nos interesará resolver ecuaciones de movimiento para la variable $u: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^3$, que representa el desplazamiento en cada tiempo y en cada punto del dominio. Sin embargo, para entender el problema físico que dichas ecuaciones modelan es necesario definir los conceptos de *esfuerzo* y *deformación*.

En términos generales, el esfuerzo (*stress*) es una medida de la fuerza que actúa sobre una superficie o volumen arbitrario, y se expresa en unidades de fuerza por unidad de área (Pa); por otra parte, la deformación (*strain*) es una expresión del cambio de forma que experimenta un cuerpo al estar sujeto a un cierto esfuerzo o a la aplicación de una fuerza.

Comenzaremos con una motivación geométrica de la definición de deformación: consideremos un punto $P(x_1, x_2, x_3)$ y sea $P'(a_1, a_2, a_3)$ el punto que se obtiene al desplazarse de P mediante u , de manera que $a_i = x_i + u_i$ para $i = 1, 2, 3$; análogamente, definimos $Q(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ y $Q'(a_1 + da_1, a_2 + da_2, a_3 + da_3)$ (Figura 1.1.1), y ahora buscamos comparar las distancias

$$ds^2 = P'Q'^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad \text{y} \quad ds_0^2 = PQ^2 = da_1^2 + da_2^2 + da_3^2. \quad (1.1)$$

De acuerdo a las definiciones anteriores, calculamos

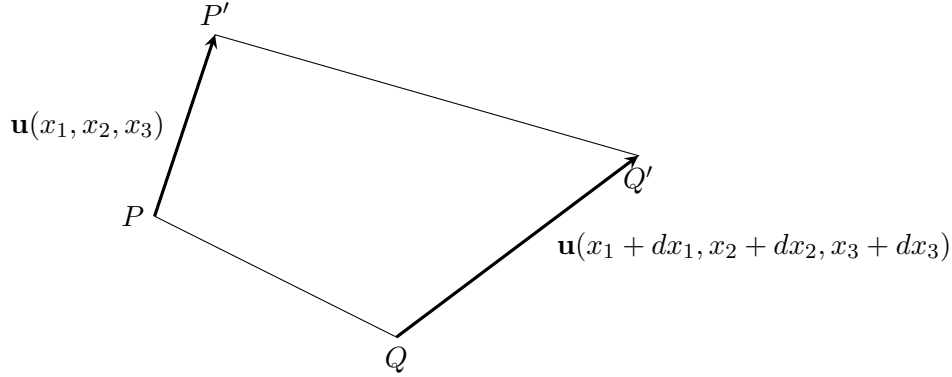


Figura 1.1: Motivación geométrica de la definición de deformación.

$$\begin{aligned}
 da_i &= (a_i + da_i) - a_i \\
 &= x_i + dx_i + u_i(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) - x_i - u_i(x_1, x_2, x_3) \\
 &= dx_i + u_i(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) - u_i(x_1, x_2, x_3) \\
 &= dx_i + u_i(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) - u_i(x_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) + \\
 &+ u_i(x_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) - u_i(x_1, x_2, x_3 + dx_3) + \\
 &+ u_i(x_1, x_2, x_3 + dx_3) - u_i(x_1, x_2, x_3) \\
 &= dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

En la penúltima igualdad estamos aproximando linealmente, y si reescribimos la última expresión según la convención de suma de Einstein obtenemos

$$\begin{aligned}
 da_i &= dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \\
 &= (\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) dx_j.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Continuando de la misma manera,

$$\begin{aligned}
 ds^2 = da_i da_i &= (\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k})(\delta_{il} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l}) dx_k dx_l \\
 &= (\delta_{ik} \delta_{il} + \delta_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \delta_{il} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l}) dx_k dx_l \\
 &= (\delta_{kl} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}) dx_k dx_l \\
 &= (\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}) dx_i dx_j \\
 &= dx_i dx_i + (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}) dx_i dx_j \\
 &= ds_0^2 + (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}) dx_i dx_j,
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde también $j, k, l = 1, 2, 3$. Finalmente, obtenemos

$$ds^2 - ds_0^2 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j, \tag{1.5}$$

lo que nos lleva a definir el *tensor de deformación de Green* como

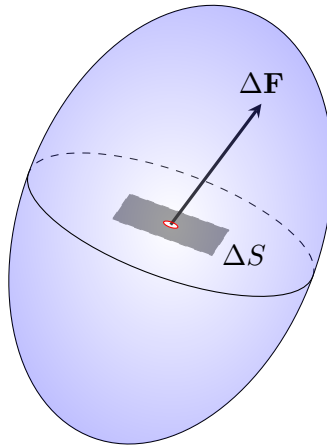


Figura 1.2: Definición del vector de tracción.

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (1.6)$$

Comúnmente se considera que las parciales de primer orden del desplazamiento u son suficientemente pequeñas para que los términos de segundo orden resulten despreciables, por lo que podemos eliminarlos para obtener el *tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy*,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.7)$$

1.1.2. Tensor de los esfuerzos

Definiremos ahora el concepto de *esfuerzo* basándonos en el desarrollo presentado en (Lai, et. al., 1993). El esfuerzo se define en relación con las fuerzas que actúan sobre una superficie arbitraria que separa distintas partes de un cuerpo. En la discusión que sigue supondremos que la descripción de las fuerzas internas, o de contacto (*surface forces*), en un punto cualquiera de una de las superficies antes mencionadas no depende de su curvatura; a esta suposición se le conoce como *principio de Cauchy* (*Cauchy's stress principle*) y es uno de los axiomas básicos de la mecánica clásica de medios continuos.

Consideremos en un medio cualquier, un plano S que pasa por un punto arbitrario P al interior y que tiene como vector normal (unitario) a n (figura 1.1.2). El plano S divide al medio en dos partes: consideremos ahora solamente la que queda debajo de S , o bien, en sentido contrario al de n , y sea $\Delta \mathbf{F}$ la fuerza resultante de las fuerzas de contacto ejercidas sobre un área ΔS del plano alrededor de P . Definimos entonces el *vector de esfuerzo* o *de tracción* de Cauchy como

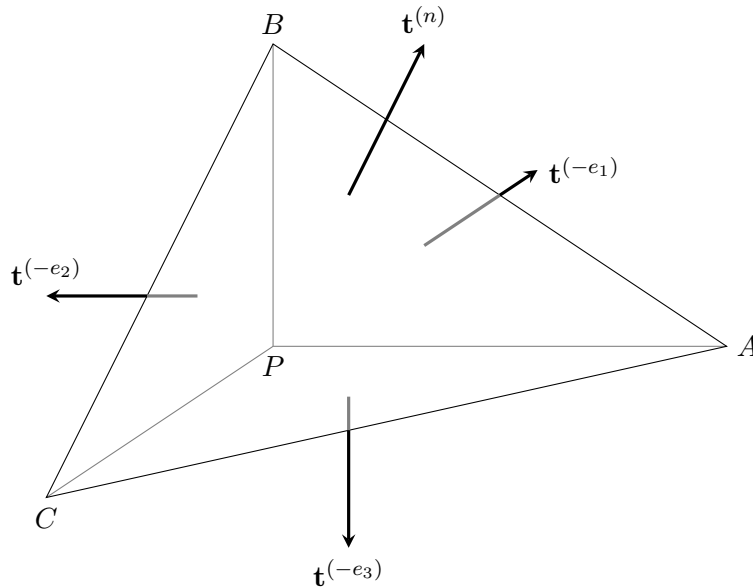


Figura 1.3: Vector de tracción.

$$\mathbf{t}^{(n)} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}. \quad (1.8)$$

Si, por otra parte, consideramos la parte del cuerpo que queda por encima de S , o bien, hacia donde apunta el vector n , obtenemos $\mathbf{t}^{(-n)}$ y, suponiendo que el cuerpo está en equilibrio, obtenemos

$$\mathbf{t}^{(-n)} = -\mathbf{t}^{(n)}. \quad (1.9)$$

El principio de Cauchy antes mencionado equivale a que, dados un tiempo t y punto P , el vector de tracción depende únicamente de la elección del vector normal unitario n en el punto; por tanto, podemos escribir

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{T}n \quad (1.10)$$

y más adelante mostraremos que la transformación \mathbf{T} es una transformación lineal.

Sea $PABC$ un tetraedro situado de manera que las aristas PC , PA y PB se extienden a lo largo de los tres ejes coordenados y P se encuentra situado al origen del mismo; así, el vector normal exterior a la cara PAB es $-e_1$, el vector de tracción correspondiente se denota como $\mathbf{t}^{(-e_1)}$ y la fuerza ejercida sobre la cara es igual a

$$\mathbf{t}^{(-e_1)} \Delta A_1, \quad (1.11)$$

donde ΔA_1 es el área de PAB . Análogamente, las fuerzas que actúan sobre las caras PBC , PAC , y ABC , son respectivamente

$$\mathbf{t}^{(-e_2)} \Delta A_2, \quad \mathbf{t}^{(-e_3)} \Delta A_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{t}_{-\mathbf{e}_n} \Delta A_n, \quad (1.12)$$

donde n es el vector unitario normal a la cara ABC y e_i ($i = 1, 2, 3$) son los vectores de la base canónica. Ahora, suponiendo que el tetraedro está en equilibrio (es decir que $\sum \mathbf{F} = 0$), tenemos

$$\mathbf{t}^{(-e_1)} \Delta A_1 + \mathbf{t}^{(-e_2)} \Delta A_2 + \mathbf{t}^{(-e_3)} \Delta A_3 + \mathbf{t}^{(n)} \Delta A_n = 0. \quad (1.13)$$

Si tomamos la expresión de n en la base canónica

$$n = \cos \theta_i e_i, \quad (1.14)$$

tenemos también que

$$\Delta A_i = \cos \theta_i \Delta A_n, \quad (1.15)$$

dado que las caras rectas del tetraedro son proyecciones de la cara ABC .

Sustituyendo en la eq. (1.13), y dividiendo entre ΔA_n obtenemos

$$\cos \theta_1 \mathbf{t}^{(-e_1)} + \cos \theta_2 \mathbf{t}^{(-e_2)} + \cos \theta_3 \mathbf{t}^{(-e_3)} + \mathbf{t}^{(n)} = 0; \quad (1.16)$$

y, recordando que $\mathbf{t}^{(-e_i)} = -\mathbf{t}^{(e_i)}$,

$$\mathbf{t}^{(n)} = \cos \theta_1 \mathbf{t}^{(e_1)} + \cos \theta_2 \mathbf{t}^{(e_2)} + \cos \theta_3 \mathbf{t}^{(e_3)}. \quad (1.17)$$

Esto demuestra que

$$\mathbf{T}(\cos \theta_i e_i) = \mathbf{T}n = \mathbf{t}^{(n)} = \cos \theta_i \mathbf{t}_{e_i} = \cos \theta_i \mathbf{T}e_i, \quad (1.18)$$

es decir, que \mathbf{T} es una transformación lineal.

¿Cuál es la expresión de esta transformación lineal en términos de la base canónica? ¿Tienen algún significado especial las entradas de esta matriz?

Si denotamos estas entradas con (σ_{ij}) , para los elementos de la base tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}e_1 &= \sigma_{11}e_1 + \sigma_{12}e_2 + \sigma_{13}e_3, \\ \mathbf{T}e_2 &= \sigma_{21}e_1 + \sigma_{22}e_2 + \sigma_{23}e_3, \\ \mathbf{T}e_3 &= \sigma_{31}e_1 + \sigma_{32}e_2 + \sigma_{33}e_3. \end{aligned} \quad (1.19)$$

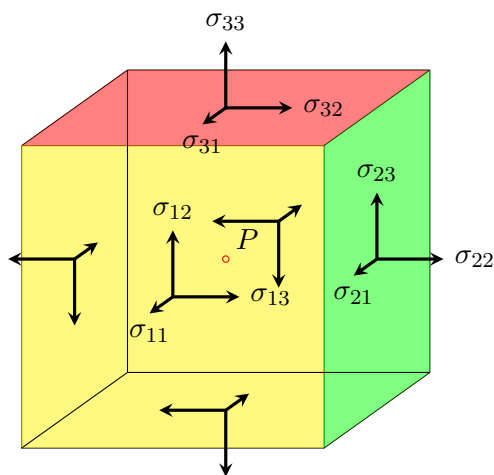


Figura 1.4: Componentes del tensor de los esfuerzos.

Interpretemos, por simplicidad, la tercera de estas ecuaciones, recordando la definición del vector de tracción en términos de la fuerza ejercida sobre cada superficie interna del cuerpo. La ecuación muestra que σ_{33} es la magnitud de la fuerza resultante ejercida hacia arriba o hacia abajo sobre una superficie horizontal (dependiendo del signo). Por otra parte, σ_{13} y σ_{23} indican que la fuerza ejercida sobre la superficie tiene una u otra de las dos direcciones horizontales posibles, digamos derecha-izquierda o adelante-atrás; esta fuerza tendría el efecto de que la superficie se “deslizara” sobre las superficies inferiores.

La primera de las fuerzas descritas en el párrafo anterior se denomina *normal*, las otras dos se denominan *rasantes*. Para las otras dos ecuaciones la interpretación es análoga.

Por todo lo anterior, podemos definir formalmente a la transformación \mathbf{T} como un *tensor de orden 2*, o bien, una transformación lineal del espacio vectorial \mathbb{R}^3 en sí mismo, que ahora denotaremos por $\sigma = (\sigma_{ij})$.

Volviendo al vector de tracción: si $n = (n_j)$, y $\mathbf{t}^{(n)} = t_i^{(n)}$ con la notación propuesta para el tensor de esfuerzos, obtenemos la expresión

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ji}n_j. \quad (1.20)$$

Ésta última se conoce como *fórmula de Cauchy*.

Se puede demostrar además que el tensor de esfuerzos es simétrico; es decir, que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ para cualesquier i, j ; esto se debe a que la suma de momentos con respecto a los tres ejes debe ser cero. Para una explicación detallada de este resultado nos referimos a (Lai, et. al., 1993).

1.1.3. Elasticidad

Experimentalmente se ha comprobado que, para la mayoría de los sólidos, la deformación observada al estar sujetos a una carga determinada es proporcional a dicha carga, siempre y cuando

ésta no exceda de cierto valor, conocido como el *límite elástico* del sólido.

Matemáticamente, esto equivale a que en cada punto, los componentes del tensor de esfuerzos sean una función lineal de los componentes del tensor de deformación de Cauchy (Kolsky, 1963).

Esta forma generalizada de la *Ley de Hooke* da lugar a las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= c_{1111}\epsilon_{11} + c_{1112}\epsilon_{12} + c_{1113}\epsilon_{13} + c_{1121}\epsilon_{21} + c_{1122}\epsilon_{22} + c_{1123}\epsilon_{23} + c_{1131}\epsilon_{31} + c_{1132}\epsilon_{32} + c_{1133}\epsilon_{33} \\
 \sigma_{12} &= c_{1211}\epsilon_{11} + c_{1212}\epsilon_{12} + c_{1213}\epsilon_{13} + c_{1221}\epsilon_{21} + c_{1222}\epsilon_{22} + c_{1223}\epsilon_{23} + c_{1231}\epsilon_{31} + c_{1232}\epsilon_{32} + c_{1233}\epsilon_{33} \\
 \sigma_{13} &= c_{1311}\epsilon_{11} + c_{1312}\epsilon_{12} + c_{1313}\epsilon_{13} + c_{1321}\epsilon_{21} + c_{1322}\epsilon_{22} + c_{1323}\epsilon_{23} + c_{1331}\epsilon_{31} + c_{1332}\epsilon_{32} + c_{1333}\epsilon_{33} \\
 \sigma_{21} &= c_{2111}\epsilon_{11} + c_{2112}\epsilon_{12} + c_{2113}\epsilon_{13} + c_{2121}\epsilon_{21} + c_{2122}\epsilon_{22} + c_{2123}\epsilon_{23} + c_{2131}\epsilon_{31} + c_{2132}\epsilon_{32} + c_{2133}\epsilon_{33} \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{1.21}$$

que se resumen como el producto tensorial

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl}. \tag{1.22}$$

El tensor de cuarto grado con componentes c_{ijkl} es denominado *tensor de elasticidad*, y en principio depende de 81 constantes; sin embargo, se puede deducir que el número se reduce a 21 constantes independientes a partir de la simetría del tensor de esfuerzos y de la condición de que la denominada *energía elástica* sea una función univaluada de la deformación, aún para el caso de un material en el que no existe simetría espacial alguna en las propiedades del medio (Kolsky, 1963).

Para el caso más sencillo de un sólido isótropo, son suficientes dos constantes para determinar todas las relaciones de elasticidad; éstas por lo general se denotan λ y μ , y reciben el nombre de constantes de Lamé. En este caso la Ley de Hooke se reduce a

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{ij} \tag{1.23}$$

1.2. Ondas

1.2.1. Ecuación de onda en una dimensión

Para introducir algunos conceptos básicos de la propagación de ondas comenzaremos por estudiar la ecuación más sencilla que presenta este tipo de soluciones: la ecuación de onda en una dimensión.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty) \quad (1.24)$$

donde la variable $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$ representa el desplazamiento y c es una constante positiva.

Las condiciones iniciales que debe cumplir la solución son

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad (1.25)$$

donde $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas.

De las diferentes formas de representar la solución de la ecuación de onda, la que arroja más información desde el punto de vista de la propagación y que, por tanto, sirve mejor nuestros propósitos, es la solución de d'Alambert.

Observemos que la ecuación (1.24) se puede “factorizar” como

$$\left(c \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(c \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \right) u = 0. \quad (1.26)$$

A falta de un significado preciso, por la factorización anterior se entiende la aplicación sucesiva de los operadores diferenciales que se encuentran entre paréntesis.

Debemos encontrar variables $r = r(x, t)$, $s = s(x, t)$ tales que las derivadas cumplan

$$\left(c \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \quad (1.27)$$

$$\left(c \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \quad (1.28)$$

el cambio de variables buscado es

$$r = x + ct, \quad s = x - ct. \quad (1.29)$$

De esta manera, la factorización (1.26) se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial s} u \right) = 0, \quad (1.30)$$

e integrando, obtenemos

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct), \quad (1.31)$$

donde las funciones F y G se pueden calcular explícitamente a partir de las condiciones iniciales. La manera en que se representa la solución en (1.31) muestra cómo la solución resulta de la

superposición de dos ondas: una con frente de onda F , propagándose a la izquierda, y otra con frente de onda G , propagándose a la derecha, ambas con velocidad c .

1.2.2. Ondas planas

La importancia de la solución de D'Alambert reside en su sencillez y en la manera en que permite visualizar la propagación de la onda. Ondas como las que aparecen en dicha solución se denominan *ondas planas*.

Definición 1.1 *Se le llama onda plana a un desplazamiento descrito por*

$$u_i(x, t) = Aq_i f(p \cdot x - ct) \quad (1.32)$$

donde $\mathbf{u}: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^3$, $\mathbf{u} = (u_i)$, $f: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ es una función arbitraria, $p = (p_i)$ es un vector unitario que determina la dirección de propagación de la onda y $q = (q_i)$ es un vector unitario que determina la dirección del desplazamiento.

Las *ondas planas armónicas*, en las que se toma la función exponencial en el lugar de f , son de especial interés:

$$u_i(x, t) = Aq_i \exp(ik(p \cdot x - ct)); \quad (1.33)$$

aquí, la constante $k \in \mathbb{R}^3$ representa el *número de onda*, y cumple la relación $k = \frac{\omega}{c}$ donde $\omega \in \mathbb{R}$ es la frecuencia circular $\omega = 2\pi f$, y c es la velocidad de propagación. Para determinar las soluciones que admite la ecuación de onda con esta forma podemos sustituir (1.33) en (1.24) para obtener la ecuación algebraica

$$\omega^2 = c^2 k^2. \quad (1.34)$$

Esta última ecuación es la *relación de dispersión* para la ecuación de onda, y determina la frecuencia ω en términos de k para que existan soluciones con forma de ondas planas armónicas. La solución $\omega = \pm ck$ concuerda con los resultados obtenidos en la solución de d'Alambert.

1.2.3. Ondas P y ondas S

En general en un cuerpo sólido la que se le aplica una fuerza, o al que que de alguna manera se sujeta a una vibración, ocurren varios tipos de onda, dependiendo de cuál es la dirección en que ocurre el desplazamiento y en que dirección se propaga la onda.

Si la onda se propaga en la misma dirección en que ocurre el desplazamiento, se trata de una *onda primaria*, o simplemente *onda-P*; también se conocen como ondas longitudinales. El ejemplo más sencillo son las ondas de compresión que dan origen al sonido: en este caso ocurre una variación en la presión del aire y dicha variación se propaga en la misma dirección.

Por otro lado, si el desplazamiento es perpendicular a la dirección de propagación, la onda se conoce como *onda secundaria* u *onda-S*.

1.2.4. Reflexión de ondas planas

Llamaremos a una onda que proviene de una profundidad muy grade bajo la corteza terrestre *onda incidente*. El problema que a continuación debemos resolver es cómo se refleja una onda incidente sobre el plano $x_1 = 0$, que limita el semiespacio inferior definido por $x_1 < 0$, suponiendo que el plano es una superficie libre de tracción; es decir, que sobre el plano se anulan los componentes tangenciales del tensor de esfuerzos. El desplazamiento resultante en el semiespacio inferior será igual a la suma de la onda incidente y de la onda reflejada.

Consideremos una onda SH, cuyo único componente de desplazamiento no nulo es en la dirección de x_2 . La onda incidente $\mathbf{u}^{(0)} = (u_i^{(0)})$, esta dada por (Manolis y Beskos, 1988)

$$\begin{aligned} u_1^{(0)} &= 0, \\ u_2^{(0)} &= A_0 \exp(ik_0(x_3 \sin \theta_0 + x_1 \cos \theta_0 - c_2 t)), \\ u_3^{(0)} &= 0; \end{aligned} \quad (1.35)$$

De acuerdo a la notación antes empleada, la dirección en que se propaga la onda está dada por $p = (\cos \theta_0, 0, \sin \theta_0)$. En el plano $x_1 = 0$, la restricción es igual a

$$u_2^{(0)} = A_0 \exp(ik_0(x_3 \sin \theta_0 - c_2 t)). \quad (1.36)$$

Si representamos la onda reflejada como $\mathbf{u}^{(d)} = (u_i^{(d)})$, y suponemos que el desplazamiento correspondiente está dado por

$$u_2^{(d)} = A_2 \exp(ik_2(x_3 \sin \theta_2 - x_1 \cos \theta_2 - c_2 t)), \quad (1.37)$$

donde A_2 , k_2 y θ_2 son los valores correspondientes a la onda reflejada que buscamos determinar; restringiendo también esta onda al plano $x_1 = 0$, y sustituyendo en la relación (1.23), obtenemos el componente de esfuerzo correspondiente al campo de desplazamiento resultante

$$\sigma_{23} = \mu(ik_0 \cos \theta_0 u_3^{(0)} - ik_2 \cos \theta_2 u_3^{(d)}). \quad (1.38)$$

En consecuencia, para que se anule el vector de tracción, se debe tener $k_0 = k_2$, $A_0 = A_2$ y $\theta_0 = \theta_2$. La reflexión de la onda en este caso es completamente regular, en el sentido de que el ángulo que forma el vector de propagación de la onda reflejada con la normal al plano es igual ángulo que forma la onda incidente; por esta razón el caso de las ondas SH es más sencillo que los de las ondas P y SV. El caso de reflexión de ondas P-SV es más complicado, pues se generan ondas convertidas (es decir, que la reflexión de ondas de un tipo genera ondas de tipo distinto) y hay más de un componente distinto de cero en el vector de desplazamientos.

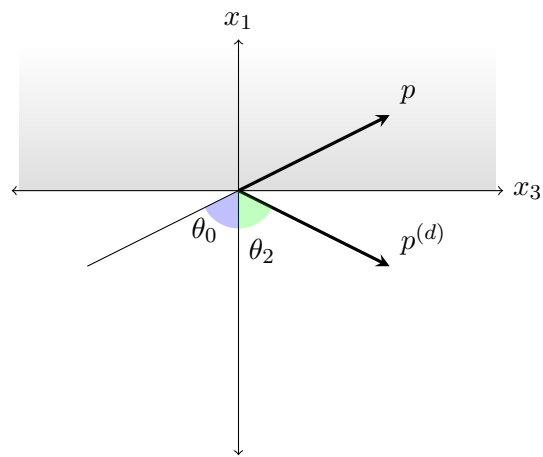


Figura 1.5: Reflexión de una onda SH.

CAPÍTULO 2

Modelo del Sólido Lineal Elástico

2.1. Ecuaciones de Navier-Cauchy

Las ecuaciones básicas de la elastodinámica lineal son las ecuaciones de movimiento,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} + \rho f_j = \rho (u_j)_{tt}, \quad (2.1)$$

las relaciones cinemáticas (o definición del tensor del deformación),

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.2)$$

y la ley constitutiva (o ley de Hooke),

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (2.3)$$

donde $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^3$, $\mathbf{u} = (u_j)$, $u_j = u_j(x, t)$, representa el desplazamiento, ρ es la densidad de masa, λ y μ son las constantes de Lamé, que dependen de las propiedades elásticas del material, y $\mathbf{f} = (f_j)$ corresponde a las fuerzas externas que actúan sobre el sólido, también llamadas *fuerzas de cuerpo*.

En secciones anteriores discutimos acerca de (2.2) y (2.3), mientras que (2.1) es una aplicación directa de la segunda ley de Newton: en el miembro izquierdo de la ecuación se pueden identificar los términos que corresponden a las fuerzas rasantes o internas y a las fuerzas de cuerpo.

Las tres ecuaciones se combinan para obtener las llamadas ecuaciones de Navier-Cauchy:

$$\rho(u_j)_{tt} - \mu\Delta u_j - (\lambda + \mu)\frac{\partial u_i}{\partial x_i\partial x_j} = 0, \quad (2.4)$$

en las que se busca resolver para la variable $u_j : V \subset \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ en un volumen determinado V . Aquí, Δ representa el laplaciano,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}. \quad (2.5)$$

También es posible escribir las ecuaciones en forma vectorial, o condensada:

$$\rho\mathbf{u}_{tt} - \mu\Delta\mathbf{u} - (\lambda + \mu)D(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \rho\mathbf{f} = 0, \quad (2.6)$$

donde el laplaciano se toma coordenada a coordenada, es decir, $\Delta\mathbf{u} = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$. Las soluciones de (2.6) deben satisfacer condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{u}^0 \\ \mathbf{u}_t(x, 0) &= \mathbf{v}^0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

en el interior de V y condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t) &= \mathbf{U} & (x \in S_1, t \geq 0), \\ \mathbf{t}(x, t) &= \mathbf{T} & (x \in S_2, t \geq 0), \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde la superficie $S = S_1 \cup S_2$ es la frontera del sólido V y \mathbf{t} es el vector de tracción definido anteriormente.

2.2. Potenciales de Lamé

La complejidad de la estructura del operador diferencial implícito en (2.6) es aparente; por lo que resulta en este momento muy difícil buscar una solución analítica a este sistema; esto nos obliga a buscar una transformación o simplificación que permita reducir el problema a un nuevo sistema de ecuaciones de estructura más sencilla.

La simplificación que buscamos se basa en la descomposición de Helmholtz para un campo vectorial, que enunciamos a continuación (Eringen y Suhubi, 1975).

Proposición 2.1 *Sea $\mathbf{f} : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ un campo vectorial, $\mathbf{f} \in C^2$. Entonces existen $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{F} : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tales que*

$$\mathbf{f} = Df + \operatorname{curl} \mathbf{F}. \quad (2.9)$$

Esto es: todo campo vectorial suficientemente suave puede descomponerse en una parte irrotacional y una parte solenoidal (cuya divergencia es nula).

Demostración.

El primer término de la suma es irrotacional (dado que es un gradiente) mientras que el segundo es conservativo (dado que es un rotacional). Lo anterior nos sugiere que para lograr esta representación definamos un campo \mathbf{U} tal que

$$f = \operatorname{div} \mathbf{U}, \quad \mathbf{F} = -\operatorname{curl} \mathbf{U}. \quad (2.10)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en (2.9), y recordando la identidad

$$\Delta \mathbf{U} = D(\operatorname{div} \mathbf{U}) - \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{U}, \quad (2.11)$$

obtenemos la ecuación de Poisson

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{f}, \quad (2.12)$$

que tiene la siguiente solución:

$$\mathbf{U}(x, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_R \frac{1}{r} \mathbf{f}(\xi, t) d\xi, \quad r = |x - \xi|, \quad (2.13)$$

donde $R \subset \mathbb{R}^3$ es una región cualquiera (Evans, 1998). Desarrollamos

$$\begin{aligned} f(x, t) &= -\frac{1}{4\pi} \int_R \mathbf{f}(\xi, t) \operatorname{div} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_R \mathbf{f}(\xi, t) \operatorname{div}_\xi \left(\frac{1}{r} \right) d\xi \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_R \left(\frac{1}{r} \right) \operatorname{div}_\xi \mathbf{f}(\xi, t) d\xi + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial R} \left(\frac{1}{r} \right) (\mathbf{f} \cdot \nu) dS(\xi) \end{aligned} \quad (2.14)$$

integrando por partes para obtener la última igualdad; el subíndice en div_ξ indica que se deriva con respecto a esta variable. Si además suponemos f de soporte compacto, podemos hacer que la superficie ∂R quede dentro de la región donde f es nula, de manera que la integral de superficie en la expresión de arriba desaparece, quedando

$$f(x, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_R \frac{1}{r} \operatorname{div}_\xi \mathbf{f}(\xi, t) d\xi. \quad (2.15)$$

Análogamente se puede concluir que

$$\mathbf{F}(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_R \frac{1}{r} \operatorname{curl}_\xi \mathbf{f}(\xi, t) d\xi, \quad (2.16)$$

de manera que si f y \mathbf{F} se definen desde un principio según estas dos últimas expresiones se logra la descomposición buscada para \mathbf{f} .

□

Aplicando la descomposición en potenciales para \mathbf{u} y \mathbf{f} en (2.6), es decir, sustituyendo

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= D\phi + \text{curl } \Psi \\ \mathbf{f} &= Df + \text{curl } \mathbf{F}\end{aligned}\tag{2.17}$$

en las ecuaciones de Navier, obtenemos

$$D(c_1^2 \Delta \phi + f - \phi_{tt}) + \text{curl} (c_2^2 \Delta \Psi + \mathbf{F} - \Psi_{tt}) = \mathbf{0}.\tag{2.18}$$

Para que se satisfaga esta ecuación es suficiente que ϕ y Ψ resuelvan las ecuaciones de onda no-homogéneas

$$\begin{aligned}\Delta \phi + \frac{1}{c_1^2} f - \frac{1}{c_1^2} \phi_{tt} &= 0 \\ \Delta \Psi + \frac{1}{c_2^2} \mathbf{F} - \frac{1}{c_2^2} \Psi_{tt} &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{2.19}$$

donde

$$c_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad c_2 = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}.\tag{2.20}$$

son las velocidades de la onda compresional y de la onda de corte, respectivamente. Las funciones ϕ y Ψ reciben el nombre de *potenciales de Lamé*.

2.3. Completez

Lo más relevante del resultado anterior es la deducción de la existencia de soluciones en las que ocurren sólo dos tipos de onda, uno correspondiente al potencial ϕ , con velocidad de propagación c_1 , y otro correspondiente al potencial Ψ , con velocidad de propagación c_2 , y que éstas cumplen con las características de las ondas compresionales (onda- P) y las ondas cortantes (onda- S) que pueden ser identificadas experimentalmente. Debemos aclarar que aquí nos referimos a ondas de cuerpo en sólidos homogéneos e isótropos, y no se incluyen en este desarrollo *ondas de superficie* o *de interfase*.

Es natural preguntarse si todas las soluciones de las ecuaciones de Navier se descomponen de la misma manera, o bien, si la solución que se encuentra con la descomposición anterior es en cierto sentido completa. En términos generales, el resultado es verdadero, aunque se requieren un análisis más cuidadoso y algunas suposiciones adicionales. A continuación enunciamos el teorema, sin prueba, en la forma en que aparece en (Sternberg, 1960).

Teorema 2.1 *Sea $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ una solución particular del caso homogéneo de (2.6). Entonces existen un campo escalar $\phi = \phi(x, t)$ y un campo vectorial $\Psi = \Psi(x, t)$ con*

$$\operatorname{div} \Psi = 0 \quad (2.21)$$

tales que $\mathbf{u}(x, t)$ se puede representar como en (2.17) y ϕ, Ψ satisfacen las ecuaciones (2.19).

2.4. Aproximación en dos dimensiones

Existen diferentes aproximaciones en dos dimensiones al modelo tridimensional descrito en la sección anterior. Para el caso que estudiaremos, en que el movimiento tiene un sólo componente y éste es perpendicular a un plano, las condiciones son las siguientes (Manolis y Beskos, 1988):

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_2 &= 0, \\ u_3 &= u_3(x_1, x_2, t), \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde la última condición significa que $\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$; o bien, que u_3 sólo depende de x_1 y x_2 . Si suponemos adicionalmente que se cumplen las mismas condiciones para las fuerzas externas \mathbf{f} , y escribimos $u = u_3(x, y, t)$, $f = f_3(x, y, t)$, las ecuaciones de movimiento (2.6) se reducen a la ecuación de onda (escalar) en dos dimensiones:

$$\Delta u + \frac{1}{c_2^2} f - \frac{1}{c_2^2} u_{tt} = 0. \quad (2.23)$$

Observamos que esta ecuación escalar es la misma que describe las ondas de presión en un fluido, caso que también se conoce como *caso acústico*.

2.5. Representaciones integrales

En la siguiente sección formularemos un par de resultados que nos permitirán establecer una relación entre cualesquiera dos soluciones de las ecuaciones de Navier, junto con sus condiciones iniciales.

El siguiente resultado se conoce como el teorema de representación de Betti; ver (Aki y Richards, 1980).

Teorema 2.2 Sean $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ un campo de desplazamiento sobre V que resuelve las ecuaciones de Navier (2.6), con fuerzas de cuerpo $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^3$ y con determinadas condiciones iniciales y condiciones de frontera sobre S , que de momento no es necesario especificar; análogamente sea $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t)$ una solución con fuerzas de cuerpo $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^3$, cuyas condiciones iniciales y de frontera son en general distintas a las de $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$.

Escribimos $\mathbf{t}^{(n)}(\mathbf{u})$ para denotar al vector de tracción relacionado con el campo de desplazamientos \mathbf{u} .

Entre las soluciones \mathbf{u} y \mathbf{v} se cumple

$$\int_V (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_S \mathbf{t}^{(n)}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, dS = \int_V (\mathbf{g} - \rho \ddot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_S \mathbf{t}^{(n)}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} \, dS \quad (2.24)$$

Demostración. Recordemos la definición del vector de tracción en términos del tensor de esfuerzos (1.20),

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j. \quad (2.25)$$

Sustituyendo esta expresión en la integral de superficie del primer miembro y aplicando el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{t}^{(n)}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, dS &= \int_S t_i^{(n)}(\mathbf{u}) v_i \, dS \\ &= \int_S \sigma_{ij} n_j v_i \, dS \\ &= \int_V \operatorname{div}(\sigma_{ij} v_i) \, dV \\ &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} v_i) \, dV \\ &= \int_V v_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}) \, dV + \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dV. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ahora, observemos que $\int_V v_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}) \, dV$ se factoriza junto con la primera integral de volumen en (2.24). De acuerdo a la ley de movimiento presentada al inicio de este capítulo (2.1),

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} + \rho f_j = \rho \ddot{u}_j, \quad (2.27)$$

el primer miembro de (2.24) se reduce a

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dV = \int_V c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dV. \quad (2.28)$$

Análogamente, el lado derecho de (2.24) se reduce a

$$\int_V c_{ijkl} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \, dV \quad (2.29)$$

y la igualdad se deduce de la simetría del tensor de Hooke, $c_{ijkl} = c_{klij}$.

Observemos que, en general, en el teorema de reciprocidad de Betti la ley de movimiento (2.1) se evalúa en dos momentos distintos, dependiendo cuál de las dos soluciones se emplee, \mathbf{u} o \mathbf{v} .

Evaluando los términos relacionados con \mathbf{u} en un tiempo t y los términos relacionados con \mathbf{v} en un tiempo $\tau - t$ (y evaluando para un valor fijo $x \in V$) calculamos

$$\begin{aligned} & \int_0^t \rho[\ddot{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{v}(\tau - t) - \mathbf{u}(t) \cdot \ddot{\mathbf{v}}(\tau - t)] dt \\ &= \rho[\dot{\mathbf{u}}(\tau) \cdot \mathbf{v}(0) - \dot{\mathbf{u}}(0) \cdot \mathbf{v}(\tau) + \mathbf{u}(\tau) \cdot \dot{\mathbf{v}}(0) - \mathbf{u}(0) \cdot \dot{\mathbf{v}}(\tau)]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Supongamos ahora que \mathbf{u} o \mathbf{v} son *causales*; i.e., que existe τ_0 tal, que para toda $\tau \leq \tau_0$ y toda $x \in V$, $\mathbf{u} = \mathbf{v} = 0$ (de hecho, supondremos, sin pérdida de generalidad, que $\tau_0 = 0$).

En este caso, si integramos (2.24) respecto a t , por el cálculo anterior, tenemos que los términos que contienen las aceleraciones $\ddot{\mathbf{u}}$ y $\ddot{\mathbf{v}}$ son cero. De esta manera, incorporando las consideraciones anteriores al resultado de Betti, se deduce que

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_V \mathbf{u}(x, t) \cdot \mathbf{g}(x, \tau - t) - \mathbf{v}(x, \tau - t) \cdot \mathbf{f}(x, t) dV dt \\ &= \int_0^t \int_S \mathbf{v}(x, \tau - t) \cdot \mathbf{t}^{(n)}(\mathbf{u})(x, t) - \mathbf{u}(x, t) \cdot \mathbf{t}^{(n)}(\mathbf{v})(x, \tau - t) dS dt \end{aligned} \quad (2.31)$$

2.6. Tensor de Green

El proceso de obtener la solución de una ecuación diferencial parcial (EDP) no-homogénea a partir de una solución para el caso homogéneo implica la construcción de la llamada función de Green, cuya forma en general depende tanto de la ecuación como del dominio en que se plantea el problema. A continuación recordamos la definición formal.

Definición 2.1 *Sea L un operador diferencial lineal. Consideremos la EDP no homogénea con condiciones a la frontera*

$$\begin{aligned} L[u] &= f & x \in V \\ u &= 0 & x \in \partial V \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde $u : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $u = u(x)$, es la variable y $f : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es una función dada que satisface $f(x) = 0$ para $x \in \partial V$.

La función de Green asociada a la EDP es una función $G = G(x, \xi)$ tal que

$$u(x) = \int_V G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.33)$$

para todo $x \in V$.

Consideremos ahora el caso en que la fuente f representa un pulso concentrado en un punto x_0 del dominio; en términos de la delta de Dirac, $f(x) = \delta(x - x_0)$. Calculamos entonces, simbólicamente

$$u(x) = \int_V G(x, \xi) \delta(\xi - x_0) d\xi = G(x, x_0). \quad (2.34)$$

Lo anterior nos da una manera de interpretar físicamente la función de Green en el contexto de elastodinámica: la función de Green $G(x, x_0)$ representa la respuesta en desplazamiento en cada punto x a la aplicación de un impulso concentrado en el punto x_0 .

En la solución de las ecuaciones de Navier-Cauchy esperamos una relación similar entre la aplicación de un impulso unitario concentrado en un punto y el desplazamiento resultante, pero ahora tomando en cuenta la dirección de este impulso, lo cual nos lleva a la siguiente definición.

Definición 2.2 El tensor de Green $\mathbf{G} = \mathbf{G}(x, t; \xi, \tau)$, es un tensor de segundo orden cuyos componentes $G_{im} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfacen la ecuación

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{im} = \delta_{im} \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_l} G_{km} \right) \quad (2.35)$$

en la región V con condiciones iniciales $G_{im}(x, t; \xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial t} G_{im}(x, t; \xi, \tau) = 0$ para $t \leq \tau$ y $x \neq \xi$; es decir: G_{im} es el componente i -ésimo de la solución a las ecuaciones no homogéneas de Navier-Cauchy, considerando como fuerzas de cuerpo un impulso unitario concentrado en $x = \xi$ en dirección x_m .

Observación. Para definir \mathbf{G} de manera única también es necesario definir condiciones de frontera sobre S . Estas condiciones pueden variar de acuerdo a la aplicación en turno.

La ecuación (2.35), mediante la cual se define el tensor de Green, depende de t solamente mediante la diferencia $t - \tau$. Si, además, las condiciones de frontera que acabamos de mencionar son independientes del tiempo (se denominan *rígidas* en este caso), se cumple que

$$\mathbf{G}(x, t; \xi, \tau) = \mathbf{G}(x, \tau - t; \xi, 0), \quad (2.36)$$

o bien, de manera más general, podemos trasladar en el tiempo sin pérdida de generalidad. Veremos que para la aplicación particular que estudiaremos más adelante se verifican condiciones de frontera de este tipo.

Asimismo, de la misma ecuación se deduce la simetría

$$\mathbf{G}(x, t; \xi, \tau) = \mathbf{G}(\xi, \tau; x, t). \quad (2.37)$$

2.7. Función de Green para la ecuación de onda escalar

Retomamos ahora el problema descrito en (2.22). A continuación calcularemos la función de Green para la ecuación de onda, siguiendo el desarrollo de (Graff, 1975).

$$c_2^2 \Delta u + f - u_{tt} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^2, t \geq 0). \quad (2.38)$$

Si suponemos además que tanto la variable como las fuerzas externas están sujetas a un movimiento armónico

$$\begin{aligned} u &= U(x, y)e^{-i\omega t}, \\ f &= F(x, y)e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

Las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$\Delta U + \beta^2 U = -F(x, y), \quad (2.40)$$

donde $\beta^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}$.

A continuación utilizaremos la transformada de Fourier definida por

$$\hat{u}(\zeta, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} u(x, y) e^{i(\zeta x + \eta y)} dx dy. \quad (2.41)$$

Al aplicar la transformada a (2.40) obtenemos la solución transformada

$$\hat{U}(\zeta, \eta) = \frac{\hat{F}(\zeta, \eta)}{\zeta^2 + \eta^2 - \beta^2}, \quad (2.42)$$

cuya transformada inversa es

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{F}(\zeta, \eta)}{\zeta^2 + \eta^2 - \beta^2} e^{i(\zeta x + \eta y)} d\zeta d\eta \quad (2.43)$$

Supongamos ahora que las cargas están dadas por $F(x, y) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$, entonces

$$\hat{F}(\zeta, \eta) = e^{i\zeta(x-x_0) + i\eta(y-y_0)} \quad (2.44)$$

y la solución (2.43) es la función de Green $G(x, y; x_0, y_0, \omega)$

$$G(x, y; x_0, y_0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i(\zeta(x-x_0) + \eta(y-y_0))}}{\zeta^2 + \eta^2 - \beta^2} d\zeta d\eta. \quad (2.45)$$

Para resolver explícitamente la integral anterior, hacemos las siguientes sustituciones: sean $\vec{q} = (x - x_0)e_1 + (y - y_0)e_2$, $\vec{r} = \zeta e_1 + \eta e_2$; $|\vec{q}| = q$, $|\vec{r}| = r$ y sean respectivamente β y α los ángulos que forman con la horizontal en el plano- ζ, η .

Podemos entonces reescribir (2.45) de la siguiente forma

$$G(x, y; x_0, y_0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i\vec{r} \cdot \vec{q}}}{\zeta^2 + \eta^2 - \beta^2} d\zeta d\eta. \quad (2.46)$$

Posteriormente convertimos la integral a un sistema de coordenadas polares r, α ; aquí sustituimos $\vec{r} \cdot \vec{q} = rq \cos(\alpha - \beta)$:

$$G(x, y; x_0, y_0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{e^{iqr \cos(\alpha - \beta)}}{r^2 - \beta^2} r dr d\alpha. \quad (2.47)$$

Ahora, la integral con respecto a α es conocida: coincide con la definición de la función de Bessel $J_0(qr)$ (para más propiedades de las funciones de Bessel, ver Abramowitz y Stegun, 1970), de manera que podemos integrar

$$G(x, y; x_0, y_0, \omega) = \int_0^\infty \frac{J_0(qr)}{r^2 - \beta^2} r dr. \quad (2.48)$$

Esta integral a su vez corresponde a la función de Bessel modificada de segundo tipo:

$$K_0(\beta q) = \int_0^\infty \frac{J_0(qr)}{r^2 + \beta^2} r dr. \quad (2.49)$$

Aplicando la identidad

$$K_0(z) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(iz) \quad (2.50)$$

obtenemos

$$\int_0^\infty \frac{J_0(qr)}{r^2 - \beta^2} r dr = K_0(\beta q) \quad (2.51)$$

y finalmente,

$$G(x, y; x_0, y_0; \omega) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(iz) \quad (2.52)$$

2.8. Identidad de Somigliana

Sustituyendo la función de Green definida en (2.35) en el resultado de Betti (2.31), tomando el lugar de uno de los campos de desplazamiento, obtenemos nuestro primer teorema de representación: una fórmula para una solución \mathbf{u} en términos de magnitudes conocidas que se considera determinan el movimiento, como son las fuerzas de cuerpo f en V , y las tracciones definidas sobre la frontera S .

Teorema 2.3 Sean $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ una solución de las ecuaciones de Navier-Cauchy (2.6) y $\mathbf{G} = \mathbf{G}(x, t; \xi, \tau)$ es el tensor de Green para el mismo problema. El campo de desplazamiento \mathbf{u} puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} cu_m(x, t) &= \int_0^t \int_S \left[G_{im}(\xi, t - \tau; x, 0) t_i^{(n)}(\xi, \tau) - T_{im}(x)(\xi, t - \tau; x, 0) u_i(\xi, \tau) \right] dS_\xi d\tau \\ &+ \int_0^t \int_V G_{im}(\xi, t - \tau; x, 0) f_i(\xi, \tau) dV_\xi d\tau \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde T_{im} es el vector de tracción correspondiente al componente G_{im} del tensor de Green; i.e.,

$$T_{im} = \left[\lambda \delta_{ij} \frac{\partial G_{km}}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial G_{im}}{\partial x_j} + \frac{\partial G_{jm}}{\partial x_i} \right) \right] n_j; \quad (2.54)$$

$t_i^{(n)}$ es el correspondiente a \mathbf{u} y la constante c toma los valores 1, 0 y $\frac{1}{2}$ de acuerdo a si x está en el interior, exterior o sobre la frontera de V (que es la superficie S).

Demostración. Como se menciona al inicio de la sección, la identidad se deduce sustituyendo (2.35) en (2.31). El término $cu_m(x, t)$, por otra parte, surge de calcular la integral

$$\int_0^t \int_V u_i(\xi, \tau) \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) dV_\xi d\tau. \quad (2.55)$$

Si ξ se encuentra al exterior de V , $\delta(x - \xi)$ es idénticamente 0 en todo V y por tanto la integral se anula; si está en el interior, es igual a $u(x, t)$ por la propiedad de la función δ .

El caso interesante es cuando ξ está sobre la superficie S y resulta $c = \frac{1}{2}$, por ahora omitimos esta parte de la demostración para continuar con la discusión general. \square

Por las observaciones hechas a la definición del tensor de Green (2.36), podemos reescribir la identidad del teorema anterior como

$$\begin{aligned} cu_m(x, t) &= \int_0^t \int_S \left[G_{im}(x, t; \xi, \tau) t_i^{(n)}(\xi, \tau) - T_{im}(x, t; \xi, \tau) u_i(\xi, \tau) \right] dS_\xi d\tau \\ &+ \int_0^t \int_V G_{im}(x, t; \xi, \tau) f_i(\xi, \tau) dV_\xi d\tau \end{aligned} \quad (2.56)$$

Podemos adaptar el resultado anterior para facilitar su aplicación al problema concreto que nos planteamos resolver más adelante.

Proposición 2.2 (Teorema de representación de Somigliana) Sea $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ una solución de las ecuaciones de Navier-Cauchy (2.6) sujeta a una excitación armónica, es decir, que junto con las fuerzas de cuerpo cumple

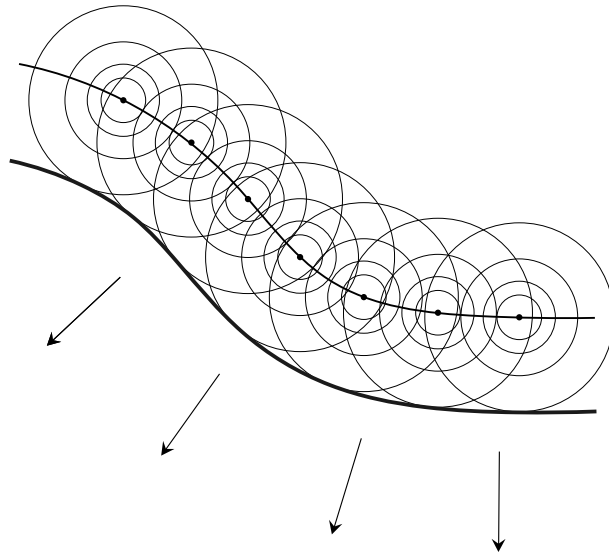


Figura 2.1: Ilustración del principio de Huygens.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x, t) &= \mathbf{U}(x) \exp(-i\omega t), \\ \mathbf{f}(x, t) &= \mathbf{F}(x) \exp(-i\omega t),\end{aligned}\tag{2.57}$$

donde $\mathbf{F}, \mathbf{U}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. En este caso la solución está dada por

$$cu_m(x) = \int_S \left[G_{im}(x, \xi) t_i^{(n)}(\xi) - T_{im}(x; \xi) u_i(\xi) \right] dS_\xi + \int_V G_{im}(x, \xi) f_i(\xi) dV_\xi.\tag{2.58}$$

La identidad anterior se conoce como la identidad de Somigliana.

2.9. Principio de Huygens

La identidad de Somigliana comúnmente se considera una transcripción matemática del principio de Huygens, que establece lo siguiente (Graff, 1975):

Cada punto en un frente de onda actúa como una fuente, emitiendo ondas que viajan a una velocidad c [donde c es la velocidad de propagación de fijada dada por la ecuación de onda].

En la figura (2.9) encontramos una representación gráfica de este enunciado. De igual importancia es la afirmación complementaria de que *el frente de onda que se propaga se puede ver como el resultado de la superposición de las ondas originadas por estas fuentes puntuales*.

El principio de Huygens (complementado con las observaciones posteriores de Fresnel) da cuenta de los principales fenómenos de difracción y superposición de ondas. La relación con la identidad de Somigliana es más evidente si recordamos el resultado (2.56):

$$cu_n(x, t) = \int_0^t \int_S \left[G_{in}(x, t; \xi, \tau) t_i^{(n)}(\xi, \tau) - T_{in}(x, t; \xi, \tau) u_i(\xi, \tau) \right] dS_\xi d\tau \quad (2.59)$$

en el cual el campo de desplazamiento es el resultado de la suma (integral) de las contribuciones de las fuentes puntuales para cada $\xi \in S$, representadas por las funciones de Green para el desplazamiento y las tracciones. Como se infiere en el ejemplo mencionado arriba, en el cual que el sonido parece provenir del umbral de la puerta, para reconstruir el campo de desplazamiento $u_n(x, t)$ en todo el espacio es suficiente considerar lo que ocurre sobre la superficie S .

Una discusión más completa de la relación del principio de Huygens con un teorema de representación se puede encontrar en (Graff, 1975) en el contexto de la solución clásica al problema de propagación de ondas esféricas. El resultado aludido en este caso se conoce como el teorema de representación de Kirchoff.

CAPÍTULO 3

IBEM

3.1. Ecuaciones Básicas del IBEM

Partiendo de la identidad de Somigliana (2.58), que es válida para un campo de desplazamiento sujeto a una excitación armónica, seguimos el desarrollo de (Sánchez-Sesma y Campillo, 1991) para obtener expresiones para el campo de desplazamiento y el campo de tracciones correspondiente. Este desarrollo conducirá a una solución numérica del problema de modelar la propagación de ondas SH en un medio homogéneo con una grieta.

En ausencia de fuerzas externas, la identidad (2.58) se reduce a

$$cu_m(x) = \int_S G_{im}(x; \xi) t_i^{(n)}(\xi) - T_{im}(x; \xi) u_i(\xi) dS_\xi. \quad (3.1)$$

Consideramos ahora el llamado *problema exterior*: sea $\mathbf{u}' = \mathbf{u}'(x, t)$ la solución a las ecuaciones de Navier (2.6) en el mismo dominio U que resulta de fijar condiciones de frontera distintas para el campo de tracciones en $S = \partial U$, que denotaremos por $\mathbf{t}^{(n)'} = t_i^{(n)'}(x, t)$.

La grieta que queremos modelar representa una especie de discontinuidad en el terreno, aun si suponemos que el tipo de material que se encuentra a un lado y otro de la grieta es el mismo. Por lo anterior es razonable suponer que el campo de tracciones definido sobre la frontera tomará valores distintos dependiendo desde qué lado de la grieta nos aproximemos.

Tomando en cuenta además que S es la frontera común a ambas regiones, de las consideraciones anteriores se deduce que las funciones de Green para el desplazamiento y las tracciones son iguales para el problema interior y exterior, respectivamente. Por lo anterior podemos aplicar la misma identidad (3.1) en la formulación del problema exterior para obtener

$$c' u'_m(x) = - \int_S G_{im}(x; \xi) t_i^{(n)'}(\xi) - T_{im}(x; \xi) u'_i(\xi) dS_\xi. \quad (3.2)$$

El signo de la integral cambia debido a que el vector normal a la superficie apunta ahora en sentido contrario, y la constante c' toma ahora los valores 1, 0, o $\frac{1}{2}$ dependiendo de si la fuente ξ está al exterior, al interior o sobre la frontera de V , respectivamente.

Considerando que el exterior de V es una región no acotada, se toman en cuenta las condiciones de radiación de Sommerfeld para garantizar que la solución al problema exterior tenga sentido físico (Achenbach, 1973):

$$Ru \leq M, \text{ para alguna constante } M \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial}{\partial R} - ik \right) u = 0; \quad (3.4)$$

donde $R = \|x\|$ y k es el número de onda. Las condiciones de radiación de Sommerfeld se requieren para que en las soluciones no haya propagación de energía desde el infinito hacia el interior de una región acotada del plano.

Sumando (3.1) y (3.2) obtenemos

$$u_m(x) = \int_S \left[t_i^{(n)}(\xi) - t_i^{(n)'}(\xi) \right] G_{im}(x; \xi) - [u_i(\xi) - u'_i(\xi)] T_{im}(x; \xi) dS_\xi. \quad (3.5)$$

Si fijamos como condiciones de frontera que $u_i = u'_i$ sobre S y definimos $\phi_i = t_i^{(n)} - t_i^{(n)'}$, de la ecuación anterior se obtiene

$$u_m(x) = \int_S \phi_i(\xi) G_{im}(x; \xi) dS_\xi \quad (3.6)$$

para todo $x \in \bar{V}$ o $x \in S$. A esta expresión se le conoce como *representación de una sola capa*, y a ϕ comúnmente se le denomina *distribución de fuerza*.

A partir de la expresión anterior podemos obtener una representación análoga para $t_i^{(n)}$, válida para $x \in V$. Utilizando la relación entre el vector de tracción y desplazamiento dada por la ley de Hooke,

$$t_i^{(n)} = n_j [\lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})] \quad (3.7)$$

en ambos lados de la igualdad (3.6), se obtiene

$$t_m^{(n)}(x) = \int_S \phi_i(\xi) T_{im}(x; \xi) dS_\xi. \quad (3.8)$$

El caso $x \in S$ debe analizarse por separado, ya que el procedimiento anterior no es válido cuando $x = \xi$, debido a que las funciones de Green G_{im} y T_{im} son singulares en ese punto. En este caso, debe agregarse un término a la igualdad.

$$t_m^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\phi_m(x) + \int_S \phi_i(\xi)T_{im}(x; \xi) dS_\xi. \quad (3.9)$$

Este último resultado se debe a (Kupradze, 1963).

Las ecuaciones (3.6), (3.8), (3.9) son la base del Método Indirecto de Elementos de Frontera (*Indirect Boundary Element Method*), cuyo nombre (en cuanto a “indirecto”) se debe al hecho de que, para encontrar el valor del campo de desplazamiento, primero se debe encontrar la distribución de fuerza ϕ , que no es una de las variables originales del problema. Una vez calculado el valor de ϕ , se puede sustituir en (3.6) para obtener los desplazamientos.

3.2. Planteamiento del problema físico

Aplicaremos el IBEM al problema concreto de la difracción de ondas elásticas por una grieta plana de grosor cero, el cual ha sido abordado por varios autores, utilizando diferentes métodos, y del cual existe una amplia literatura (ver U. Iturrarán-Viveros, R. Vai y F.J. Sánchez-Sesma 2005). En particular, el desarrollo siguiente va encaminado a obtener una solución numérica para el campo de desplazamiento escalar en dos dimensiones descrito en (2.22).

Al igual que en desarrollo más general, consideramos un medio elástico, homogéneo e isotrópico con interior V y frontera S . Sean $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$, $\mathbf{u} = (u_i)$, el campo de desplazamiento y $\mathbf{t} = \mathbf{t}(x, t)$ el campo de tracciones correspondiente.

Aprovechando la linealidad de las ecuaciones de Navier-Cauchy, podemos expresar el campo de desplazamiento como la superposición de un campo incidente y de un campo difractado; esto es,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(d)}, \quad (3.10)$$

donde los superíndices (0) y (d) denotan los campos incidente y difractado, respectivamente. El campo incidente es conocido, y para nuestros propósitos tendrá la forma de una onda plana armónica,

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}_0(\omega) \exp(-i\omega t) \exp(ikx \sin \gamma - ikz \cos \gamma), \quad (3.11)$$

donde la amplitud $\mathbf{u}_0(\omega)$ de la onda depende de la frecuencia angular ω , k es el número de onda antes definido y γ es el ángulo de incidencia; o bien, de la función de Hankel, obtenida en la sección (2.7).

Más adelante, para simplificar la notación, se podrá omitir la dependencia del tiempo $\exp(-i\omega t)$ en (3.11). Nuestro objetivo es desarrollar un método para encontrar los valores del campo difractado $\mathbf{u}^{(d)}$.

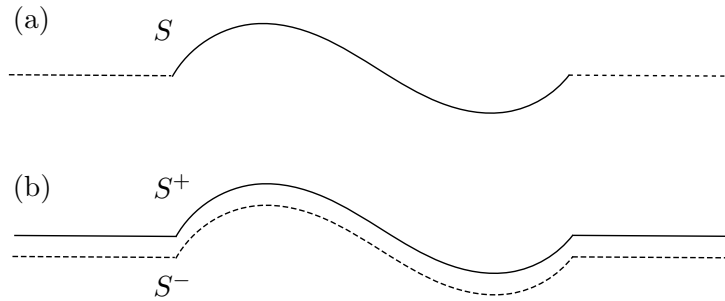


Figura 3.1: (a) Prolongación de la grieta S y (b) duplicación de la grieta prolongada como frontera de los lados iluminado y de sombra.

Como se estableció en (2.22), el único componente no nulo del campo de desplazamiento es u_2 , que representa el movimiento perpendicular al plano xz ; por lo tanto, omitiremos el subíndice para esta variable, y en consecuencia, también para el campo de tracciones, y escribiremos $u_2 = u$, $t_2 = t$.

Dado que el desplazamiento sólo ocurre en la dirección de x_2 , en las ecuaciones (2.56), (2.58), y (3.1-3.9), sólo tienen relevancia las componentes G_{22} y T_{22} de las funciones de Green para el desplazamiento y las tracciones, por lo cual también se omiten estos índices en el desarrollo siguiente.

En el plano, una grieta se puede modelar como el caso degenerado de una cavidad plana, lo cual vuelve imposible la aplicación del BEM convencional (Cruse, 1988). La formulación del IBEM que se presenta a continuación busca superar esta dificultad manipulando la representación geométrica de dicha grieta.

Supongamos que la grieta tiene la forma de una curva S contenida en el plano, como se muestra en (3.2), y tracemos una recta por los puntos extremos de la curva, de manera que el plano queda dividido en dos regiones cuya frontera común es la curva S extendida. Trataremos estas dos regiones por separado, denotando con S^+ a la frontera de la región que recibe primero la onda incidente, a la que también nos referiremos como el *lado iluminado*, y con S^- a la región restante, el *lado de sombra*. Observemos que S^+ y S^- son congruentes en el sentido geométrico. Las características físicas del problema se recuperan a través de fijar condiciones de frontera adecuadas para ambas curvas.

3.3. Expresión numérica de las condiciones de frontera del problema

En la presente sección expresaremos las condiciones de frontera (que incluyen las llamadas *condiciones de continuidad*) de nuestro problema a partir de las ecuaciones (3.6), (3.8) y (3.9), obtenidas en la sección (3.1).

En primer lugar, aproximaremos la curva *prolongada* S^+ como una línea poligonal compuesta por N segmentos rectos, que denotaremos por S_j , $j = 1, \dots, N$, estando $M < N$ de estos segmentos sobre la curva original S , y los restantes $N - M$ sobre la prolongación de la curva

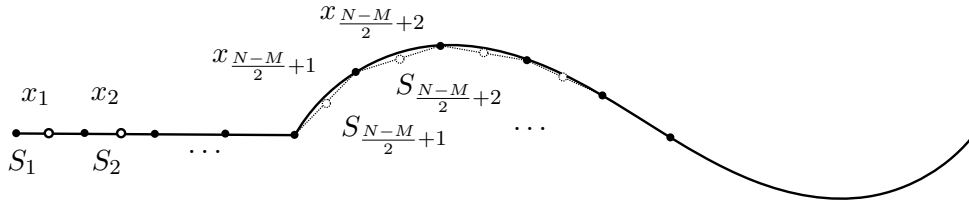


Figura 3.2: Discretización de la grieta.

(3.3). El propósito de discretizar la prolongación de la curva es mejorar la concordancia entre la solución numérica y la solución de referencia, como ha sido encontrado experimentalmente. Veremos más adelante que la longitud de los segmentos S_j depende de la frecuencia que estamos considerando para el desplazamiento.

De acuerdo con la discretización propuesta, la integral en (3.6) puede aproximarse como

$$\sum_{j=1}^N \int_{S_j} \phi^+(\xi) G(x, \xi) dS_\xi. \quad (3.12)$$

Para el caso más sencillo, en que la grieta es plana, la expresión anterior es exactamente igual a la integral en (3.6). Si denotamos con x_j el punto medio de S_j , supondremos también que $\phi^+(\xi) = \phi^+(x_j)$ para $\xi \in S_j$, es decir, que la distribución de fuerza ϕ^+ es constante en cada segmento S_j . Aproximando de esta manera, tenemos

$$u^{(d)+}(x) = \sum_{j=1}^N \phi^+(x_j) \int_{S_j} G(x, \xi) dS_\xi. \quad (3.13)$$

El mismo procedimiento aplicado a la curva S^- (es decir, utilizando las condiciones del lado de sombra de la grieta) resulta en la igualdad correspondiente para ϕ^- . Los segmentos S_j en que se dividen las curvas S^+ y S^- son congruentes (en el sentido geométrico) y la función de Green toma los mismos valores sobre ambas, por lo tanto, el término $\int_{S_j} G(x, \xi) dS_\xi$ aparece también en la expresión para $u^{(d)-}$.

La condición de continuidad para el campo de desplazamiento para un punto x sobre la prolongación de la curva S es $u^{(d)+}(x) - u^{(d)-}(x) = 0$, o equivalentemente,

$$\sum_{j=1}^N [\phi^+(x_j) - \phi^-(x_j)] \int_{S_j} G(x, \xi) dS_\xi = 0. \quad (3.14)$$

La condición anterior recibe el nombre de *continuidad de desplazamientos*. Las “prolongaciones” de la curva S son un artificio para evitar las inestabilidades numéricas que se presentan debido al cambio abrupto de las condiciones de frontera en los puntos cercanos a los extremos de la grieta. La continuidad de desplazamientos en estos puntos recuperan la noción de que en esa región no hay grietas el medio es continuo (ver Iturrarán-Viveros y Sánchez-Sesma, 2005).

Ahora, en todas las ecuaciones anteriores debemos evaluar en la variable x de acuerdo a la misma discretización propuesta para la curva S , de manera se cumplen las ecuaciones

$$\sum_{j=1}^N [\phi^+(x_j) - \phi^-(x_j)] \int_{S_j} G(x_n, \xi) dS_\xi = 0 \quad (3.15)$$

para $n = 1, \dots, \frac{N-M}{2}, \frac{N+M}{2} + 1, \dots, N$; o bien, donde x_n se encuentra sobre la prolongación de la curva.

La integral en (3.15) se calcula analíticamente cuando $x_n \in S_j$ (esto es, cuando $n = j$) aproximando la función de Green mediante una serie polinomial. Análogamente, de la condición de continuidad para las tracciones se deduce

$$\frac{1}{2}[\phi^+(x_n) + \phi^-(x_n)] + \sum_{j=1}^N [\phi^+(x_j) - \phi^-(x_j)] \int_{S_j} T(x_n, \xi) dS_\xi = 0 \quad (3.16)$$

para los mismos valores de n . En la expresión se toma en cuenta que el término ϕ^- cambia de signo en la ecuación correspondiente a (3.9) al aproximarse desde el lado de sombra de la grieta, debido a que el vector normal apunta en dirección contraria. Las condiciones de frontera sobre S^+ se expresan como $t^{(0)+} + t^{(d)+} = 0$ (y sobre S^- , análogamente, $t^{(0)-} + t^{(d)-} = 0$), lo que equivale a

$$\frac{1}{2}\phi^+(x_n) + \sum_{j=1}^M \phi^+(x_j) \int_{S_j} T(x_n, \xi) dS_\xi = -t^{(0)+}, \quad (3.17)$$

$$-\frac{1}{2}\phi^-(x_n) + \sum_{j=1}^M \phi^-(x_j) \int_{S_j} T(x_n, \xi) dS_\xi = -t^{(0)-}. \quad (3.18)$$

Las ecuaciones (3.15)-(3.18) forman un sistema de ecuaciones lineales con $2N$ incógnitas ($\phi^+(x_j)$ y $\phi^-(x_j)$, para $j = 1, 2, \dots, N$) y $2N$ ecuaciones: $2(N - M)$ ecuaciones corresponden a las condiciones de continuidad (3.15) y (3.16) y $2M$ ecuaciones corresponden a las condiciones de frontera libre (3.17) y (3.18).

3.4. Solución de la formulación numérica del problema

Las integrales de las funciones de Green aparecen como coeficientes en el sistema de ecuaciones lineales dado por (3.15)-(3.18). Si $i \neq n$, el valor de la integral se calcula numéricamente, utilizando la llamada *cuadratura Gaussiana* (Apéndice B). Para el caso $j = n$,

$$\int_{S_j} T(x_n, \xi) dS_\xi, \quad (3.19)$$

es nula siempre y cuando el segmento de discretización S_j sea recto, como hemos supuesto inicialmente. Por otro lado, si x_n está en una vecindad de x_j , la integral

$$\int_{S_j} G(x_n, \xi) dS_\xi, \quad (3.20)$$

se calcula de manera exacta utilizando expresiones analíticas basadas en las funciones de Bessel (Abramowitz y Stegun, 1970).

Una vez que se conoce el valor de las integrales de las funciones de Green, la solución del sistema lineal de ecuaciones se obtiene mediante una implementación del algoritmo de Crout para la factorización LU (Apéndice C). La forma de la matriz obtenida para el sistema (diagonal dominante) permite aplicar dicho algoritmo sin necesidad de hacer pivoteo.

También, por la manera en que están contruidas las matrices que conforman el sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son las distribuciones de fuerza ϕ , las matrices están bien condicionadas. Para los casos que se verificaron, los números de condición están entre 10 y 20 para frecuencias pequeñas. El método está diseñado para hacer discretizaciones de la frontera cada vez más finas conforme aumenta la frecuencia; con base en experiencias anteriores se han utilizado seis puntos por longitud de onda. Por este motivo, el tamaño de los sistemas de ecuaciones es mayor a medida que aumenta la frecuencia, y en consecuencia el número de condición de las matrices correspondientes también crece, pero dentro de niveles aceptables.

Una vez que se conocen las distribuciones de fuerza ϕ (resolviendo el sistema de ecuaciones), se pueden sustituir en la ecuación (3.6) para encontrar el campo de desplazamiento difractado $\mathbf{u}^{(d)}$.

CAPÍTULO 4

Resultados Numéricos

En esta sección presentaremos algunos de los resultados obtenidos de la aplicación del IBEM al problema descrito en el capítulo anterior.

Para dicha aplicación necesitaremos elegir algunos parámetros de manera que los resultados arrojados por el modelo se aproximen a un modelado real; en el caso los parámetros físicos de densidad ρ y velocidad de propagación de ondas β , ambos se consideran adimensionales e iguales a 1. La longitud de la grieta en general se representa como $2a$, y en los resultados siguientes se toma el valor $a = 1$.

4.1. Validación

Para validar la aplicación del IBEM haremos una comparación entre la solución numérica y la solución analítica obtenida para el mismo problema en (Sánchez-Sesma e Iturrarán-Viveros, 2001; en el apéndice D del presente trabajo se reproduce la solución analítica referida).

La comparación entre las soluciones se realiza comparando los sismogramas (o *sintéticos*) obtenidos de graficar el desplazamiento medido en estaciones colocadas cerca de la grieta y espaciadas uniformemente entre ellas.

4.2. Pulso de Ricker

Para observar la respuesta del sistema se introduce como excitación el denominado *pulso de Ricker*, que podemos definir en los dominios de tiempo y de frecuencia, respectivamente, como

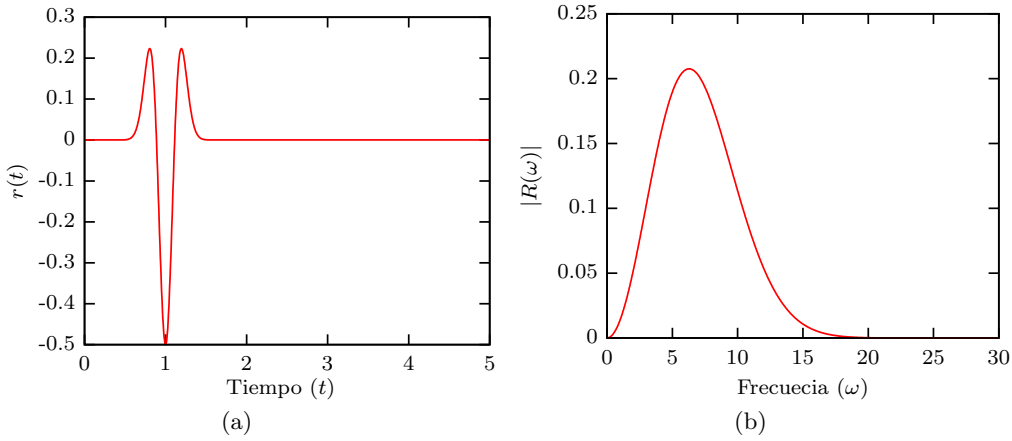


Figura 4.1: Gráficas del pulso de Ricker en el dominio del tiempo (4.1a) con $t_0 = 1$, $t_p = 0,5$; y en el dominio de la frecuencia (4.1b) con $t_0 = 1$ y $t_p = 1$. Se observa en la segunda gráfica que el máximo se alcanza en $\omega_p = 2\pi f_p$

$$r(t) = \left(a^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-a^2}, \quad (4.1)$$

$$R(\omega) = -\frac{t_p}{\sqrt{\pi}} b^2 e^{-b^2 - i\omega t_s}; \quad (4.2)$$

donde t_p es la llamada *periodo característico* del pulso y f_p es la periodo correspondiente, $a = \frac{\pi(t-t_s)}{t_p}$, $b = \frac{\omega}{\omega_p}$ y se cumplen las relaciones

$$\omega_p = 2\pi f_p, \quad f_p = \frac{1}{t_p}. \quad (4.3)$$

De acuerdo a las anteriores definiciones tenemos que $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $r = r(t)$ y $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $R = R(\omega)$, aunque por lo general estaremos interesados en $|R(\omega)|$. La figura (4.2) muestra la gráfica del pulso de Ricker en los dominios de tiempo y de frecuencia.

Los parámetros por determinar en cuanto a la excitación del sistema son los siguientes:

- $\lambda_p \in \mathbb{R}$, longitud de onda; se elige en función del tamaño de la grieta: un longitud de onda muy grande no es adecuada para observar los efectos de un difractor muy pequeño, y viceversa.
- Calcular $f_p = \frac{\beta}{\lambda_p}$, la frecuencia del pulso de Ricker, donde β es la velocidad de propagación de las ondas-S;
- Calcular $f_{\text{máx}} = \frac{1}{2\Delta t}$.

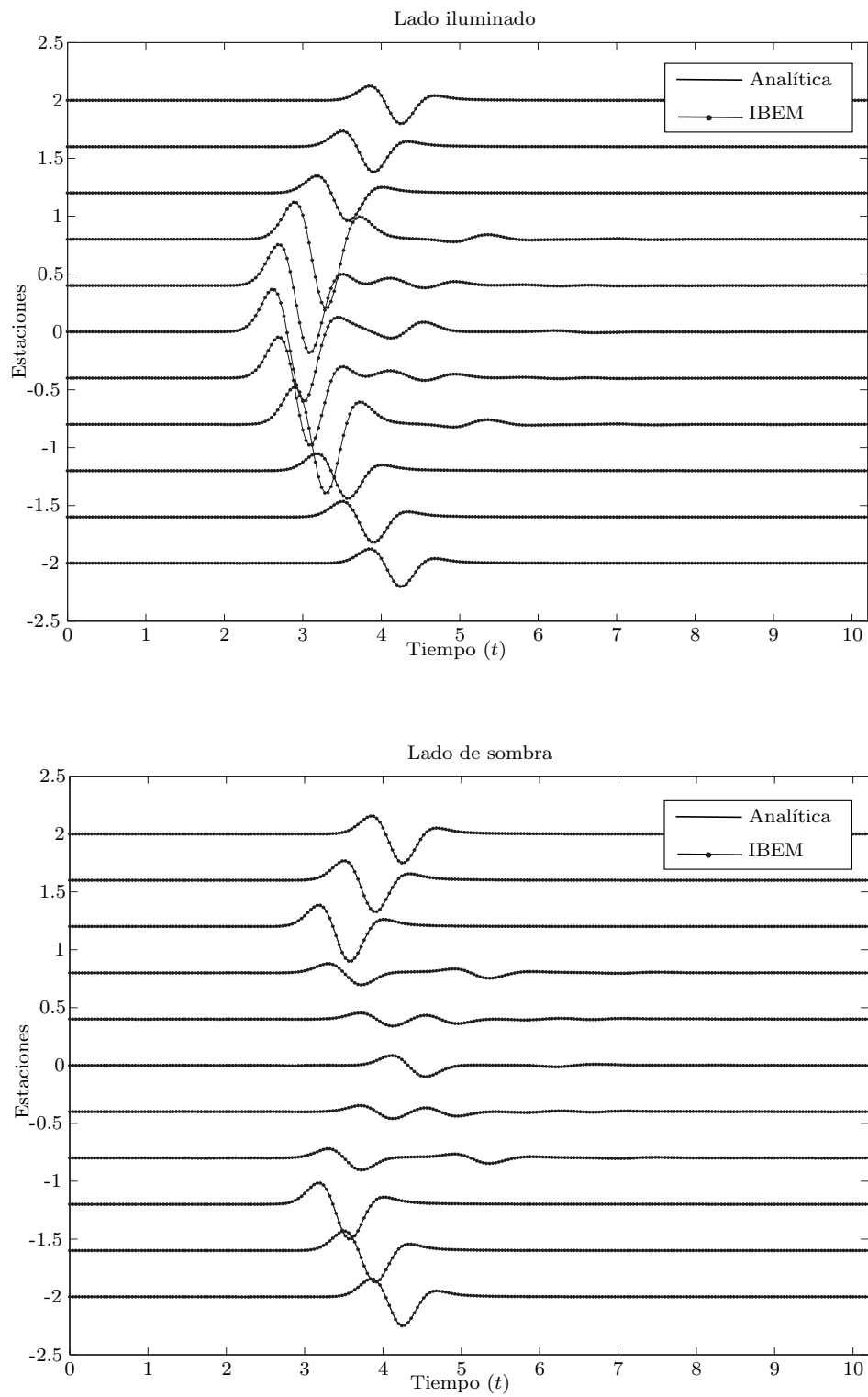


Figura 4.2: Comparación entre las soluciones analítica y numérica (obtenida mediante el IBEM) para el caso de una fuente puntual, o bien, de una onda incidente cilíndrica, ubicada en $(x, z) = (0, -1)$.

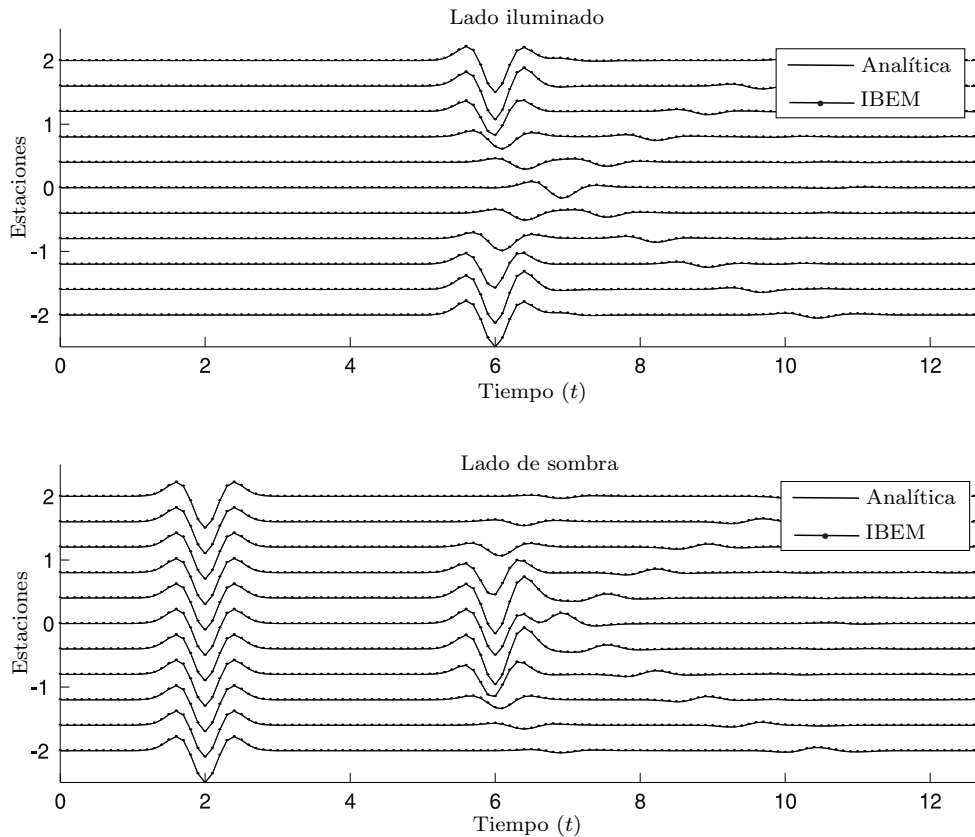


Figura 4.3: Comparación entre las soluciones analítica y numérica (obtenida mediante el IBEM) para el caso de una fuente puntual, o bien, de una onda incidente cilíndrica, ubicada sobre el eje z .

4.3. Sintéticos

En esta sección el término *sintético* se refiere a la gráfica del desplazamiento en función del tiempo, midiendo el desplazamiento en las estaciones que hemos colocado cerca de la grieta. En la figura (4.3) se muestra la comparación para el caso de la incidencia de ondas cilíndricas, cuya fuente está colocada en $(x, z) = (0, -1)$, por lo cual las gráficas muestran una simetría con respecto al mismo. La gráfica correspondiente al lado iluminado (4.3) muestra los desplazamientos medidos en las estaciones debido a la onda incidente, inicialmente sin el efecto de la difracción, el cual se aprecia más tarde, aproximadamente en $t = 4,5$ s para la estación colocada en $x = 0$. en la misma figura, la gráfica del lado de sombra muestra un comportamiento similar en las estaciones cercanas a las orillas, mientras que en las estaciones centrales (obstaculizadas por la grieta) no se observa el efecto de la onda incidente; sólo se registra el efecto de la difracción, también alrededor de $t = 4,5$ s.

En la figura (4.3) se muestran los sintéticos correspondientes a las soluciones analítica y numérica para el caso en que el campo incidente está dado por una onda plana que se propaga en dirección perpendicular a la grieta. Ambas gráficas presentan un comportamiento similar a las anteriores; en un principio se observa el desplazamiento correspondiente a la onda incidente,

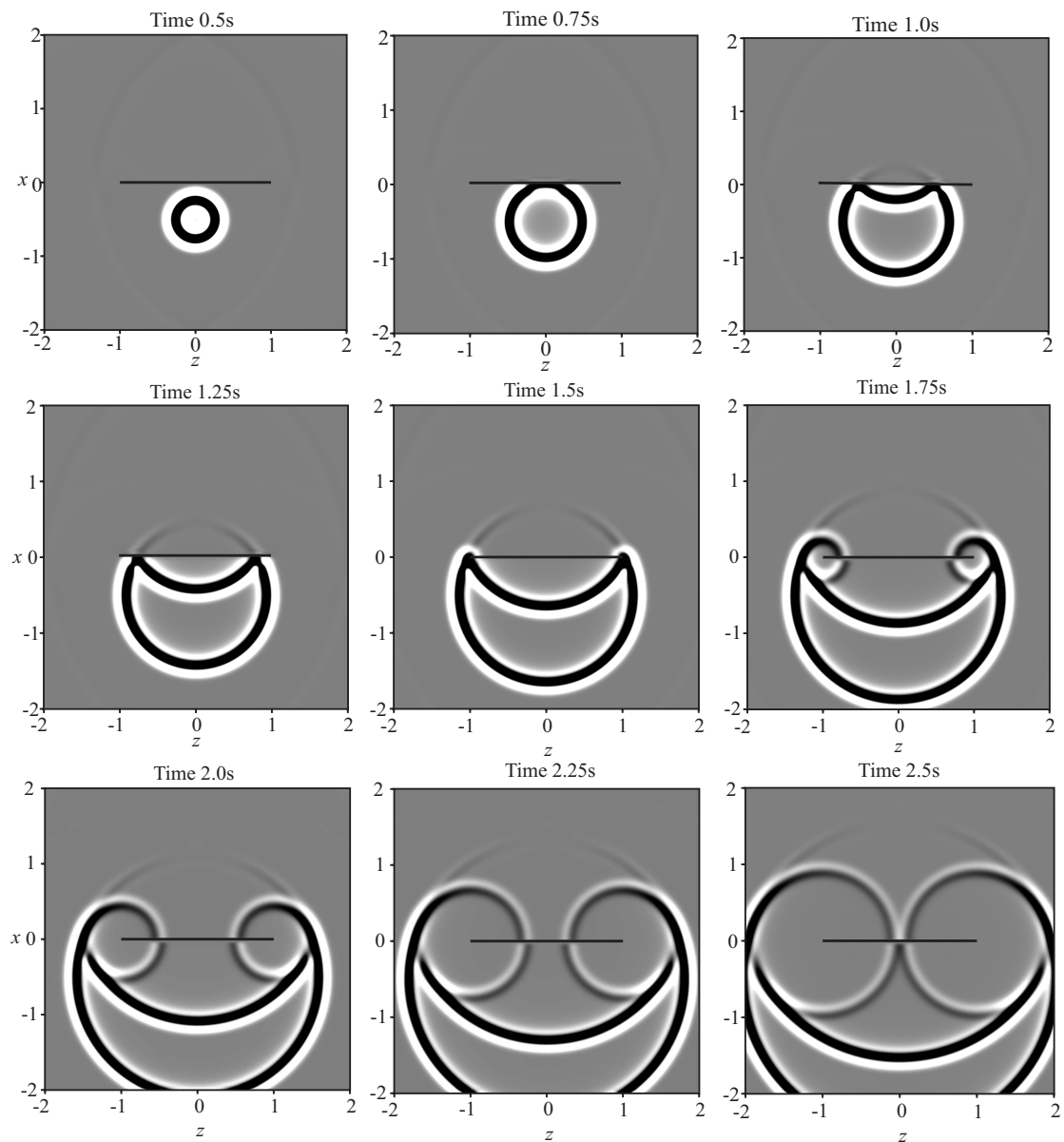


Figura 4.4: Resultados en el dominio del tiempo.

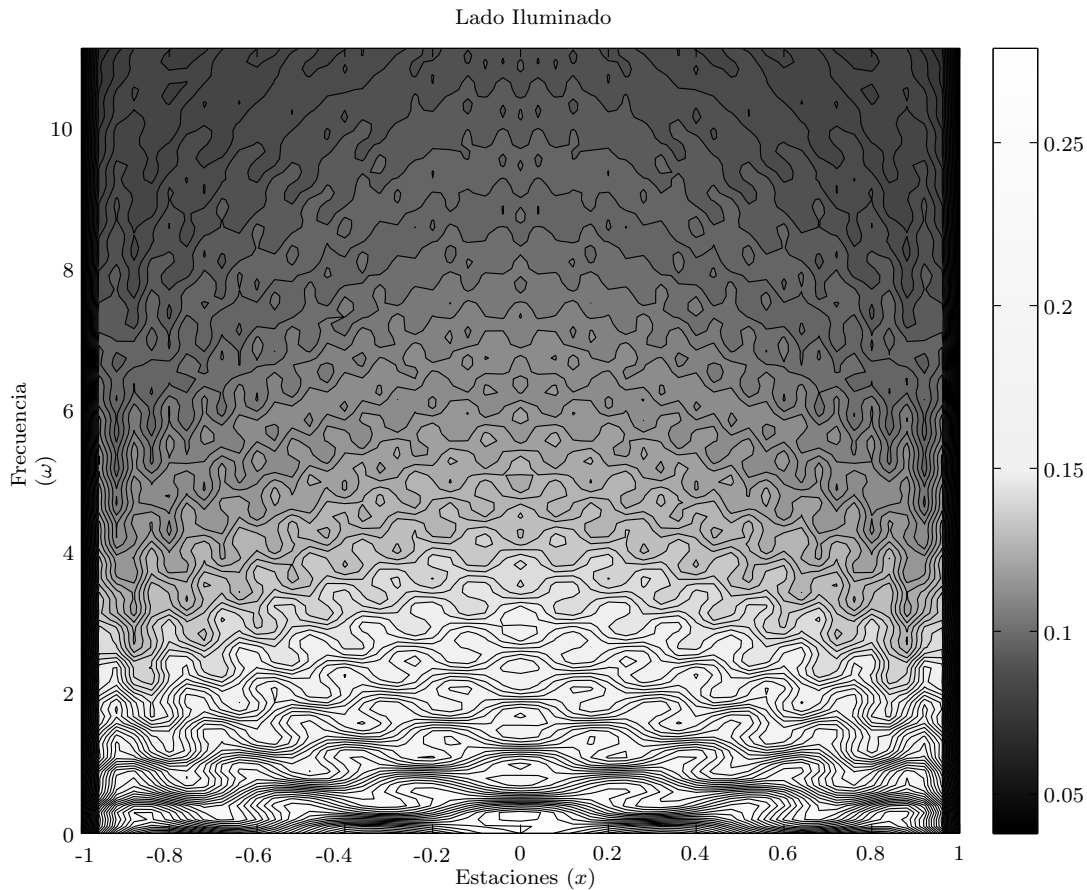


Figura 4.5: Gráfica de la función de transferencia para la solución con fuente puntual en $(x, z) = (0, -1)$, correspondiente a las estaciones en el lado iluminado.

salvo en el lado de sombra, en aquellas estaciones obstaculizadas por la grieta; y posteriormente, se registra el desplazamiento del campo difractado. La figura (4.3) muestra los resultados en el dominio del tiempo, con el desplazamiento indicado en escala de grises, comenzando en $t = 0,5s$

4.4. Resultados en el dominio de la frecuencia

El IBEM supone que el campo de desplazamiento está sujeto a una excitación armónica; posteriormente, se procede con la formulación en el dominio de la frecuencia. Por ello, antes de obtener los sintéticos con los que se realiza la comparación entre las soluciones numérica y analítica se requiere calcular la llamada *función de transferencia* del sistema, para después pasar el dominio del tiempo mediante la transformada rápida de Fourier (Apéndice A) Las figuras (4.4) y (4.4) muestran los resultados en el dominio de la frecuencia para el lado iluminado y el lado de sombra, respectivamente, de la solución para el caso de una fuente puntual colocada en $(x, z) = (0, -1)$; al igual que los sintéticos antes mostrados, los desplazamientos se registran en estaciones a largo

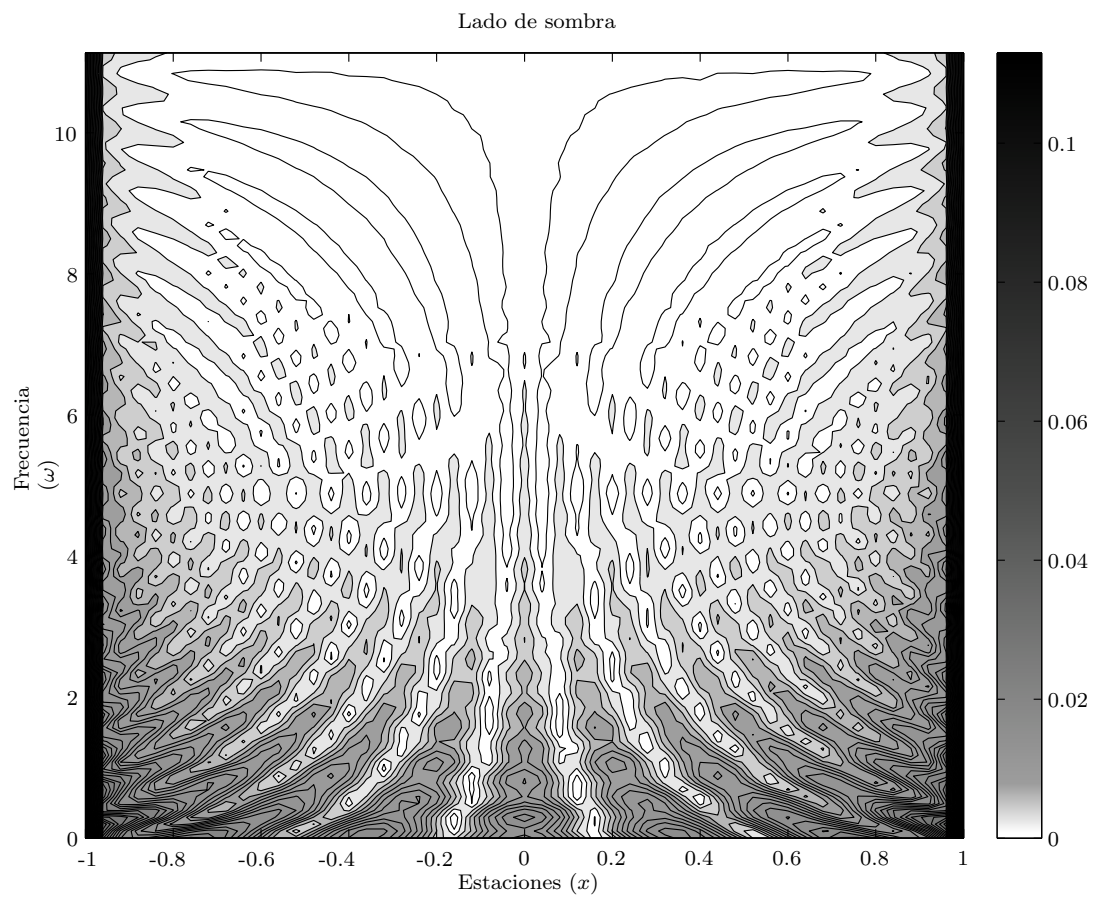


Figura 4.6: Gráfica de la función de transferencia para la solución con fuente puntual en $(x, z) = (0, -1)$, correspondiente a las estaciones en el lado de sombra.

de la grieta.

APÉNDICE A

Transformada Rápida de Fourier

La *transformada rápida de Fourier*, o *FFT*, por sus siglas en inglés, en el sentido más general denota una clase de algoritmos diseñados para calcular la transformada discreta de Fourier (*DFT*). La importancia de estos algoritmos reside en que reducen significativamente el costo computacional de calcular la DFT, en comparación el cálculo directo a partir de la definición.

En el presente trabajo, la FFT se utiliza para recuperar las soluciones del campo difractado en el dominio del tiempo, ya que las ecuaciones para este campo se resuelven en el dominio de la frecuencia. A continuación definiremos la DFT para después describir el algoritmo empleado en obtener los resultados numéricos del último capítulo de este trabajo. El desarrollo de éste y los siguientes apéndices está basado en (Plato, 2003)

Definición. Dado un conjunto de N números complejos f_0, f_1, \dots, f_{N-1} , el conjunto de números complejos d_0, d_1, \dots, d_{N-1} definido por

$$d_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-ijk2\pi/N} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1, i = \sqrt{-1}), \quad (\text{A.1})$$

se denomina como la *transformada discreta de Fourier* de f_0, f_1, \dots, f_{N-1} .

Notación. Para denotar la transformada discreta de Fourier podemos escribir

$$\mathcal{F}[f_0, f_1, \dots, f_{N-1}] = [d_0, d_1, \dots, d_{N-1}]. \quad (\text{A.2})$$

Una manera alternativa de expresar la ecuación (A.1) es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \bar{V} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

donde $\bar{V} \in \mathbb{C}(N, N)$ es la matriz conjugada de

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}, \quad \omega = e^{i2\pi/N}. \quad (\text{A.4})$$

Lema A.1 *Los vectores columna de V son ortogonales por pares, es decir,*

$$(v^{(k)})^H v^{(l)} = \begin{cases} N, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad k, l = 0, \dots, N-1; \quad (\text{A.5})$$

donde $v^{(k)} := (1, \omega^k, \dots, \omega^{k(N-1)}) \in \mathbb{C}^N$, $k = 0, \dots, N-1$, y el superíndice H denota una transposición seguida de la conjugación de cada entrada (o bien, el transpuesto Hermitiano de un vector).

Omitimos aquí la demostración del resultado, que se obtiene mediante un cálculo directo, y de igual forma presentamos sin prueba el siguiente

Corolario A.1 (Transformada discreta de Fourier inversa) 1. *La matriz $V \in \mathbb{C}^{N \times N}$ antes definida satisface*

$$\left[\frac{1}{N} \bar{V} \right]^{-1} = V. \quad (\text{A.6})$$

Cada conjunto de números complejos f_0, \dots, f_{N-1} se puede obtener de su transformada de Fourier $\mathcal{F}[f_0, \dots, f_{N-1}] = [d_0, \dots, d_{N-1}]$ utilizando la identidad

$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{-ijk2\pi/N} \quad (j = 0, 1, \dots, N-1). \quad (\text{A.7})$$

La anterior relación también puede denotarse por

$$\mathcal{F}^{-1}[d_0, \dots, d_{N-1}] = [f_0, \dots, f_{N-1}]. \quad (\text{A.8})$$

2. *Utilizando la notación anterior también se cumple que $\sum_{k=0}^{N-1} |d_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |f_k|^2$.*

A.1. Aplicaciones de la DFT

Una de aplicación de la DFT, de la cual se hace uso en el presente trabajo, se da en el contexto de las *series de Fourier*.

Es un resultado conocido que toda función Riemann integrable $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(0) = f(L)$ es el límite de la serie de Fourier con coeficientes complejos

$$c_k = \frac{1}{L} \int_0^L f(y) e^{-ik2\pi y/L} dy, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.9})$$

El siguiente resultado nos muestra cómo podemos aplicar la DFT para obtener una aproximación para los valores de una función f suficientemente suave en un conjunto de puntos equidistantes en el interior del intervalo $[0, L]$ a partir de los primeros coeficientes complejos de la serie de Fourier.

Teorema A.1 *Sea $f \in C^2[0, L]$ con $f(0) = f(L)$. Si definimos*

$$x_j := jh, \quad \text{para } j = 0, \dots, N-1 \quad \text{y} \quad h = \frac{L}{N}, \quad (\text{A.10})$$

entonces los coeficientes de la serie de Fourier definidos en (A.9) dan un aproximación de los valores de la función original como sigue:

$$\mathcal{F}^{-1}[c_0, \dots, c_{N-1}] = [f_0, \dots, f_{N-1}] + [\delta_0, \dots, \delta_{N-1}] \quad (\text{A.11})$$

con $\left(\sum_{k=0}^{N-1} |\delta_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = O(h^{\frac{3}{2}})$.

A.2. Transformada Rápida de Fourier

En la presente sección nuestro propósito es introducir el método para realizar la FFT, que aprovecha la forma especial que tiene la transformación $V \in \mathbb{C}(N, N)$ para reducir el número de pasos necesarios para calcular la DFT de N^2 (número de multiplicaciones requeridas en la forma matricial de la definición (A)) a $O(N \log_2 N)$.

El método se basa en la siguiente relación fundamental:

Teorema A.2 *A partir de las DFT de dos conjuntos de números g_0, \dots, g_{M-1} y g_M, \dots, g_{2M-1} , ambos de longitud M , es posible construir la DFT del conjunto de números de longitud $2M$,*

$$g_0, g_M, g_1, g_{M+1}, \dots, g_{M-1}, g_{2M-1},$$

de acuerdo a las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left(\mathcal{F}_k[g_0, g_1, \dots, g_{M-1}] + e^{-ik\pi/M} \mathcal{F}_k[g_M, g_{M+1}, \dots, g_{M-1}] \right) \\
 & \quad = \mathcal{F}_k[g_0, g_M, g_1, g_{M+1}, \dots, g_{M-1}, g_{2M-1}], \\
 & \frac{1}{2} \left(\mathcal{F}_k[g_0, g_1, \dots, g_{M-1}] - e^{-ik\pi/M} \mathcal{F}_k[g_M, g_{M+1}, \dots, g_{M-1}] \right) \\
 & \quad = \mathcal{F}_{M+k}[g_0, g_M, g_1, g_{M+1}, \dots, g_{M-1}, g_{2M-1}].
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Donde \mathcal{F}_k denota el k -ésimo componente de \mathcal{F} .

Demostración. [...]

A continuación veremos cómo se puede representar de manera general el reordenamiento del conjunto de números $g_0, g_1, \dots, g_{2M-1}$ que ocurre en las identidades (A.12).

Definición A.1 Dado $q \in \mathbb{N}$, sea $k = \sum_0^{q-1} b_l 2^l$ la representación binaria (única) de $k \in \mathbb{N}$, con $0 \leq k \leq 2^{q-1}$ y $b_l = 0, 1$.

La función $\sigma_q : \{0, 1, \dots, 2^q - 1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 2^q - 1\}$ dada por

$$\sigma_q \left(\sum_0^{q-1} b_l 2^l \right) = \sum_0^{q-1} b_{q-1-l} 2^l \tag{A.13}$$

se recibe el nombre de bit reverse.

Teorema A.3 La función bit reverse antes definida cumple las siguientes propiedades:

1. $\sigma_q \left(\sum_0^{q-1} b_l 2^l \right) = \sigma_q \left(\sum_0^{q-1} b_l 2^{q-1-l} \right)$
2. $\sigma_q(2^r + k) = \sigma_q(k) + 2^{q-1-r} \quad (k = 0, \dots, 2^r - 1; r = 0, \dots, q-1)$
3. La función bit reverse es biyectiva y $\sigma_q^{-1} = \sigma_q$. Adicionalmente, para todo $r \in \mathbb{N}$ y $0 \leq k \leq 2^r - 1$ se cumple

$$\begin{aligned}
 \sigma_r(k) &= \sigma_{r+1}(2k), \\
 2^r + \sigma_r(k) &= \sigma_{r+1}(2k + 1).
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

Observación. La propiedad (2) enumerada en el teorema anterior sugiere una manera eficiente de implementar la transformación del *bit reverse*: recursivamente, recorriendo los valores $1, \dots, 2^{q-1}$ con los índices r y k . Las dos restantes resultarán necesarias

A.3. La FFT para el caso $N = 2^q$.

Para un conjunto de datos de entrada (*input*) $g_0, \dots, g_{N-1} \in \mathbb{C}$, con $N = 2^q$, la aplicación sucesiva de la relación fundamental (A.12) resulta en un vector

$$\mathcal{F}[g_{\sigma_q(0)}, g_{\sigma_q(1)}, \dots, g_{\sigma_q(N-1)}] \in \mathbb{C}^N. \tag{A.15}$$

Con base en este resultado es fácil elegir el conjunto de entrada g_0, \dots, g_{N-1} para obtener $\mathcal{F}[f_0, \dots, f_{N-1}]$ a partir de un conjunto arbitrario de números complejos f_0, \dots, f_{N-1} , que es el resultado deseado. Para la aplicación que nos ocupa, además, no hay inconveniente en acomodar la modelación para forzar el caso $N = 2^q$.

Definición A.2 (Algoritmo de la FFT.) Sean $g_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, \dots, 2^q - 1$. Definimos para $r = 0, \dots, q$ los vectores $\mathbf{d}^{[r,j]} \in \mathbb{C}^{2^r}$ como sigue: para $r = 0$ y $j = 0, \dots, 2^q - 1$,

$$\mathbf{d}^{[0,j]} = g_j. \quad (\text{A.16})$$

Para $r \geq 1$, definimos un total de 2^{r-q} vectores de longitud 2^r correspondientes al r -ésimo “nivel” a partir de los vectores del nivel anterior, conforme a la siguiente regla (véase la figura A.3):

$$\begin{aligned} d_k^{[r+1,j]} &= \frac{1}{2} \left(d_k^{[r,2j]} + \theta(r)^k d_k^{[r,2j+1]} \right), \\ d_{k+2^r}^{[r+1,j]} &= \frac{1}{2} \left(d_k^{[r,2j]} - \theta(r)^k d_k^{[r,2j+1]} \right); \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

donde

$$\begin{aligned} r &= 0, \dots, q-1, \\ j &= 0, \dots, 2^{q-r-1} - 1, \\ k &= 0, \dots, 2^r - 1, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$d_k^{[r,j]}$ denota el k -ésimo componente de $\mathbf{d}^{[r,j]}$ y $\theta(r) = e^{-i\pi/2^r}$.

Teorema A.4 A partir de la definición anterior, se cumple

$$\mathbf{d}^{[r,j]} = \mathcal{F}[g_{j2^{2r+\sigma_r(0)}}, \dots, g_{j2^{2r+\sigma_r(2^r-1)}}], \quad (\text{A.19})$$

para $j = 0, 1, \dots, 2^{q-r} - 1$; $r = 0, 1, \dots, q$.

Demostración. La demostración se hace por inducción sobre r , es decir, sobre los “niveles”, o el número de veces que se aplica la relación fundamental (A.12).

Para $r = 0$, es sencillo verificar que $\mathbf{d}^{[0,j]} = g_j = \mathcal{F}[g_j]$. Supongamos ahora que (A.19) vale para $r = q - 1$, y demostremos la misma identidad para $r = q$.

Aplicando la regla de asignación del algoritmo, tenemos

$$\begin{aligned} d_k^{[q,j]} &= \frac{1}{2} \left(d_k^{[q-1,2j]} + \theta(q-1)^k d_k^{[q-1,2j+1]} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{F}_k[g_{2j2^{q-1+\sigma_{q-1}(0)}}, \dots, g_{2j2^{q-1+\sigma_{q-1}(2^{q-1}-1)}}] \right. \\ &\quad \left. + \theta(q-1)^k \mathcal{F}_k[g_{(2j+1)2^{q-1+\sigma_{q-1}(0)}}, \dots, g_{(2j+1)2^{q-1+\sigma_{q-1}(2^{q-1}-1)}}] \right) \\ &= \mathcal{F}_k[g_{s_0}, \dots, g_{s_{2^q-1}}], \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

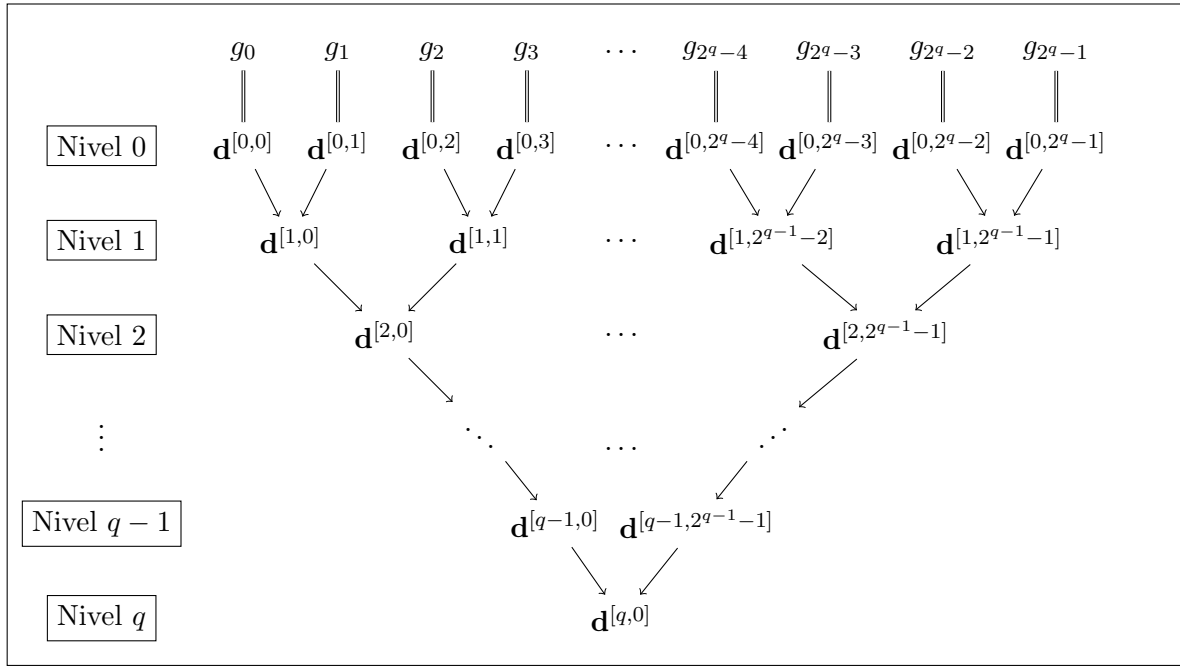


Figura A.1: Representación esquemática del algoritmo de la FFT.

donde los índices finales, de acuerdo con la relación fundamental y con las propiedades del bit reverse, cumplen

$$\begin{aligned}
 s_{2k} &= 2j2^{q-1} + \sigma_{q-1}(k) \\
 &= j2^q + \sigma_{q-1}(k) \\
 &= j2^q + \sigma_q(2k), \\
 s_{2k+1} &= (2j+1)2^{q-1} + \sigma_{q-1}(2k+1) \\
 &= j2^q + \sigma_{q-1}(2k+1) + 2^{q-1} \\
 &= j2^q + \sigma_q(2k+1),
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

para $k = 0, \dots, 2^{q-1} - 1$. El cálculo para $\mathbf{d}_{k+2^{q-1}}^{[q,j]}$ es completamente análogo, con lo cual queda demostrado el teorema.

Observación. Podemos acotar el número de multiplicaciones de números complejos que es necesario realizar para implementar el algoritmo antes descrito para la FFT.

Para $r = 0, \dots, q - 1$, la transición del r -ésimo nivel al $r + 1$ -ésimo requiere las siguientes multiplicaciones:

- Al inicio del algoritmo podemos realizar $q - 2$ ($\leq q$) multiplicaciones haciendo $\theta(r) = \theta(r + 1)^2$ para $r = q - 2, q - 3, \dots, 1$, para obtener todos los valores requeridos de $\theta(r)$.
- Partiendo del valor de $\theta(r)$, se requieren $2^r - 2$ ($\leq 2^r$) multiplicaciones para obtener $\theta(r)^2, \dots, \theta(r)^{2^{r-1}}$.

- La aplicación de la relación fundamental para obtener el vector $\mathbf{d}^{[r+1,j]} \in \mathbb{C}^{2^{r+1}}$ a partir de los vectores $\mathbf{d}^{[r,2j]}, \mathbf{d}^{[r,2j+1]} \in \mathbb{C}^{2^r}$ requiere de 2^r multiplicaciones, las cuales se deben realizar para cada índice $j = 0, \dots, 2^{q-r-1} - 1$. Esto da un total de $2^r(2^{q-r-1}) = 2^{q-1}$ multiplicaciones.

Por lo anterior, la transición de un nivel al siguiente mediante la aplicaciones de la relación fundamental en el algoritmo de la FFT requiere menos de $2^r + 2^{q-1}$. Considerando las multiplicaciones iniciales, obtenemos la cota

$$\sum_{r=0}^{q-1} (2^{q-1} + 2^r) + q \leq q2^{q-1} + 2^q + q = \frac{N \log_2(N)}{2} + O(N). \quad (\text{A.22})$$

APÉNDICE B

Integración Numérica

B.1. Fórmulas de cuadratura

El propósito de esta sección es describir la manera en que se calculan numéricamente las integrales necesarias para resolver para obtener el campo de desplazamiento, solución del sistema de ecuaciones diferenciales.

El problema, en general, es aproximar el valor de integrales como

$$\mathcal{I}(f) := \int_a^b f(x) dx. \quad (\text{B.1})$$

Para ello haremos uso de las llamadas *fórmulas de cuadratura*, que en general son expresiones de la forma

$$\mathcal{I}_n(f) = (b - a) \sum_{k=0}^n \sigma_k f(x_k), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\text{B.2})$$

que buscan aproximar la integral de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Los puntos del dominio x_0, \dots, x_n deben ser distintos y se denominan *abscisas de soporte*; $\sigma_0, \dots, \sigma_n \in \mathbb{R}$ se denominan *pesos*.

Definición B.1 *El grado de exactitud de la fórmula de cuadratura \mathcal{I}_n es igual a $r \in \mathbb{N}_0$, si para todo $\nu = 0, \dots, r$ se cumple que*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_n(x^\nu) &= \mathcal{I}(x^\nu), \\ \mathcal{I}_n(x^{r+1}) &= \mathcal{I}(x^{r+1}). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Si se satisface la primera de estas ecuaciones decimos que el grado de exactitud de \mathcal{I}_n es al menos r .

Observación. Es fácil verificar que toda fórmula de cuadratura es lineal, al igual que la integral \mathcal{I} , si se entienden ambas como operadores $\mathcal{I}, \mathcal{I}_n : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Por lo tanto, que \mathcal{I}_n tenga grado r equivale a que

$$\begin{cases} \mathcal{I}_n(P) = \mathcal{I}(P) \text{ para todo polinomio } P \text{ de grado } r, \\ \mathcal{I}_n(P) \neq \mathcal{I}(P) \text{ para todo polinomio } P \text{ de grado (exactamente) } r + 1. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Definición B.2 Una fórmula de cuadratura por interpolación tiene la forma

$$\mathcal{I}_n(f) = \int_a^b Q_n(x) dx, \quad (\text{B.5})$$

donde $Q_n(x)$ es el polinomio de interpolación para los soportes $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$; es decir, que $Q_n(x_k) = f(x_k)$ para $k = 0, \dots, n$.

Observación. Por lo expuesto en la observación anterior, el grado de exactitud de una fórmula de interpolación por cuadratura \mathcal{I}_n es al menos n .

A continuación calculamos una forma explícita para (B.5).

Teorema B.1 Toda fórmula de cuadratura por interpolación \mathcal{I}_n tiene la forma

$$\mathcal{I}_n = (b - a) \sum_{k=0}^n \sigma_k f(x_k), \quad (\text{B.6})$$

donde

$$\sigma_k = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{t - t_j}{t_k - t_j} dt, \quad t_j = \frac{x_j - a}{b - a}. \quad (\text{B.7})$$

Demostración. Utilizando la fórmula de Lagrange,

$$Q_n = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k, \quad \text{donde } L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad (\text{B.8})$$

obtenemos $\mathcal{I}_n(f) = \sum_0^n f(x_k) \int_a^b L_k(x) dx$. El resultado sigue de hacer la sustitución $x = (b - a)t - a$.

Observación. La ventaja de la representación de \mathcal{I}_n consiste en que los pesos σ_k no dependen de la función f o de los límites del intervalo a y b , sino solamente de la posición relativa de las abscisas de soporte x_0, \dots, x_n dentro del intervalo $[a, b]$.

En seguida presentamos, sin prueba, el resultado que nos permite acotar el error de aproximación de una fórmula de cuadratura por interpolación a partir de su grado de exactitud.

Teorema B.2 Sean $\mathcal{I}_n = \sum_0^k \sigma_k f(x_k)$ una fórmula de cuadratura por interpolación con grado de exactitud al menos $r \in \mathbb{N}$, $r \geq n$, y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $(r + 1)$ -veces continuamente diferenciable. Entonces se cumple que

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n| \leq c_r \frac{(b-a)^{r+2}}{(r+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{r+1}(\xi)|, \quad (\text{B.9})$$

con

$$\begin{aligned} c_r &= \min_{t_{n+1}, \dots, t_r} \int_0^1 \prod_{k=0}^r |t - t_k| dt, \\ t_k &= \frac{x_k - a}{b - a}, \quad k = 0, \dots, n. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

B.2. Cuadratura gaussiana

En general las fórmulas de cuadratura gaussiana resultan de la aproximación numérica de integrales de la forma

$$\mathcal{I}_n(f) = \int_a^b f(x) \varrho(x) dx \quad (\text{B.11})$$

donde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función dada y ϱ es una función conocida, que se denomina *peso*; en general, $\varrho : [a, b] \rightarrow (0, \infty]$ es continua por pedruzcos en el intervalo abierto (a, b) e integrable en $[a, b]$.

En parte por motivos históricos se utiliza para las fórmulas de cuadratura correspondientes a la integral (B.11) una notación ligeramente distinta:

- las abscisas de soporte se denotan con λ_j ,
- en primer término de la suma corresponde a $j = 1$, y
- se omite el factor $(b - a)$.

Observación. Para la aplicación que se requiere en el presente trabajo bastará considerar el caso de $\varrho(x) \equiv 1$, el cual está contemplado en el desarrollo de la sección anterior; lo que distingue a las fórmulas que encontraremos más adelante es que proporcionan una forma de colocar las abscisas de soporte para lograr un mayor grado de exactitud.

Definición B.3 (Polinomios ortogonales) Para un función de peso $\varrho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada y para $p, q \in \Pi$, el espacio de todos los polinomios con coeficientes en los reales, definimos

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)q(x)\varrho(x) dx, \|p\| = \langle p, p \rangle^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.12})$$

La asignación $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Pi \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ define un producto interior en Π .

Definición B.4 Dos polinomios $p, q \in \Pi$ son ortogonales si y sólo si $\langle p, q \rangle = 0$.

A partir de la definición anterior es posible construir una sucesión de polinomios $\{p_n\}, n \in \mathbb{N}$ con las siguientes características:

1. $p_0 = 1$
2. $\|p_n\| = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$,
3. $\langle p_n, p_m \rangle = 0$ para $n, m \in \mathbb{N}$.

Una de las maneras de construir dicha sucesión es mediante el proceso de ortogonalización de Graham-Schmidt (Friedberg, 2003). En el desarrollo siguiente consideramos el caso más relevante para el presente trabajo; esto es, cuando $\varrho(x) \equiv 1$ y el dominio de integración es $(-1, 1)$.

Calculamos,

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= \left(x - \frac{\int_{-1}^1 x dx}{\int_{-1}^1 1 dx} \right) \cdot 1 \\ &= x, \\ p_2(x) &= \left(x - \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} \right) x - \left(\frac{\int_{-1}^1 x^2 dx}{\int_{-1}^1 1 dx} \right) \cdot 1 \\ &= x^2 - \frac{1}{3} \\ p_3(x) &= \left(x - \frac{\int_{-1}^1 x(x^2 - \frac{1}{3})^2 dx}{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx} \right) (x^2 - \frac{1}{3}) - \left(\frac{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} \right) \cdot 1 \\ &= x^3 - \frac{3}{5}x, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Si normalizamos para satisfacer la condición $\|p_n\| = 1$, obtenemos los llamados *polinomios de Legendre*.

El siguiente teorema establece las condiciones para las cuales, con n pesos y abscisas de soporte, se obtiene una fórmula de cuadratura con grado de exactitud $2n - 1$.

Teorema B.3 Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathbb{R}$. Entonces, para todo $p \in \Pi_{2n-1}$ se cumple que

$$\langle p, 1 \rangle = \sum_{j=1}^n \sigma_j p(\lambda_j), \quad (\text{B.14})$$

si y sólo si los números $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ coinciden con las raíces del polinomio ortogonal p_n y los pesos $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ están dados por

$$\sigma_j = \langle L_j, 1 \rangle, \quad (j = 1, \dots, n) \quad (\text{B.15})$$

donde L_1, \dots, L_N son los polinomios de interpolación de Lagrange correspondientes a los números $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

APÉNDICE C

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

C.1. Matrices triangulares

En general la solución de sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Ax = b$ donde A es una matriz de $N \times N$ y $x = (x_1, \dots, x_N)$, $N \in \mathbb{N}$, implica la transformación del sistema en otro equivalente cuya estructura permita despejar las incógnitas x_i de manera más sencilla.

A manera de motivación, enseguida definiremos las matrices que corresponden a dichos sistemas transformados.

Definición C.1 Las matrices $L, U \in \mathbb{R}^{N \times N}$ son de tipo triangular inferior y triangular superior si tienen la siguiente forma

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & \cdots & l_{NN} \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1N} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{NN} \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Teorema C.1 La solución de un sistema de ecuaciones lineales de la forma $Lx = b$ donde $L \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es una matriz triangular inferior y $b \in \mathbb{R}^N$ requiere exactamente N^2 operaciones aritméticas.

Demostración. Para la matriz triangular inferior $L = (l_{ij})$, $i, j = 1 \dots, N$ el sistema de ecuaciones correspondiente $Lx = b$, $b = (b_i)$ tiene la forma

$$\begin{aligned}
 l_{11}x_1 & & = b_1 \\
 l_{21}x_1 + l_{22}x_2 & & = b_2 \\
 \vdots & \quad \quad \quad \ddots & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 l_{N1}x_1 + l_{N2}x_2 + \dots + l_{NN}x_N & = b_N.
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Si la solución existe (esto es, si la matriz L es no degenerada), podemos calcular la solución $x = (x_i)$ por renglones, de arriba abajo, despejando cada incógnita de los términos en la diagonal

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j \right) l_{ii}^{-1}, \quad i = 1, \dots, N. \tag{C.3}$$

En cada nivel $i = 1, \dots, N$ se realizan $N - i$ multiplicaciones, el mismo número de sustracciones, y una división; por lo tanto, el número total de operaciones requeridas es

$$N + 2 \sum_{i=1}^N (N - i) = N + 2 \sum_{m=1}^{N-1} m = N + (N - 1)N = N^2. \tag{C.4}$$

Observación. El procedimiento indicado por la ecuación (C.3) se denomina *forward substitution*. Para el caso de una matriz triangular superior y el sistema de ecuaciones correspondiente $Ux = b$, el desarrollo es completamente análogo. En este caso, el procedimiento para despejar las incógnitas se realiza en el orden inverso

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^N r_{ij}x_j \right) r_{ii}^{-1}, \quad i = N, N - 1, \dots, 1, \tag{C.5}$$

y se denomina *backsubstitution*.

C.2. Descomposición LU

Volvemos ahora al caso general de un sistema de ecuaciones de la forma $Ax = b$, y supongamos que podemos escribir la matriz A como el producto

$$A = LU, \tag{C.6}$$

donde L y U son, respectivamente, matrices triangulares inferior y superior. Podemos entonces resolver el sistema original

$$Ax = (LU)x = L(Ux) = b \quad (\text{C.7})$$

resolviendo los sistemas

$$Ly = b, \quad (\text{C.8})$$

$$Ux = y; \quad (\text{C.9})$$

para lo cual ya contamos con un procedimiento sencillo, por lo expuesto en la sección anterior.

C.3. Algoritmo de Crout

A continuación estudiaremos una de las posibles maneras de obtener la factorización mencionada en la sección anterior.

Si escribimos el componente a_{ij} que resulta del producto (C.6) obtenemos una suma de la forma

$$a_{ij} = l_{i1}r_{1j} + l_{i2}r_{2j} + \dots \quad (\text{C.10})$$

El último término de la suma depende de cuál es el mayor entre los índices i y j , por lo cual tenemos tres casos:

$$a_{ij} = l_{i1}r_{1j} + l_{i2}r_{2j} + \dots + l_{ii}r_{ij}, \quad i < j \quad (\text{C.11})$$

$$a_{ij} = l_{i1}r_{1j} + l_{i2}r_{2j} + \dots + l_{ii}r_{jj}, \quad i = j \quad (\text{C.12})$$

$$a_{ij} = l_{i1}r_{1j} + l_{i2}r_{2j} + \dots + l_{ij}r_{jj}, \quad i > j \quad (\text{C.13})$$

En total, el número de ecuaciones en (C.11-C.13) es N^2 , mientras que las incógnitas l_{ik}, r_{kj} son $N^2 + N$, debido a que los elementos en la diagonal aparecen 2 veces cada uno. Esto sugiere que podemos asignar un valor a arbitrario a los elementos de la diagonal

$$l_{ii} = 1, \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{C.14})$$

Existe un procedimiento para resolver las ecuaciones (C.11-C.14), denominado *algoritmo de Crout*, en el que el orden en que se resuelven de las ecuaciones juega un papel predominante. El procedimiento, que presentamos sin prueba, es el siguiente:

Para $j = 1, 2, \dots, N$:

1. Para $i = 1, 2, \dots, j$, se utilizan las ecuaciones (C.11), (C.12) y que $l_{ii} = 1$ para resolver

$$r_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} r_{kj}; \quad (\text{C.15})$$

2. para $i = j + 1, j + 2, \dots, N$, se utiliza la ecuación (C.13) para resolver

$$l_{ij} = \frac{1}{r_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-i} l_{ik} r_{kj} \right). \quad (\text{C.16})$$

El orden en que se resuelven las ecuaciones tiene como consecuencia que en cada iteración del procedimiento, el valor de las entradas l_{ik}, r_{kj} que se encuentran en el lado derecho de las ecuaciones (C.15) y (C.16) haya sido determinado en una iteración previa. Para ilustrar este punto, supongamos que al terminar cada iteración del procedimiento las entradas de L y U se almacenan en una sola matriz

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1N} \\ l_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & \cdots & r_{NN} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.17})$$

El algoritmo calcula las entradas por columnas de izquierda a derecha, y en cada columna de abajo hacia arriba, empezando por r_{11} . la figura (C.3) muestra el orden en que se calculan las entradas l_{ik} y r_{kj} e indica, para un par de ejemplos, cuáles fueron las entradas que se utilizaron para determinar su valor.

Una condición suficiente para garantizar la estabilidad del algoritmo es que la matriz original $A = (a_{ij})$ sea *diagonal dominante* (Press, et. al.,1992). Una posibilidad es intercambiar renglones (*pivotear*) de A para que esta condición se cumpla. En este caso la factorización se denota comúnmente como $PA = LU$, indicando el uso de una *matriz de permutación* antes de hacer la factorización.

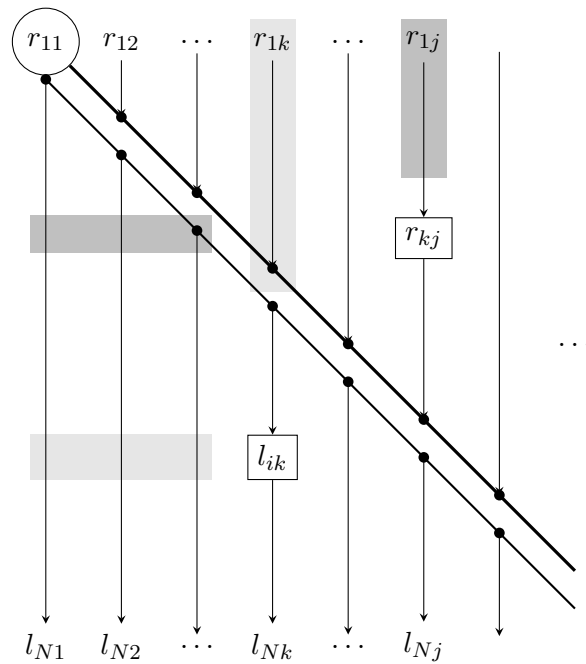


Figura C.1: Orden en que el algoritmo de Crout calcula las entradas de las matrices L y U . Los segmentos sombreados representan los elementos que se requieren para calcular el valor de las entradas indicadas l_{ik} y r_{kj} .

APÉNDICE D

Solución Analítica

Presentamos aquí la solución analítica del problema de difracción de ondas elásticas por una grieta plana para el caso en que la onda incidente es una onda plana con ángulo de incidencia γ . Dicha solución fue tomada de (Sánchez-Sesma e Iturrarán-Viveros, 2001) y nos referimos a este artículo para una explicación más detallada.

Al igual que antes, el campo resultante en el lado iluminado de la grieta es igual a la onda incidente más la onda reflejada más el campo difractado:

$$v^{(t)+} = 2v_0 e^{ikx \sin \gamma} - v^{(d)-} \quad (\text{D.1})$$

Aquí estamos ya sustituyendo que el campo difractado de la lado iluminado es igual al campo difractado del lado de sombra, cambiando de signo; esto es $v^{(d)+} = -v^{(d)-}$. Para el campo resultante en el lado de sombra, tenemos $v^{(t)-} = v^{(d)-}$.

El campo difractado del lado de sombra está dado por

$$v^{(d)-} = v_0^{(d)-} + v_1 \frac{v_1 Z - v_2}{1 - Z^2} + v_2 \frac{v_2 Z - v_1}{1 - Z^2} \quad (\text{D.2})$$

donde

$$v_0^{(d)-} = v_0 e^{-ika \sin \gamma} s(r_1) F \left(\sqrt{2kr_1} \sin \frac{\theta_1}{2} \right) \quad (\text{D.3})$$

$$+ v_0 e^{ika \sin \gamma} s(r_2) F \left(\sqrt{2kr_2} \sin \frac{\theta_2}{2} \right). \quad (\text{D.4})$$

La función v_1 está dada por

$$v_1 = v_0 e^{-ika \sin \gamma} s(2a) F\left(\sqrt{4ka} \sin \frac{\theta_1}{2}\right); \quad (\text{D.5})$$

y v_2 , por

$$v_2 = v_0 e^{ika \sin \gamma} s(2a) F\left(\sqrt{4ka} \sin \frac{\theta_2}{2}\right). \quad (\text{D.6})$$

La función Z está dada por

$$Z = s(2a) F(\sqrt{4ka}), \quad (\text{D.7})$$

donde $s(r)$ es una función auxiliar

$$s(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{ikr - i\frac{\pi}{4}}; \quad (\text{D.8})$$

observemos que en (D.2) los términos que contienen a Z son los límites de una serie geométrica. La función F es una de integral de Fresnel dada por

$$F(z) = \exp(-iz^2) \int_z^\infty \exp(i\tau^2) d\tau, \quad (\text{D.9})$$

misma que se calcula numéricamente para obtener la solución.

Referencias

- Abramowitz, M. and I. A. Stegun (1970). *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover Publications, Inc.
- Achenbach, J. D. (1973). *Wave propagation in elastic solids*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers.
- Aki, K. and P. G. Richards (1980). *Quantitative seismology, theory and methods*. San Francisco: W. H. Freeman.
- Cruse, T. A. (1988). *Boundary element analysis in computational fracture mechanics*. Boston U.S.A.: Kluwer Academic Publishers.
- Eringen, A. C. and E. S. Suhubi (1975). *Elastodynamics*. New York: Academic Press.
- Evans, L. (1998). *Partial Differential Equations*. Providence, RI: American Mathematical Society.
- Friedberg, S., A. Insel, and L. Spence (2003). *Linear algebra*. Pearson Education.
- Graff, K. F. (1975). *Wave motion in elastic solids*. Ohio State University Press. 649 pp.
- Iturrarán-Viveros, U., R. Vai, and F. J. Sánchez-Sesma (2005). Scattering of elastic waves by a 2-D crack using the Indirect Boundary Element Method IBEM. *Geophys. J. Int.* **162**, 927–934.
- Kolsky, H. (1963). *Stress waves in solids*. New York: Dover Publications Inc.
- Kupradze, V. D. (1963). Dynamical problems in elasticity. In I. N. Sneddon and R. Hill (Ed.), *Progress in solid mechanics*, Volume III. Amsterdam: North-Holland.
- Lai, W. M., D. Rubin, and E. Krempf (1993). *Introduction to continuum mechanics* (3rd ed.). Woburn, MA: Butterworth-Heinemann.
- Manolis, G. D. and D. E. Beskos (1988). *Boundary element methods in elastodynamics*. London: Unwin Hyman Ltd.
- Plato, R. (2003). *Concise numerical mathematics*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society.
- Press, W. H., B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling (1992). *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing* (2 ed.). Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.
- Sánchez-Sesma, F. J. and M. Campillo (1991). Diffraction of P , SV and Rayleigh

waves by topographic features: a boundary integral formulation. *Bull. Seis. Soc. Am.* 81, 2234–2253.

Sánchez-Sesma, F. J. and U. Iturrarán-Viveros (2001). Scattering and diffraction of SH waves by a finite crack: an analytical solution. *Geophys. J. Int.* 145, 749–758.

Sternberg, E. (1960). On the integration of the equations of motion in the classical theory of elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 6, 34–50.
