Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

UNA APLICACIÓN GEOMÉTRICA DEL LAPLACIANO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A

PATRICIA TANESSÍ QUINTANAR CORTÉS

DIRECTOR DE TESIS

DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO

2011

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Quintanar
Cortés
Patricia Tanessí
56845251
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
306513381

2.Datos del tutor
Doctor
Óscar Alfredo
Palmas
Velasco

3. Datos del sinodal 1
Doctor
Ernesto
Rosales
González

4. Datos del sinodal 2
M. en C.
Ana Irene
Ramírez
Galarza

5. Datos del sinodal 3
Doctora
María de los Ángeles
Sandoval
Romero

6. Datos del sinodal 4
M. en C.
Rita
Vázquez

Padilla

7. Datos del trabajo escrito
Una aplicación geométrica del laplaciano
63 p.
2011

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera agradecer a Oscar, no sólo por toda la paciencia y ayuda que me brindó a lo largo de este trabajo (incluso de larga distancia), sino también por sus clases durante la licenciatura que fueron las que me animaron a introducirme en el mundo de la geometría. También quiero agradecer a mis sinodales Ernesto, Ana Irene, Ángeles y Rita; gracias por el tiempo invertido en leer mi tesis y sobre todo gracias por sus comentarios.

Por supuesto no puedo dejar de lado a mis papás y mis hermanos Luis y Juan, quienes me han apoyado desde siempre, sin su apoyo incondicional no estaría donde estoy. Gracias también a Melissa, Samantha, Leti, Pancho, Paco, Blanca, Ricardo, Fátima, Jeannette, Arturo y mis abuelitos Alberto, Rosita, Maosita y Ru, por todo el apoyo en la vida y los buenos ratos.

Y no podían faltar los cuates, Erwing, Juan, Jorge, Mariana, Julio, Rubén, Charles, Daniel y Adela, a ustedes, muchas gracias por las risas, las complicidades, las fiestas de tarea, las no fiestas de tarea, los consejos, las salidas en bici, las idas al cine, las reuniones en la oficina, los días de partido, los conciertos, los monopolies, las vacaciones... En pocas palabras gracias por todos los momentos que he podido pasar con ustedes y por su amistad.

Introducción

La interacción entre las diversas áreas de las matemáticas ha mostrado ser muy fructífera por ejemplo, el uso del álgebra para probar teoremas de geometría, o del análisis y las ecuaciones diferenciales que tienen aplicaciones también a la geometría, es por esta dirección que va encaminada esta tesis.

El objetivo principal de este trabajo es demostrar la generalización del teorema de Toponogov que dice que si M es una variedad riemanniana compacta de dimensión n con curvatura de Ricci mayor o igual a $(n-1)k > 0$, y si el diámetro de M cumple con que $d(M) = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$, entonces M es isométrica a la esfera de curvatura k. Para demostrar este teorema, hacemos uso de teoremas de comparación de eigenvalores del laplaciano, es por esto que gran parte del estudio de esta tesis se le dedica a desarrollar teoría sobre estos valores.

En el primer capítulo, veremos algunas propiedades básicas del operador en cuestión, por ejemplo que es simétrico y positivo. Estaremos trabajando en esta sección con funciones en C^∞, sin embargo, en el capítulo 2, tendremos que trabajar en espacios de Hilbert, por lo que no bastará con trabajar con funciones en C^∞, es por esto que definiremos los espacios de Sobolev, y de esta forma y con base en el teorema espectral para operadores compactos y autoadjuntos, demostrar que el laplaciano es diagonalizable en una base ortonormal de $L^2(M)$.

En el siguiente capítulo se demostrarán teoremas de comparación de eigenvalores. Es a partir de esta parte que empieza a tomar forma la relación que existe entre ecuaciones difereniales, análisis y geometría, ya que podemos acotar los eigenvalores del laplaciano en función del diámentro de una variedad M. En particular, Cheeger, en un artículo publicado por la universidad de California en 1967, acota superiormente al primer valor propio del laplaciano pero para variedades con curvatura positiva, y en 1973, Mazet hace lo mismo pero con variedades con curvatura negativa.

En el último capítulo, el objetivo es demostrar la generalización del teorema de la esfera de Toponogov, por lo que también demostramos el teorema de la esfera de Toponogov, que dice que si M es una variedad compacta de dimensión n y curvatura seccional positiva, entonces, si $d(M) = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$, M es isométrica a la esfera. Esta generalización fue publicada por Cheng en un artículo de la universidad de Nueva York en el año de 1974.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos la notación y definiciones básicas que se usarán a lo largo del trabajo. En particular se demostrarán algunas propiedades sencillas del laplaciano. Incluimos también la fórmula de Bochner-Lichnerowicz, que si bien su demostración no es tan sencilla, nos da una herramienta importante para probar otros resultados más adelante.

1.1. Geometría riemanniana

Denotaremos por M a una variedad riemanniana de dimensión n orientable. Para cada p en M, el espacio tangente de M en el punto p será escrito como T_pM, $\mathfrak{X}(M)$ será el conjunto de todos los campos vectoriales de clase C^∞ en M, $C^\infty(M)$ el anillo de funciones real valuadas de clase C^∞ definidas en M y $C_0^\infty(M)$ al conjunto de funciones en $C^\infty(M)$ con soporte compacto.

Denotaremos a la métrica de M por $\langle\ ,\ \rangle$. Si $\{E_i\}$ es un marco ortonormal local, entonces la matriz (g_{ij}) es la matriz asociada a la métrica de M con respecto de esta parametrización. Dicha matriz es invertible, de modo que denotamos por (g^{ij}) a su matriz inversa.

A continuación definiremos varios operadores que usaremos a lo largo de este trabajo.

Dada una función $f \in C^\infty(M)$, su *gradiente* es el único campo vectorial $\operatorname{grad} f$ que cumple $\langle \operatorname{grad} f, X\rangle = Xf$ para todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Con respecto de un marco ortonormal, el gradiente está dado por:

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} \langle \operatorname{grad} f, E_i\rangle E_i = \sum_{i=1}^{n} E_i(f) E_i.$$

Dado un campo X en M, definimos su *divergencia* como

$$\operatorname{div} X = -\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle; \tag{1.1}$$

donde E_i es un marco ortonormal, como antes.

El siguiente lema relaciona da una relación entre la divergencia y el gradiente y será utilizado más adelante para probar propiedades del laplaciano.

Lema 1. *Para toda $f \in C^\infty(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene la siguiente igualdad:*

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X - \langle \operatorname{grad} f, X \rangle. \tag{1.2}$$

Demostración. Calculamos $\operatorname{div}(fX)$ usando un marco ortonormal E_i:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(fX) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(fX), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle E_i(f)X + f\nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \operatorname{grad} f, \langle X, E_i \rangle E_i \rangle - f \operatorname{div} X \\ &= \langle \operatorname{grad} f, X \rangle - f \operatorname{div} X. \quad \square \end{aligned}$$

Demos paso ahora a definir al laplaciano.

Definición 1. *Sea M una variedad riemanniana. Definimos al* laplaciano *de M como el operador $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ dado por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$

Podemos calcular al laplaciano utilizando un marco ortonormal y las expresiones para la divergencia y el gradiente:

$$\begin{aligned} -\Delta f &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\operatorname{grad} f), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{E_i} \left(\sum_{j=1}^{n} E_j(f) E_j \right), E_i \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle E_i(E_j(f))E_j + E_j(f)\nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(f)). \end{aligned}$$

Ahora definiremos el operador hessiano.

Definición 2. *Sea $f \in C^\infty(M)$. Definimos el* hessiano *de f como el operador bilineal (simétrico)* $\operatorname{Hess} f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *dado por*

$$\operatorname{Hess} f(X,Y) = \langle \nabla_X \operatorname{grad} f, Y \rangle.$$

Denotamos por $|\operatorname{Hess} f|$ a la norma del hessiano, dada por

$$|\operatorname{Hess} f|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \operatorname{Hess}^2(E_i, E_j) = \sum_{i=1}^{n} |\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f|^2,$$

donde $\{E_i\}$ es un marco ortonormal en M.

Observemos que:

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{graf} f) = -\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_i \rangle = -\operatorname{Traza}(\operatorname{Hess} f).$$

Lema 2 (Fórmula de Bochner-Lichnerowicz)**.** *Para toda $f \in C^\infty(M)$ se tiene que:*

$$-\frac{1}{2}\Delta(|\operatorname{grad} f|^2) = |\operatorname{Hess} f|^2 - |\Delta f|^2 + \operatorname{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)$$

donde Ric *denota la curvatura de Ricci de M.*

Demostración. Dado un punto p en M, elegimos un marco ortonormal $\{E_i\}$ tal que $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$. El laplaciano en p está dado por

$$\begin{aligned} -\Delta(|\operatorname{grad} f|^2) &= \sum_i E_i(E_i(|\operatorname{grad} f|^2)) \\ &= 2\sum_i E_i \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle \\ &= 2\sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle + 2\sum_i \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f \rangle. \end{aligned}$$

Es decir,

$$-\frac{1}{2}\Delta(|\operatorname{grad} f|^2) = \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle + |\operatorname{Hess} f|^2. \tag{1.3}$$

Como $\{E_i\}$ es ortonormal,

$$\langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle = \sum_j \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_j \rangle \langle \operatorname{grad} f, E_j \rangle. \tag{1.4}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_j\rangle &= E_i\langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_j\rangle - \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, \nabla_{E_i} E_j\rangle \\
&= E_i\langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_j\rangle \\
&= E_i(\operatorname{Hess} f(E_i, E_j) \\
&= E_i(\operatorname{Hess} f(E_j, E_i) \\
&= \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j} \operatorname{grad} f, E_i\rangle
\end{aligned}$$

debido a la simetría del hessiano.

Usamos el tensor de curvatura R en la forma

$$R(E_j, E_i) \operatorname{grad} f = \nabla_{E_i}\nabla_{E_j} \operatorname{grad} f - \nabla_{E_j}\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f - \nabla_{[E_j,E_i]} \operatorname{grad} f.$$

para obtener

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\rangle = \sum_{i,j} &\langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_i\rangle\langle \operatorname{grad} f, E_j\rangle \\
&+ \sum_{j,i} \langle R(E_j, E_i) \operatorname{grad} f, E_i\rangle\langle \operatorname{grad} f, E_j\rangle. \quad (1.5)
\end{aligned}$$

El primer término del lado derecho de esta ecuación se escribe

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_i\rangle\langle \operatorname{grad} f, E_j\rangle &= \sum_j E_j\left(\sum_i \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_i\rangle\right)\langle \operatorname{grad} f, E_j\rangle \\
&= -\sum_j E_j(\Delta f)\langle \operatorname{grad} f, E_j\rangle \\
&= -\langle \operatorname{grad} (\Delta f), \operatorname{grad} f\rangle \\
&= -|\Delta f|^2. \quad (1.6)
\end{aligned}$$

El segundo término de (1.5) es igual a

$$\sum_i \langle R(\operatorname{grad} f, E_i) \operatorname{grad} f, E_i\rangle = \operatorname{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f). \quad (1.7)$$

De (1.5), (1.6) y (1.7), se tiene que

$$\sum_i \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\rangle = -|\Delta f|^2 + \operatorname{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f).$$

Por este hecho y por (1.3), obtenemos que

$$-\frac{1}{2}\Delta\left(|\operatorname{grad} f|^2\right) = |\operatorname{Hess} f|^2 - |\Delta f|^2 + \operatorname{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)$$

que era lo que había que mostrar. □

1.2. Propiedades básicas del laplaciano

En esta sección se probarán algunas propiedades del laplaciano, visto como un operador en $C_0^\infty(M)$. En el siguiente capítulo podremos probar estas mismas propiedades sólo que las funciones en cuestión estarán en otros espacios que contienen a $C_0^\infty(M)$.

Una de las razones por las que comenzaremos trabajando en $C_0^\infty(M)$ es que necesitamos condiciones suficientes para *integrar* ciertas funciones. En adelante supondremos que M tiene una orientación dada por una forma de volumen ν y que la integración de una función se realiza con respecto de dicha forma de volumen.

Proposición 1. *Si M es una variedad orientada sin frontera, entonces $\forall f, g \in C_0^\infty(M)$ tenemos que:*

$$\int_M f \cdot \Delta g \, d\nu = \int_M \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle \, d\nu. \tag{1.8}$$

Demostración. Por la igualdad (1.2) se tiene que:

$$f \cdot \Delta g = f \cdot \operatorname{div} \operatorname{grad} g = \operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle$$

entonces,

$$\int_M f \cdot \Delta g \, d\nu - \int_M \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle \, d\nu = \int_M \operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) \, d\nu = \int_{\partial M} f \operatorname{grad} g.$$

La última igualdad se da usando teorema de Stokes y la penúltima usando la igualdad (1.1). Como $\partial M = \emptyset$, la última expresión es igual a cero y obtenemos el resultado. □

En $C_0^\infty(M)$ definimos el producto $\langle \ , \ \rangle$ como:

$$\langle f, g \rangle = \int f \cdot g \, d\nu.$$

Se puede mostrar que éste es un producto escalar; es decir, una transformación bilineal, simétrica y positivo-definida. Diremos que un operador lineal L en $C_0^\infty(M)$ es *simétrico* con respecto de este producto escalar si y sólo si

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle$$

para cualesquiera $f, g \in C_0^\infty(M)$.

Veamos ahora que el laplaciano es un operador simétrico:

Proposición 2. *El laplaciano* $\Delta : C_0^\infty(M) \to C_0^\infty(M)$ *cumple con que*

$$\langle \Delta f, g \rangle = \langle f, \Delta g \rangle \tag{1.9}$$

para cualesquiera $f, g \in C_0^\infty(M)$.

Demostración. Dadas f, g en $C_0^\infty(M)$, se tiene que

$$\langle \Delta f, g \rangle = \int_M \Delta f \cdot g \, d\nu = \int_M \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle \, d\nu = \int_M f \cdot \Delta g \, d\nu = \langle f, \Delta g \rangle,$$

con lo que se cumple el resultado. $\square$

Diremos que un operador lineal L en $C_0^\infty(M)$ es *positivo* si y sólo si $\langle Lf, f \rangle \geq 0$ para cualesquiera $f \in C_0^\infty(M)$.

Proposición 3. *El laplaciano es un operador positivo en* $C_0^\infty(M)$.

Demostración. Sea $f \in C^\infty(M)$, tenemos que

$$\langle \Delta f, f \rangle = \int_M \Delta f \cdot f \, d\nu = \int_M \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle \, d\nu \geq 0. \qquad \square$$

Capítulo 2

El operador laplaciano

En este capítulo estudiaremos al laplaciano como operador en un espacio adecuado, mostrando que el conjunto de vectores propios del laplaciano forma una base ortonormal. Esta información nos será útil más adelante para probar teoremas con cierta información geométrica de la variedad.

En la segunda parte del capítulo acotaremos a los eigenvalores del laplaciano. Se demostrará los teoremas de Barta y de Rayleigh que serán utilizados en demostraciones posteriores.

Al final de este capítulo se calcularán explícitamente los eigenvalores de la esfera. Específicamente, éstos están dados por $\lambda_k = (n + k - 1)$ para la esfera de dimensión n y donde λ_k denota el k-ésimo eigenvalor.

2.1. Diagonalización del laplaciano

Nuestro objetivo en esta sección es estudiar el conjunto de vectores propios del laplaciano. Para esto, aplicaremos el teorema espectral (ver teorema 2), para el cual deberemos trabajar en un espacio de Hilbert que contenga a las funciones C^∞. (Recordemos que un espacio de Hilbert es un espacio vectorial con un producto escalar y que es completo bajo la distancia definida por dicho producto escalar.) Introduciremos entonces al espacio L^2 y a los espacios de Sobolev:

Definición 3. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Definimos a $L^2(\Omega)$ como el conjunto de todas las clases de equivalencia de funciones medibles $f : \Omega \to \mathbb{R}$ donde $|f|^2$ es integrable sobre Ω. Para $f, g \in L^2(\Omega)$ definimos su producto escalar* *como*

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega fg$$

y dada $f \in L^2(\Omega)$ definimos la norma 2 *de f como*

$$||f||_2 = \left(\int_\Omega |f|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se sabe que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar definido arriba; es decir, es un espacio vectorial completo con respecto de la norma $\|\ \|_2$.

A continuación definimos el espacio de Sobolev que usaremos en este trabajo.

Definición 4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. El* espacio de Sobolev *$W^{1,2}(\Omega)$ es el espacio de todas las funciones $u \in L^2(\Omega)$ cuya primera derivada débil pertenece a $L^2(\Omega)$; es decir, para toda $i = 1, \dots n$ existe una función $g_i \in L^2(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i\phi \tag{2.1}$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. A la función g_i se le llama derivada débil *de u con respecto a x_i y se denota $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.*

Precisamente nosotros lo que necesitamos es que nuestras funciones estén en $L^2(\Omega)$, por lo que trabajaremos en $W^{1,2}(\Omega)$. Definimos también al espacio $W_0^{1,2}(\Omega)$ como el conjunto de funciones en $W^{1,2}(\Omega)$ con cerradura compacta.

Definimos el producto escalar entre dos funciones $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ como

$$\langle u, v\rangle_{W^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Este producto induce una norma en $W^{1,2}(\Omega)$. Denotamos por $H^{1,2}(\Omega)$ a la cerradura de $C^\infty(\Omega)\cap W^{1,2}(\Omega)$, mientras que $H_0^{1,2}(\Omega)$ denota la cerradura de $C_0^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$, ambas con respecto de esta norma.

Un resultado importante es el siguiente. Para la demostración, ver [9], página 161.

Teorema 1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Entonces $W^{1,2}(\Omega)$ es completo con respecto de la norma $\|\ \|_{W^{1,2}}$ y por tanto es un espacio de Hilbert. Además, $H^{1,2}(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$; en otras palabras, el espacio de las funciones en $C^\infty(\Omega)\cap W^{1,2}(\Omega)$ es denso en $W^{1,2}(\Omega)$. Análogamente, $H_0^{1,2}(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.*

La importancia que tiene este teorema para nuestro trabajo es que de esta forma podemos extender la definición del laplaciano de manera única a $H_0^{1,2}(\Omega)$. Sin embargo, debemos notar que existen funciones en $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ que no poseen derivadas segundas, por lo que podemos pensar que el operador Δ actúa derivando débilmente.

Por otro lado, podemos conservar las propiedades de este operador, mostradas en el capítulo 1 para las funciones en $C_0^\infty(\Omega)$, pero tomando ahora funciones en $H_0^{1,2}(\Omega)$. Las resumimos en el siguiente resultado:

Proposición 4. *El laplaciano* $\Delta : H_0^{1,2}(\Omega) \to H_0^{1,2}(\Omega)$ *es un operador simétrico y positivo.*

Nuestra siguiente herramienta será el teorema espectral. Recordemos que un operador lineal es *compacto* si la imagen de cualquier conjunto acotado es relativamente compacta y que esta propiedad implica la continuidad del operador.

Teorema 2 (Espectral)**.** *Sea H un espacio de Hilbert separable, y supongamos que $L : H \to H$ es un operador compacto y simétrico, entonces existe una base numerable ortonormal de H que consiste en los eigenvectores de L.*

Para la demostración de este teorema en el caso general, ver [11]. Aquí usaremos una consecuencia de este teorema en un caso particular, fijándonos en el laplaciano visto como operador en $H_0^{1,2}(\Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Corolario 1. *El laplaciano*

$$\Delta : H_0^{1,2}(\Omega) \to H_0^{1,2}(\Omega)$$

es diagonalizable en una base ortonormal de $L^2(\Omega)$.

Idea de la demostración. Primero se muestra que existe un número γ tal que el operador $\Delta + \gamma I$ es biyectivo. La parte complicada consiste en mostrar que $(\Delta + \gamma I)^{-1}$ es un operador compacto. Esto depende de dos hechos:

- *Desigualdad de Poincaré* ([9], página 166): Para toda $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ se tiene que
$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^2(\Omega)},$$
donde C es una constante que depende de Ω y de la dimensión n. En particular, la norma $W^{1,2}$ de u estará acotada por la norma L^2 de Du. Podemos aplicar dos veces esta desigualdad para obtener una cota de la norma $W^{1,2}$ de u en términos de $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$. En nuestro caso, esto nos dará una cota de $\|(\Delta + \gamma I)^{-1}u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ en términos de $\|u\|_{L^2(\Omega)}$.

- *Teorema de compacidad de Rellich* ([9], página 168): Cualquier sucesión en $H_0^{1,2}(\Omega)$ acotada con respecto de la norma $W^{1,2}(\Omega)$ contiene una subsucesión convergente en $L^2(\Omega)$. Usamos este teorema para ver que la imagen de una sucesión $\{u_k\}$ acotada en $H_0^{1,2}$ tiene una subsucesión $\{u_{k_m}\}$ convergente en L^2 y por tanto $(\Delta + \gamma I)^{-1}(u_{k_m})$ es convergente en $H_0^{1,2}$.

Puesto que $(\Delta + \gamma I)^{-1}$ es simétrico, podemos concluir por el teorema espectral que $(\Delta+\gamma I)^{-1}$ es diagonalizable en una base ortonormal de $L^2(\Omega)$.

Ahora, si λ es un valor propio de $(\Delta + \gamma I)^{-1}$ y u una función propia asociada a λ, entonces $(\Delta+\gamma I)^{-1}u = \lambda u$ si y sólo si $\frac{1}{\lambda}u = (\Delta+\gamma I)^{-1}u$, si y sólo si $\Delta u = (\frac{1}{\lambda} - \gamma)u$, por lo tanto u es una función propia para $(\Delta+\gamma I)^{-1}$ si y sólo si es una función propia para Δ, por lo que Δ es diagonalizable en una base ortonormal de $L^2(\Omega)$. □

Cerramos esta sección con una observación importante: Podemos extender el estudio anterior al caso de las variedades, definiendo los espacios correspondientes $L^2(M)$, $W^{1,2}(M)$, $W_0^{1,2}(M)$, $H^{1,2}(M)$ y $H_0^{1,2}(M)$. Podemos entonces enunciar un resultado completamente análogo al del Corolario 1, como sigue:

Proposición 5. *Dada M una variedad riemanniana compacta, conexa, sin frontera y orientada, el laplaciano $\Delta : H_0^{1,2}(M) \to H_0^{1,2}(M)$ es diagonalizable en una base ortonormal de $L^2(M)$.*

Demostración. Consideramos primero el caso en que M admite un atlas $\{(U_1, h_1), \ldots, (U_n, h_n)\}$ con $h_i : U_i \to B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ para toda $i \in \{1, \ldots n\}$.

Usaremos una partición de la unidad $p_1, \ldots, p_n$; es decir:

1. $p_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ es una función C^∞ con soporte compacto para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$;
2. $p_i \geq 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$;
3. $\sum_i p_i(x) = 1$ para toda $p \in M$.

Definimos Δ_i en $(\mathbb{R}^n, g_i)$ con g_i una métrica riemanniana tal que coincide con la métrica euclidiana en $B_2(0)^c$ y en $B_1(0)$ la definimos de la siguiente manera:

Dado $x \in B_1(0)$ y $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\langle v, w \rangle_x = \langle (d_x h_i^{-1})v, (d_x h_i^{-1})w \rangle_{h_i^{-1}(x)}$$

Observemos que las transformaciones $d_p h_i : T_pM \to \mathbb{R}^n$ resultan ser isometrías para toda $p \in U_i$.

Sabemos que $\Delta_i + \gamma I : H_0^{2,2}(\mathbb{R}^n) \to H_0^{0,2}(\mathbb{R}^n)$ es biyectiva $\forall\, \gamma \geq \gamma_i$. Sea $\overline{\gamma} = \text{máx}\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, entonces para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $\Delta_i + \gamma I : H_0^{2,2}(\mathbb{R}^n) \to H_0^{0,2}(\mathbb{R}^n)$ es biyectivo para toda $\gamma \geq \overline{\gamma}$. Tomamos $\gamma \geq \overline{\gamma}$ y $v \in H_0^{0,2}(M)$ y definimos

$$v_i := p_i v \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$
$$\widehat{v}_i(z) := \begin{cases} (p_i v \circ h_i^{-1})(z) & z \in B_1(0) \\ 0 & z \in B_1(0)^c \end{cases}$$

Así, $v_i \in H_0^{0,2}(\mathbb{R}^n)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Luego, para cada i, existe $\widehat{u}_i \in H_0^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(\Delta_i + \gamma I)\widehat{u}_i = \widehat{v}_i$$

Para cada i, existe $V_i \subset M$ abierto, tal que $\overline{U}_i \subset V_i$. Consideremos $\widetilde{h}_i : V_i \to B_2(0)$ una extensión de h de manera que $\widetilde{h}_i \in H_0^{2,2}(M)$ y sea biyectiva. Definimos entonces

$$u_i : M \to \mathbb{R}$$

como

$$u_i(x) = \begin{cases} (\widehat{u}_i \circ \widetilde{h}_i(x) & x \in V_i \\ 0 & x \in V_i^c \end{cases}$$

donde $u_i \in H_0^{2,2}(V_i)$.

Ahora, como $\widehat{u}_i = 0$ en $B_1(0)$ (pues $\widehat{v}_i = 0$ en $B_1(0)$), se tiene que $u_i|U_i^c = 0$. Entonces, si consideramos la restricción $u_i|U_i$, tenemos que $u_i|U_i \in H_0^{2,2}(U_i)$ valiendo 0 en $V_i|U_i$.

Como u_i es cero en $(V_i)^c$, $u_i \in H_0^{2,2}(M)$ y está dado por:

$$u_i(x) = \begin{cases} (x \circ h_i)(x) & x \in U_i \\ 0 & x \in (U_i)^c \end{cases}$$

Tenemos entonces que para cada $i \in U_i$,

$$\gamma\widehat{u}_i + \Delta_i\widehat{u}_i = \widehat{v}_i \Longleftrightarrow \gamma\widehat{u}_i \circ h_i + \Delta_i\widehat{u}_i \circ h_i = \widehat{v}_i \circ h_i,$$
$$\Longleftrightarrow \gamma u_i + \Delta_i\widehat{u}_i \circ h_i = v_i.$$

Como h_i es una isometría, tenemos que

$$\Delta u_i = \Delta(\widehat{u}_i \circ h_i) = \Delta_i\widehat{u}_i \circ h_i$$

Por lo tanto, en U_i, $(\gamma I + \Delta)u_i = v_i$.

Si definimos $u : M \to \mathbb{R}$ como

$$u := \sum_{i=1}^{n} u_i,$$

Enotnces $u \in H_0^{2,2}(M)$ y

$$\begin{aligned}(\gamma I + \Delta)_u = \gamma u + \Delta u &= \gamma \sum_{i}^{n} u_i + \Delta \sum_{i}^{n} i_i \\ &= \sum_{i}^{n} \gamma u_i + \Delta u_i = \sum_{1}^{n} v_i = \sum_{1}^{n} p_i v = v\end{aligned}$$

Por lo que el operador $\Delta + \gamma I : H_0^{2,2}(M) \to H_0^{0,2}(M)$ es suprayectivo. Como $\Delta : H_0^{2,2}(M) \to H_0^{0,2}(M)$ es positivo, tenemos que

$$||(\Delta + \gamma I)u||^2 = ||\Delta u||^2 + 2\gamma\langle \Delta u, u\rangle + |\gamma|^2||u||^2 \geq |\gamma|^2||u||^2$$

y el operador $\Delta + \gamma I : H_0^{2,2}(M) \to H_0^{0,2}(M)$ es inyectivo, por lo tanto existe $\overline{\gamma} \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta + \gamma I : H_0^{2,2}(M) \to H_0^{0,2}(M)$ es biyectivo para toda $\gamma \geq \overline{\gamma}$.

Ahora, queremos ver que el operador $\Delta + \gamma I : H_0^{2,2}(M) \to H_0^{0,2}(M)$ es continuo. Para esto, tenemos que

$$\begin{aligned}||(\Delta + \gamma I)u||^2 &= ||\sum_{i=1}^{n}(\Delta + \gamma I)u_i||^2 \leq \sum_{i=1}^{n} ||(\Delta + \gamma I)u_i||^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} ||(\Delta + \gamma I)(\widehat{u}_i \circ h_i)||^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i ||u_i||^2 \\ &\leq (\max \alpha_i) \sum_{i=1}^{n} ||u_i||^2 \leq \max \alpha_i ||u||^2,\end{aligned}$$

donde las α_i se obtienen como sigue:

$$\begin{aligned}||(\Delta + \gamma I)||^2 = ||(\Delta_g + \gamma I)(\widehat{u} \circ h_i)||^2 &= ||\Delta_i \widehat{u}_i + \gamma u_i||^2 \\ &||\Delta_i \widehat{u}_i + \gamma \widehat{u}_i - \gamma \widehat{u}_i + \gamma u_i||^2 \\ &\leq ||(\Delta_i + \gamma I)\widehat{u}_i||^2 + |\gamma|^2||\widehat{u}_i||^2 + |\gamma \\ &\leq (k_i + |\gamma|^2)||\widehat{u}_i||^2 + |\gamma|^2||u_i||^2 \\ &\leq (k + |\gamma|^2)||u_i||^2||h_i^{-1}||^2 + |\gamma|^2||u_i||^2 \\ &\leq \{[(k + |\gamma|^2)||h_i^{-1}||^2] + |\gamma|^2\}||u_i||^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Delta + \gamma I$ es continuo.

Sabemos que la inclusión $i : H_0^{k,2}(\mathbb{R}^n) \to H_0^{0,2}(\mathbb{R}^n)$ es compacta para toda $k \in \mathbb{N}$. Lo mismo vale para $i : H_0^{k,2}(M) \to H_0^{0,2}(M)$ pues como M es compacta, entonces las funciones $H_0^{s,2}(M)$ tienen soporte contenido on la bola con centro en $0 \in \mathbb{R}$ y radio $R = \text{diám}(M)$. Como $(\Delta + \gamma I)^{-1} : H_0^{0,2}(M) \to H_0^{2,2}(M)$ es continuo por el teorema de la aplicación abierta y consideramos $(\Delta + \gamma I)^{-1} : H_0^{0,2}(M) \to H_0^{0,2}(M)$ como

$$H_0^{0,2}(M) \xrightarrow{(\Delta+\gamma I)^{-1}} H_0^{2,2}(M) \xrightarrow{i} H_0^{0,2}(M)$$

entonces $(\Delta + \gamma I)^{-1}$ es compacto por ser composición de un continuo con un compacto, por lo tanto $(\Delta + \gamma I)^{-1} : H_0^{0,2}(M) \to H_0^{0,2}(M)$ es compacto.

Además, como $C^\infty(M)$ es denso en $H_0^{0,2}(M)$, $D = (\Delta + \gamma I)(C^\infty(M))$ es denso en $H_0^{0,2}(M)$. Tomemos u_0, v_0 en D, entonces existe $u, v \in C^\infty(M)$ tal que

$$u_0 = (\Delta + \gamma I)u \qquad y \qquad v_0(\Delta + \gamma I)v.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta + \gamma I)^{-1} u_0, v_0 \rangle &= \langle u, (\Delta + \gamma I)v \rangle = \langle \sum_i u^i, (\Delta + \gamma i)(\sum_j v^j) \rangle \\
&= \langle \sum_i u^i, \sum_j (\Delta + \gamma I)v^j \rangle = \langle \sum_i u^i, \sum_j ((\Delta + \gamma I)v)^j \rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle u^i, ((\Delta + \gamma I)v)^j \rangle = \sum \langle u^i, ((\Delta + \gamma I)v)^i \rangle.
\end{aligned}$$

Nota 1.

$$\begin{aligned}
\langle u^i, ((\Delta + \gamma I)v)^i \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} u^i(x)((\Delta + \gamma I)v)^i(x)\, dx \\
&= \int_M \widehat{u}_i(h_i(x))((\Delta + \gamma I)\widehat{v}(h_i(x)))^i \, d\omega_g(x) \\
&= \int_M \widehat{u}_i(h_i(x))((\Delta_i + \gamma I)\widehat{v})^i(h_i(x))\, d\omega(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}^i(x)((\Delta + \gamma I)\widehat{v})^i(x)\, dx = \langle \widehat{i}^i, ((\Delta_i + \gamma I)\widehat{v})^i \rangle.
\end{aligned}$$

Una cuenta análoga muestra que

$$\langle (((\Delta + \gamma I)u)^i, v^i \rangle = \langle (((\Delta_i + \gamma I)\widehat{u})^i, \widehat{v}^i \rangle.$$

Sabemos por el teorema 1 que $(\Delta_i + \gamma I)^{-1}$ es simétrico, por lo que

$$\begin{aligned}\langle(\Delta + \gamma I)^{-1}u_0^i, v_0^i\rangle &= \langle u^i, (\Delta + \gamma I)v^i\rangle \\ &= \langle((\Delta + \gamma I)u)^i, v^i\rangle \\ &= \langle u_0^i, (\Delta + \gamma I)^{-1}v_0^i\rangle,\end{aligned}$$

Por lo tanto $\langle(\Delta + \gamma I)^{-1}u_0, v_0\rangle = \langle u_0, (\Delta + \gamma I)^{-1}v_0\rangle$, lo cual quiere decir que $(\Delta + \gamma I)^{-1}|_D$ es simétrico, por lo que $(\Delta + \gamma I) : H_0^{0,2}(M) \to H_0^{0,2}(M)$ también lo es; por lo tanto, Δ es diagonalizable en una base ortonormal de $H_0^{0,2}(M)$, es decir, existe una base ortonormal de $L^2(M)$ formada por funciones propias de Δ. $\square$

2.2. Eigenvalores del laplaciano

En esta parte del trabajo vamos a ver qué propiedades importantes tienen los eigenvalores del laplaciano. Esta parte nos dará herramientas necesarias para demostrar teoremas que ya son geométricos pero donde el primer valor propio en particular es fundamental para desarrollar el resto del trabajo.

Definición 5. *Llamamos el* espectro *de la variedad riemanniana M al conjunto de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que existe $f \in C^\infty(M)$, $f \neq 0$ que cumple con que $\Delta f = \lambda f$.*

Así, el espectro de una variedad es el espectro de su operador laplaciano. De hecho, tenemos la siguiente información precisa sobre la distribución de los valores propios:

Proposición 6. *El espectro de una variedad riemanniana M es discreto; de hecho, los valores propios se pueden enlistar como una sucesión creciente*

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

que tiende a infinito.

Como el laplaciano es un operador positivo, todos sus valores propios son no negativos. Por otro lado, si suponemos que la sucesión de valores propios $\{\lambda_k\}$ no tiende a infinito, obtendríamos una sucesión de funciones propias $\{u_k\}$ de norma uno tales que

$$\|\operatorname{grad} u_k\| = \int_M \langle \operatorname{grad} u_k, \operatorname{grad} u_k\rangle = \int_M u_k \cdot \Delta u_k = \lambda_k,$$

lo que quiere decir que la sucesión $\{\operatorname{grad} u_k\}$ está acotada. Por el teorema de Rellich (ver [9], página 226) existe una subsucesión de $\{u_k\}$ que es convergente, lo cual no puede ocurrir porque las funciones propias siempre son mutuamente ortogonales.

Sea M compacta y conexa, $\partial M \neq \emptyset$. El *problema de eigenvalores de Dirichlet* consiste en encontrar todos los números reales λ para los cuales existe una función no trivial φ tal que $\Delta\varphi = \lambda\varphi$ y $\varphi = 0$ en ∂M.

Nos interesa encontrar un procedimiento para determinar los valores propios. Un resultado muy útil para obtener el primer eigenvalor en el problema de Dirichlet es el siguiente resultado de Barta, que acota el valor buscado:

Teorema 3 (Barta)**.** *Sea $\Omega \subset M$ un conjunto abierto, conexo, con cerradura compacta y frontera suave. Sea $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\partial\Omega)$ con $f > 0$ en Ω y $f|\partial\Omega = 0$. Si $\lambda_1(\Omega)$ es el primer eigenvalor de Dirichlet de Ω, entonces*

$$\sup_{\Omega}\left(\frac{\Delta f}{f}\right) \geq \lambda_1(\Omega) \geq \inf_{\Omega}\left(\frac{\Delta f}{f}\right).$$

Demostración. Sea φ_1 la primera eigenfunción, es decir, $\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$ y $\varphi_1 = 0$ en ∂M. Podemos asumir que φ_1 es positiva dentro de M. Ahora, escribimos $\varphi_1 = f + h$ con $h = 0$ en ∂M, entonces

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\Delta\varphi_1}{\varphi_1} = \frac{\Delta(f+h)}{f+h} = \frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta(f+h)}{f+h} - \frac{\Delta f}{f} \\ &= \frac{\Delta f}{f} + \frac{f\Delta h - h\Delta f}{f(f+h)}. \end{aligned}$$

El segundo término de la igualdad cambia de signo o se anula en M porque $f(f+h)$ es positivo dentro de M y $\int_\Omega (f\Delta h - h\Delta f) = 0$ por el teorema de Stokes. Como λ_1 es una constante, se tiene que $\inf\left(\frac{\Delta f}{f}\right) \leq \lambda_1 \leq \left(\frac{\Delta f}{f}\right)$ que es lo que se quería. $\square$

Proposición 7. *Sea $\Omega \subset M$ abierto, conexo y con cerradura compacta. El primer valor propio del laplaciano Δ está dado por:*

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)} \frac{\int \langle \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\varphi\rangle}{\int \varphi^2}.$$

Demostración. Sea

$$\alpha_i = \int \langle \varphi, u_i \rangle$$

la proyección de φ sobre la i-ésima función propia u_i. Puesto que podemos suponer que la base de funciones propias es ortonormal, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int |\operatorname{grad}\varphi - \sum_i \alpha_i \cdot \operatorname{grad} u_i|^2 \\
&= \int \langle \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\varphi\rangle - 2\sum_i \alpha_i \cdot \int \langle \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad} u_i\rangle + \sum_i \alpha_i^2 \cdot \int \langle \operatorname{grad} u_i, \operatorname{grad} u_i\rangle \\
&= \int (\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\varphi) - 2\sum_i \alpha_i \cdot \int \langle \varphi, \Delta u_i\rangle + \sum_i \alpha_i^2 \cdot \int \langle u_i, \Delta u_i\rangle \\
&= \int \langle \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\varphi\rangle - 2\sum_i \alpha_i \lambda_i \alpha_i + \sum_i \alpha_i^2 \lambda_i \\
&= \int \langle \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\varphi\rangle - \sum_i \alpha_i^2 \lambda_i
\end{aligned}$$

De donde

$$\int \langle \operatorname{grad}\ \varphi, \operatorname{grad}\ \varphi\rangle \geq \sum_i \lambda_i \alpha_i^2 \geq \lambda_1 \left(\sum_{i\neq 0} \alpha_i^2\right) = \lambda_1 \cdot \int \varphi^2;$$

la última igualdad se debe a que $\{u_i\}$ es una base ortonormal para $L^2(\Omega)$.

Además, como $\int \langle \operatorname{grad} u_1, \operatorname{grad} u_1\rangle = \int \langle u_1, \Delta u_1\rangle = \lambda_1$, se tiene la igualdad deseada, i.e.,

$$\lambda_1 = \inf_{\varphi} \frac{\int \langle \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\varphi\rangle}{\int \varphi^2}. \qquad \square$$

El siguiente teorema establece una cota superior para el k-ésimo eigenvalor del laplaciano. Para la prueba utilizaremos la expresión de una función $f \in L^2(M)$ dada por

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, u_i\rangle u_i.$$

en términos de una base ortonormal. Una consecuencia de esta identidad es que

$$||f||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, u_i\rangle^2.$$

Teorema 4 (Rayleigh)**.** *Sea $\Omega \subset M$ abierto, conexo y con cerradura compacta. Dado el problema de eigenvalores de Dirichlet en Ω, si $\{u_i\}$ es una* *base ortonormal de $L^2(M)$ tal que u_i es una función propia correspondiente al valor propio λ_i, entonces*

$$\lambda_k = \operatorname*{ínf}_{\varphi} \frac{\int \langle \operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \varphi \rangle}{\int \varphi^2},$$

donde el ínfimo se calcula sobre las funciones $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)$, $\varphi \neq 0$, tales que $\langle \varphi, u_i \rangle = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, k$. La igualdad se da si y sólo si φ es una función propia de λ_k.

Demostración. Fijemos un valor de k y denotemos $\alpha_i = \langle \varphi, u_i \rangle$, por lo que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$. Entonces, para cada entero $r \geq k$ se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\langle \operatorname{grad} \left(\varphi - \sum_{i=k}^{r} \alpha_i u_i \right), \operatorname{grad} \left(\varphi - \sum_{i=k}^{r} \alpha_i u_i \right) \right\rangle \\
&= \langle \operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \varphi \rangle - 2 \sum_{i=k}^{r} \alpha_i \langle \operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} u_i \rangle + \sum_{i,l=k}^{r} \alpha_i \alpha_l \langle \operatorname{grad} u_i, \operatorname{grad} u_l \rangle \\
&= \langle \operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \varphi \rangle + 2 \sum_{i=k}^{r} \alpha_i \langle \varphi, \Delta u_i \rangle - \sum_{i,l=k}^{r} \alpha_i \alpha_l \langle u_i, \Delta u_l \rangle \\
&= \langle \operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \varphi \rangle - \sum_{i=k}^{r} \lambda_i \alpha_i^2,
\end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{i=k}^{\infty} \lambda_i \alpha_i^2 \leq \langle \operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \varphi \rangle < +\infty.$$

Se obtiene que

$$\lambda_k ||\varphi||^2 = \lambda_k \sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i^2 \leq \sum_{i=k}^{\infty} \lambda_i \alpha_i^2 \leq \langle \operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \varphi \rangle.$$

Si φ es una función propia correspondiente al k-ésimo valor propio entonces

$$\langle \operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \varphi \rangle = \langle \Delta \varphi, \varphi \rangle = \langle \lambda_k \varphi, \varphi \rangle = \lambda_k ||\varphi||^2. \qquad \square$$

2.3. Eigenvalores de la esfera

Esta sección está dedicada a calcular los valores propios del laplaciano de la esfera. Denotaremos por $\mathfrak{H}_k$ al espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado k armónicos sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ La restricción a $\mathbb{S}^n$ de $\mathfrak{H}_k$ será $\widetilde{\mathfrak{H}_k}$. El espacio de todos los polinomios homogéneos de grado k sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ será denotado como $\mathfrak{P}_k$. Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, escribiremos $\widetilde{f}$ la restricción de f a $\mathbb{S}^n$.

Proposición 8. *El espectro del laplaciano de la esfera de dimensián n, $\mathbb{S}^n$, es el conjunto de $\lambda_k = k(n+k-1), k \geq 0$, y el subespacio propio asociado a λ_k es $\widetilde{\mathfrak{H}_k}$.*

Demostración. Primero veremos que el conjunto de valores propios está dado por $\lambda_k = k(n+k-1), k \geq 0$,. Para eso, demostremos que se vale la siguiente igualdad:

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} f\ |_{\mathbb{S}^n} = \Delta_{\mathbb{S}^n} f\ |_{\mathbb{S}^n} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\ |_{\mathbb{S}^n} - n\frac{\partial f}{\partial r}\ |_{\mathbb{S}^n}\ . \tag{2.2}$$

Para todo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y donde $\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}, \Delta_{\mathbb{S}^n}$ denotan el laplaciano en las variedades riemannianas indicadas.

Demostración. Sea p un punto de $\mathbb{S}^n$. Este punto determina un vector unitario ξ sobre $\mathbb{R}^{n+1}$. Ahora, consideremos vectores ξ_i, $i = 2, \ldots, n+1$ de tal forma que se obtenga una base ortonormal $\{\xi, \xi_i\}_{i=2,\ldots n+1}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ y por lo tanto una base ortonormal $\{\xi_i\}$ de T_pN.

La geodésica γ_i, determinada sobre $\mathbb{S}^n$ por ξ_i está dada por:

$$\gamma_i : \alpha \to \cos\alpha\xi + \operatorname{sen}\alpha\xi_i \qquad i = 2\ldots n+1,$$

donde ξ y ξ_i son considerados puntos de $\mathbb{R}^{n+1}$ y por lo tanto $\gamma_i(\alpha)$ se considera también como un punto de $\mathbb{S}^n$.

Ahora, la función f tiene derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial \xi^i}$ $\quad i = 1, \ldots n+1$ correspondientes a la base de $\mathbb{R}^{n+1}\{\xi = \xi_1, \xi_i\}_{i=2,\ldots,n+1}$.

Por otra parte, la derivada con respecto a α de $f \circ \gamma_i$ está dada por:

$$\frac{\partial(f \circ \gamma_i)}{\partial \alpha} = -\operatorname{sen}\alpha\frac{\partial f}{\partial \xi} + \cos\alpha\frac{\partial f}{\partial \xi_i}.$$

Además, en el punto $p_0 = \gamma_i(0)$

$$\frac{d^2(f \circ \gamma_i)}{d\alpha^2}(0) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(p_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i^2}(p_0).$$

Al calcular el laplaciano en la esfera se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{S}^n} f\ |_{\mathbb{S}^n} &= \sum_{i=2}^{n+1} \frac{d^2}{d\alpha^2}(f \circ \gamma_i)(0) \\ &= \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i^2}(p_0) + p_0\frac{\partial f}{\partial \xi}(p_0); \end{aligned}$$

mientras que al calcular el laplaciano en $\mathbb{R}^{n+1}$, se tiene que:

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} f\mid_{\mathbb{S}^n}(p_0) = -\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i^2}(p_0) = -\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i^2}(p_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2}(p_0),$$

de donde

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} f\mid_{\mathbb{S}^n}(p_0) = \Delta_{\mathbb{S}^n} f\mid_{\mathbb{S}^n}(p_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2}(p_0) - p_0 \frac{\partial f}{\partial \xi_1}(p_0).$$

Observación. Si P es un polinomio homogéneo armónico en $\mathbb{R}^{n+1}$, de grado k, se sigue que:

$$0 = \Delta_{\mathbb{S}^n} P\mid_{\mathbb{S}^n} - k(k-1)P\mid_{\mathbb{S}^n} - nkP\mid_{\mathbb{S}^n};$$

es decir,

$$\Delta_{\mathbb{S}^n} P\mid_{\mathbb{S}^n} = k(k+n-1)P\mid_{\mathbb{S}^n}\ .$$

O dicho de otra forma, $P\mid_{\mathbb{S}^n}$ es una función propia para el laplaciano de la esfera con valor propio $\lambda_k = k(k+n-1)$. □

Para terminar la demostración se necesitan dos lemas:

Lema 3. *Sea M una variedad riemanniana y supongamos que existen W_i con $i \in \mathbb{N}$ subespacios vectoriales de $C^\infty(M)$ tales que se cumple lo siguiente:*

1. *Para todo i, existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tal que para toda $\varphi \in W_i$, se tiene que $\Delta\varphi = \lambda_i \varphi$;*
2. *La suma de los W_i es densa en $C^\infty(M)$.*

Entonces el espectro de M es el conjunto de λ_i y para todo i, $W_i = \Lambda_i$ donde Λ_i denota el subespacio propio relativo a λ_i.

Lema 4. *Se tiene para todo $k \geq 0$ que*

$$\mathfrak{P}_{2k} = \mathfrak{H}_{2k} \oplus r^2 \mathfrak{H}_{2k-2} \oplus \cdots \oplus r^{2k} \mathfrak{H}_0,$$
$$\mathfrak{P}_{2k+1} = \mathfrak{H}_{2k+1} \oplus r^2 \mathfrak{H}_{2k-1} \oplus \cdots \oplus r^{2k} \mathfrak{H}_1$$

Y los subespacios de estas descomposiciones son ortogonales por pares.

Demostración. Observemos que el lema es válido para $\mathfrak{P}_0$ y $\mathfrak{P}_1$ ya que $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{H}_0$ está formado de constantes y $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{H}_1$ está formado de funciones lineales.

Basta probar que si para $k \geq 0$ se tiene la descomposición $\mathfrak{P}_k = \mathfrak{H}_k \oplus r^2\mathfrak{P}_{k-2}$, entonces para $k+2$ se tiene que

$$\mathfrak{P}_{k+2} = \mathfrak{H}_{k+2} \oplus r^2\mathfrak{P}_k$$

Observemos que $\mathfrak{H}_{k+2} + r^2\mathfrak{P}_k \subset \mathfrak{P}_{k+2}$ y para ver la ortogonalidad basta ver que $\widetilde{\mathfrak{H}}_{k+2}$ y $\widetilde{\mathfrak{P}}_k$ son ortogonales en $C^\infty(M)$. Ahora bien, $\widetilde{\mathfrak{H}}_{k+2}$ está contenido en el subespacio propio de $\mathbb{S}^n$ relativo al valor propio $(k+2)(n+k+1)$, mientras que $\widetilde{\mathfrak{P}}_k$ está contenido en la suma de los subespacios propios correspondientes a valores propios distintos de $(k+2)(n+k+1)$.

Como los espacios propios son ortogonales por pares, $\widetilde{\mathfrak{P}}_k$ y $\widetilde{\mathfrak{H}}_{k+2}$ son ortogonales.

Ahora resta probar que si P es un elemento de $\mathfrak{H}_k$, entonces P es armónico, es decir, $\Delta P = 0$. Sabemos que ΔP está en $\mathfrak{P}_k$, entonces, por inducción, ΔP es cero si y sólo si es ortogonal a todos los $r^{2l}\mathfrak{H}_{k-2l}$ con $0 \leq 2l \leq k$, es decir, si y sólo si ΔP es ortogonal a todos los $\widetilde{\mathfrak{H}}_{k-2l}$.

Para $P \in \mathfrak{P}_{k+2}$ y $H \in \mathfrak{H}_{k-2l}$, se tiene que

$$\Delta \widetilde{PH} = \Delta \widetilde{P} \cdot \widetilde{H} + 2d\widetilde{P} \cdot d\widetilde{H} + \widetilde{P} \cdot \Delta \widetilde{H}$$

De donde

$$0 = \int_{\mathbb{S}^n} \Delta \widetilde{PH} = \int_{\mathbb{S}^n} \Delta \widetilde{P} \cdot \widetilde{H} + 2\int_{\mathbb{S}^n} d\widetilde{P} \cdot d\widetilde{H} + \int_{\mathbb{S}^n} \widetilde{P} \cdot \Delta \widetilde{H}$$

Y se tiene además que $\Delta \widetilde{H} = (k-2l-1)\widetilde{H}$, por lo que el tercer término del lado derecho de la ecuación vale $(k-2l)(n+k-2l-1)\int_{\mathbb{S}^n} \widetilde{P}\widetilde{H}$ que es igual a cero si suponemos $\widetilde{P}$ ortogonal a $\widetilde{\mathfrak{P}_k}$.

Se tiene entonces que

$$\int_{\mathbb{S}^n} \Delta \widetilde{P} \cdot \widetilde{H} + 2\int_{\mathbb{S}^n} d\widetilde{P} d\widetilde{H} = 0.$$

Por una parte, se tiene que

$$\Delta \widetilde{P} = \widetilde{\Delta P} + \widetilde{\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}} + n\widetilde{\frac{\partial P}{\partial r}} = \widetilde{\Delta P} + (k+2)(n+k+1)\widetilde{P}$$

De donde

$$\int_{\mathbb{S}^n} \Delta \widetilde{P} \cdot \widetilde{H} = \int_{\mathbb{S}^n} \widetilde{\Delta P}\widetilde{H} + (k+2)(n+k+1)\int_{\mathbb{S}^n} \widetilde{P}\widetilde{H} = \int_{\mathbb{S}^n} \widetilde{\Delta P}\widetilde{H}$$

Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{S}^n} \widetilde{\Delta P} \widetilde{H} = -2 \int_{\mathbb{S}^n} d\widetilde{P} \cdot d\widetilde{H} = -2 \int_{\mathbb{S}^n} \widetilde{P} \Delta \widetilde{H}$$

Y se sigue que

$$\int_{\mathbb{S}^n} \widetilde{\Delta P} \widetilde{H} = -2(k-2l)(n+k-2l-1) \int_{\mathbb{S}^n} \widetilde{P} \widetilde{H} = 0$$

Entonces ΔP es ortogonal a $\mathfrak{P}_k$ para toda k, por lo tanto es igual a cero. $\square$

De este lema se concluye el final de la demostración ya que, por el teorema de Stone-Weierstrass, $\widetilde{\oplus_{k\geq 0}\mathfrak{P}_k}$ es denso en $C^\infty(\mathbb{S}^n)$ en el sentido de la convergencia en L_2, y por otra parte, para todo k, $\widetilde{\mathfrak{P}_k}$ es suma de $\widetilde{\mathfrak{H}_l}$ para ciertos $l \leq k$. Entonces la suma de los $\widetilde{\mathfrak{H}_l}, l \geq 0$ es igual a $\widetilde{\oplus_{k\geq 0}\mathfrak{P}_k}$, por lo tanto es densa en $C^\infty(\mathbb{S}^n)$ y por el lema 3 se tiene que es subespacio propio asociado a λ_k es $\widetilde{\mathfrak{H}_k}$. $\square$

Capítulo 3

Geometría y eigenvalores del laplaciano

El segundo capítulo está dedicado al estudio de los eigenvalores del laplaciano, (siempre que nos referiramos a los eigenvalores o eigenfunciones se sobreentenderá que nos referimos al laplaciano) pero de una forma más geométrica, por ejemplo, se dan cotas para el m-ésimo eigenvalor de una variedad que ya cumple ciertas características geométricas, por ejemplo, si su curvatura es positiva, si es compacta. Con base en el valor del m-ésimo valor propio en una bola en un espacio simplemente conexo de curvatura constante, tendremos información sobre el m-ésimo eigenvalor de una bola en una variedad que tiene una curvatura que se relaciona con el espacio de curvatura constante correspondiente. Estos teoremas resultan muy útiles pues facilitan el trabajo de encontrar eigenvalores debido a que podemos encerrar a los espacios simplemente conexos de curvatura constante en tres grupos.

3.1. El laplaciano y el diámetro de una variedad

En esta primera sección demostraremos dos teoremas importantes: el de *Cheeger* y el de *Mazet*. Ambos teoremas acotan superiormente el primer eigenvalor, y este número se relaciona con el diámetro de la variedad (y su dimensión). El primero es válido para variedades con curvatura positiva, el segundo para variedades con curvatura negativa. La importancia que tienen estos teoremas es que muestran una relación entre el análisis y la geometría.

El siguiente teorema acota inferiormente el primer valor propio del laplaciano y lo relaciona con la dimensión de la variedad y en cierta forma, con la curvatura.

Teorema 5. ***Lichnerowicz*** *Sea M una variedad riemanniana compacta de dimensión n. Si $k > 0$ es un número tal que $\rho \geq k$ donde ρ denota la curvatura de Ricci, entonces*

$$\lambda_1(M) \geq \frac{n}{n-1}k.$$

Demostración. Sabemos que por la fórmula de Bochner-Lichnerowicz que $-\frac{1}{2}\triangle(|\mathrm{grad}\, f|^2) = |Hessf|^2 - \langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, \triangle f\rangle + \mathrm{Ric}(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f)$. Ahora, si f es función propia de $\triangle$ asociada al valor propio λ, podemos reescribir la igualdad anterior como sigue:

$$-\frac{1}{2}\triangle(|\mathrm{grad}\, f|^2) = |Hessf|^2 - \lambda\langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f\rangle + \mathrm{Ric}(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f),$$

e integrando sobre M, se tiene que

$$0 = ||\mathrm{Hess} f||^2 - \lambda||\mathrm{grad}\, f||^2 + \int \mathrm{Ric}(\mathrm{grad}\, f \cdot \mathrm{grad}\, f).$$

Como $\rho \geq k$, entonces

$$0 \geq ||\mathrm{Hess} f||^2 - \lambda||\mathrm{grad}\, f||^2 + k||\mathrm{grad}\, f||^2.$$

Además, siendo f función propia, tenemos las siguientes igualdades:

$$||\triangle f||^2 = \int \triangle f \cdot \triangle f = \int \lambda f \cdot \triangle f = \lambda||\mathrm{grad}\, f||^2$$

Por lo que

$$0 \geq ||\mathrm{Hess} f||^2 - ||\triangle f||^2 + \frac{k}{\lambda}||\triangle f||^2.$$

Como $\triangle f = -$traza $(\mathrm{Hess} f)$, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, tenemos que $|\mathrm{Hess} f|^2 \geq \frac{1}{n}(\triangle f)^2$, por lo tanto

$$||\mathrm{Hess} f||^2 \geq \frac{1}{n}||\triangle f||^2,$$

factorizando obtenemos que

$$
\begin{aligned}
0 &\geq \left(\frac{1}{n} - 1 + \frac{k}{\lambda}\right) ||\triangle f||^2 \\
\iff 0 &\geq \frac{1}{n} - 1 + \frac{k}{\lambda} \\
\iff 1 &\geq \frac{1}{n} + \frac{k}{\lambda} = \frac{\lambda + nk}{n\lambda} \\
\iff n\lambda &\geq \lambda + nk \\
\iff \lambda(n-1) &\geq nk
\end{aligned}
$$

De donde, si $||\triangle f||^2$ no se anula, es decir, si λ es diferente de cero,

$$\lambda \geq k\frac{n}{n-1}$$

En particular

$$\lambda_1 \geq k\frac{n}{n-1}. \qquad \square$$

Para demostrar los teoremas de Cheeger y Mazet, haremos uso de dos lemas; estos teoremas, como se dijo anteriormente, relacionan al primer valor propio del laplaciano con el diámetro de la variedad cuando la curvatura seccional es positiva y negativa respectivamente.

Lema 5. *Sea γ una geodésica parametrizada por longitud de arco en una variedad de curvatura no negativa. Supóngase que no hay puntos conjugados en el intervalo $[0, l)$. Entonces, si $J(t)$ es un campo de Jacobi tal que $J(0) = 0$, se tiene que:*

$$i) \quad \frac{||J(t)||}{t} \quad \textit{es decreciente}, \qquad ii) \quad \frac{||J(t)||}{l-t} \quad \textit{es creciente}.$$

Demostración. $ii)$ Para una s fija en $(0, l)$, construimos $x(t) = \frac{J(t)}{||J(s)||}$. Sea $v(t)$ el campo vectorial obtenido por el transporte paralelo de $x(s)$ a lo largo de γ. Sea w definido como sigue:

$$w = \begin{cases} x & \text{en } [0, s] \\ \frac{l-t}{l-s} \cdot v & \text{en } [s, d] \end{cases}$$

Y como no hay puntos conjugados en $[0, l)$, tenemos que

$$0 \leq 2I(w, w) = 2\left(\int_0^1 \langle w', w' \rangle - K(t)\langle w, w \rangle\right)$$

Por lo tanto

$$2\int_0^s \langle x', x'\rangle - K(t)\langle x, x\rangle + 2\int_{l-s}^{l} \frac{l}{(l-s)^2} - \frac{K(t)(l-t)^2}{(l-s)^2} \geq 0$$

Como $K(t) \geq 0$, $2\int_0^s \langle x', x'\rangle + 2\int_{l-s}^{l} \frac{l}{(l-s)^2} \geq 0$. La primera integral es igual a $\frac{\langle J(s), J(s)\rangle'}{\langle J(s), J(s)\rangle}$ ya que

$$\int_0^1 \langle x', x'\rangle = \int_0^1 \langle x', x'\rangle - \langle x'', x\rangle = \langle x', x\rangle$$

De dónde

$$2\int_0^1 \langle x', x'\rangle = 2\langle x', x\rangle = 2\langle \frac{J'(t)}{||J(s)||}, \frac{J(t)}{||J(s)||}\rangle = 2\frac{\langle J'(t), J(t)\rangle}{||J(s)||^2}$$

Por otra parte,

$$2\int_{l-s}^{l} \frac{l}{(l-s)^2} = \frac{2}{l-s}$$

Entonces

$$\frac{\langle J(s), J(s)\rangle'}{\langle J(s), J(s)\rangle} + \frac{2}{l-s} \geq 0$$

Es decir,

$$\frac{d}{ds}\log\left(\frac{\langle J(s), J(s)\rangle}{(l-s)^2}\right) \geq 0$$

lo que implica que $\log\left(\frac{\langle J(s), J(s)\rangle}{(l-s)^2}\right)$ es creciente, y como el logaritmo es una función creciente, se tiene que $\frac{||J(s)||}{l-s}$ es creciente. □

El siguiente lema es la versión del lema 5 cuando la curvatura secciónal es negativa:

Lema 6. *Si $\gamma(t)$ es una geodésica de longitud l parametrizada por longitud de arco en una variedad con curvatura negativa, y si $J(t)$ es un campo de Jacobi tal que $J(0) = 0$, entonces:*

$$\frac{|J(t)|}{\sinh bt} \qquad y \qquad \frac{|J(t)|}{\sinh b(l-t)}$$

donde $\sigma \geq -b^2$ es la curvatura seccional de una variedad riemanniana compacta, son respectivamente creciente y decreciente en $(0, l)$.

La demostración de este lema es análoga a la demostración del lema anterior. Con estos lemas, estamos listos para demostrar los teoremas más importantes de esta sección que nos muestran que a través del laplaciano podemos obtener cierta información geométrica.

Teorema 6. ***Cheeger*** *Sea M una variedad riemanniana de dimensión n, compacta de curvatura no negativa. Sea λ el primer valor propio del laplaciano. Sea $d(M)$ el diámetro de M, entonces*

$$4\sqrt{e^3(n+2)^3}\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \geq d(M).$$

Demostración. Fijemos un punto $m \in M$, y sea ρ_m la función que le asigna a cada punto de M, su distancia al punto m,con $m \in M$ un punto fijo. Sea V el volumen de M, construimos $\overline{\rho}_m$ como:

$$\overline{\rho}_m = \frac{1}{V}\int_M \rho_m \, dA.$$

$\rho_m - \overline{\rho}_m$ es suave excepto en m y en el lugar de corte con respecto a m. Por otra parte, existe una sucesión de funciones f_n que son C^∞ tales que:

1. $f_n \to \rho_m - \overline{\rho}_m$ uniformemente
2. $\int_M f_n = 0$
3. $\mathrm{grad} f_n \to \mathrm{grad}(\rho_m - \overline{\rho}_m)$ casi donde sea.

Para cada f_n se tiene que

$$\frac{\int_M ||\mathrm{grad} f_n||^2 \, dA}{\int_M f_n^2 \, dA} \geq \lambda$$

y como $||\mathrm{grad}(\rho_m - \overline{\rho}_m)|| = 1$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\int_M ||\mathrm{grad} f_n||^2 \, dA}{\int_M f_n^2 \, dA} &= \frac{\int_M 1 \, dA}{\int_M (\rho_m - \overline{\rho}_m)^2 \, dA} = \frac{V}{\int_M (\rho_m - \overline{\rho}_m)^2 \, dA} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{V}\int_M (\rho_m - \overline{\rho}_m)^2 \, dA} \geq \lambda\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{V}\int_M (\rho_m - \overline{\rho}_m)^2 \, dA.$$

Sea γ una geodésica parametrizada por longitud de arco de M, tal que no hay puntos conjugados en $[0, l)$ y $J(t)$ un campo de Jacobi con $J(0) = 0$.

Sea $\{J_1(t), \ldots, J_n(t)\}$ una base ortonormal de $T_m M$ con $J_i(t)$ $= T\exp_{m(tx)}(x)$. Llamemos $n = \exp_m(tx)$

Sea $\theta^{-1}(tx) = |T^{-1}\exp_m(n)(J_1(t) \wedge \cdots \wedge T^{-1}\exp_m(n)(J_n(t))|$, entonces $\theta(t_0 x) = \frac{t^{n-1}}{t_0^{n-1}}|J_2(t_0) \wedge \cdots \wedge J_n(t_0)|\theta(tx)$. De donde se tiene que

$$t_0^{n-1}\theta(t_0 x) \geq ||J_2(t_0)||\,||J_3(t_0)|| \ldots ||J_n(t_0)||\theta(tx)t^{n-1}. \tag{3.1}$$

Sea t_0 el valor máximo de $\theta(t_0 x)t_0^{n-1}$. Por las proposiciones demostradas, se tiene que

- $\frac{1}{t} = \frac{||J_i(t_0)||}{t} \geq \frac{||J_i(t_0)||}{t_0}$ si $t \in (0, t_0]$
- $\frac{1}{l(x)-t} = \frac{||J_i(t)||}{l(x)-t} \geq \frac{||J_i(t_0)||}{l(x)-t_0}$ si $t \in [t_0, l(x)]$.

Emtonces

$$\begin{cases} \theta(tx)t^{n-1} \geq (\frac{1}{t_0})^{n-1}t_0^{n-1}\theta(t_0x) & \text{si}\, t \in (0, t_0] \\ \theta(tx)t^{n-1} \geq (\frac{l(x)-t}{l(x)-t_0})^{n-1}\theta(t_0x)t_0^{n-1} & \text{si}\, t \in [t_0, l(x)] \end{cases}$$

Y por la ecuación 3.1, en el intervalo $[(1-\alpha)t_0, (1-\alpha)t_0 + \alpha l]$

$$\frac{N_\gamma(t)}{N_\gamma(t_0)} = \frac{\prod_{i=1}^n ||J_i(t)||}{\prod_{i=1}^n ||J_i(t_0)||} \leq \frac{t_0^{n-1}}{t^{n-1}} = \frac{1}{(1-\alpha)^{n-1}}.$$

A lo largo de la geodésica γ, $\rho_m - \overline{\rho}_m$ puede ser considerada como función afín de pendiente 1, del segmento $(0, l(x)]$ en $\mathbb{R}$.

Sea $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1/2)$. Construimos segmentos I', I'' en $[0, l(x)]$ de la misma longitud, es decir, de longitud $\alpha\beta l(x)$ tales que sobre uno de los segmentos, $\rho_m - \overline{\rho}_m$ está acotada superiormente por un número que sólo depende de α, β o $l(x)$. Sea A, B, C, D los puntos $(1-\alpha)t_0, (1-\alpha)t_0 + \alpha\beta l, (1-\alpha)t_0 + \alpha(1-\beta)l, (1-\alpha)t_0 + \alpha l$ respectivamente.

Sea $I' = [A, B]$, $\quad I'' = [C, D]$. Si I es el punto medio de $[BC]$, entonces

$$IB = \frac{\alpha(1-2\beta)l}{2} = IC.$$

donde IB e IC denotan longitudes, por lo tanto, sobre I' o I'' se tiene la desigualdad

$$|\rho_m - \overline{\rho}_m|^2 \geq [\frac{\alpha(1-2\beta)}{2}]^2 l^2.$$

Dados dos puntos m y m' con $d(m,m') = d(M) = 2\delta$, M puede ser considerada como la unión disjunta de los tres subconjuntos siguientes:

$$A^+ = \{n \in M | d(m,n) < d(m',n)\}$$
$$A^0 = \{n \in M | d(m,n) = d(m',n)\}$$
$$A^- = \{n \in M | d(m,n) > d(m',n)\}$$

Supongamos ahora que existen dos puentos p y p' en A^0, con $d(p',m) > d(p,m)$. Se tiene que $d(m,p') = d(m,p) + d(p,p')$ de donde $d(m',p') = d(m',p) + d(p,p')$ ya que p y $p' \in A^0$. Entonces o $p = p'$ o $m' \in \gamma$ está entre p y p'. La primera opción es imposible por hipótesis, por lo que $d(m, \exp_m(l(x)xc)) > d(m,m') = d(M)$. Por lo tanto sobre γ hay a lo más un punto que pertenezca a A^0. Se concluye que A^0 tiene medida cero.

De las igualdades se sigue que V es la suma de A^+ y A^-. Supongamos que $V_{A^-} \geq \frac{V}{2}$.

Nota 2. *Sea* $c(x) = exp_m(l(x)x)$, *el punto de corte de* m *en dirección de* $x \in S^{n-1}$. *Si* $c(x) \in A^-$, *entonces* $2\delta = d(m,m') \leq d(m,c(x)) + d(c(x),m') < 2\delta(m,c(x)) = 2l(x)$, *por lo tanto* $l(X) > \delta$ *ya que* $c(x) \in A^-$.

Ahora,

$$\int_M g^2 \, dA = \int (g \circ \exp_m)^2 \exp_m(v_g) = \int_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} (\int_{alpha}^{l(x)} g^2 \theta(tx) t^{n-1} \, dt) \, d\sigma$$

con $g = \rho_m - \overline{\rho}_m$.

Para cada x, existe $t'(x)$ y $t''(x)$ tal que en $[t'(x), t''(x)], g^2$ está acotada superiormente por $[\frac{\alpha(1-2\beta)}{2} l]$, entonces

$$\int g^2 \, dA \geq \int_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} (\int_{t'(x)}^{t''(x)} \frac{\alpha^2(1-2\beta)^2}{4} l^2 \theta(tx) t^{n-1} \, dt) \, d\sigma$$

Al mismo tiempo, $\frac{\theta(tx)t^{n-1}}{\theta(t_0 x)t_0^{n-1}} \geq (1-\alpha)^{n-1}$, pro lo tanto

$$\int g^2 \, dA \geq \int_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} (\int_{t'(x)}^{t''(x)} \frac{\alpha^2(1-2\beta)^2}{4} l^2 \theta(t_0 x) t_0^{n-1} \, dt) \, d\sigma$$

Denotamos por $\mathbb{S}^{n-1}(A^-)$ los $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ tales que $c(x) \in A^-$.

$$\int g^2 \, dA \geq \int_{x \in \mathbb{S}^{n-1}(A^-)} (\int_{t'(x)}^{t''(x)} \frac{\alpha^2(1-2\beta)^2}{4} l^2 \theta(t_0 x) t_0^{n-1} \, dt) \, d\sigma$$

Y como $l(x) > \delta$ para $s \in \mathbb{S}^{n-1}(A^-)$, entonces

$$\begin{aligned}
\int g^2\, dA &> (1-\alpha)^{n-1}\frac{\alpha^2(1-2\beta)^2}{4}\delta^2 \int_{x\in\mathbb{S}^{n-1}(A^-)} (\int_{t'}^{t''} \theta(t_0x)t_0^{n-1}\, dt)\, d\sigma \\
&= (1-\alpha)^{n-1}\frac{\alpha^2(1-2\beta)^2}{4}\delta^2 \int_{x\in\mathbb{S}^{n-1}(A^-)} t''(x) - t'(x)[\theta(tx)t_0^{n-1}]\, d\sigma \\
&= \alpha\beta(1-\alpha)^{n-1}\frac{\alpha^2(1-2\beta)^2}{4}\delta^2 \int_{x\in\mathbb{S}^{n-1}(A^-)} \theta(t_0x)t_0^{n-1}l(x)\, d\sigma \\
&\geq 2k(\alpha,\beta,n)\delta^2 \int_{x\in\mathbb{S}^{n-1}(A^-)} (\int_{\delta}^{l} \theta(t_0x)t_0^{n-1}\, dt)\, d\sigma \\
&\geq 2k(\alpha,\beta,n)\delta^2 \int_{x\in\mathbb{S}^{n-1}(A^-)} (\int_{\delta}^{l} \theta(t_x)t^{n-1}\, dt)\, d\sigma
\end{aligned}$$

Si $\exp_m(t,x) \in A^-\ t < \delta$, entonces

$$\int_{x\in\mathbb{S}^{n-1}(A^-)} (\int_{\delta}^{l} \theta(t_x)t^{n-1}\, dt)\, d\sigma \geq V_{A^-}.$$

Por lo que

$$\int d^2\, dA > \delta^2 k(\alpha,\beta,n)V = \frac{1}{d(M)^2}k(\alpha,\beta,n)V,$$

por lo tanto

$$\frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{d(M)^2}k(\alpha,\beta,n)$$

el número $k(\alpha,\beta,n)$ depende de α y β, entonces, si tomamos $\alpha = \frac{3}{n+2}$ y $\beta = \frac{1}{6}$, tenemos que

$$\frac{4(n+2)^{(n+2)/2}}{(n-1)^{(n-1)/2}}\sqrt{1/\lambda} \geq d(M),$$

además, como $(1+3/(n-1))^{n-1} < e^3$, se sigue el teorema. □

Ahora vamos a establecer una cota superior para λ_1 en función del diámetro $d(M)$ y donde ahora la curvatura seccional de la variedad es $\sigma \geq -b^2$ donde $b \in \mathbb{R}^+$.

Teorema 7. ***Mazet*** *Sea M una variedad riemanniana compacta de dimensión n. Sea λ_1 el primer valor propio del laplaciano y $d(M)$ el diámetro de*

M, y supongamos que la curvatura seccional σ satisface que $\sigma \geq -b^2$ con $b \in \mathbb{R}^+$, entonces se tiene la siguiente cota para λ_1 :

$$\lambda_1 \leq \frac{432a^{n-1}}{\left(1 - \frac{1}{bd(M)} sen\, h^{-1}\left(\frac{1}{a} sen\, hbd(M)\right)\right)^3} \frac{1}{d(M)^2} \qquad \forall \quad a > 1$$

Demostración. Sea $H_1(M)$ el espacio de funciones de Sobolev sobre M y sea F el hiperplano cerrado de $H_1(M)$ formado de funciones f_n tales que $\int_M f_n = 0$ en M, entonces se tiene que

$$\lambda_1 = min_{f \in F} \frac{\int_M |\text{grad}\, f|^2\, v_g}{\int_M |f|^2\, v_g}$$

donde v_g es la medida del volumen correspondiente a la métrica. Ahora, sea m un punto fijo en M, escogemos a f una función definida como:

$$f(p) = d(m,p) - \int_M d(m,p)\, v_g(p)$$

Entonces $|\text{grad}\, f| = 1$ casi donde sea, por lo tanto $\int_M |\text{grad}\, f|^2\, vg = V$ donde V denota el volumen de M, de donde se tiene que

$$\lambda_1 \leq \frac{V}{\int_M |f|^2\, v_g}$$

Por lo que sólo resta acotar la integral del denominador.

Por Fubini, se tiene que

$$\int_M |f(p)|^2\, v_g(p) = \int_{\mathbb{S}^n} dx \int_0^{l(x)} f^2\left(\exp tx\right) N\left(t,x\right) dt$$

Donde dx es la medida canónica en la esfera unitaria $\mathbb{S}^n$, $l(x)$ el lugar de corte de la geodésica partiendo de x y $N(t,x)$ la densidad de v_g en coordenadas polares geodésicas.

Si t_0 (que depende de x) es tal que $N(t_0,x)$ es máximo, por el lema 6 y por la misma razón que en el teorema de Cheeger, se tiene que:

$$N\left(t,x\right) \geq N(t_0,x)\left(\frac{\text{sen h}bt}{\text{sen h}bt_0}\right)^{n-1} \qquad \text{si}\, t \in (0, t_0]$$
$$N(t,x) \geq N\left(t_0,x\right)\left(\frac{\text{sen h}b\left(l-t\right)}{\text{sen h}b\left(l-t_0\right)}\right)^{n-1} \qquad \text{si}\, t \in [t_0, l)$$

Ahora, sea t_1 el número en $(0,t_0)$ tal que $\frac{\sin \mathrm{h} bt_1}{\sin \mathrm{h} bt_0} = \frac{1}{a}$, y t_2 en (t_0,l) tal que $\frac{\sin \mathrm{h} b(l-t_2)}{\sin \mathrm{h} b(l-t_0)} = \frac{1}{a}$ con $a > 1$. Tenemos entonces que

$$t_2 - t_1 = l - \frac{1}{b}\mathrm{sen\,h}^{-1}\left(\alpha \mathrm{sen\,h} b(l-t_0)\right) - \frac{1}{b}\mathrm{sen\,h}^{-1}\left(\alpha \mathrm{sen\,h} bt_0\right)$$

Donde denotamos por α a $\frac{1}{a}$ por lo que $\alpha \in (0,1)$

Sea $\varphi(\xi) = \left(\frac{1}{\xi}\right)\mathrm{sen\,h}^{-1}\left(\alpha \mathrm{sen\,h} b\xi\right)$, esta función es creciente (va de α a 1) en $(o,+\infty)$.

Si $\psi(x) = \frac{1}{b}\mathrm{sen\,h}^{-1}\left(\alpha \mathrm{sen\,h} bx\right)$ entonces

$$\frac{d}{dt_0}\left(t_2 - t_1\right) = \psi'\left(l - t_0\right) - \psi'(t_0)$$

Y como ψ' es creciente, $t_2 - t_1$ tiene un máximo en $t_0 = 1/2$ y mínimo en $t_0 = 0$ y $t_0 = 1$, y sustituyendo con $t_0 = 0$ tenemos que

$$\left(t_2 - t_1\right)_{\text{mín}} = l - \frac{1}{b}\mathrm{sen\,h}^{-1}\left(\alpha \mathrm{sen,h} bl\right) = l\left(1 - \varphi(bl)\right)$$

Del hecho de que φ es creciente y $l \leq d(M)$ podemos acotar $t_2 - t_1$ como

$$t_2 - t_1 \geq l\left(1 - \varphi(bd(M))\right)$$

Como en la prueba del teorema de Cheeger, elegimos un punto m de tal forma que existe un punto m' tal que $d(m,m') = d(M)$, y sean A^+ (respectivamente A^-) el conjunto de puntos más cercanos a m que a m' (respectivamente más cercanos a m' que a m). Supongamos que el volumen de A^- denotado por $V^- \geq V$, y llamamos $(\mathbb{S}^n)^-$ al conjunto de $x \in \mathbb{S}^n$ cuyo punto de corte está en A^-. Para tales x, $l(x) > \frac{d(M)}{2} = \delta$.

Consideremos los siguientes intervalos:

$$I' = \left[t_1, t_1 + \beta l\left(1 - \varphi(bd(M))\right)\right] \qquad y \qquad I'' = \left[t_2 - \beta l\left(1 - \varphi(bd(M))\right), t_2\right]$$

Donde $\beta < 1/2$ es un número fijo. Al igual que en la prueba de Cheeger, f es una recta de pendiente 1 en $[t_1,t_2]$, y la distancia entre I' e I'' está acotada por $(1-2\beta)l(1-\varphi(bd(M)))$ por lo que $f^2 \geq [(1-2\beta)^2/4](1-\varphi(bd(M)))^2 l^2$ al menos en uno de los intervalos I' o I''. Entonces pordemos acotar la integral como

$$\int_M f^2(p)\, v_g(p) \geq \int_{(\mathbb{S}^n)^-} dx \int_{I' o I''} \frac{\alpha^{n-1}(1-2\beta)^2}{4}\left(1 - \varphi(bd(M))\right)^2 l^2 N(t_0,x)\, dt$$

Y como $l \geq \delta$ para $x \in (\mathbb{S}^n)^-$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_M f^2(p)\, v_g(p) &\geq \frac{\alpha^{n-1}(1-2\beta)^2}{16}\,(1-\varphi(bd(M)))^2\, d(M)^2 \int_{(\mathbb{S}^n)^-} dx \int_{I'oI''} N(t,x)\, dt \\
&= \frac{\alpha^{n-1}\,(1-2\beta)^2}{16}\,(1-\varphi(bd(M)))^3\, d(M)^2 \int_{(\mathbb{S}^n)^-} dx N(t_0,x) l(x) \\
&\geq \frac{\alpha^{n-1}\,(1-2\beta)^2}{16}\,(1-\varphi(bd(M)))^3\, d(M)^2 \int_{(\mathbb{S}^n)^-} dx \int_0^{l(x)} N(t,x)\, dt \\
&\geq \frac{\alpha^{n-1}\,(1-2\beta)^2}{32}\,(1-\varphi(bd(M)))^3\, d(M)^2 V
\end{aligned}$$

Ahora, $\beta(1-2\beta)^2$ tiene un máximo en $\beta = 1/4$ en donde vale $2/27$. Entonces

$$\int_M f^2(p)\, v_g(p) \geq \frac{\alpha^{n-1}}{432} d(M)^2 (1 - \frac{1}{bd(M)} \sinh^{-1}(\alpha \sinh bd(M)))^3 V$$

De donde

$$\lambda_1 \leq \frac{432 a^{n-1}}{1 - \frac{1}{bd(M)} \operatorname{sen\,h}^{-1}\left(\frac{1}{a} \operatorname{sen\,h} bd(M)\right)^3} \frac{1}{d(M)^2}$$

Que es lo que queríamos. □

3.2. Teoremas de comparación de eigenvalores

En esta sección se demostrarán algunos teoremas que comparan el primer valor propio del laplaciano de una bola en la variedad de dimensión n y curvatura de Ricci mayor o igual a $(n-1)k$ con una bola en el espacio simplemente conexo de curvatura constante k. Para esto, es necesario primero hacer una pequeña referencia a estas variedades.

Los ejemplos más simples de variedades riemannianas son aquellos cuya curvatura seccional K es constante. Estos espacios son llamados espacios de curvatura constanste. Vamos a mostrar para cada K todos los espacios simplemente conexos de dimensión K. Estos se pueden describir en tres grupos:

1. $K \equiv 0$. Entonces $M^n = R^n$ con la métrica usual.
2. $K > 0$. Entonces $M^n = \mathbb{S}^n_{1/\sqrt{n}}$, la esfera en $\mathbb{R}^{n+1}$, con la métrica inducida.

3. $K < 0$. Entonces M^n es el conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ definido como

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x||^2 < -4/K\}.$$

Usando las coordenadas usuales en $\mathbb{R}^n$, definimos la métrica como sigue:

$$\langle v, w \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i w_i}{1+\frac{1}{4}K\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2},$$

con $v, w \in T_xM$.

Denotaremos por $B(x_0, r_0)$ la bola geodésica con centro en x_0 y radio r_0, $V_n(k, r_0)$ la bola de radio r_0 en el espacio n-dimensional simplemente conexo de curvatura (seccional) constante k.

Teorema 8. *Sea M una variedad riemanniana de dimensión n con curvatura de Ricci $\geq (n-1)k$, entonces, para $x_0 \in M$ se tiene que*

$$\lambda_1(B(x_0, r_0)) \leq \lambda_1(V_n(k, r_0))$$

y la igualdad se da sii $B(x_0, r_0)$ y $V_n(k, r_0)$ son isométricas.

Antes de dar la demostración, mostraremos dos lemas:

Lema 7. *Sea f una función definida sobre $B(x_0, r_0)$ tal que sólo depende de la distancia al punto x_0, es decir, f es la composición de la función distancia al punto x_0 y de una función φ definida sobre $[0, r_0)$. Con esta notación, se tiene la siguiente igualdad:*

$$\triangle f = -\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{d\varphi}{dt}(\frac{\theta'}{\theta} + \frac{n-1}{t})$$

Donde $\theta = \sqrt{det(g_{ij}) \times t^{-n+1}}$, en todo punto de $B(x_0, r_0)$ menos en x_0 donde $\triangle f$ no está definido.

Demostración. Sea n un punto de $B(x_0, r_0)$, existe una geodésica única γ que une a m con n. Sea v_1 el vector tangente a γ en n. Por definición se tiene que

$$n = \gamma(t)$$
$$v_1 = \frac{d\gamma}{dr}(t)$$

Completamos con v_1 una base ortonomal en T_nM usando $v_2, v_3, \dots v_n$, vectores que determinan $n-1$ geodésicas que parten de n que denotaremos por $\gamma_2, \gamma_3 \dots \gamma_n$ Por definición de laplaciano, tenemos que

$$\triangle f(n) = -\frac{d^2}{dr^2}(f \circ \gamma)(t) - \sum_{i=2}^{n} \frac{d^2}{ds^2}(f \circ \gamma_i)(0)$$

El primer término del lado derecho es $-\frac{d^2\varphi}{dr^2}(t)$, falta calcular $\frac{d^2}{ds^2}(f \circ \gamma_i)(0)$.

Como v_i es normal a γ en n, podemos ver a los vectores como el transporte paralelo de n vectores de una familia de geodésicas que parten de m. Sea $\{\Gamma_i\}$ esa familia, con $\Gamma_1 = \gamma$. Tenemos que

$$(f \circ \gamma_i)(s) = (\mathrm{long}\Gamma_i)$$

De donde

$$\frac{d^2}{ds^2}(f \circ \gamma_i)(0) = \frac{d^2\varphi}{dr^2}(t) \times (\frac{d}{ds}(\mathrm{long}\Gamma_i)(0))^2 + \frac{d\varphi}{dr}(t)\frac{d^2}{ds^2}(\mathrm{long}\Gamma_i)(0).$$

Como v_i es normal a γ, la primera derivada $\frac{d}{ds}(\mathrm{long}\Gamma_i)(0)$ es igual a cero, ahora, por la segunda fórmula de variación, se tiene que

$$\frac{d^2}{ds^2}(\mathrm{long}\Gamma_i)(0) = (J_i(t), J_i'(t))$$

Donde J_i es el campo de Jacobi a lo largo de γ determinado por la familia de geodésicas $\{\Gamma_i\}$, con $J_i(0) = 0$ y $J_i(t) = v_i$ y donde J_i' designa la derivada covariante de J_i.

Por lo que se tiene que

$$\triangle f(n) = -\frac{d^2\varphi}{dr^2}(t) - \frac{d\varphi}{dr}(t) \times \sum_{i=2} n(J_i(t), J_i'(t))$$

Hay que calcular entonces la suma en función de θ y su derivada, pero la función θ es el determinante de la aplicación exponencial en m, por lo que $\theta^{-1}(n) = |T^{-1}(exp)(J_1) \wedge \cdots \wedge T^{-1}(exp)(J_n)|$, y además, como radialmente la exponencial es una isometría, se tiene que $\theta^{-1}(n) = |T^{-1}(exp)(J_2) \wedge \cdots \wedge T^{-1}(exp)(J_n)|$

Nos situamos ahora en en punto $p = \gamma(r)$, en este punto,

$$\theta^{-1}(p) = \frac{T^{-1}(exp)(J_2(r)) \wedge \cdots \wedge T^{-1}(exp)(J_n(r))}{|J_2(r) \wedge \cdots \wedge J_n(r)|}$$

En T_mM, el campo $T_{-1}(exp)(J_i(r))$ es paralelo a el campo de la familia de geodésicas $\{T_{-1}(exp)(\Gamma_i)\}$ que son segmentos que unen los puntos 0 y $t\dot{\gamma}(0) + \frac{s}{T^{-1}(exp)(J_i)}T^{-1}(exp)(J_i)$ por lo que se tiene la igualdad:

$$T^{-1}(exp)(J_i(r)) = \frac{r}{t}T^{-1}(exp)(J_i)$$

Por lo tanto

$$\theta^{-1}(p) = \frac{r^{n-1}}{t^{n-1}} \frac{|T^{-1}(exp)(J_2(r)) \wedge \cdots \wedge T^{-1}(exp)(J_n(r))|}{|J_2(r) \wedge \cdots \wedge J_n(r)|}$$

Entonces

$$\theta(p) = \frac{t^{n-1}}{r^{n-1}}|J_2(r) \wedge \cdots \wedge J_n(r)| \times \theta(n)$$

Y derivando

$$\frac{\partial\theta}{dr}(p) = -(n-1)\frac{t^{n-1}}{r^n}|J_2(r) \wedge \cdots \wedge J_n(r)| \times \theta(n)$$

$$+\frac{t^{n-1}}{r^{n-1}} \times \sum_{i=2}^{n}(J_i(t), J_i'(t)) \times \theta(n)$$

En el punto n obtenemos entonces

$$\frac{\partial\theta}{dr}(n) = -(n-1) \times \theta(n) + \sum_{i=2}^{n} J_i(t)J_i'(t) \times \theta(n)$$

Es decir

$$\sum_{i=2}^{n}(J_i(t), J_i'(t)) = \frac{\theta'}{\theta} + \frac{n-1}{t}$$

Con lo que se obtiene el resultado. $\square$

Lema 8. *Sea $V_n(k,r)$ sin punto de corte y φ_1 la primera eigenfunción no negativa de $V_n(k,r)$, entonces*

$$\frac{d\varphi_1}{dr} \leq 0$$

Demostración. φ_1 satisface

$$\frac{d^2\varphi_1}{dr^2} + (\frac{\theta'(k)}{\theta(k)} + \frac{n-1}{r})\frac{d\varphi_1}{dr} + \lambda\varphi_1 = 0 \tag{3.2}$$

y $\varphi_1(r) = 0 = \varphi_1'(0)$ Considerando φ_1 como una función suave definida de $[-r, r]$, φ_1 tiene un máximo local en 0. Supongamos que $(d\psi_1/dr)(t) = 0$ con $t \in (0, r]$, entonces por la ecuación de (3.2) y porque $\varphi_1 > 0$ en $(-r, r)$ sabemos que φ_1 debe tener un máximo local en t. Entonces en $[0, t]$, φ es ya sea constante, o debe tener un mínimo local. Sin embargo ninguna de esas posibilidades es posible por lo que $d\varphi_1/dt \neq 0$ en $(0, r]$ pero φ_1 es positiva en $[0, r)$ y $\varphi_1(r) = 0$, entonces es imposible que pase que $d\varphi_1/dt \geq 0$ por lo tanto $d\varphi_1/dt \leq 0$ en $[0, r]$. □

Ahora tenemos las herramientas necesarias para demostrar el teorema (8).

Demostración. Sea φ_1 la primera eigenfunción de $V_n(k, r_0)$, φ_1 es una función radial, por una parte, del teorema de Barta, se sabe que

$$\lambda_1\left(B(x_0, r_0)\right) \leq \sup\left(\frac{\triangle\varphi_1}{\varphi_1}\right)$$

Y por otra parte,

$$\triangle\phi_1 = -\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - \left(\frac{\theta'}{\theta} + \frac{n-1}{t}\right)\frac{d\varphi_1}{dt}$$

Donde $\theta = \left(\det\left(g_{ij}\right)\right)^{1/2}$. Ahora,

$$-\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - \left(\frac{\theta'(k)}{\theta(k)} + \frac{n-1}{dt}\right) = \lambda_1 x$$

donde λ_1 es el primer eigenvalor de $V(k, r_0)$ y $\theta(k)$ es calculado en el espacio de curvatura constante k, ahora, $\sup\left(\triangle\varphi_1/\varphi_1\right) \leq \lambda_1\left(V(k, r_0)\right)$ si y sólo si

$$\frac{\theta'}{\theta} \geq \frac{\theta'(k)}{\theta(k)}$$

Lo que es cierto (ver [10], p. 253) y como $d\varphi_1/dt \leq 0$ entonces

$$\lambda_1\left(B(x_0, r_0)\right) \leq \lambda_1\left(V_n(k, r_0)\right).$$ □

El siguiente teorema acota al m-ésimo valor propio (λ_m) del laplaciano de una variedad riemanniana de dimensión n en términos de la bola geodésica en el espacio de curvatura constante k de dimensión $n-1$. Cuando $m = 1$, el teorema nos da una generalización de los Teoremas de Cheeger y Mazet anteriormente demostrados.

Del capítulo anterior, sabemos que si M es una variedad Riemanniana, el problema de eigenvalores $\triangle\varphi + \lambda\varphi = 0$ tiene espectro discreto, y enlistamos los eigenvalores como $\lambda_1(M) \leq \lambda_2(M) \leq \ldots$.

El principio del mínimo de Courant nos dice que

$$\lambda_m(M) = \text{ínf}\{\frac{\int\langle \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\varphi\rangle}{\int\varphi^2} : \int_M \varphi\varphi_i = 0, 0 \leq i \leq m-1\}$$

donde $\triangle\varphi_i + \lambda_i(M)\varphi_i = 0$ para $i = 0, ..., m-1$ y φ alcanza el mínimo si y sólo si φ es suave y satisface que $\triangle\varphi + \lambda_m(M)\varphi = 0$.

Teorema 9. *Supongamos que M es una variedad riemanniana compacta con curvatura de Ricci $\geq (n-1)k$ y $d(M)$ el diámetro de M, entonces:*

$$\lambda_m(M) \leq \mu_1\left(V_n\left(k, \frac{d(M)}{2m}\right)\right)$$

con μ_1 el primer valor propio de $V_n\left(k, \frac{d(M)}{2m}\right)$.

Demostración. Encontramos $m+1$ bolas con centro en $x_i \in M$ con $i = 1, \ldots, m+1$ tales que $B\left(x_i, \frac{d(M)}{2m}\right)$ son dos a dos disjuntas. Denotamos por φ_i a $\varphi \circ r_i$ donde φ es la primera función propia de $V_n\left(k, \frac{d(M)}{2m}\right)$, ($\varphi$ es una función radial) y r_i es la función distancia al punto x_i. Sean $\psi_0, \ldots \psi_{m-1}$ las primeras m funciones características de M. Por el teorema 8, se tiene que

$$\lambda_1\left(B(x_0, r_0)\right) \leq \mu_1\left(V_n(k, r_0)\right)$$

Pero ya sabemos que

$$\lambda_1\left(B(x_0, r_0)\right) \leq \frac{\int\langle \operatorname{grad}\varphi\circ r, \operatorname{grad}\varphi\circ r\rangle}{\int(\varphi\circ r)^2}$$

Por lo que

$$\int_{B\left(x_i, \frac{d(M)}{2m}\right)} (\operatorname{grad}\varphi_i, \operatorname{grad}\varphi_i) \leq \mu_1\left(V_n\left(k, \frac{d(M)}{2m}\right)\right)\int_{B\left(x_i, \frac{d(M)}{2m}\right)} \varphi_i^2$$

Como las ψ_i forman una base ortonormal, entonces existen números $a_1, a_2, \ldots a_{m+1}$ no todos cero tales que

$$\int_M \psi_j\left(\sum_{i=1}^{m+1} a_i\varphi_i\right) = 0 \quad \text{para} j = 0, \ldots, m-1$$

Pero como $B\left(x_i, \frac{d(M)}{2m}\right)$ son dos a dos disjuntas, entonces $\sum_{i=1}^{m+1} a_i\varphi_i \neq 0$.

Entonces se tiene que

$$\int_M \left(\text{grad}\left(\sum_i a_i\varphi_i\right), \text{grad}\left(\sum_i a_i\varphi_i\right)\right) \leq \mu_1\left(V_n\left(k, \frac{d(M)}{2m}\right)\right)\int_M \left(\sum_i a_i\varphi_i\right)^2$$

Y utilizando el principio del mínimo de Courant tenemos que

$$\lambda_m(M)\int_M \left(\sum_i a_i\varphi_i\right)^2 \leq \int_M \left(\text{grad}\left(\sum_i a_i\varphi_i\right), \text{grad}\left(\sum_i a_i\varphi_i\right)\right)$$

Por lo que

$$\lambda_m(M) \leq \mu_1\left(V_n\left(k, \frac{d(M)}{2m}\right)\right). \qquad \square$$

3.3. Algunos cálculos explícitos

El objetivo de esta sección es poder aplicar la teoría que hemos venido desarrollando en este capítulo, es decir, vamos a calcular explícitamente cuánto vale el primer eigenvalor de la bola geodésica del espacio con curvatura constante k y de dimensión n. Para esto, será necesario resolver ecuaciones diferenciales por lo que se pondrá en evidencia el uso de otras herramientas matemáticas para resolver problemas geométricos.

El siguiente teorema nos da un mecanismo para encontrar las soluciones de la ecuación diferencial que queremos resolver. Para una explicación más detallada, ver (cita libro de Chavel, Eigenvalues in Riemannian Geometry).

Teorema 10. *Para cada punto $p \in V_n(k,r)$ existe un sistema de coordenadas $(t,\xi) \in [0, \frac{\pi}{\sqrt{k}}) \times \mathbb{S}^{n-1}$ (si $k \leq 0$ entonces $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ denota a $+\infty$) donde la métrica riemanniana se ve como:*

$$ds^2 = (dt)^2 + S_k^2(t)|d\xi|^2,$$

donde $S_k(t)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\psi'' + k\psi = 0$$

Satisfaciendo las condiciones iniciales

$$S_k = 0, \qquad S_k'(0) = 1.$$

Tal solución está dada por

$$S_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k}t & k > 0 \\ t & k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh \sqrt{-k}t & k < 0 \end{cases}$$

Además, la función $C_k(t)$ definida a continuación es una solución de la ecuación diferencial que satisface las condiciones iniciales:

$$C_k(0) = 1 \qquad C_k'(0) = 0$$

Es decir, la función está dada por:

$$C_k(t) = \begin{cases} \cos \sqrt{k}t & k > 0 \\ 1 & k = 0 \\ \cosh \sqrt{-k}t & k < 0 \end{cases}$$

Por lo que

$$S_k' = C_k, \qquad C_k' = -kS_k, \qquad C_k^2 + kS_k^2 = 1,$$
$$(C_k/S_k)' = (S_k'/S_k)' = -S_k^{-2}$$

Para cualquier $F : V_n(k,r) \to \mathbb{R} \in C^2$ con

$$F(q(t\xi)) = f(t\xi)$$

Donde $V_n(k,r) = \{q(t\xi) = q | 0 \leq t \leq r\}$ tenemos, calculando el laplaciano y denotando por $\Box$ al laplaciano de $\mathbb{S}^{n-1}$, que

$$\triangle F\left(q\left(t\xi\right)\right) = S_k^{1-n} \frac{\partial}{\partial t}\left(S_k^{n-1} \frac{\partial}{\partial t} f\right) + S_k^{-2} \Box_\xi f$$

Y $\Box_\xi$ se refiere a que $f|S(t)$ es una función sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ con laplaciano $\Box$. Si f es de la forma

$$f(t,\xi) = T(t)G(\xi),$$

entonces

$$\triangle F = S_k^{1-n}\left(S_k^{n-1}T'\right)' G + S_k^{-2} T \Box G,$$

donde $'$ es la parcial con respecto a t.

Ahora, si se satisface que

$$\triangle F + \lambda F = 0$$

entonces se tiene que

$$S_k^{1-n}\left(S_k^{n-1}T'\right)'G+S_k^{-2}T\Box G+\lambda TG=0$$

es decir

$$\left[S_k^{1-n}\left(S_k^{n-1}T'\right)'+\lambda T\right]G+S_k^{-2}T\Box G=0$$

por lo que

$$\left[S_k^{3-n}/T\left(S_k^{n-1}T'\right)'+\lambda S_k^2\right]G+\Box G=0.$$

Por lo tanto, existe una constante ν tal que

$$\Box G+\nu G=0$$

Por otra parte, si

$$\triangle F+\lambda F=0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{S_k^{1-n}}{S_k^{1-n}}\left(S_k^{n-1}T'\right)'G+\frac{S_k^{-2}}{S_k^{1-n}}T\Box G+\frac{\lambda}{S_k^{1-n}}TG=0\\
&\Rightarrow \left(S_k^{n-1}T'\right)'G+S_k^{n-1}S_k^{-2}T\Box G+\lambda S_k^{n-1}TG=0\\
&\Rightarrow \left(S_k^{n-1}T'\right)'G+S_k^{n-1}S_k^{-2}T(-\nu G)+\lambda S_k^{n-1}TG=0.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\left(S_k^{n-1}T'\right)'-\nu S_k^{n-1}S_k^{-2}T+\lambda S_k^{n-1}T=0$$

es decir,

$$\left(S_k^{n-1}T'\right)'+\left(\lambda-\nu S_k^{-2}\right)S_k^{n-1}T=0$$

Ahora,

$$\left(S_k^{n-1}T'\right)'=T''S_k^{n-1}+T'(n-1)S_k^{n-2}S_k'$$

$$\Rightarrow T''+T'(n-1)S_k^{-1}S_k'+\left(\lambda-\frac{\nu}{S_k^2}\right)T=0 \tag{3.3}$$

Pero por lo anterior, se tiene que (3.3) es equivalente a

$$T''+(n-1)'\left(C_k/S_k\right)T'+\left(\lambda-\left(\nu/S_k^2\right)\right)T=0 \tag{3.4}$$

En particular, se tiene que ν es un eigenvalor de $\mathbb{S}^{n-1}$ con función propia G, y como se demostró anteriormente, los eigenvalores de $\mathbb{S}^{n-1}$ están dados por

$$\nu_l=l(l+n-2),\qquad l=0,1,2,\ldots$$

Por lo que la ecuación (3.4) es equivalente a

$$T'' + (n-1)\frac{C_k}{S_k}T' + \left(\lambda - \frac{l(l+n-2)}{S_k^2}\right)T = 0$$

Ahora sí, podemos aplicar las fórmulas anteriores para encontrar cuánto vale el primer valor propio del espacio de curvatura constante k, con $k > 0$, cuando el radio cumple ciertas características. Este teorema es importante pues será utilizado en la demostración de la generalización del teorema de la esfera de Toponogov.

Proposición 9. *Si $k > 0$ y $r = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$, entonces $\lambda_1(V_n(k,r)) = nk$.*

Demostración. Si $k > 0$ y $r = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ entonces $S_k = \frac{1}{\sqrt{k}}\sin\sqrt{k}t$ y $C_k = \cos\sqrt{k}t$, y las soluciones que verifican la ecuación diferencial

$$T'' + (n-1)\left(\frac{C_k}{S_k}\right)T' + \lambda T = 0$$

son $T = \cos\sqrt{k}t$ y $T' = \sqrt{k}\sin\sqrt{k}t$, por lo que, sustituyendo en la ecuación, tenemos que:

$$-k\cos\sqrt{k}t - k(n-1)\frac{\cos\sqrt{k}t}{\sin\sqrt{k}t}\sin\sqrt{k}t + \lambda\cos\sqrt{k}t = 0,$$

por lo tanto, dividiendo entre $\cos\sqrt{k}t$, obtenemos que:

$$\begin{aligned} & -k - k(n-1) = -\lambda \\ \Rightarrow \quad & \lambda = k(1+n-1) \\ \Rightarrow \quad & \lambda = kn \end{aligned}$$

□

Nuestro siguiente objetivo es dar una estimación del m-ésimo eigenvalor del laplaciano cuando la curvatura de Ricci de nuestra variedad riemanniana (de dimensión n) M es mayor o igual a cero, es decir, siguiendo la notación de la sección anterior, cuando $k = 0$. Para esto usamos el hecho de que

$$\lambda_m(M) \leq \mu_1\left(V_n\left(k, \frac{d(M)}{2m}\right)\right)$$

demostrado anteriormente, entonces nuestro problema ahora es calcular el valor de $\mu_1\left(V_n\left(0, \frac{d(M)}{2m}\right)\right)$. Sin embargo, con las fórmulas que ya sabemos, hacer este cálculo resulta mucho más sencillo, y es lo que haremos a continuación.

Proposición 10. *Si $k = 0$, es decir, si $M = \mathbb{R}^n$ entonces existe una constante c tal que*

$$\mu_1 \left(V_n(0,r)\right) = \frac{c^2}{r^2}$$

para todo $r > 0$.

Demostración. Para $k = 0$, conforme a las ecuaciones anteriores, se tiene que

$$S_k(t) = t, \qquad C_k(t) = 1$$

por lo que la ecuación diferencial a resolver es

$$y'' + \frac{n-1}{t} y' + \left(\lambda - \frac{l(l+n-2)}{t^2}\right) y = 0$$

Sea

$$\tau = \sqrt{\lambda} t, \qquad y(t) = z(\tau),$$

sustituyendo se tiene que

$$z'' + \frac{n-1}{\tau} z' + \left(1 - \frac{l(l+n-2)}{\tau^2}\right) z = 0.$$

Para $l = 0$, es decir, para la ecuación diferencial $z'' + \frac{n-1}{\sqrt{\lambda} t} z' + z = 0$ sea c la primera solución de $z(t)$ que satisface la ecuación diferencial con condiciones iniciales $z'(0) = 0, z(0) = 1$, entonces, resolviendo la ecuación, se tiene que

$$\lambda_1 \left(V_n(0,r)\right) = \frac{c^2}{r^2}.$$

Más detalladamente, si

$$J(\tau) = \tau^{\frac{n}{2}-1} z(\tau)$$

entonces

$$J'' + \frac{1}{\tau} J' + \left(1 - \frac{(n+2l-2)^2}{4\tau^2}\right) J = 0$$

es decir,

$$J'' + \frac{1}{\tau} J' + \left(1 - \left[\frac{(n+2l-2)}{2}\right]^2 \frac{1}{\tau^2}\right) J = 0$$

$$\Rightarrow J'' + \frac{1}{\tau} J' + \left(1 - (n/2 + l - 1)^2 \frac{1}{\tau^2}\right) J = 0$$

Por lo que c es el primer cero de la función de Bessel de orden $n/2 - 1$ (pues $l = 0$). $\square$

Una vez hecho este cálculo, podemos proceder a acotar el primer valor propio del laplaciano de M:

Corolario 2. *Supongamos que M es una variedad riemanniana de dimensión n compacta, con curvatura de Ricci ≥ 0, entonces*

$$\lambda_m(M) \leq \frac{2m^2 n(n+4)}{d(M)^2}.$$

Demostración. Sabemos que

$$\lambda_m(M) \leq \mu_1\left(V_n\left(0, \frac{d(M)}{2m}\right)\right)$$

Y ya calculamos $\mu_1\left(V_n\left(0, \frac{d(M)}{2m}\right)\right)$,

$$\mu_1\left(V_n\left(0, \frac{d(M)}{2m}\right)\right) = \frac{J^2_{\frac{n}{2}-1}}{r^2}.$$

Es decir,

$$\mu_1\left(V_n\left(0, \frac{d(M)}{2m}\right)\right) = \frac{J^2_{\frac{n}{2}-1} 4m^2}{d(M)^2}.$$

Pero

$$J_{\frac{n}{2}-1} < n\left(\frac{n}{2}+2\right) \quad \text{(ver [8] p. 486)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lambda_m(M) &\leq \frac{n\left(\frac{n}{2}+2\right)4m^2}{d(M)^2} \\ &= \frac{2m^2 n(n+4)}{d(M)^2} \end{aligned}$$

□

Nota 3. *Si $m = 1$ entonces*

$$\lambda_1(M) \leq \frac{2n(n+4)}{d(M)^2}.$$

Esta cota es más precisa que la dada por Cheeger, es decir

$$\lambda_1(M) \leq \frac{16e^3(n+2)^3}{d(M)^2}$$

pues $n(n+4) \leq 8e^3(n+2)^3$

Capítulo 4

Una aplicación a la geometría

Como su título lo indica, el objetivo de este capítulo es usar todo lo hecho anteriormente para aplicarlo a la geometría. Esto sucede en la generalización del teorema de Toponogov que es el resultado más importante de este trabajo.

El teorema de la esfera de Toponogov nos dice que si M es una variedad n-dimensional completa con curvatura seccional $K \geq H > 0$ y diámetro igual a $\pi/\sqrt{H}$ entonces M es isométrica a la esfera de curvatura H. La generalización de este teorema tiene como hipótesis que la curvatura de Ricci es mayor o igual a $(n-1)H$. La gracia de este teorema es que su demostración está basada completamente en toda la teoría sobre la relación con el diámetro y el laplaciano que hemos venido desarrollando a lo largo del trabajo; es entonces una muy buena justificación al hecho de haber hecho todo el trabajo previo a este capítulo. Una vez más, notamos cómo a través del cálculo de valores propios de este operador podemos obtener cierta información geométrica.

El capítulo se divide en tres secciones; la primera es de preliminares para poder demostrar tanto el teorema de la esfera de Toponogov como el teorema de Toponogov, la segunda para demostrar el teorema de Toponogov, y la tercera sección se deja para demostrar el teorema de la esfera y la generalización.

4.1. Preliminares

Esta sección está dedicada a demostrar resultados que nos serán útiles en las demostraciones de los teoremas más importantes del capítulo. El primer teorema importante es el teorema (11) que nos dice bajo qué condiciones relacionadas con la curvatura de dos variedades de dimensión n podemos construir una isometría entre ellos, el cual es fundamental para demostrar el teorema de la esfera de Toponogov; el segundo, o mas bien los segundos, son los corolarios de los teoremas de comparación de Rauch que son untilizados en la prueba del teorema de Toponogov.

Antes de empezar con los teoremas, daremos dos definiciones: la de punto focal y la de puntos conjugados.

Definición 6. *Sea $\gamma : [0, a] \to M$ una geodésica. Decimos que el punto $\gamma(t_0)$ es conjugado a $\gamma(0)$ a lo largo de γ si existe un campo de Jacobi J a lo largo de γ no idénticamente cero, con $J(0) = 0 = J(t_o)$.*

El siguente resultado relaciona los puntos conjugados con las singularidades de la función exponencial:

Proposición 11. *Sea $\gamma : [0, a] \to M$ una geodésica y sea $\gamma(0) = p$. El punto $q = \gamma(t_0)$, $t_0 \in (0, a]$, es conjugado a p a lo largo de γ si y sólo si $v_0 = t_0\gamma'(0)$ es punto crítico de exp_p*

La noción de punto conjugado de un punto $p \in M$ se puede entender a lo que es un punto focal de una subvariedad $N \subset M$. La idea es considerar las variaciones

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, l] \to M$$

de una geodésica $\gamma : [0, l] \to M$ con $\gamma(0) = p \in N$ y $\gamma'(0) \in (T_pN)^\perp$, que satifacen las siguientes condiciones:

1. La curva $t \to f_s(t)$, $t \in [0, l]$ es una geodésica.
2. Para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $f_s(0) = \alpha(s) \in N$ y

$$A(s) = \frac{\partial f}{\partial t}(s, 0) \in (T_{\alpha(s)}N)^\perp.$$

$J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ es un campo de Jacobi a lo largo de γ. Además, este campo satisface las siguientes propiedades:

i)$J(0) \in T_pN$

ii)$J'(0) + S_{\gamma'(0)}(J(0)) \in (T_pN)^{\perp}$

donde $S_{\gamma'(0)}$ es el operador lineal en T_pN dado por la segunda forma fundamental de $N \subset M$ (la demostración de este hecho se encuentra en [1]).

Definición 7. *Sea $N \subset M$ una subvariedad de la variedad riemanniana M. El punto q es focal de N si existe una geodésica $\gamma : [0, l] \to M$, con $\gamma(0) = p \in N$, $\gamma'(0) \in (T_pN)^{\perp}$, $\gamma(l) = q$ y un campo de Jacobi no idénticamente cero a lo largo de γ que satisface i) y ii) y con $J(l) = 0$.*

Podemos dar una definición en función de los puntos singulares de la exponencial como lo hicimos con los puntos conjugados.

Sea N una subvariedad de M. Entonces, para cada $p \in N$, sea $P : T_pM \to T_pN$ la proyección ortogonal con respecto a $\langle \quad \rangle$. El fibrado normal $\nu(M)$ es el subconjunto del fibrado tangente $T(M)$ definido por: $x \in \nu$ si $x \in T_pM$ para $p \in N$, y $P(x) = 0$. ν es un fibrado vectorial sobre N cuya dimensión es la de las dimensiones de M y N. Esta fibra en $p(\in N)$ será denotada como ν_p.

Definición 8. *Decimos que un punto focal q de N es un valor singular de* $\exp|\nu$. *Llamamos a q un punto focal de N en p si hay una imagen inversa singular de q en ν_p.*

Fijemos $p \in M$ y x un vector unitario en T_pM. Sea

$$x^{\perp} = \{y \in T_pM | \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Como $\exp : T_pM \to M$ es un difeomorfismo local en el cero, hay una vecindad U de cero en $x^{\perp}$ tal que $\exp|U$ es un encaje. Sea N la subvariedad $\exp(U)$. Llamaremos a N la *subvariedad geodésica* definida por x.

Estas definiciones serán cruciales cuando veamos los teoremas de compacración de Rauch, pues es en estos conceptos donde radica la diferencia enntre cada uno. Sin embargo, antes de citar estos teoremas, demostraremos resultados que tienen que ver con isometrías entre variedades.

Primero daremos un panorama general de los lugares donde estamos trabajando; sean M y $\overline{M}$ dos variedades riemannianas de dimensión n, sean p y $\overline{p}$ un punto en M y $\overline{M}$ respectivamente y sea $I : T_pM \to T_{\overline{p}}\overline{M}$ una isometría lineal.

Sea $B_r(p)$ una vecindad normal de p. Definimos $\varphi : B_r(p) \to B_r(\overline{p})$ por $\varphi = \exp_{\overline{p}} \circ I \circ \exp_p^{-1}$. Si r es suficientemente pequeño, $B_r(\overline{p})$ es una vecindad normal con centro en $\overline{p}$ y φ es un difeomorfismo.

Denotamos por P_γ el transporte paralelo a lo largo de la geodésica γ y $\overline{\gamma} = \varphi(\gamma)$. Sea $I_\gamma = P_{\overline{\gamma}} \circ I \circ P_{-\gamma}$.

Lema 9. *Con la notación anterior, supongamos que para todas las geodésicas γ que parten de p se tiene que*

$$I_\gamma(R(x,y)z) = \overline{R}(I_\gamma(x), I_\gamma(y))I_\gamma(z),$$

donde R y $\overline{R}$ denotan los tensores de curvatura de M y $\overline{M}$. Entonces φ es una isometría y $d\varphi = I_\gamma$.

Demostración. Dado $x \in T_qM$, sea γ la geodésica que va de p a $q = \gamma(t_0)$ contenido en $B_r(p)$ y sea J el campo de Jacobi a lo lardo de γ tal que $J(0) = 0$ y $J(t_0) = x$. Sea ${}_t\gamma = \gamma|[0,t]$, y definimos $\overline{J}$ a lo largo de $\overline{\gamma}$ por $\overline{J}(t) = I_{{}_t\gamma}(J(t))$. Se sigue de la hipótesis sobre el tensor de curvatura que $\overline{J}(t)$ es un campo de Jacobi a lo largo de $\overline{\gamma}$. Además, por cómo definimos $\overline{J}(t)$, se tiene que

$$||J(t)|| = ||\overline{J}(t)||.$$

Falta ver que $\overline{J}(t) = d\varphi(J(t))$. Del hecho de que

$$\overline{J}(t) = P_{{}_t\gamma} \circ I \circ P_{-t}\gamma(J(t))$$

se tiene que $I(J'(0)) = \overline{J}'(0)$. Como J y $\overline{J}$ son campos de Jacobi que se anulan en $t = 0$, tenemos que

$$J(t) = \mathrm{d}\exp_{\gamma(0)} t \cdot J'(0)|_{t\gamma'(0)}, \qquad \overline{J}(t) = \mathrm{d}\exp_{\overline{\gamma}(0)} t \cdot \overline{J}'(0)|_{t\overline{\gamma}'(0)},$$

entonces

$$\begin{aligned} J(t) &= \mathrm{d}\exp_{\overline{\gamma}(0)} I(tJ'(0))|_{t\overline{\gamma}'(0)} \\ &= \mathrm{d}\exp_{\overline{\gamma}(0)} \circ dI \circ \mathrm{d}\exp^{-1}_{\gamma(0)}(J(t)) = d\varphi(J(t)). \end{aligned}$$ □

Este lema sirve para ver cómo el comportamiento del tensor de curvatura (bajo transporte paralelo) determina la métrica de una variedad.

Ahora tomaremos una variedad M completa. Vamos a dar una versión global de lema anterior. Empecemos con una definición.

Definición 9. *Una geodésica rota es una curva continua $\gamma : [0, l] \to M$ tal que existen $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_n < l$ y $\gamma|[t_i, t_{i+1}]$ es una geodésica C^∞. Construyamos*

$$_i\gamma = \gamma|[0, t_i],$$

y definimos v_i por

$$\gamma|[t_i, t_{i+1}] = t \to exp_{\gamma(t_i)}(t - t_i)v_i.$$

Sea $I : T_pM \to T_{\overline{p}}\overline{M}$, definimos una correspondencia entre geodésicas rotas que parten de p y $\overline{p}$ como sigue:

$$_1\overline{\gamma}(t) = \exp_{\gamma(0)} tI(v_0)$$

Supongamos que $_i\overline{\gamma}$ está definida. Sea

$$_{i+1}\overline{\gamma}(t) = \begin{cases} {}_i\overline{\gamma}(t), & 0 \leq t \leq t_i \\ \exp_{_i\overline{\gamma}(ti)} t(P_{i\overline{\gamma}} \circ I \circ P_{-(_i\gamma)}(v_i)), & t_i \leq t \leq t_{i+1} \end{cases}$$

Teorema 11. *Sean M y $\overline{M}$ completas, M simplemente conexa e $I : T_pM \to T_{\overline{p}}\overline{M}$. Supongamos que para todas las geodésicas rotas γ se tiene que*

$$I_\gamma(R(x, y)z) = \overline{R}(I_\gamma(x), I_\gamma(y))I_\gamma(z).$$

Entonces para toda geodésica rota γ_0, γ_1 tales que $\gamma_0(l_0) = \gamma_1(l_1)$ tenemos que

$$\overline{\gamma}_0(l_0) = \overline{\gamma}_1(l_1).$$

Además hay una función $\phi : M \to \overline{M}$ definida por $\gamma(l) \to \overline{\gamma}(\overline{l})$ y ϕ es una isometría local y por lo tanto un mapeo cubriente.

Demostración. Vamos a dividir esta demostración en 3 partes, la primera, para mostrar que si $\gamma_0(l_0) = \gamma_1(l_1)$ entonces $\overline{\gamma}_0(l_0) = \overline{\gamma}_1(l_1)$, la segunda para ver que esa función ϕ existe y que $\gamma(l) \to \overline{\gamma}(\overline{l})$ y la última prueba que ϕ es una isometría local.

(A) Supongamos que $\gamma_0(l_0) = \gamma_1(l_1)$ y que $\gamma_0, \gamma_1, \overline{\gamma}_0, \overline{\gamma}_1$ estan contenidos en la vecindad normal $B_r(p)$ y $B_r(\overline{p})$ respectivamente. Por el lema anterior, $\varphi = \exp_{\overline{p}} \circ I \circ \exp_p^{-1}|B_r(p)$ es una isometría. Entonces $\varphi(\gamma_i) = \overline{\gamma}_i$, por lo tanto $\overline{\gamma}_0(l_0) = \overline{\gamma}_1(l_1)$ (ya que $\gamma_0(l_0) = \gamma_1(l_1)$) y $d\varphi = I_{\gamma_0} = I_{\gamma_1}$.

(B) Sin pérdida de generalidad, supongamos que γ_0, γ_1 son geodésicas rotas en los puntos $t_1 < \cdots < t_n$, y $l_0 = l_1 = l$. Asumamos que para todo i, $\gamma_1(t_{i+2}), \gamma_1(t_{i+1}), \gamma_0(t_{i+1})$ y los segmentos más pequeños entre estos puntos se quedan contenidos en una vecindad normal alrededor del punto $\gamma_0(t_i)$, y que lo mismo es cierto para $\overline{\gamma}_1(t_{i+2}), \overline{\gamma}_1(t_{i+1}), \overline{\gamma}_0(t_{i+1}), \overline{\gamma}_0(t_i)$. Sea $\tau : (t_{n-1}, t_n] \to M$ la geodésica más corta de $\gamma_0(t_{n-1})$ a $\gamma_1(t_n)$. Por inducción, podemos suponer que

$$\overline{{}_{n-1}\gamma_0 \cup \tau}(t_n) = \overline{{}_n\gamma_1}(t_n)$$

y que

$$I_{{}_{n-1}\gamma_0 \cup \tau} = I_{{}_n\gamma_1} \tag{4.1}$$

La isometría $I_{{}_{n-1}\gamma_0 \cup \tau} : T_{\gamma_0(t_{n-1})}M \to T_{\overline{\gamma}_0(t_{n-1})}\overline{M}$ induce una correspondencia entre geodésicas que parten de $\gamma_0(t_{n-1})$ y $\overline{\gamma}_0(t_{n-1})$. Denotaremos con una tilde esa correspondencia. Sea

$$\sigma_0 = \gamma_0|[t_{n-1}, l], \qquad \theta_1 = \gamma_1|[t_n, l].$$

Por el primer párrafo de la demostración, tenemos que

$$\widetilde{\sigma_0}(l) = \widetilde{\tau \cup \theta_1}(l), \qquad I_{\sigma_0} = I_{\tau \cup \theta_1}.$$

Que es equivalente a

$$\overline{\gamma}_0(l) = \overline{{}_{n-1}\gamma_0 \cup \tau \cup \theta_1}(l) \quad I_{\gamma_0} = I_{{}_{n-1}\gamma_0 \cup \tau \cup \theta_1}.$$

Usando (1), podemos reescribir al término de la izquierda como

$$P_{\overline{\theta}_1} \circ I_{{}_{n-1}\gamma_0 \cup \tau} \circ P_{-\theta_1} = P_{\overline{\theta}_1} \circ I_{{}_n\gamma_1} \circ P_{-\theta_1} = I_{\gamma_1};$$

En particular, se tiene que $\overline{\gamma}_0(l) = \overline{\gamma}_1(l)$.

(C) Ahora, sea γ_0 y γ_1 dos geodésicas rotas cualesquiera tales que $\gamma_0(l) = \gamma_1(l)$. Como M es simplemente conexa, existe una homotopía h_s fr γ_0 a γ_1. Por la continuidad de h_s, podemos hacer particiones $0 < s_1 < \cdots < s_m < l$ y $0 < t_1 < \cdots < t_n < l$ tales que para toda i y para toda j, $h_{sj+1}(t_{i+2}), h_{sj+1}(t_{i+1}), h_{sj}(t_{i+1})$ y las geodésicas entre estos quedan contenidos en una vecindad normal alrededor de $h_{sj}(t_i)$. Denotemos por γ_{sj} a la geodésica rota formada por los segmentos más pequeños que hay entre $h_{sj}(0)$ y $h_{sj}(t_1)$, $h_{sj}(t_1)$ y $h_{sj}(t_2)\ldots$ Por ecuaciones diferenciales, la correspondencia $\gamma \to \overline{\gamma}$ es continua, por lo que podemos asumir que para toda $j, \overline{\gamma}_{sj}$ y $\overline{\gamma}_{sj+1}$ están suficientemente cerca, entonces para toda i, $\overline{\gamma}_{sj+1}(t_{i+2})$,

$\overline{\gamma}_{sj+1}(t_{i+1})$, $\overline{\gamma}_{sj}(t_{i+1})$ están contenidos en una vecindad normal de $\overline{\gamma}_{sj}(t_i)$, por lo tanto cada par $\overline{\gamma}_{sj}, \overline{\gamma}_{sj+1}$ satisface las hipótesis que (B), y se tiene que

$$\overline{\gamma}_0(l) = \overline{\gamma}_{s1}(l) = \cdots = \overline{\gamma}_1(l).$$

Ahora, sea $q \in M$ un punto cualquiera, y sea γ una geodésica tal que $\gamma(l) = q$, por el lema anterior, el mapeo

$$\varphi = \exp_{\overline{\gamma}(l)} \circ I_\gamma \circ \exp^{-1}_{\gamma(l)}$$

es una isometría de una vecindad $B_r(\gamma(l))$ a $B_r(\overline{\gamma}(l))$, y por la forma en que definimos la correspondencia $\gamma \to \overline{\gamma}$ y la función ϕ, se tiene que $\varphi = \phi | B_r(q)$, por lo tanto ϕ es una isometría local. $\square$

Este teorema se le adjudica a Cartan, Ambrose y Hicks, y como aplicación, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3. *Sean M y $\overline{M}$ dos variedades n-dimensionales simplemente conexas de curvatura constante K, entonces M y $\overline{M}$ son isométricas. Además, dado cualquier punto $p \in M$, $\overline{p} \in \overline{M}$ y una isometría $I : T_pM \to T_{\overline{p}}\overline{M}$ existe una isometría $\phi : M \to \overline{M}$ tal que $\phi(p) = \overline{p}$ y $d\phi_p = I$.*

Para demostrar los corolarios de los teoremas de Rauch, daremos por hecho los teoremas de comparación de Rauch.

Teorema 12. ***Rauch I**. Sean M y M_0 variedades riemannianas con $dimM_0 \geq dimM$, y sean $\gamma, \gamma_0 : [0, l] \to M, M_0$ geodésicas normales con $\gamma' = T$, $\gamma_0' = T_0$. Supongamos que las curvaturas seccionales cumplen con que $K_0 \geq K$ y que para ninguna $t \in [0, l]$ es $\gamma_0(t)$ conjugado a $\gamma_0(0)$ a lo largo de γ. Sean V, V_0 campos de Jacobi a lo largo de γ, γ_0 tales que $V(0), V_0(0)$ son tangentes a γ, γ_0 y*

$$||V(0)|| = ||V_0(0)||,\ \langle T, V'(0)\rangle = \langle T_0, V_0'(0)\rangle,\ ||V'(0)|| = ||V_0'(0)||.$$

Entonces para todo $t \in [0, l]$,

$$||V(t)|| \geq ||V_0(t)||.$$

Corolario 4. ***Rauch I**. Sean M y M_0 variendades riemannianas con $dimM_0 \leq dimM$, y sean m y m_0 en M, M_0. Asumamos que las curvaturas seccionales cumplen con que $K_{M_o} \geq K_M$. Sea r tal que $exp_m|B_r(0)$ es una inmersión y $exp_{m_0}|B_r(0)$ es no singular. Sea $I : T_mM \to T_{m_0}M$ lineal e inyectiva tal que preserva producto interno. Entonces, para cualquier curva $c : [0, 1] \to exp_m(B_r(0))$, se tiene que*

$$L[c] \geq L[exp_{m_0} \circ I \circ exp_m^{-1}(c)] = L[c_0(t)]$$

Demostración. Sea $\widetilde{c} : [0,1] \to B_r(0)$la única curva en $B_r(0)$ tal que $\exp_m \widetilde{c}(s) = c(s)$. Consideremos el rectángulo $\alpha(t,s) \to \exp_m t\widetilde{c}(s)$. Para un s fijo, el campo de variación asociado V_s es un campo de Jacobi a lo largo de la geodésica $\gamma_s = t \to \exp_m t\widetilde{c}(s)$ con $V_s(1) = c'(s)$, entonces

$$V_s = \mathrm{d}\exp_m(t\widetilde{c}'(s)) = t\mathrm{d}\exp_m(\widetilde{c}'(s)).$$

Por lo que $\nabla_T V_s = \widetilde{c}'(s)$. De forma similar, hay un campo de Jacobi V_{0_s} asociado al rectángulo $\alpha_0(t,s) \to \exp_{m_0} \circ I(t\widetilde{c}(s))$ tal que

$$V_{0_s}(1) = c_0'(s), \qquad \nabla_T V_{0_s} = (I \circ (\widetilde{c}(s))' = I \circ (\widetilde{c}'(s)).$$

Como I preserva producto interno, entonces

$$||c_0'(s)|| = ||I(c'(s))||.$$

Por el teorema de Rauch I,

$$||c'(s)|| = ||V_s(1)|| \geq ||V_{0_s}(1)|| = ||c_0'(s)||$$

e integrando se obtiene el resultado. □

Teorema 13. ***Rauch II****. Con la notación del teorema anterior, supongamos que $K_0 \geq K$ y que para ninguna $t \in [0,l]$ es $\gamma(t)$ un punto focal de la subvariedad N_0, la geodésica definida por T_0. Sean V, V_0 los campos de Jacobi a lo largo de γ, γ_0 satisfaciendo que $V'(0), V_0'(0)$ son tangentes a γ, γ_0 y $||V'(0)|| = ||V_0'(0)||$, $\langle T, V(0)\rangle = \langle T_0, V_0(0)\rangle$, $||V(0)|| = ||V_0(0)||$. Entonces para todo $t \in [0,l]$*

$$||V(t)|| \geq ||V_0(t)||$$

Corolario 5. ***Rauch II****. Sean γ, γ_0 geodésicas en M, M_0 parametrizadas sobre $[0,l]$ con vectores tangentes T y T_0. Sea E y E_0 el conjunto de vectores unitarios paralelos a lo largo de γ y γ_0 respectivamente los cuales son a su vez perpendiculares a T y T_0. Sea $c : [0,l] \to M$ una curva suave definida como*

$$c(t) = exp(f(t)E(t)),$$

donde $f : [0,l] \to R$ es una función suave, y sea $c : [0,l] \to M_0$ definida como

$$c_0(t) = exp(f(t)E_0(t)).$$

Asumamos, como en el corolario anterior, que $K_{M_0} \geq K_M$, y también que para cada t, la geodésica $\eta_0 : [0,1] \to M_0$ que está dada por

$$\eta_0(s) = exp(sf(t)E_0(t))$$

no contiene puntos focales de la subvariedad definida por $\eta_0'(0)$. *Entonces*

$$L[c] \geq L[c_0].$$

Demostración. Como c y c_0 están ambas parametrizadas de 0 a l, basta con comparar las longitudes de sus vectores tangentes.

Fijemos $t_1 \in [0, l]$. Sea η la geodésica

$$\eta(s) = \exp(sf(t)E(t)$$

y sea

$$h(t) = \exp(f(t_1)E(t)), \qquad h_0(t) = \exp(f(t_1)E_0(t)).$$

Entonces

$$c'(t_1) = h'(t_1) + f'(t_1)\eta'(1),$$

y

$$c_0'(t_1) = h_0'(t_1) + f_0'(t_1)\eta_0'(1).$$

Por el lema de Gauss, estas sumas descomponen $c'(t_1)$ y $c_0(t_1)$ en vectores perpendiculares. Como $E(t_1)$ y $e_0(t_1)$ son vectores unitarios, se tiene que

$$||f'(t_1)\eta'(1)|| = ||f_0'(t_1)\eta_0'(1)||.$$

Entonces sólo necesitamos comparar h' y h_0'. Pero h' y h_0' son tangentes a la familia de geodésicas $\tau_t(s) = \exp(sE(t))$ y $\tau_{0_t}(s) = \exp(sE_o(t)$. Por lo tanto h' y h_0' pueden ser extendidos a campos de Jacobi V y V_0 a lo largo de η y η_0, y como E y E_0 son paralelos, estos campos satisfacen las hipótesis del segundo teorema de Rauch, es decir

$$\nabla_{\eta'} V = \nabla_T E = 0, \qquad \nabla_{\eta_0'} V_0 = \nabla_{T_0} E_0 = 0$$

Por lo que se sigue el resultado. □

4.2. Teorema de Toponogov

Ahora probaremos el teorema de Toponogov que, como se dijo en la introducción del capítulo, será una herramienta útil para demostrar el teorema de la esfera de Toponogov. Empezaremos con una sencilla definición, donde todos los índices son tomados módulo 3.

Definición 10. *Un triángulo geodésico en una variedad riemanniana* M *es un conjunto de tres geodésicas parametrizadas por longitud de arco* $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ *de longitudes* l_1, l_2, l_3 *que cumplen con que* $\gamma_i(l_i) = \gamma_{i+1}$ *y* $l_i + l_{i+1} \geq l_{i+2}$.

Denotamos por

$$\alpha_i = \sphericalangle(-\gamma'_{i+1}(l_{i+1}), \gamma'_{i+2}(0))$$

el ángulo entre $-\gamma'_{i+1}(l_{i+1})$ y $\gamma'_{1+2}(0)$, $0 \leq \alpha_i \leq \pi$, y por $\rho(p,q)$ la distancia entre los puntos p y q.

Teorema 14. ***(Toponogov).*** *Sea M una variedad riemanniana completa con curvatura $k \geq H$.*

(A) Sea $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ un triángulo geodésico en M. Supongamos que γ_1, γ_3 son minimizantes y si $H > 0$, supongamos que $L[\gamma_2] \leq \pi/\sqrt{H}$. Entonces en M^H, el espacio simplemente conexo de curvatura constante H, existe un triángulo geodésico $(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \overline{\gamma}_3)$ tal que $L[\gamma_i] = L[\overline{\gamma}_i]$ y $\overline{\alpha}_1 \leq \alpha_1$, $\overline{\alpha}_3 \leq \alpha_3$. Si $H > 0$ y $L[\gamma_i] = \pi/\sqrt{H}$ para alguna i, el triángulo en M^H está determinado de manera única.

(B)Sean γ_1, γ_2 segmentos de geodésicas en M tales que $\gamma_1(l_1) = \gamma_2(0)$ y $\sphericalangle(-\gamma'_1(l_1), \gamma'_2(0)) = \alpha$. Denotaremos esta configuración como $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ y la llamaremos bisagra. Sea γ_1 minimizante y si $H > 0$, $\quad L[\gamma_2] \leq \pi/\sqrt{H}$.

Sea $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2 \subset M^H$ tales que $\overline{\gamma}_1(l_1) = \overline{\gamma}_2(0)$, $\quad L[\gamma_i] = L[\overline{\gamma}_i] = l_i \quad$ y $\sphericalangle(-\overline{\gamma}'_1(l_1), \overline{\gamma}'_2(0)) = \alpha$. Entonces

$$\rho(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq \rho(\overline{\gamma}_1(0), \overline{\gamma}_2(l_2))$$

Demostración. Demostraremos este teorema como sigue: Definiremos lo que son los triángulos pequeños y demostraremos el teorema para estos triángulos, después definiremos lo que son las bisagras delgadas rectas, agudas y obtusas y se verá que el teorema es válido para estas bisagras y por último se generalizará todo para cualquier triángulo. Ahora bien, antes de empezar en sí con la demostración, se probarán 3 resultados pequeños que son utilizados a menudo para demostrar lo que se dijo anteriormente.

(1) Sean $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2 \subset M^{H-\varepsilon}$, $\overline{\gamma}_1(l_1) = \overline{\gamma}_2(0)$, $\sphericalangle(-\overline{\gamma}'_1(l_1), \overline{\gamma}'_2(0)) = \alpha$ y $L[\gamma_i] \leq \pi/\sqrt{H}$, Cuando α crece de 0 a π, $\rho(\overline{\gamma}_1(0), \overline{\gamma}_2(l_2)) = f(\alpha)$ crece monótonamente de $|l_1 - l_2|$ a $D = \text{mín}\{2\pi/\sqrt{H-\varepsilon} - l_1 - l_2, l_1 + l_2\}$.

Para demostrar que es monótona, queremos ver que $f'(\alpha) \neq 0$ y para esto vamos a aplicar la siguiente fórmula:

$$\frac{d}{ds} L[c_s]|_{s=0} = l^{-1}\{\langle V, T\rangle|_a^b - \int_a^b \langle V, \nabla_T T\rangle\, dt\} \tag{4.2}$$

Sea Q es el rectángulo $[a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que

$$\alpha|[a,b] \times \{0\} = c : [a,b] \to M.$$

T, V son campos vectoriales tangentes a Q correspondientes a la primera y segunda variable y $c_s = \alpha|[a,b] \times \{s\}$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$, $||c_0'|| = l$ y $L[\alpha]$ denota la longitud de la curva α parametrizada por longitud de arco. Además $\alpha : Q \to M$ es una función suave.

Supongamos que $\overline{\gamma}_1$ está fija y $\overline{\gamma}_2$ varía. Si $H \leq 0$, $\rho(\overline{\gamma}_1(0), \overline{\gamma}_2(l_2))$ está en función de α y es una función suave. Lo anterior también es cierto para $0 \leq \alpha \leq \pi$ y $H > 0$. Para ver esto, basta con mostrar que $\rho(\overline{\gamma}_1(0), \overline{\gamma}_2(l_2)) < \pi/\sqrt{H-\varepsilon}$. Si

$$\rho(\overline{\gamma}_1(0), \overline{\gamma}_2(l_2)) = \pi/\sqrt{H-\varepsilon}$$

entonces $\overline{\gamma}_1 \cup \overline{\gamma}_2$ es una geodésica rota entre puntos antípodas en la esfera de curvatura $H-\varepsilon$. Tal geodésica es suave si la longitud de cada uno de los segmentos es menor que $\pi/\sqrt{H-\varepsilon}$. Por lo tanto, $\rho(\overline{\gamma}_1(0), \overline{\gamma}_2(l_2)) = \pi/\sqrt{H-\varepsilon}$ imlica que $\alpha = \pi$.

Cuando $\overline{\gamma}_2(l_2)$ se mueve, traza círculos de radio l_2 con centro en $\overline{\gamma}_2(0)$. La geodésica minimizante $\overline{\sigma}$ que va de $\overline{\gamma}_1(0)$ a $\overline{\gamma}_2(l_2)$ es perpendicular a este círculo sólo cuando $\alpha = 0$ o π. Cuando α es diferente de 0 o π, $\overline{\sigma} \cup -\overline{\gamma}_2$ forma una geodésica suave de $\overline{\gamma}_1(0)$ a $\gamma_1(l_1)$, distinta de $\overline{\gamma}_1$. Esto es imposible para $H \leq 0$ y posible sólo si $l_1 = \pi/\sqrt{H-\varepsilon}$ con $H > 0$, lo cual pasa por hipótesis.

Por lo tanto, por la fórmula (1), $f'(\alpha) \neq 0$ para $\alpha \in (0, \pi)$, entonces f es estrictamente monótona. Ahora, $f(0) = |l_2 - l_1|$ y $f(\pi) = \text{mín}\{2\pi/\sqrt{H-\varepsilon} - l_1 - l_2, l_1 + l_2\} = D$. Como $D > |l_2 - l_1|$, f tiene que ser creciente.

(2) Un triángulo en $M^{H-\varepsilon}$ cuya longitud de sus lados son $\leq \pi/\sqrt{H}$ está determinado por congruencia por la longitud de sus lados.

Sea $\{\overline{\sigma}_i\}$ un triángulo geodésico en $M^{H-\varepsilon}$ con $L[\overline{\sigma}_i] = L[\overline{\gamma}_i]$. Para $L[\overline{\gamma}_1], L[\overline{\gamma}_2]$ fijas, por (1), se tiene que $L[\overline{\gamma}_3]$ determina de manera única a α_3. Por el corolario 3, existe una isometría de $\overline{\sigma}_1$ sobre $\overline{\gamma}_1$, $\overline{\sigma}_2$ sobre $\overline{\gamma}_2$ y por lo tanto de $\overline{\sigma}_3$ sobre $\overline{\gamma}_3$.

(3) Dada una bisagra $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$ tal que γ_1 es minimizante y $L[\gamma_2] \leq \pi/\sqrt{H}$, son equivalentes:

i) Sea γ_3 minimizante de $\gamma_2(l_2)$ a $\gamma_1(0)$. Entonces existe un triángulo $(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \overline{\gamma}_3)$ en $M^{H-\varepsilon}$ con $L[\gamma_i] = L[\overline{\gamma}_i]$ y $\overline{\alpha}_3 \leq \alpha_3$.

ii) Sea $(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \alpha_3)$ en $M^{H-\varepsilon}$ con $L[\gamma_i] = L[\overline{\gamma}_i]$, $i = 1, 2$. Entonces

$$l_2 - l_1 \leq \rho(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq \rho(\overline{\gamma}_1(0), \overline{\gamma}_2(l_2)).$$

i)⇒ii). Dado $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$ como en ii), formamos el triángulo geodésico $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ donde γ_3 es minimizante de $\gamma_1(0)$ a $\gamma_2(l_2)$. Podemos asumir que

$\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ cumple con que

$$l_1 + l_3 \geq l_2, \quad l_2 + l_3 \geq l_1$$

Por i), hay un triángulo $(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \overline{\gamma}_3)$ en $M^{H-\varepsilon}$ con $L[\gamma_i] = L[\overline{\gamma}_i]$ y $\overline{\alpha}_3 \leq \alpha_3$. Entonces, cuando $\overline{\alpha}_3$ crece hasta llegar a α_3, dejando fijos $L[\overline{\gamma}_1]$ y $L[\overline{\gamma}_2]$, $\rho(\overline{\gamma}_1(0), \overline{\gamma}_2(l_2))$ es no decreciente por (1).

ii)$\Rightarrow$ i). Dadas las hipótesis de i), por ii), si $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2 \subset M^{H-\varepsilon}$ y $\sphericalangle(-\overline{\gamma}_1'(l_1), \overline{\gamma}_2'(0)) = \alpha_3$, se tiene que

$$\rho(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq \rho(\overline{\gamma}_1(0), \overline{\gamma}_2(l_2))$$

Por (1) y porque $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ satisface la desigualdad del triángulo, si el ángulo entre $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2$ decrece lo suficiente al ángulo $\overline{\alpha}_3$, tendríamos entonces que

$$\rho(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) = \rho(\overline{\gamma}_1(0), \overline{\gamma}_2(l_2)).$$

Ahora, si $\overline{\gamma}_3$ es minimizante de $\overline{\gamma}_1(l_1)$ a $\overline{\gamma}_2(l_2)$, $(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \overline{\gamma}_3)$ es un triángulo geodésico con $L[\overline{\gamma}_i] = L[\gamma_i]$ y $\overline{\alpha}_3 \leq \alpha_3$.

Ahora sí, comencemos formalmente con la demostración:

Decimos que la bisagra $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ es pequeña si $\frac{1}{2}r = \text{máx} L[\gamma_i]$, $i = 1, 2$ y $\exp_{\gamma_2(0)}|B_r(0)$ es un encaje. Sea $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ un triángulo. Decimos que este triángulo es pequeño si cada una de las bisagras asociadas $(\gamma_i, \gamma_{i+1}, \alpha_{i+2})$ son pequeñas.

(4) (A) es válido para triángulos pequeños y (B) es válido para bisagras pequeñas.

Si $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$ es una bisagra pequeña, sea $(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \alpha)$ una bisagra en $M^{H-\varepsilon}$ con $L[\gamma_i] = L[\overline{\gamma}_i]$, $i = 1, 2$. Sea $\gamma_1(l1) = p$ y $\overline{\gamma}_1(l_1) = \overline{p}$. Sea $\overline{\gamma}_3$ minimizante de $\overline{\gamma}_1(0)$ a $\overline{\gamma}_2(l_2)$ y sea $I : T_{\overline{p}}M^{H-\varepsilon} \to T_pM$ una isometría tal que

$$I(\overline{\gamma}_1'(l_1)) = \gamma_1'(l_1), \qquad I(\overline{\gamma}_2'(0)) = \gamma_2'(0)$$

Sea c en M una curva definida por

$$c = \exp_p \circ I \circ \exp_{\overline{p}}^{-1}(\overline{\gamma}_3),$$

entonces c une a $\gamma_1(0)$ y $\gamma_2(l_2)$, y como la bisagra es pequeña, aplicando en Corolario de Rauch I, tenemos que $L[c] \leq L[\overline{\gamma}_3]$. Por lo tanto (B) es válido para bisagras pequeñas.

Ahora, fijemos un vértice del triángulo $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, digamos $\gamma_2(0)$. Por (3), existe un triángulo en $M^{H-\varepsilon}$ cuyos lados tienen la misma longitud que nuestro triángulo dado y tal que $\overline{\alpha}_3 \leq \alpha_3$. Por (2) un triángulo en $M^{H-\varepsilon}$ está determinado por la longitud de sus lados. Entonces, si empezamos por fijar algún otro vértice, obtendremos el mismo triángulo en $M^{H-\varepsilon}$ con $L[\overline{\gamma}_i] = L[\gamma_i]$ y $\overline{\alpha}_i \leq \alpha_i$, lo que demuestra el inciso (A) para triángulos pequeños.

Sea $(\gamma_1, \gamma_2, \frac{1}{2}\pi)$ una bisagra y sea $(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \frac{1}{2}\pi)$ una bisagra en $M^{H-\varepsilon}$ con $L[\overline{\gamma}_i] = L[\gamma_i]$. Sea $\overline{\gamma}_3$ una curva minimizante de $\overline{\gamma}_2(l_2)$ a $\overline{\gamma}_1(0)$. Podemos escribir

$$\overline{\gamma}_3(t) = \exp_{\overline{\gamma}_2(t)} f(t) \cdot \overline{E}(t),$$

donde $\overline{E}(t)$ es el campo paralelo unitario a lo largo de γ_2 perpendicular a $\gamma'(2)$ y $f(t)$ es la función correspondiente. Sea $E(t)$ el campo paralelo a lo largo de γ_2 con $E(0) = -\gamma_1'(l_1)$. Llamamos $(\gamma_1, \gamma_2, \frac{1}{2}\pi)$ una bisagra recta delgada si las hipótesis del corolario de Rauch II se aplican a las curvas $\exp f(t) \cdot E(t)$ y $\exp_{\overline{\gamma}_2(t)} f(t) \cdot \overline{E}(t) = \overline{\gamma}_3(t)$.

(5) (B) es válido para bisagras rectas delgadas.
Se sigue del corolario del segundo teorema de Rauch.

Sea $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ una bisagra con $\alpha > \frac{1}{2}\pi$. Sea $(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \alpha)$ la bisagra correspondiente en $M^{H-\varepsilon}$ con $L[\overline{\gamma}_i] = L[\gamma_i]$. Sea $\overline{\gamma}_3$ minimizante de $\overline{\gamma}_2(l_2)$ a $\overline{\gamma}_1(0)$.

Sea $\overline{\sigma} : [0, l] \to M^{H-\varepsilon}$ el pedazo de geodésica que parte de $\gamma_2(0)$ tal que $\langle \overline{\sigma}'(0), \overline{\gamma}_2'(0) \rangle = 0$, $\overline{\sigma}'(0)$ es de la forma

$$-\delta\gamma_1'(l_1) + \beta\gamma_2'(0),$$

con $\delta, \beta > 0$ y $\overline{\sigma}(l)$ es el primer punto de σ que está en $\overline{\gamma}_3$.

Denotemos por σ al pedazo de geodésica que parte de $\gamma_2(0)$ tal que

$$\langle \sigma'(0), \gamma_2'(0) \rangle \qquad \sigma'(0) = -\delta\gamma_1'(0) + \beta\gamma_2'(0),$$

y $L[\sigma] = L[\overline{\sigma}] = l$. Definimos $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ como una bisagra obtusa delgada si $(\gamma_1, \sigma, \alpha - \frac{1}{2}\pi)$ es una bisagra pequeña y $(\sigma, \gamma_2, \frac{1}{2}\pi)$ es una bisagra recta delgada.

(6) (B) es válido para bisagras obtusas delgadas.
Por la desigualdad del triángulo, se tiene que

$$\rho(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq \rho(\gamma_1(0), \sigma(l)) + \rho(\overline{\sigma}(l), \gamma_2(l_2))$$

Por (4) y (5),

$$\rho(\gamma_1(0), \sigma(l)) \leq \rho(\overline{\gamma}_1(0), \overline{\sigma}(l)), \qquad \rho(\sigma(l), \gamma_2(l_2)) \leq \rho(\overline{\sigma}(l), \overline{\gamma}_2(l_2)).$$

Entonces

$$\rho(\gamma_1(0), \gamma_2(l)) \leq \rho(\overline{\gamma}_1(0), \overline{\sigma}(l)) + \rho(\overline{\sigma}(l), \overline{\gamma}_2(l_2)) = \rho(\overline{\gamma}_1(0), \overline{\gamma}_2(l_2)).$$

Y se sigue el resultado.

Sea $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ una bisagra tal que $\alpha < \frac{1}{2}\pi$. Sea $\gamma_2(l)$ un punto en γ_2 muy cercano a $\gamma_1(0)$, y sea

$$\tau = \gamma_2|[0, l], \qquad \theta = \gamma_2|[l, l_2]$$

y $\sigma : [0, k] \to M$ geodésica minimizante de $\gamma_1(0)$ a $\gamma_2(l_2)$. Decimos que $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ es una bisagra aguda delgada si (γ_1, τ, σ) es un triángulo pequeño, $0 < l < l_2$ y $(\sigma, \theta, \frac{1}{2}\pi)$ es una bisagra recta delgada.

(7) (B) es válido para bisagras agudas delgadas.

Por (4), sabemos que existe un triángulo $(\overline{\gamma}_1, \overline{\tau}, \overline{\sigma})$ en $M^{H-\varepsilon}$ con $L[\overline{\gamma}_1] = L[\gamma_1], \qquad L[\overline{\tau}] = L[\tau], \qquad L[\overline{\sigma}] = L[\sigma]$,

$$\sphericalangle(-\overline{\gamma}_1(l_1), \overline{\tau}'(0)) = \overline{\alpha} \leq \alpha.$$

y además

$$\sphericalangle(-\overline{\tau}(l), -\sigma'(k)) = \overline{\alpha}_1 \leq \frac{1}{2}\pi.$$

Definamos $\overline{\theta} : [l, l_2] \to M^{H-\varepsilon}$ como

$$\overline{\theta}(l) = \overline{\tau}(l), \qquad \overline{\theta}'(l) = \overline{\tau}'(l),$$

y construyamos $\overline{\gamma}_2 = \overline{\tau} \cup \overline{\theta}$. Entonces

$$\sphericalangle(-\overline{\sigma}'(k), \overline{\theta}'(l)) = \pi - \overline{\alpha}_1 \geq \frac{1}{2}\pi.$$

Como $(\sigma, \theta, \frac{1}{2}\pi)$ es una terna recta delgada, de (1) y (5) tenemos que

$$\rho(\overline{\sigma}(0), \overline{\theta}(l_2)) \geq \rho(\sigma(0), \theta(l_2)).$$

Es decir,

$$\rho(\overline{\gamma}_1(0), \overline{\gamma}_2(l_2)) \geq \rho(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)).$$

Y como

$$\sphericalangle(-\overline{\gamma}_1', \overline{\gamma}_2(0)) = \overline{\alpha} \leq \alpha,$$

Entonces la afirmación se sigue de (1).

Definimos un triángulo $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ como delgado, si $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$ y $(\gamma_3, \gamma_2\alpha_1)$ son bisagras delgadas. Se sigue de (2), (5), (6) y (7) que el teorema es válido para triángulos delgados. Ahora vamos a probar el teorema para bisagras en general. Sea $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ una bisagra arbitraria como en (B). Sea N un número fijo y sea

$$\tau_{k.l} = \gamma_2|[\frac{kl_2}{N}, \frac{(k+l)l_2}{N}]$$

donde k, l son enteros con $0 \leq k,\, l \leq N$. Sea σ_k curva minimizante de $\gamma_1(0)$ a $\gamma_2(kl_2/N)$ y sea $T_{k,l} = (\sigma_k, \tau_{k,l}, \sigma k+1)$. Podemos suponer que

$$L[\gamma_1] + L[\sigma_N] \geq L[\gamma_2],$$

Como en la sección anterior, (B) se sigue inmediatamente. Observemos que $T_{k,l}$ es la que se cumplen todas las desiguldades siguientes:

$$\begin{aligned} L[\gamma_1] + L[\sigma_N] &\geq L[\gamma_2], \\ L[\tau_{0,k}] + L[\sigma_k] &\geq L[\gamma_1], \\ L[\tau_{k+l,N-k-l}] + L[\sigma_{k+l}] &\geq L[\sigma_N]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$L[\tau_{0,k}] + L[\sigma] + L[\tau_{k+l,N-k-l}] + L[\sigma_{k+l}] \geq L[\gamma_2]$$

$$= L[\tau_{0,k}] + L[\tau_{k,l}] + L[\tau_{k+l,N-k-l}]$$

ó

$$L[\sigma_k] + L[\sigma_{k+l}] \geq L[\tau_{k.l}].$$

Además, si N es suficientemente grande, por compacidad todos los triángulos $(\sigma_k, \tau_{k,l}, \sigma_{k+1})$ son delgados.

(8) Si (A) es válido para $T_{l,k}$ con k fija y para toda l, entonces (B) es válido para $T_{l,k+1}$ para una k fija y para toda l.

Asumiendo (A), existe un triángulo $\overline{T}_{l,k}$ en $M^{H-\varepsilon}$ con lados $\overline{\sigma}_k, \overline{\tau}_{k,l}, \overline{\sigma}_{k+l}$ congruente con $T_{l,k}$ tal que $\overline{\alpha}_k \leq \alpha_k$ y $\overline{\beta}_{k+l} \leq \beta_{k+l}$, donde $\alpha_k = \sphericalangle(\sigma_k', \tau_{k,l}')$ y $\beta_{k+l} = \sphericalangle(\sigma_{k+l}', -\tau_{l,k}')$. Nótese que $\beta_{k+l} + \alpha_{k+l} = \pi$. La afirmación se sigue del mismo modo que en (7) si extendemos $\overline{\tau}_{l,k}$ sumándolo a un segmento

$\overline{\tau}_{k,l,k+l+1}$ de longitud $L[\tau_{k,l,k+l+1}]$.

(9) Ahora, por inducción y por (3), se sigue que (A) y (B) son ciertos para $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ en $M^{H-\varepsilon}$.

(10) Hemos probado que (A) y (B) son válidos comparando triángulos en $M^{H-\varepsilon}$. Entonces sabemos que se cumple que para toda $\varepsilon > 0$,

$$\rho(\overline{\gamma}_1^{\varepsilon}(0), \overline{\gamma}_2^{\varepsilon}(l_2)) \geq \rho(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)),$$

donde $\overline{\gamma}_1^{\varepsilon}, \overline{\gamma}_2^{\varepsilon} \subset M^{H-\varepsilon}$. La función de la izquierda es continua en ε, entonces, hacemos $\varepsilon \to 0$ entonces ya demostramos (B). Usando el mismo argumento, sabemos que con las hipótesis de (A) existe un triángulo en $M^{H-\varepsilon}$ $(\overline{\gamma}_1^{\varepsilon}, \overline{\gamma}_2^{\varepsilon}, \overline{\gamma}_3^{\varepsilon})$ tal que $L[\gamma_i] = L[\overline{\gamma}_i^{\varepsilon}]$ y $\overline{\alpha}_i^{\varepsilon} \leq \alpha_i$, $i = 1, 3$, y si hacemos tender $\varepsilon \to 0$ entonces ya demostramos (A). □

Nota 4. *Necesitamos trabajar en $M^{H-\varepsilon}$ en los pasos (1)-(7) ya que si trabajáramos en M^H y para algún k, podría pasar que $L[\sigma_k] = \pi/\sqrt{H}$, no podríamos garantizar que $(\sigma_k, \tau_{k,l}, \sigma_{k+1})$ sea un triángulo pequeño.*

4.3. Teorema de la esfera de Toponogov

Haciendo uso de todos los resultados anteriores en este capítulo, podemos probar el siguiente teorema:

Teorema 15. ***de la esfera de Toponogov*** *Sea M una variedad riemanniana de dimensión n tal que $K_M \geq H > 0$ y supongamos que el diámetro de M es igual a $\pi/\sqrt{H}$. Entonces M es isométrica a $S^n_{1/\sqrt{H}}$ la esfera de curvatura H.*

Demostración. Tomemos $p, q \in M$ tales que $\rho(p, q) = \pi/\sqrt{H}$. Vamos a probar que todas las geodésicas normales de p pasan por q en el tiempo $t = \pi/\sqrt{H}$ y son por lo tanto minimizantes a q.

Sea

$$\gamma_1 : [0, t_0] \to M, \qquad 0 < t_0 < \pi/\sqrt{H}$$

cualquier segmento de geodésica tal que $\gamma_1(t_0) = p$, y sea

$$\gamma_2 : [0, \pi/\sqrt{H}] \to M$$

cualquier geodésica minimizante de p a q. Aplicando (B) del teorema de Toponogov, tenemos que $\rho(q, \gamma_2(0)) = \pi/\sqrt{H} - t_0$, entonces, si σ es una geodésica minimizante de q a $\gamma_1(0)$, se tiene que

$$L[\sigma \cup \gamma_1] = \pi/\sqrt{H}.$$

Por lo que $\sigma \cup \gamma_1$ debe formar una geodésica minimizante de p a q suave.

Se sigue que $\exp_p|B_{\pi/\sqrt{H}}(0) < T_pM$ es no singular. Además, si γ es cualquier geodésica de p a q y V cualquier campo de Jacobi a lo largo de γ tal que $\gamma(0) = 0$, entonces V también se anula en $\gamma(\pi/\sqrt{H})$. Ahora. todas las curvaturas seccionales de secciones que pasan por γ' tienen que ser iguales a H. Por el lema 9, $B_{\pi/\sqrt{H}}(p)$. es isométrica a $B_{\pi/\sqrt{H}}(\overline{p})$, donde $\overline{p} \in S^n_{1/\sqrt{H}}$. Por continuidad, todos los planos seccionales de M tienen curvatura H, por lo que M tiene curvatura constante. Por el teorema 3, la cubriente universal de M es isométrica a S^n. Por otra parte, si $I : T_{\overline{p}}S^n_{1/\sqrt{p}} \to T_pM^n$ es cualquier isometría, entonces $f = \exp_p \circ I \circ \exp_{\overline{p}}^{-1}$ se extiende a un homeomorfismo entre $S^n_{1/\sqrt{H}}$ y M^n, entonces M^n debe ser isométrica a $\mathbb{S}^n_{1/\sqrt{H}}$. □

Ya que demostramos el teorema de la esfera de Toponogov, podemos demostrar su generalización, para esto haremos uso fuertemente de los teoremas de comparación de eigenvalores demostrados en el capítulo 3.

Teorema 16. *Sea M una variedad riemanniana de dimensión n compacta con curvatura de Ricci $\geq (n-1)k > 0$ y $d_M = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$. Entonces M es isométrica a la esfera de curvatura k.*

Demostración. Por el teorema de Lichnerowicz sabemos que el primer valor propio de la variedad riemanniana con curvatura de Ricci $\geq k$, $\mu(M) \geq \frac{n}{n-1}k$, y como ahora la curvatura de Ricci es $\geq (n-1)k$ entonces $\mu(M) \geq nk$.

Por como tomamos al diámetro de M, podemos tomar dos bolas $B(x_1, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})$ y $B(x_2, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})$ con centros en x_1 y x_2 respectivamente que sean disjuntas.

Por los teoremas demostrados anteriormente, sabemos que

$$nk \leq \mu_1(M) \leq \lambda_1(B(x_i, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})) \leq nk,$$

es decir, $\lambda_1(B(x_i, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})) = nk$, que por el teorema 8, $B(x_i, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})$ es isométrica a $V_n(k, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})$. Lo que tenemos que demostrar es que M es la unión $\overline{B(x_1, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})}$ y $B(x_2, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})$

Ahora, si $M \backslash \overline{B(x_1, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})}$ contiene propiamente a $B(x_2, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})$, entonces

$$\lambda_1(M \backslash \overline{B(x_1, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})}) < \lambda_1(B(x_2, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})) = nk$$

Por lo que $\mu_1(M) < nk$ lo que contradice el hecho de que $\mu_1(M) \leq nk$, es decir, $M = \overline{B(x_1, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})} \bigcup (B(x_2, \frac{\pi}{2\sqrt{k}}))$ Por ende, M es isométrico a la esfera de curvatura k $\square$

Existen otros teoremas de la esfera que valdría la pena nombrar; por ejemplo, está el teorema de la esfera de Berger, que dice lo siguiente: Si M es una variedad simplemente conexa tal que $1 \geq K_M \geq \frac{1}{4}$, entonces, si $d(M) > \pi$, M es homeomorfa a $\mathbb{S}^n$; si $d(M) = \pi$, M es isométrica a un espacio simétrico.

El estudio del laplaciano da lugar a muchos resultados importantes en la geometría, por ejemplo, se pueden estudiar las superficies de curvatura constante negativa [3].

Bibliografía

[1] M. P. do Carmo, *Riemannian geometry.* Birkhäuser, 1992

[2] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne.* Springer-Verlag, 1971

[3] I. Chavel, *Eigenvalues in riemannian geometry.* Academic Press, inc., 1984

[4] J. Cheeger, D. G. Ebin, *Comparison theorems in riemannian geometry.*North-Holland publishing company, 1975

[5] M. E. Mazet, *Une majoration de λ_1 du type de Cheeger.* C. R. Acad. Sc. Paris, t. 277, 1973

[6] J. Cheeger, *The relation between the laplacian and the diameter for manifolds of non-negative curvature.* Department of Mathematics, University of California, Berkeley, USA, 1967

[7] Shiu-Yuen Cheng, *Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications.* Math. Z. 143, 289-297, 1975

[8] G. N. Watson, *A treatise on the theory or Bessel functions.* Cambridge: Cambridge University Press, 1994

[9] J. Jost, *Partial differential equations.* Springer, 2007

[10] I. Chavel, E. Feldman, *The first eigenvalue of the laplacian on manifolds of non-negative curvature.* 1974

[11] L. C. Evans, *Partial differential Equations.* American Mathematical Society

[12] , 1997 G. Leoni, *A first course in Sobolev spaces.* American Mathematical Society

[13] , 2009 M. Reed, B. Simon, *Functional Analysis, methods of modern mathematical phisics*. Vol. 1, Academic Press, London, 1975.