UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARACTERES DE ÁLGEBRAS DE FUNCIONES CONTINUAS CON PESOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
FERNANDO GARCÍA RUÍZ

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. ANGEL MANUEL CARRILLO HOYO

2011

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
   García
   Ruíz
   Fernando
   55 15 92 69 57
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   305522092

2. Datos del tutor
   M. en C.
   Angel Manuel
   Carrillo
   Hoyo

3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   Hugo
   Arizmendi
   Peimbert

4. Datos del sinodal 2
   M. en C.
   Alejandra
   García
   García

5. Datos del sinodal 3
   Dr.
   Carlos
   Hernández
   Garciadiego

6. Datos del sinodal 4
   Dra.
   Carmen
   Martínez-Adame
   Isaís

7. Datos del trabajo escrito
   Caracteres de álgebras de funciones continuas con pesos
   159p
   2011

Caracteres de álgebras de funciones continuas con pesos

Fernando García Ruíz

Índice general

Agradecimientos

He dudado, cuestionado y buscado, he observado por largas horas el agua inmóvil de las charcas en tardes secas y aunque nunca ha surgido una gota de una fuente invisible que rompa el equilibrio de su quietud, como tampoco puedo demostrar que existes, estés en donde estés, te agradezco, Dios.

Agradezco a mi familia, pues cada fibra y cada consecuencia de quien soy, ha nacido y se ha hecho más fuerte gracias a ellos. A mi hermano Paulo, por estirar su mano en mi ayuda siempre que lo necesité y por ser mi más viejo amigo, madera entrelazada, no sólo sangre, espíritu también... A mi hermana Ivett, por haberse convertido tantas veces en mi ejemplo, por mostrarme que el esfuerzo propio es el único camino que trae felicidad en la vida, el que se traza bajo los pies. A mi hermano Omar, por desentrañar el significado del trabajo para que yo lo viera. A Jacob, por brindarme su amistad y haber sacrificado tantas horas para auxiliarme aún cuando pudo desistir, por ser mi cuarto hermano. A mi padre, por no haberse limitado al papel que se le exige a un papá, por haber sido mi compañero en el juego y la pala que orientó mi cauce en tantas ocasiones.

Y muy especialmente, a mi madre, por enseñarme mi más valiosa lección, que los sueños no son vapor que se desvanece alrededor de quien los observa, que sólo pueden morir con el abandono, que en realidad los sueños son castillos que debemos construir, que tenemos la tierra y los bloques, sólo debemos usar nuestra fuerza y nuestra voluntad para levantarlos; gracias, madre, por darme esa fuerza, por haber cuidado de mí con tanto cariño, por haber sido ese punto de apoyo constante, el muro que siempre estuvo allí para detener mi caída, eres el agua que me regó y el sol que me hizo crecer y sobre todo, el ángel que me entregó absolutamente todo su amor. Gracias, mamá, esto es para ti.

Quiero agradecer de la manera más franca el apoyo de mi asesor de tesis, el M. en C. Angel Manuel Carrillo Hoyo, por su presencia incondicional en cada día y en cada instante, por sus sinceramente apreciados e importantísimos aportes, críticas, comentarios y sugerencias durante el desarrollo de este trabajo, por constituir con su persona y labor mi mejor ejemplo a seguir como profesor, investigador y ser humano.

A mis amigos de la Facultad de Ciencias, por haber compartido conmigo todas esas risas durante las tardes que seguían a nuestras clases.

Y a Azucena, por estar presente en esta recta final de mi tesis, por apoyarme, por inspirarme.

Debo cuanto soy a mis amigos, profesores y familia. Gracias a cada uno de ustedes.

Prólogo

Los homomorfismos complejos de un álgebra compleja E son llamados caracteres o funcionales lineales multiplicativas de E. A la colección de todos los caracteres no nulos se le llama el espectro algebraico de E y se denota por $\mathcal{M}^{\#}(E)$. Si E es un álgebra topológica, entonces a la subcolección $\mathcal{M}(E)$ de $\mathcal{M}^{\#}(E)$ formada por aquellos caracteres que son continuos es llamada el espectro (topológico) de E. A estos espectros se les da la topología inducida por la débil estrella (w^*) definida en el dual de E.

En lo sucesivo siempre consideraremos que E es un álgebra topológica compleja, más aún localmente convexa. A partir de E y un espacio topológico X se construyen las álgebra $C(X,E)$ y $C_b(X,E)$ formadas respectivamente por las funciones continuas y las continuas y acotadas, de X en E y en las que las operaciones son las usuales entre funciones. Cuando $E=\mathbb{C}$ se escribe simplemente $C(X)$ y $C_b(X)$.

La determinación de los espectros de un álgebra, en particular de álgebras de funciones continuas, es un tema que ha atraído a muchos investigadores. Resultados ampliamente conocidos son: $\mathcal{M}^{\#}(C(X))=X$ si X es compacto, el cual se generaliza para cuando X es realcompacto, y $\mathcal{M}^{\#}(C_b(X))=\beta(X)$, donde X es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ (completamente regular y Hausdorff) y $\beta(X)$ es la compactación de Stone-Čech de X.

Ejemplos de otros resultados menos conocidos son los que aparecen en los trabajos de A. Hausner [**Ha.**] y W. Dietrich [**Di.**] en donde se prueba, en el primer caso, que $\mathcal{M}(C(X,E))=X\times\mathcal{M}(E)$, cuando X es compacto y E es un álgebra conmutativa de Banach; en el segundo, que la misma fórmula es válida cuando X es $T_{3\frac{1}{2}}$ y $k-$espacio, E es completa y $\mathcal{M}(E)$ es localmente equicontinuo.

Con relación al espectro algebraico tenemos como ejemplos los artículos de W. Hery [**He.**] y el de S. Dierolf , K.-H. Schroder y J. Wengenroth [**Di.,Sc.,We.**] en donde se establece que $\mathcal{M}^{\#}(C(X,E))=X\times\mathcal{M}^{\#}(E)$ tanto cuando X es realcompacto, E es una Q-álgebra conmutativa con idéntico, con inversión continua y se cumple que $\mathcal{M}^{\#}(E)$ es localmente equicontinua o bien, X es discreto (Hery); como cuando X es realcompacto y E es un álgebra topológica metrizable con idéntico. Cualquier álgebra de Banach conmutativa con unidad satisface en ambos casos las hipótesis sobre E.

Todas las igualdades anteriores son en el sentido de que cada elemento del lado derecho determina un único carácter en el espectro respectivo y que todo ellos agotan al espectro. Y las que se refieren al espectro $\mathcal{M}$, son como espacios topológicos, es decir, la asociación punto- carácter es un homeomorfismo.

Hasta donde sabemos no se ha encontrado una igualdad del tipo anterior para $C_b(X, E)$ para cuando X es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ y A es un álgebra de Banach conmutativa con unidad.

Este trabajo se basa en el artículo [**Go.**] de W. Govaerts en el que se estudian los caracteres, particularmente los continuos, de las álgebras $CV(X, E)$ de funciones continuas con pesos, donde X es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$, E es una álgebra localmente convexa con espectro no nulo y V es una familia (de "pesos") multiplicativa de Nachbin. A $CV(X, E)$ se le da una topología que la hace localmente convexa.

Se prueba que $\mathcal{M}(CV(X, E)) = X \times \mathcal{M}(E)$ bajo la hipótesis de que V es de tipo puntual y se dan condiciones equivalentes para que esta igualdad se dé como igualdad de espacios topológicos. El resultado antes mencionado de Hausner es un caso particular del los teoremas de Govaerts. Y el de Dietrich se obtiene de ellos sin necesidad de que E sea completa y X sea un k-espacio.

En su artículo también da un ejemplo para ver que la hipótesis de que V sea de tipo puntual es esencial, y al hacerlo se obtiene un resultado por sí mismo interesante: la igualdad $\mathcal{M}(C_b(X), E) = \beta(X) \times \mathcal{M}(E)$ es falsa en general para cuando X es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ y A es un álgebra de Banach conmutativa con unidad. En ese ejemplo se tiene que $\mathcal{M}(C_b(X), E) = \beta(X \times \mathcal{M}(E))$.

Para presentar lo anterior de manera autocontenida se han incluido en esta tesis temas de análisis funcional y topología y se ha dividido en siete capítulos.

El primero se dedica a temas básicos del análisis funcional lineal. Se divide en dos partes. En la primera se estudian los espacios vectoriales topológicos, especialmente los espacios localmente convexos, los operadores lineales continuos en ellos definidos, el dual algebraico y topológico de espacios vectoriales topológicos y la topología débil estrella. En la segunda parte, se introducen las álgebras topológicas localmente convexas. Se hace énfasis en los resultados espectrales en álgebras de Banach, en los que se ve la estrecha relación entre los caracteres, la invertibilidad de los elementos y los ideales máximos del álgebra. Se concluye esa parte probando la igualdad $\mathcal{M}^{\#}(C(X))=X$ si X es compacto y exhibiendo un álgebra localmente convexa $E(=L^{\omega})$ para la cual $\mathcal{M}^{\#}(E)=\emptyset$.

El capítulo 2 también tiene dos partes. En la primera se presentan conceptos y resultados topológicos que se usarán en la segunda que es la medular. Ahí se da una prueba, debida a M. Rudin [**Ru.**], de que todo espacio pseudométrico es paracompacto; y se caracteriza la compactación de Stone-Čech $\beta(X)$ en términos de la C_b-inmersión de X en una compactación del mismo.

En la segunda parte del Capítulo 2 se desarrolla el articulo de Govaerts. Se definen lo que es una familia multiplicativa de Nachbin V en un espacio X, al que se supone $T_{3\frac{1}{2}}$, y el álgebra $CV(X,E)$, donde E es un álgebra localmente convexa. La familia V está formada por funciones positivas definidas en X y $CV(X,E)$ por las funciones continuas $f:X\to E$ tales que vf es una función acotada para todo "peso" $v\in V$.

En $CV(X,E)$ se definen seminormas y la topología que ellas definen la hacen un álgebra localmente convexa.

Al definir V se pide que la familia cumpla "(V4) Para cada $x\in X$ existe $v\in V$ tal que $v(x)\neq 0$" lo que no es requerido en el artículo. La condición es natural, pues equivale a pedir que $CV(X,E)$ sea de Hausdorff y tiene implicaciones sobre los resultados principales.

Diversos espacios de funciones continuas son álgebras $CV(X,E)$. Por ejemplo, $C(X)$ y $C_b(X)$ con la topología uniforme, y $(C_b(X),\beta)$ con la topología estricta.

Un conjunto con papel importante es el soporte de V (sop V), el cual está contenido en $\beta(X)$ y un concepto relevante, asociado con él, es que V sea de tipo puntual. Por haber exigido la propiedad (V4) al definir a la familia V, resulta que V es de tipo puntual si y sólo si $X=\text{sop } V$.

Una vez que se supone que $\mathcal{M}(E)\neq\emptyset$ se asocia a cada $(x,h)\in\text{sop } V\times\mathcal{M}(E)$ un carácter de $CV(X,E)$. El primero de los teoremas principales asegura que si V es de tipo puntual dicha asociación es biyectiva (y abierta). Así, $\mathcal{M}(CV(X,E))=\text{sop } V\times\mathcal{M}(E)$. El segundo, da condiciones para que sea continua y por tanto, la igualdad anterior es como espacios topológicos. En vista de lo dicho en párrafo anterior sop V puede sustituirse por X y así se presentan los teoremas en este trabajo.

El capítulo prácticamente concluye con ejemplos de álgebras particulares para los que los teoremas son válidos.

En el cuarto capítulo se muestra que $C_b(X,C(K))$ es un álgebra de funciones continuas con pesos, donde X es un espacio T_3 y K es un espacio compacto. Siempre que X se escoja de modo que $X\times K$ no es pseudocompacto se tendrá que $\mathcal{M}(CV(X,E)) \neq X \times \mathcal{M}(E)$, e inclusive $\mathcal{M}(CV(X,E)) \neq \beta(X) \times \mathcal{M}(E)$.

Para lo anterior resulta fundamental el *teorema de Glicksberg* relativo a la validez de la igualdad $\beta(X \times Y) = \beta(X) \times \beta(Y)$. El capítulo 3 se dedica a probar dicho teorema, por lo que es un preámbulo al 4.

Análogamente, el quinto capítulo da los antecedentes necesarios para el desarrollo del último capítulo. Se trabaja con los espacios realcompactos. Para ello se prueba y usa una caracterización reciente de dichos espacios que resulta especialmente cómoda para manejarlos. Ella se debe a Z. Ercan [**Er.**]. Posteriormente, se presentan los cardinales medibles, que son objetos cuya existencia es indecidible, por lo que aclaramos que se supondrá la existencia del primer ordinal D con cardinal medible.

Se prueba que D con la topología discreta no es realcompacto. Con base en esto se concluye que un conjunto A tiene cardinalidad no medible si y sólo si A con la topología discreta es realcompacto. Estos hechos son conocidos, pero las demostraciones que se dan en esta tesis son originales y usan la caracterización de Ercan. Posiblemente se publicarán en un artículo que por ahora está en versión preliminar [**Ga.**].

A D se le adjunta un punto y al espacio D^e así obtenido se le dota de una topología con la cual es realcompacto y que induce en D la topología discreta.

Con esos dos conjuntos Govaerts construye un ejemplo en que

$$\mathcal{M}^{\#}(CV(X,E)) \neq X \times \mathcal{M}^{\#}(E).$$

El ejemplo es el álgebra $C(D^e, C(D))$, donde en $C(D)$ se considera la topología de la convergencia puntual. Esto es desarrollado en el capítulo final.

Capítulo 1

Estructuras algebraico-topológicas

En este capítulo presentamos nociones y resultados que son básicos para lo que veremos más adelante. Iniciamos con las nociones de espacio vectorial y topología compatible con una estructura lineal.

Espacios vectoriales.

1.1. Introducción

Definición 1.1.1. Sea X un conjunto no vacío. Se dice que X es *espacio vectorial o lineal* sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ si hay dos operaciones binarias: la suma y el producto por un escalar

$$\begin{aligned} + : X \times X &\longrightarrow X \\ (y, z) &\longmapsto y + z, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times X &\longrightarrow X \\ (a, z) &\longmapsto a \cdot z, \end{aligned}$$

donde la suma es conmutativa, asociativa, tiene neutro, que denotamos por 0, y todo $x \in X$ tiene inverso con respecto a la suma, al que denotamos por $-x$. La segunda operación tiene las siguientes propiedades:

$1x = x$, $(\alpha\beta)\, x = \alpha\, (\beta x)$, $(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x$ y $\alpha\, (x + y) = \alpha x + \alpha y$ si $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $x, y \in X$.

1.1.1. Conjuntos convexos, balanceados y absorbentes.

Definición 1.1.2. Sea A un subconjunto de un espacio vectorial X, entonces decimos que A es:

Convexo: si $\lambda A + (1 - \lambda)\, A \subset A$ siempre que $\lambda \in [0, 1]$.
Balanceado: si $\lambda A \subset A$ cuando $|\lambda| \leq 1$.

Absorbente: si para cada $x \in A$ existe $t > 0$ tal que $x \in \lambda A$ siempre que $|\lambda| \geq t$. Equivalentemente, para toda $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|\lambda| < \varepsilon$ implica $\lambda x \in A$.

Disco: si A es convexo y balanceado.

PROPOSICIÓN 1.1.3. *La intersección de un número finito de conjuntos absorbentes, es absorbente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea un conjunto finito $N \subset \mathbb{N}$ y una familia de conjuntos absorbentes A_n con $n \in N$, sea $A = \bigcap_{n \in N} A_n$. Si $x \in A$, entonces $x \in A_n$ para todo $n \in N$. Por ser A_n absorbente existe $t_n > 0$ tal que $x \in \lambda A_n$ siempre que $|\lambda| \geq t_n$. Sea $t = \sup \{t_n : n \in N\}$ y λ tal que $|\lambda| \geq t$, entonces $|\lambda| \geq t_n$ y así $x \in \lambda A_n$ para todo $n \in N$. Por tanto, $x \in A$ y así, A es absorbente. $\square$

PROPOSICIÓN 1.1.4. *La intersección de una familia arbitraria de conjuntos convexos, balanceados o discos es un conjunto convexo, balanceado o disco, respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos una familia de conjuntos, $\{A_i\}_{i \in I}$ y sea $A = \bigcap_{i \in I} A_i$. Supongamos que cada A_i es convexo y tomemos $\lambda \in [0, 1]$ y $y \in A$ entonces $y \in A_i$ para todo $i \in I$, por lo que $\lambda y + (1 - \lambda) y \in A_i$ para todo $i \in I$, de lo que se sigue que $\lambda y + (1 - \lambda) y \in A$ lo que se traduce en que $\lambda A + (1 - \lambda) A \subset A$. Así, A es convexo.

Ahora supongamos que cada A_i es balanceado, por lo que $\lambda A_i \subset A_i$ para todo $i \in I$ y $|\lambda| \leq 1$. Tomemos $y \in A$ y $|\lambda| \leq 1$, entonces $y \in A_i$ para todo $i \in I$ y por tanto $\lambda y \in A_i$ para todo i, lo que prueba que A es balanceado.

Por ultimo supongamos que A_i es un disco para todo $i \in I$, entonces A es disco ya que cada A_i es balanceado y convexo, por lo que su intersección es balanceada y convexa, según lo antes visto. $\square$

TEOREMA 1.1.5. *Sea A un subconjunto de un espacio vectorial X. Si α, β son reales no negativos, entonces $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta) A$ si A es convexo. Para cualesquiera $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, los conjuntos $x + A$ y λA son convexos si A es convexo y λA es balanceado* si *A lo es. De donde, λA es disco si A es un disco.*

DEMOSTRACIÓN. La primera afirmación es obvia si $\alpha + \beta = 0$. Supongamos que $\alpha + \beta > 0$. Para todo conjunto A, se tiene que $(\alpha + \beta) A \subset \alpha A + \beta A$. Sea $x \in \alpha A + \beta A$, entonces $x = \alpha y + \beta z$ con $y, z \in A$ de esto tenemos que $\frac{x}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} y + \frac{\beta}{\alpha + \beta} z \in A$, ya que A es convexo; al despejar llegamos a que

$x \in (\alpha+\beta) A$, de donde obtenemos que $\alpha A+\beta A \subset (\alpha+\beta) A$ y se sigue la igualdad.

Ahora supongamos que A es convexo y tomemos $y \in x+A$, esto quiere decir que $y = x+a$ con $a \in A$. Como A es convexo se tiene que,

$$\begin{aligned}
\lambda (x+A) + (1-\lambda)(x+A) =& \lambda x + \lambda A + x - \lambda x + (1-\lambda) A \\
=& x + \lambda A + (1-\lambda) A \\
=& x + ((1-\lambda) A + \lambda A) \\
=& x + A.
\end{aligned}$$

Es decir, $x+A$ es convexo.

Veamos que λA es convexo, tomemos $\alpha \in [0,1]$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha (\lambda A) + (1-\alpha) \lambda A =& \lambda (\alpha A + (1-\alpha) A) \\
=& \lambda A.
\end{aligned}$$

O sea, λA es convexo.

Supongamos que A es balanceado y sea $|\alpha| \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha (\lambda A) =& \lambda (\alpha A) \\
\subset& \lambda A.
\end{aligned}$$

Por lo que λA es balanceado. Así λA *es disco si* A *es un disco.* □

Introducimos un nuevo concepto relativo a la convexidad. Dado un conjunto A de un espacio vectorial X, podemos hablar del mínimo convexo que lo contiene, ya que al menos X es uno de esos conjuntos y es fácil ver que la intersección arbitraria de convexos es un convexo. Con lo que tiene sentido la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.1.6. La envolvente convexa A_c de un conjunto $A \subset X$ es la intersección de todos los conjuntos convexos $C \subset X$ que contiene a A, o lo que es lo mismo, A_c es el mínimo subconjunto convexo de X que contiene a A.

TEOREMA 1.1.7. *Sea* A *un subconjunto de* X*, entonces*

$$A_c = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in A, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $B = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in A, \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$. Claramente B es convexo y $A \subset B$, entonces $A_c \subset B$, por definición. Sea $C \subset X$ un convexo tal que $A \subset C$. Debemos probar que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in C$ si

$n \in \mathbb{N}$, $x_i \in A$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, lo cual haremos por inducción. La afirmación es obvia para $n = 1$ y 2 . Supongámosla válida para un natural $n \geq 2$. Sean $x_i \in A$ y $\lambda_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq n+1$ y tales que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Podemos suponer que $s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{s} x_i \in C$$

por hipótesis de inducción; de donde,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = s \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{s} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in C.$$

□

TEOREMA 1.1.8. *Si A es un conjunto balanceado, entonces A_c es balanceado.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema anterior tenemos que:

$$A_c = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in A, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Sea $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ un elemento de A_c y$|\lambda| \leq 1$, entonces:

$$\lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda x_i,$$

y como $\lambda x_i \in A$, por ser A un conjunto balanceado, entonces

$$\lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right) \in A_c.$$

Así, A_c es balanceado. □

1.2. Espacios vectoriales topológicos. Base local del cero

DEFINICIÓN 1.2.1. [Base de filtro] Sea X un conjunto. Si $\mathcal{B}$ es un conjunto no vacío de subconjuntos no vacíos de X tal que la intersección de dos conjuntos en $\mathcal{B}$ contiene un conjunto en $\mathcal{B}$, entonces se dice que $\mathcal{B}$ es una *base de filtro* en X.

Si en un espacio vectorial está definida una topología "bien relacionada" con su estructura lineal, entonces es llamado un espacio vectorial topológico. De manera precisa tenemos:

DEFINICIÓN 1.2.2. [Espacio vectorial topológico] Un espacio vectorial X con una topología τ para la cual las funciones suma y producto por escalares definidas en X son continuas en $X \times X$ y $\mathbb{F} \times X$, respectivamente, se llama espacio vectorial topológico. En este caso también se dice que la topología τ es compatible con la estructura lineal de X o que es una topología lineal.

Con frecuencia se usa el siguiente hecho:

Dados una vecindad V de 0 en un espacio vectorial topológico X y $n \geq 1$ existe una vecindad U de 0 tal que

$$\overbrace{U + \cdots + U}^{n} \subset V. \tag{1.2.1}$$

El caso $n = 2$ se cumple porque la suma es continua en $(0, 0)$. Los restantes se obtiene por inducción, recordando que $A \subset A + A$ si $0 \in A$.

Es claro que si (X, τ) es un espacio topológico no vacío, entonces una base para la topología que no contenga al vacío es una base de filtro.

DEFINICIÓN 1.2.3. [Espacio topológico homogéneo] Un espacio topológico X es homogéneo si dados dos elementos $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $f : X \to X$ tal que $f(x) = y$.

TEOREMA 1.2.4. *En todo espacio vectorial topológico X la función $T_y : X \longrightarrow X$ que asocia a cada x el elemento $x + y$, para y fijo, es un homeomorfismo. Este tipo de función se llama traslación.*

DEMOSTRACIÓN. Si $T_y(x) = T_y(x')$, entonces $x + y = x' + y$ y así, $x = x'$, por lo que es una función inyectiva. Claramente $T_y(x - y) = x$ para cualquier $x \in X$, por lo que es una función sobre.

Por ser X un espacio vectorial topológico, la suma es continua, y T_y es la composición de la función $x \to (x, y)$ y la suma, por lo que es continua, al igual que su inversa, pues observamos que ésta es T_{-y}. Entonces T_y es un homeomorfismo. □

COROLARIO 1.2.5. *Todo espacio vectorial topológico es homogéneo.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos un espacio vectorial topológicos y sean x, y elementos de X. T_{-x+y} es un homeomorfismo por el Teorema 1.2.4 y

$$T_{-x+y}(x) = y,$$

por lo que el espacio es homogéneo. □

TEOREMA 1.2.6. *En todo espacio vectorial topológico X la función $H_\lambda : X \longrightarrow X$ que asocia a cada x el elemento λx, para un escalar fijo $\lambda \neq 0$, es un homeomorfismo. Este tipo de función es llamada homotecia.*

DEMOSTRACIÓN. Si $H_\lambda(x) = H_\lambda(y)$ se tiene que $\lambda x = \lambda y$, como λ es no nulo, se obtiene que $x = y$; de donde, la función inyectiva. Es claro que $H_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}x\right) = x$ par todo $x \in X$, por lo que es una función suprayectiva.

Por ser X un espacio vectorial topológico, el producto por un escalar es continuo. La función H_λ es continua por ser la composición de la función $x \to (\lambda, x)$ y el producto por un escalar. Como la inversa H_λ es también una homotecia $\left(H_{\frac{1}{\lambda}}\right)$, concluimos que H_λ es un homeomorfismo. □

TEOREMA 1.2.7. *Sea X un espacio vectorial topológico. Si $\mathcal{V}(0)$ es el conjunto de vecindades de 0, entonces el conjunto de vecindades de $x \in X$, que denotaremos por $\mathcal{V}(x)$, es $x + \mathcal{V}(0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 1.2.4 la función $T_x : X \longrightarrow X$ es una función abierta. Si tomamos $V \in \mathcal{V}(0)$, se tiene que $T_x(V) = x + V$ es una vecindad de $T_x(0) = x$.

Inversamente, si tomamos una vecindad U de x se tiene que

$$T_x^{-1}(U) = T_{-x}(U)$$

es una vecindad de $T_{-x}(x) = 0$; es decir, $-x + U \in \mathcal{V}(0)$ y entonces,

$$U = x + (-x + U).$$

□

Por lo anterior, al conocer las vecindades del cero en X, conocemos todas las vecindades del espacio vectorial topológico. También si conocemos una base de vecindades de cero, entonces conocemos una base de vecindades de cada punto de X.

TEOREMA 1.2.8. *Toda vecindad de cero en un espacio vectorial topológico X es absorbente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea V una vecindad del cero, como la función producto es continua y $0x = 0$, entonces existe $r > 0$ y U vecindad del x tal que $B_r(0)\,U \subset V$; de aquí se sigue que $x \in |\lambda|\,V$ para $|\lambda| > \dfrac{1}{r}$, por lo que V es absorbente. □

PROPOSICIÓN 1.2.9. *Si B es un conjunto balanceado de un espacio vectorial topológico X, entonces su cerradura $\overline{B}$ es un conjunto balanceado.*

Demostración. Sean $x \in \overline{B}$, $|\lambda| \leq 1$ y (x_i) una red en B que converge. Entonces $\lambda x_i \in B$ para todo i y $\lambda x_i \to \lambda x$; de donde, $\lambda x \in \overline{B}$. □

Proposición 1.2.10. *Toda vecindad de cero en un espacio vectorial topológico X contiene una vecindad balanceada.*

Demostración. Sea V una vecindad de cero. Como el producto por escalares es continuo, existe $r > 0$ y U vecindad del cero en X tales que $D_r(0)\,U \subset V$. Es claro que $D_r(0)\,U$ es balanceado y es además vecindad de 0, ya que $\frac{r}{2}U$ es vecindad de 0 y $\frac{r}{2}U \subset D_r(0)\,U$. □

Corolario 1.2.11. *Todo espacio vectorial topológico X tiene una base local del cero formada por vecindades balanceadas.*

Teorema 1.2.12. *Todo espacio vectorial topológico es regular. Es decir, cualquier vecindad de cualquier punto x contiene una vecindad cerrada de x.*

Demostración. Basta probarlo para cualquier vecindad V de 0. Por la continuidad de la suma y el producto por escalares, tenemos que la resta es continua, ya que las composiciones

$$\begin{array}{ccccc} X & \to & \mathbb{F}\times X & \to & X \\ y & \to & (-1,y) & \to & (-1)\,y=-y \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccccc} X\times X & \to & X\times X & \to & X \\ (x,y) & \to & (x,-y) & \to & x+(-y)=x-y \end{array}$$

son continuas.

Así, dada una vecindad V de 0, existen vecindades de 0, W y W' tales que $W - W' \subset V$. Hagamos $U = W \cap W'$, entonces U es vecindad del cero y $U \subset U - U \subset V$. Probaremos que $\overline{U} \subset V$. Sea $x \in \overline{U}$, entonces $(x+U)\cap U \neq \emptyset$, de lo que se obtiene que existen $y, z \in U$ tales que $x+y=z$. Entonces $x = z - y \in U - U \subset V$. □

Corolario 1.2.13. *Todo espacio vectorial topológico X tiene una base local del cero formada por vecindades balanceadas y cerradas.*

Demostración. Sea V una vecindad de 0. Por el Teorema 1.2.12 existe una vecindad V_1 del 0 que es cerrada y $V_1 \subset V$. Por la proposición existe una vecindad B del 0 que es balanceada y $B \subset V_1$. Entonces $\overline{B} \subset V_1 \subset V$ y $\bar{B}$ es cerrado, balanceado y además vecindad de 0 por contener a B. □

A menos que otra cosa se diga a partir de ahora

$$D_r(\lambda_0) = \{\lambda \in \mathbb{F} : |\lambda - \lambda_0| < r\}$$

para cada $r > 0$ y $\lambda_0 \in \mathbb{F}$.

TEOREMA 1.2.14. *Sea X un espacio lineal sobre $\mathbb{F}$. Las siguientes condiciones sobre un base de filtro $\mathcal{B}$ aseguran que $\mathcal{B}$ es una base de vecindades (base local) del cero para una topología lineal τ.*

(a) Todo $V \in \mathcal{B}$ es balanceado y absorbente.

(b) Para todo $V \in \mathcal{B}$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U + U \subset V$.

Para esta topología un subconjunto A de X es abierto si y sólo si para todo $x \in A$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x + V \subset A$.

Inversamente, si τ es una topología lineal para X, entonces hay una base $\mathcal{B}$ de vecindades del cero para τ que satisface (a) y (b). Más aún, los elementos de $\mathcal{B}$ pueden tomarse cerrados.

DEMOSTRACIÓN. Definimos $A \in \tau$ si para todo $x \in A$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x+V \subset A$. Es fácil ver que τ es una topología en X. Veremos que en esta topología $x+V$ es una vecindad de x para todo $x \in X$ y $V \in \mathcal{B}$. Afirmamos que $A = \{y \in X : y + W \subset x + V \text{ para algún } W \in \mathcal{B}\ \}$ es un abierto. Sea $y \in A$ y supongamos que $y + W \subset x + V$, con $W \in \mathcal{B}$. Por (b) existe $U \in \mathcal{B}$ tal que si $U + U \subset W$, por lo que

$$z + U \subset y + U + U \subset y + W \subset x + V$$

si $z \in y+U$. Es decir, $y+U \subset A$. Finalmente como es claro que $x \in A \subset x+V$ se tiene que $x + V$ es una vecindad de x.

De lo anterior y la definición de τ, se sigue que la colección

$$\{x + V : V \in \mathcal{B}\}$$

es una base de vecindades de x para cada $x \in X$.

La suma es continua, pues dados $x, y \in X$ y $V \in \mathcal{B}$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U + U \subset V$ y por consiguiente, $(x + U) + (y + U) \subset x + y + V$.

Ahora tenemos que ver que el producto por un escalar es continuo. Sean $\lambda \in \mathbb{F}$, $x \in X$ y $V \in \mathcal{B}$.

A partir de (b) podemos deducir que dados $V \in \mathcal{B}$ y $n \geq 1$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U + U + U + \ldots + U \subset V$ donde hay n sumandos en el miembro izquierdo.

Sea $n \geq 1$ tal que $|\lambda| \leq n$. Existe $W \in \mathcal{B}$ tal que

$$\overbrace{W + W + ... + W}^{n+2} \subset V.$$

Como W es balanceado, entonces $\lambda W \subset nW$ *y* por ser absorbente, existe un número positivo r que cumple que $D_r(0)\, x \subset W$. Podemos suponer que $r < 1$; así $D_r(0)\, W \subset W$ por ser W balanceado. Afirmamos que

$D_r(\lambda)(x+W) \subset (\lambda x + V)$. Sean $\lambda' \in D_{\frac{r}{2}}(\lambda)$ y $y \in x+W$.

$$\lambda' y - \lambda x = (\lambda' - \lambda)(y-x) + (\lambda' - \lambda)x + \lambda(y-x) \subset W + W + nW \subset V.$$

O sea, $\lambda' y \in \lambda x + V$ por lo que el producto por un escalar es continuo en (λ, x).

La parte "inversamente" es una recapitulación de parte de lo visto antes del teorema. $\square$

Teorema 1.2.15. *Sea A un subconjunto balanceado de un espacio vectorial topológico. Si 0 pertenece al interior de A, denotado por $IntA$, entonces $IntA$ es balanceado.*

Demostración. Supongamos que $0 < |\lambda| \leq 1$, entonces como la homotecia dada por λ es un homeomorfismo, tenemos

$$\lambda Int(A)=Int(\lambda A)\subset Int(A).$$

Si $\lambda = 0$ es obvio lo anterior. Por lo que $Int(A)$ es balanceado. $\square$

Teorema 1.2.16. *El interior de un subconjunto convexo de un espacio vectorial topológico es convexo.*

Demostración. Sean E convexo y $\alpha, \beta \geq 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$. Si $\alpha, \beta \neq 0$, entonces:

$$\alpha Int(E) + \beta Int(E) = Int(\alpha E) + Int(\beta E) \subset Int(\alpha E + \beta E) = Int(E).$$

Si $\alpha = 0$ o $\beta = 0$, es obvio que $\alpha Int(E) + \beta Int(E) = Int(E)$. $\square$

1.3. Espacios localmente convexos

Trabajaremos con espacios vectoriales topológico con mayor estructura. Primero introduciremos el concepto de *espacio localmente convexo.*

Definición 1.3.1. [Espacio localmente convexo] Un espacio vectorial topológico (X, τ) se dice que es localmente convexo si para cada $x \in X$ existe una base local $\mathcal{B}$ de x tal que todo $V \in \mathcal{B}$ es convexo. En este caso también se dice que τ es una topología localmente convexa.

Proposición 1.3.2. *Todo espacio localmente convexo X tiene una base local del cero formada por vecindades abiertas, balanceadas y convexas.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base local de 0 en X tal que todo $V \in \mathcal{B}$ es convexo. Para cada $V \in \mathcal{B}$, existe una vecindad balanceada B del 0, contenida en V. Entonces, la envolvente convexa B_c es un conjunto balanceado, convexo y además, vecindad de 0 porque $B \subset B_c$; como V es convexo, entonces $B_c \subset V$. Por último, $\mathrm{int}(B_c)$ es balanceado, convexo y abierto. $\square$

TEOREMA 1.3.3. *Sea X un espacio lineal sobre $\mathbb{F}$. Las siguientes condiciones sobre un base de filtro $\mathcal{B}$ en X aseguran que $\mathcal{B}$ es una base de vecindades del cero en X para una topología localmente convexa.*

(a) Todo $V \in \mathcal{B}$ es un disco absorbente.

(b) Para todo $V \in \mathcal{B}$, existe $\lambda \in (0, 1/2]$ tal que $\lambda V \in \mathcal{B}$.

Para esta topología un subconjunto A de X es abierto si y sólo si para todo $x \in A$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x + V \subset A$.

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que si $\mathcal{B}$ tiene las propiedades señaladas, entonces satisface las del Teorema 1.2.14. Por (a) se tendrá además que cada $V \in \mathcal{B}$ es convexo. Es claro que se cumple la condición (a) del Teorema 1.2.14. Por otra parte, por (b) dado $V \in \mathcal{B}$ existe $\lambda \in (0, 1/2]$ y $V \in\in \mathcal{B}$ tales que $\lambda V \in \mathcal{B}$. Sea $U = \lambda V$, entonces U es convexo y balanceado y por tanto

$$U + U = 2U = 2\lambda V \subset V.$$

O sea se cumple la condición (b) del Teorema 1.2.14. $\square$

1.3.1. Seminormas. Para continuar con nuestro estudio de los espacios vectoriales topológicos, introducimos la noción de seminorma, concepto que juega un papel importante con relación a los espacios localmente convexos.

DEFINICIÓN 1.3.4. Sea X un espacio vectorial. Una función $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una seminorma si cumple las siguientes condiciones:

(a) $p(x) \geq 0$ para todo $x \in X$.

(b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in X$.

(c) $p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ y $x \in X$.

Si además $p(x) = 0$ sólo cuando x es cero, se dice que p es una norma.

Observemos que por (b) se tiene que

$$p(x) = p(x + y - y) \leq p(x + y) + p(y);$$

al despejar obtenemos $p(x) - p(y) \leq p(x + y)$; análogamente para $p(y)$ obtenemos que $p(y) - p(x) \leq p(x + y)$, por lo que concluimos que

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x + y).$$

Definimos $V_p = \{x \in X : p(x) < 1\}$ y $\overline{V}_p = \{x \in X : p(x) \leq 1\}$.

TEOREMA 1.3.5. *Sea X espacio vectorial y p una seminorma:*

(a) Si q es seminorma, entonces $p(x) \leq q(x)$ para todo x si y sólo si $V_q \subset V_p$.

(b) Para todo vector x se tiene que, $x + V_p = \{y \in X : p(y - x) < 1\}$.

(c) V_p es un disco absorbente.

Demostración. (a) Supongamos que $p(x) \leq q(x)$ para todo $x \in X$. Sea $x \in V_q$; por definición, tenemos que $p(x) \leq q(x) < 1$, de donde $p(x) < 1$, lo que significa que $x \in V_p$, y por tanto, $V_q \subset V_p$. Ahora supongamos que $V_q \subset V_p$ y que existe x en X tal que $p(x) > q(x)$, entonces $\frac{q(x)}{p(x)} < 1$, o sea $q\left(\frac{x}{p(x)}\right) < 1$ y por hipótesis $p\left(\frac{x}{p(x)}\right) < 1$ lo que no es posible. Por tanto, $p(x) \leq q(x)$ para todo $x \in X$.

(b) Dado $z \in x + V_p$, entonces sabemos que $z - x \in V_p$ y entonces $p(z-x) < 1$, o sea, $x + V_p \subset \{y \in X : p(y-x) < 1\}$.

Sea $z \in \{y \in X : p(y-x) < 1\}$. Podemos escribir $z = x + z - x$, y como $p(z-x) < 1$, tenemos que $z - x \in V_p$ y entonces $z \in x + V_p$.

(c) V_p es balanceado, ya que $p(tx) = |t|\, p(x) \leq p(x) < 1$ si $|t| \leq 1$. Tomemos $x \in X$. Es claro que $x \in V_p$ cuando $p(x) = 0$. Si $p(x) > 0$, entonces $|t| < \frac{1}{p(x)}$ implica entonces $p(tx) = |t|\, p(x) < 1$, por tanto, $tx \in V_p$, por lo que V_p es absorbente. Por último, sean $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha + \beta = 1$ y $x, y \in X$, entonces $p(\alpha x + \beta y) \leq p(\alpha x) + p(\beta y) = \alpha p(x) + \beta p(y) < \alpha + \beta = 1$. Así, V_p es convexo. $\square$

1.3.2. Funcionales de Minkowski. Nuestro siguiente paso es ver cómo a partir de conjuntos balanceados, convexos y absorben entes obtenemos seminormas, las cuales llamaremos *funcionales de Minkowski*.

Sea V un conjunto absorbente de un espacio vectorial X. Definimos la función como

$$\begin{array}{rcl} p : X & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ p(x) & = & inf\,\{t > 0 : x \in tV\}. \end{array}$$

Esta definición tiene sentido, ya que V es absorbente y es claro que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. y que $p(0) = 0$.

Probaremos algunas de las propiedades de esta nueva función.

Teorema 1.3.6. *Si V es absorbente y balanceado, entonces el funcional de Minkowski p definido para V es absolutamente homogéneo; es decir*

$$p(\lambda x) = |\lambda|\,(p(x))$$

para todo $x \in X$ y todo escalar λ.

Demostración. La igualdad es obvia si $\lambda = 0$. Supongamos que $\lambda \neq 0$. Como V es balanceado, entonces $\frac{1}{\lambda}V = \frac{1}{|\lambda|}V$, de lo que se sigue que

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= inf\ \{t > 0 : \lambda x \in tV\} \\ &= inf\ \left\{t > 0 : x \in \frac{t}{|\lambda|}V\right\} \\ &= |\lambda|\, inf\ \{t' > 0 : x \in t'V\} \\ &= |\lambda|\, p(x). \end{aligned}$$

□

Con esto ya tenemos dos de las tres propiedades necesarias para que p sea una seminorma, la tercera se cumple si le pedimos un poco más a nuestro conjunto, que sea convexa.

Teorema 1.3.7. *Si V es absorbente y convexo, entonces el funcional de Minkowski p para V satisface la desigualdad del triángulo, es decir,*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

para cualesquiera $x, y \in X$.

Demostración. Si $x \in sV$ y $y \in tV$, con $s, t > 0$, entonces $x+y \in sV + tV$, y por el Teorema 1.1.5, $sV + tV = (s+t)V$; de donde, $x+y \in (s+t)V$ de lo que se sigue que $p(x+y) \leq s+t$ y por tanto, al tomar el ínfimo de las sumas del lado derecho al variar s y t obtenemos la desigualdad del triángulo. □

Corolario 1.3.8. *Si V es un disco absorbente, entonces su funcional de Minkowski es una seminorma.*

Nuestro siguiente objetivo es trabajar con espacios localmente convexos y su relación con los funcionales de Minkowski.

El primer paso será crear una topología a partir de un conjunto de seminormas, de hecho tomaremos la mínima topología que hace continua a cada una de las seminormas. Para esto veremos resultados sobre la continuidad de seminormas.

Teorema 1.3.9. *Sean A un disco absorbente en un espacio vectorial topológico X y p su funcional de Minkowski, entonces $int(A) \subset V_p \subset A$. Por tanto, V_p es una vecindad de 0 en X. Si A es abierto entonces V_p es abierto ya que en ese caso $V_p = A$.*

Demostración. Sea $x \in \operatorname{int}(A)$. Si $t \longrightarrow 0$, entonces $(t+1)x \longrightarrow x$, por lo que para t suficientemente pequeña y positiva se tiene que $1 < t+1$ y $(t+1)x \in \operatorname{int}(A)$. Así, $p(x) < 1$ y por tanto, $x \in V_p$.

Ahora, $x \in V_p$ significa que $p(x) < 1$, por lo que existe $0 < t < 1$ tal que $x \in tA$ y por ser A balanceado, $x \in A$, por lo que $V_p \subset A$.

TEOREMA 1.3.10. *Si p es una seminorma definida en un espacio vectorial topológico X, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*
(a) p es continua.
(b) V_p es una vecindad abierta de 0.
(c) $\overline{V}_p$ es una vecindad de 0.
(d) p *es continua* 0.
(e) Existe en X una seminorma continua q tal que $p \leq q$.

Lo primero que demostraremos es la equivalencia de las primeras cuatro afirmaciones y después será fácil demostrar su equivalencia con la última.

(a) $\Rightarrow$(b) p es continua por lo que

$$p^{-1}([0,1)) = \{x \in X : p(x) < 1\} = V_p$$

es un abierto y $0 \in V_p$. Así V_p es una vecindad abierta de 0.

(b) $\Rightarrow$ (c) Como $V_p \subset \overline{V}_p$ y V_p es una vecindad de 0, entonces $\overline{V}_p$ es vecindad de 0.

(c) $\Rightarrow$ (d) Supongamos que $\overline{V}_p$ es una vecindad de 0 y sea $\epsilon > 0$. Sabemos que $\epsilon\overline{V}_p$ es una vecindad de 0. Si (x_r) es una red en X que converge a 0, entonces $x_r \in \epsilon\overline{V}_p$ eventualmente, o en otras palabras, $p(x_r) \leq \epsilon$, eventualmente. Así, $p(x_r) \longrightarrow 0$ y p es continua en 0.

(d) $\Rightarrow$ (a) Si (x_r) es una red en X que converge a x, se sigue que $x_i - x \longrightarrow 0$ por lo que $p(x_i - x) \longrightarrow 0$, por ser p continua en cero, y como $\mid p(x_i) - p(x) \mid \leq p(x_i - x)$, tenemos que $p(x_i) \longrightarrow p(x)$; de donde p es continua en x.

(a) $\Rightarrow$ (e) Es obvia.

(e) $\Rightarrow$ (c) Si en X existe una seminorma continua q tal que $p \leq q$, entonces $\overline{V}_q \subset \overline{V}_p$ y como $\overline{V}_q$ es vecindad, entonces $\overline{V}_p$ lo es.

□

Estas distintas formas de decir que una seminorma p es continua las usaremos más adelante, sobre todo la (b) que nos dará información sobre los funcionales de Minkowski.

1.3.3. Caracterización de los espacios localmente convexos. Supongamos que $\mathcal{P} = \{p_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una colección de seminormas. Construiremos a partir de éstas una topología en X localmente convexa τ, llamada la topología generada por $\mathcal{P}$, que hace continua a cada una de las seminormas. Observamos que pedir que cada seminorma sea continua equivale a pedir que para tal topología τ se tenga que V_p sea un abierto para todo $p \in \mathcal{P}$, y de esto se sigue que ϵV_p será $\tau-$abierto para todo $\epsilon > 0$. De donde, si $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\}$ es una familia finita de seminormas en $\mathcal{P}$, entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \epsilon_i V_{p_i}$ será un $\tau-$abierto. Esto nos sugiere considerar la familia

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \epsilon_i V_{p_{\alpha_i}} : n \in \mathbb{N}, \{p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, p_{\alpha_3}, \ldots, p_{\alpha_n}\} \subset \mathcal{P}, \epsilon_i > 0, 1 \leqq i \leq n \right\},$$

para ser una base local del 0.

La familia $\mathcal{B}$ es claramente una base de filtro. Además por la Proposición 1.1.3 y el Teorema 1.1.4, cada miembro $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \epsilon_i V_{p_i}$ de $\mathcal{B}$ es un disco absorbente; además $\lambda V \in \mathcal{B}$ para cualquier $\lambda \in (0,1]$. Por el Teorema 1.3.3, la familia $\mathcal{B}$ es una base local del cero para una topología localmente convexa. Por la definición de dicha topología, cada V_p es un τ -abierto ya que si $x \in V_p$, entonces existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x + V \subset V_p$, por ejemplo podemos tomar $V = \{y \in X : p(y) < 1 - p(x)\}$.

De la discusión anterior se sigue que τ es la mínima topología en X que hace continuas a todas las seminormas de la familia $\mathcal{P}$. Se acostumbra denotar a τ como $\tau(\mathcal{P})$.

A partir de la topología generada por una familia de seminormas, podemos dar un teorema que caracteriza a los espacios s localmente convexos.

TEOREMA 1.3.11. *Un espacio vectorial topológico (X, τ) es localmente convexo si y solo si τ está generada por un familia de seminormas.*

DEMOSTRACIÓN. Por lo dicho al inicio de la subsección, sólo tenemos que probar la parte "sólo si". Sea (X, τ) localmente convexo. Por la Proposición 1.3.2 en X hay una base local de cero $\{A_i : i \in I\}$ formada por abiertos, convexos y balanceados. Para cada A_i consideremos su funcional de Minkowski p_i, entonces $V_{p_i} = A_i$ y p_i es una seminorma continua por los Teoremas 1.3.9 y 1.3.10.

La candidata a ser la familia de seminormas que generan la topología τ es $\mathcal{P} = \{p_i : i \in I\}$. Denotemos por $\tau(\mathcal{P})$ a la topología generada en X por $\mathcal{P}$. Sea V una vecindad de 0, según τ, entonces $A_i \subset V$ para alguna $i \in I$, por lo que $V_{p_i} \subset V$; de donde, V es vecindad de 0 según $\tau(\mathcal{P})$. Ahora, sea W una vecindad del 0 según $\tau(\mathcal{P})$, entonces $\bigcap\limits_{j=1}^{n} \epsilon_j V_{p_{i_j}} \subset W$ para una familia finita $i_1, ..., i_n \in I$ y escalares positivos $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$, con $n \geq 1$. Por construcción, $V_{p_{i_j}}$ pertenece a τ; de donde W es vecindad de 0 según τ. $\square$

A continuación caracterizamos la convergencia de redes es un espacio localmente convexo.

PROPOSICIÓN 1.3.12. *Sea X un espacio localmente convexo cuya topología está dada por la familia de seminormas $\mathcal{P}$. Una red $(x_i)_{i\in I}$ en X converge a $x \in X$, si y sólo si $p(x_i - x) \to 0$ para cada $p \in\mathcal{P}$. En particular, si $(x_i)_{i\in I}$ converge a x, entonces $p(x_i) \to p(x)$ para todo i.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $(x_i)_{i\in I}$ converge x y sea $p \in\mathcal{P}$. O sea, $x_i - x \to 0$. Como p es continua, según lo visto en la página 18, tenemos que $p(x_i - x) \to 0$. Y como

$$|p(x_i) - p(x)| \leq p(x_i - x)$$

concluimos que $p(x_i) \to p(x)$.

Inversamente, si $p(x_i - x) \to 0$ para cada $p \in\mathcal{P}$, entonces dados $\epsilon > 0$ y $p_1, ..., p_n \in P$ existe $i_0 \in I$ tal que

$$p_j(x_i - x) < \epsilon$$

para $i \geq i_0$ y todo $1 \leq j \leq n$.

Por consiguiente, $x_i \in \{y \in X : p_j(y - x) < \epsilon, 1 \leq j \leq n\}$ si $i \geq i_0$. Es decir, $x_i \to x$ en X. □

TEOREMA 1.3.13. *La función máximo de n de seminormas, con $n \geqslant 1$, es una seminorma.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $R = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ un conjunto de seminormas en un espacio vectorial X. Definimos $p : X \longrightarrow [0, \infty)$ como
$p(x) = \text{máx}(p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x))$.

(a) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ si $x, y \in X$.

Para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, se cumple $p_i(x + y) \leq p_i(x) + p_i(y)$ por lo que:

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \max(p_1(x+y), p_2(x+y), \ldots, p_n(x+y)) \\ &= p_j(x+y) \\ &\leq p_j(x) + p_j(y) \\ &\leq p(x) + p(y); \end{aligned}$$

de donde, obtenemos la desigualdad del triángulo

(b) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ si $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{F}$.

Para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, se cumple $p_i(\lambda x) = |\lambda| p_i(x)$ por lo que:

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \max(p_1(\lambda x), p_2(\lambda x), \ldots, p_n(\lambda x)) \\ &= \max(|\lambda| p_1(x), |\lambda| p_2(x), \ldots, |\lambda| p_n(x)) \\ &= |\lambda| \, max(p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)) \\ &= |\lambda| \, p(x). \end{aligned}$$

□

Definición 1.3.14. Se dice que una familia $\mathcal{P}$ de seminormas en un espacio vectorial X está saturada si para cada $n \geqslant 1$ y $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$, se cumple que $p = \max(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ pertenece a $\mathcal{P}$.

El concepto de familia saturada de seminormas es un caso particular del siguiente más general.

Definición 1.3.15. Se dice que una familia $\mathcal{P}$ de seminormas en un espacio vectorial X está dirigida si para cada $n \geqslant 1$ y $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$, se cumple que existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $\max(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leq p$.

Proposición 1.3.16. *Sea $\mathcal{P} = \{\mathrm{p_i} : \mathrm{i} \in \mathrm{I}\}$ una familia de seminormas en un espacio vectorial X. Definimos la saturación de $\mathcal{P}$ como la familia de seminormas*

$$\mathcal{Q} = \{max(p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_n}) : n \geqslant 1, p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_n} \in \mathcal{P}\}.$$

Entonces $\mathcal{Q}$ es una familia saturada de seminormas que define la misma topología que $\mathcal{P}$. Se dice que la familia $\mathcal{P}$ está saturada si $\mathcal{P}= \mathcal{Q}$.

Demostración. Sabemos que los conjuntos de la forma: $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \epsilon_i V_{p_i}$, donde $n \geqslant 1$, $p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_n} \in \mathcal{P}$ y $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n\}$ son escalares positivos, forman una base local del 0 para la topología definida por $\mathcal{P}$. Sean $p = \max(p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_n}) \in \mathcal{P}$ y $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n\}$; como $p \geq p_{i_j}$ para todo j, entonces por (a) del Teorema 1.3.5, $V_p \subset V_{p_{i_j}}$ para todo j, y de esto se sigue que $\epsilon V_p \subset \bigcap\limits_{j=1}^{n} \epsilon_i V_{p_{i_j}}$, con lo que toda vecindad básica de la topología generada por $\mathcal{P}$ es vecindad en la topología generada por $\mathcal{Q}$. Por otra parte, $p = \max(p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_n})$ es continua en la topología $\tau(\mathcal{P})$ por serlo cada p_{i_j} y entonces ϵV_p es una vecindad de 0 para la topología $\tau(\mathcal{P})$, por tanto, toda vecindad básica en $\tau(\mathcal{Q})$ es vecindad en $\tau(\mathcal{P})$ (por el Teorema 1.3.10), por consiguiente, la familia de vecindades del cero son las mismas y por tanto, definen la misma topología. □

1.4. Espacio cociente

En esta sección X es un espacio vectorial y S un subespacio vectorial de X. Definimos el espacio cociente $X\diagup S$ como el espacio de las clases de equivalencia determinadas por la relación definida como $x \sim y$ si $y - x \in S$. La clase de equivalencia correspondiente a $x \in X$ se denota como $\overline{x}$. El espacio X/S es un espacio vectorial con las operaciones $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$, $\lambda\overline{x} = \overline{\lambda x}$. Su elemento neutro es $\overline{0}$.

El homomorfismo canónico,

$$Q : X \to X\diagup S$$

que asocia a cada $x \in X$ su clase $\overline{x}$ está bien definida y es claramente lineal y suprayectivo.

Supongamos que (X, τ) es un e.v.t. y demos a $X\diagup S$ la topología cociente q, o sea la de identificación: $B \in q$ si y sólo $Q^{-1}(B) \in \tau$. Es obvio que Q es continuo y también Q es abierto, ya que si $U \subset X$ entonces

$$Q^{-1}(Q(U)) = U + S = \bigcup_{x \in S} x + U,$$

por lo que si $U \in \tau$, entonces $Q^{-1}(Q(U)) \in \tau$ y por tanto, $Q(U) \in q$.

Lema 1.4.1. *El espacio cociente $(X\diagup S, q)$ es vectorial topológico. Si X es de Hausdorff y S es cerrado, entonces $(X\diagup S, q)$ es de Hausdorff.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Supongamos que $B, B' \in q$ son tales que $\overline{x}+\overline{y} \in B$ y $\lambda\overline{x} \in B'$. Entonces, $x+y \in Q^{-1}(B)$, $\lambda x \in Q^{-1}(B')$ y $Q^{-1}(B), Q^{-1}(B') \in \tau$. Por tanto, existen $U, V \in \tau$ y $\delta > 0$ tales que $x \in U, y \in V$ y $U + V \subset Q^{-1}(B)$ y $\lambda' U \in Q^{-1}(B')$ si $|\lambda' - \lambda| < \delta$. De donde, $Q(U) + Q(V) \subset B$ y $\lambda Q(U) \in B'$ si $|\lambda' - \lambda| < \delta$. Por ser Q una función abierta, tenemos que $Q(U)$ y $Q(V)$ son vecindades abiertas de $\overline{x}$ y $\overline{y}$, respectivamente. Entonces la suma y producto son continuos.

Supongamos que X es de Hausdorff y S es cerrado. Si $\overline{x} \neq \overline{0}$, entonces $x \notin S$, por lo que existe en X una vecindad V de x que no interseca a S. Por consiguiente, $\overline{x} - Q(V)$ es una vecindad de 0 que no contiene a $\overline{x}$ y así, $X\diagup S$ es de Hausdorff. $\square$

Lema 1.4.2. *Se p una seminorma definida en X. Entonces la función*

$$\dot{p}(x) = inf\{p(y) : y \in \overline{x}\} = inf\{p(x+z) : z \in S\},$$

definida en X/S es una seminorma. Cuando p es una norma y S es un cerrado en la topología de X definida por p, entonces $\dot{p}$ es una norma.

DEMOSTRACIÓN. La función $\dot{p}$ es mayor o igual que cero, ya que es el ínfimo de un conjunto de números no negativos.

Es obvio que $\dot{p}\left(\overline{0x}\right) = 0 = 0\dot{p}\left(\overline{x}\right)$. Sea $\lambda \in \mathbb{F}$, no nulo, entonces:

$$\begin{aligned} \dot{p}\left(\overline{\lambda x}\right) &= inf\left\{p\left(y\right) : y \in \overline{\lambda x}\right\} \\ &= inf\left\{p\left(y\right) : y \in \lambda\overline{x}\right\} \\ &= inf\left\{p\left(\lambda y\right) : y \in \overline{x}\right\} \\ &= inf\left\{\left|\lambda\right| p\left(y\right) : y \in \overline{x}\right\} \\ &= \left|\lambda\right| inf\left\{p\left(y\right) / y \in \overline{x}\right\} \\ &= \left|\lambda\right| \dot{p}\left(\overline{x}\right). \end{aligned}$$

O sea, $\dot{p}$ es absolutamente homogénea.

Por otra parte $\dot{p}$ satisface la desigualdad del triángulo, ya que si $x' \in \overline{x}$ y $y' \in \overline{y}$, entonces $x' + y' \in \overline{x} + \overline{y}$ y por tanto,

$$\dot{p}\left(\overline{x} + \overline{y}\right) \quad \leq p\left(x' + y'\right) \leq \quad p\left(x'\right) + p\left(y'\right).$$

De donde,

$$\dot{p}\left(\overline{x} + \overline{y}\right) \quad \leq \quad p\left(x\right) + p\left(y\right).$$

Supongamos que p es una norma y S es un cerrado de X en la topología dada por p. Entonces $\dot{p}\left(\overline{x}\right) = 0$ implica que existe una sucesión (x_n) en X tal que $x_n - x \in S$ para todo $n \geq 1$ y $p\left(x_n - x\right) \to 0$. O sea x está en S, por ser éste un cerrado; de donde, $\overline{x} = \overline{0}$. Por consiguiente, $\dot{p}$ es una norma en el cociente. □

TEOREMA 1.4.3. *Si X es localmente convexo y $\mathcal{P}$ es una familia de seminormas saturadas que generan su topología, entonces la familia saturada de seminormas $\dot{\mathcal{P}} = \{\dot{p} : p \in \mathcal{P}\}$ genera la topología cociente q en $X \diagup S$. Es decir, $(X \diagup S, q)$ es localmente convexo. Cuando $\mathcal{P}$ se reduce a una norma $p = \|\cdot\|$ y S es cerrado en X, entonces $\dot{p}$ es una norma.*

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que $\dot{\mathcal{P}}$ está saturada. Afirmamos que

$$V_{\dot{p}} = \{\overline{x} : \dot{p}\left(\overline{x}\right) < 1\} = Q\left(V_p\right)$$

para cada $p \in \mathcal{P}$. Tenemos que $V_p \subset Q^{-1}\left(V_{\dot{p}}\right)$ debido a que $\dot{p}\left(\overline{x}\right) \leq p\left(x\right)$ para todo $x \in X$. De donde, $Q\left(V_p\right) \subset \left(V_{\dot{p}}\right)$ Por otra parte, si $\dot{p}\left(\overline{x}\right) < 1$, entonces existe $y \in \overline{x}$ tal que $p\left(y\right) < 1$; por lo que $\overline{x} \in Q\left(V_p\right)$.

Por ser Q una función abierta se tiene en particular que

$$V_{\dot{p}} = \{\overline{x} : \dot{p}\left(\overline{x}\right) < 1\}$$

es una q-vecindad de 0.

Sean $B \in \tau\left(\dot{\mathcal{P}}\right)$ y $\overline{x} \in B$. Entonces existen $p \in \mathcal{P}$ y $\varepsilon > 0$ tales

$$\overline{x} + \epsilon V_{\dot{p}} \subset B.$$

Por lo anterior y por ser $(X\diagup S, q)$ un e.v.t., tenemos que $\overline{x} + \epsilon V_{\dot{p}}$ es una q-vecindad de $\overline{x}$. Por tanto, $B \in q$.

Inversamente, si $B \in q$ y $\overline{x} \in B$, entonces $Q^{-1}(B) \in \tau$ y existen $p \in \mathcal{P}$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$x + \epsilon V_p \subset Q^{-1}(B);$$

por tanto,

$$\overline{x} + \epsilon V_{\dot{p}} \subset B.$$

Es decir, $B \in \tau\left(\dot{\mathcal{P}}\right)$.

La última afirmación del enunciado del teorema se sigue del Lema 1.4.2.

□

TEOREMA 1.4.4. *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y S es un subespacio cerrado de X, entonces $X\diagup S$ es de Banach con la norma*

$$\|\overline{x}\| = inf\{\|y\| : y \in \overline{x}\} = inf\{\|x+z\| : z \in S\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por lo anterior sólo falta probar que $X\diagup S$ es completo. Tomemos una sucesión de Cauchy $(\overline{x}_n)$ en $X\diagup S$.

Existe una subsucesión $(\overline{x}_{n_k})$ de $(\overline{x}_n)$tal que:

$$\left\|\overline{x}_{n_k} - \overline{x}_{n_{k+1}}\right\| < \frac{1}{2^k}.$$

Lo que implica que existe una sucesión z_k de elementos de S tales que:

$$\left\|\left(x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\right) + z_k\right\| < \frac{1}{2^k}.$$

Definimos una nueva sucesión en S:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \\ y_k &= -\sum_{i=1}^{k-1} z_i \end{aligned}$$

para $k \geq 2$.

Observemos que

$$\left\|x_{n_k} + y_k - x_{n_{k+1}} - y_{k+1}\right\| = \left\|\left(x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\right) + z_k\right\| < \frac{1}{2^k}.$$

Por lo que la sucesión $(w_k) = (x_{n_k} + y_k)$ es de Cauchy, ya que $k < r$ implica

$$\left\|w_k - w_r\right\| = \left\|w_k - w_{k+1}\right\| + \left\|w_{k+1} - w_{k+2}\right\| + \ldots + \left\|w_{r-1} - w_r\right\| < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Entonces (w_k) converge a un elemento x del espacio de Banach X.

Probaremos que $\overline{x}_{n_k}$ converge a $\overline{x}$:

$$\begin{aligned} \left\| \overline{x}_{n_k} - \overline{x} \right\| &= \inf \left\{ \left\| x_{n_k} - x + y \right\| : y \in S \right\} \\ &\leq \left\| x_{n_k} - x + y_k \right\|. \end{aligned}$$

La última desigualdad se da porque los elementos y_n pertenecen al S. Como la última norma tiende a 0 cuando $k \to \infty$, se sigue que $\overline{x}_{n_k} \to \overline{x}$. Por tanto la sucesión de Cauchy $(\overline{x}_n)$ converge a $\overline{x}$ y queda probado que $X \diagup S$ es un álgebra de Banach. □

1.5. Operadores lineales continuos entre espacios localmente convexos

En esta sección se caracterizará a las transformaciones lineales continuas, también llamados operadores lineales continuos entre espacios localmente convexos. Esto se hace mediante seminormas que generan las topologías respectivas.

TEOREMA 1.5.1. *Sean X, Y dos espacios vectoriales topológicos y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Si T es continuo en cero, entonces T es continuo en X.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que T es continuo en 0. Si (x_i) es una red y $x_i \longrightarrow 0$, entonces $T(x_i) \longrightarrow T(0) = 0$. Sea $x \in X$ y (x_i) es una red tal que $x_i \longrightarrow x$, entonces $x_i - x \longrightarrow 0$, por lo que

$$T(x_i - x) = T(x_i) - T(x) \longrightarrow T(0) = 0,$$

o sea $T(x_i) \longrightarrow T(x)$ y T es continuo en x. □

TEOREMA 1.5.2. *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal entre dos espacios localmente convexos cuyas topologías están generadas por las familias de seminormas $\mathcal{P}_{\mathrm{X}}$ y $\mathcal{P}_{\mathrm{Y}}$, respectivamente. El operador T es continuo si y sólo si dado $q_\beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{Y}}$ y $\varepsilon > 0$, existen $n \geq 1$, $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_n} \in \mathcal{P}_{\mathrm{X}}$ y $\delta > 0$ tales que $q_\beta(T(x)) < \varepsilon$ si $p_{\alpha_i}(x) < \delta$ para todo $1 \leq i \leq n$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $T : X \longrightarrow Y$ es continuo. Sean $q_\beta \in \Gamma_Y$ y $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de T en cero, existen $n \geqslant 1$,

$$p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_n} \in \mathcal{P}_{\mathrm{X}}$$

y escalares positivos $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$ tales que $T\left(\bigcap_{i=1}^{n} \delta_i V_{p_{\alpha_i}}\right) \subset \varepsilon V_{q_\beta}$. Sea $\delta = \min\{\delta_i : 0 \leq i \leq n\}$, entonces como $\bigcap_{i=1}^{n} \delta V_{p_{\alpha_i}} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \delta_i V_{p_{\alpha_i}}$, tenemos

$$T\left(\bigcap_{i=1}^{n} \delta V_{p_{\alpha_i}}\right) \subset \varepsilon V_{q_\beta},$$

es decir, si $p_{\alpha_i}(x) < \delta$ para todo $1 \leq i \leq n$, entonces $P_{q_\beta}(T(x)) < \varepsilon$.

Para el regreso, veremos que T es continua en cero, por lo que por el teorema anterior, T es continua en X. Sea $\bigcap_{j=1}^{m} \epsilon_j V_{q_{\beta_j}}$ una vecindad básica de cero en Y. Tomemos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_j : 1 \leq j \leq m\}$. Por hipótesis, para cada β_j existen $n_j \geq 1$, $p_{\alpha_{1\beta(j)}}, p_{\alpha_{2\beta(j)}}, \ldots, P_{\alpha_{n_j\beta(j)}}$ en $\mathcal{P}_X$ y $\delta_j > 0$ tales que $P_{\beta_j}(T(x)) < \varepsilon$ si $p_{\alpha_{i\beta(j)}}(x) < \delta_j$ para todo $1 \leq k \leq n_j$, sea

$$\delta = \min\{\delta_j : 1 \leq j \leq m\}.$$

Ahora, si $x \in \bigcap_{j=1}^{m} \bigcap_{k=1}^{n_j} \delta V_{p_{\alpha_{k\beta(j)}}}$, entonces $p_{\alpha_{i\beta(j)}}(x) < \delta \leq \delta_j$ para todo $1 \leq k \leq n_j$ y $1 \leq j \leq m$ de lo que se sigue que $q_{\beta_j}(T(x)) < \varepsilon$ para todo $1 \leq j \leq m$ y por tanto, $T(x) \in \bigcap_{j=1}^{m} \epsilon_j V_{P_{\beta_j}}$; de donde, T es continua en 0. □

Corolario 1.5.3. *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal entre dos espacios localmente convexos cuyas topologías están generadas por las familias de seminormas $\mathcal{P}_{\mathrm{X}}$ y $\mathcal{P}_{\mathrm{Y}}$, respectivamente, donde la primera está dirigida. El operador T es continuo si y sólo si dada $q_\beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{Y}}$, existen $\delta > 0$ y $p \in \mathcal{P}_X$ tales que $q_\beta(T(x)) < \varepsilon$ si $p_\alpha(x) < \delta$.*

Tenemos una variante del teorema anterior. Antes de enunciarlo, observemos que si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador lineal y definimos $p(x) = q(T(x))$, entonces p es una seminorma en X. En efecto, si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $x, y \in X$, entonces

$$p(\lambda x) = q(T(\lambda x)) = q(\lambda T(x)) = |\lambda| \, q(T(x)) = |\lambda| \, p(x)$$

y

$$\begin{aligned} p(x+y) &= q(T(x+y)) \\ &= q(T(x) + T(y)) \\ &\leq q(T(x)) + q(T(y)) \\ &= p(x) + p(y). \end{aligned}$$

Teorema 1.5.4. *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal entre dos espacios localmente convexos cuyas topologías están generadas por las familias de seminormas $\mathcal{P}_{\mathrm{X}}$ y $\mathcal{P}_{\mathrm{Y}}$, respectivamente. El operador T es continuo si y sólo si dada $q_\beta \in\mathcal{P}_{\mathrm{Y}}$, existen $M > 0$, $n \geq 1$ y $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_n} \in \mathcal{P}_X$, tales que*

$$q_\beta\left(T\left(x\right)\right) < M \cdot max\left\{p_{\alpha_1}\left(x\right), p_{\alpha_2}\left(x\right), \ldots, p_{\alpha_n}\left(x\right)\right\}$$

para todo $x \in X$.

Demostración. Supongamos que T es continua y sea $q_\beta \in\mathcal{P}_{\mathrm{Y}}$. Por el teorema anterior existen $n \geq 1$; $p_{\alpha_1}\left(x\right), p_{\alpha_2}\left(x\right), \ldots, p_{\alpha_n}\left(x\right) \in \mathcal{P}_X$ y $\delta > 0$ tales que $q_\beta\left(T\left(x\right)\right) < 1$ si $p_{\alpha_i}\left(x\right) < \delta$ para todo $0 \leq i \leq n$. Sea $M = \dfrac{1}{\delta}$; de esto se sigue que si

$$M \cdot \max\left\{p_{\alpha_1}\left(x\right), p_{\alpha_2}\left(x\right), \ldots, p_{\alpha_n}\left(x\right)\right\} \quad < 1. \tag{1.5.1}$$

$$\text{entonces } q_\beta\left(T\left(x\right)\right) < 1$$

Como tanto $p(x) = q_\beta\left(T\left(x\right)\right)$, como $p'(x) = M \cdot \max\left(p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_n}\right)$ son seminormas en X, entonces (1.5.1) se puede escribir como $V_{p'} \subset V_p$ y por el Teorema 1.3.5, tenemos que $p\left(x\right) < p'\left(x\right)$ para todo x en X, es decir:

$$q_\beta\left(T\left(x\right)\right) < M{\cdot}\max\left\{p_{\alpha_1}\left(x\right), p_{\alpha_2}\left(x\right), \ldots, p_{\alpha_n}\left(x\right)\right\}, \text{ para toda } x \in X.$$

Inversamente, sea $q_\beta \in\mathcal{P}_{\mathrm{Y}}$ arbitraria y supongamos que existen $M > 0$, $n \geq 1$ y $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_n} \in \mathcal{P}_X$, tales que

$$q_\beta\left(T\left(x\right)\right) < M \cdot max\left\{p_{\alpha_1}\left(x\right), p_{\alpha_2}\left(x\right), \ldots, p_{\alpha_n}\left(x\right)\right\}$$

para todo $x \in X$. Sea $\varepsilon > 0$, definimos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$, entonces $p_{\alpha_i}\left(x\right) < \delta$, implica $M \cdot \max\left(p_{\alpha_1}\left(x\right), p_{\alpha_2}\left(x\right), \ldots, p_{\alpha_n}\left(x\right)\right) < \epsilon$ y por tanto, $q_\beta\left(T\left(x\right)\right) < \varepsilon$. Es decir, T es continua en cero y por tanto continua en X. □

Corolario 1.5.5. *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal entre dos espacios localmente convexos cuyas topologías están generadas por las familias de seminormas $\mathcal{P}_{\mathrm{X}}$ y $\mathcal{P}_{\mathrm{Y}}$, respectivamente, donde la primera está dirigida. El operador T es continuo si y sólo si dada $q_\beta \in\mathcal{P}_{\mathrm{Y}}$, existen $M > 0$ y $p \in \mathcal{P}_X$, tales que $q_\beta\left(T\left(x\right)\right) < Mp_\alpha\left(x\right)$ para todo x.*

En particular, si los espacios X y Y son normados, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.5.6. *Un operador lineal $T : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios normados X y Y es continuo si y sólo si $\left\|T\left(x\right)\right\| \leq M\left\|x\right\|$ para algún $M > 0$ y todo $x \in X$.*

Con base en este corolario, se define en el espacio $B(X,Y)$ de operadores lineales continuos entre dos espacios normados X y Y llamada la norma de operadores:

$$\|T\|_B = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|.$$

Observamos que

$$\|T(x)\| \leq \|T\|_B \|x\|,$$

para todo $x \in X$.

Con esta norma $B(X,Y)$ es de Banach si y sólo si Y lo es. La prueba de la parte "si" de esta afirmación sigue las mismas líneas que se usan en la prueba de que el espacio $C_b(X)$ de las funciones escalares continuas y acotadas definidas en un conjunto X, es de Banach cuando se le da la norma del supremo o norma uniforme:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|.$$

Cuando $X = Y$ escribimos $B(X)$ en lugar de $B(X,X)$.

Teorema 1.5.7. *Sea X un espacio localmente convexo cuya topología está generada por una familia de seminormas $\mathcal{P}_{\mathrm{X}}$. Llamemos $\mathcal{P}$ a la familia de todas las seminormas continuas en X. Entonces $\mathcal{P}_{\mathrm{X}}$ y $\mathcal{P}$ generan la misma topología en X y $\mathcal{P}$ es una familia saturada.*

Demostración. Veremos que todo vecindad básica del 0 en la topología $\tau(\mathcal{P}_X)$, es vecindad del 0 en la topología $\tau(\mathcal{P})$, y viceversa.

Sea V una vecindad básica de 0 para $\tau(\mathcal{P}_X)$, entonces $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \epsilon_i V_{p_i}$ con n natural y $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\} \subset \mathcal{P}_X$. Como cada seminorma en $\mathcal{P}_X$ es continua, entonces $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\} \subset \mathcal{P}$. Así, V es una vecindad básica de 0 para $\tau(\mathcal{P})$.

Inversamente, sea V una vecindad básica de 0 para $\tau(\mathcal{P})$, entonces $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \epsilon_i V_{p_i}$ con n natural y $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\} \subset \mathcal{P}$, pero por ser p_i continua para $i \in \{1, ..., n\}$, entonces $\epsilon_i V_{p_i}$ es una vecindad de 0 para $\tau(\mathcal{P}_X)$, por el Teorema 1.3.10 Así V es vecindad de 0 en $\tau(\mathcal{P}_X)$.

Por ultimo veamos que $\mathcal{P}$ es una familia saturada. Sea $n \geqslant 1$ y

$$p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathcal{P},$$

se cumple que $p = \max(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ es seminorma por el Teorema 1.3.13 y es continua por serlo cada p_i. Así $p \in \mathcal{P}$. $\square$

1.6. El dual topológico

El dual algebraico $X^{\#}$ de un espacio vectorial X es el espacio vectorial formado por todos los operadores lineales de X al campo de escalares. En este caso dichos operadores son llamados funcionales lineales.

El núcleo de una funcional lineal f se denota como ker f.

LEMA 1.6.1. *Sea X espacio vectorial y $f, f_1, \ldots, f_n$ funcionales lineales definidas en X y tales que $\bigcap\limits_{k=1}^{n} ker\left(f_k\right) \subset kerf$. Entonces existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ tales que $f\left(x\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k\left(x\right)$ para todo $x \in X$.*

DEMOSTRACIÓN. La prueba se hará por inducción sobre n. Supongamos que el $\ker f_1 \subset \ker f$, Tomamos $x \in X$ tal que $f_1\left(x\right) \neq 0$, si no existiera, entonces f_1 sería nula y por tanto f también. Si $x' = \frac{1}{f_1(x)}x$, entonces $f_1\left(x'\right) = 1$ y se cumple que $y - f_1\left(y\right)x' \in \ker f_1$ para todo $y \in X$. Se sigue que $f\left(y - f_1\left(y\right)x'\right) = f\left(y\right) - f\left(x'\right)f_1\left(y\right) = 0$. Al tomar $f\left(x'\right) = \alpha$, tenemos que $f\left(y\right) = \alpha f_1\left(y\right)$para todo $y \in X$.

Ahora supongamos cierto el resultado para todo $m < n$. Si existe $1 \leq j \leq n$ tal que $\bigcap\limits_{k \neq j} \ker f_k = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \ker f_k$, entonces $f\left(x\right) = \sum\limits_{k \neq j} \alpha_k f_k\left(x\right)$ por hipótesis de inducción, y así $f\left(x\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k\left(x\right)$, con $\alpha_j = 0$.

Supongamos que $\bigcap\limits_{k \neq j} \ker f_k \neq \bigcap\limits_{k=1}^{n} \ker f_k$ para todo $1 \leq j \leq n$, entonces para cada j existe $x_j \in X$ tal que $f_j\left(x_j\right) \neq 0$ y $f_k\left(x_j\right) = 0$ para todo $k \neq j$.

Para $y_j = \frac{1}{f_j(x_j)}x_j$, tenemos que $f_j\left(y_j\right) = 1$ y $f_k\left(y_j\right) = 0$ para todo $k \neq j$ y $1 \leq j \leq n$.

Definimos $\alpha_k = f\left(y_k\right)$ para cada $1 \leq k \leq n$. Sea $y \in X$ y hagamos

$$w = y - \sum_{k=1}^{n} f_k\left(y\right) y_k,$$

entonces

$$f_j\left(w\right) = f_j\left(y\right) - \sum_{k=1}^{n} f_k\left(y\right) f_j\left(y_k\right) = 0$$

para todo j y así, por hipótesis, $f\left(w\right) = 0$; de lo que se sigue que

$$f\left(y\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k\left(y\right)$$

para todo $y \in X$. □

Cuando X es un espacio vectorial topológico, se define el dual topológico o continuo X^* de X como el subespacio de $X^{\#}$ que está formado por las funcionales lineales continuas.

COROLARIO 1.6.2. *Sea X un espacio localmente convexo cuya topología está generada por la familia P de seminormas. Una funcional lineal $f : X \longrightarrow \mathbb{F}$, es continua si y sólo si existen un escalar $M > 0$ y seminormas $p_1, \ldots, p_n \in P$ tales que $|f(x)| \leq M \left(\sum_{k=1}^{n} p_k(x) \right)$.*

DEMOSTRACIÓN. El resultado se sigue del Teorema 1.5.4 observando que

$$max\{p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)\} \leq \sum_{k=1}^{n} p_k(x)$$

y

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(x) \leq n \cdot max\{p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)\}.$$

□

De acuerdo al lo dicho después del Corolario 1.5.6 X^* es de Banach para cualquier espacio normado X cuando en X^* se considera la norma de operadores

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

1.6.1. La topología w^*. Supongamos que X es un espacio vectorial. En $X^{\#}$ se define la topología localmente convexa w^*, llamada la topología débil * , la cual está generada por las seminormas definidas como

$$p_x(f) = |f(x)|$$

donde x corre por todo X.

Si X es un espacio vectorial topológico, entonces la topología inducida en X^* por w^*es llamada la topología débil * de X^*y se sigue denotando por w^*.

Con $X^{\#\#}$ denotamos al dual algebraico del dual algebraico $X^{\#}$ de un espacio vectorial X y si este último es un espacio normado, entonces X^{**}denotará al dual topológico de X^*.

Sea X un espacio vectorial. Para cada $x \in X$ definimos $\hat{x}(f) = f(x)$ para todo $f \in X^{\#}$, entonces $\hat{x}$ es una funcional lineal en $X^{\#}$. La transformación

$$\underset{x}{X} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{\hat{x}}{X^{\#\#}}$$

es lineal e inyectiva y es llamada la inmersión natural de X en $X^{\#\#}$.

Si X es un espacio vectorial normado, entonces la restricción de $\hat{x}$ a X^*, a la que seguiremos denotado por $\hat{x}$ es una funcional lineal en X^*. La transformación

$$\begin{matrix} X & \rightarrow & X^{**} \\ x & \rightarrow & \hat{x} \end{matrix}$$

es lineal e inyectiva y es llamada la inmersión natural de X en X^{**}.

En cualquiera de los dos casos la imagen del espacio X se denota por $\widehat{X}$.

Los resultados que más usaremos, respecto a la topología w^*, son los siguientes.

Proposición 1.6.3. *Sea X un espacio vectorial topológico. Una red $(f_i)_{i\in I}$ en X^* converge a $f \in X^*$en la topología w^* si y sólo si $f_i(x) \to f(x)$ para cada $x \in X$.*

Demostración. Por la Proposición 1.6.4 tenemos que $(f_i) \xrightarrow{w^*} (f)$ si y sólo si $p_x(f_i - f) \to 0$ para cada $x \in X$. Como $p_x(f_i - f) = |f_i(x) - f(x)|$, entonces $p_x(f_i - f) \to 0$ si y sólo si $f_i(x) \to f(x)$ para cada $x \in X$. □

Proposición 1.6.4. *Sea X un espacio vectorial. La topología w^*es la mínima topología vectorial de $X^{\#}$ para la cual cada $\hat{x} \in X^{\#\#}$ es continua. Si X es un espacio vectorial topológico, entonces $(X^*, w)^* = \widehat{X}$.*

Demostración. Sea $\widehat{x} \in X^{\#\#}$, por ser una funcional lineal basta demostrar que es continua en cero. Sean $f_i \in X^{\#}$ una red tal que $f_i \xrightarrow{w^*} 0$ y p_x cualquiera de las seminormas que definen la topología w^*. Entonces $\widehat{x}(f_i) = f_i(x) \longrightarrow f_i(0) = 0$ y así $\widehat{x}$ es continua en 0.

Sea $\left(X^{\#}, \tau\right)$ un espacio vectorial topológico en el cual toda funcional $\widehat{x}$ es continua, entonces

$$V_{p_x} = \left\{f \in X^{\#} : p_x(f) < 1\right\} = \left\{f \in X^{\#} : |f(x)| < 1\right\} = \widehat{x}^{-1}(D_1(0))$$

es abierto. Así, los vecindades básicas de 0 en la topología w^* son abiertos en τ; de donde, $w^* \subset \tau$.

Ahora veamos que $(X^*, w^*)^* = \widehat{X}$. Por lo demostrado previamente $\widehat{x} \in \left(X^{\#}, w^*\right)^*$ y por tanto, $\widehat{x} \in (X^*, w^*)^*$; de donde, $\widehat{X} \subset (X^*, w^*)^*$.

Inversamente, tomemos $F \in (X^*, w^*)^*$ entonces por el Corolario 1.6.2, existen $n \geq 1$, seminormas $p_{x_1}, \ldots, p_{x_n}$ y un escalar $M > 0$ tales que $|F(f)| \leq M \sum\limits_{k=1}^{n} p_{x_k}(f) = M \sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k)|$, para todo $f \in X^*$, lo que nos dice que $\ker F \subset \bigcap_{k=1}^{n} \ker \widehat{x}_k$. Por el Lema 1.6.1 se sigue que existen n escalares $\alpha_1, ..., \alpha_1$ tales que $F(g) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right)$ para todo $f \in X^*$ y por tanto, $F = \widehat{x}$ con $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$. Por lo que $F \in \widehat{X}$. O sea $(X^*, w^*)^* \subset \widehat{X}$. □

La siguiente proposición nos dice que la convergencia de una red en X^*, según la topología w^*, se reduce a la convergencia puntual.

TEOREMA 1.6.5. *(Teorema de Alaoglu) La bola unitaria cerrada en X^* es w^*-compacta. O más en general, cualquier subconjunto de X^* acotado en la norma es w^*-relativamente compacto.*

Álgebras y álgebras topológicas. Los espectros.

1.7. Introducción

En esta sección trabajaremos con las definiciones y propiedades básicas de álgebra y álgebra topológica sobre los complejos.

Hasta ahora, hemos desarrollado la teoría que necesitamos sobre espacios vectoriales topológicos. En algunos de estos espacios consideramos una operación más, que es el producto, al que por lo pronto denotaremos por $\bullet$.

DEFINICIÓN 1.7.1. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, entonces decimos que E es un álgebra si hay una operación $\bullet$ en E, llamada producto que tiene las siguientes propiedades:

(a) $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$ (propiedad asociativa).

(b) $(x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z$, $z \bullet (x + y) = z \bullet x + z \bullet y$ (propiedades distributivas).

(c) $\alpha(x \bullet y) = (\alpha x) \bullet y = x \bullet (\alpha y)$ (propiedad asociativa respecto al producto por un escalar).

siempre que $x, y, z \in E$ y $\alpha \in \mathbb{C}$

Si además se cumple:

(d)$x \bullet y = y \bullet x$ si $x, y \in E$,

entonces se dice E es un álgebra conmutativa.

Y si existe un elemento $e \in E$, denominado idéntico o identidad tal que

(e) $e \bullet x = x \bullet e = x$,

para todo $x \in E$, entonces E es llamada una *álgebra con idéntico* o unitaria.

Es inmediato probar que el idéntico es único, ya que si e' tiene la propiedad (e), entonces

$$e' = e \bullet e' = e.$$

Por comodidad, a partir de ahora escribiremos xy en lugar de $x \bullet y$ y xyz en lugar de $(x \bullet y) \bullet z$ y $x \bullet (y \bullet z)$.

1.8. Elementos invertibles. El conjunto $G(E)$

En un álgebra con identidad, pondremos especial atención en algunos elementos muy especiales, que son llamados invertibles.

Definición 1.8.1. Sean E un álgebra con identidad e y $x \in E$. Si existe $y \in E$ tal que $xy = e$ (respectivamente, $yx = e$), entonces se dice que x es un elemento invertible por la derecha. (respectivamente, por la izquierda) y y es llamado inverso derecho de x (respectivamente, de x). Si x es invertible por la derecha y por la izquierda, entonces es llamado un elemento invertible de E. A la colección de todos los elementos invertibles de E se le denota por $G(E)$.

Si x es invertible, entonces tiene un sólo inverso derecho y éste es también su único inverso izquierdo, ya que si $xy = xy' = e$ y $zx = e$, entonces

$$y = ey = zxy = zxy' = ey' = y'$$

y

$$z = ze = zxy = y.$$

Es decir, x es invertible si y sólo si existe un único elemento, que denotamos por x^{-1} tal que $x^{-1}x = xx^{-1} = e$.

Definimos x^n en un álgebra E para cada $n \geq 1$ y $x \in E$, de manera inductiva:

- $x^1 = x$.
- $x^n = x^{n-1}x$, si $n \geq 2$.

Si el álgebra E tiene identidad e, entonces definimos $x^0 = e$, y si $x \in G(E)$ entonces $x^{-n} = \left(x^{-1}\right)^n$ por definición.

Teorema 1.8.2. *Sea E un álgebra.*

(a) $0x = x0 = 0$.

(b) Si E tiene más de un elemento y es unitaria con idéntico e, entonces $e \neq 0$ y el cero no es invertible.

(c) Si x, y son invertibles y α es un complejo distinto del cero, entonces xy y αx son invertibles y, de hecho, sus inversos son $y^{-1}x^{-1}$ y $\alpha^{-1}x^{-1}$, respectivamente.

(d) Si x es invertible, entonces x^n también lo es: $(x^n)^{-1} = \left(x^{-1}\right)^n$.

Demostración. (a) Es claro que $0x = (0+0)\,x = 0x + 0x$; de donde $0x = 0$.

(b) Si $0 = e$ entonces $x = xe = e = 0$ para cualquier $x \in E$; de donde, E tiene un sólo elemento, lo que contradice la hipótesis. Si suponemos que 0 es invertible, entonces existe x tal que $0 = 0x = e$, lo que contradice lo anterior.

(c) Tenemos

$$\begin{aligned} xyy^{-1}x^{-1} &= xex^{-1} = xx^{-1} = e, \\ y^{-1}x^{-1}xy &= y^{-1}ey = y^{-1}y = e \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}x^{-1}\alpha x &= \alpha^{-1}\alpha x^{-1}x = 1e = e, \\ \alpha x\alpha^{-1}x^{-1} &= \alpha\alpha^{-1}xx^{-1} = 1e = e. \end{aligned}$$

(d) Se prueba por inducción usando (b). □

En lo sucesivo, a menos que se diga lo contrario, sólo trabajaremos con álgebras con más de un punto.

Supongamos que I es un ideal de un álgebra conmutativa E. El espacio cociente E/I es un espacio vectorial y al definir en él producto $\bar{x}\bar{y} = \overline{xy}$ es fácil ver que es un álgebra. Si E tiene idéntico e, entonces $\overline{e}$ es el idéntico de E/I.

Definición 1.8.3. Un álgebra E con una topología τ se denota por (E, τ) y se dice que es topológica, si (E, τ) es un espacio vectorial topológico y el producto definido en E es continuo.

Proposición 1.8.4. *Sean E un álgebra y τ una topología vectorial en E. El producto en E es continuo si y sólo si es continuo en* $(0,0)$.

Demostración. Sean $(x_0, y_0) \in E \times E$ y V una vecindad de 0. Existe dos vecindades balanceadas U y W de 0 tales que $W + W + W \subset V$ (1.2.1) y $UU \subset W$ (el producto es continuo en $(0,0)$). Por la continuidad del producto por un escalar existe $0 < \lambda < 1$ tal que $\lambda x_0, \lambda y_0 \in U$;

Para $(x, y) \in E \times E$ tenemos

$$xy - x_0y_0 = (x - x_0)\,(y - x_0) + x_0\,(y - y_0) + (x - x_0)\,(y_0)\,.$$

Así, $(x, y) \in (x_0 + \lambda U) \times (y_0 + \lambda U)$ implica

$$xy - x_0y_0 \in \lambda^2 UU + \lambda x_0 U + \lambda U y_0;$$

de donde,

$$xy - x_0y_0 \in W + W + W \subset V$$

o lo que es lo mismo $xy \in -xy_0 + V$ si $(x, y) \in (x_0 + \lambda U) \times (y_0 + \lambda U)$ y como λU es una vecindad de 0, tenemos que el producto es continuo en (x, y). $\square$

1.9. Álgebras localmente convexas

Hay un tipo de álgebras topológicas en el que nos vamos a concentrar, las llamadas álgebras localmente convexas que tienen como caso particular a las m-convexas y estas a su vez a las normadas y las de Banach.

Definición 1.9.1. Un álgebra topológica (E, τ) se dice que es localmente convexa, si (E, τ) es un espacio localmente convexo.

Teorema 1.9.2. *Sean E un álgebra con una topología lineal τ localmente convexa y $\mathcal{P}$ un familia saturada de seminormas que generan a τ. Entonces, E es un álgebra localmente convexa, o sea su multiplicación es continua, si y sólo si para cada seminorma $p \in \mathcal{P}$, existen una seminorma $q \in \mathcal{P}$ y $r > 0$ tales que*

$$p(xy) \leq r q(x) q(y) \tag{1.9.1}$$

si $x, y \in E$.

Demostración. Supongamos que en E su producto es continuo. En particular, es continuo en $(0, 0)$, entonces dados $p \in \mathcal{P}$ y $\epsilon = 1$, existen $\delta > 0$ y $q \in P$ tales que si $q(x) < \delta$ y $q(y) < \delta$ entonces $p(xy) < 1$. Tomemos $x, y \in E$ y supongamos que $q(x)$ y $q(y)$ son distintos de cero. Tenemos $q\left(\frac{\delta x}{2q(x)}\right) < \delta$ y $q\left(\frac{\delta y}{2q(y)}\right) < \delta$, por lo que

$$p\left(\frac{\delta x}{2q(x)} \frac{\delta y}{2q(y)}\right) = \frac{\delta^2}{4q(x) q(y)} p(xy) < 1.$$

Al despejar obtenemos: $p(xy) < \frac{4}{\delta^2} q(x) q(y)$.

Ahora supongamos que $q(x) = 0$ y $q(y) \neq 0$. Como $q(\lambda x) = 0$ para todo $\lambda > 0$, entonces

$$p\left(\lambda x \frac{\delta y}{2q(y)}\right) = \frac{\lambda \delta}{2q(y)} p(xy) < 1.$$

Si despejamos llegamos a que $p(xy) < \frac{2}{\lambda \delta} q(y)$ para todo $\lambda > 0$ y se tiene que $p(xy) = 0$.

De modo análogo se procede si $q(y) = 0$ y $q(x) \neq 0$, y el ultimo caso es cuando $q(x) = 0$, $q(y) = 0$. Entonces, tenemos que $q(\lambda x) = 0$ y $q(\lambda y) = 0$ sin importar el valor de $\lambda > 0$, por consiguiente,

$$p(\lambda x \lambda y) = \lambda^2 p(xy) < 1.$$

Nuevamente podemos despejar y llegamos a que $p(xy) < \frac{1}{\lambda^2}$, y de ahí a $p(xy) = 0$.

Así, $p(xy) \leq \frac{4}{\delta^2} q(x) q(y)$ en todos los casos.

Inversamente, sean p una seminorma de $\mathcal{P}$ y $\epsilon > 0$, entonces por hipótesis existen $r > 0$ y $q \in \mathcal{P}$ tales que:

$$p(xy) \leq rq(x) q(y).$$

De donde, $q(x) < \left(\frac{\epsilon}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$ y $q(y) < \left(\frac{\epsilon}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$ implican:

$$\begin{aligned} p(xy) &< rq(x) q(y) \\ &< r\left(\frac{\epsilon}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\epsilon}{r}\right)^{\frac{1}{2}} = \epsilon. \end{aligned}$$

En otras palabras, el producto en E es continuo en $(0,0)$ y por tanto, en E. □

Corolario 1.9.3. *Un álgebra E con una topología lineal τ es un álgebra localmente convexa si y sólo si su topología τ puede definirse por una familia saturada de seminormas $\mathcal{P}$ que satisface que para cada seminorma $p \in \mathcal{P}$, existe una seminorma $q \in \mathcal{P}$ tal que*

$$p(xy) \leq q(x) q(y) \tag{1.9.2}$$

si $x, y \in E$.

Demostración. Si hay una familia saturada de seminormas P que define la topología de τ y satisface (1.9.2), entonces P también satisface (1.9.1) y, de acuerdo al teorema anterior, (E, τ) es un álgebra localmente convexa.

Inversamente, si (E, τ) es un álgebra localmente convexa, entonces consideremos la familia P de todas las seminormas en E continuas respecto a la topología τ. Sabemos, por el Teorema 1.5.7 que está es una familia saturada de seminormas que genera la topología τ. Por el teorema anterior, dada $p \in \mathcal{P}$, existe una seminorma $q' \in \mathcal{P}$ y $r > 0$ tales que

$$p(xy) \leq rq'(x) q'(y)$$

si $x, y \in E$.

La función $q = \sqrt{r} q'$ es una seminorma en E que es τcontinua, por serlo q'. Así, $q \in \mathcal{P}$ y se cumple

$$p(xy) \leq q(x) q(y)$$

si $x, y \in E$. □

En lo sucesivo se supondrá que la topología de toda álgebra localmente convexa está definida por una familia saturada de seminormas que satisfacen la condición (1.9.2).

1.10. El cociente de un álgebra localmente convexa.

TEOREMA 1.10.1. *Sea E un álgebra conmutativa localmente convexa cuya topología está generada por la familia de seminormas $\mathcal{P}$. Si I es un ideal de E, entonces el álgebra cociente E/I es un álgebra localmente convexa y su topología está dada por la familia $\dot{\mathcal{P}}$ de las seminormas:*

$$\dot{p}(x) = inf\,\{p(y) : y \in [x]\},$$

con $p \in P$. Si E es de Hausdorff e I es cerrado, entonces la topología cociente es de Hausdorff.

DEMOSTRACIÓN. Recordamos que se supone que $\mathcal{P}$ está saturada y satisface (1.9.2). Por el Teorema 1.4.3 sabemos que $(E/I, \|\cdot\|)$ es un espacio localmente convexo cuya topología está definida por la familia saturada $\dot{\mathcal{P}}$. Sólo falta ver que para esta familia se satisface la condición (1.9.2); mismo que ahora hacemos.

Dada $\dot{p} \in \dot{P}$, existe $q \in P$ tal que $p(xy) \leq q(x)\,q(y)$ si $x, y \in E$; de donde,

$$\begin{aligned}
\dot{p}(xy) =& inf\,\{p(z) : z \in [xy]\}\\
\leq& inf\,\{p(x'y') : x' \in [x] \text{ y } y' \in [y]\}\\
\leq& inf\,\{q(x')\,q(y') : x' \in [x] \text{ y } y' \in [y]\}\\
=& inf\,\{q(x') : x' \in [x]\} \cdot inf\,\{q(y') : y' \in [y]\} = \dot{q}(x)\,\dot{q}(y).
\end{aligned}$$

Por el Lema 1.4.1, si E es de Hausdorff e I es cerrado, entonces la topología cociente es de Hausdorff. □

1.11. Álgebras m-convexas, normadas y de Banach

Clases particulares de álgebras localmente convexas son las que a continuación se definen.

DEFINICIÓN 1.11.1. Un álgebra localmente convexa E es llamada m-convexa si su topología se puede definir por una familia de seminormas $\mathcal{P}$ que satisface que

$$p(xy) \leq p(x)\,p(y) \tag{1.11.1}$$

si $p \in \mathcal{P}$ y $x, y \in E$.

Un caso particular de álgebras m-convexas son las que se definen a continuación.

DEFINICIÓN 1.11.2. Diremos que E es un álgebra normada si hay una norma $\|\cdot\|$ que define su topología y ésta es submultiplicativa; es decir, dicha norma satisface la desigualdad

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|,$$

para todo $x, y \in E$. Si un álgebra normada $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio completo entonces es llamada un álgebra de Banach.

1.12. Las álgebras localmente convexas $(C(X), \kappa)$, $(C_b(X), \beta)$, $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ y $B(E)$.

Los espacios $C(X)$ y $C_b(X)$ de las funciones complejas continuas, y de las continuas y acotadas, respectivamente, definidas en el conjunto no vacío X, son ejemplos de álgebras conmutativas con unidad, cuando en ellos se consideran las operaciones usuales de las funciones. La función constante 1 es la identidad de estas álgebras.

A continuación presentamos ejemplos de álgebra, m- convexa, localmente convexa y normada.

1. El álgebra $C(X)$, con la familia saturada de seminormas

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|,$$

donde K varía en la colección de subconjuntos compactos no vacíos de X, es un álgebra m - convexa, ya que

$$p_K(fg) \leq p_K(f) \, p_K(g)$$

La topología determinada en $C(X)$ por estas seminormas es llamada la *topología compacto-abierta* de $C(X)$. Esta topología se denota por κ.

2. Recordamos que se dice que una función compleja φ definida en un espacio topológico X *se anula al infinito* si para cada $\varepsilon > 0$, existe un compacto $K \subset X$ tal que

$$|f(x)| < \varepsilon \text{ si } x \notin K.$$

Las funciones continuas y positivas que se anulan al infinito, y las acotadas y positivas que se anulan al infinito se denotan por $C_0^+(X)$ y B_0^+, respectivamente.

Ejemplo de este tipo de funciones es toda *función con soporte compacto*. Recordamos que el soporte $sop(f)$ de una función compleja f definida en un espacio topológico X se define como:

$$sop(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Las funciones continuas y positivas, con soporte compacto y las acotadas y positivas, con soporte compacto , definidas en X se denotan por $C_{00}^{+}(X)$ y $B_{00}^{+}(X)$, respectivamente.

2.1 Cuando X es un espacio topológico localmente compacto (de Hausdorff) se define en $C_b(X)$ la llamada *topología estricta de Buck* que hace a $C_b(X)$ un álgebra localmente convexa. Esta topología está generada por la familia saturada de las seminormas definidas en $C_b(X)$ como

$$p_{\varphi}(f) = \sup_{x \in X} |f(x)| \varphi(x)$$

donde φ corre por el espacio $C_0^{+}(X)$.

Tenemos que $\varphi \in C_0^{+}(X)$ implica $\sqrt{\varphi} \in C_0^{+}(X)$ y por tanto,

$$p_{\varphi}(f \cdot g) \leq p_{\sqrt{\varphi}}(f) \, p_{\sqrt{\varphi}}(g)$$

si $f, g \in C_b(X)$. Por lo que se satisface la condición (1.9.1) y $C_b(X)$ es localmente convexa.

2.2 La topología estricta se generaliza para cuando X es completamente regular y Hausdorff ($\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$), sin ser necesariamente localmente compacto. En este caso, la *topología estricta (de Giles)* en $C_b(X)$ está definida por la familia saturada de seminormas definidas en $C_b(X)$ como

$$p_{\varphi}(f) = \sup_{x \in X} |f(x)| \varphi(x)$$

donde φ corre por el espacio $B_0^{+}(X)$. Aquí nuevamente tenemos $\varphi \in B_0^{+}(X)$ implica $\sqrt{\varphi} \in B_0^{+}(X)$ y por tanto,

$$p_{\varphi}(f \cdot g) \leq p_{\sqrt{\varphi}}(f) \, p_{\sqrt{\varphi}}(g)$$

si $f, g \in C_b(X)$. Por lo que se satisface la condición (1.9.1) y esta álgebra es localmente convexa.

La topología estricta en cualquier caso se denota por β.

3. Recordamos que $C_b(X)$ es un espacio de Banach con la *norma del supremo* $\|\cdot\|_{\infty}$, de hecho es un álgebra de Banach ya que

$$\|fg\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty} .$$

A la topología que $\|\cdot\|_{\infty}$ determina se le llama *topología uniforme.*

Cuando X es compacto $C(X) = C_b(X)$ y por tanto, $C(K)$ es un álgebra de Banach con la norma uniforme, si K es compacto.

4. El álgebra $B(E)$ de los operadores lineales continuos de un álgebra normada E en sí misma.

Sea E un álgebra normada con idéntico e. Tenemos que $\|e\| \neq 0$. En el primer capitulo dijimos que $B(E)$ es un espacio normado con la norma de operadores, $\|T\|_B = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|$ y observamos que

$$\|T(x)\| \leq \|T\|_B \|x\|,$$

para todo $x \in E$.

Podemos definir un producto en $B(E)$ como la composición de funciones, entonces es fácil ver que la composición de dos operadores lineales es un operador lineal y que la operación composición es asociativa y distributiva:

$$\begin{aligned}(S_1 + S_2) \circ T(x) &= (S_1 \circ T(x) + S_2 \circ T(x)) \\ &= (S_1 \circ T + S_2 \circ T)(x); \\ T \circ (S_1 + S_2)(x) &= T \circ (S_1(x) + S_2(x)) \\ &= (T \circ S_1 + T \circ S_2)(x);\end{aligned}$$

y si $\alpha \in \mathbb{F}$, entonces

$$\alpha(S \circ T)(x) = \alpha(S \circ T(x)) = (\alpha S) \circ T(x) = S \circ (\alpha T)(x).$$

Por comodidad, en lo sucesivo escribiremos ST en lugar de $S \circ T$.

Por lo anterior $B(E)$ es un álgebra cuyo idéntico es el operador identidad I, y es normada ya que su norma $\|\cdot\|_B$ es submultiplicativa:

$$\|ST\|_B = \sup_{\|x\|\leq 1} \|ST(x)\| \leqq \|S\|_B \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| = \|S\|_B \|T\|_B. \tag{1.12.1}$$

1.12.1. La norma del idéntico. En cualquier álgebra normada con idéntico e, se cumple que $\|e\| \leq \|e\| \|e\|$. Por tanto, $\|e\| \geq 1$.

Es fácil ver que en $B(E)$ se cumple que $\|I\|_B = 1$. En el álgebra normada $(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ la norma de la identidad (la función contante 1) también es 1, pero no siempre este es el caso para cualquier álgebra normada. Podemos arreglar esto último, es decir podemos, como veremos a continuación, definir en un álgebra normada E una norma submultiplicativa equivalente a la original, es decir que define en E la misma topología que la norma original, para la cual la norma de e es 1. Para esto nos valdremos del álgebra normada $B(E)$.

Definamos la transformación $T_x(y) = xy$ de E en sí misma. Tomemos $\lambda \in \mathbb{F}$ y $y, z \in E$, entonces

$$T_x(\lambda y + z) = x(\lambda y + z) = \lambda xy + xz = \lambda T_x(xy) + T_x(xz),$$

por lo que T_x es un operador lineal y es continuo, pues

$$\|T_x(y)\| = \|xy\| \leqq \|x\| \|y\|$$

para todo $y \in Y$. O sea, $\|T_x\| \leq \|x\|$.

Definimos la transformación

$$\begin{aligned} T : E &\to B(E) \\ x &\to T_x. \end{aligned}$$

Tomemos $\lambda \in \mathbb{F}$, entonces

$$\begin{aligned} T_{\lambda x+y}(z) &= (\lambda x + y) z \\ &= \lambda xz + yz \\ &= \lambda T_x(z) + T_y(z). \end{aligned}$$

Entonces T es lineal.

Por otro lado

$$\begin{aligned} T_{xy}(z) &= xyz \\ &= T_x T_y(z). \end{aligned}$$

Ya vimos que $\|T_x\|_B \leq \|x\|$ y como $x = T_x(e)$, entonces $\|x\| \leq \|T_x\| \|e\|$. O sea,

$$\frac{1}{\|e\|} \|x\| \leq \|T_x\|_B \leq \|x\|. \tag{1.12.2}$$

Definimos, $\|x\|_B = \|T_x\|_B$ para todo $x \in E$. Es fácil ver que es una norma en E.

Por (1.12.1) tenemos:

$$\|xy\|_B = \|T_x T_y\| \leqq \|T_x\| \|T_y\| = \|x\|_B \|y\|_B,$$

y entonces $\|x\|_B$ es submultiplicativa en E.

Por (1.12.2) $\|x\|_B$ es equivalente a la original y tenemos que

$$\begin{aligned} \|e\|_B = \|T_x\|_B &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_e(x)\| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| \\ &= 1. \end{aligned}$$

De aquí en adelante, supondremos sin pérdida de generalidad que en cualquier álgebra normada con idéntico la norma de éste es 1, lo que nos facilitará las cosas en muchos casos.

1.13. Los espectros de un álgebra

DEFINICIÓN 1.13.1. Sean E y F dos álgebras sobre el mismo campo $\mathbb{F}$. Una transformación lineal $\phi : E \longrightarrow F$ es un homomorfismo de álgebras si

$$\phi(xy) = \phi(x)\,\phi(y)\,. \tag{1.13.1}$$

Cuando $F = \mathbb{F}$, también usaremos el nombre de *funcional lineal multiplicativa o carácter*. Estas últimas son muy importantes para el estudio de las álgebras y por ello trabajaremos las funcionales lineales multiplicativas.

Si ϕ es cualquier función que cumple la igualdad (1.13.1), entonces es llamada una *función multiplicativa*.

El espectro algebraico de un álgebra topológica E se denotará por $\mathcal{M}^{\#}(E)$ y se define de la siguiente manera:

$$\mathcal{M}^{\#}(E) = \{\phi\text{: } \phi\text{es un carácter no nulo en } E\}\,.$$

Definimos el llamado espectro (topológico) de E como

$$\mathcal{M}(E) \quad = \quad \left\{\phi \in \mathcal{M}^{\#}(E) : \phi \text{ es continuo}\right\}.$$

TEOREMA 1.13.2. *Todo $\phi \in \mathcal{M}^{\#}(E)$, donde E es un álgebra con identidad e, satisface lo siguiente:*
(a) $\phi(e) = 1$.
(b) $\phi(x) \neq 0$ si x es invertible.
(c) $\phi\left(x^{-1}\right) = \phi(x)^{-1}$ si x es invertible.
(d) Su núcleo ker (ϕ) es un ideal bilateral máximo.

DEMOSTRACIÓN. (a) Como ϕ no es nula, entonces existe un elemento y de E tal que $\phi(y) \neq 0$ y entonces,

$$\phi(y) = \phi(ey) = \phi(e)\,\phi(y)\,,$$

de lo que se obtiene que $\phi(e) = 1$.

Para demostrar (b) y (c) usaremos (a). Sabemos que:

$$1 = \phi(e) = \phi\left(xx^{-1}\right) = \phi(x)\,\phi\left(x^{-1}\right),$$

entonces, $\phi(x) \neq 0$ y $\phi\left(x^{-1}\right) = \phi(x)^{-1}$.

(d) El kernel de una funcional lineal es un subespacio vectorial. Por otra parte, si $x \in ker(\phi)$ y $y \in E$, entonces

$$\phi(xy) = \phi(x)\,\phi(y) = 0$$

$$\phi(yx) = \phi(y)\,\phi(x) = 0.$$

Por tanto, $xy, yx \in E$; lo que nos dice que el $ker(\phi)$ es un ideal bilateral.

Ahora demostraremos que $ker(\phi)$ es un ideal máximo; de hecho probaremos algo más fuerte: es un espacio lineal maximal.

Como ϕ no es la funcional nula, entonces $ker\,(\phi) \neq E$. Sea S un subespacio lineal de E tal que $ker\,(\phi) \subsetneqq S$. Tomemos $x \in S \diagdown ker\,(\phi)$ y llamemos M al subespacio generado por $ker\,(\phi)$ y x. Entonces $M \subset S$.

Para cada $y \in E$ se tiene que:

$$y = \left(y - \frac{x}{\phi\,(x)} y \right) + \frac{x}{\phi\,(x)} y.$$

Claramente $\left(y - \frac{x}{\phi(x)} y \right) \in ker\,(\phi)$ y el segundo sumando es un múltiplo de y por lo que pertenece a M; es decir $E = M = S$, lo que prueba que $ker\,(\phi)$ es un subespacio maximal y por consiguiente, al ser ideal, es ideal máximo. □

COROLARIO 1.13.3. *Dados X un álgebra con identidad e, $x \in X$ y una $\phi \in \mathcal{M}^{\#}\,(E)$, entonces el elemento $x - \phi\,(x)\, e$ no es invertible.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos:

$$\phi\,(x - \phi\,(x)\, e) = \phi\,(x) - \phi\,(x) = 0$$

y por el resultado anterior, $x - \phi\,(x)$ no es invertible. □

El siguiente teorema nos proporcionará condiciones suficientes para que dos caracteres definidos en un álgebra con identidad coincidan.

TEOREMA 1.13.4. *Sean E un álgebra sobre $\mathbb{F}$. Sean ϕ_1 y ϕ_2 dos funciones lineales con ϕ_2 no nula, tales que*

$$ker\ \phi_1 \subset ker\ \phi_2.$$

Entonces $\phi_2 = \lambda \phi_1$ para algún complejo λ no nulo. Si E tiene identidad y ϕ_1 y ϕ_2 son además multiplicativas, se cumple que $\phi_1 = \phi_2$.

DEMOSTRACIÓN. La primera afirmación es consecuencia del Lema 1.6.1

Si E tiene identidad y las funciones son además multiplicativas, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \phi_2\,(e) &= \lambda \phi_1\,(e)\,, \\ 1 &= \lambda, \end{aligned}$$

de donde, $\phi_1 = \phi_2$. □

El siguiente resultado relaciona los espectros de álgebras topológicas isomorfas.

TEOREMA 1.13.5. *Sea $T : E \to F$ un isomorfismo entre las álgebras (topológicas) E y F, es decir es un homomorfismo biyectivo (y bicontinuo), entonces*

$$\mathcal{M}^{\#}(E) = \left\{\varphi \circ T : \varphi \in \mathcal{M}^{\#}(F)\right\}$$
$$(\mathcal{M}(E) = \{\varphi \circ T : \varphi \in \mathcal{M}(F)\}\, M)$$

.

DEMOSTRACIÓN. Haremos la prueba suponiendo que T es bicontinuo. Si $\phi \in \mathcal{M}(F)$, entonces $\varphi \circ T \in \mathcal{M}(E)$ y si $\psi \in \mathcal{M}(E)$, entonces $\psi \circ T^{-1} \in \mathcal{M}(F)$ y por tanto, $\psi = \varphi \circ T$ con $\varphi = \psi \circ T^{-1}$. □

1.14. Invertibilidad en álgebras de Banach

Veremos que el conjunto $G(E)$ de elementos invertibles de un álgebra normada E con identidad es abierto.

TEOREMA 1.14.1. *Sea E un álgebra de Banach con identidad, entonces todo elemento en la bola abierta $B_1(e)$, con centro en e y radio es invertible.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $y \in B_1(e)$. Hagamos $x = e - y$. Entonces, $\|x\| < 1$ y la serie $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ converge por ser absolutamente convergente en el espacio de Banach E.

A la k-suma parcial

$$f_k(x) = \sum_{n=1}^{k} x^n.$$

la multiplicamos por $(e - x)$ por ambos lados y obtenemos:

$$f_k(x)(e - x) = e - x^{k+1} \text{ y } (e - x) f_k(x) = e - x^{k+1}$$

Sabemos que $x^k \longrightarrow 0$ y $f_k(x) \longrightarrow f(x)$, por lo que:

$$\begin{aligned} f(x)(e - x) &= e = (e - x) f(x) \\ f(x)(y) &= e = (y) f(x). \end{aligned}$$

Es decir, $f(x)$ es el inverso de y. □

El teorema anterior nos dice que $B_1(e) \subset G(E)$.

TEOREMA 1.14.2. *Sea E un álgebra de Banach con identidad, entonces $G(E)$ es abierto.*

Demostración. Tomemos $x \in G(E)$. Sea $y \in B_{\|x^{-1}\|^{-1}}(x)$, entonces:

$$\left\|e - x^{-1}y\right\| = \left\|x^{-1}(x-y)\right\| \leq \left\|x^{-1}\right\| \|x-y\| < 1.$$

Por el teorema anterior, tenemos que $x^{-1}y$ es invertible, y por tanto existe z tal que:

$$\left(zx^{-1}\right)y = z\left(x^{-1}y\right) = e,$$

por lo que y es invertible por la izquierda. De manera similar se demuestra que y es invertible por la derecha, de donde $y \in G(E)$. Por tanto, $G(E)$ es un conjunto abierto. □

Así, en un álgebra Banach con identidad los elementos que están cerca de la identidad son invertibles y, como ahora veremos, la operación de tomar inverso es continua.

Teorema 1.14.3. *La operación de tomar inverso ($(\cdot)^{-1} : G(E) \longrightarrow E$) en un álgebra de Banach E con identidad e, es continua.*

Demostración. Sean $x \in G(E)$ y $\varepsilon > 0$. Se probará que existe $\delta > 0$ tal que si $\|y\| < \delta$, entonces $\left\|(x+y)^{-1} - x^{-}\right\| < \epsilon$.

Por la continuidad de la suma, sabemos que existe $\delta' > 0$ tal que si $\|z\| < \delta'$ entonces $e+z$ pertenece a la bola unitaria con centro e; lo que quiere decir que $e+z$ es invertible, si $\|z\| < \delta'$. Notamos que δ' es independiente de ε.

Sea ϵ'$=\frac{\epsilon}{\delta'}$. Por la continuidad del producto en E, existe $\delta > 0$ tal que si $\|y\| \leq \delta$, entonces:

$$\left\|x^{-1}y\right\| < \delta' \frac{\epsilon\text{'}}{\|x^{-1}\| + \epsilon\text{'}},$$

por lo que $\left\|x^{-1}y\right\| < \delta'$. Entonces $e + x^{-1}y$ es invertible, y su inverso es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e - \left(e + x^{-1}y\right)\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-x^{-1}y\right)^n.$$

Observemos que $x+y = x\left(e + x^{-1}y\right)$; luego, por ser $x+y$ producto de invertibles, $x+y$ es invertible.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\left\|(x+y)^{-1}-x^{-1}\right\| &= \left\|\left(x^{-1}\left(e+x^{-1}y\right)^{-1}-x^{-1}\right)\right\| \\
&\leq \left\|x^{-1}\right\|\left\|\left(e+x^{-1}y\right)-e\right\| \\
&= \left\|x^{-1}\right\|\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(-x^{-1}y\right)^{n}\right\| \\
&\leq \left\|x^{-1}\right\|\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\left(-x^{-1}y\right)\right\|^{n} \\
&< \left\|x^{-1}\right\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\delta'\frac{\epsilon'}{\|x^{-1}\|+\epsilon'}\right)^{n} \\
&< \left\|x^{-1}\right\|\left(\frac{\delta'\epsilon'}{\|x^{-1}\|+\epsilon'}\right) \\
&< \delta'\epsilon' = \epsilon.
\end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, tenemos la continuidad de la función inversa. $\square$

El siguiente teorema es interesante, ya que hace ver que la condiciones de que una función sea lineal y multiplicativa en un álgebra de Banach son muy fuertes: la hacen continua.

TEOREMA 1.14.4. *Sea E una álgebra de Banach con identidad e, entonces $\mathcal{M}(E)=\mathcal{M}^{\#}(E)$.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición, $\mathcal{M}(E)\subset\mathcal{M}^{\#}(E)$. Sea $\phi\in\mathcal{M}^{\#}(E)$. Si demostramos que $\|\phi\|\leq M$ para algún real M, entonces, por ser ϕ lineal, tendremos su continuidad y por tanto, $\phi\in\mathcal{M}(E)$.

Tomemos $x\in E$; si $\phi(x)=0$, entonces obviamente $\|\phi(x)\|\leq M\|x\|$, para cualquier real positivo M. En caso contrario, tomamos el elemento:

$$\frac{x}{\phi(x)}-e.$$

Al aplicarle ϕ a este elemento, obtenemos que

$$\phi\left(\frac{x}{\phi(x)}-e\right)=1-1=0,$$

por lo que $\frac{x}{\phi(x)}-e$ no es invertible, luego $\frac{x}{\phi(x)}$ no pertenece a la bola unitaria con centro en e; es decir,

$$\left\|\frac{x}{\phi(x)}-e\right\|\geq 1.$$

Por la continuidad de la suma, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| \leq \delta$ entonces $x - e$ está en la bola unitaria de e. Entonces $\left\| \frac{x}{\phi(x)} \right\| \geq \delta$, es decir:

$$|\phi(x)| \leq M \|x\|,$$

con $M = \frac{1}{\delta}$ y por tanto, es ϕ es una función continua. □

Con base en los resultados anteriores probaremos que la norma de cualquier carácter no nulo en un álgebra de Banach con identidad es 1.

COROLARIO 1.14.5. *Sea E una álgebra de Banach con identidad e. Si $\phi \in \mathcal{M}(E)$, entonces $\|\phi\| = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\phi(e) = 1$, entonces $1 = |\phi(e)| \leq \|\phi\|$. Por otra parte,

$$|\phi(x)| \leq \|x\|$$

para todo $x \in E$ ya que en caso contrario,

$$\left\| \frac{x}{\phi(x)} \right\| < 1$$

para algún $x \in E$ y por tanto, $e - \frac{x}{\phi(x)}$ es invertible, pero esto es imposible, ya que $\phi\left(e - \frac{x}{\phi(x)}\right) = 0$. □

1.15. El espectro de un elemento

DEFINICIÓN 1.15.1. Sea E un álgebra con identidad e. Entonces definimos al espectro de $x \in E$ como:

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{F}\colon x - \lambda e \text{ no tiene inverso}\}.$$

TEOREMA 1.15.2. *En un álgebra de Banach E con identidad, se tiene que $\sigma(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in E$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe un elemento x tal que $\sigma(x) = \emptyset$, lo que significa que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, el elemento $x - \lambda e$ tiene inverso. En particular, x tiene inverso y entonces $x \neq 0$.

Definimos la función $g : \mathbb{C} \longrightarrow E$, como $g(\lambda) = (x - \lambda e)^{-1}$ y sea λ_0 un complejo fijo arbitrario, entonces:

$$\begin{aligned}
(g(\lambda_0 + \lambda) - g(\lambda_0)) &= \left((x - (\lambda_0 + \lambda) e)^{-1} - (x - \lambda_0 e)^{-1}\right) \\
&= \lambda (x - (\lambda_0 + \lambda) e)^{-1} (x - \lambda_0 e)^{-1}.
\end{aligned}$$

La función $h{:}\mathbb{C} \longrightarrow E$ definida como $\lambda \longrightarrow (x - (\lambda + \lambda_0)\, e)^{-1}$ es continua en $\mathbb{C}$, por ser composición de funciones continuas y por consiguiente,

$$g'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{g(\lambda + \lambda_0) - g(\lambda_0)}{\lambda} = (x - \lambda_0 e)^{-2}.$$

Sea f cualquier funcional lineal y continua definida en E. Entonces,

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(\lambda_0) &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{(f \circ g)(\lambda + \lambda_0) - (f \circ g)(\lambda_0)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} f\left(\frac{g(\lambda + \lambda_0) - g(\lambda_0)}{\lambda}\right) \\
&= f\left(\lim_{\lambda \to 0} \frac{g(\lambda + \lambda_0) - g(\lambda_0)}{\lambda}\right) \\
&= f(g'(\lambda_0)).
\end{aligned}$$

O sea, $(f \circ g)'$ es una función entera.

Por otra parte,

$$\left\| \left(\frac{x}{\lambda} - e\right)^{-1} \right\| \longrightarrow 1 \text{ cuando } \lambda \longrightarrow \infty$$

y entonces

$$\|g(\lambda)\| = \left\|(x - \lambda e)^{-1}\right\| = |\lambda|^{-1} \left\| \left(\frac{x}{\lambda} - e\right)^{-1} \right\| \longrightarrow 0 \text{ cuando } \lambda \longrightarrow \infty.$$

Como

$$|f(g(\lambda))| \quad \leq \quad \|f\| \, \|g(\lambda)\|$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, se sigue de lo anterior que

$$|f(g(\lambda))| \quad \longrightarrow \quad 0, \text{ cuando } \lambda \longrightarrow \infty.$$

Por tanto, $f \circ g$ es una función acotada, y por el teorema de Liouville, la función es constante. Como su límite al infinito es cero, entonces $f \circ g$ es la función idénticamente cero, teniéndose que $f\left(x^{-1}\right) = f(g(0)) = 0$, y por el teorema de Hahn-Banach, x^{-1}es 0, lo que es absurdo. Así, se concluye que $\sigma(x) \neq \emptyset$. $\square$

El siguiente teorema nos hace ver que el conjunto $\sigma(x)$ cumple ciertas propiedades topológicas.

TEOREMA 1.15.3. *En un álgebra de Banach E con identidad e, $\sigma(x)$ es un subconjunto compacto del disco cerrado con centro en cero y radio $\|x\|$.*

Demostración. Tomemos $\lambda \in \sigma(x)$. Entonces $\lambda e - x$ no es invertible. Si $\lambda \neq 0$, entonces $e - \frac{x}{\lambda}$ no es invertible, por lo que

$$\left\| e - \left(e - \frac{x}{\lambda} \right) \right\| \quad \geq \quad 1.$$

De lo que se puede concluir:

$$\|x\| \geq |\lambda| \,.$$

Con esto se tiene que $\sigma(x)$ está contenido en la bola cerrada con centro en el cero y radio $\|x\|$. Para ver que es compacto, sólo basta probar que es cerrado.

Tomemos una sucesión (λ_n) de elementos de $\sigma(x)$, tal que converge a λ y supongamos que λ no está en $\sigma(x)$, es decir, $x - \lambda e$ es invertible, entonces pertenece a $G(E)$, que es un conjunto abierto. Luego, existe $n \geq 1$ tal que $x - \lambda_n e$ pertenece a $G(E)$, lo que es una contradicción a que λ_n está en el espectro de x. Por tanto, $\lambda \in \sigma(x)$, con lo que tenemos que $\sigma(x)$ es un conjunto cerrado. □

Sabemos que los complejos son un álgebra de Banach. A continuación veremos que todo álgebra de Banach compleja, conmutativa, con unidad y que es campo, tiene que ser esencialmente los complejos.

Teorema 1.15.4. *Un álgebra de Banach E conmutativa y con unidad en la cual todo elemento distinto de cero es invertible, es isométricamente isomorfa al campo de los números complejos.*

Demostración. Tomemos $x \in E$ distinto de cero. Por el teorema anterior, sabemos que debe existir un número complejo λ tal que $x - \lambda e$ no es invertible. Por hipótesis, λ es distinto de cero, y $x - \lambda e = 0$, ya que el cero es el único elemento no invertible, de lo que se tiene que $x = \lambda e$ y este complejo λ es único. Por tanto, para todo $x \in E$ distinto de 0 existe un único complejo λ_x no nulo tal que $x = \lambda_x e$. Para $x = 0$ definimos $\lambda_x = 0$, por lo que podemos definir la función,

$$\begin{aligned} f : E \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{C}, \\ f(x) \quad &\longrightarrow \quad \lambda_x \end{aligned}$$

que tiene las siguientes propiedades:

Es aditiva, ya que

$$(\lambda_x + \lambda_y)\, e \quad = \quad x + y,$$

nos dice que

$$f(x+y) = \lambda_x + \lambda_y = f(x) + f(y) \,.$$

Es homogénea, pues

$$c\lambda_x e \quad = \quad cx,$$

nos dice que

$$f\left(cx\right) = c\lambda_x = cf\left(x\right).$$

Es multiplicativa, ya que

$$\lambda_x \lambda_y e = xy$$

nos dice que

$$f\left(xy\right) = \lambda_x \lambda_y e = f\left(x\right) f\left(y\right).$$

O sea, f es una funcional lineal y multiplicativa. Si suponemos que $f\left(x\right) = 0$, entonces $x = 0e = 0$, por lo que f es inyectiva; claramente también es suprayectiva, ya que $f\left(\lambda e\right) = \lambda$.

Para terminar, sólo tenemos que ver que conserva la norma, pero esto se sigue de que

$$\left\|f\left(x\right)\right\| = \left|\lambda_x\right| = \left\|\lambda_x e\right\| = \left\|x\right\|,$$

por lo que f es un isomorfismo isométrico de álgebras. □

1.16. Ideales máximos en un álgebra de Banach. El álgebra cociente

Ahora trabajaremos con ideales en un álgebra y veremos la relación de estos con los caracteres definidos en el álgebra.

TEOREMA 1.16.1. *Cualquier ideal máximo I en un álgebra de Banach con identidad e, es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Por ser ideal máximo, sólo tiene dos opciones, es denso, o es cerrado. Si es denso, entonces interseca al conjunto de elementos invertibles, lo que quiere decir que un elemento invertible está en el ideal. Entonces, e pertenece al ideal, por lo que el ideal es todo el espacio, de donde no puede ser denso; por tanto, es cerrado. □

Sea I un ideal cerrado en un álgebra conmutativa normada (de Banach) E, entonces E/I es normada (de Banach) con la norma cociente:

$$\left\|\overline{x}\right\| = \inf\left\{\left\|x + y\right\| : y \in I\right\}.$$

En efecto, por el Teorema 1.4.3 (1.4.4) sabemos que $(E/I, \|\cdot\|)$ es un espacio normado (de Banach). Probaremos que la norma en E/I es submultiplicativa y para esto recurriremos de nuevo al hecho de que $xI+yI+I \subset I$:

$$\begin{aligned}
\|\overline{xy}\| &= \inf\{\|xy+z\| : z \in I\} \\
&\leq \inf\{\|xy + xz_1 + yz_2 + z_1 z_2\| : z_1, z_2 \in I\} \\
&= \inf\{\|(x+z_1)(y+z_2)\| : z_1, z_2 \in I\} \\
&\leq \inf\{\|(x+z_1)\| \, \|(y+z_2)\| : z_1, z_2 \in I\} \\
&= \inf\{\|(x+z_1)\| : z_1 \in I\} \inf\{\|(y+z_2)\| : z_2 \in I\} \\
&= \|\overline{x}\| \, \|\overline{y}\|,
\end{aligned}$$

por lo que se tiene que E/I es una álgebra normada.

Teorema 1.16.2. *Sea E un álgebra de Banach conmutativa, con identidad e, y sea M un ideal máximo. Entonces existe un elemento $\phi \in \mathcal{M}(E)$ cuyo núcleo es I.*

Demostración. El ideal M es cerrado por ser ideal máximo. De donde, por lo antes dicho, E/M es una álgebra de Banach con identidad y además conmutativa, porque en este caso E es conmutativa.

El siguiente paso es ver que E/M es un campo. Sólo es necesario probar que todo elemento $\overline{x} \neq 0$ tiene inverso.

Recordemos que $\overline{e}$ es el idéntico de E/M. Sea $\overline{x} \neq 0$, es decir $x \notin M$. Denotamos por $[M, x]$ al ideal generado por $M \cup \{x\}$. Este nuevo ideal es el total, lo que quiere decir que $e \in [M, x]$. Entonces $e = yx + r$, con $y \in E$ y $r \in M$, de lo que se sigue que $e - r = yx$, es decir, $yx \in e + M$, por lo que $\overline{yx} = \overline{e}$ y entonces $\overline{y}$ es el inverso de $\overline{x}$.

Por Teorema 1.15.4, sabemos entonces que E/M es isomorfo a $\mathbb{C}$. Más aun, si se observa la demostración de dicho teorema vemos que para cada $\overline{x}$ existe un único complejo λ_x tal que

$$\overline{x} = \lambda_{\overline{x}} \overline{e},$$

y que la función que asocia λ_x a cada elemento $\overline{x}$, es una isometría lineal y multiplicativa. Entonces la composición ϕ de esta función con el homomorfismo cociente:

$$E \to E/M \to \mathbb{C}$$

es lineal, multiplicativa y su núcleo es M, de esto último se sigue que ϕ no es idénticamente cero y además, es continua por el Teorema 1.14.4. $\square$

El siguiente resultado caracteriza a los elementos del espectro de un álgebra de Banach, conmutativa y con unidad.

TEOREMA 1.16.3. *Sean E un álgebra de Banach, conmutativa y con unidad e y ϕ una funcional lineal multiplicativo. Entonces ϕ pertenece al espectro si y sólo si su núcleo es un ideal máximo.*

DEMOSTRACIÓN. Se probó en el Teorema 1.13.2 que si ϕ pertenece al espectro, entonces su núcleo es un ideal máximo.

Para el regreso, tomemos una funcional lineal multiplicativa ϕ cuyo núcleo sea un ideal máximo M. Por el Teorema 1.16.2, sabemos que existe un carácter ϕ' en el espectro de E cuyo núcleo es igual al ideal M. Por teorema1.16.2, se tiene que $\phi = \phi'$. Es decir, ϕ está en el espectro de E. □

El siguiente resultado muestra la estrecha relación que existe entre el espectro del álgebra y el de cualquiera de sus elementos.

TEOREMA 1.16.4. *Sean E un álgebra de Banach, conmutativa, con identidad e, $x \in E$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces,$\lambda \in \sigma(x)$ si y sólo si $\phi(x) = \lambda$ para algún $\phi \in \mathcal{M}(E)$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero supongamos que $\phi(x) = \lambda$ para algún $\phi \in \mathcal{M}(E)$; es decir, $\phi(x - \lambda e) = 0$, por lo que el elemento $x - \lambda e$ no es invertible, es decir $\lambda \in \sigma(x)$.

Para la otra implicación, supongamos que $\lambda \in \sigma(x)$, es decir, $x - \lambda e$ no es invertible. Luego, el ideal generado por $x - \lambda e$, que denotamos por $[x - \lambda e]$, no es el total, ya que no contiene a la identidad, y entonces, existe un ideal máximo M que contiene a $[x - \lambda e]$, Por el teorema 1.16.2, sabemos que existe $\phi \in \mathcal{M}(E)$ tal que tiene como núcleo a M, por lo que $\phi(x - \lambda e) = \phi(x) - \lambda = 0$, o sea, $\phi(x) = \lambda$. □

COROLARIO 1.16.5. *Sea E un álgebra de Banach, conmutativa y con identidad e. Entonces, un elemento es invertible si y sólo si todo elemento del espectro de E no se se anula en él.*

DEMOSTRACIÓN. Ya se probó que si un elemento es invertible, entonces al aplicarle un elemento del espectro, el resultado es distinto de cero. Esto nos proporciona una parte del teorema. Para la otra, tomemos un elemento x que no es invertible, de donde, $x - 0e$ no es invertible; o sea, $0 \in \sigma(x)$. Por la proposición anterior, debe existir un elemento del espectro tal que $\phi(x) = 0$. □

1.17. Ideales máximos en el álgebra $C(K)$ de funciones complejas continuas sobre un compacto

Daremos algunos resultados sobre los ideales máximos en el álgebra $C(K) = C_b(K)$ de las funciones complejas continuas definidas en un conjunto compacto K.

Teorema 1.17.1. *Sean K un espacio Hausdorff compacto y $M \subset C(K)$. Entonces, M es un ideal máximo si y sólo si*

$$M = \{f \in C(K) : f(x) = 0\}$$

para algún $x \in K$.

Demostración. Es fácil ver que para cada $x \in K$ el conjunto

$$I_x = \{f \in C(K) : f(x) = 0\}$$

es un ideal propio de K.

Sea M un ideal máximo. Afirmamos que $M \subset I_x$ para algún $x \in K$. Supongamos falsa la afirmación. Para todo $x \in K$ existe una función $f_x \in M$ tal que $f_x(x) \neq 0$. Por la continuidad, cada f_x es distinta de cero en una vecindad de x, denotada por V_{f_x}, Estas vecindades, al variar x forman una cubierta de K, por lo que contiene una subcubierta finita de K. Sea $\left\{V_{f_{x_i}} : 1 \leq i \leq n\right\}$ dicha subcubierta. La función $f_{x_i}\overline{f_{x_i}} = |f_{x_i}|^2$ es una función continua que pertenece a M, para cada $1 \leq i \leq n$. La función

$$f = \sum_{i=1}^{n} |f_{x_i}|^2,$$

es continua y pertenece al ideal M; además, f es mayor que cero en todos sus puntos, por lo que f es invertible y por tanto la identidad pertenece al ideal M, o sea, $M = E$ lo que es una contradicción al hecho de que M es ideal máximo, por consiguiente, $M \subset I_x$ para algún $x \in K$. De la maximalidad de M se sigue que

$$M = I_x.$$

Inversamente, supongamos que $M = I_x$ para algún $x \in K$. Entonces M es un ideal propio de $C(K)$. Falta verificar que es máximo. Supóngase que existe un ideal I que contiene propiamente a M, es decir, hay una función $g \in I \setminus M$; en particular, $g(x) \neq 0$. Tenemos que

$$1 = \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{g(y)}{g(x)}$$

y $1 - \frac{g}{g(x)}$ pertenece a M y $\frac{g}{g(x)} \in I$. Así, 1 pertenece a I y entonces, $I = C(K)$. Por tanto, M es un ideal máximo. $\square$

Ahora describiremos los espectros de las álgebras $C(K)$, con K compacto y $C_b(X)$, con X un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$.

1.18. Los espectros de $C(K)$y $C_b(X)$

En este apartado K es un espacio compacto de Hausdorff y X es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$.

TEOREMA 1.18.1. *Para el álgebra de Banach* $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ *se cumple que*

$$\mathcal{M}(C(K)) = \mathcal{M}^{\#}(C(K)) = K,$$

donde K *se identifica con* $\widehat{K}$*, asociando a cada* $x \in K$ *la función compleja* $\widehat{x}$ *definida en* $C(K)$ *como:*

$$\widehat{x}(f) = f(x).$$

Por razones obvias cada una de las funcionales $\widehat{x}$ *es llamada una evaluación (en* x*).*

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que la función $\widehat{x}$ es lineal, multiplicativa y continua, de hecho $|\widehat{x}(f)| \leq \|f\|_\infty$ para todo $f \in C(K)$. Además $|\widehat{x}(1)| = 1$ por tanto, $\|\widehat{x}\| = 1$. Por lo que $\mathcal{M}(C(K)) \supseteq K$.

Tomemos $\phi \in \mathcal{M}(C(K))$; en particular, su núcleo es un ideal propio, ya que ϕ no es nula. Entonces, existe un ideal máximo M de $C(E)$, que contiene al núcleo de ϕ. De esta manera, $M \subset \{f \in C(K) : f(x) = 0\}$ para algún x fijo; o sea,

$$\begin{aligned} \ker\phi &\subset \{f \in C(K) : f(x) = 0\} \\ &= \{f \in C(K) : \widehat{x} = 0\} \\ &= \ker\widehat{x}. \end{aligned}$$

Luego entonces, por el Teorema 1.13.4, se tiene que $\phi = \widehat{x}$, y por tanto,

$$\mathcal{M}(C(K)) \subset K.$$

De las dos contenciones arriba obtenidas, concluimos que $\mathcal{M}^{\#}(C(K)) = K$. □

Ahora obtendremos el espectro del álgebra $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ de funciones complejas continuas y acotadas.

TEOREMA 1.18.2. *Para el álgebra* $C_b(X)$ *con la topología uniforme se cumple que*

$$\mathcal{M}(C_b(X)) = \beta(X)$$

donde $\beta(X)$ se identifica con $\widehat{\beta(X)}$, asociando a cada $y \in \beta(X)$ y la función compleja $\widehat{y}$ definida en $C_b(X)$ como:

$$\widehat{y}(f) = f^e(y),$$

donde f^e es la extensión de f a $\beta(X)$.

Demostración. La asociación $T : C_b(X) \to C(\beta(X))$ definida como $T(f) = f^e$, donde f^e es la extensión continua de f a $\beta(X)$ es un isomorfismo isométrico de álgebras. En efecto, la asociación es inyectiva, ya que $f^e = 0$ implica $f = 0$ por la unicidad de la extensión f^e. Es fácil ver que la extensión de la restricción f^e_X de f^ea X es f^e, por lo que T es sobre, y además se cumple que $(\lambda f + g)^e = \lambda f^e + g^e$, $(f \cdot g)^e = f^e \cdot g^e$. Por otra parte, $\|f^e\|_\infty = \|f\|_\infty$, pues todo elemento de $\beta(X)$ es el límite de una red en X.

De acuerdo al Teorema 1.13.5 tenemos que

$$\mathcal{M}(C_b(X)) = \{\phi \circ \Gamma : \phi \in \mathcal{M}(C(\beta(X)))\}.$$

Por el Teorema anterior se tiene entonces que $\psi \in \mathcal{M}(C_b(X))$si y sólo si $\psi(f) = (\widehat{y} \circ \Gamma)(f) = f^e(y)$ para algún $y \in \beta(X)$ y toda $f \in C_b(X)$. □

1.19. Ejemplo en que $\mathcal{M}^{\#}(E) = \emptyset$, con E localmente convexa.

A diferencia de lo que ocurre con el álgebra de Banach $C_b(X)$, que tiene tantos caracteres, como puntos tiene X, hay álgebras localmente convexas cuyo único carácter es el nulo. Daremos un ejemplo de esto.

Sea n un natural; como es costumbre denotaremos por $\mathcal{L}^n$ al espacio seminormado de las funciones Lebesgue medibles en $[0,1]$ tales que $\int_{[0,1]} |f|^n \, d\lambda < \infty$, con la seminorma $\|f\|_n = \left(\int_{[0,1]} |f|^n \, d\lambda\right)^{\frac{1}{n}}$.

El espacio vectorial

$$\mathcal{L}^\omega = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^n$$

es localmente convexo cuando se la da la topología generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_n : \ n \geq 1\}$.

En $\mathcal{L}^\omega$ se define la relación de equivalencia: $f \sim g$ si $f(x) = g(x)$ a.e en $[0,1]$. El espacio cociente L^ω que esa relación determina es un espacio localmente convexo.

El espacio L^ω se puede manejar como si fuera $\mathcal{L}^\omega$, pero considerando iguales a las funciones que coinciden casi dondequiera en $[0,1]$ y así lo haremos.

Hagamos $E = L^\omega$. Con el producto usual E es un álgebra localmente convexa, como a continuación probamos.

Tomemos $f,g\in E$, entonces $\int_{[0,1]}|f|^{2n}\,d\lambda<\infty$ y $\int_{[0,1]}|g|^{2n}\,d\lambda<\infty$, para cualquier natural n; por tanto, por la desigualdad de Hölder, obtenemos:

$$\int_{[0,1]}|fg|^{n}\,d\lambda\leq\sqrt{\int_{[0,1]}|f|^{2n}\,d\lambda}\sqrt{\int_{[0,1]}|f|^{2n}\,d\lambda}<\infty \tag{1.19.1}$$

para cualquier natural n y así $fg\in E$. Es fácil comprobar que con este producto E satisface los axiomas de álgebra.

Por otra parte de (1.19.1) se sigue que

$$\|fg\|_{n}\leq\|f\|_{2n}\|g\|_{2n}$$

si $n\geq 1$ y $f,g\in E$. Por el Corolario 1.9.3 E es un álgebra localmente convexa.

Veamos que $\mathcal{M}^{\#}(E)=\emptyset$. Para esto, supongamos lo contrario y sea $\phi:E\longrightarrow\mathbb{C}$ un homomorfismo no nulo.

Como $C[0,1]\subset E$ entonces la restricción $\phi_{C[0,1]}$ de ϕ a E es un carácter de $C([0,1])$.

Supongamos que $\phi_{C[0,1]}$ es no nulo. Por () , existe $x_0\in[0,1]$ tal que $\phi(f)=f(x_0)$ para toda $f\in C([0,1])$.

Tomemos la función $|logx|$. De que $\lim\limits_{x\to 0^+}x\,(logx)=0$ se sigue que

$$\int_0^a|log\,(x)|^n\,dx=-na\,((log\,(a))-1)\,.$$

por lo que $log\,(x)\in L^n$ para todo $n\in\mathbb{N}$; es decir $log\,(x)\in E$.

Entonces, la función $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida como

$$f(x)=\begin{cases}|log\,(x-x_0)|+1 & \text{si } x\in(x_0,1]\\ |log\,(x_0-x)|+1 & \text{si } x\in[0,x_0)\\ 1 & \text{si } x=x_0\end{cases}$$

pertenece a $\mathcal{L}^n$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Afirmamos que la función

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{|log(x-x_0)|+1} & \text{si } x\in(x_0,1]\\ \frac{1}{|log(x_0-x)|+1} & \text{si } x\in[0,x_0)\\ 0 & \text{si } x=x_0\end{cases}$$

es una función continua en $[0,1]$. Es claro que g es continua en todo punto $x\in[0,1]$ distinto de x_0. Supongamos que (x_n) es una sucesión en $[0,1]$ y que $x_n \longrightarrow 0$, entonces $|log\,(x_n - x_0)|+1 \longrightarrow \infty$ y $|log\,(x_0 - x_n)|+1 \longrightarrow \infty$ por lo que $g\,(x_n) \longrightarrow 0$ y así, g también es continua en x_0.

Observamos que $g = f^{-1}$ para todo $x \neq x_0$ y $\lambda\,(x_0) = 0$, por consiguiente, $f^{-1} = g$ en E. De esto se obtiene que

$$1 = \phi\,(1) = \phi\,(fg) = \phi\,(f)\,\phi\,(g) = \phi\,(f)\,g\,(x_0) = 0,$$

lo que es absurdo

Ahora supongamos que $\phi_{C[0,1]}$ es el homomorfismo cero. Con las mismas funciones f y g previamente definidas se llega a que

$$1 = \phi\,(1) = \phi\,(fg) = \phi\,(f)\,\phi\,(g) = \phi\,(f)\,0 = 0.$$

Por tanto, el único carácter definido en E es el nulo. O sea, $\mathcal{M}^{\#}\,(E) = \emptyset$.

Capítulo 2

El espectro de álgebras de funciones continuas con pesos

Resultados topológicos para el capítulo.

2.1. Partición de la unidad en espacios pseudométricos

El objetivo de esta sección es ver que para toda cubierta abierta de un espacio pseudométrico existe una partición de la unidad localmente finita y subordinada a la cubierta. Este teorema nos será usado en el Capítulo 4.

Iniciamos definiendo que significa que una familia de abiertos de un espacio topológico X sea localmente finita.

DEFINICIÓN 2.1.1. Una familia de abiertos $\mathcal{U}$ de X es localmente finita si para todo $x \in X$ existe una vecindad W de x que sólo interseca a un número finito de elementos de $\mathcal{U}$.

Un resultado sobre familias localmente finitas es que la cerradura de la unión de los miembros de cualquiera de sus subcolecciones, es la unión de la cerradura de cada uno de los conjuntos que forman a la subcolección; es decir:

TEOREMA 2.1.2. *Sea $\mathcal{U}$ una familia de abiertos localmente finita y sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, entonces $\overline{\bigcup_{U \in \mathcal{F}} U} = \bigcup_{U \in \mathcal{F}} \overline{U}$.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $\overline{U'} \subset \overline{\bigcup_{U \in \mathcal{F}} U}$ para todo $U' \in \mathcal{F}$; de donde, $\bigcup_{U \in \mathcal{F}} \overline{U} \subset \overline{\bigcup_{U \in \mathcal{F}} U}$.

Inversamente, supongamos que $x \in \overline{\bigcup_{U \in \mathcal{F}} U}$ y sea V una vecindad de x. Por ser $\mathcal{U}$ una familia de conjuntos localmente finita, existe una vecindad W de x que sólo interseca a un número finito de los elementos de $\mathcal{U}$. Sean estos los conjuntos U_i, con $i =, 1, 2, ..., n$. Se sigue que

$$V \cap W \cap \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U = V \cap \bigcup_{i=1}^{n} (W \cap U_i) \subset V \cap \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Como $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} U_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}$, se tiene que $x \in \bigcup_{U \in \mathcal{F}} \overline{U}$. Así, $\overline{\bigcup_{U \in \mathcal{F}} U} \subset \bigcup_{U \in \mathcal{F}} \overline{U}$. $\square$

DEFINICIÓN 2.1.3. Un espacio topológico X es paracompacto, si toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto localmente finito; es decir, existe una cubierta abierta $\mathcal{F}$ de X que es localmente finita y tal que para cada $V \in \mathcal{F}$ se cumple que $V \subset U$ para alguna $U \in \mathcal{U}$.

Presentamos el primer teorema fuerte de esta sección. La prueba se debe a M. Rudin [**Wi.**].

TEOREMA 2.1.4. *Todo espacio topológico pseudométrico (X, d) es un espacio paracompacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una cubierta abierta de X. Damos un buen orden a Λ, el cual induce un buen orden en $\mathcal{U}$. Denotamos por $B_r(x)$ a las bolas de radio $r > 0$ y centro en $x \in X$.

Para cada $x \in X$ definimos $\alpha(x)$ como el primer elemento del conjunto.

$$\{\alpha \in \Lambda : x \in U_\alpha\}$$

Definimos dos familias de conjuntos

$$\{F_{\alpha n} : \alpha \in \Lambda, n \in \mathbb{N}\}$$

y

$$\{D_{\alpha n} : \alpha \in \Lambda, n \in \mathbb{N}\}$$

por inducción:

Para cada $\alpha \in \Lambda$, sean

$$F_{\alpha 1} = \left\{x \in U_\alpha : \ \alpha(x) = \alpha \text{y } B_{\frac{3}{2}}(x) \subset U_\alpha\right\},$$

$$D_{\alpha 1} = \bigcup \left\{B_{\frac{1}{2}}(x) : x \in F_{\alpha 1}\right\},$$

$$F_{\alpha 2} = \left\{x \in U_\alpha : \ \alpha(x) = \alpha, B_{\frac{3}{2^2}}(x) \subset U_\alpha \text{y } x \notin D_{\beta 1} \text{para todo } \beta\right\}$$

y

$$D_{\alpha 2} = \bigcup \left\{B_{\frac{1}{2^2}}(x) : x \in F_{\alpha 2}\right\}.$$

Suponemos definido $F_{\beta j}$ para todo j mas chica que $n \geq 3$ y cualquier $\alpha \in \Lambda$. Definimos $F_{\alpha n}$ y $D_{\alpha n}$ para cualquier $\alpha \in \Lambda$, como sigue:

$F_{\alpha n} = \left\{ x \in U_\alpha : \alpha(x) = \alpha,\, B_{\frac{3}{2^n}}(x) \subset U_\alpha \text{y } x \notin D_{\beta j} \text{ si } \beta \text{ y } j < n \right\}$
y

$$D_{\alpha n} = \bigcup \left\{ B_{\frac{1}{2^n}}(x) : x \in F_{\alpha n} \right\}.$$

Como

$$B_{\frac{1}{2^n}}(x) \subset B_{\frac{3}{2^n}}(x) \subset U_\alpha$$

si $x \in F_{\alpha n}$, entonces es claro que

$$D_{\alpha n} \subset U_\alpha \tag{2.1.1}$$

para cualesquiera α y n.

Afirmamos que $\mathcal{F} = \{D_{\alpha n} : \alpha \in \Lambda, n \in \mathbb{N}\}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ localmente finito.

Cada $D_{\alpha n}$ es una unión de conjuntos abiertos, por lo que es un abierto. Para ver que $\mathcal{D}$ es una cubierta de X tomamos $x \in X$ y hacemos $\alpha = \alpha(x)$. Como U_α es abierto y $x \in U_\alpha$, existe el primer natural n tal que $B_{\frac{3}{2^n}}(x) \subset U_\alpha$. Si $n = 1$, entonces $x \in F_{\alpha 1}$ y por tanto, $x \in D_{\alpha 1}$. Supongamos que $n > 1$. Si $x \notin D_{\beta j}$ para cualesquiera β y $j < n$, entonces $x \in F_{\alpha n}$ y por tanto, $x \in D_{\alpha n}$. En caso contrario $x \in D_{\beta j}$ para algunos elementos β y $j < n$. De donde, $\mathcal{F}$ es una cubierta de X.

Debido a lo anterior y a (2.1.1) se tiene que $\mathcal{F}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$.

Para ver que $\mathcal{F}$ es una familia localmente finita, tomamos $x \in X$ y el primer elemento α del conjunto

$$\{\beta \in \Lambda : x \in D_{\beta n} \text{para algún natural } n\}.$$

Sea n un natural tal que $x \in D_{\alpha n}$. Existe un natural k tal que

$$B_{\frac{1}{2^k}}(x) \subset D_{\alpha n}. \tag{2.1.2}$$

Probaremos que la vecindad $B_{\frac{1}{2^{n+k}}}(x)$ de x interseca sólo a un número finito de los conjuntos $D_{\beta m}$.

Sea m un natural. Supongamos que $m \geq n + k$. Afirmamos que

$$D_{\beta m} \cap B_{\frac{1}{2^{n+k}}}(x) = \emptyset. \tag{2.1.3}$$

para todo $\beta \in \Lambda$.

Dado $y \in D_{\beta m}$, existe $z \in F_{\beta m}$ tal que $y \in B_{\frac{1}{2^m}}(z)$. Entonces $z \notin D_{\beta' j}$ para cualesquiera β' y $j < m$. Como $m > n$, se tiene que $z \notin D_{\alpha n}$; en particular, $d(x, z) \geq \frac{1}{2^k}$ (ver (2.1.2)). Entonces,

$$d(y, x) \geq d(x, z) - d(y, z) > \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^m}$$

$$\geq \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^k}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \geq \frac{1}{2^{k+n}}.$$

O sea, $y \notin B_{\frac{1}{2^{n+k}}}(x)$ y se sigue (2.1.3).

Ahora supongamos que $m < n + k$. Afirmamos que

$$D_{\beta m} \cap B_{\frac{1}{2^{n+k}}}(x) \neq \emptyset$$

a lo más para un índice $\beta \in \Lambda$.

Supongamos lo contrario y sean $p \in D_{\beta m} \cap B_{\frac{1}{2^{n+k}}}(x)$, y $q \in D_{\beta' m} \cap B_{\frac{1}{2^{n+k}}}(x)$ con $\beta < \beta'$.

Por la definición de $D_{\beta m}$, existen $y \in F_{\beta m}$ y $z \in F_{\beta' m}$ tales que $d(y,p) < \frac{1}{2^m}$ y $d(z,q) < \frac{1}{2^m}$, y por la definición de $F_{\beta m}$ se tiene que, $B_{\frac{3}{2^m}}(y) \subset U_\beta$ y $z \notin U_\beta$. Así $d(z,y) \geq \frac{3}{2^m}$, y llegamos al absurdo:

$$\frac{1}{2^{n+k-1}} > d(p,q) \geq d(p,z) - d(z,q)$$

$$\geq d(y,z) - d(y,p) - d(z,q)$$

$$\geq \frac{3}{2^m} - \frac{2}{2^m} = \frac{1}{2^m} \geq \frac{1}{2^{n+k-1}}.$$

En resumen, $B_{\frac{1}{2^{n+k}}}(x)$ interseca a lo más a $n+k-1$ conjuntos $D_{\alpha n}$. □

Veremos tres pequeños teoremas que prácticamente nos llevarán al teorema principal de esta sección.

Lema 2.1.5. *Sea X un espacio paracompacto y de Hausdorff. Supongamos que A y B son dos cerrados ajenos entre sí tales que cada $a \in A$ tiene una vecindad abierta de V_a tal que $V_a \cap B = \emptyset$. Entonces, existen vecindades de A y B ajenas entre sí.*

Demostración. La familia $\mathcal{V} = \{V_a : a \in A\} \cup \{A^c\}$, es una cubierta abierta de X, y por tanto, tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{U}$. Definimos

$$U(A) = \bigcup \{U : U \in \mathcal{U} \text{ y } U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Tenemos que $A \subset U(A)$, pues $\mathcal{U}$ es una cubierta de X.

Este es un conjunto abierto por ser unión de conjuntos abiertos y además:

$$\overline{U(A)} = \bigcup \{\overline{U} : U \in \mathcal{U} \text{ y } U \cap A \neq \emptyset\} \subset \bigcup_{a \in A} \overline{V_a},$$

donde la igualdad se da por el Teorema 2.1.2 y la contención debido a que $\mathcal{U}$ es un refinamiento de $\mathcal{V}$ y a que ningún $U \in \mathcal{U}$ que satisface $U \cap A \neq \emptyset$, puede estar contenido en A^c.

Como $\bigcup\limits_{a \in A} \overline{V_a}$ no interseca a B, entonces $\overline{U(A)} \cap B = \emptyset$.

Así, $\overline{U(A)}$ y $X \diagdown \overline{U(A)}$ son vecindades de A y B, respectivamente, ajenas entre sí. □

TEOREMA 2.1.6. *Si X es un espacio paracompacto y de Hausdorff, entonces es un espacio T_4 (normal y Hausdorff).*

DEMOSTRACIÓN. Primero veremos que X es regular. Sean A un conjunto cerrado y $x \notin A$.

Por ser X de Hausdorff, , $\{x\}$ es un cerrado. Al aplicar el lema anterior a A y $\{x\}$, concluimos que existen vecindades de A y x que son ajenas entre sí. De donde, X es regular.

Ahora veremos que X es normal. Sean A y B dos conjuntos cerrados y ajenos entre sí. Probaremos que hay vecindades de estos conjuntos que son ajenas entre sí.

Por ser X un espacio T_3 las vecindades cerradas de cada punto forman una base local en el punto respectivo. Así, para cada $a \in A$, existe una vecindad abierta V_a de a tal que $\overline{V_a}$ no interseca a B. Por el lema anterior, existen vecindades de A y B, ajenas entre sí. □

El siguiente resultado nos da mayor información sobre el refinamiento abierto localmente finito que se puede obtener de cualquier cubierta abierta de un espacio paracompacto, cuando dicha cubierta es localmente finita.

LEMA 2.1.7. *Sean X un espacio paracompacto y de Hausdorff , y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X localmente finita, entonces existe un refinamiento abierto y localmente finito $\mathcal{W} = \{W_U : U \in \mathcal{U}\}$ de $\mathcal{U}$ tal que $\overline{W_U} \subset U$ para todo $U \in \mathcal{U}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X, localmente finita. Por ser X un espacio regular, dados $U \in \mathcal{U}$ y $x \in U$ existe una vecindad abierta $V_{x,U}$ de x tal que $\overline{V_{x,U}} \subset U$.

La familia $\mathcal{V} = \{V_{x,U} : U \in \mathcal{U}, x \in U\}$ es una cubierta abierta de X. Por ser éste paracompacto, existe un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{F}$ de $\mathcal{V}$.

Para cada $U \in \mathcal{U}$, definimos la familia

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}} = \{V : V \in \mathcal{F} \text{ y } V \subset V_{x,U} \text{ para algún } x \in U\}$$

y el abierto

$$V_U = \bigcup \{V : V \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}\}.$$

La familia $\mathcal{W} = \{V_U : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta de X, porque $\mathcal{F}$ lo es.

Por el Teorema 2.1.2 tenemos:

$$\overline{V_U} = \bigcup \{\overline{V} : V \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}\} \subset \bigcup \{\overline{V_{x,U}} : U \in \mathcal{U}, x \in U\} \subset U. \tag{2.1.4}$$

Entonces, la colección $\mathcal{W} = \{W_U : U \in \mathcal{U}\}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ y es localmente finito, por serlo $\mathcal{U}$ y por la contención (2.1.4). $\square$

Para el siguiente resultado, usaremos la propiedad de los espacios normales consistente en la separación de conjuntos cerrados ajenos por funciones continuas con valores en $[0, 1]$.

TEOREMA 2.1.8. *Sean X un espacio paracompacto y de Hausdorff, y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Entonces, existe una familia $\{f_i : i \in I\}$ de funciones continuas de X en $[0, 1]$, tal que:*

(a) Para cada $i \in I$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que f_i se anula fuera de U.

(b) Para cada $x \in X$ $f_i(x) \neq 0$ sólo para un número finito de $i \in I$.

(c) cada punto $x \in X$, tiene una vecindad V_x tal que $f_i = 0$ en V_x, excepto para un número finito de índices $i \in I$.

(d) La función $f = \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i$ es continua en X y es mayor o igual que 1.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$ un refinamiento abierto y localmente finito de $\mathcal{U}$. Por el lema anterior, existe un refinamiento abierto y localmente finito $\mathcal{W} = \{W_i : i \in I\}$ de $\mathcal{G}$ tal que $\overline{W_i} \subset G_i$ para todo $i \in I$. Por ser X normal, para cada $i \in I$ existe una función continua $f_i : X \longrightarrow [0, 1]$ que vale 1 en $\overline{W_i}$ y 0 en $X \diagdown G_i$. Cada $x \in X$ tiene una vecindad V_x que interseca sólo a un número finito de G_i; por tanto, se cumple (c) y (b). Además, $x \in W_i \subset G_i$ para alguna i, por lo que $\sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(x) \geq 1$ y f es continua en V_x, pues coincide con la suma de un número finito de funciones continuas. Por tanto f es continua en x. De donde, se cumple (d).

Sea $i \in I$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $G_i \subset U$, por ser $\mathcal{G}$ un refinamiento de $\mathcal{U}$. Por tanto, f_i se anula en $X \diagdown U$, es decir se cumple (a). $\square$

Una colección $\{f_i : i \in I\}$ de funciones continuas de X en $[0, 1]$ con las propiedad (b) del teorema anterior y tal que $1 = \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i$ es llamada una *partición de la unidad en X*. Cuando también tiene la propiedad (a), entonces se dice que está *subordinada a la cubierta $\mathcal{U}$*. Y la partición de la unidad $\{f_i : i \in I\}$ es llamada *localmente finita* si satisface (c).

Por ultimo, demostramos el teorema de la partición de la unidad para espacios pseudométricos.

TEOREMA 2.1.9. *Sean* (X, d) *un espacio pseudométrico y* $\mathcal{U}$ *una cubierta abierta de* X. *Entonces existe una partición de la unidad en* X *localmente finita y subordinada a la cubierta* $\mathcal{U}$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 2.1.4, el espacio (X, d) es paracompacto. Por el teorema anterior, existe una familia $\{g_i : i \in I\}$ de funciones continuas de X en $[0, 1]$ con las propiedades (a)-(d). Hagamos $g = \sum_{i \in \mathcal{I}} g_i$ y para cada $i \in I$ definimos $f_i = \frac{g_i}{g}$, entonces $\{f_i : i \in I\}$ es una familia de funciones continuas de X en $[0, 1]$ con las propiedades (a)-(c) y además, $1 = \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i$. Así, la partición de la unidad $\{f_i : i \in I\}$ tiene las propiedades requeridas. □

2.2. Compactaciones

Primero definimos que es una inmersión. Posteriormente definiremos el concepto de compactación y daremos algunos ejemplos.

DEFINICIÓN 2.2.1. Sean X y Y dos espacios topológicos. Una función $i : X \longrightarrow Y$ es una inmersión si i es un homeomorfismo sobre $i(X)$; o sea, si i es inyectiva, continua y abierta (cerrada) sobre su imagen. En tal caso, se dice que X está inmerso en Y.

Es fácil encontrar ejemplos. En particular, si $A \subset X$, donde X es un espacio topológico, entonces la función inclusión $I : A \longrightarrow X$ es claramente una inmersión.

DEFINICIÓN 2.2.2. Sea X un espacio topológico. Si K es un compacto y existe una inmersión $i : X \to K$ tal que $i(X)$ es denso en K, entonces se dice que (K, i) es una compactación de X. Por brevedad a veces simplemente se dice que K es una compactación de X.

EJEMPLO. La función $i : (0, 2\pi) \longrightarrow S^1$ dada por $i(t) = (cos(t), sen(t))$ es claramente una inmersión e $i(0, 2\pi)$ es denso en S^1. Por tanto, S^1 es una compactación del intervalo$(0, 1)$.

Otros ejemplos más profundos se dan el las siguientes dos subsecciones.

2.2.1. Compactación por un punto.

En esta sección (X, T) es un espacio topológico de Hausdorff y z un objeto que no pertenece a X.

Hacemos $X_z = X \cup \{z\}$ y

$$T_z = \{U \subset X_z : U \text{ es un abierto de } X \text{o bien } U = \{z\} \cup (X \diagdown K)$$
$$\text{con } K \text{ compacto de } X\}.$$

Es fácil ver que (X_z, T_z) es un espacio topológico y que todo abierto U de (X_z, T_z) es tal que $U \diagdown \{z\}$ es un abierto de X.

TEOREMA 2.2.3. *(X_z, T_z) es un espacio compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea D una cubierta abierta de (X_z, T_z). Existe $U_z \in D$ tal que $z \in U_z$, por lo que $X_z \diagdown U_z$ es un conjunto compacto de X.

Definimos $D' = \{U \diagdown \{z\} : U \in D\}$, entonces D' es una cubierta de X, en particular lo es de $X_z \diagdown U_z$. De donde, D' tiene una subcubierta finita D'' de $X_z \diagdown U_z$. La familia $D''' = \{U \cup \{z\} : U \in D''\} \subset D$ es una subcubierta finita de X_z. Por tanto (X_z, T_z) es compacto. □

DEFINICIÓN 2.2.4. El espacio (X_z, T_z) es llamado la compactación por un punto de (X, T).

De aquí en adelante denotaremos a (X_z, T_z) sólo por X_z.

TEOREMA 2.2.5. *Un espacio topológico X no es compacto si y sólo si X es denso en X_z.*

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos la contrapuesta. Supongamos que X no es denso en X_z. Existe una vecindad abierta U_z de z que no contiene un punto de X, o sea, $U_z = \{z\}$ y entonces X es compacto.

Ahora supongamos que X es compacto. Por definición $\{z\}$ es un abierto en X_z y entonces X no es denso en X. □

TEOREMA 2.2.6. *El espacio X_z es Hausdorff si X es localmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sean X localmente compacto y $x, y \in X_z$ dos puntos distintos. Si $x, y \in X$, entonces existen abiertos ajenos U_x, U_y tales que $x \in U_x$ y $y \in U_y$. Así, x y y también se pueden separar en X_z. Supongamos que $y = z$. Como X es localmente compacto, entonces existe una vecindad compacta U_x de x en X . Entonces $Int\ (U_x)$ y $\{z\} \bigcup X \diagdown U_x$ son, respectivamente, vecindades abiertas de x y z en X_z y no se intersecan. Por tanto X_z es Hausdorff. □

Tomemos $X = \mathbb{C}$ y hagamos $z = \infty$. Entonces la compactación por un punto $\mathbb{C}_\infty$ la denotaremos por $\mathbb{C}^*$.

De acuerdo a lo anterior, $\mathbb{C}^*$ es un espacio de Hausdorff, compacto y $\mathbb{C}$ es denso en $\mathbb{C}^*$. Así, $(\mathbb{C}^*, i)$ es una compactación de $\mathbb{C}$, según la Definición 2.2.2, donde $i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ es la inclusión.

2.2.2. La compactación de Stone-Čech.

Ejemplo. Para cualquier espacio topológico $T_{3\frac{1}{2}}$;es decir Hausdorff y completamente regular X, podemos definir una compactación que está ligada directamente con las funciones continuas definidas del espacio topológico X al intervalo $[0,1]$.

Sea X un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$. Hagamos $I_\alpha = [0,1]$ para cada $\alpha \in A$; donde

$$A = \{\alpha : X \longrightarrow [0,1] : \alpha \text{ es continua}\}.$$

. Consideremos el espacio producto $\prod\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$, el cual por ser un producto de espacios topológicos compactos, es un espacio compacto, de acuerdo al teorema de Tychonoff.

En lo que resta de la sección supondremos que X es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$, a menos que se especifique otra cosa. Como los resultados que veremos son obvios cuando $X = \emptyset$, en las pruebas supondremos que X es distinto del vacío.

Teorema 2.2.7. *La función*

$$\begin{array}{rcl} e : X & \longrightarrow & \prod\limits_{\alpha\in A} I_\alpha \\ x & \mapsto & \{\alpha(x)\}_\alpha \end{array}$$

es una inmersión. Por comodidad, denotaremos a $e(x) = \{\alpha(x)\}_\alpha$ por x_A.

Demostración. La función e es inyectiva ya que si $x \neq y$, entonces existe una función $\alpha : X \longrightarrow [0,1]$ continua tal que $\alpha(x) = 0$ y $\alpha(y) = 1$, por lo que $x_A \neq y_A$.

Si $\pi_{\alpha_0} : P(X) \longrightarrow I_{\alpha_0}$ es la proyección $\pi_{\alpha_0}\left(\{\alpha(x)\}_\alpha\right) = \alpha_0(x)$ para cada $\alpha_0 \in A$, entonces es claro que $\pi_{\alpha_0} \circ e = \alpha_0$ y por tanto, e es continua.

Al real $\pi_\alpha(x_A)$ lo denotaremos por x_α; es decir $x_\alpha = \alpha(x)$ y $e(x) = (x_\alpha)_\alpha$.

Para ver que e es una función cerrada sobre su imagen, tomamos un subconjunto cerrado C de X y suponemos que $x_A \notin e(C)$. Entonces $x \notin C$ y por consiguiente, existe una función continua $\alpha : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $\alpha(x) = 0$ y $\alpha(C) = \{1\}$. El subconjunto $V = \pi_\alpha^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right)\right)$ de $\prod\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$ es un abierto tal que $x_A \in V$ y $V \bigcap e(C) = \emptyset$; de donde, $e(C)$ es cerrado. Por tanto, e es una inmersión de X en $\prod\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$. $\square$

Como $e(X)$ es un subconjunto del compacto $\prod\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$, tenemos que $\beta(X) = \overline{e(X)}$ es un compacto en el cual $e(X)$ es denso. A $(\beta(X), e)$ se le llama la *compactación de Stone*-Čech . Cuando sea necesaria mayor precisión escribiremos e_X en lugar de simplemente e.

Teorema 2.2.8. *Si K es compacto, entonces la compactación de Stone-Čech de K es homeomorfa a K. De hecho, e es un homeomorfismo de K en $\beta(K)$.*

Demostración. Por el teorema anterior, tenemos que $e : K \to e(K)$ es un homeomorfismo, pero como K es compacto y e continua, entonces $e(K)$ es compacto, por lo que es cerrado y entonces $e(K) = \overline{e(K)} = \beta(K)$. □

2.2.3. Resultados básicos sobre la compactación de Stone-Čech.

Teorema 2.2.9. *Sean K un espacio compacto y $g : X \longrightarrow K$ una función continua. Entonces, existe una función continua $G : \beta(X) \longrightarrow K$ tal que hace conmutativo al siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "e_X"] & K \\ \beta(X) \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

Es decir, si identificamos X con $e_X(X)$, podemos decir que G extiende a g.

Demostración. Primero buscaremos una función continua G' tal que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "e_X"] & K \arrow[d, "e_K"] \\ \prod\limits_{\alpha\in A} I_\alpha \arrow[r, "G'"'] & \prod\limits_{\alpha'\in A'} I'_\alpha \end{tikzcd}$$

Hagamos $A = \{\alpha : X \longrightarrow [0,1] : \alpha \text{ es continua}\}$ y
$A' = \{\alpha' : K \longrightarrow [0,1] : \alpha' \text{es continua}\}$. Sea $\alpha' : K \longrightarrow [0,1]$ una función continua, entonces $\alpha' \circ g : X \longrightarrow [0,1]$ es una función continua. Definamos G'

como $G'(x_A) = \{x_{\alpha' \circ g}\}_{\alpha' \in A'}$; o sea, $G^{'}(x_A)_{\alpha'} = x_{\alpha' \circ g}$ para toda $\alpha' \in A'$. Está función es continua, ya que $\pi_{\alpha'} \circ G^{'}(x_A) = \pi_{h \circ \alpha'}(x)$ para cada $\alpha' \in A'$.

Para ver que el diagrama conmuta observamos que para $x \in X$ se cumple:

$$\begin{aligned} G^{'}(e_X(x)) &= G^{'}(x_A) = \{\alpha'(g(x))\}_{\alpha' \in A'} \text{ y} \\ e_K(g(x)) &= \{\alpha'(g(x))\}_{\alpha' \in A'}; \end{aligned}$$

de donde,

$$G^{'} \circ e_X(x) = e_K \circ g(x). \tag{2.2.1}$$

Observamos que como $e_X(X)$ es denso en $\beta(X)$ y G' es continua, entonces $G^{'}(\beta(X)) \subset \overline{G'(e_X(X))}$. Por otra parte, $G^{'}(e_X(X)) \subset e_K(K)$, según (2.2.1) y como e_K es continua y K es compacto, concluimos que $e_K(K)$ es compacto. Tenemos que $\overline{G'(e_X(X))} \subset e_K(K)$ y así, $G^{'}(\beta(X)) \subset e_K(K)$.

Podemos definir la función $G = e_K^{-1} \circ G^{'} : \beta(X) \longrightarrow K$, la cual resulta continua. Por último, comprobamos que el primero de los diagramas conmuta

$$(G(e_X(x))) = e_K^{-1}\left(G^{'}(e_X(x))\right) = e_K^{-1}(e_K(g(x))) = g(x).$$

$\square$

El resultado anterior es muy importante, ya que da una caracterización de la compactación de Stone-Čech de un espacio X. Se probará que para toda compactación K de X que cumpla el teorema anterior, hay un homeomorfismo de K a la compactación de Stone-$\breve{C}$ech que deja fijo a los puntos de X.

Teorema 2.2.10. *Sea (K, i) una compactación de X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) Para cada función continua $f : X \longrightarrow Y$, donde Y es un espacio compacto, existe una función continua $g : K \longrightarrow Y$, que hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \\ K \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

(b) Existe un homeomorfismo $G : \beta(X) \to K$ tal que $G(e(x)) = i(x)$ para todo $x \in X$. Al identificar a X con $i(X)$ y $e(X)$, se acostumbra decir que el homeomorfismo G deja fijo a los puntos de X.

DEMOSTRACIÓN. $(a) \Rightarrow (b)$ Tomamos $Y = \beta(X)$ y $f = e_X$. Entonces existe una función continua $g : K \longrightarrow \beta(X)$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_X"] \arrow[d, "i"] & \beta(X) \\ K \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Tenemos que

$$e_X = g \circ i. \tag{2.2.2}$$

.

Veremos que $g : K \longrightarrow \beta(X)$ es un homeomorfismo. De acuerdo al Teorema 2.2.9 existe una función continua $G : \beta(X) \longrightarrow K$ que hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "e_X"] & K \\ \beta(X) \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

Lo que quiere decir que

$$i(x) = G(e_X(x)) \tag{2.2.3}$$

para todo $x \in X$.

Por la igualdad (2.2.2), tenemos que $i = G \circ g \circ i$, por lo que $G \circ g : K \to K$ es la identidad en el conjunto $i(X)$, que es denso en K. Como $G \circ g$ es continua, entonces $G \circ g$ es la identidad en K ; es decir, que $g^{-1} = G$; entonces g tiene inversa continua, por lo que es un homeomorfismo.

Además, por 2.2.3, G deja fijos a los puntos de K.

$(b) \Rightarrow (a)$ Por hipótesis existen dos funciones continuas

$$G^{-1} : K \to \beta(X)$$

y

$$F : \beta(X) \to Y$$

tales que los dos triángulos del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "e_X"] & Y \\ K \arrow[r, "G^{-1}"'] & \beta(X) \arrow[u, "F"'] \end{tikzcd}$$

son conmutativos.

Hagamos $g = F \circ G^{-1}$. Entonces $g : K \to Y$ es continua y

$$g(i(x)) = F\left(G^{-1}(i(x))\right) = F(e(x)) = f(x).$$

Es decir, g es continua y hace conmutativo al diagrama que aparece en (a). $\square$

Para dar otra caracterización de la compactación de Stone-Čech, necesitamos un nuevo concepto. Para definirlo establecemos que para cualquier espacio topológico X denotamos por $C(X)$ al conjunto de funciones complejas continuas definidas en X y por $C_b(X)$ a su subconjunto formado por las funciones complejas, acotadas y continuas definidas en X.

Definición 2.2.11. Se dice que un subespacio$Y$ de un espacio topológico Z está C- inmerso en Z si toda función $\alpha \in C(Y)$ tiene una extensión $\alpha' \in C(Z)$. En tanto que, se dice que Y está C_b- inmerso en Z si toda función $\alpha \in C_b(Y)$ tiene una extensión $\alpha' \in C_b(Z)$.

Teorema 2.2.12. *Sea (K, i) una compactación de X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) El conjunto $i(X)$ está C_b- inmerso en K.

(b) Para cada $f \in C_b(X)$ existe $F : K \to \overline{f(X)}$ continua y acotada que hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & \overline{f(X)} \\ K \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

(c) Para cada función continua y acotada $f : X \to \mathbb{R}$ existe una función continua y acotada $F : K \to \mathbb{R}$ que hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & \overline{f(X)} \\
K \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

(d) Para cada función continua $f : X \to [0,1]$ existe una función continua $F : K \to [0,1]$ que hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & {[0,1]} \\
K \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

(e) Para cada función continua $f : X \longrightarrow Y$, donde Y es un espacio compacto, existe una función continua $g : K \longrightarrow Y$, que hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & Y \\
K \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

(f) Existe un homeomorfismo $G : \beta(X) \to K$ que deja fijo a X. O sea, $K = \beta(X)$

Cuando (K, i) satisfaga cualquiera de estas condiciones se dirá que $K = \beta(X)$ o bien que X está C_b inmerso en K. Obviamente X está C_b-inmerso en $\beta(X)$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sea $f \in C_b(X)$. Definimos $\widetilde{f} \in C_b(e(X))$ como $\widetilde{f} = f \circ i^{-1}$. Por hipótesis existe $F \in C_b(K)$ tal que

$$F(i(x)) = \widetilde{f}(i(x)) = f(x)$$

para todo $x \in X$. Como $i(X)$es denso en K,entonces $F(K) \subset \overline{f(x)}$. Entonces el diagrama que aparece en (b) conmuta.

Demostración. La implicación $(b) \Rightarrow (c)$es obvia.

$(c) \Rightarrow (d)$ Sea $f : X \to [0,1]$ una función continua y acotada. Por hipótesis existe $F : K \to \overline{f(X)} \subset [0,1]$ continua y acotada tal que $F(i(x)) = f(x)$ para todo x. Entonces el diagrama que aparece en (c) conmuta.

$(d) \Rightarrow (e)$ Sean Y un espacio compacto y $f : X \to Y$ una función continua. Hagamos

$$A = \{\alpha : X \longrightarrow [0,1] : \alpha \text{ es continua}\}$$

y

$$A' = \{\alpha' : Y \longrightarrow [0,1] : \alpha' \text{ es continua}\}.$$

Sea $\alpha' : Y \longrightarrow [0,1]$ una función continua, entonces $\alpha' \circ f : X \to [0,1]$ es continua y por la hipótesis, existe una función continua $\alpha'' = \alpha''(\alpha') : K \to [0,1]$ tal que hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha' \circ f"] \arrow[d, "i"] & {[0,1]} \\
K \arrow[ur, "\alpha''"'] &
\end{tikzcd}$$

Es decir,

$$\alpha''(\alpha') \circ i = \alpha' \circ f$$

Sea $G : K \longrightarrow \prod_{\alpha' \in A'} I_{\alpha'}$, la función continua definida como

$$G(z) = (\alpha''(\alpha')(z))_{\alpha'}.$$

.

Se tiene que

$$e_Y(f(x)) = ((\alpha' \circ f)(x))_{\alpha'} = (\alpha''(\alpha') \circ i(x))_{\alpha'} = G(i(x)).$$

para cada $x \in X$; o sea, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & Y \arrow[d, "e_Y"] \\
K \arrow[r, "i"'] & \prod_{\alpha' \in A'} I'_{\alpha}
\end{tikzcd}$$

Entonces, $G(i(X)) \subset e_Y(Y)$ y como $i(X)$ es denso en K y Y es compacto, tenemos que $G(K) \subset e_Y(Y) = \beta(Y)$. Definimos la función

$g = e_Y^{-1} \circ G : K \to Y$, la cual es continua y para cada $x \in X$ se satisface que

$$g\left(i\left(x\right)\right) = e_Y^{-1}\left(G\left(i\left(x\right)\right)\right) = e_Y^{-1} e_Y\left(f\left(x\right)\right) = f\left(x\right)$$

o sea, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & Y \\ K \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

El teorema 2.2.10 afirma que $(e) \Leftrightarrow (f)$

$\underline{(e) \Rightarrow} (a)$ Sea $\widetilde{f} \in C_b\left(e\left(X\right)\right)$. Definimos como $f = \widetilde{f} \circ i$. Entonces $Y = \overline{f\left(X\right)}$ es compacto y por la hipótesis existe $F : K \to \overline{f\left(X\right)}$, continua y acotada; es decir,$F \in C_b\left(K\right)$, tal que $F\left(i\left(x\right)\right) = f\left(x\right) = \widetilde{f}\left(i\left(x\right)\right)$para todo $x \in X$. Por tanto, $i\left(X\right)$ está C_b- inmerso en K. $\square$

$\square$

Ahora extendemos el resultado anterior.

TEOREMA 2.2.13. *Sea Y un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$. Si $X \subset Y$ está C_b- inmerso en Y, entonces $\beta\left(X\right)$ es homeomorfo a $\overline{e_Y\left(X\right)}^{\beta(Y)}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\alpha : X \to [0,1]$ una función continua y $\alpha' : Y \to [0,1]$ una extensión continua de α. Entonces, $\alpha' \circ e_Y^{-1} : e_Y\left(Y\right) \to [0,1]$ es una extensión continua de $\alpha \circ e_Y^{-1} : e_Y\left(X\right) \to [0,1]$. Así, existe una extensión continua de $\alpha' \circ e_Y^{-1}$, que también lo es de $\alpha \circ e_Y^{-1}$, a $\beta\left(Y\right)$. Es decir, $e_Y\left(X\right)$ está C_b- inmerso en $\beta\left(Y\right)$ y por consiguiente, $e_Y\left(X\right)$ está C_b- inmerso en $\overline{e_Y\left(X\right)}$. Como $\overline{e_Y\left(X\right)}$ es compacto, tenemos que $\left(\overline{e_Y\left(X\right)}, e_Y\right)$ es una compactación en la que $e_Y\left(X\right)$ está C_b- inmerso. Por el Teorema 2.2.12 , $\overline{e_Y\left(X\right)}^{\beta(Y)}$ es homeomorfo a $\beta\left(X\right)$. $\square$

Álgebras de funciones continuas con pesos.

2.3. Familias multiplicativas de Nachbin

A menos que se diga lo contrario $(E, \mathcal{Q})$ es un álgebra compleja, localmente convexa y de Hausdorff, donde $\mathcal{Q}$ es un familia saturado de seminormas que genera su topología y que satisface para cada $q \in \mathcal{Q}$ existe $q' \in \mathcal{Q}$ tal que

$$q\left(xy\right) \leq q'\left(x\right) q'\left(y\right) \tag{2.3.1}$$

para cualesquiera $x, y \in X$.

Por su parte, X es un espacio topológico de Hausdorff y no vacío, que a partir de cierto momento se supondrá que es $T_{3\frac{1}{2}}$.

Diremos que una función real es positiva si no es nula y su rango está contenido en $[0, \infty)$.

Sea V una familia de funciones positivas definidas en X con las siguientes propiedades:

(V_1) Dadas $u, v \in V$ y $\alpha > 0$ existe $w \in V$ tal que $\alpha u \leq w$, y $\alpha v \leq w$.

(V_2) Para toda función $v \in V$ existen $u, w \in V$ tales que $v \leq uw$.

(V_3) Toda función $v \in V$ es acotada.

(V_4) Para cada $x \in X$ existe $v \in V$ tal que $v(x) \neq 0$.

A un conjunto de funciones positivas definidas en X que cumplen la propiedad (V_1) se le llama una *familia Nachbin.* Cuando satisfacen las cuatro propiedades anteriores se le llama una *familia multiplicativa de Nachbin.*

Ejemplos.

1. Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de subconjuntos de X, y sea
$V = \{\alpha\chi_A : \alpha > 0 \text{ y } A \in \mathcal{A}\}$ donde χ_A es la función característica de A.

Si $\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones finitas, entonces la familia V es de Nachbin, ya que satisface (V_1): dados $\alpha\chi_A, \alpha'\chi_{A'} \in V$ y $\beta > 0$ se tiene que $A \cup A' \in \mathcal{A}$, $\beta'\chi_{A\cup A'} \in V$ y

$$\beta\alpha\chi_A \leq \beta'\chi_{A\cup A'} \text{ y } \beta\alpha'\chi_{A'} \leq \beta'\chi_{A\cup A'}$$

donde $\beta' = \beta max(\alpha, \alpha')$.

La familia V satisface (V_2), pues dada $\alpha\chi_A \in V$, se cumple $\alpha\chi_A \leq \sqrt{\alpha}\chi_A \cdot \sqrt{\alpha}\chi_A$ y $\sqrt{\alpha}\chi_A \in V$.

La familia V satisface satisface (V_3), ya que $\alpha\chi_A$ está acotada por α.

Si $\mathcal{A}$ contiene a todos los subconjuntos de X formados por un sólo punto, entonces V satisface (V_4)

Por tanto, para que una familia V del tipo anterior sea multiplicativa de Nachbin, basta que $\mathcal{A}$ sea cerrada bajo uniones finitas y que contenga a todos los subconjuntos de X formados por un sólo punto. Por ejemplo, esto se tiene para las siguientes colecciones $\mathcal{A}$.

1.1 Sea $\mathcal{A}$ la familia de los subconjuntos finitos de X.

1.2 Sea $\mathcal{A}$ la familia de los subconjuntos compactos de X.

1.3 Sea $\mathcal{A}$ la colección de los subconjuntos A de X que son acotados, donde esto significa que $f(A)$ es acotado para toda $f \in C(X)$.

2. Sea V un subconjunto del conjunto $B^+(X)$ de las funciones positivas y acotadas definidas en X, o sea

$$B^+(X) = \{f : X \to (0, \infty) : \ f \text{ es acotada}\}$$

Si V es cerrado bajo la suma y el producto por un escalar positivo, y satisface que $\sqrt{f} \in V$ siempre que $f \in V$, entonces V es una familia multiplicativa de Nachbin, ya que:

(V_1) Dadas $f, g \in V$ y $\alpha > 0$ se tiene que $\alpha f \leq \alpha f + \alpha g$, $\alpha g \leq \alpha f + \alpha g$ y $\alpha f + \alpha g \in V$.

(V_2) Dada $f \in V$ se tiene que $f \leq \sqrt{f} \cdot \sqrt{f}$ y $\sqrt{f} \in V$.

(V_3) Si $f \in V$, entonces es acotada.

(V_4) Dado $x \in X$ la función constante 1 pertenece a V y no se anula en x.

Lo anterior sucede para los siguientes subconjuntos V de $B^+(X)$.

2.1 El propio conjunto $B^+(X)$.

2.2 El conjunto $C_b^+(X)$ de funciones continuas, positivas y acotadas.

2.3 El conjunto $B_{00}^+(X)$ de las funciones positivas con soporte compacto.

Tenemos que $sop\,(\alpha f + g) \subset sop\,(f) \cup sop\,(g)$ si $\alpha > 0$ y $sop\left(\sqrt{f}\right) = sop\,(f)$.

2.4 El espacio $B_0^+(X)$ de las funciones acotadas y positivas que se anulan al infinito.

Para $\alpha > 0$ y $f, g \in B_0^+(X)$ tenemos que $\alpha f(x) + g(x) < \varepsilon$ si $f(x) < \frac{\varepsilon}{2\alpha}$ y $g(x) < \frac{\varepsilon}{2}$ y además, $\sqrt{f(x)} < \varepsilon$ si $f(x) < \varepsilon^2$.

Hay un subconjunto compacto K de X tal que $f(x) < \frac{\varepsilon}{2\alpha}$, $g(x) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $f(x) < \varepsilon^2$ si $x \in X \diagdown K$.

2.5 Cuando X es localmente compacto, el conjunto $C_0^+(X)$ de las funciones continuas, positivas que se anulan al infinito.

Hacemos notar que si X es localmente compacto, entonces $C_0(X) \neq \{0\}$. Sin embargo, $C_0(\mathbb{Q}) = \{0\}$.

2.4. Definición de las álgebras de funciones continuas con pesos

Denotamos por $C(X, E)$ al álgebra de todas las funciones continuas de X al álgebra compleja localmente convexa E y por $C_b(X, E)$ a su subálgebra de formada por las funciones continuas y acotadas. Una función $f : X \to E$ se dice que es acotada si para cada $q \in \mathcal{Q}$ existe $M > 0$ tal que $q(f(x)) \leq M$ para todo $x \in X$.

Cuando $E = \mathbb{C}$ entonces escribimos, como ya hemos hecho, $C(X)$ y $C_b(X)$ en lugar de $C(X, \mathbb{C})$ y $C_b(X, \mathbb{C})$, respectivamente.

Recordamos que supusimos que la topología de E está generada por la familia saturada Q de seminormas.

Sea V una familia multiplicativa de Nachbin. Definimos el *espacio de funciones continuas con pesos* $CV(X, E)$ como el de todas las funciones

$f \in C(X, E)$ tales que

$$p_{q,v}(f) = \sup_{x \in X} q(v(x) f(x)) < \infty$$

para cualesquiera $q \in \mathcal{Q}$ y $v \in \mathcal{V}$.

Observamos que para $f \in CV(X, E)$, $v \in V$ $q \in \mathcal{Q}$ y $x \in X$, se cumple

$$q(v(x) f(x)) = v(x) q(f(x)).$$

Por (V_3) tenemos que

$$C_b(X, E) \subset CV(X, E).$$

En particular, para $a \in E$, la función constante a de X en E pertenece a $CV(X, E)$.

Cuando $E = \mathbb{C}$, entonces escribimos $CV(X)$ en lugar de $CV(X, \mathbb{C})$. Así,

$$C_b(X) \subset CV(X)$$

y en particular, toda función compleja constante definida en X pertenece a $CV(X)$.

Proposición 2.4.1. *El espacio $CV(X, E)$ es un álgebra con las operaciones usuales de funciones y las funcionales $p_{q,v}$ definidas previamente son seminormas. La familia de todas estas seminormas está dirigida.*

Demostración. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $f, g \in CV(X, E)$, $v \in V$ y $q \in \mathcal{Q}$. Es fácil ver que $\lambda f + g \in C(X, E)$ y $fg \in C(X, E)$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} p_{q,v}(\lambda f) &= \sup_{x \in X} q(v(x) \lambda f(x)) \\ &= \sup_{x \in X} |\lambda| q(v(x) f(x)) \\ &= |\lambda| \sup_{x \in X} q(v(x) f(x)) \\ &= |\lambda| p_{q,v}(f) < \infty; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{q,v}(f + g) &= \sup_{x \in X} q(v(x)(f(x) + g(x))) \\ &\leq \sup_{x \in X} q(v(x) f(x)) + q(v(x) g(x)) \\ &\leq p_{q,v}(f) + p_{q,v}(g) < \infty. \end{aligned}$$

Si $q \in \mathcal{Q}$ y $v \in V$, entonces existen $q' \in \mathcal{Q}$, y $u, w \in V$ tales que

$$\begin{aligned} p_{q,v}(f \cdot g) &= \sup_{x\in X} v(x)\, q((f(x) \cdot g(x))) \\ &\leq \sup_{x\in X} u(x)\, w(x)\,(x)\, q'(f(x))\, q'(g(x)) \\ &\leq p_{q',u}(f)\, p_{q',w}(g) < \infty. \end{aligned}$$

De donde, se sigue que $CV(X, E)$ es un álgebra y cada $p_{q,v}$ es una seminorma.

Por ultimo, dadas $p_{q,u}$ y $p_{q',w}$ tenemos que

$$max(p_{q,u}(f), p_{q',w}(f)) \leqq p_{max(q,q'),v}(f)$$

donde $v \in V$ satisface que $u \leq v$ y $w \leq v$. Por tanto, la familia de las seminormas $p_{q,v}$ está dirigida. $\square$

PROPOSICIÓN 2.4.2. *El álgebra $CV(X, E)$ con la topología inducida por la familia de seminormas$\{p_{q,v} : v \in V, q \in \mathcal{Q}\}$ es un álgebra localmente convexa de Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, dados $q \in \mathcal{Q}$, y $v \in V$ existen , $q' \in \mathcal{Q}$, y $u, w \in V$ tales que $q(f(x)\, g(x)) \leq q'(f(x))\, q'(g(x))$ y $u(x)\, w(x) \leq v(x)$ para todo $x \in X$. Lo primero por (2.3.1)). Así,

$$\begin{aligned} p_{q,v}(f \cdot g) &= \sup_{x\in X} v(x)\, q((f(x) \cdot g(x))) \\ &\leq \sup_{x\in X} u(x)\, w(x)\,(x)\, q'(f(x))\, q'(g(x)) \\ &\leq p_{q',u}(f)\, p_{q',w}(g). \end{aligned}$$

O sea, el producto es continuo.

Por otro lado si f no es la función nula, entonces existen $x \in X$, $q \in \mathcal{Q}$ y $v \in V$ tales que $q(f(x))\, v(x) \neq 0$ y entonces $p_{q,v}(f) \neq 0$. Por lo que $CV(X, E)$ es de Hausdorff. $\square$

2.4.1. Algunos ejemplos de $CV(X, E)$ para distintas familias V. A continuación describimos las topologías obtenidas en $CV(X, E)$ para las distintas familias multiplicativas de Nachbin V vistas al inicio del capítulo. Asimismo con el uso de la Proposición 1.3.12 veremos, para los casos 1.1 a 1.3 , a que equivale la convergencia de redes en esos espacios.

Ejemplos 1. Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de subconjuntos de X, no vacíos. Tomamos la familia multiplicativa de Nachbin

$$V = \{\alpha\chi_A : \alpha > 0 \text{ y } A \in \mathcal{A}\}.$$

1.1 Sea $\mathcal{A}$ la colección de los **subconjuntos finitos**, no vacíos, de X. Entonces,

$$CV(X,E) = C(X,E)$$

y la **topología es la de la convergencia puntual**.

Para cualesquiera $f \in C(X,E)$, $q \in \mathcal{Q}$ y $A \in \mathcal{A}$, se tiene por definición que

$$p_{q,\alpha\chi_A}(f) = \sup_{x\in X} q(f(x))\,\alpha\chi_A(x) = \alpha \max_{x\in A} q(f(x)) < \infty$$

por ser A finito y así, $f \in CV(X,E)$. Por tanto $CV(X,E) = C(X,E)$.

Sean (f_i) una red de funciones en $CV(X,E)$ y $f \in CV(X,E)$. Afirmamos que $f_i \overset{CV(X,E)}{\to} f$ si y sólo si $f_i(x) \overset{E}{\to} f(x)$ para todo $x \in X$. Es decir, en este espacio la convergencia se reduce a la convergencia puntual y es por esto que su topología es llamada de la convergencia puntual.

Para probar la parte "si" observamos que dado un conjunto $A \in \mathcal{A}$ y un escalar $\alpha > 0$ se tiene que

$$p_{q,\alpha\chi_A}(f_i - f) = \alpha \max_{x\in A} q(f_i(x) - f(x));$$

de donde, $f_i \overset{CV(X,E)}{\to} f$ si $f_i(x) \overset{E}{\to} f(x)$ para todo $x \in X$.

Para la parte "sólo si", dado $x \in X$ consideramos el conjunto $A = \{x\}$ y la función χ_A de V. Entonces,

$$q(f_i(x) - f(x)) = p_{q,\chi_A}(f_i - f);$$

y por consiguiente, $f_i(x) \overset{E}{\to} f(x)$ si $f_i \overset{CV(X,E)}{\to} f$.

Es fácil ver que la topología de la convergencia puntual en $C(X,E)$ también se puede dar mediante las seminormas $|f|_{q,x} = q(f(x))$, con $q \in \mathcal{Q}$ y $x \in X$ y que con esta topología $C(X,E)$ es m-convexa si $\mathcal{Q}$ es un familia de seminormas submultiplicativas; por ejemplo, si $E = \mathbb{C}$ con la topología usual.

1.2 Sea $\mathcal{A}$ la colección de los **subconjuntos compactos**, no vacíos, de X. Entonces,

$$CV(X,E) = C(X,E)$$

y la **topología es la compacto abierta** κ.

Para cualesquiera $f \in C(X,E)$, $q \in \mathcal{Q}$ y $A \in \mathcal{A}$, se tiene que $f(A)$ es compacto y así, $q(f(A))$ es un conjunto acotado. Entonces

$$p_{q,\alpha\chi_A}(f) = \sup_{x\in X} q(f(x))\,\alpha\chi_A = \alpha \sup_{x\in A} q(f(x)) < \infty.$$

Por tanto, $CV(X,E) = C(X,E)$. Esta topología es llamada la compacto abierta en $C(X,E)$. La topología compacto abierta vista en la página 37 es un caso particular, en que $E = \mathbb{C}$.

La convergencia de una red (f_i) a f en $CV(X,E)$ significa que para cada seminorma $q \in \mathcal{Q}$ y cada compacto A de X se cumpla que

$$q(f_i - f) = \sup_{x\in A} q(f_i(x) - f(x)) \to 0$$

Es decir, la convergencia en $CV(X,E)$ es la de convergencia uniforme sobre compactos. Por está razón, la topología correspondiente es también llamada la *topología de la convergencia uniforme sobre compactos.*

1.3 Sea $\mathcal{A}$ la colección de los **subconjuntos acotados**, no vacíos, de X . Entonces,

$$CV(X,E) = C(X,E)$$

y la **topología es la de la convergencia uniforme sobre acotados**.

Sean $f \in C(X,E)$, $q \in \mathcal{Q}$ y $A \in \mathcal{A}$. Por definición se tiene que $f(A)$ es acotado y así, $q(f(A))$ es un conjunto acotado. Entonces

$$p_{q,\alpha\chi_A}(f) = \sup_{x\in X} q(f(x))\,\alpha\chi_A = \alpha\sup_{x\in A} q(f(x)) < \infty.$$

Por tanto, $CV(X,E) = C(X,E)$.

La convergencia de una red (f_i) a f en $CV(X,E)$ significa que para cada seminorma $q \in \mathcal{Q}$ y cada compacto A de X se cumpla que

$$q(f_i - f) = \sup_{x\in A} q(f_i(x) - f(x)) \to 0$$

Es decir, la convergencia en $CV(X,E)$ es la de convergencia uniforme sobre acotados. La topología en $CV(X,E)$ es llamada la *topología de la convergencia uniforme sobre acotados.*

Ejemplos 2. Tomamos la familia multiplicativa de Nachbin

$$V \subset B^+(X) = \{f : X \to [0,\infty) : \ f \text{ es acotada}\}.$$

2.1 Sea $V = B^+(X)$. Entonces,

$$CV(X,E) = C_b(X,E)$$

y **la topología es la uniforme**.

Tomemos $f \in C_b(X,E)$, $v \in B^+(X)$ y $q \in \mathcal{Q}$, entonces $q(f(X))$ y $v(X)$ son conjuntos acotados en $\mathbb{C}$ y así,

$$p_{q,v}(f) = \sup_{x\in X} q(f(x))\,v(x) < \infty,$$

por lo que $f \in CV(X,E)$.

Inversamente, si $f \in CV(X,E)$, y tomamos v como la función 1, se sigue que

$$p_{q,1}(f) = \sup_{x\in X} q(f(x)) < \infty$$

así $f \in C_b(X,E)$.

Es fácil ver que la topología se puede generar por las seminormas

$$p_q(f) = \sup_{x \in X} q(f(x)) < \infty,$$

en vista de que toda función en $B^+(X)$ es acotada.

2.2 Sea V el conjunto $C_b^+(X)$ de las funciones continuas, acotadas y positivas. Al proceder como en 2.1 se tiene que

$$CV(X,E) = C_b(X,E)$$

y **la topología es la uniforme**.

2.3 Sea V el conjunto $B_{00}^+(X)$ de las funciones positivas con soporte compacto. Entonces,

$$CV(X,E) = C(X,E)$$

y **la topología es la compacto- abierta** κ. Es decir obtenemos la misma álgebra localmente convexa que en el ejemplo 1.2.

En efecto, tomemos $f \in C(X,E)$, $v \in B_{00}^+(X)$ y $q \in \mathcal{Q}$. Existe un compacto $K \subset X$ tal que $v(X \diagdown K) = \{0\}$. El conjunto $f(K)$ es compacto y por tanto, $q(f(K))$ es acotado. Por consiguiente,

$$p_{q,v}(f) = \sup_{x \in X} q(f(x))\, v(x) = \sup_{x \in K} q(f(x))\, v(x) < \infty,$$

de lo que se sigue que $f \in CV(X,E)$.

Es fácil ver que la topología se puede generar por las seminormas

$$p_q(f) = \sup_{x \in K} q(f(x)) < \infty,$$

donde K corre por los compactos de X ya que toda función en $V = B_{00}^+(X)$ es acotada y $\chi_K \in B_{00}^+(X)$.

2.4 Sea V el conjunto $B_0^+(X)$ de las funciones acotadas y positivas que se anulan al infinito. Entonces,

$$CV(X,E) = C_b(X,E).$$

A la topología inducida en $C_b(X,E)$ por las seminormas

$$p_{q,v}(f) = \sup_{x \in X} q(f(x))\, v(x)$$

la llamamos la **topología estricta** y la denotamos por β. El nombre queda justificado, pues $E = \mathbb{C}$, la topología que se obtiene al través de $V = B_0^+(X)$ es la estricta (de Giles), vista en la página 38.

Sabemos que $C_b(X,E) \subset CV(X,E)$, en general. Inversamente, tomemos $f \in CV(X,E)$ y supongamos que $f \notin C_b(X,E)$. Entonces existen $q \in \mathcal{Q}$ y una sucesión (x_n) en X tales que

$$q(f(x_n)) > n^2.$$

La función escalar definida en como

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = x_n \\ 0 & \text{si } x \neq x_n \end{cases}$$

pertenece a $B_0^+(X)$ y se cumple que

$$p_{q,v}(f) = \sup_{x \in X} q(f(x)) v(x) \geq \sup_{n \geq 1} q(f(x_n)) v(x_n) = \infty$$

lo contradice que $f \in CV(X, E)$. Por tanto, $f \in C_b(X, E)$.

2.5 Supongamos que X es localmente compacto y sea V el conjunto $C_0^+(X)$ de las funciones continuas, positivas que se anulan al infinito. Entonces

$$CV(X, E) = C_b(X, E).$$

A la topología inducida en $C_b(X, E)$ por las seminormas $p_{q,v}(f) = \sup_{x \in X} q(f(x)) v(x)$ la llamamos la **topología estricta** y la denotamos por β. Este caso tiene como uno particular a $C_b(X)$ con la topología de Buck β, definida en la página 38.

Sabemos que $C_b(X) \subset CV(X, E)$. Inversamente, tomemos $f \in CV(X, E)$ y supongamos que $f \notin C_b(X, E)$. Entonces existen $q \in \mathcal{Q}$ y una sucesión (x_n) en X tales

$$q(f(x_n)) > n^2.$$

Como ya vimos la función definida en X como

$$v_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = x_n \\ 0 & \text{si } x \neq x_n \end{cases}$$

pertenece a B_0^+.

Como X es localmente compacto y Hausdorff existe una función $v \in C_0^+(X)$ tal que $v(x) \geq v_0(x)$ para todo $x \in X$ y así,

$$p_{q,v}(f) = \sup_{x \in X} q(f(x)) v(x) \geq \sup_{n \geq 1} q(f(x_n)) v(x_n) = \infty$$

lo que contradice que $f \in CV(X, E)$. Por tanto, $f \in C_b(X, E)$.

2.5. El álgebra $CV(X)$

Tenemos que $CV(X) \cdot CV(X, E) \subset CV(X, E)$. En efecto, si $f \in CV(X, E)$ y $\alpha \in CV(X)$, entonces, la función producto αf está bien definida en X, toma valores en E y es continua, ya que si (x_i) es una red en X que converge a $x \in X$, entonces

$$f(x_i) \to f(x)$$

y

$$\alpha(x_i) \to \alpha(x).$$

Por ser estas funciones continuas y el producto por un escalar continuo en E, tenemos que

$$\alpha(x_i) f(x_i) \to \alpha f(x).$$

Además, dados $q \in \mathcal{Q}$ y $v \in V$, existen $u, w \in V$ tales que y $v \leq uw$; de donde

$$v(x) q(g(x) \cdot f(x)) \leq u(x) |g(x)| w(x) q(f(x)) < \infty$$

para todo $x \in X$. Así, $f \in CV(X,E)$ y $g \in CV(X)$ implican$gf \in CV(X,E)$.

Para $a \in E$ consideramos la función constante en X que toma ese valor y la denotamos también por a. Si $f \in CV(X)$, entonces $fa \in CV(X,E)$.

2.5.1. Las evaluaciones en $CV(X)$. Familia de Nachbin de tipo puntual. Sea $x \in X$. Afirmamos que la función $\psi_x : CV(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$\psi_x(f) = f(x)$$

es una funcional lineal multiplicativa no nula y continua en X; es decir, $\psi_x \in \mathcal{M}(CV(X))$. Este carácter de $CV(X)$ se denota, como en el caso de $C(K)$ por $\hat{x}$ y también es llamado la *evaluación* en x. Así, $\hat{x}(f) = f(x)$ para toda $f \in CV(X)$.

Es claro que ψ_x es una funcional lineal multiplicativa y no es nula puesto que las funciones constantes pertenecen a $CV(X)$. Para comprobar su continuidad recordemos que existe $v \in V$ tal que $v(x) \neq 0$. Entonces,

$$v(x) |\psi_x(f)| = v(x) |f(x)| \leq \sup_{y \in X} v(y) |f(y)|;$$

para todo $f \in CV(X,E)$, o lo que es lo mismo

$$|\psi_x(f)| \leq \frac{1}{v(x)} p_v(f)$$

para todo $f \in CV(X,E)$.

LEMA 2.5.1. *La función*

$$\Phi : \underset{x}{X} \underset{\to}{\to} (\mathcal{M}(CV\underset{\hat{x}}{(X)}), w^*))$$

es continua.

DEMOSTRACIÓN. Sean $x \in X$ y (x_i) una red que converge a x. Dado $f \in CV(X)$ se sigue de su continuidad que $f(x_i) \longrightarrow f(x)$. Por la Proposición 1.6.3, $\hat{x}_i \to \hat{x}$ en la topología w^*. Así, Φ es continua. $\square$

Veremos que las evaluaciones son w^*-densas en $\mathcal{M}^\sharp(CV(X))$. Para esto requerimos del siguiente resultado.

LEMA 2.5.2. *Sea $f \in CV(X)$ no invertible. Dado $\epsilon > 0$ existe $x_0 = x(\epsilon, f) \in X$ tal que*

$$|f(x_0)| < \epsilon$$

DEMOSTRACIÓN. Demos $f \in CV(X)$, puede ser que ella no sea invertible en $C(X)$, o que si lo sea, pero $\frac{1}{f} \notin CV(X)$.

Supongamos primero que $f \in CV(X)$ no es invertible en $C(X)$, lo que quiere decir que existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 0$ y por tanto, si tomamos $x_0 = x(\epsilon, f)$ se obtiene lo que queremos.

Ahora supongamos que f es invertible en $C(X)$ y $\frac{1}{f} \notin CV(X)$, entonces existe $u \in V$ tal que

$$q_u\left(\frac{1}{f}\right) = \sup_{x\in X} \frac{u(x)}{|f(x)|} = \infty.$$

Sea $\sup_{x\in X} |u(x)| = M$, entonces existe $x_0 \in X$ tal que

$$\frac{u(x_0)}{|f(x_0)|} > \frac{M}{\epsilon}$$

de donde

$$\epsilon \geq \frac{\epsilon u(x_0)}{M} > |f(x_0)|.$$

Al tomar $x(\epsilon, f) = x_0$ obtenemos lo que queremos. □

TEOREMA 2.5.3. *Sea $\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(CV(X))$. Dados $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_n \in CV(X)$, existe $x \in X$ tal que*

$$|\hat{x}(f_i) - \varphi(f_i)| < \epsilon$$

TEOREMA 2.5.4. *para todo $1 \leq i \leq n$. En otras palabras las evaluaciones son w^*-densas en $\mathcal{M}^{\#}(CV(X))$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_n \in CV(X)$. La función

$$f = \sum_{k=1}^{n} |f_k - \varphi(f_k)|^2,$$

donde $\varphi(f_k)$ representa a la función escalar constante que toma dicho valor, pertenece a $CV(X)$. En efecto, las funciones constantes están en $CV(X)$, así $f_k - \varphi(f_k) \in CV(X)$ para todo $1 \leq k \leq n$, por ser $CV(X)$ un álgebra.

Esto implica que $\overline{f_k - \varphi(f_k)} \in CV(X)$; de lo que se sigue inmediatamente que

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k - \varphi(f_k)|^2 \in CV(X)$$

.

Observemos que

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} |f_k - \varphi(f_k)|^2\right) &= \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(|f_k - \varphi(f_k)|^2\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \varphi(f_k - \varphi(f_k))\, \varphi\left(\overline{f_k - \varphi(f_{ki})}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\varphi(f_k) - \varphi(f_k))\, \varphi\left(\overline{f_k - \varphi(f_{ki})}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo que f no puede ser invertible en $CV(X)$, así existe x tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - \varphi(f_i)|^2 < \epsilon^2$$

y por tanto,

$$|f_i(x) - \varphi(f_i)| < \epsilon$$

para $1 \leq i \leq n$. □

Definición 2.5.5. Se dice que la familia multiplicativa de Nachbin V es de tipo puntual si todo $\psi \in \mathcal{M}(CV(X))$ es una evaluación; es decir existe $x_0 \in X$ tal que $\psi(f) = \psi_{x_0}(f) = f(x_0)$, para toda $f \in CV(X)$.

La noción de familia de tipo puntual está muy relacionada con el concepto de conjunto de nivel.

Definición 2.5.6. Para cualesquiera $v \in V$ y $r > 0$, el conjunto

$$L(v, r) = \{x : v(x) \geq r\}$$

es llamado un conjunto de nivel.

Proposición 2.5.7. *El conjunto V es del tipo puntual si y sólo si para cualesquiera $v \in V$ y $r > 0$, la cerradura $\overline{L(v,r)}^{\beta(X)}$ está contenida en X.*

Demostración. Supongamos que $x_0 \in (\beta(X) \diagdown X) \bigcap \overline{L(v,r)}^{\beta(X)}$ para algunos $v \in V$ y $r > 0$.Sean $f \in CV(X)$. Si $C = \sup_{x \in X} |v(x) f(x)|$, entonces

$$|f(x)| \leq \frac{v(x)|f(x)|}{r} \leq \frac{C}{r} \tag{2.5.1}$$

para todo $x \in L(v,r)$.

Podemos ver a f como una función continua de X en la compactación por un punto $\mathbb{C}^*$ de $\mathbb{C}$. Entonces, f tiene una extensión

$$f^e : \beta(X) \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

a la compactación de Stone- Čech $\beta(X)$ de X. Por ser x_0 punto de acumulación de $L(v,r)$, se sigue de (2.5.1) que $|f^e(x_0)| \leq \frac{C}{r}$.

Definamos $\psi : CV(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ como $\psi(f) = f^e(x_0)$. Como la operación extensión de $C(X, \mathbb{C}^\star)$ a $C(\beta(X), \mathbb{C}^\star)$ es un homomorfismo se sigue que ψ es un homomorfismo. Además, es no nulo puesto que las constantes pertenecen a $CV(X)$, y es continuo, ya que

$$|\psi(f)| = |f^e(x_0)| \leq \frac{C}{r} = \frac{1}{r}(p_v(f)).$$

O sea, $\psi \in \mathcal{M}(CV(X))$.

Si existe un elemento $x_1 \in X$ tal que $\psi(f) = f(x_1) = f^e(x_1) = f^e(x_0)$ para toda $f \in CV(X)$, entonces eso sucede para toda función escalar continua y acotada f, ya que como sabemos $C_b(X) \subset CV(X)$. También sabemos que cada función en $F = C_b(\beta(X))$ es la extensión f^e de una función $f \in C_b(X)$; a saber $f = F|X$. Así, no existe una función continua de $\beta(X)$ a $[0,1]$ que separe a x_0 y x_1, lo que es una contradicción a que $\beta(X)$ es $T_{3\frac{1}{2}}$. Por tanto, V no es del tipo puntual.

Inversamente, supongamos que $\overline{L(v,r)}^{\beta(X)} \subset X$ para cualesquiera $v \in V$ y $r > 0$. En particular, $L(v,r)$ es relativamente compacto en X, ya que por la hipótesis se tiene que

$$\overline{L(v,r)}^{X} = \overline{L(v,r)}^{\beta(X)} \bigcap X = \overline{L(v,r)}^{\beta(X)}.$$

y $\overline{L(v,r)}^{\beta(X)}$ es compacto.

Sea $\psi \in \mathcal{M}(CV(X))$. Existen $v \in V$ y $\delta > 0$ tales que

$$|\psi(f)| < \frac{1}{2} \text{ si } p_v(f) \leq \delta$$

(recuérdese que $\{p_{q,v} : q \in \mathcal{Q}, v \in V\}$ está dirigida).

Supongamos ψ no es una evaluación, entonces $\psi \notin \Phi\left(\overline{L(v,\delta)}\right)$, donde Φ es la función del Lema 2.5.1, que asocia $\hat{x}$ a cada $x \in X$.

Tenemos que $\Phi\left(\overline{L(v,\delta)}\right)$ es w^*-compacto y por tanto, w^*-cerrado. Entonces, existe una función continua

$$F : \left(\mathcal{M}^{\#}(CV(X)), w^*\right) \longrightarrow [0,1]$$

tal que $F(\psi) = 1$ y $F\left(\Phi\left(\overline{L(v,\delta)}\right)\right) = \{0\}$.

La función $f = F \circ \Phi : X \longrightarrow [0,1]$ es continua y además,

$$\begin{aligned} p_v(f) &= max\left\{\sup_{x\in\overline{L(v,\delta)}} |v(x) f(x)|, \sup_{x\in X\setminus\overline{L(v,\delta)}} |v(x) f(x)|\right\} \\ &= \sup_{x\in X\setminus\overline{L(v,\delta)}} |v(x) F(\widehat{x})| \\ &\leq \delta. \end{aligned}$$

Por lo que, $f \in CV(X)$ y $\psi(f) \leq \frac{1}{2}$.

Por el Teorema 2.5.3 sabemos que el conjunto de las evaluaciones, es decir $\{\widehat{x} : x \in X\}$ es w^*-denso en $\mathcal{M}^{\#}(CV(X))$, por lo que existe una red (x_i) en X tal que $\widehat{x}_i \stackrel{w*}{\to} \psi$. Entonces,

$$\psi(f) = lim\widehat{x}_i(f) = limf(x_i) = limF(\widehat{x}_i) = F(\psi) = 1$$

lo que es una contradicción a que $\psi(f) \leq \frac{1}{2}$. Por tanto, $\psi \in \Phi\left(\overline{L(u,\delta)}\right)$; es decir, ψ es una evaluación. $\square$

COROLARIO 2.5.8. *Una familia V es de tipo puntual si y sólo si todo elemento de V se anula al infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que V es de tipo puntual y sean $v \in V$ y $\epsilon > 0$. Por la Proposición 2.5.7, sabemos que $\overline{L(v,\epsilon)}^{\beta(X)} \subset X$.

El conjunto $\overline{L(v,\epsilon)}^{\beta(X)}$ es compacto. Si $x \notin \overline{L(v,\epsilon)}^{\beta(X)}$, entonces $x \notin L(v,\epsilon)$ y por tanto, $v(x) < \epsilon$. Es decir, en el complemento de un compacto la función v es menor ϵ. Así, v se anula al infinito.

Inversamente, supongamos que v se anula al infinito. Dado $r > 0$ se tiene que existe un compacto K de X tal que $v(x) < r$ para todo $x \in K^c$. Esto implica que $L(v,r) \subset K$.

Puesto que la inmersión de X en $\beta(X)$ es un homeomorfismo sobre su imagen, tenemos que K es compacto, en particular es cerrado en $\beta(X)$. Entonces $\overline{L(v,r)}^{\beta(X)} \subset K \subset X$. Se sigue de la Proposición 2.5.7 que V es de tipo puntual. $\square$

Definición 2.5.9. Para una familia V se define el soporte $\operatorname{sop}(V)$ de V como:

$$\operatorname{sop}(V) = \cup \left\{ \overline{L(v,r)}^{\beta(X)} : v \in V, r > 0 \right\}.$$

De la la Proposición 2.5.7 resulta claro que el $\operatorname{sop}(V) \subset X$ si y sólo si V es de tipo puntual. En tanto que por la Propiedad (V4) de la familia V tenemos que $X \subset \operatorname{sop} V$. Al unir estos dos resultados obtenemos el siguiente.

Teorema 2.5.10. *V es de tipo puntual si y sólo si $X =$ sop V.*

Proposición 2.5.11. *Sean $x_0 \in X$ y $\psi : CV(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ el carácter definido como $\psi(f) = f(x_0)$. El carácter ψ es continuo si y sólo si $x_0 \in$ sop (V). A este carácter también lo denotamos por $\hat{x}_0$ y lo llamamos evaluación en x_0.*

Demostración. Supongamos que ψ es continuo. Existen $v \in V$ y $M > 0$ tales que

$$|\psi(f)| = |f(x_0)| \leq M \sup_{x \in X} (v(x)|f(x)|) \tag{2.5.2}$$

para todo $f \in CV(X)$.

Supongamos que $x_0 \notin \operatorname{sop}(V)$, entonces $x_0 \notin \overline{L\left(v, \frac{1}{2M}\right)}^{\beta(X)}$.

Existe una función continua $g^e : \beta(X) \longrightarrow [0,1]$ tal que

$$g^e(x_0) = 1 \text{ y } g^e\left(\overline{L\left(v, \frac{1}{2M}\right)}^{\beta(X)}\right) = 0. \tag{2.5.3}$$

Llamemos g a g^e restringida a X. La función g es continua, con rango en $[0,1]$ y

$$g\left(L\left(v, \frac{1}{2M}\right)\right) = \{0\}.$$

Por ser g continua y acotada, tenemos que $g \in CV(X)$ y por (2.5.2) y(2.5.3) se sigue que

$$1 = |g^e(x_0)| \leq M \sup_{x \in X \setminus L\left(v, \frac{1}{2M}\right)} (v(x)|g(x)|) \leq M\left(\frac{1}{2M}\right) = \frac{1}{2}.$$

Lo que es un absurdo, por lo que $x_0 \in \operatorname{sop}(V)$.

Recíprocamente, supongamos que $x_0 \in \text{sop}(V)$. Existen $v \in V$, $r > 0$ y una red (x_i) en $L(v,r)$ que converge a x_0. Como $v(x_i) \geq r$, se sigue que

$$\begin{aligned} r\left|f\left(x_i\right)\right| &\leq \sup_{x\in X}\left(v\left(x\right)\left|f\left(x\right)\right|\right); \\ \left|f\left(x_i\right)\right| &\leq \frac{1}{r}\sup_{x\in X}\left(v\left(x\right)\left|f\left(x\right)\right|\right) \end{aligned}$$

para toda $f \in CV(X)$.

De lo que se deduce que

$$\left|\psi\left(f\right)\right| = \left|f\left(x_0\right)\right| \leq \frac{1}{r}\sup_{x\in X}\left(v\left(x\right)\left|f\left(x\right)\right|\right)$$

para toda $f \in CV(X)$. Por tanto, ψ es continua. □

Corolario 2.5.12. *Si V es de tipo puntual entonces cualquier evaluación en $CV(X)$ es continua.*

Demostración. En este caso,sop $V = X$. □

Para lo que sigue es necesario recordar un concepto, relacionado con la continuidad de una función.

Definición 2.5.13. Sea X espacio topológico, se dice que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es superiormente semicontinua en $x_0 \in X$, si para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad N de x_0 tal que, todo elemento $y \in N$ cumple que $f(y) < f(x_0)+\epsilon$.

Claramente toda función continua, es superiormente semicontinua .

Proposición 2.5.14. *Si V es de tipo puntual y todo elemento de V es una función superiormente semicontinua, entonces*

$$sop\left(V\right) = \left\{x \in X : v\left(x\right) \neq 0 \text{ para alguna } v \in V\right\} = X.$$

Demostración. Sea $x_0 \in \text{sop}(V)$, entonces $x_0 \in \overline{L(v,r)} \subset X$ para algunos $r > 0$ y $v \in V$. Hagamos $\epsilon = \frac{r}{2}$, entonces existe una vecindad abierta U de x_0 tal que $v(y) < v(x_0) + \frac{r}{2}$ si $y \in U$.

Por ser U vecindad de x_0, existe $y \in U \cap L(v,r)$ y entonces

$$\frac{r}{2} = r - \frac{r}{2} \leq v\left(y\right) - \frac{r}{2} \leq v\left(x_0\right).$$

Es decir $x_0 \in \{x \in X : v(x) \neq 0 \text{ para alguna } v \in V\}$.

Recíprocamente, tomemos un elemento

$$x_0 \in \left\{x \in X : v\left(x\right) \neq 0 \text{ para alguna } v \in V\right\}$$

y sea $v \in V$ tal que $v(x_0) \neq 0$. Por tanto, $x_0 \in L\left(v, \frac{v(x_0)}{2}\right) \subset \text{sop}(V)$.

Finalmente, de la propiedad (V4) de la familia de Nachbin V se tiene que
$$\{x \in X : v(x) \neq 0 \text{ para alguna } v \in V\} = X.$$
□

A continuación definimos un concepto que en el último capítulo será estudiado con mayor amplitud.

DEFINICIÓN 2.5.15. Sea X un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$. Se dice que X es realcompacto si es homeomorfo a un subconjunto cerrado de un producto $\mathbb{R}^I$, donde I no es necesariamente finito.

COROLARIO 2.5.16. *Si X es un espacio realcompacto y $CV(X)$ contiene al espacio $C(X)$ de todas las funciones escalares continuas, entonces V es de tipo puntual.*

DEMOSTRACIÓN. *Por hipótesis, $CV(X,E) = C(X)$. Según el Teorema 5.1.2 del capítulo 7 todo carácter en $C(X)$ es una evaluación.* □

2.5.2. Ejemplos de $CV(X,E)$ con V de tipo puntual. De los ejemplos vistos en la subsección 2.4.1 las siguientes álgebras $CV(X,E)$ están determinadas por V de tipo puntual, pues en cada caso cualquier elemento de V se anula al infinito.

Ejemplos 1. Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de subconjuntos de X, no vacíos. Tomamos la familia multiplicativa de Nachbin
$$V = \{\alpha\chi_A : \alpha > 0 \text{ y } A \in \mathcal{A}\}.$$

1.1 Si $\mathcal{A}$ es la colección de los **subconjuntos finitos**, no vacíos, de X. Entonces, V es de tipo puntual y como vimos
$$CV(X,E) = C(X,E)$$
con la **topología es la de la convergencia puntual**.

1.2 Sea $\mathcal{A}$ la colección de los **subconjuntos compactos**, no vacíos, de X. Entonces,
$$CV(X,E) = C(X,E)$$
y la **topología es la de la convergencia uniforme sobre compactos**.

Ejemplos 2. Tomamos la familia multiplicativa de Nachbin
$$V \subset B^+(X) = \{f : X \to [0,\infty) : \ f \text{ es acotada}\}.$$

2.1 Sea V el conjunto $B_{00}^+(X)$ de las funciones positivas con soporte compacto. Entonces,
$$CV(X,E) = C(X,E)$$
y **la topología es la compacto- abierta** κ.

2.3 Sea V el conjunto $B_0^+\left(X\right)$ de las funciones acotadas y positivas que se anulan al infinito. Entonces,

$$CV\left(X,E\right) = C_b\left(X,E\right).$$

En particular, cuando $E = \mathbb{C}$, la topología que se obtiene al través de V es la estricta (de Giles) β.

2.4 Supongamos que X es localmente compacto y sea V el conjunto $C_0^+\left(X\right)$ de las funciones continuas, positivas que se anulan al infinito. Entonces

$$CV\left(X,E\right) = C_b\left(X,E\right).$$

Este caso tiene como uno particular a $C_b\left(X\right)$ con la topología de Buck β.

2.6. Caracteres en $CV\left(X,E\right)$

2.6.1. Los caracteres $H_{x,h}$. Definiremos en $CV\left(X,E\right)$ funcionales lineales multiplicativas que recuerdan a las evaluaciones.

Supongamos que $x \in X$ y h es una funcional lineal multiplicativa en E. Entonces la función $H : CV\left(X,E\right) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$H\left(f\right) = h\left(f\left(x\right)\right)$$

es una funcional lineal multiplicativa en $CV\left(X,E\right)$, que denotamos por $H_{x,h}$.

Más aún si h es continua, entonces $H_{x,h}$ es continua, ya que existen $v \in V$, $q \in \mathcal{Q}$ y $M > 0$ tales que

$$v\left(x\right) \neq 0$$

y

$$\left|h\left(y\right)\right| \leq Mq\left(y\right)$$

para todo $y \in E$ y entonces se satisface

$$\left|h\left(f\left(x\right)\right)\right| \leq Mq\left(f\left(x\right)\right) \leq \frac{M}{v\left(x\right)} \sup_{y \in X} v\left(y\right) q\left(f\left(y\right)\right);$$

para todo $f \in CV\left(X,E\right)$, o lo que es lo mismo

$$\left|H_{x,h}\left(f\right)\right| \leq \frac{M}{v\left(x\right)} p_{q,v}\left(f\right)$$

para todo $f \in CV\left(X,E\right)$.

Si h no es nula, entonces $H_{h,x}$ tampoco lo es, ya que las funciones constantes de X en E pertenecen a $CV\left(X,E\right)$.

Con $\widetilde{\mathcal{M}}\left(A\right)$ denotaremos a $\mathcal{M}^{\#}\left(A\right)$ o $\mathcal{M}\left(A\right)$. Así, $H_{h,x} \in \widetilde{\mathcal{M}}\left(CV\left(X,E\right)\right)$ siempre que $\left(x,h\right) \in X \times \widetilde{\mathcal{M}}\left(E\right)$.

En particular, si $E = \mathbb{C}$, entonces tenemos que $\mathcal{M}^{\#}(E) = \mathcal{M}(E)$ y este conjunto se reduce a la función identidad I en $\mathbb{C}$ y entonces $\hat{x} = H_{x,I}$, ya que

$$\hat{x}(f) = f(x) = I(f(x)) = H_{x,I}(f).$$

O sea, $H_{x,I}$ es la evaluación en X.

Para E tal que $\widetilde{\mathcal{M}}(E) \neq \emptyset$, por ejemplo cuando E es un álgebra de Banach, tenemos entonces definida las función:

$$\begin{aligned} \Phi : X \times \widetilde{\mathcal{M}}(E) &\to \widetilde{\mathcal{M}}(CV(X,E)); \\ (x,h) &\to \; H_{x,h} \end{aligned}$$

uno de cuyos casos particulares es

$$\begin{aligned} \Phi : X &\to \mathcal{M}(CV(X)). \\ x &\to \quad \hat{x} \end{aligned}$$

Para la prueba del primer teorema de esta sección requerimos de los dos resultados auxiliares que a continuación presentamos.

Lema 2.6.1. *Dado $H \in \widetilde{\mathcal{M}}(CV(X,E))$, existen caracteres únicos*

$$\psi \in \widetilde{\mathcal{M}}(CV(X))$$

y

$$h : E \longrightarrow \mathbb{C}$$

tales que:

a) $H(\alpha f') = \psi(\alpha) H(f')$ donde $f' \in CV(X,E)$ y $\alpha \in CV(X)$.

b) $H(\alpha a) = \psi(\alpha) h(a)$ donde $\alpha \in CV(X)$ y $a \in E$.

Además, ψ no es nula. Si H es continuo, también lo es h y si E tiene idéntico entonces $h \in \widetilde{\mathcal{M}}(E)$.

Demostración. Tomemos $f, f' \in CV(X,E)$ y $\alpha \in CV(X)$. Sabemos que $\alpha f, \alpha f', \alpha f f' \in CV(X,E)$ y es claro que $\alpha f f' = f \alpha f'$.

Por ser H un homomorfismo se cumple que

$$H(\alpha f) H(f') = H(f) H(\alpha f'). \tag{2.6.1}$$

Como H es no nula, existe $f'' \in CV(X,E)$ tal que $H(f'')$ no es cero. Al tomar en la igualdad anterior $f = f''$, tenemos que si $H(f') = 0$, entonces $H(\alpha f') = 0$.

Por otra parte, si $H(f') \neq 0$, entonces al tomar nuevamente en la igualdad anterior $f = f''$ obtenemos la siguiente igualdad

$$\frac{H(\alpha f'')}{H(f'')} = \frac{H(\alpha f')}{H(f')}. \tag{2.6.2}$$

Definamos

$$\psi(\alpha) = \frac{H(\alpha f'')}{H(f'')}.$$

Afirmamos que ψ es un carácter no nulo en $CV(X)$. Sean $\alpha, \alpha' \in CV(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda\alpha + \alpha') &= \frac{H((\lambda\alpha + \alpha') f')}{H(f'')} \\
&= \frac{H(\lambda\alpha f'') + H(\alpha' f'')}{H(f'')} \\
&= \frac{\lambda H(\alpha f'')}{H(f'')} + \frac{H(\alpha' f'')}{H(f'')} \\
&= \lambda\psi(\alpha) + \psi(\alpha').
\end{aligned}$$

Entonces, ψ es aditiva y homogénea.

Por 2.6.1 tenemos que

$$H(\alpha f'') H(\alpha' f'') = H(f'') H(\alpha\alpha' f'')$$

y entonces,

$$\frac{H(\alpha f'') H(\alpha' f'')}{H(f'')} = H(\alpha\alpha' f''),$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha\alpha') &= \frac{H((\alpha\alpha') f'')}{H(f'')} \\
&= \frac{H(\alpha f'') H(\alpha' f'')}{H(f'')^2} \\
&= \left(\frac{H(\alpha f'')}{H(f'')}\right)\left(\frac{H(\alpha' f'')}{H(f'')}\right) \\
&= \psi(\alpha)\psi(\alpha').
\end{aligned}$$

Por tanto, ψ es un carácter.

Si H es continuo, entonces ψ lo es ya que la asociación $\alpha \longrightarrow \alpha f''$ define una función continua de $CV(X)$ en $CV(X,E)$. En efecto, dados $q \in \mathcal{Q}$ y $v \in V$, existen $u, w \in V$ tales que $v \leq uw$ y por tanto

$$\begin{aligned}
p_{qv}(\alpha f'') &\leq \sup_{x\in X} v(x) |\alpha(x)| q(f''(x)) \\
&\leq M p_u(\alpha)
\end{aligned}$$

para toda $\alpha \in CV(X)$, donde $M = p_{qw}(f'')$.

Veamos que ψ tiene las propiedades requeridas. Si $f' \in CV(X,E)$ es tal que $H(f') = 0$, entonces vimos previamente que $H(\alpha f') = 0$ y por consiguiente se cumple (a). Supongamos que $H(f') \neq 0$. De la igualdad 2.6.2 resulta que $\psi(\alpha) = \frac{H(\alpha f')}{H(f')}$ y también se cumple (a).

Si hay otro carácter $\psi' \in CV(X)$ que cumple a), entonces $\psi'(\alpha) = \frac{H(\alpha f'')}{H(f'')}$ para todo $\alpha \in CV(X)$; o sea, $\psi' = \psi$.

Finalmente, definimos $h(a) = H(1a)$ para cada $a \in E$; donde 1 es la función escalar constante 1 definida en X y a es la función constante a de X en E.

Para $a, b \in E$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\begin{aligned} h(\lambda a + b) &= H(1(\lambda a + b)) \\ &= \lambda H(1a) + H(1b) \\ &= \lambda h(a) + h(b), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h(ab) &= H(1ab) \\ &= H(1a) H(1b) \\ &= h(a) h(b). \end{aligned}$$

En conclusión h es un carácter de E y como la función $\alpha 1a = g\alpha$ pertenece a $CV(X,E)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \psi(\alpha) h(a) &= \frac{H(\alpha f'') H(1a)}{H(f'')} \\ &= \frac{H(\alpha a f'')}{H(f'')} = H(\alpha a). \end{aligned}$$

Es decir, se cumple (b).

Si $h' \in \mathcal{M}(E)$ satisface a (b), entonces

$$\begin{aligned} h'(a) &= \frac{H(1a)}{\psi(1)} \\ &= H(1a) \\ &= h(a), \end{aligned}$$

ya que $\psi(1) = 1$. Así, h es único.

Si H es continuo, entonces h lo es ya que la asociación $a \longrightarrow 1a$ de E en $CV(X,E)$, donde 1 representa la función constante 1 definida en X, define una función continua. En efecto. Dados $q \in \mathcal{Q}$ y $v \in V$ se cumple que

$$p_{q,v}(1a) = \sup_{x \in X} v(x)\, q(a).$$

Si E tiene idéntico e, entonces la función constante e de X en E es el idéntico de $CV(X,E)$, por tanto, $H(e) = 1$ y

$$\begin{aligned} h(e) &= \psi(1)\, h(e) \\ &= \frac{H(ef'')}{H(f'')} \\ &= \frac{H(f'')\, H(e)}{H(f'')} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Entonces, $h \in \widetilde{\mathcal{M}}(E)$ si E tiene idéntico. □

Lema 2.6.2. *Sean q una seminorma en E, $\epsilon > 0$, y $f \in CV(X,E)$, entonces existen dos familias: $\{a_i : i \in I\}$ en E y $\{\alpha_i : i \in I\}$ en $CV(X)$ tales que:*

1. $\{\alpha_i : i \in I\}$ es una partición de la unidad localmente finita en X; es decir:

(a) $0 \leq \alpha_i$, y $\sum \alpha_i = 1$.

(b) Cada punto $x \in X$ tiene una vecindad U_x tal que $\alpha_i = 0$ en U_x, excepto para un número finito de índices $i \in I$.

2. $q\left(f(x) - \sum \alpha_i(x)\, a_i\right) < \epsilon$ para todo $x \in X$.

Demostración. La seminorma q define una pseudométrica E. Al espacio pseudométrico así definido lo denotamos por (E,q) y para cada $a \in E$ y $r > 0$ denotamos por $B_r(a)$ a la bola abierta con centro en x y radio r.

Hagamos $I = E$, entonces $\{B_\epsilon(i) : i \in I\}$ es una cubierta abierta de E. Por ser (E,q) pseudométrico se sigue del Teorema 2.1.9 que existe una partición de la unidad $\{\alpha_i' : i \in I\}$, localmente finita y subordinada a la cubierta abierta $\{B_r(i) : i \in I\}$. Entonces

a) $\alpha_i' \in C(E, [0,1])$.

b) α_i' se anula fuera de $B_\epsilon(i)$.

c) Cada punto $a \in E$ tiene una vecindad V_a tal que $\alpha_1' = 0$ en V_a, excepto para un número finito de índices $i \in I$.

d) $\sum \alpha_i = 1$.

Definimos $\alpha_i = \alpha_i' \circ f$ para todo $i \in I$. Entonces cada α_i es una función continua de X en $[0,1]$ y $\sum \alpha_i = \sum \alpha_i' \circ f = 1$.

Hagamos $U_x = f^{-1}\left(V_{f(x)}\right)$ para cada $x \in X$, entonces $\alpha_i = \alpha_i' \circ f = 0$ en la vecindad U_x de x, excepto para un número finito de índices $i \in I$

Por ultimo, hagamos $a_i = i$ para cada $i \in E$. Entonces, con base en que $\sum_{i\in I} \alpha_i(x) f(x) = f(x)$ y $\alpha_i(x) = 0$ si $q(f(x) - a_i) \geq \epsilon$, obtenemos

$$\begin{aligned} q\left(f(x) - \sum_{i\in I} \alpha_i(x) a_i\right) &= q\left(\sum_{i\in I} \alpha_i(x)(f(x) - a_i)\right) \\ &\leq \sum_{i\in I} \alpha_i(x) q(f(x) - a_i) \\ &< \sum_{i\in I} \alpha i(x) \epsilon = \epsilon \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. □

TEOREMA 2.6.3. *Si V es de tipo puntual, y $H : CV(X, E) \longrightarrow \mathbb{C}$ es un carácter continuo, entonces existen $x_0 \in X$ y un carácter continuo $h : E \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $H(f) = h(f(x_0))$ para toda $f \in CV(X, E)$.*

DEMOSTRACIÓN. Si H es la funcional cero, tomamos h como la funcional cero obteniendo así inmediatamente el resultado. Supongamos que H es no nula, entonces por Lema 2.6.1 tenemos que existen $\psi \in \mathcal{M}(CV(X))$ y un carácter continuo h definido en E tales que

$$H(\alpha a) = \psi(\alpha) h(a) \tag{2.6.3}$$

siempre que $\alpha \in CV(X)$ y $a \in E$, y

$$H(\alpha f) = \psi(\alpha) H(f) \tag{2.6.4}$$

siempre que $f \in CV(X, E)$ y $\alpha \in CV(X)$.

Por el Lema 2.6.1, por ser H continua entonces ψ lo es. Como V es de tipo puntual, $\psi(\alpha) = \alpha(x_0)$ para algún $x_0 \in X$ y todo $\alpha \in CV(X)$, por lo que las igualdades (2.6.3) y (2.6.4) se transforma en

$$H(\alpha a) = \alpha(x_0) h(a) \tag{2.6.5}$$

siempre que $a \in E$ y $\alpha \in CV(X)$

$$H(\alpha f) = \alpha(x_0) H(f) \tag{2.6.6}$$

siempre que $f \in CV(X, E)$ y $\alpha \in CV(X)$.

Por la continuidad de H, existen $M > 0$ y una seminorma $p_{q,v}$ en $CV(X, E)$ tales que

$$|H(f)| \leq M p_{q,v}(f)$$

para todo $f \in CV(X, E)$.

El teorema estará demostrado una vez que probemos que dados $f \in CV(X)$ y $\varepsilon > 0$ se cumple

$$|H(f) - h(f(x_0))| < 2\varepsilon. \tag{2.6.7}$$

Sean $f \in CV(X)$ y $\epsilon > 0$. Usaremos el Lema 2.6.2 en el espacio seminormado (E,q), tomando como real positivo a $\epsilon' = \min\left\{\epsilon, \frac{\epsilon}{M}, \frac{\epsilon}{2M\sup\limits_{x\in X} v(x)}\right\}$.

Existe una familia de funciones $\{\alpha_i : i \in I\} \subset CV(X)$ y otra $\{a_i : i \in I\}$ de elementos del álgebra tales que $\{\alpha_i : i \in I\}$ es una partición de la unidad localmente finita en X y cumplen que

$$q\left(f(x) - \sum \alpha_i(x)\, a_i\right) < \epsilon'$$

en X.

Hay una vecindad abierta U de x_0 tal que α_i no es nula en U sólo para un conjunto finito de índices, digamos que para $i \in J$ donde $J \subset I$ es un conjunto finito.

Hagamos $f' = \sum\limits_{i\in J} \alpha_i a_i$. Entonces $f' \in CV(X,E)$, por ser una suma finita de funciones en $CV(X,E)$ y

$$q(f(x) - f'(x)) < \epsilon' \text{ en } U.$$

Como $X \diagdown U$ es cerrado, existe una función continua $\alpha : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $\alpha(x_0) = 1$ y α vale cero en $X \diagdown U$, Por ser α acotada, esta función pertenece a $CV(X)$.

Entonces a partir de (2.6.6) obtenemos que

$$H(f'') = H(\alpha f'') \tag{2.6.8}$$

para todo $f'' \in CV(X,E)$.

Si $x \in X \diagdown U$, entonces $v(x)\, q(\alpha(x)(f(x) - f'(x))) = 0$ y si $x \in U$ entonces $f'(x) = \sum\limits_{i\in J} \alpha_i(x)\, a_i$, por tanto

$$\begin{aligned} q(\alpha(x)(f(x) - f'(x))) &= \alpha(x)\, q(f(x) - f'(x)) \\ &\leq \epsilon'. \end{aligned}$$

De lo que se sigue inmediatamente que:

$$p_{q,v}(\alpha f - \alpha f') \leq \epsilon' \sup_{x\in X} v(x) < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Por esto y la igualdad (2.6.8) concluimos que

$$\begin{aligned} |H(f) - H(f')| &= M(p_{q,u}(\alpha f - \alpha f')) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Denotemos por 1a la función escalar constante 1 definida en X, entonces a partir de (2.6.5) obtenemos

$$\begin{aligned} |h(f(x_0)) - h(f'(x_0))| &= |H(1 \cdot f(x_0)) - H(1 \cdot f'(x_0))| \\ &\leq M(p_{q,v}((1 \cdot f(x_0)) - (1 \cdot f'(x_0)))) \\ &\leq M \cdot q(f(x_0) - f'(x_0)) \cdot \sup v(x) < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

A partir de la igualdad (2.6.5) obtenemos

$$\begin{aligned} H(f') = H(1f') &= H\left(\sum_{i \in J} \alpha_i a_i\right) = \sum_{i \in J} H(\alpha_i a_i) = \sum_{i \in J} h(a_i)\, \alpha_i(x_0) \\ &= \sum_{i \in J} h(\alpha_i(x_0)\, a_i) = h\left(\sum_{i \in J} \alpha_i(x_0)\, a_i\right) = h(f'(x_0)). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |H(f) - h(f(x_0))| &\leq |H(f) - H(f')| + |H(f') - h(f(x_0))| \\ &= |H(f) - H(f')| + |h(f'(x_0)) - h(f(x_0))| \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

□

2.7. La igualdad $\mathcal{M}(CV(X,E)) = X \times \mathcal{M}(E)$ cuando V es de tipo puntual

Los resultados hasta ahora obtenidos nos llevan a considerar, para cuando $\mathcal{M}(E) \neq \emptyset$, la función

$$\Psi : X \times \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathcal{M}(CV(X,E)) \tag{2.7.1}$$

definida como $\Psi(x,h) = H_{x,h}(f)$. Es decir, $\Psi(x,h)(f) = h(f(x))$ para toda $f \in CV(X,E)$.

TEOREMA 2.7.1. *La función Ψ es una función biyectiva y abierta si V es de tipo puntual. Es decir,*

$$\mathcal{M}(CV(X,E)) = X \times \mathcal{M}(E).$$

Demostración. Que Ψ es sobre es el contenido del teorema 2.6.3. Solo hay que hacer notar que como ψ no es nulo, tampoco lo es h.

Para ver que es inyectiva, supongamos que $x, x' \in \operatorname{sop}(V)$ y $h, h' \in \mathcal{M}(E)$ son tales que $\Psi(x,h) = \Psi(x',h')$, entonces

$$h(f(x)) = h'(f(x')) \tag{2.7.2}$$

para toda $f \in CV(X,E)$. Si $f \in CV(X,E)$ es la función constante $f(x) = a$ para todo $x \in X$, con $a \in E$, entonces, $h(a) = h'(a)$. De donde $h = h'$.

Existe $b \neq 0$ en E tal que $h(b) \neq 0$. Si $x \neq x'$, entonces como X es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$, hay una función $f \in C_b(X)$ tal que $f(x) = 1$ y $f(x') = 0$. Así, $fb \in CV(X,E)$ y tenemos que $h(f(x)) = h(b) \neq 0 = h(0) = h(f(x'))$, lo que contradice a (2.7.2), por tanto $x = x'$ y así Ψ es una función inyectiva.

Para ver que Ψ es una función abierta es suficiente ver que la función inversa es continua. Sea $(H_i)_{i\in I}$ una red en $\mathcal{M}(CV(X,E))$ que converge a H. Así,

$$|H_i(f) - H(f)| \longrightarrow 0$$

para toda $f \in CV(X,E)$.

Existen $h_i, h \in \mathcal{M}(E)$ y $x_i \in V$ con $i \in I$ tales que $H_i(f) = h_i(f(x_i))$ y $H(f) = h(f(x))$ para todo $f \in CV(X,E)$. Es decir, $\Psi^{-1}(H_i) = (x_i, h_i)$ y $\Psi^{-1}(H) = (x,h)$.

Entonces,

$$|h_i(f(x_i)) - h(f(x))| \longrightarrow 0$$

para todo $f \in CV(X,E)$. En particular, para la función constante en X, $f = a$, con $a \in E$, se tiene que

$$|h_i(f(x_i)) - h(f(x))| = |h_i(a) - h(a)| \longrightarrow 0.$$

Por lo que $h_i \longrightarrow h$ en $\mathcal{M}(E)$.

Para ver que $\Psi^{-1}(H_i) \to \Psi^{-1}(H)$ sólo falta ver que $x_i \longrightarrow x$. Supongamos lo contrario, entonces existe una vecindad abierta V de x tal que una subred (x_{i_k}) se queda afuera de V. Existe $\alpha : X \longrightarrow [0,1]$ continua tal que $\alpha(X \setminus V) = \{0\}$ y $\alpha(x) = 1$, de donde se sigue que $\alpha a \in CV(X,E)$ y

$$|h(a)| = |h_i(\alpha(x_{i_k})a) - h(\alpha(x)a)| \longrightarrow 0,$$

por tanto h es la función cero, que es contradictorio a que $h \in \mathcal{M}(E)$. Por tanto Ψ^{-1} es continua. □

2.7.1. Espectros de ciertas álgebras particulares. Por el Teorema anterior y lo visto en la Subsección 2.5.2, tenemos que si E es un álgebra localmente convexa con espectro no vacío, entonces:

1. $\mathcal{M}(C(X,E)) = X \times \mathcal{M}(E)$ si $C(X,E)$ tiene la topología de la convergencia puntual.

2. $\mathcal{M}(C(X,E)) = X \times \mathcal{M}(E)$ si $C(X,E)$ tiene la topología compacto abierta κ. En particular,

2.1 $\mathcal{M}(C(X,E)) = X \times \mathcal{M}(E)$ si X es compacto, E es una álgebra de Banach y $C(X,E)$ tiene la topología de la convergencia uniforme.

3. $\mathcal{M}(C_b(X,E)) = X \times \mathcal{M}(E)$ si $C_b(X,E)$ tiene la topología estricta β; es decir, la dada por las seminormas $p_{q,\phi}$ donde ϕ corre por el conjunto $B_0^+(X)$ de las funciones acotadas y positivas que se anulan al infinito. En particular:

3.1 $\mathcal{M}(C_b(X)) = X$ si $C_b(X)$ tiene la topología estricta (de Giles) β.

3.2 $\mathcal{M}(C_b(X,E)) = X \times \mathcal{M}(E)$ si X es localmente compacto $C_b(X,E)$ tiene la topología estricta β; es decir, la dada por las seminormas $p_{q,\phi}$ donde ϕ corre por el conjunto $C_0^+(X)$ de las funciones continuas, acotadas y positivas que se anulan al infinito.

3.3 $\mathcal{M}(C_b(X)) = X$ si $C_b(X)$ tiene la topología estricta (de Buck) β.

A partir del Teorema 2.7.5 que aparece en la siguiente sección se tendrá que estas igualdades son como espacios topológicos.

2.7.2. Condiciones para que $\Psi : X \times \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathcal{M}(CV(X,E))$ sea un homeomorfismo. La función Ψ no es necesariamente una función continua, pero veremos condiciones necesarias y suficientes para que lo sea. Para esto recordamos el siguiente concepto.

Definición 2.7.2. Sea X un espacio topológico y Y un espacio métrico. Se dice que una familia $\mathcal{F}$ de funciones $f : X \longrightarrow Y$ es equicontinua en $x \in X$, si dado $\epsilon > 0$, existe una vecindad U de x tal que $f(U) \subset B_\epsilon(f(x))$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Si es $\mathcal{F}$ es equicontinua en cada $x \in X$, entonces $\mathcal{F}$ es llamada una familia equicontinua en X.

Cuando X es un espacio vectorial topológico y $\mathcal{F}$ es una familia de funcionales lineales, es fácil probar que $\mathcal{F}$ es equicontinua en X si y sólo si es equicontinua en 0.

En el espacio topológico $(\mathcal{M}(E), w*)$ tenemos un concepto local de lo anterior.

Definición 2.7.3. Se dice que una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(E)$ es localmente equicontinua si cada $h \in \mathcal{F}$ tiene una $w*$-vecindad W formada por una familia equicontinua en E; es decir, W es una familia equicontinua en 0.

Proposición 2.7.4. *Si E es un álgebra de Banach, entonces cualquier subfamilia no vacía $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}(E)$ es equicontinua y por tanto, localmente equicontinua.*

Demostración. De acuerdo al Corolario 1.14.5 se tiene

$$\|h(x)\| \leq \|x\|$$

para cualesquiera $x \in X$ y $h \in \mathcal{F}$. Por consiguiente, $\mathcal{F}$ es equicontinua en 0. Entonces cualquier $w*$-vecindad de un elemento $h \in \mathcal{M}(E)$ es una familia equicontinua de funcionales. $\square$

Teorema 2.7.5. *Sea $\Psi : X \times \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathcal{M}(CV(X,E))$ la función que aparece en (2.7.1). Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) Ψ es continua si V es de tipo puntual.

(b) La función $\Psi : E \times \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathcal{M}(CV(E,E))$, con $V = \{\lambda\chi_A : \lambda > 0$ y $A \subset E$ es compacto$\}$, es continua.

(c) $\mathcal{M}(E)$ es localmente equicontinua.

(d) La función canónica $E_{va} : E \times \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathbb{C}$, donde $E_{va}(a,h) = h(a)$, es una función continua.

Demostración. Por ser V de tipo puntual tenemos que $X = V$.

(a)$\Rightarrow$(b) Esta implicación es inmediata ya que sabemos que

$$V = \{\lambda\chi_A : \lambda > 0 \text{ y } A \subset E \text{ es compacto}\}$$

es de tipo puntual.

(b)$\Rightarrow$(d) Sean $(a,h) \in E \times \mathcal{M}(E)$ y (h_i) y (a_i) redes en $\mathcal{M}(E)$ y E, respectivamente, tales que $h_i \longrightarrow h$ y $a_i \longrightarrow a$. Por la continuidad de

$$\begin{array}{rcl} \Psi : E \times \mathcal{M}(E) & \rightarrow & \mathcal{M}(CV(E,E)) \\ (a,h) & \rightarrow & \Psi(a,h) \end{array}$$

se tiene que $\Psi(a_i,h_i) \longrightarrow \Psi(a,h)$ en $\mathcal{M}(CV(E,E))$ y como la identidad I de E pertenece a $CV(E,E)$, se concluye que

$$\Psi(a_i,h_i)(I) = h_i(a_i) \longrightarrow \Psi(a,h)(I) = h(a)$$

. Es decir, E_{va} es continua.

(d)$\Rightarrow$(c) Sea $h_0 \in \mathcal{M}(E)$. Como la función E_{va} es continua, dado $\epsilon > 0$ existen una vecindad U de 0 en E y una vecindad W de h_0 en $\mathcal{M}(E)$ tales que $E_{va}(U \times W) \subset D_\epsilon(0)$.

Entonces, $h \in W$ y $a \in U$ implican $|h(a)| < \epsilon$. O sea, W es una familia equicontinua.

(c)$\Rightarrow$(d) Supongamos que $\mathcal{M}(E)$ es una familia localmente equicontinua y sea $(a_0,h_0) \in E \times \mathcal{M}(E)$.

Existe una vecindad W de h_0 tal W es equicontinua en E. Así, dado $\epsilon > 0$ existe una vecindad U de a_0 para la cual $h \in W$ y $a \in U$ implican que $h(a) \in B_\varepsilon(h_0(a_0))$. Por lo que E_{va} es una función continua.

(d)$\Rightarrow$(a) Sea $(x_0,h_0) \in X \times \mathcal{M}(E)$, tomemos $f \in CV(X,E)$ y $\epsilon > 0$, entonces existe $U_0 \times W$ vecindad de $(f(x_0), h_0)$ en $E \times \mathcal{M}(E)$ tal que para todo $a \in U_0$ y $h \in W$ se cumple que $|h(a) - h_0(f(x_0))| < \epsilon$.

Hagamos $U = f^{-1}(U_0)$, entonces $U \times W$ es una vecindad de (x_0, h_0) tal que

$$|\Psi(x,h)(f) - \Psi(x_0,h_0)(f)| = |h(f(x)) - h_0(f(x_0))| < \epsilon.$$

Y así Ψ es una función continua. $\square$

OBSERVACIÓN 2.7.6. *Por la Proposición 2.7.4, se cumple el inciso (c) de este teorema cuando E es un álgebra de Banach. Por tanto, si E es un álgebra de Banach, la función Ψ es un homeomorfismo entre $M(CV(X,E))$ y $X \times M(E)$ y así la igualdad*

$$M(CV(X,E)) = X \times M(E)$$

es como espacios topológicos.

Entonces, las igualdades dadas en la subsección 2.7.1 son como espacios topológicos cuando E es de Banach.

Así, el ejemplo 2.1 de dicha sección se transforma en

$$\mathcal{M}(C(X,E)) = X \times \mathcal{M}(E)$$

como espacios topológicos si X es compacto, E es una álgebra de Banach y $C(X,E)$ tiene la topología de la convergencia uniforme, que es el resultado probado por A. Hausner en [**Ha.**].

Por otra parte, si $\mathcal{M}(E)$ es localmente equicontinuo, entonces

$$\mathcal{M}(C(X,E)) = X \times \mathcal{M}(E)$$

sin necesidad de que X sea k-espacio y E sea completa, que son hipótesis usadas por Dietrich en [**Di.**] para probar esa igualdad.

Para el último resultado de este capítulo recordamos el siguiente concepto definido en [**Ma.**].

DEFINICIÓN 2.7.7. Un álgebra topológica E es llamada semisimple si

$$\bigcap_{h \in \mathcal{M}(E)} ker(h) = \{0\}$$

COROLARIO 2.7.8. *Si $sop(V) = X$ entonces $CV(X,E)$ es semisimple si y sólo si E lo es.*

DEMOSTRACIÓN. Primero supongamos que $CV(X,E)$ es semisimple y sea $a \in \bigcap_{h \in \mathcal{M}(E)} ker(h)$. La función contante a pertenece a $CV(X,E)$.

Sea $\psi \in \mathcal{M}(CV(X,E))$. Por el Teorema 2.7.1 existen $h \in \mathcal{M}(E)$ y $x \in \operatorname{sop}(V)$ tales que $\psi(a) = h(a(x)) = h(a) = 0$. Por ser $CV(X,E)$ semisimple, se concluye que $a = 0$. Es decir, E es semisimple

Ahora supongamos que E es semisimple y sea $f \in \bigcap_{\psi \in \mathcal{M}(CV(X,E))} ker(\psi)$

Para $x \in X$ y $h \in \mathcal{M}(E)$ tenemos que $h(f(x)) = \psi_{(h,x)}(f) = 0$. De donde, $f(x) \in \bigcap_{h \in \mathcal{M}(E)} ker(h) = \{0\}$, para todo $x \in X$. Así, $f = 0$ y por tanto
$\bigcap_{\psi \in \mathcal{M}(CV(X,E))} ker(\psi) = \{0\}$. O sea, $CV(X,E)$ es semisimple. $\square$

Capítulo 3

El teorema de Glicksberg

El teorema que da nombre a este capítulo es central para lo que se verá en el siguiente capítulo.

Para dar su demostración se incluyen los resultados aquí presentados.

DEFINICIÓN 3.0.9. Se dice que dos subconjuntos A y B de un espacio topológico X están completamente separados si se satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

(a) Existe una función continua $\alpha : X \to \mathbb{R}$ tal que $\alpha(A) = \{0\}$ y $\alpha(B) = \{1\}$.

(b) Existe una función continua $\alpha : X \to [0,1]$ tal que $\alpha(A) = \{0\}$ y $\alpha(B) = \{1\}$.

(c) Dados $r < s$ existe una función continua $\alpha : X \to [r,s]$ tal que $\alpha(A) = \{r\}$ y $\alpha(B) = \{s\}$.

(d) Existen $r < s$ y una función continua y acotada $\alpha : X \to \mathbb{R}$, tales que $A \subset \{x \in X : \alpha(x) \leq r\}$ y $B \subset \{x \in X : \alpha(x) \geq s\}$.

En cualquier de estos casos, decimos que la función α separa a los conjuntos A y B en X.

Comprobamos que las condiciones de la definición anterior son equivalentes:

Es claro que (b) implica (a), (c) implica (b) y (c) implica (d).

Si α satisface (a), entonces la función $max\,(0, min(1,f))$ satisface (b).

Si α satisface (b), entonces la función $(s-r)\,\alpha + r$ satisface (c).

Supongamos que para los reales $r < s$ y la función α se satisface (d). Entonces la función

$$min\left(max\left(\frac{\alpha(x) - r}{s - r}, 0\right), 1\right)$$

satisface (b).

Así (a), (b), (c) y (d) son equivalentes.

TEOREMA 3.0.10. *[Extensión del teorema de Urysohn]*

Un subespacio S de un espacio topológico X está C_b- inmerso en X si y sólo si todo par de subconjuntos de S que están completamente separados en S, lo están en X.

Demostración. Sean $A, B \subset S$ conjuntos completamente separados en S, entonces existe una función continua $\alpha : S \longrightarrow [0,1]$, con $\alpha(A) = \{0\}$ y $\alpha(B) = \{1\}$. Como S está C_b-inmerso en X, podemos extender a α a una función continua y acotada $\alpha' : X \longrightarrow \mathbb{R}$, y ésta separa a los conjuntos A y B en X.

Para la prueba del recíproco, basta ver que toda función $\alpha : S \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada tiene una extensión $\alpha' : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada. Supongamos que $m = \underset{x\in X}{sup}\, |\alpha(x)|$. Hagamos $r_n = \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n$, para cada $n \geq 1$ y observemos que $3r_{n+1} = 2r_n$.

Tomemos $\alpha_1 = \alpha$, entonces $\alpha_1 \in C_b(S)$ y $|\alpha_1| \leq 3r_1$.

Supongamos que para algún $n \geq 1$ se tienen definidas en S las funciones reales, acotadas y continuas $\alpha_1, ..., \alpha_n$ de manera que $|\alpha_k| \leq 3r_k$ para todo $1 \leq k \leq n$.

Sean

$$\begin{aligned} A &= \{x \in S : \alpha_n(x) \leq -r_n\}, \\ B &= \{x \in S : \alpha_n(x) \geq r_n\}. \end{aligned}$$

Entonces, $A \bigcup B \neq \emptyset$, pero alguno de los dos subconjuntos puede ser vacío. Supongamos que ambos son distintos del vacío. De acuerdo a (d) de la Definición 3.0.9 estos conjuntos están completamente separados en S. De donde, por la hipótesis y el inciso (c) de esa misma definición, existe una función $\alpha'_n : X \to [-r_n, r_n]$ tal que $\alpha'_n(A) = -r_n$ y $\alpha'_1(B) = r_n$. En S definimos la función $\alpha_{n+1} = \alpha_n - \alpha'_n$.

Entonces,

$$|\alpha_{n+1}(x)| = \begin{cases} -\alpha_n(x) - r_n & \text{si } x \in A \\ \alpha_n(x) - r_n & \text{si } x \in B \\ \alpha_n(x) - \alpha'_n(x) & \text{si } x \in S \diagdown \left(A \bigcup B\right). \end{cases}$$

Los dos primeros renglones son menores que $2r_n$ y como

$$S \diagdown (A \cup B) = \{x \in S : |\alpha_n(x)| \leq r_n\},$$

el tercer renglón también es menor que $2r_n$. Así,

$$\alpha_{n+1} \in C_b(S) \text{ y } |\alpha_{n+1}| \leq 2r_n = 3r_{n+1}. \tag{3.0.3}$$

Si $A = \emptyset$ entonces escogemos $\alpha'_n \equiv r_n$ y si $B = \emptyset$, entonces escogemos $\alpha'_n \equiv -r_n$. En estos dos casos también se cumple (3.0.3).

Por tanto, podemos construir inductivamente una sucesión de funciones reales (α_k) en $C_b(S)$ y otra (α_k') de funciones reales en $C_b(X)$ tales que

$$|\alpha_k| \leq 3r_k, \;\; |\alpha_k'| \leq r_k$$

y

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \alpha_k'$$

para todo $k \geq 1$.

Por la primera de las desigualdades anteriores tenemos que $\alpha_k(x) \to 0$ para cada $x \in S$. y de la segunda se sigue por la M- prueba de Weierstrass que la serie $\sum\limits_{n\geq 1} \alpha_k'$ converge uniformemente en X; por tanto, su suma α' es una función continua en X; Además $|\alpha'(x)| \leq m$ en X, por lo que $\alpha' \in C_b(X)$.

Además, para todo $x \in S$ se cumple que

$$\begin{aligned} \alpha_1'(x) + \ldots + \alpha_n'(x) &= (\alpha_1(s) - \alpha_2(s)) + \ldots + (\alpha_n(s) - \alpha_{n+1}(s)) \\ &= \alpha_1(s) - \alpha_{n+1}(s). \end{aligned}$$

Por lo que entonces $\alpha' = \sum\limits_{n\geq 1} \alpha_k'$ restringida a S converge a $\alpha_1 = f$. Por tanto, S está C_b- inmerso en X. □

3.1. P-espacios y z-conjuntos

En un espacio topológico X, la intersección de un número finito de abiertos es un abierto. Estudiaremos las intersecciones de colecciones numerables de abiertos, los cuales son llamados los G_δ-conjuntos. Por ejemplo, cualquier punto r en $\mathbb{R}$ es un G_δ-conjunto ya que

$$r = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n} \right).$$

Definición 3.1.1. Un elemento x de un espacio topológico X es llamado un P-punto si siempre que $x \in G$, donde G es un G_δ-conjunto, existe una vecindad V_x de x tal que $V_x \subset G$.

Podemos preguntarnos qué pasa si en un espacio topológico X todos sus elementos son P-puntos. La primera consecuencia, es que todo G_δ-conjunto es un abierto; o sea en este tipo de espacios las intersecciones de familias numerables de abiertos son conjuntos abiertos.

Definición 3.1.2. Un espacio topológico X es llamado un P-espacio si todo $x \in X$ es un P-punto.

Por ejemplo, todo espacio discreto es un P-espacio. Y para cualquier función continua f de un P-espacio en $\mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}(\{r\})$ es un abierto para cualquier real r, por ser un G_δ-conjunto.

DEFINICIÓN 3.1.3. Un subconjunto Z de un espacio topológico X es llamado un z-conjunto (cero-conjunto), si satisface cualquiera de las siguientes dos condiciones equivalentes entre sí:

(a) Existe una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $Z = f^{-1}(\{0\})$.
(b) Existe una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $Z = f^{-1}(\{0\})$.
(c) Existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $Z = f^{-1}(\{0\})$.

Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua; con $Z(f)$ denotaremos al conjunto $f^{-1}(\{0\})$. O sea la colección de z-conjuntos está dada por $Z(f)$ al variar f.

A la colección de todos los z-conjuntos de X la denotamos por $Z(X)$.

Es claro que en la definición anterior que (b) implica (a) y (c) implica (b), sea una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces $Z(f) = Z(|f|)$ donde $|f| : X \longrightarrow \mathbb{R}$, por tanto (a) implica (b). Si f es una función que satisface (b), entonces la función $max(0, min(1, f))$ satisface (c). Así, (a), (b) y (c) son equivalentes.

Los siguientes son resultados que se siguen inmediatamente de la definición:

La intersección de dos z-conjuntos en X es un z-conjunto ya que

$$Z(f) \bigcap Z(g) = Z(f^2 + g^2).$$

Si X es un subespacio de un espacio topológico Y y $Z \in Z(Y)$, entonces $Z \bigcap X \in Z(X)$, ya que si $Z = f^{-1}(\{0\})$ para una función continua $f : Y \longrightarrow [0, 1]$, entonces $Z \bigcap X = Z(f|X)$.

Sea $f : X \to Y$ una función continua entre dos espacios topológicos. Si Z $\in$Z(Y), entonces $f^{-1}(Z) \in Z(X)$, ya que si $Z = Z(g)$, entonces $f^{-1}(Z) = Z(g \circ f)$.

Todo z-conjunto es un G_δ-conjunto, ya que $Z(f) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$; pero esta no es la única relación entre los G_δ-conjuntos y los z-conjuntos, como veremos a continuación.

TEOREMA 3.1.4. *Sea X un espacio topológico $T_{3\frac{1}{2}}$. Si G es un G_δ-conjunto de X y $x_0 \in G$, entonces existe un $z-$conjunto $Z(f)$ tal que $x_0 \in Z(f) \subset G$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, donde cada U_n es un abierto. Sabemos que para cada $n \geq 1$ el conjunto $X \diagdown \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ es un cerrado que no contiene a x_0, por lo que existe una función continua $f_n : X \longrightarrow \left[0, \frac{1}{2^n}\right]$, tal que $f_n(x_0) = 0$ y $f_n\left(X \diagdown \bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) = \frac{1}{2^n}$.

Por la M-prueba de Weierstrass la serie $\sum^{\infty} f_n$ converge uniformemente y por tanto, define una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Además, $f(x_0) = 0$ y $x \in Z(f)$, significa que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 0$, pero cada sumando es mayor o igual que cero, por tanto, $f_n(x) = 0$ para todo $n \geq 1$; es decir, $x \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right)$ para todo n; por tanto, $Z(f)$ es el conjunto buscado. □

3.2. z-filtros

Definición 3.2.1. Un z-filtro en un espacio topológico X es una colección no vacía $\mathcal{Z}$ de z-conjuntos de X que satisface las siguientes tres condiciones:

(a) $\emptyset \notin \mathcal{Z}$.
(b) $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z} \Rightarrow Z_1 \bigcap Z_2 \in \mathcal{Z}$.
(c) Si $Z \subset Z', Z \in \mathcal{Z}$ y $Z' \in Z(X)$, entonces $Z' \in \mathcal{Z}$.
Por (c) $X \in \mathcal{Z}$.

El z-filtro $\mathcal{Z}$ se dice que es primo si $Z_1, Z_2 \in Z(\mathrm{X})$ y $Z_1 \bigcup Z_2 \in \mathcal{Z} \Rightarrow Z_1 \in \mathcal{Z}$ o $Z_2 \in \mathcal{Z}$.

Si $\mathcal{Z}$ es un z-filtro en un espacio topológico Y y $X \subset Y$, entonces la familia

$$\left\{Z \bigcap X : Z \in \mathcal{Z}\right\}$$

es llamada la traza de $\mathcal{Z}$ en X.

En el caso de que no haya un z-filtro que contenga propiamente a $\mathcal{F}$, entonces éste es llamado un z-ultrafiltro.

Los z- conjuntos que son vecindades de un punto x en un espacio topológico X son llamados las *z-vecindades de x*. La colección de todas las z-vecindades de cualquier punto de un espacio topológico es un z-filtro en ese espacio.

Proposición 3.2.2. *Sea $\mathcal{U}$ un z-ultrafiltro en X, entonces*
(a) Si $Z \in Z(X)$ y $Z \notin \mathcal{U}$, entonces existe $Z' \in \mathcal{U}$ tal que $Z \bigcap Z' = \emptyset$.
(b) $\mathcal{U}$ es primo.

Demostración. (a) Si no existe tal Z', entonces $\mathcal{U} \bigcup \{\mathrm{Z}' \bigcap \mathrm{Z} : \mathrm{Z}' \in \mathcal{U}\}$ es un z-filtro que contiene propiamente a $\mathcal{Z}$, lo que contradice que $\mathcal{Z}$ es un z-ultrafiltro.

(b) Supongamos que $Z_1, Z_2 \in Z(X)$, $Z_1 \notin \mathcal{U}$ y $Z_2 \notin \mathcal{U}$. Por (a), existen $Z_1', Z_2' \in \mathcal{U}$ tales que $Z_i \bigcap Z_i' = \emptyset$ para $i = 1, 2$. Entonces

$$\left(\left(Z_1 \bigcup Z_2\right) \bigcap Z_1' \bigcap Z_2'\right) = \emptyset$$

y por consiguiente, $Z_1 \bigcup Z_2 \notin \mathcal{U}$. □

Proposición 3.2.3. *Si $\mathcal{F}$ es una subcolección de $Z(X)$ que tiene la propiedad de la intersección finita, entonces hay un z-ultrafiltro en X que la contiene.*

Demostración. Consideramos la familia $\mathcal{C}$ de todas las subcolecciones de $Z(X)$ que contienen a $\mathcal{F}$ y que tienen la propiedad de la intersección finita. Esta familia no es vacía pues $\mathcal{F}$ pertenece a ella y está inductivamente ordenada por la inclusión. Al aplicar el lema de Zorn, obtenemos un elemento maximal $\mathcal{Z}$ en $\mathcal{C}$. Es claro que contiene a $\mathcal{F}$. Afirmamos que es un z-filtro. Es obvio que cumple la condición (a) de la definición de z -filtro. Si $Z_1 \bigcap Z_2 \notin \mathcal{Z}$ para ciertos conjuntos $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$, entonces, $\mathcal{Z} \bigcup \{Z_1 \bigcap Z_2\} \in \mathcal{C}$, lo que contradice la maximalidad de $\mathcal{C}$, por tanto también cumple la condición (b) de la definición de z-filtro. Finalmente se cumple (c) de dicha definición porque si $Z \subset A$, $Z \in \mathcal{Z}$y $A \in Z(X)$no implicaran que $A \in \mathcal{Z}$, entonces la familia $\mathcal{Z} \bigcup \{A\} \in \mathcal{C}$ contradiciéndose de nuevo la maximalidad de $\mathcal{Z}$. Está así probada nuestra afirmación. Por otra parte, como todo filtro que contiene a $\mathcal{Z}$ pertenece a $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{Z}$ es un z-ultrafiltro. □

Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$' son ultrafiltros de X distintos entre sí, entonces existen $Z \in \mathcal{U}$ y $Z' \in \mathcal{U}'$ ajenos entre sí, ya que en caso contrario dado $Z \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}'$ la familia $\mathcal{U} \bigcap \{z\}$ tiene la propiedad de intersección finita y por tanto, está contenido en un z-ultrafiltro $\mathcal{U}''$ que contiene propiamente a $\mathcal{U}'$, lo que contradice que este ultimo es un z-ultrafiltro.

Lema 3.2.4. *Sea X un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$. Para cada $x \in X$ el z-filtro de todas las z-vecindades de x es una base local en x.*

Demostración. Sean $x \in X$ y U una vecindad de x. Existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(X \setminus U) = \{1\}$. Definimos

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \leq \frac{1}{2} \\ f(x) - \frac{1}{2} & \text{si } f(x) \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Es claro que g es continua y que $Z(g)$ es una z-vecindad de x y $Z(g) \subset U$. □

3.2.1. Convergencia y puntos de acumulación de z-filtros.

DEFINICIÓN 3.2.5. Un z-filtro $\mathcal{Z}$ en un espacio topológico X converge a un punto $x \in X$ si cada vecindad de x en X contiene un elemento de $\mathcal{Z}$. Por el lema anterior esto es equivalente a que $\mathcal{Z}$ contenga al z-filtro de todas las z- vecindades de x.

PROPOSICIÓN 3.2.6. *Sea $\mathcal{Z}$ un z-filtro en un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$, X, que converge a un punto $x \in X$, entonces*

$$\bigcap_{Z \in \mathcal{Z}} Z = \{x\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathcal{Z}$ contiene al z-filtro de todas las z- vecindades de x, entonces $\bigcap_{Z \in \mathcal{Z}} Z \subset \{x\}$. Por otra parte, supongamos que $Z \in \mathcal{Z}$ es tal que $x \notin Z$. Entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(Z) = \{1\}$. Definimos

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \leq \frac{1}{2} \\ f(x) - \frac{1}{2} & \text{si } f(x) \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

g es continua y que $Z(g)$ es una z-vecindad de x y $Z(g) \bigcap Z = \emptyset$. Esto es imposible, pues $Z(g), Z \in \mathcal{Z}$. Así, $x \in \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}} Z$. $\square$

DEFINICIÓN 3.2.7. Un punto x de un espacio topológico X es llamado un punto de acumulación de un z- filtro $\mathcal{Z}$ en X si cada vecindad de x interseca a todo elemento de $\mathcal{Z}$. Como cada uno de estos es cerrado en X, lo anterior equivale a que $x \in \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}.} Z$.

Se sigue de la definición que un z- filtro $\mathcal{Z}$ tiene un punto de acumulación si y sólo si $\bigcap_{Z \in \mathcal{Z}.} Z \neq \emptyset$.

PROPOSICIÓN 3.2.8. *Si $x \in X$ es un punto de acumulación de un z-filtro $\mathcal{Z}$ en X, entonces hay un z-ultrafiltro en X que contiene a $\mathcal{Z}$ y que converge a x.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{N}$ el z-filtro de todas las z- vecindades de x en X. La familia $\mathcal{N} \bigcup \mathcal{Z}$ está contenida en $Z(X)$ y tiene la propiedad de intersección finita; por tanto, está contenida en un z-ultrafiltro en X, que obviamente contiene a $\mathcal{Z}$ y converge a x. $\square$

PROPOSICIÓN 3.2.9. *Si K es compacto entonces todo z- filtro $\mathcal{Z}$ en K tiene un punto de acumulación en K.*

Demostración. El z- filtro $\mathcal{Z}$ está formado por cerrados en X y tiene la propiedad de intersección finita. Como X es compacto, entonces

$$\bigcap_{Z\in\mathcal{Z}.} Z \neq \emptyset.$$

□

Proposición 3.2.10. *Sea X un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$. Si un z- filtro $\mathcal{Z}$ en X es primo y $x \in X$ es un punto de acumulación de $\mathcal{Z}$, entonces $\mathcal{Z}$ converge a x.*

Demostración. Sean $Z \neq X$ una z-vecindad de x. Existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f(X \diagdown Int(Z)) = \{0\}$. Definimos

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \leq \frac{1}{2} \\ f(x) - \frac{1}{2} & \text{si } f(x) \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Es claro que g es continua y por consiguiente, $Z(g) \in Z(X)$; además, $X \diagdown Z(g)$ es una vecindad de x contenida en Z. Debido a que $X \diagdown Z(g)$ es una vecindad de x y éste es un punto de acumulación de $\mathcal{Z}$ se tiene que $Z(g) \notin \mathcal{Z}$ y como $X = Z(g) \bigcup Z$ y $\mathcal{Z}$ es primo, entonces $Z \in \mathcal{Z}$. De donde, $\mathcal{Z}$ converge a x. □

3.2.2. Convergencia de z-filtros en superespacios.

Definición 3.2.11. Sea X un subespacio de un espacio topológico Y. Un z-filtro $\mathcal{Z}$ en X se dice que converge a un punto $y \in Y$ si cada vecindad de y en Y contiene un elemento de $\mathcal{Z}$.

Esta definición se reduce a la Definición 3.2.5. cuando $Y = X$.

Si Y es de Hausdorff, entonces el límite de todo filtro es único, pues la intersección de cualesquiera dos miembros de un filtro no puede ser el vacío.

Si un z-filtro $\mathcal{Z}$ en X converge a $y \in Y$, entonces $y \in \overline{Z}$, donde la cerradura se toma en Y, para cada $Z \in \mathcal{Z}$. En efecto, dada una vecindad U de y en Y, existe $Z' \in \mathcal{Z}$ tal que $Z' \subset V$, y como $Z' \bigcap Z \subset V \bigcap Z$ y $Z' \bigcap Z \neq \emptyset$ se sigue la afirmación.

Proposición 3.2.12. *Sean $Z \in Z(X)$, X denso en Y. Si $y \in \overline{Z}$, donde la cerradura se toma en Y, entonces existe un ultrafiltro en X al que pertenece Z y que converge a y.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ la traza en X del z-filtro en Y de todas las z-vecindades de y en Y. La familia $\mathcal{V} \bigcup \{Z\}$ está contenida en $Z(X)$ y tiene la propiedad de intersección finita debido a que $y \in \overline{Z}$ y X es denso en Y. Por la Proposición 3.2.3 hay un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en X que contiene a $\mathcal{V} \bigcup \{Z\}$; de donde $Z \in \mathcal{U}$ y U converge a y. □

Proposición 3.2.13. *Sea X un subespacio denso de Y. Cada punto de Y es el límite de un z-ultrafiltro en X.*

Demostración. Sea $y \in Y$ y $\mathcal{N}$ el z-filtro de todas las z-vecindades de y en Y. Por la densidad de X en Y, la traza $\mathcal{N}_{\mathrm{X}}$ de $\mathcal{N}$ en X es una subfamilia de $Z(X)$ que tiene la propiedad de intersección finita y por tanto, está contenida en un z-ultrafiltro $\mathcal{Z}$ en X. Es obvio que $\mathcal{Z}$ converge a y. $\square$

3.3. Condiciones para que X esté C_b-inmerso en Y.

Sean $f : X \to X'$ una función continua entre dos espacios topológicos. Se define

$$f^{\#}(\mathcal{Z}) = \left\{ Z \in Z(Y) : f^{-1}(Z) \in \mathcal{Z} \right\}$$

para cada z-filtro $\mathcal{Z}$ en X. Es claro que $f^{\#}(\mathcal{Z})$ es un z-filtro en X'. Más aún, si $\mathcal{Z}$ es primo, entonces $f^{\#}(\mathcal{Z})$ también lo es , pues si $Z_1 \bigcup Z_2 \in f^{\#}(\mathcal{Z})$, entonces $f^{-1}(Z_1 \bigcup Z_2) \in \mathcal{Z}$ y por consiguiente $f^{-1}(Z_1) \in \mathcal{Z}$ o bien $f^{-1}(Z_2) \in \mathcal{Z}$; es decir, $Z_1 \in f^{\#}(\mathcal{Z})$ o $Z_2 \in f^{\#}(\mathcal{Z})$.

Teorema 3.3.1. *Sean Y un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ y X un subespacio denso en Y. Cada una de las siguientes afirmaciones implica la que le sigue:*

(a) Cualesquiera dos z-conjuntos en X ajenos entre sí tienen cerraduras en Y ajenas entre sí.

(b) Para cualesquiera dos z-conjuntos Z_1 y Z_2 en X se tiene la igualdad

$$\overline{Z_1 \bigcap Z_2} = \overline{Z_1} \bigcap \overline{Z_2},$$

donde las cerraduras se toman en Y

(c) Cada punto de Y es el límite de un único z-ultrafiltro en X.

(d) X está C_b-inmerso en Y.

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b) La contención $\overline{Z_1 \bigcap Z_2} \subset \overline{Z_1} \bigcap \overline{Z_2}$ siempre se da. Sean $x \in \overline{Z_1} \bigcap \overline{Z_2}$ y Z una z-vecindad de x en Y. Entonces $x \in \overline{Z_1 \bigcap Z}$, $x \in \overline{Z_2 \bigcap Z}$ y $Z_1 \bigcap Z$ y $Z_2 \bigcap Z$ son Z-conjuntos en X. Por (a), $Z_1 \bigcap Z_2 \bigcap Z \neq \emptyset$. y por tanto, $x \in \overline{Z_1 \bigcap Z_2}$.

(b)$\Rightarrow$(c) Sea $y \in Y$. Sabemos por la Proposición 3.2.13 que hay un z-ultrafiltro $\mathcal{U}$ en X que converge a y. Sea $\mathcal{U}'$ un ultrafiltro en X distinto de $\mathcal{U}$, entonces existen $Z \in \mathcal{U}$ y $Z' \in \mathcal{U}'$ajenos entre sí. Por (b) se tiene que $\overline{Z} \bigcap \overline{Z'} = \emptyset$. En vista de que $y \in \overline{Z}$, entonces $y \notin \overline{Z'}$ y por tanto, $\mathcal{U}'$ no puede converger a y.

(c)$\Rightarrow$(d) Sean $f \in C_b(X)$ y $y \in Y$. Por (c) existe un único z-ultrafiltro $\mathcal{U}_y$ en X que tiene por límite a y. Hagamos $K = \overline{f(X)}$. Así, $f^{\#}(\mathcal{U}_y)$ es un z-filtro en el espacio compacto K. Por la Proposición 3.2.2, $\mathcal{U}_y$ es primo y como se vio al definirse $f^{\#}$, entonces $f^{\#}(\mathcal{U}_y)$ también lo es. De las Proposiciones

3.2.9 y 3.2.10 se sigue que $f^{\#}(\mathcal{U}_y)$ tiene un punto de acumulación en K, que llamaremos $\overline{f}(y)$, al cual converge. Por la Proposición 3.2.6 se tiene que:

$$\bigcap_{Z\in f^{\#}(\mathcal{U}_{\mathrm{y}})} Z = \left\{\overline{f}(y)\right\}.$$

Tenemos entonces definida una función $\overline{f}: Y \to K$ que extiende a f, ya que si $y \in X$, entonces

$$\bigcap_{U\in\mathcal{U}_y} U = \{y\};$$

de donde, $y \in f^{-1}(Z)$ para todo $Z \in f^{\#}(\mathcal{U}_y)$; o sea, $f(y) \in \bigcap_{Z\in f^{\#}(\mathcal{U}_{\mathrm{y}})} Z$ y entonces $\overline{f}(y) = f(y)$.

Para probar la continuidad de $\overline{f}$ en Y primero veremos que es válida la siguiente afirmación:

$$A \in Z(K),\ Z = f^{-1}(A) \text{ y } y \in \overline{Z} \Rightarrow \overline{f}(y) \in A, \tag{3.3.1}$$

donde la cerradura se toma en Y,

En efecto si $y \in \overline{Z}$, entonces por la Proposición 3.2.12 existe un ultrafiltro en X al que pertenece Z y que converge a y. Por la propiedad de unicidad en (c) se tiene que $Z \in \mathcal{U}_y$ y por tanto, $A \in f^{\#}(\mathcal{U}_y)$ y entonces $\overline{f}(y) \in A$.

Sean $y \in Y$ y A una z-vecindad de $\overline{f}(y)$ en K. Probaremos que hay una vecindad U de y tal que $f(U) \subset A$. Basta analizar el caso $A \neq K$. Por ser K compacto existe una función continua $h: K \to [0,1]$ tal que $h\left(\overline{f}(y)\right) = 1$ y $h(K \diagdown Int(A)) = \{0\}$. Definimos $g: kK \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$g(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } h(w) \leq \frac{1}{2} \\ h(w) - \frac{1}{2} & \text{si } h(w) \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Es claro que g es continua y por consiguiente, $A' = Z(g)$ pertenece a $\in Z(K)$. Además, $X \diagdown A'$ es una vecindad de $\overline{f}(y)$ contenida en A. Como $K \setminus A \subset A'$, entonces $K = A \bigcup A'$ y se sigue que si $Z = f^{-1}(A)$ y $Z' = f^{-1}(A')$, entonces $X = Z \bigcup Z'$ y $Y = \overline{X} = \overline{Z} \bigcup \overline{Z'}$, donde la cerradura se toma en Y. De que $\overline{f}(y) \notin A'$ de la implicación (3.3.1) obtenemos que $y \notin \overline{Z'}$; por lo que $U = Y \diagdown \overline{Z'}$ es una vecindad de y y si $y' \in Y \diagdown \overline{Z'}$, entonces $y' \in \overline{Z}$ y nuevamente por (3.3.1) concluimos que $\overline{f}(y') \in A$. O sea, $f(U) \subset A$. Con esto queda probada la continuidad de $\overline{f}$ y la implicación (c)$\Rightarrow$(d). $\square$

3.4. Espacios pseudocompactos

DEFINICIÓN 3.4.1. Un espacio topológico X es pseudocompacto si toda función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, es acotada.

Claramente todo conjunto compacto es pseudocompacto.

TEOREMA 3.4.2. *Sea X un espacio topológico $T_{3\frac{1}{2}}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) X es pseudocompacto.

(b) En X no hay una familia infinita de abiertos que sea localmente finita.

DEMOSTRACIÓN. (a)$\Rightarrow$(b) Demostraremos la contrapuesta. Supongamos que existe en X una familia infinita de abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ que es localmente finita. Toda subfamilia de ésta, sigue siendo localmente finita. Sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una subfamilia numerable de $\{U_i\}_{i\in I}$. Tomemos $x_n \in V_n$. Existe una función continua $f_n : X \longrightarrow [0, n]$ tal que $f_n(x_n) = n$ y $f_n(X \diagdown V_n) = 0$.

La función $f(x) = \sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ está definida en X y es continua, ya que cada $x \in X$ tiene una vecindad que sólo interseca a un número finito de abiertos V_n; luego entonces, en esta vecindad la serie se reduce a la suma de un número finito de funciones f_n, o sea, f está definida en esa vecindad y coincide con la suma de un número finito de funciones continuas, por lo que f es continua. Por otra parte, f no es acotada, puesto que $f(x_n) \geq f_n(x_n) = n$ para cada $n \geq 1$. Entonces, X no es pseudocompacto.

(b)$\Rightarrow$(a) Nuevamente se probará la contrapuesta. Supongamos que X no es pseudocompacto, entonces existe una función $f : X \to [0, \infty)$ continua y no acotada lo que implica que existe una sucesión (x_n) en X tal que $f(x_{n+1}) > f(x_n)+1$ y $f(x_1) > 1$. Entonces la distancia de $f(x_m)$ a $f(x_n)$ es mayor que 1 si $m \neq n$.

Tomemos la familia de bolas abiertas $\left\{B_{\frac{1}{4}}(f(x_n))\right\}$. Claramente este es una familia infinita de abiertos en $\mathbb{R}$ localmente finita.

Afirmamos que $\left\{f^{-1}\left(B_{\frac{1}{4}}(f(x_n))\right)\right\}$ es una familia infinita de abiertos en X que es localmente finita, con lo que estará probado lo que queremos.

Es infinita ya que

$$f^{-1}\left(B_{\frac{1}{4}}(f(x_n))\right) \bigcap f^{-1}\left(B_{\frac{1}{4}}(f(x_m))\right) = \emptyset$$

si $n \neq m$, puesto que $|f(x_n) - f(x_m)| > 1$.

Para ver que es localmente finita, observamos que por la misma razón recién dada, para cualquier $x \in X$ la bola $B_{\frac{1}{8}}\left(f(x)\right)$ interseca a lo más a un elemento de la familia $\left\{B_{\frac{1}{4}}\left(f\left(x_n\right)\right)\right\}$. Entonces, la vecindad $f^{-1}\left(B_{\frac{1}{8}}\left(f(x)\right)\right)$ de x interseca a lo más a una elemento de la familia $\left\{f^{-1}\left(B_{\frac{1}{4}}\left(x_n\right)\right)\right\}$. $\square$

El resultado anterior es parte fundamental de la demostración del siguiente.

Teorema 3.4.3. *Si un espacio topológico $T_{3\frac{1}{2}}$ es también un P-espacio pseudocompacto, entonces es finito.*

Demostración. Sea X tal espacio y supongamos que es infinito. Sean C y C' dos subconjuntos de X no vacíos

Tomemos dos puntos $y_1 \neq x_1$ en X. Existe $f_1 : X \longrightarrow [0,1]$ continua, con $f_1\left(x_1\right) = 0$ y $f_1\left(y_1\right) = 1$. Como es P-espacio, tenemos que $f_1^{-1}\left(\{0\}\right)$ es abierto y es también cerrado por serlo $\{0\}$. Así, $f_1^{-1}\left((0,1]\right)$ es abierto y cerrado, por ser el complemento de un cerrado y abierto. Los conjuntos $f_1^{-1}\left(\{0\}\right)$ y $f_1^{-1}\left((0,1]\right)$ son distintos del vacío, ajenos entre sí, cerrados y abiertos en X; además, al menos uno es infinito, pues por hipótesis, X es infinito. A cualquiera de los dos que lo sea lo llamamos B_1' y al otro B_1.

Supongamos que para un natural $n \geq 2$ tenemos subconjuntos

$$B_1, B_1^{'}, ..., B_n, B_n^{'}$$

de X distintos del vacío, cerrados y abiertos en X, donde cada $B_i^{'}$ es infinito, y que satisfacen: $B_i \bigcap B_i' = \emptyset$ para $1 \leq i \leq n$ y $B_1^{'} \supset ... \supset B_n^{'}$. y $B_{i-1}^{'} \supset B_i$ si $2 \leq i \leq n$

En B_n' podemos repetir lo hecho con X; es decir, tomamos dos puntos $x_n \neq y_n$, en B_n', y una función continua $f_{n+1} : X \longrightarrow [0,1]$ con $f_{n+1}\left(x_n\right) = 0$ y $f_{n+1}\left(y_n\right) = 1$. Los conjuntos $B_n' \cap f_{n+1}^{-1}\left(\{0\}\right)$, $B_n' \cap f_{n+1}^{-1}\left((0,1]\right)$ son no vacíos y uno de ellos es infinito; a cualquiera de los dos que lo sea lo llamamos $B_{n+1}^{'}$ y al otro B_{n+1}. Entonces, los conjuntos $B_{n+1}, B_{n+1}^{'}$ son ajenos entre sí, distintos del vacío, cerrados y abiertos en X; además $B_{n+1}^{'}$ es infinito, $B_n^{'} \supset B_{n+1}^{'}$ y $B_n^{'} \supseteq B_{n+1}$.

Así tenemos un sucesión $B_1, B_1^{'}, ..., B_n, B_n^{'}, ...$ de subconjuntos de X con las propiedades antes descritas. Se sigue entonces que $B_i \bigcap B_j = \emptyset$ si $i < j$ y $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ es un cerrado de X, ya que su complemento es una intersección numerable de abiertos; es decir, un G_δ-conjunto y por tanto, abierto por ser X un P-espacio.

Probaremos que la familia numerable de abiertos $\{B_n\}_{n\geq 1}$ es localmente finita, lo que contradirá el teorema anterior. Sea $x \in X$, si x no está en el cerrado $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, entonces tiene una vecindad que no interseca a ningún B_n. Supongamos que x está en dicho cerrado, lo que implica que $z \in B_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Como B_n es abierto, existe una vecindad V de x contenida en B_n y esta vecindad sólo interseca a B_n, ya que B_n es ajena al resto de las B_m. □

Veremos una nueva caracterización de los conjuntos pseudocompactos, la cual tiene una relación muy estrecha con la noción de C_b- inmerso. Para esto necesitamos dos resultados previos.

TEOREMA 3.4.4. *Las siguientes propiedades son equivalentes para cualquier espacio X que*

sea $T_{3\frac{1}{2}}$:

(a) X es pseudocompacto.

(b) Si $f \in C_b(X)$ es real, entonces f toma su valor máximo y su valor mínimo.

(c) Toda sucesión (U_n) de abiertos en X, no vacíos, tiene un punto de aglomeración en X; es decir un punto tal que cualquiera de sus vecindades interseca a U_n para una infinidad de índices n.

DEMOSTRACIÓN.

(a)⇔(c) Que X no tenga una familia infinita de abiertos que sea localmente finita equivale a que toda sucesión de abiertos con rango infinito tiene un punto de aglomeración. De esto y el Teorema 3.4.2 se sigue que (a) es equivalente a (c).

(a)⇒(b) Tomemos $f \in C_b(X)$ real. Supongamos que f no tiene máximo. Podemos suponer que el supremo de f es cero, en caso contrario hacemos una traslación. Entonces

$$g = \frac{1}{f}$$

□

es una función continua que claramente es no acotada, lo que contradice nuestra hipótesis. Así, f debe tomar su valor máximo. De manera análoga se prueba que alcanza su valor mínimo.

DEMOSTRACIÓN. (b)⇒(a) Sea $f \in C(X)$. Definimos

$$g(x) = \frac{1}{\max\{| f(x) |, 1\}}.$$

La función g es continua y está acotada por 1. Por (b), g toma su valor mínimo m. Entonces $m > 0$ y

$$m \leq \frac{1}{\max\{| f(x) |, 1\}},$$

para todo $x \in X$. De donde,

$$| f(x) | \leq \frac{1}{m},$$

es decir, f está acotada. Así, X es pseudocompacto. □

3.5. Las funciones z-cerradas y la C_b-inmersión

Definición 3.5.1. Sea f una función de un espacio topológico X en otro Y. Diremos que f es una función z-cerrada, si todo
z-conjunto es enviado en un conjunto cerrado.

Teorema 3.5.2. *Sean X y Y dos espacios $T_{3\frac{1}{2}}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) La proyección $\prod : X \times Y \to X$ sobre X es una función z-cerrada.
(b) Sea A un z-conjunto en $X \times Y$, entonces

$$\overline{A} = \bigcup \left\{ \overline{(A \cap (\{x\} \times Y))} : x \in X \right\}$$

donde la cerradura se toma en $X \times \beta(Y)$.
(c) $X \times Y$ está C_b- inmerso en $X \times \beta(Y)$.
(d) Si $f \in C_b(X \times Y)$ es real, entonces la función

$$F(x) = inf\{f(x, y) : y \in Y\}$$

es continua (se puede sustituir inf por sup).
El teorema es válido si en las condiciones intercambios los papeles de los espacios X y Y.
Demostración.
(a)⇒(b) La demostración hará por reducción al absurdo. Supongamos que

$$\prod : X \times Y \longrightarrow X$$

es una función z-cerrada y que A es un z-conjunto en $X \times Y$ para el que es falso que

$$\overline{A} = \bigcup \left\{ \overline{(A \cap (\{x\} \times Y))} : x \in X \right\}.$$

Como siempre se tiene que

$$\overline{A} \supseteq \bigcup \left\{ \overline{(A \cap (\{x\} \times Y))} : x \in X \right\},$$

entonces,

$$\overline{A} \nsubseteq \bigcup \left\{ \overline{(A \cap (\{x\} \times Y))} : x \in X \right\},$$

Existe una pareja $(x_0, p_0) \in \overline{A} \diagdown \bigcup \left\{ \overline{(A \cap (\{x\} \times Y))} : x \in X \right\}$; en particular:

a) $(x_0, p_0) \in \overline{A}$.

b) $(x_0, p_0) \notin \overline{A_0}$, donde $A_0 = A \cap (\{x_0\} \times Y)$ y

c) $(x_0, p_0) \in X \times \beta(Y)$.

Como $X \times \beta(Y)$ es completamente regular, existe una función continua

$$f : X \times \beta(Y) \longrightarrow \left[0, \frac{3}{2}\right]$$

tal que $f\left(\overline{A_0}\right) = \frac{3}{2}$ y $f((x_0, p_0)) = 0$.

Definamos $g : X \times \beta(Y) \longrightarrow [0, 1]$ como

$$g((x, p)) = \begin{cases} 0 & \text{si } f((x, p)) \leq \frac{1}{2} \\ f(x) - \frac{1}{2} & \text{si } f((x, p)) \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Claramente g es continua y envía a una vecindad W_0 del punto (x_0, p_0) al 0 y $\overline{A_0}$ al 1.

Definamos $A_1 = Z(g|X \times Y) \cap A$. Entonces A_1 es un z-conjunto en $X \times Y$.

Sea W una vecindad de (x_0, p_0). Entonces existe $(x, y) \in X \times Y$ tal que $(x, y) \in A \bigcap W_0 \bigcap W$; entonces, $(x, y) \in Z(g|X \times Y)$ y por consiguiente, $(x, y) \in W \bigcap A_1$. O sea, $(x_0, p_0) \in \overline{A_1}$.

Tenemos que $x_0 \notin \prod(A_1)$ pues en caso contrario: $(x_0, y) \in A_1$ para algún $y \in Y$ y entonces $(x_0, y) \in A_0$ y $g(x_0, y_0) = 0$ lo que contradice que $g\left(\overline{A_0}\right) = 1$, por otro lado, dado que

$$\prod : X \times \beta(Y) \longrightarrow X$$

es continua y su restricción a $X \times Y$ es la respectiva proyección sobre X, que por hipótesis es z-cerrada, tenemos que

$$x_0 \in \prod\left(\overline{A_1}\right) \subset \overline{\prod(A_1)} = \prod(A_1),$$

lo que contradice lo recién probado para x_0.

(b)$\Rightarrow$ (c) Como $X \times \beta(Y)$ es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ y $X \times Y$ es denso en $X \times \beta(Y)$, entonces por el Teorema 3.3.1 basta probar que si dos z-conjuntos Z y Z' de $X \times Y$ son ajenos entre sí, entonces también los son sus cerraduras en $X \times \beta(Y)$.

Debido a que esos conjuntos son ajenos entre sí se tiene que

$$\left\{\overline{Z \cap (\{x\} \times Y)}\right\} \cap \left\{\overline{Z' \cap (\{x'\} \times Y)}\right\} = \emptyset$$

siempre que $x, x' \in X$. Por (b):

$$\begin{aligned}
\overline{Z} \cap \overline{Z'} &= \left(\bigcup_{x \in X} \overline{Z \cap (\{x\} \times Y)}\right) \cap \left(\bigcup_{x \in X} \overline{Z' \cap (\{x\} \times Y)}\right) \\
&= \bigcup_{x, x' \in X} \left(\left\{\overline{Z \cap (\{x\} \times Y)}\right\} \cap \left\{\overline{Z' \cap (\{x'\} \times Y)}\right\}\right) \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

(c)$\Rightarrow$ (d) Sea $f \in C_b(X \times Y)$ real y para $x \in X$ definamos

$$F(x) = \inf\{f(x, y) : y \in Y\}.$$

Esta función está bien definida pues la función real f está acotada. Por (c) existe una extensión f', continua y acotada, de f a $X \times \beta(Y)$.

Fijemos $x_0 \in X$. Se probará que f es continua en x_0. Por la continuidad de f', dado $\varepsilon > 0$ y $y \in \beta(Y)$ existe una vecindad abierta $U_y \times V_y$ en $X \times \beta(Y)$ de (x_0, y) tal que

$$|f(x, y') - f(x_0, y)| < \frac{\epsilon}{2}$$

para $(x, y') \in U_{x_0} \times V_y$. Como $\beta(Y)$ es un conjunto compacto, entonces existe un natural n y elementos $y_1, ..., y_n$ en Y tales que $\{V_{y_i} : 1 \leq i \leq n\}$ cubren a $\beta(Y)$. Hagamos $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$, entonces U es una vecindad abierta de x_0 y

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \epsilon$$

para todo $y \in \beta(Y)$ y $x \in U$.

Sea $x \in U$, existen $y, y_0 \in Y$ tales que

$$f(x, y) - \varepsilon < F(x) \text{ y } f(x_0, y_0) - \varepsilon < F(x_0).$$

Entonces

$$F(x) - F(x_0) < f(x, y_0) - f(x_0, y_0) + \varepsilon < 2\varepsilon$$

$$-2\varepsilon < f(x, y) - \varepsilon - f(x_0, y) < F(x) - F(x_0),$$

por lo que se tiene la continuidad de F.

(d)$\Rightarrow$(a) La demostración será por reducción al absurdo. Supongamos que $\prod$ no es z-cerrada; es decir, existe una función continua $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ tal que $\prod(Z(f))$ no es un conjunto cerrado en X. O sea, hay un elemento

$x_0 \in \overline{\prod (Z(f))}$ que no pertenece a $\prod (Z(f))$. Existe una red (x_i, y_i) en $(Z(f))$ tal que (x_i) converge a x_0. Como, $f((x_i, y_i)) = 0$, entonces $F(x_i) = 0$ para todo i. De la continuidad de F, se sigue que $F(x_0) = 0$.

Tenemos que $f(x_0, y) > 0$ para cada $y \in Y$, pues $x_0 \notin \prod (Z(f))$.En $X \times Y$ definimos la función continua y acotada

$$g(x, y) = \min \left\{ \frac{f(x, y)}{f(x_0, y)}, 1 \right\}.$$

Por (d) la función

$$G(x) = \inf \{ g(x, y) : y \in Y \}$$

es continua. Tenemos que: $G(x_i) = 0$ ya que $g(x_i, y_i) = 0$ y $G(x_0) = 1$, lo que es absurdo, pues $(x_i) \to x_0$. Por tanto, $\prod$ es una función z-cerrada. $\square$

Ahora trabajaremos para saber cuándo el producto de pseudocompactos es pseudocompacto.

TEOREMA 3.5.3. *Sean X y Y dos espacios $T_{3\frac{1}{2}}$. Entonces $X \times Y$ es pseudocompacto si y sólo si X y Y son pseudocompactos y la proyección $\prod : X \times Y \longrightarrow X$ sobre X (sobre Y) es* z-cerrada.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el producto es pseudocompacto y sea

$$f : X \to \mathbb{R}$$

una función continua. Entonces la función $f \circ \prod (x, y) = f(x)$, es continua y por tanto acotada en $X \times Y$; así, f es acotada y se ha probado que X es pseudocompacto. De modo análogo se prueba que Y es pseudocompacto.

Por otra parte, supongamos que que $\prod : X \times Y \longrightarrow X$ no es z-cerrada; entonces existe $x_0 \in \overline{\prod (Z)} \diagdown \prod (Z)$ para algún z-conjunto $Z = Z(f)$ en $X \times Y$, con f real. Entonces, $f(x_0, y) \neq 0$ para cada $y \in Y$. Definamos en $X \times Y$ la función

$$f'(x, y) = \min \left\{ \frac{f(x, y)}{f(x_{0,} y)}, 1 \right\}.$$

Esta función es continua y además f' determina el mismo $z-$conjunto que f. Observemos que $f'(x_0, y) = 1$ para cada $y \in Y$.

Para $(x_1, y_1) \in Z$, existen vecindades U_1 de x_1, V_1 de y_1 y W_1 de x_0 tales que

$$\begin{aligned} f'(U_1 \times V_1) &\subset \left[0, \frac{1}{3}\right), \\ f'(W_1 \times V_1) &\subset \left(\frac{2}{3}, 1\right]. \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que para algún $n \geq 1$ y cada $1 \leq k \leq n$ existen $(x_k, y_k) \in Z$ y vecindades abiertas U_k de x_k, V_k de y_k y W_k de x_0 tales que

$$\begin{aligned} f'(U_k \times V_k) &\subset \left[0, \frac{1}{3}\right), \\ f'(W_k \times V_k) &\subset \left(\frac{2}{3}, 1\right], \\ W_k \cup U_k &\subset W_{k-1}, \\ V_k &\subset V_{k-1}, \end{aligned}$$

donde $W_0 = X$ y $V_0 = Y$. Entonces, $W_n \cap \prod(Z) \neq \emptyset$ pues $x_0 \in \overline{\prod(Z)}$. Sea $x_{n+1} \in W_n \cap \prod(Z)$. Entonces $(x_{n+1}, y_{n+1}) \in Z$ para algún $y_{n+1} \in Y$. De donde, existe una vecindad abierta $U_{n+1} \times V$ de (x_{n+1}, y_{n+1}), con $U_{n+1} \subset W_n$ y $V \subset V_n$, tal que

$$f'(U_{n+1} \times V) \subset \left[0, \frac{1}{3}\right).$$

Como f' restringida a $\{x_0 \times Y\}$ es idénticamente uno, entonces debe existir una vecindad abierta $W_{n+1} \times V'$ de (x_0, y_{n+1}), con $W_{n+1} \subset W_n$ tal que

$$f'(W_{n+1} \times V') \subset \left(\frac{2}{3}, 1\right].$$

Si hacemos $V_{n+1} = V \cap V'$, entonces

$$\begin{aligned} f'(U_{n+1} \times V_{n+1}) &\subset \left[0, \frac{1}{3}\right), \\ f'(W_{n+1} \times V_{n+1}) &\subset \left(\frac{2}{3}, 1\right], \\ W_{n+1} \cup U_{n+1} &\subset W_n, \\ V_{n+1} &\subset V_n. \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.4.4 la colección de abiertos $\{U_n \times V_n : n \geq 1\}$ tiene un punto de aglomeración (x, y) en $X \times Y$. De esto y la continuidad de f' se sigue que $f'(x, y) \leq \frac{1}{3}$. Además, (x, y) también es punto de aglomeración de $\{W_n \times V_n : n \geq 1\}$, ya que $U_{n+1} \subset W_n$ y $V_{n+1} \subset V_n$, por lo que $f'(x, y) \geq \frac{2}{3}$, lo que contradice lo antes visto para $f'(x, y)$. Así, $\prod$ es z-cerrado.

Recíprocamente, dada $f \in C(X \times Y)$ real consideremos la función $g \in C_b(X \times Y)$ definida como $g(x, y) = \frac{|f(x,y)|^2}{|f(x,y)|^2 + 1}$. Esta es una función mayor o igual que cero y menor estrictamente que 1. Por la hipótesis y el teorema anterior sabemos que la función

$$F(x) = \sup \{g(x,y) : y \in Y\}$$

es continua, y también es acotada, ya que $0 \leq F(x) \leq 1$.

Por ser X pseudocompacto y por el Teorema 3.4.4, existe $x_0 \in X$ tal que $F(x_0) \geq F(x)$ para todo $x \in X$.

Si f no es acotada, entonces $\underset{(x,y)\in X\times Y}{sup} g(x,y) = 1$ y así, $F(x_0) = 1$.

La función $h(y) = \frac{|f(x_0,y)|^2}{|f(x_0,y)|^2+1}$ para $y \in Y$ es continua y acotada. Como Y es pseudocompacto, entonces por el Teorema 3.4.4 la función h toma su valor máximo en algún $y_0 \in Y$, por lo que

$$1 = F(x_0) = h(y_0) = \frac{|f(x_0,y_0)|^2}{|f(x_0,y_0)|^2 + 1} < 1.$$

Esta reducción al absurdo, muestra que f está acotada y por tanto, $X \times Y$ es pseudocompacto. □

Teorema 3.5.4. *Sean X y Y dos espacios $T_{3\frac{1}{2}}$. Si la proyección*

$$\prod : X \times Y \longrightarrow X$$

sobre X es z-cerrada, *entonces X es un* P-espacio *o Y es pseudocompacto.*

El teorema también es válido cuando se intercambian los papeles de los espacios X y Y.

Demostración. Supongamos que X no es P-espacio. Por el Teorema 3.1.4 existen una función $h \in C_b(X)$ y un punto $x_0 \in Z(h)$ tal que ninguna vecindad de x_0 está contenida en $Z(h)$. Supongamos que Y tampoco es pseudocompacto, entonces existe una función continua y acotada $h_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ que no alcanza su valor máximo y mínimo. Así la función continua $g : Y \longrightarrow [0,1]$ definida como $g(y) = \frac{h_1(y)-m}{M-m}$ con $M = \sup_{y\in Y} h_1(y)$ y $m = \inf_{y\in Y} h_1(y)$ es tal que $inf\{g(y) : y \in Y\} = 0$ y g no toma el valor cero.

En $X \times Y$ definamos la función

$$f(x,y) = g(y)^{|h(x)|}.$$

Por el Teorema 3.5.2, $F(x) = \inf\{f(x,y) : y \in Y\}$ es una función continua y $f(x_0,y) = g(y)^0 = 1$ para todo $y \in Y$, o sea, $F(x_0) = 1$, pero para cualquier vecindad de x_0 hay un punto x en ella en el que la función h toma un valor distinto de cero, por lo que para algún $y \in Y$ se cumple que

$f(x,y) \leq \frac{1}{2}$ y entonces $F(x) \leq \frac{1}{2}$, lo que contradice la continuidad de F. Por tanto, Y es pseudocompacto. $\square$

Con esto ya tenemos todo lo necesario para probar el *teorema de Glicksberg*, que fue el objetivo principal de este capítulo.

TEOREMA 3.5.5 (Glicksberg). *Si X, Y son dos espacios $T_{3\frac{1}{2}}$ infinitos, entonces $X \times Y$ es pseudocompacto si y sólo si $X \times Y$ está C_b inmerso en $\beta(X) \times \beta(Y)$, o lo que es lo mismo $\beta(X \times Y) = \beta(X) \times \beta(Y)$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $X \times Y$ es pseudocompacto. Por el Teorema 3.5.3 las proyecciones $\prod_X : X \times Y \to X$ y $\prod_{\beta(Y)} : X \times \beta(Y) \to \beta(Y)$ son z-cerradas. En tanto que por el teorema 3.5.2, $X \times Y$ está C_b -inmerso en $X \times \beta(Y)$ y $X \times \beta(Y)$ está C_b-inmerso en $\beta(X) \times \beta(Y)$. Por tanto, $X \times Y$ está C_b -inmerso en $\beta(X) \times \beta(Y)$.

Inversamente, supongamos que $\beta(X \times Y) = \beta(X) \times \beta(Y)$. El espacio $\beta(X) \times \beta(Y)$ es una compactación de $\beta(X) \times Y$, pues la asociación

$$(z, y) \to (z, e_Y(y))$$

define una inmersión de $\beta(X) \times Y$ en $\beta(X) \times \beta(Y)$ con imagen densa.

Afirmamos que $\beta(\beta(X) \times Y) = \beta(X) \times \beta(Y)$; o lo que es lo mismo, según el Teorema 2.2.12, $\beta(X) \times Y$ está C_b-inmerso en $\beta(X) \times \beta(Y)$.

Sea $f \in C_b(\beta(X) \times Y)$, entonces la restricción $f_{X \times Y}$ de f a $X \times Y$ pertenece a $C_b(X \times Y)$ lo que implica que existe $g \in C_b(\beta(X \times Y))$ que extiende a $f_{X \times Y}$. Por la hipótesis, podemos considerar que $C_b(\beta(X) \times \beta(Y)) = C_b(\beta(X \times Y))$ y que $g \in C_b(\beta(X) \times \beta(Y))$.

La función g coincide con f en $\beta(X) \times Y$, ya que si $(z, y) \in \beta(X) \times Y$, entonces existe una red $((x_i, y))$ en $X \times Y$ que converge a (z, y) y como $g(x, y) = f(x, y)$ para todo $(x.y) \in X \times Y$, se tiene que los límites de las redes $(g(x_i, y))$ y $(f(x_i, y))$ son iguales; o sea, $g(z, y) = f(z, y)$. Queda probada la afirmación.

Por el Teorema 3.5.2 la proyección $\prod_{\beta(X)} : \beta(X) \times Y \longrightarrow X$ es z-cerrada y del anterior se sigue que $\beta(X)$ es un P-espacio o bien Y es pseudocompacto. No puede suceder que $\beta(X)$ sea P-espacio, pues al ser compacto entonces sería finito (Teorema 3.4.3) y se contradiría que X es infinito. Por consiguiente, Y es pseudocompacto. Análogamente. se prueba que X es pseudocompacto y por tanto, $X \times Y$ es pseudocompacto. $\square$

Capítulo 4

Ejemplo en que $\mathcal{M}\left(CV\left(X,E\right)\right) \neq X \times \mathcal{M}\left(E\right)$

4.1. Introducción

Daremos un ejemplo de un espacio $CV\left(X,E\right)$ para el cual no es cierto que si $H : CV\left(X,E\right) \longrightarrow \mathbb{C}$ es un carácter continuo, entonces existen $x_0 \in \mathrm{sop}V$ y un carácter de álgebras continuo $h \in \mathcal{M}\left(E\right)$ tales que

$$H\left(f\right) = H_{\left(x_0,h\right)}\left(f\right) = h\left(f\left(x_0\right)\right)$$

para toda $f \in CV\left(X,E\right)$. O sea,

$$\mathcal{M}\left(CV\left(X,E\right)\right) \neq X \times \mathcal{M}\left(E\right).$$

Obviamente, en vista del Teorema 2.7.1, la familia V no es de tipo puntual.

Más aún, en ese ejemplo a cada $\left(y,h\right) \in \beta\left(X\right) \times \mathcal{M}\left(E\right)$ le asociamos un elemento $H_{\left(y,h\right)}$ de $\mathcal{M}\left(CV\left(X,E\right)\right)$ que cuando y pertenece a X, está definido como $H_{\left(y,h\right)}\left(f\right) = h\left(f\left(y\right)\right)$ para toda $f \in CV\left(X,E\right)$, y hacemos ver que existe $H \in \mathcal{M}\left(CV\left(X,E\right)\right)$ tal que para cada tal que $H \neq H_{\left(y,h\right)}$; para todo $\left(y,h\right) \in \beta\left(X\right) \times \mathcal{M}\left(E\right)$, es decir,

$$\beta\left(X\right) \times \mathcal{M}\left(E\right) \subsetneqq \mathcal{M}\left(CV\left(X,E\right)\right).$$

4.2. El álgebra $C_b\left(X,E\right)$ vista como un álgebra $CV\left(X,E\right)$

Sea X un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ y E un álgebra de Banach conmutativa y con unidad.

Tomamos $V = \{\lambda\chi_X : \lambda > 0\}$, la cual es una familia multiplicativa de Nachbin. De hecho, es un caso particular del ejemplo 1 de la página 73, cuando escogemos $\mathcal{A} = \{X\}$. Es claro que cualquier función $\lambda\chi_X$ perteneciente a V no se anula al infinito, pues es constante en X y $\lambda > 0$. Así, V no es de tipo puntual (Corolario 2.5.8).

En este caso $CV\left(X,E\right) = C_b\left(X,E\right)$, ya que si $f \in C\left(X,E\right)$, entonces

$$\sup_{x\in X}\|\lambda\chi_X f\left(x\right)\| = \lambda\sup_{x\in X}\|f\left(x\right)\| < \infty$$

para todo $\lambda > 0$ si y sólo si $\sup_{x\in X}\|f\left(x\right)\| < \infty$.

La topología determinada en $CV(X,E)$ por V y la norma de E es la dada por la familia de normas $\|f\|_\lambda = \lambda \sup\limits_{x\in X} \|f(x)\|$ que es equivalente a la topología uniforme de $C_b(X,E)$ que está dada por la norma $\|f\| = \sup\limits_{x\in X} \|f(x)\|$ y que es la usual en dicho espacio.

Así, $(C_b(X,E), \|\cdot\|)$ es un álgebra de funciones continuas con pesos. En particular, para cuando $E = \mathbb{C}$, tenemos que $CV(X) = (C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$, donde $\|\alpha\|_\infty = \underset{x\in X}{sup} |\alpha(x)|$ para todo $\alpha \in C_b(X)$.

Es fácil ver que al igual que $C_b(X)$, el álgebra $(C_b(X,E), \|\cdot\|)$ es de Banach. Como E tiene idéntico, también lo tiene $(C_b(X,E), \|\cdot\|)$ y entonces, por el Teorema 45 tenemos que

$$\mathcal{M}((C_b(X,E), \|\cdot\|)) = \mathcal{M}^{\#}((C_b(X,E), \|\cdot\|)).$$

Como vimos en la Sección 2.6, cada pareja $(x,h) \in X \times \mathcal{M}(E)$ determina un carácter continuo $H_{(x,h)} : C_b(X,E) \to \mathbb{C}$ que está definido como

$$H_{(x,h)}(f) = h(f(x)).$$

4.3. Los espacios $C_b(X, C(K))$ y sus caracteres $H_{(x,z)}$

Sean X un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ y K un espacio compacto. Entonces $E = C(K)$ con la topología uniforme es un álgebra de Banach, conmutativa y con unidad, al igual que $(C_b(X, C(K)), \|\cdot\|)$.

Por lo anterior, $CV(X, C(K)) = (C_b(X, C(K)), \|\cdot\|)$, donde

$$\|f\| = \underset{x\in X}{sup} \|f(x)\|_\infty$$

y

$$\|f(x)\|_\infty = \underset{z\in K}{sup} |f(x)(z)|.$$

Además, $H_{(x,h)} \in \mathcal{M}(C_b(X, C(K)))$ para cada $(x,h) \in X \times \mathcal{M}(C(K))$

De acuerdo al Teorema 1.18.1, $\mathcal{M}(C(K)) = K$ en el sentido de que $h \in \mathcal{M}(C(K))$ si y sólo si es una evaluación $\hat{z}$ para algún $z \in K$, por lo que escribiremos $H_{(x,z)}$ en lugar de $H_{(x,h)}$ y se tiene que

$$H_{(x,z)}(f) = f(x)(z)$$

para todo $f \in C_b(X, C(K))$ y $(x,z) \in X \times K$.

4.4. El ejemplo

Sean K un espacio compacto e infinito y X un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ tal que $X \times K$ no es pseudocompacto. Por ejemplo, de acuerdo al Teorema 3.5.3, X puede escogerse como $\mathbb{R}$ o cualquier otro espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ que no sea pseudocompacto.

Consideramos el álgebra $CV(X,E)$ con $E = C(K)$ y tomemos $V = \{\lambda\chi_X : \lambda > 0\}$.

De acuerdo a lo visto en las secciones anteriores, tenemos:

(a) Si $\phi \in \mathcal{M}(E) = \mathcal{M}(C(K))$ entonces $\phi(\alpha) = \alpha(z)$ para algún $z \in K$ y toda $\alpha \in C(K)$.

(b)

$$CV(X,E) = (C_b(X, C(K)), \|\cdot\|)$$

(c) La funcionales $H_{(x,z)}$ definidas en el álgebra de Banach $C_b(X, C(K))$ como $H_{(x,z)}(f) = f(x)(z)$ para toda $f \in C_b(X, C(K))$ y cualquier $(x,z) \in X \times K$, pertenecen a $\mathcal{M}(C_b(X, C(K)))$.

Veremos que a cada $w \in \beta(X \times K)$ le corresponderá un elemento H_w en $\mathcal{M}(C_b(X, C(K)))$ y que todo elemento de este espectro es una de las funcionales H_w para una única $w \in \beta(X)$, o sea,

$$\mathcal{M}(C_b(X, C(K))) = \{H_w : w \in \beta(X \times K)\}.$$

Cuando $w = (x,z)$ con $(x,z) \in X \times K$ se cumplirá que $H_w(f) = H_{(x,z)}(f) = f(x)(z)$ para toda $f \in C_b(X, C(K))$. Para lo anterior estamos identificando $X \times K$ con su imagen homeomorfa $e_{X\times K}(X \times K)$ en $\beta(X \times K)$.

Asimismo, para cada $(y,z) \in \beta(X) \times K$ definiremos un elemento $H_{(y,z)}$ de $\mathcal{M}(C_b(X, C(K)))$ que cuando y pertenezca a X estará definido como $H_{(y,z)}(f) = f(y)(z)$ para toda $f \in C_b(X, C(K))$. Aquí, estamos identificando a X con con su imagen homeomorfa $e_X(X)$ en $\beta(X)$.

A elementos distintos en $\beta(X) \times K$ le corresponderán caracteres $H_{(y,z)}$ distintos. Así, podemos considerar que

$$\beta(X) \times K \subset \mathcal{M}(C_b(X, C(K))).$$

Probaremos que existe $w \in \beta(X \times K)$ tal que

$$H_w(f) \neq H_{(y,z)}(f)$$

para toda pareja $(y,z) \in \beta(X) \times K$. O sea,

$$\beta(X) \times K \neq \mathcal{M}(C_b(X, C(K)))$$

y en particular

$$X \times \mathcal{M}(C(K)) = X \times K \neq \mathcal{M}(C_b(X, C(K)))$$

4.5. El isomorfismo isométrico Γ y la igualdad $\mathcal{M}(C_b(X, C(K)), \|\cdot\|) = \{H_w : w \in \beta(X \times K)\}$

PROPOSICIÓN 4.5.1. *La función*

$$\Gamma : (C_b(X, C(K)), \|\cdot\|) \longrightarrow (C_b(X \times K), \|\cdot\|_\infty),$$

definida como $(\Gamma(f))(x,z) = f(x)(z)$, *es un isomorfismo isométrico de álgebras.*

Demostración. Ante todo veremos que si $f \in C_b(X, C(K))$, entonces $\Gamma(f) \in C_b(X \times K)$. Tenemos que $\Gamma(f)$ es continua, pues si $((x_i, z_i))_{i \in I}$ es una red tal que $(x_i, z_i) \to (x, z)$ en $X \times K$, entonces

$$\begin{aligned}|\Gamma(f)(x_i, z_i) - \Gamma(f)(x,z)| &= f(x_i)(z_i) - f(x)(z) \\ &\leq |f(x_i)(z_i) - f(x)(z_i)| + |f(x)(z_i) - f(x)(z)| \\ &\leq \|f(x_i) - f(x)\|_\infty + |f(x)(z_i) - f(x)(z)|\end{aligned}$$

para todo $i \in I$.

Como

$$\|f(x_i) - f(x)\|_\infty \to 0$$

por ser f continua en X y

$$|f(x)(z_i) - f(x)(z)| \to 0$$

por ser $f(x)$ continua en K, entonces

$$\Gamma(f)(x_i, z_i) \to \Gamma(f)(x,z),$$

lo prueba que $\Gamma(f)$ es continua en (x,z) y por ser éste un punto arbitrario de $X \times K$, entonces $\Gamma(f)$ es continua.

Por otra parte,

$$|\Gamma(f)(x,z)| = |f(x)(z)| \leq \|f(x)\|_\infty \leq |f| < \infty,$$

para todo $(x,z) \in X \times K$, ya que f es acotada en X. Así, $\Gamma(f)$ es acotada. Con lo que queda probado que $\Gamma(f) \in C_b(X \times K)$.

La función $\Gamma(f)$ es lineal, ya que para $\lambda \in \mathbb{C}$, $f, g \in C_b(X, C(K))$ y $(x,z) \in X \times K$ se tiene que

$$\begin{aligned}(\Gamma(\lambda f + g))(x,z) &= (\lambda f(x) + g(x))(z) \\ &= \lambda f(x)(k) + g(x)(z) \\ &= \lambda \Gamma(f)(x,k) + \Gamma(g)(x,z).\end{aligned}$$

Es multiplicativa, pues si $f, g \in C_b(X, C(K))$y $(x,z) \in X \times K$, entonces:

$$\begin{aligned}\Gamma(fg)(x,z) &= (f(x)g(x))(z) \\ &= f(x)(z) \cdot g(x)(z) \\ &= \Gamma(f)(x,z) \cdot \Gamma(g)(x,z).\end{aligned}$$

Es inyectiva, ya que si $\Gamma(f) = 0$, es decir, $\Gamma(f)(x,z) = f(x)(z) = 0$ para toda $(x,z) \in X \times K$, entonces $f(x)$ es la función cero para todo $x \in X$ y por tanto, f es la función cero.

Para ver que Γ es suprayectiva, tomemos $\alpha \in C_b(X \times K)$ arbitraria. Definimos $f : X \to C(K)$ como $f(x) = \alpha(x, \_)$. La función $f(x) : K \to \mathbb{C}$ es efectivamente continua porque es la x - sección de la función continua α.

Probaremos que $f \in C_b(X, C(K))$. Para mostrar que f es continua, tomemos $x \in X$ arbitrario y sea $\epsilon > 0$. Por la continuidad de α en $X \times K$, para cada $z \in K$ existe $r_z > 0$ tal que si $(x', z') \in B_{r_z}(x) \times B_{r_z}(z)$ entonces $|\alpha(x', z') - \alpha(x, z)| < \frac{\epsilon}{2}$. Como K es compacto, entonces existe una familia finita $\{z_n : n \in N\}$ de elementos en K tal que $\left\{\left\{B_{r_{z_n}}(z_n)\right\} : \ n \in N\right\}$ es una cubierta de K.

Hagamos $r = \min\limits_{n \in N}(r_{z_n})$ y supongamos que $d(x', x) < r$. Para cualquier $z \in K$ existe $n \in N$ tal que $z \in B_{r_{z_n}}(z_n)$ por lo que

$$(x, z), (x', z) \in B_r(x) \times B_{r_{z_n}}(z_n) \subset B_{r_{z_n}}(x) \times B_{r_{z_n}}(z_n)$$

y entonces $|\alpha(x', z') - \alpha(x, z_n)| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|\alpha(x, z) - \alpha(x, z_n)| < \frac{\epsilon}{2}$; de donde, $|\alpha(x', z) - \alpha(x, z)| < \epsilon$ y por tanto, $\|f(x) - f(x')\|_\infty \leq \epsilon$ y así f es una función continua en x.

El acotamiento de f se sigue de que

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_\infty = \sup_{x \in X, z \in K} |\alpha(x, z)| = \|\alpha\|_\infty < \infty.$$

Así, $f \in C_b(X, C(K))$ y como es claro que $\Gamma(f) = \alpha$, resulta que Γ es sobre.

Finalmente, observamos:

$$\|\Gamma(f)\|_\infty = \sup_{x \in X, z \in K} |f(x)(z)| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_\infty = \|f\|_\infty .$$

Por lo que Γ es una isometría.

De acuerdo al Teorema 1.13.5 se sigue que

$$\mathcal{M}(C_b(X, C(K)), \|\cdot\|) = \{\varphi \circ - : \varphi \in \mathcal{M}(C_b(X \times K), \|\cdot\|_\infty)\}.$$

Así, cada $H \in \mathcal{M}(C_b(X, C(K)))$ es de la forma

$$H(f) = \varphi(\Gamma(f))$$

para algún $\varphi \in \mathcal{M}(C_b(X \times K))$.

Por el Teorema 1.18.2 se tiene que

$$\mathcal{M}(C_b(X \times K), \|\cdot\|_\infty) = \beta(X \times K) \tag{4.5.1}$$

en el sentido de que $\varphi \in \mathcal{M}(C_b(X \times K))$ si y sólo si $\varphi(\alpha) = \widehat{w}(\alpha) = \alpha^e(w)$ para un único $w \in \beta(X \times K)$ y todo $\alpha \in C_b(X \times K)$, donde α^e es la extensión continua de α a $\beta(X \times K)$.

Por tanto, dado $\varphi \in \mathcal{M}(C_b(X \times K))$ existe un único $w \in \beta(X \times K)$ tal que

$$\varphi \circ -(f) = \Gamma(f)^e(w) \tag{4.5.2}$$

para todo $f \in C_b(X, C(K))$, donde $\Gamma(f)^e$ es la extensión continua a a $\beta(X \times K)$ de $\Gamma(f) : X \times K \to \mathbb{C}$.

Para cada $w \in \beta(X \times K)$ definamos $H_w : C_b(X, C(K)) \to \mathbb{C}$ como

$$H_w(f) = \Gamma(f)^e(w) \tag{4.5.3}$$

para todo $f \in C_b(X, C(K))$ o lo que es lo mismo, en términos de los elementos de $X \times K$,

$$H_w(f) \quad = lim\ \Gamma f(x_i, z_i) = lim\ f(x_i)(z_i) \tag{4.5.4}$$

donde (x_i, z_i) es cualquier red en $X \times K$ que converge en $\beta(X \times K)$ a w.

Tenemos que $H_w \neq H_{w'}$ si $w \neq w'$. En efecto, si $w \neq w'$ son dos puntos de $\beta(X \times K)$, entonces existe una función continua $\alpha : \beta(X \times K) \to [0,1]$ tal que $\alpha(w) \neq \alpha(w')$. Sean $\alpha_{X \times K}$ la restricción de α a $X \times K$ y $f \in C_b(X, C(K))$ la función que satisface que $\Gamma(f) = \alpha_{X \times K}$. De (4.5.3) se tiene que

$$H_w(f) = \Gamma(f)^e(w) = \alpha(w) \neq \alpha(w') = \Gamma(f)^e(w') = H_w(f);$$

de donde, $H_w \neq H_{w'}$.

Por esto y (4.5.2) podemos escribir

$$\mathcal{M}(C_b(X, C(K)), \|\cdot\|) = \{H_w : w \in \beta(X \times K)\} = \beta(X \times K).$$

$\square$

4.6. Prueba de la contención propia $\beta(X) \times K \subsetneq \mathcal{M}(C_b(X, C(K)))$

La z-sección $\Gamma(f)_z : X \longrightarrow \mathbb{C}$ de la función $\Gamma(f) : X \times K \longrightarrow \mathbb{C}$, con $z \in K$ y $f \in C_b(X \times K)$; es decir, la función definida como $\Gamma(f)_z(x) = \Gamma(f)(x,z) = f(x)(z)$ para todo $x \in X$, es una función continua y acotada en X y entonces tiene una única extensión continua $\Gamma(f)_z^e$ a $\beta(X)$.

Para cada $(y,z) \in \beta(X) \times K$ definimos $H_{(y,z)} : C_b(X, C(K)) \to \mathbb{C}$ como

$$H_{(y,z)}(f) = \Gamma(f)_z^e(y) \tag{4.6.1}$$

para todo $f \in C_b(X, C(K))$.

Podemos expresar a $H_{(y,z)}(f)$ en términos de los elementos de $X \times K$ de la siguiente forma

$$H_{(y,z)}(f) = lim \Gamma(f)_z(x_i) = lim\ \Gamma(f)(x_i, z) = lim\ f(x_i)(z) \tag{4.6.2}$$

donde (x_i) es una red en X que converge en $\beta(X)$ a y.

Es claro entonces que $H_{(y,z)}(f) = f(y)(z)$cuando $y \in X$.

Se sigue de las propiedades lineales del límite y de que Γ es lineal y multiplicativa, que $H_{(y,z)}$ es una funcional lineal multiplicativa. Además, es continua, ya que

$$\left|H_{(y,z)}(f)\right| = lim \ \ |f(x_i)(z)| \leq \|f(x_i)\|_\infty \leq \|f\|$$

Dada la asociación que manda a toda pareja (y,z) en $H_{(y,z)}$ de $\beta(X) \times K$ en $\mathcal{M}(C_b(X, C(K)), \|\cdot\|)$, esta es inyectiva .

Sean $(y_n, z_n) \in \beta(X) \times K$ para $n = 1, 2$ dos parejas distintas. Si $z_1 \neq z_2$, entonces existe $\alpha : K \to [0,1]$ tal que $\alpha(z_1) \neq \alpha(z_2)$, ya que K es completamente regular. Definimos $\alpha' : X \times K \to \mathbb{C}$ como $\alpha'(x,z) = \alpha(z)$ esta función es continua y acotada.

Sea $f \in C_b(X, C((X)))$ tal que $\Gamma(f) = \alpha'$, o sea , $\Gamma(f)(x,z) = \alpha'(x,z) = \alpha(z)$, entonces $\Gamma(f)_{z_n}(x) = \alpha(z_n)$ para $n = 1, 2$ y todo $x \in X$. De (4.6.2) se obtiene que

$$H_{(y_n,z_n)}(f) \quad = lim \quad \Gamma(f)_{z_n}\left(x_i^{(n)}\right) = \alpha(z_n)$$

para $n = 1, 2$, donde $\left(x_i^{(n)}\right)$ es una red en X que converge a y_n. Por consiguiente, $H_{(y_1,z_1)} \neq H_{(y_2,z_2)}$.

Supongamos que $y_1 \neq y_2$, entonces existen redes (x_i) y (x_i') en X tales que $x_i \longrightarrow y_1$ y $x_i' \longrightarrow y_2$ en $\beta(X)$. Hay una vecindad V de y_1 tal que (x_i') tiene una subred en $\beta(X) \diagdown V$. Sea $\alpha : \beta(X) \to [0,1]$ continua tal que $\alpha(\beta(X) \diagdown V) = \{0\}$ y $\alpha(y_1) = 1$. Por tanto, $\alpha(y_2) = 0$.

Sean α_X la restricción de α a X, $\alpha' \in C_b(X \times K)$ la función definida como $\alpha'(x,z) = \alpha_X(x)$ y $f \in C_b((X, C(K)))$ la función tal que $\Gamma(f) = \alpha'$. Entonces, $\Gamma(f)_{z_n}(x) = \alpha_X(x)$ para $n = 1, 2$ y todo $x \in X$; de donde $\Gamma(f)_{z_n}^e(y) = \alpha(y)$ para todo $y \in \beta(X)$. Entonces, por (4.6.1) tenemos que

$$H_{(y_1,z)}(f) = \Gamma(f)_{z_1}^e(y_1) = \alpha(y_1) = 1$$

y

$$H_{(y_2,z)}(f) = \Gamma(f)_{z_1}^e(y_2) = \alpha(y_2) = 0.$$

Por consiguiente, $H_{(y_1,z_1)} \neq H_{(y_2,z_2)}$.

Por todo lo anterior, podemos escribir

$$\beta(X) \times K \subset \mathcal{M}(C_b(X, C(K))) = \beta(X \times K).$$

Además, si para $w \in \beta(X \times K)$ existe una pareja $(y,z) \in \beta(X) \times K$ tal que $H_w \neq H_{(y,z)}$, entonces esa pareja es única, ya que hemos visto que la asociación $(y,z) \to H_{(y,z)}$ es inyectiva.

Veremos que existe $w \in \beta(X \times K)$ tal que $H_w \neq H_{(y,z)}$ para toda $(y,z) \in \beta(X) \times K$.

Supongamos lo contrario, es decir que para todo $w \in \beta(X \times K)$ existe una (única) pareja $(y_w, z_w) \in \beta(X) \times K$ tal que $H_{(y_w,z_w)} = H_w$. Entonces podemos definir la función

$$G : \beta(X \times K) \longrightarrow \beta(X) \times K$$

como $G(w) = (y_w, z_w)$.

Veremos que G es un homeomorfismo que deja fijo a los puntos de $X \times K$.

Sabemos que $G(x,z) = (x,z)$ para toda $(x,z) \in X \times K$ y así, G deja fijos a los puntos de $X \times K$.

Una vez que probemos que G es una función continua se seguirá que también es cerrada, ya que $\beta(X \times K)$ es compacto.

Sean $w_0 \in \beta(X \times K)$ y U una vecindad abierta de $G(w_0) = (y_{w_0}, z_{w_0})$. Probaremos que $G^{-1}(U)$ es una vecindad de w_0. Podemos suponer que $U \neq \beta(X) \times K$.

Existe una función continua $\gamma : \beta(X) \times K \longrightarrow [0,1]$, tal que

$$\gamma((\beta(X) \times K) \setminus U) = \{0\}$$

y

$$\gamma(y_{w_0}, z_{w_0}) = 1.$$

En particular, $\gamma(y_w, z_w) \neq 0$ implica $G(w) = (y_w, z_w) \in U$.

Sea $f \in C_b(X, C(K, \mathbb{C}))$ tal que $\Gamma(f) = \gamma'$, donde γ' es la restricción de γ a $X \times K$. Entonces $\Gamma(f)(x, z_w) = \gamma'(x, z_w)$ para todo $x \in X$ y todo $w \in \beta(X \times K)$. Si fijamos z_w tenemos que $\left(\Gamma(f)_{z_w}\right)^e = \left(\gamma'_{z_w}\right)^e = \gamma_{z_w}$. Entonces,

$$H_w(f) = H_{(y_w,z_w)}(f) = \left(\Gamma(f)_{z_w}\right)^e(y_w) = \gamma_{z_w}(y_w) = \gamma(y_w, z_w).$$

y por consiguiente,

$$\begin{aligned} &w_0 \in \{w \in \beta(X \times K) : H_w(f) \neq 0\} = \\ &\quad \{w \in \beta(X \times K) : \gamma(y_w, z_w) \neq 0\} \subset \{w \in \beta(X \times K) : G(w) \in U\}. \end{aligned}$$

Como H_w es continua, entonces $\{w \in \beta(X \times K) : H_w(f) \neq 0\}$ es una vecindad de w_0. De donde, $G^{-1}(U)$ es una vecindad de w_0. Entonces G es continua en w_0. Como éste es un punto arbitrario de $\beta(X \times K)$, entonces G es continua.

Probaremos que G no es biyectiva

Supongamos que G no es inyectiva, lo que implica que existen w_1 y w_2 en $\beta(X \times K)$ y (y,z) en $\beta(X) \times K$, tales que $H_{w_n} = H_{(y,z)}$ para $n = 1, 2$, por lo que existe $\delta : \beta(X \times K) \longrightarrow [0,1]$ continua tal que $\delta(w_1) = 1$ y $\delta(w_2) = 0$.

Sea $g \in C_b(X, C(K, \mathbb{C}))$ tal que $\Gamma(g) = \delta$', donde δ' es la restricción de δ a $X \times K$.

Entonces,

$$\delta(w_i) = (\Gamma(g))^e(w_i) = H_{w_i}(g) = H_{(y,z)}(g) = (\Gamma(g)_z)^e(y).$$

Lo que nos lleva al absurdo $1 = 0$. Por tanto, G es inyectiva.

Finalmente, G es sobre ya que $X \times Y$ es denso en $\beta(X \times Y)$ y en $\beta(X) \times \beta(Y)$ y al ser G continua y ser invariante en los puntos de $X \times Y$ tenemos que

$$G(\beta(X \times Y)) = G\left(\overline{X \times Y}\right) \subset \overline{G(X \times Y)} = \overline{X \times Y} = \beta(X) \times \beta(Y).$$

Entonces por el Teorema 2.2.12 se concluye que $\beta(X \times K) = \beta(X) \times K$, pero esto es imposible pues escogimos X de modo que $X \times K$ no es pseudocompacto y entonces el teorema de Glicksberg no dice $\beta(X \times K) \neq \beta(X) \times K$.

Por tanto no puede existir tal función G, o sea hay un elemento $w \in \beta(X \times K)$ tal que

$$H_w \neq H_{(y,z)}$$

para todo $(y, z) \in \beta(X) \times K$.

Capítulo 5

Espacios realcompactos y cardinales medibles

5.1. Espacios realcompactos.

Nuestro primer objetivo es el estudio de los espacios realcompactos, sus caracterizaciones y como podemos obtener a partir de un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ un espacio realcompacto

DEFINICIÓN 5.1.1. Un espacio topológico no vacío X es llamado realcompacto si es homeomorfo a un subconjunto cerrado del producto $\mathbb{R}^I$, donde I puede ser infinito.

En la definición se puede cambiar $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$, ya que $\mathbb{R}$ está inmerso en $\mathbb{C}$ como subespacio cerrado y, por otro lado, $\mathbb{C}$ es realcompacto, el producto de espacios realcompacto también lo es, al igual que todo subespacio cerrado de un real compacto.

TEOREMA 5.1.2. *Sean X un espacio realcompacto y $\psi : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ un carácter no nulo.. Entonces, existe $c \in X$ tal que $\psi(f) = f(c)$ para todo $f \in C(X)$. Es decir todo carácter no nulo de $C(X)$ en $\mathbb{C}$ es un evaluación $\hat{c}$ para algún $c \in X$.*

DEMOSTRACIÓN. Lo demostraremos analizando tres casos.

1. Supongamos que $X = \mathbb{C}^I$ y para cada $i \in I$ sea $P_i : X \longrightarrow \mathbb{C}$ la proyección sobre la i-ésima coordenada. Entonces $P_i \in C(X)$ para todo $i \in I$. Denotemos a $\psi(P_i)$ por c_i y hagamos $c = (c_i)_{i \in I}$.

Afirmamos que

$$\psi(f) = f(c) = \hat{c}(f) \tag{5.1.1}$$

para toda $f \in C(X)$.

Para probar esta afirmación consideramos tres subcasos

1.1. Supongamos que $f \in C(X)$ se anula en una vecindad V de c. Basta considerar cuando V es un abierto básico que contiene a c; o sea, $V = \prod_{i \in I} U_i$ donde cada U_i es un abierto en $\mathbb{C}$ tal que $c_i \in U_i$ para todo i y $U_i = \mathbb{C}$ excepto para i en un conjunto finito $F \subset I$. Definimos la siguiente función continua:

$$\begin{aligned} h : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \sum_{i\in F}\left(\left|P_i\left(x\right)-c_i\right|^2\right). \end{aligned}$$

Entonces, $x \notin V$ implica que existe $i \in F$ tal que $P_i\left(x\right) \notin U_i$, por lo que $P_i\left(x\right) \neq c_i$ y por tanto, $h\left(x\right) \neq 0$, así, h es distinta de cero fuera de V. Hagamos

$$g\left(x\right) = \begin{cases} \frac{f(x)}{h(x)} & \text{si } x \in X \setminus V \\ 0 & \text{si } x \in \overline{V} \end{cases}$$

Entonces g está bien definida en X como función combinada porque $f\left(V\right) = \{0\}$ implica $f\left(\overline{V}\right) = \{0\}$ y así, $x \in \left(X \setminus V\right) \cap \overline{V}$ implica que $\frac{f(x)}{h(x)} = 0$. Además la función g es continua en X debido a que f, h y la función nula son funciones continuas en X y los conjuntos $X \setminus V$ y $\overline{V}$ forman una cubierta cerrada de X.

Por otra parte, $g \cdot h = f \cdot \chi_{(X \diagdown V)} = f$, ya que f se anula en V, con lo que se sigue que:

$$\begin{aligned} \psi\left(f\right) &= \psi\left(g\cdot h\right) \\ &= \psi\left(g\right)\psi\left(h\right) \\ &= \psi\left(g\right)\psi\left(\sum_{i\in F}\left|P_i - c_i\right|^2\right) \\ &= \psi\left(g\right)\psi\left(\sum_{i\in F}\left(P_i - c_i\right)\left(\overline{P_i - c_i}\right)\right) \\ &\leq \psi\left(g\right)\cdot\sum_{i\in F}\left(c_i - c_i\right)\cdot\psi\left(\overline{\left(P_i\right)-c_i}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, $\psi\left(f\right) = 0 = f\left(c\right)$ por lo que se cumple (**??**)

1.2 Supongamos que $f\left(c\right) = 0$. Si no se cumple (**??**), entonces

$$\psi\left(f\right) = a \neq 0.$$

Definimos $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como

$$\alpha\left(t\right) = \begin{cases} \frac{|a|t}{2|t|} & \text{si } t \in \overline{\left(\mathbb{C} \diagdown D\right)} \\ t & \text{si } t \in \overline{D} \end{cases}$$

para todo $t \in \mathbb{C}$donde $D \subset \mathbb{C}$ es la bola abierta con centro en $f\left(c\right) = 0$ y radio $\frac{|a|}{2}$.

Entonces α está bien definida en X como función combinada, ya que $t \in \overline{(\mathbb{C} \diagdown D)} \cap \overline{D}$ implica que $|t| = \frac{|a|}{2}$ y así, $\frac{|a|t}{2|t|} = t$. Además, α es continua puesto que las funciones que se combinan son continuas y $\overline{(\mathbb{C} \diagdown D)}$ y $\overline{D}$ forman una cubierta cerrada de X.

Hagamos $h = f - (g \circ f)$. Sea U una vecindad de c tal que $f(x) \in D$ si $x \in U$. Observemos que

$$h(x) = f(x) - g(f(x)) = f(x) - f(x) = 0$$

si $x \in U$. O sea, h se anula en una vecindad de c.

Por lo que se demostró en 1.1, concluimos que $\psi(h) = 0$, lo que implica que

$$\psi(g \circ f) = \psi(f) = a. \tag{5.1.2}$$

Como a es distinto de cero y por definición, $|g(t)| \leq \frac{|a|}{2}$ para todo $t \in \mathbb{C}$, entonces

$$|a - g(f(x))| \geq \frac{|a|}{2} > 0$$

para todo $x \in X$

O sea, la función compleja y continua $h_1 = a - g \circ f$ definida en X no se anula en ningún punto y por tanto, es invertible, de donde $\psi(h_1) \neq 0$; pero de (5.1.2) se sigue que $\psi(h_1) = a - \psi(g \circ f) = 0$. Esta reducción al absurdo nos dice que $\psi(f) = 0 = f(c)$.

1.3 Si $f(c) \neq 0$, entonces $f - f(c)$ es una función continua que se anula en c. Por lo demostrado en el caso 1.2 tenemos que $\psi(f - f(c)) = \psi(f) - f(c) = 0$. Por tanto, $\psi(f) = f(c)$.

2. Supongamos que $X = Y$ donde Y es un subconjunto propio y cerrado de $\mathbb{C}^I$. Sea $\phi : C\left(\mathbb{C}^I\right) \longrightarrow C(Y)$ la función que asocia a cada $f \in C\left(\mathbb{C}^I\right)$ su restricción f_Y a Y. Es inmediato que ϕ es un homomorfismo.

Dado un carácter no nulo $\psi : C(Y) \longrightarrow \mathbb{C}$, se tiene que la asociación

$$f \to \psi(f_Y)$$

define una funcional lineal multiplicativa en $\mathbb{C}^I$ no nula, ya que las contantes pertenecen a C_Y, y por el caso 1, $\psi(f_Y) = f(c_0)$ para algún $c_0 \in \mathbb{C}^I$.

Afirmamos que $c_0 \in Y$. En caso contrario, por ser Y cerrado existe una función continua $f : \mathbb{C}^I \to \mathbb{C}$ tal que $f(c_0) = 1$ y $f(Y) = \{0\}$ y por tanto:

$$\begin{aligned} 1 &= f(c_0) \\ &= \psi(f_Y) \\ &= \psi(0) = 0. \end{aligned}$$

Lo que es absurdo; así $c_0 \in Y$. Es decir, $\psi(g) = g(c_0)$ para todo $g \in C(Y)$ que sea restricción de alguna $f \in C(\mathbb{C}^I)$.

Afirmamos que $\psi(g) = g(c_0)$ para todo $g \in C(Y)$. Por el Teorema 1.16.2 relativo a los núcleos de caracteres, basta probar que si $g \in C(Y)$ y $\psi(g) = 0$, entonces $\hat{c}_0(g) = g(c_0) = 0$.

Sea $g \in C(Y)$ tal que $\psi(g) = 0$ y supongamos que $g(c_0) \neq 0$. Entonces $c_0 \notin g^{-1}(0)$ que es un conjunto cerrado en Y y por ser Y cerrado en $\mathbb{C}^I$, entonces $g^{-1}(0)$ es cerrado en $\mathbb{C}^I$. Así existe $f \in C(\mathbb{C}^I)$ tal que $f(g^{-1}(0)) = \{1\}$ y $f(c_0) = 0$.

La función continua $f_Y^2 + |g|^2$ es positiva en Y y por tanto, es un elemento invertible en $C(Y)$, por lo que $\psi\left(f_Y^2 + |g|^2\right) \neq 0$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\psi\left(f_Y^2 + |g|^2\right) &= \psi(f_Y)^2 + \psi(g\overline{g}) \\
&= (f_Y(c_0)) + \psi(g)\,\psi(\overline{g}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esta igualdad contradice lo antes visto. Por consiguiente, $g(c_0) = 0$.

3. Pasemos al caso general y supongamos que $h : X \to Y$ es un homeomorfismo donde $Y \subset \mathbb{C}^I$ es un conjunto cerrado. Entonces, la aplicación $T : C(Y) \to C(X)$ definida como $T(g) = g \circ h$ es un homomorfismo. De donde, $\psi \circ T : C(Y) \longrightarrow \mathbb{C}$ es un carácter no nulo y por el caso 2, existe $c_0 \in Y$ tal que $\psi((T(g))) = g(c_0)$ para todo $g \in C(Y)$. Por tanto,

$$\psi(f) = \psi\left(\left(\overbrace{f \circ h^{-1}}^{g} \circ h\right)\right) = f(c)$$

para todo $f \in C(X)$, donde $c = h^{-1}(c_0)$. □

Ahora usaremos este resultado para probar una reciente caracterización de los espacios realcompactos [**Er.**]

TEOREMA 5.1.3. *Sea X un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$. Las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:*

(a) X es realcompacto.

(b) Una red (x_i) en X es convergente si (y sólo si) lim $f(x_i)$ existe para toda $f \in C(X)$.

DEMOSTRACIÓN. $(a) \Rightarrow (b)$ Por el resultado anterior, si X es realcompacto entonces los caracteres no nulos en $C(X)$ son evaluaciones. Supongamos que X es real compacto y sea (x_i) una red en X tal que *lim* $f(x_i)$

existe para toda $f \in C(X)$. Definamos la función $\psi : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ como $\psi(f) = lim\ f(x_i)$.

Por las propiedades de los límites en $\mathbb{C}$ es fácil ver que ψ es un carácter y es no nulo, pues las constantes pertenecen a $C(X)$. Así, existe $x \in X$ tal que $\psi(f) = f(x) = lim\ f(x_i)$.

Afirmamos que la red (x_i) converge a x. Para probarlo supongamos lo contrario; entonces existen una vecindad abierta U de x y una subred (x_{i_k}) de (x_i) cuyo rango está fuera de U. Existe una función continua $h : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $h(X \diagdown U) = 1$ y $h(x) = 0$.

Por la hipótesis, existe $lim\ h(x_i)$, por lo que éste debe ser igual a 1, ya que $lim\ h(x_{i_k}) = 1$, pero entonces $1 = lim\ h(x_i) = \psi(h) = h(x) = 0$, lo que es absurdo. Por tanto, $x_i \longrightarrow x$ como afirmamos.

$(b) \Rightarrow (a)$ Supongamos que una red (x_i) en X es convergente si existe $lim\ f(x_i)$ para toda $f \in C(X)$.

Mostraremos que la función

$$\begin{array}{rcl} H : X & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathrm{C(X)}} \\ x & \mapsto & (f(x))_f \end{array}$$

es una inmersión y que su imagen es un cerrado de $\mathbb{C}^{\mathrm{C(X)}}$.

La función H es inyectiva, ya que si $x \neq y$, entonces existe $f : X \longrightarrow [0,1]$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$, por lo que $(f(x))_f \neq (f(y))_f$ y la función H es continua ya que cada una de sus funciones componentes los son.

Veamos que H es cerrada sobre su imagen. Sea F un cerrado de X; si $F = X$, entonces es obvio que $H(F)$ es cerrado en $H(X)$. Supongamos que $F \neq X$, por lo que existen $x \in X \diagdown F$ y una función continua $h_x : X \longrightarrow [0,1]$ tales que $h_x(F) = \{0\}$ y $h_x(x) = 1$. Sea P_{h_x} la proyección $(f(x))_f \to h_x$. Entonces

$$H(F) = \bigcap_{x \in X \diagdown F} P_{h_x}^{-1}(\{0\}) \cap H(X)$$

es un cerrado de $H(X)$. Por tanto, H es una inmersión en $\mathbb{C}^{\mathrm{C(X)}}$.

Para ver que es $H(F)$ es un cerrado de $\mathbb{C}^{\mathrm{C(X)}}$ supongamos que (x_i) es una red en F tal que $H(x_i) = (f(x_i))_f \longrightarrow (y_f)_f$, o lo que es lo mismo $f(x_i) \longrightarrow y_f$ para cada f. Por cumplirse (b) y ser F es cerrado en X, se sigue que $x_i \longrightarrow x$ para algún $x \in F$ y entonces $y_f = f(x)$ para cada f; de donde $(y_f)_f \in H(F)$. Por tanto, $H(F)$ es un cerrado de $\mathbb{C}^{\mathrm{C(X)}}$. Por todo lo anterior X es realcompacto. $\square$

TEOREMA 5.1.4. *Todo espacio compacto y Hausdorff es realcompacto. En particular, $\beta(X)$ es realcompacto para todo espacio topológico X que sea $T_{3\frac{1}{2}}$.*

DEMOSTRACIÓN. La función

$$\begin{array}{rcl} H : K & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathrm{C(X)}} \\ x & \mapsto & (f(x))_f . \end{array}$$

es inyectiva y continua. Como K es compacto, entonces H es una inmersión y $H(K)$ es cerrado en $\mathbb{C}^{\mathrm{C(X)}}$. □

En lo que sigue necesitaremos trabajar con el conjunto

$$v(X) = \{x \in \beta(X) : f^e(x) \neq \infty \text{ para toda } f \in C(X)\}$$

donde $\beta(X)$ es la compactación de Stone-Čech y f^e es la extensión a $\beta(X)$ de cada $f \in C(X)$ pensada como función de X en la compactación por un punto $\mathbb{C}^*$ de $\mathbb{C}$. Es claro que $X \subset v(X)$, donde, como es costumbre, hemos identificado X con su imagen en $\beta(X)$.

TEOREMA 5.1.5. *Sea X un espacio topológico $T_{3\frac{1}{2}}$. Entonces $v(X)$ es un espacio realcompacto.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición $v(X) \subset \beta(X)$. Sea (x_i) una red en $v(X)$ tal que $lim\ g(x_i)$ existe en $\mathbb{C}$ para toda $g \in C(v(X))$. Si $f \in C(\beta(X))$, entonces su restricción $f_{v(X)}$ a $v(X)$ pertenece a $C(v(X))$ y por tanto, $lim\ f_{v(X)}(x_i) = lim\ f(x_i)$ existe en $\mathbb{C}$. Por ser $\beta(X)$ realcompacto, se tiene que $(x_i) \longrightarrow x$, para algún $x \in \beta(X)$.

Sea $f \in C(X)$, entonces la restricción $f^e_{v(X)}$ de f^e a $v(X)$ es un función compleja y continua en $v(X)$ y por tanto, $lim\ f^e_{v(X)}(x_i) = lim\ f^e(x_i) = f^e(x)$ existe en $\mathbb{C}$, por lo que $x \in v(X)$. Así, $v(X)$ es realcompacto.

Sea X un espacio topológico $T_{3\frac{1}{2}}$. Dada $f \in C(X)$, pensada con codominio $\mathbb{C}^*$, la restricción f^ν a $v(X)$ de la extensión f^e de f a $\beta(X)$ será llamada la real-extensión de f a $v(X)$. Así, $f^\nu \in C(v(X))$.

Si damos el orden de la contención a la familia de los subespacios realcompactos de $\beta(X)$, entonces $v(X)$ es el elemento mínimo de dicha familia, que contiene a X. □

TEOREMA 5.1.6. *Sea X un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$. El mínimo subespacio realcompacto de $\beta(X)$ que contiene a X es $v(X)$. A $v(X)$ se le llama la realcompactación de X.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $X \subset R \subset \beta(X)$ y que R es realcompacto. Tomemos $x_0 \in v(X)$ y sea (x_i) una red en X que converge a x_0 en

$\beta(X)$. Sean $f \in C(R)$, f_X su restricción a X y f_X^e la extensión continua de $f_X : X \to \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^e$ a $\beta(X)$. Entonces, $f(x_i) = f_X^e(x_i) \longrightarrow f_X^e(x_0)$ y como $f_X^e(x_0) \neq \infty$, se tiene que existe $\lim(f(x_i))$ en $\mathbb{C}$. De donde, $(x_i) \longrightarrow x$ para algún $x \in R$, por ser R realcompacto. Se sigue que $x = x_0$ y por tanto, $v(X) \subset R$. □

5.2. Cardinales medibles.

En todo lo que sigue $\mathcal{P}(X)$ denota a la colección de todos los subconjuntos del conjunto X.

Definición 5.2.1. Sea X un conjunto. Decimos que $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ es un filtro en X si:

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
- $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
- Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subset B \subset X$ entonces $B \in \mathcal{F}$.

Definición 5.2.2. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X. Decimos que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en X si para cualquier $A \in \mathcal{P}(X)$ se cumple que $A \in \mathcal{F}$ o $X \diagdown A \in \mathcal{F}$.

Definición 5.2.3. Una σ- álgebra en un conjunto X es una familia $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ que tiene las siguientes tres propiedades:

- $\emptyset \in \Sigma$.
- Si $A \in \Sigma$ entonces $X \diagdown A \in \Sigma$.
- Si $A_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

La propia familia $\mathcal{P}(X)$ es un ejemplo de σ- álgebra en X.

Observación 5.2.4. *Dados un conjunto X y una σ- álgebra Σ de X, es inmediato ver que si $A, B \in \Sigma$, entonces $A \diagdown B \in \Sigma$ ya que $A \diagdown B = A \cap (X \diagdown B) = X \diagdown ((X \diagdown A) \cup B)$.*

Definición 5.2.5. Una medida en X es una función $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ definida en una σ- álgebra Σ de X que tiene las siguientes dos propiedades:

- $\mu(\emptyset) = 0$ y
- $\mu\left(\bigcup\limits_{n \in N} A_n\right) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ si (A_n) es una sucesión en Σ de conjuntos ajenos 2 a 2.

En lo sucesivo todas las medidas estarán definidas en $\mathcal{P}(X)$ y tomarán sólo alguno de dos valores: 0 y 1. Ejemplos de tales medida en cualquier σ-álgebra Σ de un conjunto X son: la medida nula, o sea la que vale cero en todo elemento de Σ y en el caso en que $X \neq \emptyset$ las medidas definidas para cada $x \in X$ como $\mu_x (A) = 1$ si $x \in A$ y 0 en otro caso.

Definición 5.2.6. Una medida μ en X es llamada trivial si es la medida nula o existe $x \in X$ tal que $\mu = \mu_x$ para algún $x \in X$. Es decir, μ es trivial si es nula o bien $\mu (\{x\}) = 1$ para algún $x \in X$.

Definición 5.2.7. Diremos que un cardinal m es medible si existe un conjunto M tal que su cardinalidad $|M|$ es m y para el cual hay una medida no trivial.

Es fácil ver, que si m es medible, entonces en cualquier conjunto de cardinalidad m existe una medida no trivial.

Supondremos la existencia de un cardinal medible

Teorema 5.2.8. *El conjunto* $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(M) : \mu (A) = 1\}$ *es un ultrafiltro para cualquier medida no nula* μ *definida en un conjunto* M*.*

Demostración. $\mathcal{F} \neq \emptyset$, ya que $M \in \mathcal{F}$ y $\mu (\emptyset) = 0$, por lo que $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subset B$, entonces $\mu (B) = \mu (A) + \mu (B \diagdown A) \geq 1$, por lo que $\mu (B) = 1$ y por tanto, $B \in \mathcal{F}$.

S $A, B \in \mathcal{F}$ entonces:

$$1 = \mu (A \cup B) \quad = \quad \mu (B) + \mu (A \diagdown (A \cap B)) = 1 + 1 - \mu (A \cap B) .$$

Así, $1 = \mu (A \cap B)$. Por tanto, $\mathcal{F}$ es un filtro. De hecho, es un ultrafiltro, ya que

$$1 = \mu (M) = \mu(A) + \mu (X \diagdown A) ,$$

por lo que A o $X \diagdown A$ pertenece a $\mathcal{F}$. $\square$

Lema 5.2.9. *Sean* m *un cardinal,* M *un conjunto de cardinalidad* m *y* μ *una medida en* M*. Entonces:*

(a) Si m *es medible y* μ *es no trivial, entonces* $\mu (A) = 0$ *para todo conjunto* $A \subset M$ *de cardinalidad no medible.*

(b) Si I *es un conjunto de índices de cardinalidad no medible y* $\{A_i : i \in I\}$ *es una familia de subconjuntos de* M *ajenos 2 a 2, entonces*

$$\mu \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \sum_{i \in I} \mu (A_i) .$$

(c) Si I *es un conjunto de índices de cardinalidad no medible y*

$$\{A_i : i \in I\}$$

es una familia de subconjuntos de M tales que $\mu(A_i) = 0$ para todo $i \in I$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 0.$$

Demostración. (a) Si $A \subset M$ es tal que $\mu(A) = 1$, entonces μ restringida a la σ-álgebra $\mathcal{P}(A)$ es una medida y es no trivial en A, ya que es no nula y no puede existir $a \in A$ con $\mu(\{a\}) = 1$. Así, A es medible. De esto se sigue (a).

(b) Supongamos que $\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 0$, entonces $0 = \mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \geq \mu(A_i)$ para todo $i \in I$ y por tanto,

$$\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(A_i) = 0.$$

Ahora supongamos que $\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1$. Observamos que si $\mu(A_i) = 1$ para algún $i \in I$, entonces $\mu(A_j) = 0$ para cualquier otro índice $j \in I$ y se cumple que

$$\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(A_i) = 1,$$

por lo que es suficiente demostrar que existe A_i tal que $\mu(A_i) = 1$.

La función $\lambda : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \{0,1\}$ definida como

$$\lambda(J) = \mu\left(\bigcup_{i\in J} A_i\right)$$

es una medida en I y como $|I|$ es no medible, entonces λ es trivial, y es no nula, ya que

$$\lambda(I) = \mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1,$$

, por lo que existe $i \in I$ tal que $\lambda(\{i\}) = 1$; o sea $\mu(A_i) = 1$.

(c) Supongamos que $\mu(A_i) = 0$ para todo $a \in A$. Damos a A un buen orden $<$ y definimos

$$A_i^{'} = A_i \diagdown \bigcup_{j<i} A_j.$$

De donde $A_i^{'} \subset A_i$ y por tanto, $\mu\left(A_i^{'}\right) = 0$. Además $\bigcup_{i\in I} A_i^{'} = \bigcup_{i\in I} A_i$ y los conjuntos $A_i^{'}$ son ajenos por pares. De (b) se sigue que

$$\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i^{'}\right) = \sum_{i\in I} \mu\left(A_i^{'}\right) = 0.$$

□

Lema 5.2.10. *Dado un cardinal m, un conjunto M de cardinalidad m y una medida μ en M, tenemos que para cualquier conjunto de índices I de cardinalidad no medible y cualquier familia $\{A_i : i \in I\}$ de subconjuntos de M tales que $\mu(A_i) = 1$ para todo $i \in I$, se tiene que $\mu\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = 1$.*

Demostración. Tenemos que $\mu(M) = 1$ y $\mu(M \setminus A_i) = 0$ para todo $i \in I$. Por el lema anterior, $\mu\left(\bigcup_{i\in I} (M \setminus A_i)\right) = 0$, de lo que se sigue que

$$\mu\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \mu\left(M \setminus \bigcup_{i\in I} (M \setminus A_i)\right) = 1.$$

. □

Teorema 5.2.11. *(a) Si m es un cardinal no medible, entonces todo cardinal menor que m es no medible.*

(b) La unión de los conjuntos de una una colección de cardinalidad no medible de conjuntos con cardinalidades no medible tiene cardinalidad no medible.

(c) Si m es un cardinal no medible entonces 2^m es no medible.

Demostración. (a) Tomemos un cardinal $n < m$ y sean M' y M conjuntos de cardinalidades m' y m, respectivamente, con $M' \subset M$, y μ' una medida en M' no nula. Definimos en M la medida

$$\mu(A) = \mu'(M \cap A).$$

Esta es una medida en M, por ser μ' una medida, por lo que μ es una medida trivial y es no nula ya que $\mu(M) = \mu'(M') = 1$; de donde, existe $x \in M$ tal que $\mu(\{x\}) = 1$; o sea, $\mu'(M \cap \{x\}) = 1$. Por consiguiente, $x \in M'$, $\mu'(\{x\}) = 1$ y μ' es trivial. Por tanto, m' es un cardinal no medible.

(b) Sea I un conjunto de índices de cardinalidad no medible y $\{A_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos con cardinalidades no medibles. Hagamos $A =$

$\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ y supongamos que en A existe una medida μ no trivial; es decir que $|A|$ es medible.

Por (a) del Lema 5.2.9, $\mu(A_i) = 0$ para toda $i \in I$ y por (c) de ese mismo lema

$$\mu(A) \quad = \quad \mu\left(\bigcup_{i\in i} A_i\right) = 0.$$

Por tanto, μ es la medida cero, lo que contradice que μ es no trivial y por tanto, $|A|$ es no medible.

(c) Sea un conjunto M de cardinalidad m, así $\mathcal{P}(M)$ tiene cardinalidad 2^m. Supongamos que μ es una medida en $\mathcal{P}(M)$ no nula. Para cada $x \in M$ definimos dos subcolecciones de $\mathcal{P}(M)$

$$\mathcal{O}_x = \{A \subset M : x \in A\}$$
$$-\mathcal{O}_x = \mathcal{P}(\mathcal{M}) \diagdown \mathcal{O}_x = \{A \subset M : x \notin A\}.$$

Hagamos

$$I = \{x \in M : \mu(\mathcal{O}_x) = 1\}$$

y

$$\mathcal{G} = \left(\bigcap_{x\in I} \mathcal{O}_x\right) \bigcap \left(\bigcap_{x\in M\diagdown I} -\mathcal{O}_x\right).$$

Entonces

$$\mu(\mathcal{P}(M) \diagdown \mathcal{G}) \quad = \quad \mu\left(\bigcup_{x\in I} (\mathcal{P}(M) \diagdown \mathcal{O}_x) \bigcup \bigcup_{x\in M\diagdown I} (\mathcal{P}(M) \diagdown -\mathcal{O}_x)\right).$$

Como

$$\mu(\mathcal{P}(\mathcal{M}) \diagdown \mathcal{O}_x) = 0$$

si $x \in I$ y

$$\mu(\mathcal{P}(M) \diagdown -\mathcal{O}_x) = 0$$

si $x \in M \diagdown I$, se sigue del Lema 5.2.9 que $\mu(\mathcal{P}(M) \diagdown \mathcal{G}) = 0$ y así, $\mu(\mathcal{G}) = 1$.

Afirmamos que $\mathcal{G} = \{I\}$. Es claro que $I \in \mathcal{G}$. Por otra parte, $A \in \bigcap\limits_{x\in I} \mathcal{O}_x$ implica que $I \subset A$ y $A \in \bigcap\limits_{x\in M\diagdown I} -\mathcal{O}_x$ implica $M \diagdown I \subset M \diagdown A$; o sea, $A \subset I$. De donde, $A = I$ si $A \in \mathcal{G}$. Así, $\mathcal{G} = \{I\}$ y μ es trivial. Por tanto, 2^m es no medible. $\square$

Corolario 5.2.12. *Todo cardinal menor o igual que $2^{\aleph_0}$ es no medible. En particular, $\mathbb{C}$ y cualquier conjunto numerable tienen cardinalidades no medibles.*

Demostración. Sea μ una medida en $\mathbb{N}$ no nula, entonces $\mu(\mathbb{N}) = 1$, por lo que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{n\}) = 1$ y así, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\{n\}) = 1$, por tanto μ es trivial y entonces $\aleph_0$ es un cardinal no medible. Por (c) del Teorema 5.2.11 $2^{\aleph_0}$ es no medible y por (a) del mismo teorema cualquier cardinal menor que $2^{\aleph_0}$ es no medible. □

5.3. Cardinales medibles y su relación con los espacios discretos y realcompactos.

Daremos una caracterización de los cardinales medibles que depende de que ciertos conjuntos con la topología discreta sean realcompactos.

Teorema 5.3.1. *Si X tiene cardinalidad no medible, entonces X con la topología discreta es realcompacto.*

Demostración. Sea (x_i) una red en X tal que para toda $f \in C(X)$ se cumple que $f(x_i) \longrightarrow y_f$ en $\mathbb{C}$. Toda función en X es continua por tener X la topología discreta.

Definimos $\mu : P(X) \longrightarrow \{0,1\}$ como $\mu(A) = 1$ si y sólo si (x_i) está eventualmente en A; o sea existe i_0 tal que $x_i \in A$ para todo $i > i_0$.

Veremos que μ es una medida. Claramente $\mu(\emptyset) = 0$. Sea (A_n) una sucesión en $\mathcal{P}(X)$ de conjuntos ajenos 2 a 2. Supongamos que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

Es decir, la red (x_i) está eventualmente en $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$ y entonces existe i_0 tal que $x_i \in \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$ para todo $i \geq i_0$.

Definimos la función $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como $g(x) = n$ si $x \in A_n$ y $g(x) = 0$ en otro caso. Sabemos por hipótesis que $g(x_i) \longrightarrow y_g$ en $\mathbb{C}$. Como el rango de $g(x_i)$ son los enteros no negativos entonces existen $i_1 \geq i_0$ y $n \geq 0$ tales que $g(x_i) = n$ si $i \geq i_1$, lo que implica que $n \geq 1$ y $x_i \in A_n$ para toda $i \geq i_1$ y así, $\mu(A_n) = 1$.

Si tomamos $m \neq n$ entonces $\mu(A_m) = 0$, ya que es ajeno a A_n y entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

Ahora supongamos que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

En este caso la red (x_i) está eventualmente en $X\diagdown \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, o sea, está eventualmente en cada $X\diagdown A_n$. Por consiguiente, $\mu(A_n) = 0$, para todo $n \geq 1$, por lo que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) = 0.$$

Es decir, μ es σ-aditiva y por tanto, es una medida en X. Como éste tiene cardinalidad no medible, entonces μ debe de ser trivial y como $\mu(X) = 1$, entonces existe $x \in X$ tal que $\mu(\{x\}) = 1$. Por consiguiente la red se estaciona en x, por lo que $x_i \longrightarrow x$. $\square$

5.4. Los espacios D y D^e

Ahora tomemos el primer ordinal D con cardinalidad medible y démosle la topología discreta.

Definamos $D^e = D \cup \{\infty\}$, donde $\infty \notin D$, y la familia

$$\tau = \{U \subset D^e : U \subset D \text{ o bien } \infty \in U \text{y } D^e\diagdown U \text{tiene cardinalidad no medible}\}.$$

Afirmamos que τ es una topología para D^e.

Claramente tanto el vacío, como D^e pertenecen a τ. Tomemos $U, U' \in \tau$; si $\infty \notin U$ o $\infty \notin U'$ entonces $\infty \notin U \cap U'$ y así, $U \cap U' \in \tau$. Supongamos que $\infty \in U \cap U'$ y observemos que $D^e\diagdown(U \cap U') = (D^e\diagdown U) \cup (D^e\diagdown U')$. Si $D^e\diagdown U$ y $D^e\diagdown U'$ son finitos, entonces $D^e\diagdown(U \cap U')$ es finito y por tanto $|D^e\diagdown(U \cap U')|$ es un cardinal no medible y entonces $U \cap U' \in \tau$.

Por otro lado, si $D^e\diagdown U$ o $D^e\diagdown U'$ es infinito, entonces

$$|D^e\diagdown(U \cap U')| = |(D^e\diagdown U) \cup (D^e\diagdown U')| = \max\{|D^e\diagdown U|, |D^e\diagdown U'|\}$$

lo que implica que $D^e\diagdown(U \cap U')$ es un conjunto de cardinalidad no medible , así $U \cap U' \in \tau$.

Por ultimo, veamos que τ es cerrado bajo uniones arbitrarias. Tomemos un familia $\{U_i : i \in I\} \subset \tau$ y sea $W = \bigcup_{i\in I} U_i$. Si $\infty \notin U_i$ para todo $i \in I$ entonces $\infty \notin W$, por lo que $W \in \tau$. Supongamos que $\infty \in U_j$ para alguna $j \in I$, entonces $\infty \in W$ y $|D^e\diagdown U_j|$ es un cardinal no medible. Observemos que $D^e\diagdown W \subset D^e\diagdown U_j$, lo que implica que $|D^e\diagdown W| \leq |D^e\diagdown U_j|$. Por el

Teorema 5.2.11 se deduce que W no es medible y por tanto $W \in \tau$. Con esto queda probada nuestra afirmación.

El espacio D con la topología discreta es obviamente un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$. Ahora comprobamos que (D^e, τ) también lo es.

Sean $F \subset D^e$ un cerrado y $x \in D^e \diagdown F$. Si $x \in D$, entonces $\{x\}$ es abierto y también lo es $D^e \diagdown \{x\}$, pues este conjunto contiene a ∞ y su complemento es $\{x\}$ que tiene cardinalidad no medible. Entonces, la característica de $\{x\}$ definida en D^e es continua y separa a x y F. Si $x = \infty$, entonces $F \subset D$. Por tanto, F es también abierto y la característica de F definida en D^e es continua y separa a x y F.

Teorema 5.4.1. (D^e, τ) *es realcompacto.*

Demostración. Sea $(x_i)_{i\in I}$ una red en D^e tal que $f(x_i) \longrightarrow y_f$ para toda $f \in C(D^e)$. Probaremos que (x_i) converge.

Si $M \subset D$ es un conjunto de cardinalidad no medible, entonces: N y $D^e \diagdown N$ son abiertos en D^e para todo $N \subset M$, cualquier función $g : M \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua porque la topología inducida en M por τ es la discreta y la función $h_g : D^e \to \mathbb{C}$ definida como

$$h_g(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in M \\ 1 & \text{si } x \in D^e \diagdown M \end{cases}$$

donde g es una función compleja definida en M es también continua.

Supongamos que existe un conjunto M de cardinalidad no medible tal que $J = \{j \in I : x_j \in M\}$ es un conjunto cofinal de I. Entonces, la red $(x_j)_{j\in J}$ en M es una subred de $(x_i)_{i\in I}$.

Por tener M cardinalidad no medible y el Teorema 5.3.1, M es realcompacto.

Como para cualquier función $g : M \longrightarrow \mathbb{C}$ se tiene, por hipótesis, que $h_g(x_i) \to y_{h_g}$, entonces $h_g(x_j) = g(x_j) \longrightarrow y_{h_g}$. Al ser M real compacto, concluimos que $x_j \longrightarrow x$ para algún $x \in M$.

Sea $g_0 : M \longrightarrow \mathbb{C}$ la función cero, entonces $h_{g_0}(x_i) \longrightarrow y_{g_0}$, pero $h_0(x_j) = g_0(x_j) = 0$, por lo que $y_{g_0} = 0$. Entonces, existe $i_0 \in I$ tal que para toda $i \geq i_0$, $g_0(x_i) = 0$. Por consiguiente, $i \geq i_0$ implica $x_i \in M$; es decir, $i \in J$ y por tanto, $x_i \longrightarrow x$.

Supongamos ahora que $J = \{j \in I : x_j \in M\}$ no es un conjunto cofinal de I para ningún conjunto $M \subset D$ de cardinalidad no medible. Dada una vecindad U de ∞ tenemos que $D^e \diagdown U \subset D$ y $D^e \diagdown U$ es de cardinalidad no medible. Así, $J = \{j \in I : x_j \in D^e \diagdown U\}$ no es un conjunto cofinal de I por lo que existe $i_0 \in I$ tal que $x_i \in U$ para todo $i \geq i_0$. De donde, $x_i \longrightarrow \infty$. Por tanto, D^e es realcompacto. $\square$

Teorema 5.4.2. *D con la topología discreta no es realcompacto.*

Demostración. Construiremos una red en D que será divergente y tal que bajo cualquier función compleja definida en D se obtiene una red convergente. Por el Teorema 5.1.3, D no es realcompacto.

Tomemos en D una medida no trivial μ y sea

$$\mathcal{A} = \{A \subset D : \mu(A) = 1\}.$$

Por el Teorema 5.2.8, el orden inverso de la contención de conjuntos dirige a $\mathcal{A}$ ya que $A, A' \in \mathcal{A}$ implica que $A \bigcap A' \in \mathcal{A}$.

Tomemos $x_A \in A$ para cada $A \in \mathcal{A}$. La red $(x_A)_{A\in\mathcal{A}}$ diverge D, ya que en caso contrario existe, por tener D la topología discreta, $x \in D$ y $A_0 \in \mathcal{A}$ tales que $x = x_A$ para todo $A \subset A_0$, con $A \in \mathcal{A}$. Como μ es no trivial tenemos que $\{x\} \notin \mathcal{A}$. Así, $D\diagdown\{x\} \in \mathcal{A}$, $(D\diagdown\{x\}) \cap A_0 \subset A_0$ y $(D\diagdown\{x\}) \cap A_0 \in \mathcal{A}$, por lo que $x = x_{(D\diagdown\{x\})\cap A_0}$ y llegamos al absurdo $x \in (D\diagdown\{x\}) \cap A_0$.

Afirmamos que el rango de toda subred de $(x_A)_{A\in\mathcal{A}}$ tiene medida 1. Para probarlo consideremos una de tales subredes $\left(x_{h(i)}\right) = \left(x_{h(i)}\right)_{i\in I}$, su rango R y supongamos que $\mu(R) = 0$. Entonces $D\diagdown R \in \mathcal{A}$. Recordamos que I es un conjunto dirigido y $h : I \to \mathcal{A}$ es una función creciente tal que $h(I)$ es cofinal en $\mathcal{A}$. Por esto último, existe $i \in I$ tal que $h(i) \subset D\diagdown R$. Entonces, $x_{h(i)} \in D\diagdown R$ y obviamente, $x_{h(i)} \in R$; lo que es absurdo. Queda entonces probada nuestra afirmación.

Sea $f : D \to \mathbb{C}$ una función cualquiera. Probaremos que existen $c_0 \in \mathbb{C}$ y $A_0 \in \mathcal{A}$ tales $x_A \in= f^{-1}(c_0)$ si $A \in \mathcal{A}$ y $A \subset A_0$. Por tanto, la red $\left((f(x_A))_{A\in\mathcal{A}}\right)$ converge a c_0.

Si R es el rango de $(x_A)_{A\in\mathcal{A}}$, entonces por lo antes visto se tiene que

$$1 = \mu(R) = \mu\left(\left\{\bigcup_{c\in\mathbb{C}} \left(f^{-1}(c) \cap R\right)\right\}\right) = \sum_{c\in\mathbb{C}} \mu\left(f^{-1}(c) \cap R\right),$$

donde la ultima igualdad se da por el inciso (b) del Lema 5.2.9 ya que $\mathbb{C}$ tiene cardinalidad no medible.

Entonces existe un único complejo c_0 tal que $\mu\left(f^{-1}(c_0) \cap R\right) = 1$.

El conjunto

$$\mathcal{A}_0 = \left\{A \in \mathcal{A} : x_A \in D\diagdown f^{-1}(c_0)\right\}$$

no es cofinal en $\mathcal{A}$, pues de serlo tenemos que $(x_A)_{A\in\mathcal{A}_0}$es una subred de $(x_A)_{A\in\mathcal{A}}$, su rango R_0 tiene medida 1 y como $R_0 \subset R\diagdown\left(f^{-1}(c_0) \cap R\right)$, entonces

$$\mu\left(R\diagdown\left(f^{-1}(c_0) \cap R\right)\right) = 1$$

Esto conduce al absurdo

$$1 = \mu(R) = \mu\left(f^{-1}(c_0) \cap R\right) + \mu\left(R \setminus \left(f^{-1}(c_0) \cap R\right)\right) = 2,$$

Así, existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que las condiciones $A \in \mathcal{A}$ y $A \subset A_0$ implican $A \notin \mathcal{A}_0$; es decir, $x_A \in f^{-1}(c_0)$ si $A \in \mathcal{A}$ y $A \subset A_0$. □

TEOREMA 5.4.3. *Un conjunto X con la topología discreta es realcompacto si y sólo si tiene cardinalidad no medible.*

DEMOSTRACIÓN. La parte "si" es el teorema 5.3.1. Para la otra parte, supongamos que X es un conjunto con cardinalidad medible dotado de la topología discreta. Bien ordenamos al conjunto X y concluimos que $|D| \leq |X|$, por ser D el primer ordinal con cardinalidad medible. Entonces existe $Y \subset X$ tal que $|D| = |Y|$. El espacio Y con la topología discreta es homeomorfo a D con la topología discreta. Por tanto, el subespacio cerrado Y de X no es realcompacto y entonces tampoco lo es el espacio X. □

Capítulo 6

Ejemplo en que $\mathcal{M}^{\#}(CV(X,E)) \neq X \times \mathcal{M}^{\#}(E)$

Daremos un ejemplo de un espacio $CV(X,E)$ para el cual no es cierto que si $H : CV(X,E) \longrightarrow \mathbb{C}$ es un carácter no nulo, entonces existen $x_0 \in X$ y un carácter de álgebras $h \in \mathcal{M}(E)$ tales que $H(f) = H_{(x_0,h)}(f) = h(f(x_0))$ para toda $f \in CV(X,E)$.

6.1. El álgebra $C(X,E)$ vista como una álgebra $CV(X,E)$

Sean X un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ y E un álgebra localmente convexa cuya topología está dada por la familia de seminormas $\{q_i : i \in I\}$. Vimos en el Ejemplo 1.1 de la página 77 que $CV(X,E) = C(X,E)$ cuando $V = \{\lambda\chi_A : \lambda > 0 \text{ y } A \subset X \text{ finito}\}$ y que su topología está dada por las seminormas $\|f\|_{i,x} = q_i(f(x))$ con $i \in I$ y $x \in X$. Recordamos que está es la topología de la convergencia puntual.

Cuando $E = \mathbb{C}$, entonces $CV(X,E) = C(X)$ y su topología está dada por las seminormas

$$q_x(\alpha) = |\alpha(x)|$$

donde x corre por X.

Los espacios D y D^e, definidos en la sección anterior, son espacios $T_{3\frac{1}{2}}$. Hagamos $X = D$, $E = \mathbb{C}$ y $V = \{\lambda\chi_A : \lambda > 0 \text{ y } A \subset X \text{ finito}\}$. Entonces

$$CV(X,E) = C(D)$$

y la topología de esta álgebra está dada por las seminormas

$$|\alpha|_d = |\alpha(d)|$$

con $\alpha \in C(D)$ y $d \in D$.

Como D tiene la topología discreta, entonces $C(D) = \mathbb{C}^D$.

Cambiemos D por $D^e \times D$. Entonces

$$CV(X,E) = C(D^e \times D)$$

y su topología está dada por las seminormas

$$|\alpha|_{(d',d)} = |\alpha(d',d)|$$

con $\alpha\in C\left(D^{e}\times D\right)$ y $\left(d',d\right)\in D^{e}\times D$.

Si $X=D^{e}$, $E=C\left(D\right)$ y $V=\left\{\lambda\chi_{A}:\lambda>0 \text{ y } A\subset X \text{ finito}\right\}$, entonces

$$CV\left(X,E\right)=C\left(D^{e},C\left(D\right)\right)$$

y la topología de está álgebra localmente convexa está dada por las seminormas definidas como

$$\left\|f\right\|_{\left(d,d'\right)}=\left|f\left(d'\right)\left(d\right)\right|$$

para cada $\left(d,d'\right)\in D^{e}\times D$.

Las tres álgebras $C\left(D\right)$, $C\left(D^{e}\times D\right)$ y $C\left(D^{e},C\left(D\right)\right)$ son m-convexas.

6.2. Los caracteres $H_{d',p}$ de $C\left(D^{e},C\left(D\right)\right)$

TEOREMA 6.2.1. *La transformación $T:C\left(D\right)\rightarrow C\left(v\left(D\right)\right)$ definida como $T\left(f\right)=f^{e}$, donde f^{e} es la restricción a $v\left(D\right)$ de la extensión de f a $\beta\left(D\right)$, es un isomorfismo de álgebras.*

DEMOSTRACIÓN. La función f^{e} es compleja debido a la definición de $v\left(D\right)$. De la unicidad de la extensión a $\beta\left(D\right)$ de cada función en $C\left(D\right)$, se sigue que T es un isomorfismo de álgebras. $\square$

TEOREMA 6.2.2. *Para cada $p\in v\left(D\right)$ definimos la función $\phi_{p}:C\left(D\right)\rightarrow\mathbb{C}$ como $\phi_{p}\left(f\right)=f^{e}\left(p\right)$. Entonces*

$$\mathcal{M}^{\#}\left(C\left(D\right)\right)=\left\{\phi_{p}:p\in v\left(D\right)\right\}.$$

Esta igualdad también la escribimos como

$$\mathcal{M}^{\#}\left(C\left(D\right)\right)=v\left(D\right) \tag{6.2.1}$$

.

DEMOSTRACIÓN. Con la notación del teorema anterior tenemos que $\phi_{p}=\hat{p}\circ T$, donde $\hat{p}$ denota la evaluación en p. Entonces ϕ_{p} es un carácter en $C\left(D\right)$ y no es nulo, ya que las funciones constantes están en $C\left(D\right)$. Así, $\phi_{p}\in\mathcal{M}^{\#}\left(C\left(D\right)\right)$.

Inversamente si $\phi\in\mathcal{M}^{\#}\left(C\left(D\right)\right)$, entonces $\phi\circ T^{-1}\in\mathcal{M}^{\#}\left(C\left(v\left(D\right)\right)\right)$. Por el Teorema 5.1.2,

$$\mathcal{M}^{\#}\left(C\left(\nu\left(D\right)\right)\right)=\left\{\hat{p}:p\in\nu\left(D\right)\right\}$$

De donde, existe $p\in v\left(D\right)$ tal que $\phi\circ T^{-1}\left(f^{e}\right)=f^{e}\left(p\right)$ para todo $f^{e}\in C\left(v\left(D\right)\right)$. O sea,

$$\phi\left(f\right)=\left(\phi\circ T^{-1}\right)\left(T\left(f\right)\right)=f^{e}\left(p\right)=\phi_{p}\left(f\right)$$

para todo $f\in C\left(D\right)$. $\square$

Para cada $(d', \phi_p) \in D^e \times \mathcal{M}^{\#}(C(D))$ se define en $C(D^e, C(D))$ el carácter $H_{d',\phi}$como

$$H_{d',\phi_p}(f) = \phi_p(f(d')) = (f(d'))^e(p).$$

A $H_{d',\phi}$ lo denotaremos como $H_{d',p}$. Así,

$$H_{d',p}(f) = (f(d'))^e(p) \tag{6.2.2}$$

para cada $(d', p) \in D^e \times v(D)$ y $f \in C(D^e, C(D))$.

En términos de los elementos de D tenemos que

$$H_{d',p}(f) = lim\ (f(d'))(d_i) = lim\ f(d')(d_i) \tag{6.2.3}$$

donde (d_i) es cualquier red (d_i) en D que converge a p.

6.3. El isomorfismo Γ

TEOREMA 6.3.1. *La función* $\Gamma : C(D^e, C(D)) \longrightarrow C(D^e \times D)$*, donde*

$$\Gamma(f)(d', d) = f(d')(d),$$

es un isomorfismo de álgebras topológicas.

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que Γ es un homomorfismo. Es bicontinuo, pues para cada $(d', d) \in D^e \times D$ se cumple que

$$\begin{aligned} |\Gamma(f_i)|_{(d',d)} &= |\Gamma(f_i)(d, d')| \\ &= |(f_i(d))(d')| \\ &= \|f_i\|_{(d,d')}. \end{aligned}$$

Para ver que Γ es inyectiva supongamos que $\Gamma(f) = 0$, lo que significa que $(f(d'))(d) = 0$ para todo $(d', d) \in D^e \times D$. Entonces $f(d') = 0$ para toda $d' \in D^e$ y por tanto, f es la función cero. Así, $\Gamma(f)$ es la función cero, por tanto, Γ es inyectiva.

Para ver que Γ es sobre, tomemos $\alpha \in C(D^e \times D)$ y observemos que cada una de sus D^e-secciones $\alpha_{d'}$ está en $C(D) = \mathbb{C}^D$. Definimos $f : D^e \to C(D)$ como $f(d') = \alpha_{d'} = \alpha(d', \_)$.

Afirmamos que $f \in C(D^e, C(D))$, en cuyo caso es claro que $\Gamma(f) = \alpha$. Tomemos una red (d'_i) en D^e tal que $(d'_i) \longrightarrow d'_0$ en D^e. Entonces,

$$|f(d'_i) - f(d'_0)|_d = |\alpha(d'_i, d) - \alpha(d'_0, d)|$$

para cualquier $d \in D$.

Por ser α continua, y tenerse que $(d'_i, d) \longrightarrow (d'_0, d)$, se sigue que

$$|\alpha(d'_i, d) - \alpha(d'_0, d)| \longrightarrow 0.$$

De donde, f es continua. □

6.4. Las funciones f'y f'' y algunas de sus propiedades

Sean $f \in C(D^e, C(D))$. Entonces, $\Gamma(f) \in C(D^e \times D)$ y sus D^e- secciones $\Gamma(f)_{d'} : D \to \mathbb{C}*$ son continuas en D, por lo que sus extensiones continuas $(\Gamma(f)_{d'})^e$ a $\beta(D)$ no toman el valor ∞ en $v(D)$. Así, existe

$$\alpha(f) : D^e \times v(D) \longrightarrow \mathbb{C}$$

definida como

$$\alpha(f)(d', p) = (\Gamma(f)_{d'})^e(p) = lim\ f(d')(d_i); \tag{6.4.1}$$

donde (d_i) es cualquier red en $\beta(D)$ que converge a p.

En particular, para cualquier $p_1 \in v(D)$ la restricción

$$\alpha(f)_{D^e \times \{p_1\}} : D^e \times \{p_1\} \to \mathbb{C} \tag{6.4.2}$$

es una función continua y su extensión continua

$$\alpha(f)^e_{D^e \times \{p_1\}} : v(D^e \times \{p_1\}) \to \mathbb{C}$$

a $v(D^e \times \{p_1\})$ es compleja valuada.

Fijemos $p_1 \in \nu(D)$. Para simplificar la notación, haremos

$$f' = \alpha(f)$$

y

$$f'' = f'_{D^e \times \{p_1\}}$$

para cada $f \in C(D^e, C(D))$, donde $f'_{D^e \times \{p_1\}}$ es la restricción de f' a $D^e \times \{p_1\}$.

Entonces, lo anterior se resume del siguiente modo: para cada $f \in C(D^e, C(D))$ hay dos funciones

$$\begin{array}{rcc} f' : D^e \times v(D) & \to & \mathbb{C} \\ (d', p) & \to & (\Gamma(f)_{d'})^e(p) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcc} f'' : v(D^e \times p_1) & \to & \mathbb{C} \\ p' & \to & \left(f'_{D^e \times \{p_1\}}\right)^e(p') \end{array}$$

que son continuas y tales que:

1. Si $f \in C(D^e, C(D))$, entonces,

$$f'(d', p) = lim\ f(d')(d_i), \tag{6.4.3}$$

donde, $(d', p) \in D^e \times v(D)$ y (d_i) es cualquier red en D que converge a p.

2. En particular, si $\alpha \in C(D^e \times D)$ y $f \in C(D^e, C(D))$ es la función que satisface $\Gamma(f) = \alpha$, entonces

$$f'(d', p) = lim\ f(d')(d_i) = lim\ \alpha(d'_i, d_i)$$

donde, $(d', p) \in D^e \times v(D)$ y (d_i) es cualquier red en D que converge a p.

3. Si $f \in C(D^e, C(D))$, entonces,

$$f''(p') = lim\ f'(d_i', p_1), \tag{6.4.4}$$

donde $p' \in v(D^e \times \{p_1\})$ y (d_i', p_1) es cualquier red en $D^e \times \{p_1\}$ que converge a p'.

4. Las transformaciones

$$\underset{f}{C(D^e, C(D))} \to \underset{f'}{C(D^e \times v(D))}$$

y

$$\underset{f}{C(D^e, C(D))} \to \underset{f''}{C(v(D^e \times \{p_1\}))}$$

son lineales.

Las primeras afirmaciones de 4 se siguen de que si $f, g \in C(D^e, C(D))$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $\Gamma(f + \lambda g)_{d'} = \lambda\Gamma(f)_{d'} + \Gamma(g)_{d'}$ y $\Gamma(fh)_{d'} = \Gamma(f)_{d'}\Gamma(h)_{d'}$ y estas igualdades se mantienen para las funciones α definidas como en (6.4.1), pues la toma de extensiones es lineal; es decir,

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g' \text{ y } (fg)' = f'g'.$$

A su vez al tomar las restricciones (6.4.2) de estas funciones a $D^e \times \{p_1\}$ se conservan las igualdades y finalmente sucede lo mismo para las extensiones de dichas restricciones a $v(D^e \times \{p_1\})$; o sea

$$(\lambda f + g)'' = \lambda f'' + g'' \text{ y } (fg)'' = f''g''.$$

5. Al comparar (6.2.3) y (6.4.3) tenemos que

$$H_{d',p}(f) = f'(d', p)$$

donde, $(d', p) \in D^e \times v(D)$.

6.5. El ejemplo

Afirmamos que

$$\left(\mathcal{M}^{\#}(C(D^e, C(D)))\right) \neq D^e \times \mathcal{M}^{\#}(C(D)).$$

en el sentido de que hay un elemento $H \in \mathcal{M}^{\#}(C(D^e, C(D)))$ tal que

$$H \neq H_{d',p}$$

$(d', p) \in D^e \times v(D)$. Recuérdese que $\mathcal{M}^{\#}(C(D))$ se identifica con $v(D)$ (6.2.1).

Sabemos que D no es realcompacto, así que $D \subsetneq v(D)$. Tomemos

$$p_1 \in v(D) \setminus D.$$

Como $|D^e \times \{p_1\}| = |D|$, entonces $|D \times \{p_1\}|$es medible y por tanto, $D^e \times \{p_1\}$ con la topología discreta no es real compacto. Tomemos

$$p_2^{'} \in v\left(\left(D^e \times \{p_1\}\right)\right) \diagdown \left(D^e \times \{p_1\}\right).$$

Tomemos dos redes: $(d_j)_{j \in J}$ en D y $\left(d_i^{'}\right)_{i \in I}$ en D^e tales que

$$d_j \to p_1$$

y

$$\left(d_i^{'}, p_1\right) \to p_2'.$$

Entonces, por las Propiedades 1 y 2 de la página 152 tenemos que

$$f'\left(d^{'}, p_1\right) = lim\ f\left(d^{'}\right)(d_j)$$

y

$$f''\left(p_2^{'}\right) = lim\ f'\left(d_i^{'}, p_1\right)$$

para cada $d' \in D^e$ y $f \in (D^e, C(D))$.

La función $H : C(D^e, C(D)) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$H(f) = f''\left(p_2^{'}\right)\left(= lim\ f'\left(d_i^{'}, p_1\right)\right)$$

es un carácter, ya que por la Propiedad 4 de la página 153 si

$$f, g \in C(D^e, C(D))$$

y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$H(f+g) = (\lambda f + g)''\left(p_2^{'}\right) = \lambda f''\left(p_2^{'}\right) + g''\left(p_2^{'}\right) = \lambda H(f) + H(g),$$

y

$$H(fg) = (fg)''\left(p_2^{'}\right) = f''(p_2)\, g''\left(p_2^{'}\right) = H(f)\, H(g).$$

Además H es no nulo, pues

$$f'\left(d_i^{'}, p_1\right) = lim\ f\left(d_i^{'}\right)(d_j)$$

para cualquiera i. Si hacemos $f_1\left(d^{'}\right)$igual a la función constante 1 en D, para todo $d' \in D^e$, entonces $f_1'\left(d_i^{'}, p_1\right) = 1$ para todo i y

$$H(f_1) = 1.$$

Afirmamos que

$$H \neq H_{\left(d^{'}, p\right)}$$

para toda pareja $\left(d^{'}, p\right) \in D^e \times v(D)$.

Sea $\left(d_0^{'}, p_0\right) \in D^e \times v(D)$ arbitrario. Tomemos en D una red $\left(d_k^0\right)_{k\in K}$ tal que

$$d_k^0 \to p_0,$$

entonces

$$H_{\left(d_0^{'}, p_0\right)}(f) = f'\left(d_0^{'}, p_0\right)\left(= lim\ f\left(d_0^{'}\right)\left(d_k^0\right)\right)$$

para cada $f \in (D^e, C(D))$.

Supongamos que $d_0^{'} \in D$ y definamos $f : D^e \to C(D)$ como

$$f\left(d^{'}\right) = \begin{cases} \text{la función constante 0 en } D & \text{si } d^{'} \neq d_0^{'} \\ \text{la función constante 1 en } D & \text{si } d^{'} = d_0 \end{cases}$$

Entonces $f \in C(D^e, C(D))$ ya que $\left\{d_0^{'}\right\}$ y $D^e \diagdown \left\{d_0^{'}\right\}$ son abiertos: el primero por ser un subconjunto de D y el segundo por contener a ∞ y ser su complemento un conjunto finito y por tanto, no medible.

Entonces, $f\left(d_0^{'}\right)(d) = 1$ para todo $d \in D$ y así, por

$$H_{\left(d_0^{'}, p_0\right)}(f) = f'\left(d_0^{'}, p_0\right) = 1.$$

Por otra parte, si $d^{'} \neq d_0^{'}$, entonces $f\left(d^{'}\right)(d) = 0$ para todo $d \in D$ y por tanto,

$$f'\left(d^{'}, p_1\right) = \text{lím}\ f\left(d^{'}\right)(d_j) = 0.$$

En particular

$$f'\left(d_i^{'}, p_1\right) = \text{lím}\ f\left(d_i^{'}\right)(d_j) = 0.$$

para todo $i \in I$.

El conjunto $I_0 = \left\{i \in I : d_i^{'} = d_0^{'}\right\}$ no es cofinal en I, pues de serlo la red $\left(d_i^{'}\right)_{i\in I_0}$ es una subred de $\left(d_i^{'}\right)$ y por tanto, (d_i', p_1)converge a $\left(d_0^{'}, p_1\right)$. Entonces, $p_2' = \left(d_0^{'}, p_1\right)$ pertenece a $D^e \times \{p_1\}$ lo que es contrario a la elección de p_2'.

Por tanto, existe $i_0 \in I$ tal que $i > i_0$ implica $d_i' \neq d_0'$. De donde,

$$H(f) = f''\left(p_2^{'}\right) = \text{lím}\, f'\left(d_i^{'}, p_1\right) = 0.$$

Así, $H(f) \neq H_{\left(d_0^{'}, p_0\right)}(f)$ y por tanto,

$$H \neq H_{\left(d_0^{'}, p_0\right)}.$$

Ahora supongamos que $d_0^{'}=\infty$. Definamos $\alpha: D^e\times D\longrightarrow\mathbb{C}$ como

$$\alpha\left(d',d\right)=\begin{cases}1 & \text{si } d^{'}\in D \text{ y } d\leq d^{'}\\ 0 & \text{si } d^{'}\in D \text{ y } d>d^{'}\\ 1 & \text{si } d^{'}=\infty.\end{cases}$$

Esta función es continua; o sea

$$\alpha\in C\left(D^e\times D\right).$$

Para probarlo, tomemos $\left(d^{'},d\right)\in D^e\times D$ y $\left(d_l^{'},d_l\right)_{\in L}$ una red en $D^e\times D$ tal que $\left(d_l^{'},d_l\right)\longrightarrow\left(d^{'},d\right)$. Así, $\left(d_l^{'}\right)\longrightarrow d^{'}$ y $\left(d_l\right)\longrightarrow d$. La red $\left(d_l\right)$ eventualmente se estaciona en d, pues D tiene la topología discreta.

Si $d^{'}\in D$, entonces existe $l_0\in L$ tal que $l>l_0$ implica $d_l^{'}=d^{'}$ y $d_l=d$, ya que D tiene la topología discreta. Por consiguiente, $\alpha\left(d_l^{'},d_l\right)=\alpha\left(d^{'},d\right)$ si $l>l_0$ y entonces, $\alpha\left(d_l^{'},d_l\right)\longrightarrow\alpha\left(d^{'},d\right)$.

Ahora supongamos que $d^{'}=\infty$. Sea

$$C=\left\{d_1\in D: d_1\geq d\right\}=\left\{d_1\in D:\alpha\left(d_1,d\right)=1\right\}.$$

Entonces $D\diagdown C=\left\{d_1\in D: d_1<d\right\}$ es una segmentos de D y por tanto, es un ordinal menor que D. Entonces $D\diagdown C$ es un conjunto de cardinalidad no medible, ya que D es el primer ordinal con cardinalidad medible. Así, $C\cup\{\infty\}$ es una vecindad de ∞, por lo que existe $l_0\in L$ tal que $l>l_0$ implica, $d_l^{'}\in C\cup\{\infty\}$ y $d_l=d$. Entonces, $l>l_0$ implica $\alpha\left(\left(d_l^{'},d_l\right)\right)=\alpha\left(\left(d_l^{'},d\right)\right)=1=\alpha\left(\infty,d\right)$, tanto si $d_l^{'}\in C$, como si $d_l^{'}=\infty$. Así, $\alpha\left(d_l^{'},d_l\right)\longrightarrow\alpha\left(\infty,d\right)$. Por tanto, α es continua en $D^e\times D$.

Fijemos $d\in D$ y hagamos

$$A=\left\{d_2\in D:\alpha\left(d,d_2\right)=1\right\}=\left\{d_2\in D: d_2\leq d\right\}.$$

La cardinalidad de A es no medible, pues $|A|=\left|\left\{d_2\in D: d_2<d\right\}\right|$ y según se vio en párrafo anterior $\left|\left\{d_2\in D: d_2<d\right\}\right|$ es no medible. Entonces A es realcompacto.

El punto p_1 no se encuentra en la cerradura $\overline{A}^{v(D)}$ de A; ya que en otro caso, existe una red $\left(d_s\right)$ en A, tal que $\left(d_s\right)\longrightarrow p_1$ en $v\left(D\right)$, por lo que $lim\ \gamma\left(x_s\right)$ existe para toda $\gamma\in C\left(A\right)$. Por ser A un espacio realcompacto $\left(x_s\right)$ converge a un punto de A y por tanto $p_1\in A$. Esto contradice la elección de p_1. Así, $v\left(D\right)\diagdown A$ es una vecindad de p_1.

Por la Propiedad 2 de la página 152, tenemos que

$$f'(d', p_1) = \text{lím } \alpha(d', d_j)$$

para todo $d' \in D^e$.

Existe $j_0 \in J$ tal que $j > J_0$ implica d_j pertenece a la vecindad $v(D) \setminus A$ de p_1. Entonces $d_j \in \{d_2 \in v(D) : d_2 > d\}$ si $j > j_0$ y por consiguiente, $\alpha(d, d_j) = 0$ para tales j. De donde $f'(d', p_1) = 0$ para toda $d' \in D^e$ y entonces

$$H(f) = f''\left(p_2^{'}\right) = lim\ f'\left(d_i^{'}, p_1\right) = 0$$

y

$$H_{(\infty, p_0)}(f) = f'(\infty, p_0) = lim\ \alpha(\infty, d_i) = 1.$$

Así, $H(f) \neq H_{(\infty, p_0)}(f)$ y por tanto,

$$H \neq H_{\left(d_0^{\prime}, p_0\right)}.$$

Bibliografía

[Ba.] R. G. Bartle, *The elements of real analysis*, segunda ed., Wiley, New York, 1976.

[Di.,Sc.,We.] S. Dierolf , K.-H. Schroder y J. Wengenroth, *Characters on certain function algebras*, Funct. Approx. Comment. Math. **26** (1998), 53–58.

[Di.] W. E. Dietrich, Jr, *The maximal ideal space of the topological algebra C(X,E),* Mat. Ann. **183** (1969) , 201-212.

[Du.] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston 1965.

[Er.] Z. Ercan, *An observation on realcompact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **134**, No. 3 (Dec., 2005), 417-920.

[Er., On..] Z. Ercan and S. Onal, *A remark on the homomorphism on C(X)*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. **133**, No. 12 (2005), 3609-3611.

[Ga.] F. García, *A new proof that a discrete space is realcompact if and only if it has no measurable cardinality*, versión preliminar.

[Gi., Je.] L. Gillman and M. Jerinson, *Rings of continuous functions*, Graduate Texts in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

[Go.] W. Govaerts, *Homomorphisms of weighted algebras of continuous funtions*, Ann. Mat. Pura Appl. **116** (4) (1978), 151-158.

[Ha.] Hausner, A, *Ideals in a certain Banach algebra,* Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 246-259 .

[He.] W. J. Hery *Maximal ideal in algebras of topological algebra valued functions,* Pacific J. Math. **65** (2) (1976), 365-373.

[Ma.] A. Mallios, *Topological algebras. Selected topics*, Notas de Matemática, 109. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986.

[Me.] R. E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Springer, 1998.

[Na., Be.] L. Narici and E. Beckenstein, *Topological vector spaces*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 95. Marcel Dekker, Inc., New York, 1985.

[Ro] M. de la Rosa, *Topologías estrictas*, Tesis licenciatura, México D.F., 2004.

[Ru.] M. Rudin, *A new proof that metric spaces are paracompact,* Proc. Amer. Math. Soc., **20**, No. 2 (1969), 603.

[Wa.] R. C. Walker, *The Stone-*Čech *compactification*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[Wi.] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1970.

[Ze.] W. Żelazko, *Selected topics in topological algebras*, Lecture Notes Series, No. 31. Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Aarhus, 1971.