Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

LA 2-CATEGORÍA MONOIDAL CERRADA DE CATEGORÍAS EXTENSIVAS, “EXT”.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

A L E X A N D E R C R U Z C I G A R R O A

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. FRANCISCO MARMOLEJO RIVAS

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno:
   Cruz
   Cigarroa
   Alexander
   55 14 40 35
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemático
   407013502

2. Datos del tutor:
   Dr.
   Francisco
   Marmolejo
   Rivas

3. Datos del sinodal 1
   Dra.
   Nadia
   Romero
   Romero

4. Datos del sinodal 2
   M. en C.
   Elohim LLorente I
   Sumano y
   Ramírez

5. Datos del sinodal 3
   Dr.
   Hugo Alberto
   Rincón
   Mejía

6. Datos del sinodal 4
   Dr.
   José
   Ríos
   Montes

7. Datos del trabajo escrito
   La 2-categoría monoidal cerrada de categorías extensivas, “Ext”.
   90 p.
   2011.

Índice

Introducción

En el trabajo [15] de Gian-Carlo Rota, se hizo un análisis profundo de la Teoría de funciones de Möbius en matemáticas combinatorias y se comprobó su importancia. La noción de álgebra de incidencia juega un papel importante dentro de esto.

Las categorías de Möbius fueron introducidas por Leroux en [4] y abstraen la idea de conjunto parcialmente ordenado y localmente finito; además les asocia un álgebra de incidencia, donde se demuestra el principio de inversión de Möbius.

En el artículo "The Hopf algebra of Möbius intervals" de Lawvere y Menni, se construye un álgebra de Hopf H a través del enfoque objetivo aplicado a una categoría monoidal extensiva de objetos combinatorios, con valores en anillos apropiados, esencialmente abstraído de funtores combinatorios en los objetos. Ésta posee la propiedad que para cualquier categoría de Möbius $\mathcal{C}$, existe un morfismo de álgebras del dual H^* de H al álgebra de incidencia de $\mathcal{C}$. Además, el principio de inversión de Möbius en álgebras de incidencia se sigue de un resultado de la inversión en H^*. Ellos creen que el ajuste 2-categórico correcto de algunos de sus resultados parece ser la 2-categoría de categorías extensivas Ext y su producto tensorial.

En el trabajo, se supone que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de la Teoría de categorías como son: categorías, subcategorías, transformaciones naturales, funtores, límites, colímites, productos, coproductos, coproductos y productos fibrados, categoría rebanada, adjunciones, isomorfismo natural, etc. Las definiciones se pueden encontrar en [1], [12] y [13].

Nuestro objetivo es construir esta estructura monoidal cerrada en la 2-categoría Ext dada por Gates en [6], y entender como se ajusta al problema de Lawvere y Menni, aunque esto último no es tratado en la tesis.

En el primer capítulo, damos la definición de categoría extensiva, basándonos en la definición dada en [18]; la cual abstrae la idea de que el coproducto en conjuntos y en topología es la unión disjunta. Dada la definición de categoría extensiva, obtenemos algunos resultados, uno de los cuales es que la suma es disjunta, además de ser distributiva en caso de tener productos. Consideramos la categoría de categorías extensivas y funtores que preservan sumas.

Dada una categoría $\mathcal{X}$, definimos la categoría $Fam(\mathcal{X})$, la cual es folklore categórico, la categoría de familias finitas de elementos de $\mathcal{X}$ o la completación bajo coproductos finitos de $\mathcal{X}$; la cual se prueba es extensiva, y vemos algunas propiedades de ésta en el capítulo 2.

En el capítulo 3, construimos la categoría de fracciones, con la idea siguiente: Dada una categoría $\mathcal{X}$ y Γ una subclase de morfismos de la clase de morfismos de $\mathcal{X}$, bajo ciertas restricciones, podemos contruir una nueva categoría $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$, la cual "invierte" (en cierto sentido) a los morfismos en Γ, llamada la categoría de fracciones $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$, la cual es extensiva en caso de que $\mathcal{X}$ lo sea y Γ sea cerrada bajo sumas finitas. La definición dada aquí es la dual de la dada en [17] página 256. La construcción del producto tensorial en Ext, radica en que podemos invertir cierta clase de morfismos en $Fam(X \times Y)$, utilizando la categoría de fracciones. Es la analogía a la construcción del producto tensorial para grupos abelianos.

En el desarrollo de la tesis, veremos los aspectos técnicos de éstas ideas, concluyendo en el capítulo 4 con la construcción del producto tensorial en Ext.

Capítulo 1

Categorías extensivas

En este capítulo vamos a ver un caso especial de categorías utilizadas en este trabajo, las cuales absatraen la idea de suma y producto de números como lo hacemos regularmente. En estas categorías es posible hacer "teoría de números" y abstraer algunos resultados. La definición que utilizamos es la dada en [18], y se puede consultar más sobre el tema en [3].

Dados $\mathcal{X}$ una categoría con sumas finitas y $A, B \in \mathcal{X}$, podemos considerar el funtor $F : \mathcal{X}/A \times \mathcal{X}/B \longrightarrow \mathcal{X}/(A+B)$, el cual a un par $(f, g) \in \mathcal{X}/A \times \mathcal{X}/B$ le asocia $F(f, g) = f + g$; el único morfismo que hace conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd} D_f + D_g \arrow[r, "f+g"] & A + B \\ D_f \arrow[u, "i_{D_f}"] \arrow[r, "f"'] & A \arrow[u, "i_A"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D_f + D_g \arrow[r, "f+g"] & A + B \\ D_g \arrow[u, "i_{D_g}"] \arrow[r, "g"'] & B \arrow[u, "i_B"'] \end{tikzcd}$$

Y dado un morfismo $(x, y) : (f, g) \to (h, k)$ en $\mathcal{X}/A \times \mathcal{X}/B$, le asigna el morfismo $x + y : D_f + D_g \to D_h + D_k$, el cual hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} D_f + D_g \arrow[rr, "x+y"] \arrow[dr, "f+g"'] & & D_h + D_k \arrow[dl, "h+k"] \\ & A + B & \end{tikzcd}$$

Se deja al lector demostrar que es funtor.

La siguiente definición expresa en términos de funtores, cuando un morfismo $f : D_f \to A + B$ se puede descomponer de tal manera que obtengamos dos morfismos $f_1 : D_{f_1} \to A$ y $f_2 : D_{f_2} \to B$; con la propiedad que $D_{f_1} + D_{f_2} = D_f$ y $f_1 + f_2 = f$, como la suma en las categorías Con y Top.

1.1 Definición

Definición 1.1 ***Categoría extensiva***

Una categoría $\mathcal{X}$ se dice que es extensiva si tiene sumas finitas y $\forall A, B \in \mathcal{X}$ el funtor $F : \mathcal{X}/A \times \mathcal{X}/B \longrightarrow \mathcal{X}/(A+B)$ es una equivalencia de categorías.

Al funtor anterior le llamaremos el funtor de comparación.

Véase que cuando se tiene sumas finitas, tenemos un objeto inicial en la categoría, pues $\sum_{\emptyset} A = 0$ donde 0 es el objeto inicial de $\mathcal{X}$. Observemos que, $\forall A \in \mathcal{X}$, $A + 0 \cong A$. Esto es fácil de comprobar con la definición de coproducto en una categoría y demostrando que A cumple con la propiedad universal del coproducto de A y 0.

A continuación veremos un teorema muy útil para comprobar si una categoría es extensiva. Otro ejemplo de categoría extensiva es la categoría de gráficas finitas $Graph_f$.

1.2 Teorema de equivalencia

El siguiente teorema es muy útil en este trabajo, puesto que nos da una caracterización de las categorías extensivas, la cual es más fácil de utilizar pues trabaja con los elementos de la categoría y no con funtores.

Teorema 1.2 *Sea $\mathcal{X}$ una categoría, entonces $\mathcal{X}$ es extensiva si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$\mathcal{X}$ tiene sumas finitas.*

2. *$\mathcal{X}$ admite productos fibrados a lo largo de inyecciones de sumas binarias.*

3. *Dado un diagrama conmutativo en $\mathcal{X}$*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] & Y \arrow[l] \arrow[d] \\ A \arrow[r] & A+B & B \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Si la parte de abajo es una suma, entonces los cudrados son productos fibrados si y solo si la parte de arriba es una suma.

($\Longrightarrow$) Supongamos que $\mathcal{X}$ es extensiva, con lo cual tiene sumas finitas. Veamos que se cumple la condición (2). Supongamos que el funtor de comparación es una equivalencia de categorías; y por el teorema 1 del capítulo IV, sección 4 de [12], pág. 91, tenemos que F es parte de una adjunción de equivalencia $\langle G, F, \eta, \epsilon\rangle$, donde la unidad $\eta : Id \Rightarrow FG$ y la counidad $\varepsilon : GF \to Id$ son isomorfismos naturales.

Supongamos que tenemos un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "i_A"] & A+B \end{tikzcd}$$

Veamos que este diagrama acepta un producto fibrado. Como $h \in \mathcal{X}/(A+B)$, entonces $(h_1, h_2) = G(h) \in \mathcal{X}/A \times \mathcal{X}/B$. Luego, como $\eta_h : h \cong h_1 + h_2$, entonces $Z \cong Z_1 + Z_2$. Luego, tenemos el morfismo $i_{Z_1} : Z_1 \to Z_1 + Z_2$. Veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[r, "i_{Z_1}"] \arrow[d, "h_1"] & Z_1+Z_2 \arrow[d, "h_1+h_2"] \\ A \arrow[r, "i_A"] & A+B \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. Supongamos que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "w"'] & Z_1+Z_2 \arrow[d, "h_1+h_2"] \\ A \arrow[r, "i_A"] & A+B \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

P.D. $\exists! f : W \to Z_1$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "w"'] & & \\ & Z_1 \arrow[r, "i_{Z_1}"] \arrow[d, "h_1"'] & Z_1+Z_2 \arrow[d, "h_1+h_2"] \\ & A \arrow[r, "i_A"] & A+B \end{tikzcd}$$

conmuta.

Como $W \cong W+0$ e $i_W : W \to W+0$ es el isomorfismo entre W y $W+0$; tenemos el morfismo $g \circ i_W^{-1} : W+0 \to Z_1+Z_2$ Con lo cual, obtenemos el cuadrado conmutativo conmutativo

$$\begin{tikzcd} W+0 \arrow[r, "g\circ i_W^{-1}"] \arrow[d, "w+!"'] & Z_1+Z_2 \arrow[d, "h_1+h_2"] \\ A+0 \arrow[r, "Id_A+!"'] & A+B \end{tikzcd}$$

Luego, $g \circ i_W^{-1} \in \mathcal{X}/(A+B)$, pues hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} W+0 \arrow[rr, "g\circ i_W^{-1}"] \arrow[dr, "w+!"'] & & Z_1+Z_2 \arrow[dl, "h_1+h_2"] \\ & A+B & \end{tikzcd}$$

Además, los elementos $(w+!)$ y (h_1+h_2) vistos bajo la equivalencia de $\mathcal{X}/(A+B)$ y $(\mathcal{X}/A \times \mathcal{X}/B)$, son $(w,!)$ y (h_1,h_2) respectivamente, entonces existen morfismos g_1 y $g_2 \in \mathcal{X}$ tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "g_1"] \arrow[dr, "w"'] & & Z_1 \arrow[dl, "h_1"] \\ & A & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[rr, "g_2"] \arrow[dr, "!"'] & & Z_2 \arrow[dl, "h_2"] \\ & B & \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

conmutan y $g \circ i_W^{-1} = g_1 + g_2$. Además, tenemos que $g_2 =!$, con lo cual $g \circ i_W^{-1} = g_1+!$. Proponemos a g_1 como el morfismo buscado. Veamos que es única con la propiedad de que el diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, "g_1"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "w"'] & & \\ & Z_1 \arrow[r, "i_{Z_1}"] \arrow[d, "h_1"] & Z_1+Z_2 \arrow[d, "h_1+h_2"] \\ & A \arrow[r, "i_A"'] & A+B \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

conmuta. Por (1.2), tenemos la parte izquierda del diagrama (1.3). Observando el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "i_W"'] & Z_1 \arrow[d, "i_{Z_1}"] \\ W+0 \arrow[r, "g_1+!"] & Z_1+Z_2 \end{tikzcd}$$

tenemos que $i_{Z_1} \circ g_1 = (g_1+!) \circ i_W = (g \circ i_W^{-1}) \circ i_W = g$, con lo cual tenemos la parte de arriba de (1.3), obteniendo que el diagrama (1.3) conmuta. Veamos la unicidad de g_1. Supongamos que existe $k : W \to Z_1$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "w"'] & & \\ & Z_1 \arrow[r, "i_{Z_1}"] \arrow[d, "h_1"] & Z_1+Z_2 \arrow[d, "h_1+h_2"] \\ & A \arrow[r, "i_A"] & A+B \end{tikzcd}$$

conmuta. Como los diagramas

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "w"'] & & Z_1 \arrow[dl, "h_1"] \\ & A & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[rr, "!"] \arrow[dr, "!"'] & & Z_2 \arrow[dl, "h_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

conmutan, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} W+0 \arrow[rr, "k+!"] \arrow[dr, "w+!"'] & & Z_1+Z_2 \arrow[dl, "h_1+h_2"] \\ & A+B & \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

conmuta. Además tenemos que $i_{Z_1} \circ k = g$, con lo cual $(i_{Z_1} \circ k) \circ i_W^{-1} = g \circ i_W^{-1} = g_1+!$, entonces, $(i_{Z_1} \circ k) = (g_1+!) \circ i_W$, i.e, el diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "i_W"] \arrow[d, "k"'] & W+0 \arrow[d, "g_1+!"] \\ Z_1 \arrow[r, "i_{Z_1}"'] & Z_1+Z_2 \end{tikzcd}$$

conmuta. Con esto obtenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} W+0 \arrow[r, "Id_{W+0}"] \arrow[d, "k+!"'] & W+0 \arrow[d, "g_1+!"] \\ Z_1+Z_2 \arrow[r, "Id_{Z_1+Z_2}"'] & Z_1+Z_2 \end{tikzcd}$$

entonces $k+! = g_1+!$, y como $k+!$ hace conmutar el diagrama (1.4), con lo cual, por la biyección entre $\mathcal{X}/(A+B)(w+!, h_1+h_2) \cong \mathcal{X}/A(w, h_1) \times \mathcal{X}/B(!, h_2)$ (en particualr la unicidad), tenemos que $k = g_1$. Esto demuestra la unicidad. La demostración que la inyección de B en $A+B$ acepta un producto fibrado es análoga.

$\therefore$ $\mathcal{X}$ acepta productos fibrados a lo largo de las inyecciones.

Ahora veamos que se cumple la condición (3). Sea

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[d, "h"] & Y \arrow[l, "b"'] \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"] \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo tal que la parte de abajo es una suma.

P.d Los cuadrados son productos fibrados sii la parte de arriba es una suma.

Demostración:

($\Longrightarrow$) Supongamos que los cuadrados son productos fibrados. Como el funtor F es una equivalencia de categorías, tenemos que $h \cong FG(h) = h_1 + h_2$. Luego, $Z \cong Z_1 + Z_2$, con Z_1 el dominio de h_1 y Z_2 el dominio de h_2. Por lo hecho anteriormente, los productos fibrados son de la forma

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[r, "i_{Z_1}"] \arrow[d, "h_1"] & Z \arrow[d, "h"] & Z_2 \arrow[l, "i_{Z_2}"'] \arrow[d, "h_2"] \\ A \arrow[r] & A+B & B \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del producto fibrado, tenemos que $Z_1 \cong X$ y $Z_2 \cong Y$ de donde se deduce que $Z \cong X + Y$, entonces tenemos que la parte de arriba es una suma.

($\Longleftarrow$) Ahora supongamos que en el diagrama dado, la parte de arriba es una suma, entonces para demostrar que los cuadrados son productos fibrados, basta ver la demostración de la condición (2) que acabamos de hacer, se vió que la suma es un producto fibrado.

$\therefore$ si $\mathcal{X}$ es extensiva, entonces se cumplen las condiciones 1,2 y 3.

($\Longleftarrow$) Ahora veamos que si se cumplen 1,2 y 3, entonces la categoría es extensiva. Claramente por la condición 1, $\mathcal{X}$ tiene sumas finitas. Sea $h : Z \to A + B$; por la condición 2, sabemos que existen los productos fibrados a lo largo de las inyecciones, es decir, existen los productos fibrados

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h_1"'] & Z \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "i_A"'] & A+B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z_2 \arrow[r, "l"] \arrow[d, "h_2"'] & Z \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "i_B"'] & A+B \end{tikzcd}$$

Definimos el funtor $G : \mathcal{X}/(A+B) \longrightarrow \mathcal{X}/A \times \mathcal{X}/B$ como $G(h) = (h_1, h_2)$ en los objetos. Si tenemos un morfismo $f : h \to g$ en $\mathcal{X}/(A+B)$, es decir, un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & L \arrow[dl, "g"] \\ & A+B & \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

Tenemos los siguientes diagramas en los cuales los cuadrados son productos fibrados

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h_1"] & Z \arrow[d, "h"] & Z_2 \arrow[l, "l"'] \arrow[d, "h_2"] \\ A \arrow[r, "i_A"] & A+B & B \arrow[l, "i_B"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "s"] \arrow[d, "g_1"] & L \arrow[d, "g"] & L_2 \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "g_2"] \\ A \arrow[r, "i_A"] & A+B & B \arrow[l, "i_B"'] \end{tikzcd}$$

y como tenemos que el diagrama (1.5) conmuta, esto produce que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[r, "f\circ k"] \arrow[d, "h_1"] & L \arrow[d, "g"] & Z_2 \arrow[l, "f\circ l"'] \arrow[d, "h_2"] \\ A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"] \end{tikzcd}$$

conmute; luego, por la propiedad universal del producto fibrado, $\exists! f_1 : Z_1 \to L_1$ y $\exists! f_2 : Z_2 \to L_2$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[dr, "f_1"] \arrow[drr, bend left, "f\circ k"] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & & & Z_2 \arrow[dl, "f_2"'] \arrow[dll, bend right, "f\circ l"'] \arrow[ddl, bend left, "h_2"] \\ & L_1 \arrow[r, "s"] \arrow[d, "g_1"] & L \arrow[d, "g"] & L_2 \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "g_2"] & \\ & A \arrow[r, "i_A"] & A+B & B \arrow[l, "i_B"'] & \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

conmuta. Entonces definimos $G(f) = (f_1, f_2)$, así actúa G en morfismos. Que manda identidades en identidades es fácil de ver. Para ver que abre composiciones, supongamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "k"'] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "l"] & M \arrow[dl, "m"] \\ & A+B & \end{tikzcd}$$

conmuta y que tenemos diagramas conmutativos donde los cuadrados son productos fibrados

$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "k_1"] & K \arrow[d, "k"] & K_2 \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "k_2"] \\ A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "r"] \arrow[d, "l_1"] & L_2 \arrow[d, "l"] & L \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "l_2"] \\ A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "t"] \arrow[d, "m_1"] & M \arrow[d, "m"] & M_2 \arrow[l, "u"'] \arrow[d, "m_2"] \\ A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"] \end{tikzcd}$$

Viendo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
K_1 \arrow[dr, "g_1\circ f_1"] \arrow[drr, bend left, "(g\circ f)\circ p"] \arrow[ddr, bend right, "k_1"'] & & & & K_2 \arrow[dl, "g_2\circ f_2"'] \arrow[dll, bend right, "(g\circ f)\circ q"'] \arrow[ddl, bend left, "k_2"] \\
& M_1 \arrow[r, "t"] \arrow[d, "m_1"] & M \arrow[d, "m"] & M_2 \arrow[l, "u"'] \arrow[d, "m_2"] & \\
& A \arrow[r, "i_A"] & A+B & B \arrow[l, "i_B"'] &
\end{tikzcd}$$

obtenemos lo deseado, donde g_1, g_2, f_1, f_2 están definidos como en (1.6) y utilizando la propiedad universal del producto fibrado.

Ahora veamos que FG y GF son naturalmente isomorfos a las identidades correspondientes. Sea $h \in \mathcal{X}/(A+B)$, la definición de $G(h)$ es el par de morfismos tales que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h_1"'] & X \arrow[d, "h"] & X_2 \arrow[l, "l"'] \arrow[d, "h_2"] \\
A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

donde los cuadrados son productos fibrados. Con esto obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X_1+X_2 \arrow[rr, "{[k,l]}"] \arrow[dr, "h_1+h_2"'] & & X \arrow[dl, "h"] \\
& A+B &
\end{tikzcd}$$

Luego, por la condición 3, tenemos que el morfismo inducido $[k,l] : X_1 + X_2 \to X$ es un isomorfismo, con lo cual $FG(h) = F(h_1, h_2) = h_1 + h_2 \cong h$. Definimos $\varepsilon_h = [k,l]$, el morfismo inducido por el coproducto. Ahora veamos que este isomorfismo es natural. Sea $f : h \to g$ un morfismo en $\mathcal{X}/(A+B)$; entonces $G(h) = (h_1, h_2)$ y $G(g) = (g_1, g_2)$ son los pares de morfismos que hacen conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h_1"'] & X \arrow[d, "h"] & X_2 \arrow[l, "l"'] \arrow[d, "h_2"] \\
A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g_1"'] & Z \arrow[d, "g"] & Z_3 \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "g_2"] \\
A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

con cuadrados productos fibrados. La definición de $G(f) = (f_1, f_2)$ es el único par de morfismos que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[dr, "f_1"] \arrow[drr, bend left, "f\circ k"] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & & & X_2 \arrow[dl, "f_2"'] \arrow[dll, bend right, "f\circ l"'] \arrow[ddl, bend left, "h_2"] \\
& Z_1 \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g_1"] & Z \arrow[d, "g"] & Z_2 \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "g_2"] & \\
& A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"] &
\end{tikzcd} \tag{1.7}$$

P. D. El siguente diagrama

$$\begin{tikzcd} FG(h) \arrow[r, "\varepsilon_h"] \arrow[d, "FG(f)"'] & h \arrow[d, "f"] \\ FG(g) \arrow[r, "\varepsilon_g"'] & g \end{tikzcd}$$

conmuta. Este diagrama se traduce al diagrama

$$\begin{tikzcd} h_1 + h_2 \arrow[r, "{[k,l]}"] \arrow[d, "f_1+f_2"'] & h \arrow[d, "f"] \\ g_1 + g_2 \arrow[r, "{[r,s]}"'] & g \end{tikzcd}$$

el cual a su vez se traduce en el diagrama

$$\begin{tikzcd} X_1 + X_2 \arrow[r, "{[k,l]}"] \arrow[d, "f_1+f_2"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z_1 + Z_2 \arrow[r, "{[r,s]}"'] & Z \end{tikzcd} \tag{1.8}$$

Ahora bien, como los siguientes diagramas conmutan por (1.7)

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[dr, "i_{X_1}"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddd, "f_1"'] & & \\ & X_1 + X_2 \arrow[r, "{[k,l]}"] \arrow[d, "f_1+f_2"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Z_1 + Z_2 \arrow[r, "{[r,s]}"'] & Z \\ Z_1 \arrow[ur, "i_{Z_1}"] \arrow[urr, bend right, "r"'] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_2 \arrow[dr, "i_{X_1}"] \arrow[drr, bend left, "l"] \arrow[ddd, "f_2"'] & & \\ & X_1 + X_2 \arrow[r, "{[k,l]}"] \arrow[d, "f_1+f_2"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Z_1 + Z_2 \arrow[r, "{[r,s]}"'] & Z \\ Z_2 \arrow[ur, "i_{Z_2}"] \arrow[urr, bend right, "s"'] & & \end{tikzcd}$$

utilizando la propiedad universal del coproducto, obtenemos que el diagrama (4.3) conmuta; i.e ε es transformación natural.

Ahora bien, sea $(h_1, h_2) \in \mathcal{X}/A \times \mathcal{X}/B$ con dominio (X_1, X_2); entonces $GF(h_1, h_2) = G(h_1 + h_2) = (x_1, x_2)$ es el único par de morfismos que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "x_1"'] & X_1 + X_2 \arrow[d, "h_1+h_2"] & Z_2 \arrow[l, "k_2"'] \arrow[d, "x_2"] \\ A \arrow[r, "i_A"'] & A + B & B \arrow[l, "i_B"] \end{tikzcd}$$

con cuadrados productos fibrados. Por la condición (2), sabemos que en el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "i_{X_1}"] \arrow[d, "h_1"'] & X+Y \arrow[d, "h_1+h_2"] & X_2 \arrow[l, "i_{X_2}"'] \arrow[d, "h_2"] \\
A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}
$$

los cuadrados son productos fibrados. Luego, por la propiedad universal del producto fibrado existe un único par de isomorfismos (p_1, p_2) tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[dr, "p_1"] \arrow[drr, bend left, "i_{X_1}"] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & & & X_2 \arrow[dl, "p_2"'] \arrow[dll, bend right, "i_{X_2}"'] \arrow[ddl, bend left, "h_2"] \\
& Z_1 \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "x_1"] & X_1+X_2 \arrow[d, "h_1+h_2"] & Z_2 \arrow[l, "k_2"'] \arrow[d, "x_2"] & \\
& A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"] &
\end{tikzcd}
\tag{1.9}
$$

conmuta. De este diagrama obtenemos un isomorfismo $(p_1, p_2) : (h_1, h_2) \to (x_1, x_2)$ en $\mathcal{X}/A \times \mathcal{X}/B$. Definimos $\eta : Id \Rightarrow GF$ en la instancia (h_1, h_2) como $\eta_{(h_1,h_2)} = (p_1, p_2)$, el morfismo definido por la propiedad universal del producto fibrado. Además, obtenemos que los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[rr, "p_1^{-1}"] \arrow[dr, "x_1"'] & & X_1 \arrow[dl, "h_1"] \\
& A &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
Z_2 \arrow[rr, "p_2^{-1}"] \arrow[dr, "x_2"'] & & X_2 \arrow[dl, "h_2"] \\
& B &
\end{tikzcd}
\tag{1.10}
$$

conmutan. Veamos que η es natural:
Sea $(f_1, f_2) : (h_1, h_2) \to (g_1, g_2)$ en $\mathcal{X}/A \times \mathcal{X}/B$ con dominio (X_1, X_2) y (Y_1, Y_2) respectivamente. Sabemos que $GF(h_1, h_2) = (x_1, x_2)$ y $GF(g_1, g_2) = (y_1, y_2)$, donde estos pares de morfismos son únicos con la propiedad de que los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "x_1"'] & X_1+X_2 \arrow[d, "h_1+h_2"] & Z_2 \arrow[l, "k_2"'] \arrow[d, "x_2"] \\
A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "y_1"'] & Y_1+Y_2 \arrow[d, "g_1+g_2"] & W_2 \arrow[l, "j_2"'] \arrow[d, "y_2"] \\
A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}
\tag{1.11}
$$

conmutan. Tenemos $GF(f_1, f_2) = G(f_1 + f_2) = (\widehat{f}_1, \widehat{f}_2)$, donde este par de morfismos es el único con la propiedad de que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[rr, "k_1"] \arrow[dr, "\widehat{f}_1"] \arrow[ddr, bend right, "x_1"'] & & X_1+X_2 \arrow[d, "f_1+f_2"] & & Z_2 \arrow[ll, "k_2"'] \arrow[dl, "\widehat{f}_2"'] \arrow[ddl, bend left, "x_2"] \\
& W_1 \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "y_1"] & Y_1+Y_2 \arrow[d, "h_1+h_2"] & W_2 \arrow[l, "k_2"'] \arrow[d, "y_2"] & \\
& A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"] &
\end{tikzcd}
\tag{1.12}
$$

conmuta. Además, tenemos que $\eta_{(h_1,h_2)} = (p_1,p_2)$ y $\eta_{(g_1,g_2)} = (q_1,q_2)$ son los únicos isomorfismos que hacen conmutar los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[rrd, bend left, "i_{X_1}"] \arrow[dr, "p_1"] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & & & X_2 \arrow[lld, bend right, "i_{X_2}"'] \arrow[dl, "p_2"'] \arrow[ddl, bend left, "h_2"] \\
& Z_1 \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "x_1"'] & X_1+X_2 \arrow[d, "h_1+h_2"] & Z_2 \arrow[l, "k_2"'] \arrow[d, "x_2"] & \\
& A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"] &
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[rrd, bend left, "i_{Y_1}"] \arrow[dr, "q_1"] \arrow[ddr, bend right, "g_1"'] & & & & Y_2 \arrow[lld, bend right, "i_{Y_2}"'] \arrow[dl, "q_2"'] \arrow[ddl, bend left, "g_2"] \\
& W_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "y_1"'] & Y_1+Y_2 \arrow[d, "g_1+g_2"] & W_2 \arrow[l, "j_2"'] \arrow[d, "y_2"] & \\
& A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"] &
\end{tikzcd}
\tag{1.13}
$$

P.D. El diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(h_1,h_2) \arrow[r, "\eta_{(h_1,h_2)}"] \arrow[d, "(f_1,f_2)"'] & GF(h_1,h_2) \arrow[d, "GF(f_1,f_2)"] \\
(g_1,g_2) \arrow[r, "\eta_{(g_1,g_2)}"'] & GF(g_1,g_2)
\end{tikzcd}
\tag{1.14}
$$

conmuta. Este se traduce en que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(h_1,h_2) \arrow[r, "(p_1,p_2)"] \arrow[d, "(f_1,f_2)"'] & (x_1,x_2) \arrow[d, "(\widehat{f}_1,\widehat{f}_2)"] \\
(g_1,g_2) \arrow[r, "(q_1,q_2)"'] & (y_1,y_2)
\end{tikzcd}
$$

conmute; el cual a su vez, se traduce en la conmutatividad de los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "f_1"'] & Z_1 \arrow[d, "\widehat{f}_1"] \\
Y_1 \arrow[r, "q_1"'] & W_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "f_2"'] & Z_2 \arrow[d, "\widehat{f}_2"] \\
Y_2 \arrow[r, "q_2"'] & W_2
\end{tikzcd}
\tag{1.15}
$$

Utilizando los diagramas (1.10) y el diagrama (1.13); y que los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "h_1"'] & & Y_1 \arrow[dl, "g_1"] \\
& A &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "h_1"'] & & Y_1 \arrow[dl, "g_1"] \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

conmutan, obtenemos que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[rr, "k_1"] \arrow[dr, "q_1\circ(f_1\circ p_1^{-1})"] \arrow[ddr, bend right, "x_1"'] & & X_1+X_2 \arrow[d, "f_1+f_2"] & & Z_2 \arrow[ll, "k_2"'] \arrow[dl, "q_2\circ(f_2\circ p_2^{-1})"'] \arrow[ddl, bend left, "x_2"] \\
& W_1 \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "y_1"] & Y_1+Y_2 \arrow[d, "h_1+h_2"] & W_2 \arrow[l, "k_2"'] \arrow[d, "y_2"] & \\
& A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"] &
\end{tikzcd}
$$

conmuta, con lo cual $\widehat{f_1} = (q_1 \circ f_1) \circ p_1^{-1}$ y $\widehat{f_2} = (q_2 \circ f_2) \circ p_2^{-1}$; i.e. el diagrama (1.15) conmuta.
$\therefore \eta : Id \Rightarrow GF$ es natural.
$\therefore$ existe un funtor $G : \mathcal{X}/(A+B) \to \mathcal{X}/A \times \mathcal{X}/B$ e isomorfismos naturales $FG \cong Id$ y $GF \cong Id$.
$\therefore$ F es una equivalencia de categorías. ■

1.3 Propiedades básicas de las categorías extensivas

Lema 1.3 *Si la categoría $\mathcal{X}$ es extensiva y $A \in \mathcal{X}$ entonces la categoría rebanada $\mathcal{X}/A$ es extensiva.*

Demostración Es suficiente con observar que si $f \in (\mathcal{X}/A)$ con dominio B, entonces $(\mathcal{X}/A)/f \cong \mathcal{X}/B$.■

Definición 1.4 *Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ categorías con sumas finitas y $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un funtor. Decimos que F preserva sumas finitas si dado un diagrama suma $\langle f_i : X_i \to X \rangle_{i \in I}$ con I finito, se cumple que el diagrama $\langle F(f_i) : F(X_i) \to F(X) \rangle_{i \in I}$ es un diagrama suma.*

Observación 1.5 *Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ categorías con sumas finitas y $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $G : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ funtores que preservan sumas. Entonces GF preserva sumas.*

Es inmediato de la definición de funtor que preserva sumas, demostrar esta observación. Gracias a esta observación, podemos considerar la 2-categoría Ext; la categoría de categorías extensivas, funtores que preservan sumas y transformaciones naturales. Deseamos construir el producto tensorial en ésta categoría.

Dadas dos categorías extensivas, podemos considerar la categoría de funtores que van de $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ que preservan sumas $Ext[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$, la cual, como a continuación veremos, hereda esta propiedad.

Teorema 1.6 *Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ categorías extensivas, entonces la categoría $Ext[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ es extensiva.*

Demostración:

Veamos que $Ext[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ posee sumas finitas. Sean $F_1, F_2 \in Ext[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$, definimos $F_1 + F_2 : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, en un objeto $A \in \mathcal{X}$ como $(F_1 + F_2)(A) = F_1(A) + F_2(A)$ y en un morfismo $f : A \to B$ como $(F_1 + F_2)(f) = F_1(f) + F_2(f)$, veamos que con esta definición, $F_1 + F_2$ es funtor. Sea $A \in \mathcal{X}$ y el morfismo Id_A, entonces $(F_1 + F_2)(Id_A) = F_1(Id_A) + F_2(Id_A) = Id_{F_1(A)} + Id_{F_2(A)} = Id_{F_1(A)+F_2(A)}$, donde la última igualdad resulta de la propiedad universal del coproducto. Ahora, si tenemos un par de morfismos $f : A \to B$ y $g : B \to C$ en $\mathcal{X}$, entonces tenemos que $(F_1 + F_2)(g \circ f) = F_1(g \circ f) + F_2(g \circ f)$ es el morfismo que hace conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd}
F_1(A) + F_2(A) \arrow[r, "F_1(g\circ f)+F_2(g\circ f)"] & F_1(C) + F_2(C) \\
F_1(A) \arrow[u, "i_{F_1(A)}"] \arrow[r, "F_1(g\circ f)"'] & F_1(C) \arrow[u, "i_{F_1(C)}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F_1(A) + F_2(A) \arrow[r, "F_1(g\circ f)+F_2(g\circ f)"] & F_1(C) + F_2(C) \\
F_2(A) \arrow[u, "i_{F_2(A)}"] \arrow[r, "F_2(g\circ f)"'] & F_2(C) \arrow[u, "i_{F_2(C)}"']
\end{tikzcd}$$

Sabemos que el morfismo $F_1(f)+F_2(f)$ hace conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd}
F_1(A)+F_2(A) \arrow[r, "F_1(f)+F_2(f)"] & F_1(B)+F_2(B) \\
F_1(A) \arrow[u, "i_{F_1(A)}"] \arrow[r, "F_1(f)"] & F_1(B) \arrow[u, "i_{F_1(B)}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F_1(A)+F_2(A) \arrow[r, "F_1(f)+F_2(f)"] & F_1(B)+F_2(B) \\
F_2(A) \arrow[u, "i_{F_2(A)}"] \arrow[r, "F_2(f)"] & F_2(B) \arrow[u, "i_{F_2(B)}"']
\end{tikzcd} \tag{1.16}$$

Y además el morfismo $F_1(g)+F_2(g)$ hace conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd}
F_1(B)+F_2(B) \arrow[r, "F_1(g)+F_2(g)"] & F_1(C)+F_2(C) \\
F_1(B) \arrow[u, "i_{F_1(B)}"] \arrow[r, "F_1(g)"] & F_1(C) \arrow[u, "i_{F_1(C)}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F_1(B)+F_2(B) \arrow[r, "F_1(g)+F_2(g)"] & F_1(C)+F_2(C) \\
F_2(B) \arrow[u, "i_{F_2(B)}"] \arrow[r, "F_2(g)"] & F_2(C) \arrow[u, "i_{F_2(C)}"']
\end{tikzcd} \tag{1.17}$$

Uniendo el diagrama de la derecha con el de la derecha y el diagrama de la izquierda con el de la izquierda de (1.16) y de (1.17), obtenemos que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
F_1(A)+F_2(A) \arrow[r, "(F_1+F_2)(g)\circ(F_1+F_2)(f)"] & F_1(C)+F_2(C) \\
F_1(A) \arrow[u, "i_{F_1(A)}"] \arrow[r, "F_1(g)\circ F_1(f)"] & F_1(C) \arrow[u, "i_{F_1(C)}"']
\end{tikzcd} \tag{1.18}$$

$$\begin{tikzcd}
F_1(A)+F_2(A) \arrow[r, "(F_1+F_2)(g)\circ(F_1+F_2)(f)"] & F_1(C)+F_2(C) \\
F_2(A) \arrow[u, "i_{F_2(A)}"] \arrow[r, "F_2(g)\circ F_2(g)"] & F_2(C) \arrow[u, "i_{F_2(C)}"']
\end{tikzcd} \tag{1.19}$$

conmutan. Luego, como F_1 y F_2 son funtores, obtenemos que $F_1(g)\circ F_1(f) = F_1(g\circ f)$ y $F_2(g)\circ F_2(f) = F_2(g\circ f)$; entonces, los diagramas (1.18) y (1.19) son en realidad los diagramas

$$\begin{tikzcd}
F_1(A)+F_2(A) \arrow[r, "(F_1+F_2)(g)\circ(F_1+F_2)(f)"] & F_1(C)+F_2(C) \\
F_1(A) \arrow[u, "i_{F_1(A)}"] \arrow[r, "F_1(g\circ f)"] & F_1(C) \arrow[u, "i_{F_1(C)}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F_1(A)+F_2(A) \arrow[r, "(F_1+F_2)(g)\circ(F_1+F_2)(f)"] & F_1(C)+F_2(C) \\
F_2(A) \arrow[u, "i_{F_2(A)}"] \arrow[r, "F_2(g\circ f)"] & F_2(C) \arrow[u, "i_{F_2(C)}"']
\end{tikzcd}$$

Por la unicidad del morfismo inducido por la propiedad universal del coproducto, tenemos que $(F_1(g)+F_2(g))\circ(F_1(f)+F_2(f)) = F_1(g\circ f)+F_2(g\circ f)$, es decir $(F_1+F_2)(g\circ f) = (F_1+F_2)(g)\circ(F_1+F_2)(f)$. Con esto obtenemos que F_1+F_2 es funtor.

Ahora bien, si $A, B \in \mathcal{X}$, entonces $(F_1 + F_2)(A + B) = F_1(A + B) + F_2(A + B) \cong (F_1(A) + F_1(B)) + (F_2(A) + F_2(B)) \cong (F_1 + F_2)(A) + (F_1 + F_2)(B)$, i.e. $F_1 + F_2$ respeta sumas. Se deja al lector verificar los detalles.

Definimos las inclusiones i_{F_1} e i_{F_2}, como las transformaciones naturales que en cada $A \in \mathcal{X}$, asocia los morfismos $i_{F_1(A)}$ e $i_{F_2(B)}$. La naturalidad es consecuencia inmediata de la propiedad universal del coproducto en $\mathcal{Y}$.

Veamos que $F_1 + F_2$ posee la propiedad universal del coproducto.

Sea $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un funtor, $\eta : F_1 \Rightarrow G$ y $\tau : F_2 \Rightarrow G$ transformaciones naturales.
P.D $\exists! \mu : F_1 + F_2 \Rightarrow G$ transformación natural, tal que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
F_1 + F_2 \arrow[r, "\mu"] & G \\
F_1 \arrow[u, "i_{F_1}"] \arrow[ur, "\eta"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F_1 + F_2 \arrow[r, "\mu"] & G \\
F_2 \arrow[u, "i_{F_2}"] \arrow[ur, "\tau"'] &
\end{tikzcd}
\tag{1.20}$$

conmutan.

Demostración.

Como tenemos las transformaciones naturales η y τ, entonces para cada $A \in \mathcal{X}$, tenemos morfismos $\eta_A : F_1(A) \to G(A)$ y $\tau_A : F_2(A) \to G(A)$. Como $\mathcal{Y}$ es extensiva, $\exists! \mu_A : F_1(A) + F_2(A) \to G(A)$ tal que hace conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd}
F_1(A) + F_2(A) \arrow[r, "\mu_A"] & G(A) \\
F_1(A) \arrow[u, "i_{F_1(A)}"] \arrow[ur, "\eta_A"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F_1(A) + F_2(A) \arrow[r, "\mu_A"] & G(A) \\
F_2(A) \arrow[u, "i_{F_2(A)}"] \arrow[ur, "\tau_A"'] &
\end{tikzcd}
\tag{1.21}$$

Definimos a μ en cada instancia como μ_A, es decir el morfismo que existe bajo la propiedad universal del coproducto. Sea $f : A \to B$ en $\mathcal{X}$. P.D. el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F_1(A) + F_2(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "F_1(f)+F_2(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F_1(B) + F_2(B) \arrow[r, "\mu_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}
\tag{1.22}$$

conmuta. Para esto, observemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
F_1(A) \arrow[dr, "i_{F_1(A)}"] \arrow[drr, bend left, "\eta_A"] \arrow[ddd, "F_1(f)"'] & & \\
& F_1(A) + F_2(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "F_1+F_2(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
& F_1(B) + F_2(B) \arrow[r, "\mu_B"'] & G(B) \\
F_1(B) \arrow[ur, "i_{F_1(B)}"'] \arrow[urr, bend right, "\eta_B"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F_2(A) \arrow[dr, "i_{F_2(A)}"] \arrow[drr, bend left, "\tau_A"] \arrow[ddd, "F_2(f)"'] & & \\
& F_1(A) + F_2(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "F_1+F_2(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
& F_1(B) + F_2(B) \arrow[r, "\mu_B"'] & G(B) \\
F_2(B) \arrow[ur, "i_{F_2(B)}"'] \arrow[urr, bend right, "\tau_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

Con esto obtenemos que $(G(f)\circ\mu_A)\circ i_{F_1(A)} = (\mu_B\circ(F_1+F_2(f)))\circ i_{F_1(A)}$ y $(G(f)\circ\mu_A)\circ i_{F_2(A)} = (\mu_B\circ(F_1+F_2(f)))\circ i_{F_2(A)}$, con lo cual por la propiedad universal de la suma, obtenemos que $G(f)\circ\mu_A = \mu_B\circ(F_1+F_2)(f)$, y por lo tanto el diagrama (1.22) conmuta.
$\therefore\ \mu : F_1+F_2 \Rightarrow G$ es transformación natural.
La unicidad de μ es fácil de demostrar y se deja al lector.
$\therefore\ Ext[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ tiene sumas finitas.

Observemos que $Ext[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ tiene objeto inicial, el funtor $F_0 : \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$, tal que $\forall\ A\in\mathcal{X}$, $F_0(A) = 0$; y a todo morfismo le asocia el morfismo Id_0; donde 0 es el objeto inicial en $\mathcal{Y}$. Es claro que respeta sumas, y es inicial puesto que para cualquier otro funtor $F : \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$, tenemos la transformación natural $! : F_0 \Rightarrow F$ definida en cada instancia como $! : 0 \to F(A)$. Se deja al lector verificar este hecho.

Ahora veamos que cumple la condición (2) del teorema (1.2). Si tenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "\eta"] \\ F_1 \arrow[r, "i_{F_1}"'] & F_1+F_2 \end{tikzcd} \tag{1.23}$$

Donde $F_1, F_2, G \in Ext[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$, η es una transformación natural e i_{F_1} la transformación natural inclusión definida anteriormente. Para cada $A\in\mathcal{X}$, existe un diagrama

$$\begin{tikzcd} & G(A) \arrow[d, "\eta_A"] \\ F_1(A) \arrow[r, "i_{F_1(A)}"'] & F_1(A)+F_2(A) \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{Y}$; que por ser extensiva, tiene productos fibrados a lo largo de inyecciones de la forma

$$\begin{tikzcd} H(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "\varphi_A"'] & G(A) \arrow[d, "\eta_A"] \\ F_1(A) \arrow[r, "i_{F_1(A)}"'] & F_1(A)+F_2(A) \end{tikzcd}$$

Esto para cada $A\in\mathcal{X}$. Observemos que si tenemos un morfismo $f : A\to B$ en $\mathcal{X}$, entonces tenemos morfismos $G(f) : G(A)\to G(B)$, $F_1(f) : F_1(A)\to F_1(B)$ y $(F_1+F_2)(f) : (F_1+F_2)(A)\to(F_1+F_2)(B)$, los cuales hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} H(A) \arrow[r, "G(f)\circ\mu_A"] \arrow[d, "F_1(f)\circ\varphi_A"'] & G(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\ F_1(B) \arrow[r, "i_{F_1(B)}"'] & F_1(B)+F_2(B) \end{tikzcd}$$

Utilizando la naturalidad de η y i_{F_1} obtenemos, $\eta_B\circ(G(f)\circ\mu_A) = ((F_1+F_2)(f)\circ\eta_A))\circ\mu_A = (F_1+F_2)(f)\circ(i_{F_1(A)}\circ\varphi_A) = i_{F_1(B)}\circ(F_1(f)\circ\varphi_A)$. Luego, por la propiedad universal del producto fibrado, $\exists!\widehat{f} : H(A) \to H(B)$ tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
H(A) \arrow[dr, "\widehat{f}"] \arrow[drr, bend left, "G(f)\circ\mu_A"] \arrow[ddr, bend right, "F_1(f)\circ\varphi_A"'] & & \\
& H(B) \arrow[r, "\mu_B"] \arrow[d, "\varphi_B"'] & G(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\
& F_1(B) \arrow[r, "i_{F_1(B)}"'] & F_1(B)+F_2(B)
\end{tikzcd}$$

Definimos $H(f) = \widehat{f}$, el morfismo que existe por la propiedad universal del producto fibrado de la manera anterior. Observemos que si H es funtor, de este último diagrama obtenemos autómaticamente la naturalidad de φ y μ. Es claro que H manda identidades a identidades, solo veamos que abre composiciones. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ morfismos en $\mathcal{X}$, por definición $H(g \circ f)$ es el único morfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
H(A) \arrow[dr, "H(g\circ f)"] \arrow[drr, bend left, "G(g\circ f)\circ\mu_A"] \arrow[ddr, bend right, "F_1(g\circ f)\circ\varphi_A"'] & & \\
& H(C) \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[d, "\varphi_C"'] & G(C) \arrow[d, "\eta_C"] \\
& F_1(C) \arrow[r, "i_{F_1(C)}"'] & F_1(C)+F_2(C)
\end{tikzcd} \tag{1.24}$$

Fijándonos en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H(A) \arrow[rr, "\mu_A"] \arrow[dr, "H(f)"] \arrow[dd, "\varphi_A"'] & & G(A) \arrow[dr, "G(f)"] & & \\
& H(B) \arrow[rr, "\mu_B"] \arrow[dr, "H(g)"] \arrow[dd, "\varphi_B"] & & G(B) \arrow[dr, "G(g)"] & \\
F_1(A) \arrow[dr, "F_1(f)"'] & & H(C) \arrow[rr, "\mu_C"] \arrow[dd, "\varphi_C"'] & & G(C) \arrow[dd, "\eta_C"] \\
& F_1(B) \arrow[dr, "F_1(g)"'] & & & \\
& & F_1(C) \arrow[rr, "i_{F_1(C)}"'] & & F_1(C)+F_2(C)
\end{tikzcd}$$

y utilizando que F_1 y G son funtores, tenemos que $F_1(g \circ f) = F_1(g) \circ F_1(f)$ y $G(g \circ f) = G(g) \circ G(f)$. Entonces el diagrama anterior se traduce en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H(A) \arrow[dr, "H(g)\circ H(f)"] \arrow[drr, bend left, "G(g\circ f)\circ\mu_A"] \arrow[ddr, bend right, "F_1(g\circ f)\circ\varphi_A"'] & & \\
& H(C) \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[d, "\varphi_C"] & G(C) \arrow[d, "\eta_C"] \\
& F_1(C) \arrow[r, "i_{F_1(C)}"'] & F_1(C) + F_2(C)
\end{tikzcd}$$

Luego, por la propiedad universal expresada en el diagrama (1.24), se tiene que $H(g \circ f) = H(g) \circ H(f)$, con lo cual H es funtor.
Análogamente, construimos el funtor $I : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ definido por el producto fibrado para cada $A \in \mathcal{X}$ del diagrama

$$\begin{tikzcd}
G(A) \arrow[d, "\eta_A"] & \\
F_1 + F_2(A) & F_2(A) \arrow[l, "i_{F_1(A)}"']
\end{tikzcd}$$

con sus respectivas transformaciones naturales $\theta : I \Rightarrow G$ y $\xi : I \Rightarrow F_2$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "\eta"] & I \arrow[l, "\theta"'] \arrow[d, "\xi"] \\
F_1 + F_2 & F_2 \arrow[l, "i_{F_2}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta. Luego, para cada $A \in \mathcal{X}$, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "\varphi_A"] & G(A) \arrow[d, "\eta_A"] & I(A) \arrow[l, "\theta_A"'] \arrow[d, "\xi_A"] \\
F_1(A) \arrow[r, "i_{F_1(A)}"'] & F_1 + F_2(A) & F_2 + F_2(A) \arrow[l, "i_{F_2(A)}"]
\end{tikzcd}$$

Donde los cuadrados son productos fibrados, y por la extensividad de $\mathcal{Y}$, $[\mu_A, \theta_A] : H(A) + I(A) \cong G(A)$. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H(A)+H(B) \arrow[r, "\mu_A+\mu_B"] \arrow[d, "\varphi_A+\varphi_B"] & G(A)+G(B) \arrow[d, "\eta_A+\eta_B"] & I(A)+I(B) \arrow[l, "\theta_A+\theta_B"'] \arrow[d, "\xi_A+\xi_B"] \\
F_1(A)+F_1(B) \arrow[r, "i_{F_1(A)}+i_{F_1(B)}"'] & F_1(A)+F_1(B)+F_2(A)+F_2(B) & F_2(A)+F_2(B) \arrow[l, "i_{F_2(A)}+i_{F_2(B)}"]
\end{tikzcd} \tag{1.25}$$

donde el renglón de abajo y el renglón de arriba son sumas y utilizando la extensividad de $\mathcal{Y}$, los cuadrados son productos fibrados. Ahora, utilizando que F_1, F_2 y G abren sumas; obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} H(A)+H(B) \arrow[r, "{[G(i_A),G(i_B)]\circ(\mu_A+\mu_B)}"] \arrow[d, "{[F_1(i_A),F_1(i_B)]^{-1}\circ(\varphi_A+\varphi_B)}"] & G(A+B) \arrow[d, "\eta_{A+B}"] & I(A)+I(B) \arrow[l, "{[G(i_A),G(i_B)]\circ(\theta_A+\theta_B)}"'] \arrow[d, "{[F_2(i_A),F_2(i_B)]^{-1}\circ(\xi_A+\xi_B)}"'] \\ F_1(A+B) \arrow[r, "i_{F_1(A+B)}"'] & F_1(A)+F_1(B)+F_2(A)+F_2(B) & F_2(A+B) \arrow[l, "i_{F_2(A+B)}"] \end{tikzcd}$$

y los cuadrados son productos fibrados; luego, $H(A)+H(B)\cong H(A+B)$ e $I(A)+I(B)\cong I(A+B)$, con lo cual $H, I \in Ext[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$.

Ahora veamos que estos diagramas son el producto fibrado en la categoría $Ext[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$. Solo lo haremos para H y se deja al lector demostrarlo para I.

Sean $J \in Ext[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ y α, β transformaciones naturales tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & G \arrow[d, "\eta"] \\ F_1 \arrow[r, "i_{F_1}"'] & F_1+F_2 \end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces, para cada $A \in \mathcal{X}$ tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} J(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "\beta_A"'] & G(A) \arrow[d, "\eta_A"] \\ F_1(A) \arrow[r, "i_{F_1}(A)"'] & F_1+F_2(A) \end{tikzcd}$$

conmuta, con lo cual tenemos que para cada $A \in \mathcal{X}$, $\exists!\ \gamma_A : J(A) \to H(A)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} J(A) \arrow[dr, "\gamma_A"] \arrow[drr, bend left, "\alpha_A"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_A"'] & & \\ & H(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "\varphi_A"'] & G(A) \arrow[d, "\eta_A"] \\ & F_1(A) \arrow[r, "i_{F_1}(A)"'] & (F_1+F_2)(A) \end{tikzcd}$$

conmuta. Veamos que si definimos $\gamma : J \Rightarrow H$ en cada instancia como γ_A, ésta es natural. Sea $f : A \to B$. P.D. El diagrama

$$\begin{tikzcd} J(A) \arrow[r, "\gamma_A"] \arrow[d, "J(f)"'] & H(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ J(F) \arrow[r, "\gamma_B"'] & H(B) \end{tikzcd}$$

conmuta.
Demostración.
Por hipótesis, tenemos que γ_B es el único morfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
J(B) \arrow[dr, "\gamma_B"] \arrow[drr, bend left, "\alpha_B"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_B"'] & & \\
& H(B) \arrow[r, "\mu_B"] \arrow[d, "\varphi_B"] & G(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\
& F_1(B) \arrow[r, "i_{F_1}(B)"'] & (F_1+F_2)(B)
\end{tikzcd}$$

con lo cual $J(f)\circ\gamma_B$ es el único morfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
J(A) \arrow[dr, "J(f)\circ\gamma_B"] \arrow[drr, bend left, "J(f)\circ\alpha_B"] \arrow[ddr, bend right, "J(f)\circ\beta_B"'] & & \\
& H(B) \arrow[r, "\mu_B"] \arrow[d, "\varphi_B"] & G(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\
& F_1(B) \arrow[r, "i_{F_1}(B)"'] & (F_1+F_2)(B)
\end{tikzcd} \tag{1.26}$$

Por otro lado, tenemos que $H(f)$ hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
H(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[dr, "H(f)"] \arrow[dd, "\varphi_A"'] & G(A) \arrow[dr, "G(f)"] & \\
& H(B) \arrow[r, "\mu_B"] \arrow[dd, "\varphi_B"] & G(B) \arrow[dd, "\eta_B"] \\
F_1(A) \arrow[dr, "F_1(f)"'] & & \\
& F_1(B) \arrow[r, "i_{F_1}(B)"'] & (F_1+F_2)(B)
\end{tikzcd}$$

y γ_A hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
J(A) \arrow[dr, "\gamma_A"] \arrow[drr, bend left, "\alpha_A"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_A"'] & & \\
& H(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "\varphi_A"] & G(A) \arrow[d, "\eta_A"] \\
& F_1(A) \arrow[r, "i_{F_1}(A)"'] & (F_1+F_2)(A)
\end{tikzcd}$$

De estos dos últimos diagramas, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
J(A) \arrow[dr, "\gamma_A"] \arrow[drr, bend left, "\alpha_A"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_A"'] & & & \\
& H(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[dr, "H(f)"] \arrow[d, "\varphi_A"] & G(A) \arrow[dr, "G(f)"] & \\
& F_1(A) \arrow[dr, "F_1(f)"'] & H(B) \arrow[r, "\mu_B"] \arrow[d, "\varphi_B"] & G(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\
& & F_1(B) \arrow[r, "i_{F_1}(B)"'] & (F_1+F_2)(B)
\end{tikzcd} \tag{1.27}$$

Luego, por la naturalidad de α y de β, tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$
\begin{tikzcd}
J(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "J(B)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
J(F) \arrow[r, "\alpha_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
J(A) \arrow[r, "\beta_A"] \arrow[d, "J(f)"'] & F_1(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
J(B) \arrow[r, "\beta_B"'] & F_1(B)
\end{tikzcd}
$$

Entonces el diagrama (1.27), se traduce en el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
J(A) \arrow[dr, "\gamma_A \circ H(f)"] \arrow[drr, bend left, "J(f)\circ\alpha_B"] \arrow[ddr, bend right, "J(f)\circ\beta_B"'] & & \\
& H(B) \arrow[r, "\mu_B"] \arrow[d, "\varphi_B"'] & G(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\
& F_1(B) \arrow[r, "i_{F_1(B)}"'] & (F_1+F_2)(B)
\end{tikzcd}
$$

Luego, tenemos que $\gamma_A \circ H(f)$ hace conmutar al diagrama (1.26), con lo cual $\gamma_A \circ H(f) = J(f) \circ \gamma_B$.
$\therefore$ γ es natural. La unicidad de γ es inmediata de la propiedad universal del producto fibrado. Con esto obtenemos que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varphi"'] & G \arrow[d, "\eta"] \\
F_1 \arrow[r, "i_{F_1}"'] & F_1 + F_2
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado en $Ext[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$.
$\therefore$ $Ext[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ cumple la condición (2) de (1.2).

Ahora, supongamos que tenemos un diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\eta"'] & I \arrow[d, "\tau"] & H \arrow[l, "\theta"'] \arrow[d, "\mu"] \\
F_1 \arrow[r, "i_{F_1}"'] & F_1 + F_2 & F_2 \arrow[l, "i_{F_2}"]
\end{tikzcd}
\tag{1.28}
$$

en $Ext[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$. Supongamos que el renglón de arriba es una suma, i.e $I = G + H$ y $\varphi,\ \theta$ son las inclusiones. P.D. Los cuadrados son productos fibrados.
Demostración.

Para cada $A \in \mathcal{X}$, tenemos que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
G(A) \arrow[r, "i_{G(A)}"] \arrow[d, "\eta"'] & G(A) + H(A) \arrow[d, "\eta_A + \mu_A"] & H(A) \arrow[l, "i_{I(A)}"'] \arrow[d, "\mu"] \\
F_1(A) \arrow[r, "i_{F_1(A)}"'] & F_1(A) + F_2(A) & F_2(A) \arrow[l, "i_{F_2(A)}"]
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Luego, como $\mathcal{Y}$ es extensiva y el renglón de abajo y el renglón de arriba son sumas, entonces los cuadrados son productos fibrados. Supongamos que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\eta'"'] & G+H \arrow[d, "\eta+\mu"] \\ F_1 \arrow[r, "i_{F_1}"'] & F_1+F_2 \end{tikzcd}$$

en $Ext[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$. Luego, para cada $A \in \mathcal{A}$, tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} J(A) \arrow[r, "\varphi'_A"] \arrow[d, "\eta'_A"'] & G(A)+H(A) \arrow[d, "\eta_A+\mu_A"] \\ F_1(A) \arrow[r, "i_{F_1(A)}"'] & F_1(A)+F_2(A) \end{tikzcd}$$

conmuta. Luego, tenemos que para cada $A \in \mathcal{X}$, $\exists!\ \rho_A : J(A) \to G(A)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} J(A) \arrow[dr, "\rho_A"] \arrow[drr, bend left, "\varphi'_A"] \arrow[ddr, bend right, "\eta'_A"'] & & \\ & G(A) \arrow[r, "i_{G(A)}"] \arrow[d, "\eta_A"] & G(A)+H(A) \arrow[d, "\eta_A+\mu_A"] \\ & F_1(A) \arrow[r, "i_{F_1(A)}"'] & F_1(A)+F_2(A) \end{tikzcd}$$

conmuta. Definimos $\rho : J \Rightarrow G$ en cada instancia A por ρ_A. La demostración de que ρ es natural, es análoga a la hecha anteriormente y se deja al lector. La unicidad de ρ es inmediata de la unicidad que proporciona el producto fibrado.

Con esto el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i_G"] \arrow[d, "\eta"'] & G+H \arrow[d, "\eta+\mu"] \\ F_1 \arrow[r, "i_{F_1}"'] & F_1+F_2 \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. La demostración que el diagrama

$$\begin{tikzcd} G+H \arrow[d, "\eta+\mu"'] & H \arrow[l, "i_H"'] \arrow[d, "\mu"] \\ F_1+F_2 & F_2 \arrow[l, "i_{F_2}"] \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado es análoga y se deja al lector.
$\therefore$ Si la parte de arriba del diagrama (1.28) es una suma, entonces los cuadrados son productos fibrados.

Ahora, supongamos que los cuadrados de (1.28) son productos fibrados. P.D. La parte de arriba es una suma.

Demostración.
Vimos en esta demostración, que los productos fibrados a lo largo de inyecciones de funtores están construidos con las inyecciones de las imágenes y utilizando la extensividad de $\mathcal{Y}$. Podemos decir entonces que H y G son isomórficamente naturales a los funtores que definimos a partir del producto fibrado en $\mathcal{Y}$.

Con esto en mente, tenemos para cada $A \in \mathcal{Y}$, en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
G(A) \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "\eta_A"] & I(A) \arrow[d, "\tau_A"] & H(A) \arrow[l, "\theta_A"'] \arrow[d, "\mu_A"] \\
F_1(A) \arrow[r, "i_{F_1(A)}"'] & (F_1+F_2)(A) & F_2(A) \arrow[l, "i_{F_2(A)}"]
\end{tikzcd}$$

los cuadrados son productos fibrados; luego, por la extensividad de $\mathcal{Y}$, tenemos que la parte de arriba es una suma, es decir, $\varepsilon_A : I(A) \cong G(A) + H(A)$, donde $\varepsilon_A = [\varphi_A, \theta_A]$. Veamos que este isomorfismo es natural. Sea $f : A \to B$. P.D. el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G(A)+H(A) \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d, "G(f)+H(f)"'] & I(A) \arrow[d, "I(f)"] \\
G(B)+H(B) \arrow[r, "\varepsilon_B"'] & I(B)
\end{tikzcd} \tag{1.29}$$

Demostración: utilizando la naturalidad de φ y θ, obtenemos los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
G(A) \arrow[dr, "i_{G(A)}"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_A"] \arrow[ddd, "G(f)"'] & & \\
& G(A)+H(A) \arrow[r, "{[\varphi_A,\theta_A]}"] \arrow[d, "G(f)+H(f)"'] & I(A) \arrow[d, "I(f)"] \\
& G(B)+H(B) \arrow[r, "{[\varphi_B,\theta_B]}"'] & I(B) \\
G(B) \arrow[ur, "i_{G(B)}"] \arrow[urr, bend right, "\varphi_B"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H(A) \arrow[dr, "i_{H(A)}"] \arrow[drr, bend left, "\theta_A"] \arrow[ddd, "H(f)"'] & & \\
& G(A)+H(A) \arrow[r, "{[\varphi_A,\theta_A]}"] \arrow[d, "G(f)+H(f)"'] & I(A) \arrow[d, "I(f)"] \\
& G(B)+H(B) \arrow[r, "{[\varphi_B,\theta_B]}"'] & I(B) \\
H(B) \arrow[ur, "i_{H(B)}"] \arrow[urr, bend right, "\theta_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

de donde $(\varepsilon_B \circ (G(f)+H(f))) \circ i_{G(A)} = (I(f) \circ \varepsilon_A) \circ i_{G(A)}$ y $(\varepsilon_B \circ (G(f)+H(f))) \circ i_{H(A)} = (I(f) \circ \varepsilon_A) \circ i_{H(A)}$; y por la propiedad universal del producto fibrado, obtenemos que $\varepsilon_B \circ (G(f) + H(f)) = I(f) \circ \varepsilon_A$, i.e. el diagrama (1.29) conmuta, con lo cual, ε es isomorfismo natural.
$\therefore$ la parte de arriba es una suma.
$\therefore$ Si en el diagrama (1.28) los cuadrados son productos fibrados, entonces la parte de arriba es una suma.
$\therefore$ $Ext[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ cumple con las condiciones del teorema (1.2).
$\therefore$ $Ext[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ es extensiva.$\blacksquare$

Fíjese que en la demostración no utilizamos en ningún momento que $\mathcal{X}$ fuese extensiva, sólo para ver que los funtores que definimos para productos fibrados abrieran sumas. La demostración anterior la podríamos haber hecho sin la suposición que $\mathcal{X}$ fuese extensiva y sin suponer que los funtores abren sumas, pero el resultado dado aquí está más de acuerdo con lo que utilizaremos.

Ahora veremos algunas propiedades de las categorías extensivas.

Lema 1.7 *Si $\mathcal{X}$ es una categoría extensiva, entonces el objeto inicial es estricto.*

Demostración
Supongamos que existe un morfismo $f\colon A \longrightarrow 0$ en $\mathcal{X}$. En el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "Id_A"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "f"'] & A \arrow[l, "Id_A"'] \arrow[d, "f"'] \\
0 \arrow[r, "Id_0"] & 0 & 0 \arrow[l, "Id_0"']
\end{tikzcd}$$

tenemos que la parte de abajo es una suma. Se puede verificar fácilmente que ambos cuadrados son productos fibrados, y por el teorema (1.2), la parte de arriba es una suma, de donde $A + A \cong A$ y entonces $A \cong 0$.■

Lema 1.8 *Si $\mathcal{X}$ es una categoría extensiva, la suma de dos objetos es disjunta y las inyecciones son monomorfismos.*

Demostración
El diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "Id_A"] \arrow[d, "Id_A"'] & A \arrow[d, "i_A"'] & 0 \arrow[l, "!"'] \arrow[d, "!"'] \\
A \arrow[r, "i_A"] & A + B & B \arrow[l, "i_B"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, y además tanto la parte de arriba como la de abajo son sumas, entonces de acuerdo con el teorema (1.2), ambos cuadrados son productos fibrados. El cuadrado de la derecha de este diagrama nos dice que la suma es disjunta. Ahora, supongamos que $\exists C \in \mathcal{X}$ y $f, g\colon C \longrightarrow A$ tal que $i_A \circ f = i_A \circ g$. Entonces tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "i_A"'] \\
A \arrow[r, "i_A"] & A + B
\end{tikzcd}$$

conmuta; luego, $\exists!\ h : C \longrightarrow A$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "h"'] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& A \arrow[r, "Id_A"] \arrow[d, "Id_A"'] & A \arrow[d, "i_A"] \\
& A \arrow[r, "i_A"'] & A + B
\end{tikzcd}$$

conmuta, de donde $f = Id_A \circ h = g$ obteniendo lo deseado. Es análogo demostrar que i_B es monomorfismo también.■

Las categorías extensivas poseen una propiedad algebraica muy importante, la cual tiene intrínsecamente la idea de sumar y multiplicar en $\mathbb{N}$, la cual es llamada la ley distributiva, descrita a continuación:

Sea $\mathcal{X}$ una categoría con sumas y productos finitos. Decimos que $\mathcal{X}$ satisface la ley distributiva si el morfismo $0 \to 0 \times X$ y el inducido

$$\begin{tikzcd}
& X \times (Y+Z) & \\
X \times Y \arrow[ur, "Id\times i_Y"] \arrow[r, "i_{X\times Y}"'] & (X\times Y)+(X\times Z) \arrow[u, "{[Id\times i_Y, Id\times i_Z]}"] & X\times Z \arrow[ul, "Id\times i_Z"'] \arrow[l, "i_{X\times Z}"]
\end{tikzcd}$$

son isomorfismos. Ejemplos de categorías distributivas son las categorías extensivas, como a continuación veremos; y ejemplos de categorías no distributivas son $Vect_K$ para un campo K y Grp.

Lema 1.9 *Si $\mathcal{X}$ es una categoría extensiva con productos finitos, entonces $\mathcal{X}$ satisface la ley distributiva.*

Demostración.
Por el lema (1.7), tenemos que para cualquier $C \in \mathcal{X}$, $C \times 0 \cong 0$, pues el morfismo proyección tiene codominio 0. Además para cualquier morfismo $f : A \to B$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C\times A \arrow[r, "Id_C\times f"] \arrow[d, "\pi_A"'] & C\times B \arrow[d, "\pi_B"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado; con lo cual, en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C\times A \arrow[r, "Id_C\times i_A"] \arrow[d, "\pi_A"'] & C\times(A+B) \arrow[d, "\pi_{(A+B)}"] & C\times B \arrow[l, "Id_C\times i_B"'] \arrow[d, "\pi_B"'] \\
A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

los cuadrados son productos fibrados, y entonces la parte de arriba es una suma, i.e. $C \times (A+B) \cong (C\times A)+(C\times B)$.■

Estos resultados nos dicen que es posible definir suma y producto en las clases de isomorfismo de objetos de la categoría (o equivalentemente, en su esqueleto[1]). Esta es la idea de la llamada teoría objetiva de los números. Para más referencias puede consultarse ([18]).

[1] Véase [12] pág. 91

Capítulo 2

Categoría de familias

Dada una categoría $\mathcal{X}$, podemos construir una categoría $\mathcal{C}$, que tenga una copia de $\mathcal{X}$ y sumas finitas con la siguiente propiedad universal: Para cualquier categoría $\mathcal{Z}$ que posea sumas finitas y cualquier funtor $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$, $\exists! \widehat{F}{:}\mathcal{C} \to \mathcal{Z}$ (salvo isomorfismo natural) que preserva sumas y tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr] & & \mathcal{Z} \\ & \mathcal{C} \arrow[ur, "\widehat{F}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Esta categoría también es llamada la completación bajo coproductos finitos de $\mathcal{X}$.

Definición 2.1 ***Categoría*** $Fam(\mathcal{X})$***:***
Sea $\mathcal{X}$ una categoría. Construimos su categoría de familias, $Fam(\mathcal{X})$, de la siguiente manera: Los objetos de $Fam(\mathcal{X})$ son familias finitas de elementos de $\mathcal{X}$; los cuales son de la forma $\langle A_i \rangle_{i\in I}$, con I un conjunto finito y $\forall i \in I$, $A_i \in \mathcal{X}$. Si $\langle A_i \rangle_{i\in I}$ y $\langle B_j \rangle_{j\in J}$ son dos objetos en $Fam(\mathcal{X})$, entonces un morfismo $\widehat{f}\colon \langle A_i \rangle_{i\in I} \to \langle B_j \rangle_{j\in J}$ es un morfismo $f : I \to J$ en Con_f, junto con una familia de morfismos $\langle f'_i : A_i \to B_{f(i)} \rangle_{i\in I}$, donde cada $f'_i \in Mor(\mathcal{X})$. Los morfismos en $Fam(\mathcal{X})$ los podemos ver de la siguiente manera

$$\left(\begin{array}{c} I \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow \\ J \end{array} \ , \ \langle f'_i : A_i \to B_{f(i)} \rangle \right)$$

los cuales denotaremos por $(f, \langle f'_i \rangle_{i\in I}) : \langle A_i \rangle \to \langle B_j \rangle_{j\in J}$. La composición en esta categoría es la composición de morfismos en Con_f, con la composición de familias en $\mathcal{X}$; es decir, si $\langle A_i \rangle_{i\in I}, \langle B_j \rangle_{j\in J}, \langle C_k \rangle_{k\in K} \in Fam(\mathcal{X})$, entonces

$$\left(\begin{array}{c} J \\ {\scriptstyle g}\big\downarrow \\ K \end{array} \ , \ \langle g'_i : B_j \to C_{g(j)} \rangle_{j\in J} \right) \circ \left(\begin{array}{c} I \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow \\ J \end{array} \ , \ \langle f'_i : A_i \to B_{f(i)} \rangle_{i\in I} \right)$$

es de la manera

$$\left(\begin{array}{c} I \\ {\scriptstyle g\circ f}\big\downarrow \\ K \end{array} \ , \ \langle g'_{f(i)} \circ f'_i : A_i \to C_{g(f(i))} \rangle_{i\in I} \right)$$

el cual denotaremos por $(g \circ f, \langle (g'_{f(i)} \circ f'_i)_i \rangle_{i\in I}$. Si $\widehat{A} = \langle A_i \rangle_{i\in I} \in Fam(\mathcal{X})$, entonces $Id_{\widehat{A}} = (Id_I, \langle Id_{A_i} \rangle_{i\in I})$; y la asociatividad de los morfismos en $Fam(\mathcal{X})$ es gracias a la asociatividad en Con_F y en $\mathcal{X}$.

Con esta definición, $Fam(\mathcal{X})$ forma una categoría, se le pide al lector verificar este hecho. A continuación veremos algunas propiedades de esta categoría.

2.1 Extensividad de $Fam(\mathcal{X})$

Teorema 2.2 *Si $\mathcal{X}$ una categoría, entonces $Fam(\mathcal{X})$ es extensiva.*

Demostración

Primero veamos que $Fam(\mathcal{X})$ tiene sumas finitas. Para esto nos basta ver que tiene objeto inicial y sumas binarias. El objeto inicial en $Fam(\mathcal{X})$ es la familia indizada por el conjunto
$\emptyset$. Sean $\langle A_i\rangle_{i\in I}, \langle B_j\rangle_{j\in J} \in Fam(\mathcal{X})$, entonces su suma o coproducto es la familia $\langle C_l\rangle_{l\in I+J}$ con

$$C_l = \begin{cases} A_i & \text{si } l = i \text{ e } i \in I \\ B_j & \text{si } l = j \text{ y } j \in J \end{cases}$$

y las inyecciones son los morfismos

$$\left(\begin{array}{c} I \\ {\scriptstyle i_I}\big\downarrow \\ I+J \end{array} \;,\; \langle Id_{A_i} : A_i \to A_i\rangle_{i\in I} \right)$$

Es análoga la definición de inyección de $\langle B_j\rangle_{j\in J}$. Veamos que se tiene la propiedad universal deseada.

Supongamos que existe $\langle D_k\rangle_{k\in K} \in Fam(\mathcal{X})$ y morfismos

$$\left(\begin{array}{c} I \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow \\ K \end{array} \;,\; \langle f'_i : A_i \to D_{f(i)}\rangle_{i\in I} \right) \qquad \left(\begin{array}{c} J \\ {\scriptstyle g}\big\downarrow \\ K \end{array} \;,\; \langle g'_j : B_j \to C_{g(j)}\rangle_{j\in J} \right)$$

Entonces, tenemos el morfismo inducido por la propiedad universal del coproducto en Con_f, $[f,g] : \; I + J \longrightarrow K$. Definimos el morfismo en $Fam(\mathcal{X})$ de la siguiente manera:

$$\left(\begin{array}{c} I+J \\ {\scriptstyle [f,g]}\big\downarrow \\ K \end{array} \;,\; \langle [f,g]'_l : C_l \to D_{[f,g](l)}\rangle_{l\in I+J} \right)$$

en donde $[f,g]'_l = f'_i$ si $l = i$ para alguna $i \in I$ y $[f,g]'_l = g'_j$ si $l = j$ para alguna $j \in J$. Este morfismo hace conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd} \langle C_l\rangle_{l\in I+J} \arrow[r, "{([f,g],\langle [f,g]'_l\rangle_{l\in I+J})}"] & \langle D_k\rangle_{k\in K} \\ \langle A_i\rangle_{i\in I} \arrow[u, "{(i_I,\langle Id_{A_i}\rangle_{i\in I})}"] \arrow[ur, "{(f,\langle f'_i\rangle_{i\in I})}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \langle C_l\rangle_{l\in I+J} \arrow[r, "{([f,g],\langle [f,g]'_l\rangle_{l\in I+J})}"] & \langle D_k\rangle_{k\in K} \\ \langle B_j\rangle_{j\in J} \arrow[u, "{(i_J,\langle Id_{B_j}\rangle_{j\in J}}"] \arrow[ur, "{(g,\langle g'_j\rangle_{j\in J})}"'] & \end{tikzcd}$$

pues $([f,g], \langle [f,g]'_l\rangle_{l\in I+J}) \circ (i_I, \langle Id_{A_i}\rangle_{i\in I}) = ([f,g]\circ i_I, \langle [f,g]' \circ Id_{A_i})_i\rangle_{i\in I}) = (f, \langle [f,g]'_{i_I(i)} \circ Id_{A_i}\rangle_{i\in I})$ como $i_I(i) = i$ (visto dentro de la suma), entonces $[f,g]'_{i_I(i)} = [f,g]'_i = f'_i$, con lo cual $(f, \langle [f,g]'_{i_I(i)} \circ Id_{A_i}\rangle_{i\in I}) = (f, \langle f'_i \circ Id_{A_i}\rangle_{i\in I}) = (f, \langle f'_i\rangle_{i\in I})$. Análogamente se demuestra que $([f,g], \langle [f,g]'_l\rangle_{l\in I+J}) \circ (i_J, \langle Id_{B_j}\rangle_{j\in J}) = (g, \langle g'\rangle_{j\in J})$. Supongamos que existe otro morfismo

$$\left(\begin{array}{c} I+J \\ {\scriptstyle h}\big\downarrow \\ K \end{array} \;,\; \langle h'_l : C_l \to D_{h(l)}\rangle_{l\in I+J} \right)$$

tal que al componerlo con las inclusiones, obtengamos los morfismos $(f, \langle f'_i \rangle_{i\in I})$ y $(g, \langle g_j \rangle_{j\in J})$, i.e.

Como h hace conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd} I+J \arrow[r, "h"] & K \\ I \arrow[u, "i_I"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I+J \arrow[r, "h"] & K \\ J \arrow[u, "i_J"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal en Con_f, tenemos que $h = [f, g]$. Con esto, obtenemos que $h'_l : C_l \to D_{[f,g](l)}$. Además, por la definición de composición dada, tenemos que $\forall i \in I, h'_l \circ Id_{A_i} = f'_i$; con lo cual $h'_l = f'_i$ si $l = i$ para alguna $i \in I$ y $\forall j \in J, h'_l \circ Id_{B_j} = g'_j$; con lo cual $h'_l = g'_j$ si $l = j$ para alguna $j \in J$. Pero ésta es precisamente la definición de $[f, g]'_l$, entonces $\forall l \in I + J,\ [f, g]'_l = h'_l$. Luego, $([f, g], \langle [f, g]'_l \rangle_{l\in I+J}) = (h, \langle h'_l \rangle_{l\in I+J})$.

$\therefore Fam(\mathcal{X})$ tiene sumas finitas.

Veamos que cumple la condición (2) del teorema (1.2). Supongamos que existe un diagrama

$$\begin{tikzcd} & \langle Z_k \rangle_{k\in K} \arrow[d, "(f,\langle f_k \rangle_{k\in K})"] \\ \langle A_i \rangle_{i\in I} \arrow[r, "(i_I,\langle Id_{A_i} \rangle_{i\in I})"'] & \langle C_l \rangle_{l\in I+J} \end{tikzcd}$$

donde $\langle C_l \rangle_{l\in I+J}$ es el coproducto de $\langle A_i \rangle_{i\in I}$ y $\langle B_j \rangle_{j\in J}$ en $Fam(\mathcal{X})$ como lo definimos anteriormente. Luego, tenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[d, "f"'] \\ I \arrow[r, "i_I"'] & I+J \end{tikzcd}$$

en Con_f, que es extensiva, con lo cual existen $K_1,\ K_2 \in Con_f$ tal que $K = K_1 + K_2$ y además el diagrama

$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[r, "i_{K_1}"] \arrow[d, "f_1"'] & K_1 + K_2 \arrow[d, "f_1+f_2"] \\ I \arrow[r, "i_I"'] & I+J \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

es un producto fibrado. Luego, consideremos el objeto $\langle Z_k \rangle_{k\in K_1} \in Fam(\mathcal{X})$ y veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \langle Z_k \rangle_{k\in K_1} \arrow[r, "(i_{K_1},\langle Id_{Z_k} \rangle_{k\in K_1})"] \arrow[d, "(f_1,\langle f_k \rangle_{k\in K_1})"'] & \langle Z_k \rangle_{k\in K} \arrow[d, "(f,\langle f_k \rangle_{k\in K})"] \\ \langle A_i \rangle_{i\in I} \arrow[r, "(i_I,\langle Id_{A_i} \rangle_{i\in I})"'] & \langle C_l \rangle_{l\in I+J} \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

es un producto fibrado. Sea $k_1 \in K_1$, entonces por (2.1) los morfismos conmutan en Con_f; además $Id_{A_i} \circ f_{k_1} = Id_{Z_{k_1}} \circ f_{k_1}$, con lo cual, para cada $k_1 \in K_1$ los morfismos conmutan. Entonces, el diagrama (2.2) conmuta.

Supongamos que existe un diagrama conmutativo en $Fam(\mathcal{X})$ de la forma

$$\begin{tikzcd}
\langle Y_n\rangle_{n\in N} \arrow[r, "{(g,\langle g_n\rangle_{n\in N})}"] \arrow[d, "{(h,\langle h_n\rangle_{n\in N})}"'] & \langle Z_k\rangle_{k\in K} \arrow[d, "{(f,\langle f_k\rangle_{k\in K})}"] \\
\langle A_i\rangle_{i\in I} \arrow[r, "{(i_I,\langle Id_{A_i}\rangle_{i\in I})}"'] & \langle C_l\rangle_{l\in I+J}
\end{tikzcd}$$

De este diagrama obtenemos que en Con_f el diagrama

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & K \arrow[d, "f_1+f_2"] \\
I \arrow[r, "i_I"'] & I+J
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Observación 2.3 *De estos dos diagramas, obtenemos que para cada* $n \in N$*,* $h_n = Id_{A_{h(n)}} \circ h_n = f_{g(n)} \circ g_n$*.*

Como el diagrama (2.1) es un producto fibrado en Con_f, entonces $\exists! s : N \to K_1$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[dr, "s"'] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& K_1 \arrow[r, "i_{K_1}"'] \arrow[d, "f_1"'] & K \arrow[d, "f_1+f_2"] \\
& I \arrow[r, "i_I"'] & I+J
\end{tikzcd}$$

conmuta. Definimos el morfismo

$$\left(\begin{array}{c} N \\ {\scriptstyle s}\downarrow \\ K_1 \end{array} , \ \langle g_n : Y_n \to Z_{s(n)}\rangle_{n\in N}\right)$$

en $Fam(\mathcal{X})$. Veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\langle Y_n\rangle_{n\in N} \arrow[dr, "{(s,\langle g_n\rangle_{n\in N})}"] \arrow[drr, bend left, "{(g,\langle g_n\rangle_{n\in N})}"] \arrow[ddr, bend right, "{(h,\langle h_n\rangle_{n\in N})}"'] & & \\
& \langle Z_k\rangle_{k\in K_1} \arrow[r, "{(i_{K_1},\langle Id_{Z_k}\rangle_{k\in K_1})}"] \arrow[d, "{(f_1,\langle f_k\rangle_{k\in K_1})}"] & \langle Z_k\rangle_{k\in K} \arrow[d, "{(f,\langle f_k\rangle_{k\in K})}"] \\
& \langle A_i\rangle_{i\in I} \arrow[r, "{(i_I,\langle Id_{A_i}\rangle)_{i\in I}}"'] & \langle C_l\rangle_{l\in L}
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

conmuta. Es claro que conmuta en los morfismos de Con_f; y para cada $n \in N$, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
Y_n \arrow[dr, "g_n"] \arrow[drr, bend left, "g_n"] \arrow[ddr, bend right, "h_n"'] & & \\
& Z_{s(n)} \arrow[r, "Id_{Z_{s(n)}}"] \arrow[d, "f_{s(n)}"] & Z_{s(n)} \arrow[d, "f_{s(n)}"] \\
& A_{f(s(n))} \arrow[r, "Id_{A_{f(s(n))}}"'] & A_{f(s(n))}
\end{tikzcd}
$$

conmuta por la observación (2.3); luego, el diagrama (2.3) conmuta. Para ver la unicidad, supongamos que existe un morfismo

$$(s', \langle s'_n \rangle_{n\in N}) : \langle Y_n \rangle_{n\in N} \to \langle Z_k \rangle_{k\in K_1}$$

tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\langle Y_n \rangle_{n\in N} \arrow[dr, "(s',\langle s'_n \rangle_{n\in N})"] \arrow[drr, bend left, "(g,\langle n \rangle_{n\in N})"] \arrow[ddr, bend right, "(h,\langle h_n \rangle_{n\in N})"'] & & \\
& \langle Z_k \rangle_{k\in K_1} \arrow[r, "(i_{K_1},\langle Id_{Z_k} \rangle_{k\in K_1})"] \arrow[d, "(f,\langle f_k \rangle_{k\in K_1})"] & \langle Z_k \rangle_{k\in K} \arrow[d, "(f,\langle f_k \rangle_{k\in K})"] \\
& \langle A_i \rangle_{i\in I} \arrow[r, "(i_I,\langle Id_{A_i} \rangle_{i\in I})"'] & \langle C_l \rangle_{l\in L}
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Entonces tenemos que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
N \arrow[dr, "s'"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& K_1 \arrow[r, "i_{K_1}"'] \arrow[d, "f_1"'] & K \arrow[d, "f_1+f_2"] \\
& I \arrow[r, "i_I"'] & I+J
\end{tikzcd}
$$

conmuta, de donde obtenemos que $s = s'$ por la propiedad universal del producto fibrado en Con_f. Ahora, para cada $n \in N$, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
Y_n \arrow[dr, "s'_n"] \arrow[drr, bend left, "g_n"] \arrow[ddr, bend right, "h_n"'] & & \\
& Z_{s(n)} \arrow[r, "Id_{Z_{s(n)}}"] \arrow[d, "f_{s(n)}"] & Z_{s(n)} \arrow[d, "f_{s(n)}"] \\
& A_{f(s(n))} \arrow[r, "Id_{A_{f(s(n))}}"'] & A_{f(s(n))}
\end{tikzcd}
$$

conmuta; con lo cual, para cada $n \in N$, $s'_n = g_n$, que es la definición de nuestro morfismo, i.e. $(s, \langle g_n \rangle_{n \in N}) = (s', \langle s'_n \rangle_{n \in N})$. Probando así que el diagrama (2.2) es un producto fibrado. Es análoga la construcción para el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \langle Z_k \rangle_{k \in K} \arrow[d, "(f, \langle f_k \rangle_{k \in K})"'] \\
\langle B_j \rangle_{j \in J} \arrow[r, "(i_J, \langle Id_{B_j} \rangle_{j \in J})"'] & \langle C_l \rangle_{l \in I+J}
\end{tikzcd}$$

Ahora, para ver la condición (3), supongamos que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\langle A_i \rangle_{i \in I} \arrow[r] \arrow[d] & \langle C_l) \rangle_{l \in L} \arrow[d] & \langle B_j \rangle_{j \in J} \arrow[l] \arrow[d] \\
\langle Z_k \rangle_{k \in K_1} \arrow[r] & \langle Z_k \rangle_{k \in K_1 + K_2} & \langle Z_k \rangle_{k \in K_2} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

en donde la parte de abajo es una suma.

($\Longrightarrow$) Supongamos que los cuadrados son productos fibrados. Por la condición (2) demostrada, tenemos que los productos fibrados a lo largo de las inyecciones son precisamente sumas, objetos de la forma

$$\begin{tikzcd}
\langle A_i \rangle_{i \in I} \arrow[r] \arrow[d] & \langle C_l \rangle_{l \in I+J} \arrow[d] & \langle B_j \rangle_{j \in J} \arrow[l] \arrow[d] \\
\langle Z_k \rangle_{k \in K_1} \arrow[r] & \langle Z_k \rangle_{k \in K_1 + K_2} & \langle Z_k \rangle_{k \in K_2} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

con $\langle C_l \rangle_{l \in I+J}$ la suma de $\langle A_i \rangle_{i \in I}$ y $\langle B_j \rangle_{j \in J}$ en $Fam(\mathcal{X})$, y los morfismos de arriba son las respectivas inclusiones, de donde la parte de arriba es una suma.

($\Longleftarrow$) Supongamos que la parte de arriba es una suma, entonces por la condición 2 otra vez, los cuadrados son productos fibrados.

Con esto, $Fam(\mathcal{X})$ cumple las condiciones del teorema (1.2).

$\therefore Fam(\mathcal{X})$ es extensiva.$\blacksquare$

Veamos de que manera puede ser el producto en esta categoría, y cuando podemos garantizar su existencia.

2.2 Productos en $Fam(\mathcal{X})$

Teorema 2.4 *Si $\mathcal{X}$ es una categoría con productos finitos, entonces $Fam(\mathcal{X})$ tiene productos finitos.*

Demostración

Observemos que el objeto final en esta categoría es el objeto $\langle 1 \rangle_{* \in \{*\}}$, donde 1 es el objeto final en $\mathcal{X}$. Sean $\langle A_i \rangle_{i \in I}, \langle B_j \rangle_{j \in J} \in Fam(\mathcal{X})$, definimos su producto como el objeto $\langle A_i \times B_j \rangle_{(i,j) \in I \times J}$ con las proyecciones definidas como

$$\left(\begin{array}{c} I \times J \\ {\scriptstyle \pi_I}\big\downarrow \\ I \end{array} , \; \langle \pi_{A_i} : A_i \times B_j \to A_i \rangle_{(i,j) \in I \times J} \right) \qquad \left(\begin{array}{c} I \times J \\ {\scriptstyle \pi_J}\big\downarrow \\ J \end{array} , \; \langle \pi_{B_j} : A_i \times B_j \to B_j \rangle_{(i,j) \in I \times J} \right)$$

El lector puede verificar que este objeto cumple la propiedad universal del producto.$\blacksquare$

Con este resultado, obtenemos que si $\mathcal{X}$ tiene productos, entonces $Fam(\mathcal{X})$ es distributiva.

2.3 Propiedad universal de $Fam(\mathcal{X})$

Ahora, podemos definir un funtor de manera natural, $Fam_{\mathcal{X}}(\_) : \mathcal{X} \longrightarrow Fam(\mathcal{X})$, tal que si $A \in \mathcal{X}$, definimos $Fam_{\mathcal{X}}(A) = \langle A \rangle_{* \in \{*\}}$; y en un morfismo $f : A \to B$, le asociamos morfismo $(Id_{\{*\}}, \langle f \rangle_*) : \langle A \rangle_{* \in \{*\}} \to \langle B \rangle_{* \in \{*\}}$. Se puede verificar que éste es un funtor, que además es fiel y pleno.

Teorema 2.5 *Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ categorías y $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un funtor. Si $\mathcal{Y}$ tiene sumas finitas, entonces $\exists! \widehat{F} : Fam(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{Y}$ funtor (salvo isomorfismo canónico) que preserva sumas tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "Fam_{\mathcal{X}}(\_)"] \arrow[dr, "F"'] & Fam(\mathcal{X}) \arrow[d, "\widehat{F}"] \\ & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., podemos factorizar funtores a través de $Fam(\mathcal{X})$.

Demostración

Sea $\langle A_i \rangle_{i \in I}$, definimos $\widehat{F}(\langle A_i \rangle_{i \in I}) = \sum_{i \in I} F(A_i)$. Dado un morfismo $\langle A_i \rangle_{i \in I} \xrightarrow{(f, \langle f_i \rangle_{i \in I})} \langle B_j \rangle_{j \in J}$ obtenemos la siguiente familia de morfismos $A_i \xrightarrow{f_i} B_{f(i)}$. Con ésto, obtenemos en $\mathcal{Y}$ la familia de morfismos $F(A_i) \xrightarrow{F(f_i)} F(B_{f(i)})$; y como $\mathcal{Y}$ tiene sumas finitas, entonces $\exists! h : \sum_{i \in I} F(A_i) \to \sum_{j \in J} F(B_j)$ tal que para cada $i \in I$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \sum_{i \in I} F(A_i) \arrow[r, "h"] & \sum_{j \in J} F(B_j) \\ F(A_i) \arrow[u, "i_{F(A_i)}"] \arrow[r, "F(f_i)"'] & F(B_{f(i)}) \arrow[u, "i_{F(B_{f(i)})}"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Definamos $\widehat{F}((f, \langle f_i \rangle_{i \in I}) = h$ el morfismo proporcionado por la propiedad universal del coproducto. Veamos que definido así, $\widehat{F}$ es funtor. Sean $\langle A_i \rangle_{i \in I}$, $\langle B_j \rangle_{j \in J}$, $\langle C_k \rangle_{k \in K} \in Fam(\mathcal{X})$. Considerando el morfismo identidad en $Fam(\mathcal{X})$

$$\langle A_i \rangle_{i \in I} \xrightarrow{(Id_I, \langle Id_{A_i} \rangle_{i \in I})} \langle A_i \rangle_{i \in I}$$

entonces el morfismo inducido debe ser la $Id_{\sum_{i \in I} F(A_i)}$, pues este morfismo hace conmutar para cada $i \in I$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} \sum_{i \in I} F(A_i) \arrow[r, "Id_{\sum_{i \in I} F(A_i)}"] & \sum_{i \in I} F(A_i) \\ F(A_i) \arrow[u, "i_{F(A_i)}"] \arrow[r, "F(Id_{A_i})"'] & F(A_i) \arrow[u, "i_{F(A_i)}"'] \end{tikzcd}$$

pues F es funtor, entonces $F(Id_{A_i}) = Id_{F(A_i)}$, con lo cual ya es claro que hace conmutar el diagrama anterior. Con ésto obtenemos que $\widehat{F}((Id_I, \langle Id_{A_i} \rangle_{i \in I})) = Id_{\sum_{i \in I} F(A_i)}$.

Veamos que abre composiciones. Sean

$$\langle A_i \rangle_{i \in I} \xrightarrow{(f, \langle f_i \rangle_{i \in I})} \langle B_j \rangle_{j \in J} \xrightarrow{(g, \langle g_j \rangle_{j \in j})} \langle C_k \rangle_{k \in K}$$

en $Fam(\mathcal{X})$. Tenemos que $\widehat{F}(g \circ f, \langle g_{f(i)} \circ f_i \rangle_{i \in I})$, que denotaremos como h, es el único morfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\sum_{i\in I} F(A_i) \arrow[r, "h"] & \sum_{i\in I} F(C_k) \\
F(A_i) \arrow[u, "i_{F(A_i)}"] \arrow[r, "F(g_{f(i)}\circ f_i)"'] & F(C_{(g_{f(i)}\circ f)(i)}) \arrow[u, "i_{F(C_{g\circ f(i)})}"']
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $\widehat{F}((f, \langle f_i \rangle_{i\in I}))$ y $\widehat{F}((g, \langle g_j \rangle_{j\in j}))$ son los únicos morfismos que hacen conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd}
\sum_{i\in I} F(A_i) \arrow[r, "\widehat{F}((f,(f_i)_{i\in I}))"] & \sum_{j\in J} F(B_j) \\
F(A_i) \arrow[u, "i_{F(A_i)}"] \arrow[r, "F(f_i)"'] & F(B_{f(i)}) \arrow[u, "i_{F(B_{f(i)})}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\sum_{j\in J} F(B_j) \arrow[r, "\widehat{F}((g,(g_j)_{j\in J}))"] & \sum_{k\in K} F(C_k) \\
F(B_j) \arrow[u, "i_{F(B_j)}"] \arrow[r, "F(g_j)"'] & F(C_{g(j)}) \arrow[u, "i_{F(C_{g(j)})}"]
\end{tikzcd}$$

Uniendo éstos dos diagramas con $j = f(i)$, obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\sum_{i\in I} F(A_i) \arrow[r, "\widehat{F}((f,(f_i)_{i\in I}))"] & \sum_{j\in J} F(B_j) \arrow[r, "\widehat{F}((g,(g_j)_{j\in J}))"] & \sum_{k\in K} F(C_k) \\
F(A_i) \arrow[u, "i_{F(A_i)}"'] \arrow[r, "F(f_i)"'] & F(B_{f(i)}) \arrow[u, "i_{F(B_{f(i)})}"'] \arrow[r, "F(g_{f(i)})"'] & F(C_{g\circ f(i)}) \arrow[u, "i_{F(C_{g\circ f(i)})}"']
\end{tikzcd}$$

de la funtorialidad de F obtenemos que $F(g_{f(i)}) \circ F(f_i) = F(g_{f(i)} \circ f_i)$; con lo cual el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\sum_{i\in I} F(A_i) \arrow[r, "\widehat{F}((f,(f_i)_{i\in I}))"] & \sum_{j\in J} F(B_j) \arrow[r, "\widehat{F}((g,(g_j)_{j\in J}))"] & \sum_{k\in K} F(C_k) \\
F(A_i) \arrow[u, "i_{F(A_i)}"'] \arrow[rr, "F(g_{f(i)}\circ f_i)"'] & & F(C_{g\circ f(i)}) \arrow[u, "i_{F(C_{g\circ f(i)})}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, y por la propiedad universal del coproducto, tenemos que $\widehat{F}(g\circ f, (g_{f(i)}\circ f_i)_{i\in I}) = \widehat{F}((g, (g_j)_{j\in J})) \circ \widehat{F}((f, (f_i)_{i\in I}))$. $\therefore$ $\widehat{F}$ es funtor.

Para demostrar la propiedad universal enunciada, tenemos que si $A \in \mathcal{X}$, entonces $\widehat{F} \circ Fam_{\mathcal{X}}(A) = \widehat{F}(\langle A_* \rangle_{*\in\{*\}}) = \sum_{*\in\{*\}} F(A_*) = F(A_*) = F(A)$. Si $A, B \in \mathcal{X}$ y $A \xrightarrow{f} B$ es un morfismo, entonces $\widehat{F} \circ Fam_{\mathcal{X}}(f) = \widehat{F}((Id_{\{*\}}, \langle f \rangle_{*\in\{*\}})$, que por definición es el morfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\widehat{F}((f,(Id_{\{*\}*}))"] & F(B) \\
F(A) \arrow[u, "Id_{F(A)}"] \arrow[r, "F(f)"'] & F(B) \arrow[u, "Id_{F(B)}"']
\end{tikzcd}$$

donde las inclusiones son las identidades respectivas. Se puede ver que el morfismo que hace conmutar este diagrama es $F(f)$, con lo que tenemos que $\widehat{F}((f, (Id_{\{*\}*})) = F(f)$. $\therefore$ $\widehat{F} \circ Fam_{\mathcal{X}} = F$.

Ahora bien, supongamos que existe un funtor $G : Fam(\mathcal{X}) \to \mathcal{Y}$ que respeta sumas, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "Fam_{\mathcal{X}}(\_)"] \arrow[dr, "F"'] & Fam(\mathcal{X}) \arrow[d, "G"] \\ & \mathcal{Y} \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

conmuta. Sea $\widehat{A} = \langle A_i \rangle_{i\in I} \in Fam(\mathcal{X})$. Por la construcción dada del coproducto en $Fam(\mathcal{X})$, tenemos que $\sum_{i\in I} \langle A_{*_i} \rangle_{*_i \in \{*_i\}} = \langle A_i \rangle_{i\in I}$ con $A_{*_i} = A_i$. Como G preserva sumas, obtenemos el isomorfismo $[G(i_{A_{*_i}})] : G(\langle A_i \rangle_{i\in I}) \cong \sum_{i\in I} G(\langle A_{*_i} \rangle_{*_i\in\{*_i\}}) = \sum_{i\in I} F(A_i) = \widehat{F}(\langle A_i \rangle_{i\in I})$. La penúltima igualdad es resultado de la conmutatividad del diagrama (2.4). Veamos que $\eta_{\widehat{A}} = [G(i_{A_{*_i}})] : G(\widehat{A}) \to \widehat{F}(\widehat{A})$ es natural.

Sea $(f, \langle f_i \rangle_{i\in I}) : \langle A_i \rangle_{i\in I} \to \langle B_j \rangle_{j\in J}$ P.D. El diagrama

$$\begin{tikzcd} \widehat{F}(\langle A_i \rangle_{i\in I}) \arrow[r, "{[G(i_{A_{*_i}})]}"] \arrow[d, "\widehat{F}(f)"'] & G(\langle A_i \rangle_{i\in I}) \arrow[d, "G(f)"] \\ \widehat{F}(\langle B_j \rangle_{j\in J}) \arrow[r, "{[G(i_{B_{*_j}})]}"'] & G(\langle B_j \rangle_{j\in J}) \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

conmuta.

Demostración: El diagrama (2.5) se traduce en el diagrama

$$\begin{tikzcd} \sum_{i\in I} F(A_i) \arrow[r, "{[G(i_{A_{*_i}})]}"] \arrow[d, "{[f_i]}"'] & G(\langle A_i \rangle_{i\in I}) \arrow[d, "G(f)"] \\ \sum_{j\in J} F(B_j) \arrow[r, "{[G(i_{B_{*_j}})]}"'] & G(\langle B_j \rangle_{j\in J}) \end{tikzcd}$$

El cual a su vez, se traduce en el diagrama

$$\begin{tikzcd} \sum_{i\in I} G(\langle A_{*_i} \rangle_{*_i\in\{*_i\}}) \arrow[r, "{[G(i_{A_{*_i}})]}"] \arrow[d, "{[G(f_i)]}"'] & G(\langle A_i \rangle_{i\in I}) \arrow[d, "G(f)"] \\ \sum_{j\in J} G(\langle B_{*_j} \rangle_{*_j\in\{*_j\}}) \arrow[r, "{[G(i_{B_{*_j}})]}"'] & G(\langle B_j \rangle_{j\in J}) \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Con $[G(f_i)]$ el morfismo inducido por la propiedad universal de la suma. Para cada $i \in I$, tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} G(\langle A_{*_i} \rangle_{*_i\in\{*_i\}}) \arrow[dr, "i_{G(\langle A_{*_i} \rangle_{*_i\in\{*_i\}})}"] \arrow[drr, bend left, "G(i_{A_{*_i}})"] \arrow[ddd, "G(f_i)"'] & & \\ & \sum_{i\in I} G(\langle A_{*_i} \rangle_{*_i\in\{*_i\}}) \arrow[r, "{[G(i_{A_{*_i}})]}"] \arrow[d, "{[G(f_i)]}"'] & G(\langle A_i \rangle_{i\in I}) \arrow[d, "G(f)"] \\ & \sum_{j\in J} G(\langle B_{*_j} \rangle_{*_j\in\{*_j\}}) \arrow[r, "{[G(i_{B_{*_j}})]}"'] & G(\langle B_j \rangle_{j\in J}) \\ G(\langle B_{*_j} \rangle_{*_j\in\{*_j\}}) \arrow[ur, "i_{G(\langle B_{*_j} \rangle_{*_j\in\{*_j\}})}"'] \arrow[urr, bend right, "G(i_{B_{*_j}})"'] & & \end{tikzcd}$$

conmuta, y entonces por la propiedad universal de la suma, el diagrama (2.6) conmuta, i.e, el diagrama (2.5) conmuta.
$\therefore \eta : G \Rightarrow \widehat{F}$ es un isomorfismo natural.
$\therefore\ \widehat{F}$ es único savo isomorfismo canónico.$\blacksquare$

En el siguiente apartado veremos lo importante de estas categorías, que nos serán de mucha ayuda para construir una categoría monoidal, el producto tensorial en la categoría de categorías extensivas Ext.

Capítulo 3

Categoría de fracciones

En matemáticas, la noción de invertir elementos ha sido muy útil y necesaria para su desarrollo, un ejemplo muy claro es la localización. En categorías, lo que se busca es una categoría donde se pueda invertir una colección de morfismos, bajo ciertas restricciones en esta colección, y además que cumpla con cierta propiedad universal. En éste capítulo estudiaremos un poco de esta categoría, lo necesario que utilizaremos en el trabajo. Lo utilizado en el trabajo se puede encontrar en [17].

3.1 Construcción

Definición 3.1 ***Cálculo de fracciones***
Sea $\mathcal{X}$ una categoría. Un cálculo de fracciones derecho en $\mathcal{X}$, es una clase de morfismos Γ en $\mathcal{X}$, cuyos elementos llamaremos denominadores, con las siguientes propiedades:
$(CF1)$ *Γ es cerrada bajo composiciones y tiene las identidades. Esto es, si $s : A \to B$, $t : B \to C \in \Gamma$, entonces $t \circ s \in \Gamma$, además $\forall A (A \in \mathcal{X})$, $Id_A \in \Gamma$.*
$(CF2)$ *Para morfismos $f : A \to C$ y $s : B \to C$ con $s \in \Gamma$, existe un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s'"'] & B \arrow[d, "s"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

con $s' \in \Gamma$.
$(CF3)$ *Dado un diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{X}$, con $s \circ f = s \circ g$ y $s \in \Gamma$, existe un morfismo $s' : W \to X$ en Γ tal que $f \circ s' = g \circ s'$.

Definición 3.2 *Sea Γ una clase de morfismos en $\mathcal{X}$. Llamamos la cerradura de Γ a la clase de morfismos en $\mathcal{X}$, denotada Γ^*, que cumple:*

1. *$\forall A \in \mathcal{X}$, $Id_A \in \Gamma^*$*

2. *$\forall s_1, s_2 \ldots, s_n \in \Gamma$, $s_1 \circ s_2 \circ \ldots s_n \in \Gamma^*$ siempre que la composición esté definida.*

Proposición 3.3 *Sean $\mathcal{X}$ una categoría y Γ una clase de morfismos que cumple la propiedad $(CF2)$ y $(CF3)$, entonces su cerradura Γ^* es un cálculo de fracciones derecho.*

Demostración:

Es claro que tiene a las identidades. Si $s,t \in \Gamma^*$, con $s : A \to B$ y $t : B \to C$, entonces $s = s_1 \circ \ldots \circ s_n$ y $t = t_1 \circ \ldots \circ t_m$; con $s_i, t_j \in \Gamma$ para $i \in \{1, \ldots n\}$ y $j \in \{1, \ldots m\}$. Entonces $t \circ s = t_1 \circ \ldots t_m \circ s_1 \circ \ldots \circ s_n$, luego $t \circ s \in \Gamma^*$. Con esto, Γ^* cumple $(CF1)$.

Veamos que cumple $(CF2)$. Supongamos que tenemos dos morifsmos

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "s"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

con $s \in \Gamma^*$. La demostración es por inducción sobre el número de morfismos en Γ tal que la composición es igual a s (omitiendo las identidades). Si el número de morfismos en la composición de s es 1, entonces $s \in \Gamma$. Por hipótesis existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s'"'] & B \arrow[d, "s"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

con $s' \in \Gamma$ y por lo tanto $s' \in \Gamma^*$. Ahora, supongamos cierto el resultado para $n-1$ y que s es composición de n morfismos en Γ. Tenemos que $s = l \circ k$ con k composición de $n-1$ morfismos en Γ y $l \in \Gamma$. Entonces tenemos un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "k"] \\ & E \arrow[d, "l"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Como $l \in \Gamma$ y Γ cumple $(CF3)$, entonces existe un diagrama conmutativo en $\mathcal{X}$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "l'"'] & E \arrow[d, "l"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

con $l' \in \Gamma$. De esto obtenemos morfismos $D \xrightarrow{f'} E$ y $B \xrightarrow{k} E$. Por hipótesis de inducción existe un diagrama conmutativo en $\mathcal{X}$

$$\begin{tikzcd} D' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k'"'] & B \arrow[d, "k"] \\ D \arrow[r, "f'"'] & E \end{tikzcd}$$

con $k' \in \Gamma^*$ de donde tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} D' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "l' \circ k'"'] & B \arrow[d, "s = l \circ k"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

con $l' \circ k' \in \Gamma^*$, pues $l' \in \Gamma$ y $k' \in \Gamma^*$.

Para ver que $(CF3)$ se cumple, sea un diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{X}$, con $s \circ f = s \circ g$ y $s \in \Gamma^*$. La demostración se hará por inducción sobre el número de morfismos en Γ tal que la composición es s (omitiendo identidades). Si el número de elementos en la composición es 1, entonces $s \in \Gamma$, con lo cual el resultado se sigue de que Γ cumple $(CF3)$. Ahora, supongamos que el resultado es cierto para morfismos que son composiciones de $n-1$ morfismos de Γ y que s es composición de n morfismos de Γ. Luego, $s = l \circ k$, con $k \in \Gamma$ y l composición de $n-1$ morfismos en Γ. Entonces tenemos un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "k \circ f"] \arrow[r, shift right, "k \circ g"'] & D_l \arrow[r, "l"] & Z \end{tikzcd}$$

y sabemos que l iguala a los morfismos $k \circ f$ y $k \circ g$, pues $l \circ (k \circ f) = (l \circ k) \circ f = s \circ f = s \circ g = (l \circ k) \circ g = l \circ (k \circ s)$. Entonces, por hipóstesis de inducción, existe un morfismo

$$D_{l'} \xrightarrow{l' \in \Gamma} X$$

tal que $(k \circ f) \circ l' = (k \circ g) \circ l'$ y $l' \in \Gamma^*$, entonces reescribiendo esto, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} D_{l'} \arrow[r, shift left, "f \circ l'"] \arrow[r, shift right, "g \circ l'"'] & Y \arrow[r, "k"] & D_l \end{tikzcd}$$

con k que iguala a los morfismos $f \circ l'$ y $g \circ l'$. Luego, como $k \in \Gamma$, entonces existe

$$D_{k'} \xrightarrow{k'} D_{l'}$$

tal que $(f \circ l') \circ k' = (g \circ l') \circ k'$ y $k' \in \Gamma$. Considerando el morfismo $l' \circ k'$, el cual está en Γ^*, pues $l' \in \Gamma^*$ y $k' \in \Gamma$, obtenemos lo deseado.
$\therefore$ Γ^* cumple las condiciones $(CF1)$, $(CF2)$ y $(CF3)$. ∎

Definición 3.4 ***Categoría de fracciones:***

Sea $\mathcal{X}$ una categoría y Γ un cálculo de fracciones derecho. Formamos la categoría $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$, con $Ob(\mathcal{X}\Gamma^{-1}) = Ob(\mathcal{X})$; y si $X, Y \in \mathcal{X}\Gamma^{-1}$, entonces un morfismo $X \to Y$ es la clase de equivalencia de un par de morfismos

$$\begin{tikzcd} & D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

con $s \in \Gamma$, al que denotaremos como f/s.

Si $f/s : X \to Y$, y $g/t : Y \to Z$; definimos la composición $(g/t) \circ (f/s)$ como el morfismo

$$\begin{tikzcd}
& & D_{t'} \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "f'"] & & \\
& D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & D_t \arrow[dl, "t"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

con $t' \in \Gamma$. La relación en los morfismos es de la siguiente manera: decimos que $f/s \sim g/t$ si existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & D_u \arrow[l, "u"'] \arrow[u, "l"] \arrow[d, "k"] & Y \\
& D_t \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Donde u es un denominador.

Falta ver que, con ésta definición, $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$ realmente forma una categoría. Antes veamos unos cuantos resultados que nos ayudarán a ésto.

Proposición 3.5 *La relación $\sim$ es de equivalencia*

La reflexividad y simetría son inmediatas. Transitividad:
Supongamos que $f/s \sim g/t$ y $g/t \sim h/p$. Entonces existen diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
& D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & D_u \arrow[l, "u"'] \arrow[u, "l"] \arrow[d, "k"] & Y \\
& D_t \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& D_t \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & D_{u'} \arrow[l, "u'"'] \arrow[u, "n"] \arrow[d, "m"] & Y \\
& D_p \arrow[ul, "p"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

con $u, u' \in \Gamma$. De esto obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& D_{u'} \arrow[d, "u'"'] \\
D_u \arrow[r, "u"] & X
\end{tikzcd}$$

en $\mathcal{X}$. Por hipótesis existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & D_{u'} \arrow[d, "u'"] \\
D_u \arrow[r, "u"'] & X
\end{tikzcd}$$

con $j \in \Gamma$. Ahora bien, como $u \in \Gamma$, entonces $u \circ j \in \Gamma$. Luego, tenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, shift left, "k\circ j"] \arrow[r, shift right, "n\circ i"'] & D_t \arrow[r, "t"] & X \end{tikzcd}$$

con $t \circ (k \circ j) = u \circ j = u' \circ i = t \circ (n \circ i)$ y con $t \in \Gamma$, con lo que existe un morfismo $D_q \xrightarrow{q} E$ con $(k \circ j) \circ q = (n \circ i) \circ q$. Considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & D_q \arrow[l, "w"] \arrow[u, "l\circ(j\circ q)"] \arrow[d, "m\circ(i\circ q)"'] & Y \\
& D_p \arrow[ul, "p"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

con $w = s \circ (l \circ (j \circ q) \in \Gamma$ pues $s \circ l,\ j,\ q \in \Gamma$. Conmuta puesto que del lado izquierdo $s \circ (l \circ (j \circ q)) = (u \circ j) \circ q = (u' \circ i) \circ q = m \circ (p \circ (i \circ q))$; del lado derecho $f \circ (l \circ (j \circ q)) = g \circ (k \circ (j \circ q)) = g \circ (n \circ (i \circ q)) = h \circ (m \circ (i \circ q)$; con lo cual $f/s \sim g/t$.■

Proposición 3.6 *La composición en $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$ no depende del cuadrado conmutativo elegido.*

Sean $f/s : X \to Y$ y $g/t : Y \to Z$ tal que componerlos tenemos dos diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & D_{t'} \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "f_t"] & & \\
& D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & D_t \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & D_j \arrow[dl, "j"'] \arrow[dr, "f_j"] & & \\
& D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & D_t \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Por la propiedad $(CF2)$, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
D_k \arrow[r, "l"] \arrow[d, "k"'] & D_{t'} \arrow[d, "t'"] \\
D_j \arrow[r, "j"] & X
\end{tikzcd}$$

con $k \in \Gamma$. Luego, si componemos esta igualdad con el morfismo f, obtenemos $f \circ (t' \circ l) = f \circ (j \circ k)$; y por conmutatividad de los diagramas (3.1) obtenemos $t \circ (f_{t'} \circ k) = t \circ (f_j \circ k)$, i.e. se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} D_k \arrow[r, shift left, "f_t\circ l"] \arrow[r, shift right, "f_j\circ k"'] & D_t \arrow[r, "t"] & Y \end{tikzcd}$$

Como $t \in \Gamma$, por la propiedad $(CF3)$ se tiene que existe un morfismo $w : W \to D_k$ y $w \in \Gamma$, tal que $(f_{t'} \circ l) \circ w = (f_j \circ k) \circ w$. Con esto obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & D_{t'} \arrow[dl, "s\circ t'"'] \arrow[dr, "g\circ f_j"] & \\
X & W \arrow[l, "u"'] \arrow[u, "l\circ w"'] \arrow[d, "k\circ w"] & Y \\
 & D_j \arrow[ul, "s\circ j"] \arrow[ur, "g\circ f_t"'] &
\end{tikzcd}$$

con $u = s \circ (j \circ (k \circ w)) \in \Gamma$. $\blacksquare$.

Con este resultado, podemos decir quién es el morfismo identidad en la categoría $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$, ya que podemos elegir el representante más conveniente. Si $X \in \mathcal{X}$ entonces el morfismo identidad en X, es el morfismo de la forma

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "Id_X"'] \arrow[dr, "Id_X"] & \\
X & & X
\end{tikzcd}$$

Pues si tenemos un morfismo

$$\begin{tikzcd}
 & D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

entonces al componer $Id_X/Id_X \circ f/s$ tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "Id_{D_s}"] & & \\
 & X \arrow[dl, "Id_X"'] \arrow[dr, "Id_X"] & & D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & X & & Y
\end{tikzcd}$$

i.e., el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

con esto $Id_X/Id_X \circ f/s = f/s$. Y si tenemos un morfismo

$$\begin{tikzcd}
 & D_t \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
Z & & X
\end{tikzcd}$$

entonces $Id_X/Id_X \circ g/t$ es el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & D_t \arrow[dl, "Id_{D_t}"'] \arrow[dr, "g"] & & & & & & \\
 & D_t \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & & X \arrow[dl, "Id_X"'] \arrow[dr, "Id_X"] & & & & D_t \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
Z & & X & & X & = & X & & X
\end{tikzcd}$$

con lo cual $g/t \circ Id_X/Id_X = g/t$.

Proposición 3.7 *La composición en $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$ no depende del representante.*

Demostración: Supongamos que $g/t \sim g'/t' : Y \to Z$ y $f/s : X \to Y$. Entonces, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& D_t \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
Y & D_v \arrow[l, "b"'] \arrow[u, "v"'] \arrow[d, "v'"] & Z \\
& D_{t'} \arrow[ul, "t'"] \arrow[ur, "g'"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

con $b \in \Gamma$. Sabemos que $f/s \circ g/t$ y $f/s \circ g'/t'$ son diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd}
& & D_p \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & & \\
& D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & D_t \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& & D_{p'} \arrow[dl, "p'"'] \arrow[dr, "q'"] & & \\
& D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & D_{t'} \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "g'"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

con $p,\ p' \in \Gamma$. Utilizando la propiedad $(CF2)$, de estos dos diagramas se desprende el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
D_k \arrow[r, "l"] \arrow[d, "k"'] & D_p \arrow[d, "p"] \\
D_u \arrow[r, "u"'] & D_s
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

con $k \in \Gamma$. Luego, si consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & & D_v \arrow[d, "v"] \\
& & & D_t \arrow[d, "t"] \\
D_k \arrow[r, "l"'] & D_p \arrow[r, "q"'] & D_t \arrow[r, "t"'] & Y
\end{tikzcd}$$

y utilizando que $t \circ v \in \Gamma$, obtenemos por la propiedad $(CF2)$ que existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
D_z \arrow[rrr, "w"] \arrow[dd, "z"'] & & & D_v \arrow[d, "v"] \\
& & & D_t \arrow[d, "t"] \\
D_k \arrow[r, "l"'] & D_p \arrow[r, "q"'] & D_t \arrow[r, "t"'] & Y
\end{tikzcd} \tag{3.5}$$

con $z \in \Gamma$. Utilizando los diagramas (3.3) y (3.4), obtenemos también que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
D_z \arrow[rrr, "w"] \arrow[dd, "z"'] & & & D_v \arrow[d, "v'"] \\
& & & D_{t'} \arrow[d, "t'"] \\
D_k \arrow[r, "k"'] & D_{p'} \arrow[r, "q'"'] & D_{t'} \arrow[r, "t'"'] & Y
\end{tikzcd} \tag{3.6}$$

conmuta. Con esto, obtenemos los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} D_z \arrow[r, shift left, "q\circ(l\circ z)"] \arrow[r, shift right, "v\circ w"'] & D_t \arrow[r, "t"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D_z \arrow[r, shift left, "q'\circ(k\circ z))"] \arrow[r, shift right, "v'\circ w"'] & D_{t'} \arrow[r, "t'"] & Y \end{tikzcd}$$

con $t,\ t' \in \Gamma$ y además,

$$t \circ (q \circ (l \circ z)) = t \circ (v \circ w) \qquad t' \circ (q' \circ (k \circ z)) = t' \circ (v' \circ w)$$

por (3.5) y (3.6); luego, en virtud de la propiedad $(CF3)$, existen morfismos $r : D_r \to D_z$, $r' : D_{r'} \to D_z$ en Γ, tal que

$$(v \circ w) \circ r = (q \circ (l \circ z)) \circ r \qquad (v' \circ w) \circ r' = ((q' \circ k) \circ z) \circ r'$$

Por último, obtenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd} & D_r \arrow[d, "r"] \\ D_{r'} \arrow[r, "r'"'] & D_z \end{tikzcd}$$

con $r \in \Gamma$; entonces por la propiedad $(CF2)$, existe un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} D_m \arrow[r, "n"] \arrow[d, "m"'] & D_r \arrow[d, "r"] \\ D_{r'} \arrow[r, "r'"'] & D_z \end{tikzcd}$$

con $m \in \Gamma$.

Con ésto, obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & D_p \arrow[dl, "s\circ p"'] \arrow[drr, "g\circ q"] & & \\ X & D_k \arrow[u, "l"] \arrow[d, "k"] & D_m \arrow[l, "z\circ(r'\circ m)"'] & Z \\ & D_{p'} \arrow[ul, "s'\circ p'"] \arrow[urr, "g\circ q"'] & & \end{tikzcd}$$

Además, tenemos que $(s \circ p),\ z,\ r',$ y $m \in \Gamma$, con lo cual la composición está en Γ; i.e, $g/t \circ f/s = (g \circ q)/s \circ p \sim (g' \circ q')/s \circ p' = g'/t' \circ f/s$.

Demostrando análogamente que si $f/s \sim f'/s' : X \to Y$, entonces $g/t \circ f/s \sim g/t \circ f'/s'$, se obtiene lo deseado.

$\therefore$ La composición no depende del representante.$\blacksquare$

Proposición 3.8 *La composición en $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$ es asociativa.*

Sean $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}\Gamma^{-1}$ y morfismos

$$X \xrightarrow{f/s} Y \qquad Y \xrightarrow{g/t} Z \qquad Z \xrightarrow{h/k} W$$

P.D $h/k \circ (g/t \circ f/s) = (h/k \circ g/t) \circ f/s$.

Para esto, el lado izquierdo de la igualdad es un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd}
 & & & D_{k'} \arrow[dl, "k'"'] \arrow[ddrr, "l"] & & & \\
 & & D_{t'} \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "f'"] & & & & \\
 & D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & D_t \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & & D_k \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "h"] & \\
X & & Y & & Z & & W
\end{tikzcd} \tag{3.7}$$

y el lado derecho es de la forma

$$\begin{tikzcd}
 & & & D_i \arrow[ddll, "i"'] \arrow[dr, "m"] & & & \\
 & & & & D_{l'} \arrow[dl, "l'"'] \arrow[dr, "g'"] & & \\
 & D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & D_t \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & & D_k \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "h"] & \\
X & & Y & & Z & & W
\end{tikzcd} \tag{3.8}$$

Ahora, tenemos los morfismos

$$\begin{tikzcd}
 & D_i \arrow[d, "i"'] \\
D_{k'} \arrow[r, "t' \circ k'"'] & D_s
\end{tikzcd}$$

Como se tiene que Γ cumple la propiedad $(CF2)$ e $i \in \Gamma$, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & D_i \arrow[d, "i"] \\
D_{k'} \arrow[r, "t' \circ k'"'] & D_s
\end{tikzcd}$$

con $v \in \Gamma$. Luego, si componemos con el morfismo f, tenemos la igualdad $f \circ ((t' \circ k') \circ v) = f \circ (i \circ u)$ utilizando la conmutatividad de los diagramas (3.7) y (3.8), tenemos que $f \circ ((t' \circ k') \circ v) = t \circ (f' \circ k)$ y $f \circ (i \circ u) = t \circ (l' \circ m)$, i.e., tenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, shift left, "l'\circ k'"] \arrow[r, shift right, "f'\circ k"'] & D_t \arrow[r, "t"] & Y \end{tikzcd}$$

y $t \in \Gamma$. Por la propiedad $(CF3)$, existe un morfismo $a : D_a \to U$ tal que $(f' \circ k') \circ a = (l' \circ m) \circ a$. Volvamos a hacer lo mismo pero ahora con el morfismo g, entonces $g \circ ((f' \circ k') \circ a) = g \circ ((l' \circ m) \circ a)$, y utilizando la conmutatividad de los diagramas (3.7) y (3.8), obtenemos $g \circ ((f' \circ k') \circ a) = k \circ (l \circ a)$ y $g \circ ((l' \circ m) \circ a) = k \circ ((g' \circ m) \circ a)$. Con esto volvemos a obtener un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} D_a \arrow[r, shift left, "l\circ a"] \arrow[r, shift right, "(g'\circ m)\circ a"'] & D_k \arrow[r, "k"] & Z \end{tikzcd}$$

con $k \in \Gamma$. Otra vez utilizando la propiedad $(CF3)$, existe un morfismo $b : D_b \to D_a$ tal que $(l \circ a) \circ b = ((g' \circ m) \circ a) \circ b$. Con esto obtenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & D_{k'} \arrow[dl, "s\circ(t'\circ k')"'] \arrow[dr, "h\circ l"] & \\ X & D_b \arrow[l, "p"] \arrow[u, "v'"] \arrow[d, "u'"] & W \\ & D_i \arrow[ul, "i\circ s"] \arrow[ur, "h\circ(g'\circ m)"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, con $v' = v \circ (a \circ b)$ y $u' = u \circ (a \circ b)$. Además, como $v \in \Gamma$, entonces $(s \circ (t' \circ k')) \circ (v \circ (a \circ b)) \in \Gamma$, i.e, $p \in \Gamma \therefore h/k \circ (g/t \circ f/s) = (h/k \circ g/t) \circ f/s$.$\blacksquare$

Con estos resultados, obtenemos que $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$ es una categoría con la composición en morfismos definida.

3.2 Propiedad universal de $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$

A continuación veremos la propiedad universal que posee esta categoría.

Lema 3.9 *Sean $\mathcal{X}$ una categoría y Γ un cálculo de fracciones derecho en $\mathcal{X}$. Entonces existe un funtor $\gamma : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}\Gamma^{-1}$ tal que si $s \in \Gamma$, $\gamma(s)$ es invertible. Además si $\mathcal{Y}$ es una categoría y $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un funtor con la propiedad de que $\forall s \in \Gamma$, $F(s)$ es invertible, entonces $\exists! \widehat{F} : \mathcal{X}\Gamma^{-1} \longrightarrow \mathcal{Y}$, tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{X}\Gamma^{-1} \arrow[d, "\widehat{F}"] \\ & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración:

Primero, definimos a γ en los objetos como la identidad; y si tenemos un morfismo $X \xrightarrow{f} Y$, definimos $\gamma(f) = f/Id_X$, i.e., al morfismo

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "Id_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Es claro que manda identidades a identidades. Veamos que abre composiciones. Sean $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ morfismos en $\mathcal{X}$.
P.D. $\gamma(g \circ f) = \gamma(g) \circ \gamma(f)$.

Sabemos que $\gamma(g) \circ \gamma(f)$ es un diagrama

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dl, "Id_X"'] \arrow[dr, "f"] & & \\ & X \arrow[dl, "Id_X"'] \arrow[dr, "f"] & & Y \arrow[dl, "Id_Y"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

con ese representante elegido, y el resultado de esa composición es prescisamente

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "Id_X"'] \arrow[dr, "g \circ f"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

con lo cual $\gamma(g \circ f) = \gamma(g) \circ \gamma(f)$.
$\therefore$ γ es funtor.

Además, si $D_s \xrightarrow{s} Y \in \Gamma$, entonces $\gamma(s) = s/Id_{D_s}$ tiene como inversa al morfismo Id_{D_s}/s; pues $Id_{D_s}/s \circ s/Id_{D_s}$ es un diagrama

$$\begin{tikzcd} & & D_s \arrow[dl, "Id_{D_s}"'] \arrow[dr, "Id_{D_s}"] & & \\ & D_s \arrow[dl, "Id_s"'] \arrow[dr, "s"] & & D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "Id_{D_s}"] & \\ D_s & & Y & & D_s \end{tikzcd}$$

que es justamente el diagrama

$$\begin{tikzcd} & D_s \arrow[dl, "Id_{D_s}"'] \arrow[dr, "Id_{D_s}"] & \\ D_s & & D_s \end{tikzcd}$$

La otra composición que tenemos es $s/Id_{D_s} \circ Id_{D_s}/s$ que es un diagrama

$$\begin{tikzcd} & & D_s \arrow[dl, "Id_{D_s}"'] \arrow[dr, "Id_{D_s}"] & & \\ & D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "Id_{D_s}"] & & D_s \arrow[dl, "Id_{D_s}"'] \arrow[dr, "s"] & \\ Y & & D_s & & Y \end{tikzcd}$$

de donde $s/Id_{D_s} \circ Id_{D_s}/s = s/s$. Fijándonos en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "s"] & \\
Y & D_s \arrow[l, "s"'] \arrow[u, "Id_{D_s}"'] \arrow[d, "s"] & Y \\
& Y \arrow[ul, "Id_Y"] \arrow[ur, "Id_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

con lo cual $s/s = Id_Y/Id_Y$.

Ahora bien, supongamos que existe un funtor $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ tal que invierte a los morfismos en Γ. $\forall\ X \in \mathcal{X}$, definimos $\widehat{F}(X) = F(X)$, y en morfismos

$$\begin{tikzcd}
& D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

como $\widehat{F}(f/s) = F(f) \circ F(s)^{-1}$. Veamos que la definición no depende del representante.

Supongamos que $f/a \sim g/t$, i.e., existe un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd}
& D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & D_u \arrow[l, "w"'] \arrow[u, "u"] \arrow[d, "v"'] & Y \\
& D_t \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

con $w \in \Gamma$. De aquí tenemos que $F(s) \circ F(u) = F(t) \circ F(v)$ y $F(f) \circ F(u) = F(g) \circ F(v)$. Además, tenemos que $w = s \circ v \in \Gamma$, y con lo cual es invertible. Entonces tenemos que $F(s \circ u) \circ F(s \circ u)^{-1} = (F(s) \circ F(u)) \circ F(s \circ u)^{-1} = Id_{D_u}$, y si componemos con $F(s)^{-1}$, tenemos que $F(u) \circ F(s \circ u)^{-1} = (F(s)^{-1} \circ F(s)) \circ F(u) \circ (F(s \circ u)^{-1}) = F(s)^{-1}$. Análogamente obtenemos que $F(t)^{-1} = F(v) \circ F(t \circ v)^{-1}$. Además como $s \circ u = t \circ v$, se sigue que $F(s \circ u)^{-1} = F(t \circ u)^{-1}$. Juntando estas observaciones se tiene que $F(f) \circ F(s)^{-1} = F(f) \circ (F(u) \circ F(s \circ u)^{-1}) = (F(g) \circ F(v)) \circ F(s \circ u)^{-1} = F(g) \circ (F(v) \circ F(t \circ v)^{-1}) = F(g) \circ F(t)^{-1}$.

$\therefore$ la definición no depende del representante.

Veamos que $\widehat{F}$ es funtor. Es claro que manda identidaes en identidades. Sean $X, Y, Z \in \mathcal{X}$ y morfismos

$$\begin{tikzcd}
& D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & & D_t \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

entonces la composición es un morfismo

$$\begin{tikzcd}
& & D_k \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
& D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & D_t \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd} \tag{3.9}$$

P.D. $\widehat{F}(g/t) \circ \widehat{F}(f/s) = \widehat{F}(g \circ h/s \circ k)$.

Por definición, $\widehat{F}(g \circ h/s \circ k) = F(g \circ h) \circ F(s \circ k)^{-1}$, $\widehat{F}(f/s) = F(f) \circ F(s)^{-1}$ y $\widehat{F}(g/t) = F(g) \circ F(t)^{-1}$. Por el diagrama (3.9) obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(D_k) \arrow[r, "F(h)"] \arrow[d, "F(k)"'] & F(D_t) \arrow[d, "F(t)"] \\ F(D_s) \arrow[r, "F(f)"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

Como $t, k \in \Gamma$, entonces $F(t)^{-1} \circ F(f) = F(h) \circ F(k)^{-1}$. Luego, tenemos que $F(g \circ h) \circ F(s \circ k)^{-1} = (F(g) \circ F(h)) \circ (F(k)^{-1} \circ F(s)^{-1}) = F(g) \circ ((F(h) \circ F(k)^{-1}) \circ F(s)^{-1}) = F(g) \circ ((F(t^{-1}) \circ F(f)) \circ F(s)^{-1}) = (F(g) \circ F(t^{-1})) \circ (F(f) \circ F(s)^{-1})$.
$\therefore \widehat{F}$ es funtor.

Ahora veamos que tiene la propiedad universal enunciada. Sean $X, Y \in \mathcal{X}$, entonces $\widehat{F} \circ \gamma(X) = \widehat{F}(X) = F(X)$; y si $X \xrightarrow{f} Y$, entonces $\widehat{F} \circ \gamma(f) = \widehat{F}(f/Id_X) = F(f) \circ F(Id_X)^{-1} = F(f)$. Luego, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{X}\Gamma^{-1} \arrow[d, "\widehat{F}"] \\ & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

conmuta. Supongamos que existe un funtor $G : \mathcal{X}\Gamma^{-1} \longrightarrow \mathcal{Y}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{X}\Gamma^{-1} \arrow[d, "G"] \\ & \mathcal{Y} \end{tikzcd} \tag{3.10}$$

conmuta. Con ésto, si $X, Y \in \mathcal{X}$, entonces $G \circ \gamma(X) = G(X) = F(X) = \widehat{F}(X)$. Si

$$\begin{tikzcd} & D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$, solo hacemos la observación que $f/s = f/Id_X \circ Id_{D_s}/s$ (observación que se deja al lector verificar); con ésto $G(f/s) = G(f/Id_X) \circ G(Id_{D_s}/s)$, y como el morfismo Id_{D_s}/s tiene inversa s/Id_{D_s}, tenemos que $G(Id_{D_s}/s) = G(s/Id_{D_s})^{-1}$. Como el diagrama (3.10) conmuta, tenemos que $G(f/Id_X) = F(f)$ y $G(s/Id_{D_s}) = F(s)$, de donde $G(f/s) = G(f/Id_X) \circ G(Id_{D_s}/s) = F(f) \circ F(s)^{-1} = \widehat{F}(f/s)$. $\therefore G = \widehat{F}$. ∎

Observación 3.10 *Sea $\mathcal{X}$ una categoría y Γ una clase de morfismos en $\mathcal{X}$ que cumple las propiedades $(CF2)$ y $(CF3)$ y $\mathcal{X}\Gamma^{*^{-1}}$ la categoría de fracciones que invierte a los elementos de Γ^*. Sean $\mathcal{Y}$ una categoría; $F, G : \mathcal{X}\Gamma^{*^{-1}} \to \mathcal{Y}$ funtores y $\eta : F \to G$ una transformación natural. Entonces basta ver la naturalidad en los morfismos de la forma f/s con $s \in \Gamma$.*

Dado un elemento $f/s \in \mathcal{X}\Gamma^{*^{-1}}$, sabemos que $s = s_n \circ s_{n-1} \circ \ldots \circ s_1$. Haremos el caso para $n = 2$ y la demostración para el caso general es por inducción. Supongamos que $s = s_2 \circ s_1$, entonces f/s se ve en diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} & & D_{s_1} \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[ddrr, "f"] & & \\ & D_{s_2} \arrow[dl, "s_2"'] & & & \\ A & & & & B \end{tikzcd}$$

Luego, viendo a $Id_{D_{s_2}}/s_2$ y f/s_1 en diagramas

$$\begin{tikzcd} & D_{s_2} \arrow[dl, "s_2"'] \arrow[dr, "Id_{D_{s_2}}"] & \\ A & & D_{s_2} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "f"] & \\ D_{s_2} & & D_{s_1} \end{tikzcd}$$

Entonces, $Id_{D_{s_2}}/s_2 \circ f/s_1$ es el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & D_{s_1} \arrow[dl, "Id_{D_{s_1}}"'] \arrow[dr, "s_2"] & & \\ & D_{s_2} \arrow[dl, "s_2"'] \arrow[dr, "Id_{D_{s_2}}"] & & D_{s_1} \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A & & D_{s_2} & & B \end{tikzcd}$$

con lo cual, $Id_{D_{s_2}}/s_2 \circ f/s_1 = f/s_1 \circ s_2 = f/s$. Con esto, tenemos que el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f/s)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f/s)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

se descompone en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(Id_{D_{s_2}}/s_2)"'] & G(A) \arrow[d, "G(Id_{D_{s_2}}/s_2)"] \\ F(D_{s_2}) \arrow[r, "\eta_{D_s}"] \arrow[d, "F(f/s_1)"'] & G(D_{s_2}) \arrow[d, "G(f/s_1)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

3.3 Extensividad de la categoría $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$

En este apartado veremos las propiedades que tiene esta categoría que acabamos de definir, que el funtor $\gamma : \mathcal{X} \to \mathcal{X}\Gamma^{-1}$ preserva sumas si $\mathcal{X}$ tiene sumas; y demostraremos la extensividad en esta. Para esto, observemos la siguiente definición:

Definición 3.11 *Sean $\mathcal{X}$ una categoría y Γ un cálculo de fracciones derecho. Decimos que Γ tiene sumas finitas de denominadores si $\forall s, t \in \Gamma$, $s + t \in \Gamma$.*

Teorema 3.12 *Sean $\mathcal{X}$ una categoría extensiva y Γ un cálculo de fracciones derecho que tiene sumas finitas de denominadores, entonces el funtor $\gamma : \mathcal{X} \to \mathcal{X}\Gamma^{-1}$ preserva sumas finitas.*

Demostración:

Que el funtor preserva sumas quiere decir que si tenemos $X, Y \in \mathcal{X}$, entonces si

$$X \xrightarrow{i_X} X + Y \xleftarrow{i_Y} Y$$

es un diagrama suma en $\mathcal{X}$, entonces el diagrama

$$X \xrightarrow{i_X/Id_X} X+Y \xleftarrow{i_Y/Id_Y} Y$$

es un diagrama suma en $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$.

Veamos que tiene la propiedad universal deseada.

Sean $Z \in \mathcal{X}$ y

$$\begin{tikzcd} & D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "h"] & \\ X & & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & D_t \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

morfismos en $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$.
P.D. $\exists!$

$$\begin{tikzcd} & D_k \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "z"] & \\ X+Y & & Z \end{tikzcd}$$

tal que $z/k \circ i_X/Id_X = h/s$ y $z/k \circ i_Y/Id_Y = g/t$.
Demostración:
Como tenemos los morfismos

$$D_s \xrightarrow{h} Z \qquad D_t \xrightarrow{g} Z$$

entonces existe $[h,g] : D_s + D_t \to Z$, el morfismo inducido por la propiedad universal en $\mathcal{X}$. Definimos el morfismo

$$\begin{tikzcd} & D_s+D_t \arrow[dl, "s+t"'] \arrow[dr, "{[h,g]}"] & \\ X+Y & & Z \end{tikzcd}$$

con $s+t \in \Gamma$, pues Γ tiene sumas de denominadores. Si componemos este morfismo con la inclusión en X, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "i_{D_s}"] & & \\ & X \arrow[dl, "Id_X"'] \arrow[dr, "i"] & & D_s+D_t \arrow[dl, "s+t"'] \arrow[dr, "{[h,g]}"] & \\ X & & X+Y & & Z \end{tikzcd}$$

Que es exactamente el diagrama

$$\begin{tikzcd} & D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "h"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

Se le deja al lector verificar que pasa lo mismo al componer con el otro morfismo inclusión.
$\therefore$ los diagramas

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X/Id_X"] \arrow[dr, "h/s"'] & X+Y \arrow[d, "{[h,g]/s+t,}"] \\ & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i_Y/Id_Y"] \arrow[dr, "g/t"'] & X+Y \arrow[d, "{[h,g]/s+t}"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

conmutan.

Ahora bien, supongamos que existe un morfismo $z/k : X+Y \to Z$ tal que los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_X/Id_X"] \arrow[dr, "h/s"'] & X+Y \arrow[d, "z/k"] \\
& Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i_Y/Id_Y"] \arrow[dr, "g/t"'] & X+Y \arrow[d, "z/k"] \\
& Z
\end{tikzcd}
\tag{3.11}
$$

conmutan. Estas composiciones se traducen en diagramas

$$
\begin{tikzcd}
& & D_l \arrow[dl, "l_1"'] \arrow[dr, "l_2"] & & \\
& X \arrow[dl, "Id_X"'] \arrow[dr, "i_Y"] & & D_k \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "z"] & \\
X & & X+Y & & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& & D_m \arrow[dl, "m_1"'] \arrow[dr, "m_2"] & & \\
& Y \arrow[dl, "Id_Y"'] \arrow[dr, "i_Y"] & & D_k \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "z"] & \\
Y & & X+Y & & Z
\end{tikzcd}
$$

que son diagramas de la forma

$$
\begin{tikzcd}
& D_l \arrow[dl, "l_1"'] \arrow[dr, "z \circ l_2"] & \\
X & & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& D_m \arrow[dl, "m_1"'] \arrow[dr, "z \circ m_2"] & \\
Y & & X+Y
\end{tikzcd}
\tag{3.12}
$$

Además por la conmutatividad de (3.11) se tiene que existen diagramas de la forma

$$
\begin{tikzcd}
& D_l \arrow[dl, "l_1"'] \arrow[dr, "z \circ l_2"] & \\
X & D_a \arrow[u, "a_1"'] \arrow[d, "a_2"] & Z \\
& D_s \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& D_m \arrow[dl, "m_1"'] \arrow[dr, "z \circ m_2"] & \\
Y & D_b \arrow[u, "b_1"'] \arrow[d, "b_2"] & Z \\
& D_t \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
\tag{3.13}
$$

con $s \circ a_2, b_2 \circ t \in \Gamma$. De estos diagramas, podemos construir el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
& D_k \arrow[ddl, "k"'] \arrow[ddr, "z"] & \\
& D_l + D_m \arrow[u, "{[l_2, m_2]}"'] & \\
X+Y & D_a + D_b \arrow[u, "a_1 + b_1"'] \arrow[d, "a_2 + b_2"] & Z \\
& D_s + D_t \arrow[ul, "s+t"] \arrow[ur, "{[h,g]}"'] &
\end{tikzcd}
\tag{3.14}
$$

con $[l_2, m_2]$ el morfismo inducido por la propiedad universal del coproducto. La demostración de la conmutatividad del diagrama es inmediata utilizando la propiedad universal del coproducto y utilizando los diagramas (3.12) y (3.13); se deja al lector verificar este hecho. Además se tiene que $(s+t) \circ (a_2 + b_2) \in \Gamma$, con lo cual $z/k = [h, g]/s + t$.■

Proposición 3.13 *Sea $\mathcal{X}$ una categoría extensiva y Γ un cálculo de fracciones derecho con sumas de denominadores, entonces $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$ es extensiva.*

Demostración:
Ya vimos que la categoría $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$ tiene sumas; veamos que cumple con la propiedad (2) de (1.2). Supongamos que existe un diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f/s"] \\ X \arrow[r, "i_X/Id_X"'] & X+Y \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$, con el morfismo f/s de la forma

$$\begin{tikzcd} & D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A & & X+Y \end{tikzcd}$$

Entonces tenemos un diagrama en $\mathcal{X}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} & D_s \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "i_X"'] & X+Y \end{tikzcd}$$

que por ser extensiva, existe un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f_1"'] & D_s \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "i_X"'] & X+Y \end{tikzcd}$$

de donde obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "h/Id_{A_1}"] \arrow[d, "f_1/Id_{A_1}"'] & D_s \arrow[d, "f/Id_A"] \\ X \arrow[r, "i_X/Id_X"'] & X+Y \end{tikzcd} \tag{3.15}$$

en $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$. Veamos que (3.15) es un producto fibrado.

Supongamos que existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g/t"] \arrow[d, "p/k"'] & D_s \arrow[d, "f/Id_{D_s}"] \\ X \arrow[r, "i_X/Id_X"'] & X+Y \end{tikzcd}$$

Ambas composiciones de este diagrama, son diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & D_t \arrow[dl, "Id_{D_t}"'] \arrow[dr, "g"] & & \\
 & D_t \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & & D_s \arrow[dl, "Id_{D_s}"'] \arrow[dr, "f"] & \\
B & & D_s & & X+Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & D_k \arrow[dl, "Id_{D_k}"'] \arrow[dr, "p"] & & \\
 & D_k \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "p"] & & X \arrow[dl, "Id_X"'] \arrow[dr, "i_X"] & \\
B & & X & & X+Y
\end{tikzcd} \tag{3.16}$$

y por ser ambas composiciones iguales, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & D_t \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "f\circ g"] & \\
B & D_u \arrow[u, "u"'] \arrow[d, "v"] & X+Y \\
 & D_k \arrow[ul, "k"] \arrow[ur, "i_X\circ p"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.17}$$

Observando el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
D_u \arrow[r, "g\circ u"] \arrow[d, "p\circ v"'] & D_s \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "i_X"'] & X+Y
\end{tikzcd}$$

obtenemos por la propiedad universal del producto fibrado en $\mathcal{X}$, que $\exists! j : D_u \longrightarrow A_1$, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
D_u \arrow[dr, "j"] \arrow[drr, bend left, "g\circ u"] \arrow[ddr, bend right, "p\circ v"'] & & \\
 & A_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f_1"] & D_s \arrow[d, "f"] \\
 & X \arrow[r, "i_X"'] & X+Y
\end{tikzcd} \tag{3.18}$$

conmuta. Consideremos el morfismo

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & D_u \arrow[dl, "k\circ v"'] \arrow[dr, "j"] & \\
B & & A_1
\end{tikzcd}$$

Veamos que el morfismo cumple que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "j/k\circ v"] \arrow[drr, bend left, "g/t"] \arrow[ddr, bend right, "p/k"'] & & \\
 & A_1 \arrow[r, "h/Id_{A_1}"] \arrow[d, "f_1/Id_{A_1}"] & D_s \arrow[d, "f/Id_{D_s}"] \\
 & X \arrow[r, "i_X/Id_X"'] & X+Y
\end{tikzcd} \tag{3.19}$$

conmuta. Para ver esto, tenemos que $f_1/Id_{A_1} \circ j/(k \circ v)$ es un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd}
& & D_u \arrow[dl, "Id_{D_u}"'] \arrow[dr, "j"] & & \\
& D_u \arrow[dl, "k\circ v"'] \arrow[dr, "j"] & & A_1 \arrow[dl, "Id_{A_1}"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\
B & & A_1 & & X
\end{tikzcd}$$

Luego, por (3.18) tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& D_u \arrow[dl, "k\circ v"'] \arrow[dr, "f_1\circ j"] & \\
B & D_u \arrow[u, "Id_{D_u}"'] \arrow[d, "v"] & X \\
& D_k \arrow[ul, "k"] \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.20}$$

conmuta, y además $k \circ v \in \Gamma$, con lo que $f_1/Id_{A_1} \circ j/(k \circ v) = p/k$.

Por otro lado, tenemos que $h/Id_{A_1} \circ j/(k \circ v)$ es un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd}
& & D_u \arrow[dl, "Id_{D_u}"'] \arrow[dr, "j"] & & \\
& D_u \arrow[dl, "k\circ v"'] \arrow[dr, "j"] & & A_1 \arrow[dl, "Id_{A_1}"'] \arrow[dr, "h"] & \\
B & & A_1 & & D_s
\end{tikzcd}$$

Por los diagramas (3.17) y (3.18), el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& D_t \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
B & D_u \arrow[u, "u"'] \arrow[d, "Id_{D_u}"] & D_s \\
& D_u \arrow[ul, "k\circ v"] \arrow[ur, "h\circ j"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.21}$$

conmuta. Luego, $h/Id_{A_1} \circ j/(k \circ v) = g/t$. Entonces, por (3.20) y (3.21) tenemos que (3.19) conmuta.

Supongamos que existe un morfismo $n/m : B \longrightarrow A_1$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "n/m"] \arrow[drr, bend left, "g/t"] \arrow[ddr, bend right, "p/k"'] & & \\
& A_1 \arrow[r, "h/Id_{A_1}"] \arrow[d, "f_1/Id_{A_1}"] & D_s \arrow[d, "f/Id_{D_s}"] \\
& X \arrow[r, "i_X/Id_X"'] & X+Y
\end{tikzcd} \tag{3.22}$$

conmuta.
P.D. $n/m = (j/k \circ v)$
Demostración:

Observemos primero que $h/Id_{A_1} \circ n/m$ y $f_1/Id_{A_1} \circ n/m$ son diagramas

$$\begin{tikzcd}
& & D_m \arrow[dl, "Id_{D_m}"'] \arrow[dr, "n"] & & \\
& D_m \arrow[dl, "m"'] \arrow[dr, "n"] & & A_1 \arrow[dl, "Id_{A_1}"'] \arrow[dr, "h"] & \\
B & & A_1 & & D_s
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& & D_m \arrow[dl, "Id_{D_m}"'] \arrow[dr, "n"] & & \\
& D_m \arrow[dl, "m"'] \arrow[dr, "n"] & & A_1 \arrow[dl, "Id_{A_1}"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\
B & & A_1 & & X
\end{tikzcd}$$

respectivamente. Por la conmutatividad de (3.22) y la de (3.19), tenemos que $j/(k \circ v) \circ f_1/Id_{A_1} = n/m \circ f_1/Id_{A_1}$ y $j/(k \circ v) \circ h/Id_{A_1} = n/m \circ h/Id_{A_1}$, de donde existen diagramas conmutativos de la forma

$$\begin{tikzcd}
& D_u \arrow[dl, "k\circ v"'] \arrow[dr, "f_1\circ j"] & \\
B & D_{u_1} \arrow[u, "u_1"'] \arrow[d, "v_1"] & X \\
& D_m \arrow[ul, "m"] \arrow[ur, "f_1\circ n"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& D_u \arrow[dl, "k\circ v"'] \arrow[dr, "h\circ j"] & \\
B & D_{u_2} \arrow[u, "u_2"'] \arrow[d, "v_2"] & D_s \\
& D_m \arrow[ul, "m"] \arrow[ur, "h\circ n"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.23}$$

Luego, tomemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& D_{u_1} \arrow[d, "m\circ v_1"] \\
D_{u_2} \arrow[r, "m\circ v_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

con $m \circ v_1 \in \Gamma$; con lo cual por la propiedad $(CF2)$, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
D_a \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "a_2"'] & D_{u_1} \arrow[d, "m\circ v_1"] \\
D_{u_2} \arrow[r, "m\circ v_2"'] & B
\end{tikzcd} \tag{3.24}$$

con $a_2 \in \Gamma$. Además, tenemos las igualdades $m \circ v_1 = (k \circ v) \circ u_1$ y $m \circ v_2 = (k \circ v) \circ u_2$. Con lo cual el diagrama

$$\begin{tikzcd}
D_a \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "a_2"'] & D_{u_1} \arrow[d, "(k\circ v)\circ u_1"] \\
D_{u_2} \arrow[r, "(k\circ v)\circ u_2"'] & B
\end{tikzcd} \tag{3.25}$$

conmuta. De (3.24) obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
D_a \arrow[r, shift left, "v_2\circ a_2"] \arrow[r, shift right, "v_1\circ a_1"'] & D_m \arrow[r, "m"] & B
\end{tikzcd}$$

y además $m \in \Gamma$; con cual, por la propiedad $(CF3)$ existe un morfismo $D_c \xrightarrow{c} D_a$ en Γ, tal que $(v_2 \circ a_1) \circ c = (v_1 \circ a_2) \circ c$. De (3.25) tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} D_a \arrow[r, shift left, "u_2 \circ a_2"] \arrow[r, shift right, "u_1 \circ a_1"'] & D_u \arrow[r, "k \circ v"] & B \end{tikzcd}$$

y $k \circ v \in \Gamma$; con lo cual, por la propiedad $(CF3)$, existe un morfismo $D_d \xrightarrow{d} D_a$ en Γ, tal que $(u_2 \circ a_2) \circ d = (u_1 \circ a_1) \circ d$. Si consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & D_c \arrow[d, "c"] \\ D_d \arrow[r, "d"'] & D_a \end{tikzcd}$$

Por la propiedad $(CF3)$ existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} D_b \arrow[r, "c'"] \arrow[d, "d'"'] & D_c \arrow[d, "c"] \\ D_d \arrow[r, "d"'] & D_a \end{tikzcd}$$

con $c' \in \Gamma$. Denotemos $b = d \circ d' = c \circ c'$. Consideremos los morfismos

$$\begin{tikzcd} D_b \arrow[r, shift left, "n \circ (v_2 \circ (a_2 \circ b))"] \arrow[r, shift right, "j \circ (u_2 \circ (a_2 \circ b))"'] & A_1 \end{tikzcd}$$

Veamos que son iguales. Si consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} D_b \arrow[r, "h \circ (n \circ (v_2 \circ (a_2 \circ b)))"] \arrow[d, "f_1 \circ (n \circ (v_2 \circ (a_2 \circ b)))"'] & A \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "i_X"'] & X + Y \end{tikzcd} \tag{3.26}$$

conmuta, puesto que ya teníamos que $f \circ h = i_X \circ f_1$. Considerando el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} D_b \arrow[dr, "n \circ (v_2 \circ (a_2 \circ b))"] \arrow[drr, bend left, "h \circ (n \circ (v_2 \circ (a_2 \circ b)))"] \arrow[ddr, bend right, "f_1 \circ (n \circ (v_2 \circ (a_2 \circ b)))"'] & & \\ & A_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f_1"] & A \arrow[d, "f"] \\ & X \arrow[r, "i_X"'] & X + Y \end{tikzcd} \tag{3.27}$$

Luego, por (3.23), tenemos que $h \circ (j \circ (u_2 \circ (a_2 \circ b))) = h \circ (n \circ (v_2 \circ (a_2 \circ b)))$ y $f_1 \circ (j \circ (u_1 \circ (a_1 \circ b))) = f_1 \circ (n \circ (v_1 \circ (a_1 \circ b)))$. Además, $(v_1 \circ a_1) \circ b = (v_2 \circ a_2) \circ b$ y $u_1 \circ (a_1 \circ b) = u_2 \circ (a_2 \circ b)$, con lo cual $f_1 \circ (j \circ (u_2 \circ (a_2 \circ b))) = f_1 \circ (n \circ (v_2 \circ (a_2 \circ b)))$. Con estas dos cosas tenemos que el morfismo $j \circ (u_2 \circ (a_2 \circ b))$ hace conmutar el diagrama (3.27), con lo cual, por la propiedad universal del producto fibrado, obtenemos que $j \circ (u_2 \circ (a_2 \circ b)) = n \circ (v_2 \circ (a_2 \circ b))$. Utilizando esto y el diagrama (**??**) el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & D_m \arrow[dl, "m"'] \arrow[dr, "n"] & \\ B & D_b \arrow[u, "(v_2 \circ a_2) \circ b"'] \arrow[d, "(u_2 \circ a_2) \circ b"] & A_1 \\ & D_u \arrow[ul, "k \circ v"] \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta; y además $m \circ v_2 \in \Gamma$, $a_2 \in \Gamma$ y $b \in \Gamma$, de donde $m \circ ((v_2 \circ a_1) \circ b) \in \Gamma$ con lo cual $n/m = j/k \circ v$

$\therefore$ El diagrama (3.15) es un producto fibrado.

Ahora bien, como $Id/s : D_s \cong A$ obtenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "s \circ h/Id_{A_1}"] \arrow[d, "f_1/Id_{A_1}"'] & A \arrow[d, "f/s"] \\ X \arrow[r, "i_X/Id_X"'] & X+Y \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

$\therefore$ $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$ cumple la propiedad (2) de (1.2). Ahora veamos la propiedad (3) de (1.2). Sea

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "j/a,"] \arrow[d, "f/s"'] & A \arrow[d, "h/p"'] & A_2 \arrow[l, "k/b"'] \arrow[d, "g/t"'] \\ X \arrow[r, "i_X/Id_X"'] & X+Y & Y \arrow[l, "i_Y/Id_Y"] \end{tikzcd} \tag{3.28}$$

un diagrama conmutativo.

($\Longrightarrow$) Supongamos que el renglón de arriba es una suma, entonces tenemos que el diagrama (3.28) es un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "i_{A_1}/Id_{A_1}"] \arrow[d, "f/s"'] & A_1 + A_2 \arrow[d, "f+g/s+t"'] & A_2 \arrow[l, "i_{A_2}/Id_{A_2}"'] \arrow[d, "g/t"'] \\ X \arrow[r, "i_X/Id_X"'] & X+Y & Y \arrow[l, "i_Y/Id_Y"] \end{tikzcd}$$

Tenemos que un producto fibrado del diagrama

$$\begin{tikzcd} & D_s + D_t \arrow[d, "s+t"] \\ X \arrow[r, "i_X"'] & X+Y \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{X}$, es el diagrama

$$\begin{tikzcd}
D_s \arrow[r, "i_{D_s}"] \arrow[d, "f"'] & D_s + D_t \arrow[d, "f+g"] \\
X \arrow[r, "i_X"'] & X + Y
\end{tikzcd}$$

por ser extensiva. Observando nuestra construcción del producto fibrado hecha anteriormente, obtenemos que un producto fibrado en $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$ es

$$\begin{tikzcd}
D_s \arrow[r, "(s+t)\circ i_{D_s}/Id_{D_s}"] \arrow[d, "f/Id_{D_s}"'] & A_1 + A_2 \arrow[d, "f+g/s+t"] \\
X \arrow[r, "i_X/Id_X"'] & X + Y
\end{tikzcd}$$

Como $Id_{D_s}/s : A_1 \cong D_s$ en $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$; obtenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "k"] \arrow[d, "(f/Id_{D_s})\circ(Id_{D_s}/s)"'] & A_1 + A_2 \arrow[d, "f+g/s+t"] \\
X \arrow[r, "i_X/Id_X"'] & X + Y
\end{tikzcd} \tag{3.29}$$

es también un producto fibrado, con $k = (s+t)\circ i_{D_s}/Id_{D_s}\circ Id_{D_s}/s$. Si vemos la composición $f/Id_{D_s} \circ Id_{D_s}/s$, es un diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & D_s \arrow[dl, "Id_{D_s}"'] \arrow[dr, "Id_{D_s}"] & & \\
& D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "Id_{D_s}"] & & D_s \arrow[dl, "Id_{D_s}"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A_1 & & D_s & & X
\end{tikzcd}$$

con lo cual $f/Id_{D_s}\circ Id_{D_s}/s = f/s$. Por otro lado, la composición $((s+t)\circ i_{D_s}/Id_{D_s})\circ Id_{D_s}/s$ es un diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & D_s \arrow[dl, "Id_{D_s}"'] \arrow[dr, "Id_{D_s}"] & & \\
& D_s \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "Id_{D_s}"] & & D_s \arrow[dl, "Id_{D_s}"'] \arrow[dr, "(s+t)\circ i_{D_s}"] & \\
A_1 & & D_s & & A_1 + A_2
\end{tikzcd}$$

de donde tenemos que $((s+t)\circ i_{D_s}/Id_{D_s})\circ Id_{D_s}/s = (s+t)\circ i_{D_s}/s$. Además, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[dl, "Id_{A_1}"'] \arrow[dr, "i_{A_1}"] & \\
A_1 & D_s \arrow[u, "s"] \arrow[d, "Id_{D_s}"] & A_1+A_2 \\
 & D_s \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "(s+t)\circ i_{D_s}"'] &
\end{tikzcd}$$

con $s \in \Gamma$, entonces $(s+t)\circ i_{D_s}/s = i_{A_1}/Id_{A_1}$. Juntando estas dos observaciones y el diagrama (3.29), tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "i_{A_1}/Id_{A_1}"] \arrow[d, "f/s"'] & A_1+A_2 \arrow[d, "f+g/s+t"] \\
X \arrow[r, "i_{A_1}/Id_{A_1}"'] & X+Y
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado en $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$. La demostración para el lado derecho del diagrama (3.28) es análoga.

$\therefore$ Si el renglón de arriba es una suma, entonces los cuadrados son productos fibrados.

($\Leftarrow$) Ahora, supongamos que los cuadrados del diagrama (3.28) son productos fibrados. Sabemos que dado el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & D_p \arrow[d, "h"] & \\
X \arrow[r, "i_X"'] & X+Y & Y \arrow[l, "i_Y"]
\end{tikzcd}$$

en $\mathcal{X}$, existe un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f_1"'] & D_p \arrow[d, "h"] & B_2 \arrow[l, "r"'] \arrow[d, "f_2"] \\
X \arrow[r, "i_X"'] & X+Y & Y \arrow[l, "i_Y"]
\end{tikzcd}$$

con ambos cuadrados productos fibrados, con lo cual el morfismo $[q,r] : B_1 + B_2 \to D_p$ es isomorfismo. Además, sabemos que en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[r, "p\circ q/Id_{B_1}"] \arrow[d, "f_1/Id_{B_1}"'] & D_p \arrow[d, "h/p"] & B_2 \arrow[l, "p\circ r/Id_{B_2}"'] \arrow[d, "f_2/Id_{B_2}"] \\
X \arrow[r, "i_X/Id_X"'] & X+Y & Y \arrow[l, "i_Y/Id_Y"]
\end{tikzcd}$$

los cuadrados son productos fibrados, con lo cual, obtenemos que existen isomorfismos únicos $m_1/n_1 : A_1 \to B_1$ y $m_2/n_2 : A_2 \to B_2$, con la propiedad de que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[dr, "m_1/n_1"] \arrow[drr, bend left, "j/a"] \arrow[ddr, bend right, "f/s"'] & & & & A_2 \arrow[dl, "m_2/n_2"'] \arrow[dll, bend right, "k/b"'] \arrow[ddl, bend left, "g/t"] \\
& B_1 \arrow[r, "p\circ q/Id_{B_1}"] \arrow[d, "f_1/Id_{B_1}"] & D_p \arrow[d, "h/p"] & B_2 \arrow[l, "p\circ r/Id_{B_2}"'] \arrow[d, "f_2/Id_{B_2}"'] & \\
& X \arrow[r, "i_X/Id_X"'] & X+Y & Y \arrow[l, "i_Y/Id_Y"] &
\end{tikzcd} \tag{3.30}$$

conmuta. Con esto, obtenemos el isomorfismo $(m_1 + m_2)/(n_1 + n_2) : A_1 + A_2 \to B_1 + B_2$.

Observando la siguiente composición de isomorfismos

$$A_1 + A_2 \xrightarrow{m_1+m_2/n_1+n_2} B_1 + B_2 \xrightarrow{[q,r]/(Id_{B_1+B_2})} D_p \xrightarrow{p/Id_{D_p}} A$$

obtenemos que $A_1 + A_2 \cong A$, sea ε éste isomorfismo. Sólo veamos que ε es el morfismo inducido por la suma. Observemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
A_1 + A_2 \arrow[r, "m_1+m_2/n_1+n_2"] & B_1 + B_2 \arrow[r, "{[q,r]/(Id_{B_1+B_2})}"] & D_p \arrow[r, "p/Id_{D_p}"] & A \\
A_1 \arrow[u, "i_{A_1}"] \arrow[r, "m_1/n_1"'] & B_1 \arrow[u, "i_{B_1}"] \arrow[ur, "q/Id_{B_1}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A_1 + A_2 \arrow[r, "m_1+m_2/n_1+n_2"] & B_1 + B_2 \arrow[r, "{[q,r]/(Id_{B_1+B_2})}"] & D_p \arrow[r, "p/Id_{D_p}"] & A \\
A_2 \arrow[u, "i_{A_2}"] \arrow[r, "m_2/n_2"'] & B_2 \arrow[u, "i_{B_2}"] \arrow[ur, "r/Id_{B_2}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Luego, por la conmutatividad del diagrama (3.30), obtenemos que $\varepsilon \circ i_{A_1} = j/a$ y $\varepsilon \circ i_{A_2} = k/b$, con lo cual $\varepsilon = [j/a, k/b] : A_1 + A_2 \cong A$.

$\therefore$ La parte de arriba es una suma.
$\therefore$ Se cumple 3 de (1.2)
$\therefore$ $\mathcal{X}\Gamma^{-1}$ es extensiva.$\blacksquare$

Esta construcción nos será de ayuda para invertir una clase de morfismos conveniente.

Capítulo 4

El producto tensorial en *Ext*

Dados dos categorías $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in Ext$, consideramos la subcategoría plena $Ext[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ de la categoría $Cat[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$. Lo que buscamos construir es un producto tensorial $\otimes$ tal que Ext sea monoidal cerrada, es decir, que tengamos el isomorfismo natural

$$Ext[\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mathcal{Z}] \cong Ext[\mathcal{X}, Ext[\mathcal{Y}, \mathcal{Z}]]$$

Obtenemos $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ aplicando la categoría de fracciones a $Fam(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$, buscando invertir los morfismos convenientes como Gates lo hace en [6]. Es la analogía del producto tensorial de grupos abelianos.

4.1 El cálculo de fracciones

Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ categorías extensivas e $I, J \in Con_f$. Una *especificación de denominador primitivo* son objetos $\sum_{i \in I} X_i \in \mathcal{X}$ y $\sum_{i \in 1} Y_i \in \mathcal{Y}$, familias de morfismos $i_{X_i} : X_i \to \sum_{i \in I} X_i$ y $i_{Y_i} : Y_i \to \sum_{i \in I} Y_i$. Denotaremos a $\sum_{i \in I} X_i$ y $\sum_{j \in I} Y_i$ por $\widehat{X}$ y $\widehat{Y}$ respectivamente.

Tomemos un conjunto finito K y una $K - familia$ indizada de especifiaciones de denominadores primitivos $(\widehat{X}_k, \widehat{Y}_k, X_{i_k}, Y_{i_k}, i_{X_{i_k}}, i_{Y_{i_k}})$. Obtenemos objetos $\langle(\widehat{X}_k, \widehat{Y}_k)\rangle_{k \in K} \in Fam(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$. Luego, definimos:

1. $K' = \coprod_{k \in K} I_k \times J_k$

2. $\pi : K' \to K$, el morfismo que a un elemento $(i_k, j_k) \in K'$ le asocia k, es decir, la proyección en el *k-ésimo* sumando.

3. Podemos formar el elemento $\langle(X_{i_k}, Y_{j_k})\rangle_{(i_k, j_k) \in K'} \in Fam(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

4. Sea h la familia de morifsmos K'-indizada de morfismos en $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, con $h_{(i_k, j_k)} = (i_{X_{i_k}}, i_{Y_{j_k}})$ para (i_k, j_k) en el k-ésimo sumando, es decir $h = \langle(i_{X_{i_k}}, i_{Y_{j_k}})\rangle_{(i_k, j_k) \in K'}$.

El resultado es un morfismo

$$(\pi,\ h) : \langle X_{i_k}, Y_{j_k}\rangle_{(i_k, j_k) \in K'} \to \langle \widehat{X}_k, \widehat{Y}_k\rangle_{k \in K}$$

de $Fam(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$. Definimos como un *denominador primitivo* a un morfismo de esta manera. Denotamos a la colección de denominadores primitivos por Γ, y su cerradura por composición como Γ^*. Lo que deseamos es ver que Γ^* es un cálculo de fracciones derecho en $Fam(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$, utilizando la proposición 3.3.

Proposición 4.1 Γ *cumple con las propiedades* $(CF2)$ *y* $(CF3)$ *de la proposición 3.3.*

Demostración

Veamos que se cumple $(CF2)$. Supongamos que tenemos un diagrama en $Fam(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$

$$\begin{tikzcd} & \langle (X_{i_k,Y_{j_k}})\rangle_{(i_k,j_k)\in K'} \arrow[d, "(\pi,h)"] \\ \langle (W_l,Z_l)\rangle_{l\in l} \arrow[r, "(s,\langle (f_l,g_l)\rangle_{l\in L})"'] & \langle (\widehat{X}_k,\widehat{Y}_k)\rangle_{k\in K} \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Luego, para cada $l\in L$, tenemos los morfismos $f_l : Z_l \to \widehat{X}_{s(l)}$ y $g_l : W_l \to \widehat{Y}_{s(l)}$. Como $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ son extensivas, podemos dar una descomposición en sumas de Z_l y W_l en elementos tantos como $I_{s(l)}$ y $J_{s(l)}$ respectivamente (recordando que $\widehat{X}_{s(l)} = \sum_{i_{s(l)}\in I_{s(l)}} X_{i_{s(l)}}$ y $\widehat{Y}_{s(l)} = \sum_{j_{s(l)}\in J_{s(l)}} Y_{j_{s(l)}}$)); renombrando $I_{s(l)} = I_l$ y $J_{s(l)} = J_l$, tenemos que $Z_l = \sum_{i_l\in I_l} Z_{i_l}$ y $W_l = \sum_{j\in J_l} W_{j_l}$ y además f_l y g_l también se descomponen en morfismos de la forma

$$\sum_{i_l\in I_l} Z_{i_l} \xrightarrow{\sum_{i_l\in I_l} f_{i_l}} \widehat{X}_{s(l)} \qquad\qquad \sum_{j\in J_l} W_{j_l} \xrightarrow{\sum_{j_l\in J_l} g_{j_l}} \widehat{Y}_{s(l)}$$

tal que para cada $i_l \in I_l$ y $j_l \in J_l$, los diagramas

$$\begin{tikzcd} \sum_{i_l\in I_l} Z_{i_l} \arrow[r, "\sum_{i_l\in I_l} f_{i_l}"] & \widehat{X}_{s(l)} \\ Z_{i_l} \arrow[u, "i_{Z_{i_l}}"] \arrow[r, "f_{i_l}"'] & X_{i_{s(l)}} \arrow[u, "i_{X_{i_{s(l)}}}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \sum_{j\in J_l} W_{j_l} \arrow[r, "\sum_{j_l\in J_l} g_{j_l}"] & \widehat{Y}_{s(l)} \\ W_{j_l} \arrow[u, "i_{W_{i_l}}"] \arrow[r, "g_{j_l}"'] & Y_{j_{s(l)}} \arrow[u, "i_{Y_{i_{s(l)}}}"'] \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

conmutan. Definimos el morfismo $p : \coprod_{l\in L} I_l \times J_l \to \coprod_k I_k \times J_k$ de la siguiente manera: si $(i_l, j_l) \in I_l \times J_l$, entonces $p(i_l, j_l) = (i_{s(l)}, j_{s(l)}) \in I_{s(l)} \times J_{s(l)}$. Denotemos como $L' = \coprod_{l\in L} I_l \times J_l$. Este morfismo nos genera un morfismo en $Fam(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$ de la forma

$$\langle (Z_{i_l}, W_{j_l})\rangle_{(i_l,j_l)\in L'} \xrightarrow{(p,\langle (f_{i_l},g_{j_l})\rangle_{(i_l,j_l)\in L'})} \langle (X_{i_k}, W_{j_l})\rangle_{(i_k,j_k)\in K'}$$

Además, tenemos la función $\tau : L' \to L$ definida como la proyección en la l-ésima coordenada. Todo esto nos define el morfismo

$$\langle (Z_{i_l}, W_{j_l})\rangle_{(i_l,j_l)\in L'} \xrightarrow{(\tau,\langle (i_{Z_{i_l}},i_{W_{j_l}})\rangle_{(i_l,j_l)\in L'})} \langle (Z_l, W_l)\rangle_{l\in L}$$

Este es claramente un elemento en Γ. Luego, podemos considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd} \langle (Z_{i_l}, W_{j_l})\rangle_{(i_l,j_l)\in L'} \arrow[r, "(p,\langle (f_{i_l},g_{j_l})\rangle_{(i_l,j_l)\in L'})"] \arrow[d, "(\tau,\langle (i_{Z_{i_l}},i_{W_{j_l}})\rangle_{(i_l,j_l)\in L'})"'] & \langle (X_{i_k}, Y_{j_k})\rangle_{(i_k,j_k)\in K'} \arrow[d, "(\pi,h)"] \\ \langle (W_l,Z_l)\rangle_{l\in l} \arrow[r, "(s,\langle (f_l,g_l)\rangle_{l\in L})"'] & \langle (\widehat{X}_k,\widehat{Y}_k)\rangle_{k\in K} \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Para ver que conmuta, observemos que para los morfismos definidos en Con_f tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \coprod_{l\in L} I_l \times J_l \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\tau"'] & \coprod_{k\in K} I_k \times J_k \arrow[d, "\pi"] \\ L \arrow[r, "f"'] & K \end{tikzcd}$$

conmuta. Si fijamos un elemento $(i_l, j_l) \in L'$, la conmutatividad del diagrama (4.3) lo tenemos por el diagrama (4.2). Luego, tenemos que el diagrama (4.1), se completa en el diagrama (4.3) y además el morfismo $(\tau, \langle i_{Z_{i_l}}, i_{W_{j_l}} \rangle)_{(i_l,j_l)} \in L' \in \Gamma$, con lo cual Γ cumple $(CF2)$.

Ahora, supongamos que tenemos un diagrama de la forma

$$\langle (W_l, Z_l)\rangle_{l\in L} \overset{(s,\langle (f_l,g_l)\rangle_{l\in L})}{\underset{(t,\langle (n_l,m_l)\rangle_{l\in L})}{\rightrightarrows}} \langle (X_{i_k}, Y_{j_k})\rangle_{(i_k,j_k)\in K'} \xrightarrow{(\pi,h)} \langle (\widehat{X}_k, \widehat{Y}_k)\rangle_{k\in K}$$

tal que $(\pi, h) \circ (s, \langle (f_l, g_l)\rangle_{l\in L}) = (\pi, h) \circ (t, \langle (n_l, m_l)\rangle_{l\in L})$. Luego, tenemos en Con_f que $\forall\, l \in L$, $\pi \circ s(l) = \pi \circ t(l)$.Sea $l \in L$, denotemos $\pi \circ s(l) = k$ para facilitar la demostración. La igualdad anterior nos dice que los elementos $s(l)$ y $t(l)$ caen en el mismo sumando $I_k \times J_k$. Sean $s(l) = (i_k, j_k)$ y $t(l) = (i'_k, j'_k)$ en el *k-ésimo* sumando. Por hipótesis, sabemos que $i_{X_{i_k}} \circ f_l = i_{X_{i'_k}} \circ n_l$ y $i_{Y_{j_k}} \circ g_l = i_{Y_{j'_k}} \circ m_l$, i.e, tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} W_l \arrow[r, "f_l"] \arrow[d, "n_l"'] & X_{i_k} \arrow[d, "i_{X_{i_k}}"] \\ X_{i'_k} \arrow[r, "i_{X_{i'_k}}"'] & \widehat{X}_k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z_l \arrow[r, "g_l"] \arrow[d, "m_l"'] & Y_{j_k} \arrow[d, "i_{Y_{j_k}}"] \\ Y_{j'_k} \arrow[r, "i_{Y_{j'_k}}"'] & \widehat{Y}_k \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

Por el lema (1.8), la suma de objetos es disjunta en categorías extensivas; con lo cual, considerando el cuadrado del lado izquierdo del diagrama (4.4), tenemos los siguientes casos: Si $i = i'$, entonces tenemos que $i_{X_{i_k}} \circ f_l = i_{X_{i_k}} \circ n_l$, utilizando el lema (1.8), tenemos que las inyecciones son monomorfismos, con lo cual, obtenemos que $f_l = n_l$. Ahora bien, si $i \neq i'$, entonces por el lema (1.8), tenemos que existe un morfismo de W_l en 0 (ver la forma del producto fibrado), y por el lema (1.7), el objeto inicial es estricto, con lo cual podemos considerar que $W_l = 0$ y que los morfismos $f_l =!$ y $n_l =!$. Análogamente en el cuadrado derecho de (4.4), tenemos que si $j = j'$, entonces $g_l = m_l$ y si $j \neq j'$, entonces $Z_l = 0$, $g_l =!$ y $m_l =!$. Para $l \in L$, formemos los siguientes conjuntos finitos

$$I'_l = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i' \\ \emptyset & \text{si } i \neq i' \end{cases} \qquad y \qquad J'_l = \begin{cases} 1 & \text{si } j = j' \\ \emptyset & \text{si } j \neq j' \end{cases}$$

Luego, podemos formar los objetos $\langle U_{*_l}\rangle_{*_l\in I'_l}$ y $\langle V_{*_l}\rangle_{*_l\in J'_l}$; con la familia de morfismos I'_l*-indizada*, $c_{*_l} : U_{*_l} \to W_l$ y la familia J'_l*-indizada* $d_{*_l} : V_{*_l} \to Z_l$ de la siguiente manera:

$$U_{*_l} = \begin{cases} W_l & \text{si } i = i' \text{ y } c_{*_l} = Id_{W_l} \\ 0 & \text{si } i \neq i' \text{ y el morfismo vacío} \end{cases} \quad y \quad V_{*_l} = \begin{cases} Z_l & \text{si } j = j' \text{ y } d_{*_l} = Id_{Z_l} \\ 0 & \text{si } j \neq j' \text{ y el morfismo vacío} \end{cases}$$

De esto podemos formar el conjunto $L' = \coprod_{l\in L} I'_l \times J'_l$ con su morfismo proyección $\alpha : L' \to L$. Luego, tenemos una descomposición en sumas de W_l y de Z_l. Si $i = i'$, entonces tenemos que $U_* = W_l$, el cual es claramente una descomposición en sumas de W_l con su morfismo inclusión, el cual es en este caso la identidad (es análogo con Z_l). Ahora, si $i \neq i'$, entonces tenemos que $W_l = 0$, entonces es la suma de una familia vacía, i.e, $\sum_{*_l \in} U_{*_l} = 0 = W_l$, y las inclusiones son el morfismo vacío. Todo ésto nos genera un morfismo en $Fam(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$

$$\langle (U_{*_l}, V_{*_l}) \rangle_{(*_l,*_l)\in L'} \xrightarrow{(\alpha, \langle (c_{*_l}, d_{*_l}) \rangle_{(*_l,*_l)\in L'})} \langle (W_l, Z_l) \rangle$$

el cual es un denominador primitivo. Finalmente, solo debemos checar que el morfismo dado iguala a los morfismos $(s, \langle (f_l, g_l) \rangle_{l\in L})$ y $(t, \langle (n_l, m_l) \rangle_{l\in L})$. Para esto, observemos que $L' = \coprod_{l\in L} I'_l \times J'_l$, donde I'_l y J'_l o son inicial o son final. Los elementos en $I'_l \times J'_l$ son de las siguientes formas: si ambos son finales, entonces tenemos un solo elemento, si uno de los dos es 0, entonces no hay elementos. Entonces dar un elemento en L' es dar un elemento en $l \in L$ tal que I'_l y J'_l sean ambos terminales, es decir , $s(l) = t(l)$.
Con esto, tenemos que si $(*_l, *_l) \in L'$, entonces $s(\alpha(*_l, *_l)) = t(\alpha(*_l, *_l))$. Ahora, si tenemos un elemento $(*_l, *_l) \in L'$, sabemos que hay un elemento en el *l-ésimo* sumando si $s(l) = t(l)$. Luego, tenemos que $f_l \circ c_{*_l} = f_l \circ Id_{X_l} = f_l = n_l = n_l \circ Id_{X_l} = n_l \circ c_{*_l}$. Análogamente se obtiene que $g_l \circ d_{b_l} = m_l \circ d_{b_l}$. Con ésto afirmamos que $(s, \langle (f_l, g_l) \rangle_{l\in L}) \circ (\alpha, \langle (c_{a_l}, d_{b_l}) \rangle_{(a_l,b_l)\in L'}) = (t, \langle (n_l, m_l) \rangle_{l\in L}) \circ (\alpha, \langle (c_{a_l}, d_{b_l}) \rangle_{(a_l,b_l)\in L'})$. Luego, Γ cumple la condición $(CF3)$.
$\therefore$ Γ cumple las condiciones $(CF2)$ y $(CF3)$ ■

En virtud de la proposición (3.3), tenemos que Γ^* es un cálculo de fracciones derecho. Definimos $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ como $Fam(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})((\Gamma^*)^{-1})$. Solo nos resta ver que $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ es extensiva. Para ésto, solo tenemos que demostrar el siguiente lema.

Lema 4.2 *Si $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ son categorías extensivas, entonces Γ tiene sumas de denominadores primitivos.*

Demostración
Sean $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ categorías extensivas y

$$(\pi, h) : \langle\, (X_{i_k}, Y_{j_k})\, \rangle_{(i_k,j_k)\in K'} \to \langle (\widehat{X}_k, \widehat{Y}_k)\, \rangle_{k\in K} \qquad (\rho, h') : \langle\, (W_{i_l}, Z_{j_l})\, \rangle_{(i_l,j_l)\in L'} \to \langle\, \widehat{W}_l, \widehat{Z}_l)\, \rangle_{l\in L}$$

denominadores primitivos, donde $K' = \coprod_{k\in K} I_k \times J_k$ y $L' = \coprod_{l\in L} I_l \times J_l$. Definimos el conjunto $K' + L' = \coprod_{t\in K+L} P_t \times Q_t$, donde

$$P_t \times Q_t = \begin{cases} I_k \times J_k & \text{si } t \in K \\ I_l \times J_l & \text{si } t \in L \end{cases}$$

junto con un morfismo $\tau : K' + L' \to K + L$, que manda a cada elemento a su proyección. Además, definimos las familias de elementos en $Fam(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$

$$\langle\, (U_{i_t}, V_{j_t})\, \rangle_{(i_t,j_t)\in K'+L'} \qquad \langle\, (\widehat{U}_t, \widehat{V}_t)\, \rangle_{t\in K+L}$$

de la siguiente manera:

$$(U_{i_t}, V_{j_t}) = \begin{cases} (X_{i_k}, Y_{j_k}) & \text{si } t \in K \text{ y t=k} \\ (W_{i_l}, Z_{j_l}) & \text{si } t \in L \text{ y t=l} \end{cases} \qquad (\widehat{U}_t, \widehat{V}_t) = \begin{cases} (\widehat{X}_k, \widehat{Y}_k) & \text{si } t \in K \text{ y t=k} \\ (\widehat{W}_l, \widehat{Z}_l) & \text{si } t \in L \text{ y t=l} \end{cases}$$

Viendo estas definiciones, para cada $(i_t, j_t) \in K' + L'$, podemos definir el morfismo $(i_{U_{i_t}}, i_{V_{j_t}}) : (U_{i_t}, V_{j_t}) \to (\widehat{U}_t, \widehat{V}_t)$ como

$$(i_{U_{i_t}}, i_{V_{j_t}}) = \begin{cases} (i_{X_{i_k}}, i_{Y_{j_k}}) & \text{si } t \in K \text{ y t=k} \\ (i_{W_{i_l}}, i_{Z_{j_l}}) & \text{si } t \in L \text{ y t=l} \end{cases}$$

Además, podemos observar que para cada $t \in K + L$, tenemos que $\sum_{i_t \in I_t} U_{i_t} = \widehat{U}_t$ y $\sum_{j_t} V_{j_t} = \widehat{V}_t$. Esto nos genera el morfismo

$$\langle (U_{i_t}, V_{j_t}) \rangle_{(i_t, j_t) \in K' + L'} \xrightarrow{(\tau, \langle (i_{U_{i_t}}, i_{V_{j_t}}) \rangle)} \langle (\widehat{U}_t, \widehat{V}_t) \rangle_{t \in K+L}$$

que es un denominador primitivo. Además el lector puede convencerse de que

$$\langle (X_{i_k}, Y_{j_k}) \rangle_{(i_k, j_k) \in K'} + \langle (W_{i_l}, Z_{i_l}) \rangle_{(i_l, j_l) \in L'} = \langle (U_{i_t}, V_{jt}) \rangle_{(i_t, j_t) \in K' + L'}$$

$$\langle (\widehat{X}_k, \widehat{Y}_k) \rangle_{k \in K} + \langle (\widehat{W}_l, \widehat{Z}_l) \rangle_{l \in L} = \langle (\widehat{U}_t, \widehat{V}_t) \rangle_{t \in K+L}$$

Con ésto concluimos que $(\tau, \langle (i_{U_{i_t}}, i_{V_{j_t}}) \rangle)$ es un denominador primitivo.

$\therefore$ Γ tiene sumas de denominadores primitivos.$\blacksquare$

En virtud de la proposición (3.13), $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ es extensiva.

4.2 La categoría monoidal cerrada *Ext*

En este apartado, veremos la propiedad universal del producto tensorial definido. Queremos ver que $\otimes$ hace de la categoría Ext monoidal, y que además exista el isomorfismo natural

$$Ext[\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mathcal{Z}] \cong Ext[\mathcal{X}, Ext[\mathcal{Y}, \mathcal{Z}]]$$

Primero, veamos que el producto tensorial definido es un bifuntor. Sean $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ y $G : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}'$ en Ext. Estos funtores nos definen el funtor $F \times G : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{X}' \times \mathcal{Y}'$, que actúa por coordenadas en la categoría producto. éste nuevo funtor define un funtor de la forma

$$\begin{tikzcd} & Fam(\mathcal{X}' \times \mathcal{Y}') \\ \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \arrow[r, "F \times G"] & \mathcal{X}' \times \mathcal{Y}' \arrow[u, "Fam_{\mathcal{X}' \times \mathcal{Y}'}(\_)"'] \end{tikzcd}$$

Por el teorema (2.2), tenemos que $Fam(\mathcal{X}' \times \mathcal{Y}')$ tiene sumas finitas, con lo cual, por el teorema (2.5), existe un funtor $\widehat{F} \times \widehat{Y} : Fam(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \to Fam(\mathcal{X}' \times \mathcal{Y}')$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Fam(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \arrow[r, "\widehat{F} \times \widehat{G}"] & Fam(\mathcal{X}' \times \mathcal{Y}') \\ \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \arrow[u, "Fam_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}(\_)"] \arrow[r, "F \times G"] & \mathcal{X}' \times \mathcal{Y}' \arrow[u, "Fam_{\mathcal{X}' \times \mathcal{Y}'}(\_)"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Viendo el teorema (2.2), este funtor está definido de la siguiente manera: Si $\langle (X_i, Y_i) \rangle_{i \in I} \in Fam(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$, entonces $(\widehat{F} \times \widehat{G})(\langle (X_i, Y_i) \rangle_{i \in I} = \langle (F(X_i), G(Y_i)) \rangle_{i \in I}$ y dado un morfismo $(f, \langle (f_i, g_i) \rangle_{i \in I}) : \langle (X_i, Y_i) \rangle_{i \in I} \to \langle (W_j, Z_j) \rangle_{j \in J}$, entonces $\widehat{F} \times \widehat{G}(f, \langle (f_i, g_i) \rangle_{i \in I}) = (f, \langle (F(f_i), G(g_i)) \rangle)_{i \in I}$.

Ahora, componiendo éste nuevo funtor con $\gamma_{Fam(X' \times Y')} : Fam(\mathcal{X}' \times \mathcal{Y}') \to \mathcal{X}' \otimes \mathcal{Y}' = Fam(\mathcal{X}' \times \mathcal{Y}')(\Gamma^*)^{-1}$, obtenemos el funtor $\gamma_{Fam(\mathcal{X}' \times \mathcal{Y}')} \circ (\widehat{F} \times \widehat{G}) : Fam(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \to \mathcal{X}' \otimes \mathcal{Y}'$. Para ver que tenemos un funtor de $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ en $\mathcal{X}' \otimes \mathcal{Y}'$, veamos que este nuevo funtor invierte a los denominadores primitivos de $Fam(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$.

Sea

$$(\pi, \langle (i_{X_{i_k}}, i_{Y_{j_k}}) \rangle)_{(i_k, j_k) \in K'} : \langle (X_{i_k}, Y_{j_k}) \rangle_{(i_k, j_k) \in K'} \to \langle (\widehat{X}_k, \widehat{Y}_k) \rangle_{k \in K}$$

un denominador primitivo en $Fam(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$. Tenemos que $(\widehat{F}\times\widehat{G})(\pi,\langle(i_{X_{i_k}},i_{Y_{j_k}})\rangle_{(i_k,j_k)\in K'}) = (\pi,\langle(F(i_{X_{i_k}}),G(i_{Y_{j_k}}))\rangle_{(i_k,j_k)\in K'})$ donde

$$(\pi,\langle(F(i_{X_{i_k}}),G(i_{Y_{j_k}}))\rangle_{(i_k,j_k)\in K'}):\langle(F(X_{i_k}),G(Y_{j_k}))\rangle_{(i_k,j_k)\in K'}\to\langle(F(\widehat{X}_k),G(\widehat{Y}_k))\rangle_{k\in K}$$

Luego, F y G son funtores que abren sumas, entonces para cada $k\in K$, tenemos que los morfismos inducidos por la suma son isomorfismos

$$[F(i_{X_{i_k}})]:\sum_{i_k\in I_k}F(X_{i_k})\cong F(\sum_{i_k\in I_k}X_{i_k})=F(\widehat{X}_k)$$

$$[G(i_{Y_{j_k}})]:\sum_{j_k\in J_k}G(Y_{j_k})\cong G(\sum_{j_k\in J_k}Y_{j_k})=G(\widehat{Y}_k)$$

Además, para cada $i_k\in I_k$ y $j_k\in J_k$

$$F(i_{X_{i_k}})=[F(i_{X_{i_k}})]\circ i_{F(X_{i_k})}\qquad G(i_{Y_{j_k}})=[G(i_{Y_{j_k}})]\circ i_{G(Y_{j_k})}$$

Sea $\widehat{F(X_k)}=\sum_{i_k\in I_k}F(X_{i_k})$ y $\widehat{G(Y_k)}=\sum_{j_k\in J_k}G(Y_{j_k})$. Ahora bien, observando el diagrama conmutativo en $Fam(\mathcal{X}'\times\mathcal{Y}')$

$$\begin{tikzcd}
\langle(F(X_{i_k}),G(Y_{j_k}))\rangle_{(i_k,j_k)\in K'} \arrow[r, "{(\pi,\langle F(i_{X_{i_k}}),G(i_{Y_{j_k}})\rangle_{(i_k,j_k)\in K'})}"] \arrow[dr, "{(\pi,\langle(i_{F(X_{i_k})},i_{G(Y_{j_k})})\rangle_{(i_k,j_k)\in K'})}"'] & \langle(F(\widehat{X}_k),G(\widehat{Y}_k))\rangle_{k\in K} \\
 & \langle(\widehat{F(X_k)},\widehat{G(Y_k)})\rangle_{k\in K} \arrow[u, "{(Id_K,\langle([F(i_{X_{i_k}})],\ [G(i_{Y_{j_k}})])\rangle_{k\in K}}"']
\end{tikzcd} \tag{4.5}$$

Sabemos que $(Id_K,\langle([F(i_{X_{i_k}})],\ [G(i_{Y_{j_k}})])\rangle_{k\in K})$ es un isomorfismo en $Fam(\mathcal{X}'\times\mathcal{Y}')$, con lo que la imágen de éste morfismo en $\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}$ es también isomorfismo. Sabemos que el morfismo $(\pi,\langle(i_{F(X_{i_k})},i_{G(Y_{j_k})})\rangle_{(i_k,j_k)\in K'})$ es también invertible en $\mathcal{X}'\otimes\mathcal{Y}'$, pues es un denominador primitivo, con lo cual, la composición de ambos morfismos en $\mathcal{X}'\otimes\mathcal{Y}'$ es invertible, entonces, por el diagrama (4.5) la imágen del morfismo $(\pi,\langle(i_{F(X_{i_k})},i_{G(Y_{j_k})})\rangle_{(i_k,j_k)\in K'})$ es invertible en $\mathcal{X}'\otimes\mathcal{Y}'$.

Utilizando la propiedad universal de la categoría de fracciones, $\exists! F\otimes G:\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}\to\mathcal{X}'\otimes\mathcal{Y}'$ funtor, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y} \arrow[r, "F\otimes G"] & \mathcal{X}'\otimes\mathcal{Y}' \\
Fam(\mathcal{X}\times\mathcal{Y}) \arrow[u, "\gamma_{Fam(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})}"] \arrow[r, "\widehat{F}\times\widehat{G}"'] & Fam(\mathcal{X}'\times\mathcal{Y}') \arrow[u, "\gamma_{Fam(\mathcal{X}'\times\mathcal{Y}')}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, este funtor preserva sumas, pues dados dos elementos

$$\langle(X_k,Y_k)\rangle_{k\in K},\ \langle(W_j,Z_j)_{j\in J}\in Fam(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$$

tenemos que su suma es la familia $\langle(C_t,D_t)\rangle_{t\in K+J}$, con

$$(C_t,D_t)=\begin{cases}(X_k,Y_k) & \text{si t=k y } k\in K\\ (W_j,Z_j) & \text{si t=j y } j\in J\end{cases}$$

Entonces, $(F \otimes G)(\langle (C_t, D_t)\rangle_{t\in K+J}) = \langle (F(C_t), G(D_t))\rangle_{t\in K+J}$ con

$$(F(C_t), G(D_t)) = \begin{cases} (F(X_k), G(Y_k)) & \text{si t=k y } k \in K \\ (F(W_j), G(Z_j)) & \text{si t=j y } j \in J \end{cases}$$

que es precisamente la definición de la suma de los elementos $\langle (F(X_k), G(Y_k))\rangle_{k\in K}$ y $\langle (F(W_j), G(Z_j))_{j\in J}$ en $Fam(\mathcal{X}' \times \mathcal{Y}')$. Con esto, tenemos que $\otimes$ es un bifuntor en Ext.

Antes de pasar a lo siguiente, haremos un par de observaciones, las cuales son fáciles demostrar:

Observación 4.3 *Dados dos conjuntos finitos A, B y familias de objetos $\langle X_a\rangle_{a\in A}$, $\langle X_b\rangle_{b\in B}$ en una categoría $\mathcal{X}$ con sumas finitas, se cumple*

$$\sum_{c\in A\coprod B} X_c \;\cong\; \sum_{a\in A} + \sum_{b\in B} X_b$$

Argumento que es válido para conjuntos finitos, i.e; si K es un conjunto finito, y para cada $k \in K$ existen familias $\langle X_{i_k}\rangle_{i_k\in I_k}$, entonces

$$\sum_{i_k\in\coprod_{k\in K} I_k} X_{i_k} \;\cong\; \sum_{k\in K}\sum_{i_k\in I_k} X_{i_k}$$

.

Observación 4.4 *Dados dos conjuntos finitos A, B y una familia de objetos $\langle X_{(a,b)}\rangle_{(a,b)\in A\times B}$ en una categoría $\mathcal{X}$ con sumas finitas, se tiene que*

$$\sum_{(a,b)\in A\times B} X_{(a,b)} \;\cong\; \sum_{b\in B}\sum_{a\in A} X_{(a,b)}$$

.

esta última observación, es producto de esta otra:

$$A \times B \cong A \times \coprod_{b\in B}\{b\} \cong \coprod_{b\in B} A \times \{b\} \cong \coprod_{b\in B} A$$

y el resultado se sigue de la observación (4.3). Todos los isomorfismos dados en las observaciones, son los morfismos inducidos por la propiedad universal de la suma.

Por último, veamos que $\otimes$ definido anteriormente, hace que Ext sea una categoría monoidal cerrada.

Proposición 4.5 *La categoría $\langle Ext, \otimes, Set_f\rangle$ es una categoría monoidal simétrica cerrada con el bifuntor $\otimes$ definido anteriormente.*

Demostración:

Demostremos primero que existe un isomorfismo natural

$$Ext[\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mathcal{Z}] \cong Ext[\mathcal{X}, Ext[\mathcal{Y}, \mathcal{Z}]]$$

Para esto definimos $\phi : Ext[\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mathcal{Z}] \to Ext[\mathcal{X}, Ext[\mathcal{Y}, \mathcal{Z}]]$, de la siguiente manera: Sea $F \in Ext[\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mathcal{Z}]$, entonces $\phi(F) : Ext[\mathcal{X}, Ext[\mathcal{Y}, \mathcal{Z}]]$ está definido como $\phi(F)(X)(Y) = F(\langle (X, Y)\rangle_{*\in\{*\}})$ para $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{Y}$. Sea $g : Y \to Y'$ un morfismo en $\mathcal{Y}$, entonces $\phi(F)(X)(g) = F(Id_{\{*\}}, \langle (Id_X, g)\rangle_{*\in\{*\}})$ el cual es un funtor claramente.

Ahora bien, sea $f : X \to X'$ un morfismo un $\mathcal{X}$, definimos $\phi(F)(f) : \phi(F)(X) \Rightarrow \phi(F)(X')$ en cada instancia $Y \in \mathcal{Y}$ como $\phi(F)(f)_Y = F(\langle (f, Id_Y)\rangle_{*\in\{*\}}) : \phi(F)(X)(Y) \to$

$\phi(F)(X')(Y)$. Sea $g : Y \to Y'$ un morfismo en $\mathcal{Y}$, entonces es claro que el siguiente diagrama conmuta utilizando que F es funtor

$$\begin{tikzcd} F(\langle(X,Y)\rangle_{*\in\{*\}}) \arrow[r, "F(\langle(f,Id_Y)\rangle_{*\in\{*\}})"] \arrow[d, "F(\langle(Id_X,g)\rangle_{*\in\{*\}})"'] & F(\langle(X',Y)\rangle_{*\in\{*\}}) \arrow[d, "F(\langle(Id_{X'},g)\rangle_{*\in\{*\}})"] \\ F(\langle(X,Y')\rangle_{*\in\{*\}}) \arrow[r, "F(\langle(f,Id_{Y'})\rangle_{*\in\{*\}})"] & F(\langle(X',Y')\rangle_{*\in\{*\}}) \end{tikzcd}$$

Luego, $\phi(F)$ es funtor; falta ver que preserva sumas. Sean $X \in \mathcal{X}$ y $\langle Y_k\rangle_{k\in K} \in Fam(\mathcal{Y})$.
P.D. $(\phi(F))(X)(\sum_{k\in K} Y_k) \cong \sum_{k\in K}(\phi(F)(X)(Y_k))$.
Demostración:

Por definición tenemos que $\phi(F)(X)(\sum_{k\in K} Y_k) = F(\langle(X, \sum_{k\in K} Y_k)\rangle_{*\in\{*\}})$. Observemos que tenemos los morfismos

$$X_* \xrightarrow{Id_X} X_* \qquad\qquad Y_k \xrightarrow{i_k} \textstyle\sum_{k\in K} Y_k$$

Podemos construir el conjunto $\coprod_{*\in\{*\}}\{*\}\times K_* = K$, y el objeto $\langle(X_*, Y_{k_*})\rangle_{(*,k_*)\in\coprod_{*\in\{*\}}\{*\}\times K_*}$. Considerando la familia $\langle(X_*, Y_{k_*})\rangle_{(*,k_*)\in\coprod_{*\in\{*\}}\{*\}\times K_*} = \langle(X, Y_k)\rangle_{k\in K} \in Fam(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$, obtenemos el morfismo

$$(\pi, \langle(Id_{X_*}, i_{Y_k})\rangle_{(*,k_*)\in\coprod_{*\in\{*\}}\{*\}\times K_*}) : \langle(X_*, Y_k)\rangle_{(*,k_*)\in\coprod_{*\in\{*\}}\{*\}\times K_*} \longrightarrow \langle(X, \sum_{k\in K} Y_k)\rangle_{*\in\{*\}}$$

con $\pi(*, k_*) = *$, es decir, es la proyección en el $*$-*ésimo* término. Además, tenemos que para el único elemento en $\{*\}$, $\sum_* X_* = X$ y $\sum_{k_*\in K_*} Y_{k_*} = \sum_{k\in K} Y_k$, de donde tenemos que el morfismo definido es un denominador primitivo. Luego, este morfismo es invertible en $\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}$, es decir, $\langle(X_*, Y_k)\rangle_{(*,k_*)\in\coprod_{*\in\{*\}}\{*\}\times K_*} \cong \langle(X, \sum_{k\in K} Y_k)\rangle_{*\in\{*\}}$. Luego, como los funtores preservan isomorfismos, entonces $F(\langle(X_*, Y_k)\rangle_{k\in K}) \cong F(\langle(X, \sum_{k\in K} Y_k)\rangle_{*\in\{*\}})$. Además F preserva sumas, con lo cual $F(\langle(X, Y_k)\rangle_{k\in K}) \cong \sum_{k\in K} F(\langle(X, Y_{k_*})\rangle_{*\in\{*\}})$. Con estos dos isomorfismos, obtenemos que $\sum_{k\in K} F(\langle(X, Y_{k_*})\rangle_{*\in\{*\}}) \cong F(\langle(X, \sum_{k\in K} Y_k)\rangle_{*\in\{*\}})$, es decir $\sum_{k\in K} \phi(X)(Y_k) \cong \phi(F)(X)(\sum_{k\in K} Y_k)$.

Análogamente se demuestra que $\phi(\sum_{k\in K} X_k) \cong \sum_{k\in K} \phi(X_k)$.

Definimos $\theta : Ext[\mathcal{X}, Ext[\mathcal{Y},\mathcal{Z}]] \to Ext[\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}, \mathcal{Z}]$ de la siguiente manera:
Sea $G \in Ext[\mathcal{X},\ Ext[\mathcal{Y},\mathcal{Z}]]$ un funtor que preserva sumas, esto nos genera un funtor $G^* : \mathcal{X}\times\mathcal{Y} \to Z$ definido como $G^*(X,Y) = G(X)(Y)$ y en un morfismo $(f,g) : (X,Y) \to (X',Y')$ le asociamos el morfismo $G(f)_y \circ G(X)(g)$. Para mostrar que es funtor, sean $(f_1, g_1) : (X_1, Y_1) \to (X_2, Y_2)$ y $(f_2, g_2) : (X_2, Y_2) \to (X_3, Y_3)$ morfismos en $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$; entonces $G^*(f_2, g_2) \circ G^*(f_1, g_2) = (G(f_2)_{Y_3} \circ G(X_2)(g_2)) \circ (G(f_1)_{Y_2} \circ G(X_1)(g_1))$; como $G(f_1) : G(X_1) \Rightarrow G(X_2)$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G(X_1)(Y_2) \arrow[r, "G(X_1)(g_2)"] \arrow[d, "G(f_1)_{Y_2}"'] & G(X_1)(Y_3) \arrow[d, "G(f_1)_{Y_3}"] \\ G(X_2)(Y_2) \arrow[r, "G(X_2)(g_2)"'] & G(X_2)(Y_3) \end{tikzcd}$$

Entonces $(G(f_2)_{Y_3} \circ G(X_2)(g_2)) \circ (G(f_1)_{Y_2} \circ G(X_1)(g_1)) = (G(f_2)_{Y_3} \circ G(f_1)_{Y_3}) \circ (G(X_1)(g_2) \circ G(X_1)(g_1))$; utilizando que $G \in Ext[\mathcal{X}, Ext[\mathcal{Y},\mathcal{Z}]]$ y $G(X_1) \in Ext[\mathcal{Y},\mathcal{Z}]$, obtenemos

$$(G(f_2)_{Y_3} \circ G(f_1)_{Y_3}) \circ (G(X_1)(g_2) \circ G(X_1)(g_1)) = G(f_2\circ f_1)_{Y_3} \circ G(X_1)(g_2\circ g_1) = G^*(g_2\circ g_1, f_2\circ f_1)$$

Con esto, tenemos que $G^* : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ es un funtor.

A su vez, G^* induce un funtor $\widehat{G} : Fam(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \to Z$, definido por la propiedad universal de la categoría $Fam(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$. Solo resta ver que este funtor invierte denominadores primitivos.

Sea

$$(\pi, \langle (i_{l_k}, i_{Y_{j_k}})) \rangle_{(l_k,j_k)\in K'} : \langle (X_{l_k}, Y_{j_k}) \rangle_{(l_k,j_k)\in K'} \to \langle (X_k, Y_k) \rangle_{k\in K}$$

un denominador primitivo en $Fam(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$. Luego, tenemos que $\widehat{G}((\pi, \langle (i_{l_k}, i_{j_k}) \rangle_{(l_k,j_k)\in K'})$ $= f$ es el único morfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\sum_{\coprod_{k\in K} L_k\times J_k} G(X_{l_k})(Y_{j_k}) \arrow[rr, dashed, "f"] & & \sum_{k\in K} G(X_k)(Y_k) \\
G(X_{l_k})(Y_{j_k}) \arrow[u, "i_{(l_k,j_k)}"] \arrow[r, "G(X_{l_k})(i_{j_k})"'] & G(X_{l_k})(Y_k) \arrow[r, "G(i_{l_k})(Id_{Y_k})"'] & G(X_k)(Y_k) \arrow[u, "i_k"']
\end{tikzcd}$$

Por las observaciones anteriores y utilizando que G preserva sumas, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\sum_{k\in K} G(X_k)(Y_k) \arrow[rrr, dashed, "g"] & & & \sum_{\coprod_{k\in K} L_k\times J_k} G(X_{l_k})(Y_{j_k}) \\
G(X_k)(Y_k) \arrow[u, "i_k"] \arrow[r, "\cong"] & G(\sum_{k\in K} X_{l_k})(\sum_{Y_{j_k}}) \arrow[r, "\cong"] & \sum_{l_k\in L_k} \sum_{j_k\in J_k} G(X_{l_k})(Y_{j_k}) \arrow[r, "\cong"] & \sum_{L_k\times J_k} G(X_{l_k})(Y_{j_k}) \arrow[u, "i_k"'] \\
G(X_{l_k})(Y_k) \arrow[u, "G(i_{l_k})(Id_{Y_{j_k}})"] & & & \\
G(X_{l_k})(Y_{j_k}) \arrow[u, "G(X_{l_k})(i_{j_k})"] \arrow[rrr, "Id"'] & & & G(X_{l_k})(Y_{j_k}) \arrow[uu, "i_{(l_k,j_k)}"']
\end{tikzcd}$$

Con estos dos diagramas obtenemos que g es el inverso de f.

Como $\widehat{G}$ invierte denominadores primitivos, obtenemos un funtor $\theta(G) : \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$. Es claro que este funtor respeta sumas, por la definición y por la propiedad universal de $Fam(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$.

Ahora bien, sea $F \in Ext[\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mathcal{Z}]$, entonces $\theta\phi(F)(\langle X_k, Y_k \rangle_{k\in K}) = \sum_{k\in K} \phi(F)(X_k)(Y_k)$ $= \sum_{k\in K} F(\langle (X_k, Y_k) \rangle_{*\in\{*\}}) \cong F(\langle X_k, Y_k \rangle_{k\in K})$, donde el último isomorfismo es natural pues F respeta sumas. Sea $G \in Ext[\mathcal{X}, Ext[\mathcal{Y}, \mathcal{Z}]]$, entonces $\phi\theta(G)(X)(Y) = \theta(G)\langle (X, Y) \rangle_{*\in\{*\}} =$ $\sum_{*\in\{*\}} \widehat{G}(X, Y) = G(X)(Y)$. Con esto, obtenemos que ϕ es isomorfismo.

A continuación, demostremos que Set_f es el neutro con respecto a $\otimes$. Sea $\mathcal{X} \in Ext$, definimos $\Lambda_{\mathcal{X}} : Fam(Set_f \times \mathcal{X}) \to \mathcal{X}$ de la siguiente manera: Si $\langle (J_k, X_k) \rangle_{k\in K} \in Fam(Set_f \times \mathcal{X})$, entonces

$$\Lambda_{\mathcal{X}}(\langle (J_k, X_k) \rangle_{k\in K}) = \sum_{k\in K} \sum_{j_k\in J_k} X_k$$

y dado un morfismo $(h, (f_k, g_k)) : \langle (J_k, X_k) \rangle_{k\in K} \to \langle (I_l, Y_l) \rangle_{l\in L}$, obtenemos familias de morfismos $\langle f_k : J_k \to I_{h(k)} \rangle_{k\in K}$ y $\langle g_k : X_k \to Y_{h(k)} \rangle_{k\in K}$. Entonces, dada $k \in K$ fija, obtenemos la familiza de morfismos $\langle g_k : X_k \to Y_{h(k)} \rangle_{j_k\in J_k}$, donde cada morfismo no depende de j_k, con lo cual obtenemos el morfismo inducido por la propiedad universal de la suma

$$\widehat{g_k} : \sum_{j_k\in J_k} X_k \to \sum_{i_{h(k)}\in I_{h(k)}} Y_{h(k)}$$

Con ésto obtenemos la familia de morfismos $\langle \widehat{g_k} : \sum_{j_k \in J_k} X_k \to \sum_{i_{h(k)} \in I_{h(k)}} Y_{h(k)} \rangle_{k \in K}$, con lo cual; obtenemos el morfismo inducido

$$[\widehat{g_k}] : \sum_{k \in K} \sum_{j_k \in J_k} X_k \to \sum_{l \in L} \sum_{i_l \in I_l} Y_l$$

Definimos $\Lambda_{\mathcal{X}}(h, \langle (f_k, g_k) \rangle_{k \in K}) = [\widehat{g_k}]$. En diagrama, este morfismo se puede ver de la forma

$$\begin{tikzcd}
X_k \arrow[r, "i_{j_k}"] \arrow[d, "g_k"] & \sum_{j_k \in J_k} X_k \arrow[r, "i_k"] \arrow[d, dashed, "\widehat{g_k}"'] & \sum_{k \in K} \sum_{j_k \in J_k} X_k \arrow[d, dashed, "{[\widehat{g_k}]}"'] \\
Y_{h(k)} \arrow[r, "i_{f_k(j_k)}"'] & \sum_{i_{h(k)} \in I_{h(k)}} Y_{h(k)} \arrow[r, "i_l"'] & \sum_{l \in L} \sum_{i_l \in I_l} Y_l
\end{tikzcd}$$

Se deja al lector verificar que respeta identidades y composiciones. Ahora bien, si tenemos un denominador primitivo

$$(\pi, \langle (i_{L_{j_k}}, i_{X_{i_k}}) \rangle_{(j_k, i_k) \in K'} : \langle (L_{j_k}, X_{i_k}) \rangle_{(j_k, i_k) \in K'} \to \langle (L_k, \widehat{X}_k) \rangle_{k \in K}$$

con $K' = \coprod_{k \in K} J_k \times I_k$ y π la proyección en el *k-ésimo* sumando. $\Lambda_{\mathcal{X}}$ actúa en este morfismo de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
X_{i_k} \arrow[r, "i_{l_{j_k}}"] \arrow[d, "i_{i_k}"] & \sum_{l_{j_k} \in L_{j_k}} X_{i_k} \arrow[r, "i_{(i_k, j_k)}"] \arrow[d, dashed, "\widehat{i_{i_k}}"'] & \sum_{(i_k, j_k) \in \coprod_{k \in K} I_k \times J_k} \sum_{l_{j_k} \in J_k} X_{i_k} \arrow[d, dashed, "{[\widehat{i_{i_k}}]}"'] \\
\widehat{X}_k \arrow[r, "i_{l_k}"'] & \sum_{l_k \in L_k} \widehat{X}_k \arrow[r, "i_l"'] & \sum_{k \in K} \sum_{l_k \in L_k} \widehat{X}_k
\end{tikzcd}$$

Queremos definir un morfismo $\sum_{l \in L} \sum_{i_l \in I_l} \widehat{X}_k \to \sum_{(i_k, j_k) \in \coprod_{k \in K} I_k \times J_k} \sum_{l_{j_k} \in J_k} X_{i_k}$ que sea el inverso de $[\widehat{i_{X_{i_k}}}]$. Para ésto, recordemos que $\widehat{X}_k = \sum_{i_k \in I_k} X_{i_k}$ y $\sum_{j_k \in J_k} L_{j_k} = L_k$; utilizando las siguientes observaciones

Con ésto en mente, veamos los siguientes isomorfismos

$$\sum_{(i_k, j_k) \in \coprod_{k \in K} I_k \times J_k} \sum_{l_{j_k} \in L_{j_k}} X_{i_k} \cong^{(4.3)} \sum_{k \in K} \sum_{(i_k \times j_k)} \sum_{l_{j_k}} X_{i_k} \cong^{(4.4)} \sum_{k \in K} \sum_{i_k \in I_k} \sum_{j_k \in J_k} \sum_{l_{j_k} \in L_{j_k}} X_{i_k} \cong^{(4.3)}$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{i_k \in I_k} \sum_{l_{j_k} \coprod_{j_k \in J_k} L_{j_k}} X_{i_k} = \sum_{k \in K} \sum_{i_k \in I_k} \sum_{L_k} X_{i_k} \cong \sum_{k \in K} \sum_{l_k \in L_k} \sum_{i_k \in I_k} = \sum_{k \in K} \sum_{l_k \in L_k} \widehat{X}_k$$

Donde el último isomorfismo es la conmutatividad de la suma. Como todos los isomorfismos son los morfismos inducidos por la propiedad universal de la suma, obtenemos que $[\widehat{i_{X_{i_k}}}]$ es isomorfismo, con lo cual, por la propiedad universal de la categoría de fracciones $\exists! \lambda_{\mathcal{X}} : Set_f \otimes \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Fam(Set_f \times \mathcal{X}) \arrow[r, "\gamma_{Fam(Set_f \times \mathcal{X})}"] \arrow[dr, "\Lambda_{\mathcal{X}}"'] & Set_f \otimes \mathcal{X} \arrow[d, "\lambda_{\mathcal{X}}"] \\
& \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Ahora veamos que λ es natural. Supongamos que $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es un funtor en Ext. P.D. El diagrama

$$\begin{tikzcd} Set_f \otimes \mathcal{X} \arrow[r, "\lambda_{\mathcal{X}}"] \arrow[d, "Id_{Set_f} \otimes F"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "F"] \\ Set_f \otimes \mathcal{Y} \arrow[r, "\lambda_{\mathcal{Y}}"'] & \mathcal{Y} \end{tikzcd} \tag{4.6}$$

conmuta (bajo isomorfismo natural).
Demostración:
Sea $\langle (J_k, X_k) \rangle_{k \in K} \in Set_f \otimes \mathcal{X}$, entonces

$$\lambda_{\mathcal{Y}} \circ Id_{Set_f} \otimes F(\langle (J_k, X_k) \rangle_{k\in K}) = \lambda_{\mathcal{Y}}(\langle (J_k, F(X_k))) \rangle_{k\in K} = \sum_{k\in K} \sum_{j_k \in J_k} F(X_k) \cong \sum_{k\in K} F(\sum_{j_k\in J_k} X_k)$$

$$\cong F(\sum_{k\in K} \sum_{j_k\in J_k} X_k) = F \circ \lambda_{\mathcal{X}}(\langle (J_k, X_k) \rangle_{k\in K})$$

con lo cual el diagrama (4.6) conmuta bajo isomorfismo natural.

Si $X \in \mathcal{X}$, definimos $\lambda_{\mathcal{X}}^{-1}(X) = \langle (1_*, X_*) \rangle_{* \in \{*\}}$; veamos que es la inversa de $\lambda_{\mathcal{X}}$ (bajo isomorfismo natural). Sea $X \in \mathcal{X}$, entonces $(\lambda_{\mathcal{X}} \circ \lambda_{\mathcal{X}}^{-1})(X) = \lambda_{\mathcal{X}}(\langle (1, X) \rangle_{* \in \{*\}}) = \sum_{* \in \{*\}} \sum_1 X$
$= X$. Por el otro lado, sea $\langle (J_k, X_k) \rangle_{k\in K} \in Set_f \otimes \mathcal{X}$, entonces

$$\lambda_{\mathcal{X}}^{-1} \circ \lambda_{\mathcal{X}}(\langle (J_k, X_k) \rangle_{k\in K}) = \lambda_{\mathcal{X}}^{-1}(\sum_{k\in K} \sum_{j_k\in J_k} X_k) = \langle (1_*, \sum_{k\in K} \sum_{j_k \in J_k} X_k) \rangle_{* \in \{*\}}$$

Ahora bien, considerando los siguientes morfismos en $Fam(Set_f \times \mathcal{X})$

1. $\pi_X = (\pi_K, \langle (i_{j_k}, Id_{X_{k_*}}) \rangle_{(j_k, *_k) \in \coprod_{k\in K} J_k \times 1_k}) : \langle (1_{j_k}, X_{k_*}) \rangle_{\coprod_{k\in K} J_k \times 1_k} \to \langle (J_k, X_k) \rangle_{k\in K}$
2. $\tau_X = (\tau_K, \langle (Id_{1_{j_k}}, i_{X_k}) \rangle_{\coprod_{k\in K} 1_k \times J_k}) : \langle (1_k, X_k) \rangle_{\coprod_{k\in K} 1_k \times J_k} \to \langle (1_k, \sum_{j_k\in J_k} X_k) \rangle_{k\in K}$
3. $\mu_X = \langle (\mu, \langle (Id_{1_*}, i_{\sum_{j_k\in J_k} X_k}) \rangle) \rangle_{\coprod_{* \in \{*\}} 1_* \times K_*} : \langle (1_*, \sum_{j_k \in J_k} X_k) \rangle_{\coprod_{* \in \{*\}} 1_* \times K_*} \to$ $\langle (1_*, \sum_{k\in K} \sum_{j_k\in J_k} X_k) \rangle_{* \in \{*\}}$ con μ la proyección en el **-ésimo* sumando.

Lo que podemos observar primero es que $\coprod_{* \in \{*\}} 1_* \times K_* = K$. Además todos éstos morfismos son denominadores primitivos, y por lo tanto invertibles en $Set_f \otimes \mathcal{X}$, con lo cual

$$\langle (J_k, X_k) \rangle_{k\in K} \cong^{Id/\pi_X} \langle (1_{j_k}, X_{k_*}) \rangle_{\coprod_{k\in K} J_k \times 1_k} \cong^{T_X/Id} \langle (1_k, X_k) \rangle_{\coprod_{k\in K} 1_k \times J_k} \cong^{\tau_X/Id}$$

$$\langle (1_k, \sum_{j_k\in J_k} X_k) \rangle_{k\in K} \cong^{\mu_X/Id} \langle (1_*, \sum_{k\in K} \sum_{j_k\in J_k} X_k) \rangle_{* \in \{*\}}$$

donde T_X es el isomorfismo en $Fam(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$

$$T_X : \langle (1_{j_k}, X_{k_*}) \rangle_{\coprod_{k\in K} J_k \times 1_k} \to \langle (1_k, X_k) \rangle_{\coprod_{k\in K} 1_k \times J_k}$$

Observamos que este isomorfismo se ve de la forma $((\mu_X \circ \tau_X) \circ T_X)/\pi_X$. el cual se puede ver por un argumento de cardinalidad. Veamos que el isomorfismo es natural. Sea

$$r/t : \langle (J_k, X_k) \rangle \to \langle (A_l, Y_l) \rangle$$

un morfismo en $Set_f \otimes \mathcal{X}$ con t un denominador primitivo (basta tomar t denominador primitivo por la observación (3.10)).
P.D. el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\langle (J_k, X_k)\rangle_{k\in K} \arrow[r, "((\mu_X\circ\tau_X)\circ T_X)/\pi_X"] \arrow[d, "r/t"'] & \langle (1_*, \sum_{k\in K}\sum_{j_k\in J_k} X_k)\rangle_{*\in\{*\}} \arrow[d, "\lambda_{\mathcal{X}}^{-1}\lambda_{\mathcal{X}}(r/t)"] \\
\langle (A_l, Y_l)\rangle_{l\in L} \arrow[r, "(\mu_Y\circ(\tau_Y\circ T_y))/\pi_Y"'] & \langle (1_*, \sum_{l\in L}\sum_{a_l\in A_l} Y_l)\rangle_{*\in\{*\}}
\end{tikzcd} \tag{4.7}$$

conmuta. Denotemos a $\coprod_{k\in K} M_k \times N_k = K'$; y sea r/t el morfismo siguiente

$$\begin{tikzcd}
 & \langle (J_{m_k}, X_{n_k})\rangle_{(m_k,n_k)\in K'} \arrow[dl, "(\theta,\langle (i_{m_k}, i_{n_k})\rangle_{(m_k,n_k)\in K'})"'] \arrow[dr, "(f,\langle h_{(m_k,n_k)},\ g_{(m_k,n_k)}\rangle)"] & \\
\langle (J_k, X_k)\rangle_{k\in K} & & \langle (A_l, Y_l)\rangle_{l\in L}
\end{tikzcd}$$

Luego, el diagrama (4.7) se traduce al diagrama

$$\begin{tikzcd}
\langle (J_k, X_k)\rangle_{k\in K} \arrow[r, "\mu_X\circ(\tau_X\circ T_X)/\pi_X"] \arrow[d, "r/t"'] & \langle (1_*, \sum_{k\in K}\sum_{j_k\in J_k} X_k)\rangle_{*\in\{*\}} \arrow[d, "z"] \\
\langle (A_l, Y_l)\rangle_{l\in L} \arrow[r, "\mu_Y\circ(\tau_Y\circ T_y)/\pi_Y"'] & \langle (1_*, \sum_{l\in L}\sum_{a_l\in A_l} Y_l)\rangle_{*\in\{*\}}
\end{tikzcd} \tag{4.8}$$

Donde $z = (Id_{\{*\}}, \langle (Id_{1_*}, [\widehat{g}_{(m_k,n_k)}] \circ [\widehat{i}_{n_k}]^{-1})\rangle_{*\in\{*\}})\rangle_{*\in\{*\}}/Id$; los morfismos $[\widehat{g}_{(m_k,n_k)}]$ y $[\widehat{i}_{n_k}]$ son los definidos por los diagramas

$$\begin{tikzcd}
X_{n_k} \arrow[r, "i_{j_{m_k}}"] \arrow[d, "g_{(m_k,n_k)}"] & \sum_{j_{m_k}\in J_{m_k}} X_{n_k} \arrow[r, "i_{(m_k,n_k)}"] \arrow[d, dashed, "\widehat{g}_{(m_k,n_k)}"] & \sum_{(m_k,n_k)\in K'}\sum_{j_m\in J_m} X_{n_k} \arrow[d, dashed, "{[\widehat{g}_{(m_k,n_k)}]}"'] \\
Y_{f(m_k,n_k)} \arrow[r, "i_{h_{(m_k,n_k)}(j_m)}"'] & \sum_{a_{f(m_k,n_k)}\in A_{f(m_k,n_k)}} Y_{f(m_k,n_k)} \arrow[r, "i_{f(m_k,n_k)}"'] & \sum_{l\in L}\sum_{a_l\in A_l} Y_l
\end{tikzcd} \tag{4.9}$$

$$\begin{tikzcd}
X_{n_k} \arrow[r, "i_{j_{m_k}}"] \arrow[d, "i_{n_k}"] & \sum_{j_{m_k}\in J_{m_k}} X_{n_k} \arrow[r, "i_{(m_k,n_k)}"] \arrow[d, dashed, "\widehat{i}_{n_k}"'] & \sum_{(m_k,n_k)\in K'}\sum_{j_{m_k}\in J_{m_k}} X_{n_k} \arrow[d, dashed, "{[\widehat{i}_{n_k}]}"'] \\
X_k \arrow[r, "i_{(j_{m_k})}"'] & \sum_{j_k\in J_k} X_k \arrow[r, "i_k"'] & \sum_{k\in K}\sum_{j_k\in J_k} X_k
\end{tikzcd} \tag{4.10}$$

Este último morfismo sabemos que es invertible, con lo cual queda definido el morfismo

$$[\widehat{g}_{(m_k,n_k)}] \circ [\widehat{i}_{n_k}]^{-1} : \sum_{k\in K}\sum_{j_k\in J_k} X_k \to \sum_{l\in L}\sum_{a_l\in A_l} Y_l$$

utilizando en el diagrama (4.8).
Veamos primero la composición

$$\mu_Y \circ (\tau_Y \circ T_y) \circ r/t : \langle (J_k, X_k)\rangle_{k\in K} \to \langle (1_*, \sum_{l\in L}\sum_{a_l\in A_l} Y_l)\rangle_{*\in\{*\}}$$

Como Γ cumple la propiedad $(CF2)$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \langle(1_{a_l}, Y_l)\rangle_{\coprod_{l\in L} I_l\times 1_l} \arrow[d, "\pi_Y"] \\
\langle(J_{m_k}, X_{n_k})\rangle_{\coprod_{k\in K} M_k\times N_k} \arrow[r, "{(f,\langle(h_{(m_k,n_k)},g_{(m_k,n_k)})\rangle_{\coprod_{k\in K} M_k,N_k})}"] & \langle(A_l, Y_l)\rangle_{l\in L}
\end{tikzcd}$$

tiene una una completación a un cuadrado conmutativo, de la siguiente manera: Para cada $(m_k, n_k) \in \coprod_{k\in K} M_k \times N_k$, obtenemos el morfismo $h_{(m_k,n_k)} : J_{m_k} \to A_{f(m_k,n_k)}$, con lo cual $\coprod_{a_l\in A_l} h^{-1}_{(m_k,n_k)}(a_l) = J_{m_k}$ si $f(m_k, n_k) = l$. Definimos el morfismo $i_{a_l} : h^{-1}_{(m_k,n_k)}(a_l) \to J_{m_k}$ como la inclusión en el coproducto. Denotemos por $K' = \coprod_{k\in K} M_k \times N_k$. Con esto, formemos el conjunto $\coprod_{k'\in K'} A_{k'} \times 1_{k'}$ con $A_{k'} = A_{(m_k,n_k)} = A_l$ si $f(m_k, n_k) = l$. Ahora bien, definimos los siguientes morfismos en Con_f:

$\alpha : \coprod_{k'\in K'} A_{k'}\times 1_{k'} \to \coprod_{k\in K} M_k\times N_k$, con $\alpha(a_{k'}, *_{k'}) = k'$; es decir, α es la proyección en el k'-ésimo sumando. $\beta : \coprod_{k'\in K'} A_{k'}\times 1_{k'} \to \coprod A_l\times 1_l$ como $\beta(a_{k'}, *_{k'}) = (a_{f(m_k,n_k)}, *_{f(m_k,n_k)})$; y por último, el morfismo $1_{a_l} : h^{-1}_{(m_k,n_k)}(a_l) \to 1_{a_l}$ el cual asocia a todo elemento en el dominio a el único elemento $*_{a_l} \in 1_{a_l}$. Con lo cual, obtenemos el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\langle(h^{-1}_{(m_k,n_k)}(a_l), X_{n_k})\rangle_{\coprod_{k'\in\ k'} I_{k'}\times 1_{k'}} \arrow[r, "{(\beta,\langle(1_{a_l},g_{(m_k,n_k)})\rangle)}"] \arrow[d, "{(\alpha_{K'},\langle(i_{a_l},Id_{X_{n_k}})\rangle_{\coprod_{k'\in K'} I_{k'}\times 1_{k'}})}"'] & \langle(1_{a_l}, Y_l)\rangle_{\coprod_{l\in L} I_l\times 1_l} \arrow[d, "\pi_Y"] \\
\langle(J_{m_k}, X_{n_k})\rangle_{\coprod_{k\in K} M_k\times N_k} \arrow[r, "{(f,\langle h_{(m_k,n_k)},g_{(m_k,n_k)}\rangle_{\coprod_{k\in K} M_k,N_k})}"] & \langle(A_l, Y_l)\rangle_{l\in L}
\end{tikzcd}$$

Con este cuadrado, obtenemos que la composición que deseábamos es el diagrama (4.11).

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \langle (h^{-1}_{(m_k,n_k)}(a_l), X_{n_k})\rangle_{\coprod_{k'\in K'} A_{k'}\times 1_{k'}} \arrow[dl, "(\alpha,\langle (i_{i_l}, Id_{X_{n_k}})\rangle_{k'\in K'})"'] \arrow[dr, "(\beta,\langle (1_{i_l}, g_{(m_k,n_k)})\rangle_{k'\in K'})"] & & \\
 & \langle (J_{m_k}, X_{n_k})\rangle_{(m_k,n_k)\in K'} \arrow[dl, "(\theta,\langle (i_{m_k}, i_{n_k})\rangle_{(m_k,n_k)\in K'})"'] \arrow[dr, "(f,\langle (h_{(m_k,n_k)}, g_{(m_k,n_k)})\rangle_{(m_k,n_k)\in K'})"] & & \langle (1_{a_l}, Y_{l_*})\rangle_{\coprod_{l\in L} A_l\times 1_l} \arrow[dl, "\pi_Y"] \arrow[dr, "\mu_Y\circ(\tau_Y\circ T_Y)"] & \\
\langle (J_k, X_k)\rangle_{k\in K} & & \langle (A_l, Y_l)\rangle_{l\in L} & & \langle (1_*, \sum_{l\in L}\sum_{a_l\in A_l} Y_l)\rangle_{*\in\{*\}}
\end{tikzcd}
\tag{4.11}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \langle(1_{j_k}, X_{k_*})\rangle_{(j_k,*_k)\in\coprod_{k\in K} J_k\times 1_k} \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "\mu_X\circ(\tau_X\circ T_X)"] & & \\
 & \langle(1_{j_k}, X_{k_*})\rangle_{\coprod_{k\in K} J_k\times 1_k} \arrow[dl, "\pi_X"'] & & \langle(1_*, \sum_{k\in K}\sum_{j_k\in J_k} X_k\rangle_{*\in\{*\}} \arrow[dr, "(Id{,}\langle(Id_*{,}[\widehat{g}_{(m_k,n_k)}]\circ[\widehat{i}_{n_k}])\rangle_{*\in\{*\}}"] & \\
\langle(J_k, X_k)\rangle_{k\in K} & & \langle(1_{j_k}, X_{n_k})\rangle_{\coprod_{k\in K} J_k\times N_k} \arrow[uu, "(u{,}\langle(Id_{1_{j_k}}{,}i_{n_k})\rangle_{(j_k,n_k)\in\coprod_{k\in K} J_k\times N_k})"'] \arrow[dd, "(v{,}\langle(p{,}Id_{X_{n_k}})\rangle_{(j_k,n_k)\in\coprod_{k\in K} J_k\times N_k})"] & & \langle(1_*, \sum_{l\in L}\sum_{a_l\in A_l} Y_l)\rangle_{*\in\{*\}} \\
 & \langle(J_{m_k}, X_{n_k})\rangle_{(m_k,n_k)\in K'} \arrow[ul, "(\theta{,}\langle(i_{m_k}{,}i_{n_k})\rangle_{(m_k,n_k)\in K'})"] & & \langle(1_{a_l}, Y_{l_*})\rangle_{\coprod_{l\in L} A_l\times 1_l} \arrow[ur, "\mu_Y\circ(\tau_Y\circ T_Y)"'] & \\
 & & \langle(h^{-1}_{(m_k,n_k)}(a_l), X_{n_k})\rangle_{\coprod_{k'\in K'} A_{k'}\times 1_{k'}} \arrow[ul, "(\alpha{,}\langle(i_{i_l}{,}Id_{X_{n_k}})\rangle_{k'\in K'})"] \arrow[ur, "(\beta{,}\langle(1_{a_l}{,}g_{(m_k,n_k)})\rangle_{k'\in K'})"'] & &
\end{tikzcd}
\tag{4.12}
$$

Por el otro lado, tenemos que la composición $\mu_X \circ (\tau_X \circ T_X)/\pi_X \circ z$ es el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & \langle (1_{j_k}, X_{k_*}) \rangle_{(j_k,*_k)\in\coprod_{k\in K} J_k\times 1_k} \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "\mu_X\circ(\tau_X\circ T_X)"] & & \\
 & \langle (1_{j_k}, X_{k_*}) \rangle_{\coprod_{k\in K} J_k\times 1_k} \arrow[dl, "\pi_X"'] & & \langle (1_*, \sum_{k\in K}\sum_{j_k\in J_k} X_k \rangle_{*\in\{*\}} \arrow[dr, "(Id,\langle(Id_*,[\widehat{g}_{(m_k,n_k)}]\circ[\widehat{i}_{n_k}])\rangle_{*\in\{*\}}"] & \\
\langle (J_k, X_k) \rangle_{k\in K} & & & & \langle (1_*, \sum_{l\in L}\sum_{a_l\in A_l} Y_{l_*}) \rangle_{*\in\{*\}}
\end{tikzcd} \tag{4.13}$$

Para ver que estas composiciones son iguales, formemos el diagrama (4.12) (página anterior), donde $u : \coprod_{k\in K} J_k \times N_k \to \coprod_{k\in K} J_k \times 1_k$ y $v : \coprod_{k\in K} J_k \times N_k \to \coprod_{k'\in K'} I_{k'} \times 1_{k'}$ están definidos como $u(j_k, n_k) = (j_k, 1_k)$ y $v(j_k, n_k) = (h_{(m_k,n_k)}(j_k), 1_{k'})$. Esta última definición resulta de la función $h_{(m_k,n_k)} : J_{m_k} \to A_{f(m_k,n_k)}$, y recordando que $\sum_{m_k\in M_k} J_{m_k} = J_k$. Entonces un elemento en J_k, lo pensamos en su *m-ésimo* sumando y le aplicamos la función $h_{(m_k,n_k)}$. Con esto obtenemos un elemento en $A_{f(m_k,n_k)}$, y recordando la definición de $A_{k'} = A_{f(m_k,n_k)}$ obtenemos un elemento en $\coprod_{k'\in K'} A_{k'} \times 1_{k'}$. Ahora bien, el morfismo $i_{n_k} : X_{n_k} \to X_k$ es la inclusión en la suma y el morfismo $p_{j_k} : 1_{j_k} \to h^{-1}_{(m_k,n_k)}(a_l)$ está definido como $p_{j_k}(1_{j_k}) = j_k$ visto en el a_l-*ésimo* sumando de J_{m_k}.

Ahora bien, obsérvese el siguiente diagrama en Con_f, el cual está acomodado conforme la notación de (4.12):

$$\begin{tikzcd}
 & & (j_k,*_k)\in\coprod_{k\in K} J_k\times 1_k \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "1_*"] & & \\
 & (j_k,*_k)\in\coprod_{k\in K} J_k\times 1_k \arrow[dl, "\pi_K"'] & & *\in\{*\} \arrow[dr, "Id"] & \\
k\in K & & (j_k,n_k)\in\coprod_{k\in K} J_k\times N_k \arrow[uu, "u"] \arrow[dd, "v"'] & & *\in\{*\} \\
 & (m_k,n_k)\in\coprod_{k\in K} M_k\times N_k \arrow[ul, "\theta_K"] & & (h_{(m_k,n_k)}(j_k), *_{f(m_k,n_k)})\in\coprod_{l\in L} A_l\times 1_l \arrow[ur, "1_*"'] & \\
 & & (h_{(m_k,n_k)}(j_k)_{(m_k,n_k)}, *_{(m_k,n_k)})\in\coprod_{k'\in K'} A_{k'}\times 1_{k'} \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\beta"'] & &
\end{tikzcd} \tag{4.14}$$

con el cual, demostramos que los morfismos conmutan al nivel de Con de (4.12) y además, el morfismo que resulta de las composiciones del lado izquierdo es la proyección en el k-*ésimo* sumando. Sea $(j_k, n_k) \in \coprod_{k\in K} J_k \times N_K$, el diagrama (4.15) representa al diagrama (4.12) fijando el dominio y contradominio de los morfismos

$$\begin{tikzcd}
 & & & (1_{j_k}, X_{k_*}) \arrow[dll, "(Id,Id)"'] \arrow[drr, "(Id,i_k\circ i_{j_k})"] & & & \\
 & (1_{j_k}, X_{k_*}) \arrow[dl, "(i_{j_k},Id)"'] & & & & (1_*, \sum_{k\in k}\sum_{j_k\in J_k} X_k) \arrow[dr, "(Id,[\widehat{g}_{(m_k,n_k)}]\circ[\widehat{i}_{n_k}])"] & \\
(J_k, X_k) & & & (1_{j_k}, X_{n_k}) \arrow[uu, "(Id,i_{n_k})"'] \arrow[dd, "(p_{j_k},Id)"'] & & & (1_*, \sum_{l\in L}\sum_{a_l\in A_l} Y_l) \\
 & (J_{m_k}, X_{n_k}) \arrow[ul, "(i_{m_k},i_{n_k})"] & & & & (1_{a_l}, Y_{l_*}) \arrow[ur, "(Id,i_{a_l})"'] & \\
 & & & (h^{-1}_{(m_k,n_k)}(a_l), X_{n_k}) \arrow[ull, "(i_{a_l},Id)"] \arrow[urr, "(1_{a_l},g_{(m_k,n_k)})"'] & & &
\end{tikzcd} \tag{4.15}$$

es claro que el lado izquierdo conmuta. Además, obtenemos que el morfismo que resulta de las composiciones del lado izquierdo es la inclusión en (J_k, X_k). Con esta observación y la del diagrama anterior, obtenemos que la composición de los morfismos del lado izquierdo es un denominador primitivo. Para el lado derecho, es claro que en la primera entrada las composiciones son las mismas. La conmutatividad en la segunda entrada se traduce en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_{n_k} \arrow[r, "i_{n_k}"] \arrow[d, "g_{(m_k,n_k)}"'] & X_k \arrow[r, "i_{j_k}"] & \sum_{j_k\in J_k} X_k \arrow[r, "i_k"] & \sum_{k\in K}\sum_{j_k\in J_k} X_k \arrow[r, dashed, "{[\widehat{i}_{n_k}]^{-1}}"] & \sum_{\coprod_{k\in K} M_k\times N_k}\sum_{j_{m_k}\in J_{m_k}} X_{n_k} \arrow[d, dashed, "{[\widehat{g}_{(m_k,n_k)}]}"] \\
Y_{f(m_k,n_k)} \arrow[rr, "i_{h_{(m_k,n_k)}(j_{m_k})}"'] & & \sum_{a_{f(m_k,n_k)}\in A_{f(m_k,n_k)}} Y_{f(m_k,n_k)} \arrow[rr, "i_{f(m_k,n_k)}"'] & & \sum_{l\in L}\sum_{a_l\in A_l} Y_l
\end{tikzcd}$$

el cual conmuta debido a la conmutatividad de los diagramas (4.9) y (4.10). Con esto concluimos que el diagrama (4.12) conmuta.
$\therefore$ El diagrama (4.7) conmuta.
$\therefore$ λ es un isomorfismo natural.

Definimos $\varrho_X : \mathcal{X} \otimes Set_f \to \mathcal{X}$ de la misma manera que λ_X, con lo cual, la demostración que ϱ es isomorfismo natural, es la misma que para λ.

A continuación, veamos que dados $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in Ext$, existe un isomorfismo natural $\alpha_{\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}} : (\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}) \otimes \mathcal{Z} \to \mathcal{X} \otimes (\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$.

Para esto, utilizemos los isomorfismos

$$Ext[(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}) \otimes \mathcal{Z}, \mathcal{W}] \cong Ext[\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, Ext[\mathcal{Z}, \mathcal{W}]] \cong Ext[\mathcal{X}, Ext[\mathcal{Y}, Ext[\mathcal{Z}, \mathcal{W}]]]$$

$$\cong Ext[\mathcal{X}, Ext[\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z}, \mathcal{W}]] \cong Ext[\mathcal{X} \otimes (\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z}), \mathcal{W}]$$

con $W = (\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}) \otimes \mathcal{Z}$ y $Id \in Ext[(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}) \otimes \mathcal{Z}, (\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}) \otimes \mathcal{Z}]$, con esto, obtenemos isomorfismos un funtor $\alpha^{-1}_{\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}} : \mathcal{X} \otimes (\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z}) \to (\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}) \otimes \mathcal{Z}$ definido como

$$\alpha^{-1}_{\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}}(\langle\langle(X_k, \langle\langle(Y_{l_k}, Z_{l_k})\rangle\rangle_{l_k\in L_k})\rangle\rangle_{k\in K} = \sum_{k\in K}\sum_{L_k\in L_k} \langle\langle(\langle\langle(X_k, Y_{l_k})\rangle\rangle_{*in\{*\}}, Z_{l_k})\rangle\rangle_{*\in\{*\}} =$$

$$\langle\langle(\langle\langle(X_k, Y_{l_k})\rangle\rangle_{*\in\{*\}}, Z_{l_k})\rangle\rangle_{l_k\in\coprod_{k\in K} L_k}$$

Análogamente, si utilizamos los isomorfismos

$$Ext[\mathcal{X}\otimes(\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Z}),\mathcal{W}]\cong Ext[\mathcal{X},Ext[\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Z},W]\cong Ext[\mathcal{X},Ext[\mathcal{Y},Ext[\mathcal{Z},\mathcal{W}]]]$$

$$Ext[\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y},Ext[\mathcal{Z},\mathcal{W}]]\cong Ext[(\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y})\otimes\mathcal{Z},\mathcal{W}]$$

con $W=\mathcal{X}\otimes(\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Z})$ y $Id\in Ext[\mathcal{X}\otimes(\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Z}),\mathcal{X}\otimes(\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Z})]$, obtenemos un funtor $\alpha_{\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}}:(\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y})\otimes\mathcal{Z}\to\mathcal{X}\otimes(\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Z})$ definido como

$$\alpha_{\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}}((\langle(X_{l_k},Y_{l_k})\rangle_{l_k\in L_k},Z_k))_{k\in K})=\langle(X_{l_k},\langle(Y_{l_k},Z_k)\rangle_{*\in\{*\}})\rangle_{l_k\in\coprod_{k\in K}L_k}$$

Con esto, obtenemos

$$\alpha_{\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}}\circ\alpha^{-1}_{\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}}(\langle(X_k,\langle(Y_{l_k},Z_{l_k})\rangle_{l_k\in L_k})\rangle_{k\in K})=\langle(X_k,(\langle(Y_{l_k},Z_{l_k})\rangle_{*\in\{*\}})\rangle_{l_k\in\coprod_{k\in K}L_k}$$

Utilizando que $\coprod_{k\in K}L_k=\coprod_{k\in K}1_k\times L_k\langle(X_k,(\langle(Y_{l_k},Z_{l_k})\rangle_{*\in\{*\}})\rangle_{l_k\in\coprod_{k\in K}L_k}$, construimos el morfismo

$$(\pi_K,\langle(Id_{X_k},Id_{\langle(Y_{l_k},Z_{l_k})\rangle_{*\in\{*\}}})\rangle_{(*_k,l_k)\in\coprod_{k\in K}1_k\times L_k}:\langle(X_k,(\langle(Y_{l_k},Z_{l_k})\rangle_{*\in\{*\}})\rangle_{l_k\in\coprod_{k\in K}1_k\times L_k}\to$$

$$\langle(X_k,\langle(Y_{l_k},Z_{l_k})\rangle_{l_k\in L_k})\rangle_{k\in K}$$

con π_K la proyeccón en el *k-ésimo* sumando. Además, para cada $k\in K$ $\sum_{*_k}X_k=X_k$ y $\sum_{l_k\in L_k}\langle(Y_{l_k},Z_{l_k})\rangle_{*\in\{*\}}=\langle(Y_{l_k},Z_{l_k})\rangle_{l_k\in L_k}$; con lo cual, el morfismo definido es un denominador primitivo y por lo tanto invertible. La naturalidad de este morfismo no se demostrará aquí.

La simetría es consecuencia inmediata de que $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\cong\mathcal{Y}\times\mathcal{X}$, es decir $\gamma_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}:\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}\to\mathcal{Y}\otimes\mathcal{X}$ está definida en un objeto como $\gamma_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(\langle(X_k,Y_k)\rangle_{k\in K})=\langle(Y_k,X_k)\rangle_{k\in K}$, y en morfismos de la forma natural.

4.2.1 Axiomas de coherencia

La demostración de los axiomas de coherencia se harán conforme a los diagramas que vienen en el apéndice.

El diagrama (A.1), se observa en el diagrama (4.16)

$$\begin{tikzcd}
 & \langle((\langle(W_{j_{k_l}},X_{j_{k_l}}))\rangle_{k_{j_l}\in K_{j_l}},\langle(Y_{j_l},Z_l)\rangle_{*\in\{*\}})\rangle_{j_l}\in\coprod_{l\in L}J_l \arrow[dr, "\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{X},\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Z}}"] & \\
\langle((\langle(\langle(W_{k_{j_l}},X_{k_{j_l}}))\rangle_{k_{j_l}\in K_{j_l}},Y_{j_l}))\rangle_{j_l\in J_l},Z_l))\rangle_{l\in L} \arrow[ur, "\alpha_{\mathcal{W}\otimes\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}}"] \arrow[dd, "\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{X},\mathcal{Y}}\otimes Id_{\mathcal{Z}}"'] & & \langle(W_{k_{j_l}},\langle(X_{j_{k_l}},\langle(Y_{j_l},Z_l)\rangle_{*\in\{*\}})\rangle_{*\in\{*\}})\rangle_{k_{j_l}\in\coprod_{\coprod_{j_l\in J_l}}K_{j_l}} \\
 & & \langle(W_{k_{j_l}},\langle(\langle(\langle(X_{k_{j_l}},Y_{j_l}\rangle_{*\in\{*\}},Z_l\rangle_{*\in\{*\}}\rangle_{k_{j_l}\in\coprod_{l\in L}(\coprod_{j_l\in J_l}\in K_{j_l})} \arrow[u, "\cong"] \\
\langle((\langle(W_{k_{j_l}},\langle(X_{j_{k_l}},Y_{j_l})\rangle_{*\in\{*\}}\rangle_{k_{j_l}\in\coprod_{j_l\in J_l}K_{j_l}},Z_l))\rangle_{l\in L} \arrow[rr, "\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y},\mathcal{Z}}"] & & \langle((\langle(W_{k_{j_l}},(\langle(X_{k_{j_l}},Y_{j_l})\rangle_*,Z_l))\rangle_{*\in\{*\}})\rangle_{k_{j_l}}\coprod_{l\in L}(\coprod_{j_l\in J_l}K_{j_l}) \arrow[u, "Id_{\mathcal{W}}\otimes\alpha_{\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}}"']
\end{tikzcd} \tag{4.16}$$

donde el isomorfismo dado está determinado por el isomorfismo entre los subíndices, en los objetos son familias de identidades, con lo cual es isomorfismo natural.

El diagrama (A.2), se observa en el diagrama (4.17)

$$\begin{tikzcd}
\langle(\langle\langle(X_{l_k}, J_{l_k})\rangle_{l_k} \in L_k, Y_k)\rangle_{k\in K} \arrow[rrr, "\alpha_{X,I,Y}"'] \arrow[dr, "\varrho\otimes Id"'] & & & \langle(X_{l_k}, \langle(J_{l_k}, Y_k)\rangle_{*\in\{*\}})\rangle_{l_k\in\coprod_{k\in K} L_k} \arrow[dl, "Id\otimes\lambda"] \\
& \langle(\sum_{l_k\in L_k}\sum_{j_{l_k}\in J_{l_k}} X_{l_k}, Y_k)\rangle_{k\in K} \arrow[r, "\cong"] & \langle(X_{l_k}, \sum_{j_{l_k}\in J_{l_k}} X_{l_k})\rangle_{l_k\in\coprod_{k\in K} L_k} &
\end{tikzcd} \tag{4.17}$$

Con el isomorfismo construido de la siguiente manera. Consideremos lo siguientes morfismos en $Fam(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

1. $\pi = (\pi_K, \langle(i_{l_k}, Id_{Y_k}\rangle_{l_k\in\coprod_{k\in K} L_k\times 1_k}) : \langle(\sum_{j_{l_k}\in J_{l_k}} X_{l_k}, Y_k)\rangle_{\coprod_{k\in K} L_k\times 1_k} \to$ $\langle(\sum_{l_k\in L_k}\sum_{j_{l_k}\in J_{l_k}} X_{l_k}, Y_k)\rangle_{k\in K}$ con π_K la proyección en el *k-ésimo* sumando.

2. $\sigma = (\sigma_{\coprod_{k\in K} L_k}, \langle(i_{j_{l_k}}, Id_{Y_k})\rangle_{\coprod_{l_k\in\coprod_{k\in K} L_k} J_{l_k}}) : \langle(X_{l_k}, Y_k)\rangle_{j_{l_k}\in K'} \to$ $\langle(\sum_{j_{l_k}\in J_{l_k}} X_{l_k}, Y_k)\rangle_{\coprod_{k\in K} L_k}$ con $K' = \coprod_{l_k\in\coprod_{k\in K} L_k} J_{l_k}$ y $\sigma_{\coprod_{k\in K} L_k}$ la proyección en el l_k-*ésimo* sumando.

3. $\tau = (\tau_{\coprod_{k\in K} L_k}, \langle(I_{X_{l_k}}, i_{j_{l_k}}\rangle_{(*_{l_k}, j_{l_k})\in K''} : \langle(X_{l_k}, Y_k)\rangle_{(*_{l_k}, j_{l_k})\in K''} \to$ $\langle(X_{l_k}, \sum_{l_k\in L_k} Y_k)\rangle_{l_k\in\coprod_{k\in K} L_k}$ con $K'' = \coprod_{l_k\in\coprod_{k\in K} L_k} 1_{l_k}\times J_{l_k}$ y $\tau_{\coprod_{\coprod_{k\in K} L_k}}$ es la proyección en el j_{l_k}-*ésimo sumando.*

Todos estos morfismos son denominadores primitivos, con lo cual son invertibles en $\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}$. Además, $K' = K''$, con lo cual obtenemos

$$\langle(X_{l_k}, Y_k)\rangle_{j_{l_k}\in K'} = \langle(X_{l_k}, Y_k)\rangle_{(*_{l_k}, j_{l_k})\in K''}$$

Luego, el isomorfismo dado es $(\pi\circ\theta)/\tau$.

Los diagramas (A.4) claramente conmutan por la definición de la simetría y del neutro.

Ahora, observando el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\langle(X_k, \langle(Y_{l_k}, Z_{l_k})\rangle_{l_k} \in L_k)\rangle_{k\in K} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "Id\otimes\gamma"'] & \langle(\langle\langle(X_k, Y_{l_k})\rangle_{*\in\{*\}}, Z_{L_k})\rangle_{l_k\in\coprod_{k\in K} L_k} \arrow[r, "\gamma"] & \langle(Z_{l_k}, \langle(X_k, Y_{l_k})\rangle_{*\in\{*\}})\rangle_{l_k} \in \coprod_{k\in K} L_k \arrow[d, "\alpha"'] \\
\langle(X_k, \langle(Z_{l_k}, Y_{l_k})\rangle_{l_k\in L_k})\rangle_{k\in K} \arrow[r, "\alpha"'] & \langle(\langle\langle(X_k, Z_{l_k})\rangle_{*\in\{*\}}, Y_{l_k})\rangle_{l_k\in\coprod_{k\in K} L_k} \arrow[r, "\gamma\otimes Id"'] & \langle(\langle\langle(Z_{l_k}, X_k)\rangle_{*\in\{*\}}, Y_{l_k})\rangle_{l_k\in\coprod_{k\in K} L_k}
\end{tikzcd} \tag{4.18}$$

obtenemos que el diagrama (A.5) conmuta; de hecho, es una igualdad.

$\therefore$ $\langle Ext, \otimes, Set_f\rangle$ es una categoría monoidal cerrada.

Apéndice A

La parte de categorías monoidales se puede ver en [8], [12] y [13].

A.1 Categorías monoidales

Las categorías monoidales son una noción más general de un monoide, mejor dicho, es una categoría $\mathcal{A}$ con un bifuntor $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ que es asociativo bajo isomorfismo natural y con un objeto I que actúa como neutro por izquierda y por derecha bajo isomorfismo natural.

El producto tensorial de R-módulos, de espacios vectoriales, grupos abelianos, etc; son un ejemplo de estas categorías, de ahí la motivación de la definición de categorías monoidales. A continuación veremos estas categorías y sus propiedades.

Definición y ejemplos

Definición A.1 ***Categoría monoidal****:*

Una categoría monoidal $\langle \mathcal{X}, \otimes, I\rangle$*, es una categoría* $\mathcal{X}$ *con un bifuntor* $\otimes : \mathcal{X}\times\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$*, un objeto* $I \in \mathcal{X}$ *e isomorfismos naturales* $\alpha_{XYZ} : (X \otimes Y) \otimes Z \longrightarrow X \otimes (Y \otimes Z)$*,* $\lambda_X : I \otimes X \longrightarrow X$*,* $\varrho_X : X \otimes I \longrightarrow X$*, sujetos a los dos axiomas de coherencia expresados en los siguientes diagramas conmutativos:*

$$\begin{tikzcd}
 & & (W\otimes X)\otimes(Y\otimes Z) \arrow[drr, "\alpha_{W,X,Y\otimes Z}"] & & \\
((W\otimes X)\otimes Y)\otimes Z \arrow[urr, "\alpha_{W\otimes X,Y,Z}"] \arrow[dr, "\alpha_{W,X,Y}\otimes Id_Z"'] & & & & W\otimes(X\otimes(Y\otimes Z)) \\
 & (W\otimes(X\otimes Y))\otimes Z \arrow[rr, "\alpha_{W,X\otimes Y,Z}"] & & W\otimes((X\otimes Y)\otimes Z) \arrow[ur, "Id_W\otimes\alpha_{X,Y,Z}"'] &
\end{tikzcd} \tag{A.1}$$

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes I)\otimes Y \arrow[rr, "\alpha_{X,I,Y}"'] \arrow[dr, "\varrho\otimes Id"'] & & X\otimes(I\otimes Y) \arrow[dl, "Id\otimes\lambda"] \\
 & X\otimes Y &
\end{tikzcd} \tag{A.2}$$

De estas tres condiciones se sigue que cualquier diagrama de este tipo (es decir, diagramas donde se utilizan instancias de α, λ, ϱ y $\otimes$) conmuta, este es el teorema de coherencia de Mac Lane y la demostración se puede ver en [12]. Ejemplos de estas categorías son:

1. Dado un anillo conmutativo R, la categoría de $R-$*módulos*, su producto tensorial y R como el neutro.

2. La categoría *Ab* de grupos abelianos, el producto tensorial y $\mathbb{Z}$ como el neutro.

3. La categoría $Vect_K$ de espacios vectoriales sobre el campo K, su producto tensorial y K como el neutro.

4. Cualquier categoría con productos finitos es monoidal, con el producto como $\otimes$ y neutro el objeto final. Ejemplos de estas son Cat, Top, Con, Ord; la categoría de categorías pequeñas, espacios topológicos, conjuntos finitos y conjuntos parcialmente ordenados respectivamente.

5. Cualquier categoría con coproductos finitos es monoidal, con el coproducto como $\otimes$ y neutro el objeto inicial.

A.1.1 Categoría monoidal estricta

Definición A.2 ***Categoría monoidal estricta***:
Se dice que una categoría monoidal $\mathcal{X}$ es estricta si los isomorfismos naturales α, λ, ϱ son identidades.

A.1.2 Categoría monoidal simétrica

Definición A.3 ***Categoría monoidal simétrica***:
Se dice que una categoría monoidal $\mathcal{X}$ es simétrica si existe un ismorfismo

$$\gamma_{X,Y} : X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X \tag{A.3}$$

natural en $X, Y \in \mathcal{X}$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} X \otimes Y \arrow[rr, "\gamma_{X,Y}"] \arrow[dr, "Id_{X\otimes Y}"'] & & Y \otimes X \arrow[dl, "\gamma_{Y,X}"] \\ & X \otimes Y & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \otimes I \arrow[rr, "\gamma_{X,I}"] \arrow[dr, "\lambda_X"'] & & I \otimes X \arrow[dl, "\varrho_X"] \\ & X & \end{tikzcd} \tag{A.4}$$

$$\begin{tikzcd} X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "Id\otimes\gamma"'] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "\gamma"] & Z \otimes (X \otimes Y) \arrow[d, "\alpha"] \\ X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[r, "\alpha"'] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[r, "\gamma\otimes Id"'] & (Z \otimes X) \otimes Y \end{tikzcd} \tag{A.5}$$

Ejemplos de estas categorías son:

1. Cualquier categoría con productos o coproductos finitos es automáticamente simétrica, definiendo $A \otimes B = A \times B$ ó $A \otimes B = A + B$; y $\gamma : X \times Y \cong Y \times X$ ó $X + Y \cong Y + X$ respectivamente, el isomorfismo canónico existente entre estos.

2. El producto tensorial en $R-mod, Vect_K$ y *Ab*, esto si R es un anillo conmutativo..

3. La categoría Top_* de espacios topológicos basados, su producto smash $\wedge$ como $\otimes$ y la 0-esfera como I. Véase [14] y [19].

Ejemplos de categorías monoidales no simétricas son la categoría de bimódulos sobre un anillo R no conmutativo, con $\otimes_R$ como $\otimes$ y R la identidad; y la categoría de endofuntores de una categoría pequeña, con la composición como $\otimes$ e $I = Id$ el funtor identidad. En este ejemplo α, λ, ϱ son identidades, por lo que es estricta y no es simétrica.

A.1.3 Categoría monoidal cerrada

Las categorías monoidales cerradas son una generalización de la categoría monoidal $\langle Con, \times, 1\rangle$. Dado $A \in Con$, si consideramos el funtor $\_ \times A$, es bien conocido el isomorfismo

$$Hom(B \times A, C) \cong Hom(B, C^A)$$

Además $(\_)^A$ es un funtor con lo cual deducimos que $(\_)^A$ es un adjunto izquierdo de $\_ \times A$; de ahí la motivación de la siguiente definición.

Definición A.4 ***Categoría monoidal cerrada:***
Se dice que una categoría monoidal $\mathcal{X}$ es cerrada si para cada $Y \in \mathcal{X}$, el funtor $\_ \otimes Y : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ tiene adjunto derecho $(\ \ )^Y : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$.

Ejemplos de estas categorías son las siguientes:

1. Cualquier categoría cartesianamente cerrada es una categoría monoidal cerrada, como lo es $\langle Con, \times, 1\rangle$. Para ver más de categorías cartesianamente cerradas, se puede consultar [13].

2. La categoría monoidal $\langle Vect_K, \otimes, K\rangle$, el funtor $\_ \otimes V$ tiene como adjunto izquierdo al $Hom(V, \_\ )$.

3. La categoría monoidal $\langle CGHaus_*, \wedge, 0 - esfera\rangle$, la categoría monoidal de espacios topológicos compactos Hausdorff basados. El funtor $\_ \wedge Y_{y_0}$, tiene como adjunto izquierdo a $Hom(Y_{y_0}, \_\ )_*$, este es un espacio topológico basado, pues si tenemos un espacio topológico basado Z_{z_0}, entonces el $Hom(Y_{y_0}, Z_{z_0})_{f_{z_0}}$ es un espacio topológico basado, con la topología compacto-abierta y punto base $f_{z_0}(y) = z_0\ \forall y \in Y$, puede consultar [14].

Bibliografía

[1] Michael Barr y Charles Welles; Toposes, triples and theories. Springer, Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 12, 2005, pp. 1-288.

[2] Francis Borceuax y Dominique Bourn; Mal'cev, protomodular, homological and semi-abelian categories. Kluwer academic publishers, 2004.

[3] Aurelio Carboni, Stephen Lack and R.F.C. Walters; Introduction to extensive and distributive categories. Journal of Pure and Applied Algebra Vol. 84, 2da edición, 3 Febrero de 1993, pp. 145-158.

[4] M. Content, F. Lemay y P. Leroux; Catégories de Mobius fonctorialités: un cadre general pour l'inversion de Mobius. Journal of Combinatorial Theory, Serie A, Vol. 28, 2da edición, Marzo 1980, pp. 169-190.

[5] Friedberg, Insel y Spence; Linear Algebra, 4ta edición, 1940.

[6] Robbie Gates; On extensive and distributive Categories. Tesis de doctorado. Universidad de Sydney. Sydney, Australia, 1997.

[7] Leonard Gillman y Mejer Jerison; Rings of continuos functions. Springer, 1960.

[8] G. M. Kelly; Basic concepts of enriched category theory. Reprints in Theory and Applications of categories. No. 10, 2005.

[9] William Lawvere y Robert Rosebrugh; Sets for mathematics. Cambridge University Press, 2003.

[10] William Lawvere y Matías Menni; The Hopf algebra of Möbius intervals; Theory and Applications of Categories, Vol. 24, No. 10, 2010, pp. 221-265.

[11] Qing Liu; Algebraic Geometry and arithmetic curves. Oxford University Press, 2006.

[12] Saunders Mac Lane; Categories for the working mathematician. Springer, segunda edición, 1998.

[13] Jaap van Osten; Basic category theory. Brics lecture series LS-95-1 ISSN 1395-2048, 1995.

[14] Carlos Prieto y Marcelo Aguilar; Algebraic Topology from a homotopical viewpoint. Springer, primera edición, 2011.

[15] Gian-Carlo Rota; On the foundations of Combinatorial Theory I. Theory of Mobius functions.Z.Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 2 (1964), 340-368.

[16] Joseph J. Rotman; An introduction to theory of groups. Springer, cuarta edición, 1994.

[17] Horst Schubert; Categories. Springer, 1972.

[18] Stephen Schanuel; Objective Number Theory. Lectures by Stephen Schanuel, Halifax, 1995.

[19] Robert M. Switzer; Algebraic Topology-Homology and homotopy. Springer, 2000.