UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

CONJUNTOS INDEPENDIENTES Y ABSORBENTES POR TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTORA EN CIENCIAS

P R E S E N T A

GUADALUPE GAYTÁN GÓMEZ

DIRECTORA DE LA TESIS: DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ

MÉXICO, D.F. MAYO 2011

Índice general

Introducción

Una **digráfica** D es una pareja $(V(D), F(D))$ tal que $V(D)$ es un conjunto no vacío de elementos llamados **vértices** y $F(D)$ es un conjunto de parejas ordenadas de vértices distintos llamadas **flechas**. Un **núcleo** N en una digráfica D es un conjunto de vértices de D tal que entre dos de ellos no hay flechas y para todo $v \in V(D) \setminus N$ existe una flecha hacia algún vértice de N. Una digráfica es **núcleo perfecta** si toda subdigráfica inducida tiene núcleo. El concepto de núcleo fue introducido por Von Neumann y Morgenstern en [27] en el contexto de la Teoría de Juegos y en un principio fue llamado "solución de un juego". Posteriormente C. Berge notó que el mismo concepto resultaba útil en muchos otros contextos y lo llamó "núcleo de una digráfica". Debido a la gran cantidad de aplicaciones es que se empezó a estudiar la existencia de núcleos en digráficas, principalmente finitas, entre los resultados más destacados se encuentran los realizados por Richardson [28], [29]; Duchet y Meyniel [4]; Duchet [2], [3]; H. Galeana-Sánchez [7]; H. Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara [8], [9].

Cabe observar que no todas las digráficas tienen núcleo, por ejemplo los ciclos dirigidos de longitud impar no tienen núcleo. El problema de decidir si una digráfica plana tiene núcleo es NP-completo, como demostró V. Chvátal en 1980. En 1981 A. Fraenkel probó en [5] que el problema de decidir si una digráfica plana tiene núcleo permanece siendo NP-completo aún cuando se pida $\delta_D(x) \leq 3$, $\delta_D^+(x) \leq 2$ y $\delta_D^-(x) \leq 2$ para cada vértice x de D.

Si una digráfica D tiene todas sus flechas coloreadas con m colores diremos que D es una digráfica m**-coloreada**. Una trayectoria dirigida (o un ciclo dirigido) monocromática en la digráfica D es una trayectoria dirigida (o un ciclo dirigido) tal que todas sus flechas están coloreadas del mismo color. Un ciclo dirigido en D es llamado casimonocromático si con a lo más una excepción, todas sus flechas están coloreadas del mismo color. Un conjunto N de vértices de una digráfica m-coloreada es un **núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas** si entre los vértices del conjunto no existen trayectorias dirigidas monocromáticas y desde cualquier $v \in V(D) \setminus N$ existe una trayectoria dirigida monocromática hacia algún vértice de N. Nótese que el concepto de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas es una generalización del concepto de núcleo ya que si a cualquier digráfica le asignamos un color distinto a cada una de sus flechas, entonces un conjunto de vértices es núcleo de la digráfica si y sólo si es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Cabe mencionar que aunque el concepto de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas es una generalización del de núcleo existe una estrecha relación entre ellos, dada por la cerradura transitiva de una digráfica m-coloreada D. La **cerradura transitiva** de una digráfica D m-coloreada, denotada por $\mathfrak{C}(D)$ es la digráfica tal que $V(\mathfrak{C}(D)) = V(D)$ y $F(\mathfrak{C}(D)) = F(D) \cup \{(u, v)$ con color i | existe una uv-trayectoria dirigida monocromática de color i en $D\}$. Se puede probar que para cualquier color i la subdigráfica de $\mathfrak{C}(D)$ inducida por todas las flechas de color i es una digráfica transitiva. También, se puede probar que D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas si y sólo si $\mathfrak{C}(D)$ tiene núcleo.

En [26] Sands, Sauer y Woodrow demuestran que una digráfica 2-coloreada sin trayectorias dirigidas monocromáticas infinitas exteriores tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. En este mismo artículo se prueba, en particular, que todo torneo 2-coloreado T tiene un vértice v tal que desde cualquier otro vértice $u \in V(T)$ existe una trayectoria dirigida monocromática hacia v. También, plantean el siguiente problema: Sea T un torneo m-coloreado tal que no tiene ciclos dirigidos de longitud 3, 3-coloreados. ¿Debe T tener un vértice que satisfaga lo anterior?

Shen Minggang en [25] prueba que si en el problema anterior se pide además que no tenga subtorneos transitivos de orden 3, $3-$coloreados, entonces existe tal vértice. También, muestra que esto es lo mejor posible para $m \geq 5$. De hecho, prueba que para $m \geq 5$ existe un torneo $m-$coloreado T tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 es casimonocromático y T no tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. También para cada $m \geq 3$ existe un torneo $m-$coloreado T' tal que cada torneo transitivo de orden 3 es casimonocromático y T' no tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

En [22] H. Galeana-Sánchez y R. Rojas-Monroy demuestran que el resultado planteado por Sands, Sauer y Woodrow no es válido para $m = 4$. El caso $m = 3$ (si T es un torneo $3-$coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 es casimonocromático, entonces T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas) continúa abierto.

Es importante hacer notar que la forma en que hemos redactado estos resultados, haciendo uso de la definición de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, no es la forma original en la que fueron presentados en las referencias correspondientes. El concepto de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas es una generalización del concepto de núcleo, y fue introducido por H. Galeana-Sánchez más tarde en [10], en dicho trabajo se establecen condiciones suficientes para la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en torneos m-coloreados. Algunas de dichas condiciones son las siguientes:

i. Todo ciclo dirigido de longitud 3 y 4 contenido en T es un ciclo casimonocromático. Prueba además que tal condición no implica ni es implicada por la propuesta por Shen Minggang.

ii. Todo ciclo dirigido de longitud 3 contenido en T es un ciclo monocromático.

En [11] H. Galeana-Sánchez demuestra que la digráfica D $m-$coloreada obtenida de la eliminación de una única flecha (u, v) de algún torneo T $m-$coloreado (es decir, $D \cong T - (u, v)$) tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, si cada ciclo dirigido contenido en D de longitud a lo más 4 es casimonocromático.

Más tarde con respecto a las mismas digráficas, en [16] H. Galeana-Sánchez y J.J. García-Ruvalcaba prueban que si D no contiene C_3 ni T_3 $3-$coloreados, entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. C_3 es un ciclo dirigido de longitud 3 y T_3 es un subtorneo transitivo de orden 3.

En [13] se prueba que para un torneo 3-coloreado T tal que todo C_3 es casimonocromático y para cada $v \in V(T)$ se tiene que $\mid \xi(v) \mid \leq 2$, entonces $\mathfrak{C}(D)$ es núcleo perfecta y por lo tanto, T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. $\xi(v)$ denota el conjunto de colores asignados a las flechas que tienen a v como extremo final.

En [24] H. Galeana-Sanchez y R. Rojas Monroy prueban una vasta serie de resultados, como se detallan a continuación:

i. Demuestran que si D es una digráfica casitransitiva m-coloreada tal que todo C_3 es monocromático, entonces $\mathfrak{C}(D)$ es núcleo perfecta y en consecuencia D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

ii. Considerando T un torneo $m-$coloreado tal que todo ciclo dirigido de longitud 3 es casimonocromático, muestran que si $m = 4$, entonces no necesariamente T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas (lo cual es un contraejemplo al hasta entonces problema abierto planteado en [26]). Para $m = 3$, demuestran que si en T para cada vértice el número de colores que aparecen en las flechas que inciden en él son a lo más 2, entonces T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

iii. Prueban que si D es un torneo bipartito donde todo ciclo dirigido de longitud 4 es monocromático, entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

iv. Prueban la existencia de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en torneos bipartitos que cumplen ciertas condiciones de coloración en los ciclos dirigidos de longitud 4 y 6, además también piden condiciones similares para ciertos subtorneos bipartitos de orden 5 llamados torneos cíclicamente 4-partitos.

v. Justifican que si la digráfica $m-$coloreada D no tiene trayectorias dirigidas monocromáticas infinitas exteriores, entonces la digráfica subdivisión, $S(D)$, tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

En [23] Hahn, Ille y Woodrow demuestran que si para alguna $s > 3$, todo ciclo de longitud s contenido en T es casimonocromático y todo ciclo contenido en T de longitud $l < s$ es a lo más $2-$coloreado, entonces T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Estudiando los resultados que se tienen acerca de digráficas que satisfacen tener núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas hemos podido darnos cuenta que las condiciones se basan en pedir que ciertas subdigráficas sean monocromáticas o casimonocromáticas.

Dada la importancia de la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas, es que en el presente trabajo buscamos condiciones suficientes para que algunas familias de digráficas finitas tengan núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

En el capítulo 1 presentamos los conceptos y resultados básicos en digráficas. Conceptos tales como núcleos en digráficas y núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en digráficas $m-$coloreadas.

En el capítulo 2 probamos que una digráfica finita $m-$coloreada D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas si existe una partición de la digráfica D en dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 tales que:

i. $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, colores$(D_1) \cap$ colores$(D_2) = \emptyset$;

ii. cada ciclo dirigido de D contenido en D_i es monocromático para $i \in \{1, 2\}$;

iii. D no contiene (D_1, D, D_2) subdivisiones de C_3 $3-$coloreadas y

iv. si (u, v, w, x) es una (D_1, D, D_2) subdivisión de P_3 $3-$coloreada, entonces existe una trayectoria dirigida monocromática entre u y x en D.

El capítulo 3 esta dividido en dos secciones: En la primera sección damos condiciones suficientes para que las digráficas transitivas en cada cambio de color tengan núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Decimos que una digráfica D, m-coloreada es **transitiva en cada cambio de color** si $(u, v) \in F(D)$ de color a y $(v, w) \in F(D)$ de color b con $u \neq w$ y $a \neq b$ implica que $(u, w) \in F(D)$ de cualquier color. En la segunda sección también damos condiciones suficientes para que las digráficas casitransitivas en cada cambio de color tengan núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Decimos que una digráfica D, m-coloreada es **casitransitiva en cada cambio de color** si $(u, v) \in F(D)$ de color a y $(v, w) \in F(D)$ de color b con $u \neq w$ y $a \neq b$ implica que $(u, w) \in F(D)$ ó $(w, u) \in F(D)$ de cualquier color.

Finalmente, en el capítulo 4 con respecto a digráficas finitas $m-$coloreadas, usando una técnica similar a la empleada por Sands, Sauer y Woodrow probamos que una digráfica finita $m-$coloreada D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas si existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de la digráfica D tales que:

i. $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, colores$(D_1) \cap$ colores$(D_2) = \emptyset$;

ii. D_i no contiene $\gamma-$ciclos para $i \in \{1, 2\}$;

iii. si D contiene un $\widehat{C_3}(x_0, z, w, x_0)$, entonces existe una x_0w-trayectoria dirigida monocromática en D o existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D;

iv. si D contiene un $\widehat{P_3}(u, z, w, x_0)$, entonces al menos una de las siguientes trayectorias dirigidas monocromáticas se tiene: $uw-$trayectoria dirigida monocromática en D, $wu-$trayectoria dirigida monocromática en D, x_0u-trayectoria dirigida monocromática en D, ux_0-trayectoria dirigida monocromática en D, x_0w-trayectoria dirigida monocromática en D, $zu-$trayectoria dirigida monocromática en D, zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D, x_0z-trayectoria dirigida monocromática en D_1.

Observamos que el resultado mencionado arriba puede ser aplicado a todas aquellas digráficas que no contienen $\gamma-$ciclos. De esta forma, generalizaciones de muchos resultados previos son obtenidos como consecuencia directa de este último resultado.

Capítulo 1

Definiciones básicas

Este primer capítulo tiene como propósito presentar conceptos y resultados básicos en digráficas: conceptos tales como núcleos en digráficas y núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en digráficas $m-$coloreadas. No hemos incluido las demostraciones de los teoremas mencionados, pero puede consultarse [1].

1.1. Digráficas

Definición 1.1.1 *Una digráfica D consiste de un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices, al cual denotaremos por $V(D)$ y de un conjunto de pares ordenados de distintos vértices de D (posiblemente vacío) a cuyos elementos les llamaremos flechas y que denotaremos por $F(D)$.*

Diremos que el orden de D es la cardinalidad de $V(D)$ y el tamaño de D es la cardinalidad de $F(D)$.

Definición 1.1.2 *Sea D una digráfica; $u, v \in V(D)$. Si $f = (u, v) \in F(D)$ decimos que u y v son los extremos de f : u el extremo inicial de f y v el extremo final de f. También, decimos que f es incidente desde u e incidente hacia v. Además, decimos que u es adyacente hacia v y que v es adyacente desde u.*

Definición 1.1.3 *Sean D es una digráfica y $v \in V(D)$. El ingrado o grado interior de v, denotado por $\delta_D^-(v)$, es el número de vértices adyacentes hacia v.*

Definición 1.1.4 *Sean D es una digráfica y $v \in V(D)$. El exgrado o grado exterior de v, denotado por $\delta_D^+(v)$, es el número de vértices adyacentes desde v.*

Definición 1.1.5 *Si D es una digráfica y $v \in V(D)$. El grado de v, denotado por $\delta_D(v)$, se define como $\delta_D(v) = \delta_D^-(v) + \delta_D^+(v)$.*

Definición 1.1.6 *Sea D una digráfica, D' es una subdigráfica de D si $V(D') \subseteq V(D)$ y $F(D') \subseteq F(D)$, y la denotamos por $D' \subseteq D$.*

Definición 1.1.7 *Sea D una digráfica, D' es una subdigráfica propia de D si $V(D') \subsetneq V(D)$ ó $F(D') \subsetneq F(D)$ y la denotamos por $D' \subset D$.*

Definición 1.1.8 *Una subdigráfica D' de una digráfica D es una subdigráfica generadora de D si $V(D') = V(D)$.*

Definición 1.1.9 *Sea D una digráfica, si $B \subseteq F(D)$, definimos la subdigráfica de D inducida por B como la digráfica que tiene como conjunto de vértices a los extremos de las flechas en B y como conjunto de flechas a B. Denotamos por $D[B]$ a la subdigráfica de D inducida por B.*

Definición 1.1.10 *Sea D una digráfica, si $U \subseteq V(D)$, definimos la subdigráfica de D inducida por U como la digráfica que tiene a U como conjunto de vértices y como conjunto de flechas a todas las flechas de D que tienen ambos extremos en U. Denotamos por $D[U]$ a la subdigráfica de D inducida por U.*

Observación 1.1.1 *Generalmente nos referiremos a las subdigráficas inducidas por un conjunto de vértices simplemente como subdigráficas inducidas, en caso de que hagamos referencia a una subdigráfica inducida por un conjunto de flechas así lo especificaremos.*

Definición 1.1.11 *Sea D una digráfica y $f = (u, v) \in F(D)$, decimos que f es una flecha simétrica de D si $(v, u) \in F(D)$.*

Definición 1.1.12 *Sea D una digráfica y $f = (u, v) \in F(D)$, decimos que f es una flecha asimétrica de D si $(v, u) \notin F(D)$.*

Definición 1.1.13 *La parte asimétrica de una digráfica D, denotada por $Asim(D)$ es la subdigráfica generadora de D cuyo conjunto de flechas es el conjunto de flechas asimétricas de D.*

Definición 1.1.14 *La parte simétrica de una digráfica D, denotada por $Sim(D)$ es la subdigráfica generadora de D cuyo conjunto de flechas es el conjunto de flechas simétricas de D.*

Definición 1.1.15 *Una digráfica D es una digráfica asimétrica si cada flecha de D es una flecha asimétrica.*

Definición 1.1.16 *Una digráfica D es una digráfica simétrica si cada flecha de D es una flecha simétrica.*

Definición 1.1.17 *Una digráfica D es una digráfica semicompleta si entre cualesquiera dos vértices distintos de D existe al menos una flecha entre ellos. Y D es una digráfica completa si entre cualesquiera dos vértices distintos de D existe la flecha simétrica entre ellos.*

Definición 1.1.18 *Una digráfica D es una digráfica $r-$regular si para todo $v \in V(D)$, $\delta_D^-(v) = \delta_D^+(v) = r$.*

Definición 1.1.19 *Sea D una digráfica y $u, v \in V(D)$ no necesariamente distintos. Diremos que un $uv-$camino en D es una sucesión de vértices de la forma $(u = u_0, u_1, \ldots, u_n = v)$ tal que para toda $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, (u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ o bien $(u_{i+1}, u_i) \in F(D)$.*

Definición 1.1.20 *Sea D una digráfica, una trayectoria en la digráfica D es un camino $(u_1, u_2, ..., u_n)$ tal que $u_i \neq u_j$ si $i \neq j$.*

Definición 1.1.21 *Sea D una digráfica, un camino cerrado en la digráfica D es un camino $(u_1, u_2, ..., u_n)$ tal que $u_1 = u_n$.*

Definición 1.1.22 *Sea D una digráfica, un ciclo en la digráfica D es un camino cerrado $(u_1, u_2, ..., u_n, u_1)$ tal que $u_i \neq u_j$ si $i \neq j$. Denotamos por C_n al ciclo que consta de n vértices.*

Definición 1.1.23 *Sea D una digráfica, un camino dirigido en la digráfica D es un camino $(u_1, u_2, ..., u_n)$ tal que para cada $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ se tiene que $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$.*

Definición 1.1.24 *Sea D una digráfica, una trayectoria dirigida en la digráfica D es un camino dirigido que además es una trayectoria.*

Definición 1.1.25 *Sea D una digráfica, un camino dirigido cerrado en la digráfica D es un camino dirigido que además es un camino cerrado.*

Definición 1.1.26 *Sea D una digráfica, un ciclo dirigido en la digráfica D es un camino dirigido cerrado que además es un ciclo.*

Definición 1.1.27 *Sean D una digráfica y $W = (u_0, u_1, ..., u_n)$ un camino en D, decimos que n es la longitud de W y la denotamos por $\ell(C)$.*

Notación 1.1.1 *Sean $W = (u = u_0, u_1, \ldots, u_n = v)$ un camino en una digráfica D y $1 \leq i < j \leq n$. Al $u_i u_j-$camino $(u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j)$ contenido en W lo denotamos por (u_i, W, u_j).*

Definición 1.1.28 *Sea D una digráfica y sean $S_1, S_2 \subseteq V(D)$. Una S_1S_2-flecha de D es una flecha que incide desde un vértice de S_1 hacia algún vértice de S_2.*

Definición 1.1.29 *Sea D una digráfica, decimos que D es una digráfica bipartita si existe una bipartición $\{U, W\}$ de los vértices de D tal que cualquier flecha de D tiene un extremo en U y otro en W.*

Los siguientes teoremas son resultados básicos en Teoría de Digráficas que emplearemos en diversas ocasiones.

Teorema 1.1.1 *Sean D una digráfica y $u, v \in V(D)$. Todo $uv-$camino dirigido en D contiene una $uv-$trayectoria dirigida en D.*

Teorema 1.1.2 *Sea D una digráfica. Todo camino dirigido cerrado en D contiene un ciclo dirigido.*

Teorema 1.1.3 *Sea D una digráfica. Si D no tiene ciclos dirigidos, entonces tiene al menos un vértice de exgrado cero.*

Teorema 1.1.4 *Sea D una digráfica. Si para todo $v \in V(D)$ se cumple que $\delta_D^-(v) \geq 1$ (respectivamente $\delta_D^+(v) \geq 1$), entonces D contiene un ciclo dirigido.*

1.2. Núcleos en digráficas

La Teoría de Núcleos en Digráficas es importante ya que tiene muchas aplicaciones, algunas de ellas son en: Teoría de Juegos, Teoría de Decisiones, Teoría de Códigos, Complejidad Computacional, Lógica e Inteligencia Artificial, entre otras. Para aplicaciones ver [6], [27], [28], [29].

Definición 1.2.1 *Sea D una digráfica. Un subconjunto S de $V(D)$ será llamado independiente si para cualesquiera dos vértices distintos u, v de S no existe la $uv-$flecha ni la $vu-$flecha en D.*

Definición 1.2.2 *Sea D una digráfica. Un subconjunto S de $V(D)$ será llamado absorbente si para cada vértice v que no pertenece a S, existe una $vS-$flecha, es decir, v es adyacente hacia algún elemento de S.*

Definición 1.2.3 *Sea D una digráfica. Un subconjunto N de $V(D)$ será llamado un núcleo de D si es un conjunto independiente y absorbente de D.*

Definición 1.2.4 *Sea D una digráfica, D es una digráfica núcleo perfecta si toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo. Denotamos por NP a una digráfica núcleo perfecta.*

Definición 1.2.5 *Sea D una digráfica, D es una digráfica núcleo imperfecta crítica si D no tiene núcleo, pero toda subdigráfica inducida propia de D tiene núcleo. Denotamos por NIC a una digráfica núcleo imperfecta crítica.*

Observación 1.2.1 *Nótese que no todas las digráficas tienen núcleo, por ejemplo los ciclos dirigidos de longitud impar no tienen núcleo.*

El siguiente teorema es debido a Berge-Duchet y es uno de los resultados clásicos sobre la existencia de núcleos en digráficas y nos será de gran utilidad a lo largo de nuestro trabajo.

Teorema 1.2.1 (Berge-Duchet [2]) *Si D es una digráfica tal que cada ciclo dirigido posee al menos una flecha simétrica, entonces D es núcleo perfecta.*

Teorema 1.2.2 *Si D es una digráfica tal que cada ciclo dirigido impar posee al menos dos flechas simétricas, entonces D tiene núcleo.*

Definición 1.2.6 *Una digráfica es un torneo si entre cada par de vértices existe una y sólo una flecha.*

Definición 1.2.7 *Una digráfica D es un torneo bipartito si existe una bipartición $\{V_1, V_2\}$ de $V(D)$ tal que toda flecha de D tiene un extremo en V_1 y el otro en V_2, y entre cualquier vértice de V_1 y cualquier vértice de V_2 existe una y sólo una flecha.*

1.3. Núcleos por trayectorias monocromáticas

Una generalización del concepto de núcleo es el concepto de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas dado por H. Galeana-Sánchez en [10]. Para hablar de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas consideraremos digráficas en donde a cada flecha se le ha asignado un color.

Definición 1.3.1 *Sea D una digráfica. Diremos que D es una digráfica m-coloreada si las flechas de D son coloreadas con m colores.*

Definición 1.3.2 *Una digráfica D es monocromática si todas sus flechas están coloreadas con el mismo color, es casimonocromática si con a lo más una excepción, todas sus flechas tienen el mismo color, y es policromática si D es al menos $3-$coloreada.*

Definición 1.3.3 *Sea D una digráfica $m-$coloreada, una trayectoria dirigida monocromática en la digráfica D es una trayectoria dirigida tal que todas sus flechas están coloreadas del mismo color.*

Definición 1.3.4 *Sea D una digráfica m-coloreada. Un conjunto S de vértices de D será llamado independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas si para cualesquiera dos vértices distintos u, v de S no existe una trayectoria dirigida monocromática entre u y v en D.*

Definición 1.3.5 *Sea D una digráfica m-coloreada. Un conjunto S de vértices de D será llamado absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas si para cada vértice v que no pertenece a S, existe una trayectoria dirigida monocromática de v a un vértice de S.*

Definición 1.3.6 *Sea D una digráfica m-coloreada. Un conjunto N de vértices de D es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, si N es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas y absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas en D.*

Definición 1.3.7 *Sea D una digráfica, decimos que una sucesión de vértices, $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una trayectoria infinita exterior de una digráfica D si para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $(v_i, v_{i+1}) \in F(D)$ y para cualesquiera $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $i \neq j$ se tiene que $v_i \neq v_j$.*

Nótese que el concepto de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas es una generalización del concepto de núcleo ya que si a una digráfica D le asignamos un color distinto a cada una de sus flechas, entonces un conjunto de vértices de D es un núcleo de la digráfica D si y sólo si es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D.

Notemos que la definición de digráfica no permite que haya dos o más flechas con los mismos extremos y en la misma dirección. Las digráficas en las que esto ocurre se llaman multidigráficas y a dichas flechas se les llama flechas múltiples. En la presente tesis trabajaremos con digráficas.

Existe una relación muy importante entre el concepto de núcleo y núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, y está dada por el concepto de cerradura transitiva de una digráfica D, $m-$coloreada.

Definición 1.3.8 *Sea D una digráfica m-coloreada, la cerradura transitiva de D, denotada por $\mathfrak{C}(D)$, se define como la siguiente multidigráfica:*

$V(\mathfrak{C}(D)) = V(D)$ y

$F(\mathfrak{C}(D)) = F(D) \cup \{(u, v)$ con color i | existe una uv-trayectoria dirigida monocromática de color i en $D\}$.

A continuación enunciamos el teorema que muestra la relación entre núcleos y núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en una digráfica D, $m-$coloreada.

Teorema 1.3.1 *Sea D una digráfica m-coloreada, D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas si y sólo si $\mathfrak{C}(D)$ tiene núcleo. Más aún, el número de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas de D es igual al número de núcleos de $\mathfrak{C}(D)$.*

A lo largo de la presente tesis pondremos un triángulo ($\triangle$) para indicar que ha finalizado la demostración de una afirmación.

Capítulo 2

Ciclos monocromáticos y trayectorias monocromáticas en digráficas $m-$coloreadas

En este capítulo consideraremos digráficas finitas $m-$coloreadas. Sands, Sauer y Woodrow, demuestran en [26] que si D es una digráfica cuyas flechas son coloreadas con dos colores, tal que D no contiene trayectorias infinitas exteriores monocromáticas, entonces existe un conjunto independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas S de vértices de D tal que, para cada vértice x que no está en S, existe una trayectoria dirigida monocromática de x a un vértice de S.

Nótese que el teorema de Sands, Sauer y Woodrow puede escribirse en términos de núcleos de la siguiente manera: Si D es una digráfica cuyas flechas son coloreadas con dos colores, tal que D no contiene trayectorias infinitas exteriores monocromáticas, entonces la cerradura transitiva de D, $\mathfrak{C}(D)$ tiene núcleo. Más aún, $\mathfrak{C}(D)$ es núcleo perfecta.

Para el caso finito podemos reescribir el teorema de Sands, Sauer y Woodrow como sigue:

Teorema 2.0.2 *Sea D una digráfica. Si existen dos subdigráficas transitivas D_1 y D_2 de la digráfica D tales que: $D = D_1 \cup D_2$, $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$. Entonces D tiene núcleo.*

Con respecto a digráficas finitas $m-$coloreadas, usando una técnica similar a la empleada por Sands, Sauer y Woodrow demostraremos una generalización del Teorema 2.0.2. El resultado establece que D una digráfica finita $m-$coloreada tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas si existe una partición de la digráfica D en dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 tales que:

i. $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, colores$(D_1) \cap$ colores$(D_2) = \emptyset$ (colores(D) denota los colores usados en las flechas de D);

ii. cada ciclo dirigido de D contenido en D_i es monocromático para $i \in \{1, 2\}$;

iii. D no contiene (D_1, D, D_2) subdivisiones de C_3 3$-$coloreadas y

iv. si (u, v, w, x) es una (D_1, D, D_2) subdivisión de P_3 3$-$coloreada, entonces existe una trayectoria dirigida monocromática entre u y x en D.

Las condiciones suficientes sobre que cada ciclo sea monocromático en D_i para $i \in \{1, 2\}$ y no permitir (D_1, D, D_2) subdivisiones de C_3 3$-$coloreadas en D se basan en la conjetura de Sands, Sauer y Woodrow, mencionada en la introducción, la cual es la motivación de este primer resultado.

2.1. (D_1, D, D_2) subdivisiones

Iniciaremos con algunas definiciones imprescindibles para después abordar el problema de determinar condiciones suficientes para la existencia de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en digráficas finitas $m-$coloreadas.

Sea D una digráfica $m-$ coloreada tal que existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de la digráfica D, tales que: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$ y colores$(D_1) \cap$ colores$(D_2) = \emptyset$.

Definición 2.1.1 *Si* $C = (u_0, \ldots, u_k = v_0, \ldots, v_m = w_0, \ldots, w_n = u_0)$ *es un camino dirigido cerrado en* D*, decimos que* C *es una* (D_1, D, D_2) *subdivisión de* C_3*,* 3$-$*coloreada si:*

i. $T_1 = (u_0, \ldots, u_k)$ *es una trayectoria dirigida monocromática de color* a *y está contenida en* D_1*,*

ii. $T_2 = (v_0, \ldots, v_m)$ *es una trayectoria dirigida monocromática de color* b *y está contenida en* D*, y*

iii. $T_3 = (w_0, \ldots, w_n)$ *es una trayectoria dirigida monocromática de color* c *y está contenida en* D_2*,*

donde $a \neq b$*,* $b \neq c$ *y* $a \neq c$*. Véase la Figura 2.1.*

Definición 2.1.2 *Si* $P = (u_0, \ldots, u_k = v_0, \ldots, v_m = w_0, \ldots, w_n)$ *es un camino dirigido en* D*, decimos que* P *es una* (D_1, D, D_2) *subdivisión de* P_3*,* 3$-$*coloreada si:*

i. $T_1 = (u_0, \ldots, u_k)$ *es una trayectoria dirigida monocromática de color* a *y está contenida en* D_1*,*

ii. $T_2 = (v_0, \ldots, v_m)$ *es una trayectoria dirigida monocromática de color* b *y está contenida en* D*, y*

iii. $T_3 = (w_0, \ldots, w_n)$ *es una trayectoria dirigida monocromática de color* c *y está contenida en* D_2*,*

donde $a \neq b$*,* $b \neq c$ *y* $a \neq c$*. Véase la Figura 2.2.*

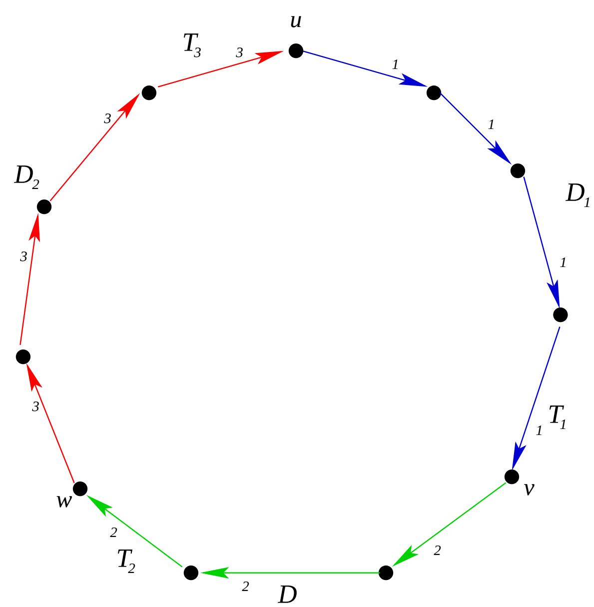

Figura 2.1: (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3, 3−coloreada.

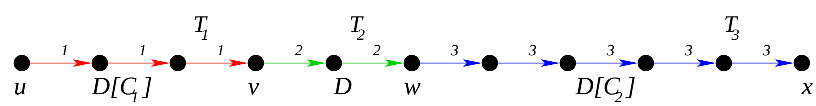

Figura 2.2: (D_1, D, D_2) subdivisión de P_3, 3−coloreada.

2.2. Ciclos monocromáticos y trayectorias monocromáticas

El siguiente teorema y los siguientes lemas tratan sobre digráficas m−coloreadas, tal que cada ciclo es monocromático. Estos resultados nos serán de gran utilidad para demostrar nuestro teorema principal (Teorema 2.3.2.)

Teorema 2.2.1 *Sea D una digráfica m−coloreada tal que todo ciclo dirigido en D es monocromático. Si $C = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ es una sucesión de $n \geq 2$ vértices dos a dos distintos tal que para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, T_i es alguna u_iu_{i+1}-trayectoria dirigida monocromática, entonces el conjunto de trayectorias $\{T_i \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ es monocromático, es decir las trayectorias T_i son dos a dos del mismo color (los índices de los vértices están tomados módulo n.)*

Demostración. Sea a_i el color de la trayectoria T_i, para $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Probaremos que $a_i = a_j$ para cualesquiera $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Procederemos por inducción sobre n ($n \geq 2$, el número de vértices en la sucesión C dos a dos distintos.)

Supongamos que $n = 2$. Si $a_0 \neq a_1$, entonces en D, $T_0 \cup T_1$ es un camino dirigido cerrado no monocromático y por el Teorema 1.1.2 contiene un ciclo dirigido, el cual es no monocromático (claramente el ciclo contiene flechas de T_0 y T_1 pues T_0 y T_1 por si solas no contienen ciclos), lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, $a_0 = a_1$. Ver Figura 2.3.

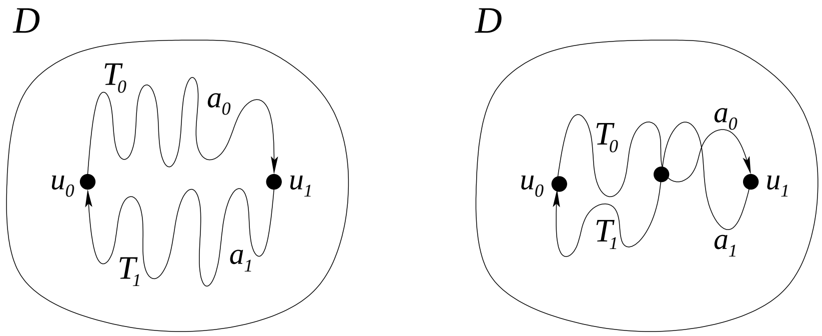

Figura 2.3: $T_0 \cup T_1$ es un camino dirigido cerrado no monocromático y por lo tanto, contiene un ciclo dirigido no monocromático.

Supongamos que el Teorema 2.2.1 es cierto para sucesiones C' como en las hipótesis y con a lo más $n-1$ vértices. Sea C una sucesión de n vértices que satisface las hipótesis del Teorema 2.2.1.
Analizaremos dos posibles casos:

Caso 1: Existen dos trayectorias consecutivas en C que tienen el mismo color.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_0 = a_1$. Entonces en D, $T_0 \cup T_1$ es un camino dirigido monocromático de u_0 a u_2 y por el Teorema 1.1.1 contiene una u_0u_2-trayectoria dirigida monocromática de color a_0, llamémosle T_0' a tal trayectoria de color a_0. Ver Figura 2.4.

Sea $C' = (u_0, u_2, u_3, \ldots, u_{n-1})$, C' es una sucesión de $n-1$ vértices dos a dos distintos que satisface las hipótesis del Teorema 2.2.1. Así, por hipótesis de inducción las trayectorias $T_0', T_2, T_3, \ldots, T_{n-1}$ son dos a dos del mismo color. Y como $a_0 = a_1$, entonces las trayectorias $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ son dos a dos del mismo color.

Caso 2: No existen dos trayectorias consecutivas en C que tengan el mismo color.

Afirmación 1. $(V(T_i) \setminus \{u_{i+1}\}) \cap V(T_{i+1}) = \emptyset$ para $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Si para alguna $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $(V(T_i) \setminus \{u_{i+1}\}) \cap V(T_{i+1}) \neq \emptyset$, sea v el último vértice, diferente de u_{i+1}, de T_i que está en T_{i+1}, entonces $(v, T_i, u_{i+1}) \cup (u_{i+1}, T_{i+1}, v)$ es un ciclo dirigido que no es monocromático, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, $(V(T_i) \setminus \{u_{i+1}\}) \cap V(T_{i+1}) = \emptyset$ para toda $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Ver Figura 2.5. $\triangle$

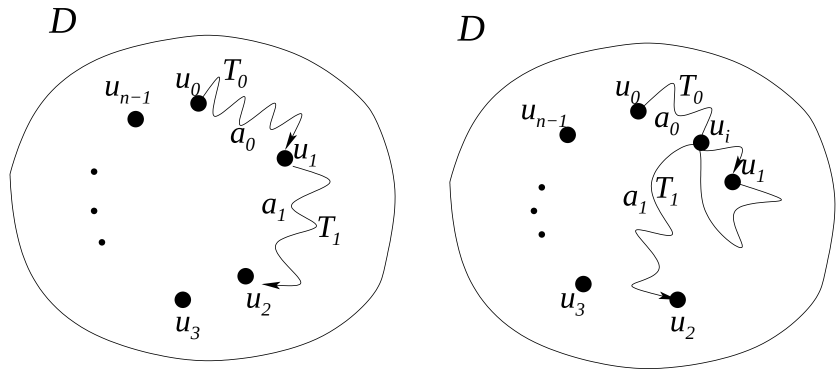

Figura 2.4: $T_0 \cup T_1$ es un camino dirigido monocromático de u_0 a u_2 y por lo tanto, contiene una u_0u_2-trayectoria dirigida monocromática de color a_0, T_0'.

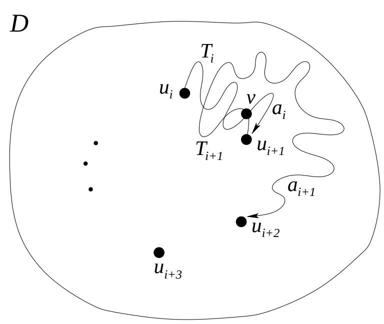

Figura 2.5: $(v, T_i, u_{i+1}) \cup (u_{i+1}, T_{i+1}, v)$ es un ciclo dirigido que no es monocromático.

Si $V(T_i) \cap V(T_j) = \emptyset$ para cualesquiera i, j tales que $j - i \geq 2$ $(mod\ n)$, entonces $\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i$ es un ciclo dirigido de D que no es monocromático, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, para alguna i y para alguna j tales que $j - i \geq 2$ $(mod\ n)$, $V(T_i) \cap V(T_j) \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i = 0$ y sea $j_0 = max\{j \mid V(T_0) \cap V(T_j) \neq \emptyset\}$; nótese que $2 \leq j_0 \leq n - 2$, de otro modo, j_0 sería 1 ó $n - 1$, lo cual contradiría la Afirmación 1. Sea $v \in V(T_0) \cap V(T_{j_0})$, entonces en D tenemos que $T_0' = (u_0, T_0, v)$ es una trayectoria dirigida monocromática de color a_0 y $T_{j_0}' = (v, T_{j_0}, u_{j_0+1})$ es una trayectoria dirigida monocromática de color a_{j_0}, ver Figura 2.6. Así, $C' = (u_0, v, u_{j_0+1}, u_{j_0+2}, \ldots, u_{n-1})$ es una sucesión de a lo más $n - 1$ vértices dos a dos distintos que satisface las hipótesis del Teorema 2.2.1, y por hipótesis de inducción las trayectorias $T_0', T_{j_0}', T_{j_0+1}, \ldots, T_{n-1}$ son dos a dos del mismo color, en particular T_{j_0+1} y T_{j_0+2} $(mod\ n)$ son dos trayectorias consecutivas del mismo color, lo cual contradice la suposición del caso 2.

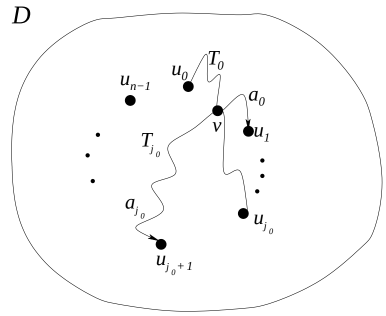

Figura 2.6: $T_0' = (u_0, T_0, v)$ es una trayectoria monocromática de color a_0 y $T_{j_0}' = (v, T_{j_0}, u_{j_0+1})$ es una trayectoria monocromática de color a_{j_0}.

De los casos 1 y 2 concluimos que para $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ las trayectorias T_i son dos a dos del mismo color. ■

Lema 2.2.2 *Sea D una digráfica $m-$coloreada tal que todo ciclo dirigido en D es monocromático. Entonces no existe una sucesión de vértices $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ en D tal que para toda $i \in \{0, 1, \ldots\}$ existe una $x_i x_{i+1}-$trayectoria dirigida monocromática en D y no existe ninguna $x_{i+1} x_i-$trayectoria dirigida monocromática en D.*

Demostración. Supongamos por contradicción que existe una sucesión de vértices $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ en D tal que para cada i existe una $x_i x_{i+1}-$trayectoria dirigida monocromática en D y no existe ninguna $x_{i+1} x_i-$trayectoria dirigida monocromática en D.

Ya que D es una digráfica finita existen $i < j$, $\{i, j\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $x_j = x_i$. Sea $j_0 = min\{j \mid x_j = x_i \text{ para alguna } i < j\}$, y sea $i_0 \in \{0, 1, \ldots, j_0 - 1\}$ tal que $x_{i_0} = x_{j_0}$ (nótese que i_0 es único por la definición de j_0.) Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i_0 = 0$ y $j_0 = n$. Así, $C = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ es una sucesión de n vértices dos a dos distintos tal que para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, existe una $x_i x_{i+1}-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D y no existe ninguna $x_{i+1} x_i-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D (los índices de los vértices están tomados *modulo* n.) Para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, sea T_i alguna $x_i x_{i+1}-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Se sigue del Teorema 2.2.1 que todas las trayectorias T_i son dos a dos del mismo color.

Así, $\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i$ es un camino dirigido cerrado monocromático y $\bigcup_{i=1}^{n-1} T_i$ es un $x_1 x_0-$camino dirigido monocromático contenido en D. Así, por el Teorema 1.1.1 existe una $x_1 x_0-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D, lo cual es una contradicción con la suposición de que no existe ninguna $x_{i+1} x_i-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D.

Concluimos que no existe una sucesión de vértices $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ en D tal que para toda $i \in \{0, 1, \ldots\}$ existe una $x_i x_{i+1}-$trayectoria dirigida monocromática en D y no existe ninguna $x_{i+1}x_i-$trayectoria dirigida monocromática en D. ■

Lema 2.2.3 *Sea D una digráfica $m-$coloreada tal que todo ciclo dirigido en D es monocromático. Existe $x_0 \in V(D)$ tal que para cada $z \in V(D) \setminus \{x_0\}$ si existe una x_0z-trayectoria dirigida monocromática contenida en D, entonces existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D.*

Demostración. Supongamos por contradicción que D es una digráfica como en las hipótesis del Lema 2.2.3 y que no existe un vértice x_0 que satisfaga la afirmación del Lema 2.2.3.

Sea $x_0 \in V(D)$, se sigue de nuestra suposición que existe $x_1 \in V(D) \setminus \{x_0\}$ tal que existe una x_0x_1-trayectoria dirigida monocromática contenida en D y no existe ninguna x_1x_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D. De nuevo, por nuestra suposición existe $x_2 \in V(D) \setminus \{x_1\}$ tal que existe una x_1x_2-trayectoria dirigida monocromática contenida en D y no existe ninguna x_2x_1-trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Nuevamente, existe $x_3 \in V(D) \setminus \{x_2\}$ tal que existe una x_2x_3-trayectoria dirigida monocromática contenida en D y no existe ninguna x_3x_2-trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Una vez elegidos de este modo $x_0, x_1, \ldots, x_n$; dada nuestra suposición podemos elegir $x_{n+1} \in V(D) \setminus \{x_n\}$ de tal forma que existe una $x_nx_{n+1}-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D y no existe ninguna $x_{n+1}x_n-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D. De este modo, obtenemos una sucesión de vértices $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ tal que para cada $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ existe una $x_ix_{i+1}-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D y no existe ninguna $x_{i+1}x_i-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Pero esto contradice el Lema 2.2.2.

Concluimos que existe $x_0 \in V(D)$ tal que para cada $z \in V(D) \setminus \{x_0\}$ si existe una x_0z-trayectoria dirigida monocromática contenida en D, entonces existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D. ■

A continuación definimos seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas *mod* D_2 y probamos una propiedad respecto a este concepto.

Sea D una digráfica $m-$coloreada tal que existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de la digráfica D tales que: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$ y colores$(D_1) \cap$ colores$(D_2) = \emptyset$.

Sea $S \subseteq V(D)$, diremos que S es seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas *mod* D_2 de D si:

i. S es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas (ver la Definición 1.3.4) y

ii. para cada $z \in V(D) \setminus S$, si existe una $Sz-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1, entonces existe una $zS-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Véase la Figura 2.7.

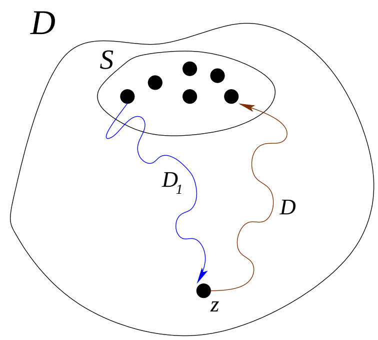

Figura 2.7: S es un seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas módulo D_2 de D.

Nótese que en la definición anterior D_1 y D_2 juegan un papel simétrico y por lo tanto, análogamente podemos definir seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas *mod* D_1 de D.

Lema 2.2.4 *Sea D una digráfica $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras de D, D_1 y D_2 tales que: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, colores$(D_1) \cap$ colores$(D_2) = \emptyset$ y en D_1 todo ciclo dirigido es monocromático. Entonces existe $x_0 \in V(D)$ tal que $\{x_0\}$ es un seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas mod D_2 de D.*

Demostración. Probaremos que existe $x_0 \in V(D)$ tal que para cada $z \in V(D) - \{x_0\}$ si existe una x_0z-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1, entonces existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D.

Ya que en D_1 todo ciclo dirigido es monocromático, se sigue del Lema 2.2.3 que existe $x_0 \in V(D)$ tal que para cada $z \in V(D) \setminus \{x_0\}$ si existe una x_0z-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1, entonces existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1. Por la definición de seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas *mod* D_2 de D se sigue que $\{x_0\}$ es un seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas *mod* D_2 de D. ■

Ahora a partir de los seminúcleos *mod* D_2 de una digráfica D construiremos a la digráfica $D_{\mathcal{S}}$ y probaremos una propiedad respecto a esta digráfica.

Sea D una digráfica $m-$coloreada tal que existen dos subdigráficas generadoras de D, D_1 y D_2 que satisfacen las siguientes condiciones: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, colores$(D_1) \cap$ colores$(D_2) = \emptyset$ y D_1 contiene sólo ciclos dirigidos monocromáticos.

Sea

$$\mathcal{S} = \{\emptyset \neq S \mid S \text{ es seminúcleo por trayectorias monocromáticas } \textit{mod } D_2 \text{ de } D\}.$$

Nótese que por el Lema 2.2.4, existe un seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas *mod* D_2 de D y así, $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

Denotemos por $D_{\mathcal{S}}$ la digráfica definida como sigue:

i. $V(D_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}$ (es decir, por cada elemento de $\mathcal{S}$ ponemos un vértice en $D_{\mathcal{S}}$) y

ii. $(S_1, S_2) \in F(D_{\mathcal{S}})$ si y sólo si para cada $s_1 \in S_1$ existe $s_2 \in S_2$ tal que $s_1 = s_2$ ó existe una $s_1 s_2-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2 y no existe ninguna $s_2 S_1-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D.

Lema 2.2.5 *Sea D una digráfica $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de la digráfica D tales que: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, colores$(D_1) \cap$ colores$(D_2) = \emptyset$ y en D_i todo ciclo dirigido es monocromático para $i \in \{1, 2\}$. Entonces, $D_{\mathcal{S}}$ es una digráfica que no contiene ciclos dirigidos.*

Demostración. Dado que en D_1 todo ciclo dirigido es monocromático, se sigue del Lema 2.2.4 que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ y por lo tanto la digráfica $D_{\mathcal{S}}$ está bien definida. Supongamos por contradicción que la digráfica $D_{\mathcal{S}}$ contiene algún ciclo dirigido, digamos $\mathcal{C} = (S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}, S_0)$ de longitud $n \geq 2$. Ya que $\mathcal{C}$ es un ciclo dirigido en $D_{\mathcal{S}}$ tenemos que $S_i \neq S_j$ siempre que $i \neq j$.
Afirmación 1. Existe $i_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ tal que para alguna $z \in S_{i_0}$, $z \notin S_{i_0+1} (mod\, n)$.

De lo contrario, tendríamos que para toda $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y toda $z \in S_i$ se tiene que $z \in S_{i+1}$, entonces $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots S_{n-1} \subseteq S_n = S_0$. Así, $S_0 \subseteq S_k \subseteq S_0$ para toda $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ y se sigue que $S_k = S_0$ para toda $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. En consecuencia, $S_i = S_j$ para cualesquiera $i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Por lo tanto, tendríamos que $\mathcal{C} = (S_0)$, lo cual es una contradicción con el hecho de que un ciclo posee al menos dos vértices distintos. $\triangle$
Afirmación 2. Si existe $i_0 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que para algunos $z \in S_{i_0}$ y $w \in S_{i_0+1}$ $(mod\ n)$ se tiene que existe una $zw-$trayectoria dirigida monocromática. Entonces, existe $j_0 \neq i_0$, $j_0 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que $w \in S_{j_0}$ y $w \notin S_{j_0+1}$ $(mod\ n)$. Véase la Figura 2.8.

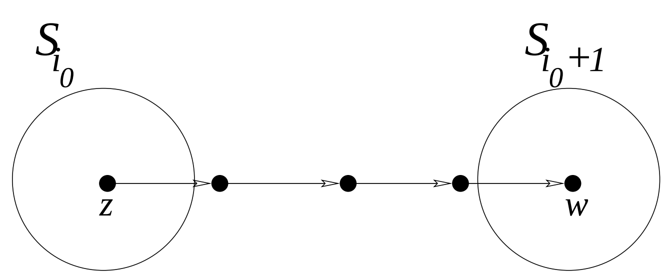

Figura 2.8: $zw-$trayectoria dirigida monocromática.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i_0 = 0$. Dado que $w \in S_1$, si $w \notin S_2$ se tendría probada la Afirmación 2 con $j_0 = 1$. Podemos suponer que $w \in S_2$, si $w \notin S_3$ se tendría probada la Afirmación 2 con $j_0 = 2$. Nuevamente, podemos suponer que $w \in S_3$, si $w \notin S_4$ se tendría probada la Afirmación 2 con $j_0 = 3$. Repitiendo este procedimiento $n-1$ veces, llegamos a que $w \in S_0$, lo cual es una contradicción pues $z \in S_0$ y por hipótesis se tiene que existe una $zw-$trayectoria dirigida monocromática (S_i es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas para toda $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.) $\triangle$

Ahora se sigue de la Afirmación 1 que existen $i_0 \in \{0, \ldots, n-1\}$ y $t_0 \in S_{i_0}$ tal que $t_0 \notin S_{i_0+1}$. Ya que $(S_{i_0}, S_{i_0+1}) \in F(D_{\mathcal{S}})$ se sigue que existe $t_1 \in S_{i_0+1}$ tal que existe una t_0t_1-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2 y no existe ninguna $t_1S_{i_0}-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D. De la Afirmación 2 se sigue que existe un índice $i_1 \in \{0, \ldots, n-1\}$ tal que $t_1 \in S_{i_1}$ y $t_1 \notin S_{i_1+1}$ y ya que $(S_{i_1}, S_{i_1+1}) \in F(D_{\mathcal{S}})$ se sigue que existe $t_2 \in S_{i_1+1}$ tal que existe una t_1t_2-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2 y no existe ninguna $t_2S_{i_1}-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Nuevamente, de la Afirmación 2 se sigue que existe un índice $i_2 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que $t_2 \in S_{i_2}$ y $t_2 \notin S_{i_2+1}$ y como $(S_{i_2}, S_{i_2+1}) \in F(D_{\mathcal{S}})$ tenemos que existe $t_3 \in S_{i_2+1}$ tal que existe una t_2t_3-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2 y no existe ninguna $t_3S_{i_2}-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Continuando de esta manera obtenemos una sucesión de vértices $(t_0, t_1, t_2, \ldots)$ tal que existe una $t_it_{i+1}-$trayectoria dirigida monocromática contenida contenida en D_2 y no existe ninguna $t_{i+1}t_i-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Pero esto contradice el Lema 2.2.2 aplicado a la subdigráfica generadora D_2. Por lo tanto, $D_{\mathcal{S}}$ es una digráfica que no contiene ciclos dirigidos. ■

2.3. Ciclos monocromáticos y núcleos por trayectorias monocromáticas

El siguiente teorema es un caso particular de nuestro teorema principal.

Teorema 2.3.1 *Sea D una digráfica $m-$coloreada tal que todo ciclo dirigido en D es monocromático. Entonces, $\mathfrak{C}(D)$ tiene un núcleo.*

Demostración. Probaremos que en $\mathfrak{C}(D)$ cada ciclo tiene al menos una flecha simétrica. Así, por el Teorema 1.2.1 se tendrá el resultado.

Sea $\mathfrak{C}(D)$ la cerradura transitiva de la digráfica D, supongamos por contradicción que existe un ciclo $C = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1} = u_0)$ en $\mathfrak{C}(D)$ tal que no contiene ninguna flecha simétrica. Entonces en D para toda $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ existe una $u_iu_{i+1}-$trayectoria dirigida monocromática y no existe ninguna $u_{i+1}u_i-$trayectoria dirigida monocromática. Así, obtenemos una sucesión de trayectorias $T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}$ en D. Si T_i es una $u_iu_{i+1}-$trayectoria dirigida monocromática para toda $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, se sigue del Teorema 2.2.1 que todas estas trayectorias T_i son del mismo color. Así, $\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i$ es un camino dirigido cerrado monocromático y $\bigcup_{i=1}^{n-1} T_i$ es un u_1u_0-camino dirigido monocromático contenido en D. Por lo tanto, existe una u_1u_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D, lo cual es una contradicción con la suposición de que no existe ninguna $u_{i+1}u_i-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D.

Por lo tanto, en $\mathfrak{C}(D)$ cada ciclo contiene al menos una flecha simétrica y $\mathfrak{C}(D)$ tiene un núcleo. ■

La idea de la demostración en nuestro teorema principal es seleccionar $S \in V(D_{\mathcal{S}})$ tal que $\delta^+_{D_{\mathcal{S}}}(S) = 0$ (tal S existe, pues probamos que $D_{\mathcal{S}}$ no contiene ciclos dirigidos y se aplica el Teorema 1.1.3) y demostrar que S es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D.

Teorema 2.3.2 *Sea D una digráfica finita $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de la digráfica D tales que:*

i. $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, *colores*$(D_1) \cap$ *colores*$(D_2) = \emptyset$;

ii. *Cada ciclo dirigido de D contenido en D_i es monocromático para $i \in \{1, 2\}$;*

iii. *D no contiene (D_1, D, D_2) subdivisiones de C_3 $3-$coloreadas y*

iv. *Si (u, v, w, x) es una (D_1, D, D_2) subdivisión de P_3 $3-$coloreada, entonces existe una trayectoria dirigida monocromática entre u y x en D.*

Entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Demostración.

Considérese la digráfica $D_{\mathcal{S}}$ de la digráfica D (nótese que dado que en D_1 cada ciclo dirigido es monocromático, se sigue del Lema 2.2.3 que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ y por lo tanto, la digráfica $D_{\mathcal{S}}$ está bien definida.)

Como $D_{\mathcal{S}}$ es una digráfica finita y por el Lema 2.2.5 no contiene ciclos dirigidos se sigue del Teorema 1.1.3 que $D_{\mathcal{S}}$ contiene al menos un vértice de exgrado cero. Sea $S \in V(D_{\mathcal{S}})$ tal que $\delta^+_{D_{\mathcal{S}}}(S) = 0$.

Afirmamos que S es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D.

Supongamos por contradicción que S no es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D. Ya que $S \in V(D_{\mathcal{S}})$, tenemos que S es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Sea

$$X = \{z \in V(D) \mid \text{no existe } zS-\text{trayectoria dirigida monocromática en } D.\}$$

Se sigue de nuestra suposición que $X \neq \emptyset$. Como $D[X]$ es una subdigráfica inducida de D, tenemos que $D[X]$ satisface las hipótesis del Teorema 2.3.2 y en particular la subdigráfica de D_1 en $D[X]$ satisface las hipótesis del Lema 2.2.4. Así, se sigue del Lema 2.2.4 que existe $x_0 \in X$ tal que para cada $z \in X - \{x_0\}$ se cumple que si existe x_0z-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1, entonces existe zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1. Es decir, $\{x_0\}$ es un seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas *mod* D_2 de D.

Sea

$$T = \{z \in S \mid \text{no existe } zx_0\text{−trayectoria dirigida monocromática en } D_2.\}$$

Por la definición de T tenemos que para cada $z \in (S-T)$ existe zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2.

Nótese que ya que por hipótesis se tiene que colores$(D_1)\cap$ colores$(D_2) = \emptyset$, se sigue que toda trayectoria dirigida monocromática de D está contenida en D_1 o está contenida en D_2.

Afirmación 1**.** $T \cup \{x_0\}$ es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Claramente T es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas ($T \subseteq S$ y $S \in \mathcal{S}$) y $\{x_0\}$ es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas.

i. No existen $T\{x_0\}-$trayectorias dirigidas monocromáticas contenidas en D.

   Supongamos por contradicción que existe alguna $T\{x_0\}-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Sea α tal trayectoria. Por la definición de T y por la hipótesis de que colores$(D_1)\cap$ colores$(D_2) = \emptyset$, se sigue que α está contenida en D_1 y como $T \subseteq S$ y $S \in \mathcal{S}$, se sigue que existe alguna x_0S-trayectoria dirigida monocromática contenida en D, contradiciendo que $x_0 \in X$.

ii. No existen $\{x_0\}T-$trayectorias dirigidas monocromáticas contenidas en D.

   Se sigue directamente del hecho que $T \subseteq S$ y $x_0 \in X$. $\triangle$

Afirmación 2**.** Sea $z \in V(D) - (T \cup \{x_0\})$. Si existe una $(T \cup \{x_0\})z-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1, entonces existe una $z(T \cup \{x_0\})-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D.

Caso 1: Existe una $Tz-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1.

Probaremos que existe una $z(T \cup \{x_0\})-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D.

Ya que $T \subseteq S$ y $S \in \mathcal{S}$, se sigue que existe una $zS-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Si existe una $zT-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D se tendría probada la Afirmación 2. Así, podemos suponer que existe una $z(S-T)-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Sean α_1 una $uz-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1 con $u \in T$ y α_2 una $zw-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D con $w \in (S-T)$. Ya que $w \in (S-T)$, se sigue de la definición de T que existe α_3 una wx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2. Dado que colores$(D_1)\cap$ colores$(D_2) = \emptyset$ y α_2 es monocromática se sigue exactamente una de las siguientes dos afirmaciones: α_2 está contenida en D_1 ó α_2 está contenida en D_2.

Más aún, color$(\alpha_1) \neq$ color(α_2), de otro modo, color$(\alpha_1) =$ color(α_2) y existe una $uw-$trayectoria dirigida monocromática contenida en $\alpha_1 \cup \alpha_2$, con $\{u, w\}$

$\subseteq S$, contradiciendo que S es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas. Además, podemos suponer que color$(\alpha_2) \neq$ color(α_3) pues si color$(\alpha_2) =$ color(α_3), entonces $\alpha_2 \cup \alpha_3$ contiene una zx_0-trayectoria dirigida monocromática y por lo tanto, existe una $z(T \cup \{x_0\})-$trayectoria dirigida monocromática en D y se tendría probada la Afirmación 2. También, color$(\alpha_1) \neq$ color(α_3) pues α_1 está contenida en D_1 y α_3 está contenida en D_2 y por hipótesis colores$(D_1) \cap$ colores$(D_2) = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que color$(\alpha_1) = 1$, color$(\alpha_2) = 2$ y color$(\alpha_3) = 3$; se sigue que las trayectorias α_1, α_2 y α_3 sólo se intersectan en sus vértices.

También podemos suponer que $x_0 \notin V(\alpha_2)$, de otra forma (z, α_2, x_0) es una zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D y por lo tanto, existe una $z(T \cup \{x_0\})-$trayectoria dirigida monocromática en D y se tendría demostrada la Afirmación 2. Análogamente podemos suponer que $z \notin V(\alpha_3)$, pues de lo contrario (z, α_3, x_0) es una zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D y se tendría demostrada la Afirmación 2.

Ahora analizaremos los dos posibles casos:

Caso 1.1: $\alpha_2 \subseteq D_1$.

En este caso $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$, de otro modo, tendríamos que existe un ciclo dirigido no monocromático contenido en $\alpha_1 \cup \alpha_2 \subseteq D_1$, lo cual contradice las hipótesis.

Si $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$, entonces consideraremos los siguientes dos subcasos:

1) Si $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$ tenemos que $(u, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es una (D_1, D, D_2) subdivisión de P_3 3$-$coloreada y se sigue de las hipótesis que existe una trayectoria dirigida monocromática contenida en D entre u y x_0, lo cual es imposible pues $u \in T$ y ya probamos que $T \cup \{x_0\}$ es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas. Ver la Figura 2.9.

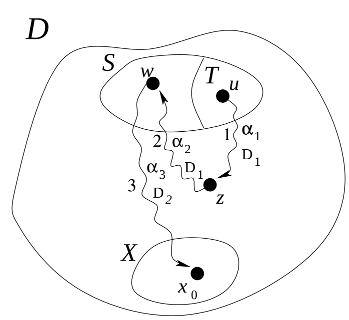

Figura 2.9:

2) Si $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$, sea v el último vértice de α_1 que está en α_3 (nótese que $v \neq z$ pues ya vimos que $z \notin V(\alpha_3)$, $v \neq w$ ya que de lo contrario existiría una $uw-$trayectoria dirigida monocromática con $\{u, w\} \subseteq S$, contradiciendo que S es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas y $v \neq u$ ya que de lo contrario existiría una $wu-$trayectoria dirigida monocromática con $\{u, w\} \subseteq S$, contradiciendo que S es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas) y se tiene que $(v, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, v)$ es una (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3 $3-$coloreada, contradiciendo las hipótesis. Ver la Figura 2.10.

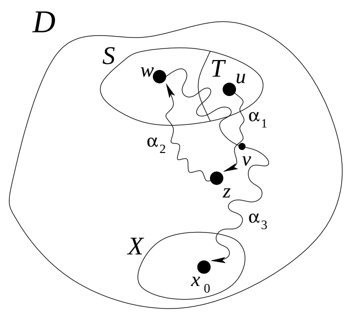

Figura 2.10:

Si $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$, entonces consideraremos los siguientes dos subcasos:

1) Si $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$, sea v el primer vértice de α_2 que está en α_3 ($v \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ y $v \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$), entonces $(u, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, v) \cup (v, \alpha_3, x_0)$ es una (D_1, D, D_2) subdivisión de P_3 $3-$coloreada y se sigue de las hipótesis que existe una trayectoria dirigida monocromática entre u y x_0 en D, lo cual es imposible pues $u \in T$ y ya probamos que $T \cup \{x_0\}$ es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas. Ver la Figura 2.11.
2) Si $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$, sea v el último vértice de α_3 que está en α_2 ($v \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$ y $v \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$). Si la trayectoria (v, α_3, x_0) todavía intersecta a α_1, sea x el primer vértice de α_3 posterior a v que está en α_1 ($x \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ y $x \neq u$ ya que de lo contrario existe una $wu-$trayectoria dirigida monocromática con $\{u, w\} \subseteq S$, contradiciendo que S es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas), entonces $(x, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, v) \cup (v, \alpha_3, x)$ es una (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3 $3-$coloreada, contradiciendo la hipótesis. Y si α_3 ya no intersecta a α_1, entonces $(u, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, v) \cup (v, \alpha_3, x_0)$ es una (D_1, D, D_2) subdivisión de P_3 $3-$coloreada y se sigue de las hipótesis que existe una trayectoria dirigida monocromática entre u y x_0 en D, lo cual es imposible pues $u \in T$ y ya probamos que

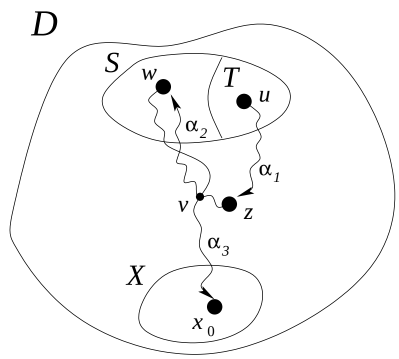

Figura 2.11:

$T \cup \{x_0\}$ es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas. Ver la Figura 2.12.

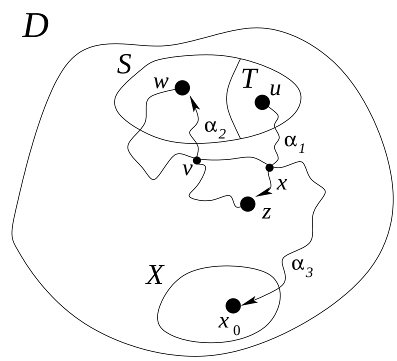

Figura 2.12:

Caso 1.2: $\alpha_2 \subseteq D_2$.

En este caso $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$, de lo contrario existe un ciclo dirigido no monocromático contenido en $\alpha_2 \cup \alpha_3 \subseteq D_2$, lo cual no es posible.

Si $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$, entonces tenemos los siguientes dos subcasos:

1) Si $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$, tenemos que $(u, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es una (D_1, D, D_2) subdivisión de P_3 $3-$coloreada y se sigue de las hipótesis que existe una trayectoria dirigida monocromática entre u y x_0 en D, lo cual es imposible pues $u \in T$ y probamos que $T \cup \{x_0\}$ es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas. Ver la Figura 2.13.
2) Si $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$, sea v el último vértice de α_1 que está en α_3 ($v \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$, $v \neq w$ ya que de lo contrario existe una $uw-$trayectoria dirigida monocromática con $\{u, w\} \subseteq S$, contradiciendo que S es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas y $v \neq u$ ya que de lo contrario existe una $wu-$trayectoria dirigida monocromática con $\{u, w\} \subseteq S$, contradiciendo que S es independiente por trayectorias

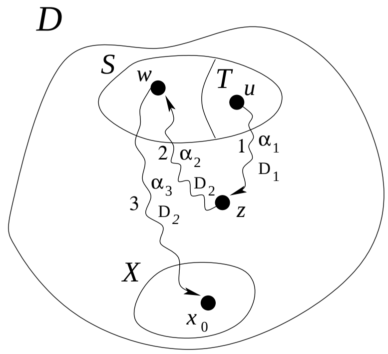

Figura 2.13:

dirigidas monocromáticas) y se tiene que $(v, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, v)$ es una (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3 3−coloreada, contradiciendo las hipótesis. Ver la Figura 2.14.

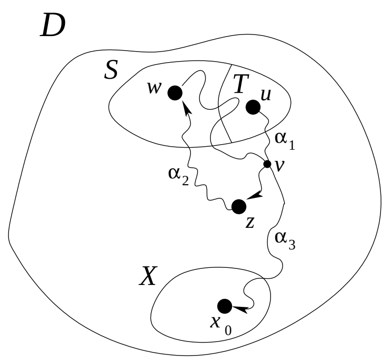

Figura 2.14:

Si $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)) - \{z\} \neq \emptyset$, entonces tenemos los siguienes dos subcasos:

1) Si $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$, sea v el primer vértice de α_1 que está en α_2 ($v \neq u$ y $v \neq w$ ya que de lo contrario en ambos casos existe una $uw-$trayectoria dirigida monocromática con $\{u, w\} \subseteq S$, contradiciendo que S es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas), entonces $(u, \alpha_1, v) \cup (v, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es una (D_1, D, D_2) subdivisión de P_3 3−coloreada y se sigue de las hipótesis que existe una trayectoria dirigida monocromática entre u y x_0 en D, lo cual es imposible pues $u \in T$ y probamos que $T \cup \{x_0\}$ es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas. Ver la Figura 2.15.

2) Si $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$, sea v el último vértice de α_1 que está en α_3 ($v \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$, $v \neq w$ ya que de lo contrario existe una $uw-$trayectoria dirigida monocromática con $\{u, w\} \subseteq S$, contradiciendo que S es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas, $v \neq u$ ya que

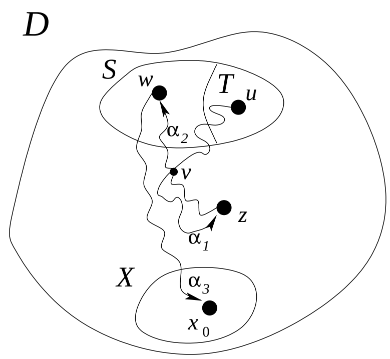

Figura 2.15:

de lo contrario existe una $wu-$trayectoria dirigida monocromática con $\{u, w\} \subseteq S$, contradiciendo que S es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas y $v \neq x_0$ ya que de lo contrario existe una ux_0-trayectoria dirigida monocromática lo cual es imposible pues $u \in T$ y probamos que $T \cup \{x_0\}$ es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas) y sea x el primer vértice de α_1 posterior a v que está en α_2 (nótese que x puede ser igual a z). Claramente $(v, \alpha_1, x) \cup (x, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, v)$ es una (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3 $3-$coloreada, contradiciendo las hipótesis. Ver la Figura 2.16.

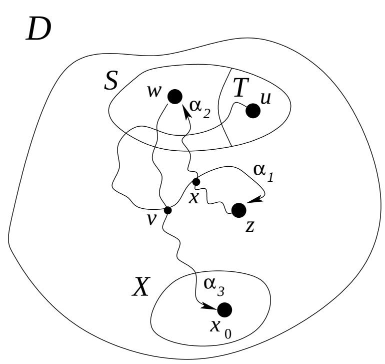

Figura 2.16:

Caso 2: Existe una x_0z-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1.

Probaremos que existe una $z(T \cup \{x_0\})-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D.

Sea α_1 una x_0z-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1.

Si $z \in X$, entonces se sigue de la elección de x_0 que existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D_1 y por lo tanto existe $z(T \cup \{x_0\})-$trayectoria dirigida monocromática en D y se tendría probada la Afirmación 2. Así, podemos suponer que $z \notin X$.

Ya que $z \notin X$ se sigue de la definición de X que existe una $zS-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D, sea α_2 tal trayectoria, digamos que α_2 termina en w. Si $w \in T$, entonces α_2 es una $z(T \cup \{x_0\})-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D y la Afirmación 2 queda demostrada. Así, supongamos que $w \in (S - T)$. Ya que $w \in (S - T)$, por la definición de T se tiene que existe una wx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2, sea α_3 tal trayectoria. Como colores(D_1)$\cap$ colores(D_2) $= \emptyset$ y α_2 es monocromática se sigue exactamente una de las siguientes dos afirmaciones: α_2 está contenida en D_1 ó α_2 está contenida en D_2.

Nuevamente, tenemos que color(α_1) $\neq$ color(α_2), de otro modo, color(α_1) $=$ color(α_2) y existe una x_0w-trayectoria dirigida monocromática contenida en $\alpha_1 \cup \alpha_2$ contradiciendo que $x_0 \in X$ y $w \in S$. Además, podemos suponer que color(α_2) $\neq$ color(α_3) de otro modo $\alpha_2 \cup \alpha_3$ contiene una zx_0-trayectoria dirigida monocromática y quedaría demostrada la Afirmación 2. También color(α_1) $\neq$ color(α_3) pues α_1 está contenida en D_1 y α_3 está contenida en D_2 y por las hipótesis colores(D_1)$\cap$ colores(D_2) $= \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que color(α_1) $= 1$, color(α_2) $= 2$ y color(α_3) $= 3$, así las trayectorias α_1, α_2 y α_3 sólo se intersectan en sus vértices.

Igual que en el caso 1 podemos suponer que $x_0 \notin V(\alpha_2)$, de otra forma (z, α_2, x_0) es una zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D y por lo tanto existe una $z(T \cup \{x_0\})-$trayectoria dirigida monocromática en D y la Afirmación 2 quedaría demostrada. Análogamente podemos suponer que $z \notin V(\alpha_3)$, pues de lo contrario (z, α_3, x_0) es una zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D y la Afirmación 2 quedaría demostrada.

Ahora analizaremos los dos posibles casos:

Caso 2.1: $\alpha_2 \subseteq D_1$.

En este caso $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$, de otro modo, tendríamos que existe un ciclo dirigido no monocromático contenido en $\alpha_1 \cup \alpha_2 \subseteq D_1$, lo cual no es posible.

Si $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$, entonces analizaremos dos posibles subcasos:

1) Si $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$ tenemos que $(x_0, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es una (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3 3$-$coloreada, lo cual contradice las hipótesis. Ver la Figura 2.17.
2) Si $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$, sea v el último vértice de α_1 que está en α_3 ($v \neq z$, $z \notin V(\alpha_3)$ y $v \neq w$ pues de lo contrario existe una x_0w-trayectoria dirigida monocromática con $x_0 \in X$ y $w \in S$) y se tiene que $(v, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, v)$ es una (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3 3$-$coloreada, contradiciendo las hipótesis. Ver la Figura 2.18.

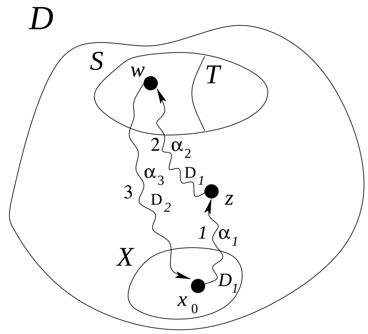

Figura 2.17:

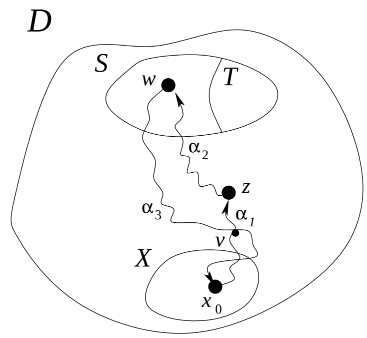

Figura 2.18:

Si $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$, entonces analizaremos dos posibles subcasos:

1) Si $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$, sea v el último vértice de α_3 que está en α_2 ($v \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$ y $v \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$), entonces $(x_0, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, v) \cup (v, \alpha_3, x_0)$ es una (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3 $3-$coloreada, contradiciendo las hipótesis. Ver la Figura 2.19.
2) Si $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$, sea v el último vértice de α_3 que está en α_2 ($v \neq x_0, x_0 \notin V(\alpha_2)$ y $v \neq z, z \notin V(\alpha_3)$) y sea x el primer vértice de α_3 posterior a v que está en α_1 (nótese que x puede ser igual a x_0). Claramente $(x, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, v) \cup (v, \alpha_3, x)$ es una (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3 $3-$coloreada, contradiciendo las hipótesis. Ver la Figura 2.20.

Caso 2.2: $\alpha_2 \subseteq D_2$.

En este caso $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$, de lo contrario existe un ciclo dirigido no monocromático contenido en $\alpha_2 \cup \alpha_3 \subseteq D_2$, lo cual contradice la hipótesis.

Si $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$, entonces tenemos dos posibles subcasos:

1) Si $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$ tenemos que $(x_0, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es una (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3 $3-$coloreada, contradiciendo las hipótesis. Ver la Figura 2.21.

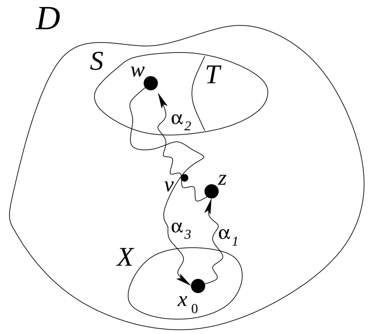

Figura 2.19:

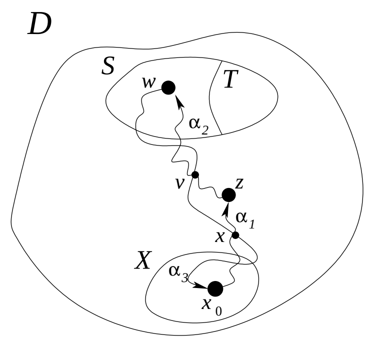

Figura 2.20:

2) Si $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$, sea v el último vértice de α_1 que está en α_3 ($v \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ y $v \neq w$ pues de lo contrario existe una x_0w-trayectoria dirigida monocromática con $x_0 \in X$ y $w \in S$) y se tiene que $(v, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, v)$ es una (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3 3$-$coloreada, contradiciendo las hipótesis. Ver la Figura 2.22.

Si $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)) - \{z\} \neq \emptyset$, entonces tenemos dos posibles subcasos:

1) Si $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$, sea v el primer vértice de α_1 que está en α_2 ($v \neq x_0, x_0 \notin V(\alpha_2)$ y $v \neq w$ pues de lo contrario existe una x_0w-trayectoria dirigida monocromática con $x_0 \in X$ y $w \in S$), entonces $(x_0, \alpha_1, v) \cup (v, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es una (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3 3$-$coloreada, contradiciendo las hipótesis. Ver la Figura 2.23.

2) Si $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$, sea v el último vértice de α_1 que está en α_3 ($v \neq z, z \notin V(\alpha_3)$ y $v \neq w$ pues de lo contrario existe una x_0w-trayectoria dirigida monocromática con $x_0 \in X$ y $w \in S$) y sea x el primer vértice de α_1 posterior a v que está en α_2 (nótese que x puede ser igual a z). Claramente $(v, \alpha_1, x) \cup (x, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, v)$ es una (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3 3$-$coloreada, contradiciendo las hipótesis. Ver la Figura 2.24. $\triangle$

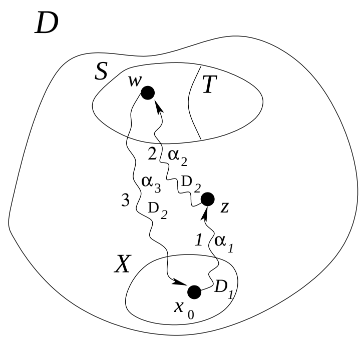

Figura 2.21:

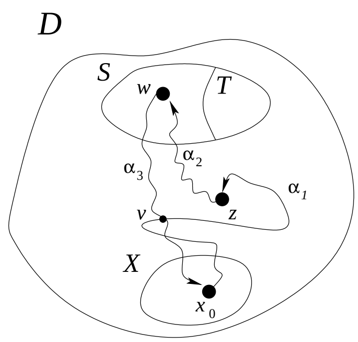

Figura 2.22:

De las Afirmaciones 1 y 2 se sigue que $T \cup \{x_0\} \in \mathcal{S}$ y por lo tanto, $T \cup \{x_0\} \in V(D_{\mathcal{S}})$.

Tenemos que $(S, T \cup \{x_0\}) \in F(D_{\mathcal{S}})$ ya que $T \subseteq S$, $x_0 \in X$ y para cada $s \in S$ tal que $s \notin T$ existe una sx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2 y no existe ninguna x_0S-trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Pero esto contradice el hecho de que $\delta^+_{D_{\mathcal{S}}}(S) = 0$.

Por lo tanto, S es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en D y el Teorema 2.3.2 queda demostrado. ■

Observación 2.3.1 *Nótese que mientras en el Teorema 2.3.1 se pide que todo ciclo dirigido sea monocromático en el Teorema 2.3.2 puede haber ciclos no monocromáticos, pues los ciclos monocromáticos sólo se piden en cada D_i para $i \in \{1, 2\}$. Ver la Figura 2.25.*

Observación 2.3.2 *Nótese que el Teorema 2.3.2 generaliza el teorema de Sands, Sauer y Woodrow ya que:*

i. Una digráfica $2-$coloreada es una digráfica $m-$coloreada para $m = 2$.

ii. Una digráfica $2-$coloreada se puede dividir en 2 subdigráficas generadoras

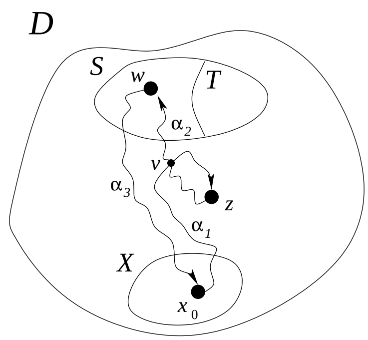

Figura 2.23:

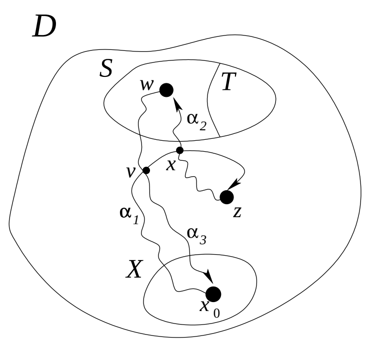

Figura 2.24:

monocromáticas D_1 *y* D_2 *de la digráfica* D *tales que:* $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, *colores*$(D_1) \cap$ *colores*$(D_2) = \emptyset$.

iii. *Cada ciclo dirigido en* D_i *para* $i = \{1, 2\}$ *es monocromático pues cada* D_i *lo es.*

iv. D *no contiene* (D_1, D, D_2) *subdivisiones de* C_3 $3-$*coloreadas pues en* D *no hay* 3 *colores.*

v. *Por la misma razón que en iv* D *no contiene* (D_1, D, D_2) *subdivisiones de* P_3 $3-$*coloreadas.*

Por lo tanto, toda digráfica $2-$*coloreada* D *cumple las hipótesis del Teorema 2.3.2 y como la conclusión de los dos teoremas es la misma, el Teorema 2.3.2 generaliza el teorema de Sands, Sauer y Woodrow.*

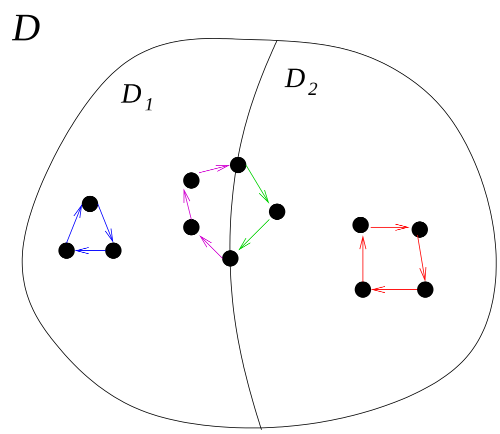

Figura 2.25:

Capítulo 3

Digráficas transitivas y casitransitivas en cada cambio de color

En este capítulo, con respecto a digráficas transitivas en cada cambio de color y casitransitivas en cada cambio de color, probaremos condiciones suficientes para la existencia de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

3.1. Digráficas transitivas en cada cambio de color

Iniciaremos esta sección dando la definición de digráfica transitiva en cada cambio de color, para después demostrar 2 lemas de gran utilidad que se refieren a las propiedades de las digráficas transitivas en cada cambio de color.

Definición 3.1.1 *Una digráfica D, m-coloreada es* **transitiva en cada cambio de color** *si $(u, v) \in F(D)$ de color a y $(v, w) \in F(D)$ de color b con $u \neq w$ y $a \neq b$ implica que $(u, w) \in F(D)$ de cualquier color.*

Lema 3.1.1 *Sea D una digráfica m-coloreada y transitiva en cada cambio de color. Si en la digráfica D tenemos T una uv-trayectoria dirigida monocromática de color a y (v, x) es una flecha de color b con $x \neq u$ y $a \neq b$, entonces en D tenemos una $ux-$trayectoria dirigida monocromática.*

Demostración. Sean T una $uv-$trayectoria dirigida monocromática de color a y (v, x) una flecha de color b en D. Analizaremos dos posibles casos:

Caso 1. $x \in V(T)$. El resultado es inmediato, pues claramente tenemos una $ux-$trayectoria dirigida monocromática, véase la Figura 3.1.

Caso 2. $x \notin V(T)$. Aplicaremos inducción sobre $\ell(T)$. Si $\ell(T) = 1$, entonces en la digráfica D tenemos a las flechas (u, v) y (v, x) de distinto color. Así, dado que D es

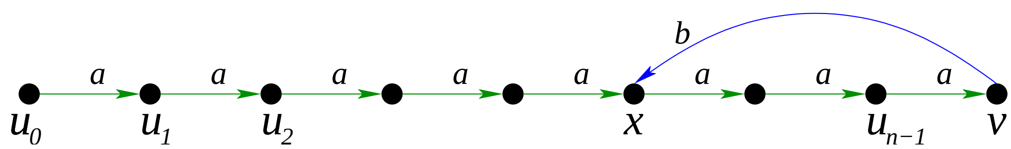

Figura 3.1: $ux-$trayectoria dirigida monocromática.

transitiva en cada cambio de color, entonces tenemos a la flecha (u, x) y se sigue el resultado deseado. Supongamos que se tiene el Lema 3.1.1 para toda trayectoria dirigida monocromática T con $\ell(T) = n - 1$. Sea $T = (u = u_0, \ldots, u_n = v)$ una trayectoria dirigida monocromática de longitud n. Considerando a las flechas $(u_{n-1}, u_n = v)$ y (v, x), tenemos en D la flecha (u_{n-1}, x) ya que las flechas $(u_{n-1}, u_n = v)$ y (v, x) son de distinto color y están en D (D es transitiva en cada cambio de color), véase la Figura 3.2.

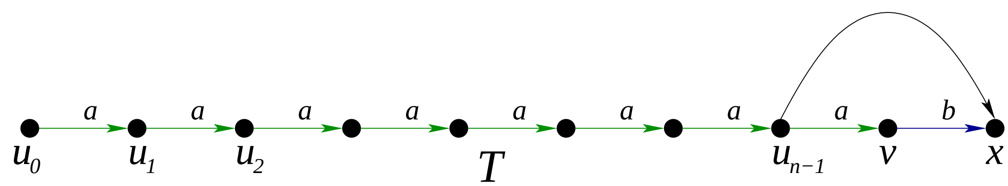

Figura 3.2: $T = (u = u_0, \ldots, u_n = v)$ de color a y (v, x) de color b.

Sea $T' = (u_0, \ldots, u_{n-1})$, analizaremos dos posibles casos:

Caso 2.1. $\mathit{color}(u_{n-1}, x) = \mathit{color}(T)$. En este caso $T' \cup (u_{n-1}, x)$ es una $ux-$trayectoria dirigida monocromática en D y se tiene el resultado, véase la Figura 3.3.

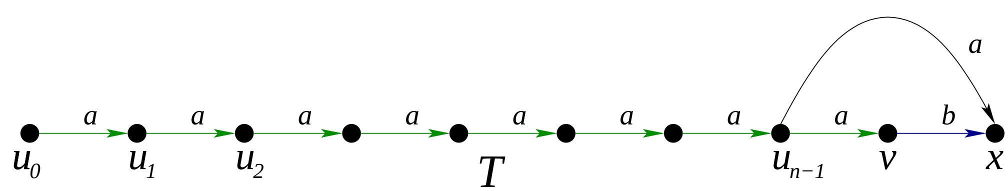

Figura 3.3: $\mathit{color}(u_{n-1}, x) = \mathit{color}(T)$.

Caso 2.2. $\mathit{color}(u_{n-1}, x) \neq \mathit{color}(T)$. En este caso T' y la flecha (u_{n-1}, x) satisfacen la hipótesis de inducción pues $\ell(T') = n - 1$ y por lo tanto, tenemos una $ux-$trayectoria dirigida monocromática en D y se sigue el resultado, véase la Figura 3.4.

Esto finaliza la prueba. ■

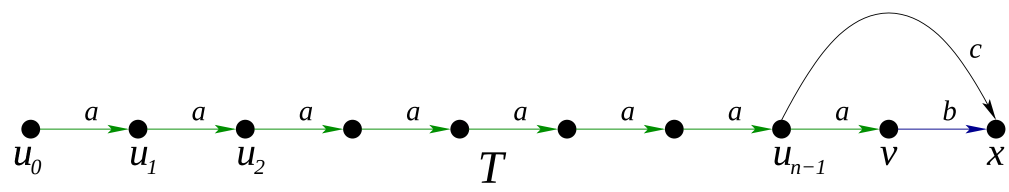

Figura 3.4: $color(u_{n-1}, x) \neq color(T)$.

Lema 3.1.2 *Sea D una digráfica m-coloreada y transitiva en cada cambio de color. Si en la digráfica D tenemos T_1 una uv-trayectoria dirigida monocromática de color a y T_2 una vw-trayectoria dirigida monocromática de color b con $u \neq w$ y $a \neq b$, entonces en D tenemos una $uw-$trayectoria dirigida monocromática.*

Demostración. Sean T_1 una uv-trayectoria dirigida monocromática de color a y T_2 una vw-trayectoria dirigida monocromática de color b en D. Aplicaremos inducción sobre $\ell(T_2)$. Si $\ell(T_2) = 1$, el resultado se sigue del Lema 3.1.1. Supongamos que se tiene el Lema 3.1.2 para toda trayectoria dirigida monocromática T_2 con $\ell(T_2) = m - 1$. Sea $T_2 = (v = v_0, \ldots, v_m = w)$ una $vw-$trayectoria dirigida monocromática de longitud m. Dado que el $color(T_1) \neq color(T_2)$ y considerando a la trayectoria T_1 y a la flecha (v, v_1) estas satisfacen la base de inducción, por lo tanto, tenemos una uv_1-trayectoria dirigida monocromática en D, llamémosle T_3, ver la Figura 3.5.

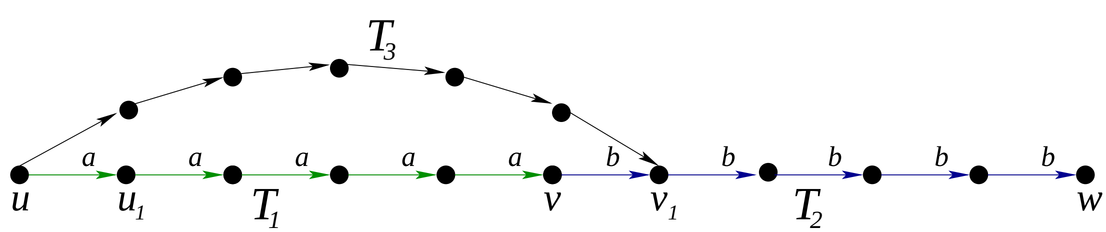

Figura 3.5: uv_1-trayectoria dirigida monocromática.

Sea $T_2' = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$, analizaremos dos posibles casos:

Caso 1. $color(T_3) = color(T_2)$. En este caso por el Teorema 1.1.1 $T_3 \cup T_2'$ contiene una $uw-$trayectoria dirigida monocromática en D y se tiene el resultado, véase la Figura 3.6.

Caso 2. $color(T_3) \neq color(T_2)$. En este caso las trayectorias T_3 y T_2' satisfacen la hipótesis de inducción pues $\ell(T_2') = m - 1$ y por lo tanto tenemos una $uw-$trayectoria dirigida monocromática en D y se sigue el resultado, véase la Figura 3.7.

Finalmente, se tiene el resultado deseado. ■

Sands, Sauer y Woodrow, demuestran en [26] que si D es una digráfica cuyas flechas son coloreadas con dos colores, tal que D no contiene trayectorias infinitas

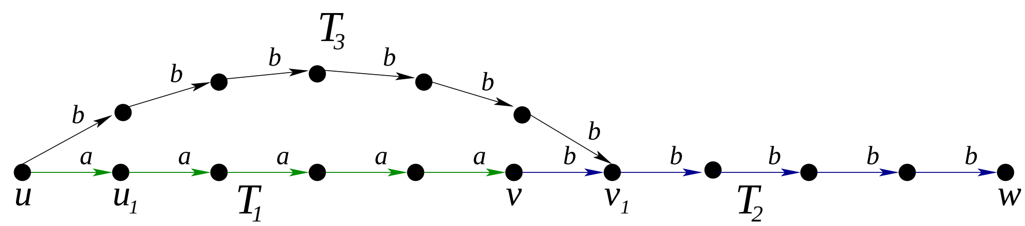

Figura 3.6: $color(T_3) = color(T_2)$.

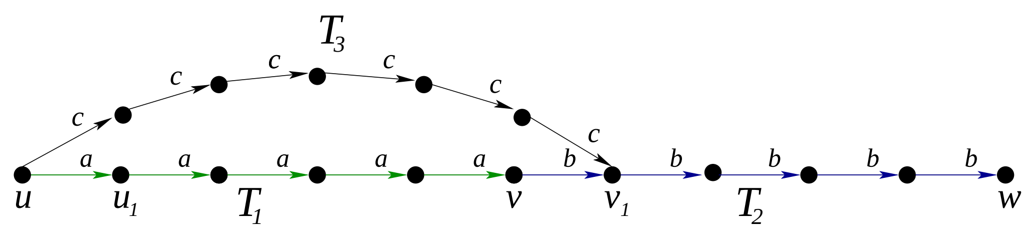

Figura 3.7: $color(T_3) \neq color(T_2)$.

exteriores monocromáticas, entonces existe un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas S de vértices de D tal que, para cada vértice x que no está en S, existe una trayectoria dirigida monocromática de x a un vértice de S.

Nótese que el teorema de Sands, Sauer y Woodrow puede escribirse en términos de núcleos de la siguiente manera: Si D es una digráfica cuyas flechas son coloreadas con dos colores, tal que D no contiene trayectorias infinitas exteriores monocromáticas, entonces la cerradura transitiva de D, $\mathfrak{C}(D)$, tiene núcleo, más aún $\mathfrak{C}(D)$ es núcleo perfecta.

Y todavía podemos reescribir el teorema de Sands, Sauer y Woodrow como sigue:

Teorema 3.1.3 *Sea D una digráfica. Si existen dos subdigráficas transitivas D_1 y D_2 de la digráfica D tales que: $D = D_1 \cup D_2$, $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$ y D_i no contiene trayectorias infinitas exteriores para cada $i \in \{1, 2\}$. Entonces D tiene núcleo.*

El siguiente teorema nos será de gran utilidad para demostrar condiciones suficientes para que las digráficas transitivas en cada cambio de color tengan núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Teorema 3.1.4 *Sea D una digráfica $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de D tales que: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, colores($D_1$)$\cap$ colores(D_2) $= \emptyset$ y cada D_i, $i = 1, 2$ es transitiva en cada cambio de color. Entonces $\mathfrak{C}(D)$ es unión de dos digráficas transitivas.*

Demostración. Dado que colores(D_1)$\cap$ colores(D_2) $= \emptyset$, observamos que cada trayectoria dirigida monocromática en D está contenida en D_1 o está contenida en D_2.

Así, cada flecha que agregamos a D para construir su cerradura transitiva está contenida en $\mathfrak{C}(D_1)$ o está contenida en $\mathfrak{C}(D_2)$ y se sigue que $\mathfrak{C}(D) = \mathfrak{C}(D_1) \cup \mathfrak{C}(D_2)$. Por lo tanto, bastará probar que $\mathfrak{C}(D_i), i = 1, 2$ es transitiva.

Sean u, v y w vértices distintos en $\mathfrak{C}(D_i)$ tales que (u, v) y (v, w) son flechas en $\mathfrak{C}(D_i)$, entonces en D_i tenemos una $uv-$trayectoria dirigida monocromática T_1 y una $vw-$trayectoria dirigida monocromática T_2. Si las trayectorias T_1 y T_2 son del mismo color, entonces por el Teorema 1.1.1, $T_1 \cup T_2$ contiene una $uw-$trayectoria dirigida monocromática en D_i y por lo tanto, tenemos la flecha (u, w) en $\mathfrak{C}(D_i)$. Y si las trayectorias T_1 y T_2 son de distinto color, entonces por el Lema 3.1.2 tenemos una $uw-$trayectoria dirigida monocromática en D_i y por lo tanto, a la flecha (u, w) en $\mathfrak{C}(D_i)$.

Concluimos que $\mathfrak{C}(D)$ es unión de dos digráficas transitivas. ■

Corolario 3.1.5 *Sea D una digráfica $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de D tales que: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, colores($D_1$)$\cap$ colores(D_2) $= \emptyset$ y cada D_i, $i = 1, 2$ es transitiva en cada cambio de color. Entonces $\mathfrak{C}(D)$ tiene núcleo.*

Demostración. Se sigue directamente de los Teoremas 3.1.3 y 3.1.4. ■

Finalmente, en el siguiente corolario damos condiciones suficientes para que las digráficas transitivas en cada cambio de color tengan núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Corolario 3.1.6 *Sea D una digráfica $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de D tales que: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, colores($D_1$)$\cap$ colores(D_2) $= \emptyset$ y cada D_i, $i = 1, 2$ es transitiva en cada cambio de color. Entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.*

Demostración. Se sigue del hecho que D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas si y sólo si $\mathfrak{C}(D)$ tiene núcleo. ■

3.2. Digráficas casitransitivas en cada cambio de color

Iniciaremos esta sección dando la definición de digráfica casitransitiva en cada cambio de color, para después demostrar 2 lemas de gran utilidad que se refieren a las propiedades de las digráficas casitransitivas en cada cambio de color.

Definición 3.2.1 *Una digráfica D, m-coloreada es* **casitransitiva en cada cambio de color** *si $(u, v) \in F(D)$ de color a y $(v, w) \in F(D)$ de color b con $u \neq w$ y $a \neq b$ implica que $(u, w) \in F(D)$ ó $(w, u) \in F(D)$ de cualquier color.*

Lema 3.2.1 *Sea D una digráfica m-coloreada tal que D es casitransitiva en cada cambio de color y todo C_3 de D es monocromático. Si en la digráfica D tenemos T*

una uv-trayectoria dirigida monocromática de color a y (v, x) es una flecha de color b con $a \neq b$ y $x \neq u$, entonces en D tenemos una $ux-$trayectoria dirigida monocromática.

Demostración.

Sean T una $uv-$trayectoria dirigida monocromática de color a y (v, x) una flecha de color b en D. Analizaremos dos posibles casos:

Caso 1. $x \in V(T)$. El resultado es inmediato, pues claramente tenemos una $ux-$trayectoria dirigida monocromática en D, véase la Figura 3.8.

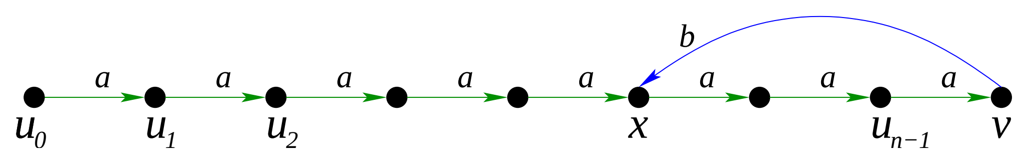

Figura 3.8: $ux-$trayectoria dirigida monocromática.

Caso 2. $x \notin V(T)$. Aplicaremos inducción sobre $\ell(T)$. Si $\ell(T) = 1$, entonces en la digráfica D tenemos a las flechas (u, v) y (v, x) de distinto color. Así, dado que D es casitransitiva en cada cambio de color, entonces tenemos en D a la flecha (u, x) o a la flecha (x, u). Supongamos que $(x, u) \in F(D)$, entonces (u, v, x, u) es un ciclo dirigido no monocromático de longitud 3 en D contradiciendo que todo C_3 en D es monocromático. Por lo tanto, $(x, u) \notin F(D)$, lo cual implica que $(u, x) \in F(D)$ y se sigue el resultado, véase la Figura 3.9.

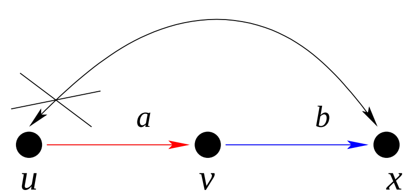

Figura 3.9: $(u, x) \in F(D)$.

Supongamos que el Lema 3.2.1 se tiene para toda trayectoria dirigida monocromática T con $\ell(T) = n - 1$. Sea $T = (u = u_0, \ldots, u_n = v)$ una trayectoria dirigida monocromática de longitud n. Considerando a las flechas $(u_{n-1}, u_n = v)$ y (v, x) tenemos en D a la flecha (u_{n-1}, x) o a la flecha (x, u_{n-1}), ya que las flechas $(u_{n-1}, u_n = v)$ y (v, x) son de distinto color (D es casitransitiva en cada cambio de color). Supongamos que tenemos a la flecha (x, u_{n-1}), entonces (u_{n-1}, v, x, u_{n-1}) es un ciclo dirigido no monocromático de longitud 3 en D, contradiciendo que todo C_3 en D es monocromático. Por lo tanto, $(x, u_{n-1}) \notin F(D)$, lo cual implica que $(u_{n-1}, x) \in F(D)$, véase la Figura 3.10.

Sea $T' = (u_0, \ldots, u_{n-1})$, analizaremos dos posibles casos:

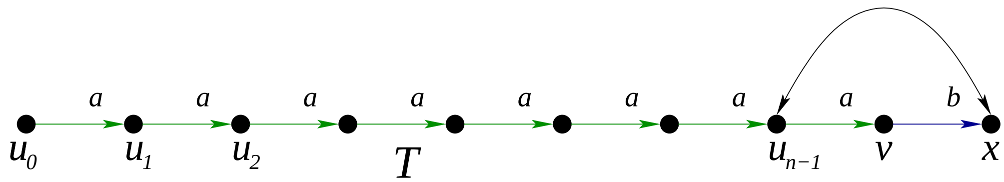

Figura 3.10: $(u_{n-1}, x) \in F(D)$.

Caso 2.1. *color*$(u_{n-1}, x) =$ *color*(T). En este caso $T' \cup (u_{n-1}, x)$ es una $ux-$trayectoria dirigida monocromática en D y se tiene el resultado, véase la Figura 3.11.

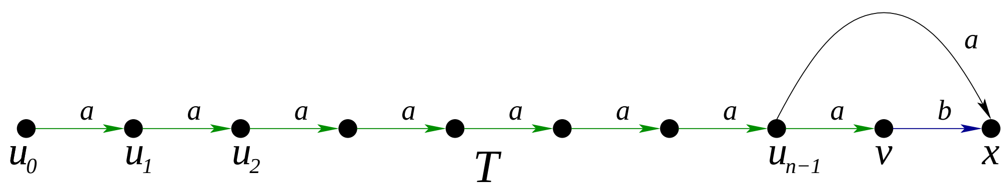

Figura 3.11: $T' \cup (u_{n-1}, x)$ es una $ux-$trayectoria dirigida monocromática en D.

Caso 2.2. *color*$(u_{n-1}, x) \neq$ *color*(T). En este caso T' y la flecha (u_{n-1}, x) satisfacen la hipótesis de inducción pues $\ell(T') = n - 1$ y por lo tanto, tenemos una $ux-$trayectoria dirigida monocromática en D y se sigue el resultado, véase la Figura 3.12.

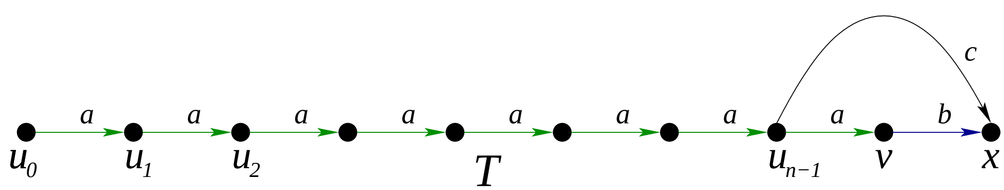

Figura 3.12: T' y la flecha (u_{n-1}, x) satisfacen la hipótesis de inducción.

Esto finaliza la prueba. ■

Lema 3.2.2 *Sea D una digráfica m-coloreada tal que D es casitransitiva en cada cambio de color y todo C_3 de D es monocromático. Si en la digráfica D tenemos T_1 una uv-trayectoria dirigida monocromática de color a y T_2 una vw-trayectoria dirigida monocromática de color b con $u \neq w$ y $a \neq b$, entonces en D tenemos una $uw-$trayectoria dirigida monocromática.*

Demostración. Sean T_1 una uv-trayectoria dirigida monocromática de color a y T_2 una vw-trayectoria dirigida monocromática de color b en D. Aplicaremos inducción sobre $\ell(T_2)$. Si $\ell(T_2) = 1$, el resultado se sigue del Lema 3.2.1. Supongamos que se tiene el Lema 3.2.2 para toda trayectoria dirigida monocromática T_2 con $\ell(T_2) = m - 1$. Sea $T_2 = (v = v_0, \ldots, v_m = w)$ una trayectoria dirigida monocromática de longitud m. Dado que el $color(T_1) \neq color(T_2)$ y considerando a la trayectoria T_1 y a la flecha (v, v_1) estas satisfacen la base de inducción, por lo tanto, tenemos una uv_1-trayectoria dirigida monocromática en D, llamémosle T_3, ver la Figura 3.13.

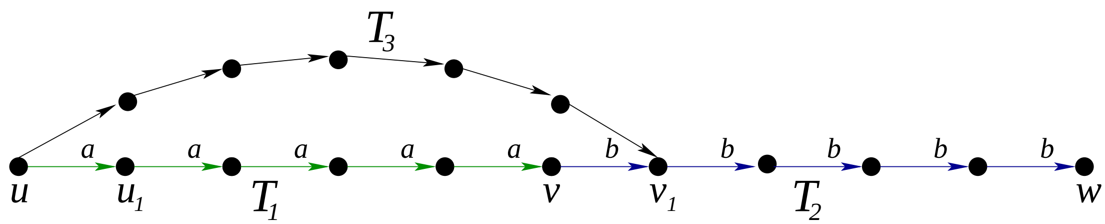

Figura 3.13: T_3 es una uv_1- trayectoria dirigida monocromática.

Sea $T'_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$. Analizaremos dos posibles casos:

Caso 1. $color(T_3) = color(T_2)$. En este caso por el Teorema 1.1.1, $T_3 \cup T'_2$ contiene una $uw-$trayectoria dirigida monocromática en D y se tiene el resultado, véase la Figura 3.14.

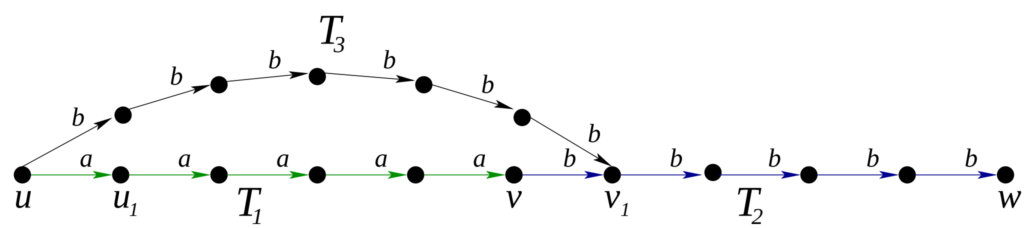

Figura 3.14: $T_3 \cup T'_2$ contiene una $uw-$trayectoria dirigida monocromática.

Caso 2. $color(T_3) \neq color(T_2)$. En este caso las trayectorias T_3 y T'_2 satisfacen la hipótesis de inducción pues $\ell(T'_2) = m - 1$ y por lo tanto tenemos una $uw-$trayectoria dirigida monocromática en D y se sigue el resultado, véase la Figura 3.15.

Finalmente, se tiene el resultado deseado. ■

El siguiente teorema nos será de gran utilidad para demostrar condiciones suficientes para que las digráficas casitransitivas en cada cambio de color tengan núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Teorema 3.2.3 *Sea D una digráfica $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de D tales que: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, colores$(D_1) \cap$ colores$(D_2) = \emptyset$; cada D_i, $i = 1, 2$ es casitransitiva en cada cambio de*

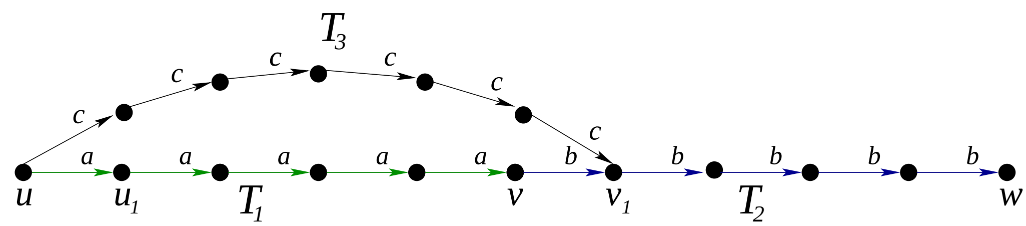

Figura 3.15: T_3 y T_2' satisfacen la hipótesis de inducción.

color y todo C_3 en cada $D_i, i = 1, 2$ es monocromático. Entonces $\mathfrak{C}(D)$ es unión de dos digráficas transitivas.

Demostración.

Dado que colores$(D_1)\cap$ colores$(D_2) = \emptyset$, observamos que cada trayectoria dirigida monocromática en D está contenida en D_1 o está contenida en D_2. Así, cada flecha que agregamos a D para construir su cerradura transitiva está contenida en $\mathfrak{C}(D_1)$ o está contenida en $\mathfrak{C}(D_2)$ y se sigue que $\mathfrak{C}(D) = \mathfrak{C}(D_1) \cup \mathfrak{C}(D_2)$. Por lo tanto, bastará probar que $\mathfrak{C}(D_i), i = 1, 2$ es transitiva.

Sean u, v y w vértices distintos en $\mathfrak{C}(D_i)$ tales que (u, v) y (v, w) son flechas en $\mathfrak{C}(D_i)$, entonces en D_i tenemos una $uv-$trayectoria dirigida monocromática T_1 y una $vw-$trayectoria dirigida monocromática T_2. Si las trayectorias T_1 y T_2 son del mismo color, entonces por el Teorema 1.1.1, $T_1 \cup T_2$ contiene una $uw-$trayectoria dirigida monocromática y por lo tanto, tenemos la flecha (u, w) en $\mathfrak{C}(D_i)$. Y si las trayectorias T_1 y T_2 son de distinto color, entonces por el Lema 3.2.2, tenemos una $uw-$trayectoria dirigida monocromática en D_i y por lo tanto, a la flecha (u, w) en $\mathfrak{C}(D_i)$.

Concluimos que $\mathfrak{C}(D)$ es unión de dos digráficas transitivas. ■

Corolario 3.2.4 *Sea D una digráfica $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de D tales que: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, colores$(D_1)\cap$ colores$(D_2) = \emptyset$; cada D_i, $i = 1, 2$ es casitransitiva en cada cambio de color y todo C_3 en cada $D_i, i = 1, 2$ es monocromático. Entonces $\mathfrak{C}(D)$ tiene núcleo.*

Demostración. Se sigue directamente de los Teoremas 3.1.3 y 3.2.3. ■

Finalmente, en el siguiente corolario damos condiciones suficientes para que las digráficas casitransitivas en cada cambio de color tengan núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Corolario 3.2.5 *Sea D una digráfica $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de D tales que: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, colores$(D_1)\cap$ colores$(D_2) = \emptyset$; cada D_i, $i = 1, 2$ es casitransitiva en cada cambio de color y todo C_3 en cada $D_i, i = 1, 2$ es monocromático. Entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.*

Demostración. Se sigue del hecho que D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas si y sólo si $\mathfrak{C}(D)$ tiene núcleo. ■

Capítulo 4

$\gamma-$ciclos en digráficas coloreadas en sus flechas

En este capítulo consideraremos digráficas finitas $m-$coloreadas. Sands, Sauer y Woodrow, demuestran en [26] que si D es una digráfica cuyas flechas son coloreadas con dos colores, de tal manera que D no contiene trayectorias infinitas exteriores monocromáticas, entonces existe un conjunto independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas S de vértices de D tal que, para cada vértice x que no está en S, existe una trayectoria dirigida monocromática de x a un vértice de S.

Ya antes mencionamos que el teorema de Sands, Sauer y Woodrow puede escribirse en términos de núcleos de la siguiente manera:

Teorema 4.0.6 *Sea D una digráfica. Si existen dos subdigráficas transitivas D_1 y D_2 de la digráfica D tales que: $D = D_1 \cup D_2$, $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$ y D_i no contiene trayectorias infinitas exteriores para cada $i \in \{1, 2\}$. Entonces D tiene núcleo.*

El resultado principal de este capítulo establece que D una digráfica finita $m-$coloreada tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas si existe una partición de la digráfica D en dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 tales que:

i. $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, colores($D_1$)$\cap$ colores(D_2) $= \emptyset$;

ii. D_i no contiene $\gamma-$ciclos para $i \in \{1, 2\}$;

iii. Si D contiene un $\widehat{C_3}(x_0, z, w, x_0)$, entonces existe una x_0w-trayectoria dirigida monocromática en D o existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D;

iv. Si D contiene un $\widehat{P_3}(u, z, w, x_0)$, entonces al menos una de las siguientes trayectorias dirigidas monocromáticas se tiene: $uw-$trayectoria dirigida monocromática en D, $wu-$trayectoria dirigida monocromática en D, x_0u-trayectoria dirigida monocromática en D, ux_0-trayectoria dirigida monocromática en D, x_0w-trayectoria dirigida monocromática en D, $zu-$trayectoria dirigida monocromática en D, zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D, x_0z-trayectoria dirigida monocromática en D_1.

Entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

En la demostración de este teorema usamos una técnica similar a la empleada por Sands, Sauer y Woodrow; nótese que este teorema es una generalización del Teorema 4.0.6.

4.1. $\gamma-$ciclos

Sea D una digráfica $m-$ coloreada tal que existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de la digráfica D, tales que: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$ y colores$(D_1)\cap$ colores$(D_2) = \emptyset$.

Definición 4.1.1 *Denotaremos por* $\widehat{C_3}(u, v, w, u)$ *al camino dirigido cerrado* $C = (u = u_0, \ldots, u_k = v = v_0, \ldots, v_m = w = w_0, \ldots, w_n = u_0 = u)$ *que satisface:*

i. $T_1 = (u = u_0, \ldots, u_k = v)$ *es un camino dirigid monocromático de color* a *contenido en* D_1*,*

ii. $T_2 = (v = v_0, \ldots, v_m = w)$ *es un camino dirigido monocromático de color* b *contenido en* D *y*

iii. $T_3 = (w = w_0, \ldots, w_n = u)$ *es un camino dirigido monocromático de color* c *contenido en* D_2*,*

donde $a \neq b$*,* $b \neq c$ *y* $a \neq c$*.*

Definición 4.1.2 *Denotaremos por* $\widehat{P_3}(u, v, w, x)$ *al camino dirigido* $P = (u = u_0, \ldots, u_k = v = v_0, \ldots, v_m = w = w_0, \ldots, w_n = x)$ *que satisface:*

i. $T_1 = (u = u_0, \ldots, u_k = v)$ *es un camino dirigido monocromático de color* a *contenido en* D_1*,*

ii. $T_2 = (v = v_0, \ldots, v_m = w)$ *es un camino dirigido monocromático de color* b *contenido en* D *y*

ii. $T_3 = (w = w_0, \ldots, w_n = x)$ *es un camino dirigido monocromático de color* c *contenido en* D_2*,*

donde $a \neq b$*,* $b \neq c$ *y* $a \neq c$*.*

Definición 4.1.3 *Sea* D *una digráfica* m*-coloreada. Un* γ*-ciclo en* D *es una sucesión de vértices distintos de* D*,* $\gamma = (u_0, u_1, ..., u_{n-1}, u_n = u_0)$ *tal que para cada* $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ *:*

i. Existe una u_iu_{i+1}*-trayectoria dirigida monocromática en* D *y*

ii. No existe ninguna $u_{i+1}u_i$*-trayectoria dirigida monocromática en* D*.*

(Obsérvese que los índices de los vértices están tomados mod n.) Véase la Figura 4.1.

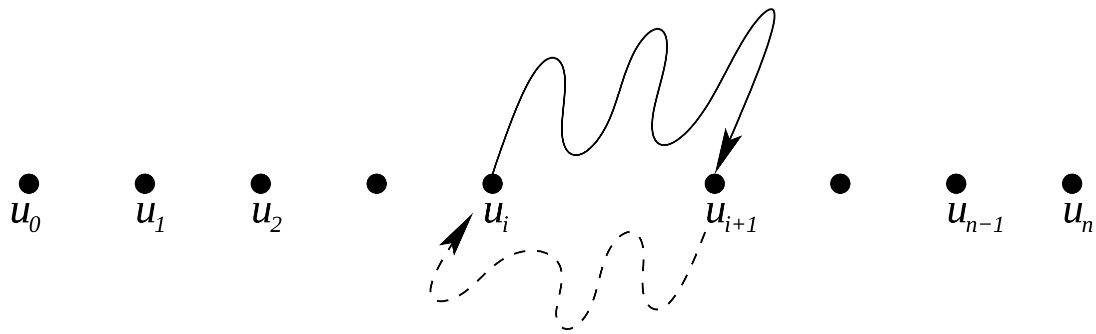

Figura 4.1: $\gamma = (u_0, u_1, ..., u_{n-1}, u_n = u_0)$.

4.2. $\gamma-$ciclos y trayectorias monocromáticas

Los siguientes lemas dan resultados acerca de digráficas que no contienen $\gamma-$ciclos y nos serán de gran utilidad en la demostración de nuestro teorema principal de este capítulo.

Lema 4.2.1 *Sea D una digráfica $m-$coloreada tal que no contiene $\gamma-$ciclos. Existe $x_0 \in V(D)$ tal que para cada $z \in V(D) - \{x_0\}$ si existe una x_0z-trayectoria dirigida monocromática contenida en D, entonces existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D.*

Demostración. Supongamos por contradicción que D es una digráfica como en las hipótesis del Lema 4.2.1 y que no existe un vértice x_0 que satisfaga la afirmación del Lema 4.2.1.

Sea $x_0 \in V(D)$, se sigue de nuestra suposición que existe $x_1 \in V(D) - \{x_0\}$ tal que existe una x_0x_1-trayectoria dirigida monocromática contenida en D y no existe ninguna x_1x_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D. De nuevo por nuestra suposición existe $x_2 \in V(D) - \{x_1\}$ tal que existe una x_1x_2-trayectoria dirigida monocromática contenida en D y no existe ninguna x_2x_1-trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Nuevamente, existe $x_3 \in V(D) - \{x_2\}$ tal que existe una x_2x_3-trayectoria dirigida monocromática contenida en D y no existe ninguna x_3x_2-trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Una vez elegidos de este modo $x_0, x_1, \ldots, x_n$; dada nuestra suposición podemos elegir $x_{n+1} \in V(D) - \{x_n\}$ de tal forma que existe una $x_nx_{n+1}-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D y no existe ninguna $x_{n+1}x_n-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D. De este modo, obtenemos una sucesión de vértices $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ tal que para cada $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ existe una $x_ix_{i+1}-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D y no existe ninguna $x_{i+1}x_i-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Ya que D es una digráfica finita existe $\{i, j\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $i < j$ tal que $x_j = x_i$. Sea $j_0 = min\{j \mid x_j = x_i \text{ para alguna } i < j\}$, y sea $i_0 \in \{0, 1, \ldots, j_0 - 1\}$ tal que $x_{i_0} = x_{j_0}$ (nótese que i_0 es único por la definición de j_0). Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i_0 = 0$ y $j_0 = n$. Así, $C = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_0)$ es una sucesión de n vértices distintos tal que para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, existe una $x_i x_{i+1}-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D y no existe ninguna $x_{i+1}x_i-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D (los índices de los vértices están tomados módulo n.) Por lo tanto, $C = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_0)$ es un $\gamma-$ciclo de D, lo cual contradice la hipótesis.

Concluimos que existe $x_0 \in V(D)$ tal que para cada $z \in V(D) - \{x_0\}$ si existe una $x_0 z-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D, entonces existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D. ∎

Sea D una digráfica $m-$coloreada tal que existen dos subdigráficas generadoras de D, D_1 y D_2 que satisfacen las siguientes condiciones: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$ y colores$(D_1)\cap$ colores$(D_2) = \emptyset$.

Sea $S \subseteq V(D)$ diremos que S es un seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas módulo D_2 de D si:

i. S es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas (ver Definición 1.3.4) y

ii. Para cada $z \in V(D) - S$, si existe una $Sz-$trayectoria dirigida monocromática contenida en $D - D_2 = D_1$, entonces existe una $zS-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Véase la Figura 4.2.

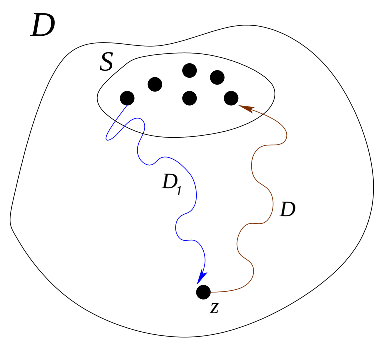

Figura 4.2: S es un seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas módulo D_2 de D.

Nótese que en la definición anterior D_1 y D_2 juegan un papel simétrico y por lo tanto, análogamente podemos definir seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas *mod* D_1 de D.

Lema 4.2.2 *Sea D una digráfica $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de la digráfica D tales que: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, colores$(D_1)\cap$ colores$(D_2) = \emptyset$ y D_1 no contiene $\gamma-$ciclos. Entonces existe $x_0 \in V(D)$ tal que $\{x_0\}$ es un seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas mod D_2 de D.*

Demostración. Probaremos que existe $x_0 \in V(D)$ tal que para cada $z \in V(D)-\{x_0\}$ si existe una x_0z-trayectoria dirigida monocromática contenida en $D - D_2 = D_1$, entonces existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D.

Ya que D_1 no contiene $\gamma-$ciclos se sigue del Lema 4.2.1 que existe $x_0 \in V(D)$ tal que para cada $z \in V(D) - \{x_0\}$ si existe una x_0z-trayectoria dirigida monocromática contenida en $D - D_2 = D_1$, entonces existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1. Por la definición de seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas *mod* D_2 de D se tiene que $\{x_0\}$ es un seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas *mod* D_2 de D. ■

Sea D una digráfica $m-$coloreada tal que existen dos subdigráficas generadoras de D, D_1 y D_2 que satisfacen las siguientes condiciones: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, colores($D_1$)$\cap$ colores(D_2) $= \emptyset$ y D_1 no contiene $\gamma-$ciclos.

Sea

$$\mathcal{S} = \{\emptyset \neq S \mid S \text{ es seminúcleo por trayectorias monocromáticas } mod D_2 \text{ de } D.\}$$

Nótese que por el Lema 4.2.2, existe un seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas *mod* D_2 de D y así $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

Denotemos por $D_{\mathcal{S}}$ la digráfica definida como sigue:

i. $V(D_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}$ (es decir, por cada elemento de $\mathcal{S}$ ponemos un vértice en $D_{\mathcal{S}}$) y

ii. $(S_1, S_2) \in F(D_{\mathcal{S}})$ si y sólo si para cada $s_1 \in S_1$ existe $s_2 \in S_2$ tal que $s_1 = s_2$ ó existe una s_1s_2-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2 y no existe ninguna s_2S_1-trayectoria dirigida monocromática contenida en D.

Lema 4.2.3 *Sea D una digráfica $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras de D, D_1 y D_2 tales que: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, colores($D_1$)$\cap$ colores(D_2) $= \emptyset$ y D_i no contiene $\gamma-$ciclos para $i \in \{1, 2\}$. Entonces, $D_{\mathcal{S}}$ es una digráfica acíclica.*

Demostración. Ya que por hipótesis D_1 no contiene γ-ciclos, se sigue del Lema 4.2.2 que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ y por lo tanto, la digráfica $D_{\mathcal{S}}$ está bien definida. Supongamos por contradicción que la digráfica $D_{\mathcal{S}}$ contiene algún ciclo dirigido, digamos $\mathcal{C} = (S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}, S_0)$ de longitud $n \geq 2$. Ya que $\mathcal{C}$ es un ciclo dirigido en $D_{\mathcal{S}}$ tenemos que $S_i \neq S_j$ siempre que $i \neq j$.

Afirmación 1. Existe $i_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ tal que para alguna $z \in S_{i_0}$, $z \notin S_{i_0+1}(mod\, n)$.

De no ser así, tendríamos que para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y cada $z \in S_i$ se tiene que $z \in S_{i+1}$, entonces $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq S_{n-1} \subseteq S_n = S_0$. Así, $S_0 \subseteq S_k \subseteq S_0$ para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ y se sigue que $S_k = S_0$ para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Por lo tanto, $S_i = S_j$ para cualesquiera i, j con $i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Así, tendríamos que $\mathcal{C} = (S_0)$, lo cual es una contradicción pues un ciclo posee al menos dos vértices distintos. $\triangle$

Afirmación 2. Si existe $i_0 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que para algunos $z \in S_{i_0}$ y $w \in S_{i_0+1}(mod\ n)$ se tiene que existe una $zw-$trayectoria dirigida monocromática. Entonces existe $j_0 \neq i_0$, $j_0 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que $w \in S_{j_0}$ y $w \notin S_{j_0+1}(mod\ n)$. Véase la Figura 4.3.

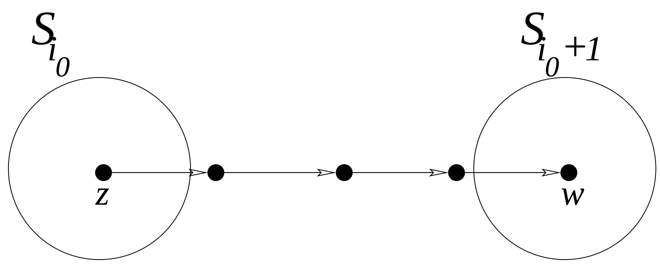

Figura 4.3: zw-trayectoria dirigida monocromática.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i_0 = 0$. Primero observemos que $w \notin S_n = S_0$ ya que de lo contrario tendríamos una $zw-$trayectoria dirigida monocromática con $\{z, w\} \subseteq S_0$, contradiciendo que S_0 es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas. Como $w \in S_1$, sea $j_0 = max\{i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \mid w \in S_i\}$ (nótese que por las dos observaciones anteriores j_0 está bien definido). Así, $w \in S_{j_0}$ y $w \notin S_{j_0+1}$. $\triangle$

Ahora se sigue de la Afirmación 1 que existen $i_0 \in \{0, \ldots, n-1\}$ y $t_0 \in S_{i_0}$ tales que $t_0 \notin S_{i_0+1}$. Ya que $(S_{i_0}, S_{i_0+1}) \in F(D_{\mathbb{S}})$ se sigue que existe $t_1 \in S_{i_0+1}$ tal que existe una t_0t_1-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2 y no existe ninguna $t_1S_{i_0}-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D (en particular no existe t_1t_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D.) De la Afirmación 2, se sigue que existe un índice $i_1 \in \{0, \ldots, n-1\}$ tal que $t_1 \in S_{i_1}$ y $t_1 \notin S_{i_1+1}$ y ya que $(S_{i_1}, S_{i_1+1}) \in F(D_{\mathbb{S}})$ se sigue que existe $t_2 \in S_{i_1+1}$ tal que existe una t_1t_2-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2 y no existe ninguna $t_2S_{i_1}-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D (en particular no existe t_2t_1-trayectoria dirigida monocromática contenida en D.) Nuevamente de la Afirmación 2, se sigue que existe un índice $i_2 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que $t_2 \in S_{i_2}$ y $t_2 \notin S_{i_2+1}$ y como $(S_{i_2}, S_{i_2+1}) \in F(D_{\mathbb{S}})$ tenemos que existe $t_3 \in S_{i_2+1}$ tal que existe una t_2t_3-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2 y no existe ninguna $t_3S_{i_2}-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D (en particular no existe t_3t_2-trayectoria dirigida monocromática contenida en D.) Una vez elegidos de este modo $t_0, t_1, \ldots, t_k$; de la Afirmación 2 se sigue que existe un índice $i_k \in \{0, \ldots, n-1\}$ tal que $t_k \in S_{i_k}$ y $t_k \notin S_{i_k+1}$ y ya que $(S_{i_k}, S_{i_k+1}) \in F(D_{\mathbb{S}})$ se sigue que existe $t_{k+1} \in S_{i_k+1}$ tal que existe una $t_kt_{k+1}-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2 y no existe ninguna $t_{k+1}S_{i_k}-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D (en particular no existe $t_{k+1}t_k-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D.) De esta forma obtenemos una sucesión de vértices $(t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots)$ tal que para cada $i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ existe una $t_it_{i+1}-$trayectoria dirigida monocromática contenida en

D_2 y no existe ninguna $t_{i+1}t_i-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Ya que D es una digráfica finita existe $\{i,j\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $i < j$ tal que $t_j = t_i$. Sea $j_0 = min\{j \mid t_j = t_i \text{ para alguna } i < j\}$, y sea $i_0 \in \{0, 1, \ldots, j_0 - 1\}$ tal que $t_{i_0} = t_{j_0}$ (nótese que i_0 es único por la definición de j_0.) Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i_0 = 0$ y $j_0 = n$. Así, $C = (t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = t_0)$ es una sucesión de n vértices distintos tal que para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, existe una $t_it_{i+1}-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2 y no existe ninguna $t_{i+1}t_i-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D (los índices de los vértices están tomados módulo n). Esto contradice el hecho de que D_2 no contiene $\gamma-$ciclos. Por lo tanto, $D_{\mathcal{S}}$ es una digráfica acíclica. ■

4.3. $\gamma-$ciclos y núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas

El siguiente teorema es el teorema principal de este capítulo. La idea principal en la demostración es considerar a la digráfica $D_{\mathcal{S}}$ y seleccionar $S \in V(D_{\mathcal{S}})$ tal que $\delta^+_{D_{\mathcal{S}}}(S) = 0$ (tal S existe, pues probamos que $D_{\mathcal{S}}$ es acíclica) y demostrar que S es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D.

Teorema 4.3.1 *Sea D una digráfica finita $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de la digráfica D tales que:*

i. $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, *colores*$(D_1) \cap$ *colores*$(D_2) = \emptyset$;

ii. *D_i no contiene $\gamma-$ciclos para $i \in \{1, 2\}$;*

iii. *Si D contiene un $\widehat{C_3}(x_0, z, w, x_0)$, entonces existe una x_0w-trayectoria dirigida monocromática en D o existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D;*

iv. *Si D contiene un $\widehat{P_3}(u, z, w, x_0)$, entonces al menos una de las siguientes trayectorias dirigidas monocromáticas se tiene: $uw-$trayectoria dirigida monocromática en D, $wu-$trayectoria dirigida monocromática en D, x_0u-trayectoria dirigida monocromática en D, ux_0-trayectoria dirigida monocromática en D, x_0w-trayectoria dirigida monocromática en D, $zu-$trayectoria dirigida monocromática en D, zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D, x_0z-trayectoria dirigida monocromática en D_1.*

Entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Demostración. Considérese la digráfica $D_{\mathcal{S}}$ de la digráfica D (nótese que dado que D_1 no contiene γ-ciclo, se sigue del Lema 4.2.2 que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ y por lo tanto, la digráfica $D_{\mathcal{S}}$ está bien definida.)

Ya que $D_{\mathfrak{S}}$ es una digráfica finita y por el Lema 4.2.3, es acíclica, se sigue del Teorema 1.1.3 que $D_{\mathfrak{S}}$ contiene al menos un vértice de exgrado cero. Sea $S \in V(D_{\mathfrak{S}})$ tal que $\delta^+_{D_{\mathfrak{S}}}(S) = 0$.

Afirmamos que S es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D.

Supongamos por contradicción que S no es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D. Ya que $S \in V(D_{\mathfrak{S}})$, tenemos que S es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en D.

Sea

$$X = \{z \in V(D) \mid \text{no existe } zS-\text{trayectoria dirigida monocromática en } D.\}$$

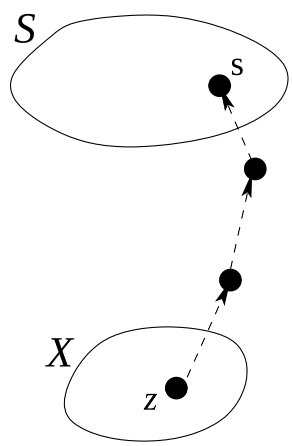

Figura 4.4: $X \subseteq V(D)$.

Se sigue de nuestra suposición que $X \neq \emptyset$. Ya que $D[X]$ es una subdigráfica inducida de D, tenemos que $D[X]$ satisface las hipótesis (i) y (ii) del Teorema 4.3.1 y en particular $D[X]$ satisface las hipótesis del Lema 4.2.2. Así, se sigue del Lema 4.2.2 que existe $x_0 \in X$ tal que para cada $z \in X - \{x_0\}$ se cumple que si existe una x_0z-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1, entonces existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D.

Sea

$$T = \{z \in S \mid \text{no existe } zx_0-\text{trayectoria dirigida monocromática en } D_2.\}$$

Por la definición de T tenemos que para cada $z \in (S-T)$ existe zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2. Véase la Figura 4.5.

Nótese que ya que por hipótesis se tiene que colores$(D_1)\cap$ colores$(D_2) = \emptyset$, se sigue que toda trayectoria dirigida monocromática de D está contenida en D_1 o está contenida en D_2.

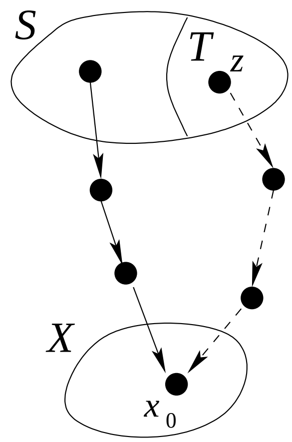

Figura 4.5: $T \subseteq S$.

Afirmación 1. $T \cup \{x_0\}$ es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en D.

Claramente T es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas ($T \subseteq S$ y $S \in \mathcal{S}$) y $\{x_0\}$ es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas.

i. No existen $T\{x_0\}-$trayectorias dirigidas monocromáticas contenidas en D.

Supongamos por contradicción que existe alguna $T\{x_0\}-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Sea α tal trayectoria. Por la definición de T y por la hipótesis de que colores(D_1)$\cap$ colores(D_2) $= \emptyset$ se sigue que α está contenida en D_1 y como $T \subseteq S$ y $S \in \mathcal{S}$ se sigue que existe una x_0S-trayectoria dirigida monocromática contenida en D, contradiciendo que $x_0 \in X$.

ii. No existen $\{x_0\}T-$trayectorias dirigidas monocromáticas contenidas en D.

Se sigue directamente del hecho que $T \subseteq S$ y $x_0 \in X$. $\triangle$

Afirmación 2. Sea $z \in V(D) - (T \cup \{x_0\})$. Si existe una $(T \cup \{x_0\})z-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1, entonces existe una $z(T \cup \{x_0\})-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D.

Caso 1: Existe x_0z-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1.

Probaremos que existe una $z(T \cup \{x_0\})-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D.

Sea α_1 una x_0z-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1.

Si $z \in X$, entonces se sigue de la elección de x_0, que existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Por lo tanto, existe una $z(T \cup \{x_0\})-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D y se tendría probada la Afirmación 2. Así, podemos suponer que $z \notin X$.

Ya que $z \notin X$, se sigue de la definición de X que existe una $zS-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D, sea α_2 tal trayectoria, digamos que α_2 termina en w. Si $w \in T$, entonces α_2 es una $z(T \cup \{x_0\})-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D y la Afirmación 2 queda demostrada. Así, supondremos que $w \in (S - T)$. Ya que $w \in (S - T)$, por la definición de T se tiene que existe una wx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2, sea α_3 tal trayectoria.

Más aún color$(\alpha_1) \neq$ color(α_2), de otro modo, color$(\alpha_1) =$ color(α_2) y existe una x_0w-trayectoria dirigida monocromática contenida en $\alpha_1 \cup \alpha_2$ contradiciendo que $x_0 \in X$ y $w \in S$. Además, podemos suponer que color$(\alpha_2) \neq$ color(α_3), de otro modo, $\alpha_2 \cup \alpha_3$ contiene una zx_0-trayectoria dirigida monocromática y por lo tanto, existe una $z(T \cup \{x_0\})-$trayectoria dirigida monocromática en D y quedaría demostrada la Afirmación 2. También color$(\alpha_1) \neq$ color(α_3) pues α_1 está contenida en D_1 y α_3 está contenida en D_2 y por las hipótesis colores$(D_1)\cap$ colores$(D_2) = \emptyset$. Ver la Figura 4.6.

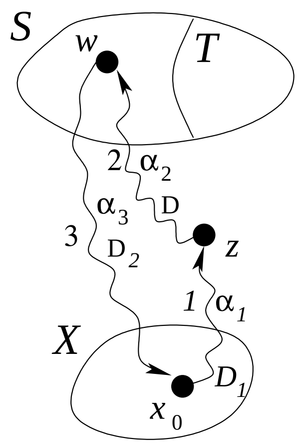

Figura 4.6: $\widehat{C_3}(x_0, z, w, x_0)$ en D.

Así, tenemos un $\widehat{C_3}(x_0, z, w, x_0)$ en D y por hipótesis existe una x_0w-trayectoria dirigida monocromática en D o existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D.

Veamos que ninguna de estas dos trayectorias dirigidas monocromáticas puede existir en D.

i. No existe x_0w-trayectoria dirigida monocromática en D, se sigue directamente de las definiciones de X y S pues $x_0 \in X$ y $w \in S$.

ii. No existe zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D pues de lo contrario se tendría demostrada la Afirmación 2.

Caso 2: Existe una $Tz-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1.

Probaremos que existe una $z(T \cup \{x_0\})-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D.

Ya que $T \subseteq S$ y $S \in \mathcal{S}$, se sigue que existe una $zS-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Si existiera una $zT-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D se tendría probada la Afirmación 2. Así, podemos suponer que existe una $z(S-T)-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Sean α_1 una $uz-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1 con $u \in T$ y α_2 una $zw-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D con $w \in (S-T)$. Ya que $w \in (S-T)$ se sigue de la definición de T que existe α_3 una wx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2.

Nuevamente tenemos que color$(\alpha_1) \neq$ color(α_2) de otro modo color(α_1) = color(α_2) y existe una $uw-$trayectoria dirigida monocromática contenida en $\alpha_1 \cup \alpha_2$, con $\{u, w\} \subseteq S$, contradiciendo que S es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas. Además supondremos que color$(\alpha_2) \neq$ color(α_3) pues si color(α_2) = color(α_3), entonces $\alpha_2 \cup \alpha_3$ contiene una zx_0-trayectoria dirigida monocromática y por lo tanto existe una $z(T \cap \{x_0\})-$trayectoria dirigida monocromática en D y se tendría probada la Afirmación 2. También color$(\alpha_1) \neq$ color(α_3) pues α_1 está contenida en D_1 y α_3 está contenida en D_2 y por la hipótesis colores$(D_1)\cap$ colores$(D_2) = \emptyset$. Ver la Figura 4.7.

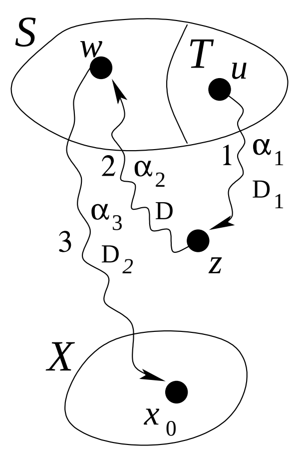

Figura 4.7: $\widehat{P_3}(u, z, w, x_0)$. en D.

Por lo tanto, tenemos un $\widehat{P_3}(u, z, w, x_0)$ en D y por hipótesis existe alguna de las siguientes trayectorias dirigidas monocromáticas: $uw-$trayectoria dirigida monocromática en D, $wu-$trayectoria dirigida monocromática en D, x_0u-trayectoria dirigida monocromática en D, ux_0-trayectoria dirigida monocromática en D, x_0w-trayectoria dirigida monocromática en D, $zu-$trayectoria dirigida monocromática en D, zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D, x_0z-trayectoria dirigida monocromática en D_1.

Veamos que ninguna de estas trayectorias dirigidas monocromáticas existe en D.

i. No existe $uw-$trayectoria dirigida monocromática en D ya que contradiría el hecho de que $\{u,w\} \subseteq S$ y S es seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas *mod* D_2 de D.

ii. No existe $wu-$trayectoria dirigida monocromática en D por la misma razón que en (i).

iii. No existe x_0u-trayectoria dirigida monocromática en D pues ya probamos que $T \cup \{x_0\}$ es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en D.

iv. No existe ux_0-trayectoria dirigida monocromática en D por la misma razón que en (iii).

v. No existe x_0w-trayectoria dirigida monocromática en D se sigue directamente de las definiciones de X y S pues $x_0 \in X$ y $w \in S$.

vi. No existe $zu-$trayectoria dirigida monocromática en D pues de lo contrario se tendría probada la Afirmación 2.

vii. No existe zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D por la misma razón que en (vi).

viii. No existe x_0z-trayectoria dirigida monocromática en D_1 pues de lo contrario tendríamos un $\widehat{C_3}(x_0,z,w,x_0)$ y se tendría el caso 1. $\triangle$

De las Afirmaciones 1 y 2 se sigue que $T \cup \{x_0\} \in \mathcal{S}$. Por lo tanto, $T \cup \{x_0\} \in V(D_{\mathcal{S}})$.

Tenemos que $(S, T \cup \{x_0\}) \in F(D_{\mathcal{S}})$ ya que $T \subseteq S$, $x_0 \in X$ y para cada $s \in S$ tal que $s \notin T$ existe una sx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2 y no existe ninguna x_0S-trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Pero esto contradice el hecho de que $\delta^+_{D_{\mathcal{S}}}(S) = 0$.

Por lo tanto, S es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en D y el Teorema 4.3.1 queda demostrado. ■

Observación 4.3.1 *Nótese que el Teorema 4.3.1 puede ser aplicado a todas aquellas digráficas que no contienen $\gamma-$ciclos. Generalizaciones de muchos resultados previos son obtenidas como consecuencia directa del Teorema 4.3.1.*

A continuación damos algunas definiciones para después dar una lista de teoremas que satisfacen no contener $\gamma-$ciclos.

Definición 4.3.1 *Una digráfica D es casitransitiva si para $\{u,v,w\} \subseteq V(D)$ tales que $\{(u,v), (v,w)\} \subseteq F(D)$ implica que $(u,w) \in F(D)$ ó $(w,u) \in F(D)$.*

Definición 4.3.2 *Sea D una digráfica y $u \in V(D)$ denotaremos por:*

$$F^+(u) = \{(u,v) \in F(D) \mid v \in V(D)\}.$$

$F^+(u)$ es monocromático si todos sus elementos tienen el mismo color.

Definición 4.3.3 *Decimos que D es 3-casitransitiva si para cada $u, v \in V(D)$ tal que existe una uv-trayectoria dirigida de longitud 3 se tiene que $(u,v) \in F(D)$ ó $(v,u) \in F(D)$.*

Definición 4.3.4 *Denotamos por T_4 a la siguiente digráfica, ver la Figura 4.8:*

i. $V(T_4) = \{u, v, w, x\}$ *y*

ii. $F(T_4) = \{(u,v), (v,w), (w,x), (u,x)\}$.

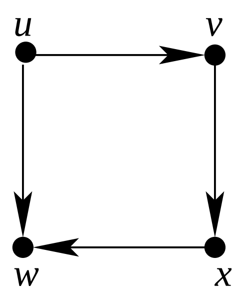

Figura 4.8: T_4.

Definición 4.3.5 $\widetilde{T}_6$ *es el torneo bipartito definido como sigue, véase la Figura 4.9:*

i. $V(\widetilde{T}_6) = \{u, v, w, x, y, z\}$,

ii. $F(\widetilde{T}_6) = \{(u,w), (v,w), (w,x), (w,z), (x,y), (y,u), (y,v), (z,y)\}$

con $\{(u,w), (w,x), (y,u), (z,y)\}$ *de color* 1 *y* $\{(v,w), (w,z), (x,y), (y,v)\}$ *de color* 2.

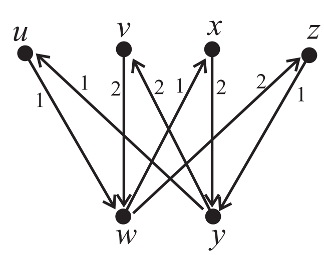

Figura 4.9: $\widetilde{T}_6$.

Definición 4.3.6 *Definimos $\overrightarrow{T}_8$ como la siguiente digráfica (ver la Figura 4.10):*

i. $V(\overrightarrow{T}_8) = \{s, t, u, v, w, x, y, z\}$,

ii. $F(\overrightarrow{T}_8) = \{(s,t), (s,x), (t,u), (t,y), (u,v), (u,z), (v,w), (v,s), (w,x), (w,t), (x,y), (x,u), (y,z), (y,v), (z,s), (z,w)\}$,

con $\{(s,t), (s,x), (t,u), (u,v), (u,z), (v,w), (x,u)\}$ *de color* 1 *y todas las demás flechas en* $\overrightarrow{T}_8$ *de color* 2.

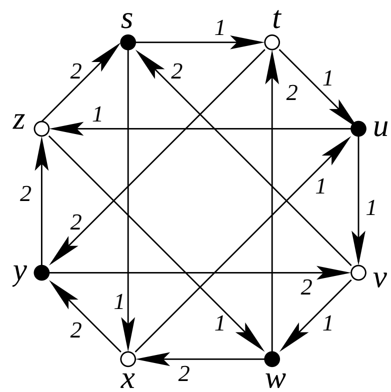

Figura 4.10:

Definición 4.3.7 *Una $(2, k-2)-$subdivisión de C_2-bicolor es un ciclo $C = T_1 \cup T_2$, en donde T_1 es una trayectoria dirigida monocromática de longitud* 2 *de color a y T_2 es una trayectoria dirigida monocromática de longitud $k-2$ de color b, con $a \neq b$.*

Definición 4.3.8 *Sea T un torneo $m-$coloreado. Diremos que T tiene la propiedad PI_k si cumple una de las siguientes condiciones:*

i. Cada $C_k \subseteq T$ es a lo más bicolor y no es una $(2, k-2)-$subdivisión de C_2-bicolor y

ii. cada $C_t \subseteq T$ $(t < k)$ es a lo más bicolor (de manera que no es policromático).

Definición 4.3.9 *Una $(1, 1, k-2)-$subdivisión de C_3 $3-$coloreado es un ciclo $C = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ en donde T_1 es una trayectoria dirigida monocromática de longitud* 1 *de color a, T_2 es una trayectoria dirigida monocromática de longitud* 1 *de color b y T_3 es una trayectoria dirigida monocromática de longitud $k-2$ de color c, con $a \neq b$, $b \neq c$ y $a \neq c$.*

Definición 4.3.10 *Una $(1, 1, k-2)-$subdivisión de T_3 $3-$coloreado es un trayectoria $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ en donde T_1 es una trayectoria dirigida monocromática de longitud* 1 *de color a, T_2 es una trayectoria dirigida monocromática de longitud* 1 *de color b y T_3 es una trayectoria dirigida monocromática de longitud $k-2$ de color c, con $a \neq b$, $b \neq c$ y $a \neq c$.*

Definición 4.3.11 *Sea T un torneo $m-$coloreado. Diremos que T satisface la propiedad PII_k para algún entero fijo $k \geq 3$ si:*

i. *No existe alguna $(1, 1, k-2)-$subdivisión de C_3 $3-$coloreado en T,*

ii. *No existe alguna $(1, 1, k-2)-$subdivisión de T_3 $3-$coloreado en T y*

iii. *No existe alguna $(1, 1, t-2)-$subdivisión de C_3 $3-$coloreado en T, con $t < k$ y $t \geq 3$.*

A continuación damos una lista de teoremas que satisfacen no contener $\gamma-$ciclos.

Teorema 4.3.2 (H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy, G. Gaytán-Gómez [20]) *Sea D una digráfica $m-$ coloreada tal que todo ciclo dirigido en D es monocromático. Entonces D no contiene $\gamma-$ciclos.*

Teorema 4.3.3 (H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy, B. Zavala [18]) *Sea D una digráfica m-coloreada casitransitiva tal que para cada $u \in V(D)$, $F^+(u)$ es monocromático y D no contiene C_3 $3-$coloreados. Entonces D no contiene γ-ciclos.*

Teorema 4.3.4 (H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy, B. Zavala [19]) *Sea D una digráfica m-coloreada 3-casitransitiva tal que para cada $u \in V(D)$, $F^+(u)$ es monocromático. Si cada C_3, C_4 y T_4 contenido en D es casimonocromático, entonces D no contiene γ-ciclos.*

Teorema 4.3.5 (H. Galeana-Sánchez [10]) *Sea T un torneo m-coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud a lo más 4 es un ciclo casimonocromático. Entonces D no contiene $\gamma-$ciclos.*

Teorema 4.3.6 (H. Galeana-Sánchez [10]) *Sea T un torneo m-coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en T es un ciclo monocromático. Entonces D no contiene $\gamma-$ciclos.*

Teorema 4.3.7 (H. Galeana-Sánchez [10]) *Sea T un torneo m-coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en T es $\mathfrak{C}(T)$ monocromático. Entonces D no contiene $\gamma-$ciclos.*

Teorema 4.3.8 (H. Galeana-Sánchez [11]) *Sea D una digráfica $m-$coloreada obtenida de la eliminación de una única flecha (u, v) de algún torneo T $m-$coloreado (es decir, $D \cong T - (u, v)$). Si cada ciclo dirigido contenido en D de longitud a lo más 4 es casimonocromático, entonces D no contiene $\gamma-$ciclos.*

Teorema 4.3.9 (H. Galeana-Sánchez y R. Rojas-Monroy [14]) *Sea T un torneo bipartito m-coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 4 es casimonocromático, cada ciclo dirigido de longitud 6 es monocromático y T no contiene subtorneos isomorfos a $\widetilde{T}_6$. Entonces T no contiene $\gamma-$ciclos.*

Teorema 4.3.10 (H. Galeana-Sánchez y R. Rojas-Monroy [12]) *Sea T un torneo bipartito m-coloreado. Si cada ciclo dirigido de longitud 4 en D es monocromático, entonces T no contiene $\gamma-$ciclos.*

Teorema 4.3.11 (H. Galeana-Sánchez y R. Rojas-Monroy [13]) *Sea T un torneo 3-coloreado. Si cada ciclo dirigido de longitud 3 en D es casimonocromático y para cada $v \in V(T)$ se tiene que $\mid \xi(v) \mid \leq 2$, entonces T no contiene $\gamma-$ciclos.*

Teorema 4.3.12 (H. Galeana-Sánchez y P. Delgado-Escalante [21]) *Sea T un torneo m-coloreado. Si T satisface la propiedad PI_k para algún entero $k \geq 4$, entonces T no contiene $\gamma-$ciclos.*

Teorema 4.3.13 (H. Galeana-Sánchez y P. Delgado-Escalante [21]) *Sea T un torneo m-coloreado. Si T satisface la propiedad PII_k para algún entero $k \geq 3$, entonces T no contiene $\gamma-$ciclos.*

Teorema 4.3.14 (H. Galeana-Sánchez y R. Rojas-Monroy [15]) *Sea T un torneo bipartito m-coloreado tal que, cada C_4 es casimonocromático, cada T_4 es casimonocromático y T no contiene subdigráficas inducidas isomorfas a $\overrightarrow{T}_8$. Entonces T no contiene $\gamma-$ciclos.*

Teorema 4.3.15 (H. Galeana-Sánchez, J.J. García-Ruvalcaba [16]) *Sea D una digráfica $m-$coloreada obtenida de la eliminación de una única flecha (u, v) de algún torneo T $m-$coloreado. Si D no contiene C_3 ni T_3 $3-$coloreados, entonces D no contiene $\gamma-$ciclos.*

A continuación damos algunos ejemplos de como aplicar nuestro teorema principal (Teorema 4.3.1) a todos aquellos teoremas que satisfacen no contener $\gamma-$ciclos.

Teorema 4.3.16 *Sea D una digráfica $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de la digráfica D tales que:*

i. $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, $colores(D_1) \cap colores(D_2) = \emptyset$.

ii. *D_1 es un torneo bipartito tal que, cada C_4 es casimonocromático, cada T_4 es casimonocromático y no contiene subdigráficas inducidas isomorfas a $\overrightarrow{T}_8$. Y D_2 es una digráfica $m-$coloreada tal que cada ciclo dirigido en D_2 es monocromático.*

iii. *Si D contiene una (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3 $3-$coloreada (x_0, z, w, x_0), entonces existe una x_0w-trayectoria dirigida monocromática en D o existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D.*

iv. *Si D contiene una (D_1, D, D_2) subdivisión de P_3 $3-$coloreada (x_0, z, w, x_0), entonces al menos una de las siguientes trayectorias dirigidas monocromáticas se tiene: $uw-$trayectoria dirigida monocromática en D, $wu-$trayectoria dirigida*

monocromática en D, x_0u-trayectoria dirigida monocromática en D, ux_0-trayectoria dirigida monocromática en D, x_0w-trayectoria dirigida monocromática en D, $zu-$trayectoria dirigida monocromática en D, zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D, x_0z-trayectoria dirigida monocromática en D_1.

Entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Teorema 4.3.17 *Sea D una digráfica $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de la digráfica D tales que:*

i. $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, $colores(D_1) \cap colores(D_2) = \emptyset$.

ii. *D_1 es un torneo tal que satisface la propiedad PII_k para algún entero $k \geq 3$. Y D_2 es una digráfica casitransitiva tal que para cada $u \in V(D_2)$, $F^+(u)$ es monocromático y D_2 no contiene C_3 $3-$coloreados.*

iii. *Si D contiene una (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3 $3-$coloreada (x_0, z, w, x_0), entonces existe una x_0w-trayectoria dirigida monocromática en D o existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D.*

iv. *Si D contiene una (D_1, D, D_2) subdivisión de P_3 $3-$coloreada (x_0, z, w, x_0), entonces al menos una de las siguientes trayectorias dirigidas monocromáticas se tiene: $uw-$trayectoria dirigida monocromática en D, $wu-$trayectoria dirigida monocromática en D, x_0u-trayectoria dirigida monocromática en D, ux_0-trayectoria dirigida monocromática en D, x_0w-trayectoria dirigida monocromática en D, $zu-$trayectoria dirigida monocromática en D, zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D, x_0z-trayectoria dirigida monocromática en D_1.*

Entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Teorema 4.3.18 *Sea D una digráfica $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de la digráfica D tales que:*

i. $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, $colores(D_1) \cap colores(D_2) = \emptyset$.

ii. *D_1 es un torneo tal que satisface la propiedad PI_k para algún entero $k \geq 4$. Y D_2 es una digráfica 3-casitransitiva tal que para cada $u \in V(D_2)$, $F^+(u)$ es monocromático y cada C_3, C_4 y T_4 contenido en D_2 es casimonocromático.*

iii. *Si D contiene una (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3 $3-$coloreada (x_0, z, w, x_0), entonces existe una x_0w-trayectoria dirigida monocromática en D o existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D.*

iv. *Si D contiene una (D_1, D, D_2) subdivisión de P_3 $3-$coloreada (x_0, z, w, x_0), entonces al menos una de las siguientes trayectorias dirigidas monocromáticas se tiene: $uw-$trayectoria dirigida monocromática en D, $wu-$trayectoria dirigida*

monocromática en D, x_0u-trayectoria dirigida monocromática en D, ux_0-trayectoria dirigida monocromática en D, x_0w-trayectoria dirigida monocromática en D, $zu-$trayectoria dirigida monocromática en D, zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D, x_0z-trayectoria dirigida monocromática en D_1.

Entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Teorema 4.3.19 *Sea D una digráfica $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de la digráfica D tales que:*

i. $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, $colores(D_1) \cap colores(D_2) = \emptyset$.

ii. *D_1 es un torneo 3-coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 es casimonocromático y para cada $v \in V(D_1)$ se tiene que $\mid \xi(v) \mid \leq 2$. Y D_2 es un torneo tal que cada ciclo dirigido de longitud a lo más 4 en D_2 es un ciclo casimonocromático.*

iii. *Si D contiene una (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3 $3-$coloreada (x_0, z, w, x_0), entonces existe una x_0w-trayectoria dirigida monocromática en D o existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D.*

iv. *Si D contiene una (D_1, D, D_2) subdivisión de P_3 $3-$coloreada (x_0, z, w, x_0), entonces al menos una de las siguientes trayectorias dirigidas monocromáticas se tiene: $uw-$trayectoria dirigida monocromática en D, $wu-$trayectoria dirigida monocromática en D, x_0u-trayectoria dirigida monocromática en D, ux_0-trayectoria dirigida monocromática en D, x_0w-trayectoria dirigida monocromática en D, $zu-$trayectoria dirigida monocromática en D, zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D, x_0z-trayectoria dirigida monocromática en D_1.*

Entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Teorema 4.3.20 *Sea D una digráfica $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de la digráfica D tales que:*

i. $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, $colores(D_1) \cap colores(D_2) = \emptyset$.

ii. *D_1 un torneo bipartito tal que cada ciclo dirigido de longitud 4 en D es monocromático. Y D_2 es un torneo tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en D_2 es un ciclo monocromático.*

iii. *Si D contiene una (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3 $3-$coloreada (x_0, z, w, x_0), entonces existe una x_0w-trayectoria dirigida monocromática en D o existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática en D.*

iv. *Si D contiene una (D_1, D, D_2) subdivisión de P_3 $3-$coloreada (x_0, z, w, x_0), entonces al menos una de las siguientes trayectorias dirigidas monocromáticas se tiene: $uw-$trayectoria dirigida monocromática en D, $wu-$trayectoria dirigida*

monocromática en D, x_0u-*trayectoria dirigida monocromática en* D, ux_0-*trayectoria dirigida monocromática en* D, x_0w-*trayectoria dirigida monocromática en* D, $zu-$*trayectoria dirigida monocromática en* D, zx_0-*trayectoria dirigida monocromática en* D, x_0z-*trayectoria dirigida monocromática en* D_1.

Entonces D *tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.*

Bibliografía

[1] C. Berge, *Graphs*, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[2] P. Duchet, *Graphes Noyau - Parfaits*, Ann. Discrete Math. **9** (1980), 93–101.

[3] P. Duchet, *Classical Perfect Graphs, An introduction with emphasis on triangulated and interval graphs*, Ann. Discrete Math. 21 (1984), 67-96.

[4] P. Duchet and H. Meyniel, *A note on kernel–critical graphs*, Discrete Math. **33** (1981), 103–105.

[5] A. S. Fraenkel, *Planar kernel and Grundy with $d \leq 3, d^+ \leq 2, d^- \leq 2$ are NP-Complete*, Discrete Appl. Math. 3 (1981), 257-262.

[6] A. S. Fraenkel, *Combinatorial Game theory foundation applied to digraph kernels*, Electron. J. Combin. 4 (1997), 17.

[7] H. Galeana-Sánchez, *A counterexemple to a conjeture of Meyniel on kernel perfect graphs*, Discrete Math. 41 (1982), 105-107.

[8] H. Galeana-Sánchez and V. Neumann-Lara, *On kernels and semikernels of digraphs*, Discrete Math. **48** (1984), 67–76.

[9] H. Galeana-Sánchez and V. Neumann-Lara, *On kernel-perfect critical digraphs*, Discrete Math. 59 (1986), 257-265.

[10] H. Galeana-Sánchez, *On monochromatic paths and monochromatics cycles in edge coloured tournaments*, Discrete Math. **156** (1996), 103–112.

[11] H. Galeana-Sánchez, *Kernels in edge-coloured digraphs*, Discrete Math. **184** (1998), 87–99.

[12] H. Galeana-Sánchez and R. Rojas-Monroy, *On monochromatic paths and monochromatic 4-cycles in edge coloured bipartite tournaments*, Discrete Math. **285**, (2004), 313–318.

[13] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy, *Monochromatic paths and most 2-coloured arc sets in edge-coloured tournaments*, Graphs and Combin. 21 (2005), 307-317.

[14] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy, *Monochromatic paths and quasi-monochromatic cycles in edge-coloured bipartite tournaments*, Discuss. Math. Graph Theory 28, (2008) 285-306.

[15] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy, *Independent domination by monochromatic paths in arc coloured bipartite tournaments*, AKCE J. Graphs. Combin., 6, No. 2 (2009), 267–285.

[16] H. Galeana-Sánchez and J.J. García-Ruvalcaba, *Kernels in the closure of coloured digraphs*, Discussiones Mathematicae, Graph Theory **20** (2000), 103–110.

[17] H. Galeana-Sánchez, J.J. García-Ruvalcaba, *On graphs all of whose* $\{C_3, T_3\}$*-free arc colorations are kernel perfect*, Disccuss. Math. Graph Theory **21** (2001), 77–93.

[18] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas Monroy and B. Zavala, *Monochromatic paths and monochromatic sets of arcs in quasi-transitive digraphs*, submitted.

[19] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas Monroy and B. Zavala, *Monochromatic paths and monochromatic sets of arcs in* $3-$*quasitransitive digraphs*, Disccuss. Math. Graph Theory **29** (2009), 337–347.

[20] H. Galeana-Sánchez, G. Gaytán-Gómez and R. Rojas Monroy, *Monochromatic cycles and monochromatic paths in arc-colored digraphs*, Disccuss. Math. Graph Theory **31** (2011), 283–292.

[21] P. Delgado-Escalante and H. Galeana-Sánchez, *Kernels and cycles' subdivisions in arc-colored tournaments*, submitted.

[22] H. Galeana-Sánchez and R. Rojas-Monroy, *A counterexample to a conjecture on edge-coloured tournaments*, Discrete Math. **282** (1–3), (2004), 275–276.

[23] G. Hahn, P. Ille, R. E. Woodrow, *Absorbing sets in arc-coloured tournaments*, Discrete Mathematics. 283 No. 1-3 (2004), 93-99.

[24] R. Rojas Monroy, *Núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas m-coloreadas*, Tesis (Doctorado), UNAM (2002).

[25] Shen Minggang, *On monochromatic paths in* m*-coloured tournaments*, J. Combin. Theory Ser. B **45** (1988), 108-111.

[26] B. Sands, N. Sauer and R. Woodrow, *On monochromatic paths in edge-coloured digraphs*, J. Combin. Theory Ser. B **33** (1982), 271–275.

[27] Von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944.

[28] M. Richardson, *Solutions of irreflexive relations*, Ann. Math. 58 (2) (1953), 573.

[29] M. Richardson, *Extensions theorems for solutions of irreflexive relations*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 39 (1953), 649.

[30] I. Wloch, *On kernels by monochromatic paths in the corona of digraphs*, Cent. Eur. J. Math. **6** (2008), no. 4, 537-542.

[31] I. Wloch, *On imp-sets and kernels by monochromatic paths in duplication*, Ars Combin. **83** (2007), 93-99.

Agradecimientos:

Muy especialmente a la Dra. Hortensia Galeana Sánchez por haber confiado en mi y aceptarme como su alumna de doctorado, por su paciencia, tiempo y valiosa dirección a lo largo de mis estudios.

También muy especialmente a la Dra. Rocío Rojas Monroy por su tiempo, dedicación y paciencia al revisar mi trabajo.

A mis sinodales por sus valiosos comentarios y correcciones a mi tesis: Dr. Bernardo Llano, Dra. Mucuy-kak Guevara y Dra. Mika Olsen.

A la Dra. Martha Alvárez por impulsarme a continuar con mis estudios de posgrado.

A mis padres: María Alejandra y Cleto, a mis hermanos: Maribel y Juan Luis por su cariño y confianza siempre.

Al Instituto de Matemáticas, por el apoyo que me ha brindado siempre.

A Conacyt, por apoyarme económicamente en mis estudios de doctorado.

A todos mis amigos por estar siempre conmigo apoyandome: Alex, Mirella, Grissel, Magdalena, Mario y Yenisel, gracias por lo que cada uno me ha dado.