



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Aplicación del Análisis Multinivel a la Economía
Mexicana: Caso Microfinanzas**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A:

ZULYKEY NATHALY CRUZ RODRÍGUEZ

zulykey@gmail.com

55-26-60-90-25



**DIRECTOR DE TESIS:
M. en C. MARÍA DEL PILAR ALONSO REYES
2011**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del Jurado

1. Datos del alumno

Cruz

Rodríguez

Zulykey Nathaly

57837109

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Actuaría

302081202

2. Datos del tutor

M en C

María del Pilar

Alonso

Reyes

3. Datos del sinodal 1

M en C

José Antonio

Flores

Díaz

4. Datos del sinodal 2

Mat

Margarita Elvira

Chávez

Cano

5. Datos del sinodal 3

Act

Francisco

Sánchez

Villareal

6. Datos del sinodal 4

M en I

María Isabel

Escalante

Membrillo

7. Datos del trabajo escrito

Aplicación del Análisis Multinivel a la Economía Mexicana: Caso Microfinanzas

73 p

2011

Índice

Introducción	5
1. Microfinanzas.....	9
1.1 Antecedentes	9
1.2 Microfinanzas en América Latina y México.....	12
1.3 Metodología de crédito	15
1.3.1 Préstamos colectivos	17
1.3.2 Préstamos individuales.....	18
1.3.3 Préstamos de mejora a la vivienda	20
1.4 Proporciones de calidad de la cartera	21
2. Modelo matemático.....	25
2.1 Modelo de regresión logística	25
2.1.1 Interpretación de los coeficientes del modelo de regresión logística.....	30
2.2 Modelo multinivel.....	33
2.2.1 Correlación intraclase.....	35
2.2.2 Varianza dentro de grupo y entre grupo	36
2.2.3 Prueba para diferencia de grupos	41
2.2.4 Diseño de efectos en muestras de dos etapas.	42
2.2.5 Confiabilidad de variables agregadas.....	43
2.2.6 Relaciones dentro de y entre grupo	44
2.2.7 Regresiones	45
2.2.8 Modelo poblacional.....	46
2.2.9 Modelo lineal jerárquico	53
3. Aplicación del modelo lineal jerárquico	61
3.1 Datos del modelo.....	61
3.1.1 Descripción de la base de datos.....	63
3.2 Ecuación del modelo	63
3.3 Resultados del modelo.....	66
Conclusiones	69
Anexos	71
Bibliografía	73

Introducción

Las microfinanzas iniciaron en los años setenta facilitando una metodología focalizada en los más pobres, en su mayoría del sector rural; con el objetivo de llegar a un gran número de ellos y teniendo la certeza de que serían capaces de pagar sus créditos. Surge en zonas rurales de Bangladesh mientras que dicho país atravesaba por desastres naturales y cambios cruciales en materia de política.

Esta teoría aparece como respuesta factible, ya que tiene como puntos clave sustentabilidad financiera y masividad en sus operaciones. Se les considera una herramienta de combate a la pobreza.

Su desarrollo en México ha venido creciendo de manera importante, desde inicios del siglo XXI. Es notable el incremento en el número de microfinancieras que ofrecen sus servicios a personas de bajos recursos.

Se debe tener en mente que las actividades microfinancieras son un medio de apoyo para otras actividades, primordialmente, para ofrecer oportunidades de desarrollo a personas en situación de pobreza y fortalecer la economía, y no un fin en sí mismas.

Existen dos tipos de metodología para otorgar microcréditos: colectiva e individual. Ya sea para capital de trabajo, consumo o mejoramiento de vivienda.

Los préstamos colectivos requieren de la formación de grupos de personas que pretenden obtener un micro crédito. Una de sus principales y más importantes características es el uso de presión por parte del grupo como sustituto de garantías, ya que la falta de pago de un miembro suele traducirse en la suspensión del crédito para el resto del grupo hasta que sea cubierto el monto del préstamo; es entonces que la presión ejercida puede fungir como incentivo de pago.

En el financiamiento individual se combinan los criterios de préstamo formal e informal. Debido a que la mayoría de propietarios y microempresarios no poseen numerosos activos ni sistemas contables, las prácticas utilizadas por el sector formal, usualmente, no son las apropiadas. Por otro lado los prestamistas del sector informal suelen aprobar los créditos con base en el conocimiento personal de los acreedores y garantías informales. Al mismo tiempo que responden rápidamente a las necesidades de los prestatarios con un mínimo de trámites. En microfinanzas estas dos metodologías se fusionan para poder ofrecer un producto accesible para microempresarios y rentable para la institución que lo concede.

El microfinanciamiento a la vivienda consiste, principalmente, en otorgar financiamiento a personas de bajos ingresos para la renovación o ampliación de una vivienda existente, con montos relativamente pequeños y manejables, con un enfoque de construcción progresiva, el cual refleja el verdadero proceso de construcción de los hogares humildes, es decir, haciendo diferentes remodelaciones pequeñas a espacios pausados de tiempo.

Este trabajo está enfocado en los clientes con créditos para mejora de vivienda que están o estuvieron en un crédito grupal y tiene como objetivo determinar los principales factores que influyen para que un cliente se atrase en sus obligaciones de pago.

Como uno de esos factores se pretende determinar si existen diferencias entre las distintas regiones en que se encuentran agrupados dichos clientes, es decir, determinar si el número de días de atraso en los pagos están influidos por la región en la que ellos viven.

El que los clientes estén agrupados en regiones, conduce a utilizar una metodología que considere dicha agrupación. Es por ello que en el presente trabajo se utiliza el análisis multinivel, que es una metodología diseñada para analizar datos con patrones de variabilidad complejos y de estructura anidada.

El análisis multinivel tiene varias aplicaciones: en el diseño de muestreo multi-etapa, en el cual la población de interés está conformada por subpoblaciones y la selección toma lugar a

través de ellas; comúnmente en la investigación social con los datos de dos niveles, al agrupar los datos de micro-nivel al macro-nivel. Ejemplo de ello es la estructura de la población estudiantil que se agrupa en salones de clase y, a su vez, estos en escuelas; personas ubicados en municipios los cuales

El principal modelo estadístico para el análisis multinivel es el lineal jerárquico, que es una extensión de la regresión lineal múltiple a un modelo que incluye coeficientes aleatorios anidados (términos de error), uno o más por cada nivel.

De la misma forma que en todos los modelos de regresión, en este también existe una distinción entre las variables explicativas y las independientes con la excepción de que la dependiente debe ser de nivel uno, ya que el modelo lineal jerárquico está destinado a explicar algo que sucede en el nivel más bajo, más detallado, de anidación. Se tiene el supuesto de que una variable explicativa se encuentra disponible para cualquiera de los niveles.

Finalmente, bajo estos lineamientos se utilizará este modelo para determinar la importancia de la agrupación por regiones y al mismo tiempo los factores que inciden en los días de atraso en el pago de crédito de vivienda otorgado por una institución microfinanciera.

1. Microfinanzas

1.1 Antecedentes

En los años setenta el método más común para que las personas que carecían de acceso a servicios de crédito pudieran acceder a ello, era por medio de las agencias gubernamentales.

A partir de la segunda mitad de la década de los ochenta el modelo de crédito dirigido y subsidiado, era criticado constantemente; en su gran mayoría, los programas sumaban grandes pérdidas por préstamos y necesitaban periódicas recapitalizaciones para continuar con la operación. Cada vez era más evidente que eran necesarias soluciones con base en el mercado, lo cual trajo un nuevo enfoque que consideró a las microfinanzas como parte integral del sistema financiero en general. El objetivo cambió del rápido desembolso de préstamos subsidiados hacia el desarrollo de instituciones que fueran sostenibles para servir a las necesidades de servicios financieros de los pobres.

Las microfinanzas arribaron al mercado en la década de los años setenta proporcionando una metodología focalizada hacia los más pobres, principalmente del sector rural; con el propósito de llegar a un gran número de ellos y la certeza de que podrían pagar sus créditos (Yunus, 2008). En la actualidad se practican tanto en el sector rural como urbano y en todos los continentes.

Tal perspectiva crediticia surge en zonas rurales de Bangladesh, uno de los países más pobres del mundo, en una época en la que recientemente había sufrido un terremoto de grandes dimensiones, aunado a otros desastres naturales y en cuyo terreno político venía de independizarse de Pakistán.

Un profesor de economía, hasta ese momento desconocido, al detenerse a observar la miseria y la hambruna por la que atravesaba su país; decidió estudiar la manera en la que podría ayudar a mejorar las condiciones de vida de las personas pobres, con lo cual descubrió que —contrario a lo que se pensaba en aquel momento— las personas productivas de bajos recursos eran capaces de retribuir un préstamo que se les concediera, ya que así lo habían hecho a través de prestamistas que cobraban altas tasas de interés. Muhammad Yunus hace este descubrimiento después de iniciar un programa piloto que se enfocó principalmente en mujeres, en las aldeas de Daka, a lo que en ese entonces llamó microcréditos. (Yunus, 1997).

De aquel país existen tres modelos destacados: el de Bangladesh Rural Advancement Committee (BRAC)¹, el de Association for Social Advancement (ASA)² y el de Grameen Bank (GB)³. Estos modelos privados de crédito rural utilizan metodologías propias que han sido replicadas en varias partes del mundo.

Otra metodología relevante es la desarrollada por el profesor John Hatch, llamada bancos comunales. Él presentó la idea a varios inversionistas, quienes le hicieron una donación de un millón de dólares para terminar el proyecto que hoy es conocido como International Community Assistance (FINCA).

¹ BRAC es una organización nacional privada, inicia en 1972, entonces conocida como Bangladesh Rehabilitation Assistance Committee, era financiada por donadores. Fazle Hasan Abed, fundador y presidente, inició un programa de rehabilitación para ayudar al país a salir del trauma de la guerra de liberación y la devastación; se enfocó en ayudar a refugiados que regresaban de la India. Actualmente BRAC es una institución autosuficiente, independiente y enfocada al desarrollo humano. Véase <http://www.brac.net>

² Md. Shafqual Haque Choudhury, fundador y director general del ASA, es conocido como el Henry Ford de la microfinanzas por haber diseñado un modelo de crédito estandarizado, eficiente y de bajo costo para llegar a los más pobres. ASA fue organizado como una ONG en 1978. Grupos de granjeros fueron organizados con la idea de crear un movimiento basado en la solidaridad entre la población rural.

³ En el año 1978 se tiene el origen del Grameen Bank, cuando el profesor Muhammad Yunus, quien dirigía en la Universidad de Chittagong el programa de economía, inició un programa de crédito y servicios bancarios a los pobres del sector rural. Empezó operaciones en Jobra, aldea cercana a la universidad. Véase http://www.grameen-info.org/index.php?option=com_content&task=view&id=19&Itemid=114 (16 de marzo de 2011).

Las microfinanzas, a comparación de otros planteamientos, es un tema relativamente nuevo y dentro de la teoría económica no ocupan aún su propia área. Se les considera un subtema o un complicado conjunto de temas.

Tienen una connotación microeconómica, por lo que toca a su impacto inmediato: la empresa y en particular la microempresa, y de forma precisa a la microempresa no establecida, cuyas características son que no paga impuestos sobre ventas o sobre sus ingresos, que carece de acceso al sistema bancario, que no tiene avales ni garantías y comúnmente sin experiencia en el manejo de algún servicio financiero. Esto no significa que los microempresarios no efectúen operaciones crediticias o de ahorro en especie sino que tradicionalmente lo realizan a través de prestamistas informales y usureros que cobran altas tasas de interés.

Las microfinanzas surgen como una respuesta factible, ya que las instituciones de microfinanzas tienen como puntos clave la sustentabilidad financiera (búsqueda de rentabilidad y recuperación de costos) y la masividad en sus operaciones. Pueden tener impacto a nivel agregado, por lo que se les considera como una herramienta de combate a la pobreza.

A partir de los primeros años del siglo XXI, el desarrollo de las microfinanzas en México ha venido creciendo de manera importante. Desde el punto de vista cualitativo, es notable el incremento en el número de microfinancieras que prestan servicios financieros a personas de escasos recursos. Debido a este crecimiento se ha dado una escasa reflexión sobre los términos que se utilizan para definir a las instituciones y servicios microfinancieros. Se debe diferenciar entre el término microcrédito y microfinanzas.

Cabe aclarar que las microfinanzas no son *miniservicios*, *servicios marginales o de segunda* o *servicios en montos pequeños*. Si se separa el aspecto metodológico y se acepta como microfinanzas todos los servicios con montos pequeños o los dirigidos a las personas de

menores ingresos, se tiene como resultado una ampliación en el número y tipo de instituciones que prestan servicios microfinancieros.

1.2 Microfinanzas en América Latina y México

Desde finales de la década de los ochenta, se ha producido en Latinoamérica un cambio en la idea con respecto al modelo que facilita a las personas de bajos recursos el acceso a servicios financieros. El acercamiento a estos servicios integrales permite ahorrar a las personas que cuentan con un excedente y pedir crédito a aquellas que lo requieran, así como mejorar el potencial de generación de recursos en sus negocios.

Originariamente las entidades sin fines de lucro, ante la inadecuación o insuficiencia de garantías y los problemas de información imperfecta que caracterizan a este tipo de clientes, desarrollaron tecnologías basadas en el seguimiento directo y el uso de información privada, permitiendo brindar crédito de manera sostenible y con posibilidad de expansión. Es así como a principios de la década de los noventa se desarrollaron las *tecnologías de microcrédito*, las cuales fueron implementadas en diferentes organizaciones de la región, al compartir y aprender de las *mejores prácticas* que surgían de las diversas experiencias de cada país. Los objetivos que compartían estas iniciativas eran principalmente dos:

- Llegar a un gran número de microempresarios de bajos ingresos
- Lograr la sostenibilidad de la organización.

Ya para finales de la década de los noventa, un creciente número de naciones contaba con al menos una entidad con potencial para alcanzar importantes volúmenes de crédito y que además había logrado la viabilidad financiera especializándose en la microempresa.

La expansión de los servicios de crédito se encontró con un tope en cuanto a la fuente de recursos disponibles para financiar el microcrédito, ya que se agotaron los recursos

concesionales y las entidades, al tiempo que se volvieron insuficientes las fuentes alternas de financiamiento las cuales tenían acceso para atender toda la demanda potencial de este mercado.

Estos acontecimientos favorecieron la creación de conciencia en la importancia de la formalización de estas entidades en lo referente a su ingreso al sector financiero formal. Siendo precursores en este esfuerzo, entidades como BancoSol en Bolivia, el primer banco creado en 1992; seguido por Finansol en Colombia; la Financiera Carpía en El Salvador; la Caja Los Andes en Bolivia. Entidades hoy en día consideradas entre las mejores de la región, amén de las ya mencionadas (Compartamos en México, FIE y PRODEM en Bolivia, Procredit en Nicaragua y Mibanco en Perú), compartían sus raíces como ONG y se habían convertido en entidades financieras⁴.

Con este modelo se explica la consolidación y transformación de la industria de las microfinanzas en América Latina; hacia finales de la década de los noventa ya se había podido demostrar que las microfinancieras eran entidades autosostenibles, rentables y que el encauce de recursos del sector financiero al sector microempresarial era posible.

Lo que ha encauzado al actual enfoque de *sistemas financieros* para las microfinanzas, es esta declaración de la necesidad de alcanzar la sostenibilidad financiera. Este sistema considera que:

- El crédito subsidiado quebranta el desarrollo.
- Los pobres puede pagar altas tasas de interés necesarias para cubrir los altos costos de transacción y las consecuencias de los mercados de información imperfectos en los que participan los prestamistas.

⁴ La conversión de estas entidades, de ONG en microfinancieras reguladas fue promovida por dos entidades que actuaron en su momento como asesoras en el mejoramiento y desarrollo de las tecnologías microcrediticias: IPC GMBH y ACCIÓN Internacional que después se comprometieron con el proceso aportando recursos de capital a las mismas.

- La meta de sostenibilidad (recuperación de costos y, paulatinamente, beneficios) es de suma importancia no solo para la continuación institucional en la actividad crediticia, sino para que la institución sea más eficiente y especializada.
- Debido a pequeños montos de préstamo, las industrias de microfinanzas (IMF) deben alcanzar una escala suficiente de colocación para volverse sostenibles.
- El crecimiento empresarial y su impacto en la pobreza no puede ser demostrado con precisión o fácilmente.

Uno de los principales supuestos del esquema anterior es que muchos pobres desean el crédito productivo y que ellos puedan utilizarlo y absorberlo.

Así como en países de Latinoamérica y otros en desarrollo, en la actualidad existen millones de personas en México que sufren graves insuficiencias de ingresos, alimentación, vivienda, empleo, servicios públicos, etcétera. El señalar que también carecen de los servicios bancarios mínimos parece irrelevante; sin embargo, el resultado de la implementación de varios proyectos cuyo objetivo principal ha sido el financiamiento a personas en situación de pobreza o pobreza extrema, ha demostrado que el esforzarse por luchar contra la pobreza y la desigualdad es una tarea posible y prioritaria.

En México existen diferentes instancias que prestan servicios microfinancieros con diferentes figuras jurídicas: uniones de crédito, programas filiales de organizaciones internacionales, asociaciones civiles, instituciones de asistencia privada, instituciones financieras, por citar algunas.

A pesar de las condiciones locales y esta gran variedad de figuras, todas desembocan en buenos resultados, no solo en el funcionamiento de los servicios de ahorro y crédito sino que también en los aspectos económicos como el nivel de ingreso y la ocupación de sus clientes e incluso, en algunos casos, en aspectos demográficos como la morbilidad y la natalidad.

Las microfinanzas deben considerarse una solución, una alternativa propia y creativa ante el terrible panorama de la pobreza; esta solución reconoce las potencialidades reales y puede hacer una diferencia.

Uno de los instrumentos más importantes de la política social es el acceso a los servicios financieros; una gran mayoría de la población no tiene la posibilidad de contar con ellos, por no tener un aval lo cual provoca un círculo vicioso en el que varias veces una persona no puede ser productivo porque no puede acceder a un crédito que le permita emprender un micronegocio, ya que no cuenta con aval ni pertenencias para garantizar el pago del préstamo. Es precisamente donde las microfinanzas intervienen para romper este círculo vicioso.

1.3 Metodología de crédito

Las actividades microfinancieras no son un fin en sí mismas sino que son un medio para apoyar otras actividades, en su mayoría, para fortalecer la economía y ofrecer oportunidades de desarrollo de las personas que viven en situación de pobreza.

Las IMF ofrecen a sus clientes una variedad de productos y servicios. En principio, están los financieros, no obstante, debido a la naturaleza de los clientes objetivo, las mismas no pueden operar de igual forma que las instituciones financieras formales ya que estas, por lo general, no consideran como inversiones interesantes las pequeñas empresas informales dirigidas por los pobres.

Hombres y mujeres de bajos ingresos enfrentan enormes barreras al intentar obtener acceso a las instituciones establecidas de servicios financieros: los montos que necesitan las empresas informales son excesivamente bajos y es difícil obtener información de los clientes (los cuales muchas veces se comunican en dialectos que desconoce el prestamista); en varias ocasiones los clientes viven muy retirados y hay que invertir tiempo en visitar sus

granjas o negocios, especialmente si estos se encuentran en áreas marginales urbanas. Todo lo anterior hace concluir que los costos por cada peso prestado serán demasiado altos, aunado a que no hay una seguridad palpable para el préstamo.

El rol principal de las IMF es proveer información financiera, es decir, la transferencia de liquidez o capital de aquellos que tienen exceso hacia aquellos que están escasos en ese mismo momento. En vista de que la productividad y el consumo no suceden al mismo tiempo, se necesita de algo que coordine estos diferentes ritmos. “El financiamiento en forma de ahorro y crédito surgen para permitir la coordinación” (Von Pischke 1991).

A pesar de que prácticamente todas las IMF proporcionan servicios crediticios, algunas también ofrecen otros productos financieros incluyendo seguros, ahorro y pago de servicios.

El crédito está constituido por fondos prestados bajo condiciones específicas de pago. En el caso de una empresa cuando no hay suficientes ahorros para financiarla y el rendimiento de los fondos prestados excede la tasa de interés a pagar por los mismos, es sensato solicitar un préstamo en lugar de posponer la actividad empresarial hasta poder acumular suficientes ahorros, bajo el supuesto de que hay capacidad de pago de los intereses de la deuda (Waterfield y Duval 1996).

Generalmente los préstamos se otorgan con propósitos productivos, es decir, para generar ingresos en una empresa. Algunas IMF también otorgan crédito para vivienda, consumo y ocasiones especiales, aunque muchas de ellas insisten en otorgarlo únicamente para financiar actividades productivas.

Los métodos de concesión de crédito, generalmente se pueden dividir en dos categorías de enfoque: individuales y colectivos, con base en la manera en que la IMF garantiza y ofrece sus préstamos.

- Los enfoques colectivos otorgan préstamos a grupos, ya sea a personas individuales que pertenecen a uno y que garantizan mutuamente sus préstamos (grupo solidario) o bien a grupos que a su vez otorgan préstamos a sus miembros (banca comunal).
- Los préstamos individuales se otorgan a personas en forma particular con base en su capacidad de ofrecer a la IMF un cierto nivel de seguridad y una promesa de pago.

1.3.1 Préstamos colectivos

Los préstamos colectivos necesitan de la formación de grupos de personas con la pretensión de obtener acceso a los servicios financieros. Las perspectivas de dichos créditos, a menudo imitan o tienen los principios de grupos informales de ahorro y crédito ya existentes. Prácticamente hay en cada país aunque conocidos con diferentes nombres, entre los cuales, el más común es asociación de crédito y ahorro rotativo⁵.

El préstamo colectivo ha adoptado este modelo para ofrecer mayor flexibilidad en cuanto a los plazos y montos y, comúnmente, permiten a los prestatarios obtener acceso a los fondos cuando lo requieren y sin necesidad de esperar un turno.

De los modelos de préstamos colectivos, los más conocidos son: El Banco Grameen en Bangladesh y los de ACCION Internacional; ambos permiten la formación de grupos relativamente pequeños (entre 5 y 10 personas) que otorgan préstamos “individuales” a los miembros del grupo. Otros modelos, como el bancario de comunidad de la Fundación de Asistencia Comunitaria Internacional. (FINCA), utilizan grupos de entre 30 y 100 personas, y conceden préstamos al grupo en sí mismo y no a las personas individuales.

⁵ En México es mejor conocido como *tanda*, en la cual un grupo de personas contribuyen semanal o mensualmente con una cantidad fija de dinero, luego los integrantes se turnan para recibir el monto total recolectado en el periodo, hasta que todos hayan tenido la oportunidad de recibir los fondos. No hay un cobro de intereses explícitos, pero están de forma indirecta. Los miembros que se benefician del préstamo más hacia el principio, conservan una ventaja sobre aquellos que lo reciben al final.

Una de las principales y más importantes características de los préstamos colectivos es el uso de la presión del grupo como sustituto de garantías, debido a que una gran parte de los créditos están dirigidos a personas de escasos recursos que no tiene la posibilidad de satisfacer los requisitos tradicionales de garantías, que son exigidas por la mayoría de las instituciones financieras.

La falta de pago de un miembro suele traducirse en la suspensión del crédito para el resto del grupo hasta que quede cubierto el monto del préstamo. La presión ejercida por los otros miembros puede fungir como incentivo de pago, debido a que no quieren traicionar al resto de los integrantes y tampoco desean ser víctimas de algún tipo de sanción social impuesta por el grupo a consecuencia de la mora. También puede suceder que el grupo reconozca una razón legítima que motive el atraso de alguno de sus miembros y le ofrecerá ayuda hasta que el problema sea resuelto. En otros casos, los ahorros que los miembros realizan de forma obligatoria podrían ser utilizados para pagar el préstamo de un cliente moroso.

La principal razón por la cual es importante la autoselección del grupo, es que los miembros de la misma comunidad pueden tener un excelente conocimiento de las personas con riesgo crediticio confiable y las que no lo son, en vista de que de no hacer una buena selección pueden perder su propio acceso al crédito o que sus propios préstamos se utilicen para cubrir el monto de otro préstamo.

1.3.2 Préstamos individuales

En los préstamos individuales se combinan créditos formales (como los de las instituciones financieras) con informales (como los de prestamistas individuales).

Las instituciones financieras tradicionales toman decisiones crediticias con base en las características del cliente y de la empresa, tales como, el historial de resultados financieros, el flujo de caja, las garantías, la capacidad de endeudamiento y el carácter. Sin embargo, debido a que varios propietarios y microempresas no poseen numerosos activos ni sistemas

para elaborar reportes financieros, las prácticas crediticias del sector formal usualmente no son apropiadas.

Los prestamistas del sector informal aprueban los créditos con base en el conocimiento personal de los acreedores y no mediante un sofisticado análisis de factibilidad, y utilizan garantías informales. Al mismo tiempo demuestran la importancia de responder rápidamente a las necesidades de los prestatarios con un mínimo de trámites.

Los modelos crediticios individuales tienen como características:

- Asegurarse del retorno de los préstamos por medio de algún tipo de garantía (menos rigurosa que la de los préstamos formales) o un codeudor⁶.
- La investigación de los clientes potenciales se hace por medio de las referencias de carácter y el historial crediticio.
- Adaptar el plazo y el monto del préstamo de acuerdo a las necesidades del cliente o la empresa.
- El aumento frecuente del plazo y el monto del préstamo a lo largo del tiempo.
- Esfuerzos por parte de los oficiales de crédito y personal en general para desarrollar relaciones estrechas con los clientes, de manera que cada uno represente una inversión importante de energía y tiempo para el personal.

Debido a que los oficiales de crédito deben dedicar tiempo relativamente amplio a los clientes individuales, tienen un rango de cartera de clientes entre 60 y 140 clientes. Generalmente, los montos de préstamos individuales son mayores que los otorgados a los integrantes de algún grupo, por lo cual, al considerar un número igual de créditos, los de tipo individual proporcionan una base de ingresos⁷ mayor que los colectivos para cubrir los

⁶ Persona que accede a ser legalmente responsable del préstamo, pero usualmente, no ha obtenido un préstamo en la IMF.

⁷ Monto pendiente de una cartera de préstamos que genera ingresos por intereses y con estos ingresos parten de un porcentaje del monto otorgado, a mayor monto, más ingresos generados y, en consecuencia, se produce una mayor disponibilidad de fondos utilizados en su mayoría para cubrir costos.

costos de otorgar y mantener dichos préstamos. Los modelos de crédito individual pueden ser menos costosos y requerir menor inversión de mano de obra que los modelos colectivos.

1.3.3 Préstamos de mejora a la vivienda

La vivienda es una necesidad básica para el hombre, ya que provee seguridad, protección de los elementos de la naturaleza, y, en muchos de los casos de los microempresarios, el lugar para llevar a cabo negocios. Los sistemas de financiamiento de la vivienda tradicionales, no tienen una oferta de productos adaptados a las necesidades de las personas de ingresos bajos, sin embargo, en los últimos años, algunas industrias de microfinanzas han venido desarrollando productos de crédito para el mejoramiento de la vivienda, el cual reúne elementos de financiación para empresa y la tradicional para vivienda.

El microfinanciamiento a la vivienda, principalmente consiste en otorgar préstamos a personas de ingresos bajos para la renovación o ampliación de una vivienda existente, en montos relativamente pequeños y manejables, con un enfoque de construcción progresiva, que refleja el verdadero proceso de construcción de los hogares pobres para mejorar la calidad de sus viviendas, es decir, haciendo diferentes renovaciones o remodelaciones pequeñas a espacios pausados de tiempo. Al hacerlo de esta manera, puede ayudar a garantizarles un lugar para vivir y trabajar. También, mediante este enfoque de construcción progresiva, hace que sea más flexible el microcrédito que los créditos de financiamiento a la vivienda, debido a que no requiere que el prestatario termine la construcción de la vivienda, dentro de un periodo de tiempo dado. Además, esta mejoría gradual, puede contribuir al objetivo general de desarrollo comunitario y mejoramiento de comunidades.

Los créditos de mejoramiento de vivienda comparten varias características con los préstamos tradicionales de microfinanzas, tales como, montos en préstamos pequeños sin necesidad de garantías, tasas de intereses lucrativas, solvencia determinada por el flujo de efectivo en caja o el carácter del cliente. Las principales diferencias radican en su efecto, tamaño del préstamo, naturaleza del cliente y plan de pagos.

Los elementos clave del crédito de vivienda progresivo, son las garantías y avales, la asistencia técnica, consideraciones de costos, acuerdos institucionales y subsidios.

Para que las IMF puedan ofrecer microcréditos de vivienda, necesitan adaptarse a un nuevo producto, ya que muchos programas de microfinancieras están basados en grupos solidarios, mientras que el crédito a la vivienda está diseñado como un préstamo individual. Los grupos solidarios, normalmente no son utilizados como metodología de préstamo, debido a que estos generalmente son montos de pago más grandes y mayor plazo por lo que las IMF necesitarían evaluar la capacidad de pago de todo el grupo.

1.4 Proporciones de calidad de la cartera

En general se sugieren tres proporciones para la medición de la calidad de una cartera: índice de atrasos, cartera en riesgo y la proporción de prestatarios morosos.

Los atrasos están representados por el monto de capital del préstamo vencido que no ha sido pagado a la IMF, estos mismos, por lo general, no incluyen intereses. Como tal, el índice de atrasos es un indicador del riesgo de que un préstamo no sea cubierto.

El índice de atrasos se calcula como la proporción entre el capital vencido del préstamo y la cartera pendiente de pago, es decir:

$$\text{Índice de atrasos} = \frac{\text{Monto de atrasos}}{\text{Cartera pendiente (incluye montos vencidos)}}$$

Este índice muestra el porcentaje del préstamo que ya venció, sin embargo, al solo considerar los pagos cuando vencen, y no considerar el monto restante del préstamo que realmente se encuentra en riesgo, puede subestimar el riesgo para la cartera y la severidad potencial de un problema de mora.

La cartera en riesgo está referenciada al saldo pendiente por cubrir de todos los préstamos que tienen un monto vencido. La cartera en riesgo difiere del índice de atrasos, fundamentalmente, debido a que la primera considera el monto atrasado más el saldo pendiente restante del préstamo.

El índice de cartera en riesgo se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Cartera en riesgo} = \frac{\text{Saldo pendiente de préstamos con pagos vencidos}}{\text{Cartera pendiente (incluye montos vencidos)}}$$

La proporción anterior, refleja el verdadero riesgo de un problema de mora porque considera en riesgo del monto pendiente del préstamo; esto es particularmente importante cuando los pagos se hacen a plazo largos y montos pequeños.

Al calcular el índice de la cartera en riesgo sobre una base periódica, las IMF pueden determinar si la mora está mejorando o se está deteriorando. Dicho indicador, se puede determinar para una IMF en conjunto, región, sucursal, sector (propósito del préstamo o sector geográfico) o para un oficial de crédito.

Como un indicador adicional para monitorear la calidad de la cartera, parece útil determinar el porcentaje de prestatarios morosos (PM). Se calcula como:

$$PM = \frac{\text{Número de prestatarios morosos}}{\text{Número total de prestatarios}}$$

Por medio de estos indicadores se puede determinar la calidad de la cartera de crédito y así detectar posibles situaciones de sobreendeudamiento y alertar a los oficiales de crédito para que den seguimiento a las mismas. También pueden utilizarse como precedente de comportamiento de pago del cliente o grupo que solicita créditos subsecuentes.

2. Modelo matemático

2.1 Modelo de regresión logística

Desde su origen y su utilización en el análisis económico, el modelo logit es el complemento natural del de regresión logística, pero la principal diferencia radica en que las variables no son continuas sino binarias o dicotómicas y dicha diferencia se refleja en la elección del modelo paramétrico y los supuestos. Una vez que esta diferencia se explica, los métodos empleados en un análisis usando regresión logística siguen los principios usados en la regresión lineal.

Muchos fenómenos sociales son discretos o cualitativos más que cuantitativos o continuos, para este tipo de estudios se utiliza el modelo de regresión logística, pero antes de comenzar un análisis con él, es importante entender que su objetivo es el mismo de cualquiera de construcción estadística: encontrar el modelo más adecuado y razonable para describir la relación entre una variable resultado (dependiente) y el conjunto de variables independientes (predictivas o explicativas).

Modelo lineal

La primera tentativa teórica desarrollada para estudiar modelos con variables dicotómicas se planteó como una mera extensión del modelo lineal general que viene expresado por:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i \quad (2.1)$$

donde,

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si el evento ocurre} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

X_i representa el vector de variables explicativas.

ε_i la variable aleatoria de error que se distribuye $N(0, \sigma^2)$.

Pero la aproximación para este tipo de datos dicotómicos, es considerar a Y_i como una variable aleatoria discreta y obtener la probabilidad de que $Y_i = 1$ no el valor de Y_i en sí mismo, por medio de una función adecuada del regresor X . Esto ha llevado a un modelo de probabilidad el cual especifica la probabilidad de una cierta respuesta como función del estímulo.

$$P_i = P(Y_i = 1) \quad (2.2)$$

Tomando en cuenta estas probabilidades se puede reescribir la ecuación (2.1) como:

$$P(X) = \alpha + \beta X \quad (2.3)$$

que es el modelo lineal de probabilidad. Pero si se quisiera que la probabilidad varíe de manera monótona con X y permanezca sin estos límites, se debe utilizar una curva sigmoidea⁸, hay muchas funciones que cumplen esto y una de ellas es la función logística.

Han sido propuestas muchas funciones de distribución para el análisis de variables de respuesta dicotómica, pero hay dos razones principales para elegir la distribución logística:

- Desde el punto de vista matemático, es una función muy flexible y fácil de usar
- Permite una interpretación biológicamente significativa.

La esperanza condicional de Y dado x , $\pi(x) = E(Y|x)$ cuando se usa la distribución logística está dada por:

$$\pi(x) = \frac{e^{\alpha + \beta x}}{1 + e^{\alpha + \beta x}} \quad (2.4)$$

El momio (odds) del resultado que está presente entre los individuos con $x = 1$, se define como $\frac{\pi(1)}{[1 - \pi(1)]}$, de igual manera para los individuos con $x = 0$.

8 Muchos procesos naturales y sistemas complejos tienen una curva de aprendizaje que muestran una progresión de la historia que tiene un avance pequeño y acelera hasta aproximarse a un punto culminante en el tiempo. Y para ello a menudo se utiliza la función sigmoidea, que tiene forma de "S".

Una transformación de $\pi(x)$, es la logit y esta transformación está definida en términos de $\pi(x)$

$$g(x) = \ln \left[\frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)} \right] = \alpha + \beta x$$

$$g(1) = \ln \left[\frac{\pi(1)}{1 - \pi(1)} \right] = \alpha + \beta$$

$$g(0) = \ln \left[\frac{\pi(0)}{1 - \pi(0)} \right] = \alpha$$

La razón de momios (odds ratio), denotado por φ , está definida para $x = 1$ y para $x = 0$, y está dado por la ecuación

$$\varphi = \frac{\frac{\pi(1)}{1 - \pi(1)}}{\frac{\pi(0)}{1 - \pi(0)}}$$

El log de la razón de momios, se expresa como

$$\ln \varphi = \ln \left[\frac{\frac{\pi(1)}{1 - \pi(1)}}{\frac{\pi(0)}{1 - \pi(0)}} \right]$$

$$= g(1) - g(0)$$

Y se conoce como la diferencia logit.

La transformación $g(x)$ es muy importante porque tiene muchas propiedades deseables de un modelo de regresión lineal. El *logit* $g(x)$, es lineal en sus parámetros, puede ser continua, puede tener un rango de $-\infty$ a ∞ , dependiendo del rango de x .

Otra diferencia importante entre el modelo de regresión logística y el lineal, es la distribución condicional de la variable dependiente. En el modelo lineal, se asume que la distribución condicional de la variable de respuesta, dado x será normal con media $E(Y | x)$ y varianza constante. Sin embargo, en el caso de la variable que es dicotómica, se puede

expresar el valor de la variable dependiente dado x como $y = \pi(x) + \varepsilon$, donde ε , tiene dos posibles valores, si $y = 1$ entonces $\varepsilon = 1 - \pi(x)$, con probabilidad $\pi(x)$, y si $y = 0$, entonces $\varepsilon = -\pi(x)$ con probabilidad $1 - \pi(x)$. Así, ε tiene una distribución con media cero y varianza $\pi(x)[1 - \pi(x)]$. Esto es la distribución condicional de una variable dependiente que sigue una distribución binomial con probabilidad dada por la media, $\pi(x)$. Es así que la distribución binomial y no la normal, es la que describe la distribución de los errores.

Para ajustar el modelo de regresión logística, descrito en la ecuación (2.4) a un conjunto de datos, se requiere estimar los valores de α y β , los parámetros desconocidos.

Para el modelo de regresión lineal, el método utilizado para estimar los parámetros desconocidos es el de mínimos cuadrados. Desafortunadamente, cuando el método de mínimos cuadrados es aplicado a resultados dicotómicos, los estimadores no poseen las mismas propiedades que para el modelo de regresión lineal, es decir, no necesariamente, los estimadores $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$, son aquellos que minimizan la suma de las desviaciones cuadradas de los valores observados de Y , pero este método es de ayuda para aproximarse a la estimación con el modelo de regresión logística.

El método para estimar α y β también será hara por medio de la función de máxima verosimilitud, esta función expresa la probabilidad de los datos observados en función de parámetros desconocidos.

Retomando la ecuación (2.3), $\pi(x_i)$ resulta [para un valor arbitrario de (α, β) , el vector de parámetros] la probabilidad condicional de Y , ($y_i = 1|x$). Entonces el valor $1 - \pi(x_i)$, resulta la probabilidad condicional ($y_i = 0|x$). De esta manera, la función de máxima verosimilitud está dada por:

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta) &= \prod_{i=1}^n \pi(x_i)^{y_i} [1 - \pi(x_i)]^{1-y_i} \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{e^{\alpha_i + \beta_i x_i}}{1 + e^{\alpha_i + \beta_i x_i}} \right)^{y_i} \left[1 - \left(\frac{e^{\alpha_i + \beta_i x_i}}{1 + e^{\alpha_i + \beta_i x_i}} \right) \right]^{1-y_i} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Para encontrar los valores de α y β que maximizan el valor de $\ln[L(\alpha, \beta)]$, se obtiene sus derivadas parciales, con respecto a α y β y se igualan a cero, obteniéndose las ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - \pi(x_i)] = 0$$

y

$$\sum_{i=1}^n x_i [y_i - \pi(x_i)] = 0$$

Pero en estas ecuaciones α y β son no lineales, así que se necesitan métodos especiales para su solución, por ejemplo los iterativos que han sido programados en software para regresión logística.

Para comparar los valores observados de la variable dependiente con los predichos por el modelo con o sin la variable en cuestión. En la regresión logística la comparación está basada en la función logarítmica de probabilidad definida en (2.5), para entender mejor esta comparación es de ayuda pensar que el valor observado de la variable dependiente de igual manera es resultado de un modelo saturado⁹.

Esta comparación está basada en la siguiente expresión:

$$D = -2 \ln \left[\frac{\text{probabilidad del modelo actual}}{\text{probabilidad de un modelo saturado}} \right] \quad (2.6)$$

Esta es llamada la prueba de razón de verosimilitud, usando las ecuaciones (2.5) y (2.6)

$$D = -2 \sum_{i=1}^n \left[y_i \ln \left(\frac{\hat{\pi}_i}{y_i} \right) + (1 - y_i) \ln \left(\frac{1 - \hat{\pi}_i}{1 - y_i} \right) \right] \quad (2.7)$$

En estadística la ecuación anterior es llamada la devianza y, en la regresión logística, tiene el mismo rol que la suma de los residuales al cuadrado de la regresión lineal. De hecho la

⁹ Un modelo saturado es aquel que contiene tantos parámetros como puntos de referencia. Un ejemplo es al ajustar un modelo de regresión lineal cuando solo se tiene dos puntos de referencia $n=2$.

desviación que se muestra en la ecuación (2.6) cuando se calcula para la regresión lineal es igual a SCE (suma de cuadrados estándar).

Para propósitos del cálculo de la significancia de una variable independiente se comparará el valor de D con y sin la variable la ecuación. El cambio en D para el modelo se obtiene como sigue:

$$G = D_{\text{para el modelo sin la variable}} - D_{\text{para el modelo con la variable}} \quad (2.8)$$

Esta estadística tiene el mismo papel en regresión logística como lo hace el numerador de la prueba parcial F en regresión lineal. Porque la probabilidad del modelo saturado es común para ambos valores de D siendo diferenciado para calcular G, para el caso de un sola variable independiente cuando la variable no está en el modelo, la máxima verosimilitud estimada de α es $\ln(n_1/n_0)$, donde $n_1 = \sum y_i$ y $n_0 = \sum (1 - y_i)$ y que el valor predicho es la constante n_1/n , entonces G se expresa como

$$G = 2\{\sum_{i=1}^n [y_i \ln(\hat{\pi}_i) + (1 - y_i) \ln(1 - \hat{\pi}_i)] - [n_1 \ln(n_1) + n_0 \ln(n_0) + n \ln(n)]\} \quad (2.9)$$

2.1.1 Interpretación de los coeficientes del modelo de regresión logística

La interpretación de cualquier modelo ajustado requiere que se esté dispuesto a diseñar inferencias prácticas a partir de coeficientes estimados del modelo. Los coeficientes estimados para las variables independientes representan, la pendiente o tasa de cambio de una función de la variable dependiente por unidad de cambio en la independiente.

Esta interpretación envuelve dos puntos:

Determinar la relación funcional entre la variable dependiente y la independiente y definir de manera adecuada la unidad de cambio para esta última.

El primer paso es determinar qué función de la variable independiente da una función de las

dependientes y será llamada la función de enlace. En el caso del modelo de regresión lineal es la función identidad, pues la variable dependiente, por definición, es lineal en sus parámetros. En el caso de la regresión logística, la función de enlace es la transformación

$$\text{logit } g(x) = \ln \left[\frac{\pi(x)}{1-\pi(x)} \right] = \beta_0 + \beta_1 x.$$

Si se quiere saber el valor de la pendiente, se debe obtener $\beta_1 = g(x + 1) - g(x)$, esto representa el cambio en el logit por la variación en una unidad en la variable independiente x . La interpretación adecuada del coeficiente de este modelo depende de ser capaz de poner el sentido a la diferencia entre los dos logit.

2.2 Modelo multinivel

El análisis multinivel es una metodología utilizada para el estudiar datos con patrones de variabilidad complejos, con enfoque en la fuente de variabilidad anidada. En el análisis de estos datos, por lo general es de gran ayuda tener en cuenta la variabilidad asociada con cada nivel de anidación.

El análisis multinivel tiene dos principales corrientes: el análisis contextual y el modelo de efectos mixtos.

El *análisis contextual* es un desarrollo de las ciencias sociales que está enfocado en los efectos del contexto social, sobre el comportamiento individual.

Los *modelos de efectos mixtos* son modelos estadísticos en el análisis de varianza y el de regresión, donde se supone que algunos de los coeficientes son fijos y otros aleatorios.

El principal modelo estadístico de análisis multinivel es el modelo lineal jerárquico, que es una extensión del de regresión lineal múltiple, a un modelo que incluye coeficientes aleatorios anidados.

El diseño del muestreo estándar está ligado a una muestra aleatoria simple con o sin remplazo, para una población finita, por tal razón el proceso de selección es independiente entre observaciones y la probabilidad de seleccionar una sola unidad es constante (y conocida) a través de todos los elementos en la población. Sin embargo, existen diseños de muestreo que son más costo-eficientes que el estándar. Uno de estos diseños de muestreo costo-eficientes es el *muestreo multi-etapa*, en donde la población de interés consiste de subpoblaciones y la selección toma lugar vía estas subpoblaciones (si existe solo un nivel de subpoblación se dice que es un *muestreo en dos etapas*).

El muestreo multietápico es preferido en la práctica porque el costo de las entrevistas o las

pruebas en personas se reducen enormemente en virtud de que están geográficamente u organizacionalmente agrupadas.

En el análisis multinivel es muy importante tomar en cuenta la estructura de los elementos de la población y para ello es necesario considerar los coeficientes de correlación intraclase, que es una medida básica del grado de dependencia en datos “agrupados”.

Un procedimiento común en la investigación social con los datos de dos niveles, es agrupar los datos del micro-nivel al macro-nivel. La manera sencilla de hacer esto es trabajar con los promedios para cada macro-unidad.

El segundo error potencial cuando se tiene una agrupación es la falacia ecológica¹⁰. Una correlación entre variables macro-nivel, no se pueden utilizar para hacer afirmaciones sobre relaciones micro-nivel.

El tercer posible error es el de no hacer caso de la estructura original de la población, especialmente cuando se usan algunos tipos de análisis de covarianza.

Y por último, la agrupación impide examinar los posibles efectos de interacción de nivel cruzado de una variable micro-nivel específica con una variable macro-nivel, aun no especificada.

Por otro lado, si se supone tratar los datos al micro-nivel, hay dos situaciones:

- Se tiene una medida de una variable al macro-nivel, después medida al micro-nivel.
- Solo se tiene medidas de variables micro-nivel.

Si las medidas solo se toman en el micro-nivel, el análisis en los datos al micro-nivel es la manera correcta de hacerlo, siempre y cuando se tome en cuenta que las observaciones

¹⁰ La falacia ecológica se refiere a la confusión entre efectos individuales y agrupados.

dentro de una macro-unidad pueden estar correlacionadas.

En conclusión, si la macro-unidad tiene cualquier relación significativa con el fenómeno de estudio, analizando solo datos agrupados o desagrupados, puede inducir a conclusiones engañosas y erróneas. Una aproximación multinivel, en la cual, las relaciones dentro de grupo y entre grupo están combinadas, es más difícil, pero más productiva. Sin embargo, esta aproximación requiere supuestos específicos sobre la manera en la cual, macro- y micro-efectos interactúan.

2.2.1 Correlación intraclase

El grado de semejanza entre micro-unidades pertenecientes a la misma macro-unidad puede ser expresado por el coeficiente de correlación intraclase¹¹. Sin embargo, existen muchas definiciones de este factor, dependiendo de los supuestos sobre el diseño de muestra. En este caso se supone un diseño de muestreo de dos-etapas y una infinidad de poblaciones en cualquier nivel. Las macro-unidades también harán referencia a los *grupos*.

Un modelo pertinente aquí es el ANOVA de *efectos aleatorios*¹², este modelo se expresa como

$$Y_{ij} = \mu + U_j + R_{ij}, \quad (2.10)$$

donde,

Y_{ij} es el valor observado de respuesta para micro-unidad i dentro de la macro-unidad j

μ representa la gran media poblacional

U_j es el efecto aleatorio específico de la macro-unidad j

R_{ij} representa el efecto residual para micro-unidad i dentro de esta macro-unidad¹³.

¹¹ El término clase, se refiere a las macro-unidades en el sistema de clasificación que se está considerando.

¹² ANOVA: (Analysis of variance en inglés) análisis de varianza es la técnica estadística que analizar si dos o más medias muestrales provienen de la misma población. El modelo ANOVA de *efectos aleatorios* o ANOVA Tipo II de Eisenhart. Y en la modelación multinivel es conocido como el modelo vacío (modelo de efectos fijos).

¹³ Esto se puede interpretar como la macro-unidad j tiene la “media verdadera” $\mu+U_j$ y cada medición de una

Las unidades difieren aleatoriamente unas de otras, lo cual se refleja en el hecho de que U_j es una variable aleatoria, de ahí el nombre de “modelo de efectos aleatorios”.

Dentro de los supuestos de este modelo, se tiene que todas las variables son independientes, los efectos de grupo U_j tienen media poblacional 0 y varianza poblacional τ^2 (varianza poblacional entre grupo) y los residuales tienen media cero y varianza σ^2 (la varianza poblacional dentro de grupo). La varianza total de Y_{ij} es la suma de estas dos varianzas.

$$\text{Var}(Y_{ij}) = \tau^2 + \sigma^2 \quad (2.11)$$

El número de micro-unidades dentro de la j -ésima macro-unidad se denota por n_j .

El número de macro-unidades es N , el tamaño total de muestra es $M = \sum_{j=1}^N n_j$.

Bajo estos supuestos, el coeficiente de correlación intraclase ρ_1 queda definido:

$$\rho_1 = \frac{\text{varianza poblacional entre macro-unidades}}{\text{varianza total}} = \frac{\tau^2}{\tau^2 + \sigma^2}. \quad (2.12)$$

Esta es la proporción de varianza que se explica para el nivel de grupo. Se le llama coeficiente de correlación porque es igual a la correlación entre valores de dos micro-unidades (elegidas aleatoriamente) en la misma macro-unidad (también elegida aleatoriamente).

2.2.2 Varianza dentro de grupo y entre grupo

Para desmenuzar la información contenida en los datos sobre la varianza poblacional

micro-unidad dentro de esta macro-unidad se desvía de ésta “media verdadera” por algún valor, llamado R_{ij} .

entre-grupo y dentro de grupo, se consideran sus respectivas varianzas observadas.

La media de la macro-unidad j se denota por

$$\bar{Y}_{.j} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij} \quad (2.13)$$

y la media total es

$$\bar{Y}_{..} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N n_j \bar{Y}_{.j} \quad (2.14)$$

La varianza observada dentro de grupo j está dado por

$$S_j^2 = \frac{1}{n_j - 1} \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})^2 \quad (2.15)$$

Este número variará para cada grupo. Para tener un parámetro que expresa la variabilidad dentro de grupos para todos los grupos en conjunto, se usa la varianza observada dentro de grupo, o varianza agrupada dentro de grupo. Esto es un promedio ponderado de las variaciones dentro de las diferentes macro-unidades, definida de la siguiente manera:

$$S_{\text{dentro de}}^2 = \frac{1}{M - N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})^2 = \frac{1}{M - N} \sum_{j=1}^N (n_j - 1) S_j^2 \quad (2.16)$$

Bajo el supuesto del modelo (2.10), el valor esperado de la varianza observada dentro de grupo es exactamente igual a la varianza poblacional dentro de grupo:

$$\text{Varianza esperada dentro de} = E(S_{\text{dentro de}}^2) = \sigma^2 \quad (2.17)$$

La situación para la varianza entre grupo es un poco más complicada. Para grupos de tamaños iguales n_j , la varianza observada entre grupo se define como la varianza entre las medias grupales:

$$S_{\text{entre}}^2 = \frac{1}{(N-1)} \sum_{j=1}^N (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (2.18)$$

Para grupos de tamaños desiguales, las contribuciones de varios grupos necesitan ser ponderados. La siguiente fórmula utiliza pesos que son útiles para estimar la varianza poblacional entre grupo:

$$S_{\text{entre}}^2 = \frac{1}{\tilde{n}(N-1)} \sum_{j=1}^N n_j (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (2.19)$$

En donde \tilde{n} está definida como

$$\tilde{n} = \frac{1}{N-1} \left\{ M - \frac{\sum_j n_j^2}{M} \right\} = \bar{n} - \frac{s^2(n_j)}{N\bar{n}} \quad (2.20)$$

Donde $\bar{n} = \frac{M}{N}$ es la media del tamaño de muestra y

$$s^2(n_j) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (n_j - \bar{n})^2$$

es la varianza de los tamaños de muestra. Si todas las n_j tienen el mismo valor, entonces \tilde{n} también tiene ese valor. En ese caso, S_{entre}^2 es solo la varianza de las medias grupales, dado por (2.18).

Se puede demostrar que la varianza total observada es una combinación de las varianzas dentro de grupo y entre grupo, que se expresa:

$$\begin{aligned} \text{varianza total observada} &= \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 \\ &= \frac{M-N}{M-1} S_{\text{dentro de}}^2 + \frac{\tilde{n}(N-1)}{M-1} S_{\text{entre}}^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

La complicación que existe con respecto a la varianza entre grupos proviene del hecho de que los residuales de micro-nivel R_{ij} también contribuyen, aunque en menor medida, a la varianza entre grupo observada. La teoría estadística dice que la varianza esperada entre grupos está dada por:

Varianza observada esperada *entre* = Varianza real *entre* + Varianza esperada del error de muestreo, o sea:

$$E(S_{\text{entre}}^2) = \tau^2 + \frac{\sigma^2}{\tilde{n}} \quad (2.22)$$

Esto es válido, siempre que el modelo (2.10) lo sea. Para el segundo término de la fórmula (2.22), este tiende a ser pequeño, cuando \tilde{n} es grande. De esta manera, para grupos de gran tamaño, la esperanza de la varianza entre grupo observada es prácticamente igual a la verdadera varianza entre grupo.

Como se verá a continuación, una forma de estimar los valores de las varianzas dentro de y entre grupos es con base en las expresiones (2.17) y (2.18).

El estimador de la varianza poblacional dentro de grupo (σ^2), es la varianza observada dentro de grupo.

$$\hat{\sigma}^2 = S_{\text{dentro de}}^2 \quad (2.23)$$

La varianza poblacional entre grupo, puede ser estimada insesgadamente, tomando la varianza observada entre grupos y restándole la contribución que hace la verdadera varianza dentro de grupo, en promedio, de acuerdo a (2.14), a la varianza observada entre grupo:

$$\hat{\tau}^2 = S_{\text{entre}}^2 - \frac{S_{\text{dentro de}}^2}{\tilde{n}} \quad (2.24)$$

Esta expresión puede tomar valores negativos, esto pasa cuando la diferencia entre medias grupales es menor al valor esperado sobre la base de la variabilidad dentro de grupo, aun cuando la verdadera varianza entre grupo (τ^2) fuera cero.

Se puede concluir que la división entre la varianza observada dentro de grupo y la varianza observada entre grupos, que no corresponde precisamente a la división entre las varianzas dentro de grupo y entre grupo en la población: la varianza observada entre grupo refleja la varianza poblacional entre grupo más un poco de la varianza poblacional dentro de grupo.

La correlación intraclass se estima de acuerdo a la ecuación (2.12):

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\hat{\tau}^2}{\hat{\tau}^2 + \hat{\sigma}^2} \quad (2.25)$$

El error estándar de este estimador, en el caso donde todos los tamaños de grupos son constantes, es decir, $n_j = n$, está dado por:

$$S. E. (\hat{\rho}_1) = (1 - \hat{\rho}_1)(1 + (n - 1)\rho_1) \sqrt{\frac{2}{n(n-1)(N-1)}} \quad (2.26)$$

Los estimadores dados anteriormente son también llamados estimadores de ANOVA. Tienen la ventaja de que ellos pueden ser representados por las fórmulas explícitas. Otros estimadores más utilizados son los producidos por los métodos de máxima verosimilitud MV y máxima verosimilitud restringida MVR. Para grupos de tamaños iguales, los estimadores ANOVA son los mismos que los estimadores REML, pero para grupos de tamaño desigual, los estimadores ML y REML son un poco más eficientes que los ANOVA. El software multinivel puede ser usado para calcular los estimadores MV y MVR. (Snijders y Bosker, 1999)

2.2.3 Prueba para diferencia de grupos

La correlación intraclase definida en (2.12) puede ser cero o positiva. Una prueba estadística puede ser realizada para investigar si un valor positivo para este coeficiente puede ser atribuido al azar. Si se asume que las desviaciones R_{ij} se distribuyen normal, se puede utilizar una prueba exacta para la hipótesis de que la correlación intraclase es cero, la cual es la misma que la hipótesis nula de que no hay diferencias entre los grupos o la verdadera varianza entre grupo es cero. Esto es solo la prueba F para un efecto de grupo en el análisis de la varianza (ANOVA). La prueba estadística puede ser escrita:

$$F = \frac{\tilde{n}S_{\text{entre}}^2}{S_{\text{dentro de}}^2} \quad (2.27)$$

y F tiene una distribución con $N - 1$ y $M - N$ grados de libertad si la hipótesis nula se mantiene.

Los paquetes computacionales generalmente proporcionan el estadístico F y la varianza dentro de grupo, $S_{\text{dentro de}}^2$. Para este resultado, la varianza poblacional estimada entre grupo puede calcularse como:

$$\hat{\tau}^2 = \frac{S_{\text{dentro de}}^2}{\tilde{n}} (F - 1) \quad (2.28)$$

y el coeficiente de correlación intraclase está dado por

$$\hat{\rho}_1 = \frac{F - 1}{F + \tilde{n} - 1} \quad (2.29)$$

donde \tilde{n} está dado por (2.20). Si $F < 1$, es natural reemplazar ambas ecuaciones por cero.

La ecuación (2.29) muestra que un valor alto para el estadístico F dará lugar a grandes estimaciones para la varianza entre grupo al igual que la correlación intraclase, pero que el tamaño de grupos, que se expresa por \tilde{n} , modera la relación entre la prueba estadística y los parámetros estimados.

Si existen covariables, frecuentemente es importante probar si hay diferencia entre grupos amén de aquellas explicadas por el efecto de covariables, esto se logra con la prueba F habitual para el efecto de grupo en un análisis de covarianza (ANCOVA)¹⁴. Esta prueba es importante porque es posible que la prueba F del análisis ANOVA no demuestre ningún efecto de grupo, pero que tales efectos surjan cuando se controlan por las covariables (o viceversa). Otra manera de comprobar si los grupos hacen una diferencia, puede llevarse a cabo mediante la prueba de grupo por efecto de la interacción de covarianza.

Para probar si una determinada estructura anidada en un conjunto de datos exige un análisis multinivel, se pueden usar técnicas estándar para el análisis de varianza. Además de las pruebas para el efecto de grupo principal, también es aconsejable hacerlas para el grupo por las interacciones de las covariables.

Si no existe ninguna evidencia de interacción principal ni para los efectos de la interacción que involucran la estructura de grupos, entonces se debe prescindir de la estructura anidada y analizar los datos por medio de métodos como regresión lineal por mínimos cuadrados.

2.2.4 Diseño de efectos en muestras de dos etapas.

Para muestras de dos etapas el determinar el tamaño de muestra, es más complicado que

¹⁴ Fusión del ANOVA y la regresión lineal múltiple. Consiste en utilizar una o más variables adicionales o covariables, que están relacionadas con la variable dependiente. El objetivo es eliminar el efecto de las variables independientes ejercido sobre la dependiente. Se realiza un análisis de varianza en el cual la variable dependiente es el error en los pronósticos al realizar un análisis de regresión lineal utilizando las covariables como variables independientes y la dependiente es la misma que se determinó en el ANOVA inicial.

para una muestra aleatoria simple (una etapa). Las muestras grandes son ideales para incrementar la precisión de la estimación de parámetros. En una muestra aleatoria simple, el error estándar de la media, está relacionado al tamaño de muestra por la fórmula:

$$\text{error estándar} = \frac{\text{desviación estándar}}{\sqrt{\text{tamaño de muestra}}} \quad (2.30)$$

Sin embargo, cuando se utiliza el muestreo de dos etapas, la agrupación de los datos debe ser tomada en cuenta. Si se supone que todos los tamaños de grupos son iguales, $n_j = n$ para toda j , el tamaño de muestra (total) sería Nn .

Cuando se estima el error estándar de la media ya no se puede tratar a las observaciones como independientes unas de otras. El tamaño de muestra efectivo, es el equivalente al tamaño de muestra total que debe ser usado para estimar el error estándar, es igual a

$$N_{\text{efectivo}} = \frac{Nn}{\text{efecto de diseño}} \quad (2.32)$$

En donde N es el número de macro-unidades seleccionadas.

2.2.5 Confiabilidad de variables agregadas

La confiabilidad de medición (λ_j) está definida generalmente como

$$\lambda_j = \frac{\text{varianza de resultados reales}}{\text{varianza de valores observados}} \quad (2.33)$$

Para la medición de una única observación de acuerdo al modelo (2.10), la confiabilidad es el coeficiente de correlación intraclase:

$$\lambda_j = \rho_1 = \frac{\tau^2}{\tau^2 + \sigma^2} \quad (\text{si } n_j = 1) \quad (2.34)$$

Cuando se hacen varias mediciones para cada unidad macro-nivel, esto constituye una agrupación o grupo de mediciones las cuales son agregadas a la media grupal \bar{Y}_j . Para aplicar a \bar{Y}_j la definición general de confiabilidad, debe notarse que la varianza observada es la varianza entre las medias observadas \bar{Y}_j , mientras que la varianza real es la varianza entre los valores del modelo poblacional $\mu + U_j$. Por tanto la confiabilidad de los agregados es

$$\text{confiabilidad de } \bar{Y}_j = \frac{\text{varianza entre } \mu + U_j}{\text{varianza entre } \bar{Y}_j} \quad (2.35)$$

Se puede demostrar que la confiabilidad de variables agregadas incrementa a medida que un número de micro-unidades por macro-unidad aumenta, ya que la varianza de la media grupal (con tamaño de grupo n_j) es τ^2 , mientras que la esperanza de la varianza observada de la media grupal es $\tau^2 + \frac{\sigma^2}{n_j}$, entonces la confiabilidad puede ser expresada por:

$$\lambda_j = \frac{\tau^2}{\tau^2 + \frac{\sigma^2}{n_j}} = \frac{n_j \rho_1}{1 + (n_j - 1) \rho_1} \quad (2.36)$$

Es claro que si n_j es muy grande entonces λ_j es casi 1. Si $n_j = 1$ es notable distinguir entre varianza dentro de y entre grupo.

2.2.6 Relaciones dentro de y entre grupo

Como se ha visto, las regresiones entre variables agregadas al macro-nivel \bar{X} y \bar{Y} pueden ser completamente diferentes de las regresiones entre variables micro-nivel X y Y . Esto es normal porque el proceso de trabajo dentro de grupos puede ser diferente al de entre grupos. Las relaciones del total, es decir, las relaciones al micro-nivel cuando la agrupación en macro-unidades es ignorado, es más como un tipo de promedio de las relaciones dentro

de grupo y entre grupo. Por consiguiente es necesario considerar relaciones conjuntas dentro de y entre grupo, cada vez que la agrupación de micro-unidades en macro-unidades es significativo para el fenómeno estudiado.

2.2.7 Regresiones

Como ya se había descrito, el modelo de regresión lineal (2.1), está dado por

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

Donde los coeficientes de regresión están dados por

$$\alpha = E(Y) - \beta E(X)$$

$$\beta = \frac{cov(X, Y)}{var(X)}$$

En una estructura de datos multinivel, este principio puede aplicarse de varias maneras, dependiendo de qué valores poblacionales tengan X y Y.

Sea X_{ij} la variable observada para la micro-unidad i en la macro-unidad j y \bar{X}_j el promedio de los valores de X_{ij} para el grupo j , y de igual manera para la variable dependiente Y.

Se debe estar interesado en la relación entre X_{ij} y Y_{ij} , la recta de regresión lineal queda expresada:

$$Y_{ij} = \alpha' + \beta' X_{ij} + R' \quad (\text{Regresión total}) \quad (2.37)$$

Esta es una relación desagregada, ya que la anidación de micro-unidades en macro-unidades no se está tomando en cuenta, la relación agregada es la regresión lineal de la relación del macro-nivel de las medias grupales \bar{Y}_j y las medias grupales \bar{X}_j . Esta recta de regresión se expresa:

$$\bar{Y}_j = \alpha'' + \beta''\bar{X}_j + R'' \quad (\text{Regresión entre medias grupales}) \quad (2.38)$$

Una tercera opción es describir la relación entre X_{ij} y Y_{ij} , dentro de cada grupo. Asumiendo que el coeficiente de regresión es el mismo para cada grupo este es el mismo que el de la regresión de las Y-desviaciones dentro de grupo ($Y_{ij} - \bar{Y}_j$) y las X-desviaciones ($X_{ij} - \bar{X}_j$). La regresión lineal dentro de grupo está dada por:

$$Y_{ij} = \bar{Y}_j + \beta'''(X_{ij} - \bar{X}_j) + R''' \quad (\text{Regresión dentro de grupos}) \quad (2.39)$$

Finalmente, Y_{ij} puede escribirse como una función de las relaciones dentro de grupo y entre grupo entre X y Y. Esto equivale a unir las ecuaciones de regresión entre grupo y dentro de grupo. El resultado es:

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= \alpha'' + \beta''\bar{X}_j + \beta'''(X_{ij} - \bar{X}_j) + R & (2.40) \\ &= \alpha'' + \beta'''X_{ij} + 2(\beta'' + \beta''')\bar{X}_j + R & (\text{Regresión multinivel}) \end{aligned}$$

La verdadera relación entre Y y X se revela cuando las correlaciones dentro de grupo y entre grupo son consideradas de manera conjunta, es decir, por la regresión multinivel.

2.2.8 Modelo poblacional

Las relaciones dentro de grupo y entre grupo, pueden entenderse mejor con base al modelo poblacional (2.6); en el cual el grupo (macro-unidad) j tiene efectos principales específicos U_{x_j} y U_{y_j} para las variables X y Y; y asociadas con cada individuo (micro-unidades) i están las desviaciones dentro de grupo $R_{x_{ij}}$ y $R_{y_{ij}}$. Las medias poblacionales se denotan por μ_x and μ_y y como supuesto se tiene que las U y las R tienen medias poblacionales cero y son independientes entre sí. Las fórmulas para X e Y se expresan:

$$\begin{aligned}
X_{ij} &= \mu_x + U_{xj} + R_{xij} \\
Y_{ij} &= \mu_y + U_{yj} + R_{yij}
\end{aligned}
\tag{2.41}$$

Para la fórmula que se refiere a las regresiones entre medias grupales (2.38) \bar{X}_j y \bar{Y}_j , se asume que cada grupo tiene el mismo tamaño, denotado por n .

La correlación entre los efectos de grupo se define:

$$\rho_{\text{entre}} = \rho(U_{xj}, U_{yj}),$$

mientras que la correlación entre desviaciones individuales se define:

$$\rho_{\text{dentro de}} = \rho(R_{xij}, R_{yij}).$$

Una de las dos variables X e Y podría tener un grupo de carácter más fuerte que el otro, de tal forma que los coeficientes de correlación intraclase para X e Y pueden ser diferentes y se denotan por ρ_{1x} y ρ_{1y} , respectivamente.

El *coeficiente de regresión dentro de grupo* es el coeficiente de regresión dentro de cada grupo de Y en X, asumiendo que es el mismo para cada grupo. Este coeficiente es denotado por $\beta_{\text{dentro de}}$ y definido por la ecuación de regresión:

$$Y_{ij} = \mu_y + U_{yj} + \beta_{\text{dentro de}}(X_{ij} - \mu_x - U_{xj}) + R \tag{2.42}$$

Esta ecuación puede ser considerada como un modelo de análisis de covarianza (ANCOVA) para Y, por tanto, el coeficiente de regresión dentro de grupo también es el efecto de X en el enfoque ANCOVA para estos datos multinivel.

El coeficiente de regresión dentro de grupo también se obtiene cuando se hace regresión entre los valores de las Y-desviaciones ($Y_{ij} - \bar{Y}_j$) y las X-desviaciones ($X_{ij} - \bar{X}_j$).

El *coeficiente de regresión entre grupos* de la población se define como el coeficiente de regresión para los efectos de grupo U_x en U_y y se denota por $\beta_{\text{entre U}}$ y su ecuación de regresión

$$U_{xj} = \beta_{\text{entre U}} + U_{yj} + R$$

donde R es el residual del nivel de grupo.

El *coeficiente de regresión total* de X en Y es el coeficiente de regresión del análisis desagregado, es decir, cuando los datos son tratados como datos de un solo nivel:

$$Y_{ij} = \mu_y + \beta_{\text{total}}(X_{ij} - \mu_x) + R$$

El coeficiente de regresión total puede ser expresado como una media ponderada de los coeficientes dentro de y entre grupos, donde el peso para el coeficiente entre grupo es justo la correlación intraclase para X, la fórmula es:

$$\beta_{\text{total}} = \rho_{1x}\beta_{\text{entre U}} + (1 - \rho_{1x})\beta_{\text{dentro de}} \quad (2.43)$$

La expresión (2.43) implica que si X es una variable pura de macro-nivel ($\rho_{1x} = 1$), el coeficiente de regresión total es igual al coeficiente entre grupo y viceversa.

En el macro-nivel, la regresión de las medias grupales observadas \bar{Y}_j en \bar{X}_j , no es la misma que la regresión de los efectos de grupo “verdaderos” U_y en U_x . Esto es porque los promedios grupales observados, \bar{X}_j y \bar{Y}_j pueden ser considerados como las medias grupales

“verdaderas” a las que algún error, $\bar{R}_{x,j}$ y $\bar{R}_{y,j}$, han sido agregados. Por tanto, el coeficiente de regresión para las medias grupales observadas no es exactamente igual al coeficiente de regresión entre grupo (poblacional), pero se expresa como:

$$\beta_{\text{entre medias grupales}} = \lambda_{xj}\beta_{\text{entre U}} + (1 - \lambda_{xj})\beta_{\text{dentro de}}, \quad (2.44)$$

donde λ_{xj} es la confiabilidad de las medias grupales $\bar{X}_{.j}$ para la medición de $\mu_x + U_{x,j}$, dado por la ecuación (2.35) aplicado a la variable X. Si n es grande, la confiabilidad puede ser casi uno y el coeficiente de regresión para las medias grupales puede ser casi el coeficiente de regresión entre grupo del nivel de población. Combinando las ecuaciones (2.43) y (2.44) conduce a otra expresión para el coeficiente de regresión total, la cual utiliza la proporción de correlación η_x^2 , que está definida como la proporción del coeficiente de correlación intraclase y la confiabilidad de la media grupal,

$$\eta_x^2 = \frac{\rho_{1x}}{\lambda_{xj}} = \frac{\tau^2 + \frac{\sigma^2}{n}}{\tau^2 + \sigma^2} \quad (2.45)$$

Para tamaños de grupos grandes, la confiabilidad se aproxima a la unidad, entonces la proporción de correlación se aproxima a la correlación intraclase.

En los datos, la proporción de correlación η_x^2 es la misma que la de varianza en X_{ij} explicada por las media grupales y se calcula como la razón:

$$\eta_x^2 = \frac{\sum_j n_j (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})^2}{\sum_{i,j} (X_{ij} - \bar{X}_{..})^2}$$

La expresión combinada indica cuanto el coeficiente de regresión total depende del coeficiente de regresión dentro de grupo y del coeficiente de regresión entre las medias

grupales:

$$\beta_{\text{total}} = \eta_x^2 \beta_{\text{entre medias grupales}} + (1 - \eta_x^2) \beta_{\text{dentro de}} \quad (2.46)$$

Para aplicar esta ecuación a un conjunto de datos desequilibrados, el coeficiente de regresión entre medias grupales, podría ser calculado en una regresión ponderada, grupo j teniendo peso n_j .

La correlación poblacional dentro de grupo es la misma que la correlación entre las puntuaciones de desviación dentro de grupo ($\tilde{X}_{ij}, \tilde{Y}_{ij}$):

$$\rho(\tilde{X}_{ij}, \tilde{Y}_{ij}) = \rho_{\text{dentro de}} \quad (2.47)$$

El coeficiente de correlación entre medias grupales es un poco más complicado:

$$\rho(\bar{X}_j, \bar{Y}_j) = \sqrt{\lambda_{x_j} \lambda_{y_j} \rho_{\text{entre}}} + \sqrt{(1 - \lambda_{x_j})(1 - \lambda_{y_j})} \rho_{\text{dentro de}} \quad (2.48)$$

donde λ_{x_j} y λ_{y_j} son los coeficientes de confiabilidad de las medias grupales (ver ecuación (2.35)). Para grupos de gran tamaño, las confiabilidades serán cercanas a 1 (siempre que las correlaciones intraclase son más grandes que cero), así que la correlación entre las medias grupales estará cercana a ρ_{entre} . Esta fórmula muestra que la correlación entre medias grupales es más grande que la correlación total, es decir, la agregación incrementará la correlación, solo si el coeficiente de correlación entre grupos es más grande que el coeficiente de correlación dentro de grupos. Por consiguiente la razón de que las correlaciones entre medias grupales sean a menudo más grandes que las correlaciones entre individuos, no es la consecuencia matemática de la agregación sino del proceso del nivel de grupo (determinando el valor de ρ_{entre}) siendo diferente del proceso del nivel individual (el cual determina el valor de $\rho_{\text{dentro de}}$).

La correlación total (es decir, la correlación en el análisis desagregado) es una combinación de los coeficientes de correlación dentro de grupo y entre grupo, la combinación depende de las correlaciones intraclase como se muestra a continuación:

$$\rho(X_{ij}, Y_{ij}) = \sqrt{\rho_{1x}\rho_{1y}}\rho_{\text{entre}} + \sqrt{(1 - \rho_{1x})(1 - \rho_{1y})}\rho_{\text{dentro de}} \quad (2.49)$$

Si las correlaciones intraclase son pequeñas, entonces X y Y tienen principalmente la naturaleza de las variable nivel uno, y la correlación total será cercana a la correlación dentro de grupo; por otro lado, si las correlaciones intraclase son cercanas a 1, entonces X y Y tienen la naturaleza de las variables de nivel dos y la correlación total es cercana a la correlación entre grupo.

Si las correlaciones intraclase de X y Y son iguales y denotadas por ρ_1 , entonces (2.49) se reduce a

$$\rho(X_{ij}, Y_{ij}) = \rho_1\rho_{\text{entre}} + (1 - \rho_1)\rho_{\text{dentro de}}$$

En este caso, los ponderadores ρ_1 y $(1 - \rho_1)$ suman 1 y el coeficiente de regresión total está necesariamente entre el coeficiente de regresión dentro de grupo y el de entre grupo. En general, sin embargo, esto no siempre es verdad, porque la suma de los pesos en (2.49) es más pequeña que 1 si las correlaciones intraclase para X y Y son diferentes. Por ejemplo, si una de las correlaciones intraclase es cercana a cero y la otra cercana a uno, entonces una variable es principalmente variable nivel uno y la otra principalmente de nivel dos. La fórmula (2.49) entonces implica que el coeficiente de correlación total es cercano a cero, no importa que tan grande sean las correlaciones dentro de grupo y entre grupo.

Análogo a los coeficientes de regresión, para los coeficientes de correlación se pueden combinar las ecuaciones para ver cómo la correlación total depende de la correlación dentro de grupo y la correlación entre las medias grupales.

$$\rho(X_{ij}, Y_{ij}) = \eta_x \eta_y \rho(\tilde{X}_j, \tilde{Y}_j) + \sqrt{(1 - \eta_x^2)(1 - \eta_y^2)} \rho_{dentro\ de} \quad (2.50)$$

Cuando se aplica a un conjunto de datos desbalanceados, la correlación entre las medias grupales se debe calcular con ponderadores n_j .

Si se equipara la población y los datos, entonces las confiabilidades son la unidad, las proporciones de correlación son las mismas que las correlaciones intraclase y la correlación poblacional entre grupo es igual a la correlación entre las medias grupales. La ecuación para la correlación se convierte en:

$$R_{total} = \hat{\eta}_x \hat{\eta}_y R_{entre} + \sqrt{(1 - \hat{\eta}_x^2)(1 - \hat{\eta}_y^2)} R_{dentro\ de} \quad (2.51)$$

Un método rápido para obtener la estimación de los parámetros de correlación, está basado en las correlaciones intraclase. La correlación observada dentro de grupo es solo el coeficiente de correlación ordinario entre las desviaciones dentro de grupo $(X_{ij} - \bar{X}_j)$ y $(Y_{ij} - \bar{Y}_j)$. El método rápido está basado en (2.47) y (2.49). Esto lleva a las estimaciones

$$\hat{\rho}_{dentro\ de} = R_{dentro\ de} \quad (2.52)$$

y

$$\hat{\rho}_{entre} = \frac{R_{total} - \sqrt{(1 - \hat{\rho}_{1x})(1 - \hat{\rho}_{1y})} R_{dentro\ de}}{\sqrt{\hat{\rho}_{1x} \hat{\rho}_{1y}}} \quad (2.53)$$

Este no es el método estadísticamente más eficiente, pero es sencillo y permite tener buenos resultados si el tamaño de muestra no es tan pequeño, (Snijders, 1999).

El método ANOVA es a través de varianzas y covarianzas, basado en la definición

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{var(X)var(Y)}}$$

Las covarianzas dentro de- y entre grupo entre X y Y pueden ser estimadas mediante una fórmula análoga a (2.16), (2.19), (2.23) y (2.24), reemplazando los cuadrados $(Y_{ij} - \bar{Y}_j)^2$ y $(\bar{Y}_j - \bar{Y}_..)^2$ por los productos cruzados $(X_{ij} - \bar{X}_j)(Y_{ij} - \bar{Y}_j)$ y $(\bar{X}_j - \bar{X}_..)(\bar{Y}_j - \bar{Y}_..)$.

2.2.9 Modelo lineal jerárquico

El modelo lineal jerárquico es un modelo de coeficientes aleatorios para datos multinivel o estructurados jerárquicamente y es por ahora la principal herramienta para este tipo de análisis. Este es parecido al *de regresión*, pero difiere del modelo de regresión múltiple por el hecho de que la ecuación que define al modelo lineal jerárquico contiene más de un término de error, (uno o más por cada nivel) explicativo.

Al igual que en todos los modelos de regresión, en este también existe una distinción entre las variables dependientes y las explicativas, solo que la variable dependiente debe ser una variable de nivel uno, ya que el modelo lineal jerárquico es un modelo utilizado para explicar algo que sucede en el nivel más bajo, más detallado; se tendrá el supuesto de que una variable explicativa está disponible en cualquiera de los niveles.

Para el individuo i en el grupo j , se tienen las siguientes variables

Y_{ij} es la variable dependiente

x_{ij} es la variable explicativa para el nivel individual

para el grupo j se tiene que

z_j es la variable explicativa a nivel de grupo.

La variable X, aunque es una variable de nivel individual también puede contener un

aspecto grupal, la media de X en un grupo puede ser diferente de la media de otro grupo.

El modelo simple es aquel que no tiene los efectos aleatorios característicos de los modelos multinivel, como el clásico modelo de regresión múltiple, el cual expresa que la variable dependiente Y_{ij} puede ser escrita como la suma de una parte sistemática (una combinación lineal de variables explicativas) y un error aleatorio

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_{ij} + \beta_2 z_j + R_{ij} \quad (2.54)$$

Un requerimiento importante esencial en el modelo de regresión es que todos los errores sean mutuamente independientes y con media cero; un supuesto conveniente es que todos los grupos tengan varianza constante (supuesto de homocedasticidad) y se distribuyen normal. Este modelo tiene la naturaleza multinivel, solo en la medida en que una de las variables explicativas se refiere al más bajo y la otra al más alto nivel.

El modelo (2.54) puede ser extendido al modelo de regresión donde no solo estén presentes los efectos principales de X y Z, sino también los efectos de interacción entre los diferentes niveles, es decir, la variable producto $ZX = Z \times X$ es agregada a la lista de variables explicativas, resultando la ecuación de regresión

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_{ij} + \beta_2 z_j + \beta_3 z_j x_{ij} + R_{ij} \quad (2.55)$$

En los diseños con tamaños de grupo mayor a uno, la estructura anidada a veces no puede ser representada completamente por las variables explicativas en el modelo de regresión, pero los efectos adicionales de la estructura anidada pueden representarse permitiendo que los coeficientes de regresión varíen de grupo en grupo, esto se expresa mediante el modelo:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} x_{ij} + \beta_{2j} z_j + R_{ij} \quad (2.56)$$

El primer paso hacia la modelación de la variabilidad entre grupo es permitir que la

intersección varíe entre grupos. Este modelo está entre (2.54) y (2.56) (pero omitiendo el efecto de Z), en el sentido de que la intersección β_{0j} depende del grupo pero el coeficiente de regresión de X, β_1 es constante:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{ij} + R_{ij} \quad (2.57)$$

La intersección dependiente del grupo puede ser separada en una de promedio y la desviación dependiente del grupo

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + U_{0j}$$

La intersección promedio es γ_{00} mientras que el coeficiente de regresión para X es llamado γ_{10} , sustituyendo, se obtiene el modelo:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}x_{ij} + U_{0j} + R_{ij} \quad (2.58)$$

Los valores U_{0j} son los efectos principales de los grupos: depende de un individuo que tiene cierto valor X dado y está en el grupo j el valor de Y, se espera que sea U_{0j} mayor que en el promedio grupal.

El modelo (2.58) se puede entender de dos maneras:

- Como un modelo en el que se fijan los parámetros U_{0j} , N en número, del modelo estadístico. Esto es relevante si los grupos j se refieren a categorías que cada una de ellas tiene una interpretación distinta. A fin de obtener parámetros identificados, la restricción de que $\sum_j U_{0j} = 0$ puede ser impuesta de tal manera que los grupos efectivamente permitan $N-1$ parámetros de regresión.
- Como un modelo donde los U_{0j} son variables aleatorias independiente e

idénticamente distribuidos¹⁵. Ahora se supone que estos residuales son elegidos aleatoriamente de una población con media cero y en un principio varianza desconocida. Esto es relevante si los efectos de los grupos j son controlados por las variables explicativas, pueden considerarse intercambiables. En este modelo solo hay un parámetro asociado a los U_{0j} , sus varianzas, y es llamado modelo de intersecciones aleatorias, porque las intersecciones de los dependientes de grupo $\gamma_{00} + U_{0j}$, son una cantidad que varía aleatoriamente de grupo en grupo.

El caso simple del modelo lineal jerárquico es el *modelo de análisis de varianza de efectos aleatorios*, en el cual, las variables explicativas X y Z no figuran

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + U_{0j} + R_{ij} \quad (2.59)$$

en el contexto de modelación multinivel es llamado el *modelo vacío*.

Los efectos de grupo aleatorios son variables latentes más que parámetros estadísticos y por lo tanto, no son considerados como una parte integral de la estimación de parámetros estadísticos. Sin embargo, pueden existir varias razones por las cuales, no obstante, puede ser deseable “estimarlos”¹⁶. Esto puede realizarse mediante un método conocido como *estimación empírica de Bayes* que produce lo que se llama las *medias posteriores*. La idea básica de este método es que U_{0j} es “estimado” por la combinación de dos tipos de información:

- (1) Los datos del grupo j ,
- (2) El supuesto del modelo de que el no observado U_{0j} es una variable aleatoria al igual que todos los otros efectos aleatorios de grupo y por lo tanto tienen una distribución

¹⁵ Nótese que los U_{0j} son efectos de grupo inexplicables, también llamados residuales de grupo, controlando los efectos de la variable X.

¹⁶ La palabra estimación se pone entre comillas porque el termino estadístico correcto para encontrar los probables valores de U_{0j} , siendo variables aleatorias, es *predicción*. El termino estimación es utilizado para encontrar los probables valores para parámetros estadísticos. Como la predicción en el lenguaje cotidiano es asociado con determinaciones sobre el futuro, aquí se prefiere hablar de “estimación” entre comillas.

normal con media cero y varianza τ_0^2 .

En otras palabras la información de los datos es combinada con la información poblacional.

En el modelo vacío, γ_{00} es ya un parámetro estimado, una estimación de β_{0j} será la misma que una estimación de U_{0j} más γ_{00} , por tanto, la estimación de β_{0j} y la de U_{0j} son problemas equivalentes dado que una estimación para γ_{00} es válida.

Si se usa solo el grupo j , β_{0j} puede ser estimada mediante su media grupal, que es también la estimación hecha por mínimos cuadrados ordinarios,

$$\hat{\beta}_{0j} = \bar{Y}_j \quad (2.60)$$

Si se ve solo la población, se puede estimar β_{0j} por su media poblacional γ_{00} . Este parámetro es estimado mediante su media general,

$$\hat{\gamma}_{00} = \bar{Y}_{..} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N n_j \bar{Y}_j$$

Otra posibilidad es combinar la información del grupo j con la información poblacional. La “estimación” combinada óptima para β_{0j} es un promedio ponderado de las dos estimaciones previas:

$$\beta_{0j}^{EB} = \lambda_j \hat{\beta}_{0j} + (1 - \lambda_j) \hat{\gamma}_{00}, \quad (2.61)$$

donde EB representa “empírico de Bayes” y el peso λ_j es definido como la confiabilidad de la media del grupo j (ver ecuación 2.36).

La fórmula (2.61) es llamada la media posterior, o la estimación empírica de Bayes, para β_{0j} . Este término viene de la estadística Bayesiana y se refiere a la distinción entre el conocimiento *previo* sobre los efectos de grupo, los cuales están basados solo en la

población de la cual provienen y el conocimiento *posterior* que también está basada en las observaciones hechas sobre este grupo. Este es un importante paralelismo entre el modelo de coeficientes aleatorios y el modelo estadístico Bayesiano porque los coeficientes aleatorios utilizados en el modelo lineal jerárquico análogos a los parámetros aleatorios que son esenciales en este último modelo (Snijders, 1999).

El error cuadrático medio para todos los grupos puede ser pequeño para la estimación empírica Bayesiana, pero el precio es una conservadora (proveniente del promedio) estimación de los grupos con valores verdaderamente muy altos o muy bajos de β_{0j} . Si la incertidumbre derivada de la estimación de γ_{00} es despreciable, la estimación de la varianza de la estimación empírica Bayesiana es: $var(\beta_{0j}^{EB} - \beta_{0j}) = (1 - \lambda_j)\tau_0^2$.

El modelo lineal jerárquico general es aquel que permite que las intersecciones así como las pendientes varíen aleatoriamente.

Retomando al modelo con regresiones de Y específicas de grupo en una variable de nivel uno, como el modelo (2.56), pero sin el efecto de Z,

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{ij} + R_{ij} \quad (2.62)$$

Las intersecciones β_{0j} así como los coeficientes de regresión, o pendientes, β_{1j} son grupo-dependiente. Estos coeficientes pueden separarse en un coeficiente promedio y en la desviación grupo-dependiente.

$$\begin{aligned} \beta_{0j} &= \gamma_{00} + U_{0j} \\ \beta_{1j} &= \gamma_{10} + U_{1j} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Al sustituir se obtiene el modelo:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}x_{ij} + U_{0j} + U_{1j}x_{ij} + R_{ij} \quad (2.64)$$

Se tiene el supuesto de que los residuales de nivel dos, U_{0j} y U_{1j} , así como los de nivel uno, R_{ij} , tienen medias cero, dados los valores de la variable explicativa X. Así, γ_{10} es el coeficiente de regresión promedio, al igual que γ_{00} es la intersección promedio. La primera parte de (2.63), $\gamma_{00} + \gamma_{10}x_{ij}$ es llamada la *parte fija* del modelo, mientras que la segunda parte, $U_{0j} + U_{1j}x_{ij} + R_{ij}$ es llamada la *parte aleatoria*.

El término $U_{1j}x_{ij}$ puede considerarse como una *interacción aleatoria entre el grupo y X*, este modelo implica que los grupos están caracterizados por dos efectos aleatorios: su intersección y su pendiente. Se tiene como supuestos que para diferentes grupos, los pares de efectos aleatorios (U_{0j}, U_{1j}) son independientes e idénticamente distribuidos, que son independientes de los residuales del nivel uno R_{ij} , y que todos los R_{ij} son independientes e idénticamente distribuidos. La varianza de los residuales de nivel uno R_{ij} es denotada por σ^2 ; las varianzas y covarianzas de los residuales de nivel dos (U_{0j}, U_{1j}) se denotan como:

$$\begin{aligned} \text{var}(U_{0j}) &= \tau_{00} = \tau_0^2; \\ \text{var}(U_{1j}) &= \tau_{11} = \tau_1^2 \\ \text{cov}(U_{0j}, U_{1j}) &= \tau_{01} \end{aligned} \quad (2.65)$$

El modelo (2.64) no solo implica que los individuos dentro del mismo grupo tienen correlacionados Y-valores sino también que esta correlación así como la varianza de Y son dependientes del valor de X, esta propiedad es llamada *heterocedasticidad*.

Una expresión para la varianza de (2.56) es obtenida como la suma de las varianzas de las variables aleatorias involucradas más un término que depende de la covarianza entre U_{0j} y U_{1j} , usando (2.64) y (2.65) el resultado es

$$\text{var}(Y_{ij}|x_{ij}) = \tau_0^2 + 2\tau_{01}x_{ij} + \tau_1^2x_{ij}^2 + \sigma^2 \quad (2.66)$$

y para dos individuos diferentes (i e i' , con $i \neq i'$) en el mismo grupo,

$$\text{cov}(Y_{ij}, Y_{i'j}|x_{ij}, x_{i'j}) = \tau_0^2 + \tau_{01}(x_{ij} + x_{i'j}) + \tau_1^2(x_{ij} + x_{i'j}). \quad (2.67)$$

3. Aplicación del modelo lineal jerárquico

El estudio de los factores que contribuyen a que los clientes, de un producto microfinanciero en específico, tengan días de atraso representa actualmente objeto de estudio por parte de los jugadores de la industria, debido a la preocupación del no sobreendeudamiento de los clientes y poder evitar el riesgo de no pago por parte de estos mismos.

Las microfinanzas no solo son operaciones bancarias, sino una herramienta de desarrollo, ya que están dirigidas a beneficiar a mujeres y hombres de bajos ingresos. Sin embargo, como se expone en Ledgerwood 1999, “el microfinanciamiento no es una panacea para el alivio de la pobreza. De hecho, una actividad microfinanciera deficientemente diseñada puede empeorar las cosas al perturbar los mercados informales que en forma confiable, aunque a un alto costo, han ofrecido servicios financieros a hogares pobres durante los últimos dos siglos”.

Dentro de esta problemática general, el presente trabajo se ocupa de dos interrogantes centrales: ¿Cuáles son los factores propios del cliente que influyen para que acumule días de atraso en el pago de su cuota? y ¿la ubicación geográfica en qué grado influye en ese nivel de atraso?

El propósito de este trabajo es aportar elementos que permitan prever el riesgo de incumplimiento, luego de presentar los resultados de la descomposición tradicional que distingue la variabilidad asociada con el cliente y su condición de pertenencia a un grupo y de la variabilidad asociada con la región geográfica de este.

3.1 Datos del modelo

Para la aplicación del modelo propuesto, se utilizaron datos de clientes que cuentan con un crédito de mejora de vivienda otorgado por una microfinanciera, constituido por variables

demográficas del cliente y por el otro lado la anidación de los clientes en regiones geográficas y como variables de segundo nivel se tiene la productividad promedio por colaborador de la región y el número de sucursales reportado en estas.

Son excluidos de la base de datos, aquellas personas que no presentaban información válida en todos los campos relevantes al estudio y esto, seguramente, debido a errores de captura en el sistema.

Para el presente estudio la variable dependiente es el número de días de atraso. Se desarrolla un modelo específico que identifica dos niveles de análisis. Un primer nivel, en el cuál se considera el conjunto de variables personales y del crédito otorgado al cliente, para las cuales se tiene la hipótesis de que afectan el comportamiento de pago. Un segundo nivel, contempla las variables cuyo efecto se expresa grupalmente sobre el conjunto de clientes en una región (productividad promedio de los oficiales de crédito y el número de sucursales de la región).

El modelo explicativo de dos niveles que se desarrolla pretende indicar que los días de atraso en el pago de la cuota del crédito de mejora de vivienda, están influenciados por variables que actúan en el primer y segundo nivel. Entre las primeras está la edad, el número de hijos, el tipo de ingreso, especificar si aún pertenece a un grupo de crédito. Las variables que se refieren al crédito incluyen el ciclo del cliente para ese producto, (número de créditos de mejoramiento de vivienda que ha adquirido a lo largo del tiempo), saldo capital y monto prestado.

Las variables del nivel región incluidas permiten investigar separadamente los efectos atribuibles a las características macro de la región, el número de sucursales, la productividad promedio de los colaboradores de la región.

Este modelo intenta dar una respuesta preliminar al siguiente conjunto de inquietudes:

¿Qué proporción de la variabilidad en el aumento del número de días de atraso es

directamente atribuible a las características personales del cliente y del crédito y cuánto de la misma es producto de diferencias entre regiones?

¿Qué diferencias se asocian con la región en la que residen?

¿Cuáles son los efectos más significativos y qué signo presentan?

3.1.1 Descripción de la base de datos

La base de datos utilizada para el modelo, está compuesta por un total de 145,407 registros de créditos (nivel uno) y están agrupadas en 53 regiones (nivel dos). El 9.5% del total de registros están en mora de más de 30 días, 11.96% de los clientes de este producto no tienen un grupo de crédito. El rango de ciclo oscila entre 1 y 7 el promedio resulta 1.2, es decir, en promedio los clientes solo han adquirido una vez este producto a lo largo de su historial crediticio. La edad de los clientes va de 19 a 75 años y el promedio resulta 40.9; el número de hijos va de 0 hasta 20 y en promedio 3.2 hijos. El saldo promedio es de \$7,895 y el máximo llega a \$30,000. En cuanto al monto prestado, va desde \$3,002 hasta \$30,020, el promedio está en \$12,421.

La composición de la base de datos de clientes por tipo de ingreso se conforma por: 84% de los clientes incursionan en la industria de textiles, ropa, calzado; el 8.4% está dedicado a la industria de los alimentos; el 5.5% en animales vivos; y el resto en otro tipo de industria, servicios personales, industria textil y en industrias como papelería, ferretería o tlapalería.

El modelo fue corrido en el paquete HLM 6 (Hierarchical Linear and Nonlinear Modeling).

La base de datos fue depurada de registros en los cuales alguna de las variables no tuviera dato o este no fuera válido.

3.2 Ecuación del modelo

El modelo lineal jerárquico para el Nivel 1 queda expresado como:

$$\begin{aligned}
DíasAtraso = & \beta_{0j} + \beta_{1j}(GrupoSi) + \beta_{2j}(Ciclo) \\
& + \beta_{3j}(Edad) + \beta_{4j}(IdIngreso) \\
& + \beta_{5j}(NumHijos) + \beta_{6j}(SaldoCapital) \\
& + \beta_{7j}(MontoPrestado) + R_{ij}
\end{aligned}$$

Y el modelo a Nivel 2:

$$\beta_{j0} = \gamma_{00} + \gamma_{01}(NumSuc) + \gamma_{01}(ProdPromOC) + U_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10}$$

$$\beta_{2j} = \gamma_{20}$$

$$\beta_{3j} = \gamma_{30}$$

$$\beta_{4j} = \gamma_{40}$$

$$\beta_{5j} = \gamma_{50}$$

$$\beta_{6j} = \gamma_{60}$$

$$\beta_{7j} = \gamma_{70}$$

Dónde:

DíasAtraso: Es la variable de estudio que indica el número de días de atraso en el pago de su cuota.

GrupoSi: Variable explicativa de tipo dicotómica que indica si el cliente pertenece a un grupo de crédito o no.

Ciclo: Variable explicativa de tipo entero que define el número de créditos subsecuentes que el cliente ha obtenido a lo largo del tiempo.

Edad: Edad del cliente.

IdIngreso: Indica el tipo de ingreso que tiene el cliente (Apoyo familiar, otro negocio, otros, ninguno, apoyo gubernamental, remesas, pensión)

NumHijos: Representa el número de hijos que reporta tener el cliente.

SaldoCapital: Monto que aún adeuda la clienta.

MontoPrestado: Monto total del préstamo.

NumSuc: Número de sucursales que abarca cada región.

ProdPEV: Es la productividad promedio por cada oficial de crédito y resulta de dividir el número de créditos de la región entre el número de oficiales de crédito que atienden a los clientes de esa región.

Los coeficientes fueron tratados como efectos fijos en el caso de las pendientes, mientras que se incorporó un efecto aleatorio a la ordenada al origen, o intersección.

3.3 Resultados del modelo

Modelo multinivel				
Efecto fijo	Coefficiente	Error estándar		
<i>Variables de Nivel 2</i>				
<i>Constante</i>	78,456	3,263	*	
<i>NumSuc</i>	- 0,002	0,270		
<i>ProdPEV</i>	- 0,006	0,008		
<i>Variables de Nivel 1</i>				
<i>GrupoSi</i>	- 69,609	1,895	*	
<i>Ciclo</i>	- 3,134	0,376	*	
<i>Edad</i>	- 0,115	0,012	*	
<i>IdIngreso</i>	0,338	0,221	***	
<i>NumHijos</i>	0,139	0,070	**	
<i>SaldoCapital</i>	- 0,000	0,000	***	
<i>MontoPrestado</i>	0,000	0,000	*	
Efecto aleatorio	Componente de varianza	Error estándar		
<i>Varianza dentro de grupo</i> $\tau_0^2 = var(U_{0j})$	12,42	3,52		
<i>Varianza entre grupos</i> $\sigma_0^2 = var(R_{ij})$	1.276,83	35,73		
<i>Devianza</i>	1.524.448,91			
$\rho = CCI$	0,010			

* Significativa al 99%

** Significativa al 95%

*** Significativa al 85%

El modelo lineal jerárquico para el Nivel 1 queda expresado como:

$$\begin{aligned} \widehat{DíasAtraso} = & 78.406 - 69.609(GrupoSi) - 3.134(Ciclo) \\ & - 0.115(Edad) + 0.338(IdIngreso) \\ & + 0.139(NumHijos) - 0.00014(SaldoCapital) \\ & + 0.000437(MontoPrestado) \end{aligned}$$

Y el modelo a Nivel 2:

$$\widehat{\beta}_{j0} = 78.456 - 0.002(NumSuc) - 0.006(ProdPromOC) + U_{0j}$$

$$\widehat{\beta}_{1j} = \gamma_{10}$$

$$\widehat{\beta}_{2j} = \gamma_{20}$$

$$\widehat{\beta}_{3j} = \gamma_{30}$$

$$\widehat{\beta}_{4j} = \gamma_{40}$$

$$\widehat{\beta}_{5j} = \gamma_{50}$$

$$\widehat{\beta}_{6j} = \gamma_{60}$$

$$\widehat{\beta}_{7j} = \gamma_{70}$$

La forma de probar la existencia de variabilidad en los datos en un segundo nivel es calculando el coeficiente de correlación intra-clase (CCI), e indica el porcentaje de variación de los datos que corresponde al segundo nivel. El CCI indica que el 1% de la variación en los días de atraso es explicado por diferencias entre las regiones, aunque este porcentaje es relativamente pequeño.

Con respecto a los resultados, en las variables propias del cliente se destaca el impacto que tiene el pertenecer a un grupo de crédito y el ciclo del cliente.

En cuanto a la pertenencia a un grupo, se encontró que el efecto de estar en uno disminuye los días de atraso de magnitud importante en orden de 69.6 días.

Por otro lado, el ciclo tiene una incidencia en la disminución de 3.1 días por cada ciclo; la variable edad, 0.11 días por cada año. El tipo de ingreso y el número de hijos tienen un efecto proporcional de 0.34 y 0.14 respectivamente.

Con respecto a las variables a nivel de región, es decir, número de sucursales y productividad promedio del oficial de crédito, no resultaron significativas.

Conclusiones

Los modelos multinivel proponen una estructura de análisis dentro de la cual son identificados los distintos niveles en que está estructurada la población y cada subnivel está representado por su propio modelo. Cada submodelo expresa la relación existente entre las variables dentro de ese nivel y especifica cómo estas influyen en las relaciones establecidas.

El análisis multinivel que se realiza a través de la utilización del modelo lineal jerárquico posee ventajas en el estudio de variables anidadas dentro de grupos con respecto a la utilización de técnicas tradicionales de estimación uninivel, en la medida que permite neutralizar parcialmente el efecto de anidamiento de los datos; sin embargo, para este caso el aporte de explicación de los datos por parte de las variables de segundo nivel es relativamente bajo, pero esto conduce a mostrar que la agrupación de personas en regiones no tiene un peso relevante para el estudio de los factores que favorecen el retraso en el pago de un microcrédito de mejora de vivienda, es decir, no importa a qué región pertenezca el cliente, los factores de atraso en el pago que tienen mayor peso son otros.

Por otro lado los resultados del modelo dejan ver la importancia que tiene el hecho de que la persona se encuentre dentro de un grupo de crédito, ya que al estar en uno disminuye el nivel de días de atraso. Esto detona la necesidad de tomar acciones en el ámbito de la microfinanzas para incentivar a las personas a permanecer en un grupo de crédito, tomar medidas preventivas o de monitoreo al cliente si sucede que este deje de pertenecer al grupo.

Al igual que la variable referente al grupo, aunque en menor grado, el número de veces que han renovado el crédito tiene un efecto inverso; es decir, a mayor número de renovaciones que se tenga de este crédito, se espera un menor número de días de atraso. Esto se podría entender como un efecto causa-consecuencia o consecuencia-causa, ya que si aumenta el número de renovaciones del crédito, es debido a un buen comportamiento de pago por parte del cliente, mientras que al aumentar el número de renovaciones se puede implicar que el

cliente ha adquirido una mayor educación financiera que le permite ser más responsable en sus obligaciones crediticias.

El número de hijos y el monto prestado tiene un impacto lineal sobre la variable días de atraso, pues al aumentar estas variables, aumenta el valor esperado de los días de atraso. Con base en estos resultados, se podría sugerir realizar un seguimiento focalizado a clientes con altos valores de alguna de estas variables a fin de evitar un aumento en el valor esperado de días de atraso.

Anexos

```

Program:          HLM 6 Hierarchical Linear and Nonlinear Modeling
Authors:         Stephen Raudenbush, Tony Bryk, & Richard Congdon
Publisher:       Scientific Software International, Inc. (c) 2000
                  techsupport@sscicentral.com
                  www.ssicentral.com
  
```

```

-----
Module:          HLM2R.EXE (6.08.29257.1)
Date:           14 May 2011, Saturday
Time:           18:49:47
  
```

SPECIFICATIONS FOR THIS HLM2 RUN

```

Problem Title:  no title

The data source for this run = C:\Users\Administrador\Desktop\Modelos CMC Marzo\var x dia.mdm
The command file for this run = C:\Users\ADMINI-1\AppData\Local\Temp\whlntemp.hlm
Output file name = C:\Users\Administrador\Desktop\Modelos CMC Marzo\hlm2.txt
The maximum number of level-1 units = 152575
The maximum number of level-2 units = 53
The maximum number of iterations = 100
Method of estimation: restricted maximum likelihood
  
```

Weighting Specification

Level	weighting?	weight variable Name	Normalized?
Level 1	no		
Level 2	no		
Precision	no		

The outcome variable is DIASATRA

The model specified for the fixed effects was:

Level-1 Coefficients	Level-2 Predictors
INTRCPT1, B0	INTRCPT2, G00
	NUMOS, G01
# GRUPOSIN slope, B1	PROD_PEV, G02
# CICLO slope, B2	INTRCPT2, G10
# EDAD slope, B3	INTRCPT2, G20
# ID_INGRE slope, B4	INTRCPT2, G30
# NUMHI slope, B5	INTRCPT2, G40
# SALDO slope, B6	INTRCPT2, G50
# MONTOPRE slope, B7	INTRCPT2, G60
	INTRCPT2, G70

*# - The residual parameter variance for this level-1 coefficient has been set to zero.

The model specified for the covariance components was:

```

sigma squared (constant across level-2 units)
Tau dimensions
INTRCPT1
  
```

Summary of the model specified (in equation format)

Level-1 Model

$$Y = B0 + B1*(GRUPOSIN) + B2*(CICLO) + B3*(EDAD) + B4*(ID_INGRE) + B5*(NUMHI) + B6*(SALDO) + B7*(MONTOPRE) + R$$

Level-2 Model

```

B0 = G00 + G01*(NUMOS) + G02*(PROD_PEV) + U0
B1 = G10
B2 = G20
B3 = G30
B4 = G40
B5 = G50
B6 = G60
B7 = G70
  
```

Iterations stopped due to small change in likelihood function
 ***** ITERATION 3 *****

sigma_squared = 1276.82610

Tau
 INTRCPT1,B0 12.42042

Tau (as correlations)
 INTRCPT1,B0 1.000

Random level-1 coefficient	Reliability estimate
INTRCPT1, B0	0.952

The value of the likelihood function at iteration 3 = -7.6222436+005
 The outcome variable is DIASATRA

Final estimation of fixed effects:

Fixed Effect	Coefficient	Standard Error	T-ratio	Approx. d.f.	P-value
For INTRCPT1, B0					
INTRCPT2, G00	78.455512	2.380298	32.960	50	0.000
NUMOS, G01	-0.002343	0.288825	-0.008	50	0.994
PROD_PEV, G02	-0.005785	0.007065	-0.819	50	0.417
For GRUPOSIN slope, B1					
INTRCPT2, G10	-69.609005	0.289549	-240.405	152565	0.000
For CICLO slope, B2					
INTRCPT2, G20	-3.133856	0.207130	-15.130	152565	0.000
For EDAD slope, B3					
INTRCPT2, G30	-0.115217	0.009972	-11.554	152565	0.000
For ID_INGRE slope, B4					
INTRCPT2, G40	0.337717	0.128088	2.637	152565	0.009
For NUMHI slope, B5					
INTRCPT2, G50	0.138871	0.055797	2.489	152565	0.013
For SALDO slope, B6					
INTRCPT2, G60	-0.000140	0.000026	-5.316	152565	0.000
For MONTOPRE slope, B7					
INTRCPT2, G70	0.000437	0.000023	18.616	152565	0.000

The outcome variable is DIASATRA

Final estimation of fixed effects
 (with robust standard errors)

Fixed Effect	Coefficient	Standard Error	T-ratio	Approx. d.f.	P-value
For INTRCPT1, B0					
INTRCPT2, G00	78.455512	3.263017	24.044	50	0.000
NUMOS, G01	-0.002343	0.270149	-0.009	50	0.993
PROD_PEV, G02	-0.005785	0.007749	-0.747	50	0.459
For GRUPOSIN slope, B1					
INTRCPT2, G10	-69.609005	1.895348	-36.726	152565	0.000
For CICLO slope, B2					
INTRCPT2, G20	-3.133856	0.375763	-8.340	152565	0.000
For EDAD slope, B3					
INTRCPT2, G30	-0.115217	0.011710	-9.839	152565	0.000
For ID_INGRE slope, B4					
INTRCPT2, G40	0.337717	0.221287	1.526	152565	0.127
For NUMHI slope, B5					
INTRCPT2, G50	0.138871	0.069576	1.996	152565	0.046
For SALDO slope, B6					
INTRCPT2, G60	-0.000140	0.000095	-1.477	152565	0.140
For MONTOPRE slope, B7					
INTRCPT2, G70	0.000437	0.000057	7.631	152565	0.000

Final estimation of variance components:

Random Effect	Standard Deviation	Variance Component	df	Chi-square	P-value
INTRCPT1, UD	3.52426	12.42042	50	1262.11642	0.000
level-1, R	35.73270	1276.82610			

Statistics for current covariance components model

Deviance = 1524448.906426
 Number of estimated parameters = 2

Bibliografía

- Bosker, Roel J. y Snijders, T. A. B; Multilevel analysis: an introduction to basic and advanced multilevel modeling; SAGE; 1999.
- Conde, Carola; Agenda para el desarrollo Vol 6. Contribución de las microfinanzas al desarrollo económico y social. Desafíos actuales; Porrúa-UNAM 2007.
- Guisande Cástor; Tratamiento de datos; Ediciones Díaz de Santos; 2006.
- Ledgerwood, Joanna; Manual de microfinanzas. Una perspectiva Institucional y Financiera; Banco Mundial, 2000.
- Marulanda, Beatriz y Otero, María; Perfil de las Microfinanzas en Latinoamérica en 10 Años: Visión y Características; ACCION Internacional, 2005.
- Mix Market y Prodesarrollo, Benchmarking de las Microfinanzas en México: un informe del sector 2008.
- Von Pischke, J. D., Finance at the frontier: debt capacity and the role of credit in de private economy, 1991.
- Muhammad Yunus, Un mundo sin pobreza, Paidós, 2008.
- Waterfiel y Duval, Care savings and credit sourcebook, Care SEAD Unit, Atlanta, 1996.