

# SOBRE LAS ÓRBITAS PERIÓDICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN EL PLANO

Gabriel Villaseñor Aguilar.

MAESTRIA EN CIENCIAS  
MATEMÁTICAS

Asesor

Dr. Osvaldo Osuna Castro

16 de enero de 2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Dedicatoria

Este trabajo de tesis lo dedico a todas las personas que con su apoyo y cariño hicieron que esto fuera posible.

Al Dr. Carlos Osvaldo Osuna Castro que me dirigió enormemente a lo largo de todo el proyecto y con mucha paciencia, me fue guiando paso a paso resolviendo mis dudas y dedicándole tiempo extra a todas y cada una de las dificultades con que nos encontramos a lo largo de este trabajo.

A Los Doctores: Elmar Wagner, Abdon E. Choque Ribero, Pierre Bayard y Pavel Naumkin mis sinodales, quienes dedicaron un extra de su tiempo para revisar mi tesis y con sus comentarios y observaciones se logro una mejor edición de esta tesis.

A todos mis maestros y compañeros con los que compartí día a día el conocimiento que me llevo a lograr este objetivo.

Con mucho cariño doy gracias a mis padres que me dieron la vida y que creyeron en mi dándome una carrera y brindándome todo su amor desde el inicio de mi educación escolar y hasta el día de hoy en que termino una etapa más, y a mis hermanos que me brindaron su apoyo incondicional y que juntos crecimos consolidando juntos las bases necesarias para alcanzar esta meta.

En especial a mi esposa Josefina Silva Cardiel que Durante estos dos años de trabajo estuvo conmigo, gracias por apoyarme en los momentos de desesperación, por animarme cuando ya me sentía derrotado y por que aun cuando no dedique mucho tiempo a nuestra relación debido al trabajo estuviste a mi lado apoyándome con mi trabajo.

Gracias a Dios que me permitió vivir para realizar este trabajo rodeado de gente que me quiere y me estima como persona.

**A todos muchas Gracias**

# Índice general

<b>I</b>	<b>Introducción y Resultados</b>	<b>3</b>
<b>1.</b>	<b>Preliminares</b>	<b>10</b>
1.1.	Existencia y unicidad . . . . .	14
1.2.	Órbitas periódicas . . . . .	18
1.3.	Sistemas lineales . . . . .	19
1.4.	Criterios afirmativos para la existencia de soluciones periódicas . . . . .	21
1.4.1.	Poincaré-Bendixson . . . . .	21
1.4.2.	Método de Liénard . . . . .	23
1.4.3.	Criterio de Massera para ecuaciones no homogéneas . . . . .	25
1.5.	Criterios de no existencia de órbitas periódicas . . . . .	28
1.5.1.	Teoría de índices . . . . .	29
1.5.2.	Sistema gradiente . . . . .	34
1.5.3.	Criterio de Bendixson-Dulac . . . . .	36
1.6.	Ecuaciones diferenciales parciales cuasilineales . . . . .	38
<b>2.</b>	<b>Ciclos límites</b>	<b>43</b>
2.1.	Introducción . . . . .	43
2.2.	Bifurcación . . . . .	44
2.3.	Problema 16 de Hilbert . . . . .	47

<b>3. Funciones de Dulac</b>	<b>50</b>
3.1. Construcción de funciones de Dulac . . . . .	52
3.2. Ejemplo y Aplicaciones . . . . .	54
3.3. Caso particular del método de construcción . . . . .	60
3.4. Generalizaciones . . . . .	62

# Parte I

## Introducción y Resultados

Las ecuaciones diferenciales, como es bien conocido, modelan una gran cantidad de situaciones de las matemáticas, física, ingeniería y demás ciencias aplicadas. En probabilidad y estadística se obtiene razón de interés compuesto, en física el trabajo que se requiere en determinada condición de tiempo y espacio, crecimientos poblacionales, circuitos eléctricos, temperatura, etc.

Una solución de una ecuación diferencial es una función que satisface la relación diferencial dada, así

$$y = asenx,$$

es una solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + y = 0.$$

Existen varios métodos para resolver ecuaciones diferenciales los cuales se pueden encontrar en cualquier libro de este tema, por ejemplo: variables separables, ecuaciones lineales, ecuaciones exactas, solución por sustitución, coeficientes indeterminados y variación de parámetros entre otros. Sin embargo, muchas preguntas y problemas básicos siguen sin responderse.

En general tanto en la teoría como en muchas aplicaciones, debemos utilizar sistemas de ecuaciones diferenciales. Un *sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias* es un conjunto de dos o más ecuaciones donde aparecen las derivadas de dos o más funciones desconocidas de una sola variable independiente; por ejemplo si  $x$  y  $y$  representan variables dependientes y  $t$  es la variable independiente, entonces un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden está dado por

$$\dot{x} = f(t, x, y)$$

$$\dot{y} = g(t, x, y)$$



una solución de este sistema es un par de funciones diferenciables, que satisfacen cada ecuación del sistema en un intervalo común  $I$ .

Como ya mencionamos anteriormente existen muchas ecuaciones diferenciales en las que es muy difícil obtener su solución, inclusive algunas ecuaciones no poseen soluciones. Por ejemplo, no existe una función real elemental que satisfaga  $(y')^2 + 1 = 0$ , algunas otras poseen solución pero no se pueden resolver de manera analítica, por lo que se ha estudiado la forma de obtener información útil sobre la naturaleza de las soluciones, directamente de la ecuación diferencial misma. Una manera de hacerlo es obtener el *campo vectorial* del sistema de ecuaciones, este campo de direcciones nos puede indicar visualmente la apariencia o la forma de una familia de curvas solución de la ecuación diferencial y, en consecuencia, es posible percibir a simple vista, ciertos aspectos cualitativos de las soluciones; por ejemplo, regiones en el plano en las que la solución muestra un comportamiento especial. Existen dos objetivos importantes en el estudio de las soluciones de Sistemas de ecuaciones diferenciales uno de ellos es el caso en el que la solución es constante, a este tipo de soluciones se les conoce como *puntos críticos* o *puntos de equilibrio* y son las únicas soluciones constantes de un sistema de ecuaciones dado. El otro caso es cuando la solución es periódicas es decir si para una solución no constante  $x(t)$  se tiene que existe  $T > 0$  tal que  $x(t) = x(t + T)$  para toda  $t \in \mathbb{R}$ .

En este trabajo realizamos una revisión de criterios para determinar la existencia o no existencia de órbitas periódicas, en el plano para esto incluimos varios ejemplos ilustrativos esperando que ayuden a aclarar la problemática en torno a las órbitas periódicas.

Existen algunos criterios que nos permiten identificar regiones donde no existen órbitas periódicas en un sistema definido sobre el plano, a lo largo de los siguientes capítulos abordaremos cada uno de ellos con más detalle, mostraremos una lista de estos criterios a continuación.

- El teorema de Massera que nos permite conocer si existen órbitas periódicas en un sistema de ecuaciones  $\dot{x} = A(t)x + b(t)$  donde  $A(t)$  es una matriz que dependen del

parámetro  $t$  y  $b(t)$  una función de  $t$  a partir del conocimiento de soluciones acotadas para el sistema.

- Para el caso particular de la ecuación de Liénard  $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ , se tiene algunas condiciones suficientes para garantizar la existencia de una órbita periódica.
- El teorema de Poincaré-Bendixson que nos da condiciones para afirmar la existencia de órbitas periódicas en una región anular en el plano.
- El sistema gradiente, definido como una ecuación de la forma

$$\dot{x} = -\text{grad}v(x).$$

Donde  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $C^2$  y  $\text{grad}v(x) = \left( \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right)$ , donde se conoce que no pueden existir órbitas periódicas.

- La teoría de índices, en donde a partir del análisis del índice de una curva cerrada  $\gamma$ , ver (Capítulo 2), se puede afirmar la ausencia de órbitas periódicas a partir de la naturaleza de puntos de equilibrio.
- Un criterio especial que estaremos estudiando a lo largo de este trabajo es el criterio de Bendixson-Dulac, a continuación enunciamos este criterio por ser de nuestro principal interés y será nuestro objetivo primordial el construir métodos que permitan encontrar funciones que satisfacen dicho criterio.

**Teorema 1 . (Criterio de Bendixson-Dulac)** Sean  $f_1(x_1, x_2)$ ,  $f_2(x_1, x_2)$  y  $h(x_1, x_2)$  funciones  $C^1$  en un dominio simplemente conexo  $D \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $\frac{\partial(f_1h)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2h)}{\partial x_2}$  no cambia de signo en  $D$  y se anula solo en un conjunto de medida cero. Entonces el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in D \quad (1)$$

no tiene órbitas periódicas en  $D$ .

Este criterio es muy útil para localizar órbitas periódicas en el plano, sin embargo tiene una gran desventaja y es que no nos da un método de cómo encontrar esta función  $h$  llamada comúnmente *función de Dulac*, regularmente calcular esta función es un trabajo difícil y aunque en algunas ocasiones podemos proponer algunos candidatos como posibles funciones  $h$  tales como  $h = 1, x_1^s, x_2^s, e^{x_1 x_2}, x_1^s x_2^t$  no siempre funcionan, en 1988 Eduardo Saéz e I. Szánto escribieron un método para construir ciertas funciones  $h$  de Dulac tomando como base algunos métodos para la construcción de funciones de Lyapunov. (ver [16])

## Resultados principales

El objetivo principal de esta tesis es proponer un método para construir funciones  $h$  de Dulac usando ecuaciones diferenciales parciales (ver detalles en el capítulo 3), la idea general es asociarle a un sistema de ecuaciones diferenciales como el del teorema de Bendixson-Dulac, una ecuación de la forma

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = h \left( c(x_1, x_2) - \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \right). \quad (2)$$

Con  $c$  positiva o negativa y que solo se anula en un conjunto de medida cero, sobre una región simplemente conexa. Resolviendo esta ecuación diferencial parcial tendremos resultados interesantes en nuestra búsqueda de descartar posibles soluciones periódicas.

En el capítulo 3 probaremos nuestro resultado principal que a continuación mencionamos.

**Teorema 2** . *Para el sistema de ecuaciones diferenciales en el plano*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in D \end{cases}$$

*una solución  $h$  del sistema asociado (2), (con  $c$  que no cambia de signo y que solo se anula en un conjunto de medida cero) es una función de Dulac para este sistema en cualquier región  $A$  simplemente conexa contenida en  $D \setminus h^{-1}\{0\}$ .*

Una consecuencia de este teorema nos da

**Corolario 1** . *Para el sistema de ecuaciones diferenciales dado en el teorema anterior, si (2) tiene una solución  $h$  que no cambia de signo y solo se anula en un conjunto de medida cero sobre  $D$  (para alguna  $c$  que tampoco cambia de signo y que solo se anula en un conjunto de medida cero), entonces  $h$  es una función de Dulac para el sistema de ecuaciones diferenciales sobre  $D$ .*

En el caso particular de que la función de Dulac  $h$  solo dependa de una variable, damos una expresión explícita de la ecuación que nos permite encontrar una función de Dulac para el sistema dado (ver Capítulo 3).

De igual manera en dicho capítulo mostraremos varios ejemplos y aplicaciones del método propuesto.

También discutimos la aplicación de este método en situaciones más generales como por ejemplo regiones que son múltiplemente conexos.

## **Organización**

Esta tesis se divide en tres capítulos, en los dos primeros se da una introducción al estudio de las órbitas periódicas analizando algunos de los resultados más importantes que han surgido a través del tiempo, en el tercero se dan resultados obtenidos durante la elaboración de la misma.

En el primer capítulo recordamos el teorema existencia y unicidad de las soluciones, e iniciamos el estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales, en especial nos enfocamos a analizar los criterios de órbitas periódicas, así mismo en la última sección damos una breve introducción a el método de las características para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales parciales cuasilineales.

Un caso de especial interés en el estudio de las órbitas periódicas son los ciclos límites de un sistema de ecuaciones, en el segundo capítulo abordaremos este tema donde analizaremos el caso de la bifurcación de Hopf, y daremos una introducción a el problema 16 de Hilbert, que es un problema que no ha sido resuelto en su totalidad.

En el capítulo 3 mostraremos nuestro resultado principal en donde damos la construcción de funciones de Dulac para un sistema de ecuaciones diferenciales al cual le asociamos una ecuación diferencial parcial. La solución de esta ecuación asociada es una función de Dulac para el sistema dado bajo ciertas condiciones.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo realizamos una revisión de criterios para determinar la existencia o no existencia de órbitas periódicas, para esto incluimos varios ejemplos ilustrativos.

A menudo necesitamos plantear y resolver problemas como los siguientes:

- Modelar el crecimiento de población de bacterias, dada una cantidad determinada de microorganismos en un intervalo de tiempo dado.
- Variación de temperatura de un cuerpo en un intervalo de tiempo.
- Determinar el funcionamiento de ciertos sistemas mecánicos o eléctricos.

Para los cuales necesitamos de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Decimos que una ecuación diferencial es una ecuación que contiene derivadas o diferenciales, así

- $\dot{x} = 2 \cos x$
- $ax'' + bx = 0$

- $f(x)x'' + g(x)x' + x = 0$

Son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo con su tipo, orden y linealidad.

**Clasificación según el tipo.** Si una ecuación sólo contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una *ecuación diferencial ordinaria*.

Una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a dos o más variables independientes, se llama *ecuación diferencial parcial*.

**Clasificación según el orden.** El *orden de una ecuación diferencial* es la derivada más alta de la función desconocida que aparece en la ecuación.

**Clasificación según la linealidad.** Una ecuación diferencial  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  es lineal si  $F$  es lineal en  $y, y', \dots, y^{(n)}$ .

Muy pocas ecuaciones diferenciales ordinarias tienen soluciones exactas. Esto no se debe a que no se tenga la capacidad para resolverlas, sino a que la cantidad de funciones en términos de las cuales puede ser expresada una solución es muy limitada en comparación a la gran variedad de ecuaciones diferenciales encontradas en la práctica. Aun si una solución puede ser encontrada, esta solución es normalmente bastante complicada para entender sus principales propiedades.

El estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales consiste en investigar como deducir importantes características de las soluciones de ecuaciones diferenciales sin necesidad de resolverlas. A continuación damos una definición formal.

**Definición 1** . *Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene las derivadas de*

*una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.*

Las ecuaciones que estudiaremos serán ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas, en forma más precisa. Si  $\Omega$  es una región abierta (i.e., abierto y conexo) de  $\mathbb{R}^n$ , y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua, decimos entonces que una ecuación de la forma

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

es una ecuación diferencial ordinaria.

La incógnita  $x$  es una función diferenciable  $x(t)$  y  $\dot{x}$  denota su derivada  $\frac{dx}{dt}(t)$ , es decir una solución de la ecuación (1.1) es una función diferenciable  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida en un intervalo abierto  $I$  acotado o no, tal que  $\forall t \in I, x(t) \in \Omega$ , y

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)),$$

si  $t_0 \in I, x_0 \in \Omega$  diremos que una solución  $x$  de (1.1) que satisface  $x(t_0) = x_0$  es una solución con condición inicial  $x_0$  en  $t = t_0$ .

Así, por ejemplo, si queremos un modelo matemático del crecimiento de una población asumiendo que crece en forma proporcional con una constante  $k$  de proporción tenemos

$$\dot{x}(t) = kx(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.2)$$

es una ecuación diferencial de primer orden.

Una solución de una ecuación diferencial ordinaria es una función que satisface la ecuación diferencial ordinaria. La expresión  $x(t_0) = x_0$  en la ecuación (1.2) es una condición inicial, y la ecuación se llama problema con valores iniciales.

El Campo vectorial consiste de los vectores de dirección que son tangentes a la curva solución para la ecuación dada, así por ejemplo para la ecuación (1.2) tenemos el campo vectorial como lo muestra la grafica (figura 1.2)



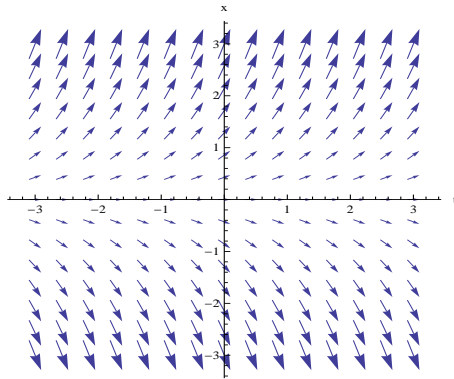


figura 1.1

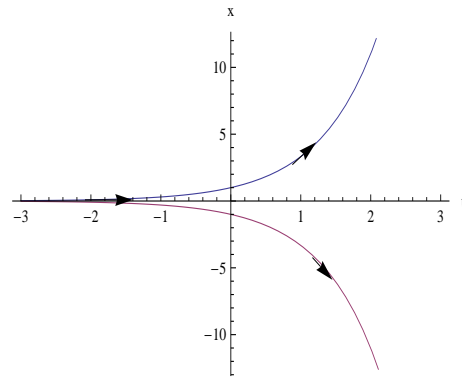


figura 1.2

Si queremos encontrar la solución podemos proceder por el método de separación de variables con lo que nos quedaría

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = k$$

Esta ecuación la podemos escribir como

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = k dt$$

integrando obtenemos

$$\ln|x| = \int k dt$$

y obtenemos la solución

$$\ln|x| = kt + c$$

despejando la variable x y usando la condición inicial obtenemos

$$x(t) = e^{kt+c} = x_0 e^{k(t-t_0)}$$

Observemos que la solución se puede deducir a partir del campo direccional pues cada uno de los vectores son tangentes a la curva solución en el punto dado como se muestra en la figura 1.2.

Para una ecuación en  $\mathbb{R}^2$  la solución estará definida en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (x,y). El campo direccional puede ser dibujado en  $\mathbb{R}^2$ .

**Ejemplo 1** . Consideremos la ecuación  $x'' + x = 0$ , si escribimos el sistema asociado

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

notemos que una solución es  $x = \text{sent}$  y  $y = \text{cost}$ , el campo vectorial y la gráfica solución se presenta en las figuras 1.3 y 1.4

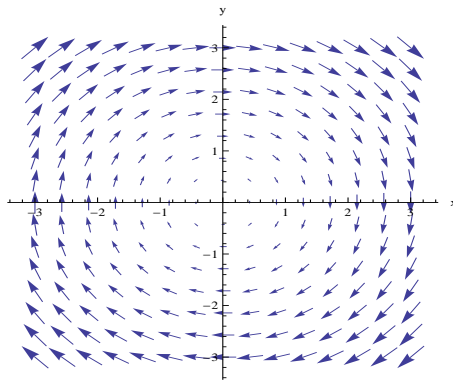


figura 1.3

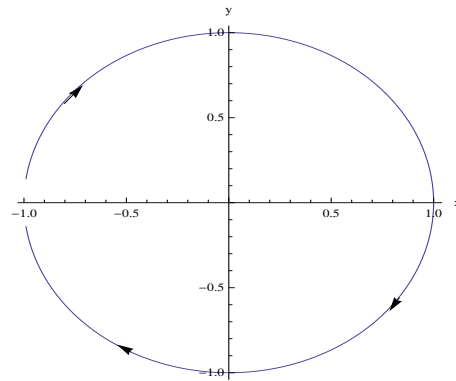


figura 1.4

Para dibujar el campo direccional observemos que en el punto  $(1,1)$  la dirección del campo direccional es  $(1,-1)$ , además en el punto  $(0,1)$  el campo direccional es  $(1,0)$ , en el punto  $(-1,-1)$  el campo direccional es  $(-1,1)$  y en el punto  $(1,0)$  la dirección es  $(0,-1)$ .

## 1.1. Existencia y unicidad

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de primer orden en  $\mathbb{R}^n$  dada como

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.3)$$

sobre un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 2** . Una función  $x(t)$  se dice que es solución de la ecuación (1.3) sobre un intervalo  $I$ , si  $t_0 \in I$ ,  $x(t) \in D$  para todo  $t \in I$ , además  $x(t)$  es diferenciable y satisface la ecuación (1.3) para todo  $t \in I$ .

El siguiente lema nos da una forma más conveniente para trabajar con la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Lema 1** . Sea  $f(x)$  una función continua sobre un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  y sea  $x(t)$  una función continua sobre algún intervalo  $I$  que contenga a  $t_0$  tal que  $x(t) \in D$  para todo  $t \in I$ . Entonces  $x(t)$  es una solución de la ecuación (1.1) sobre el intervalo  $I$  si y solo si

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s))ds, \quad t \in I \quad (1.4)$$

**Demostración.** Si  $x(t)$  es una solución de la ecuación (1.3), entonces integrando desde  $t_0$  hasta  $t$  obtenemos (1.4).

Por otro lado si  $x(t)$  satisface (1.4), como  $f(x(t))$  es una función continua en  $t$  entonces es diferenciable en  $t$ , por lo tanto  $x(t)$  es diferenciable, además  $x(t_0) = x_0$ , así que derivando respecto de  $t$  la ecuación (1.4) obtenemos por el teorema fundamental del calculo

$$\frac{d}{dx}x(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(s(t))ds = f(x(t)), \quad t \in I$$

por lo tanto  $x(t)$  es una solución de (1.1) sobre  $I$ . □

necesitamos algunas condiciones que nos garanticen la existencia y unicidad de soluciones para la ecuación (1.3). para esto comenzaremos con la siguiente definición que nos será útil para la unicidad de soluciones.

**Definición 3 (Lipschitz).** Diremos que  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente Lipschitz si para cada  $x_0 \in \Omega$  existe una constante  $K > 0$  y un abierto  $V \subset \Omega$  que contiene  $x_0$  tales que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\| \quad \forall x, y \in V.$$

Así, por el teorema del valor medio, si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  es  $C^1$  (i.e., diferenciable y con derivada continua) entonces,  $f$  es localmente Lipschitz.

**Teorema 3 (Existencia y unicidad).** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  localmente Lipschitz, entonces para cualquier  $x_0 \in \Omega$  existe  $a > 0$  y una única solución positiva  $x : (-a, a) \rightarrow \Omega$  de la ecuación

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

**Demostración (Existencia).** Sea  $r > 0$  suficientemente pequeño tal que la bola  $B_r(x_0) \subseteq \Omega$ , supongamos que  $|f|$  está acotada en la bola  $B_r(x_0) \subseteq \Omega$  por  $M$ . Sea  $a > 0$  tal que  $0 < a < \min\{\frac{r}{M}, \frac{1}{\bar{k}}\}$  donde  $\bar{k}$  es la constante de Lipschitz, definamos la función  $x_k : [-a, a] \rightarrow B_r(x_0)$  como:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 \\ x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(x_0(s))ds, \\ x_{k+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(x_k(s))ds, \end{aligned}$$

observemos que

$$\|x_k(t) - x_0\| < r \quad \text{para todo } t \in [-a, a],$$

entonces

$$\|x_{k+1}(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^t \|f(x_k(s))\| ds \leq aM < r,$$

y por lo tanto la sucesión de funciones  $\{x_k(t)\}$  está definida sobre el intervalo  $[-a, a]$  y  $(x_k(t)) \in \Omega, \forall k \geq 0, t \in [-a, a]$ .

Además converge uniformemente a una función continua, digamos  $x(t)$ . Para esto notemos que

$$x_m(t) = x_0(t) + [x_1(t) - x_0(t)] + [x_2(t) - x_1(t)] + \dots + [x_m(t) - x_{m-1}(t)] = x_0(t) + \sum_{j=0}^{m-1} [x_{j+1}(t) - x_j(t)]$$

entonces para mostrar la convergencia uniforme de la sucesión  $\{x_k(t)\}$  basta mostrar que

$$\sum_{j=0}^{m-1} [x_{j+1}(t) - x_j(t)]$$

es uniformemente convergente sobre el intervalo  $[-a, a]$  pero entonces

$$\begin{aligned} |x_2(t) - x_1(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(x_1(s)) - f(x_0(s)) ds \right| \\ &\leq \bar{k} \int_{t_0}^t |x_1(s) - x_0(s)| ds \leq \bar{k} \int_{t_0}^t M |s - t_0| ds \\ &= \frac{\bar{k}M |t - t_0|^2}{2}, \quad t \in [-a, a] \end{aligned}$$

y usando inducción se tiene que

$$|x_{j+1}(t) - x_j(t)| \leq \frac{\bar{k}^j M |t - t_0|^{j+1}}{(j+1)!}, \quad j \geq 0$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} [x_{j+1}(t) - x_j(t)] &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\bar{k}^j M |t - t_0|^{j+1}}{(j+1)!} \\ &= \frac{M}{\bar{k}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\bar{k}(t - t_0)|^{j+1}}{(j+1)!} \leq \frac{M}{\bar{k}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\bar{k}r)^{j+1}}{(j+1)!} \\ &= \frac{M}{\bar{k}} (\exp(\bar{k}r) - 1) < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto converge uniformemente a  $x(t)$  y podemos intercambiar los límites para

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(x_{n-1}(s)) ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s)) ds,$$

de aquí  $x(t)$  es solución.

**(Unicidad).** Supongamos que  $x, y$  son soluciones de la ecuación (1.1). Sea  $Q := \max\{|x(t) - y(t)|\}$  entonces existe,  $t_1$  tal que  $Q = |x(t_1) - y(t_1)| = \int_{t_0}^{t_1} |f(x(s)) - f(y(s))| ds \leq \bar{k} \int_{t_0}^{t_1} \|x(s) - y(s)\| \leq \bar{k} Q a < Q$ . lo cual es una contradicción excepto si  $Q \equiv 0$ .  $\square$

Recordemos que también es posible considerar ecuaciones no autónomas, las ecuaciones no autónomas pueden considerarse como autónomas introduciendo una nueva variable.

Del Teorema de existencia y unicidad, tenemos que para cada  $x_0 \in \Omega$  existe un intervalo abierto maximal  $I_{x_0}$  que contiene al cero, tal que  $I_{x_0} = (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$  sobre el cual existe una única solución (posiblemente el intervalo sea no acotado).

Tenemos que para cada  $x \in \Omega$  existe una única solución, llamémosle  $\phi$  definida en  $I_x = (\alpha_x, \beta_x)$ , al variar la  $x$  tenemos una función  $\phi_t(x) := \phi(t, x)$ , para  $x \in \Omega$  y  $t \in I_x$ , tal función se llama el flujo local asociado a (1.1) y podemos ver que satisface las siguientes propiedades:

**Lema 2** . (ver [7]) *El flujo local asociado a la ecuación (1.1) cumple:*

i).-  $\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x)) = \phi_s(\phi_t(x)), \forall s, t, s + t \in I_x,$

ii).-  $\phi_0(x) = x,$

iii).- La función  $\phi_t(\cdot) : \Omega \rightarrow \Omega$  es continua, para cada  $t$ .

## 1.2. Órbitas periódicas

Dada una ecuación diferencial de la forma (1.1) pueden existir dos trayectorias especiales y de sumo interés, estas son: *Puntos críticos* y *órbitas periódicas*.

**Definición 4** . *Para una ecuación como en (1.1), decimos que un punto  $p \in \Omega$  es un punto crítico, si  $\phi_t(p) = p, \forall t \in \mathbb{R}$ . Decimos que una solución  $\phi_t(x)$  es una órbita periódica, si  $x$  no es punto fijo y existe  $T > 0$  tal que  $\phi_T(x) = x$ .*

Como ya fue mencionado, nuestro interés se centrará en las propiedades las órbitas periódicas, como la mayoría de tales resultados sólo son válidos en dimensión dos (aunque hay válidos avances en dimensiones mayores ver [3], [17]) nos restringiremos a este

contexto. En tal caso la ecuación diferencial (1.1) se escribe como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (1.5)$$

con  $x_i \in \mathbb{R}$ .

Recordemos que una curva de Jordán en el plano es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  homeomorfo a la frontera del círculo  $S^1$ .

Notemos entonces que por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales una curva periódica es una curva de Jordán.

### 1.3. Sistemas lineales

Los sistemas más sencillos de entender son los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de varias ecuaciones diferenciales con varias funciones incógnitas y un conjunto de condiciones de contorno. Una solución del mismo es un conjunto de funciones diferenciables que satisfacen todas y cada una de las ecuaciones del sistema. En esta sección nos restringiremos al caso bidimensional.

Dado un sistema  $\dot{x} = Ax$  queremos entender el comportamiento de las soluciones en una vecindad de un punto crítico  $(x_0, y_0)$  a partir de los eigenvalores que resultan de resolver la matriz de coeficientes  $A$ .

Nótese que podemos elegir el punto crítico en el origen sin pérdida de generalidad, pues siempre es posible hacer una traslación y el sistema sigue siendo lineal y autónomo. más aun supondremos que el origen es un punto crítico aislado del sistema  $\dot{x} = Ax$ .

Dependiendo de si los eigenvalores son ambos del mismo signo, de signo opuesto, iguales ó imaginarios puros tenemos los siguientes casos:

- **Eigenvalores reales desiguales del mismo signo.** En este caso toda solución del sistema dado tiende o se retira del punto crítico en forma exponencial cuando  $t \rightarrow \infty$  dependiendo si son ambos negativos o positivos. Este tipo de punto crítico se llama *nodo impropio*.
- **Eigenvalores reales de signo opuesto.** La dirección del movimiento es hacia el punto crítico, en algunas trayectorias, y alejándose del punto crítico en otras. Este punto crítico se llama *punto silla*.
- **Eigenvalores iguales.** Si los eigenvalores son negativos, la dirección del movimiento en todas las trayectorias es hacia el punto crítico y, si son positivos, es alejándose del punto crítico. El punto crítico es un *nodo propio o impropio*.
- **Eigenvalores complejos.** Si la parte real es positiva el movimiento es hacia afuera del punto crítico, si la parte real es negativa, va hacia el punto crítico. El punto crítico se llama *punto espiral*.
- **Eigenvalores Imaginarios puros.** Aunque éste es un caso especial del anterior, debe tratarse por separado, dado que las trayectorias ya no son espirales. En este caso, el movimiento es periódico y las trayectorias son curvas cerradas. El origen se llama *centro*.

**Ejemplo 2** . Consideremos el sistema lineal dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1, \end{cases}$$

la matriz de coeficientes del sistema queda

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

de aquí los eigenvalores respectivos son  $\lambda_{1,2} = 2, -2$ . Por lo tanto hay una órbita periódica alrededor del origen.



## 1.4. Criterios afirmativos para la existencia de soluciones periódicas

### 1.4.1. Poincaré-Bendixson

Dado un punto  $x \in \Omega$ , supongamos que la solución de (1.5),  $\phi_t(x)$  está definida para todo tiempo, entonces su *órbita positiva (negativa)* se define como  $\{\phi_t(x)\}_{t \geq 0}$  ( $\{\phi_t(x)\}_{t \leq 0}$ ).

Un ciclo límite del sistema (1.1) en el plano es una órbita periódica aislada.

Decimos que un conjunto  $D$  en el plano es *positivamente (negativamente) invariante* por el flujo  $\phi_t$  de la ecuación (1.5) si,  $\phi_t(x) \in D, \forall x \in D, \forall t \geq 0$  ( $\forall t \leq 0$ ).

Un resultado importante sobre la existencia de órbitas periódicas sobre una región anular se muestra en el siguiente teorema.

**Teorema 4 .(Poincaré-Bendixson ( [2], [7], [9],[13],[15]) ).** Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos curvas cerradas en el plano fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

con  $C_2$  en el interior de  $C_1$ , entonces. Si en cada punto de la curva  $C_1$  el vector está dirigido hacia el interior de  $C_1$  y en cada punto de la curva  $C_2$  el vector está dirigido hacia el exterior de  $C_2$ , entonces se puede afirmar que al menos existe un ciclo límite comprendido entre  $C_1$  y  $C_2$ .

Note que este teorema nos da un resultado positivo para la existencia de órbitas periódicas, otras consecuencias o versiones de este teorema son dadas por la siguiente proposición ([2], [7], [9],[13],[15]).

**Corolario 2 .** Un conjunto cerrado, acotado y no vacío  $K \subset \mathbb{R}^2$ , que es positivamente (negativamente) invariante por el flujo  $\phi_t$  de (1.5), contiene una órbita periódica o un punto crítico.

**Corolario 3** . Si una curva solución  $\phi_t(x)$  de una ecuación en el plano entra a una región cerrada y acotada y no la deja, si además la región no contiene puntos de equilibrio, entonces  $\phi_t(x)$  se aproxima a una órbita periódica. En particular, la región contiene una órbita periódica.

Para ilustrar su uso veamos algunos casos.

**Ejemplo 3** . Consideremos la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 - x_1^2 - x_2^2)x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + (1 - x_1^2 - x_2^2)x_2. \end{cases}$$

Para aplicar el resultado anterior trabajaremos en coordenadas polares, tomamos  $x_1 := r\cos(\theta)$ ,  $x_2 := r\sin(\theta)$  con  $(r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$ . Recordemos que se cumple  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ ,  $\theta = \arctan(\frac{x_2}{x_1})$ , derivando respecto a  $t$ , y usando la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{cases} r\dot{r} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2, \\ \dot{\theta} = \frac{W(x_1, x_2)}{r^2}, \end{cases} \quad (1.6)$$

donde  $W(x_1, x_2)$  es el Wronskiano i.e.,

$$W(x_1, x_2) := \det \begin{pmatrix} x_1 & \dot{x}_1 \\ x_2 & \dot{x}_2 \end{pmatrix} = x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1,$$

sustituyendo  $x_1, x_2, \dot{x}_1$  y  $\dot{x}_2$  de la ecuación inicial en las ecuaciones (1.6) se obtiene

$$\begin{cases} \dot{r} = (1 - r^2)r, \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

integrando la segunda ecuación obtenemos  $\theta(t) = t + \theta_0$  es decir no hay otro punto crítico diferente del origen. De la primera ecuación tenemos que  $\{\frac{1}{2} \leq r \leq 2\}$  es un conjunto negativamente invariante y sin puntos críticos, así, del teorema de Poincaré-Bendixson  $\{\frac{1}{2} \leq r \leq 2\}$  contiene una órbita periódica, de hecho podemos ver que  $\{r = 1\}$  es órbita periódica.

**Ejemplo 4** . Consideremos la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(r^4 - 3r^2 + 1) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(r^4 - 3r^2 + 1), \end{cases}$$

donde  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ , y asuma el hecho que el origen es el único punto crítico.

Procediendo como en el ejemplo (4) usando coordenadas polares obtenemos  $\dot{r} = (r^4 - 3r^2 + 1)r$ , podemos ver que  $\{1 < r < 3\}$  es negativamente invariante, de nuevo por el teorema de Poincaré-Bendixson  $\{1 < r < 3\}$  contiene al menos una órbita periódica.

### 1.4.2. Método de Liénard

Una ecuación diferencial se llama de *Liénard*, si es una ecuación de la forma

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0.$$

Podemos pasar al sistema asociado, tomando  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}_1$  y obtenemos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -f(x_1)x_2 - g(x_1). \end{cases}$$

En este caso es posible dar condiciones relativamente generales sobre  $f, g$  para probar la existencia de órbitas periódicas, en particular se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 5** . La ecuación de Liénard con  $f, g$  continuas, tiene una solución periódica bajo las siguientes condiciones:

- (a).- Existe  $a > 0$  tal que  $f(x, y) > 0$  cuando  $\sqrt{x^2 + y^2} > a$ ;
- (b).-  $f(0, 0) < 0$ ,  $(f(x, y) < 0$  (en una vecindad de el origen);
- (c).-  $g(0) = 0$ ,  $g(x) > 0$  cuando  $x > 0$ , y  $g(x) < 0$  cuando  $x < 0$ ;

(d).-  $G(x) = \int_0^x g(s)ds \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$ ,

**Demostración.** El inciso c implica que existe un punto de equilibrio en el origen. Consideremos la función  $\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$  con  $G(0) = 0, G(x) > 0$  cuando  $x \neq 0$  y que cumpla la condición (d). Por lo tanto  $\varepsilon(0, 0) = 0$ , y  $\varepsilon(x, y) > 0$  cuando  $x \neq 0$  y  $y \neq 0$ . También  $\varepsilon$  es continua crece monótonamente en dirección radial de el origen. Por lo tanto la familia de contornos de  $\varepsilon$  con parámetro  $c > 0$

$$\varepsilon(x, y) = c$$

consiste de curvas cerradas simples conteniendo el origen. Podemos escoger  $c = c_1$  suficientemente pequeño para que la curva  $\varepsilon_1$  quede completamente contenida en una vecindad de el origen, donde por (b),  $f(x, y) < 0$ , ahora analicemos la trayectoria  $\gamma$  que empieza en un punto sobre  $\varepsilon_1$  y consideremos la derivada

$$\dot{\varepsilon}(x, y) = g(x)\dot{x} + y\dot{y} = g(x)y + y-f(x, y)y - g(x) = -y^2f(x, y). \quad (1.7)$$

Esta es positiva excepto en  $y = 0$  sobre  $\varepsilon_1$ . Escogemos  $\gamma$  que empiece en un punto diferente de  $y = 0$ . Entonces esta curva se aleja hacia afuera de  $\varepsilon_1$ .

Ahora consideremos otro contorno  $\varepsilon_2$  de tal forma que contenga completamente el circulo  $x^2 + y^2 = a^2$  y por (a),  $f(x, y) > 0$  sobre  $\varepsilon_2$ . De la ecuación (1.7) observamos que toda trayectoria dentro de  $\varepsilon_2$  debe permanecer adentro. Por lo tanto  $\gamma$  permanece en la región anular limitada por  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  y por el teorema de Poincaré-Bendixson, existe una órbita periódica en esta región.  $\square$

**Ejemplo 5 .** La ecuación  $\ddot{x} + (x^2 + \dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x^3 = 0$  tiene una órbita periódica.

**Solución.** Claramente si tomamos  $f(x, y) = x^2 + \dot{x}^2 - 1, g(x) = x^3, G(x) = \frac{1}{4}x^4$ , se cumplen las condiciones del teorema anterior, y por lo tanto existe una órbita periódica.

De hecho existen condiciones más generales para obtener órbitas periódicas, ver ([10], pagina 404)

**Teorema 6** . Sean  $f, g$  funciones  $C^1$  tales que:

(a).-  $g$  es una función impar y  $g(x) > 0$  si  $x > 0$ ;

(b).-  $f(x)$  es impar, y no cambia de signo en  $x > 0$ ;

(c).-  $g(x) > \alpha f(x)F(x)$  para  $x > 0$ , donde  $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ ,  $\alpha > 1$

entonces la ecuación de Liénard tiene exactamente una órbita periódica.

**Ejemplo 6** . La ecuación  $\ddot{x} + x\dot{x} + x^3 = 0$  tiene una órbita periódica en el origen, de la ecuación de Liénard observamos que  $f(x) = x$  y  $g(x) = x^3$ , de tal manera que  $F(x) = \frac{1}{2}x^2$  y las condiciones (a) y (b) del teorema se satisfacen. Además  $f(x)F(x) = \frac{1}{2}x^3$  por lo tanto  $g(x) - \alpha f(x)F(x) = \frac{1}{2}x^3(2 - \alpha)$  con lo cual se satisface (c) para  $1 < \alpha < 2$ .

Un caso particular de sistema de Liénard está dado por la ecuación de Van der Pol que resulta de hacer  $f(x) = \mu(x^2 - 1)$  y  $g(x) = x$ , ver [9].

**Ejemplo 7** . La ecuación de Van der Pol

$$\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

tiene un ciclo límite sobre el plano.

En efecto podemos ver que satisface las condiciones del teorema 6 de Liénard.

### 1.4.3. Criterio de Massera para ecuaciones no homogéneas

Primero consideremos sistemas lineales no autónomos de la forma

$$\dot{x} = A(t)x(t). \tag{1.8}$$

Donde  $A(t)$  es una matriz de  $n \times n$  cuyas entradas son funciones continuas y T-periódicas de t, es decir  $A(t) = A(t + T)$ .

Nuestro objetivo es encontrar las condiciones para que este sistema tenga soluciones T-periódicas. Esto no sucede en general, por ejemplo con  $n = 1$  tenemos

**Ejemplo 8** . *consideremos el sistema*

$$\dot{x}(t) = (1 + \text{sen}(t))x.$$

La función  $f(t) = 1 + \text{sen}(t)$  es continua y de periodo  $2\pi$ , sin embargo al resolver la ecuación

$$x(t) = ce^{t - \cos(t)}$$

solución del sistema, no es una función periódica para  $c \neq 0$ .

Antes de enunciar el teorema de Massera, necesitamos algunos resultados y definiciones que nos serán útiles para la mejor comprensión de este teorema.

El teorema de Floquet muestra que toda matriz fundamental del sistema se puede escribir como el producto de dos matrices de  $n \times n$ ; una de las cuales es de coeficientes periódicos y la otra tiene la forma  $e^{Bt}$  donde B es una matriz constante.

**Teorema 7** . *Dado el sistema*

$$\dot{x} = A(t)x(t)$$

donde  $A(t)$  es continua y T-periódica. Si  $\Phi(t)$  es una matriz fundamental del sistema, existen  $P(t), B(t) \in M_{n \times n}$  tales que

$$\Phi(t) = P(t)e^{Bt}$$

donde  $P(t)$  es T- periódicas y B es una matriz constante.

Consideremos ahora el caso lineal periódico no homogéneo

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \tag{1.9}$$

donde  $A(t), b(t)$  son T-periódicas

**Teorema 8** . Si el sistema homogéneo  $\dot{x} = A(t)x$  no tiene soluciones  $T$ -periódicas a parte de la trivial ( $x \equiv 0$ ) entonces el sistema (1.9) tiene una solución  $T$ -periódica única.

**Demostración.** Sea  $P(t)$  la matriz  $T$ -periódica del teorema de Floquet, consideremos el cambio  $x = P(t)z$ , entonces  $\dot{x} = A(t)x$  se transforma en  $\dot{z} = Bz$  con  $B$  matriz constante, aplicando esta transformación a el sistema (1.9) obtenemos

$$\dot{z} = Bz + P^{-1}(z)B(t) \quad (1.10)$$

si  $\dot{x} = A(t)x$  no tiene soluciones  $T$ -periódicas a parte de  $y = 0$ , entonces  $\dot{z} = Bz$  no tiene soluciones  $T$ -periódicas, esto implica que (1.9) tiene una solución  $T$ -periódica única.  $\square$

Terminamos esta sección con un resultado de J. L. Massera, cuya demostración usa la teoría de Floquet.

**Teorema 9 (Massera).** Si el sistema  $\dot{y} = A(t)y + b(t)$  tiene una solución acotada para  $t \in [0, \infty]$  entonces, existe una solución  $T$ -periódica.

**Demostración.** Denotemos por  $\psi$  la solución acotada en  $[0, \infty)$  y sea  $\Phi$  la matriz fundamental de soluciones tal que  $\Phi(t) = \Phi(t, 0)$ ,  $\Phi(0, 0) = I$ , de aquí la solución tiene la forma

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \Phi(t)\psi_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)b(s)ds \\ \psi(T) &= \Phi(T)\psi_0 + \int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(s)b(s)ds, \end{aligned}$$

tenemos que  $\psi(t + T)$  también es solución y  $\psi(0, T) = \psi(T)$  por lo tanto

$$\psi(t + T) = \Phi(T)\psi(t) + \int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(s)b(s)ds,$$

tomando  $C = \int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(s)b(s)ds$  tenemos que

$$\psi(2t) = \Phi(T)\psi(T) + C = \Phi(T)(\Phi(t)\psi_0 + C) + C = \Phi^2(t)\psi_0 + (\Phi(t) + I)C$$

y en general

$$\psi(mt)\Phi^m(T)\psi_0 + \sum_{m=1}^{k=0} \Phi^k(t)C$$

así, si suponemos que la ecuación no tiene soluciones T-periodicas llegamos a una contradicción.  $\square$

Una consecuencia del teorema de Massera se da en el siguiente corolario.

**Corolario 4** . *Si el sistema homogéneo  $\dot{x} = A(t)x$  no tiene soluciones T-periodicas, entonces cualquier solución del sistema (1.9) no es acotada en  $[0, \infty)$ .*

## 1.5. Criterios de no existencia de órbitas periódicas

A continuación revisamos algunos resultados clásicos para la no existencia de órbitas periódicas.

Dada una órbita periódica  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  nos interesa saber qué tipo de órbita hay en la región acotada por la curva, denotémosla por  $\text{int}(\gamma)$ . En particular, si necesariamente contiene puntos críticos, enunciemos primero un resultado que nos será útil.

**Teorema 10** . **(Punto fijo de Brouwer, [14]).** *Sea  $U \subset \mathbb{R}^2$  homeomorfo a una bola cerrada en  $\mathbb{R}^2$  y  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función continua tal que  $g(\partial U) \subset U$ . Entonces  $g$  tiene al menos un punto fijo en  $U$ , es decir, existe un punto  $x \in U$  tal que  $g(x) = x$ .*

**Teorema 11** . *Sea  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  una curva periódica para  $\phi_t(x)$ . Entonces  $\text{int}(\gamma)$  contiene al menos un punto crítico.*

**Demostración:** Si  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  es una curva de Jordán, entonces  $\text{int}(\gamma)$  es homeomorfo a una bola cerrada en  $\mathbb{R}^2$ . Como el flujo es continuo y satisface  $\phi_t(\text{int}(\gamma)) = \text{int}(\gamma)$  podemos aplicar el teorema anterior.



Dado un punto  $p \in \text{int}(\gamma)$  tenemos que  $\phi_t(p) \in \text{int}(\gamma)$  para todo  $t \geq 0$ , en particular esto implica que cualquier  $t_1 > 0$  se tiene que  $\phi_{t_1} : \text{int}(\gamma) \rightarrow \text{int}(\gamma)$ . Por el teorema anterior existe un punto  $p_1 \in \text{int}(\gamma)$  tal que  $\phi_{t_1}(p_1) = p_1$ . Escogemos una sucesión decreciente  $\{t_n\}$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$  y la correspondiente sucesión de puntos fijos  $\{p_n\}$ , es decir,  $\phi_{t_n}(p_n) = p_n$ .

Supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p^*$ , para cada  $t \in \mathbb{R}$  y cualquier  $n \in \mathbb{Z}$  existe un  $k_n \in \mathbb{Z}$  tal que  $k_n t_n \leq t < (k_n + 1)t_n$  por lo tanto  $0 \leq t - k_n t_n < t_n$ , de aquí, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $t_n < \delta$ , entonces  $\|\phi_{t - k_n t_n}(p_n) - p_n\| < \epsilon/3$ . Por la continuidad del flujo existe  $N_1 \geq 1$  tal que si  $n > N_1$  entonces  $\|\phi_t(p_n) - \phi_t(p^*)\| < \epsilon/3$ . Además, tenemos que existe  $N_2 > 1$  tal que si  $n > N_2$  se tiene  $\|p_n - p^*\| < \frac{\epsilon}{3}$ . En consecuencia

$$\phi_t(p_n) = \phi_t(\phi_{-t_n}(p_n)) = \phi_t(\phi_{-k_n t_n}(p_n)) = \phi_{t - k_n t_n}(p_n),$$

entonces tomando  $N \geq \max\{N_1, N_2\}$  se tiene que

$$\|\phi_t(p^*) - p^*\| \leq \|\phi_t(p^*) - \phi_t(p_n)\| + \|\phi_t(p_n) - p_n\| + \|p_n - p^*\| < \epsilon,$$

esto implica que  $\phi_t(p^*) = p^*$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y por lo tanto  $p$  es un punto crítico.  $\square$

**Ejemplo 9** . Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2, \end{cases}$$

este sistema no tiene puntos críticos, aplicando el resultado anterior en donde afirma que si existe una solución periódica entonces está debe contener un punto crítico, podemos concluir que el sistema no puede tener órbitas periódicas.

### 1.5.1. Teoría de índices

Consideremos la ecuación (1.1) con  $f := (f_1, f_2)$  es decir el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Si reescribimos como la ecuación escalar no autónoma:

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}, \\ \tan(\theta) := \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}, \end{cases}$$

donde  $\theta$  es el ángulo que el campo vectorial  $f := (f_1, f_2)$  tiene con el eje  $x$  positivo.

**Definición 5** Una curva de Jordán (en  $\mathbb{R}^2$ ) es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  homeomorfo a  $S^1$ .

Sea  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordán orientada positivamente que no contiene puntos críticos de  $f = (f_1, f_2)$ . El índice de  $f$  con respecto a  $\gamma$  está dado por:

$$j_f(\gamma) := \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} d\theta = \oint_{\gamma} \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{f_1^2 + f_2^2}. \quad (1.11)$$

Note que  $j_f(\gamma)$  es un múltiplo entero de  $2\pi$ . Intuitivamente representa el número de vueltas que  $f$ , da al recorrer  $\gamma$ , el ángulo que  $f$  tiene con respecto al eje  $x$  cambia conforme  $\gamma$  es recorrido una vez, en ([18]) se prueba el siguiente resultado.

**Lema 3** . Sea  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordán orientada positivamente que no contiene puntos críticos de  $f$ . Entonces:

- a).- Si  $int(\gamma)$  no contiene puntos críticos, entonces  $j_f(\gamma) = 0$ .
- b).- Si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son dos curvas de Jordán con  $\gamma_1 \subset int(\gamma_2)$  y si no hay puntos críticos fuera de  $\gamma_1$  y dentro de  $\gamma_2$  entonces  $j_f(\gamma_1) = j_f(\gamma_2)$ .

El resultado anterior nos motiva definir el índice de un punto crítico  $x_0$  en la siguiente manera. Sea  $\gamma$  una curva de Jordán tal que  $x_0 \in int(\gamma)$  y que no contenga ningún otro punto crítico de  $f$ , entonces:

$$j_f(x_0) := j_f(\gamma).$$

Si  $\gamma$  encierra una cantidad finita de puntos críticos, una aplicación del lema anterior nos da:

**Lema 4** . Sea  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordán orientada positivamente cuyo interior contiene los puntos críticos  $x_1, \dots, x_n$ . Entonces

$$j_f(\gamma) = \sum_{k=1}^n j_f(x_k).$$

Para calcular el índice  $j_f(x_0)$  de un punto crítico aislado  $x_0$ . Sean  $f$  y  $g$  dos campos vectoriales tales que  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ . Más aún, supongamos que  $g(x)$  es una deformación continua de  $f(x)$ . Dado  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño existe  $\delta > 0$  tal que para  $\gamma := \partial B(x_0, \delta)$  se tiene  $\|f(x) - g(x)\| < \epsilon$ . Dado que  $f(x) \neq 0$  sobre  $\gamma$ , tomando  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño se puede garantizar que  $f$  y  $g$  prácticamente apunten en la misma dirección a todo lo largo de  $\gamma$ . Por definición esto implica que

$$j_f(x_0) = j_g(x_0). \quad (1.12)$$

En otras palabras, el índice es invariante para pequeñas perturbaciones del campo vectorial  $f$  por lo tanto tenemos:

**Lema 5** . Consideremos el sistema

$$\dot{x} = Ax + r(x),$$

donde  $\|r(x)\| = O(\|x\|^2)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , entonces tenemos que:

$$j_{Ax}(0) = j_{Ax+r(x)}(0).$$

Como consecuencia del lema 6, para calcular el índice de un punto crítico es suficiente calcular el índice del sistema linealizado asociado. Usando la ecuación (2.11) tenemos:

$$j_{Ax}(0) = \frac{\det(A)}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)^2}. \quad (1.13)$$

Asumiendo que  $\det(A) \neq 0$  se puede ver que el índice es invariante bajo transformaciones lineales no singulares, por lo tanto cuando calculamos  $j_{Ax}(0)$  es suficiente con considerar las matrices con la forma canónica de Jordán

$$A_r := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad A_d := \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad A_c := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Suponiendo que  $a \neq 0$  para  $A_d$  tenemos que existe una deformación continua tal que:

$$A_d := \begin{pmatrix} a + \epsilon_1 & 0 \\ 0 & a + \epsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \text{sign}(a + \epsilon_1) = \text{sign}(a + \epsilon_2) = \text{sign}(a),$$

$$A_d := \begin{pmatrix} a + \epsilon & 0 \\ 0 & a + \epsilon \end{pmatrix}, \quad \text{sign}(a + \epsilon) = \text{sign}(a), \quad b \in \mathbb{R}^+.$$

En consecuencia de la ecuación (1.12) tenemos que  $j_{A_dx}(0) = j_{A_r x}(0)$  en el caso de que  $\text{sign}(b) = \text{sign}(a)$  y  $j_{A_dx}(0) = j_{A_c x}(0)$  en caso contrario. Por lo tanto, es suficiente calcular el índice para los casos  $A_r, A_c$ .

Primero para  $A_r$ . Evaluando la ecuación (1.13) sobre la elipse

$$\gamma := \{(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{a}\cos(t), \frac{1}{b}\sin(t)\right) : 0 \leq t \leq 2\pi\}.$$

Observemos que la curva es orientada positiva si  $ab > 0$  y orientada negativa si  $ab < 0$ , evaluando obtenemos:

$$j_{A_r x}(0) = \begin{cases} -1, & \text{si } ab < 0, \\ +1, & \text{si } ab > 0. \end{cases}$$

Para  $A_c$  evaluamos la ecuación (2.13) sobre el círculo unitario positivamente orientado y obtenemos que  $j_{A_c x}(0) = +1$ .

Recordemos que el origen para un sistema lineal se dice *punto silla* si tiene dos valores propios reales de signo diferente, tenemos como consecuencia el siguiente resultado.

**Lema 6** . Consideremos  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  bajo la condición que  $\det(A) \neq 0$  tenemos que  $j_{Ax}(0) = -1$  si 0 es un punto silla;  $j_{Ax}(0) = +1$  en otro caso.

Como consecuencia del Lema 5 y 7 obtenemos el siguiente resultado para puntos críticos de sistemas no lineales.

**Corolario 5** . Consideremos el sistema:

$$\dot{x} = f(x),$$

Donde  $f(x) = 0$ . Supongamos que  $\det(Df(x)) \neq 0$ , entonces

$$j_f(x_0) = \begin{cases} -1, & \text{si } x_0 \text{ es un punto silla,} \\ +1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El siguiente puede encontrarse en [18]

**Teorema 12** . Si  $\gamma$  es una órbita periódica para el flujo de  $\dot{x} = f(x)$ , entonces

$$j_f(\gamma) = +1.$$

Por el corolario 3 y el teorema 14 tenemos

**Corolario 6** . Si  $\gamma$  es una órbita periódica de  $\dot{x} = f(x)$  la cual encierra un único punto crítico, entonces este punto no puede ser punto silla.

**Demostración:** Supongamos que el punto crítico es punto silla, por el teorema 14 se tiene que  $j_f(\gamma) = +1$  y por el corolario 3 el índice de un punto silla es  $-1$  pues el índice es invariante bajo deformaciones continuas de  $\gamma$ . □

### Ejemplo 10 .

Sea

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + x_1^3 + x_2^3. \end{cases}$$

El único punto crítico es  $(0,0)$ , éste es punto silla pues los eigenvalores del sistema linealizado asociado son  $\lambda = (-1 \pm \sqrt{13})/2$ . Por lo tanto, no existen órbitas periódicas para el sistema.

De hecho se cumple el siguiente resultado más general.

**Lema 7 .** Sea  $\dot{x} = f(x)$  Supongamos que para cada punto crítico  $x_0$  se tiene que  $\det(Df(x_0)) \neq 0$ . Sea  $\gamma$  una órbita periódica para el flujo. Entonces:

- a).-  $\text{int}(\gamma)$  debe contener una cantidad impar de puntos críticos.
- b).- De los  $2n + 1$  puntos críticos contenidos en  $\text{int}(\gamma)$ ,  $n$  son puntos silla.

**Demostración:** (a) Por el lema 5 tenemos que  $j_f(\gamma) = \sum_{k=1}^n j_f(x_j)$  y el índice de cada punto crítico es  $\pm 1$ . Así, si tenemos una cantidad par de puntos críticos la suma es diferente de  $+1$  lo cual contradice el teorema 14. el cual dice que una órbita periódica bajo el flujo tiene  $j_f(\gamma) = +1$ . Por lo tanto debe contener una cantidad impar.

(b) Como un punto crítico que es punto silla tiene índice  $-1$  y si no es punto silla su índice es  $+1$ . La única forma en que la suma de índices sea  $+1$  es de que se tengan  $n$  puntos silla. □

### 1.5.2. Sistema gradiente

Existen además familias de ecuaciones diferenciales para las que es posible probar resultados relativos a la existencia de órbitas periódicas, las cuales, a pesar de su particularidad son importantes en aplicaciones o para fines teóricos, por ejemplo tenemos:

**Definición 6** . Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  abierto, un sistema gradiente es una ecuación de la forma

$$\dot{x} = -\text{grad}v(x).$$

Donde  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $C^2$  y  $\text{grad}v(x) = \left( \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right)$ .

**Ejemplo 11** . Sea  $v(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ , entonces  $\text{grad}v(x_1, x_2) = (2x_1 x_2 + x_2^2, x_1^2 + 2x_1 x_2)$ , así el sistema gradiente asociado es

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 x_2 - x_2^2, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 - 2x_1 x_2. \end{cases}$$

**Definición 7** . Sea  $y := (y_1, y_2) : I \rightarrow U$  una función vectorial diferenciable y  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces

$$Dv(y) = \left( \frac{\partial v}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial v}{\partial y_2} \dot{y}_2 \right),$$

es la derivada de  $v$  a lo largo de  $y$ .

**Proposición 1** . Un sistema gradiente  $\dot{x} = -\text{grad}v(x)$  no posee órbitas periódicas.

**Demostración:** Sea  $x : I \rightarrow U$  una solución no trivial del sistema gradiente entonces

$$\begin{aligned} \frac{dv(x)}{dt}(t) &= Dv(x) \cdot \dot{x} = \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} \cdot \dot{x}_2 \right) \\ &= - \langle \text{grad}v(x), \text{grad}v(x) \rangle = -\|\text{grad}v(x)\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Es decir el valor de la función  $v$  es decreciente a lo largo de trayectorias no triviales, por lo tanto, no puede haber soluciones periódicas.  $\square$

Note que es posible definir sistemas gradientes en  $\mathbb{R}^n$  y el resultado sigue siendo válido.

### 1.5.3. Criterio de Bendixson-Dulac

Continuamos discutiendo otros resultados para la no existencia de soluciones periódicas.

**Teorema 13 .(Criterio de Bendixson)** Sean  $f = (f_1, f_2) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $C^1$  en un dominio simplemente conexo  $D \subset \mathbb{R}^2$  tales que  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$  no cambia de signo en  $D$  y solo se anula en un conjunto de medida cero. Entonces el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

no tiene órbitas periódicas en  $D$ .

**Ejemplo 12 . Consideremos**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = (1 + x_1^2)x_2. \end{cases}$$

Calculamos la divergencia de este sistema

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial(1 + x_1^2)x_2}{\partial x_2} = 1 + x_1^2 > 0, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R},$$

por el criterio de Bendixson el sistema no tiene órbitas periódicas.

**Ejemplo 13 . Para el siguiente sistema analicemos si tiene órbitas periódicas en el plano:**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_2 - 2)x_1^2, \\ \dot{x}_2 = ax_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Obsérvese que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial(x_2 - 2)x_1^2}{\partial x_2} + \frac{\partial(ax_1 + 4x_2)}{\partial x_2} = (x_2 - 2)2x_1 + 4 = 2x_1x_2 - 4x_1 + 4.$$



Note que el criterio de Bendixson no aplica en este caso.

Un resultado más general al criterio de Bendixson se muestra en el siguiente teorema, su demostración se hará en el capítulo 3.

**Teorema 14 . (Criterio de Bendixson-Dulac)** Sean  $f_1(x_1, x_2)$ ,  $f_2(x_1, x_2)$  y  $h(x_1, x_2)$  funciones con primera derivada parcial continua en un dominio simplemente conexo  $D \subset \mathbb{R}^2$  tales que  $\frac{\partial(f_1h)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2h)}{\partial x_2}$  no cambia de signo en  $D$  y solo se anula en un conjunto de medida cero. Entonces el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

No tiene órbitas periódicas en  $D$ .

Notemos que si la función  $h(x_1, x_2) = 1$ , entonces estamos en el caso del teorema 13. Ahora aplicamos este resultado al ejemplo 13

**Ejemplo 14 .** Tenemos el sistema del ejemplo 13

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_2 - 2)x_1^2 \\ \dot{x}_2 = ax_1 + 4x_2 \end{cases}$$

y consideremos ahora  $h(x_1, x_2) = x_1^{-2}$ , entonces

$$\frac{\partial(f_1h)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2h)}{\partial x_2} = \frac{\partial(x_2 - 2)x_1^2x_1^{-2}}{\partial x_1} + \frac{\partial(ax_1 + 4x_2)x_1^{-2}}{\partial x_2} = 0 + 4x_1^{-2} = 4x_1^{-2},$$

por lo tanto, puesto que el resultado no es idénticamente cero y no cambia de signo en  $x_1 < 0$  o  $x_1 > 0$ , por el criterio de Bendixson-Dulac el sistema no tiene órbitas periódicas.

**Ejemplo 15** . Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2^2. \end{cases}$$

Obsérvese que el criterio de Bendixson no aplica. Sea  $h(x_1, x_2) = e^{-2x_1}$ , entonces

$$\frac{\partial(f_1 h)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2 h)}{\partial x_2} = \frac{\partial x_2 e^{-2x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial(-x_1 - x_2 + x_2^2)e^{-2x_1}}{\partial x_2} = -e^{-2x_1} < 0,$$

así el sistema no tiene órbitas periódicas en el plano.

En el capítulo 3 trataremos con más detalle este criterio.

## 1.6. Ecuaciones diferenciales parciales cuasilineales

Una Ecuación Diferencial Parcial (E.D.P.) de Primer Orden, en dos variables, es simplemente una expresión de la forma

$$E\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \quad (1.14)$$

Así tenemos los siguientes ejemplos de Ecuaciones Diferenciales Parciales.

**Ejemplo 16** .

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

**Ejemplo 17** .

$$xy \frac{\partial z}{\partial x} + g(x) \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y)$$

donde  $f(x, y)$ ,  $g(x)$  son funciones continuas.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con derivadas parciales continuas. La función  $f$  es una solución de la Ecuación Diferencial Parcial si y solo si se satisface la identidad

$$E\left(x, y, f(x, y), \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) \equiv 0 \quad \text{en } \Omega$$

**Definición 8** . Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Una Ecuación Diferencial Parcial de Primer Orden de la forma

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \quad P, Q, R \in C^1(\Omega), \quad (1.15)$$

se llama Ecuación Diferencial Parcial cuasilineal de Primer Orden, donde las funciones coeficientes  $P, Q$  no se anulan simultáneamente en  $\Omega$ .

La ecuación (1.15) se llama cuasilineal pues en general las funciones coeficientes  $P, Q, R$  no necesariamente son transformaciones lineales en la tercera coordenada.

La ecuación (1.15) bajo un punto de vista vectorial, se puede escribir equivalentemente en términos de la base canónica  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  del Espacio Vectorial  $\mathbb{R}^3$ , como el Producto Punto:

$$(P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}) \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \hat{j} - \hat{k} \right) = 0.$$

Consideremos el campo de vectores  $\vec{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que,

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}. \quad (1.16)$$

Con el objeto de simplificar la escritura, equivalentemente el anterior campo de vectores se puede escribir simplemente  $\vec{F} = (P, Q, R)$  en el entendido de que se trata de un vector.

Sea un dominio  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ ,  $S$  una superficie en  $\Omega$  que es la gráfica de una función diferenciable de dos variables  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $z = f(x, y)$  con  $D$  un dominio en  $\mathbb{R}^2$ . Entonces si se define  $E(x, y, z) = z - f(x, y)$  tenemos que  $S$  coincide con la gráfica del conjunto

$$E^{-1}(0) = \{(x, y, z) | z - f(x, y) = 0\}$$

La superficie  $S$  se puede entonces considerar como la superficie de nivel cero de la función  $E$ . Si  $S$  es una superficie regular que es solución de (1.15) y consideramos el gradiente  $\nabla E = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)$  se tiene de inmediato la identidad

$$\vec{F} \cdot \nabla E \equiv 0, \quad E^{-1}(0).$$

Si se interpreta geoméricamente la identidad anterior significa que la superficie solución  $S$ , también llamada Superficie Integral, es tangente al campo de vectores  $\vec{F}$ .

Para encontrar superficies tangentes al campo de vectores  $\vec{F}$  recordemos la definición de órbita o trayectoria de un campo de vectores.

**Definición 9** . Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^3$  y  $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo de vectores. Una curva paramétrica  $\vec{r} : I \rightarrow \Omega$  donde  $I$  es un subintervalo de  $\mathbb{R}$  es una órbita (trayectoria) del campo de vectores si y solo si se satisface la identidad

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \vec{F}(\vec{r}(t)) \quad \text{en un intervalo } I \in \mathbb{R}$$

La definición anterior dice que una curva paramétrica tal que el vector tangente a la curva coincide con el campo de vectores en cada punto, es una órbita.

Nótese que si se tiene una superficie formada sólo por órbitas del campo de vectores entonces es inmediato que es una superficie tangente al campo de vectores y en consecuencia es una solución de la E.D.P (1.15). El problema para encontrar superficies integrales se reduce a conseguir órbitas del campo de vectores.

La identidad (1.16), se puede escribir equivalentemente en término de las componentes de los vectores, de donde se tiene la identidad:

$$\left( \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right) \equiv (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

o bien, simplemente igualando las componentes de los campos de vectores se tiene el sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= P(x, y, z) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= Q(x, y, z) \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= R(x, y, z).\end{aligned}$$

El sistema anterior se puede escribir en términos de las diferenciales como un sistema de tres formas diferenciales:

$$\begin{aligned}dx &= P(x, y, z)dt \\ dy &= Q(x, y, z)dt \\ dz &= R(x, y, z)dt\end{aligned}$$

**Observacion:** El sistema en general no es lineal y se sabe que un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales es difícil de resolver explícitamente. Una alternativa para conseguir una solución del sistema, consiste simplemente en eliminar el parámetro  $t$  del sistema de formas diferenciales y conseguir dos formas diferenciales diferentes de tal suerte que sus respectivas superficies se intercepten transversalmente.

**Definición 10** . *Supongamos que,*

$$\begin{cases} \phi_1(x, y, z) = c_1 \\ \phi_2(x, y, z) = c_2 \end{cases} \quad (1.17)$$

*son un par de ecuaciones de superficies que se interceptan transversalmente. Estas superficies se llaman características de la ecuación cuasilineal.*

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \quad P, Q, R \in C^1(\Omega)$$

Sea  $\Phi(c_1, c_2) = 0$  con  $\Phi \in C^1$ , la ecuación de una curva arbitraria diferenciable en el plano  $c_1c_2$ . Entonces, por las características (1.17) reemplazando las constantes en la

ecuación por las funciones  $\phi_1, \phi_2$  respectivamente, se obtiene la ecuación de una superficie integral en las variables  $x, y, z$  de la forma

$$\Phi(\phi_1(x, y, z), \phi_2(x, y, z)) = 0.$$

La expresión anterior es una ecuación de una familia de superficies integrales, llamada solución general por contener una función arbitraria. Análogamente, en el plano  $c_1 c_2$  se puede considerar una gráfica de una función arbitraria, dada por una ecuación de la forma  $c_2 = \Phi(c_1)$  con  $\Phi \in C^1$  con lo que obtenemos

$$\phi_2(x, y, z) = \Phi(\phi_1(x, y, z)). \quad (1.18)$$

**Ejemplo 18** . *Encontrar la superficie solución de la Ecuación Diferencial Parcial*

$$xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

*SOLUCION: de acuerdo a la ecuación (1.15) podemos formar el sistema*

$$dx = xy^2 dt$$

$$dy = x^2 dt$$

$$dz = 0$$

*igualando las dos primeras ecuaciones se tiene  $xdx = y^2 dy$ , integrando se tiene la primera característica  $x^2/2 - y^3/3 = c_1$  donde  $c_1$  es una constante arbitraria. La segunda característica se deduce fácilmente de la tercera ecuación, pues integrando obtenemos  $z = c_2$ , con  $c_2$  una constante arbitraria y finalmente usando la ecuación (2.18) obtenemos*

$$c_2 = \Phi(c_1)$$

*es decir*

$$z = \Phi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)$$

*que es una solución general de la E.D.P.*

# Capítulo 2

## Ciclos límites

### 2.1. Introducción

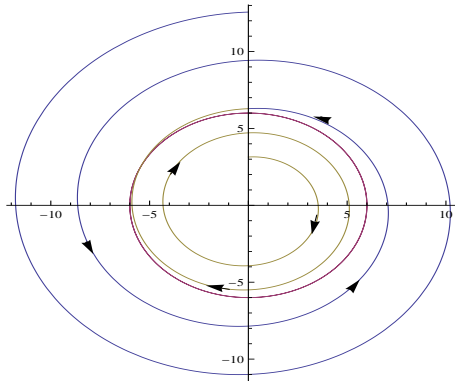
Los ciclos límites resultan cuando una trayectoria en forma de espiral, acaba por enrollarse alrededor de una curva cerrada. El concepto ciclo límites es muy importante en dinámica. Entenderemos por ciclo límite una órbita periódica aislada, es decir una órbita periódica que tiene una vecindad anular de tal manera que no contiene ninguna otra órbita periódica.

Por ejemplo, las órbitas periódicas de la ecuación

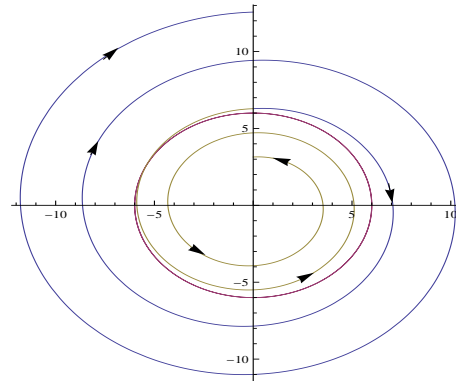
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases}$$

no son aisladas.

En ocasiones las trayectorias del sistema tienden a acumularse sobre una órbita cerrada; cuando esto sucede se dice que existe un ciclo límite estable. También se da el caso en el que las trayectorias se desprenden de una órbita cerrada, en cuyo caso se dice que existe un ciclo límite inestable.



Ciclo límite estable



Ciclo límite inestable

Los ciclos límites estables son muy importantes en la ciencia ya que modelan los sistemas dinámicos reales que presentan procesos oscilatorios tales como latidos cardíacos, ritmos biológicos, reacciones químicas oscilantes y otros muchos ejemplos.

El estudio de los ciclos límites para sistemas polinomiales, fue iniciado por Poincaré (1882), una técnica útil para producir ciclos límite se deriva de los métodos de bifurcación.

## 2.2. Bifurcación

En general las ecuaciones diferenciales dependen de ciertos parámetros, *una bifurcación* ocurre cuando una estructura del retrato fase del sistema cambia cualitativamente como resultado de la variación de parámetros, por ejemplo puede verse alterada la estabilidad de puntos críticos, desaparecer o aparecer puntos críticos u órbitas periódicas, en esta sección nos enfocaremos en analizar propiedades elementales bifurcaciones de puntos críticos en órbitas periódicas.

Como es bien conocido en la literatura existen varios tipos de bifurcación, mostramos el comportamiento de esta bifurcación en los siguientes ejemplos.



**Ejemplo 19** . Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\lambda x_1, \end{cases}$$

que contiene un parámetro real  $\lambda$ , el plano fase contiene un centro para  $\lambda > 0$ , pues los eigenvalores de la matriz de coeficientes son imaginarios puros, pero en el caso que  $\lambda < 0$  se tiene un punto silla (eigenvalores reales de signo opuesto). Esta clasificación representa dos tipos de conducta radicalmente diferentes. El cambio ocurre cuando  $\lambda$  pasa a través del cero, entonces decimos que  $\lambda = 0$  es un punto de bifurcación.

**Ejemplo 20** . Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\lambda x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -\lambda x_1 - 3x_2, \end{cases}$$

la matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\lambda & -3 \end{pmatrix}$$

para encontrar los eigenvalores  $m$  escribimos

$$\begin{pmatrix} -\lambda - m & 1 \\ -\lambda & -3 - m \end{pmatrix}$$

el polinomio característico es  $m^2 + (3 + \lambda)m + 4\lambda = 0$ , el cual tiene las raíces  $m_1, m_2 = \frac{1}{2}[-\lambda - 3 \pm \sqrt{(\lambda - 1)(\lambda - 9)}]$ . De aquí el sistema tiene una bifurcación en el punto  $\lambda = 0$  donde cambia de un nodo estable a un punto silla.

Un caso especial de bifurcación es la **bifurcación de Hopf**, en este caso los Sistemas tienen un punto crítico aislado para ciertos valores del parámetro y después de variarlos aparecen soluciones periódicas o ciclos límites.

**Ejemplo 21** . Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 + x_2 - (x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \mu x_2 + (x_1^2 + x_2^2), \end{cases}$$

donde  $\mu$  es el parámetro de bifurcación. El sistema tiene un único punto de equilibrio en el origen.

Transformando a coordenadas polares obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} = -1, \end{cases}$$

si  $\mu \leq 0$  entonces el diagrama fase consiste de un espiral estable. Si  $\mu > 0$ , entonces tenemos un espiral inestable en el origen rodeado de un ciclo límites estable, además tenemos que  $\mu = r^2$  es una órbita periódicas estable.

El siguiente resultado es una versión simple, restringida a ecuaciones tipo polar, del teorema de Hopf la demostración se puede ver en ([10], pag. 438)

**Teorema 15** . Dado el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 + x_2 - x_1 f(r) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \mu x_2 - x_2 f(r), \end{cases}$$

donde  $r = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$ ,  $f(r)$ ,  $\dot{f}(r)$  son continuas para  $r \geq 0$ ,  $f(0) = 0$  y  $f(r) > 0$  para  $r > 0$ . Entonces

- (i) para  $\mu < 0$  el origen es un espiral estable que cubre todo el plano;
- (ii) para  $\mu < 0$  el origen es un espiral estable;
- (iii) para  $\mu > 0$  existe un ciclo límites cuyo radio se incrementa a medida que crece  $\mu$ .

El siguiente resultado nos da un criterio más general para analizar la bifurcación de puntos críticos en órbitas periódicas.

**Teorema 16 . (Hopf en dos dimensiones).** Consideremos el sistema  $\dot{x} = f(x, \mu)$  donde  $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$  y  $f(0, \mu) = 0$ . Suponga que para  $\mu$  pequeño,  $f_x(0, \mu)$  tiene un par de autovalores  $\alpha(\mu) = \pm i\omega(\mu)$ , con  $\omega(\mu) > 0$ ,  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha'(0) > 0$ , entonces:

- (i) Existe  $\delta > 0$ ,  $\mu \in C^{k-1}((-\delta, \delta), \mathbb{R})$  tal que para  $l \in (-\delta, \delta)$  el sistema  $\dot{x} = f(x, \mu)$  tiene una solución periódica  $p(T, s)$  con  $T(s) > 0$  y  $T(0) = \frac{2\pi}{\omega(0)}$ ,  $\mu(0) = 0$ ,  $\mu'(0) = 0$ . ;
- (ii)  $(x, y, \mu) = (0, 0, 0)$  tiene una vecindad donde no hay otras soluciones periódicas aparte de la familia  $p(T, s)$ .

### 2.3. Problema 16 de Hilbert

Como fue mencionado aún cuando en el caso de ecuaciones diferenciales en dos dimensiones, presenta muchos resultados fuertes, dista mucho de estar completa. El problema de decidir la existencia de órbitas periódicas es en la actualidad una área muy activa y vigorosa. Muestra de ello es el famoso problema 16 de Hilbert. Para enunciarlo consideremos un sistema polinomial.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.1)$$

con  $P, Q$  polinomios con coeficientes reales. El grado del sistema es el grado mayor entre  $P, Q$ .

El Problema 16 de Hilbert (la segunda parte) fue propuesto en 1900 de la siguiente manera:

*Dado un número entero  $d$ , ¿Cuál es el número máximo  $H(d)$  de ciclos límites del sistema (2.1) para todos los sistemas polinomiales de grado  $d$  y que se puede decir acerca de la posición relativa de los ciclos límites?.*

Esta pregunta sigue sin tener respuesta, aún en el caso de que el grado de los polinomios sea 2. Sin embargo, este problema ha propiciado un desarrollo profundo y abundante de varias áreas de las matemáticas contemporáneas.

Enseguida listamos algunos resultados acerca de este problema

- En 1923 H. Dulac [4] probó la finitud de ciclos límites de un sistema como (2.1). Sin embargo a principios de los 80's se encontraron hoyos en la prueba.
- En 1926 Van Der Pol probó la existencia de ciclos límites usando métodos gráficos.
- En 1928 Liénard generalizó la construcción de Van Der Pol a otros sistemas.
- En 1985 R. Bamon [1] probó el resultado de Dulac para el caso cuadrático.
- A principios de los 90's Yu Ilyasenko y J. Ecalle publicaron en forma independiente una corrección a la prueba de Dulac.

Respecto a la posición relativa de los ciclos límites

**Definición 11** . *Una configuración de ciclos límite es un conjunto finito  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$  de curvas cerradas simples disjuntas del plano tal que  $C_i \cap C_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ .*

Dada una configuración de ciclos límite  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ , la curva  $C_i$  es primaria si no existe otra curva  $C_j$  de  $C$  contenida en la región acotada por  $C_i$ .

Dos configuraciones son equivalentes si existe un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^2$  entre las dos, tal que lleva una configuración en la otra.

**Definición 12** *Una configuración  $C$  es realizable si existe una ecuación diferencial polinomial tal que el conjunto de ciclos límites es equivalente a la configuración  $C$  dada.*

Un resultado debido a J. Llibre y G. Rodríguez [11] es el siguiente

**Teorema 17** . *Sea  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$  una configuración de ciclos límites y sea  $r$  su número de curvas primarias. Entonces  $C$  es realizable por un sistema polinomial de grado  $d \leq 2(m + r) - 1$*

En 1979 Shi, Shen y Wang construyeron un sistema cuadrático con 4 ciclos límites, por lo que el número de ciclos límites para sistemas cuadráticos es mayor o igual a 4 ( $H(2) \geq 4$ ).

En 2005 Yu y Han construyeron un sistema cúbico con 12 ciclos límite, por lo que el número de ciclos límite para sistemas cúbicos es mayor o igual a 12 ( $H(3) \geq 12$ ).

Existen otros interesantes resultados relacionados a ciclos límites ver [19] y las referencias allí contenidas.

La idea general de las construcciones mencionadas relativas al problema 16 de Hilbert han sido posibles al considerar los sistemas polinomiales como sistemas de ecuaciones que dependen de ciertos parámetros (donde los parámetros son los coeficientes), y estudiar las distintas bifurcaciones de ciertos puntos críticos para mas detalles ver [8].

Como ha sido comentado el teorema de Bendixson-Dulac entre otros permite determinar regiones que no contienen órbitas periódicas y por ello pueden ser de utilidad en la parte de localización de órbitas periódicas en el problema 16 de Hilbert.

# Capítulo 3

## Funciones de Dulac

En esta sección presentaremos un método alternativo para construir funciones de Dulac que nos permitan descartar la existencia de órbitas periódicas para ecuaciones diferenciales en el plano haciendo uso de ecuaciones diferenciales parciales, mostraremos algunos ejemplos y casos particulares para ilustrar aplicaciones de estos resultados.

Recordamos el resultado de Green para curvas cerradas.

**Teorema 18 .(Green)** Sea  $f = (f_1, f_2) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $C^1$  i.e., funciones con primeras derivadas parciales continuas en un dominio simplemente conexo  $D$  (i.e.  $D$  no posee hoyos), sea  $\gamma \subset D$  una curva de Jordán y  $\text{int}(\gamma)$  la región limitada por la curva, entonces se cumple

$$\oint_{\gamma} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = \iint_{\text{int}(\gamma)} \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2.$$

Para demostrar el siguiente resultado basta aplicar el teorema anterior.

**Teorema 19 . (Criterio de Bendixson-Dulac)** Sean  $f_1(x_1, x_2)$ ,  $f_2(x_1, x_2)$  y  $h(x_1, x_2)$  funciones  $C^1$  en un dominio simplemente conexo  $D \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $\frac{\partial(f_1 h)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2 h)}{\partial x_2}$  no cambia de signo en  $D$  y se anula solo en un conjunto de medida cero. Entonces el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in D \quad (3.1)$$

no tiene órbitas periódicas en  $D$ .

**Demostración:** Supongamos que el sistema tiene una órbita periódica  $\gamma$  con periodo  $T > 0$  en  $D$ , entonces por el teorema de Green tenemos

$$\begin{aligned} \iint_{\text{int}(\gamma)} \left[ \frac{\partial(f_1 h)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2 h)}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2 &= \int_{\gamma} ((f_1 h) dx_2 - (f_2 h) dx_1) \\ &= \int_0^T ((f_1 h) \dot{x}_2 - (f_2 h) \dot{x}_1) dt = \int_0^T h(f_1 f_2 - f_2 f_1) dt = 0. \end{aligned}$$

Pero como  $\frac{\partial(f_1 h)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2 h)}{\partial x_2}$  no es idénticamente cero, y no cambia de signo en el  $\text{int}(\gamma)$  esto no es posible.  $\square$

En este criterio para descartar la existencia de órbitas periódicas de el sistema(3.1) en el plano en una región simplemente conexa  $D$  necesitamos encontrar una función  $h(x_1, x_2)$  que satisfaga las condiciones del teorema de Bendixson-Dulac, tal función  $h$  es llamada *función de Dulac*. Generalmente no es fácil determinar tales funciones, aunque siempre es posible proponer funciones de la forma  $h = 1, x_1^s, x_2^s, e^{x_1 x_2}, x_1^s x_2^t$  como lo vimos en el capítulo 1 y como lo muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 22 .** Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1^2 + 5x_2^2 \\ \dot{x}_2 = e^{x_1} + x_2^3 x_1 \end{cases}$$

y sea  $h = x_1$  entonces

$$\frac{\partial(h f_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h f_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial(3x_1^2 + 5x_2^2)x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial(e^{x_1} + x_2^3 x_1)x_1}{\partial x_2} = 9x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_2^3 x_1^2 \geq 0,$$

y el sistema no contiene órbitas periódicas en el plano.

Nuestro objetivo es obtener otro método para construir las funciones de Dulac, para esto usaremos ecuaciones diferenciales parciales.

### 3.1. Construcción de funciones de Dulac

El proponer funciones  $h$  de la forma antes mencionada sirve solo para un número muy limitado de Sistemas de ecuaciones razón por la cual estudiaremos situaciones más generales y que resultan bastante interesantes.

1. Primero propondremos otra función arbitraria  $k(x_1, x_2)$  positiva o negativa tal que solo se anule en un conjunto de medida cero. Y que además satisfaga

$$\frac{\partial(hf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(hf_2)}{\partial x_2} = k(x_1, x_2).$$

2. Ahora aprovechando la libertad que tenemos sobre  $k$ , en orden de obtener algunos resultados, tomamos  $k(x_1, x_2) := c(x_1, x_2)h(x_1, x_2)$ , con  $c$  positiva o negativa que solo se anula en un conjunto de medida cero, entonces, consideramos la ecuación

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + h \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + h \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = c(x_1, x_2)h(x_1, x_2) \quad (3.2)$$

esto es

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + h \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) = c(x_1, x_2)h(x_1, x_2)$$

podemos reescribir esta ecuación como

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = h \left( c(x_1, x_2) - \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \right) \quad (3.3)$$

3. Resolver esta ecuación parcial cuasilineal de primer orden.



4. Comprobar que la función  $h$  obtenida es una función de Dulac para el sistema (3.1).

Hasta aquí hemos construido una forma de producir funciones de Dulac por un sistema en el plano como se resume en el siguiente.

**Teorema 20** . *Para el sistema de ecuaciones diferenciales en el plano*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in D \end{cases}$$

*una solución  $h$  del sistema asociado (3.3), (con  $c$  que no cambia de signo y que solo se anula en un conjunto de medida cero) es una función de Dulac para este sistema en cualquier región  $A$  simplemente conexa contenida en  $D \setminus h^{-1}\{0\}$ .*

**Prueba.** La validez de este resultado se sigue de la construcción en los pasos del (1) - (4). □

**Corolario 7** . *Para el sistema de ecuaciones diferenciales dado en el teorema anterior, si (3.3) tiene una solución  $h$  que no cambia de signo y solo se anula en un conjunto de medida cero sobre  $D$  (para alguna  $c$  que tampoco cambia de signo y que solo se anula en un conjunto de medida cero), entonces  $h$  es una función de Dulac para el sistema de ecuaciones diferenciales sobre  $D$ .*

**Prueba.** Dada una función  $l : D \rightarrow \mathbb{R}$  denotamos por  $Z_l := \{(x_1, x_2) \in D / l(x_1, x_2) = 0\}$ , tenemos  $\frac{\partial(f_1 h)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2 h)}{\partial x_2}$  no cambia de signo y se anula a lo más en  $Z_c \cup Z_h$  el cual tiene medida cero. □

## Observaciones

- Con la elección de  $k$  en el paso 2 obtenemos una ecuación lineal (3.1), la cual es más simple de tratar, aunque algunas otras elecciones son posibles.
- La elección de  $c$  se usa para simplificar la ecuación (3.3), obsérvese que siempre es posible tomar  $c$  como una constante.

## 3.2. Ejemplo y Aplicaciones

**Ejemplo 23** . Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) \\ \dot{x}_2 &= 3x_1^2 x_2 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (3.10) tenemos la expresión

$$x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) \frac{\partial h}{\partial x_1} + 3x_1^2 x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = h \left[ c(x_1, x_2) - (2x_1 x_2^2 (1 - \cos x_2) + 3x_1^2) \right]$$

esto es una ecuación diferencial parcial cuasilineal de primer orden, aplicando el método de las características (ver sección 1.6 pag. 38) obtenemos el sistema asociado

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) dt \\ dx_2 &= 3x_1^2 x_2 dt \\ dh &= h \left[ c - (2x_1 x_2^2 (1 - \cos x_2) + 3x_1^2) \right] dt \end{aligned}$$

de las dos primeras ecuaciones eliminando el parametro  $t$  obtenemos

$$3x_1^2 x_2 dx_1 = x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) dx_2$$

que es una ecuación diferencial ordinaria, resolviendo obtenemos la primera característica

$$3x_1 + x_2 \sin x_2 + \cos x_2 - \frac{1}{2} x_2^2 = C_1$$

en la última ecuación tomando  $c = 3x_1^2$  y multiplicando la ecuación por  $x_1$  tenemos

$$x_1 dh = -h(2x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2)) dt$$

la cual reemplazando en la primera ecuación de el sistema asociado podemos reescribir como

$$x_1 dh = -2h dx_1$$

y resolviendo para  $h$

$$h = \frac{C_2}{x_1^2}$$

Notese que esta  $h$  es una función de Dulac para el sistema dado en la región  $x_1 < 0$  o  $x_1 > 0$ .

**Ejemplo 24** . Consideremos el sistema

$$\dot{x}_1 = 2x_1 \cos x_1$$

$$\dot{x}_2 = e^{x_2} + 3x_2$$

Sustituyendo en la ecuación (3.3) y tomando  $H(x_1, x_2) = \ln h(x_1, x_2)$  tenemos la expresión

$$2x_1 \cos x_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + (e^{x_2} + 3x_2) \frac{\partial H}{\partial x_2} = c(x_1, x_2) - (2 \cos x_1 - 2x_1 \cos x_1 + e^{x_2} + 3)$$

si tomamos  $c = 3 + e^{x_2} + 2 \cos x_1$ , entonces la ecuación se reduce a

$$2x_1 \cos x_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + (e^{x_2} + 3x_2) \frac{\partial H}{\partial x_2} = 2x_1 \cos x_1,$$

que es una ecuación diferencial parcial de la forma

$$f(x_1)H_{x_1} + g(x_2)H_{x_2} = G(x_1) + G(x_2),$$

la solución de este sistema esta dado por

$$H = x_1 + \Phi \left( \int \frac{dx_1}{2x_1 \cos x_1} - \int \frac{dx_2}{e^{x_2} + 3x_2} \right)$$

y por lo tanto

$$h = \exp \left[ x_1 + \Phi \left( \int \frac{dx_1}{2x_1 \cos x_1} - \int \frac{dx_2}{e^{x_2} + 3x_2} \right) \right]$$

donde  $\Phi$  es una función arbitraria.

**Ejemplo 25** . Consideremos las ecuaciones de Lotka-Volterra, también conocidas como las ecuaciones de presa-depredador

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(k - ax_1 - bx_2) \\ \dot{x}_2 = x_2(m - ex_1 - dx_2) \end{cases}$$

frecuentemente usadas para describir la dinámica de sistemas biológicos en los cuales dos especies interactúan, y en consecuencia  $x_1$  y  $x_2$  son siempre positivas.

sustituyendo en la ecuación (3.3)

$$x_1(k - ax_1 - bx_2) \frac{\partial h}{\partial x_1} + x_2(m - ex_1 - dx_2) \frac{\partial h}{\partial x_2} = h [c - (k - ax_1 - bx_2) - (m - ex_1 - dx_2) + ax_1 + dx_2]$$

y escogiendo  $a$  y  $d$  tales que  $ad \geq 0$ , y no se anulan simultáneamente, podemos tomar  $c = -ax_1 - dx_2$ ,

$$x_1(k - ax_1 - bx_2) \frac{\partial h}{\partial x_1} + x_2(m - ex_1 - dx_2) \frac{\partial h}{\partial x_2} = h((-k - ax_1 - bx_2) - (m - ex_1 - dx_2))$$

y reescribiendo con  $r_1 = k - ax_1 - bx_2$  y  $r_2 = m - ex_1 - dx_2$

$$x_1 r_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + x_2 r_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = h(-r_1 - r_2)$$

la solución de esta ecuación diferencial parcial es

$$h = \frac{1}{x_1 x_2}$$

esta función  $h$  es una función de Dulac para las ecuaciones de Lotka-Volterra con  $x_1, x_2 > 0$ .

**Ejemplo 26** . Consideremos el sistema del ejemplo 13

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_2 - 2)x_1^2 \\ \dot{x}_2 = ax_1 + 4x_2 \end{cases}$$

sustituyendo en (3.3) se tiene

$$(x_2 - 2)x_1^2 \frac{\partial h}{\partial x_1} + (ax_1 + 4x_2) \frac{\partial h}{\partial x_2} = h(c - (2x_1(x_2 - 2) + 4))$$

y tomando  $c = 4$

$$(x_2 - 2)x_1^2 \frac{\partial h}{\partial x_1} + (ax_1 + 4x_2) \frac{\partial h}{\partial x_2} = h(-(2x_1(x_2 - 2)))$$

esto es una ecuación diferencial parcial de primer orden, supongamos que  $h$  solo depende de  $x_1$  entonces

$$(x_2 - 2)x_1^2 \frac{\partial h}{\partial x_1} = h(-(2x_1(x_2 - 2)))$$

y resolviendo llegamos a que  $h = x_1^{-2}$

Observese que hemos recobrado la función de Dulac usada en el ejemplo 13.

**Ejemplo 27** . Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (x_1 + 1)^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= (x_1 + 1)x_2^2 \ln(x_1 + 1) + x_2^3 + 3x_2 x_1^2 \end{aligned}$$

para encontrar una función de Dulac  $h$  que solo dependa de  $x_1$  y satisfaga una ecuación de la forma (3.1) usamos la ecuación (3.5).

$$h = \exp\left(\int \frac{1}{f_1} \left[ c(x_1, x_2) - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right] dx_1 \right)$$

$$h = \exp\left(\int \frac{1}{(x_1 + 1)^2 x_2} \left[ c(x_1, x_2) - 2(x_1 + 1)x_2 - [2(x_1 + 1)x_2 \ln(x_1 + 1) + 3x_2^2 + 3x_1^2] \right] dx_1\right)$$

si tomamos

$$c = 3x_1^2 + 3x_2^2 \neq 0 \quad \forall x_1, x_2$$

obtenemos

$$h = \exp\left(\int \frac{[-2(x_1 + 1)x_2][1 + \ln(x_1 + 1)]}{(x_1 + 1)^2 x_2} dx_1\right)$$

$$h = \exp\left(\int \frac{-2[1 + \ln(x_1 + 1)]}{(x_1 + 1)} dx_1\right)$$

Integrando

$$h = \exp\left(-2\ln(x_1 + 1) - (\ln(x_1 + 1))^2\right)$$

es decir

$$h = \frac{1}{(x_1 + 1)^2} \exp\left(-(\ln(x_1 + 1))^2\right)$$

de aqui, tomando esta función  $h$ , podemos afirmar que el sistema no tiene órbitas periódicas contenidas completamente en las regiones del plano divididas por la recta  $x_1 = -1$ .

**Ejemplo 28 . Sea**

$$\dot{x}_1 = 3x_1x_2^2 + e^{x_1} + g(x_2)$$

$$\dot{x}_2 = x_2^3 + 2$$

como  $f_2$  solo depende de  $x_2$ , podemos escribir para  $h$ .

$$h = \frac{1}{f_2} \exp\left(\int \frac{1}{f_2} \left[ c(x_1, x_2) - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right] dx_2\right)$$

Asi del sistema tenemos

$$h = \frac{1}{x_2^3 + 2} \exp\left(\int^{x_2^3 + 2} \left[ c(x_1, x_2) - 3x_2^2 - e^x - g'(x_2) \right] dx_2\right)$$

de tal forma que si tomamos

$$c = e^x + 3x_2^2$$

que es positiva para todo  $x_1, x_2$ , tenemos

$$h = \frac{1}{x_2^3 + 2} \exp\left(-\int \frac{g'(x_2)}{x_2^3 + 2} dx_2\right)$$

que es una función que depende únicamente de  $x_2$ , así, si tomamos  $x_2 \neq (-2)^{1/3}$ , esta función  $h$  es de Dulac.

**Ejemplo 29** . Consideramos

$$\dot{x}_1 = 3x_1^2 x_2^2 + e^{x_1} - \tan x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_2^3(1 - 2x_1) + x_2 \sec^2 x_1$$

Sustituyendo en la ecuación (2) nos da:

$$h = \exp\left(\int \frac{1}{x_2^3(1 - 2x_1) + x_2 \sec^2 x_1} [c(x_1, x_2) - 6x_1 x_2^2 - e^x + \sec^2 x_1 - 3x_2^2 + 6x_1 x_2^2 - \sec^2 x_1] dx_1\right)$$

es decir

$$h = \exp\left(\int \frac{1}{x_2^3(1 - 2x_1) + x_2 \sec^2 x_1} [c(x_1, x_2) - e^x - 3x_2^2] dx_1\right)$$

y tomando

$$c = e^x + 3x_2^2$$

concluimos que

$$h = \exp(0) = 1$$

Como era de esperarse pues notemos que este sistema cumple las condiciones del criterio de Bendixson.

### 3.3. Caso particular del método de construcción

Como fue visto en los ejemplos, en algunas situaciones podemos obtener una situación específica de  $h$ .

Denotemos  $F = (f_1, f_2)$  con  $f_1, f_2$  las funciones del sistema (3.1), consideremos que  $h$  depende únicamente de  $x_1$  y  $k$  es de la forma  $k(x_1, x_2) = c(x_1, x_2)h = (x_1)$  con  $c(x_1, x_2) \neq 0$ . Con estas condiciones tenemos:

$$\text{Div}(hF) = f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + h \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + h \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = c(x_1, x_2)h \quad (3.4)$$

Es decir reordenando tenemos

$$\frac{dh}{dx_1} = \frac{h}{f_1} \left[ c(x_1, x_2) - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right]$$

que es una ecuación diferencial homogénea para  $h$ . así

$$\frac{dh}{h} = \frac{1}{f_1} \left[ c(x_1, x_2) - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right] dx_1$$

integrando ambos lados

$$h = \exp \left( \int \frac{1}{f_1} \left[ c(x_1, x_2) - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right] dx_1 \right) \quad (3.5)$$

Notemos que para que la expresión anterior tenga sentido necesitamos que el lado derecho dependa solo de  $x_1$ .

Análogamente obtendremos una expresión similar si suponemos que  $h$  depende de  $x_2$ .

Por otro lado tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 2** . Sea  $F = (f_1, f_2)$ , si  $\text{div}(F) \geq 0$ , y solo se anula en un conjunto de medida cero, entonces nuestro algoritmo produce  $h = 1$ .

**Demostración.** Tomemos el sistema (3.1), entonces por el teorema 20 el sistema asociado es

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = h \left( c(x_1, x_2) - \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \right).$$



dado que  $\text{div}(F) \geq 0$ , podemos escoger  $c = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$

y en consecuencia la ecuación queda como

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0$$

es claro que una solución es  $h = cte$ , en particular podemos tomar  $h = 1$ .

□

**Ejemplo 30** . Consideremos el sistema

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2$$

$$\dot{x}_2 = (x_1 x_2)^2 \cos x_1 + 2x_2^3 + 5x_2$$

Queremos ver si existe una función de Dulac  $h$  que solo depende de  $x_1$  y satisface una ecuación de la forma (3.1). Entonces aplicando la expresión anterior

$$h = \exp\left(\int \frac{1}{f_1} \left[ c(x_1, x_2) - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right] dx_1\right)$$

$$h = \exp\left(\int \frac{1}{x_1 x_2} \left[ c(x_1, x_2) - x_2 - [2(x_1^2 x_2) \cos x_1 + 6x_2^2 + 5] \right] dx_1\right)$$

tomando

$$c = x_2 + 5 + 6x_2^2 > 0 \quad \forall x_1, x_2$$

obtenemos

$$h = \exp\left(-\int 2x_1 \cos x_1 dx_1\right)$$

es decir

$$h = \exp(-2x_1 \sin x_1 - 2 \cos x_1)$$

esta función  $h$  satisface las condiciones del criterio de Bendixson-Dulac y en consecuencia el sistema no tiene órbitas periódicas en el plano.

### 3.4. Generalizaciones

Una variante del teorema de Bendixson-Dulac es la siguiente:

**Corolario 8** . Sea  $U_0 \subset U$  un conjunto abierto anular ( i.e., homeomorfo a un anillo del plano), supongamos que existe una función con derivadas continuas  $h : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que la divergencia  $\frac{\partial(hf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(hf_2)}{\partial x_2}$  no es idénticamente 0 ni cambia de signo en  $U_0$ , entonces el sistema tiene a lo más una órbita periódica enteramente contenida en  $U_0$ .

**Demostración:** Nótese que, si hubiera alguna órbita periódica, ésta debe de contener en su interior a la frontera interior de  $U_0$  pues, de no ser el caso, tendríamos una contradicción con el teorema de Bendixson-Dulac. Ahora, supóngase que existen 2 órbitas periódicas  $\gamma_1, \gamma_2$  por la observación anterior podemos suponer que  $\gamma_1$  esta contenida en el interior de  $\gamma_2$ , el resto de la prueba se sigue en forma similar al teorema de Bendixson-Dulac, pues al integrar sobre la frontera a  $(-hf_2, hf_1)$  obtenemos cero, pero por el teorema de Green esto coincide con la integral  $\frac{\partial(hf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(hf_2)}{\partial x_2}$  sobre la región limitada por las curvas  $\gamma_2$  y  $\gamma_1$  lo cual es diferente de 0. Esta contradicción prueba que no puede haber dos órbitas periódicas, por lo tanto a lo más hay una.  $\square$

Este algoritmo que acabamos de construir tambien puede ser aplicado para encontrar una función  $h$  en la siguiente situación más general ver [7] .

**Proposición 3** . Sea  $D_0$  un  $l$ -conexo subconjunto de  $D$  (i.e.  $D_0$  tiene  $l$  hoyos  $\partial\Pi_1(D_0) \approx \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * (l) * \mathbb{Z}$ ), supongamos que existe una función  $h \in C^1(D_0, \mathbb{R})$  tal que  $\frac{\partial(f_1h)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2h)}{\partial x_2}$  no cambia de signo y se anula solo en un conjunto de medida cero, entonces el sistema tiene a lo más  $l$  órbitas periódicas en  $D_0$ .

# Bibliografía

- [1] Bamon R., *The solution of Dulac's problem for quadratic vector fields*, Ann. Acad. Bras. Ciênc. 57 (1985), 111-142.
- [2] Bendixson I., Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Math.*, 24 (1901), p. 1-88.
- [3] Busenberg S. N., P. Van Den Driessche, A method for proving the nonexistence of limit cycles, *J. Math. Anal. Appl.* 172 (1993), 463-479.
- [4] Dulac H., Sur les cycles limites, *Bull.Soc.Math. France* 51 (1923), 45-188.
- [5] Dulac H., recherche des cycles limites, *C. R. Acad. Sci. Paris* 204 (1937), 1703-1706.
- [6] Farkas Miklós *Periodic Motions*. Springer-Verlag, New York (1994).
- [7] Guckenheimer J. and P. Holmes *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York, (1983).
- [8] Hetao Liu James [2003], *A first course in the qualitative theory of differential equations*. Prentice Hall, New Jersey.
- [9] Hirsch M. and Smale S.. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, (1997).

- [10] Jordán D. W. and P. Smith *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Oxford, New York, 1999.
- [11] Llibre J. & Rodriguez G., *Configuration of limit cycles and planar polynomial vector fields*, *J. Diff. Eqns.* 198(2004), 374-380.
- [12] McCluskey C. C., Muldowney J.S., Bendixson-Dulac criteria for difference equations, *J. Dyn. Diff. Equations* 10 (1998), 567-575.
- [13] Perko Lawrence, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, (2006).
- [14] Petrovski I. G., *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, Inc, (1993).
- [15] Poincaré, H., Sur les courbes définies par une équations différentielle, *Oeuvres*, 1, Paris. (1892).
- [16] Saéz E. andv Szánto I. On the construction of certain Dulac function, *Transactions on automatic control*, vol. 33, September 1988
- [17] Smith R. A., An index theorem and Bendixson's negative criterion for certain differential equations of higher dimension, *Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A* 91 (1981), 63-77.
- [18] Strogatz, S. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley, (1994).
- [19] Yu. Ilyashenko Centennial history of Hilbert's 16th problem. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 39, 301-354 (2002).