



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

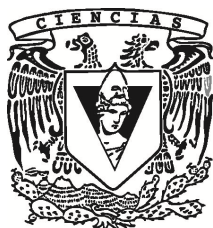
Formas diferenciales y el teorema de de Rham

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**M A T E M Á T I C O
P R E S E N T A:**

ARMANDO VARELA ALVAREZ



**DIRECTOR DE TESIS:
DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA
2011**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
Varela
Alvarez
Armando
56170180

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
304238419

2. Datos del tutor
Dra.
Laura
Ortiz
Bobadilla

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Xavier
Gómez-Mont
Ávalos

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Marcelo Alberto
Aguilar
González de la Vega

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Adolfo
Guillot
Santiago

6. Datos del sinodal 4
M. en C.
Valente
Santiago
Vargas

7. Datos del trabajo escrito
Formas diferenciales y el teorema de de Rham
104 pp.
2011

Índice general

Introducción	3
1. Formas diferenciales en \mathbb{R}^n	8
1.1. Preliminares	8
1.1.1. Estructura geométrica de \mathbb{R}^n	8
1.1.2. El corchete de Lie	10
1.1.3. Subvariedades de \mathbb{R}^n	15
1.2. Formas exteriores en \mathbb{R}^n	16
1.2.1. Formas alternantes en \mathbb{R}^n	16
1.2.2. Producto cuña de formas alternantes	18
1.2.3. Formas exteriores en \mathbb{R}^n	22
1.2.4. Álgebra exterior de un espacio vectorial	22
1.3. Formas diferenciales en \mathbb{R}^n	25
1.3.1. Formas diferenciales en \mathbb{R}^n	26
1.3.2. Pullback de formas diferenciales	27
1.3.3. Derivada exterior de una forma diferencial	30
1.3.4. Interpretación geométrica de la derivada exterior	32
1.3.5. La cohomología de de Rham	33
1.4. Integración de 1-formas diferenciales	34
1.4.1. Producto de curvas en \mathbb{R}^n	35
1.4.2. Integral de una 1-forma diferencial en \mathbb{R}^n	35
1.4.3. Exactitud e integración	36
1.4.4. Homotopía e integración	39
1.5. Teorema de Frobenius	42
1.5.1. Interpretación geométrica del corchete de Lie	42
1.5.2. Campos vectoriales conmutativos	44
1.5.3. Teorema de Frobenius	46
1.5.4. Teorema de Frobenius para formas diferenciales	48
1.6. Formas diferenciales en una variedad diferenciable	50
2. El teorema de de Rham	54
2.1. Prolegómenos de álgebra homológica	55
2.1.1. Módulos diferenciales	55
2.1.2. Complejos de R -módulos	58

2.1.3.	Homotopías	59
2.1.4.	Cohomología de un complejo de R -módulos	61
2.2.	Homología en variedades	62
2.2.1.	Homología en complejos simpliciales	62
2.2.2.	Homología singular	64
2.2.3.	Δ -homología y sus relaciones	68
2.2.4.	Triangulaciones de clase C^∞ en variedades de clase C^∞	72
2.2.5.	Homología singular de clase C^∞	74
2.3.	Integral de formas diferenciales	74
2.3.1.	Integral de una n -forma diferencial sobre una variedad de dimensión n	74
2.3.2.	El teorema de Stokes para variedades	76
2.3.3.	Integrales de formas diferenciales sobre cadenas y el teorema de Stokes	77
2.4.	Cohomologías en variedades	81
2.4.1.	La cohomología de de Rham	81
2.4.2.	Invarianza homotópica de la cohomología de de Rham	82
2.4.3.	La cohomología de Čech con respecto a una cubierta abierta	86
2.4.4.	Comparación entre la cohomología de de Rham y la cohomología de Čech	87
2.5.	El teorema de de Rham	92
2.5.1.	Versiones del teorema de de Rham y sus interrelaciones	93
2.5.2.	Prueba del teorema	95
2.5.3.	Sucesión de Mayer-Vietoris	99

Introducción

El estudio de las formas diferenciales en su versión moderna fue introducido por Élie Cartan utilizando la noción de producto exterior definida por Hermann Grassmann. En sus trabajos, Élie Cartan define también el concepto de derivada exterior. El desarrollo de este lenguaje permitirá a Édouard Goursat establecer la generalización del teorema de Stokes que expondremos posteriormente.

En 1931, Georges de Rham prueba su famoso teorema que ya había sido propuesto en los trabajos de Élie Cartan y Henri Poincaré. Sin embargo, la prueba que expondremos de este teorema está basada en el trabajo [16] realizado por André Weil el cual fue presentado a Henri Cartan en una carta en 1947, pero publicado en 1952. Este enfoque es alterno a la teoría de gavillas desarrollada por Jean Leray.

Este trabajo tiene como objetivo estudiar el lenguaje de las formas diferenciales en variedades diferenciales y su relación con otros objetos matemáticos que podemos definir en éstas. Este estudio se basa principalmente en seguir el enfoque desarrollado por Shigeyuki Morita en su texto [11].

La teoría de las formas diferenciales tiene como objetivo formalizar la noción de integrando sobre una variedad M de clase C^∞ . Para ello, primero introduciremos el concepto de forma exterior en un espacio vectorial. Una 1-forma exterior es una función lineal del espacio vectorial en su campo subyacente. Por ejemplo, consideremos \mathbb{R}^2 con su base canónica $\beta = \{e_1, e_2\}$. Así, podemos definir $x_1, x_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como las proyecciones en la primera y segunda coordenada, respectivamente. Es fácil ver que dichas funciones son lineales. Otra función con propiedades lineales de interés definida en \mathbb{R}^2 es la función determinante 2-vectores en \mathbb{R}^2 :

$$\omega(\xi, \eta) = \det \begin{bmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{bmatrix}, \text{ donde } \xi = (\xi_1, \xi_2) \text{ y } \eta = (\eta_1, \eta_2). \quad (1)$$

El álgebra lineal nos dice que la función (1) mide el área orientada del paralelogramo generado por los vectores ξ y η cuando consideramos a \mathbb{R}^2 con su estructura euclidiana. Sin embargo, la propiedad algebraica de ser lineal en ambas entradas y alternante es independiente de estas interpretaciones métricas. Esto motiva la definición de forma exterior en un espacio vectorial V de dimensión finita: una k -forma exterior es una función multilineal y alternante de

la forma

$$\omega : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Estas formas exteriores son los pilares con los que construiremos nuestras formas diferenciales. El conjunto de estos elementos forma un espacio vectorial de forma natural. Después, construiremos un álgebra formal la cual nos permitirá dotar a este espacio vectorial con una estructura de álgebra graduada al introducir un producto llamado producto exterior. A esta álgebra la llamaremos el álgebra exterior del espacio vectorial V . El hecho de construir estas formas en cualquier espacio vectorial de dimensión finita nos dará la oportunidad de construir esta álgebra sobre el espacio tangente T_pM a un punto p en una variedad M .

Lo anterior nos permite dar la definición de una k -forma diferencial. Una k -forma diferencial en M es una función que cada punto p en M le asocia una k -forma exterior del espacio T_pM , y que varía de forma C^∞ . Primordialmente, dando una estructura euclidiana a estos espacios podemos pensar que estos objetos miden cierto k -volumen infinitesimal orientado. Por ejemplo, consideremos un conjunto abierto U en \mathbb{R}^3 y un campo vectorial X definido en él. Podemos entonces construir una 1-forma diferencial ω_X donde a cada vector del espacio tangente en un punto p le asignamos el producto punto con dicho campo vectorial, es decir,

$$\omega_X(p)(\xi) = (X(p), \xi), \quad \text{con } \xi \in T_pU. \quad (2)$$

Dicha función nos está diciendo cuál es la acción infinitesimal del campo vectorial X con respecto a las proyecciones en los vectores tangentes.

Por otro lado, como objetos de naturaleza diferencial, es importante preguntarnos cuales son las relaciones de ellos con funciones de clase C^∞ . Así, de esta pregunta nace el concepto de pullback de una k -forma diferencial que es un símil de cambio de variables. Dada una función $f : M \rightarrow N$ de clase C^∞ , el pullback es una función que a cada k -forma diferencial definida sobre N le asocia una k -forma diferencial definida sobre M .

Ahora, para poder integrar estos objetos, necesitamos introducir una noción parecida a lo que conocemos por la parametrización de una curva. En este caso, utilizaremos el concepto de k -simplejo singular C^∞ , éstos son transformaciones $\sigma : \Delta^k \rightarrow M$ de clase C^∞ , donde Δ^k denota al simplejo estándar. El pullback de formas diferenciales nos permitirá definir lo que significa integrar sobre estos objetos geométricos, dado que ya sabemos integrar volúmenes en \mathbb{R}^n . Así, la integral de una k -forma diferencial sobre un k -simplejo singular se define como

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta^k} \sigma^* \omega. \quad (3)$$

Esto generaliza nuestra definición usual de integral de línea y de volumen a cualquier dimensión. Además, podremos establecer un teorema de Stokes generalizado para dichos objetos geométricos.

Por otro lado, la naturaleza diferencial de dichos objetos también nos permite definir la derivada exterior d que resulta ser una transformación lineal que aumenta en uno el grado de la forma. La definición de derivada exterior se basa en la definición de la diferencial de una función f de clase C^∞ definida sobre un conjunto abierto U de \mathbb{R}^n con coordenadas x_1, \dots, x_n como

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \quad (4)$$

Una de las particularidades de la derivada exterior es que al componerla dos veces se anula, es decir, $d^2 \equiv 0$. En el caso de la forma diferencial ω_X definida en (2), la derivada exterior nos está diciendo cuál es la variación infinitesimal de dichas proyecciones que, además, en términos de la interpretación del producto interior nos provee de la variación angular ejercida por el campo vectorial X en el espacio tangente $T_p U$. En este caso, esta noción rescata lo que en el cálculo vectorial se denomina el campo rotacional $\text{rot}(X)$ de dicho campo vectorial.

La importancia de esta derivada exterior es que nos permitirá probar una generalización del teorema de Stokes para k -simplejos singulares C^∞ . Consideremos un k -simplejo singular C^∞ , dado por σ , podemos pensar que dicho k -simplejo singular C^∞ tiene asociada una frontera $\partial\sigma$ dada por la restricción de la función σ a la frontera del k -simplejo Δ^k . Así, dada una $(k-1)$ -forma diferencial ω en M , el teorema de Stokes generalizado afirma que el valor de la integral de ω sobre la frontera $\partial\sigma$ es igual al valor de la integral de la derivada exterior $d\omega$ sobre σ . En símbolos,

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma} d\omega \quad (5)$$

Por otra parte, la derivada exterior juega un papel muy importante dentro de esta teoría y nos permite dar las siguientes definiciones. Una k -forma diferencial es cerrada, si su derivada exterior se anula y una es exacta, si se puede ver como derivada exterior de otra de grado $k-1$. La propiedad $d^2 \equiv 0$, nos dice que toda forma exacta es cerrada. Así, podemos definir el espacio de cocientes de k -formas cerradas entre k -formas exactas que será nuestro espacio vectorial de cohomología de de Rham denotado $H_{dR}^k(M)$. Las clases de este espacio cociente nos dicen cuanto dista una forma cerrada de ser exacta.

Primero, estudiemos que significa el $H_{dR}^0(U)$ cuando U es un conjunto abierto de \mathbb{R}^n . Para ello, observemos que el hecho de que $df = 0$ utilizando la ecuación (4) implica que dicha función es localmente constante en todo punto de U . Debido al hecho de que toda función localmente constante es globalmente constante en la componente conexa de dicho punto, $H_{dR}^0(U)$ corresponde al espacio vectorial de las componentes conexas de dicho espacio.

La relación entre la integral que definimos y los espacios de cohomología de \mathbb{R} es transparente. Por hechos que se probaran en el desarrollo de la tesis, sabremos que toda 1-forma diferencial definida sobre \mathbb{R} es cerrada. Esto nos dice que este espacio vectorial tiene dimensión 1. Ahora, dada una 1-forma diferencial $\omega = f(x)dx$, el teorema fundamental del cálculo nos provee de una primitiva

que nos permite ver ω como diferencial de otra función:

$$\omega = f(x)dx = d\left(\int_0^x f(u)du\right)$$

Sabemos que esta función es única salvo por la adición de una constante, por ende, el espacio de 1-formas exactas en \mathbb{R} tiene dimensión 1. Por lo tanto, $H_{dR}^1(\mathbb{R}) = 0$.

Ahora, desarrollaremos otro ejemplo de esta relación. Sea $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Consideremos la 1-forma diferencial dada por la diferencial de la función ángulo $\omega = d\theta$ que se encuentra definida en M . Es fácil ver que si $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ es una curva cerrada, podemos definir la integral de ω sobre dicha curva. Dicha integral valdrá 2π veces el número de vueltas que dicha curva da entorno al cero. Así, podemos definir una transformación lineal

$$\int_\gamma : \{1\text{-formas cerradas}\} \rightarrow \mathbb{R},$$

la cual tiene como núcleo las 1-formas cerradas que integran cero. Posteriormente, veremos que dichas 1-formas diferenciales son exactamente las 1-formas exactas. Con esto, hemos esbozado la prueba de que

$$H_{dR}^1(M) \cong \mathbb{R}. \quad (6)$$

Por otro lado, la derivada exterior nos permitirá construir, denotando por $\mathcal{A}^k(M)$ al conjunto de k -formas diferenciales en M , lo que llamaremos el complejo de cadena de de Rham de M

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^0(M) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{n-1}(M) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^n(M) \longrightarrow 0. \quad (7)$$

El teorema de de Rham afirma que este complejo contiene información sobre la topología de la variedad M , utilizando un principio de dualidad básico: uno integra integrandos sobre subobjetos geométricos en la variedad. Esto nos lleva a estudiar las propiedades geométricas de la variedades y por otro lado, las herramientas algebraicas para describirlas. Primero, estudiaremos las estructuras algebraicas que tienen relaciones como la del complejo (7), sus morfismos y qué tipo de construcciones podemos hacer con ellas.

Esto nos dará elementos suficientes para ahondar en el estudio de la homología de una variedad M . Esta estructura nos permite decir como ciertos objetos de dimensión k están adheridos a otros de dimensión $k+1$. En términos burdos, la dimensión de este objeto cuantifica el número de irregularidades fundamentales de una variedad. El principio de dualidad expuesto anteriormente se puede leer desde esta óptica tratando estas irregularidades como la imposibilidad de resolver cierto tipo de ecuaciones en términos de formas diferenciales. El teorema de de Rham afirma que la cohomología de de Rham rescata cierta información importante de la homología de una variedad.

Una de las propiedades más importantes de la cohomología de de Rham se debe a su invarianza homotópica. Esto quiere decir que es invariante bajo deformaciones continuas de un objeto en otro. Por ejemplo, hemos calculado el primer espacio vectorial de cohomología de de Rham de la variedad $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, veremos que la circunferencia S^1 se puede ver como una deformación continua de dicho espacio, y por ello, tendrá cohomología de de Rham isomorfa.

Para probar el teorema de de Rham, usaremos el enfoque usado en [16]. Para ello, introduciremos lo que entenderemos por una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ contraible de una variedad C^∞ . Veremos que las propiedades combinatorias de dicha cubierta, capturadas en la noción de la cohomología de Čech con respecto a dicha cubierta, están relacionadas con la información provista por la cohomología de de Rham. Esto nos permitirá establecer un isomorfismo que nos dará los elementos necesarios para probar el teorema de de Rham en el caso de variedades trianguladas. Por último, veremos que la integral definida en (3) coincide con este isomorfismo estableciendo que la integral también es un isomorfismo.

Capítulo 1

Formas diferenciales en \mathbb{R}^n

En este capítulo, introduciremos el lenguaje de las formas diferenciales sobre conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n . Primero, revisaremos dos conceptos básicos: el espacio tangente a un punto en \mathbb{R}^n y el corchete de Lie. Posteriormente, introduciremos el concepto de álgebra exterior al espacio tangente al abierto en un punto, estudiando su construcción geométrica en \mathbb{R}^n y extendiéndola a este espacio de manera natural. Esto nos permitirá que, posteriormente, desarrollemos el concepto de forma diferencial y probemos que dicho conjunto es un álgebra graduada. Por otra parte, introduciremos la operación de derivación exterior de una forma diferencial y el pullback de formas diferenciales el cual resulta un símil de un cambio de variables.

A continuación, definiremos la integral de una 1-forma diferencial sobre una curva y estudiaremos sus relaciones con los conceptos de homotopía y exactitud. Estas propiedades nos darán elementos para ahondar en el estudio de la cohomología de de Rham de algunos abiertos de \mathbb{R}^2 . Para finalizar, estudiaremos el teorema de Frobenius que expone condiciones necesarias y suficientes para que dada una distribución de vectores en el espacio tangente a un abierto, exista una subvariedad tangente a dicha distribución. También, incluiremos cómo expresar dicho teorema en términos de formas diferenciales. Para concluir, extenderemos el concepto de forma diferencial a una variedad de clase C^∞ .

1.1. Preliminares

En esta sección, introduciremos dos conceptos fundamentales para nuestro estudio posterior: el espacio tangente a un abierto y el corchete de Lie.

1.1.1. Estructura geométrica de \mathbb{R}^n

Además de la estructura algebraica de \mathbb{R}^n , este conjunto posee una estructura geométrica dada por la existencia de vectores y espacios tangentes a dicho conjunto. Denotaremos por $T_0\mathbb{R}^n$ el conjunto de todas las flechas ancladas en el

origen, lo designaremos como el espacio tangente a \mathbb{R}^n en el origen, y cada uno de sus elementos se llamará vector tangente a \mathbb{R}^n en el origen. Para cualquier otro punto $p \in \mathbb{R}^n$, denotaremos el espacio tangente al punto $p \in \mathbb{R}^n$, es decir, el conjunto de flechas ancladas en p , por $T_p\mathbb{R}^n$.

Dotamos a $T_0\mathbb{R}^n$ de una base dada por el conjunto de vectores tangentes unitarios en las direcciones x_i . A cada uno de ellos, lo denotamos por $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$. Entonces, podemos dotar a todo espacio tangente $T_p\mathbb{R}^n$ de una base dada por el transporte paralelo de cada uno de los vectores tangentes $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$. A estos nuevos vectores básicos los denotaremos por $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$. Así, cada espacio tangente a \mathbb{R}^n tiene estructura de espacio vectorial.

Definición 1.1.1. Definimos *el haz tangente* $T\mathbb{R}^n$ a \mathbb{R}^n como el conjunto de todos los puntos de \mathbb{R}^n y sus vectores tangentes, es decir,

$$\begin{aligned} T\mathbb{R}^n &= \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} T_p\mathbb{R}^n \\ &= \{(p, \xi) : p \in \mathbb{R}^n, \xi \in T_p\mathbb{R}^n\}. \end{aligned}$$

Así, podemos definir una función $\sigma : T\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\sigma(p, \xi) = p$ denominada sección del haz tangente.

El primer rol que juega un vector tangente es representar el vector velocidad de una curva. Dado que una curva suave en \mathbb{R}^n es una aplicación $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^∞ . Entonces, el vector velocidad en un punto $c(t)$ se denota por

$$\dot{c}(t) = \frac{dc}{dt}(t) = \left(\frac{dc_1}{dt}, \dots, \frac{dc_n}{dt}\right)$$

donde $c = (c_1, \dots, c_n)$. Este vector velocidad se representa por el vector tangente $\dot{c}(t)$ en el punto $c(t)$.

El segundo rol que juega un vector tangente es el de derivada direccional. Si $f = f(x_1, \dots, x_n) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, podemos definir la i -ésima derivada parcial de f , i.e., la derivada parcial con respecto a la dirección positiva del eje x_i . Así, para un vector tangente en el punto $p \in \mathbb{R}^n$ de la forma

$$\xi = a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \dots + a_n \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p,$$

podemos definir la derivada parcial de f en la dirección ξ como

$$L_\xi f(p) = a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(p).$$

Esta derivada se denomina la derivada direccional de f en la dirección ξ .

Estas dos ideas nos permiten definir lo que entendremos por un campo vectorial en \mathbb{R}^n .

Definición 1.1.2. Un campo vectorial X en \mathbb{R}^n es una asignación de un vector tangente $X(p) \in \mathbb{R}^n$ a cada punto $p \in \mathbb{R}^n$. Debido a que $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right\}_{i=1}^n$ es una base de $T_p\mathbb{R}^n$, podemos expresar el campo vectorial X de la forma

$$X = f_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \dots + f_n \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

donde f_i son funciones valuadas en \mathbb{R} . Si dichas funciones son de clase C^∞ , decimos que dicho campo vectorial es de clase C^∞ .

Denotaremos al espacio de campos vectoriales de clase $C^\infty(U)$ en U por $\mathfrak{X}(U)$. Otra forma de ver un campo vectorial X es como una aplicación $X : \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n$ de clase C^∞ tal que $X \circ \sigma = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Estas definiciones se pueden generalizar de la misma manera a conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1.1.3 (Diferencial de una transformación). Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ dos conjuntos abiertos, y $f : U \rightarrow V$ una transformación de clase C^∞ . Para cada punto $p \in U$, definimos la *diferencial de f en el punto p* como la transformación lineal

$$f_* : T_p U \rightarrow T_{f(p)} V$$

$$f_*(\xi) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \Big|_p \xi$$

donde f_1, \dots, f_m son las coordenadas de f en V .

Observación 1.1.4. Si $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^p$ son conjuntos abiertos y $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow W$, transformaciones de clase C^∞ , entonces

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : T_p U \rightarrow T_{g \circ f(p)} W.$$

1.1.2. El corchete de Lie

Un campo vectorial sobre $U \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto abierto es una función $X : U \rightarrow TU$ donde $X(p) \in T_p U$ y, por lo tanto, es de la forma

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

donde $a_i \in C^\infty(U)$ y $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^n$ es la base canónica en cada punto $p \in U$.

Sean X es un campo vectorial sobre $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y φ_t es el flujo local¹ de X , entonces podemos suponer que para cada punto $p \in U$, se tiene que

$$\varphi_0(p) = p \quad \text{y} \quad \left. \frac{d\varphi_t}{dt} \right|_{t=0} = X(p).$$

¹La existencia de dicho flujo local se obtiene por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias [2].

Introduciremos la noción de derivación de un campo con respecto a otro campo. Para ello, revisaremos lo que significa derivar una función con respecto a una dirección.

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $p \in U$ y $f \in C^\infty(U)$. Queremos derivar la función f con respecto a una dirección $\xi \in T_p U$. Entonces, tomamos una curva $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow U$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = \xi$. Así, definimos la derivada de f con respecto a la dirección ξ en el punto p por

$$L_\xi f(p) := \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(0)) \frac{d\gamma_i}{dt}(0) = \nabla f(p) \cdot \xi,$$

donde $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$.

Definición 1.1.5. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, X un campo vectorial sobre U y $f \in C^\infty(U)$. Si φ_t es el flujo del campo vectorial X , entonces la derivada de Lie de f con respecto al campo vectorial X en un punto $p \in U$ se define como

$$L_X f(p) := \left. \frac{d}{dt}(f \circ \varphi_t) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi_0(p)) \frac{d\varphi_t^i}{dt}(0) = (\nabla f \cdot X)(p)$$

donde $\varphi_t = (\varphi_t^1, \dots, \varphi_t^n)$.

La definición implica directamente que $L_{fX+gY}Z = fL_XZ + gL_YZ$, para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$ y $f, g \in C^\infty(U)$, dado que el producto punto es una función lineal.

Ejemplo 1.1.6. Decimos que un campo vectorial X en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ es *hamiltoniano* (o tiene una primera integral global), si existe una función $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $L_X H \equiv 0$ en U . A dicha función se le conoce como *primera integral*. Esto significa que las curvas de nivel de H están parametrizadas por los flujos del campo vectorial X .

Considere el campo vectorial dado por la ecuación diferencial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x^3 - 5x \end{bmatrix}$$

Es fácil probar que la función dada por

$$H(x, y) = -\frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2}$$

es una primera integral para este sistema.

Observemos que de la definición de derivada de Lie obtenemos la siguiente interpretación:

$$L_X f(p) = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \varphi_t) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \circ \varphi_t)(p) - (f \circ \varphi_0)(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \circ \varphi_t)(p) - f(p)}{t}.$$

Proposición 1.1.7. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, X un campo vectorial en U y $f, g \in C^\infty(U)$. Entonces,

1. $L_X(f + g) = L_X f + L_X g$, y
2. $L_X(fg) = fL_X g + gL_X f$.

Demostración. Sea $p \in U$.

1. $L_X(f + g)(p) = (\nabla(f + g) \cdot X)(p) = (\nabla f \cdot X)(p) + (\nabla g \cdot X)(p) = L_X f(p) + L_X g(p)$, y
2. $L_X(fg)(p) = (\nabla(fg) \cdot X)(p) = ((f\nabla g + g\nabla f) \cdot X)(p) = fL_X g(p) + gL_X f(p)$.

□

Por la proposición anterior, podemos decir que cada campo vectorial X induce una derivación en $C^\infty(U)$, es decir, una función lineal

$$L_X : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$$

que cumple la identidad de Leibnitz. Dado que $L_X f$ también es una función de clase C^∞ , podemos pensar en la derivada con respecto a otro campo vectorial Y de $L_X f$.

Sean $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ y $Y = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ las expresiones de dichos campos vectoriales en U . Entonces,

$$\begin{aligned} L_X(L_Y f) &= L_X\left(\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^n L_X\left(b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^n b_j L_X\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial f}{\partial x_j} L_X(b_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(b_j \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} + a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

Podemos observar que dicha derivación no corresponde a la de un campo vectorial sobre U , pues contiene derivaciones de orden superior. Para eliminar dichos términos, restaremos $L_Y(L_X f)$ que también contiene dichas derivaciones. Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
L_Y(L_X f) &= L_X\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n L_X\left(a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i L_X\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial f}{\partial x_i} L_X(b_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(a_i \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right).
\end{aligned}$$

Por tanto, cambiando los índices obtenemos que

$$L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Esta derivación sí proviene de un campo vectorial. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.1.8. Sean X, Y campos vectoriales en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto abierto. Definimos el corchete de Lie de X y Y o la derivada de Lie del campo vectorial Y con respecto al campo vectorial X como

$$[X, Y](p) = L_X Y(p) := \sum_{i=1}^n c_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$$

donde $c_i(p) = \sum_{j=1}^n a_j(p) \frac{\partial b_i}{\partial x_j}(p) - b_j(p) \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(p)$.

Esta definición del corchete de Lie se basa en considerar los vectores tangentes a un punto como derivaciones en $C^\infty(U)$. Sin embargo, daremos otra definición que facilita el cálculo de las propiedades de dicho objeto matemático.

Definición 1.1.9. Sean X, Y dos campos vectoriales sobre U descritos como $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ y $Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Definimos la derivada total del campo vectorial Y con respecto al campo vectorial X como el campo vectorial definido como:

$$D_X Y = \sum_{i=1}^n (L_X b_i) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Esta definición nos permite ver la derivada total como la acción que realiza un campo sobre otro componente a componente.

Proposición 1.1.10. Sean X, Y dos campos vectoriales sobre U . Entonces, tenemos que

$$[X, Y] = D_X Y - D_Y X.$$

Demostración. Sean $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ y $Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ las expresiones de dichos campos vectoriales. Tenemos que:

$$\begin{aligned} D_X Y - D_Y X &= \sum_{i=1}^n (L_X b_j - L_Y a_j) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} = [X, Y] \end{aligned}$$

□

Proposición 1.1.11. Sean X, X', Y campos vectoriales sobre U . Entonces, tenemos que:

1. $[X, Y] = -[Y, X]$;
2. $[rX + sX', Y] = r[X, Y] + s[X', Y]$, donde $r, s \in \mathbb{R}$, y
3. $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y + g(Yf)X$, donde $f, g \in C^\infty(U)$.

Demostración. Sean X, Y dos campos vectoriales sobre U descritos como $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $X' = \sum_{i=1}^n a'_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ y $Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

- 1.

$$[X, Y] = D_X Y - D_Y X = -(D_Y X - D_X Y) = -[Y, X]$$

2. Sean $r, s \in \mathbb{R}$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} [rX + sX', Y] &= \sum_{i=1}^n (L_{rX+sX'} b_i - L_Y (ra_i + sa'_i)) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n (rL_X b_i + sL_{X'} b_i + rL_Y a_i + sL_{Y'} a'_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= r[X, Y] + s[X', Y]. \end{aligned}$$

3. Si $f, g \in C^\infty(U)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
[fX, gY] &= \sum_{i=1}^n (L_{fX}(gb_i) - L_{gY}(fa_i)) \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^n (fL_X(gb_i) - gL_Y(fa_i)) \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^n (f(gL_X b_i + b_i L_X g) - g(fL_Y a_i + a_i L_Y f)) \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^n (fg(L_X b_i - L_Y a_i) + f(L_X g)b_i - g(L_Y f)a_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= fg[X, Y] + f(L_X g)Y - g(L_Y f)X.
\end{aligned}$$

□

Observación 1.1.12. Sean X, Y, Z campos vectoriales definidos en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. La igualdad de Jacobi se cumple para el corchete de Lie:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

1.1.3. Subvariedades de \mathbb{R}^n

En esta subsección, construiremos objetos matemáticos que resultan ser la generalización de una superficie en \mathbb{R}^3 a dimensiones superiores.

Definición 1.1.13. Sea M un subconjunto de \mathbb{R}^n . Decimos que M es una subvariedad de clase C^∞ de \mathbb{R}^n de dimensión $1 \leq m \leq n$, si para cada punto $p \in M$, hay una vecindad V en \mathbb{R}^n y una transformación $\varphi : U \rightarrow V \cap M$ definida en un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ tal que

1. φ es de clase C^∞ ;
2. φ es un homeomorfismo, es decir, φ es una transformación continua invertible con inversa continua, y
3. φ_* es inyectiva.

Denominamos a φ una parametrización o un sistema local de coordenadas de M . Las vecindades de la forma $V \cap M$ en M son llamadas vecindades coordenadas.

Ejemplo 1.1.14. El primer ejemplo de subvariedad de \mathbb{R}^n es \mathbb{R}^n mismo. Cualquier subespacio vectorial M de \mathbb{R}^n es una subvariedad de \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1.1.15. La esfera de dimensión n es el conjunto dado como

$$S^n := \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

Se puede probar que las funciones

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

parametrizan a dicha esfera en las regiones $U_i = \{x = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$ y el término \hat{x}_i significa que dicho elemento no aparece en la n -ésima en cuestión.

1.2. Formas exteriores en \mathbb{R}^n

En esta sección, construiremos el álgebra de formas exteriores en \mathbb{R}^n . Primero, definiremos el espacio de las formas alternantes en \mathbb{R}^n . En este espacio, introduciremos una operación llamada producto cuña la cual dotará a nuestro espacio de una estructura de álgebra. Esta operación tiene una interpretación geométrica muy particular. Por otro lado, construiremos formalmente el álgebra de formas exteriores en \mathbb{R}^n denominando a su producto formal como producto exterior. Posteriormente, estudiaremos cómo extender estas construcciones a un espacio vectorial cualquiera, y probaremos que dichas estructuras son isomorfas. Esta generalización nos permitirá trabajar en la próxima sección con los espacios tangentes a \mathbb{R}^n .

1.2.1. Formas alternantes en \mathbb{R}^n

Definición 1.2.1. Un *álgebra* Λ sobre \mathbb{R} es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} con un producto asociativo con estructura de anillo y tal que para toda $a \in \mathbb{R}$ y $\lambda, \mu \in \Lambda$ se tiene que

$$a(\lambda\mu) = (a\lambda)\mu = \lambda(a\mu).$$

Definición 1.2.2. Decimos que un álgebra Λ está *graduada* si existe una colección de subespacios vectoriales Λ_k , $k \in \mathbb{N}$, de modo que

1. $\Lambda = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Lambda_k$, y
2. si $x \in \Lambda_k$ y $y \in \Lambda_l$, entonces $xy \in \Lambda_{k+l}$; es decir,

$$\Lambda_k \cdot \Lambda_l \subseteq \Lambda_{k+l}.$$

Definición 1.2.3. Una *forma alternante de grado k* en \mathbb{R}^n , o *k -forma alternante*, es una función sobre k vectores

$$\omega : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R},$$

la cual es k -lineal y antisimétrica, es decir,

$$\omega(\lambda_1 \xi_1' + \lambda_2 \xi_1'', \xi_2, \dots, \xi_k) = \lambda_1 \omega(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_k) + \lambda_2 \omega(\xi_1'', \xi_2, \dots, \xi_k)$$

$$\omega(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma)\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \text{ con } \sigma \in S_k$$

donde $\xi'_1, \xi''_1, \xi_2, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$ y S_k denota al grupo de permutaciones de k letras.

Ejemplo 1.2.4. Si un campo de fuerza uniforme F está dado en el espacio tridimensional orientado \mathbb{R}^3 con su estructura euclidiana², el trabajo ω realizado en un desplazamiento ξ se calcula por la 1-forma alternante definida como

$$\omega(\xi) = (F, \xi),$$

donde (\cdot, \cdot) denota al producto interior en \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 1.2.5. Sea $S(\xi_1, \xi_2)$ el área orientada del paralelogramo construido por los vectores ξ_1 y ξ_2 en el espacio euclidiano orientado \mathbb{R}^2 , es decir,

$$S(\xi_1, \xi_2) = \det \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix}, \text{ donde } \xi_i = \xi_{i1}e_1 + \xi_{i2}e_2$$

con $\beta = \{e_1, e_2\}$ una base ordenada en \mathbb{R}^2 . S es una 2-forma alternante en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 1.2.6. Sea v un campo de velocidad uniforme para un fluido en el espacio tridimensional orientado. El flujo de un fluido sobre el área de un paralelogramo formado por los vectores ξ_1 y ξ_2 está definido por el triple producto escalar. Este producto es una 2-forma alternante dada por:

$$\omega(\xi_1, \xi_2) = (v, \xi_1, \xi_2) = \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \end{bmatrix},$$

donde $v = (v_1, v_2, v_3)$, $\xi_1 = (\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13})$ y $\xi_2 = (\xi_{21}, \xi_{22}, \xi_{23})$.

Ejemplo 1.2.7. El volumen orientado del paralelepípedo con vértices ξ_1, \dots, ξ_n en el espacio euclidiano orientado \mathbb{R}^n es una n -forma alternante.

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det \begin{bmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \dots & \xi_{nn} \end{bmatrix},$$

donde $\xi_i = \xi_{i1}e_1 + \dots + \xi_{in}e_n$ y $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ forma una base para \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1.2.8. Sea \mathbb{R}^k el k -plano orientado en el espacio euclidiano \mathbb{R}^n . Entonces, el volumen k -dimensional orientado de la proyección del paralelepípedo con vértices $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R}^k es una k -forma alternante en \mathbb{R}^n .

El conjunto de las k -formas alternantes en \mathbb{R}^n , que denotaremos $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma

$$(\omega_1 + \omega_2)(\xi) = \omega_1(\xi) + \omega_2(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) \text{ con } \xi_j \in \mathbb{R}^n,$$

²En general, por el espacio euclidiano \mathbb{R}^n nos referiremos al espacio vectorial \mathbb{R}^n con el producto interior usual y todas las propiedades métricas y topológicas que se heredan de él.

y la multiplicación por escalares

$$(\lambda\omega)(\xi) = \lambda\omega(\xi).$$

Así, el espacio de las formas alternantes en \mathbb{R}^n está definido como

$$\Lambda^*(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k=1}^n \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \oplus \dots \oplus \Lambda^n(\mathbb{R}^n).$$

Por otro lado, observemos que las 1-formas alternantes en \mathbb{R}^n corresponden a las transformaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} , es decir, dicho espacio coincide con el espacio dual a \mathbb{R}^n , denotado $(\mathbb{R}^n)^*$. Construiremos una base para dicho espacio: consideremos $\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$ una base en \mathbb{R}^n . Podemos definir las siguientes funciones

$$\begin{aligned} x_i &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ v = \sum_{i=1}^n a_i x_i &\mapsto a_i \end{aligned}$$

que denominamos proyecciones o formas básicas. Es fácil probar que dichas funciones son linealmente independientes. Así, el espacio dual a \mathbb{R}^n es un espacio vectorial de dimensión n .

1.2.2. Producto cuña de formas alternantes

En esta subsección, desarrollaremos la idea de lo que significa multiplicar una k -forma alternante con una l -forma alternante en \mathbb{R}^n . Para esto, empezaremos introduciendo el producto cuña de dos 1-formas alternantes en \mathbb{R}^n .

Definición 1.2.9 (Producto cuña de 1-formas alternantes). Dado un vector $\xi \in \mathbb{R}^n$ y dos 1-formas alternantes ω_1 y ω_2 , podemos asociar una transformación de \mathbb{R}^n en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ asignando a cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ el vector $\omega(\xi)$ con componentes $\omega_1(\xi)$ y $\omega_2(\xi)$ en el plano de coordenadas ω_1 y ω_2 . El valor del producto cuña $\omega_1 \wedge \omega_2$ en el par de vectores $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$ es el área de la imagen del paralelogramo orientado con lados $\omega(\xi_1)$ y $\omega(\xi_2)$ en el plano (ω_1, ω_2) :

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \det \begin{bmatrix} \omega_1(\xi_1) & \omega_2(\xi_1) \\ \omega_1(\xi_2) & \omega_2(\xi_2) \end{bmatrix}.$$

Dicha definición es correcta por la propiedades del determinante. Por otro lado, el producto cuña de las formas básicas son las 2-formas alternantes $x_i \wedge x_j$. La antisimetría implica que $x_j \wedge x_i = -x_i \wedge x_j$ y, por tanto que $x_i \wedge x_i = 0$. El significado geométrico de esta forma es el siguiente: su valor en un par de vectores ξ_1, ξ_2 es igual al área orientada de la imagen del paralelogramo (ξ_1, ξ_2) en el plano coordenado x_i, x_j bajo la proyección paralela en las coordenadas restantes. Además, se puede probar que dichas 2-formas alternantes en \mathbb{R}^n son una base para $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 1.2.10. El conjunto $\{x_i \wedge x_j : i < j\}$ de 2-formas alternantes en \mathbb{R}^n es una base para $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$. Esto nos dice que $\dim(\Lambda^2(\mathbb{R}^n)) = \binom{n}{2}$

Demostración. Sean $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de \mathbb{R}^n y $\{x_1, \dots, x_n\}$ su respectiva base dual. Veamos que dicho conjunto es linealmente independiente. Para ello, consideremos la siguiente combinación lineal con coeficientes en \mathbb{R} igualada a cero.

$$\sum_{i>j} a_{i,j} x_i \wedge x_j \equiv 0.$$

Evaluando en (e_i, e_j) , para cada $i > j$, tenemos que

$$\sum_{i>j} a_{i,j} x_i \wedge x_j(e_i, e_j) = a_{i,j} = 0.$$

Por ende, dicho conjunto es linealmente independiente.

Ahora, probemos que dicho conjunto genera a las 2-formas alternantes de \mathbb{R}^n . Consideremos ω una 2-forma alternantes, definamos $a_{i,j} = \omega(e_i, e_j)$. Así, observamos que ω y $\sum_{i>j} a_{i,j} x_i \wedge x_j$ toman los mismos valores sobre la base. Por ende, dichas funciones generan a este espacio. \square

Ahora, introduciremos una generalización natural del producto cuña anterior.

Definición 1.2.11 (Producto cuña de k 1-formas alternantes en \mathbb{R}^n). Sean $\omega_1, \dots, \omega_k$ 1-formas alternantes en \mathbb{R}^n . Definimos el valor del producto cuña $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ en los vectores ξ_1, \dots, ξ_k como

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(\xi_1, \dots, \xi_k) := \det \begin{bmatrix} \omega_1(\xi_1) & \dots & \omega_k(\xi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1(\xi_k) & \dots & \omega_k(\xi_k) \end{bmatrix}$$

En otras palabras, el valor del producto cuña de k 1-formas alternantes en el paralelepípedo ξ_1, \dots, ξ_k es igual al volumen orientado de la imagen del paralelepípedo en el espacio euclidiano orientado \mathbb{R}^k bajo la transformación $\xi \mapsto (\omega_1(\xi), \dots, \omega_k(\xi))$. El hecho de que $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ sea una k -forma alternante se deduce de las propiedades del determinante.

Consideremos un sistema coordenado en \mathbb{R}^n dado por las formas básicas x_1, \dots, x_n . El producto exterior de las k -formas básicas

$$x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$$

es el volumen orientado de la imagen del k -paralelepípedo en el k -hiperplano generado por $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ bajo la proyección paralela en las coordenadas restantes.

Llamaremos a los elementos de la forma $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}$ monomios de grado k . De manera análoga a la proposición (1.2.10), dicho conjunto de k -formas alternantes en \mathbb{R}^n es una base para $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ y por ende, este espacio tiene dimensión $\binom{n}{k}$.

Ahora, definiremos *el producto cuña* de una k -forma alternante y una l -forma alternante, ambas definidas en \mathbb{R}^n .

Definición 1.2.12. Sean $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ y $\eta \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$. Definimos la $(k+l)$ -forma alternante en \mathbb{R}^n , $\omega \wedge \eta$, evaluada en los vectores $\xi_1, \dots, \xi_{k+l} \in \mathbb{R}^n$ como

$$(\omega \wedge \eta)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) \omega(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) \eta(\xi_{\sigma(k+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+l)}).$$

Dicho producto generaliza al producto de dos 1-formas alternantes en \mathbb{R}^n , como podemos ver a continuación. Recordemos que las permutaciones de dos elementos están descritas por los ciclos $(1), (1\ 2)$. Sean $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$ y $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$, tenemos que

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{\sigma \in S_2} \text{sgn}(\sigma) \omega_1(\xi_{\sigma(1)}) \omega_2(\xi_{\sigma(2)}) \\ &= \omega_1(\xi_1) \omega_2(\xi_2) - \omega_1(\xi_2) \omega_2(\xi_1). \end{aligned}$$

Para probar el hecho anterior en general, denotemos al producto cuña de la definición (1.2.11) de k 1-formas alternantes en \mathbb{R}^n por $\dot{\wedge}$. Así, toda k -forma alternante ω^k en \mathbb{R}^n se puede escribir como $\omega^k = \omega_1 \dot{\wedge} \dots \dot{\wedge} \omega_k$ donde $\omega_i \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$. Así, si $\omega^l \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$ y tiene descomposición $\omega^l = \omega_{k+1} \dot{\wedge} \dots \dot{\wedge} \omega_{k+l}$. De esta manera, dados $\xi_1, \dots, \xi_{k+l} \in \mathbb{R}^n$, resulta que

$$\begin{aligned} (\omega^k \wedge \omega^l)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) (\omega_1 \dot{\wedge} \dots \dot{\wedge} \omega_k)(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) \\ &\quad (\omega_{k+1} \dot{\wedge} \dots \dot{\wedge} \omega_{k+l})(\xi_{\sigma(k+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \det_{1 \leq i \leq k} [\omega_i(\xi_{\sigma(i)})] \det_{k+1 \leq i \leq k+l} [\omega_i(\xi_{\sigma(i)})] \\ &= \det_{1 \leq i \leq k+l} [\omega_i(\xi_i)] \\ &= \omega_1 \dot{\wedge} \dots \dot{\wedge} \omega_{k+l}(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}). \end{aligned}$$

La penúltima igualdad se tiene por el teorema de desarrollo por menores de un determinante. Esto nos prueba que el producto exterior de dos monomios es un monomio, es decir, se trata del mismo producto.

Proposición 1.2.13. El producto cuña en $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$ tiene las siguientes propiedades:

1. $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$ con $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, $\eta \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$ y $\theta \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$;
2. $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}(\eta \wedge \omega)$, donde $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ y $\eta \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$, y
3. $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$, para $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ y $\eta \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$.

Demostración.

Para probar la asociatividad de este producto (1), basta ver que si el producto cuña es asociativo en monomios, entonces también es asociativo en sumas de monomios. Dado que el producto cuña entre 1-formas alternantes en \mathbb{R}^n es asociativo, obtenemos el resultado.

Ahora, mostremos que la propiedad (2) se cumple. Sean $\xi_1, \dots, \xi_{k+l} \in \mathbb{R}^n$. Sea σ' la permutación de $k+l$ elementos que manda los primeros k elementos en los últimos k elementos sin alterar su orden. Usando el hecho de que $\sigma' S_{k+l} = S_{k+l}$, esta permutación nos permite obtener que

$$\begin{aligned}
& (\omega \wedge \eta)(\xi_1, \dots, \xi_k) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) \eta(\xi_{\sigma(k+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+l)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma' \sigma) \eta(\xi_{\sigma' \sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma' \sigma(l)}) \omega(\xi_{\sigma' \sigma(l+1)}, \dots, \xi_{\sigma' \sigma(k+l)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (-1)^{kl} \operatorname{sgn}(\sigma) \eta(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(l)}) \omega(\xi_{\sigma(l+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+l)}) \\
&= (-1)^{kl} (\eta \wedge \omega)
\end{aligned}$$

Para finalizar, veamos que el producto se distribuye en la suma. Consideremos los siguientes vectores $\xi_1, \dots, \xi_{k+l} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
& ((\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) (\omega_1 + \omega_2)(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) \eta(\xi_{\sigma(k+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+l)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_1(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) \eta(\xi_{\sigma(k+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+l)}) \\
&\quad + \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_2(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) \eta(\xi_{\sigma(k+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+l)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_1(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) \eta(\xi_{\sigma(k+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+l)}) \\
&\quad + \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_2(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) \eta(\xi_{\sigma(k+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+l)}) \\
&= (\omega_1 \wedge \eta)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) + (\omega_2 \wedge \eta)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l})
\end{aligned}$$

□

El resultado anterior nos afirma que el espacio vectorial $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra graduada sobre \mathbb{R} .

Observación 1.2.14. La propiedad (2) de la proposición (1.2.13) implica que $\omega^k \wedge \omega^k = 0$ siempre y cuando k sea un número impar.

1.2.3. Formas exteriores en \mathbb{R}^n

Denotemos por Λ_n^* al álgebra graduada generada por los símbolos x_1, \dots, x_n con producto denotado por \wedge sobre \mathbb{R} con unidad 1 que satisface la ecuación

$$x_i \wedge x_j = -x_j \wedge x_i,$$

para cualesquiera i, j . Decimos que Λ_n^* es *el álgebra exterior generada por* x_1, \dots, x_n . Si fijamos el grado de x_i como 1, cada monomio en Λ_n^* tiene un grado definido. Denotemos por Λ_n^k el conjunto de combinaciones lineales de monomios de grado k . Así, tenemos que

$$\Lambda_n^* = \bigoplus_{k=1}^n \Lambda_n^k = \Lambda_n^1 \oplus \dots \oplus \Lambda_n^n.$$

De lo anterior, podemos tomar como base de Λ_n^k a

$$x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$$

y, por lo tanto, $\dim \Lambda_n^k = \binom{n}{k}$. También, tenemos que si $k > n$, entonces $\dim \Lambda_n^k = 0$ y $\dim \Lambda_n^* = 2^n$. Así, una forma exterior se puede ver como

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}.$$

Para simplificar la notación, podemos escribir la k -forma exterior anterior como:

$$\omega = \sum_I a_I x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}.$$

De esto, podemos calcular *el producto exterior* de $\omega \wedge \eta \in \Lambda_n^{k+l}$ de las formas exteriores $\omega \in \Lambda_n^k$ y $\eta \in \Lambda_n^l$ de la siguiente manera:

$$\omega \wedge \eta = \sum_{IJ} a_I b_J x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k} \wedge x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{j_l}.$$

donde

$$\omega = \sum_I a_I x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k} \text{ y } \eta = \sum_J b_J x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{j_l}.$$

1.2.4. Álgebra exterior de un espacio vectorial

En las secciones anteriores, nos hemos dedicado a construir tanto el espacio de formas alternantes como aquel de formas exteriores de \mathbb{R}^n . Ahora, generalizaremos dichas construcciones a cualquier espacio vectorial arbitrario V sobre \mathbb{R} y después, probaremos que dichas estructuras son isomorfas como álgebras. Este hecho nos permitirá referirnos a estas estructuras como el álgebra exterior del espacio vectorial V .

Definición 1.2.15. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Un álgebra graduada con producto \wedge y unidad 1 generada por los elementos de V sobre \mathbb{R} que satisface la relación

$$X \wedge Y = -Y \wedge X, \quad \forall X, Y \in V$$

se denota por Λ^*V y es llamada *el álgebra exterior de V* o *el álgebra de Grassmann*.

Así, si $\dim(V) = n$, tenemos la descomposición en suma directa dada como

$$\Lambda^*V = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k V,$$

donde $\Lambda^k V$ es el subespacio de Λ^*V que consiste en los elementos de grado k y $\Lambda^1 V \cong V$. Sea e_1, \dots, e_n una base para V . Entonces, los elementos de la forma

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

forman una base para $\Lambda^k V$ y por tanto, $\dim(\Lambda^k V) = \binom{n}{k}$. De manera análoga, definimos el álgebra exterior Λ^*V^* de V^* .

Por otro lado, definiremos lo que significa una k -forma alternante en V .

Definición 1.2.16. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Una k -forma alternante en V es una función multilineal

$$\omega : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}$$

que es alternante, es decir

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \omega(X_1, \dots, X_k), \quad X_i \in V$$

donde $\sigma \in S_k$.

El conjunto de todas las formas alternantes de grado k en V se denota por $\mathcal{A}^k(V)$. Dicho conjunto forma un espacio vectorial con las operaciones de suma de funciones y multiplicación escalar de una función por un número real. Así, también obtenemos un espacio vectorial de la forma

$$\mathcal{A}^*(V) = \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{A}^k(V),$$

donde definimos $\mathcal{A}^0(V) = \mathbb{R}$. Además, la condición de alternancia implica que $\mathcal{A}^k(V) = 0$, para toda $k > n$.

Por último, definiremos una aplicación lineal que preserve el grado

$$\iota : \Lambda^*V^* \rightarrow \mathcal{A}^*(V).$$

Para ello, definiremos una aplicación $\iota_k : \Lambda^k V^* \rightarrow \mathcal{A}^k(V)$, para cada $k < n$. Sea e_1, \dots, e_n una base de V y $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ su base dual, es decir, satisface $\alpha_i(e_j) =$

δ_{ij} . Para un elemento con descomposición $\omega = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \in \Lambda^k V^*$, $\alpha_i \in V^*$, le asignamos

$$\iota_k(\omega)(X_1, \dots, X_k) = \det[\alpha_i(X_j)], \quad X_j \in V$$

y extendemos dicha definición de forma lineal para cualquier elemento. Podemos concluir que la aplicación ι_k está bien definida por las propiedades alternantes del determinante.

Teorema 1.2.17. La aplicación lineal $\iota : \Lambda^k V^* \rightarrow \mathcal{A}^k(V)$ es un isomorfismo, es decir, mediante ι podemos identificar el álgebra exterior $\Lambda^k V^*$ del espacio dual V^* con el espacio vectorial $\mathcal{A}(V)$ de las formas alternantes en V . Esto nos permite inducir un producto en $\mathcal{A}^k(V)$ dado como sigue. Si $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ y $\eta \in \Lambda^l(V^*)$, podemos considerar el producto $\omega \wedge \eta$ en $\Lambda^{k+l}(V)$, via ι , obteniendo que

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta(X_1, \dots, X_{k+l}) = \\ \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \eta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}) \end{aligned}$$

donde $X_i \in V$.

Demostración. Primero, probaremos que ι_k es un isomorfismo. Sea e_1, \dots, e_n una base de V y $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ su base dual, es decir, satisface $\alpha_i(e_j) = \delta_{ij}$. Así, podemos tomar a los elementos de la forma

$$\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

forman una base para $\Lambda^k V^*$. Veamos que las imágenes de los elementos de la base bajo ι_k son linealmente independientes como elementos en $\mathcal{A}^k(V)$. Consideremos una combinación lineal de estas imágenes igualada a cero, es decir,

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k} \iota_k(\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k}) = 0.$$

Evaluando dicha expresión en un elemento de la forma $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \in V^k$ con $e_{j_1} < \dots < e_{j_k}$, obtenemos

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k} \det(\alpha_r(e_s)) = a_{j_1, \dots, j_k} = 0.$$

Por tanto, dichos elementos son linealmente independientes. Ahora, sea $\omega \in \mathcal{A}^k(V)$ un elemento arbitrario. Definamos $\omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = a_{i_1 \dots i_k}$, para cada colección $e_{i_1} < \dots < e_{i_k}$, entonces el elemento

$$\eta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k} \iota_k(\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k})(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \in \Lambda^k V^*.$$

Además, $\iota_k(\eta) = \omega$. Por tanto, ι_k es una función suprayectiva y por tanto, isomorfismo.

Ahora, probaremos la segunda parte del problema. Debido a la linealidad de ι_k , basta probar la afirmación para elementos de la forma

$$\omega = \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k}, \quad \eta = \alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_l}.$$

Además, podemos asumir que los elementos de i_1, \dots, i_k y j_1, \dots, j_l son todos distintos, pues de lo contrario tendríamos que $\omega \wedge \eta = 0$. Esto se debe a que al repetir un generador α_i automáticamente la forma valdría cero por la observación (1.2.14). Ahora, sea $\tau \in S_{k+l}$ la permutación que ordena dichas $(k+l)$ -adas, digamos que $\tau(\alpha_r) = \alpha_{m_r}$. Así,

$$\omega \wedge \eta = \text{sgn}(\tau) \alpha_{m_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{m_{k+l}}.$$

Por tanto,

$$\iota_{k+l}(\omega \wedge \eta)(e_{m_1}, \dots, e_{m_{k+l}}) = \text{sgn}(\tau).$$

Por otro lado, observamos que, si $\sigma \in S_k$, entonces

$$\iota_k(\omega)(e_{\sigma(m_1)}, \dots, e_{\sigma(m_k)}) \neq 0 \Leftrightarrow \sigma(m_p) = i_p, \quad 1 \leq p \leq k.$$

De manera análoga, si $\sigma' \in S_l$, tenemos que

$$\iota_l(\eta)(e_{\sigma'(m_{k+1})}, \dots, e_{\sigma'(m_{k+l})}) \neq 0 \Leftrightarrow \sigma'(m_q) = j_q, \quad 1 \leq q \leq l.$$

Además dichos valores son iguales a 1. Por tanto, dada $\nu \in S_{k+l}$, tenemos que

$$\iota_k(\omega(e_{m_{\nu(1)}}, \dots, e_{m_{\nu(k+1)}})) \iota_l(\omega(e_{m_{\nu(k+1)}}, \dots, e_{m_{\nu(k+l)}})) \neq 0 \Leftrightarrow \nu = \tau^{-1}.$$

Finalmente, obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) \iota_k(\omega(e_{m_{\sigma(1)}}, \dots, e_{m_{\sigma(k)}})) \iota_l(\omega(e_{m_{\sigma(k+1)}}, \dots, e_{m_{\sigma(k+l)}})) \\ = \text{sgn}(\tau^{-1}) = \text{sgn}(\tau). \end{aligned}$$

□

Observamos que $\iota : \Lambda^* V^* \cong \mathcal{A}^*(V)$ no es el único isomorfismo, también podemos considerar $\iota' = \frac{1}{k!} \iota$. De manera abstracta, esto no representa una diferencia crucial. Sin embargo, si consideramos la construcción en \mathbb{R}^n con su estructura euclidiana, la diferencia entre ambos productos es que el segundo equivale a considerar el volumen orientado del simplejo de dimensión k generado por el origen y los vectores resultantes de la transformaciones $(X_1, \dots, X_k) \mapsto (\omega_j(X_1), \dots, \omega_j(X_k))$.

1.3. Formas diferenciales en \mathbb{R}^n

En esta sección, introduciremos el lenguaje de formas diferenciales en conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n . Esto tiene dos objetivos, primero este lenguaje nos permite definir objetos geométricos globales en el abierto y además, nos permite facilitar el lenguaje del cálculo vectorial tradicional.

1.3.1. Formas diferenciales en \mathbb{R}^n

Para definir una k -forma diferencial en un abierto U de \mathbb{R}^n , primero deberemos construir nuestras formas básicas. Consideremos $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right\}$ una base para $T_p U$. Dado que $T_p U$ es un espacio vectorial, escojamos las funciones lineales duales $(dx_1)_p, \dots, (dx_n)_p$ en el espacio dual a $T_p U$, denotado $T_p^* U$ y denominado *el espacio cotangente*, de modo que

$$(dx_i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta_{ij},$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Estas funciones nos proveen de una base para construir $\Lambda(T_p^* U)$, es decir el álgebra exterior al espacio cotangente $T_p^* U$ en cada punto.

Definición 1.3.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Una k -forma diferencial de clase C^∞ en U es una función

$$\omega : U \rightarrow \bigcup_{p \in U} \Lambda^k(T_p^* U),$$

que a cada punto $p \in U$ le asocia un elemento $\omega_p \in \Lambda^k(T_p^* U)$ representable como

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k}(p) (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_p, \quad i_j \in \{1, \dots, n\}$$

y cuyos coeficientes a_i son funciones de clase C^∞ en U . Denotamos al conjunto de las k -formas diferenciales sobre U por $\mathcal{A}^k(U)$. Por conveniencia, diremos que las funciones de clase C^∞ en U corresponden a las 0-formas diferenciales en U . Así, el espacio de las formas diferenciales en U se define por

$$\mathcal{A}^*(U) = \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{A}^k(U).$$

Por convenciencia notacional, denotaremos por I a la k -tupla (i_1, \dots, i_k) donde $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Así, podremos denotar a una k -forma diferencial ω por

$$\omega = \sum_I a_I dx_I.$$

Ejemplo 1.3.2. Llamamos a la n -forma diferencial en \mathbb{R}^n , $\omega^n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ el elemento de volumen de \mathbb{R}^n .

Introduciremos operaciones en $\mathcal{A}^*(U)$ utilizando la estructura ya construida en $\Lambda^*(T_p^* U)$. Primero, considere $\omega, \eta \in \mathcal{A}^k(U)$ dadas por

$$\omega = \sum_I a_I dx_I, \quad \eta = \sum_I b_I dx_I,$$

definimos la suma de dichas k -formas diferenciales por

$$\omega + \eta = \sum_I (a_I + b_I) dx_I.$$

Ahora, definiremos *el producto exterior* de una $\omega \in \mathcal{A}^k(U)$ y una $\eta \in \mathcal{A}^l(U)$ dadas por

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_I a_I dx_I, \quad I = (i_1, \dots, i_k) \\ \eta &= \sum_J b_J dx_J, \quad J = (j_1, \dots, j_l)\end{aligned}$$

como la $(k+l)$ -forma diferencial en U dada por

$$\omega \wedge \eta = \sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

Proposición 1.3.3. Sean $\omega \in \mathcal{A}^k(U)$, $\eta \in \mathcal{A}^l(U)$ y $\theta \in \mathcal{A}^p(U)$, tenemos que

1. $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$,
2. $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}(\eta \wedge \omega)$, y
3. $\omega \wedge (\eta + \theta) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \theta$, si $p = l$.

La proposición (1.3.3) es consecuencia de las propiedades algebraicas de $\Lambda^*(T_p^*U)$.

Ejemplo 1.3.4. Considere un campo vectorial X en \mathbb{R}^3 . Podemos observar que dicho campo induce una 1-forma diferencial $\omega_X^1 = (X, \xi)$ (el producto punto) y una 2-forma diferencial $\omega_X^2(\xi_1, \xi_2) = [X, \xi_1, \xi_2]$ (el triple producto escalar).

1.3.2. Pullback de formas diferenciales

Una de las propiedades más interesantes de las formas diferenciales se obtiene estudiando su comportamiento bajo transformaciones de clase C^∞ , pues se tienen propiedades análogas a un cambio de variables.

Definición 1.3.5 (Pullback de formas diferenciales). Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos, y $f : U \rightarrow V$ una transformación de clase C^∞ . Dada una k -forma diferencial ω en V , definimos *el pullback de ω bajo f* como la k -forma diferencial en U definida por

$$(f^*\omega)_p(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega_{f(p)}(f_*(\xi_1), \dots, f_*(\xi_k)),$$

donde $p \in U$, $\xi_1, \dots, \xi_k \in T_pU$ y $f_* : T_pU \rightarrow T_{f(p)}V$ es la diferencial de la función f . Esta definición implica que el pullback de una 0-forma diferencial $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ sea

$$f^*(g) = g \circ f.$$

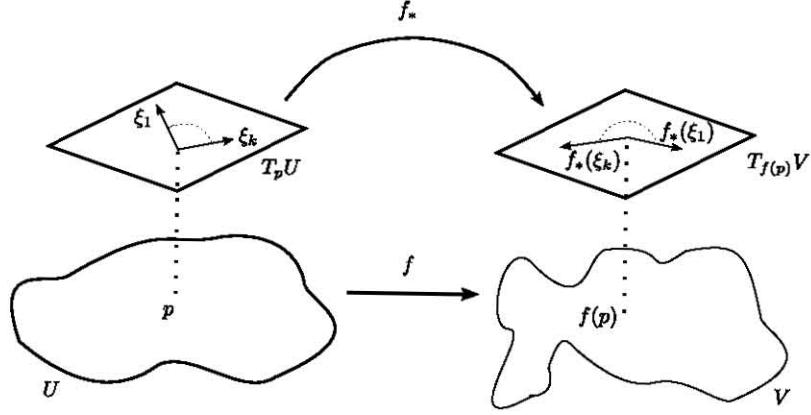


Figura 1.1: La transformación inducida por el pullback en los espacios tangentes.

Proposición 1.3.6. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ una transformación de clase C^∞ entre conjuntos abiertos. Dadas $\omega, \eta \in \mathcal{A}^k(V)$ y $g \in \mathcal{A}^0(V)$, tenemos que

1. $f^*(\omega + \eta) = f^*\omega + f^*\eta$,
2. $f^*(g\omega) = f^*(g)f^*(\omega)$, y
3. Si $\omega_1, \dots, \omega_k \in \mathcal{A}^1(V)$, entonces $f^*(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k) = f^*(\omega_1) \wedge \dots \wedge f^*(\omega_k)$.

Demostración. Sean $p \in U$ y $\xi_1, \dots, \xi_k \in T_p U$.

1.

$$\begin{aligned} f^*(\omega + \eta)_p(\xi_1, \dots, \xi_k) &= (\omega + \eta)_{f(p)}(f_*(\xi_1), \dots, f_*(\xi_k)) \\ &= \omega_{f(p)}(f_*(\xi_1), \dots, f_*(\xi_k)) + \eta_{f(p)}(f_*(\xi_1), \dots, f_*(\xi_k)) \\ &= f^*\omega_p(\xi_1, \dots, \xi_k) + f^*\eta_p(\xi_1, \dots, \xi_k) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f^*(g\omega)_p(\xi_1, \dots, \xi_k) &= (g\omega)_{f(p)}(f_*(\xi_1), \dots, f_*(\xi_k)) \\ &= g(f(p))\omega_{f(p)}(f_*(\xi_1), \dots, f_*(\xi_k)) \\ &= f^*(g)_p f^*(\omega)_p(\xi_1, \dots, \xi_k) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f^*(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)_p(\xi_1, \dots, \xi_k) &= (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)_{f(p)}(f_*(\xi_1), \dots, f_*(\xi_k)) \\ &= \det [\omega_i(f(p))(f_*(\xi_j))] \\ &= \det [f^*(\omega_i)_p(\xi_j)] \\ &= f^*(\omega_1)_p \wedge \dots \wedge f^*(\omega_k)_p(\xi_1, \dots, \xi_k) \end{aligned}$$

□

Proposición 1.3.7. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ una transformación de clase C^∞ entre conjuntos abiertos. Dadas $\omega \in \mathcal{A}^k(V)$ y $\eta \in \mathcal{A}^l(V)$, tenemos que

1. $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$, y
2. $(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega)$, donde $g : W \subset \mathbb{R}^p \rightarrow U$ es una transformación C^∞ entre conjuntos abiertos.

Demostración. 1. Sean $(y_1, \dots, y_m) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ coordenadas de V y (x_1, \dots, x_n) aquellas respectivas a U . As, expresando en coordenadas locales $\omega = \sum_I a_I dy_I \in \mathcal{A}^k(V)$ y $\eta = \sum_J b_J dy_J \in \mathcal{A}^l(V)$, se tiene

$$\begin{aligned}
 f^*(\omega \wedge \eta) &= f^* \left(\sum_{IJ} a_I b_J dy_I \wedge dy_J \right) \\
 &= \sum_{IJ} f^*(a_I) f^*(b_J) df_I \wedge df_J \\
 &= \left(\sum_I f^*(a_I) df_I \right) \wedge \left(\sum_J f^*(b_J) df_J \right) \\
 &= f^*(\omega) \wedge f^*(\eta).
 \end{aligned}$$

2. Usando lo anterior, observamos que

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)^*(\omega) &= \sum_I a_I ((f \circ g)_1, \dots, (f \circ g)_m) d(f \circ g)_I \\
 &= \sum_I a_I (f_1(g_1, \dots, g_n), \dots, f_m(g_1, \dots, g_n)) df_I(dg_1, \dots, dg_n) \\
 &= \sum_I g^*(a_I(f_1, \dots, f_m)) g^*(df_I) \\
 &= g^*(f^*(\omega))
 \end{aligned}$$

□

Por último, cabe mencionar que las proposiciones (1.3.6) y (1.3.7) implican que una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ de clase C^∞ entre conjuntos abiertos induce un homomorfismo de álgebras

$$f^* : \mathcal{A}^*(U) \rightarrow \mathcal{A}^*(V).$$

1.3.3. Derivada exterior de una forma diferencial

Considere una 0-forma diferencial f en U un conjunto abierto de \mathbb{R}^n . Definimos, la *derivada exterior de f* o la *diferencial de f* como la 1-forma exterior definida en U dada por

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.3.8 (Derivada exterior de formas diferenciales). Dada una k -forma diferencial $\omega = \sum_I a_I dx_I$ en U , definimos la *derivada exterior de ω* , denotada $d\omega$, como la $(k+1)$ -forma diferencial en U definida por

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

Proposición 1.3.9. Sea U un conjunto abierto de \mathbb{R}^n .

1. Si $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{A}^k(U)$, entonces $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.
2. Si $\omega \in \mathcal{A}^k(U)$ y $\eta \in \mathcal{A}^l(U)$, tenemos que $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{kl} d\eta \wedge \omega$.
3. Para toda $\omega \in \mathcal{A}^k(U)$, $d(d\omega) = 0$.
4. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos y $f : U \rightarrow V$ es una transformación de clase C^∞ . Si $\omega \in \mathcal{A}^k(U)$, tenemos que $d(f_*\omega) = f_*(d\omega)$.

Demostración. 1. Se tiene por la linealidad de las derivadas parciales.

2. Sean $\omega = \sum_I a_I dx_I \in \mathcal{A}^k(U)$ y $\eta = \sum_J b_J dx_J \in \mathcal{A}^l(U)$. Tenemos que,

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{I,J} d(a_I b_J) dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{I,J} b_J d(a_I) \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} a_I d(b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{I,J} b_J d(a_I) \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} (-1)^k a_I dx_I \wedge db_J \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

3. Primero, asumamos que $\omega = f \in \mathcal{A}^0(U)$. Así, obtenemos que

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) = \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial dx_j \partial x_i} dx_i \wedge dx_j. \end{aligned}$$

Debido a que las parciales mixtas son iguales y la antisimetría, obtenemos que

$$d(df) = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j = 0.$$

La derivada exterior nos permite interpretar geoméricamente el pullback. Consideremos una k -forma diferencial en U dada por $\omega = \sum_I a_I dx_I$. En virtud del inciso anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d \left(\sum_I da_I \wedge dx_I \right) \\ &= \sum_I d(da_I \wedge dx_I) \\ &= \sum_I d(da_I) \wedge dx_I + (-1)^k da_I \wedge d(dx_I) = 0 \end{aligned}$$

4. Ahora, sean (x_1, \dots, x_n) y (y_1, \dots, y_m) coordenadas en U y V respectivamente. Digamos que f tiene como funciones coordenadas $\{f_j\}_{j=1}^m$, i.e. $y_j = f_j(x_1, \dots, x_n)$. Consideremos una 0-forma diferencial g en V . Tenemos

$$\begin{aligned} f^*(dg)_p &= f^* \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j} (dy_j) \right)_p = \sum_{j=1}^m f^* \left(\frac{\partial g}{\partial y_j} \right) \Big|_p f^*(dy_j)_p \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_j} \Big|_{f(p)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \Big|_p (dx_i)_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j} \Big|_{f(p)} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \Big|_p (dx_i)_p \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i} \Big|_p (dx_i)_p = d(g \circ f)_p = d(f^*(g))_p. \end{aligned}$$

Ahora, consideremos $\omega = \sum_I a_I dx_I$ una k -forma diferencial en U . Por las propiedades anteriormente probadas, tenemos que

$$\begin{aligned} d(f^*(\omega)) &= d \left(\sum_I f^*(a_I) f^*(dx_I) \right) \\ &= \sum_I d(f^*(a_I) f^*(dx_I)) = \sum_I (f^*(a_I) \wedge f^*(dx_I)) \\ &= f^* \left(\sum_I da_I \wedge dx_I \right) = f^*(d\omega) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.3.10. Utilizando las formas diferenciales definidas en 1.3.4, tenemos las siguientes relaciones para el gradiente, el rotacional y la divergencia de un campo vectorial X .

$$df = \omega_{\nabla f}^1, \quad d\omega_X^1 = \omega_{\text{rot}(X)}^2, \quad d\omega_X^2 = \text{div}(X)\omega^3,$$

donde ω^3 es el elemento de volumen en \mathbb{R}^3 .

Ahora, proveeremos de una interpretación geométrica del pullback de k -formas diferenciales. Consideremos $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ una transformación de clase C^∞ entre conjuntos abiertos. Sean (x_1, \dots, x_n) coordenadas de U y (y_1, \dots, y_m) las coordenadas de V , f transforma las coordenadas de U en coordenadas de V haciendo $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, para todo $1 \leq i \leq m$.

Sea $\omega = \sum_I a_I dy_I$ una k -forma diferencial en V . Usando la proposición anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} f^*(\omega) &= \sum_I f^*(a_I)(f^*dy_{i_1}) \wedge \dots \wedge (f^*dy_{i_k}) \\ &= \sum_I f^*(a_I)(df_{i_1}) \wedge \dots \wedge (df_{i_k}). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Supongamos que $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo de clase C^∞ entre conjuntos abiertos. Sean (x_1, \dots, x_n) coordenadas en U , (y_1, \dots, y_n) coordenadas en U' y digamos que tenemos las funciones coordenadas $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$. La ecuación (1.1) implica que

$$f^*(y_{i_1}, \dots, y_{i_k}) = \frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_k})}{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

1.3.4. Interpretación geométrica de la derivada exterior

Consideremos una k -forma diferencial ω definida en un conjunto abierto U de \mathbb{R}^n y X_1, \dots, X_k una colección de campos vectoriales en U . Haciendo variar el punto de anclaje podemos considerar $\omega(X_1, \dots, X_k)$ como una función de clase C^∞ . Esto nos dice que ω es una aplicación

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{X}(U) \times \dots \times \mathfrak{X}(U)}_{k \text{ veces}} \rightarrow C^\infty(U)$$

es k -lineal y alternante, usando la propiedad de que $\mathfrak{X}(U)$ es un $C^\infty(U)$ -módulo. Esta es la caracterización global de una k -forma diferencial.

³Un difeomorfismo φ de clase C^∞ es una aplicación biyectiva de clase C^∞ con inversa de clase C^∞ .

Teorema 1.3.11. Sean ω una k -forma diferencial en U y X_1, \dots, X_k campos vectoriales sobre U , tenemos que

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} L_{X_i}(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)) \\ &\quad - \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) \end{aligned}$$

donde \hat{X}_i denota que se ha suprimido la i -ésima entrada. En el caso $k = 1$, tenemos que

$$d\omega(X, Y) = L_X\omega(Y) - L_Y\omega(X) - \omega([X, Y]).$$

Demostración. Primero, observamos que la función definida en la segunda parte de la ecuación es una función k -lineal de C^∞ -módulos, pues la derivada de Lie es una función lineal de C^∞ -módulos y dicha expresión es una combinación lineal de ellas. Por otra parte, la alternancia de ω y la linealidad de la derivada de Lie implican la alternancia de dicha función. Por lo tanto, dicha expresión es una $(k + 1)$ -forma diferencial.

Dada la linealidad, basta que probemos que dichas funciones son iguales evaluadas en elementos básicos. Sean $1 \leq j_1 < \dots < j_{k+1} \leq n$ una colección de índices. Sea $\omega = \sum_I f_I dx_I$ una k -forma diferencial en U . Así, tenemos que

$$\begin{aligned} d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_{k+1}}}\right) &= \sum_I df_I \wedge dx_I \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_{k+1}}}\right) \\ &= \sum_{s=1}^n (-1)^{s+1} \frac{\partial}{\partial x_{j_s}} f_{j_1, \dots, \hat{j}_s, \dots, j_{k+1}} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k+1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_{k+1}}}\right) \\ &= \sum_{s=1}^n (-1)^{s+1} \frac{\partial}{\partial x_{j_s}} f_{j_1, \dots, \hat{j}_s, \dots, j_{k+1}}. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que para cada $1 \leq s \leq k + 1$,

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\hat{\partial}}{\partial x_{j_s}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_{k+1}}}\right) = f_{j_1, \dots, \hat{j}_s, \dots, j_{k+1}}.$$

Derivando con respecto al vector $\frac{\partial}{\partial x_{j_s}}$ y sumando sobre los valores posibles, obtenemos el resultado. \square

1.3.5. La cohomología de de Rham

En esta subsección, introduciremos el concepto fundamental de esta tesis: la cohomología de de Rham. La subsección (1.3.3) introduce la derivada exterior, establece que la derivada exterior es una aplicación lineal entre espacios

vectoriales

$$d : \mathcal{A}^k(U) \rightarrow \mathcal{A}^{k+1}(U).$$

Podemos, entonces, definir las siguientes nociones.

Definición 1.3.12. Decimos que una k -forma diferencial ω en U es una k -forma cerrada, si $d\omega = 0$. Por otro lado, una k -forma diferencial ω en U se denomina exacta, si existe una $(k-1)$ -forma exterior η en U tal que $d\eta = \omega$.

De las propiedades anteriores, es fácil ver que toda k -forma diferencial exacta es también cerrada. En términos de la transformación d podemos establecer los siguientes subespacios vectoriales de $\mathcal{A}^k(U)$,

$$\begin{aligned} Z^k(U) &= \ker(d : \mathcal{A}^k(U) \rightarrow \mathcal{A}^{k+1}(U)) \\ B^k(U) &= \text{Im}(d : \mathcal{A}^{k-1}(U) \rightarrow \mathcal{A}^k(U)). \end{aligned}$$

La contención mencionada arriba $B^k(U) \subset Z^k(U)$, nos permite hablar del cociente de estos espacios vectoriales, $Z^k(U)/B^k(U)$. Es claro que cuando sucede que $Z^k(U)/B^k(U) = 0$, entonces toda k -forma cerrada en U es exacta en U , es decir, los elementos de $Z^k(U)/B^k(U)$ nos dicen cuánto dista una k -forma cerrada en U de ser exacta en U . Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.3.13. Sea U un conjunto abierto de \mathbb{R}^n . Definimos el k -ésimo espacio vectorial de cohomología de de Rham como el espacio cociente dado por $H_{dR}^k(U) = Z^k(U)/B^k(U)$. Para una k -forma diferencial $\omega \in \mathcal{A}^k(U)$, denotamos por $[\omega]$ a su clase correspondiente en $H_{dR}^k(U)$ y la denominamos la clase de cohomología de de Rham representada por ω . Podemos, así, formar

$$H_{dR}^*(U) = \bigoplus_{k=0}^n H_{dR}^k(U)$$

el espacio vectorial de cohomología de de Rham de U .

Ejemplo 1.3.14. Estudiemos la cohomología del conjunto de los números reales \mathbb{R} . Primero, observemos que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una 0-forma cerrada, si su diferencial $df = f'(x)dx = 0$, es decir que $f'(x) = 0$. Por ende, f es localmente constante. Como \mathbb{R} es conexo, esto nos dice que $H_{dR}^0(\mathbb{R}) = \{F \equiv \text{cte.}\} \cong \mathbb{R}$.

Ahora, dado que no existen 2-formas diferenciales en \mathbb{R} , toda 1-forma diferencial es cerrada, es decir, $Z_1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Por otro lado, una 1-forma diferencial $\omega = f(t)dt$ es exacta, si y sólo si hay una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que

$$g'(t) = f(t)$$

De forma que el teorema fundamental del cálculo, afirma que toda 1-forma cerrada es exacta módulo una constante. Por lo tanto, $H_{dR}^1(\mathbb{R}) = 0$.

1.4. Integración de 1-formas diferenciales

En esta sección, estudiaremos cómo se integran las 1-formas diferenciales y qué consecuencias tiene su integración en la topología de ciertos abiertos de \mathbb{R}^2 .

1.4.1. Producto de curvas en \mathbb{R}^n

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$ dos curvas continuas en U tales que $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$. Definimos *el producto de curvas* $\gamma_0 * \gamma_1$ como la curva definida por

$$\gamma_0 * \gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t), & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_1(2t - 1), & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

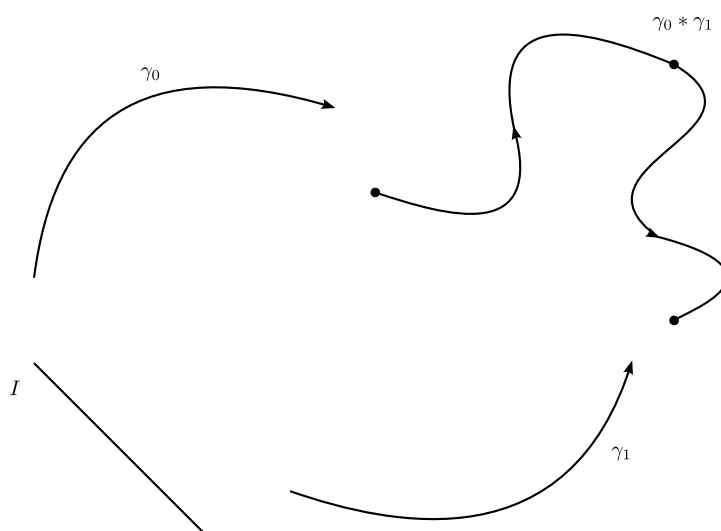


Figura 1.2: Producto de dos curvas.

Así, podemos definir la curva $\gamma_0^{-1}(t) = \gamma_0(1 - t)$ con $t \in [0, 1]$. Dicha curva tiene la misma traza que la curva γ_0 sólo que recorrida en sentido contrario. Así, $\gamma_0 * \gamma_0^{-1}(t) = \gamma_0(0)$.

1.4.2. Integral de una 1-forma diferencial en \mathbb{R}^n

Sea $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ una 1-forma diferencial definida en U un conjunto abierto de \mathbb{R}^n . Consideremos una curva diferenciable $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ dada por las coordenadas $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, tenemos entonces que $\gamma^* \omega$ es una 1-forma diferencial en \mathbb{R} dada por

$$\gamma^* \omega = \sum_{i=1}^n a_i(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \gamma_i'(t) dt.$$

Con esto estamos listos para dar nuestra primera definición.

Definición 1.4.1. La integral de la 1-forma diferencial ω sobre la curva γ se define por

$$\int_{\gamma(t)} \omega = \int_a^b \gamma^* \omega = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n a_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) \right) dt$$

Nos hace falta ver que dicha definición es independiente de un cambio de parámetro, para que ésta sólo dependa de la traza de la curva de clase C^1 γ y la 1-forma diferencial ω .

Definición 1.4.2. Un cambio de parametrización de $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ es un homeomorfismo diferenciable $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$. Decimos que φ preserva la orientación, si φ es creciente. De otro modo, decimos que φ revierte la orientación.

Si $t = \varphi(\tau)$ y φ es creciente, tenemos por el teorema de cambio de variable para integrales que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi(\tau)} \omega &= \int_c^d \left(\sum_{i=1}^n a_i(\gamma \circ \varphi(\tau)) dx_i(\gamma \circ \varphi(\tau)) \right) d\tau \\ &= \int_c^d \left(\sum_{i=1}^n a_i(\gamma(\varphi(\tau))) \gamma'_i(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) \right) d\tau \\ &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n a_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) \right) dt \\ &= \int_{\gamma(t)} \omega \end{aligned}$$

Esto prueba que la integral no depende de un cambio de parámetro, mientras φ no invierta la orientación. Sin embargo, también resulta claro del cálculo anterior que si φ invierte la orientación, entonces dicha integral cambia de signo. Así, a esta integral la denotaremos $\int_{\gamma} \omega$ donde γ es la traza de la curva $\gamma(t)$.

Por tanto,

$$\int_{\gamma^{-1}} \omega = - \int_{\gamma} \omega.$$

1.4.3. Exactitud e integración

Ahora, estudiaremos cuáles son las relaciones entre la derivada exterior de una 1-forma diferencial y sus integrales sobre ciertas curvas. Para esto, recordamos que una 1-forma diferencial ω es cerrada, si $d\omega = 0$ en U y ω es exacta, si existe una función f de clase C^∞ tal que $\omega = df$ en U .

Teorema 1.4.3. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y ω una 1-forma diferencial. Entonces, son equivalentes:

1. ω es exacta en U ,

2. $\int_{\gamma} \omega$, donde $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ es una curva de clase C^1 , sólo depende de los extremos; y
3. $\int_{\gamma} \omega = 0$, para toda curva diferenciable cerrada $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$.

Demostración. [(1) \Rightarrow (2)] Supongamos que ω es exacta, entonces existe $f \in C^{\infty}(U)$ tal que $df = \omega$. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$, dada por $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \forall t \in [0, 1]$. Así,

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \omega &= \int_{\gamma} df \\
 &= \int_{\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \\
 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) dx_i(\gamma'(t)) \\
 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt \\
 &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (f \circ \gamma) dt = (f \circ \gamma)(1) - (f \circ \gamma)(0).
 \end{aligned}$$

[(2) \Rightarrow (3)] Ahora, supongamos que $\int_{\gamma} \omega$ sólo depende de los extremos. Si γ es una curva cerrada, tenemos que $\gamma(0) = \gamma(1)$ y por tanto, $\int_{\gamma} \omega = 0$.

[(3) \Rightarrow (1)] Supongamos que $\int_{\gamma} \omega$ sólo depende de los extremos. Consideremos $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ la expresión de la 1-forma diferencial en U . Sea $p \in U$ un punto fijo. Así, para un punto $x \in U$, definamos $f(x) = \int_{\gamma} \omega$ donde γ es la curva que une a p y x (recuerde que un abierto conexo es arco conexo). Primero, demostraremos que dicha función está bien definida, es decir, que no depende de la curva que una a dichos puntos. Para ello, supongamos que $\int_{\gamma} \omega = 0$ para toda γ curva diferenciable cerrada en U . Sean γ_1, γ_2 curvas diferenciables en U tales que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ y $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Consideremos la curva $\gamma_1 * \gamma_2^{-1}$ (como producto de curvas), tenemos que

$$0 = \int_{\gamma_1 * \gamma_2^{-1}} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2^{-1}} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Ahora, basta que probemos que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i$, para toda $1 \leq i \leq n$. Consideremos

el segmento α que une a x con $(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n)$. Entonces,

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_{\gamma^* \alpha} \omega - \int_{\gamma} \omega \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_{\alpha} \omega \\ &= \frac{1}{h} \int_0^1 h a_i(x_1, \dots, x_i + ht, \dots, x_n) dt \\ &= \int_0^1 a_i(x_1, \dots, x_i + th, \dots, x_n) dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} = a_i(x_1, \dots, x_n).$$

□

Teorema 1.4.4 (Lema de Poincaré para 1-formas diferenciales). Sea $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ una 1-forma diferencial definida en un conjunto abierto U de \mathbb{R}^n . Entonces, $d\omega = 0$ si y sólo si para cada punto $p \in U$, hay una vecindad $V \subset U$ de p y una función diferenciable $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $df = \omega$, es decir, ω es localmente exacta.

Demostración. Dado que para toda k -forma diferencial ω , $d(d\omega) = 0$, tenemos que toda forma diferencial exacta es cerrada.

Para probar el recíproco, sea $p = (y_1, \dots, y_n) \in U$ un punto fijo y V la bola abierta con centro en p contenida en U . Sea $q = (x_1, \dots, x_n) \in V$ un punto cualquiera. Así, la línea que une al punto p y q definida como $\beta(t) = tq + (1-t)p$ con $t \in [0, 1]$ está contenida en U .

Definamos, entonces,

$$\begin{aligned} f(q) &= \int_{\beta} \omega \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(\beta(t)) dx_i(\beta(t)) \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(\beta(t))(x_i - y_i) dt \end{aligned}$$

Por otro lado, como ω es cerrada, tenemos que

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i \\
&= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j = 0.
\end{aligned}$$

Así, $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$, para todo $i < j$.

Basta que probemos que $\frac{\partial f}{\partial x_k} = a_k$, para toda $k \in \{1, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_k}(q) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^n a_i(\beta(t))(x_i - y_i) \right) dt \\
&= \int_0^1 t \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_k}(\beta(t))(x_i - y_i) \right) + a_k(\beta(t)) dt \\
&= \int_0^1 t \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_k}{\partial x_i}(\beta(t))(x_i - y_i) \right) + a_k(\beta(t)) dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t(a_k \circ \beta)(t)) dt \\
&= a_k(\beta(1)) = a_k(q).
\end{aligned}$$

□

1.4.4. Homotopía e integración

Definición 1.4.5. Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$, dos curvas continuas. Decimos que γ_1 y γ_2 son *homotópicas con extremos fijos* si $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ y existe una transformación $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ tal que

$$\begin{aligned}
H(0, t) &= \gamma_0(t), & H(s, 0) &= H(0, 0) = \gamma_0(0), \\
H(1, t) &= \gamma_1(t), & H(s, 1) &= H(0, 1) = \gamma_0(1).
\end{aligned}$$

Si $\gamma_0(0) = \gamma_0(1)$, entonces la curva se denomina *lazo*. Así, decimos que dos lazos son *libremente homotópicos*, si no fijamos los extremos.

Podemos extender el concepto de *integral sobre curvas continuas y 1-formas diferenciales cerradas*. Sea ω una 1-forma diferencial cerrada definida en un conjunto abierto U de \mathbb{R}^n y $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ una curva de clase C^1 , podemos escoger un

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = 1$$

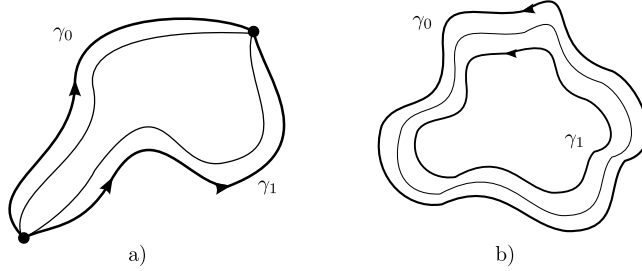


Figura 1.3: (a) Homotopia de extremos fijos, (b) Homotopía libre de lazos

del intervalo $[0, 1]$ de tal forma que la restricción $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} = \gamma_i$, $i = 0, 1, \dots, k$ está contenida en una bola B_i donde ω es exacta, i.e. existe una función $f_i : B_i \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $df_i = \omega$. Entonces,

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=0}^k \int_{\gamma_i} \omega = \sum_{i=0}^k [f_i(t_{i+1}) - f_i(t_i)].$$

Ahora, si $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ es continua, esta partición sigue existiendo, pues sólo depende de la compacidad del intervalo. Así, podemos extender la definición a estas curvas de la misma forma.

Observamos que si agregamos un punto a dicha partición digamos $t_{i^*} < q < t_{i^*+1}$, el valor de la integral no se altera. Por lo tanto, dicho valor no depende de la partición que utilizemos para definirla.

Teorema 1.4.6 (Teorema del número de Lebesgue). Sea K un conjunto compacto de \mathbb{R}^n . Supongamos que $\mathcal{U} = \{U_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es una cubierta abierta de K . Entonces, existe un número $\lambda > 0$ tal que si $x, y \in K$ y $|x - y| < \lambda$, se tiene que hay un conjunto $U \in \mathcal{U}$ tal que $x, y \in U$.

Demostración. Para cada $p \in K$, hay un $U_{\alpha(p)} \in \mathcal{U}$ que cumple con que $p \in U_{\alpha(p)}$. Dado que U es un conjunto abierto, tenemos que existe una $\epsilon = \epsilon(p) > 0$ tal que $B_{\epsilon}(p) \subset U$. Así, si $q \in \mathbb{R}^n$ es tal que $|q - p| < \frac{\epsilon}{2}$, se tiene que $q \in U$. Sea $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

Definamos la cubierta abierta $\mathcal{S} := \{B_{\delta(p)}(p) : p \in K\}$. Dado que K es un conjunto compacto, tenemos que existe una subcubierta finita, digamos la formada por las bolas centradas en los puntos p_1, \dots, p_n . Ahora, sea

$$\lambda = \inf\{\delta(p_1), \dots, \delta(p_n)\}.$$

Si $x, y \in K$ y $|x - y| < \lambda$, entonces x pertenece a una $B_{\delta(p_j)}$, para alguna $1 \leq j \leq n$, i.e. $|x - p_j| < \delta(p_j)$. Así, dado que $|x - y| < \lambda$, se tiene que

$$|y - p_j| \leq |y - x| + |x - p_j| < 2\delta(p_j) = \epsilon(p_j).$$

Por tanto, $x, y \in U_{\alpha(p_j)}$. □

Teorema 1.4.7 (Teorema de deformación). Sea ω una 1-forma diferencial cerrada definida en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$ dos curvas continuas homotópicas en U . Entonces,

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

Demostración. Dado que $d\omega = 0$, ω es localmente exacta. Sean H la homotopía entre γ_0, γ_1 , y $\{B_i\}$ una cubierta abierta de $H([0, 1] \times [0, 1]) \subset U$ por bolas B_i donde ω es exacta. Dado que el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 1]$ es compacto, la cubierta de R dada por $W_i = H^{-1}(B_i)$ tiene un número de Lebesgue λ . Dividamos el rectángulo R en subrectángulos R_{jk} por las líneas $s = \text{cte.}$ y $t = \text{cte.}$; de tal forma que el diámetro de cada R_{jk} es menor que λ . Entonces, ω es localmente exacta en cada R_{jk} y, por tanto, tenemos que $\int_{\partial R_{jk}} \omega = 0$. Además, si R_{jk} está formado por lados $\alpha_{jk}, \beta_{j,k+1}, \alpha_{j+1,k}$ y β_{jk} donde sus orientaciones están dadas por los parámetros s y t crecientes, entonces

$$0 = \sum_{jk} \int_{\partial R_{jk}} \omega = \sum_{jk} \left[\int_{\alpha_{jk}} \omega + \int_{\beta_{j,k+1}} \omega + \int_{\alpha_{j+1,k}} \omega + \int_{\beta_{jk}} \omega \right].$$

Pero observamos que los lados de los rectángulos R_{jk} que se encuentran en el interior de R aparecen dos veces en la suma anterior y con signo contrario. Por tanto, dichos términos se cancelan para obtener

$$0 = \int_{\gamma_0} \omega + \int_{\beta_1} \omega - \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\beta_0} \omega$$

donde β_0 es la curva $H(0, t)$ y β_1 es la curva $H(1, t)$.

Si las curvas continuas γ_0 y γ_1 son homotópicas con extremos fijos, entonces β_0 y β_1 son puntos y sus integrales se anulan.

Si dichas curvas son libremente homotópicas, tenemos que $\beta_0 = \beta_1$ y por tanto, su contribución en la ecuación anterior también se anula. En ambos casos, es cierto que

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

□

Corolario 1.4.8. Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ es libremente homotópica a un punto, entonces $\int_{\gamma} \omega = 0$.

Definición 1.4.9. Decimos que un conjunto abierto y conexo $U \subset \mathbb{R}^n$ es *simplemente conexo*, si cualquier curva cerrada continua en U es libremente homotópica a un punto.

Teorema 1.4.10. Toda 1-forma cerrada ω definida en un conjunto simplemente conexo $U \subset \mathbb{R}^n$ es exacta.

Demostración. Por el teorema (1.4.7), tenemos que para cualquier curva cerrada $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$, $\int_{\gamma} \omega = 0$. Por tanto, ω es exacta. \square

Ejemplo 1.4.11. Ahora, utilizaremos los resultados anteriores para describir el primer grupo de cohomología de De Rham del abierto $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Primero, observamos que la 1-forma diferencial dada por

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi(x^2 + y^2)}(-ydx + xdy)$$

es cerrada en U . Además, es fácil ver que no es exacta en dicho dominio, pues $\int_{S^1} \omega_0 = 1$. Nos preguntamos si la clase de ω_0 en $H_{dR}^1(U)$, $[\omega_0]$, es el único generador de $H_{dR}^1(U)$. Para probar esto, basta que para toda 1-forma cerrada ω en U , existan $l \in \mathbb{R}$ y α una 1-forma exacta en U tales que $\omega = l\omega_0 + \alpha$.

Sea γ_ϵ es una parametrización de S_ϵ^1 , una circunferencia centrada en el origen con radio ϵ . Dado que conocemos ω y ω_0 , definamos $l = \int_{\gamma_\epsilon} \omega$ y $\alpha = \omega - l\omega_0$. Así, tenemos que

$$\int_{\gamma_\epsilon} \alpha = \int_{\gamma_\epsilon} \omega - l \int_{\gamma_\epsilon} \omega_0 = 0, \text{ pues } \int_{\gamma_\epsilon} \omega_0 = 1.$$

Por el teorema (1.4.3), la exactitud de α se puede obtener probando que $\int_{\gamma} \alpha = 0$, para toda curva cerrada γ en U . Para esto, usamos el hecho que γ_ϵ es homotópica a nS_ϵ^1 , para algún $n \in \mathbb{Z}$. De aquí, $\int_{\gamma} \alpha = 0$, para toda curva cerrada en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Esto nos dice que $H_{dR}^1(U) = \langle [\omega_0] \rangle$, es decir, $H_{dR}^1(U)$ es isomorfo a \mathbb{R} .

1.5. Teorema de Frobenius

En esta sección, provereemos la prueba del teorema de Frobenius que nos dice las condiciones necesarias y suficientes para que una distribución de vectores en \mathbb{R}^n sea completamente integrable, es decir, que exista una subvariedad cuyo espacio tangente esté dado por dicha distribución de vectores. Para ello, primero daremos una interpretación geométrica del corchete de Lie introducido en los preliminares. Después, estudiaremos las propiedades más importantes que cumplen los pares de campos vectoriales cuyo corchete de Lie se anula. Después de dar la prueba del teorema, estableceremos una reformulación del teorema usando formas diferenciales.

1.5.1. Interpretación geométrica del corchete de Lie

Sean $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ dos conjuntos abiertos, y $\varphi : U \rightarrow V$ un difeomorfismo de clase C^∞ . Entonces, dado un campo vectorial X sobre U , podemos definir *el campo vectorial φ_*X inducido por φ sobre V* como

$$(\varphi_*X)(q) = \varphi_*(X(\varphi^{-1}(q))) \text{ con } q \in V.$$

Equivalentemente, $\varphi_*(X(p)) = (\varphi_*X)(\varphi(p))$ con $p \in U$.

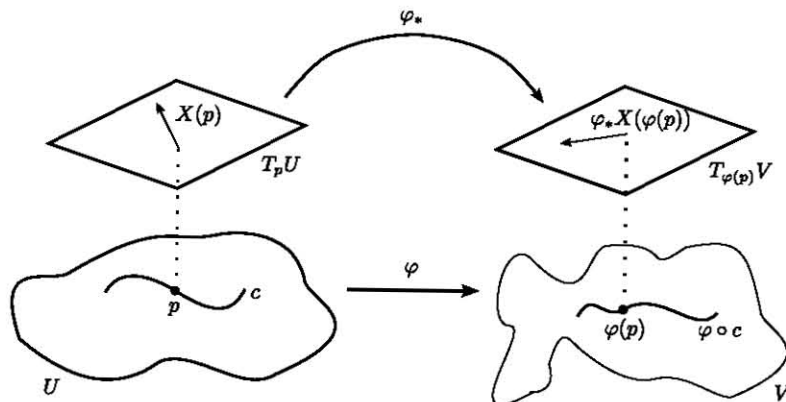


Figura 1.4: Definición del campo vectorial inducido por un difeomorfismo.

Proposición 1.5.1. Sean $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ dos conjuntos abiertos, $\varphi : U \rightarrow V$ un difeomorfismo y X un campo vectorial sobre U . Entonces, la curva integral de $\varphi_* X$ que pasa por $p \in V$ está dada como $\varphi \circ c$ donde c es la curva integral de X que pasa por $\varphi^{-1}(p)$.

Demostración. Sea $c(\cdot)$ la curva integral de X que pasa por $\varphi^{-1}(p)$ tal que $c(0) = \varphi^{-1}(p)$ y $c'(0) = X(\varphi^{-1}(p))$. Entonces,

$$\left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ c) \right|_{t=0} = (\varphi_*)(c'(0)) = \varphi_* \cdot X(\varphi^{-1}(p)) = \varphi_* X(p).$$

□

Observación 1.5.2. Por el lema anterior, el grupo de transformaciones locales generado por $\varphi_* X$ es $\varphi \circ \psi_t \circ \varphi^{-1}$ donde ψ_t es el grupo de transformaciones locales generado por X .

Proposición 1.5.3. Sean $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ dos conjuntos abiertos, $\varphi : U \rightarrow V$ un difeomorfismo y X un campo vectorial en U . Si $f \in C^\infty(V)$, entonces

$$L_X(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(q)) = L_{\varphi_* X}(f)(q) \quad \text{con } q \in V.$$

Demostración. Sea $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ la expresión de φ en coordenadas. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} L_X(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(q)) &= (\nabla(f \circ \varphi) \cdot X)(\varphi^{-1}(q)) \\ &= \nabla f(q) \left[\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} \right]_{\varphi^{-1}(q)} (X(\varphi^{-1}(q))) \\ &= (\nabla f \cdot \varphi_* X)(q) = L_{\varphi_* X}(f)(q). \end{aligned}$$

□

Ahora, describiremos una interpretación geométrica del corchete de Lie.

Lema 1.5.4. Sean X, Y campos vectoriales en \mathbb{R}^n y φ_t el flujo del campo vectorial X . Entonces,

$$[X, Y] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{-t})_* Y - Y}{t},$$

donde $(\varphi_{-t})_*$ es la diferencial de φ_{-t} .

Demostración. Por la proposición anterior, tenemos que

$$L_{(\varphi_{-t})_* Y}(f) = L_Y(f \circ \varphi_{-t}) \circ \varphi_t.$$

Observamos que

$$\begin{aligned} L_{(\varphi_{-t})_* Y - Y}(f) &= L_Y(f \circ \varphi_{-t}) \circ \varphi_t - L_Y(f) \circ \varphi_t + L_Y(f) \circ \varphi_t - L_Y(f) \\ &= L_Y(f \circ \varphi_{-t} - f) \circ \varphi_t + L_Y(f) \circ \varphi_t - L_Y(f) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} L_Y(f \circ \varphi_{-t} - f) \circ \varphi_t &= L_Y(f \circ \varphi_{-t} - f \circ \varphi_t \circ \varphi_{-t}) \circ \varphi_t \\ &= L_Y((f - f \circ \varphi_t) \circ \varphi_{-t}) \circ \varphi_t \\ &= L_{(\varphi_t)_* Y}(-(f \circ \varphi_t - f)). \end{aligned}$$

Así, juntanto los resultados anteriores, dividiendo entre t y tomando el límite cuando $t \rightarrow 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L_{(\varphi_{-t})_* Y - Y}(f)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} L_{(\varphi_t)_* Y} \left(\frac{-(f \circ \varphi_t - f)}{t} \right) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L_Y(f) \circ \varphi_t - L_Y(f)}{t} \\ &= L_Y(L_{-X}(f)) + L_X(L_Y(f)) \\ &= L_{[X, Y]}(f). \end{aligned}$$

□

1.5.2. Campos vectoriales conmutativos

Definición 1.5.5. Dos campos vectoriales X y Y en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ son *conmutativos*, si $[X, Y] = 0$.

Notamos que dos campos vectoriales lineales en \mathbb{R}^n son conmutativos si y sólo si sus representaciones matriciales conmutan.

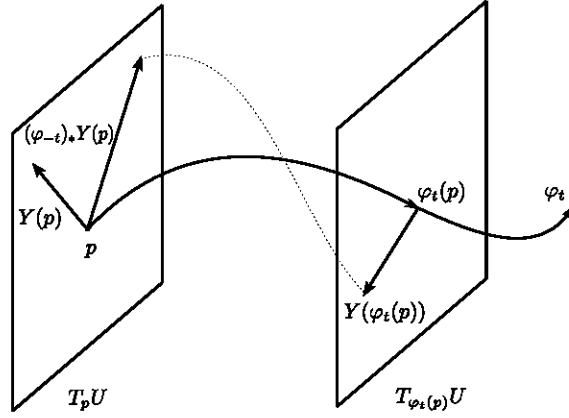


Figura 1.5: Acción de los difeomorfismos φ_{-t} sobre el campo Y .

Proposición 1.5.6. Sean φ_t y ψ_t los flujos locales correspondientes a X y Y , entonces son equivalentes:

1. $[X, Y] = 0$;
2. Y es invariante bajo φ_t , i.e. $(\varphi_t)_*Y = Y$, y
3. los flujos locales cumplen que $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$.

Demostración. [(1) \Rightarrow (2)] Primero, calcularemos la variación de $(\varphi_t)_*Y$ con respecto al tiempo en $t = t_0$ para un punto fijo.

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dt}((\varphi_t)_*Y) \right|_{t=t_0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{t_0+t})_*Y - (\varphi_{t_0})_*Y}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{t_0})_*((\varphi_t)_*Y) - (\varphi_{t_0})_*Y}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} (\varphi_{t_0})_* \left(\frac{(\varphi_t)_*Y - Y}{t} \right) = (\varphi_{t_0})_*[-X, Y] = 0.
 \end{aligned}$$

Esto, nos dice que dichos campos vectoriales no varían en el tiempo, es decir, son constantes. En particular,

$$(\varphi_{t_0})_*Y = (\varphi_0)_*Y = Y.$$

[(2) \Rightarrow (3)] Dado que $(\varphi_t)_*X = X \forall t$, entonces $\psi_s = \varphi_t \circ \psi_s \circ \varphi_{-t} \forall s$. Las afirmaciones anteriores se tienen sobre las curvas integrales máximas. Así, $\psi_s \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \psi_s$.

[(3) \Rightarrow (1)] Supongamos que $\psi_s = \varphi_t \circ \psi_s \circ \varphi_{-t} \forall s \forall t$. Para cada $p \in U$, sea $\psi_s(p)$ la curva integral de Y que pasa por p , es decir

$$\left. \frac{d}{dt} \psi_s(p) \right|_{s=0} = Y(p).$$

Así, para t fijo, dado que $\varphi_t \circ \psi_s \circ \varphi_{-t}(p)$ es la curva integral del campo $(\varphi_t)_*Y = Y$ en p , entonces

$$\left. \frac{d}{ds} \varphi_t \circ \psi_s \circ \varphi_{-t}(p) \right|_{s=0} = (\varphi_t)_*Y(p).$$

Dado que $\psi_s \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \psi_s$, entonces $(\varphi_t)_*Y(p) = Y(p)$.
Por lo tanto,

$$[X, Y] = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{(\varphi_{-t})_*Y - Y}{t} = 0.$$

□

1.5.3. Teorema de Frobenius

Definición 1.5.7. Sea U un conjunto abierto de \mathbb{R}^n . Una *distribución de clase C^∞ de dimensión r sobre U* es una asignación de un subespacio \mathcal{D}_p de dimensión r de T_pU a cada punto $p \in U$ tal que \mathcal{D}_p es de clase C^∞ con respecto a p . Esto significa que para cada punto $p \in U$, existen campos vectoriales X_1, \dots, X_r de clase C^∞ en una vecindad de p tales que para cada punto q en dicha vecindad, los campos vectoriales X_1, \dots, X_r forman una base para \mathcal{D}_q . Decimos que una subvariedad M es una *subvariedad integral de \mathcal{D}* , si $\mathcal{D}_p = T_pM$, para cualquier punto $p \in U$. Decimos que una distribución \mathcal{D} es *completamente integrable en U* , si posee una subvariedad integral en cada punto de U .

Definición 1.5.8. Sea \mathcal{D} una distribución de clase C^∞ sobre U . Decimos que \mathcal{D} es *involutiva* cuando el corchete de Lie $[X, Y]$ de dos campos vectoriales X y Y que pertenecen a \mathcal{D} también pertenece a \mathcal{D} .

Teorema 1.5.9 (Teorema de Frobenius). Una condición necesaria y suficiente para que una distribución \mathcal{D} de clase C^∞ sea completamente integrable es que dicha distribución sea involutiva.

Demostración. Sea \mathcal{D} una distribución de clase C^∞ de dimensión r en un conjunto abierto U de \mathbb{R}^n .

Primero probaremos que el hecho de que la distribución \mathcal{D} sea completamente integrable implica que sea involutiva. Para esto, es suficiente probar que si X y Y pertenecen a \mathcal{D} , entonces $[X, Y]$ pertenece a \mathcal{D} . Dado que \mathcal{D} es completamente integrable, para cada punto $p \in U$, hay una subvariedad M que pasa por p tal que $T_pM = \mathcal{D}_p$. Así, si X y Y son campos vectoriales en U con expresiones

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{con } a_i, b_i \in C^\infty(U).$$

Dado que $X(p), Y(p) \in \mathcal{D}_p$, las funciones que los describen son de la forma

$$a_i(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) = b_i(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) = 0, \quad (i > r).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial b_j}{\partial x_i}(0) = 0, \quad (i \leq r, j > r).$$

Esto nos dice que los coeficientes del corchete de Lie que están por

$$c_j = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i},$$

cumplen que $c_j(0) = 0$, para $j > r$. Por lo tanto, $[X, Y](p) \in \mathcal{D}_p$.

Ahora, probaremos que si \mathcal{D} es una distribución involutiva, entonces D es completamente integrable.

Sean Y_1, \dots, Y_r campos vectoriales en U que forman una base para la distribución \mathcal{D} donde cada uno de ellos está dado por la expresión

$$Y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{con } i = 1, \dots, r.$$

Dado que $\{Y_i\}$ es un conjunto linealmente independiente, podemos suponer bajo un cambio de orden de la base que

$$\det(a_{ij}(q)) \neq 0, \quad \text{donde } i = 1, \dots, r \text{ y } q \in U.$$

Definamos, entonces, la matriz $(b_{ij}(q)) = (a_{ij}(q))^{-1}$, es decir, $b_{ij}(q)$ es la (i, j) -ésima entrada de la matriz inversa a $(a_{ij}(q))$. Así, tenemos que

$$X_i = \sum_{j=1}^r b_{ij} Y_j = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=r+1}^n c_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{donde } c_j \in C^\infty(U).$$

Por otro lado, dado que \mathcal{D} es una distribución involutiva, existen $f_1, \dots, f_r \in C^\infty(U)$ tales que $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^r f_k \frac{\partial}{\partial x_k}$. Así, dado que $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0 \quad \forall i, \forall j$, tenemos que $[X_i, X_j]$ son una combinación lineal de $\frac{\partial}{\partial x_{r+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Por lo tanto, $[X_i, X_j] = 0 \quad \forall i \neq j$, es decir, $\{X_i\}$ son conmutativos.

Ahora, sean $\{\varphi_t^i\}$ los flujos locales de X_i en U y $V = B_\epsilon(0) \subset \mathbb{R}^r$. Definamos, para $p \in U$,

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow U \\ \varphi(t_1, \dots, t_r) &= \varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_r}^r(p). \end{aligned}$$

Claramente, φ es una transformación de clase C^∞ y si consideramos su diferencial en el origen de \mathbb{R}^r , tenemos que

$$\varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) (0) = X_i(p).$$

Dado que X_1, \dots, X_r son linealmente independientes, $\varphi_* : T_q V \rightarrow T_{\varphi(q)} U$ es una transformación inyectiva. Por tanto, $M = \varphi(V)$ es una subvariedad de dimensión r en \mathbb{R}^n para la cual los campos vectoriales $\{X_i\}$ son tangentes a M .

Ahora, hace falta que probemos que para todo $q \in M$, se tenga que $T_q M = \mathcal{D}_q$. Así, por la definición de φ , tenemos que

$$q = \varphi(t_1, \dots, t_r) = \varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_r}^r, \text{ p.a. } (t_1, \dots, t_r) \in V.$$

Dado que la familia de $\{\varphi_t^i\}$ conmutan,

$$q = \varphi_{t_i}^i \circ \varphi_{t_1}^1 \dots \circ \varphi_{t_{i-1}}^{i-1} \circ \varphi_{t_{i+1}}^{i+1} \dots \circ \varphi_{t_r}^r,$$

para cualquier $1 \leq i \leq r$. Si en dicha expresión, fijamos todas las t_j , excepto t_i , variando ligeramente t_i describimos una curva en M que pasa por q y que está en la órbita de $\varphi_{t_i}^i$. Por lo tanto, el vector velocidad de la curva en q es $X_i(q)$, y $X_i(q) \in \mathcal{D}_q$. Por tanto, M es la subvariedad integral de \mathcal{D} . \square

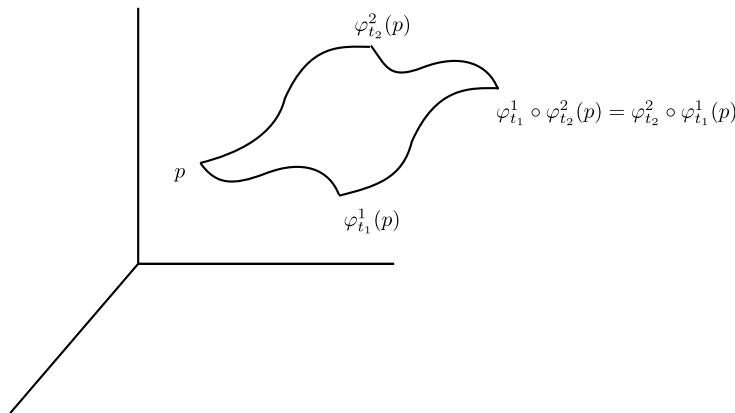


Figura 1.6: Construcción de una subvariedad de dimensión 2 en \mathbb{R}^3 .

1.5.4. Teorema de Frobenius para formas diferenciales

Por último, daremos una forma equivalente de expresar el teorema de Frobenius en términos de formas diferenciales. Para ello, supongamos que \mathcal{D} es una distribución de dimensión r definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Definamos, el conjunto $\mathcal{I}^k(\mathcal{D})$ como el conjunto de las k -formas diferenciales que se anulan en \mathcal{D} , es decir,

$$\mathcal{I}^k(\mathcal{D}) = \{\omega \in \mathcal{A}^k(U) : \omega(X_1, \dots, X_k) = 0, X_i \in \mathcal{D}\},$$

y sea

$$\mathcal{I}(\mathcal{D}) = \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{I}^k(\mathcal{D}).$$

Así, $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ se puede ver como el conjunto de formas diferenciales que se “anulan” en \mathcal{D} .

Lema 1.5.10. 1. $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ es un ideal de $\mathcal{A}^*(U)$.

2. Localmente $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ está generado por $s = n - r$ 1-formas diferenciales linealmente independientes. Esto significa que para cada punto arbitrario $p \in U$, hay una vecindad V y 1-formas diferenciales $\omega_1, \dots, \omega_s$ linealmente independientes en cada punto de V de forma que para $\omega \in \mathcal{I}(\mathcal{D})$ se tiene que

$$\omega = \sum_{i=1}^s \theta_i \wedge \omega_i.$$

Aquí, los elementos θ_i son formas diferenciales en V . Además, la distribución quedaría así definida como

$$\mathcal{D}_q = \{X \in T_q U : \omega_1(X) = \dots = \omega_s(X) = 0\},$$

para cualquier punto $q \in V$.

Demostración. 1. Para probar que $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ es un ideal de $\mathcal{A}^*(U)$ basta ver que dicho conjunto es un subespacio vectorial y virtud de la definición del producto cuña de formas diferenciales, el producto de un elemento de este conjunto con cualquier otra forma diferencial se anula.

2. Escogiendo una vecindad suficientemente pequeña V de p , existen campos vectoriales X_{s+1}, \dots, X_n linealmente independientes en cada punto de V los cuales generan \mathcal{D} en V . Añadimos campos vectoriales X_1, \dots, X_s de modo que X_1, \dots, X_n formen una base del espacio tangente en cada punto. Sean $\omega_1, \dots, \omega_n$ las 1-formas diferenciales duales de X_1, \dots, X_n , es decir, $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$. Así, cualquier k -forma diferencial ω en U puede ser expresada de forma única como combinación lineal de las formas diferenciales

$$\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k}, \quad (i_1, \dots, i_k),$$

con funciones de clase C^∞ como coeficientes. De este modo, ω pertenece a $\mathcal{I}^k(\mathcal{D})$ si, y sólo, si todos los coeficientes en la descripción anterior correspondientes a i_1, \dots, i_k los cuales son todos diferentes a $1, \dots, s$ son cero. En otras palabras, esto nos dice que ω está en el ideal generado por $\omega_1, \dots, \omega_s$. Por ende, tenemos el resultado. □

Proposición 1.5.11. Sea \mathcal{D} una distribución de dimensión r definida en un conjunto abierto U de \mathbb{R}^n . La distribución \mathcal{D} es involutiva siempre y cuando el ideal $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ sea un *ideal diferencial*, es decir, $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ es cerrado bajo la derivada exterior:

$$d\mathcal{I}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{I}(\mathcal{D}).$$

Demostración. Probemos que el hecho de que \mathcal{D} sea involutiva implica que $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ es un ideal diferencial. Consideremos $\omega \in \mathcal{I}^k(\mathcal{D})$. Así, para cualesquiera campos vectoriales X_1, \dots, X_{k+1} definidos en \mathcal{D} , $[X_i, X_j] \in \mathcal{D}$. Por el teorema (1.3.11), $d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) = 0$. Ahora, supongamos que el ideal $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ es diferencial. Sean X, Y dos campos vectoriales que pertenezcan a \mathcal{D} . Basta que probemos que $\omega([X, Y]) = 0$, para un elemento arbitrario $\omega \in \mathcal{I}^1(\mathcal{D})$. Para ello, consideramos la expresión resultante del teorema (1.3.11) y que $d\omega = 0$:

$$0 = d\omega(X, Y) = L_X\omega(Y) - L_Y\omega(X) - \omega([X, Y])$$

Debido a que $\omega(X) = \omega(Y) = 0$, $\omega([X, Y]) = 0$. Por lo tanto, $[X, Y] \in \mathcal{D}$. \square

Nuestra construcción nos dice que una distribución \mathcal{D} de dimensión r es representable localmente por las ecuaciones

$$\omega_1 = \dots = \omega_s = 0, \tag{1.2}$$

donde $\omega_1, \dots, \omega_s$ son $s = n - r$ 1-formas diferenciables linealmente independientes en una vecindad V de un punto $p \in U$. Así, la distribución queda especificada como $\mathcal{D}_q = \{X \in T_qU : \omega_1(X) = \dots = \omega_s(X) = 0\}$ en un punto arbitrario $q \in V$.

Al sistema (1.2) se le denomina *sistema de ecuaciones pfafricanas*. Así, la proposición (1.5.11) nos dice que una condición necesaria y suficiente para que \mathcal{D} sea involutiva es que existan 1-formas diferenciales diferentes ω_{ij} en V de forma que

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^s \omega_{ij} \wedge \omega_j, \text{ para } i = 1, \dots, s. \tag{1.3}$$

La condición 1.3 se denomina *condición de integrabilidad*. Por último, el teorema de Frobenius quedaría expresado en estos términos de la siguiente forma.

Teorema 1.5.12. Una condición necesaria y suficiente para que una distribución \mathcal{D} en un conjunto abierto U de \mathbb{R}^n sea completamente integrable es que si representamos \mathcal{D} como

$$\mathcal{D}_q = \{X \in T_qU : \omega_1(X) = \dots = \omega_s(X) = 0\}$$

por 1-formas diferenciales $\omega_1, \dots, \omega_s$ en una vecindad de cada punto de U , entonces éstas satisfagan la condición de integrabilidad (1.3).

1.6. Formas diferenciales en una variedad diferenciable

En esta subsección, explicaremos cómo podemos extender la noción de formas diferenciales a una variedad. Primero, daremos una definición en forma global, y, posteriormente, una interpretación en coordenadas locales. En lo que

continua de nuestro desarrollo expositivo, utilizaremos el enfoque de variedad de clase C^∞ que se encuentra en el libro [11] en las páginas 11 – 36.

El espacio dual al espacio tangente $T_p M$ en un punto p de la variedad M es denominado el espacio cotangente $T_p^* M$ en p . Por ende, podemos construir su álgebra exterior que denotaremos $\Lambda^k T_p M$.

Definición 1.6.1. Sea M una variedad de clase C^∞ . Una k -forma diferencial ω en M es una función que asigna un elemento $\omega_p \in \Lambda^k T_p M$ a cada punto $p \in M$ y ω_p es de clase C^∞ con respecto a p .

Sea U una vecindad coordenada de M y x_1, \dots, x_n las funciones coordenadas definidas en U . Entonces, para cualquier punto $p \in M$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p$$

forman una base para el espacio tangente $T_p M$. Ahora construiremos una base dual para el espacio dual $T_p^* M$. Sabemos que cada función coordenada $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ se puede ver como una función de clase C^∞ . Consideremos la diferencial $(dx_i)_p : T_p M \rightarrow T_{x_i(p)} \mathbb{R}$ de esta función. Como $T_{x_i(p)} \mathbb{R}$ puede ser naturalmente identificado con \mathbb{R} podemos considerar a $(dx_i)_p$ como un elemento de $T_p^* M$. Así, resulta claro que

$$dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta_{ij}.$$

Por ende, el conjunto

$$(dx_1)_p, \dots, (dx_n)_p$$

forma una base para el espacio dual $T_p^* M$. De la definición (1.6.1) resulta que ω_p se puede expresar en coordenadas locales como un elemento de la forma

$$\omega_p = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} (dx_{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx_{i_k})_p.$$

ω_p es de clase C^∞ con respecto a p si las funciones a_{i_1, \dots, i_k} son de clase C^∞ como funciones de p .

Ahora, estudiemos otra manera de ver a las k -formas diferenciales en M . Sabemos que en cada punto $p \in M$, el valor de ω_p determina una k -forma alternante $\omega_p : T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ de grado k . Dejando variar el punto $p \in M$, obtenemos que ω induce una transformación k -lineal y alternante

$$\omega : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M).$$

Aquí, $\mathfrak{X}(M)$ denota el conjunto de campos vectoriales definidos en M y $C^\infty(M)$ el álgebra de funciones de clase C^∞ real valuadas definidas en M . La estructura de $C^\infty(M)$ -módulo de $\mathfrak{X}(M)$ podemos ver que ω es una transformación k -lineal y alternante de C^∞ -módulos. Probaremos que toda función de este tipo induce una k -forma diferencial como las definidas en (1.6.1).

Proposición 1.6.2. Sea M una variedad de clase C^∞ . El conjunto de k -formas diferenciales en M puede ser naturalmente identificado con el conjunto de transformaciones k -lineales y alternantes $\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ de grado k como $C^\infty(M)$ -módulos.

Demostración. Supongamos que $\tilde{\omega} : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ es una de las transformaciones de la proposición. Primero, tendremos que ver que para cualesquiera $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, el valor de $\tilde{\omega}(X_1, \dots, X_k)(p)$ en el punto p sólo depende de los valores $X_i(p)$, para cada campo vectorial X_i en p . Para ello, por linealidad, es suficiente mostrar que si $X_i(p) = 0$ para alguna i , entonces $\tilde{\omega}(X_1, \dots, X_k)(p) = 0$. Por simplicidad, asumamos que $i = 1$ y sea $(U; x_1, \dots, x_n)$ una carta coordenada alrededor de p . Así, podemos escribir $X_1 = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ en U con $a_i(p) = 0$. Ahora, escojamos una vecindad abierta de p , denotada V , de modo que $\bar{V} \subset U$ y una función $C^\infty(M)$ que es idénticamente 1 en V y 0 fuera de U . Sea $Y_i = h \frac{\partial}{\partial x_i}$. Entonces, tenemos que $Y_i \in \mathfrak{X}(M)$ y si $\tilde{a}_i = ha_i$, es claro que $\tilde{a}_i \in C^\infty(M)$. Por ende,

$$X_1 = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i Y_i + (1 - h^2)X_1.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(X_1, \dots, X_k)(p) &= \\ \sum_{i=1}^n a_i \tilde{\omega}(Y_i, X_2, \dots, X_k)(p) + (1 - h^2(p))\tilde{\omega}(X_1, \dots, X_k)(p) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, definamos una k -forma diferencial ω como sigue. En cada punto $p \in M$, dados los vectores tangentes $X_1, \dots, X_k \in T_p M$, escojamos campos vectoriales \tilde{X}_i sobre M de forma que $\tilde{X}_i(p) = X_i$. Si definimos $\omega_p(X_1, \dots, X_k) = \tilde{\omega}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k)(p)$, entonces, como vimos anteriormente, esto es independiente de la elección de \tilde{X}_i . Así, es fácil ver que ω_p es de clase C^∞ con respecto a p . Por lo tanto, ω es la forma diferencial requerida. \square

Por último proveeremos de una interpretación en cartas coordenadas. Consideremos M una variedad de clase C^∞ de dimensión n y $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ un atlas de M . Una k -forma diferencial en M se puede ver como una familia de k -formas diferenciales $\{\omega_\alpha\}$ definidas en una vecindad coordenada tal que para cualesquiera α, β de modo que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, ω_α y ω_β se transforman la una en la otra, vía el cambio de coordenadas inducido por la función de transición

$$\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

es decir, $\omega_\beta = (\varphi_{\beta\alpha})^* \omega_\alpha$.

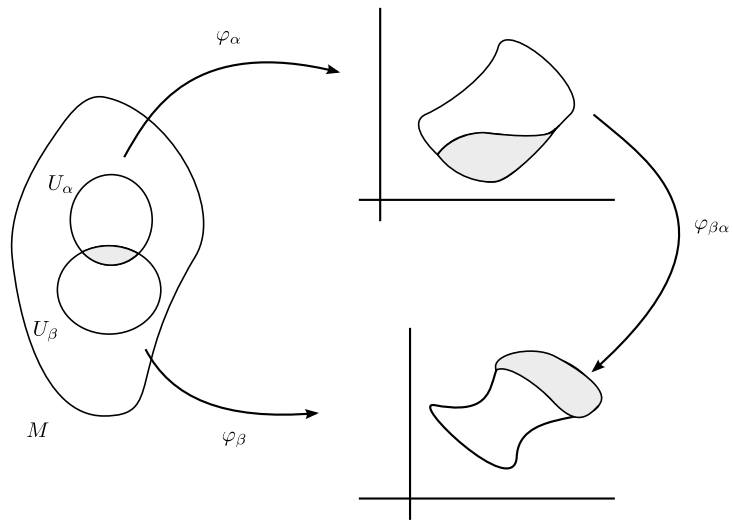


Figura 1.7: Cambio de coordenadas inducido por las cartas coordenadas en una variedad M .

Capítulo 2

El teorema de de Rham

En este segundo capítulo, comenzaremos definiendo diversas teorías de homología en variedades diferenciales y las relaciones que mantienen entre ellas. Para definir estos conceptos, primero introduciremos el formalismo algebraico necesario para poder trabajar sin problemas con dichos objetos matemáticos. Posteriormente, estudiaremos la homología simplicial de un complejo simplicial y la homología singular de una variedad diferencial que en el caso de variedades trianguladas coinciden. Por otro lado, definiremos el concepto de Δ -complejo que nos permitirá calcular homologías de ciertas variedades de manera más cómoda. Para terminar el estudio de estas homologías, definiremos la homología singular C^∞ que será isomorfa a las anteriores y nos permitirá trabajar con objetos diferenciales.

En la siguiente parte, definiremos lo que significa integrar una forma diferencial sobre una variedad diferencial. A través de ésta, podremos probar la generalización del teorema de Stokes. De manera análoga, haremos este estudio para el caso de integración de formas diferenciales sobre cadenas C^∞ singulares. El siguiente paso será definir las teorías de cohomología en variedades. Primero, estudiaremos la cohomología de de Rham de una variedad diferenciable y cómo podemos inducir en ella una estructura de álgebra. Después, probaremos el lema de Poincaré que afirma que la cohomología de de Rham de la variedad producto $M \times \mathbb{R}$ es isomorfa a aquella de M . Esto nos permitirá estudiar la invarianza homotópica de dicha cohomología. Por otra parte, definiremos la cohomología de Čech de una variedad con respecto a una cubierta abierta, y probaremos que dicha cohomología es isomorfa a la cohomología simplicial para una cubierta abierta específica. Por último, relacionaremos ambas cohomologías via un teorema que afirma que ellas son siempre isomorfas siempre y cuando la cubierta en cuestión sea contraíble. Para finalizar la tesis, discutiremos la versión general del teorema de de Rham y la versión para variedades trianguladas. Probaremos que la segunda versión implica la primera, y via los isomorfismos anteriormente mencionados, daremos una prueba del teorema estudiando el papel que juega la integral de formas diferenciales.

2.1. Prolegómenos de álgebra homológica

En esta sección, será introducido el formalismo algebraico necesario para trabajar con los conceptos de homología y cohomología en una variedad de clase C^∞ . El objetivo de ello es evitar el uso de teoremas técnicos durante la exposición de dichos temas permitiendo ahondar en la interpretación geométrica de dichos conceptos.

2.1.1. Módulos diferenciales

Sea M un R -módulo sobre un anillo conmutativo R .

Definición 2.1.1. Una diferencial en M es un morfismo $\partial : M \rightarrow M$ de R -módulos tal que $\partial^2 \equiv \partial \circ \partial = 0$. El par (M, ∂) se denomina módulo diferencial.

A los elementos de los espacios M , $Z(M) = \ker \partial$ y $B(M) = \text{Im } \partial$ se les llama cadenas, ciclos y fronteras de (M, ∂) respectivamente. La condición $\partial^2 = 0$ implica que $B(M) \subseteq Z(M)$ y al R -módulo

$$H(M) = Z(M)/B(M)$$

se le denomina el R -módulo de homología del módulo diferencial (M, ∂) .

Definición 2.1.2. Sean (M, ∂) y (M', ∂') dos módulos diferenciales. Definimos un morfismo de R -módulos diferenciales como un morfismo $f : M \rightarrow M'$ de R -módulos que conmuta con las diferenciales, es decir, $f \circ \partial = \partial' \circ f$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial' \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

Este tipo de morfismos aplica ciclos en ciclos y fronteras en fronteras, por lo tanto, induce un morfismo entre los R -módulos de homología $H(f) : H(M) \rightarrow H(M')$.

Proposición 2.1.3. Sea $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$ una sucesión exacta de morfismos de R -módulos diferenciales. Entonces, existe un morfismo $\bar{\partial} : H(M'') \rightarrow H(M')$, denominado *morfismo de conexión*, y un triángulo exacto en la homología.

$$\begin{array}{ccc} H(M) & \xrightarrow{H(p)} & H(M'') \\ \uparrow H(i) & \swarrow \bar{\partial} & \\ H(M') & & \end{array}$$

Demostración. La sucesión exacta de morfismos de R -módulos diferenciales está representada en el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial' & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial'' & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Para probar el teorema anterior, seguiremos los siguientes pasos.

1. Construcción de $\bar{\partial}$

Primero, consideremos una clase de homología $[m''] \in H(M'')$ representada por la cofrontera m'' . Por ello, tenemos que $\partial m'' = 0$. Dado que p es un epimorfismo, tenemos que

$$\exists m \in M : pm = m''.$$

Debido a la conmutatividad del diagrama, $\partial''(pm) = p(\partial m) = 0$. Esto nos dice que $\partial m \in \ker p$. Por exactitud, $\partial m \in \text{Im } i$. Como i es un monomorfismo,

$$\exists m' \in M' : im' = \partial m.$$

Nuevamente, por la conmutatividad del diagrama, $i(\partial' m') = \partial(im') = 0$. Debido a la exactitud, $\partial' m' = 0$. Debido a que m' es un ciclo, éste induce una clase en $H(M')$. Debido a la unicidad de m' , podemos escribir

$$\bar{\partial}[m''] = [i^{-1}\partial p^{-1}(m'')].$$

2. Independencia del levantamiento

Ahora, tendremos que mostrar que el representante m' no depende del elemento que tomemos en la preimagen de p . Para esto, supongamos que $\bar{m} \in M$ de modo que $p\bar{m} = m''$. Esto implica que $\bar{m} - m \in \ker p$. De la exactitud de los renglones se sigue que $\bar{m} - m \in \text{Im } i$. Por consiguiente, existe un único elemento $m^0 \in M'$ tal que $im^0 = \bar{m} - m$. Así, de la conmutatividad del diagrama resulta que $i(\partial' m^0) = \partial(im^0) = \partial\bar{m} - \partial m$. Lo que nos permite concluir que

$$i^{-1}(\partial\bar{m}) - i^{-1}(\partial m) = \partial' m^0 \in B(M')$$

y, por tanto,

$$[i^{-1}(\partial\bar{m})] = [i^{-1}(\partial m)].$$

3. $\bar{\partial}$ es un morfismo

La descripción de la construcción de $\bar{\partial}$ nos provee de un método para encontrar una función bien definida

$$Z(M'') \rightarrow M'/B(M').$$

Primero, probaremos que dicha función se trata de un morfismo. Consideremos m''_1 y m''_2 dos elementos en $Z(M'')$ y sean $c_1, c_2 \in M$ de modo que $pc_1 = m''_1$ y $pc_2 = m''_2$. Debido a la independencia del levantamiento, podemos considerar $c_1 + c_2$ como levantamiento de $m''_1 + m''_2$. De aquí,

$$i^{-1}\partial(c_1 + c_2) = i^{-1}(\partial c_1 + \partial c_2) = i^{-1}\partial c_1 + i^{-1}\partial c_2.$$

Por lo tanto,

$$\bar{\partial}[m''_1 + m''_2] = [i^{-1}\partial(c_1 + c_2)] = [i^{-1}\partial c_1] + [i^{-1}\partial c_2] = \bar{\partial}m''_1 + \bar{\partial}m''_2.$$

Este procedimiento nos permite ver que dicha función también preserva la multiplicación escalar. En conclusión, $\bar{\partial}$ se trata de un morfismo de R -módulos.

Por otra parte, veamos que dicho morfismo se puede extender a los cocientes. Supongamos que un elemento $c' \in M$ es tal que $ic' = \partial c$, para algún elemento $c \in M$. De la conmutatividad de diagrama, resulta que $0 = \partial\partial(c) = \partial(ic') = i(\partial c')$. Así, por la inyectividad de i , podemos afirmar que $\partial c' = 0$. Por lo tanto, $c' \in Z(M')$. Esto nos permite inducir un morfismo de R -módulos

$$Z(M'') \rightarrow Z(M')/B(M') = H(M').$$

Por último, demostremos que $B(M'')$ se aplica en $B(M)$. Tomemos un elemento $m'' = \partial'c''$ con $c'' \in M''$ y consideremos un elemento $m \in M$ con la propiedad de que $pm = c''$. La conmutatividad del diagrama implica que $p\partial(m) = \partial'(pm) = \partial'c'' = m''$. Como $\bar{\partial}$ es independiente del levantamiento, escogemos ∂m de forma que $p\partial(m) = m''$. Esto nos dice que $\bar{\partial}[m''] = [i^{-1}\partial(\partial m)] = 0$. Finalmente, esto induce un morfismo

$$\bar{\partial} : H(M'') \rightarrow H(M').$$

4. El triángulo es exacto.

a) $\text{Im } H(i) \subseteq \ker H(p)$

Debido a que $H(p) \circ H(i) = H(p \circ i) = H(0) = 0$, $\text{Im } H(i) \subseteq \ker H(p)$.

b) $\ker H(p) \subseteq \text{Im } H(i)$

Supongamos que $H(p)[m] = [pm] = 0$, por lo tanto, existe un elemento $m'' \in M''$ de forma que $pm = \partial''m''$. Sin embargo, p es un epimorfismo, es decir $m'' = p\bar{m}$, para algún elemento $\bar{m} \in M$. Debido a la conmutatividad del diagrama,

$$pm = \partial''p\bar{m} = p\partial\bar{m}.$$

Así, $p(m - \partial\bar{m}) = 0$. Por exactitud, hay un elemento $m' \in M'$ de modo que $im' = m - \partial\bar{m}$. Esto nos permitirá ver que m' es un ciclo. Primero, tenemos que $i\partial'm' = \partial im' = \partial m - \partial\partial\bar{m} = 0$, donde la última igualdad es consecuencia del hecho de que m es un ciclo. Por la inyectividad de i , obtenemos que $\partial'm' = 0$. Por último,

$$H(i)[m'] = [im'] = [m - \partial\bar{m}] = [m].$$

c) $\text{Im } H(p) \subseteq \ker \bar{\partial}$

Si $H(p)[m] = [pm] \in \text{Im } H(p)$, entonces $\bar{\partial}[pm] = [m']$ donde $im' = \partial p^{-1}pm$. La independencia respecto al levantamiento implica que podamos elegir $p^{-1}p(m) = m$. Por otro lado, $\partial p^{-1}p(m) = \partial m = 0$, pues m es un ciclo. Así, $im' = 0$ y por la inyectividad de i , $m' = 0$.

d) $\ker \bar{\partial} \subseteq \text{Im } H(p)$

Si $\bar{\partial}[m''] = [0]$, entonces $m' = i^{-1}\partial p^{-1}(m'') \in B(M')$, es decir, existe un elemento $\bar{m} \in M'$ de tal forma que $m' = \partial'\bar{m}$. Sin embargo, $im' = i\partial'\bar{m} = \partial i\bar{m} = \partial p^{-1}m''$. Por lo tanto, $\partial(p^{-1}m'' - i\bar{m}) = 0$, lo que nos dice que $p^{-1}m'' - i\bar{m}$ es un ciclo. Ahora, por la exactitud obtenemos que

$$H(p)[p^{-1}m'' - i\bar{m}] = [pp^{-1}m'' - pi\bar{m}] = [m'']. \quad \square$$

e) $\text{Im } \bar{\partial} \subseteq \ker H(i)$

Supongamos que $H(i)\bar{\partial}[m''] = [im']$. Por otro lado, $im' = \partial p^{-1}m'' \in B(M)$. Por tanto, $H(i) \circ \bar{\partial} = 0$.

f) $\ker H(i) \subseteq \text{Im } \bar{\partial}$

El hecho de que $H(i)[m'] = [im'] = [0]$ implica que $im' = \partial m$, para algún $m \in M$. De la conmutatividad del diagrama se sigue que $\partial''pm = p\partial m = pim' = 0$ donde la última igualdad es consecuencia de la exactitud y el hecho de que pm es un ciclo. Por tanto,

$$\bar{\partial}[pm] = [i^{-1}\partial p^{-1}m] = [i^{-1}im'] = [m']. \quad \square$$

2.1.2. Complejos de R -módulos

Definición 2.1.4. Un complejo de R -módulos (M_\bullet, ∂) es un módulo diferencial \mathbb{Z} -graduado, es decir $M_\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ y cuya diferencial satisface $\partial(M_n) \subseteq M_{n-1}$, para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Comúnmente, un complejo de R -módulos se representa como una cadena de este tipo

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} M_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} M_n \xrightarrow{\partial_n} M_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

Para un complejo de R -módulos (M_\bullet, ∂) , los módulos de ciclos y fronteras y sus R -módulos de homología se descomponen como suma directa de términos de la forma $Z_n(M) = \ker \partial_n$, $B_n(M) = \text{Im } \partial_{n+1}$ y $H_n(M) = Z_n(M)/B_n(M)$. A los R -módulos $H_n(M)$ los denominamos los R -módulos de homología del complejo (M_\bullet, ∂) .

Definición 2.1.5. Un morfismo de complejos de R -módulos $f : M \rightarrow N$ es una colección de morfismos de R -módulos $\{f_n : M_n \rightarrow N_n\}$ que cumple con la propiedad de que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} M_n & \xrightarrow{f_n} & N_n \\ \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial'_n \\ M_n & \xrightarrow{f_n} & N_n \end{array}$$

Proposición 2.1.6. Sea $0 \rightarrow N_\bullet \xrightarrow{i} M_\bullet \xrightarrow{p} P_\bullet \rightarrow 0$ una sucesión exacta de complejos de R -módulos. Por consiguiente, existen morfismos de conexión $\bar{\partial}_n : H_n(P) \rightarrow H_n(N)$ y una sucesión exacta larga en la homología.

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_n(N) \xrightarrow{H(i)} H_n(M) \xrightarrow{H(p)} H_n(P) \xrightarrow{\bar{\partial}_n} \\ H_{n-1}(N) \xrightarrow{H(i)} H_{n-1}(M) \xrightarrow{H(p)} H_{n-1}(P) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Demostración. Observamos que el morfismo de conexión $\bar{\partial} : H(P) \rightarrow H(N)$ construido en la proposición (2.1.3) se descompone en morfismos

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_n : H_n(P) &\rightarrow H_{n-1}(N) \\ \bar{\partial}_n &= i_{n-1}^{-1} \circ \partial_n \circ p_n^{-1} \end{aligned}$$

y la sucesión exacta se obtiene al desarrollar el triángulo exacto. \square

2.1.3. Homotopías

Es posible que dos complejos de R -módulos que no sean isomorfos tengan cohomologías isomorfas. Una condición suficiente para dicho hecho es que ambos complejos sean homotópicos. A pesar de que dicha condición no es necesaria, es frecuentemente usada.

Definición 2.1.7. Dados dos complejos de R -módulos (M_\bullet, ∂) y (N_\bullet, ∂') y dos morfismos de complejos $f, g : M_\bullet \rightarrow N_\bullet$, una homotopía entre f y g es un morfismo $K : M_\bullet \rightarrow N_{\bullet+1}$, es decir, un morfismo $K : M_n \rightarrow N_{n+1}$ de modo que

$$\partial' \circ K - K \circ \partial = f - g$$

Esta situación se describe en el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & M_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & M_n & \xrightarrow{\partial_n} & M_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \cdots \\
 & & \downarrow f & \swarrow K & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \\
 & & N_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & N_n & \xrightarrow{\partial'_n} & N_{n-1} & \xrightarrow{\partial'_{n-1}} & \cdots
 \end{array}$$

Proposición 2.1.8. Si existe una homotopía entre f y g , entonces $H(f) = H(g)$.

Demostración. Sea $[m] \in H_n(M_\bullet, \partial)$. Por consiguiente,

$$H(f)[m] = [f(m)] = [g(m)] + [\partial'(Km)] - [K(\partial m)] = [g(m)] = H(g)[m],$$

pues $\partial m = 0$ y $[\partial(Km)] = 0$. \square

La razón subyacente de la prueba anterior se puede resumir en que la aplicación $\partial' \circ K - K \circ \partial$ manda ciclos en fronteras y por tanto, el morfismo inducido en la homología es cero.

Definición 2.1.9. Decimos que dos complejos de R -módulos (M_\bullet, ∂) y (N_\bullet, ∂') son *homotópicamente equivalentes* si hay dos morfismos $f : M_\bullet \rightarrow N_\bullet$ y $g : N_\bullet \rightarrow M_\bullet$ de modo que

1. $f \circ g$ es homotópico a la aplicación identidad id_N , y
2. $g \circ f$ es homotópico a la aplicación identidad id_M .

Proposición 2.1.10. Dos complejos homotópicos tienen homologías isomorfas.

Demostración. Utilizando la notación de la proposición 2.1.8. Obtenemos que

$$\begin{aligned}
 H(f) \circ H(g) &= H(f \circ g) = H(\text{id}_N) = \text{id}_{H(N)}, \\
 H(g) \circ H(f) &= H(g \circ f) = H(\text{id}_M) = \text{id}_{H(M)}.
 \end{aligned}$$

Así, $H(f)$ y $H(g)$ son isomorfismos. \square

Una homotopía de un complejo de R -módulos (M_\bullet, ∂) es una homotopía entre el morfismo identidad en M y el morfismo cero; de manera explícita, esto es un morfismo $K : M_\bullet \rightarrow M_{\bullet+1}$ de forma que

$$\partial \circ K + K \circ \partial = \text{id}_M$$

Proposición 2.1.11. Si un complejo de R -módulos (M_\bullet, ∂) admite una homotopía, entonces dicho complejo es exacto.

Demostración. Consideremos un ciclo $m \in M_n$, entonces

$$\partial(K(m)) = m - K(\partial m) = m.$$

Por tanto, m es una frontera. \square

Observación 2.1.12. De forma más general, podemos establecer que si una homotopía $K : M_k \rightarrow M_{k+1}$ existe para $k \geq k_0$, entonces $H_k(M, \partial) = 0$, para $k \geq k_0$. Para complejos acotados abajo del cero y arriba de cierto $n \in \mathbb{N}$ (es decir, $M = \bigoplus_{k=1}^n M_k$) regularmente la homotopía se define para $1 < k < n$, pudiendo suceder que $H^0(M, \partial) \neq 0$ y $H^n(M, \partial) \neq 0$.

2.1.4. Cohomología de un complejo de R -módulos

Para un R -módulo A , definimos $A^* = \text{Hom}(A, R)$, es decir, el conjunto de R -morfismos A en R . Dicho módulo es comúnmente denominado el módulo dual de A . Así, para un morfismo de R -módulo $f : A \rightarrow B$, el morfismo dual $f^* : B^* \rightarrow A^*$ está definido como $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$. El siguiente resultado puede encontrarse en [1].

Proposición 2.1.13. Para un R -módulo A , se tienen las siguientes propiedades:

1. $(A^*)^* \cong A$
2. Supongamos que tenemos dos R -morfismos $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, entonces

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

3. Dada una colección de R -módulos $\{A_\alpha\}$, se tiene que

$$(\bigoplus_\alpha A_\alpha, R)^* = \prod_\alpha A_\alpha^*.$$

Dado un complejo de R -módulos (M_\bullet, ∂) , podemos construir un nuevo complejo de R -módulos de la siguiente forma. Definamos $M^\bullet = \text{Hom}(M_\bullet, R)$ y definamos la siguiente diferencial,

$$\begin{aligned} \delta : M^\bullet &\rightarrow M^\bullet \\ f &\mapsto f(\partial_n(m)) \quad (m \in M^n) \end{aligned}$$

Debido a la propiedad $\partial^2 \equiv 0$, el morfismo δ también cumple dicha propiedad. Esto nos dice que $M^\bullet = (\text{Hom}(M_\bullet, R), \delta)$ es un módulo diferencial. Por otro lado, las propiedades anteriores del funtor $\text{Hom}(\cdot, R)$ nos permiten ver que este nuevo módulo diferencial se trata de un complejo de R -módulos con la salvedad de que la diferencial actúa aumentando el grado en $+1$. A los elementos de este nuevo módulo se les antepone el prefijo co-, es decir, tenemos cocadenas, cociclos y cofronteras. De la misma forma, podemos obtener *los R -módulos de cohomología* que están dados como

$$H^n(M, \delta) = \frac{\ker(\delta_n : M^n \rightarrow M^{n+1})}{\text{Im}(\delta_{n-1} : M^{n-1} \rightarrow M^n)}.$$

Por otro lado, si $H_k(M, \partial)$ no tiene torsión, entonces podemos observar que $H^k(M, \delta) = H_k(M, \partial)^*$.

Por último, dado un complejo de R -módulos (M, ∂) , podemos asociarle tanto su grupo de homología $H(M_\bullet, \partial)$ como su grupo de cohomología $H(M^\bullet, \delta)$. Es fácil notar que si aplicamos un cociclo a una frontera obtenemos el valor cero y de igual manera, si aplicamos una cofrontera a un ciclo. Esto nos permite inducir un morfismo

$$\begin{aligned} H(M_\bullet) \times H(M^\bullet) &\rightarrow R \\ (m, f) &\mapsto f(m) \end{aligned}$$

denominado *el producto de Kroenecker*.

2.2. Homología en variedades

En esta sección, estudiaremos distintos tipos de homología sobre variedades y estableceremos relaciones entre ellas. Dichos objetos resultarán ser invariantes topológicos que contendrán información sobre cómo ciertos objetos k -dimensionales están unidos a objetos $k - 1$ dimensionales dentro de la variedad.

2.2.1. Homología en complejos simpliciales

Definición 2.2.1. Decimos que $k + 1$ puntos $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^k$ se encuentran en *posición general*, si $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0$ son linealmente independientes.

Considere un conjunto $\sigma = \{v_0, \dots, v_l\}$ de $l + 1$ puntos en posición general, definimos *la cerradura convexa de σ* como el conjunto convexo $|\sigma|$ más pequeño que contiene a σ , es decir,

$$|\sigma| = \{a_0 v_0 + \dots + a_l v_l : a_i \geq 0, a_0 + \dots + a_l = 1\}.$$

Dicho conjunto también es denominado *l -simplejo* y se denota por $|\sigma| = [v_0, \dots, v_l]$. Llamamos *cara de un simplejo $|\sigma|$* a cualquier subconjunto $|\tau|$ de vértices de σ .

Definición 2.2.2. Un conjunto K de simplejos en \mathbb{R}^N es *un complejo simplicial euclidiano*, si satisface que:

1. Si $|\sigma| \in K$, entonces cualquier cara de $|\sigma|$ pertenece a K .
2. Si dos complejos $|\sigma|, |\tau| \in K$ se intersectan y $|\sigma| \cap |\tau| \neq \emptyset$, entonces dicha intersección es una cara común de $|\sigma|$ y $|\tau|$.
3. Para un punto arbitrario x en cualquier simplejo $|\sigma|$ en K , podemos elegir una vecindad abierta U de modo que sólo un número finito de simplejos de K intersecten a U .

Para un complejo simplicial euclidiano K , denotamos como $|K|$ a la unión de todos los simplejos contenidos en K . A este conjunto visto como subconjunto de \mathbb{R}^n se le llama *poliedro*. Una *triangulación de un espacio topológico* X es un homeomorfismo $t : |K| \rightarrow X$ donde K es un complejo simplicial. Extrayendo la estructura combinatoria de los complejos simpliciales euclidianos, obtenemos la noción de complejo simplicial abstracto.

Definición 2.2.3. Sea V un conjunto cuyos elementos llamaremos *vértices*, una familia K de subconjuntos finitos no vacíos de V es un *complejo simplicial abstracto*, si

1. Para todo $v \in V$, $\{v\} \in K$ y $\emptyset \notin K$.
2. Si $\sigma \in K$, entonces para todo $\tau \subseteq \sigma$ tal que $\tau \neq \emptyset$, $\tau \in K$.

Consideremos un ordenamiento de los vértices v_0, \dots, v_l de cada simplejo $|\sigma| = |v_0, \dots, v_l|$. Decimos que dos órdenes son equivalentes si uno se puede ser transformado usando sólo permutaciones pares. Una clase de equivalencia de dichos órdenes se denomina *una orientación del simplejo*. Si $l \geq 1$, existen exactamente dos orientaciones. Un simplejo con un orientación dada se denota $\langle \sigma \rangle = \langle v_{i_0}, \dots, v_{i_l} \rangle$ donde (i_0, \dots, i_l) es el orden impuesto.

En un complejo simplicial K , dotamos a cada uno de sus elementos de una orientación y denotamos por $C_l(K; R)$ al módulo libre generado por los l -simplejos orientados de K sobre algún anillo conmutativo R con la relación que si σ es un simplejo y σ' es el simplejo con orientación contraria, entonces $\sigma + \sigma' = 0$. A los elementos de dicho conjunto los denominamos l -cadenas. El simplejo $\langle \sigma \rangle$ con orientación contraria es $-\langle \sigma \rangle$.

Definición 2.2.4. Definimos el *operador frontera* $\partial : C_l(K; R) \rightarrow C_{l-1}(K; R)$, para un simplejo orientado arbitrario $\langle \sigma \rangle = \langle v_0, v_1, \dots, v_l \rangle$,

$$\partial \langle v_0, v_1, \dots, v_l \rangle = \sum_{i=0}^l (-1)^i \langle v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_l \rangle,$$

donde $\langle v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_l \rangle$ es $(l-1)$ -simplejo orientado en el cual se ha omitido el i -ésimo vértice. Así, podemos extender dicha transformación linealmente a todo $C_l(K, R)$.

Proposición 2.2.5. La operador frontera $\partial : C_l(K; R) \rightarrow C_{l-1}(K; R)$ cumple que $\partial \circ \partial \equiv 0$.

Demostración. Debido a la linealidad del operador frontera, basta que probemos

la afirmación para cualquier simplejo orientado $\langle \sigma \rangle = \langle v_0 v_1 \cdots v_l \rangle$.

$$\begin{aligned}
\partial(\partial(\langle \sigma \rangle)) &= \partial \left(\sum_{i=0}^l (-1)^i \langle v_0 v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_l \rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^l (-1)^i \left(\sum_{i \neq j} (-1)^j \langle v_0 v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots \hat{v}_j \cdots v_l \rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^l (-1)^i \left(\sum_{i \langle j} (-1)^j \langle v_0 v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots \hat{v}_j \cdots v_l \rangle \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i \rangle j} (-1)^j \langle v_0 v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots \hat{v}_j \cdots v_l \rangle \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

La proposición anterior (2.2.1) nos permite ver que estas cadenas forman un complejo de R -módulos que denotaremos por $C_*(K; R) = (C_l(K; R), \partial)$. A los R -módulos de homología resultantes los llamamos *los R -módulos de homología simplicial del complejo K* y los denotaremos por $H_l(K; R)$. Es importante hacer notar que dos cadenas z y z' en $C_l(K; R)$ son homólogas, si existe una cadena $C_{l+1}(K; R)$ tal que $z - z' = \partial c$.

2.2.2. Homología singular

Definición 2.2.6. *El k -simplejo estándar $\Delta^k \in \mathbb{R}^k$ se define como el simplejo generado por los puntos $0, e_1, \dots, e_k$, es decir,*

$$\Delta^k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_i \geq 0, x_1 + \cdots + x_k = 1\}.$$

Para un espacio topológico X , una aplicación continua $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ se denomina *un k -simplejo singular de X* . Denotamos por $S_k(X; R)$ al módulo libre generado sobre dichos k -simplejos sobre algún anillo conmutativo R .

Ahora, para cada $i = 0, 1, \dots, k$, definimos las siguientes transformaciones continuas $\epsilon_i : \Delta^{k-1} \rightarrow \Delta^k$ por

$$\begin{aligned}
\epsilon_0(x_1, \dots, x_{k-1}) &= \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i, x_1, \dots, x_{k-1} \right), \text{ y} \\
\epsilon_i(x_1, \dots, x_{k-1}) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{k-1}), \text{ para } i \neq 0.
\end{aligned}$$

Dichas funciones describen las caras de dimensión $k - 1$ del k -simplejo estándar. Por otro lado, definiremos *el operador frontera ∂* para un k -simplejo

singular σ , denotando $e_0 = 0$

$$\begin{aligned}\partial : S_k(X, R) &\rightarrow S_{k-1}(X; R) \\ \partial\sigma &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma|_{\langle e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k \rangle},\end{aligned}$$

y extendiendo linealmente sobre los elementos de $S_k(X; R)$.

La definición nos permite deducir fácilmente la siguiente proposición.

Proposición 2.2.7. El operador frontera $\partial : S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$ cumple que $\partial \circ \partial \equiv 0$.

La Proposición anterior (2.2.7) nos permite afirmar que la estructura dada por $S_*(X; R) = (S_k(X; R), \partial)$ es un complejo de R -módulos. A los R -módulos de homología $H_*(X; R)$ de dicho complejo los llamamos *los R -módulos de homología singular de la variedad M* .

Por otro lado, una función continua $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos induce un morfismo de cadenas $f_\# : S_k(X; R) \rightarrow S_k(Y; R)$ definido como $f_\#(\sigma) = f\sigma$, para un k -simplejo singular y extendiéndolo linealmente.

$$\begin{aligned}f_\#\partial(\sigma) &= f_\#\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \epsilon_i\right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i f_\#(\sigma \circ \epsilon_i) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (f \circ \sigma \circ \epsilon_i) = \partial(f \circ \sigma) = \partial f_\#(\sigma)\end{aligned}$$

De las propiedades de la composición de funciones es fácil ver que si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$, entonces $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$ y $(\text{id}_X)_\# = \text{id}_{C_k(X)}$.

Observación 2.2.8. Si $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces definiendo $(f_\#)^{-1}(\sigma) = f^{-1}\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ obtenemos el morfismo inverso a $f_\#$ y se tiene que $S_n(X; R) \cong S_n(Y; R)$. Por tanto, $H_n(X; R) \cong H_n(Y; R)$.

Proposición 2.2.9. Si X es no vacío y arcoconexo, entonces $H_0(X; R) \cong R$. Así, para cualquier espacio X , $H_0(X; R)$ es isomorfo a la suma directa del anillo R tantas veces como componentes arcoconexas tenga X .

Demostración. Por definición, $H_0(X; R) = S_0(X; R)/\text{Im } \partial_1$, pues $\partial_0 = 0$. Definamos un morfismo $\varepsilon : S_0(X) \rightarrow R$ donde $\varepsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$. Dicho morfismo es sobreyectivo, pues X es no vacío. Basta que probemos que $\ker \varepsilon = \text{Im } \partial_1$, si X es arcoconexo. Por tanto, esto induce un isomorfismo $H_0(X; R) \cong R$, via el primer teorema de isomorfismos.

Primero, notamos que $\text{Im } \partial_1 \subset \ker \varepsilon$, pues para un 1-simplejo singular $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$, tenemos que $\varepsilon\partial_1(\sigma) = \varepsilon(\sigma|_{\langle e_1 \rangle} - \sigma|_{\langle e_0 \rangle}) = 1 - 1 = 0$. Para la inclusión faltante, supongamos que $\varepsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = 0$, entonces $\sum_i n_i = 0$. Dichos σ_i son 0-complejos, por ende puntos de X . Escojamos entonces un camino $\tau_i : I \rightarrow X$ de un punto x_0 a $\sigma_i(v_0)$ y sea σ_0 es 0-simplejo cuya imagen es x_0 . Así, τ_i

es un 1-simplejo singular de forma que $\partial\tau_i = \sigma_i - \sigma_0$. De hecho, $\partial(\sum_i \tau_i) = \sum_i n_i \sigma_i - \sum_i n_i \sigma_0 = \sum_i n_i \sigma_i$. Por lo tanto, $\sum_i n_i \sigma_i$ es una frontera, lo que implica que $\ker \varepsilon \subset \text{Im } \partial_1$. □

Proposición 2.2.10. Si X es un punto, entonces $H_n(X; R) \cong 0$, $n \geq 1$ y $H_0(X; R) \cong R$.

Demostración. En este caso, hay un único n -simplejo singular σ_n , para cada n . Esto nos dice que la frontera de un n -simplejo se ve como $\partial(\sigma_n) = \sum_i (-1)^i \sigma_{n-1}$, es decir, una suma de $(n+1)$ términos. Lo que implica que para $n \neq 0$ dicha suma valga 0, si n es impar, o bien, σ_{n-1} , si n es par. Esto nos permite obtener el complejo

$$\dots \longrightarrow R \xrightarrow{\cong} R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{\cong} R \xrightarrow{0} R \longrightarrow 0$$

donde los operadores frontera son isomorfismos y el morfismo cero alternados. Esto nos dice que los R -módulos de homología son cero, excepto $H_0(X; R) \cong R$. □

Existe una versión modificada de la homología en la cual un punto posee R -módulos de homología trivial en todas las dimensiones. Para construirla, consideremos el siguiente complejo aumentado de un espacio topológico X no vacío

$$\dots \xrightarrow{\partial_3} S_2(X) \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$

donde $\varepsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$.

Definición 2.2.11. Definimos los R -módulos de homología reducidos $\tilde{H}_n(X)$ del espacio topológico X como los R -módulos de homología del complejo aumentado (2.1).

Dado que $\varepsilon\partial_1 = 0$, ε se anula en $\text{Im } \partial_1$ y por ende, induce un isomorfismo $H_0(X; R) \rightarrow R$ con núcleo $\tilde{H}_0(X; R)$. Por lo tanto, $H_0(X; R) = \tilde{H}_0(X; R) \oplus R$. Evidentemente, $H_n(X; R) \cong \tilde{H}_n(X; R)$, para $n > 0$.

A partir de este momento, sobreentenderemos que estamos trabajando sobre un anillo conmutativo cualquiera R . Dado un espacio topológico X y un subespacio $A \subseteq X$, definimos el conjunto de cadenas singulares de X relativas a A como el R -módulo cociente

$$S_k(X, A) = S_k(X)/S_k(A).$$

Es claro que la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow S_k(A) \longrightarrow S_k(X) \longrightarrow S_k(X, A) \longrightarrow 0$, se puede extender a una sucesión exacta corta de morfismos de cadenas.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_k(A) & \xrightarrow{i} & S_k(A) & \xrightarrow{p} & S_k(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ 0 & \longrightarrow & S_{k-1}(A) & \xrightarrow{i} & S_{k-1}(A) & \xrightarrow{p} & S_{k-1}(X, A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Esto nos permite definir el complejo de cadenas singulares de X relativas a A como

$$\cdots \longrightarrow S_{k+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{k+1}} S_k(X, A) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

De forma análoga a lo hecho anteriormente, definimos $Z'_k(X, A) = \ker \partial_k$ y $B'_k(X, A) = \text{Im } \partial_{k+1}$.

Definición 2.2.12. Los R -módulos de homología de X relativos a A se definen como $H_k(X, A) = Z'_k(X, A)/B'_k(X, A)$.

Esta definición es correcta, sin embargo no resulta claro el significado geométrico de dicha homología. Por ello, daremos otra definición de estos R -módulos.

Consideremos los conjuntos

$$Z_k(X, A) = \{c \in S_k(X) : \partial c \in S_{k-1}(A)\}, \text{ y}$$

$$B_k(X, A) = \{c \in S_k(X) : c = \partial b + c' \text{ donde } b \in S_{k+1}(X) \text{ y } c' \in S_k(A)\}.$$

A los elementos de $Z_k(X, A)$ los llamamos ciclos relativos a A y son aquellas cadenas en X cuya frontera es una cadena en A , mientras que los elementos de $B_k(X, A)$ son denominados fronteras relativas a A y son las cadenas de X que son fronteras módulo las cadenas en A . Observemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & Z'_k(X, A) & & \\ & & Z_k(A) & \xrightarrow{q_k} & Z'_k(X, A) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ S_k(A) & \longrightarrow & S_k(A) & \xrightarrow{q_k} & S_k(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ 0 & \longrightarrow & B_{k-1}(A) & \longrightarrow & B_{k-1}(X) & \xrightarrow{q_{k-1}} & B'_{k-1}(X, A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Lema 2.2.13. $Z_k(X, A)$ es la preimagen de $Z'_k(X, A)$ bajo el morfismo del cociente q_k ; es decir un elemento $c \in S_k(X)$ pertenece a $Z_k(X, A)$ si y sólo si $q_k(c) \in Z'_k(X, A)$.

Demostración. Si $q_k(c) \in Z'_k(X, A)$, entonces $0 = \partial \circ q_k(c) = q_{k-1} \circ \partial(c)$ de modo que $c \in Z_k(X, A)$. Por otro lado, si $c \in Z_k(X, A)$, tenemos que $q_{k-1} \circ \partial(c) = 0$ de forma que $q_k(c) \in Z'_k(X, A)$. \square

Lema 2.2.14. $c \in S_k(X)$ pertenece a $B_k(X, A)$ si y sólo si $q_k(c) \in B'_k(X, A)$.

Demostración. Si $c = \partial b + c'$ donde $b \in S_{k+1}(X)$ y $c' \in A$, entonces $q_k(c) = q_k \circ \partial(b) = \partial \circ q_k(b) \in B'_k(X, A)$. Ahora, si $q_k(c) \in B'_k(X, A)$, entonces $q_k(c) = q_k \circ \partial(b)$ para algún $b \in S_{k+1}(X)$. Por lo tanto, $c - \partial b \in \ker q_{k-1}$ de forma que $c = \partial b + c'$ donde $c' \in S_k(A)$. \square

Proposición 2.2.15. Para toda $k \geq 0$, $H_k(X, A) \cong Z_k(X, A)/B_k(X, A)$.

Demostración. Para probar esta afirmación, basta que probemos que el siguiente diagrama es conmutativo y tiene renglones exactos.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S_k(A) & \xrightarrow{i} & B_k(X, A) & \xrightarrow{q_k} & B'_k(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ 0 & \longrightarrow & S_k(A) & \longrightarrow & Z_k(X, A) & \longrightarrow & Z'_k(X, A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Esto es debido a que la exactitud de los diagramas implica que

$$B'_k(X, A) = B_k(X, A)/i(S_k(A)) \text{ y } B'_k(X, A) = Z_k(X, A)/i(S_k(A)).$$

Via el tercer teorema de isomorfismos, logramos que

$$H_k(X, A) = Z'_k(X, A)/B'_k(X, A) \cong Z_k(X, A)/B_k(X, A).$$

Ahora, la conmutatividad del diagrama es evidente por observaciones anteriores. Probaremos la exactitud del primer renglón. Primero, que dado que $S_k(A) \subset B_k(X, A)$ entonces $q_k(c) = 0$, para $c \in B_k(X, A)$. Esto nos dice que $q_k \circ i = 0$. Por lo tanto, $\text{Im } q_k \subseteq \ker q_k$. Por otro lado, si $c \in B_k(X, A)$ tenemos que $c = \partial b + c'$ con $b \in S_{k+1}(X)$ y $c' \in S_k(A)$, suponiendo que $q_k(c) = 0$ obtenemos que $0 = q_k \circ \partial(b) = \partial \circ q_{k+1}(b)$ lo que implica que $c \in S_k(A)$. Por ende, $\ker q_k \subseteq \text{Im } i$. La suprayectividad de q_k es suficiente con observar que un elemento en $B'_k(X, A)$ puede representarse como ∂b donde $b \in S_{k+1}(X)$.

Para el segundo renglón, la inclusión $S_k(A) \subseteq Z_k(X, A)$ se tiene por definición. Si $c \in S_k(A)$, entonces $q_k(c) = 0$. Si $c \in Z_k(X, A)$ y $q_k(c) = 0$, entonces $c \in S_k(A)$ por la definición de $Z'_k(X, A)$. La suprayectividad de q_k se deduce del lema (2.2.13). \square

Así, por la construcción del morfismo de conexión en la Proposición (2.1.6) obtenemos la sucesión exacta larga

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} \\ & & & & & & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) & \longrightarrow & H_{n-1}(X, A) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

2.2.3. Δ -homología y sus relaciones

En esta subsección, introduciremos una forma de darle estructura a ciertos espacios topológicos. Esencialmente, esta estructura permite darle una triangulación a dicho espacio, pero con la posibilidad de hacer los cálculos de la homología simplicial de manera fácil y rápida.

Definición 2.2.16 (Estructura de Δ -complejo en un espacio topológico). *Una estructura de Δ -complejo en un espacio topológico X es una colección de funciones continuas $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$ donde la dimensión depende del índice de modo que*

1. La restricción $\sigma_\alpha|_{\text{int}(\Delta^n)}$ es inyectiva y cada punto de X está en la imagen de exactamente una restricción $\sigma_\alpha|_{\text{int}(\Delta^n)}$.
2. Cada restricción de σ_α a una cara de Δ^n es una de las funciones continuas $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \rightarrow X$. Aquí, identificamos la cara de Δ^n con Δ^{n-1} , via el homeomorfismo lineal canónico entre ellos que preserva el orden.
3. Un conjunto $A \subset X$ es abierto si, y sólo si, $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ es abierto en Δ^n , para cada σ_α .

Una consecuencia del inciso (3) de la definición (2.2.16) es que X se puede construir como el espacio cociente de una colección de simplejos Δ_α^n disjuntos, uno por cada $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$, identificado cada cara de un Δ_α^n con el Δ_β^{n-1} correspondiente a la restricción de σ_β de σ_α . Podemos pensar su construcción de manera recursiva empezando con un conjunto discreto de puntos, añadiendo las aristas de las que son frontera, y así sucesivamente.

Ejemplo 2.2.17. En las figuras (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) podemos observar la estructura de Δ -complejo del círculo S^1 , el toro bidimensional T , el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ y la botella de Klein K , respectivamente.

De la misma forma que hemos realizado con las otras homologías, denotamos por $\Delta_n(X; R)$ al R -módulo libre generado por las funciones $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$ sobre un anillo conmutativo R . De forma análoga, definimos el operador frontera $\partial : \Delta^n \rightarrow \Delta^{n-1}$ como lo realizamos para la homología singular, de donde se sigue que $\Delta_*(X; R) = (\Delta_n(X; R), \partial)$ es un complejo de R -módulos. Denotamos a sus R -módulos de homología como $H_n^\Delta(X; R)$.

Ejemplo 2.2.18. La estructura de Δ -complejo de la circunferencia S^1 consiste en un vértice v y un arista a . Entonces, $\Delta_0(S^1)$ y $\Delta_1(S^1)$ son isomorfos a R y por tanto, $\partial : \Delta_1(S^1) \rightarrow \Delta_0(S^1)$ es cero, pues $\partial a = v - v$. Dado que no hay simplejos de dimensión mayor, obtenemos que

$$H_n^\Delta(S^1) \cong \begin{cases} R, & \text{para } n = 0, 1 \\ 0, & \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

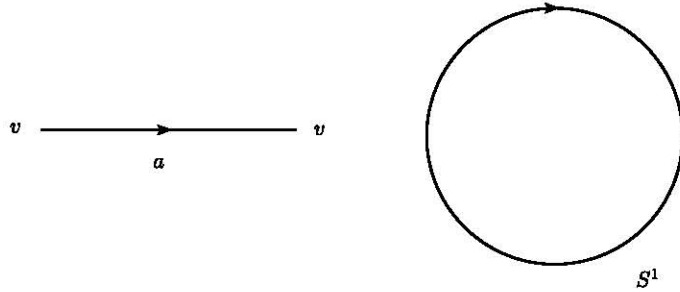


Figura 2.1: Δ -estructura del círculo.

Ejemplo 2.2.19. Para el toro bidimensional T , como en el ejemplo anterior, $\partial_1 = 0$. Por ende, $H_1^\Delta(T) \cong R$. En vista de que $\Delta_2 U = a + b - c = \Delta_2 L$ y $\{a, b, a + b - c\}$ es una base de $\Delta_1(T)$, tenemos que $H_1^\Delta(T) \cong R \oplus R$ con base en la homología dada por las clases $[a]$ y $[b]$. Debido a que no hay simplejos de dimensión 3, $H_2^\Delta(T) = \ker \partial_2$. Como $\Delta(pU + qL) = p\partial U + q\partial L = (p + q)(a + b - c) = 0$ es equivalente a que $p = -q$. Por lo tanto, $H_2^\Delta(T)$ es el módulo cíclico generado por $U - L$. Así,

$$H_n^\Delta(T) \cong \begin{cases} R, & \text{para } n = 0, 2 \\ R \oplus R, & \text{para } n = 1 \\ 0, & \text{para } n \geq 3 \end{cases}$$

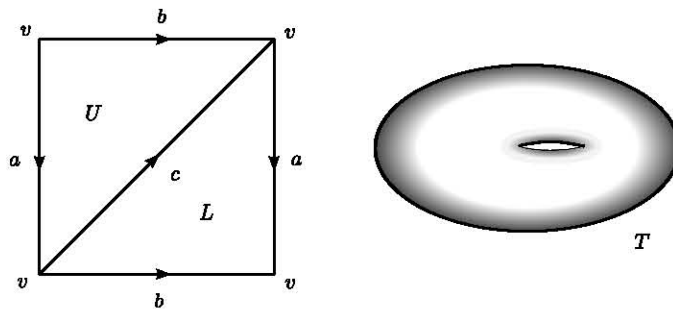


Figura 2.2: Δ -estructura del toro bidimensional.

Ejemplo 2.2.20. En el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$, observamos que la imagen de ∂_1 está generada por $w - v$, por tanto $H_0^\Delta(\mathbb{R}P^2) \cong R$ donde cualquier vértice

es generador. Dado que $\partial_2 U = a + b - c$ y $\partial_2 L = a + b + c$, ∂_2 es inyectiva. Por tanto, $H_2^\Delta(\mathbb{R}P^2) \cong 0$.

Ahora, $\ker \partial_1 \cong R \oplus R$ con base $a + b$ y c , además podemos escoger c y $a + b + c$ como base de $\ker \partial_1$ y $a + b + c$ y $2c = (a + b + c) - (a + b - c)$ como base de $\text{Im } \partial_2$. Por tanto, $H_1^\Delta(\mathbb{R}P^2) \cong R/2R$.

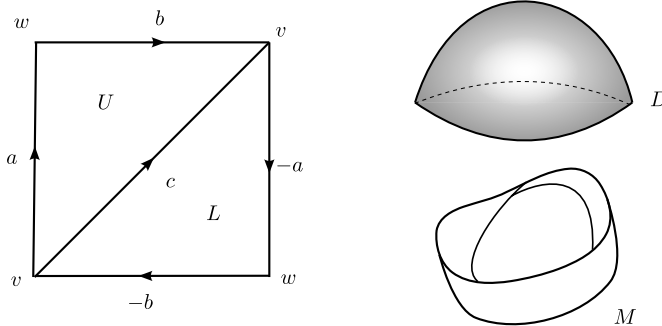


Figura 2.3: Δ -estructura del plano proyectivo.

Ejemplo 2.2.21. Por último, estudiemos el caso de la botella de Klein K . Para comenzar, observamos que la imagen de $\partial(v)$ es cero, pues todos los lados identifican sus extremos en v . Por ende, $H_0^\Delta(K) \cong R$. De la misma forma que en el plano proyectivo, tenemos que $\partial_2 U = a + b - c$ y $\partial_2 L = a + b + c$, lo que nos dice que ∂_2 es inyectiva. Por tanto, $H_2^\Delta(K) \cong 0$.

Por otro lado, observamos que $\ker \partial_1$ está generado por cada uno de los lados a , b y c . Además, tenemos que la imagen de ∂_2 , se puede ver como generada por $a + b + c$ y $2c$ como el ejemplo anterior (2.2.20). Por lo tanto, $H_1^\Delta(K) \cong R \oplus (R/2R)$.

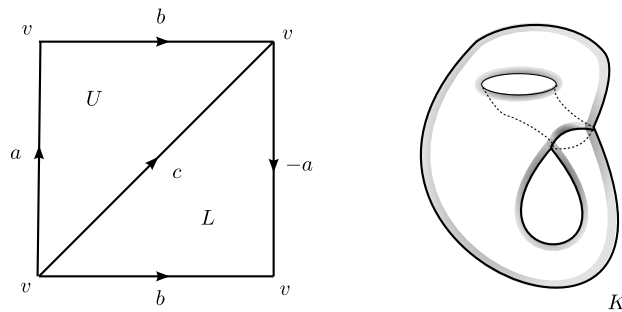


Figura 2.4: Δ -estructura de la botella de Klein.

Ahora, no nos resta más que relacionar las tres distintas homologías que podemos asociarle a un espacio topológico X . Las pruebas de dichos hechos van más allá de los objetivos de esta tesis, por lo que se referencia a los textos donde pondrán encontrarlas. Primero, si el espacio topológico posee una triangulación $t : |K| \rightarrow X$ para algún complejo simplicial K , se puede establecer un isomorfismo¹ entre la homología simplicial y la singular

$$H_*(K) \cong H_*(X).$$

Por otro lado, si nos fijamos en una estructura de Δ -complejo en el espacio X , también se puede establecer un isomorfismo²

$$H_*^\Delta(X) \cong H_*(X).$$

De forma que resulta que si X posee una triangulación $t : K \rightarrow X$ y una estructura de Δ -complejo, entonces

$$H_*^\Delta(X) \cong H_*(K).$$

2.2.4. Triangulaciones de clase C^∞ en variedades de clase C^∞

Definición 2.2.22. Sea M una variedad de clase C^∞ de dimensión n . Una triangulación $t : |K| \rightarrow M$ de un complejo simplicial de dimensión n es una triangulación C^∞ si para cualquier n -simplejo arbitrario $|\sigma|$ de K , la restricción $t|_{|\sigma|}$ se puede extender a un encaje C^∞ , es decir la restricción $t|_{|\sigma|}$ se puede extender a un encaje C^∞ de una vecindad abierta U de $|\sigma|$ en el espacio n -dimensional generado por $|\sigma|$ en M .

Teorema 2.2.23 (Cairns, J.H.C. Whitehead). Cualquier variedad de clase C^∞ tiene una triangulación de clase C^∞ y cualquier triangulación de la frontera de una variedad de clase C^∞ se puede extender a una triangulación de dicha clase de toda la variedad.

Consideremos una triangulación $t : K \rightarrow M$ de clase C^∞ de una variedad C^∞ cerrada, conexa y orientable. Dada una orientación en M , esta induce una orientación en los n -simplejos $|\sigma_j|$ de K de la siguiente forma. Sean v_0, \dots, v_n los vértices de $|\sigma_j|$ y denotemos $p_i = t(v_i)$, para toda $i = 1, \dots, n$. Ahora, para cada $i = 1, \dots, n$, definamos a u_i como el vector unitario que apunta del punto v_0 al punto v_i . Así, podemos considerar dicho u_i como un vector tangente a $|\sigma_j|$ basado en v_0 . Por ende, denotemos por w_i a $t_*(u_i)$, para cada $i = 1, \dots, n$. Esto nos permite, salvo permutar v_0 y v_1 , hacer coincidir la orientación de $\{w_i\}$ con la de M . Por último, dotamos a $|\sigma_j|$ con el orden inducido por los vértices v_0, \dots, v_n y denotamos por $\langle \sigma_j \rangle$ a dicho complejo orientado. Este método se ilustra en la figura (2.2.4).

¹[[12],147-155]

²[[6],128-131]

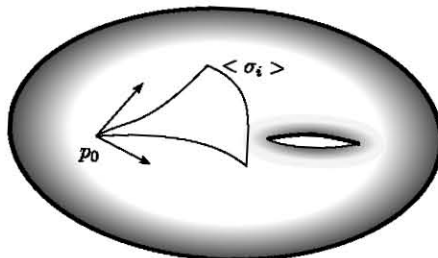


Figura 2.5: Método para inducir una orientación en el complejo simplicial K dada una triangulación $t : K \rightarrow M$.

Ahora, supongamos que $|K|$ es un conjunto compacto, así podemos construir una cadena de dimensión n , $c_0 \in C_n(K)$ de todos los n -simplejos orientados de K dada por

$$c_0 = \sum_j \langle \sigma_j \rangle.$$

Demostremos que $\partial c_0 = 0$. Sabemos que $\partial c_0 = \sum_j \partial \langle \sigma_j \rangle$ es una combinación lineal de $(n-1)$ -simplejos de K . Observamos que si $|\tau|$ es un simplejo de dimensión $n-1$, debido a la definición de complejo simplicial, hay exactamente dos n -simplejos que lo contienen como cara. Así, dicho simplejo aparece dos veces y con orientación contraria. Por lo tanto, $\partial c_0 = 0$.

Ahora, si $c = \sum_j a_j \langle \sigma_j \rangle$ es un ciclo de K , tendremos que

$$\partial c = \sum_j a_j \partial \langle \sigma_j \rangle = 0.$$

Por lo tanto, cada a_j no depende de los simplejos $\langle \sigma_j \rangle$, es decir, $c = ac_0$, para algún $a \in R$. Por tanto, el n -ésimo grupo de homología de K resulta ser el módulo cíclico generado por c_0 . Esto nos dice que la frontera de un complejo simplicial K es trivial, es decir $H_n(K, R) \cong R$.

En vista de que $H_*(K, R)$ y $H_*(M; R)$ están identificados naturalmente, denotemos por $[M] \in H_n(M; R)$ la clase correspondiente a c_0 . Dicha identificación se debe al hecho de que el grupo de homología es un invariante topológico y la definición de c_0 implica que la clase $[M]$ no dependa de la triangulación de clase C^∞ . Esta clase se denomina la clase fundamental de M . Si tomamos otra orientación de M , es decir $-M$, obtenemos que $[-M] = -[M]$. Finalmente, hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 2.2.24. Sea M una variedad n -dimensional de clase C^∞ compacta y asumamos que es conexa y orientable. Así,

$$H_n(M; R) \cong R.$$

Más aún, la clase fundamental $[M]$ que está determinada al especificar una orientación en M es un generador de dicho grupo.

2.2.5. Homología singular de clase C^∞

Definición 2.2.25. Decimos que un k -simplejo singular $\sigma : \Delta^k \rightarrow M$ es de clase C^∞ , si dicha función se puede extender a una función de clase C^∞ de una vecindad abierta de Δ^k en M .

De la misma forma, generamos un complejo de R -módulos considerando los R -módulos libres $S_k^\infty(M; R)$ generado sobre los k -simplejos singulares de clase C^∞ y utilizando como diferencial el operador frontera definido para k -simplejos singulares. A la homología resultante de este complejo $S_*^\infty(M; R) = (S_k^\infty(M; R), \partial)$ se le denomina homología singular de clase C^∞ . Una observación importante resulta ser que la inclusión $S_*(M)^\infty \subseteq S_*(M)$ induce un isomorfismo³

$$H_*^\infty(M; R) \cong H_*(M; R).$$

Para el estudio de variedades de clase C^∞ , dicho isomorfismo nos permite restringirnos al estudio de cadenas singulares de clase C^∞ .

2.3. Integral de formas diferenciales y el teorema de Stokes

En esta sección, definiremos lo que significa integrar una n -forma diferencial con soporte compacto sobre una variedad de dimensión n . A partir de esto, podremos probar el teorema de Stokes que nos dice que para toda $(n-1)$ -forma diferencial con soporte compacto, la integral de la derivada exterior de la forma sobre la variedad es igual a la integral de la forma sobre la frontera de ésta. Por último, introduciremos los mismos conceptos para el caso de integración de una k -forma diferencial sobre una k -cadena de clase C^∞ .

2.3.1. Integral de una n -forma diferencial sobre una variedad de dimensión n

Primero, definimos *la integral de una n -forma diferencial* $\omega = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ con soporte compacto en \mathbb{R}^n de forma natural como

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx_1 \dots dx_n.$$

Definición 2.3.1. Decimos que un difeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ *preserva orientación*, si $\det(D_x\varphi) > 0$. De otro modo, decimos que dicho difeomorfismo *revierte orientación*.

³Este resultado puede consultarse en [8].

Dada una orientación en \mathbb{R}^n , la definición de integral es independiente de la elección de coordenadas. Sean (x_1, \dots, x_n) y (y_1, \dots, y_n) sistemas coordenados C^∞ de \mathbb{R}^n , entonces existe un difeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n$ tal que $(y_1, \dots, y_n) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$. Sabemos que, por la definición de pullback, ω se expresa en las nuevas coordenadas por

$$\omega = f(\varphi^{-1}(y)) \det \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n.$$

Ahora, por el teorema del cambio de variables, la última igualdad es cierta cuando φ preserva orientación.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \omega &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\varphi^{-1}(y)) \det \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^* \omega. \end{aligned}$$

Definición 2.3.2. Definimos el soporte de una k -forma diferencial ω , como la cerradura del conjunto de puntos donde la forma no se anula, es decir

$$\text{sop } \omega = \overline{\{p \in M : \omega_p \neq 0\}}.$$

Definiremos la integral de una n -forma diferencial ω con soporte compacto sobre una variedad C^∞ orientada de dimensión n . Por los resultados anteriores, podemos elegir una cubierta abierta $\{U_i\}$ de M de vecindades coordenadas localmente finita y una partición de la unidad $\{f_i\}$ subordinada a ella. Por lo tanto, el soporte de $f_i \omega$ está contenido en cada U_i . Así, definimos

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{U_i} f_i \omega.$$

Por ende, eligiendo un sistema coordenado positivo, la integral está determinada.

La definición de integral es independiente de la elección de la cubierta abierta $\{U_i\}$ de vecindades coordenadas y la partición de la unidad $\{f_i\}$ subordinada a ella.

Sea $\{V_j\}$ una cubierta similar con la partición de la unidad $\{g_j\}$ subordinada a ella. Dado que $\sum_j g_j = 1$, por la linealidad de la integral,

$$\int_{U_i} f_i \omega = \sum_j \int_{U_i} f_i g_j \omega.$$

Por otro lado, el soporte de $f_i g_j \omega$ está contenido en $U_i \cap V_j$, por lo tanto

$$\int_{U_i} f_i g_j \omega = \int_{V_j} f_i g_j \omega.$$

Finalmente, obtenemos que

$$\sum_i \int_{U_i} f_i \omega = \sum_{i,j} \int_{U_i} f_i g_j \omega = \sum_{i,j} \int_{V_j} f_i g_j \omega = \sum_j \int_{V_j} g_j \omega.$$

Dicha definición se aplica a variedades con frontera y además, se tiene la linealidad de la integral

$$\int_M a\omega + b\eta = a \int_M \omega + b \int_M \eta, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad y \quad \omega, \eta \in \mathcal{A}^n(M)$$

2.3.2. El teorema de Stokes para variedades

Teorema 2.3.3 (Teorema de Stokes). Sea M una variedad C^∞ orientada de dimensión n y ω una $(n-1)$ -forma diferencial con soporte compacto. Entonces,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

donde ∂M es la frontera de M equipada con la orientación inducida por M .

Demostración. Eligiendo una cubierta abierta localmente finita $\{U_i\}$ de vecindades coordenadas y con una partición de la unidad $\{f_i\}$ subordinada a ella, entonces $\omega = \sum_i f_i \omega$. Como el teorema de Stokes es lineal, basta probar la afirmación para cada $f_i \omega$. De modo que el soporte de cada $f_i \omega$ está contenido en U_i . Por ello, podemos suponer que $M = \mathbb{R}^n$ o $M = \mathbb{H}^n$, el hiperplano superior de \mathbb{R}^n . Primero, consideremos el caso en que $M = \mathbb{R}^n$, así, podemos escribir a ω como

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Por lo que, la derivada exterior de ω resulta

$$d\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Si $M = \mathbb{R}^n$, por el teorema de Fubini, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} d\omega &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n \int \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n. \end{aligned}$$

Como a_i tiene soporte compacto, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_i = 0$. Esto nos dice que

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0.$$

Dado que \mathbb{R}^n no tiene frontera, obtenemos que

$$\int_{\partial \mathbb{R}^n} \omega = 0 = \int_{\mathbb{R}^n} d\omega.$$

Por otro lado, consideremos $M = \mathbb{H}^n$. Basta con modificar el dominio de integración de $x_n \in [0, \infty)$. Por el argumento anterior, las i -ésimas parciales de la integral se anularán todas excepto la n -ésima contribución. Así,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n \\ &= (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^\infty \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \right) dx_n dx_1 \dots dx_{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \dots dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Por otra parte, restringiendo ω a \mathbb{H}^n , sólo nos queda del término $a_n(x)$ cuando $x_n = 0$. Esto nos dice que $dx_n = 0$. Además, utilizando la orientación inducida por \mathbb{R}^n en \mathbb{H}^n , podemos ver que

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n} \omega = (-1)^{n-1} \int a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

Por lo que, concluimos que

$$\int_{\mathbb{H}^n} d\omega = \int_{\partial\mathbb{H}^n} \omega.$$

□

Corolario 2.3.4. Sea M una variedad C^∞ orientada sin frontera. Entonces, para cualaquier $(n-1)$ -forma diferencial ω en M con soporte compacto, tenemos que

$$\int_M d\omega = 0.$$

2.3.3. Integrales de formas diferenciales sobre cadenas y el teorema de Stokes

Consideremos una variedad M de clase C^∞ y su complejo de cadenas de simplejos C^∞ singulares $S_*^\infty(M) = (S_k^\infty(M, \partial))$. Sabemos que $\sigma : \Delta^k \rightarrow M$ es un k -simplejo singular C^∞ , si σ es una transformación de clase C^∞ . Así, cada k -forma diferencial, $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ tiene asignada la k -forma diferencial $\sigma^*\omega$ en Δ^k . Por tanto, podemos definir

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta^k} \sigma^*\omega.$$

Dicha definición la extendemos de forma lineal, es decir, si $c = \sum_i a_i \sigma_i$, entonces

$$\int_c \omega = \sum_i a_i \int_{\Delta^k} \sigma_i^* \omega.$$

Teorema 2.3.5. Para una cadena k -singular C^∞ c de una variedad M de clase C^∞ y una $(k-1)$ -forma diferencial ω en M , la siguiente igualdad es válida:

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Demostración. Por la linealidad de la integral, podemos probar sólo el caso para un k -simplejo C^∞ singular $\sigma : \Delta^k \rightarrow M$. Además, como $\sigma^*\omega$ es una $(k-1)$ -forma diferencial en Δ^k , podemos escribirla como

$$\sigma^*\omega = \sum_{i=1}^k a_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Así, por la linealidad de la integral, basta que probemos el caso en que

$$\sigma^*\omega = a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_k, \quad \text{para } j \text{ fijo.}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\sigma^*(d\omega) = d(\sigma^*\omega) = (-1)^{j-1} \frac{\partial a}{\partial x_j}(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Además, recordemos que

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \circ \epsilon_i.$$

donde las transformaciones ϵ_i fueron previamente definidas en la sección (2.2.2).

Esto nos permite obtener, por un lado que

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\Delta^k} \sigma^*(d\omega) = (-1)^{j-1} \int_{\Delta^k} \frac{\partial a}{\partial x_j}(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \quad (2.2)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\sigma} \omega &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \int_{\Delta^k} (\sigma \circ \epsilon_i)^*\omega \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \int_{\Delta^{k-1}} (\epsilon_i)^*(a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_k) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Debido a las propiedades del pullback y recordando que estamos omitiendo el término en dx_j , obtenemos que

$$\begin{aligned} &(\epsilon_i)^*(a(x)) (\epsilon_i)^* dx_1 \wedge \dots \wedge (\epsilon_i)^* dx_k \\ &= (\epsilon_i)^*(a(x)) d(x_1 \circ \epsilon_i) \wedge \dots \wedge d(x_k \circ \epsilon_i) \end{aligned}$$

Esto nos conmina a calcular primero los términos $d(x_l \circ \epsilon_i)$, para toda $i = 0, \dots, k$ y $l = 1, \dots, k$. Para comenzar denotemos por $y = (y_1, \dots, y_{k-1})$ a las funciones coordenadas del $(k-1)$ -simplejo orientado Δ^{k-1} .

Primero estudiemos el caso en que $i = 0$, de hecho las coordenadas x_i están expresadas por las y_i de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - \sum_{s=1}^{k-1} y_s \\ x_2 &= y_1 \\ &\vdots \\ x_k &= y_{k-1} \end{aligned}$$

Esto implica que $dx_1 = \sum_{s=1}^{k-1} dy_s$ y $dx_l = dy_{l-1}$, para toda $l \in \{2, \dots, k\}$. En el caso en que $i \neq 0$, la expresiones de las $\{x_i\}$ se escriben de la forma:

$$\begin{aligned} x_l &= y_l, \quad l < i \\ x_i &= 0 \\ x_l &= y_{l-1}, \quad l > i \end{aligned}$$

Lo que nos permite deducir que

$$dx_l = \begin{cases} dy_l, & l < i \\ 0, & l = i \\ dy_{l-1}, & l > i \end{cases}$$

Ahora podremos calcular los términos del integrando de la última expresión en la ecuación (2.3). Debido a que los términos dx_i para $i \neq 0, j$ son cero, sólo nos queda en el integrando las contribuciones correspondientes a 0 y j . Por ende,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^k (-1)^i (\epsilon_i)^*(a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_k) \\ &= (a \circ \epsilon_0)(y) \left(- \sum_{s=1}^{k-1} dy_s \right) \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{j-1} \wedge \dots \wedge dy_{k-1} \\ &\quad + (-1)^j (a \circ \epsilon_j)(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{k-1} \\ &= -(a \circ \epsilon_0)(y) dy_{j-1} \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge \hat{dy}_{j-1} \wedge \dots \wedge dy_{k-1} \\ &\quad + (-1)^j (a \circ \epsilon_j)(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{k-1} \\ &= (-1)^{j-1} (a \circ \epsilon_0)(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{j-1} \wedge \dots \wedge dy_{k-1} \\ &\quad + (-1)^j (a \circ \epsilon_j)(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{k-1}. \end{aligned}$$

Esto nos permite concluir que la integral en (2.3) se puede reducir a la expresión

$$\begin{aligned} & (-1)^{j-1} \int_{\Delta^{k-1}} a\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} y_i, y_1, \dots, y_{k-1}\right) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{k-1} \\ & + (-1)^j \int_{\Delta^{k-1}} a(y_1, \dots, 0, \dots, y_{k-1}) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{k-1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Por otra parte, consideremos el siguiente difeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$, definido como

$$\varphi(p_1, \dots, p_{k-1}) = (p_2, \dots, p_{j-1}, p_1, p_j, \dots, p_{k-1})$$

φ transforma Δ^{k-1} en sí mismo y dado que su matriz jacobiana tiene determinante $(-1)^{j-1}$, su valor absoluto es 1. Así, podemos computar el primer término de (2.4) por la transformación φ obteniendo

$$(-1)^{j-1} \int_{\Delta^{k-1}} a(y_1, \dots, y_{j-1}, 1 - \sum_{i=1}^{k-1} y_i, y_j, \dots, y_{k-1}) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{k-1}.$$

Por tanto, (2.3) queda como

$$\begin{aligned} & (-1)^{j-1} \int_{\Delta^{k-1}} \left(a(y_1, \dots, y_{j-1}, 1 - \sum_{i=1}^{k-1} y_i, y_j, \dots, y_{k-1}) \right. \\ & \quad \left. - a(y_1, \dots, 0, \dots, y_k) \right) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{k-1}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta^k} \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_1 \dots dx_k \\ & = \int_{(\Delta)^{k-1}} \left(\int_0^{1 - \sum_{i \neq j} x_i} \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j \right) dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_k \\ & = \int_{(\Delta')^{k-1}} \left(a(x_1, \dots, x_{j-1}, 1 - \sum_{i \neq j} x_i, x_{j+1}, \dots, x_k) \right. \\ & \quad \left. - a(x_1, \dots, 0, \dots, x_k) \right) dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_k \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde (Δ^{k-1}) es el $(k-1)$ -simplejo estándar en \mathbb{R}^{k-1} que se obtiene al omitir la dirección x_j en \mathbb{R}^k . Haciendo el cambio de variables por el cual $(\Delta')^{k-1}$ y Δ^k están identificados, la expresión (2.5) queda como

$$\begin{aligned} & (-1)^{j-1} \int_{\Delta^k} \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_1 \dots dx_k \\ & = (-1)^{j-1} \int_{\Delta^{k-1}} \left(a(y_1, \dots, y_{j-1}, 1 - \sum_{i=1}^{k-1} y_i, y_j, \dots, y_{k-1}) \right. \\ & \quad \left. - a(y_1, \dots, 0, \dots, y_{k-1}) \right) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{k-1}. \end{aligned}$$

□

2.4. Cohomologías en variedades

En esta sección estudiaremos las distintas teorías de cohomología se pueden definir sobre una variedad. Primero, retomaremos el estudio de la cohomología de de Rham que hemos empezado a estudiar en la subsección (1.3.5). Posteriormente, probaremos el lema de Poincaré que nos describe la cohomología de de Rham de la variedad producto $M \times \mathbb{R}$ a partir de la cohomología de de Rham de M . Esto nos permitirá ver que el concepto de cohomología de de Rham es invariante bajo la clasificación homotópica de variedades.

Por otra parte, introduciremos la cohomología de Čech de una variedad con respecto a una cubierta abierta \mathcal{U} de la variedad. Después, probaremos que la cohomología de de Rham es isomorfa a la cohomología de Čech siempre que la cubierta abierta relacionada sea contraíble.

2.4.1. La cohomología de de Rham

Sea M una variedad de clase C^∞ de dimensión n . Una k -forma diferencial $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ es *cerrada*, si $d\omega = 0$, y es *exacta*, si existe una $\eta \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$ tal que $d\eta = \omega$.

De la definición se sigue que toda forma exacta es cerrada. Denotemos por

$$\begin{aligned} Z^k(M) &= \ker (d : \mathcal{A}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}^{k+1}(M)) \\ B^k(M) &= \text{Im} (d : \mathcal{A}^{k-1}(M) \rightarrow \mathcal{A}^k(M)) \end{aligned}$$

a los conjuntos de formas cerradas y exactas respectivamente.

Denominamos al espacio cociente $H_{dR}^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$, *el k -ésimo espacio vectorial de cohomología de de Rham de la variedad M* . Dada una k -forma cerrada ω , denotamos por $[\omega] \in H_{dR}^k(M)$ a la clase de cohomología de de Rham de M . Así, definimos *el espacio vectorial de cohomología $H_{dR}^*(M)$ de de Rham de M* como la suma directa

$$H_{dR}^*(M) = \bigoplus_{k=0}^n H_{dR}^k(M).$$

Desde otro punto de vista, el espacio vectorial de cohomología de de Rham de M es la cohomología del complejo

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^0(M) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{n-1}(M) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^n(M) \longrightarrow 0.$$

Lo anterior nos permite interpretar que $H_{dR}^*(M) = H^*(\mathcal{A}^*(M), d)$.

Por otro lado, la estructura de producto en $\mathcal{A}^*(M)$ induce una estructura en $H_{dR}^*(M)$ de la siguiente forma. Sean $x \in H_{dR}^k(M)$ y $y \in H_{dR}^l(M)$ representadas por $\omega \in Z^k(M)$ y $\eta \in Z^l(M)$. Observamos que $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{kl} \omega \wedge d\eta = 0$. Por lo tanto, $\omega \wedge \eta \in Z^{k+l}(M)$. Esto nos permite definir $xy = [\omega \wedge \eta] \in$

$H_{dR}^{k+l}(M)$. Ahora, comprobemos que dicha clase no depende del representante. Sean $\omega = \omega' + d\xi$ y $\eta = \eta' + d\tau$. Tenemos, así que

$$\omega \wedge \eta = (\omega' + d\xi) \wedge (\eta' + d\tau) = \omega' \wedge \eta' + \underbrace{\omega' \wedge d\tau + d\xi \wedge \eta' + d\xi \wedge d\tau}_{(\#)}$$

Nos interesa probar que la parte $(\#)$ se puede ver como derivada de alguna $(k+l-1)$ -forma diferencial. Por un lado, observamos que

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \tau) &= d\omega \wedge \tau + (-1)^{k(l-1)}\omega \wedge d\tau \\ &= (-1)^{k(l-1)}(\omega' \wedge d\tau + d\xi \wedge d\tau). \end{aligned}$$

De modo que, $\omega' \wedge d\tau = (-1)^{k(l-1)}d(\omega \wedge \tau) - d\xi \wedge d\tau$. Análogamente,

$$\begin{aligned} d(\xi \wedge \eta) &= d\xi \wedge \eta + \xi \wedge d\eta \\ &= d\xi \wedge \eta' + d\xi \wedge d\tau \end{aligned}$$

Así, obtenemos que $d\xi \wedge \eta' = d(\xi \wedge \eta) - d\xi \wedge d\tau$. Además, $d(\xi \wedge d\tau) = d\xi \wedge d\tau$.

Por lo tanto, concluimos que

$$\begin{aligned} \omega' \wedge d\tau + d\xi \wedge \eta' + d\xi \wedge d\tau \\ = d((-1)^{k(l-1)}\omega \wedge \tau + \xi \wedge \eta - \xi \wedge d\tau). \end{aligned}$$

Esto nos permite obtener que $yx = (-1)^{kl}xy$. A la estructura obtenida al dotar a $H_{dR}^*(M)$ de este producto se le denomina el álgebra cohomológica de de Rham.

Ahora, consideremos M, N variedades de clase C^∞ y $f : M \rightarrow N$ una función de clase C^∞ entre ellas. Entonces, el pullback de formas diferenciales $f^* : \mathcal{A}^*(N) \rightarrow \mathcal{A}^*(M)$ induce un homomorfismo $f^* : H_{dR}^*(N) \rightarrow H_{dR}^*(M)$ en las álgebras cohomológicas de de Rham. Este hecho es consecuencia de la proposición (1.3.6) y (1.3.9).

2.4.2. Invarianza homotópica de la cohomología de de Rham

En esta subsección estudiaremos la invarianza homotópica de la cohomología de de Rham. Primero, presentaremos un resultado que afirma que la cohomología de de Rham de una variedad M es isomorfa a aquella de la variedad producto $M \times \mathbb{R}$. Por otra parte, probaremos que si dos variedades M y N de clase C^∞ son homotópicas, entonces sus cohomologías de de Rham son isomorfas. Por último, veremos como se comporta la cohomología de de Rham de un retracto por deformación.

Teorema 2.4.1. Sea M una variedad de clase C^∞ . Consideremos la aplicación proyección $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ y la inclusión natural $i : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$. Así, la aplicación inducida

$$\pi^* : H_{dR}^*(M) \rightarrow H_{dR}^*(M \times \mathbb{R})$$

es un isomorfismo cuya inversa es la aplicación inducida $i^* : H_{dR}^*(M \times \mathbb{R}) \rightarrow H_{dR}^*(M)$.

Demostración. Primero, dado que $\pi \circ i = \text{id}_M$, tenemos que $i^* \circ \pi^* = \text{id}$ en $H^k(M)$. Para probar este teorema, basta que demostremos que $\pi^* \circ i^* = \text{id}$ en $H_{dR}^k(M \times \mathbb{R})$. Para ello, construiremos una homotopía

$$\Phi : \mathcal{A}^k(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}^{k-1}(M \times \mathbb{R})$$

de complejos que conecte a $\pi^* \circ i^*$ con la transformación identidad. Esto quiere decir que debemos probar que $\text{id} - \pi^* \circ i^* = (d\Phi + \Phi d)$ en $\mathcal{A}^k(M \times \mathbb{R})$, para alguna homotopía Φ . Sea $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ un elemento arbitrario. Para un sistema local de coordenadas (U, x_1, \dots, x_n) de M y una coordenada $t \in \mathbb{R}$, podemos escribir a ω de la forma

$$\begin{aligned} \omega = & \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(x, t) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ & + \sum_{j_1 < \dots < j_{k-1}} b_{j_1, \dots, j_{k-1}}(x, t) dt \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}}. \end{aligned}$$

donde el último término contiene dt , mientras que el primero no. Ahora, utilizando el segundo término, definimos

$$\Phi\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_{k-1}} \left(\int_0^t (b_{j_1, \dots, j_{k-1}})(x, t) dt \right) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}}$$

Así, para $\omega \in \mathcal{A}^k(M \times \mathbb{R})$ arbitrario, es suficiente con probar que

$$d(\Phi\omega) - \Phi(d\omega) = \omega - (\pi^* \circ i^*)\omega.$$

Por linealidad, basta con que verifiquemos los siguientes casos:

1. $\omega = a(x, t) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$; y
2. $\omega = b(x, t) dt \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}}$.

En el caso (1), dado que $\Phi\omega = 0$, y

$$\begin{aligned} \Phi(d\omega) &= \left(\int_0^t \frac{\partial a}{\partial t} dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= (a(x, t) - a(x, 0)) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \omega - (\pi^* \circ i^*)\omega. \end{aligned}$$

Por otro lado, si ω es de la forma (2) como $i^*\omega = 0$, nos resulta fácil ver que $\text{id} - (\pi^* \circ i^*)\omega = \omega$. Además,

$$\begin{aligned} d(\Phi\omega) &= d \left(\left(\int_0^t b(x, t) dt \right) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}} \right) \\ &= \omega + \sum_{m=1}^n \left(\int_0^t \frac{\partial b}{\partial x_m} dt \right) dx_m \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(d\omega) &= \Phi\left(-\sum_{m=1}^n \frac{\partial b}{\partial x_m} dt \wedge dx_m \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j-k}\right) \\ &= -\sum_{m=1}^n \left(\int_0^t \frac{\partial b}{\partial x_m} dt\right) dx_m \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j-k}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, resulta que

$$d(\Phi\omega) - \Phi(d\omega) = \omega.$$

Aunque el cálculo está hecho en coordenadas locales, $\Phi\omega$ está definida independientemente del sistema coordenado debido a que sólo depende del parámetro t . Por lo tanto, $\Phi\omega$ está definida en todo M . \square

Corolario 2.4.2 (Lema de Poincaré). La cohomología de de Rham de \mathbb{R}^n es trivial. Esto es,

$$H^k(\mathbb{R}^n) = H^k(\text{un punto}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}$$

En otras palabras, si $\omega \in \mathcal{A}^k(\mathbb{R}^n)$ con $k > 0$ es una forma cerrada arbitraria, entonces existe una $(k-1)$ -forma diferencial η de modo que $\omega = d\eta$

Corolario 2.4.3. Sean M y N dos variedades de clase C^∞ . Si dos aplicaciones C^∞ de M en N son homotópicas, entonces sus homomorfismos inducidos $H_{dR}^*(N) \rightarrow H_{dR}^*(M)$ son los mismos.

Demostración. Sean $f, g : M \rightarrow N$ dos aplicaciones de clase C^∞ homotópicas. Por ende, existe una transformación $F : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ de clase C^∞ tal que

$$F(p, t) = \begin{cases} f(p), & t \leq 0 \\ g(p), & t \geq 1 \end{cases}$$

Tomando $i_0, i_1 : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ donde $i_0(p) = (p, 0)$ y $i_1(p) = (p, 1)$, resulta que $f = F \circ i_0$ y $g = F \circ i_1$. Ahora, por el teorema anterior, obtenemos que $i_0^* = i_1^* = (\pi^*)^{-1}$. Por lo tanto,

$$f^* = (F \circ i_0)^* = i_0^* \circ F^* = i_1^* \circ F^* = (F \circ i_1)^* = g^*.$$

\square

Definición 2.4.4. Decimos que dos variedades M y N de clase C^∞ tienen *el mismo tipo de homotopía*, si hay dos aplicaciones de clase C^∞ $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow M$ de modo que $g \circ f$ y $f \circ g$ son homotópicas a las transformaciones identidad de M y N , respectivamente. También, decimos que una variedad con el mismo tipo de homotopía de un punto es *contraíble*.

Corolario 2.4.5 (Invarianza homotópica de la cohomología de de Rham). Las cohomologías de de Rham de dos variedades de clase C^∞ del mismo tipo de homotopía son isomorfas. En particular, la cohomología de de Rham de una variedad contraíble es trivial.

Ahora, introduciremos la noción topológica de retracto por deformación en el contexto de variedades de clase C^∞ para mostrar la utilidad de la invarianza homotópica de la cohomología de de Rham. Sea S una subvariedad de una variedad M de clase C^∞ y consideremos la aplicación de inclusión $i : S \rightarrow M$.

Definición 2.4.6. Una retracción de M a S es una aplicación de clase C^∞ $r : M \rightarrow S$ que restringe a la identidad en S , es decir, $r \circ i = \text{id}_S$. Si existe una retracción de M a S decimos que S es un retracto de M . Una retracción por deformación de M a S es una aplicación C^∞ $F : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ de modo que

- I $F(x, 0) = x$, para todo $x \in M$;
- II hay una retracción $r : M \rightarrow S$ de forma que $F(x, 1) = r(x)$, y
- III para todo $s \in S$ y $t \in \mathbb{R}$, $F(s, t) = s$.

Si hay una retracción por deformación de M a S , decimos que S es un retracto por deformación de M .

Denotemos $f_t(x) = F(x, t)$. Así, podemos pensar que una retracción por deformación $F : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ es una familia de funciones $f_t : M \rightarrow M$ tales que

- 1. f_0 es la identidad en M ;
- 2. $f_1(x) = r(x)$, para alguna retracción $r : M \rightarrow S$, y
- 3. para toda t , la aplicación $f_t : M \rightarrow M$ deja fijo a S punto a punto.

Proposición 2.4.7. Si una subvariedad S es un retracto por deformación de M , entonces S y M tienen el mismo tipo de homotopía.

Demostración. Sea $F : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ la retracción por deformación de M a S y $r(x) = f_1(x) = F(x, 1)$ la correspondiente retracción. Dado que r es retracción, $r \circ i = \text{id}_S$. Por definición de retracto por deformación, $i \circ r = f_1$ y la retracción por deformación nos provee de una homotopía

$$f_1 = i \circ r \sim f_0 = \text{id}_M.$$

Por lo tanto, S y M tienen el mismo tipo de homotopía. \square

Ejemplo 2.4.8. Consideremos S^1 como la circunferencia de radio 1 imersa en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Definamos la retracción $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1$ dada como $r(x) = \frac{x}{|x|}$. Además, definamos la retracción por deformación de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ a S^1 , dada por

$$F : (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$$F(x, t) = (1 - t)x + t \frac{x}{|x|}$$

Por ende, S^1 es un retracto por deformación de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y via la proposición (2.4.7) ambas variedades tienen el mismo tipo de homotopía. Utilizando la invarianza homotópica de la cohomología de de Rham y el ejemplo (1.4.11), tenemos que

$$H_{dR}^k(S^1) = H_{dR}^k(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases}$$

Ejemplo 2.4.9. Es fácil ver que S^1 también es retracto por deformación de la banda de Moebius M y usando el ejemplo anterior (2.4.8), tenemos que

$$H_{dR}^k(M) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases}$$

2.4.3. La cohomología de Čech con respecto a una cubierta abierta

Sea X un espacio topológico. Para una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X , definiremos el espacio vectorial de cohomología de Čech⁴ $\check{H}^*(X, \mathcal{U})$ de la siguiente forma. Primero, construiremos un complejo simplicial abstracto $N(\mathcal{U})$ llamado el nervio de la cubierta abierta \mathcal{U} . Tomamos al conjunto de índices A de la cubierta abierta \mathcal{U} como el conjunto de vértices de $N(\mathcal{U})$, y para $k + 1$ elementos distintos $\alpha_0, \dots, \alpha_{k+1}$ de A , asumimos que dichos elementos generan un k -simplejo siempre que la intersección $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_{k+1}}$ sea distinta de vacío, es decir

$$N(\mathcal{U}) = \{(\alpha_0, \dots, \alpha_{k+1}) : U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_{k+1}} \neq \emptyset\}.$$

Así, definimos el espacio vectorial de cohomología de Čech⁵ como:

$$\check{H}^*(X, \mathcal{U}) = H^*(N(\mathcal{U}), \mathbb{R}).$$

Ejemplo 2.4.10. Consideremos un complejo simplicial K y V el conjunto de vértices de K . Así, para cada $\sigma \in K$, el conjunto obtenido de $|\sigma|$ al remover su frontera es denotado por (σ) y se denomina el simplejo abierto σ . Además, para cada vértice $v \in V$, definimos la estrella abierta $O(v)$ de v como el conjunto descrito como

$$O(v) = \bigcup_{v \in \sigma \in K} (\sigma).$$

Dicho conjunto es la unión de todo los simplejos abiertos de K los cuales tienen a v como vértice.

Claramente, $\mathcal{U} = \{O(v) : v \in V\}$ es una cubierta abierta de K . Ahora, identificaremos de forma natural $N(\mathcal{U}) = K$, debido a que una condición necesaria y suficiente para que $(l + 1)$ -vértices $v_0 \dots v_l$ generen un l -simplejo de K es que

$$O(v_0) \cap \dots \cap O(v_l) \neq \emptyset.$$

Por tanto, en este caso el k -ésimo espacio vectorial de cohomología de Čech $\check{H}^*(|K|, \mathcal{U})$ de $|K|$ con respecto a la cubierta abierta \mathcal{U} puede ser identificado con el espacio vectorial de cohomología simplicial $H^*(K)$ de K .

⁴Esta cohomología difiere en principio con la cohomología de Čech utilizada en la teoría de gavillas y pregavillas.

⁵Esto se puede hacer sobre cualquier anillo de coeficientes.

A continuación, presentaremos otro método para definir el espacio vectorial de cohomología de Čech sin utilizar la noción de nervio. Para cualquier conjunto ordenado $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ de $k+1$ elementos distintos de A , asignamos un número real $c(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ tal que para una permutación arbitraria $\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_k}$ de $\alpha_0, \dots, \alpha_k$,

$$c(\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_k}) = \text{sgn}(i)c(\alpha_0, \dots, \alpha_k). \quad (2.6)$$

A dicho elemento lo llamamos una k -cocadena de X con respecto a \mathcal{U} . Denotamos al conjunto de todas las k -cocadenas de X por $C^k(X, \mathcal{U})$ y lo dotamos de una estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Además, definimos el operador cofrontera

$$\begin{aligned} \delta : C^k(X, \mathcal{U}) &\rightarrow C^{k+1}(X, \mathcal{U}) \\ \delta c(\alpha_0, \dots, \alpha_{k+1}) &= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i c(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{k+1}), \end{aligned}$$

para $c \in C^k(X, \mathcal{U})$. Debido a la propiedad (2.6), el operador δ cumple que $\delta \circ \delta = 0$. Esto nos dice que $C^*(X, \mathcal{U}) = (C^k(X, \mathcal{U}), \delta)$ es un complejo de cocadenas y su cohomología es la cohomología de Čech $H^*(X, \mathcal{U})$.

2.4.4. Comparación entre la cohomología de de Rham y la cohomología de Čech

Esta subsección tiene como objetivo establecer una relación entre la cohomología de de Rham y la cohomología de Čech.

Decimos que una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de un espacio topológico X es contraíble, si la intersección de un número finito de abiertos pertenecientes a \mathcal{U} es contraíble.

Proposición 2.4.11. Una variedad M de clase C^∞ tiene una cubierta abierta contraíble.

Demostración. Sea $t : |K| \rightarrow M$ una triangulación C^∞ de M , lo que nos permite identificar $|K|$ con M via t . Así, es fácil ver que el conjunto $\{O(v) : v \in V\}$ de todas las estrellas abiertas de cada vértice de K es una cubierta abierta contraíble. \square

El objetivo de esta subsección reside en probar que la cohomología de de Rham de una variedad M de clase C^∞ es isomorfa a la cohomología de Čech con respecto una cubierta abierta contraíble \mathcal{U} de M , es decir,

$$H_{dR}^*(M) \cong \check{H}^*(M, \mathcal{U}).$$

La prueba de este teorema es alterna a la teoría de pregavillas que no trataremos a profundidad en esta tesis. Sin embargo, el lector interesado podrá encontrar un desarrollo propio en el libro [14] a partir de la página 323.

Para ello, estableceremos una conexión entre la cohomología de de Rham y la cohomología de Čech. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$. y denotemos por $\mathcal{A}^{k,l}(\mathcal{U})$ al conjunto de asignaciones de un elemento

$$\omega(\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}^l(U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}),$$

para cualquier conjunto ordenado $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ de $k + 1$ elementos distintos de A , tal que para cualquier permutación $\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_k}$ de $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ la asignación cumpla que

$$\omega(\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_k}) = \text{sgn}(i_0, \dots, i_k) \omega(\alpha_0, \dots, \alpha_k).$$

Es fácil ver por la linealidad de las k -formas diferenciales que dichos conjuntos tienen una estructura natural de espacios vectoriales.

Así, podemos definir los siguientes operadores fronteras:

$$\begin{aligned} \delta : \mathcal{A}^{k,l}(\mathcal{U}) &\rightarrow \mathcal{A}^{k+1,l}(\mathcal{U}) \\ (\delta\omega)(\alpha_0, \dots, \alpha_{k+1}) &= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \omega(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{k+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d : \mathcal{A}^{k,l}(\mathcal{U}) &\rightarrow \mathcal{A}^{k,l+1}(\mathcal{U}) \\ (d\omega)(\alpha_0, \dots, \alpha_k) &= d(\omega(\alpha_0, \dots, \alpha_k)) \in \mathcal{A}^{l+1}(U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}), \end{aligned}$$

para $\omega \in \mathcal{A}^{k,l}(\mathcal{U})$. Aquí, $\omega(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k)$ significa precisamente la l -forma restringida a $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap \hat{U}_{\alpha_i} \cap \dots \cap U_{\alpha_{k+1}}$.

Proposición 2.4.12. Las siguiente afirmaciones para los operadores δ y d son válidas:

I $\delta \circ \delta = 0$;

II $d \circ d = 0$, y

III $d \circ \delta = \delta \circ d$.

Demostración. Las afirmaciones (I) y (II) se deducen de inmediatamente de sus definiciones. Para probar la afirmación (III), tomemos $\omega \in \mathcal{A}^{k,l}(\mathcal{U})$. Por un lado,

$$\begin{aligned} d \circ \delta\omega(\alpha_0, \dots, \alpha_{k+1}) &= d \left(\sum_{i=1}^k \omega(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k) \right) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^i d\omega(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k). \end{aligned}$$

Por otro lado, obtenemos que

$$\begin{aligned} \delta \circ d\omega(\alpha_0, \dots, \alpha_{k+1}) &= \delta(d\omega(\alpha_0, \dots, \alpha_k)) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^i d\omega(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k). \end{aligned}$$

□

Esto nos permite obtener una red de diagramas conmutativos ilustrada en la Figura (2.6) usualmente conocida como complejo doble. En dicho diagrama, $r : \mathcal{A}^l(M) \rightarrow \mathcal{A}^{0,l}(\mathcal{U})$ es la restricción de cualquier l -forma diferencial $\omega \in \mathcal{A}^l(M)$ definida en todo M a cada conjunto abierto U_α . También, $C^k(\mathcal{U})$ designa a $C^k(M, \mathcal{U})$, e $i : C^k(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{A}^{k,0}(\mathcal{U})$ es la inclusión natural.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}^l(M) & \xrightarrow{r} & \mathcal{A}^{0,l}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{A}^{1,l}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\delta} & \dots & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{A}^{k,l}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
& & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}^1(M) & \xrightarrow{r} & \mathcal{A}^{0,1}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{A}^{1,1}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\delta} & \dots & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{A}^{k,1}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
& & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}^0(M) & \xrightarrow{r} & \mathcal{A}^{0,0}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{A}^{1,0}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\delta} & \dots & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{A}^{k,0}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
& & & & \uparrow i & & \uparrow i & & \uparrow i & & \uparrow i \\
& & & & C^0(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\delta} & \dots & \xrightarrow{\delta} & C^k(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
& & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Figura 2.6: Complejo doble formado por los conjuntos $\mathcal{A}^{k,l}(\mathcal{U})$.

Proposición 2.4.13. Para $k, l \geq 0$ arbitrarios, las sucesiones

$$\text{I} : 0 \longrightarrow \mathcal{A}^l(M) \xrightarrow{r} \mathcal{A}^{0,l}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{A}^{1,l} \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \mathcal{A}^{k,l}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

$$\text{II} : 0 \longrightarrow C^k(\mathcal{U}) \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{k,0}(\mathcal{U}) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{k,1} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{k,l}(\mathcal{U}) \xrightarrow{d} \dots$$

son exactas.

Demostración. Primero, probaremos que el complejo (I) es exacto. Para ello, observemos que la función $r : \mathcal{A}^l(M) \rightarrow \mathcal{A}^{0,l}(\mathcal{U})$ debido a que es una restricción resulta ser una función inyectiva. Ahora, supongamos que $\omega \in \mathcal{A}^{0,l}(\mathcal{U})$ es de modo que $\delta(\omega) = 0$. Esto nos dice que para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, las restricciones de $\omega(\alpha)$ y $\omega(\beta)$ en $U_\alpha \cap U_\beta$ coinciden. Por tanto, ω es una forma diferencial definida en todo M . Esto significa que ω está en la imagen de r .

Para demostrar el caso general probaremos que existe una homotopía en el complejo (I), lo que nos dirá que dicho complejo es exacto. Así, para $k > 0$,

definimos

$$\Phi : \mathcal{A}^{k,l}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{A}^{k-1,l}(\mathcal{U})$$

como sigue. Sea $\{f_\alpha\}$ una partición de la unidad subordinada a la cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, y para $\omega \in \mathcal{A}^{k,l}(\mathcal{U})$, designamos

$$(\Phi\omega)(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) = \sum_{\alpha} f_\alpha \omega(\alpha, \alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}).$$

Aún cuando $f_\alpha \omega(\alpha, \alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ es una forma diferencial en $U_\alpha \cap U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_{k-1}}$, poniendo 0 fuera de U_α , podemos considerarla como un elemento de $\mathcal{A}^l(U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_{k-1}})$. Veamos, entonces que, para un elemento $\omega \in \mathcal{A}^{k,l}(\mathcal{U})$ arbitrario,

$$\delta(\Phi\omega) - \Phi(\delta\omega) = \omega.$$

De hecho, observamos que por un lado,

$$\begin{aligned} \delta(\Phi\omega)(\alpha_0, \dots, \alpha_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i (\Phi\omega)(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k) \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{i=0}^k (-1)^i f_\alpha \omega(\alpha, \alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k) \end{aligned}$$

y por otro,

$$\begin{aligned} \Phi(\delta\omega)(\alpha_0, \dots, \alpha_k) &= \sum_{\alpha} f_\alpha (\delta\omega)(\alpha, \alpha_0, \dots, \alpha_k) \\ &= \sum_{\alpha} f_\alpha \omega(\alpha_0, \dots, \alpha_k) + \sum_{\alpha} \sum_{i=0}^k f_\alpha \omega(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k). \end{aligned}$$

Por tanto, si $\omega \in \mathcal{A}^{k,l}(\mathcal{U})$ satisface que $\delta(\omega) = 0$, entonces $\omega = \delta(\Phi\omega)$. Esto nos dice que (I) es una sucesión exacta.

Por último, probaremos que (II) es un complejo exacto. Para comenzar, tenemos que la función $i : C^k(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{A}^{k,0}(\mathcal{U})$ es inyectiva. Ahora, asumamos que $\omega \in \mathcal{A}^{k,1}(\mathcal{U})$ satisface $d\omega = 0$. Esto significa que la función $\omega(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ en $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}$ toma el valor 0 al calcular su derivada exterior. Por otro lado, como \mathcal{U} es contraíble, esto nos dice que $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}$ son conexos. Por lo tanto, $\omega(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ es una función constante, lo que nos permite afirmar que $\omega(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ se encuentra en la imagen de i . Para terminar, asumamos que $l > 0$ y $\omega \in \mathcal{A}^{k,l}(\mathcal{U})$ satisface que $d\omega = 0$. Aplicando que la cohomología de toda variedad contraíble es trivial a $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}$, obtenemos que la sucesión (II) es exacta. □

Teorema 2.4.14. Sea M una variedad de clase C^∞ . Luego, para cada cubierta abierta contraíble arbitraria \mathcal{U} de M , existe un isomorfismo

$$H_{dR}^*(M) \cong \check{H}^*(M, \mathcal{U}).$$

Demostración. Utilizaremos el complejo doble introducido anteriormente. Primero, construiremos un candidato para la correspondencia

$$\varphi : H_{dR}^l(M) \rightarrow \check{H}^l(M, \mathcal{U}).$$

Así, para una clase de cohomología de de Rham $x \in H_{dR}^l(M)$, asignaremos un elemento $\varphi(x) \in \check{H}^l(M, \mathcal{U})$. Primero, seleccionamos una forma cerrada $\omega \in \mathcal{A}^l$ en M que represente a x y designamos $r(\omega) = \omega_0 \in \mathcal{A}^{0,l}(\mathcal{U})$. Ahora, la conmutatividad del complejo doble nos permite afirmar $d\omega_0 = d(r(\omega)) = r(d\omega) = 0$ concluyendo, via la exactitud de (I) que existe un $\eta_0 \in \mathcal{A}^{0,l-1}(\mathcal{U})$ de modo que $d\eta_0 = \omega_0$.

Nombremos $\omega_1 = \delta\eta_0$. Ahora, observamos que $d\omega_1 = d(\delta\eta_0) = \delta(d\eta_0) = \delta(\omega_0) = \delta(r(\omega)) = 0$. La exactitud de (II) nos permite ahora afirmar la existencia de un $\eta_1 \in \mathcal{A}^{1,l-2}(\mathcal{U})$ de modo que $d\eta_1 = \omega_1$. Así, denotamos a $\omega_2 = \delta\eta_1$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^l(\mathcal{U})_{[\omega]} & \xrightarrow{r} & \mathcal{A}^{0,l}(\mathcal{U})_{[\omega_0]} \\ & & \uparrow d \\ & & \mathcal{A}^{0,l-1}(\mathcal{U})_{[\eta_0]} \xrightarrow{\delta} \mathcal{A}^{1,l-1}(\mathcal{U})_{[\omega_1]} \\ & & \uparrow d \\ & & \mathcal{A}^{1,l-2}(\mathcal{U})_{[\eta_1]} \end{array}$$

Figura 2.7: Construcción de ω_1 .

Ahora, asumamos que $\omega_i \in \mathcal{A}^{i,l-i}(\mathcal{U})$ se ha construido recursivamente bajo el esquema anterior. Entonces, en vista de que $d\omega_i = 0$ por suposición recursiva, existe $\eta_i \in \mathcal{A}^{i,l-i-1}(\mathcal{U})$ tal que $\omega_i = d\eta_i$. Esto nos permite definir $\omega_{i+1} = \delta\eta_i \in \mathcal{A}^{i+1,l-i-1}(\mathcal{U})$.

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \uparrow d & & \uparrow d \\ \dots \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{i,l-i}(\mathcal{U})_{[\omega_i]} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{A}^{i+1,l-i}(\mathcal{U}) \\ \uparrow d & & \uparrow d \\ \mathcal{A}^{i,l-i-1}(\mathcal{U})_{[\eta_i]} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{A}^{i+1,l-i-1}(\mathcal{U})_{[\omega_{i+1}]} \\ & & \uparrow d \\ & & \vdots \end{array}$$

Figura 2.8: Construcción de ω_i .

De esta forma, podemos alcanzar finalmente $\omega_l \in \mathcal{A}^{l,0}(\mathcal{U})$. Como $d\omega_l = 0$, análogamente, existe una $c \in C^l(\mathcal{U})$ de forma que $\omega_l = i(c)$, debido a que $i(\delta c) = \delta(i(c)) = \delta(\omega_l) = \delta \circ \delta(\eta_{l-1}) = 0$. Así, c es un cociclo. Por ende, podemos definir $\varphi(x) = [c] \in \check{H}^l(M, \mathcal{U})$.

Para probar que la aplicación φ está bien definida, tomemos otra forma cerrada $\omega' \in \mathcal{A}^l(\mathcal{U})$ que represente a x y por la misma discusión, determinamos $\omega'_i \in \mathcal{A}^{i,l-i}(\mathcal{U})$ y $\eta_i \in \mathcal{A}^{i,l-i-1}(\mathcal{U})$, para finalmente obtener un cociclo $c' \in C^l(\mathcal{U})$. Así, basta que probemos que c y c' son cohomólogos.

Para ello, observamos que hay un elemento $\gamma_0 \in \mathcal{A}^{l-1}(M)$ de forma que $\omega' = \omega + d\gamma_0$. Por tanto, tenemos que $\omega'_0 = \omega_0 + r(d\gamma_0) = \omega_0 + d(r\gamma_0)$. Ahora, probaremos inductivamente que para cualquier $i = 0, \dots, l$, hay un elemento $\gamma_i \in \mathcal{A}^{i-1,l-i-1}(\mathcal{U})$ de modo que $\omega'_i = \omega_i + \delta(d\gamma_i)$. Lo que nos dice que en cada paso, ω_i y ω'_i son cohomólogos. Aquí, abreviaremos diciendo que si $i = 0$, entonces δ es reemplazada por r y $\mathcal{A}^{-1,l-1}(\mathcal{U})$ sustituye a $\mathcal{A}^{l-1}(M)$, y para el caso en que $i = l$, δ es reemplazada por i y $\mathcal{A}^{l-1,-1}(\mathcal{U})$ sustituye a $C^l(\mathcal{U})$.

Supongamos que hemos probado la afirmación para el i -ésimo caso, demostraremos que dicha afirmación sigue siendo válida para el caso $i + 1$. Como $\omega_i = d\eta_i$, $\omega'_i = d\eta'_i$, por definición, tenemos

$$d(\eta'_i - \eta_i - \delta\gamma_i) = \omega_i - \omega'_i - d(\delta\gamma_i) = 0.$$

Por la exactitud de (I), hay un $\gamma_{i+1} \in \mathcal{A}^{i,l-i-1}(\mathcal{U})$ tal que

$$d\gamma_{i+1} = \eta'_i - \eta_i - \delta\gamma_i.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \omega'_{i+1} &= \delta\eta'_i = \delta\eta_i + \delta(d\gamma_{i+1}) \\ &= \omega_i + \delta(d\gamma_{i+1}). \end{aligned}$$

Esto prueba la afirmación. Por último, en el caso $i = l$, hay un elemento $\gamma_l \in C^{l-1}(\mathcal{U})$ de forma que $\omega'_l = \omega_l + \delta(\gamma_l)$. Por otro lado, dado que $\omega'_l = i(c')$ y $\omega_l = i(c)$, obtenemos que $c' = c + \delta\gamma_l$. Por ende, c y c' son cohomólogos. En efecto, la aplicación $\varphi : H_{dR}^l(M) \rightarrow \check{H}^l(M, \mathcal{U})$ está bien definida.

De manera análoga, usando la exactitud de (I) y (II), podemos definir una aplicación de $C^l(\mathcal{U})$ en $\mathcal{A}^l(M)$ zigzagueando en el sentido contrario. Llamemos a dicha aplicación

$$\psi : \check{H}^*(M, \mathcal{U}) \rightarrow H_{dR}^*(M).$$

Es claro que por el método de construcción, ambas aplicaciones son inversas una de la otra. Debido a la independencia del levantamiento, como en pruebas anteriores es fácil ver que dichas aplicaciones son homomorfismos. Por lo tanto, φ es un isomorfismo. \square

2.5. El teorema de de Rham

En esta última sección, abordaremos el teorema principal de la tesis. Primero, estudiaremos las diversas versiones del teorema, la manera en la que se relacionan y algunas de sus consecuencias. Por último, probaremos el teorema.

2.5.1. Versiones del teorema de de Rham y sus interrelaciones

En esta subsección, presentaremos el teorema central de dicha tesis: El teorema de de Rham. Primero, estudiaremos la versión general del teorema y la versión para variedades trianguladas. Después, probaremos que de la segunda versión podemos obtener la primera. Posteriormente, discutiremos algunas de las consecuencias de este teorema.

Sea M una variedad de clase C^∞ de dimensión n . Hemos definido dos complejos de cocadenas, el complejo de de Rham $\mathcal{A}^*(M) = (\mathcal{A}^k(M), d)$ y el complejo de cocadenas singulares de clase C^∞ , $S_\infty^*(M) = (S_\infty^k(M), \delta)$. Dichos complejos están relacionados por la integral de las formas diferenciales sobre cadenas singulares de la siguiente manera:

$$I : \mathcal{A}^k(M) \rightarrow S_\infty^k(M)$$

$$\omega \mapsto I(\omega)(\sigma) = \int_\sigma \omega := \int_{\Delta^k} \sigma^* \omega.$$

Lema 2.5.1. La aplicación $I : \mathcal{A}^k(M) \rightarrow S_\infty^k(M)$ es un morfismo de cadenas. Es decir, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^k(M) & \xrightarrow{d} & \mathcal{A}^{k+1}(M) \\ \downarrow I & & \downarrow I \\ S_\infty^k(M) & \xrightarrow{\delta} & S_\infty^{k+1}(M) \end{array}$$

Demostración. Sea $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ y $c \in S_\infty^k(M)$. Así, por el teorema de Stokes para cadenas, tenemos que

$$I(d\omega)(c) = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = I(\omega)(\partial c) = \delta(I(\omega)(c)).$$

Por ende, $I \circ d = \delta \circ I$. □

El lema anterior (2.5.1) implica que la transformación I induce un homomorfismo en las cohomologías $I : H_{dR}^*(M) \rightarrow H(S_\infty^*(M))$.

Teorema 2.5.2 (Teorema de de Rham). Sea M una variedad de clase C^∞ de dimensión n . El morfismo de complejos dado por $I : \mathcal{A}^*(M) \rightarrow S_\infty^*(M)$ induce un isomorfismo

$$I : H_{dR}^*(M) \cong H(S_\infty^*(M)).$$

Dado el isomorfismo $H(S_\infty^*(M, \mathbb{R})) \cong H_*(M, \mathbb{R})$, esto induce un isomorfismo en sus espacios duales. Así, el teorema de de Rham nos dice que

$$H_{dR}^*(M) \cong H^*(M, \mathbb{R}).$$

Además, dicha cohomología es topológicamente invariante, es decir, dos variedades de clase C^∞ topológicamente equivalentes tienen cohomologías isomorfas.

Ahora, podemos extender dicho resultado a variedades de clase C^∞ dotadas de una triangulación C^∞ dada por $t : |K| \rightarrow M$. Consideremos $\langle \sigma \rangle = \langle v_0 \cdots v_l \rangle$ un l -simplejo orientado de K y $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$. Así, definimos, via la realización geométrica de K ,

$$\int_{\langle \sigma \rangle} \omega = \int_{|\sigma|} t^* \omega.$$

Así, definimos $I : \mathcal{A}^*(M) \rightarrow C^*(K, \mathbb{R})$,

$$I(\omega)(\langle \sigma \rangle) = \int_{\langle \sigma \rangle} \omega$$

Debido al teorema de Stokes para cadenas, dicha función resulta ser un morfismo de cadenas.

Teorema 2.5.3 (Teorema de de Rham para variedades trianguladas). Sea M una variedad de clase C^∞ y supongamos que nos es dada una triangulación $t : |K| \rightarrow M$ de clase C^∞ . Entonces, el morfismo de cadenas definido por $I : \mathcal{A}^*(M) \rightarrow C^*(K, \mathbb{R})$ induce un isomorfismo

$$I : H_{dR}^*(M) \cong H^*(K, \mathbb{R}).$$

Podemos deducir el teorema de de Rham a partir de esta versión. Dotemos de un orden total al conjunto de vértices de un complejo simplicial K , y para un l -simplejo $\sigma = \langle v_0 \cdots v_l \rangle$ de K , consideramos sólo el orden de los vértices tal que $v_0 \langle \cdots \rangle v_l$. Así, podemos definir una aplicación de cadenas $C_*(K) \rightarrow S_\infty^*(M)$ y además, se sabe que dicha función es una homotopía de cadenas. De este modo, induce un morfismo de cocadenas $S_\infty^*(M) \rightarrow C^*(K, \mathbb{R})$, lo que nos provee de un isomorfismo en la cohomología:

$$H^*(S_\infty^*(M)) \cong H^*(M, \mathbb{R}).$$

Además, por definición de la aplicación I , podemos verificar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_{dR}^*(M) & \xrightarrow{I} & H^*(S_\infty^*(M)) \\ \parallel & & \downarrow \\ H_{dR}^*(M) & \xrightarrow{I} & H^*(K, \mathbb{R}) \end{array}$$

Definición 2.5.4 (k -ésimo número de Betti). Definimos el k -ésimo número de Betti β_k de la variedad M como

$$\beta_k = \dim_{\mathbb{R}} H_k(M, \mathbb{R}).$$

Este número expresa la cantidad de k -ciclos esenciales en M y refleja la estructura global de dicha variedad. En algunos casos, el teorema de de Rham no sólo determina el número de Betti, sino también la forma en la que estos ciclos están distribuidos en M .

Para detectar un ciclo z de dimensión k en M , basta con construir una k -forma cerrada ω en M tal que $\int_z \omega \neq 0$. Además, si z' es un ciclo homólogo a z y ω' es una k -forma diferencial cohomóloga a ω , el valor de la integral no cambia. Lo que nos permite hacer la siguiente afirmación: Si z_1, \dots, z_r son ciclos generadores de $H_k(M; \mathbb{R})$ donde $r = \beta_k$ y $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$, entonces existe una forma cerrada ω de modo que $\int_{z_i} \omega = a_i$, para toda i , la cual es única salvo la ambigüedad de añadir formas exactas.

2.5.2. Prueba del teorema

En esta sección, concluiremos con nuestro objetivo global de la tesis. Para ello, utilizaremos el teorema (2.4.14) que nos da un isomorfismo entre la cohomología de de Rham y la de Čech en el caso de variedades trianguladas.

Sea M una variedad de clase C^∞ y $t : |K| \rightarrow M$ una triangulación de clase C^∞ . Dicha triangulación nos permite identificar $|K|$ con M . Sea V el conjunto de vértices de K . Sabemos que $\mathcal{U} = \{O(v) : v \in V\}$ es una cubierta abierta contraible de M . Via el teorema (2.4.14), el grupo de cohomología de Čech $\hat{H}^*(M; \mathcal{U})$ de M con respecto a \mathcal{U} se puede identificar naturalmente con el grupo de cohomología $H^*(K, \mathbb{R})$ del complejo simplicial con coeficientes en \mathbb{R} , y por tanto, con $H^*(M, \mathbb{R})$.

Ahora, describiremos brevemente cuál es el papel que juega la integral. Consideremos la aplicación $I : H_{dR}^l(M) \rightarrow H^l(M, \mathbb{R})$ definida de la siguiente manera. Sea $x \in H_{dR}^l(M)$ representada por una l -forma cerrada ω . Así, para un l -simplejo orientado arbitrario $\langle \sigma \rangle = \langle v_0 \cdots v_l \rangle$ de K , al considerar

$$c_0(\langle \sigma \rangle) = \int_{\langle \sigma \rangle} \omega \quad (2.7)$$

$c_0 \in C^l(K, \mathbb{R})$ resulta un cociclo. Por otro lado, definamos $I(x) = [c_0]$. Para probar el teorema de de Rham para variedades trianguladas es suficiente que mostremos que las dos aplicaciones $I : H_{dR}^l(M) \rightarrow H^l(M, \mathbb{R})$ y la anterior $\varphi : H_{dR}^l(M) \rightarrow \hat{H}^l(M; \mathcal{U})$ coinciden esencialmente de manera que podremos identificar naturalmente $\hat{H}^l(M; \mathcal{U})$ y $H^l(M, \mathbb{R})$.

Proposición 2.5.5. El siguiente diagrama es conmutativo módulo un signo, esto quiere decir que si $\epsilon_l = (-1)^{\frac{l(l+1)}{2}}$, entonces $I = \epsilon_l \varphi$.

$$\begin{array}{ccc} H_{dR}^l(M) & \xrightarrow{I} & H^l(K, \mathbb{R}) \\ \parallel & & \parallel \\ H_{dR}^l(M) & \xrightarrow{\varphi} & \hat{H}^l(M; \mathcal{U}) \end{array}$$

Demostración. Sea $x \in H_{dR}^l(M)$ la clase representada por una forma cerrada $\omega \in \mathcal{A}^l(M)$, entonces $I(x)$ será la clase de cohomología representada por el cociclo $c_0 \in C^l(K; \mathbb{R})$ en la expresión (2.7). Por otra parte, el teorema (2.4.14) nos permite construir un cociclo $c \in C^l(K; \mathbb{R})$ zigzagueando en el complejo doble definido en (2.4.4) donde las asignaciones $\eta_i \in \mathcal{A}^{l-i-1}(\mathcal{U})$ cumplen que $\delta\eta_i = d\eta_{i+1}$, para todo $i = 0, \dots, l-1$. De este modo, basta probar que c_0 y c son cohomólogos.

En la prueba de esta proposición se utilizarán dos significados para la transformación δ . Cuando se trate de elementos de $a \in C^l(K; \mathbb{R})$, éste se refiere a que $(\delta a)(\sigma) = a(\partial\sigma)$. El otro significado es como transformación del tipo $\delta : \mathcal{A}^{k,l}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{A}^{k+1,l}(\mathcal{U})$.

Primero, por el teorema de Stokes, para un l -simplejo orientado arbitrario $\langle v_0, \dots, v_l \rangle$ de K , tenemos que

$$\begin{aligned} c_0(\langle v_0, \dots, v_l \rangle) &= \int_{\langle v_0, \dots, v_l \rangle} \omega \\ &= \int_{\langle v_0, \dots, v_l \rangle} d\eta_0(v_0) \\ &= \sum_{j=0}^l (-1)^j \int_{\langle v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_l \rangle} \eta_0(v_0). \end{aligned}$$

Ahora, definamos una cocadena $d_0 \in C^{l-1}(K; \mathbb{R})$ como

$$d_0(\langle v_0, \dots, v_{l-1} \rangle) = \int_{\langle v_0, \dots, v_{l-1} \rangle} \eta_0(v_0),$$

para cualquier $(l-1)$ -simplejo orientado arbitrario $\langle v_0, \dots, v_{l-1} \rangle$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \delta d_0(\langle v_0, \dots, v_l \rangle) &= \sum_{j=0}^l (-1)^j d_0(\langle v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_l \rangle) \\ &= \int_{\langle v_0, \dots, v_l \rangle} \eta_0(v_1) + \sum_{j=1}^l (-1)^j \int_{\langle v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_l \rangle} \eta_0(v_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$\begin{aligned} (c_0 - \delta d_0)(\langle v_0, \dots, v_l \rangle) &= \int_{\langle v_1, \dots, v_l \rangle} \eta_0(v_0) - \eta_0(v_1) \\ &= \int_{\langle v_1, \dots, v_l \rangle} -\delta\eta_0(v_0, v_1) \\ &= - \int_{\langle v_1, \dots, v_l \rangle} d\eta_1(v_0, v_1). \end{aligned}$$

Esto nos motiva a definir una cocadena $d_k \in C^{l-1}(K; \mathbb{R})$ con $i = 1, \dots, l-1$ como

$$d_i(\langle v_1, \dots, v_{l-1} \rangle) = \int_{\langle v_i, \dots, v_{l-1} \rangle} \eta_m(v_0, \dots, v_i),$$

para cualquier $(l-1)$ -simplejo $\langle v_1, \dots, v_{l-1} \rangle$ de K .

De forma análoga, observamos que

$$\begin{aligned} \delta d_i(\langle v_1, \dots, v_l \rangle) &= \sum_{j=1}^l (-1)^j d_i(\langle v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_l \rangle) \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^j \int_{\langle v_{i+1}, \dots, v_l \rangle} \eta_i(\langle v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, v_{i+1} \rangle) \\ &\quad + \sum_{j=i+1}^l (-1)^j \int_{\langle v_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_l \rangle} \eta_i(v_0, \dots, v_i). \end{aligned}$$

Por otro lado, observamos que

$$\begin{aligned} \int_{\langle v_i, \dots, v_l \rangle} d\eta_i(v_0, \dots, v_i) &= \sum_{j=i}^l (-1)^{j-i} \int_{\langle v_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_l \rangle} \eta_i(v_0, \dots, v_i) \\ &= \int_{\langle v_{i+1}, \dots, v_l \rangle} \eta_i(v_0, \dots, v_i) \\ &\quad + \sum_{j=i+1}^l (-1)^{j-i} \int_{\langle v_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_l \rangle} \eta_i(v_0, \dots, v_i) \end{aligned}$$

Denotemos por $I(d\eta_i) = \int_{\langle v_i, \dots, v_l \rangle} d\eta_i(v_0, \dots, v_i)$. Observemos que

$$\begin{aligned} (-1)^{i+1} I(d\eta_i) &= (-1)^{i+1} \int_{\langle v_{i+1}, \dots, v_l \rangle} \eta_i(v_0, \dots, v_i) \\ &\quad - \sum_{j=i+1}^l (-1)^j \int_{\langle v_{i+1}, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_l \rangle} \eta_i(v_0, \dots, v_i). \end{aligned}$$

Por ende, para toda $i = 0, \dots, l-1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} (-1)^{i+1} I(d\eta_i) + \delta\eta_i &= \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j \int_{v_i, \dots, v_l} \eta_i(v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{i+1}) \\ &= \int_{\langle v_i, \dots, v_l \rangle} d\eta_{i+1}(v_0, \dots, v_{i+1}) = I(d\eta_{i+1}). \end{aligned}$$

Ahora, multiplicando esta expresión por ϵ_{i+1} y sumando sobre todos los

valores de i , resulta que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{l-1} \epsilon_{i+1} \delta d_i &= \sum_{i=0}^{l-1} \epsilon_{i+1} I(d\eta_{i+1}) - (-1)^{i+1} \epsilon_{i+1} I(d\eta_i) \\
&= \epsilon_1 I(d\eta_1) - (-1) \epsilon_1 c_0 + \epsilon_2 I(d\eta_2) \\
&\quad - (-1)^2 \epsilon_2 I(d\eta_1) + \dots + \epsilon_l c - (-1)^l \epsilon_l I(d\eta_{l-1}) \\
&= -c_0 + \sum_{i=1}^{l-1} (\epsilon_i - (-1)^{i+1} \epsilon_{i+1}) I(d\eta_i) + \epsilon_l c.
\end{aligned}$$

Ahora, observemos que el exponente de ϵ_i corresponde a la suma de los primeros i naturales. Denotemos a dicha suma τ_i . Resulta que τ_i y $\tau_{i+1} + (i+1) = \tau_i + 2(i+1)$ tienen la misma paridad. Por ende, los términos del segundo sumando de la ecuación anterior se eliminan, permitiéndonos afirmar que

$$c_0 + \sum_{i=0}^{l-1} \epsilon_{i+1} \delta d_i = \epsilon_l c.$$

En la discusión anterior, hemos utilizado el teorema de Stokes en la ecuación (2.5.2), sin embargo, la forma diferencial η_0 sólo está definida en la estrella abierta $O(v)$ de cada vértice v , por lo que no está claro si los valores de las integrales

$$\int_{\langle v_0, \dots, v_l \rangle} d\eta_0(v_0), \quad \int_{\langle v_0, \dots, \eta_0(v_0), \dots, v_l \rangle}$$

existen. Este problema sucede también para las η_i . Para resolver esto, en vez de considerar la estrella abierta $O(v)$ de cada vértice v , escojamos un conjunto abierto más grande $O'(v)$ que contenga a $O(v)$ de modo que

$$O'(v_0) \cap \dots \cap O'(v_k)$$

sean siempre contraíbles. Así, podemos realizar la argumentación anterior utilizando la cubierta $\mathcal{U}' = \{O'(v)\}$. Así, los valores de las integrales estarán determinadas, y el teorema de Stokes se puede aplicar sin ninguna dificultad. Tal cubierta se puede construir a partir de la subdivisión baricéntrica del complejo simplicial. □

Cabe mencionar que el teorema de de Rham nos permite probar que en el caso de variedades cuyos grupos de homología con coeficientes en \mathbb{R} son de dimensión finita, entonces dichos grupos serán isomorfos a los grupos de cohomología de de Rham. Otra observación importante es que los elementos de torsión de dichos grupos de homología se pierden al considerar el anillo de coeficientes un campo. Con estas observaciones, via los cálculos hechos en el capítulo de homología (2.2.19), (2.2.21) y (2.2.20), tenemos que las cohomologías de de Rham para el toro bidimensional T , la botella de Klein K y el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ están dadas por

$$H_{dR}^k(T) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, 2 \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$$

$$H_{dR}^k(K) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0 \\ \mathbb{R} & k = 1 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases}$$

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}P^2) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases}$$

2.5.3. Sucesión de Mayer-Vietoris

Sea $\{U, V\}$ una cubierta abierta de una variedad M de clase C^∞ y considere la aplicación de inclusión $i_U : U \rightarrow M$, $i_U(p) = p$. Entonces, el pullback

$$i_U^* : \mathcal{A}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}^k(U)$$

es la aplicación que restringe toda k -forma diferencial en M a U . Así, tenemos cuatro funciones de inclusión que hacen que inducen el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ j_U \nearrow & & \searrow i_U \\ U \cap V & & M \\ j_V \searrow & & \nearrow i_V \\ & V & \end{array}$$

Restringiéndonos a U y V , obtenemos un homomorfismo

$$\begin{aligned} i : \mathcal{A}^k(M) &\rightarrow \mathcal{A}^k(U) \oplus \mathcal{A}^k(V) \\ \omega &\mapsto (i_U^* \omega, i_V^* \omega). \end{aligned}$$

Por otra parte, definimos la aplicación diferencia como

$$\begin{aligned} j : \mathcal{A}^k(U) \oplus \mathcal{A}^k(V) &\rightarrow \mathcal{A}^k(U \cap V) \\ (\omega, \eta) &\mapsto j_V^* \eta - j_U^* \omega. \end{aligned}$$

Si la intersección $U \cap V$ es vacía, definimos $\mathcal{A}^k(U \cap V) = 0$. Por ende, la aplicación j sería cero.

Proposición 2.5.6. Para cualquier entero $k \geq 0$, la sucesión de homomorfismos

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^k(M) \xrightarrow{i} \mathcal{A}^k(U) \oplus \mathcal{A}^k(V) \xrightarrow{j} \mathcal{A}^k(U \cap V) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Sea (f_U, f_V) una partición de la unidad subordinada a la cubierta abierta $\{U, V\}$.

1. Probemos que la aplicación i es inyectiva. Supongamos que $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ es una forma cerrada que cumple que $i\omega = 0$. Entonces,

$$i\omega = (i_U^*\omega, i_V^*\omega) = (0, 0) \Rightarrow i_U^*\omega = 0 \text{ y } i_V^*\omega = 0$$

Por lo tanto, $\omega = 0$ en $U \cup V = M$.

2. Ahora, veamos que $\text{Im } i = \ker j$. Para comenzar, tomemos $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$. Observamos que

$$ji(\omega) = j(i_U^*\omega, i_V^*\omega) = j_V^*i_V^*\omega - j_U^*i_U^*\omega = 0 \text{ en } U \cap V.$$

Consideremos $(\omega, \eta) \in \mathcal{A}^k(M) \oplus \mathcal{A}^k(V)$ de modo que $j(\omega, \eta) = 0$. Entonces,

$$j_V^*\eta - j_U^*\omega = 0, \text{ es decir, } j_U^*\omega = j_V^*\eta \text{ en } U \cap V.$$

Lo anterior nos permite definir una forma $\xi = f_U\omega + f_V\eta - f_{U \cap V}\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ tal que $i(\xi) = (\omega, \eta)$.

3. Por último, probemos que j es una función suprayectiva. Para una forma $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, definamos la extensión por cero de $f_V\omega$ de $U \cap V$ a U como

$$\omega_U(x) = \begin{cases} f_V(x)\omega, & \text{si } x \in U \cap V \\ 0, & \text{si } x \in V \setminus (U \cap V) \end{cases}$$

De manera análoga, definimos la extensión por cero ω_V de $f_U\omega$ de $U \cap V$ a V . Así, en $U \cap V$, $(-\omega_U, \omega_V)$ se restringe a $(-f_V\omega, f_U\omega)$. Entonces, si $(-\omega_U, \omega_V) \in \mathcal{A}^k(U) \oplus \mathcal{A}^k(V)$, tenemos que

$$j(-\omega_U, \omega_V) = j_V^*(f_V\omega) - (-j_U^*(f_U\omega)) = \omega \in \mathcal{A}^k(U \cap V).$$

□

Dado que la sucesión de morfismos de complejos de espacios vectoriales

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^*(M) \xrightarrow{i} \mathcal{A}^*(U) \oplus \mathcal{A}^*(V) \xrightarrow{j} \mathcal{A}^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces la proposición (2.1.3) induce una sucesión exacta larga en la cohomología via el morfismo de conexión

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_{dR}^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H_{dR}^k(M) \xrightarrow{i^*} H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V) \xrightarrow{j^*} \\ H_{dR}^k(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H_{dR}^{k+1}(M) \xrightarrow{i^*} H_{dR}^{k+1}(U) \oplus H_{dR}^{k+1}(V) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Esta sucesión exacta larga se denomina *la sucesión de Mayer-Vietoris para la cubierta* (U, V) . También, la proposición (2.1.3) nos afirma que el morfismo de conexión $d^* : H^k(U \cap V) \rightarrow H^{k+1}(M)$ se puede ver como

$$d^* = (j^*)^{-1} \circ d \circ (i^*)^{-1}.$$

Esta sucesión nos permitirá calcular la cohomología de de Rham de diversas variedades. Es claro que en el caso en que U , V y $U \cap V$ son conexos, la sucesión de Mayer-Vietoris para las 1-álgebras de cohomología se trivializa. Por ello, podemos comenzar dicha sucesión en las 1-álgebras de cohomología. En el siguiente ejemplo, se probará por inducción cómo se puede calcular la cohomología de de Rham de la esfera unitaria S^n de dimensión n . El caso base ya fue probado en el ejemplo (2.4.8).

Ejemplo 2.5.7. Consideremos S^n la esfera unitaria en \mathbb{R}^n . Via la proyección estereográfica podemos cubrir la esfera con dos conjuntos abiertos U y V difeomorfos a \mathbb{R}^{n+1} cuya intersección $U \cap V$ es difeomorfa al producto $S^{n-1} \times \mathbb{R}$. Supondremos de forma inductiva que $H_{dR}^k(S^{n-1}) \cong \mathbb{R}$, para $k = 0$, $n - 1$ y $H_{dR}^k(S^{n-1}) = 0$, para $k \neq 0, n - 1$. Via el lema de Poincaré (2.4.1) sabemos que la cohomología de U y V se trivializan, y por la invarianza homotópica, obtenemos que $H_{dR}^k(S^{n-1}) \cong H_{dR}^k(U \cap V)$. Por tanto, la sucesión de Mayer-Vietoris para la cubierta $\{U, V\}$ quedaría en una primera parte

$$0 \longrightarrow H_{dR}^0(S^n) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\beta} \mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} H_{dR}^1(S^n) \longrightarrow 0; \quad (2.8)$$

para $2 \geq k \geq n - 1$,

$$0 \longrightarrow H_{dR}^k(S^n) \longrightarrow 0, \quad y \quad (2.9)$$

por último,

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\theta} H_{dR}^n(S^n) \longrightarrow 0. \quad (2.10)$$

Debido a la exactitud de la sucesión general, el trozo de sucesión (2.9) implica que $H_{dR}^k(S^n) = 0$ para $2 \leq k \leq n - 1$. Por otra parte, en (2.8), la transformación α es inyectiva, $\text{Im } \beta = \ker \gamma$ y además, $\text{Im } \gamma = H_{dR}^1(S^n)$. De esto obtenemos que $H_{dR}^0(S^n) \cong \mathbb{R}$ y $H_{dR}^1(S^n) = 0$. Por último, en (2.10), observamos que la transformación θ es inyectiva y sobre, por lo tanto, $H_{dR}^n(S^n) \cong \mathbb{R}$.

Ahora, estudiaremos la cohomología de de Rham de las superficies compactas, orientables y cerradas de género g . Para ello, comencemos analizando la cohomología de una de dichas superficies sin un punto.

Lema 2.5.8. Suponga que p es un punto en una superficie M compacta, orientable y cerrada y sea $i : C \rightarrow M \setminus \{p\}$ la aplicación de inclusión de un pequeño círculo alrededor de p . Entonces, la aplicación restricción

$$i^* : H_{dR}^1(M \setminus \{p\}) \rightarrow H_{dR}^1(C)$$

corresponde a la aplicación cero.

Demostración. Sea ω una 1-forma cerrada en $M \setminus \{p\}$ que represente a un elemento $[\omega] \in H_{dR}^1(M \setminus \{p\})$. Debido al isomorfismo $H_{dR}^1(C) \cong H_{dR}^1(S^1) \cong \mathbb{R}$ dado por la integración sobre C , para identificar $i^*[\omega]$ en $H_{dR}^1(C)$, basta que se calcule la integral $\int_C i^*\omega$. Si D es el disco abierto en M acotado por la curva C , entonces $M \setminus D$ es una superficie compacta orientada y con frontera C . Por el teorema de Stokes,

$$\int_C i^*\omega = \int_{\partial(M \setminus D)} i^*\omega = \int_{M \setminus D} d\omega = 0,$$

dado que ω es una 1-forma diferencial cerrada. Por lo tanto, $i^* \equiv 0$. \square

Proposición 2.5.9. Sea M un toro, p un punto en M y A el toro pinchado $M \setminus \{p\}$. La cohomología de A es:

$$H_{dR}^k(A) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0 \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases}$$

Demostración. Cubramos M con dos conjuntos abiertos, A y un disco U que contenga a p . Dado que A , U y $A \cap U$ son conexos, podemos empezar la sucesión de Mayer-Vietoris en las 1-álgebras cohomológicas. Además, U es contraíble, por ende, tiene cohomología trivial. Así, dicha sucesión se ve como

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\beta} H_{dR}^1(A) \xrightarrow{\alpha} H_{dR}^1(S^1) \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} H_{dR}^2(A) \longrightarrow 0$$

Observamos que la aplicación α resulta ser la aplicación restricción i^* . Por el lema anterior (2.5.8), $\alpha = i^* = 0$. Entonces,

$$H_{dR}^1(A) = \ker \alpha = \text{Im } \beta \cong H_{dR}^1(M) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R},$$

y por ende, existe una sucesión exacta de aplicaciones lineales

$$0 \longrightarrow H_{dR}^1(S^1) \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R} \longrightarrow H_{dR}^2(A) \longrightarrow 0.$$

Esto nos dice que $H_{dR}^2(A) = 0$. \square

A continuación, procederemos a calcular la cohomología de la superficie compacta y orientable Σ_2 de género 2. Esto nos proveerá de un método generalizable inductivamente para cualquier género.

Proposición 2.5.10. La cohomología de una superficie compacta y orientable Σ_2 de género 2 es:

$$H_{dR}^k(\Sigma_2) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, 2 \\ \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, & k = 1 \\ 0, & k > 2 \end{cases}$$

Demostración. Considere la cubierta de Σ_2 dada abiertos U y V , cada uno de los cuales tiene el mismo tipo de homotopía que el toro pinchado A y su intersección $U \cap V$ es un cilindro que tiene el mismo tipo de homotopía de S^1 . Además, U , V y $U \cap V$ son conexos, por lo que podemos tomar la sucesión de Mayer-Vietoris como:

$$0 \longrightarrow H_{dR}^1(\Sigma_2) \xrightarrow{\beta} \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} H_{dR}^2(\Sigma_2) \longrightarrow 0$$

Observamos que la aplicación $\alpha : H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \rightarrow H_{dR}^1(S^1)$ es la aplicación diferencia

$$\alpha(\omega_U, \omega_V) = j_V^* \omega(V) - j_U^* \omega(U)$$

donde j_U y j_V son las inclusiones de $S^1 \cong U \cap V$ en U y V respectivamente. Por el lema anterior (2.5.8) $j_U^* \omega(U) = j_V^* \omega(V) = 0$, entonces $\alpha = 0$. Así, de la exactitud podemos concluir

$$H_{dR}^1(\Sigma_2) \xrightarrow{\beta} H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \cong \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 \text{ y } H_{dR}^2(\Sigma_2) \xrightarrow{\gamma} H_{dR}^1(S^1) \cong \mathbb{R}.$$

□

Supongamos inductivamente que la cohomología de una superficie compacta y orientable Σ_{g-1} de género $g-1$ tiene la siguiente cohomología

$$H_{dR}^k(\Sigma_{g-1}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, 2 \\ \mathbb{R}^{2(g-1)}, & k = 1 \\ 0, & k > 2 \end{cases}$$

Usando el lema (2.5.8), podemos generalizar la proposición (2.5.9) para la superficie $\Sigma_{g-1} \setminus \{p\}$. De forma análoga, a la proposición anterior (2.5.10), podemos observar que

$$H_{dR}^k(\Sigma_g) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, 2 \\ \mathbb{R}^{2(g-1)} \oplus \mathbb{R}^2, & k = 1 \\ 0, & k > 2. \end{cases}$$

Bibliografía

- [1] Frank W. Anderson and Kent R. Fuller, *Rings and categories of modules*, 2nd edition, Graduate Text in Mathematics, vol. 13, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [2] V.I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1978. Translated for the Russian and edited by Richard A. Silverman.
- [3] ———, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd, Springer-Verlag, New York, 1989. Translated by K. Vogtmann and A. Weinstein.
- [4] Ugo Bruzzo, *Introduction to algebraic topology and algebraic geometry*, Notes of a course delivered in the academic year 2002/2003, Trieste, Italia.
- [5] Manfredo P. do Carmo, *Differential Forms and applications*, Springer-Verlag, Germany, 1994.
- [6] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, United States of America, 2001.
- [7] Yulij Ilyashenko and Sergei Yakovenko, *Lectures on analytic differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 86, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [8] Sze-tsen Hu, *On singular homology in differentiable spaces*, Ann. of Math. **50** (1949), no. 2, 266-269.
- [9] Victor J. Katz, *The history of differential forms from Clairaut to Poincaré*, Historia Mathematica **8** (1981), no. 2, 161-188.
- [10] Haynes Miller, *Leray in Oflag XVIII: The origins of sheaf theory, sheaf cohomology and spectral sequences*, Gazette des Mathématiciens **84** (2000), no. suppl, 17-34.
- [11] Shigeyuki Morita, *Geometry of differential forms*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 201, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated from the two-volume Japanese original (1997, 1998) by Teruko Nagase and Katsumi Nomizu; Iwanami Series in Modern Mathematics.
- [12] Joseph Rotman, *An introduction to algebraic topology*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [13] ———, *Advance Modern Algebra*, Prentice Hall, USA, 2002.
- [14] Edwin H. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer, USA, 1994.
- [15] Loring W. Tu, *Introduction to Manifolds*, Universitext, Springer Science + Business Media, LLC, New York, NY, 2008.
- [16] André Weil, *Sur les théorèmes de de Rham*, Commentarii Mathematici Helvetici **26** (1952), 119-145.