



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**CONSTRUCCIÓN DE M-CURVAS ALGEBRAICAS  
PROYECTIVAS REALES PLANAS CON EL MÉTODO  
DE VIRO**

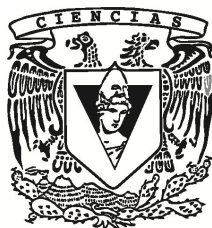
**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**M A T E M Á T I C O**

**P R E S E N T A:**

**JORGE ANTONIO ESPINOSA LIAHUT**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DRA. ADRIANA ORTIZ RODRÍGUEZ**

**2011**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del Alumno

Espinosa

Liahut

Jorge Antonio

56987838

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

09632148-3

2. Datos del tutor

Dra.

Ortiz

Rodríguez

Adriana

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Elizondo

Huerta

Enrique Javier

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Páez

Osuna

Octavio

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Palmas

Velasco

Oscar Alfredo

6. Datos del sinodal 4

Mat.

Méndez

Varela

Felipe de Jesús

7. Datos del trabajo escrito

Construcción de M-curvas algebraicas proyectivas reales planas con el método de Viro

57 p

2011

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>3</b>
<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1. Rectas Tangentes de Curvas Proyectivas Planas Reales . . . . .	9
1.2. Puntos de inflexión . . . . .	15
1.3. Óvalos y pseudo-rectas . . . . .	18
<b>2. Teorema de Bézout y teorema de Harnack</b>	<b>20</b>
2.1. Teorema de Bézout . . . . .	20
2.2. Teorema de Harnack . . . . .	24
<b>3. Método de Viro</b>	<b>37</b>
3.1. T-Curvas . . . . .	37
3.2. Función de levantamiento $\nu(x, y)$ . . . . .	39
3.3. Construcción de una T-Curva . . . . .	45
<b>4. Construcción de M-Curvas y la conjetura de Ragsdale</b>	<b>49</b>
4.1. Construcción de M-Curvas con el método de Viro . . . . .	49
4.2. Conjetura de Ragsdale . . . . .	54
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>

*Dedicado a Marina, Esperanza y Enrique.*

# Agradecimientos

Este trabajo fue hecho gracias al apoyo de mucha gente que ha estado conmigo. Primero que nada, Adriana Ortiz, mi asesora y amiga. Siempre tuvo la paciencia y la constancia que me inspiró a terminar este trabajo.

También agradezco a los sinodales que revisaron y enriquecieron este trabajo: Dr. Octavio Páez, Dr. Javier Elizondo, Dr. Oscar Palmas y Mat. Felipe Méndez.

Quiero mencionar especialmente a la gente que me ha forjado con su amistad y cariño.

Christopher Hernandez. *Toda una vida siendo amigos y lo que nos falta por rokear.*

Nadia Samayoa - *Aprendimos juntos a ser lo que somos y no podría agradecerme más por eso.*

Huitzi Trujano - *Mi mano derecha, mi mentor en la música. ¿Que sería de la vida sin color?.*

Diana Huicochea - *Uno confía en algunas personas en la vida. Pero aprendí a confiar en ti ciegamente.*

Ivan Pastor - *Siempre voltil, siempre impredecible, pero siempre ahí.*

Mónica Vazquez - *Suspenso, drama, aventura, acción, comedia. Elementos esenciales de mi historia contigo.*

Miguel Hernandez - *Amigos como tu se encuentran pocas veces en la vida. Yo corrí con suerte.*

Sonia Juarez - *Me llamaste un día y me pediste que iniciara el viaje. Ahora me inspiras a continuar.*

A lo largo de los años, he conocido gente que se ha estado conmigo un minuto o una vida. Y cada uno de ellos forman parte importante de mi vida. A ellos los conozco desde mucho y hemos crecido juntos.

Natalia García - Alguien a quien puedo admirar sin reparo.  
Luis Nieves - Un toque amargo en el postre.  
Daniel Cardenas - La gran cubetada de realidad.  
Olivia Leyva - Un comentario atinado a punto de suceder.  
Carmen Cárdenas - Una admiradora (la verdad yo la admiro a ella )  
Fabio Valdez - Mi loquero personal.  
Karina Balderas - La psique aderezada con un poco de locura.  
Rigel Sotelo - La llamada permitida cuando te meten a la crcel.  
Carolina Keiman - El mate más rico que he probado.  
Gabriela Vazquez - Inteligencia y belleza, que más se puede pedir.  
Luz María Sterling - Siempre será mi jefa, mi amiga.  
Yvette Hernandez - Sonriendo con inocencia.  
Ehecatl García - La visión cinematográfica.  
Daniel González - Artillería.  
Valentina Aguilar - El lado feliz del camino.  
Moises Guerrero - El lado oscuro del camino.  
Nejib Zila - Arte, pintura y poesía.  
Yael Gonzalez - Los efectos especiales.  
Leonardo Rodriguez - Los buenos amigos nunca se olvidan.

# Introducción

Uno de los objetivos fundamentales de la geometría algebraica es el estudio de las variedades algebraicas; las cuales son el conjunto solución de un sistema de ecuaciones polinomiales. En particular, una curva plana es una variedad algebraica generada por los puntos que anulan un polinomio, es decir, es el lugar geométrico de las soluciones de este polinomio. Esto nos da una relación entre una estructura algebraica, los polinomios y una estructura geométrica, las curvas.

Un ejemplo claro de esto es el de las soluciones de un polinomio real de grado 2 en dos variables. Las curvas algebraicas que solucionan estos polinomios son las secciones cónicas. Sin embargo, cuando los polinomios son de grado 3, las soluciones son más complejas. Newton estudió las curvas cúbicas, y en un apéndice de su obra *Opticks* describe catorce curvas generales. De esta forma, a medida que el grado de estos polinomios aumenta, también aumenta la dificultad para conocer sus soluciones.

Cuando uno estudia una teoría, regularmente lo primero que hace es entender los objetos con los que se está trabajando. Una forma común de hacer esto es clasificándolos. En el caso de la geometría algebraica real, particularmente en el caso de curvas algebraicas reales en  $\mathbb{R}^2$  ó  $\mathbb{R}P^2$ , una clasificación que se ha considerado es la topológica.

Dada una curva en el plano  $\mathbb{R}^2$  (ó  $\mathbb{R}P^2$ ), ¿Es posible dar un polinomio  $f \in [x, y]$  (ó  $f \in \mathbb{R}[x, y, z]$  homogéneo en el caso proyectivo) tal que la variedad algebraica asociada a este polinomio sea esta curva? ¿Cuál es el grado mínimo que debe tener este polinomio para que pueda tener asociada esta curva? Otro de los problemas principales que surgen de manera natural en el estudio de curvas algebraicas reales, es el de saber cuáles son las condiciones para que dicha curva sea algebraica. Las respuestas a estas preguntas no han sido dadas de forma total.

En 1779, el matemático Étienne Bézout, propone la primera restricción



para las posibles configuraciones de curvas que se pueden tener, dado un polinomio de grado  $d$ . Esto resulta relevante ya que da pie a trabajos como los de Alfred Harnack [2] quien, a finales del siglo *XIX*, da respuesta a las dos preguntas mencionadas anteriormente, mostrando que para un polinomio real de grado  $d$ , el número máximo de componentes conexas es a lo más  $(d - 1)(d - 2)/2 + 1$ , y demuestra que esta cota es realizable construyendo curvas que la cumplen. David Hilbert, al igual que Harnack, da una construcción para estas curvas con un método diferente y su construcción genera una configuración diferente a las de Harnack.

Pero no fue sino 100 años después que el matemático ruso Oleg Viro da una forma de construir polinomios, tales que sus lugares geométricos realizan ciertas configuraciones de curvas en el plano proyectivo.

Esta construcción depende de la asignación de signos en la triangulación y del grado en el cual se quiera trabajar. Vamos a construir un ejemplo de grado 4. La triangulación se da como sigue.

Dado el triángulo con lados de tamaño cuatro sobre los ejes coordenados, damos una triangulación  $\tau$  para este triángulo de tal forma que cada vértice de esta triangulación tenga vértices enteros (de entradas enteras), y tal que el área de estos triángulos sea de  $1/2$ . Hay que asegurarnos también que todos los puntos enteros dentro del triángulo sean parte de  $\tau$  (figura 1)

El siguiente paso es asignarle a cada vértice de la triangulación un signo. Dependiendo del signo que se le asigne a cada vértice, la forma de la curva puede cambiar aunque la configuración no necesariamente sea diferente.

Vamos ahora a hacer una reflexión respecto a los ejes, tanto de la triangulación como de los signos asignados a cada vértice, de la siguiente forma. Empezando por la triangulación, vamos a reflejar respecto al eje  $X$ , después respecto al eje  $Y$  y por último reflejamos respecto al origen. Esto es equivalente a reflejar sobre el eje  $Y$ , después de haber reflejado sobre el eje  $X$ . De esta forma tenemos ahora un rombo con una triangulación sobre los puntos enteros.

Para hacer las reflexiones de los signos, la forma más sencilla de hacerlo es la siguiente:

Para reflejar respecto al eje de las  $Y$ , tomamos todos los puntos del triángulo inicial con entrada  $x$  par y en su reflejado ponemos los signos de estos vértices. Para los puntos con entrada en  $x$  impar, reflejamos estos vértices con el signo opuesto al inicial. Ahora tenemos la mitad superior del rombo con signos asignados a cada vértice. Todos los puntos de la triangulación que ya tienen asignado un signo y que tienen entrada en  $y$  par, los vamos a refle-

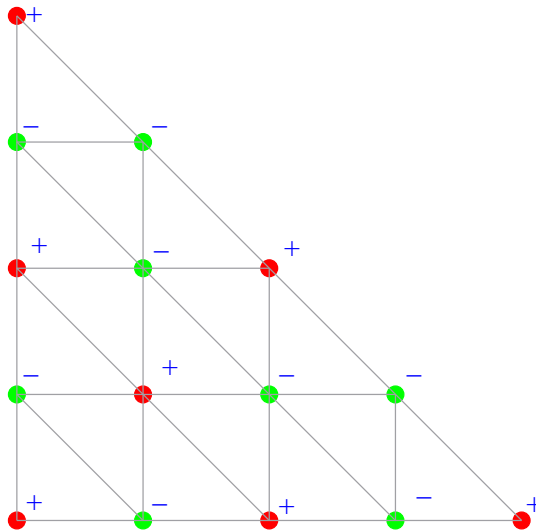


Figura 1: Triangulación con asignación de signos.

jar sobre el eje  $X$  con el mismo signo. Los vértices sobrantes, los que tienen entrada en  $y$  impar, los vamos a reflejar sobre el eje  $X$  con signo opuesto.

Así, tenemos el rombo con una triangulación y una asignación de signos para cada vértice de la misma.

Consideramos todas las aristas de la triangulación que tienen signos diferentes en sus vértices. Tomamos el punto medio de estas aristas. Si 2 aristas de signos diferentes están contenidas en un mismo triángulo, unimos con un segmento de recta los puntos medios.

Siguiendo este procedimiento en cada triángulo, vamos a obtener una curva  $l$  contenida en el rombo.

Esta es la curva que vamos a obtener del polinomio generado por el método de Viro.

Para obtener el polinomio, basta con considerar lo siguiente:

Sea  $\tau$  el conjunto de los vértices de la triangulación inicial,  $\sigma_{(i,j)}$  el signo del vértice  $(i, j)$  en  $\tau$ ,  $\nu(i, j)$  una función de convexidad sobre el triángulo (para facilitar el cálculo se puede considerar  $\nu(i, j) = 2i^2 + j^2$ ) y una  $t$  suficientemente chica. Entonces, la curva  $l$  está dada por el siguiente polinomio,

$$b_t(x, y) = \sum_{\tau} \sigma_{(i,j)} x^i y^j t^{\nu(i,j)}.$$

Denotamos por  $B_t$  el correspondiente polinomio homogéneo

$$B_t(x_0, x_1, x_2) = x_0^4 b_t(x_1/x_0, x_2/x_0).$$

De esta forma hemos construido el polinomio  $B_t$  asociado a la curva  $l$ .

Tomando como base la construcción anterior, para el último capítulo de esta tesis, podremos hacer la construcción de una M-Curva con el método de Viro, simplemente usando parámetros establecidos como la elección de los signos para los vértices de la triangulación.

Este texto pretende dar una forma sencilla y fácil de aplicar para construir polinomios con una configuración determinada. Esta construcción es más amplia que las construcciones previas de Harnack y de Hilbert. Esta es una aplicación directa y muy útil en la geometría algebraica.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este primer capítulo vamos a definir herramientas básicas para el estudio de curvas planas. Principalmente vamos a dar una clasificación de los puntos que las componen bajo la acción del grupo de transformaciones afines del plano, las rectas tangentes a estos puntos y una clasificación de curvas planas en el plano proyectivo.

### 1.1. Rectas Tangentes de Curvas Proyectivas Planas Reales

Vamos a denotar por  $\mathbb{K}$  un campo. En caso de ser necesario, se especificará el campo ( $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ ).

Sea  $f \in \mathbb{K}[x, y]$  un polinomio de grado  $d$ , sea  $l$  la recta que pasa por los puntos  $a$  y  $b$  en  $\mathbb{K}^2 = \{(x, y) | x, y, \in \mathbb{K}\}$ , parametrizada de la siguiente manera:

$$l(t) = (1 - t)a + tb \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Definimos  $\phi(t)$  el *polinomio de intersección* de la recta  $l$  con el polinomio  $f$  definido por

$$\phi(t) = f((1 - t)a + tb),$$

tal que, si  $a = (a_1, a_2)$  y  $b = (b_1, b_2)$ , entonces la parametrización es

$$x(t) = (1 - t)a_1 + tb_1, \quad y(t) = (1 - t)a_2 + tb_2$$

y por lo tanto  $\phi(t) = f(x(t), y(t))$ .

**Definición 1.** [1] Sea  $l$  la recta parametrizada y  $f$  un polinomio de grado  $d$ . Sea  $p$  el punto de intersección de  $l$  con  $f = 0$  en  $t_0$ . Definimos el *número de intersección*  $I(p, f, l)$  de  $F$  con  $l$  en  $p$  como la multiplicidad de  $t_0$  como raíz del polinomio de intersección  $\phi(t)$ .

Por convención asumimos que si  $l(t)$  es componente del polinomio  $f$  y  $p$  es un punto de  $l$ , entonces  $I(p, f, l) = \infty$ . Además, el número de intersección no depende de la parametrización lineal de  $l$ .

Cabe destacar lo siguiente.

**Lema 1.** *El número de intersección es un invariante bajo transformaciones afines. Dada una transformación afín  $\mu$  que aplica un punto  $p$ , una recta  $l$  y una curva  $f = 0$  en un punto  $p'$ , una recta  $l'$  y una curva  $f' = 0$ , se tiene  $I(p, f, l) = I(p', f', l')$*

*Demostración.* Supongamos que  $\mu$  es una transformación lineal de  $\mathbb{K}^2$ . Sea  $l$  una recta parametrizada como  $(1-t)a+tb$ , con  $a \neq b$  y  $l'$  parametrizada como  $(1-t)\mu(a) + t\mu(b)$ . Para  $f'$  tenemos asociado el polinomio de intersección como sigue:

$$\phi'(t) = f'\{(1-t)\mu(a) + t\mu(b)\}.$$

Reescribimos la función  $f'$  como la composición  $f \circ \mu^{-1}$  de modo que

$$\phi'(t) = f(\mu^{-1}\{(1-t)\mu(a) + t\mu(b)\}),$$

y como  $\mu$  es un mapeo lineal

$$\phi'(t) = f\{(1-t)\mu^{-1}(\mu(a)) + t\mu^{-1}(\mu(b))\}$$

$$f\{(1-t)a + tb\} = \phi(t).$$

Ahora, si suponemos que  $p$  tiene parámetro  $t$  en  $l$ ,  $p'$  también tiene parámetro  $t$  en  $l'$  y los números de intersección  $I(p, f, l)$  y  $I(p', f', l')$  son las respectivas multiplicidades de  $t$  como solución de los polinomios de intersección  $\phi(t)$  y  $\phi'(t)$  y, por lo tanto, son iguales. □

**Definición 2.** Dado un polinomio  $f \in \mathbb{K}[x, y]$  y un punto  $p \in \mathbb{K}^2$  en el que  $f$  se anula, definimos la *multiplicidad de  $p$  en  $f$*  como el mínimo valor  $m$  de los números de intersección  $I(p, f, l)$ , con  $l$  tomada entre todas las rectas que pasan por  $p$ .

Sea  $f \in \mathbb{K}[x, y]$  un polinomio de grado  $d$  sobre el campo  $\mathbb{K}$ . Sea  $p$  un punto sobre la curva  $f = 0$  con multiplicidad  $m$ . Sabemos que para cada recta  $l$  que pasa por  $p$ ,  $I(p, f, l) \geq m$ . Decimos que la recta  $l$  es *tangente a  $f = 0$  en  $p$* , cuando se cumpla la desigualdad estricta, es decir,  $I(p, f, l) > m$ .

**Definición 3.** Un punto  $P$  en una curva  $f = 0$  en  $\mathbb{K}^2$  es *singular* cuando tiene multiplicidad  $\geq 2$ ; si no, se le llama punto *simple o regular*. Decimos que la curva  $f = 0$  es *singular* si contiene al menos un punto singular, de lo contrario decimos que la curva es *no singular o lisa*.

Cuando un punto  $P$  es un punto simple, entonces existe una única recta tangente, y cuando el punto  $P$  tiene multiplicidad  $\geq 2$  entonces puede existir más de una recta tangente o ninguna, dependiendo del tipo de singularidad.

En el caso de la astroide (figura 1.1) dada por la función

$$f = (1 - x^2 - y^2)^3 - 27x^2y^2,$$

es notorio que existen 4 puntos excepcionales:  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$  y  $(0, -1)$ . Estos 4 puntos tienen multiplicidad 2.

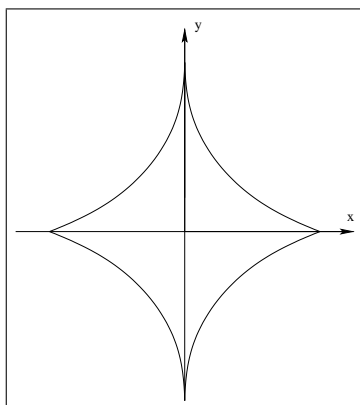


Figura 1.1: La astroide

Para mostrar lo anterior usamos el siguiente lema.

**Lema 2.** Sea  $P = (a, b)$  un punto en la curva  $f = 0$  en  $\mathbb{K}^2$ . Sea  $g(x, y) = f(a + x, b + y)$ . La multiplicidad de  $P$  en  $f$  es el grado del término de menor orden en  $g$ . En particular, la multiplicidad del origen  $(0, 0)$  en  $f$ , es el grado del término de menor orden en  $f$ .

*Demostración.* Escribimos a  $g$  como una suma de polinomios homogéneos  $G_i$  de grado  $i$ , con  $G_m \neq 0$  el polinomio de menor grado. Sea  $(X, Y)$  un vector diferente de cero en  $\mathbb{K}^2$ , y sea  $l = l_{X,Y}$  la recta que une los puntos  $(a, b)$  y  $(a + X, b + Y)$ . De este modo podemos reescribir  $l$  de forma paramétrica como  $x(t) = a + tX$ ,  $y(t) = b + tY$ . Escribimos ahora el polinomio de intersección como

$$\begin{aligned}\phi_{X,Y}(t) &= f(a + tX, b + tY) \\ &= g(tX, tY) \\ &= G_m(tX, tY) + G_{m+1}(tX, tY) + \dots + G_n(tx, ty) \\ &= t^m G_m(X, Y) + t^{m+1} G_{m+1}(X, Y) + \dots + t^n G_n(x, y)\end{aligned}$$

Así, vemos que  $t^m$  es factor de  $\phi_{X,Y}$  para cualquier elección de  $X$  y  $Y$ . Sin embargo, existe una elección de  $X$  y  $Y$  para la cual  $G_m(X, Y) \neq 0$ , de tal forma que en esa elección  $t^{m+1}$  no es factor de  $\phi_{x,y}(t)$ . De esto se sigue que  $p$  es un punto de multiplicidad  $m$  de  $f$ . □

Podemos ver que, usando el lema 2 en el ejemplo de la astroide, para el punto  $(1, 0)$ , con  $a = 1$  y  $b = 0$

$$g(x, y) = f(x + 1, y) = -(x^2 + 2x + y^2)^3 - 27(x + 1)^2 y^2$$

Cada sumando en el desarrollo de  $-(x^2 + 2x + y^2)^3$  tiene al menos grado 3, por lo que el sumando de menor orden se encuentra en  $-27(x + 1)^2 y^2$ , de modo que

$$f(x + 1, y) = -27y^2 + f_0.$$

con  $f_0$  la suma de los términos de grado mayor que 2.

Concluimos que el punto  $(1, 0)$  tiene multiplicidad 2. De lo anterior se sigue que el punto  $P$  es un punto singular.

**Definición 4.** Sea  $\mathbb{K}^3$  el espacio de dimensión 3 sobre el campo  $\mathbb{K}$ . Decimos que dos puntos  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{K}^3$  pertenecen a la misma clase de equivalencia si existe una recta  $l \in \mathbb{K}^3$  tal que ambos puntos y el origen pertenecen a la recta  $l$ . Definimos por  $P\mathbb{K}^2$  al *espacio proyectivo de dimensión dos sobre el campo  $\mathbb{K}$*  como el conjunto de clases de equivalencia en  $\mathbb{K}^3 - \{0\}$ .

Durante el texto usaremos el plano  $P\mathbb{K}^2$ . De esa forma homogeneizamos los polinomios, para que estén bien definidos sobre cada clase de equivalencia.

Una *curva algebraica* en el plano proyectivo, es el conjunto de puntos de la forma  $\{(x, y, z) \in P\mathbb{K}^2 \mid F(x, y, z) = 0\}$ , donde  $F$  es un polinomio homogéneo en tres variables con coeficientes en el campo  $\mathbb{K}$

Para la ecuación de la recta tangente utilizamos el siguiente lema, el cual da la ecuación de esta recta de forma explícita.

**Lema 3.** *Sea  $P$  un punto simple en una curva  $F = 0$  en  $P\mathbb{K}^2$ . La recta tangente a  $F = 0$ , en  $P$ , está dada por la ecuación*

$$xF_x(p) + yF_y(p) + zF_z(p) = 0.$$

Para poder demostrar este lema, necesitamos del lema de Euler.

**Lema 4.** *(Euler) Sea  $F(x_1, \dots, x_n)$  un polinomio homogéneo de grado  $m$  sobre el campo  $\mathbb{K}$ , entonces tenemos la relación*

$$mF = \sum x_k \frac{\partial F}{\partial x_k}.$$

*Demostración:* Sabemos que un polinomio homogéneo de grado  $m$  satisface la siguiente identidad:  $\forall t \in \mathbb{K}$

$$F(tx_1, \dots, tx_n) = t^m F(x_1, \dots, x_n).$$

Diferenciamos de ambos lados de la igualdad con respecto a  $t$  para obtener

$$\sum x_k \frac{\partial F}{\partial x_k}(tx_1, \dots, tx_n) = mt^{m-1} F(x_1, \dots, x_n)$$

Haciendo  $t = 1$ , obtenemos la relación prevista por el lema. □

Ahora vamos a demostrar el lema 3

*Demostración:* Cuando deshomogeneizamos la función  $F$ , la construcción de la recta tangente a la curva  $f = 0$ , en el punto  $P$ , se restringe a buscarla de la misma forma que en el plano afín. En el plano afín, la recta tangente a  $f = 0$ , en el punto  $p$ , está determinada por

$$(x - a)f_x(p) + (y - b)f_y(p) = 0,$$



de modo que para la curva proyectiva tenemos

$$(x - az)F_x(P) + (y - bz)F_y(P) = 0$$

Por otro lado, el lema de Euler nos da la representación de  $F$  (haciendo  $x = a$ ,  $y = b$ ,  $z = 1$ ), de la siguiente forma

$$aF_x(p) + bF_y(p) + 1F_z(p) = 0$$

Así que, uniendo ambos resultados, tenemos a la recta tangente proyectiva de la forma deseada. □

**Lema 5.** *Un punto  $P$  es un punto singular de la curva  $F = 0$  si y sólo si  $F(P) = 0$  y*

$$F_x(P) = F_y(P) = F_z(P) = 0.$$

**Definición 5.** Un polinomio  $F$  en  $\mathbb{K}[x, y]$  se dice que es un *polinomio reducible* si existen 2 polinomios  $G$  y  $H$ , de grados  $\geq 1$  en  $\mathbb{K}[x, y]$ , tales que  $GH = F$ . En este caso decimos que  $G$  y  $H$  son *factores* de  $F$ . Si  $F$  no cumple con esta condición, entonces  $F$  es un *polinomio irreducible*.

**Lema 6.** *Sea  $f = 0$  una curva de grado  $d$  en  $\mathbb{R}^2$ , y sea  $l$  una recta. Entonces  $l$  interseca a  $f$  en, a lo más,  $d$  puntos, ó  $l$  es componente de  $f$ .*

*Demostración.* Sea  $p + tv$  una parametrización de la curva  $L$  con  $v$  un vector diferente de cero. Sea  $\phi(t)$  el polinomio de intersección de  $f$  con  $l$  definido como  $f(p + vt)$ .

Si  $\phi(t)$  es un polinomio distinto de cero, luego tiene a lo más  $d$  raíces reales. Estas raíces son los valores para los cuales la recta  $l$  interseca a la curva  $f = 0$ .

Si  $\phi(t) \equiv 0$ , entonces  $\phi(t)$  tiene más de  $d$  raíces, entonces todos los puntos de  $l$  son raíces de  $\phi(t)$ , y por lo tanto  $l$  es componente de  $f = 0$ . □

El siguiente lema nos permite dar una clasificación de cónicas en cuanto a si son irreducibles o no.

**Lema 7.** *Una cónica reducible  $Q$  en  $\mathbb{R}P^2$  es necesariamente singular. Y una cónica singular  $Q$ , con al menos 2 puntos, es reducible. Sobre el campo complejo una cónica es singular si y sólo si es reducible en  $PC^2$ .*

*Demostración:* Suponemos que  $Q$  es reducible en  $\mathbb{R}P^2$ , a 2 rectas  $L$  y  $M$ . Estas líneas se intersecan en, al menos, un punto  $P$ . Ya que  $Q = LM$ , entonces  $Q(P) = 0$  y las derivadas de  $Q$ :

$$Q_x(P) = (L_x M + L M_x)(P), \quad Q_y(P) = (L_y M + L M_y)(P),$$

$$Q_z(P) = (L_z M + L M_z)(P)$$

como  $P$  pertenece tanto a  $L$  como a  $M$ , entonces

$$Q_x(P) = (L_x M + L M_x)(P) = 0, \quad \text{ya que } L_x M(P) = L M_x(P) = 0$$

del mismo modo para  $Q_y(P)$  y  $Q_z(P)$  por lo que

$$Q_x(P) = Q_y(P) = Q_z(P) = 0$$

y por el lema 5,  $Q = 0$  es singular en  $P$ .

Por otro lado, suponemos que  $Q$  es singular, con al menos 2 puntos. Sea  $R$  el punto singular de  $Q$ , y sea  $S$  un punto en  $Q$  diferente de  $R$ . Entonces la recta que une a  $R$  con  $S$  interseca a la curva  $Q$  en, al menos dos puntos, uno con multiplicidad 2 y el otro con multiplicidad  $\leq 1$ , entonces por el lema 6 la recta es componente de  $Q$ , por lo que es reducible, y además,  $L = M$ , es decir,  $Q = L^2$ .

En el caso complejo, la ida de la demostración se sigue inmediatamente del caso real. El regreso es cierto ya que, como los complejos son un campo algebraicamente cerrado, no puede contener puntos aislados.

La última afirmación del lema se sigue de que el campo base es algebraicamente cerrado.  $\square$

Por último, definimos lo que es una asíntota de una curva  $f = 0$  en el plano afín.

**Definición 6.** Sea  $f = 0$  una curva afín en  $\mathbb{R}^2$ , sea  $F = 0$  la curva proyectiva correspondiente en  $\mathbb{R}P^2$ . Una *asíntota* de  $f = 0$  está definida como la recta en  $\mathbb{R}^2$  cuya proyectivización en  $\mathbb{R}P^2$  es tangente a  $F = 0$  en algún punto en la recta al infinito.

## 1.2. Puntos de inflexión

La multiplicidad de un punto  $P$  sobre una curva  $F = 0$ , define la naturaleza de este punto sobre la curva. Cuando  $I(P, F, L)$  es igual a 1, el punto

$P$  es un punto simple, pero si este número es mayor a 2, ofrece también propiedades particulares de esta curva. Para entender ésto, tenemos la siguiente definición.

**Definición 7.** Sea  $P$  un punto regular de  $F = 0$ . Decimos que el punto  $P$  es un *punto de inflexión de  $F = 0$*  si  $I(P, F, L) \geq 3$  donde  $L$  es la recta tangente a  $F = 0$  en  $P$ ; incluyendo el caso en que  $I(p, f, l) = \infty$ . Más aún,  $P$  es un *punto de inflexión ordinario* cuando  $I(P, F, L) = 3$ , y  $P$  será una *ondulación* cuando  $I(P, F, L) \geq 4$ .

Cabe aclarar que los puntos de inflexión no se pueden encontrar en cónicas (polinomios de grado 2). Dado que  $I(P, F, L) \leq d$ , donde  $d$  es el grado de  $F$  (por la definición 1, la multiplicidad de una raíz en un polinomio es de, a lo más, el grado del polinomio), para todo punto  $P \in \{F = 0\}$  por lo que  $I(P, F, L) \geq 3$  si y sólo si  $gr(F) \geq 3$ .

Vamos a mostrar una técnica para encontrar los puntos de inflexión de las curvas.

Sea  $F = 0$  una curva en  $P\mathbb{K}^2$ . Escribimos  $[x_1 : x_2 : x_3]$  las coordenadas homogéneas, y fijamos el punto  $x = [x_1 : x_2 : x_3]$ . Entonces, la expansión en serie de Taylor del polinomio  $F$  en  $P$  es:

$$F(x) = F(P) + \sum F_i(P)x_i + \sum F_{ij}(P)x_ix_j + \dots$$

donde las  $F_i, F_{ij}, \dots$  son, respectivamente,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_i \partial x_j}, \dots$$

Sea  $P$  un punto simple de  $F = 0$ . Esto es,  $F(P) = 0$ , y por el lema 3  $\sum F_i(P)X_i$  genera la única recta tangente a  $F = 0$  en  $P$ . A cualquier punto  $P$  en  $F = 0$  se le puede asociar la parte cuadrática de la serie de Taylor de  $F$ .

$$\sum F_{ij}(P)x_ix_j = xF_2(P)x^T$$

donde  $x^T$  denota el transpuesto de  $x$ , y  $F_2(P) = (F_{ij}(P))$  es la matriz simétrica hessiana de  $3 \times 3$  de las derivadas parciales de segundo orden evaluadas en  $P$ . Podemos notar que la forma cuadrática hessiana se anula idénticamente si y sólo si todos los coeficientes  $F_{ij}(P)$  se hacen cero, lo cual implica que  $P$  es un punto de multiplicidad  $> 3$  en  $F$ . La *matriz hessiana es singular* si  $H_F(P) = 0$ , donde  $H_F$  es el determinante de la matriz hessiana  $H_F(P) = \det F_2(P)$ .

Lo primero que vamos a probar es que los puntos donde el determinante se hace cero son invariantes bajo transformaciones proyectivas de  $\mathbb{R}P^2$ .

**Lema 8.** *Supongamos que bajo una transformación proyectiva el polinomio  $F$  se convierte en el polinomio  $G$ , y el punto  $P$  se mapea en  $Q$ , entonces  $H_F(P) = 0$  si y sólo si  $H_G(Q) = 0$ .*

*Demostración.* Una transformación proyectiva es una transformación lineal invertible de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$ ,  $x \mapsto xA$  donde  $A$  es una matriz invertible de  $3 \times 3$ . Entonces la forma hessiana  $(F_{ij}(P))$  se transforma en  $AF_{ij}(P)A^T$  y

$$\begin{aligned} H_G(Q) &= \det(G_{ij}(Q)) = \det(AF_{ij}(P)A^T) \\ &= (\det A)\det(F_{ij}(P))(\det A^T) = (\det A)^2\det(F_{ij}(P)) \\ &= (\det A)^2 H_F(P). \end{aligned}$$

Ya que el determinante de  $A$  es diferente de cero, entonces  $H_F(P) = 0$ , si y sólo si  $H_G(Q) = 0$ . □

**Lema 9.** *Asumimos que  $P$  es un punto simple de  $F = 0$ , entonces  $P$  es un punto de inflexión si y sólo si  $H_F(P) = 0$*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ )

Un punto de inflexión es un invariante bajo mapeos proyectivos, por lo que podemos encontrar una transformación proyectiva que envíe  $F = 0$  en una curva  $G = 0$ , tal que la imagen del punto de inflexión  $P$  sea el punto  $[0 : 0 : 1]$ , y la recta tangente  $L$  en  $P$  sea la recta  $y = 0$ . Entonces, en el plano afín  $z = 1$ , tenemos la curva afín

$$f(x, y) = \lambda y + (ax^2 + 2bxy + cy^2) + (\text{Términos de orden superior})$$

donde  $\lambda \neq 0$ , y, si el grado de  $F$  es  $d$ , entonces  $F$  está dada por

$$F(x, y, z) = \lambda yz^{d-1} + (ax^2 + 2bxy + cy^2)z^{d-2} + \dots$$

La intersección de  $F = 0$  con la recta tangente  $y = 0$ , es el punto  $[1 : 0 : 1]$  de la ecuación

$$F(x, 0, z) = ax^2z^{d-2} + \dots = 0.$$

La condición para que  $P$  sea punto de inflexión es que  $I(P, F, L) \geq 3$ ; ésto es, que el punto  $[0 : 0 : 1]$  en la ecuación anterior tenga multiplicidad  $\geq 3$ . Para ésto es necesario que  $a = 0$ . De esta forma queda eliminado el término de grado 2 de la ecuación y con ésto,  $H_F(P) = 0$ .

$\Leftrightarrow$

El regreso se sigue directamente de la hipótesis  $H_F(P) = 0$ . Tomando la matriz hessiana de

$$F(x, y, z) = \lambda y z^{d-1} + (ax^2 + 2bxy + cy^2)z^{d-2} + \dots$$

y evaluando en el punto  $P = [0 : 0 : 1]$

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 0 \\ 2b & 2c & \lambda(d-1) \\ 0 & \lambda(d-1) & 0 \end{vmatrix} = -2a\lambda^2(d-1)^2.$$

Dado que  $-2a\lambda^2(d-1)^2 = 0$  y  $\lambda \neq 0$ , queda necesariamente que  $a = 0$ , y por lo tanto, la intersección de  $F = 0$  con la recta tangente  $y = 0$  en  $P$  no tiene componentes de grado  $< 3$  en  $x$ , por lo que  $P$  es un punto de inflexión.  $\square$

### 1.3. Óvalos y pseudo-rectas

Una de las ideas que debemos tener en mente para este texto, es el hecho de que en el plano proyectivo  $\mathbb{R}P^2$  existen sólo 2 tipos topológicos de componentes conexas de una curva no singular; aquellas que son equivalentes topológicamente a un óvalo y las que son equivalentes a una pseudo-recta.

Para ver claramente ésto, vamos a considerar lo siguiente:

**Proposición 1.** *Sea  $l \subset \mathbb{R}P^2$  un círculo, y sea  $\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  tal que  $\{P, -P\} \mapsto P$ . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1.  $l$  es homotópica a un punto.
2.  $\pi^{-1}(l)$  tiene 2 componentes conexas.
3.  $\mathbb{R}P^2 \setminus l$  tiene 2 componentes conexas, una homeomorfa a un disco, y la otra homeomorfa a la banda de Möbius.
4. Cada línea recta transversal a  $l$ , corta a  $l$  en un número par de puntos.

Ahora podemos definir lo que es un óvalo y una pseudo-recta.

**Definición 8.** Sea  $l \subset \mathbb{R}P^2$  un círculo (que es por definición difeomorfo a  $S^1$ ). Entonces, si  $l$  satisface alguna de las condiciones de la proposición anterior, decimos que  $l$  es un *óvalo*; de lo contrario, decimos que  $l$  es una *pseudo-recta*.

Para poder hacer una distinción más clara vamos a enunciar la siguiente proposición.

**Proposición 2.**  $l \subset \mathbb{R}P^2$  es una pseudo-recta si y sólo si las siguientes condiciones se mantienen. Estas condiciones son equivalentes.

1.  $l$  no es homotópica a un punto.
2.  $\mathbb{R}P^2 \setminus l$  es conexa y homeomorfa a  $\mathbb{R}^2$
3.  $\pi^{-1}(l)$  es conexa.
4. cada recta (y de hecho, cada pseudo-recta) interseca transversalmente a  $l$  en un número impar de puntos.

## Capítulo 2

# Teorema de Bézout y teorema de Harnack

En este capítulo nos abocaremos a demostrar 2 teoremas. El primero, el teorema de Bézout, muestra que existe una restricción en la cantidad de componentes conexas que puede tener una curva algebraica plana. Esta restricción está relacionada directamente con el grado del polinomio asociado a la curva.

El segundo teorema, el teorema de Harnack, propone una cota superior para el número de componentes conexas en una curva plana y además muestra que esta cota es realizable. La misma demostración muestra cómo construir estas curvas.

### 2.1. Teorema de Bézout

Para poder demostrar el teorema necesitamos algunos resultados previos. Estos resultados serán dados a continuación.

**Lema 10.** [1] Sean  $f, g \in K[x]$  (con  $K$ , dominio de factorización única) polinomios de grados  $p$  y  $q$  respectivamente. Entonces  $f$  y  $g$  tienen un factor común no constante si y sólo si existen polinomios  $\alpha, \beta \in K[x]$ , distintos de 0, tales que  $gr(\alpha) < p$ ,  $gr(\beta) < q$  y  $f\beta = \alpha g$ .

*Demostración:*  $\Rightarrow$ )

Por hipótesis, existe  $h \in K[x]$  con  $h \neq cte.$ , tal que  $f = h\alpha$ ,  $g = h\beta$ . Esto implica que  $gr(\alpha) < gr(f)$  y  $gr(\beta) < gr(g)$ .

Por demostrar que existen  $\alpha, \beta \in K[x]$ , tales que

$$f\beta = \alpha g \text{ y } gr(\alpha) < p, \text{ } gr(\beta) < q,$$

tenemos las siguientes relaciones:

$$f = h\alpha \Rightarrow f\beta = h\alpha\beta$$

$$g = h\beta \Rightarrow g\alpha = h\beta\alpha$$

$$\Rightarrow f\beta = g\alpha$$

$\Leftarrow$ )

Por hipótesis, existen  $\alpha, \beta \in K[x]$  y  $\alpha, \beta \neq 0$ , tales que  $f\beta = g\alpha$  y  $gr(\alpha) < p$  y  $gr(\beta) < q$ .

Dado que  $K[x]$  es dominio de factorización única, todo polinomio se puede expresar como producto de polinomios irreducibles.

Sea  $f = \prod_{i=1}^n f_i^{r_i}$ , con cada  $f_i$  irreducible en  $K[x]$ .

$$\Rightarrow f\beta = \left(\prod_{i=1}^n f_i^{r_i}\right)\beta = g\alpha$$

Ahora, supongamos que ninguno de los  $f_i$  divide a  $g$ , esto es,

$$f_i \nmid g \text{ para toda } i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow f_1, f_2, \dots, f_n \nmid \alpha$$

$$\Rightarrow f \nmid \alpha \Rightarrow gr f > gr \alpha$$

lo cual es una contradicción, ya que  $gr(\alpha) < p = gr(f)$ . Por lo tanto, existe al menos  $f_i^{r_i}$  que divide a  $g$ . □

En términos de los coeficientes de  $f$  y  $g$  veamos qué significa que tengan un factor en común.

Sean  $f, g \in K[x]$  tales que  $f\beta = g\alpha$ ,  $gr(\alpha) < p$ ,  $gr(\beta) < q$ ; de modo que

$$\begin{array}{ll} f = a_0x^p + \dots + a_p & g = b_0x^q + \dots + b_q \\ \alpha = c_0x^{p-1} + \dots + c_{p-1} & \beta = d_0x^{q-1} + \dots + d_{q-1} \end{array}$$



Sustituyendo en las expresiones  $f\beta$  y  $g\alpha$  tenemos

$$f\beta = a_0d_0x^{p+(q-1)} + (a_1d_0 + a_0d_1)x^{p+(q-2)} + \dots + a_pd_{q-1}$$

$$g\alpha = b_0c_0x^{q+(p-1)} + (b_1c_0 + b_0c_1)x^{q+(p-2)} + \dots + b_pc_{q-1}$$

Dado que  $f\beta = g\alpha$ , tenemos que

$$\begin{aligned} f\beta - g\alpha = 0 &\iff \begin{aligned} a_0d_0 - b_0c_0 &= 0 \\ (a_1d_0 + a_0d_1) - (b_1c_0 + b_0c_1) &= 0 \\ &\vdots \\ a_pd_{q-1} - b_pc_{q-1} &= 0. \end{aligned} \end{aligned}$$

Esto es un sistema lineal homogéneo de  $p + q$  ecuaciones con  $(p + q)$  incógnitas, a saber,  $c_0, \dots, c_{p-1}$ ,  $d_0, \dots, d_{q-1}$ . Entonces podemos expresar el sistema de ecuaciones como

$$A^T \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{p-1} \\ d_0 \\ \vdots \\ d_{q-1} \end{pmatrix} = 0,$$

la matriz transpuesta de  $A$ , que es una matriz de  $(p + q) \times (p + q)$ , dada de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{p-1} & a_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{p-1} & a_p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{p-1} & a_p \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{q-1} & b_q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{q-1} & b_q & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{q-1} & b_q \end{pmatrix}.$$

**Definición 9.** A la matriz  $A$  le llamaremos la *matriz resultante* de los polinomios  $f$  y  $g$ . Al polinomio generado por el determinante de la matriz  $A$  le llamaremos el *polinomio resultante* y lo denotaremos como  $R(f, g)$ .

**Lema 11.** *El polinomio  $f$  tiene un factor común no constante con  $g$  si y sólo si  $R(f, g) = 0 = \text{Det}(A)$ .*

*Demostración.* Los polinomios  $f$  y  $g$  tienen un factor no constante en común si (por el lema 10) existen  $\alpha, \beta \in K[x]$ , con  $\text{gr}\alpha < p$ ,  $\text{gr}\beta < q$ , tales que  $f\beta - g\alpha = 0 \Leftrightarrow$  El sistema de ecuaciones

$$A^T \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ d_{q-1} \end{pmatrix} = 0$$

tiene una solución real no trivial  $\Leftrightarrow \text{Det}(A) = 0$  (i.e.  $R(f, g) = 0$ ).  $\square$

Ahora daremos una interpretación geométrica del teorema de Bézout.

**Lema 12** (Lema de los 4 puntos). *Sean  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  cuatro puntos en  $\mathbb{R}P^2$  en posición general (3 puntos no pertenecen a la misma recta). Entonces existe un único mapeo proyectivo  $\Phi$  que lleva a  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  en ese orden a  $E_1, E_2, E_3$  y  $U$ . En este caso  $E_1, E_2$  y  $E_3$  son los vértices de referencia y  $U$  corresponde al punto unidad.*

De forma más general, podemos decir que el teorema de los cuatro puntos prueba la existencia de un único mapeo proyectivo que tome cuatro puntos ordenados  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$ , y los lleve a otros cuatro puntos  $Q_1, Q_2, Q_3$  y  $Q_4$  también ordenados, y mantengan ese orden.

Sean  $\tilde{F}, \tilde{G}$  curvas en  $\mathbb{R}P^2$ , sea  $l \in \mathbb{R}P^2$  una recta que no es componente de las curvas anteriores y  $P$  un punto fuera de la recta. Por el lema de los cuatro puntos, podemos suponer que  $P = [0 : 0 : 1]$  y que  $l = \{z = 0\}$ . Ahora proyectamos todos los puntos de  $\tilde{F}$  y  $\tilde{G}$  a la recta  $l$  desde el punto  $p$

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}P^2 &\longrightarrow l \\ [x : y : z] &\longmapsto [x : y : 0] \end{aligned}$$

Vamos a usar el lema 11 para los polinomios  $F$  y  $G$ , donde  $F$  define la curva  $\tilde{F}$  y  $G$  define la curva  $\tilde{G}$ . Sean

$$F = f_0(x, y)z^p + f_1(x, y)z^{p-1} + \cdots + f_p(x, y)$$

$$G = g_0(x, y)z^q + g_1(x, y)z^{q-1} + \cdots + g_q(x, y)$$

Los polinomios  $F$  y  $G$  los tomamos como polinomios en la variable  $z$  con coeficientes en  $K[x, y]$ . Los  $f_i(x, y)$  y los  $g_j(x, y)$  ahora son los coeficientes de  $F$  y  $G$  respectivamente.

**Lema 13.** Sean  $F, G \in K[x, y][z]$  polinomios homogéneos de grados  $p$  y  $q$  respectivamente, con sus coeficientes  $f_i$  y  $g_j$  en  $K[x, y]$ , polinomios en 2 variables. Entonces la resultante  $R(F, G)$  de  $F$  y  $G$  con respecto a  $z$  es idénticamente cero o un polinomio homogéneo de grado  $pq$ .

*Demostración.* La resultante  $R(F, G)$  está dada por el determinante de  $A$ . Como los  $f_i$  y  $g_j$  son homogéneos de grado  $i, j$ , respectivamente, la resultante  $R(tF, tG)$  es obtenida por la multiplicación de cada uno de los  $f_i$  y  $g_j$  por  $t^i$  y  $t^j$  respectivamente. Multiplicamos la primera columna de las  $f$  por  $t^p$ , la segunda por  $t^{p-1}$ , así hasta la última que es multiplicada por  $t$ . Esto multiplica al determinante por  $t^Q$ , donde  $Q = (1/2)q(q+1)$ . Del mismo modo procedemos con las  $g_i$ , para tener al determinante multiplicado por  $t^P$  con  $P = (1/2)p(p+1)$ . Ahora factorizamos  $t^{p+q}$  de la primera columna,  $t^{p+q-1}$  de la segunda, hasta factorizar a  $t$  de la última. Esto divide al determinante por  $t^w$  con  $w = (1/2)(p+q)(p+q+1)$ , de modo que  $t^{w-(p+q)} = t^{pq}$ . Entonces  $R(tF, tG) = t^{pq}R(F, G)$ . Tenemos que si  $R(F, G)$  no es idénticamente 0, entonces el sistema tiene un número finito de soluciones en  $\mathbb{R}P^1$ .  $\square$

**Teorema 1** (Teorema de Bézout). Sean  $F, G$  curvas en  $\mathbb{R}P^2$  de grados  $p, q$  sin ninguna componente en común. Entonces  $F$  y  $G$  se intersecan en un número finito de puntos. De hecho,  $F$  y  $G$  se intersecan en a lo más  $pq$  puntos.

*Demostración.* Proyectamos las intersecciones de las curvas  $F$  y  $G$  desde  $P = [0 : 0 : 1]$  hacia  $l = \{z = 0\}$ . Recordemos que  $P$  no es un punto de  $F$  ni de  $G$ . Entonces el punto  $[x : y : 0]$  en  $l$  es la proyección de un punto de intersección de  $F$  y  $G \Leftrightarrow$  existe  $z$  tal que  $\tilde{F}[x : y : z] = 0 = \tilde{G}[x : y : z]$ . Es decir, que tengan  $\tilde{F}$  y  $\tilde{G}$  una raíz común respecto a la variable  $z$ . Por el lema 13,  $\tilde{F}(x, y, z)$  y  $\tilde{G}(x, y, z)$  tienen un cero en común en  $[x_0 : y_0 : z_0] \Leftrightarrow R(F, G)$ , se anula en  $[x_0 : y_0]$ . Sabemos que  $R(F, G)$  es un polinomio de grado  $pq$  o idénticamente cero, pero por hipótesis  $F$  y  $G$  no tienen ninguna componente en común, así que no es idénticamente cero.

Así, el número de raíces de  $R(F, G)$  es igual al número de puntos de intersección, y por ser  $R(F, G)$  de grado  $pq$ , este número es a lo más  $pq$ .  $\square$

## 2.2. Teorema de Harnack

En esta subsección enunciaremos dos teoremas de Harnack.

**Teorema 2.** [8] Dada una curva  $F$  en  $\mathbb{R}P^2$  de grado  $d$ , el número máximo de componentes conexas que puede tener  $F$  es

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1.$$

El siguiente teorema muestra que la cota superior del teorema anterior es realizable.

**Teorema 3.** Para cada natural  $d \geq 1$  existe una curva en  $\mathbb{R}P^2$  lisa, de grado  $d$ , con  $(d-1)(d-2)/2 + 1$  componentes conexas.

La demostración de este teorema está basada en el método de “pequeñas variaciones” o “pequeños parámetros”. Su demostración es por inducción sobre  $d$ .

A las curvas de grado  $d$  con el número máximo de componentes las vamos a llamar *M-curvas*

### Demostración

- a) Para  $d = 1$ , cualquier ecuación lineal define una M-Curva de grado 1.
- b) Para  $d = 2$ , cualquier cónica no degenerada es una M-Curva de grado 2.
- c) Sea  $E \subseteq \mathbb{R}P^2$  una recta orientada y supongamos que hemos construido una curva lisa  $C_{d-1}$ , de grado  $d-1$ , con  $(d-2)(d-3)/2 + 1$  componentes,  $(d-1)(d-2)/2$  óvalos y una componente  $\tilde{C}_{d-1}$  (la cual es un óvalo si  $d-1$  es par y una pseudo-recta si  $d-1$  es impar) que corta transversalmente la recta  $E$  en  $d-1$  puntos,  $p_1, \dots, p_{d-1}$ , con buena oscilación.

Sea  $R_d$  el producto de los polinomios que definen  $d$  rectas distintas, las cuales cortan a  $E$  en  $d$  puntos que están entre  $p_{d-1}$  y  $p_1$ . Notemos que  $EC_{d-1} = 0$  es una curva de grado  $d$  singular con  $d-1$  puntos dobles.

Sea  $C_d = EC_{d-1} + \epsilon_d R_d$  (con  $\epsilon_d \in \mathbb{R}$ ). Mostremos que dicha curva tiene las siguientes propiedades:

- 1) Para  $|\epsilon_d|$  suficientemente pequeña y  $\epsilon_d$  con el signo apropiado,  $C_d$  es una curva lisa.

2) La curva  $C_d$  tiene  $d - 2$  óvalos más que  $C_{d-1}$ ; esto es,

$$b_0(C_d) = \frac{(d-2)(d-3)}{2} + 1 + (d-2) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1.$$

3) La curva  $C_d$  tiene una componente  $\tilde{C}_d$  que corta a  $E$  en  $d$  puntos (dichos puntos son la intersección de  $R_d$  y  $E$ ). La curva  $\tilde{C}_d$  tiene buena oscilación con respecto a  $E$ .

**Definición 10.** Una curva  $f$  tiene *buena oscilación* con respecto a una recta  $l$  si, dados los puntos de intersección  $p_1, \dots, p_m$ , de  $f$  con  $l$ , estas intersecciones cumplen con las siguientes 2 condiciones:

1. Si damos una orientación en  $l$  y numeramos los puntos de intersección con respecto a esa orientación, entonces los puntos de intersección tienen el mismo orden sobre  $l$  y sobre  $f$ .
2. La curva  $f$  interseca a  $l$  transversalmente. Dicho de otro modo, los puntos de intersección tienen multiplicidad  $I(p, f, l) > 1$ .

Ahora veremos que se cumple cada una de las propiedades anteriores.

**1) Para  $|\epsilon_d|$  suficientemente pequeña y  $\epsilon_d$  con el signo apropiado,  $C_d$  es una curva lisa**

**Lema 14.** Sean  $F, G \in \mathbb{R}[x, y, z]$  polinomios homogéneos del mismo grado. Supongamos que  $F = 0$  y  $G = 0$  no tienen ninguna componente en común y que para cada punto  $P \in (F = 0 \cap G = 0)$ , se tiene que  $F = 0$  ó  $G = 0$  es regular en  $P$ . Entonces el conjunto

$$\{\lambda \in \mathbb{R} \mid F + \lambda G = 0 \text{ no es lisa}\}$$

es finito.

Considere el conjunto algebraico  $V$  en  $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}$  definido por la ecuación  $H([x : y : z], \lambda) = 0$ , donde

$$H([x : y : z], \lambda) = F[x : y : z] + \lambda G[x : y : z].$$

Vamos a denotar  $H$  como  $H(p, \lambda)$  con  $p \in \mathbb{R}P^2$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ahora

$$\nabla H = \nabla(F(p) + \lambda G(p)) = (\nabla F(p) + \lambda \nabla G(p), G).$$

Y por lo tanto,

$$\nabla H = (F_x + \lambda G_x, F_y + \lambda G_y, F_z + \lambda G_z, G).$$

Entonces podemos ver que los puntos singulares de  $H = 0$  son de la siguiente forma:

$$\nabla H(p) = 0 \Leftrightarrow G(p) = 0 \text{ y } (\nabla F + \lambda \nabla G = 0)$$

Aparte, si  $p \in \{H = 0\}$ , entonces

$$G(p) = 0 \Leftrightarrow F(p) = 0.$$

Esto implica que

$$\nabla H(p) = 0 \Leftrightarrow (\nabla F + \lambda \nabla G)(p) = 0 \text{ y } p \in (F = 0 \cap G = 0).$$

De modo que las singularidades en  $\{H = 0\}$  están determinadas por las singularidades en  $\{\tilde{F} \cap \tilde{G}\}$ . Sin embargo, cuando fijamos una  $\lambda_0$ , la curva de nivel  $F + \lambda_0 G = 0$  puede tener un punto singular en un  $\bar{P}_0 \in \mathbb{R}P^2$  y  $H(\bar{P}_0, \lambda_0)$  no ser un punto singular de la hipersuperficie  $H = 0$ .

Dicho de otro modo:

$$\{\lambda \in \mathbb{R} \mid H = 0 \text{ es singular en algún punto } (x_0 : y_0 : z_0, \lambda)\} \subset$$

$$\{\lambda \in \mathbb{R} \mid F + \lambda G = 0 \text{ es singular}\}$$

Para poder analizar estas curvas de nivel consideremos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \pi : V \subset \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z, \lambda) &\longmapsto \lambda \end{aligned}$$

Y con esto enunciaremos algunos resultados relacionados con valores críticos.

**Definición 11.** Sea  $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  una aplicación diferenciable. Decimos que  $\bar{P} \in \mathbb{R}^p$  es un *punto regular* de  $F$  si  $JF(\bar{P})$  tiene rango máximo (i.e.  $\min\{p, q\}$ ).

A la imagen de un punto regular se le llama *valor regular* de  $F$ .

Si  $\bar{P} \in \mathbb{R}^p$  no es punto regular entonces decimos que  $\bar{P}$  es un *punto crítico* de  $F$ , y  $F(\bar{P})$  es un *valor crítico* de  $F$ .

Ahora, el problema es analizar el conjunto  $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \pi^{-1}(\lambda) \text{ es singular}\}$  y tal que  $\nabla H(q, \lambda) \neq 0 \forall q \in \pi^{-1}(\lambda)$  (i.e., los valores  $\lambda$ , tal que la curva de nivel  $F + \lambda G = 0$  es singular, y  $H = 0$  no es singular en ninguno de los puntos de dicha curva).

La aplicación  $\pi$  restringida a la superficie  $H = 0$  es una proyección en la recta real, así que cada curva de nivel definida por  $F + \lambda_0 G = 0$  es proyectada bajo  $\pi$  a  $\lambda_0$ . De modo que:

$$F + \lambda G = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{F}{G} \text{ si } G \neq 0.$$

Los puntos donde  $G = 0$ , y que están en  $H = 0$ , son los puntos de intersección de la curva  $F = 0$  con la curva  $G = 0$  y, por el teorema de Bézout, hay un número finito de éstos.

**Proposición 3.** *La curva  $\pi^{-1}(\lambda)$  es singular si y sólo si  $\lambda$  es valor crítico de  $\pi$ .*

**Demostración.**  $\Leftarrow$ )

Suponemos que  $\lambda_0$  es un valor crítico. Entonces, existe un punto de la forma  $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) \in \{H = 0\}$ , tal que  $J\pi(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$  no tiene rango máximo. Denotemos  $P_0 = (x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ . Observemos que

$$J\pi = \nabla \left( -\frac{F(x, y, z)}{G(x, y, z)} \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}$$

Es decir

$$J\pi = \left( -\frac{GF_x - FG_x}{G^2}, -\frac{GF_y - FG_y}{G^2}, -\frac{GF_z - FG_z}{G^2} \right).$$

Pero  $\pi$  es una aplicación de  $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , de modo que el rango máximo debe ser 1. Ya que  $J\pi$  no tiene rango máximo, debe tener rango menor a 1. Esto es  $J\pi(P_0) \equiv \bar{0}$ .

Esto nos lleva a que cada entrada es igual a 0 en  $P_0$ . Dicho de otra forma, si  $q_0 = (x_0 : y_0 : z_0)$

$$\begin{aligned} G(q_0)\nabla F(q_0) - F(q_0)\nabla G(q_0) = 0 &\Leftrightarrow \nabla F(q_0) = \frac{F(q_0)}{G(q_0)}\nabla G(q_0) \\ &\Leftrightarrow \nabla F(q_0) = -\lambda_0\nabla G(q_0). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ahora, consideremos la curva  $\pi^{-1}(\lambda_0) \subset V$ . Esto es

$$\pi^{-1}(\lambda_0) = \{ (x, y, z, \lambda_0) \in V \mid F(x, y, z) + \lambda_0 G(x, y, z) = 0 \}$$

La curva  $\pi^{-1}(\lambda_0)$  es singular en algún punto  $q = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  si

$$\nabla F(q) + \lambda_0 \nabla G(q) = 0 \quad (2.2)$$

Retomando la ecuación (2.1) tenemos que el punto  $P_0 \in \pi^{-1}(\lambda_0)$  y además  $\nabla F(P_0) + \lambda_0 \nabla G(P_0) = 0$ .

Por lo tanto  $P_0$  satisface (2.2) y así la curva  $\pi^{-1}(\lambda_0)$  es singular en  $P_0$ .  
 $\Rightarrow$ )

Por hipótesis, existe  $q = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \lambda_0) \in V$ , tal que

$$\nabla F(q) + \lambda_0 \nabla G(q) = 0.$$

Esto es,  $\nabla F(q) = -\lambda_0 \nabla G(q)$ . Dicho de otro modo,

$$F_x(q) = -\lambda_0 G_x(q), \quad F_y(q) = -\lambda_0 G_y(q), \quad F_z(q) = -\lambda_0 G_z(q).$$

Esto implica que la primera entrada de  $J\pi(q)$  es

$$-\frac{G(q)(-\lambda_0 G_x(q)) - F(q)G_x(q)}{G^2(q)} = \frac{G_x(\lambda_0 G(q) + F(q))}{G^2(q)} = 0.$$

Esto ya que  $q \in \{H = 0\}$  y por lo tanto  $\lambda_0 G(q) + F(q) = 0$ .

Análogamente para las otras entradas. Por lo tanto  $J\pi(q) \equiv 0$ . Esto es,  $q$  es un punto crítico de  $\pi$  (o bien,  $\lambda_0$  es valor crítico). □

Para demostrar el lema 14 necesitamos del teorema de Morse-Sard para conjuntos semi-algebraicos.

**Definición 12.** Un subconjunto  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  es llamado *semi-algebraico* si admite una representación de la forma:

$$V = \bigcup_{i=1}^s \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n \mid P_{i,j}(x) \leq 0\},$$

donde, para cada  $i = 1, \dots, s$  y  $j = 1, \dots, r_i$ ,



1.  $s_{ij} \in \{>, =, <\}$
2.  $P_{i,j}(X) \in \mathbb{R}[X]$ ,  $X = (x_1, \dots, x_n)$ .

**Definición 13.** Sean  $M \subset \mathbb{R}^p$ ,  $N \subset \mathbb{R}^q$  conjuntos semi-algebraicos. Una aplicación  $f : M \rightarrow N$  es *semi-algebraica* si la gráfica de  $f$  es un conjunto semi-algebraico en  $\mathbb{R}^{p+q}$ .

**Teorema 4.** (*Teorema de Morse-Sard*) [8]

Sea  $f : M \rightarrow N$  una aplicación semi-algebraica entre conjuntos semi-algebraicos en  $\mathbb{R}^p$  y  $\mathbb{R}^q$ , respectivamente y  $p \geq q$ . Sea

$$C = \{x \in M \mid \text{rang}(Df(x)) < \dim N\}$$

y

$$S = \{y \in N \mid y = f(x), x \in C\}$$

Entonces  $S$  es un conjunto semi-algebraico de  $\mathbb{R}^q$  y  $\dim S < \dim N$ .

Para aplicar el teorema de Sard, sustituimos:

$$f = \pi, \{H = 0\} = V = M, N = \mathbb{R}.$$

Claramente  $V, \mathbb{R}$  son variedades semi-algebraicas.

La gráfica de  $\pi$ ,

$$\text{gr}(\pi) = \{(x, y, z, \lambda, w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid H(x, y, z, \lambda) = 0, w = \lambda\}$$

es semi-algebraica, ya que está definida como la intersección de dos variedades semi-algebraicas.

Por lo tanto  $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \pi^{-1}(\lambda) \text{ es singular}\}$  es semi-algebraico en  $\mathbb{R}$  y la dimensión de dicho conjunto es cero. Sólo nos resta probar que esta unión es finita.

**Proposición 4.** *Todo conjunto semi-algebraico de  $\mathbb{R}$  es vacío o bien, una unión finita de intervalos (que pueden ser puntos o intervalos no acotados)*

**Demostración.** Por la definición de conjuntos semi-algebraicos, en el caso de  $\mathbb{R}$  tenemos que los conjuntos semi-algebraicos son uniones e intersecciones de conjuntos de la forma  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ ,  $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$  y  $\{x \in \mathbb{R} \mid x = a\}$  con  $a \in \mathbb{R}$ . Dicho de otro modo, son uniones finitas de intervalos en  $\mathbb{R}$ .

□

Por el lema 14 podemos asegurar que la curva  $C_d$  es lisa. El número de  $\epsilon_i$  que podemos elegir, para las cuales la curva  $EC_{d-1} + \epsilon_i R_d = 0$  no es lisa, es finito. Entonces podemos tomar una  $\epsilon_0 \neq \epsilon_i$  tal que la curva sea lisa.

**2) La curva  $C_d$  tiene  $d - 2$  óvalos más que  $C_{d-1}$ , esto es,**

$$\# \text{óvalos}(C_d) = \frac{(d-2)(d-3)}{2} + 1 + (d-2) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$$

Por construcción, la curva  $C_d$  es de la forma  $C_d = E \cdot C_{d-1} + \epsilon_d R_d$ .

Sea  $C_{d-1} \cdot E = G$  y  $\epsilon_d R_d = \epsilon H$ . La función  $\epsilon H$  genera una pequeña variación sobre la curva  $G = 0$ .

Cuando  $\epsilon = 0$ , entonces la función  $C_d = G$ . Con  $\epsilon \neq 0$ ,  $C_d = G + \epsilon H$ , por lo que cada punto en  $C_d = 0$  es de la forma  $C_d(x_0) = G(x_0) + \epsilon_0$  (con  $\epsilon_0 = \epsilon H(x_0)$ ).

De este modo, podemos ver que para cada punto en  $G = 0$  existe una vecindad de radio  $\delta$  tal que contiene puntos de  $C_d$ .

Ahora veamos que los puntos de  $C_d$  son regulares.

Antes, enunciaremos un par de resultados. Estos resultados son en sí mismos importantes en la teoría de Morse [5], pero las demostraciones están fuera del objetivo de este texto.

**Teorema 5.** *(Teorema de la función implícita) Sea  $M$  una variedad de dimensión  $m$  y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida en  $M$ . Si  $0$  no es un valor crítico de  $f$ , entonces el subconjunto  $f^{-1}(0) = \{p \in M \mid f(p) = 0\}$  es una subvariedad de  $M$  de dimensión  $m - 1$ .*

**Lema 15.** *(Lema de Morse) [4] Sea  $p_0$  un punto crítico no degenerado de la función  $f$  en 2 variables. Entonces podemos escoger coordenadas locales apropiadas  $(X, Y)$  de tal forma que la función  $f$  se expresa, en estas coordenadas, una de las siguientes formas:*

1.  $f = X^2 + Y^2 + c$
2.  $f = X^2 - Y^2 + c$
3.  $f = -X^2 - Y^2 + c$

donde  $c$  es una constante ( $c = f(p_0)$ ) y  $p_0$  es el origen ( $p_0 = (0, 0)$ ).

Este teorema dice que una función puede verse extremadamente simple cerca de un punto crítico no degenerado.

**Lema 16.** Sean  $G, H \in \mathbb{R}[x, y]$ .

1. Suponga que  $G = 0$  es no singular en  $x_0$ . Entonces existe un disco  $D$  alrededor de  $x_0$ , tal que  $G + \epsilon H = 0$  es lisa y conexa en  $D$  y el comportamiento es el siguiente:

a) Si  $H(x_0) \neq 0$ , entonces la curva  $G + \epsilon H = 0$  es no singular en una vecindad de  $x_0$ . (figura 2.1)

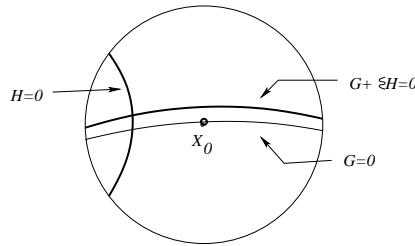


Figura 2.1: Punto simple

b) Si  $H(x_0) = 0$ , entonces  $G + \epsilon H = 0$  es no singular en  $x_0$  y es transversal a  $G = 0$ . (figura 2.2)

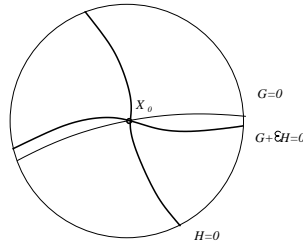


Figura 2.2: Punto singular

2. Suponga que  $x_0$  es un punto cuadrático ordinario de  $G = 0$  y  $H(x_0) \neq 0$ . Entonces existe un disco alrededor de  $x_0$ , tal que  $G + \epsilon H = 0$  es no singular en  $D$  y  $D \cap \{G + \epsilon H = 0\}$  tiene 2 componentes conexas. (figura 2.3)

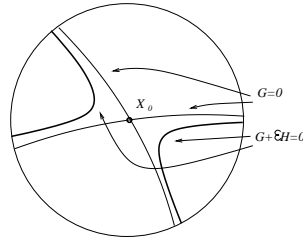


Figura 2.3: Punto cuadrático ordinario

**Demostración.** 1. a) Como  $G_x(x_0) \neq 0$  entonces existe una vecindad  $V_1$  de  $x_0$  tal que  $G_x(p) \neq 0 \forall p \in V_1$ . Sea  $p \in \{G + \epsilon H = 0\}$  y  $p \in V_1$ .

Entonces

$$G_x(p) + \epsilon H_x(p) = 0 \Leftrightarrow \epsilon = -\frac{G_x(p)}{H_x(p)}$$

Así, tomando  $\epsilon \neq -\frac{G_x(p)}{H_x(p)}$ , tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x}(G + \epsilon H)(p) \neq 0 \quad (2.3)$$

Sea  $\epsilon$  suficientemente chica, tal que  $G + \epsilon H = 0$ , interseca la vecindad  $V_1$ .

Por la ecuación 2.3, se tiene que existe  $V_2$  vecindad de  $p$ , tal que

$$\frac{\partial}{\partial x}(G + \epsilon H)(q) \neq 0 \forall q \in V_2,$$

por lo tanto, la vecindad  $G + \epsilon H = 0$  es lisa en  $V = V_1 \cap V_2$ .

b) Como  $G(x_0) = H(x_0) = 0$  entonces  $x_0 \in \{G + \epsilon H = 0\}$ . Notemos que

$$\frac{\partial}{\partial x}(G + \epsilon H)(x_0) = 0 \Leftrightarrow \epsilon = -\frac{G_x(x_0)}{H_x(x_0)}$$

Sea  $\epsilon \neq -\frac{G_x(x_0)}{H_x(x_0)}$ . Así, la curva  $G + \epsilon H = 0$  es lisa en  $x_0$ . Y por el teorema de la función implícita (teorema 5), existe  $V$  vecindad de  $x_0$ , tal que  $(G + \epsilon H)|_q = 0$  es lisa  $\forall q \in V$ .

2. Suponemos que  $G(x_0) = 0$  y que  $x_0$  es un punto cuadrático ordinario de  $G$ . Mediante una transformación afín, enviamos el punto  $x_0$  al origen, Además, existen  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $ab \neq 0$ , tal que

$$G(x, y) = a^2x^2 - b^2y^2 + \text{términos de grado mayor a 2.}$$

Sea  $\epsilon$  suficientemente pequeña. Como  $H(0, 0) \neq 0$ , entonces existe una vecindad  $V$  de  $x_0$ , tal que  $H(q) \neq 0, \forall q \in V$ .

Sea  $\epsilon$ , tal que  $G + \epsilon H = 0$  interseca a la vecindad  $V$ . Por el lema de Morse (lema 15), existe un cambio diferenciable de coordenadas en la vecindad del origen tal que:

$$F = F(0, 0) + \lambda_1x^2 + \lambda_2y^2$$

donde  $\lambda_i$  son valores propios de la matriz

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial(x, y)} \right).$$

De esta forma podemos tener una representación de la función  $G + \epsilon H$  de la siguiente forma:

$$(G + \epsilon H)(x, y) = \epsilon H(0, 0) + a^2x^2 - b^2y^2 + \dots$$

□

El siguiente corolario es una consecuencia del lema 16.

**Corolario 1.** Sean  $G, H \in \mathbb{R}[x : y : z]$  polinomios homogéneos del mismo grado, tal que  $G = 0$  sólo tiene puntos singulares cuadráticos ordinarios. Sea  $C$  una parte de  $\{G = 0\} \subset \mathbb{R}P^2$ , tal que

1.  $C$  es un óvalo. (fig. 2.5)
2.  $G = 0$  y  $H = 0$  no tienen ningún cero en común en el interior de  $C$  y sus signos son opuestos en el interior de  $C$ .
3.  $C \cap \{H = 0\} = \emptyset$

Entonces, si  $\epsilon > 0$  es suficientemente pequeño, existe una única componente conexa  $C_\epsilon$ , de  $G + \epsilon H = 0$ , en el interior de  $C$  que es un óvalo liso.

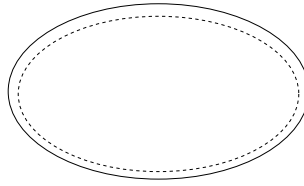


Figura 2.4: Componente conexa en  $C_d$

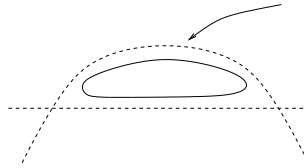


Figura 2.5: Componentes generadas por la oscilación

Retomando la demostración del teorema de Harnack, tenemos que cada componente conexa de  $C_{d-1}$ , que no interseca a la recta  $E$ , genera una componente conexa. Cada punto de estas componentes es un punto regular en  $C_{d-1}$  y como no interseca a  $\epsilon R_d$ , entonces en estas componentes, la función  $\epsilon R_d \neq 0$ . Por el lema 16, en el apartado 1.a) la curva  $C_d$  es no singular y aparece una nueva componente conexa en  $C_d$  (figura 2.4). De estas componentes hay tantas como el número de óvalos que tenía  $C_{d-1}$  (que eran  $(d-2)(d-3)/2$ ).

Para la componente  $\tilde{C}_{d-1}$  de  $C_{d-1}$  que tiene buena oscilación con respecto a la recta  $E$ , tomamos los puntos  $p_i, p_{i-1}$  que son los puntos de intersección de  $\tilde{C}_{d-1}$  con  $E$ . El conjunto de puntos de  $\tilde{C}_{d-1}$  y  $E$ , que unen los puntos  $p_i$  y  $p_{i-1}$ , forman una curva  $C$  que es un óvalo, y por el corolario 1, existe un disco en el cual aparece una componente conexa de  $C_d$  (figura 2.5).

De cada intervalo sobre  $E$  delimitado por los puntos  $p_i p_{i+1}$ , con  $i = 1, \dots, d-1$ , y el punto  $p_d = p_1$ , existe uno tal que contiene a un punto en el infinito. La componente conexa generada por este último intervalo depende del grado de  $C_{d-1}$ , ya que, si  $d-1$  es par, entonces la componente va a intersecar a  $E$  en un número par de puntos y ésta va a generar una pseudo-recta; si la componente interseca en un número impar, genera un óvalo. A esta última componente le llamaremos  $\tilde{C}_d$  (véase inciso 3).

De modo que la componente  $\tilde{C}_{d-1}$  generó  $d-1$  componentes en  $C_d$  por lo que gana exactamente  $d-2$  componentes conexas.

**3) La curva  $C_d$  tiene una componente  $\tilde{C}_d$  que corta a  $E$  en  $d$  puntos (dichos puntos son la intersección de  $R_d$  y  $E$ ). La curva  $\tilde{C}_d$  tiene buena oscilación con respecto a  $E$ .**

La componente a la que hago referencia al final del inciso 2) es exactamente la misma curva  $\tilde{C}_d$  de este inciso.

Para ver esto sólo tenemos que recordar que el producto de polinomios  $R_d$ , que define rectas distintas que cortan a  $E$ , en  $d$  puntos, están entre  $p_{d-1}$  y  $p_1$  (intersección de  $\tilde{C}_{d-1}$  con  $E$ ). Voy a llamar  $p'_i$  a los puntos de intersección de  $R_d$  con  $E$  (para no confundir con los puntos de  $\tilde{C}_{d-1}$ ). Como para cada  $p'_i$ ,  $C_{d-1}E(p'_i) = 0$  y  $\epsilon_d R_d(p'_i) = 0$ ,  $\epsilon_d R_d$  no es singular en  $p'_i$ ; entonces, por el lema 16 en la sección 1.b),  $C_d$  es transversal a  $E$ . En particular, la componente que es transversal a  $E$  es  $\tilde{C}_d$ .

La propiedad de que  $\tilde{C}_d$  tiene buena oscilación con respecto a  $E$  se sigue del hecho de que, como los segmentos en  $E$ , de la forma  $p'_i, p'_{i+1}$ , con  $p'_{d+1} = p'_1$ , tiene solamente puntos simples, entonces la componente  $\tilde{C}_d$  en esos segmentos debe estar en una vecindad de  $E$  (lema 16 inciso 1.a), salvo en los extremos de dichos segmentos, porque ahí se intersecan. Además  $\tilde{C}_d$  es transversal en los puntos  $p'_i$ , por lo tanto, corresponde con la definición de buena oscilación.

□

# Capítulo 3

## Método de Viro

En los capítulos anteriores hemos desarrollado las herramientas necesarias para este capítulo. Vamos a mostrar la construcción del método de Viro. Esta construcción es en sí misma sencilla y muy útil para el estudio de curvas algebraicas. Sin embargo, debido a la sencillez de este método, presenta algunas limitantes

### 3.1. T-Curvas

Sea  $m$  un número entero positivo y sea  $T$  el triángulo en  $\mathbb{R}^2$  asociado a  $m$ .

$$T = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq m\}.$$

Ahora describiremos cómo podemos asociar una curva  $L$  a cada triangulación de  $T$  y a cada asignación de signos en los vértices de  $T$ .

Vamos a utilizar la triangulación del triángulo  $T$  tal que todos sus vértices sean enteros, esto es, que los vértices tengan entradas enteras.

**Definición 14.** Una triangulación de  $T$  es *primitiva* cuando los triángulos de éstas, tienen área  $1/2$ . Entonces podemos decir que todo punto en  $T \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$  es punto de la triangulación.

**Definición 15.** Una triangulación de  $T$  es *convexa* si existe una función  $\nu : T \rightarrow \mathbb{R}$  lineal por pedazos, continua y convexa, la cual no es lineal en 2 triángulos adyacentes. El ángulo entre 2 triángulos adyacentes debe ser estrictamente menor a  $180$ .



En el resto del trabajo consideraremos triangulaciones primitivas y convexas.

Tomamos copias de  $T$  como sigue:

$$T_x = s_x(T), \quad T_y = s_y(T), \quad T_{xy} = s(T)$$

Donde  $s_x, s_y$  son las reflexiones respecto a los ejes coordenados  $X$  y  $Y$ , y  $s = s_x \circ s_y$  es la reflexión respecto al origen.

Extendemos la triangulación de  $T$  en los demás cuadrantes  $T \cup T_x \cup T_y \cup T_{xy}$  y, dada la asignación de signos  $a_{i,j} = +/ -$  sobre los vértices  $(i, j)$  de  $T$ , extendemos sobre  $T \cup T_x \cup T_y \cup T_{xy}$ , de la siguiente forma:

El monomio  $x^i y^j$  es enviado en  $(-x)^i y^j$  bajo  $s_y$ . De la misma forma, es enviado a  $x^i (-y)^j$  bajo  $s_x$ . Y en la composición  $s$  es enviado a  $(-x)^i (-y)^j$ .

Bajo estas funciones podemos hablar de 4 grupos distintos de puntos, los cuales van a comportarse respecto a las reflexiones como sigue:

Si tenemos un vértice con coordenadas  $(i, j)$ , indistintamente del signo de éste,

$i = 2n, j = 2m$ , El vértice no cambia de signo bajo ninguna reflexión

$i = 2n + 1, j = 2m + 1$  El vértice cambia de signo en cada reflexión

$i = 2n + 1, j = 2m$  El vértice sólo cambia de signo bajo  $s_y$

$i = 2n, j = 2m + 1$  El vértice sólo cambia de signo bajo  $s_x$

Vamos a seleccionar el punto medio de cada arista que tenga vértices con diferentes signos, y unimos con un segmento de recta los puntos medios de 2 aristas que se encuentren contenidos en el mismo triángulo. Llamaremos  $L'$  a la unión de todos los segmentos de recta de cada triángulo de la triangulación extendida.

Identificamos los puntos antípodos de la frontera de  $T \cup T_x \cup T_y \cup T_{xy}$ . Tenemos un espacio resultante  $T_*$  que es homeomorfo a  $\mathbb{R}P^2$ . Denotamos por  $L$  la imagen de  $L'$  en  $T_*$ .

Al par  $(T_*, L)$  le llamamos *la carta de una curva proyectiva algebraica real*  $A$ , si existe una curva algebraica  $A \subset \mathbb{R}P^2$  tal que los pares  $(T_*, L)$  y  $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}A)$  son homeomorfos. Así, al par  $(T_*, L)$  le llamamos *la carta de*  $A$ .

Una de las limitantes mencionadas al principio del capítulo, corresponde a la asignación de signos sobre la triangulación. Los signos sobre las reflexiones de la triangulación están determinados por las funciones antes mencionadas  $s_x, s_y$  y no en forma directa como en el caso de la triangulación  $T$ .

De esta forma, encontrar una asignación que forme la carta de  $A$  con la configuración deseada, se vuelve una tarea complicada.

Un ejemplo claro de esto, está en la figura 3.9. El cambio de un signo en el vértice  $(1, 1)$  cambia la composición de la curva, dando dos componentes más a la curva original.

**Teorema 6.** (O. Viro) [3] *Dada una triangulación primitiva y convexa de  $T$ , con una asignación de signos  $a_{i,j}$  sobre los vértices de  $T$ , existe una curva proyectiva plana algebraica real, no singular  $A$ , de grado  $m$  con la carta  $(T_*, L)$ .*

**Definición 16.** A una curva algebraica plana real proyectiva, no singular, le llamamos  $T$  – Curva si tiene una carta  $(T_*, L)$ .

Teniendo ya la carta de una curva proyectiva algebraica real necesitamos dar un polinomio que la genere. Este polinomio está dado de la siguiente forma:

$$Q_t(x, y) = \sum_{(i,j) \in T} a_{i,j} x^i y^j t^{\nu(i,j)},$$

donde  $i, j$  son enteros,  $t$  es un parámetro,  $a_{i,j}$  es el signo del punto entero  $(i, j)$  y  $\nu$  es la función de convexidad definida por la triangulación  $T$ . Cabe señalar que proyectivizar el polinomio  $Q_t(x, y)$ , para un valor suficientemente pequeño de  $t$ , define una curva con la carta requerida.

## 3.2. Función de levantamiento $\nu(x, y)$

Antes de dar la construcción necesitamos una función de convexidad  $\nu(x, y)$ , y la función que propongo para esto es la siguiente.

Dada la triangulación primitiva, tomamos un triángulo que será la base de la construcción, al que llamaremos  $c_0$ , y a los vértices de este triángulo les asignamos la altura<sup>1</sup>  $b_0$ . Agregamos los triángulos que comparten una arista con  $c_0$  y los triángulos que tienen 2 de sus vértices en  $c_0$ . A esta figura le llamamos  $c_1$  como se muestra en la figura 3.1. Asignamos altura  $b_1$  a los vértices añadidos. Siguiendo con esta construcción, a la figura  $c_k$  le agregamos los triángulos que comparten arista y los que comparten 2 vértices con  $c_k$  para formar  $c_{k+1}$ , y a los nuevos vértices les asignamos la altura  $b_{k+1}$ .

---

<sup>1</sup>le llamamos la altura del vértice a la distancia que del vértice levantado al plano  $XY$  bajo la función  $\nu(x, y)$ .

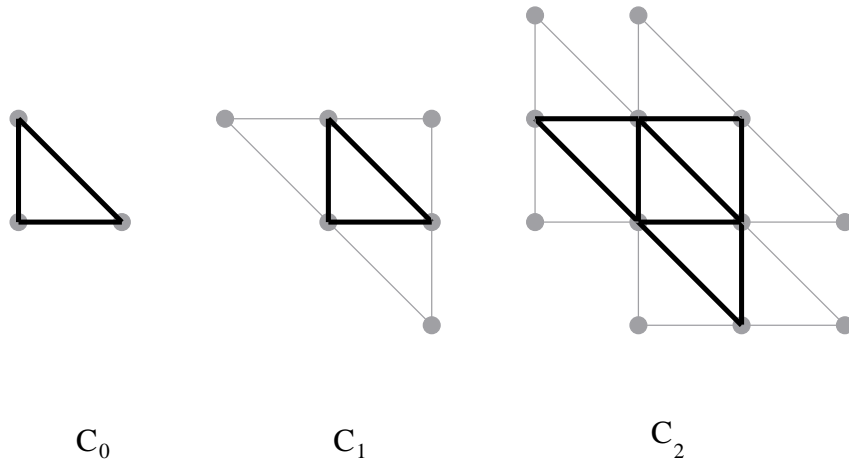


Figura 3.1: Secuencia de construcción en base a un triángulo

Si en lugar de un triángulo queremos usar un vértice como base, a este vértice le asignamos la altura  $b_0$  y consideramos a todos los triángulos que contienen como vértice a  $c_0$ , igual que en la figura 3.2. Los vértices de  $c_0$  tendrán altura  $b_1$  (excepto el vértice base). Después procedemos de la misma forma que con la construcción anterior. Así, para la figura  $c_k$ , agregamos los triángulos para formar  $c_{k+1}$  y a los nuevos vértices les asignamos altura  $b_{k+2}$ .

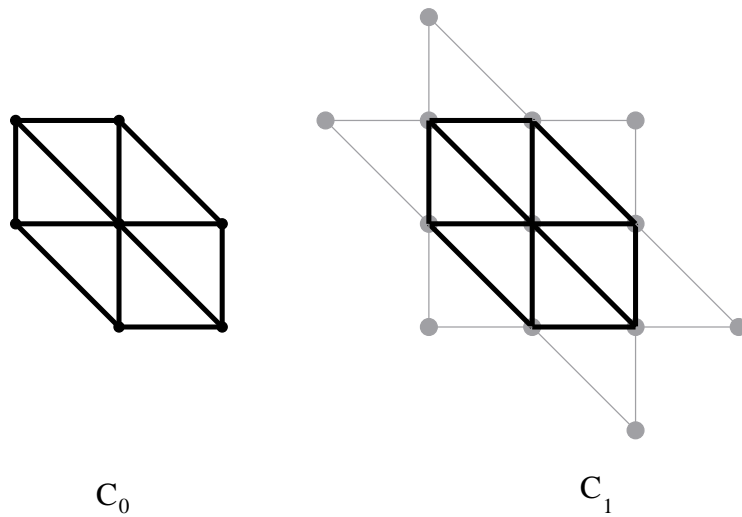


Figura 3.2: Secuencia de construcción en base a un vértice

La altura  $b_n$  está dada por la sucesión recursiva

$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_{k+1} &= 2b_k + 1 \end{aligned}$$

Para demostrar la convexidad de  $\nu(x, y)$  basta demostrar que para cualesquiera 2 triángulos de  $T$ , el ángulo de los vectores normales de cada uno de los triángulos levantados por  $\nu(x, y)$  es menor a 180 grados. Y para ésto, asignamos vectores en  $\mathbb{R}^3$  a los vértices de los 2 triángulos. Existen 27 posibles configuraciones bajo 3 diferentes parámetros para cada configuración, pero sólo obtendremos 3 pares diferentes de vectores normales por lo que nos restringiremos a las 3 configuraciones que facilitan los cálculos.

▪ **Configuración A**

Asignamos a los vértices los siguientes vectores (Figura 3.3).

$$\begin{aligned} V_1 &= (x, y, z) \\ V_2 &= (x, y + 1, 2z + 1) \\ V_3 &= (x + 1, y, 2z + 1) \\ V_4 &= (x + 1, y + 1, 4z + 3) \end{aligned}$$

Con  $z = b_k$ , para alguna  $k \in \mathbb{N}$ ,

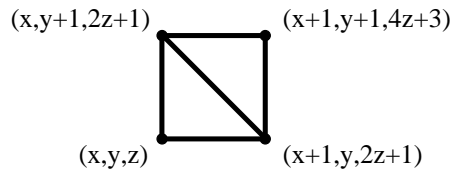


Figura 3.3: Configuración A

Para formar el vector normal del primer triángulo hacemos

$$\begin{aligned} V_2 - V_1 &= (0, 1, z + 1) \\ V_3 - V_1 &= (1, 0, z + 1). \end{aligned}$$

Y calculamos el vector normal  $N_1$  mediante el producto cruz en  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & z + 1 \\ 1 & 0 & z + 1 \end{vmatrix} = (z + 1)i + (z + 1)j - k.$$

De la misma forma, hacemos

$$V_4 - V_2 = (0, 1, 2z + 2)$$

$$V_3 - V_2 = (1, -1, 0).$$

y el producto cruz nos da el vector normal  $N_2$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2z + 2 \\ 1 & 0 & z + 1 \end{vmatrix} = (2z + 2)i + (z + 1)j - k.$$

Para calcular el ángulo de los vectores  $N_1 = (z + 1, z + 1, -1)$  y  $N_2 = (2z + 2, z + 1, -1)$  utilizamos la fórmula

$$\frac{(N_1 \cdot N_2)}{\|N_1\| \cdot \|N_2\|} = \cos(\theta)$$

donde el ángulo  $\delta \leq 180$  es el ángulo diédrico de los 2 triángulos. Entonces el levantamiento es convexo si  $0 < \theta < 180$ . Para que esto suceda, el  $\cos(\theta)$  debe ser positivo. Pero,  $(N_1 \cdot N_2) > 0, \forall z = b_n$ .

De esta forma vemos que el ángulo diédrico está acotado superior e inferiormente, por lo que para esta configuración se mantiene.

### ■ Configuración B

Asignamos los vectores (Figura 3.4)

$$V_1 = (x, y, z)$$

$$V_2 = (x, y + 1, 2z + 1)$$

$$V_3 = (x + 1, y, 4z + 3)$$

$$V_4 = (x + 1, y + 1, 8z + 7)$$

Trasladamos los vectores  $V_2, V_3$  al punto  $(x, y, z)$

$$V_2 - V_1 = (0, 1, z + 1)$$

$$V_3 - V_1 = (1, 0, 3z + 3).$$

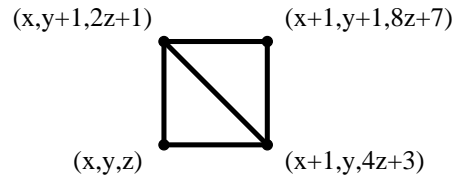


Figura 3.4: Configuración B

Calculamos  $N_1$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & z+1 \\ 1 & 0 & 3z+3 \end{vmatrix} = (3z+3)i + (z+1)j - k.$$

De la misma forma

$$\begin{aligned} V_4 - V_2 &= (0, 1, 6z+7) \\ V_3 - V_2 &= (1, -1, 2z+2). \end{aligned}$$

Calculamos  $N_2$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 6z+7 \\ 1 & 0 & 2z+2 \end{vmatrix} = (6z+7)i + (4z+5)j - k.$$

Los 2 vectores  $N_1 = (3z+3, z+1, -1)$  y  $N_2 = (6z+7, 4z+5, -1)$  están por debajo del plano  $XY$  y  $(N_1 \cdot N_2) > 0$ ,  $\forall z = b_n$ , por lo que la configuración se verifica.

### ■ Configuración C

Asignamos los vectores (Figura 3.5)

$$\begin{aligned} V_1 &= (x, y, z) \\ V_2 &= (x, y+1, 2z+1) \\ V_3 &= (x+1, y, 4z+3) \\ V_4 &= (x+1, y+1, 4z+3) \end{aligned}$$

Centramos en  $V_1$

$$V_2 - V_1 = (0, 1, z+1)$$

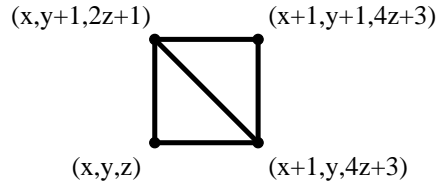


Figura 3.5: Configuración C

$$V_3 - V_1 = (1, 0, 3z + 3).$$

Calculamos  $N_1$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & z+1 \\ 1 & 0 & 3z+3 \end{vmatrix} = (3z+3)i + (z+1)j - k.$$

Centramos en  $V_2$

$$V_4 - V_2 = (0, 1, 2z + 2)$$

$$V_3 - V_2 = (1, -1, 2z + 2).$$

Calculamos  $N_2$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2z+2 \\ 1 & -1 & 2z+2 \end{vmatrix} = (2z+2)i + (0)j - k.$$

Y bajo la premisa de los 2 casos anteriores, los vectores están por debajo del plano  $XY$  y  $(N_1 \cdot N_2) > 0$ ,  $\forall z = b_n$ .

Concluimos que la función  $\nu(x, y)$ , dada la definición de esta sección, cumple con ser una función convexa sobre  $T$ . La función está dada de forma recursiva; esto es una desventaja puesto que no podemos calcular los valores de cada altura sin haber calculado los valores de los vértices anteriores. Sin embargo, tiene la ventaja de que los exponentes siempre son enteros y estos no crecen con tanta desmesura.

Quiero agregar que, aún a pesar de que puede ser definido el  $c_0$  en cualquier lugar de  $T$ , existe una forma óptima que depende del grado  $m$  del

polinomio que se quiere construir, la cual consiste en tomar la base  $c_0$  siempre sobre la recta identidad. Aparte, se debe elegir la base según el siguiente criterio:

- $m \equiv 0 \pmod{3}$  Vértice
- $m \equiv 1 \pmod{3}$  Triángulo con ángulo apuntando al centro
- $m \equiv 2 \pmod{3}$  Triángulo con ángulo apuntando al lado al lado contrario del centro

### 3.3. Construcción de una T-Curva

Consideramos la distribución de signos definida para  $T$  en la figura 3.6. Vamos a construir el polinomio  $Q_t(x, y)$  para esta configuración.

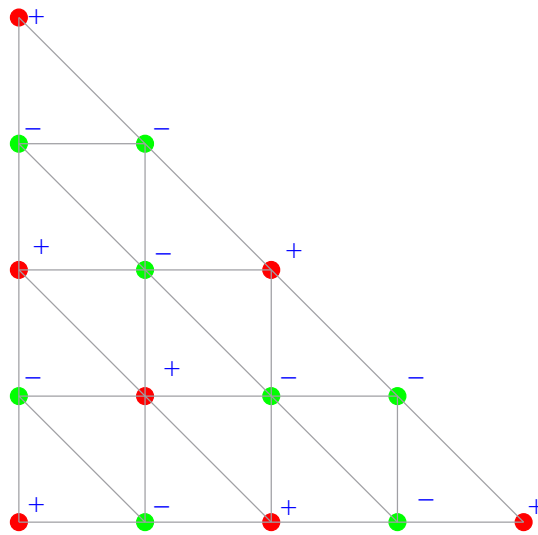


Figura 3.6: Configuración de signos

Tomamos como base  $c_0$  el triángulo  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 2, 0)$ ,  $(2, 1, 0)$ . Asignamos las alturas de los vértices mediante la función  $\nu(x, y)$ .

En la siguiente tabla se muestra el valor de la altura, dadas las coordenadas de los vértices de  $T$  y los  $c_n$  en donde están contenidos, junto con el signo de cada uno de los vértices de acuerdo a la distribución asignada al principio de esta construcción.



$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$
$+(1, 1, 0)$	$+(0, 2, 1)$	$-(0, 1, 3)$	$+(0, 0, 7)$
$-(1, 2, 0)$	$+(2, 0, 1)$	$-(1, 0, 3)$	$+(4, 0, 7)$
$-(2, 1, 0)$	$+(2, 2, 1)$	$-(3, 1, 3)$	$+(0, 4, 7)$
		$-(3, 0, 3)$	
		$-(1, 3, 3)$	
		$-(0, 3, 3)$	

Extendemos la triangulación de  $T$ , ya definida con los signos correspondientes, mediante las funciones  $s$ ,  $s_x$ ,  $s_y$  y  $s_{xy}$ .

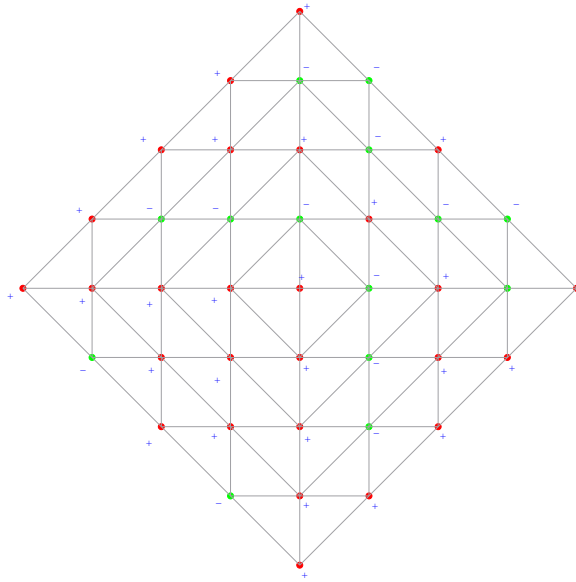


Figura 3.7: Extensión de la triangulación de  $T$

Entonces la función  $Q_t(x, y)$  queda definida de la siguiente manera

$$Q_t(x, y) = t^7 x^4 + t^7 y^4 - t^3 x^3 - t^3 y^3 - t^3 x^3 y - t^3 x y^3 \\ + t x^2 y^2 - x^2 y - x y^2 + t x^2 + t y^2 + x y - t^3 y - t^3 x + t^7$$

con  $t \leq \frac{1}{20}$ .

La carta asociada a la curva se muestra en la última gráfica de esta sección.

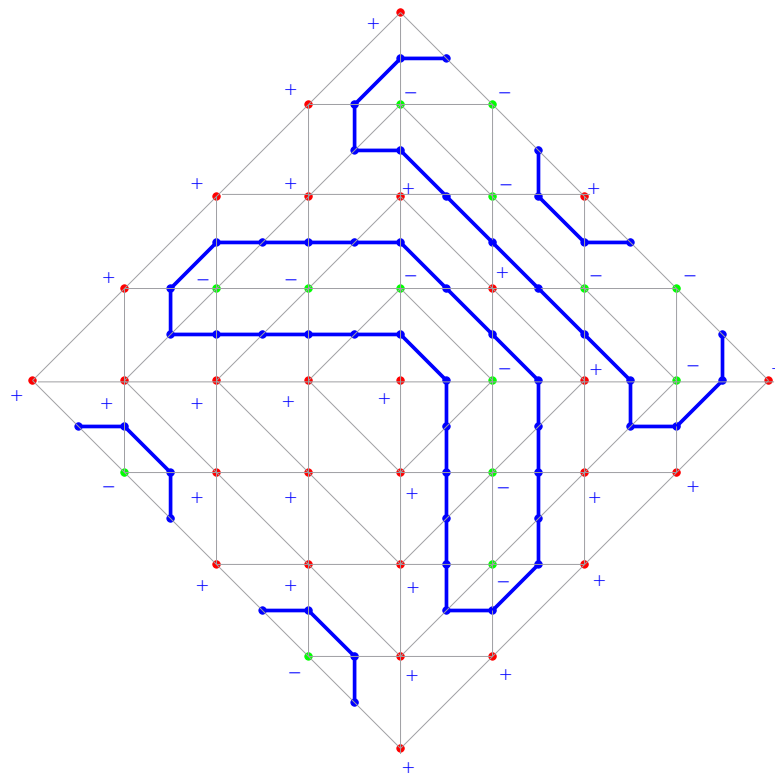


Figura 3.8: Carta de grado 4 asociada a la ecuación  $Q_t(x, y)$

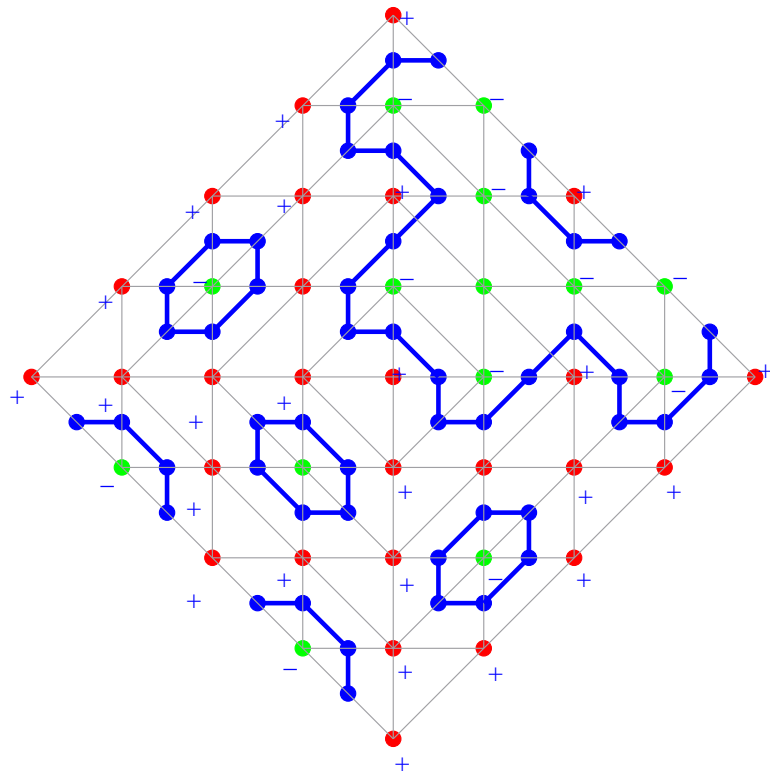


Figura 3.9: Carta de grado 4, signo opuesto en el vértice  $(1, 1)$

## Capítulo 4

# Construcción de M-Curvas y la conjetura de Ragsdale

En éste último capítulo, vamos a presentar de dos aplicaciones importantes del método de Viro. Una de éstas es la construcción de M-Curvas, la cual es la parte más importante de este texto. Y la otra es la conjetura de Ragsdale. Esta conjetura se ha trabajado ampliamente, pero con el método de Viro arroja resultados interesantes en este tema.

### 4.1. Construcción de M-Curvas con el método de Viro

Recordemos que una M-Curva de grado  $m$  es una curva en  $\mathbb{R}P^2$  que tiene  $(m-1)(m-2)/2 + 1$  componentes conexas.

Sea  $m = 2k$  un entero positivo, y sea  $T$  el triángulo en  $\mathbb{R}^2$ ,

$$T = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq m\}.$$

Ahora consideremos la siguiente distribución de signos para los vértices enteros del triángulo  $T$ :

Un vértice  $(i, j)$  de  $T$  es llamado *par* si  $i, j$  son ambos pares, e *impar* de suceder cualquier otra cosa. Un punto tendrá signo  $-$ , si éste es un punto par, y tendrá signo  $+$ , si es un punto impar.

A esta distribución se le conoce como *la distribución de signos de Harnack*.

Usaremos el sistema de notación de configuraciones o esquemas de curvas no singulares propuesto por Viro. El esquema que consiste de un sólo óvalo

se denotará como  $\langle 1 \rangle$  y el esquema vacío como  $\langle 0 \rangle$ . El conjunto de  $A$  óvalos no anidados se representa por el símbolo  $\langle A \rangle$ , y el conjunto de óvalos obtenidos por la adición de un óvalo que contiene a  $A$  es denotado como  $\langle 1 \langle A \rangle \rangle$ . Un esquema que es la unión de 2 conjuntos de óvalos  $\langle A \rangle$  y  $\langle B \rangle$  que no se contienen entre sí, se representa como  $\langle A \cup B \rangle$ .

**Teorema 7.** [7] *Toda triangulación, primitiva y convexa de  $T$  con longitud de lado par  $2k$  con la distribución de signos de Harnack en sus vértices produce una M-Curva de grado  $m = 2k$  con carta  $(T_*, L)$  y con el esquema topológico*

$$\langle \frac{3k^2 - 3k}{2} \cup 1 \langle \frac{(k-1)(k-2)}{2} \rangle \rangle.$$

**Observación 1.** Una curva que tenga este esquema consiste de la siguiente cantidad de óvalos

$$\begin{aligned} \frac{3k^2 - 3k}{2} + 1 + \frac{(k-1)(k-2)}{2} &= \frac{3k(k-1) + (k-1)(k-2)}{2} + 1 \\ &= \frac{(k-1)(3k + k - 2)}{2} + 1 = \frac{(k-1)(4k-2)}{2} + 1 \\ &= \frac{2(k-1)(2k-1)}{2} + 1 = \frac{(2k-2)(2k-1)}{2} + 1 \end{aligned}$$

y como  $m = 2k$ , podemos reescribir la última ecuación como sigue

$$\frac{(m-2)(m-1)}{2} + 1.$$

Dado que para cada  $m \in \mathbb{N}$ , la curva cumple con la cota de Harnack para el número máximo de componentes, es una M-Curva.

*Demostración.* Vamos a analizar primero los vértices enteros que hay en el interior del triángulo  $T$ . Notemos que  $T$  tiene  $m + 1$  columnas de vértices enteros.

La primera columna de vértices en el triángulo  $T$  tiene  $m + 1$  vértices pero está en la frontera del triángulo por lo que no contiene vértices en el interior.

La segunda columna tiene  $m$  vértices impares, de los cuales 2 son parte de la frontera, por lo que la segunda columna contiene  $m - 2$  vértices en el interior.

La tercera columna tiene  $m-1$  vértices y, por ende, contiene  $m-3$  vértices en el interior.

Siguiendo este razonamiento, la columna  $m-1$  contendrá sólo 1 punto del interior. Las últimas 2 columnas no pueden contener más vértices en el interior. Haciendo la suma, tenemos que el número de vértices del interior de  $T$  es

$$\sum_{i=1}^{m-2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Ahora vamos a contar los vértices pares.

Tenemos en total  $m+1$  columnas pero sólo las que tienen entrada en  $x$  par van a contener a los vértices pares, lo cual nos deja con  $k+1$  columnas que contienen a los vértices pares. La primera y la última columna pertenecen completamente a la frontera por lo que tenemos un total de  $k-1$  columnas que contienen a los vértices pares en el interior.

Cada una de éstas contiene  $k+1$  vértices pares y 2 de estos vértices están en la frontera de  $T$  teniendo un total de  $k-1$  vértices pares para cada columna con vértices pares en el interior. Entonces, el número total de vértices pares en el interior de  $T$  es

$$\sum_{i=1}^{k-1} k-1 = 0 + 1 + 2 + \dots + (k-2) = \frac{(k-2)(k-1)}{2}$$

El número de vértices impares en el interior de  $T$  lo podemos calcular haciendo la resta

$$\begin{aligned} \frac{(2k-1)(2k-2)}{2} - \frac{(k-1)(k-2)}{2} &= \frac{4k^2 - 6k + 2 - (k^2 - 3k + 2)}{2} = \\ &= \frac{4k^2 - 6k + 2 - k^2 + 3k - 2}{2} = \frac{3k^2 - 3k}{2}. \end{aligned}$$

Vamos a demostrar que cada uno de los vértices pares en el interior de  $T$  es el centro de una estrella<sup>1</sup> en alguno de los cuadrantes  $T \cup T_x \cup T_y \cup T_{xy}$ , dependiendo del tipo de vértice, y ésta contendrá un óvalo.

Tomamos un vértice par arbitrario en el interior de la triangulación de  $T$ . Éste tiene signo “-”. Todos los vértices vecinos son impares (si el vértice

---

<sup>1</sup>La *estrella de un vértice* es la unión de triángulos de la triangulación que contienen a este vértice.

par tiene coordenadas  $(2i, 2j)$  entonces cualquier otro vértice alrededor de éste tendrá coordenadas  $(2i \pm 1, 2j \pm 1)$  por lo que tendrán signo  $+$ . Esto significa que la estrella de vértice par contiene un óvalo de la curva  $L$ . El número de estrellas con esta condición es  $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ . Por lo tanto tenemos  $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$  óvalos en el primer cuadrante.

Para los vértices impares en el interior de  $T$ , vamos a clasificarlos como sigue:

1. Supongamos que el vértice es de la forma  $\tau = (2i, 2j + 1)$ . Bajo la transformación  $s_y$  este vértice seguirá teniendo signo  $+$ . Los vértices pares que son adyacentes a él seguirán teniendo signo  $-$ . Los vértices impares que son adyacentes a él en  $T$  tienen entrada en  $x$  impar por lo que, bajo la transformación  $s_y$ , cambiarán su signo a menos. Esto quiere decir que mientras el vértice  $\tau = (2i, 2j + 1)$  tiene signo  $+$  en  $T_y$ , los vértices de la estrella en la que se encuentra tendrán signo  $-$ . Por lo que esta estrella contiene un óvalo de  $L$ .
2. Los vértices de la forma  $\tau = (2i+1, 2j)$ , bajo  $s_x$ , mantendrán su signo en  $T_x$ , al igual que los vértices pares adyacentes. Pero los vértices impares adyacentes a  $\tau = (2i + 1, 2j)$  en  $T$  cambiarán su signo en  $T_x$  puesto que perteneces a una fila con entrada impar en  $y$ . De este modo, los vértices de la estrella que tiene como centro a  $\tau = (2i + 1, 2j)$  tendrán signos diferentes al centro. Así vemos que la estrella contiene un óvalo en  $L$ .
3. Para el caso de los vértices de la forma  $\tau = (2i + 1, 2j + 1)$  podemos deducir que, bajo la transformación  $s_{xy}$ , mantendrán el signo  $+$ . Esto debido a que bajo las transformaciones  $s_x$  y  $s_y$  cambian su signo y  $s_{xy} = s_x \circ s_y$ . Los vértices pares no cambian de signo bajo alguna de las transformaciones y los vértices impares con forma diferente a los definidos en este caso, sólo cambian de signo bajo una de las 2 transformaciones  $s_x$  o  $s_y$ . De este modo, los vértices  $\tau = (2i + 1, 2j + 1)$  mantienen el signo positivo y los vértices de la estrella que los contiene en  $T_{xy}$  tienen signo negativo. Así, la estrella contiene un óvalo en  $L$ .

Bajo la consideración de los 3 casos anteriores, podemos concluir que cada vértice impar en el interior de  $T$  está asociado y conteniendo un único óvalo, con un total de  $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$  dejando un sólo óvalo por definir.

Este óvalo restante, es el más complicado de encontrar debido a se encuentra en los 4 cuadrantes de  $T \cup T_x \cup T_y \cup T_{xy}$ . Además, veremos que tiene óvalos de los ya definidos en su interior.

Vamos a regresar a  $T$ . Existen vértices pares e impares intercalados a lo largo de toda su frontera. Sin embargo, los vértices impares contenidos en el eje  $X$  son de la forma  $\tau = (2i, 2j + 1)$ ; los vértices impares en la frontera paralela al eje  $Y$  son de la forma  $\tau = (2i + 1, 2j)$ ; los vértices impares sobre la frontera diagonal de  $T$  son de la forma  $\tau = (2i + 1, 2j + 1)$ .

Los vértices contenidos en la frontera común de  $T$  y  $T_y$  son, del lado de  $T_y$  todos negativos, y del lado de  $T$  positivos. Por lo que  $L$  se moverá alternadamente entre  $T$  y  $T_y$  a lo largo de la frontera común. Sucede lo mismo en la frontera común de  $T$  y  $T_x$ .

Los vértices en la frontera común de  $T_{xy}$  y  $T_y$  vienen bajo la transformación  $s_y$  en  $T$  y son pares o son impares de la forma  $\tau = (2i, 2j + 1)$  por lo que todos tienen signo  $-$ . Esto quiere decir que  $L$  no cruza esta frontera.

De igual manera, Los vértices de la frontera común de  $T_{xy}$  y  $T_x$  son la imagen de los vértices de la frontera de  $T$  paralela al eje  $Y$  bajo la transformación  $s_x$  y los vértices que la conforman tienen signo  $+$ . Tenemos entonces que  $L$  no cruza tampoco esta frontera.

Los vértices de la frontera diagonal de  $T$  son pares o impares de la forma  $\tau = (2i + 1, 2j + 1)$  y como vimos en el caso 3, estos vértices cambian su signo bajo cualquier transformación. Entonces, bajo  $s_x$  todos tienen signo negativo al igual que bajo la transformación  $s_y$  y estos puntos son la frontera común de  $T_x$  y  $T_y$ . Por esta razón,  $L$  no cruza esta frontera.

Por último, la frontera común entre  $T$  y  $T_{xy}$  es la frontera diagonal de  $T$  y bajo la transformación  $s_{xy}$ , como los vértices impares son de la forma  $\tau = (2i + 1, 2j + 1)$ , no cambian su signo,  $L$  alternará entre  $T$  y  $T_{xy}$ .

Afirmamos que  $L$  alternará entre todos los puntos de la frontera de  $T$  haciendo un óvalo que contiene a todos los puntos del interior de  $T$  y por lo tanto conteniendo a todos los óvalos en el interior del mismo.

Podemos concluir que el esquema concuerda con lo previsto por el teorema.

□



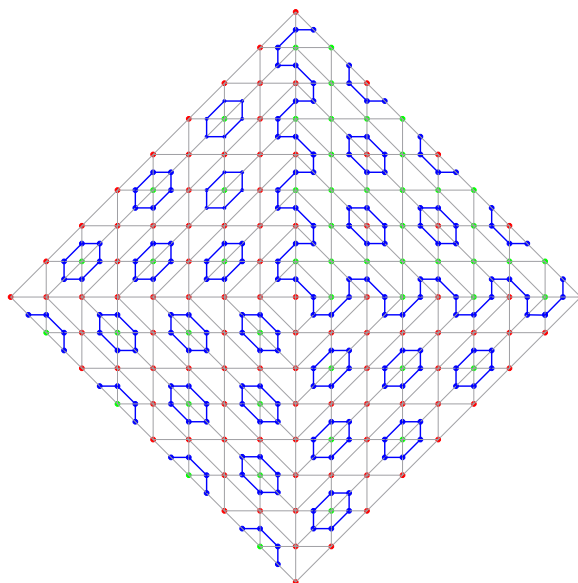


Figura 4.1: Configuración de Harnack para  $m = 8$

## 4.2. Conjetura de Ragsdale

Vamos a considerar una curva algebraica plana proyectiva real no singular de grado par  $m = 2k$ . El conjunto de puntos de esta curva divide al plano proyectivo real  $\mathbb{R}P^2$  en 2 partes con una frontera común  $\mathbb{R}A$  (estas partes son los subconjuntos de  $\mathbb{R}P^2$  donde el polinomio que define la curva tiene los valores positivos o negativos respectivamente). La componente con valores negativos será denotada por  $\mathbb{R}P_-^2$ , y la componente con valores positivos se denotará como  $\mathbb{R}P_+^2$ .

La topología de  $\mathbb{R}P_+^2$  y de  $\mathbb{R}P_-^2$  están íntimamente conectadas por el tipo topológico del par  $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}A)$ . Sea  $p$  el número de componentes conexas de  $\mathbb{R}P_+^2$ , y  $n + 1$  el número de componentes conexas de  $\mathbb{R}P_-^2$  (exactamente una componente conexa de  $\mathbb{R}P_-^2$  es no orientable).

Los números  $p$  y  $n$  pueden ser descritos de otra forma. Un óvalo de una curva es llamado *par* (resp. *impar*) si está contenido en un número par (resp. impar) de otros óvalos de la curva.

Asignando un valor negativo a la componente no orientable, es fácil ver que  $p$  es el número de óvalos pares de la curva, y  $n$  el número de óvalos impares.

En 1906, V. Ragsdale, estudiando los resultados de las construcciones de curvas de Harnack y Hilbert, propuso 2 conjeturas:

$$p \leq \frac{3k^2 - 3k + 2}{2}, \quad n + 1 \leq \frac{3k^2 - 3k + 2}{2}$$

y

$$p - n \leq \frac{3k^2 - 3k + 2}{2}, \quad n - p + 1 \leq \frac{3k^2 - 3k + 2}{2}$$

En 1938, I. Petrowsky probó la segunda conjetura de Ragsdale y también propuso una conjetura similar para la primera [6]:

$$p \leq \frac{3k^2 - 3k + 2}{2}, \quad n \leq \frac{3k^2 - 3k + 2}{2}$$

En 1980, O. Viro construyó curvas de grado  $2k$  con  $n = \frac{3k^2 - 3k + 2}{2}$  para cualquier  $k \geq 4$ . Estas curvas son contraejemplo a la conjetura original de Ragsdale, pero no de la conjetura de Petrowsky.

El siguiente teorema nos da un contraejemplo de la conjetura corregida de Ragsdale (o de la conjetura de Petrowsky). Este teorema se demuestra con la construcción de curvas de Viro pero con una triangulación  $T$  diferente a la original.

**Teorema 8.** *Para cualquier entero  $k \geq 3$*

- a) *Existe una curva algebraica plana proyectiva no singular de grado  $2k$  con*

$$p = \frac{3k^2 - 3k + 2}{2} + \left[ \frac{(k - 3)^2 + 4}{8} \right]$$

(donde  $[x]$  denota el máximo entero menor o igual que  $x$ ).

- b) *Existe una curva algebraica plana proyectiva no singular de grado  $2k$  con*

$$n = \frac{3k^2 - 3k + 2}{2} + \left[ \frac{(k - 3)^2 + 4}{8} \right] - 1.$$

La demostración de este teorema está basada en la construcción de un hexágono con signos adecuados. Vamos a construir T-curvas con las propiedades propuestas. Veremos, primero, cómo construir una curva de grado  $m = 2k$  con  $p = \frac{3k^2 - 3k + 2}{2} + 1$ .

Suponemos que el hexágono  $S$  mostrado en la figura 4.2 es puesto dentro del triángulo  $T = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq m\}$  de tal modo que el centro de  $S$  tiene ambas coordenadas impares. Podemos extender la triangulación primitiva dentro del hexágono  $S$  al triángulo  $T$  extendiendo partes convexas del polígono.

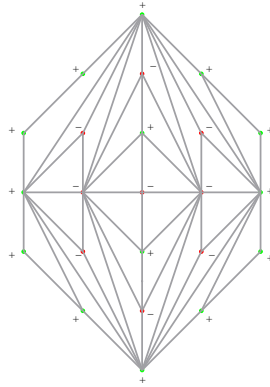


Figura 4.2: Hexágono  $S$  con la configuración de signos de Harnack

Para poder aplicar el teorema 6, necesitamos escoger signos en los vértices de  $T$ . Dentro de  $S$  agregamos los signos de acuerdo a la figura 4.2, y afuera de ésta usamos la distribución de signos de Harnack.

# Bibliografía

- [1] Christopher G. Gibson. *Elementary geometry of differential curves: an undergraduate introduction*. Cambridge University Press, 1998.
- [2] Alfred Harnack. *Über Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen curven*. Math, Ann Vol 10, 1876.
- [3] Ilia Itenberg. *Viro's Method and T-Curves*. Progress in Mathematics Vol 143, 1996.
- [4] Yukio Matsumoto. *An introduction to Morse Theory*. American Mathematical Society, 2002.
- [5] John Milnor. *Morse Theory*. Annals of Mathematics Studies Prentice Hall University Press, 1947.
- [6] Ivan Petrowsky. *On the Topology of Real Plane Algebraic Curve*. Annals of Mathematics Vol. 39, 1938.
- [7] Ilia Itenberg y Oleg Viro. *Patchworking Algebraic Curves Disproves the Ragsdale Conjecture*. The Mathematical Intelligencer Vol. 18 No.4, 1996.
- [8] Jean-Jacques Risler y Riccardo Benedetti. *Real algebraic and semi-algebraic sets*. Hermann Editeurs des Sciences et des Arts, 1990.