UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

La matemática como lenguaje de la naturaleza: una propuesta de motivación al estudio del álgebra.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (MATEMÁTICAS).

P R E S E N T A

ALBERTO JORGE RAMÍREZ ROMERO.

DIRECTOR DE TESIS: DR. MICHAEL BAROT SCHLATTER.

MADEMS Maestría en Docencia para la Educación Media Superior

MÉXICO, D. F. DICIEMBRE, 2011.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno:
Ramírez
Romero
Alberto Jorge
58.51.36.93
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
MADEMS, Matemáticas
097586971

2. Datos del tutor:
Dr.
Michael
Barot
Schlatter

3. Datos del sinodal 1:
Dr.
Carlos
Prieto
de Castro

4. Datos del sinodal 2:
Mtra.
Marcela B.
González
Fuentes

5. Datos del sinodal 3:
M. en C.
Elena
de Oteyza
de Oteyza

6. Datos del sinodal 4:
Dra.
Frida
Díaz Barriga
Arceo

Datos del trabajo escrito:
La matemática como lenguaje de la naturaleza:
una propuesta de motivación al estudio del álgebra.
122 p
2011

AGRADECIMIENTO

En abstracto, a la Universidad Nacional Autónoma de México:
Institución fundamental y trascendente para la construcción de nuestra nación
y para la formación humana.

En concreto, a los hombres y mujeres con quienes he tenido
la oportunidad de compartir momentos para trabajar
y construir juntos un proyecto educativo, propio y colectivo.

Agradezco especialmente a mis profesores y profesoras
que me acompañaron en mi proceso de formación académica,
quienes expresaron elementos esenciales del ser docente:
la convicción por enseñar y compartir,
la pasión por conocer y aprender
y el afán por reivindicar la trascendencia humana de la educación.
También a mis compañeros y compañeras estudiantes y colegas
con quienes he compartido reflexiones y construido propuestas,
así como a los y las estudiantes de los grupos con los que he trabajado,
quienes me recuerdan que enseñar-aprender es, en esencia,
una relación intersubjetiva que implica el reconocimiento del otro,
no la mera transmisión e intercambio de conocimiento.

A Guadalupe, Roberto,
Julia, Maribel, Adriana y
Lizbeth,
a quienes amo.

A Arturo y José Antonio,
referentes y apoyos fundamentales
para mi formación personal.

A mi amigo Soria,
compañero fraterno e intelectual.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Pensaron -los pitagóricos- *que los elementos de los Números eran los elementos de todos los seres, y que todo el cielo era armonía y número*, nos dijo Aristóteles. Filolao afirmó: *todo es número*. Galilei por su parte, expresó: *La filosofía está escrita en ese grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres con los que está escrito. Está escrito en lengua matemática...*

Tales citas aluden a la idea central y título de la tesis: "La matemática como lenguaje de la naturaleza: una propuesta de motivación al estudio del álgebra". La idea que subyace en esta metáfora es la de las matemáticas como una forma de explicar, modelar y predecir diversos fenómenos de la naturaleza. Con esto, ante el cuestionamiento frecuente que hacen los estudiantes –explícita o implícitamente–, respecto al sentido e importancia del estudio de las matemáticas, se busca ofrecer respuestas, promover una mayor participación e interés por parte de ellos, en tanto la propuesta didáctica que aquí se presenta, muestra como las matemáticas logran modelar de manera efectiva diversos fenómenos, así como sugiere formas y contenidos para abordarse con los estudiantes de bachillerato para el estudio de algunos temas del álgebra.

Cabe decir que en el momento de la búsqueda y definición de un tema de tesis, resultó que al analizar la estructura y contenidos del programa de Matemáticas IV de la Escuela Nacional Preparatoria, realizamos observaciones y críticas al mismo; entre las principales, detectamos que se hace énfasis en la etapa de definiciones y operaciones, como un antecedente a las aplicaciones. Sin que llegue a rechazar tajantemente la pertinencia de la perspectiva didáctica implicada en tal organización, la crítica sirvió para reflexionar y, sobre todo, proponer una perspectiva alterna, aquella que procurará ampliar el sentido al estudio del álgebra y que motivara a los estudiantes, antes de solicitarles llevar a cabo diversos procedimientos con escasa referencia a elementos concretos o desvinculados de aplicaciones o de un sentido de utilidad. Es precisamente en el Capítulo 1, en el que ahondo en dicha crítica al programa y en los fundamentos de la propuesta de este trabajo: didácticos, respecto a las características del conocimiento matemático, y pedagógicos, al hablar de enseñanza situada y del componente motivacional en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Todo esto, luego de fijar una postura respecto a que la propuesta didáctica no se construye a partir de la descalificación o desprecio a una perspectiva, sino a la necesidad de buscar alternativas didácticas, como una forma de enriquecer y ampliar los recursos que tenemos a nuestro alcance los profesores.

En el segundo capítulo: "La matemática como lenguaje de la naturaleza", entro de lleno al análisis histórico y conceptual de esta metáfora. Para hacerlo, elegí dos momentos históricos que considero de suma trascendencia: el de los pitagóricos y el correspondiente a la vida y obra de Galileo Galilei. De ellos –más de este, ya que en los pitagóricos su postura mantuvo un fuerte componente místico– retomo ejemplos que ilustran acerca de las matemáticas como una herramienta para modelar fenómenos. Ha resultado muy ilustrativo analizar los ejemplos en los que se observa claramente la efectividad de las matemáticas para establecer la relación cuantitativa entre variables físicas. Aunado a lo anterior, me ha resultado sumamente satisfactorio el análisis que he hecho de ideas desarrolladas por Galilei. Reconstruirlas y comprenderlas ha sido una confirmación de la extraordinaria creatividad e ingenio del autor. Espero que pueda transmitir tal ánimo en el lector, con lo cual pretendo contribuir a la reflexión y replanteamiento de perspectivas personales en torno a un discurso: el que tiene que ver con el sentido e importancia que asignamos al papel de la imaginación y la creatividad en el desarrollo de la ciencia y para el ejercicio de las matemáticas; además, en lo que respecta al sentido de éstas y su papel en la formación en el bachillerato. Para cerrar el capítulo, consideré pertinente señalar que la perspectiva de "la matemática como lenguaje de la naturaleza", si bien es cierto que es de suma importancia y vigencia, no agota el potencial y descripción del significado de las matemáticas, sus aplicaciones y relación con el estado actual de la disciplina y de los profesionales dedicados a ella. Sin duda que una buena parte del desarrollo actual de éstas, está alejado de preocupaciones respecto a la relación que guardan con la realidad. Se trata, en buena medida, de un desarrollo independiente. Para referirme a esto hablo de "Otras perspectivas sobre el desarrollo de las matemáticas".

En el capítulo 3, presento la "Propuesta didáctica basada en la matemática como lenguaje de la naturaleza", la cual conforma la parte central de mi trabajo. Una vez que se revisó la perspectiva de "la matemática como lenguaje de la naturaleza", la propuesta es la concreción de aquella para que se aborde en los grupos de matemáticas en el bachillerato, en especial en el tratamiento de algunos temas del álgebra. La idea es sugerir y proponer una serie de recursos, antecedentes teóricos y experiencias, para abordar ejemplos con los estudiantes. Cabe aclarar que la propuesta está dirigida fundamentalmente a los docentes, con el propósito de aportar elementos de reflexión en torno al sentido de los conocimientos matemáticos y la didáctica de los mismos. Por supuesto que, como suele ocurrir en los procesos de enseñanza-aprendizaje, los mismos docentes decidirán la forma de replantear y reconstruir las estrategias didácticas que yo planteo. Podemos hablar de una propuesta en el ámbito de la reflexión y análisis del conocimiento matemático, a partir de la investigación que emprendí, las estrategias que planteo e implementé, así como de las experiencias que comparto.

El punto de partida de la propuesta, es el apartado "Problemas pseudoreales y el proceso de matematización de la realidad", con el cual vierto una serie de reflexiones acerca de problemas que con frecuencia se presentan como reales, pero distan de serlo. También, acerca del proceso por medio del cual se transforma o traduce una situación o problema real al lenguaje matemático para la solución o análisis de aquel (matematización); con ambos referentes: problemas pseudoreales y matematización, intenté construir los "Ejemplos de la propuesta didáctica". Además de sugerir la forma en la que podrían abordarse algunos problemas o ejercicios, incluí relatos acerca de mi experiencia al implementar la propuesta en un grupo de bachillerato. Pretendo aportar más elementos de análisis de la propuesta, para su mejor adaptación o efectividad, si es que deciden retomarse los ejemplos para trabajarse con algún grupo. Como complemento a la propuesta y como testimonio de la experiencia de su implementación, tenemos los planes de clase y bitácoras respectivas, las cuales elaboré como parte del trabajo correspondiente a la Práctica Docente.

1. Enseñanza de las matemáticas: reto conocido, alternativas necesarias

Con relación a la docencia de las matemáticas en el caso del bachillerato −al igual que en otros niveles educativos−, los retos y problemas asociados se distinguen notablemente de los de otras disciplinas. Sirvan de ejemplo los índices de reprobación que las asignaturas de matemáticas presentan. Es indudable que para muchos estudiantes e incluso para la población en general, las matemáticas representan una dificultad importante. Están vinculadas quizá como ninguna otra área de estudio a actitudes de rechazo y aversión, las cuales dificultan el proceso de enseñanza-aprendizaje implicado.

El panorama anterior hace necesario proponer acciones tendientes a mejorar resultados y procesos relacionados con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Una acción enmarcada en el campo de la didáctica de esta disciplina, es la propuesta que da título a esta tesis:

> *“La matemática como lenguaje de la naturaleza:*
> *una propuesta de motivación al estudio del álgebra”*[1]

Se trata de una alternativa didáctica que, basada en el empleo de las matemáticas para describir, explicar y modelar fenómenos de la naturaleza, potencie en los alumnos y alumnas la motivación para estudiar los temas del álgebra. Atiende en primera instancia, las características del programa de matemáticas IV de la Escuela Nacional Preparatoria[2], aunque es posible implementar la propuesta en cualquier otro programa que contemple temas de aquel. Supongo que la presentación y comprensión de un escenario vigente de

---

[1] En adelante, me referiré a ésta como la propuesta didáctica.
[2] ENP, UNAM. “Programa de estudios de la asignatura de Matemáticas IV”. 1996. [en línea] Disponible en <http://dgenp.unam.mx/planesdeestudio/96/cuarto/1400.pdf> (16 de marzo del 2009). Referido en adelante en algunos casos como: el programa de estudios.

aplicación de las matemáticas –presente desde hace siglos en la conformación cultural en el ámbito matemático y escolar- contribuirá a que dichos temas resulten de mayor interés para los estudiantes.

El punto de partida de esta propuesta didáctica es: *Mirada crítica al programa de estudios de matemáticas IV*, descrito en el apartado siguiente y en el cual realizo un análisis acerca de la pertinencia de la estructura y el enfoque metodológico del programa. Dicho análisis es en buena medida, el impulso o detonante que hizo pensar en alternativas de intervención educativa que hicieran más efectivo el estudio del álgebra.

1.1 Mirada crítica y propositiva al programa de estudios

El programa de estudios tiene como propósito *reafirmar y enriquecer los conocimientos del álgebra previamente adquiridos, para aplicarlos correctamente en el desarrollo de nuevos conceptos, así como en la solución de problemas de otras disciplinas afines, para que el alumno comprenda que las Matemáticas son un lenguaje y una herramienta que lo vincula con su entorno social.*

Además del propósito, destaco dos aspectos: la estructura del curso y el *enfoque metodológico*. Con relación al primero, el curso se encuentra dividido en tres bloques: *en el primero se definen la simbología, el lenguaje algebraico, los sistemas de numeración y el campo de los números reales. El segundo es el operativo o instrumental, aquí se reafirman las operaciones fundamentales con polinomios. En el tercero, se aplican los dos primeros, planteando un conjunto de problemas tipo procedentes de otras disciplinas.* La tabla 1.1 resume tal estructura.

Unidad	**Tema**	**Bloque**	
1ª	Conjuntos.	1	Definición.
2ª	Sistemas de numeración.		
3ª	El campo de los números reales.		
4ª	Operaciones con monomios y polinomios.	2	Operación.
5ª	Productos notables y factorización.		
6ª	Operaciones con fracciones y radicales.		
7ª	Ecuaciones y desigualdades.	3	Aplicación.
8ª	Sistemas de ecuaciones y desigualdades.		

Tabla 1.1 ***Estructura del curso de matemáticas IV de la ENP.***

Respecto al *enfoque metodológico*, en la *exposición de motivos* del programa se dice que aquel se orienta *hacia un aprendizaje basado en la solución de problemas;* además, que:

> Por medio de los contenidos propuestos, el alumno ahora conocerá, comprenderá y aplicará la simbología de los conjuntos, las diferentes bases numéricas, las propiedades de los números reales y las operaciones fundamentales con expresiones algebraicas al planteamiento, resolución e interpretación de problemas de ésta y otras disciplinas […] que se resuelven en términos de una ecuación, una desigualdad o un sistema de ecuaciones o un sistema de desigualdades. La aplicación de esta metodología privilegia el trabajo en el aula, ya que el profesor identificará con el grupo problemas "tipo", posibles de resolver con el paradigma en cuestión.

Ambos aspectos: la estructura del curso y el *enfoque metodológico*, se caracterizan en buena medida por una perspectiva: primero definir, conocer y operar para aplicar después. Así se observa claramente en la estructura del curso con la secuencia sugerida:

Definición → Operación → Aplicación

Ocurre lo mismo con el enfoque metodológico, ya que se menciona que *por medio de los contenidos propuestos, el alumno ahora conocerá, comprenderá y aplicará la simbología de los conjuntos, las diferentes bases numéricas, […] al planteamiento, resolución e interpretación de problemas de ésta y otras disciplinas […] que se resuelven en términos de una ecuación, una desigualdad o un sistema…*

Dicha perspectiva es entendible y la comparto, en tanto que para abordar conceptos matemáticos aplicados a la solución de problemas, es necesario conocer aspectos fundamentales de la disciplina tales como símbolos, definiciones u operaciones básicas. Lo que es cuestionable de tal perspectiva y sobre todo una oportunidad para replantear aspectos didácticos de las matemáticas, es el énfasis en la definición y operatividad de conceptos matemáticos, antes que en el sentido de los mismos.

Al hablar de sentido de los conceptos matemáticos me refiero al acto de interpretar el estudio de éstos, lo cual implica la reflexión en torno a la relevancia del conocimiento de los mismos, tanto en su comprensión como en el dominio de habilidades en las operaciones matemáticas relacionadas.

Cabe decir que si bien es cierto que en este trabajo el sentido de los conceptos matemáticos se pretende construir con relación a la perspectiva de *la matemática como lenguaje de la naturaleza*, esto no significa que sea la única forma o la más importante. Se trata de hacer énfasis en una vertiente de las matemáticas, de suma relevancia y trascendencia. Por cierto que la construcción del conocimiento ó ejercicio de habilidades, incluso en el ámbito puramente matemático, sin referentes o aplicaciones en otros ámbitos como el de la física que aquí abordamos, implica en términos formativos una gran riqueza y potencial para el desarrollo de capacidades humanas, por lo que el sentido se puede formar en el escenario de las matemáticas puras, pero se hace necesario hacer patente y explicitar los fines educativos de su estudio.

Con frecuencia, me parece, la práctica docente de las matemáticas y el trabajo didáctico con los estudiantes es autorreferencial, un sistema cerrado de enseñanza que atiende exclusivamente la matemática como disciplina científica e ignora ámbitos de aplicación o uso y, sobre todo, fines educativos de su estudio. Por lo dicho antes, no atender tales ámbitos no significa necesariamente un inconveniente o ejercicio deficiente de la educación matemática, sin embargo, se vuelve problemático en el momento en que el estudio de conceptos y habilidades se hace bajo la premisa de que su importancia radica en el posible uso posterior de las mismas, como si no importaran al momento del estudio. Visto así, el planteamiento del Programa de Estudios y su estructura secuencial: definición, operación y aplicación, debe revisarse de manera crítica.

Una vez que se ha explicado lo referente al sentido de los conceptos matemáticos, señalo finalmente que se pretende que al presentar situaciones que aborden contextos de uso y aplicación en un sentido amplio, se motive a los estudiantes al estudio del álgebra y respondan al cuestionamiento frecuente que ellos manifiestan: ¿y esto para qué sirve?

En este trabajo y en el programa de estudios se procura atender y dar respuesta parcial al cuestionamiento previo. En todas las unidades del programa en la parte de *estrategias didácticas (actividades de aprendizaje)*, se propone que *el profesor, a partir de determinados problemas de la realidad y de otras disciplinas, discutirá con el grupo la utilidad de* (tema en cuestión). Es posible y obligado preguntarse: ¿Cuáles son los problemas de la realidad? ¿Cuál es la utilidad de los temas en cuestión?

La propuesta didáctica responde parcialmente a tales preguntas.

Serán abordados algunos temas del bloque de operación del programa, por considerar que comparten esencialmente el lenguaje algebraico y que son aplicables en buena medida al bloque de aplicación, es decir, son necesarios para operar y resolver ecuaciones, desigualdades y sistemas de ecuaciones y desigualdades.

La propuesta contempla la posibilidad de iniciar el segundo bloque con situaciones de aprendizaje que den sentido a los contenidos del programa. Es posible incluso presentarlas de manera continua durante el resto del curso.

1.2 Significado interno y externo del conocimiento matemático: fundamento didáctico

Según la clasificación descrita por Onrubia, Rochera y Barberà (2001), *podemos hablar de dos tipos distintos de significados relacionados con el conocimiento matemático: uno interno, formal, puramente matemático, y otro externo, referencial, que vincula el sistema formal de las matemáticas con algunos aspectos del mundo real.*

Con relación al significado interno, los autores mencionan las siguientes características del conocimiento matemático:

- es un conocimiento de un alto nivel de abstracción y generalidad, que elimina las referencias a objetos, situaciones y contextos particulares, y que se desvincula también de las formas de representación perceptivas e intuitivas de esos objetos, situaciones y contextos;
- es de naturaleza esencialmente deductiva, y no se valida mediante el contraste con fenómenos o datos de la realidad, como en otras disciplinas científicas, sino mediante un proceso interno de demostración a partir de determinadas definiciones fundamentales o axiomas; este carácter deductivo provoca, además, que el conocimiento matemático tenga, aún en mayor medida que otras ciencias, una estructura altamente integrada y jerarquizada;
- se apoya en un lenguaje formal específico, que presenta notables diferencias con el lenguaje natural: implica un conjunto particular de sistemas rotacionales, busca la precisión, el rigor, la abreviación y la universalidad, y su finalidad fundamental no es tanto la representación o la comunicación de fenómenos o situaciones reales cuanto la posibilidad de obtener resultados internamente consistentes, realizando inferencias válidas en términos del propio sistema axiomático que constituye el conocimiento matemático;
- suprime intenciones, emociones y afectos, y es de naturaleza esencialmente teórica, impersonal y atemporal.

Tal caracterización anula cualquier posibilidad de vincular el conocimiento matemático con contextos o situaciones del entorno social, tal como lo sugiere el programa de estudios. Con relación al significado externo, de acuerdo con los autores considero que:

> …las matemáticas tienen también una dimensión menos abstracta y descontextualizada, más funcional y relacionada con la resolución de problemas prácticos en situaciones concretas, más pragmática y situada. La elaboración y desarrollo del conocimiento matemático no se puede separar, en este sentido, de la acción concreta sobre los objetos, de la intuición y de las aproximaciones inductivas ligadas a tareas, problemas y contextos particulares, ni tampoco de los instrumentos y tecnologías de representación culturalmente elaboradas como apoyo a la actividad matemática. Desde esta perspectiva, las matemáticas constituyen, también, una actividad cultural social e históricamente situada, influenciada por criterios mundanos de utilidad e intencionalidad, y basada en prácticas cotidianas como contar, medir, localizar, diseñar, jugar o explicar." (Bishop, 1999, en Onrubia, Rochera y Barberà, 2001).

Ahora bien, descritos los dos tipos de significados: interno o matemático y externo o referencial, que son en todo caso categorías útiles con fines de análisis que coexisten e interactúan constantemente, cabe mencionar que la propuesta didáctica supone hacer énfasis en el significado externo, como una alternativa que amplíe el sentido a los temas del álgebra y motive a los estudiantes al estudio de conceptos y habilidades asociadas. El significado externo está vinculado estrechamente a la perspectiva de *la matemática como lenguaje de la naturaleza*. Tal perspectiva es coherente con los postulados del significado referencial del conocimiento matemático, en tanto está relacionada con la solución de problemas en contextos particulares y con una necesidad trascendente a lo largo de la historia de la humanidad: acercarnos a la comprensión de nuestro entorno, específicamente a la de los fenómenos de la naturaleza.

1.3 Enseñanza situada y motivación escolar: fundamentos pedagógicos de la propuesta didáctica

El concepto de enseñanza situada y la descripción del componente motivacional en el proceso de enseñanza-aprendizaje, son dos aspectos que la teoría pedagógica y la psicología educativa aportan para ayudar a explicar parcialmente las características, la relevancia y los posibles alcances de la propuesta didáctica de este trabajo. No sólo esto, ya que también posibilitan la generación de cambios en la forma de concebir y construir dicho proceso. A continuación expondré de manera breve cada uno de estos, a la par que su vinculación con la propuesta en cuestión.

Enseñanza situada

El concepto de enseñanza situada se encuentra estrechamente vinculado con los de conocimiento y aprendizaje que la perspectiva situada aporta. Al respecto, Díaz Barriga (2006) comenta:

> …el conocimiento es situado, es parte y producto de la actividad, del contexto de la cultura en que se desarrolla y utiliza'. El conocimiento es situado porque se genera y se recrea en determinada situación. Así, en función de lo significativo y motivante que resulte, de la relevancia cultural que tenga o del tipo de interacciones colaborativas que propicie, podrá aplicarse o transferirse a otras situaciones análogas o distintas a las originales.

De acuerdo con la autora, considero que "*el conocimiento es un fenómeno social, no una 'cosa'. Los contextos de aprendizaje y enseñanza son los que otorgan facilidades o imponen restricciones al desarrollo de los actores…*"

Díaz Barriga retoma la obra de Baquero (2002) y, con relación a la perspectiva situada, comenta que *el aprendizaje debe comprenderse como un proceso multidimensional de apropiación cultural, pues se trata de una experiencia que involucra el pensamiento, la afectividad y la acción*. Derivado de este y de otros preceptos, la autora establece como principio de tal perspectiva que *los alumnos (aprendices o novicios) deben aprender en un contexto pertinente.* También, que:

> …el individuo deja de ser la unidad de análisis de la explicación psicológica, en el sentido de que sus posibilidades educativas no recaen sólo en su capacidad individual, sino que se destaca la potencialidad de las situaciones educativas en que participa… De esta manera, la unidad de análisis se convierte en la actividad de las personas en contextos de práctica determinados.

De lo anterior, me interesa destacar el carácter intrínsecamente situado del conocimiento, debido a que se genera y recrea en determinada situación; además y con especial énfasis, la relevancia e impacto de las prácticas educativas en función del grado de vinculación de éstas con el contexto cultural en el que se desarrolla y utiliza el conocimiento. Así, la propuesta didáctica que aquí presento, lejos de responder exclusivamente –por ejemplo- a una dinámica disciplinaria interna en la que el estudio de diversos conceptos matemáticos se justifica mediante su empleo posterior en las unidades temáticas del programa de estudios, ignorando el contexto social de tales conceptos, pretende ampliar la perspectiva respecto a la relevancia cultural de los mismos e incrementar con esto el grado de interés y participación de los estudiantes para el estudio del álgebra.

Motivación escolar:

Acerca del componente motivacional en el proceso de enseñanza-aprendizaje, cabe la cita que García y Doménech (1997) hacen de Nuñez y Gonzalez-Pumariega (1996), quienes afirman: "*para aprender es imprescindible "poder" hacerlo, lo cual hace referencia a las capacidades, los conocimientos, las estrategias, y las destrezas necesarias (componentes cognitivos), pero además es necesario "querer" hacerlo, tener la disposición, la intención y la motivación suficientes*".

A pesar de que tal componente parece ser un elemento evidente e imprescindible en cualquier proceso de enseñanza-aprendizaje, también parece ser un término difícil de precisar, con múltiples perspectivas e interpretaciones. Al respecto García y Doménech (1997) comentan: "*el marco teórico explicativo de cómo se produce la motivación, cuáles son las variables determinantes, cómo se puede mejorar desde la práctica docente, etc., son cuestiones no resueltas, y en parte las respuestas dependerán del enfoque psicológico que adoptemos*". De los mismos autores retomo la idea de que *a pesar de las discrepancias existentes la mayoría de los especialistas coinciden en definir la motivación como un conjunto de procesos implicados en la activación, dirección y persistencia de la conducta*, y de que:

> …si nos trasladamos al contexto escolar y consideramos el carácter intencional de la conducta humana, parece bastante evidente que las actitudes, percepciones, expectativas y representaciones que tenga el estudiante de sí mismo, de la tarea a realizar, y de las metas que pretende alcanzar constituyen factores de primer orden que guían y dirigen la conducta del estudiante en el ámbito académico, al igual que otras variables externas, procedentes del contexto en el que se desenvuelven los estudiantes, que les están influyendo y con las que interactúan.

Sin duda que del profesor, como responsable en buena medida de la organización y estructuración del proceso de enseñanza-aprendizaje, depende en buena medida que los estudiantes adopten cierto tipo de metas de aprendizaje y que se encuentren motivados para la consecución de éstas.

A propósito del *enfoque psicológico* mencionado por de García y Doménech e incluido en la cita previa, destaco lo que Díaz Barriga y Hernández (2002) comentan acerca de los postulados de diferentes teorías psicológicas en torno a la motivación escolar:

> Los conductistas explican la motivación en términos de estímulos externos y reforzamiento, por lo que piensan que a los individuos puede motivárseles básicamente mediante castigos y recompensas o incentivos. Para la visión humanista el énfasis está puesto en la persona total, en sus necesidades de libertad, autoestima, sentido de competencia, capacidad de elección y autodeterminación, por lo que sus motivos centrales se orientan por la búsqueda de la autorrealización personal. Los enfoques cognitivos de la motivación explican ésta en términos de una búsqueda activa de significado, sentido y satisfacción respecto a lo que se hace, planteando que las personas están guiadas fuertemente por las metas que establecen, así como por sus representaciones internas, creencias, atribuciones y expectativas.

Justamente es la búsqueda activa de significado, sentido y satisfacción respecto a lo que se hace, así como las representaciones internas en torno a la tarea escolar, la intención de la propuesta didáctica en cuestión; incluso, se trata de una respuesta parcial respecto al sentido y relevancia cultural de diversos temas del programa de estudios.

Una parte sustancial y concreta de la propuesta didáctica es la tarea o actividad escolar propuesta para su trabajo en el aula. La idea es ofrecer una perspectiva de uso y relevancia de diversos temas del programa de estudios, de modo que adquieran sentido y motiven a los estudiantes al aprendizaje; en términos de lo descrito por Díaz Barriga y Hernández (2002) en torno a las tareas escolares y al papel del docente en lo que respecta a la motivación, podemos decir que:

> …el papel del docente en el ámbito de la motivación se centrará en inducir motivos en sus alumnos en lo que respecta a sus aprendizajes y comportamientos para aplicarlos de manera voluntaria a los trabajos de clase, dando significado a las tareas escolares y proveyéndolas de un fin determinado, de manera tal que los alumnos desarrollen un verdadero gusto por la actividad escolar y comprendan su utilidad personal y social. Esto es lo que se denomina motivación por el aprendizaje.

Tal es la perspectiva de fondo en la propuesta didáctica en cuestión.

2. La Matemática como Lenguaje de la Naturaleza

La perspectiva de *la matemática como lenguaje de la naturaleza* es, en términos generales, la forma metafórica de expresar la posibilidad que brindan las matemáticas para explicar, comprender y modelar fenómenos de la naturaleza, al menos en lo que respecta al sentido de la propuesta didáctica de este trabajo.

Podemos encontrar a lo largo de la historia, perspectivas similares a la anterior, aunque con rasgos distintivos importantes. Sirva de ejemplo una presente en la Grecia antigua, expresada por Aristóteles en su obra "*La Metafísica*", quien al hablar de los pitagóricos, comenta: "*fueron los primeros en cultivar las Matemáticas, creyeron que los principios de las Matemáticas eran los principios de todos los seres*".

Acerca de las corrientes filosóficas, presentes en la Grecia antigua y relacionadas con dichas perspectivas, resulta ilustrativo lo que Cañón (1993, p. 24) comenta al respecto:

> Es sabido que los pitagóricos consideraban el número como el último constitutivo de las cosas. El número era para ellos la substancia de las cosas, no estaba separado de ellas. Universo y Matemáticas eran dos caras de la misma moneda, el Cosmos. Con Platón la perspectiva cambia. Los entes matemáticos están ahora separados de las cosas, el acceso a ellos no pasa por la Naturaleza, ni precisa de los sentidos. […] En el caso de Aristóteles, su planteamiento ontológico proporcionará por sí mismo el nexo que vincula las Matemáticas con la Naturaleza. Su perspectiva, distinta de la pitagórica, permite como aquella establecer un nexo natural entre las dos. Los entes matemáticos son inseparables de las cosas sensibles, pero posteriores a ellas. Es un proceso de abstracción el que permite pasar de las cosas de la Naturaleza a las de la Matemática. Sin embargo, el conocimiento del mundo natural, la construcción

> de las ciencias de la naturaleza no precisan, en la concepción aristotélica, de la Matemática. Habrá de esperar al Renacimiento para restablecer el vínculo –esta vez asentado de manera definitiva– entre Matemáticas y mundo natural.

Destaco la trascendencia o papel relevante que algunos autores adjudican a las matemáticas, con relación a la descripción dada para *la matemática como lenguaje de la naturaleza*. Por ejemplo, en el comentario en contraportada en *Historia de las Matemáticas* (Bell, 1985) se dice:

> Dos invenciones del pensamiento griego dieron a la matemática valor cultural perenne: el método de razonamiento deductivo y la descripción de la naturaleza. El razonamiento deductivo, en su más poderosa efectividad, es matemática [...] Y el hallazgo genial de aprisionar en expresiones literales los fenómenos de la materia, y aun relaciones al parecer inaprehensibles, ha proporcionado el gigantesco progreso técnico de nuestros días. Por esto, en lo que al hombre concierne, la matemática hizo rigurosa una fundamental dirección del discurso, y facilitó el elemento básico y el lenguaje adecuado para idealizar la complejidad de la naturaleza y reducirla a una sencillez comprensible, lo que equivale a preparar al hombre para abordar el conocimiento de los fenómenos, conquistarlos y dominarlos; rasgo elemental de la porfiada aspiración humana. De aquí que el estudio del proceso histórico de estas dos adquisiciones, además de completar y perfilar el aprendizaje de la matemática, nos muestre un aspecto capitalísimo de nuestra cultura…

Otro ejemplo lo brinda la opinión de Bautista (2004) dada en la introducción del libro *Las matemáticas y su entorno*. Su punto de vista, con relación a la obra de Newton, es el siguiente: *Hace tres siglos [...] en la Universidad de Cambridge, Inglaterra, Isaac Newton desarrolla la matemática que constituye el sólido fundamento de su Philosophiae Principia Mathematicae, en donde se establecen los principios básicos de la física. Desde* *entonces, las matemáticas se constituyen en la herramienta intelectual de alta precisión de muchos estudios de la naturaleza…*

Similar papel desempeñaron las matemáticas en la obra de un autor tan consagrado como Newton: Galileo Galilei, precursor del primero y a quien se dedica especial atención en este trabajo, por ser *figura central durante el periodo de transición representado por la Revolución Científica de los siglos XVI y XVII* (Álvarez y Posadas, 2002). Por cierto que el libro (*Las matemáticas y su entorno*) tiene como propósito dar *una idea de cómo las matemáticas se entrelazan con otras ciencias y cómo son vistas desde perspectivas distintas por los propios matemáticos*. Entre los diversos campos de aplicación se mencionan en general, la física, la biología, las ciencias sociales y el arte; de manera específica, la física teórica, la biomatemática, la genética molecular y la arqueología.

Ahondar en la perspectiva de *la matemática como lenguaje de la naturaleza*, por medio del estudio de algunas corrientes históricas, es el propósito de los apartados siguientes. Profundizar en una de las vertientes más trascendentales del desarrollo histórico de las matemáticas: como una forma de explicar, comprender y modelar fenómenos de la naturaleza, es el fundamento de la propuesta didáctica de este trabajo, en aras de que diversos temas del programa de estudios de la asignatura en cuestión, adquieran sentido para los estudiantes. Las corrientes históricas estudiadas son: *Los pitagóricos: misticismo y realidad matemática* y *Galileo y la matematización de la naturaleza*, por considerar que son dos momentos históricos de excepcional trascendencia. Sin pretender abarcarlos de manera exhaustiva y reconociendo que podrían ser otros los momentos estudiados, nos interesa sobre todo ahondar en la caracterización y comprensión de la perspectiva de *la matemática como lenguaje de la naturaleza*, con miras a su aprovechamiento didáctico.

2.1 Los pitagóricos: misticismo y realidad matemática

> "La matemática como ciencia nació en el siglo VI a. de C. en la comunidad religiosa de los pitagóricos y fue parte de esta religión. Su propósito estaba bien claro. Revelando la armonía del mundo expresada en la armonía de los números proporcionaba un sendero hacia una unión con lo divino. Fue este objetivo elevado el que en aquel tiempo proporcionó las fuerzas necesarias para un logro científico del que en principio no puede darse parangón. Lo que estaba involucrado no era el descubrimiento de un bello teorema ni la creación de una nueva rama de la matemática, sino la creación misma de las matemáticas".
>
> I. R. Shafarevich.

Como fecha probable del nacimiento de Pitágoras, se tiene el año 569 a. C. y se ubica su muerte alrededor del 500 a. C. (González, 2001:42). No se tiene conocimiento de alguna exposición escrita realizada por este o sus sucesores inmediatos (Cañón, 1993:31), razón por la cual diversos personajes hacen referencia no a la obra de Pitágoras, sino a la de los pitagóricos.

Con relación a la trayectoria pitagórica, Van der Waerden (1979) en Cañón (1993:28), distingue cinco generaciones de presencia pitagórica entre los años 530-360. Destaco al exponente de la cuarta generación: Filolao, *a quien se le atribuye el epigrama de "todo es número", que jugará un papel decisivo en la configuración de las creencias en torno a los objetos de la Matemática, al tipo de conocimiento que proporciona y a su relación con la Naturaleza.*

El trabajo de los pitagóricos se desarrolló en grupos, los cuales, de acuerdo con la autora, *constituyeron una especie de comunidad o secta de tipo religioso, en la que no sólo se fraguaron ideas o resultados matemáticos, sino una forma de vida.* En el mismo sentido, González (2001:48) se refiere a *una sociedad de carácter científico y religioso*. Además, respecto a las doctrinas pitagóricas afirma que:

> El principal objeto de la doctrina pitagórica era la purificación del alma o catarsis, de ahí la permanente prosecución de los estudios filosóficos y matemáticos como base moral en la dirección de la vida. Las palabras mismas filosofía (amor a la sabiduría) y matemática (lo que se conoce, lo que se aprende) parece que fueron acuñadas por el propio Pitágoras para describir sus actividades intelectuales, como elementos de elevación moral que culminaban en la amistad como profundo sentimiento de camaradería, que convertía a todos los pitagóricos en hermanos. La comunidad pitagórica vinculaba íntimamente mística, religión y ciencia; geometría, música y cosmología; aritmología, metafísica y filosofía; cuerpo, alma y espíritu; en una armoniosa síntesis.

Dentro de la comunidad de los pitagóricos existían dos tipos de miembros: los matemáticos (conocedores) y los acusmáticos (oidores). Los primeros, de acuerdo con Cañón (1993), *eran los iniciados en la resolución de los problemas matemáticos, conocedores de los resultados obtenidos por Pitágoras. Los segundos participaban de los principios y de las creencias, de los ritos, de los principios morales, de las normas internas de la hermandad*.

Singular papel desempeñaron las mujeres dentro de la comunidad de los pitagóricos, ya que de acuerdo con González (2001: 57), *como hecho excepcional en el mundo antiguo, se admitía a las mujeres en pie de igualdad con los hombres. La historia registra aquí a la primera mujer científica […] Teano realizó importantes estudios en matemáticas (sección aúrea y poliedros regulares…*

Siguiendo con González (2001: 58), *los pitagóricos utilizaban como símbolo esotérico de identificación un emblema secreto que les permitía reconocerse como miembros de la comunidad. Se trata de un anagrama determinado por la estrella pentagonal o estrella de cinco puntas (figura 1), obtenida al trazar las diagonales de un pentágono regular*.

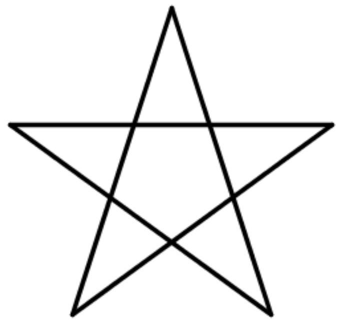


Figura 1. Estrella pentagonal utilizada por los pitagóricos.

La perspectiva de los pitagóricos acerca del papel que desempeñan las matemáticas, la brinda el filósofo griego Aristóteles (384 a. C.-322 d. C.), quien en su obra *La Metafísica* menciona:

> Los llamados pitagóricos, que fueron los primeros en cultivar las Matemáticas, creyeron que los principios de las Matemáticas eran los principios de todos los seres. Y, como los Números son, entre estos principios, los primeros, y en ellos les parecía contemplar muchas semejanzas con lo que es y lo que deviene; y viendo, además, en los Números las afecciones y las proporciones de las armonías, pensaron que los elementos de los Números eran los elementos de todos los seres, y que todo el cielo era armonía y número. Y todas las correspondencias que veían en los números y en las armonías con las afecciones y con las partes del cielo y con el orden universal, las reunían y reducían a su sistema.

Siguiendo con Cañón (1993), destaco que *los mathemata los conocimientos cultivados por los pitagóricos quedaron codificados en tiempos de Platón y de Aristóteles en cuatro: aritmética, geometría, astronomía y música*. Tal conjunto de conocimientos se agrupa en lo que Boecio alrededor de principios del siglo V llamó, según González (2001: 80), el *cuadrivium* pitagórico.

Además de los textos de Aristóteles como difusores críticos de la visión de la escuela pitagórica, destaca la obra de Platón (427 a. de C.-347 a. de C.), quien de acuerdo con González (2001, 25) *recoge la tradición matemática de la escuela de Pitágoras para ponerla en manos de Euclides*.

Según Strathern (1999: 39) Pitágoras llevó a cabo extensas investigaciones prácticas, particularmente en el campo de la armonía musical y de la astronomía. Descubrió que la armonía musical de una cuerda pulsada corresponde a diferentes proporciones. Una octava correspondía a una proporción 2:1; una quinta corresponde a una proporción 3:2; y una cuarta corresponde a una proporción 4:3. Respecto a las investigaciones de Pitágoras, el autor comenta:

> …reforzaron su creciente confianza en las matemáticas. Para él se trataba de algo más que una aspiración intelectual: era una forma de explicar el mundo. La armonía, la proporción, las propiedades de los números, la belleza de la simplicidad y ciertas formas, todo parecía apuntar a algún tipo de naturaleza numérica profunda que reinaba sobre todas las cosas. Todo esto se hizo más evidente en los estudios astronómicos de Pitágoras. […] Los babilonios tenían constancia de la existencia de siete planetas (incluyendo el sol y la luna), a los que consideraban de origen divino.
>
> El movimiento periódico de los cuerpos celestes aumentó la confianza de Pitágoras en las matemáticas. Desde el principio se había asumido como algo natural el que la Tierra fuese el centro del Universo. Anaximandro fue el primero en darse cuenta de que los planetas estaban más cerca de la Tierra que las estrellas, y la observación de sus movimientos le llevó al convencimiento de que unos y otras estaban a diferentes distancias de la Tierra. Esto condujo a Pitágoras a una conclusión trascendental: era como si los siete planetas y la Tierra guardasen cierta analogía con una octava musical. Los planetas (o esferas, como entonces se les llamaba) podían compararse a las siete cuerdas de una lira, y producían una armonía celestial que denominó “la música de las esferas.

Retomando a González (2001: 86), los pitagóricos generan las figuras geométricas según el mínimo número de puntos necesarios para definirlas. Un único punto (carente de dimensión) es el generador de todas las dimensiones, dos puntos engendran una recta de dimensión uno, tres puntos no alineados determinan un triángulo o área de dimensión dos, y cuatro puntos no coplanarios determinan un tetraedro o volumen de dimensión tres.

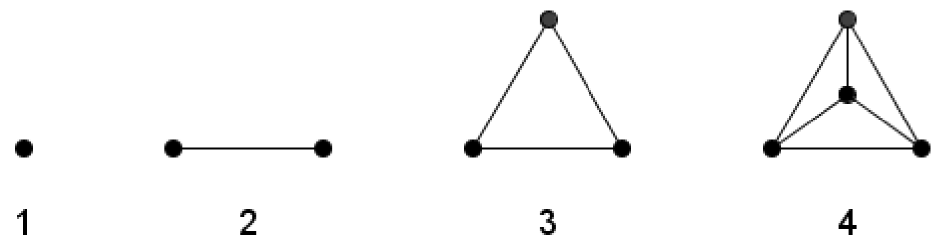


Figura 2. El punto como generador de todas las dimensiones.

Siguiendo con el autor, *en el fondo, estas cuestiones son un modo útil de postular la doctrina de que las cosas son números, pues supone que la estructura de los objetos depende de las formas geométricas, que, a su vez, podrían describirse mediante números. Es decir, las cosas son números y por tanto la base de la naturaleza es numérica.*

Además, entre el recuento que hace el autor del relato y continuación de la obra pitagórica, se mencionan también los *números figurados y poligonales*. Los primeros son una combinación geométrica regular de puntos igualmente espaciados; los *números poligonales* resultan de una combinación que forma un polígono regular. Éstos se van formando como suma de los números de ciertas series. A continuación la descripción de varias categorías de números poligonales (tomadas de González (2001: 112)).

Los triangulares se forman a partir de los números de la serie natural:

1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, 1+2+3+4+5,…

1, 3, 6, 10, 15,…

Los números cuadrados se forman a partir de los números de la serie impar:

1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, 1+3+5+7+9,…

1, 4, 9, 16, 25,…

Los números pentagonales se forman a partir de la serie: 1, 4, 7, 10, 13,…

1, 1+4, 1+4+7, 1+4+7+10, 1+4+7+10+13,…

1, 5, 12, 22, 35,…

Los números hexagonales se forman a partir de la serie: 1, 5, 9, 13, 17,…

1, 1+5, 1+5+9, 1+5+9+13, 1+5+9+13+17,…

1, 6, 15, 28, 45,…

De manera consecutiva se van formando los sucesivos números poligonales.

En resumen, podría decirse que *los pitagóricos perseguían penetrar en el secreto de la armonía de los números ya que desvelado este, creían poder comprender la armonía del universo* (González, 2001: 76)

Hasta aquí, una breve pero ilustrativa descripción acerca de la perspectiva de los pitagóricos en torno a la idea de la *matemática como lenguaje de la naturaleza*. Si bien es cierto que un componente importante de aquella tiene un carácter místico, basado fuertemente en creencias de tipo religioso, es innegable la presencia de dicha idea en tal perspectiva. Pretendo que resulte útil para la articulación de un discurso en torno al surgimiento y devenir histórico de la *matemática como lenguaje de la naturaleza*, al mismo tiempo que una invitación para ahondar en algunos de los temas mencionados, tales como la descripción matemática de las notas musicales, o las proporciones que guardan diversos elementos geométricos, por ejemplo.

2.2 Galileo y la matematización de la naturaleza

> *Galileo nos interesa no así como así, suelto y sin más, frente a frente él y nosotros, de hombre a hombre. A poco que analicemos nuestra estimación hacia su figura, advertiremos que se adelanta a nuestro fervor, colocado en un preciso cuadrante, alojado en un gran pasado del pretérito que tiene una forma muy precisa: es la iniciación de la Edad Moderna, del sistema de ideas, valoraciones e impulsos que ha dominado y nutrido el suelo histórico que se extiende precisamente desde Galileo hasta nuestros pies. No es, pues, tan altruista y generoso nuestro interés hacia Galileo como al pronto podíamos imaginar. Al fondo de la civilización contemporánea, que se caracteriza entre todas las civilizaciones por la ciencia exacta de la naturaleza y la técnica científica, late la figura de Galileo. Es, por tanto, un ingrediente de nuestra vida y no uno cualquiera, sino que en ella le compete el misterioso papel del iniciador (Ortega y Gasset; 1985: 3).*

La cita anterior sugiere reflexionar acerca del papel destacado de la obra de Galilei en la conformación cultural de nuestra época, a pesar de ser un documento que data del segundo tercio del siglo pasado. Si bien es cierto que Ortega y Gasset (1985:3) planteó que *todos esos principios constitutivos de la Edad Moderna se hallan hoy en grave crisis*, que *la tierra de la Edad Moderna que comienza bajo los pies de Galilei termina bajo nuestros pies* y que refiere al contexto europeo, nos interesa aprovechar la caracterización que hace el autor y otros más, acerca de la obra de Galilei y el análisis de su influencia, la cual supongo vigente. Antes de esto, daré a continuación una breve descripción del contexto histórico de Galilei.

Galileo Galilei nació el 15 de Febrero de 1564 en Pisa. En 1574 él y su familia se trasladaron a Florencia. Su padre, Vincenzo Galilei, le enseñó latín, griego y música. Vincenzo llevó a Galileo al monasterio de Santa María di Vallombrasa, al este de Florencia, donde le enseñaron matemáticas, ciencias naturales, literatura y dibujo. Galileo decidió ingresar en la orden en 1579. Posteriormente renunció al monasterio y al sacerdocio debido a la opinión de su padre (Vaquero, 2003:14). Ingresó en la Universidad de Pisa en 1581. Empezó a estudiar medicina, donde aprendió la filosofía natural de Aristóteles, fisiología de Galeno, latín, griego y hebreo. Tiempo después abandonó las clases en la Universidad para dedicarse más ampliamente al estudio de las matemáticas, las cuales empezó a estudiar de manera particular con Ostilio Ricci, matemático oficial de la corte. Fue hasta 1589 cuando consiguió impartir una cátedra de matemáticas, en la Universidad de Pisa.

De lo anterior se desprenden dos cualidades que prevalecieron en Galilei: su apego a las matemáticas y su fe religiosa; ésta última, a pesar de su carácter crítico y atrevido hacia los preceptos eclesiásticos. Sirva de ejemplo un fragmento de la carta que escribió a la gran duquesa Cristina de Lorena en medio del proceso de denuncia en su contra ante el Santo Oficio en 1615 (en Altshuler, 2002: 33): "*…[Es] muy piadoso decir y prudente afirmar que la Sagrada Biblia jamás puede decir algo falso –siempre que se sobreentienda su verdadero significado. Pero creo que nadie negará que a menudo es muy abstrusa, y puede decir que son cosas bien diferentes de lo que significan las meras palabras*".

Podemos ubicar su obra en el contexto del Renacimiento Europeo y de la subsecuente conformación de la Edad Moderna. De acuerdo con Vaquero (2003: 13), este periodo histórico –el Renacimiento– *fue una etapa en la vida de Europa que intentó superar lo realizado en la Edad Media. Así, durante los siglos XV y XVI, hubo una renovación enorme en todos los ámbitos: cultural, artístico, económico, político, religioso, científico,… El nombre […] viene de la tendencia de resucitar los valores de la antigüedad clásica*.

Según Ortega y Gasset (1985: 4) en *Galileo y Descartes termina la mayor crisis por la que ha pasado el destino europeo –una crisis que comienza a fines del siglo XIV y no termina hasta los albores del XVII. Al fin de ella, como divisoria de las aguas y cima entre dos edades, se alza la figura de Galileo. Con ella el hombre moderno entra en el mundo moderno*.

Con el propósito de ahondar en los rasgos distintivos de dicho periodo, retomo lo planteado por Xirau (1998: 193), quien acerca de este comenta:

> La nueva ciencia del siglo XVI es, sobre todo, la astronomía. Copérnico establece de una vez por todas que el Sol es el centro del sistema planetario. Y, al establecerlo, coloca la primera piedra del nuevo método científico que ya nada tiene que ver con las especulaciones de teólogos y filósofos […] Mas allá de la Tierra, multiplicando la visión de los ojos desnudos, el telescopio de Galileo descubrirá […] nuevas e insospechadas dimensiones dentro de esta esfera explosiva que es el universo.

Del mismo autor, retomo la cita a Leonardo da Vinci, quien *precisa en su tiempo el significado del espíritu científico*: *La bondadosa naturaleza procede siempre de tal manera que en todo el universo siempre encontrarás cosas dignas de imitar […] la naturaleza nunca desmiente sus leyes. […] La ciencia es capitán y la práctica representa a los soldados. […] el que discute alegando autoridades no da prueba de genio sino más bien de memoria.*
Al respecto, Xirau (1998: 194) comenta:

> Regular, exacta, precisa –la naturaleza- espera que el hombre la observe para dibujarla, para estudiarla, para penetrar en sus secretos y permitir un dominio más completo del medio por el hombre que lo habita. […] Este pintor que "lucha y compite con la naturaleza", es también el hombre de ciencia que sabe que "la experiencia no yerra", que solamente yerran nuestros juicios. Pero si la experiencia es necesaria, si es básica para Da Vinci que estudia la anatomía […], no es del todo suficiente. Y no lo es porque Da Vinci, como Grosseteste y, más cercanos a él, como Copérnico, Kepler o Galileo, sabe que no hay verdadera ciencia sin fundamentos matemáticos. Las matemáticas son sin duda una ciencia ideal, cuyos objetos nunca se encuentran exactamente idénticos en los hechos de la naturaleza […] Pero las matemáticas, más exactas que la experiencia, son la base de la exactitud de cualquiera experiencia […] El nuevo humanismo, que tan claramente representa Leonardo da Vinci, sabe que es necesario dominar la naturaleza por medios naturales y sabe que esto es tan solo factible por una cuidadosa dosificación de experiencia sensible y de cálculo matemático. El nuevo

espíritu científico, el que habrá de conducir a la física matemática moderna, nace con el espíritu humanista del Renacimiento.

En lo anterior, si bien es cierto que en un sentido parece hallarse el origen de la perspectiva que contempla el método experimental y el empleo de las matemáticas como componentes imprescindibles de la actividad científica, en otro sentido también se explica la prevalencia y dominio de la idea de la ciencia como preponderantemente vinculada al método experimental. Es lo que Husserl (1996: 11) llama *la reducción positivista de la idea de ciencia a mera ciencia de hechos*. Al respecto, también comenta: *La exclusividad con la que, en la segunda mitad del siglo XIX, toda la cosmovisión del hombre moderno se dejó determinar por las ciencias positivas, y se dejó deslumbrar por la "prosperity" debida a ellas, significó un alejamiento indiferente de los problemas que son decisivos para un auténtico humanismo*. La frase siguiente parece resumir tal crítica: *"Meras ciencias de hechos hacen meros hombres de hechos" (*Ortega y Gasset, 1985: 5). En el mismo sentido tenemos la crítica de Ortega y Gasset expuesta al inicio de este capítulo, al hablar de *la grave crisis en la que se hallan los principios constitutivos de la Edad Moderna*.

Ahora bien, no es el propósito fundamental de este apartado revisar el devenir histórico y la crítica general al concepto de ciencia y sus repercusiones. Ha sido primordial estudiar –es el objetivo de la exposición de las disertaciones previas–, de manera general y sucinta, acerca del contexto histórico en el que ubicamos la obra de Galileo y de su impacto −reitero− en la conformación cultural de nuestra época.

Al adentrarnos plenamente en el análisis de la obra de Galileo, cabe mencionar parte de la crítica que hizo en *El Ensayador* a la postura del jesuita P. Grassi, quien con el pseudónimo de "Lottario Sarsi Sigensano" publica los

Libra astronomica ac Philosophica, en los cuales se argumenta en torno al fenómeno de los cometas. Galileo comenta:

> Me parece, por lo demás, que Sarsi tiene la firme convicción de que para filosofar es necesario apoyarse en la opinión de cualquier célebre autor, de manera que si nuestra mente no se esposara con el razonamiento de otra, debería quedar estéril e infecunda; tal vez piensa que la filosofía es como las novelas, producto de la fantasía de un hombre, como por ejemplo la Ilíada o el Orlando furioso, donde lo menos importante es que aquello que en ellas se narra sea cierto. Sr. Sarsi, las cosas no son así (Galilei, 1623, 1981:62).

Lo anterior es una muestra del afán de Galileo por alejarse de posturas dogmáticas y la manifestación –no explícita- de uno de los rasgos más significativos de su manera de concebir y proceder en el estudio de la *filosofía*. Al respecto, Galileo continúa y comenta lo siguiente, lo cual es una frase citada repetidamente y que sintetiza en buena medida el carácter de su obra.

> La filosofía está escrita en ese grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto.

Retomar algunos de los estudios que realizó Galileo, tales como el relativo al movimiento rectilíneo, a los postulados que explican el equilibrio de una balanza o las variables físicas asociadas al péndulo y la relación entre éstas, reforzarán y confirmarán la comprensión y validez de la síntesis anterior. A continuación, citas textuales del estudio que realizó Galileo de algunos fenómenos, al mismo tiempo que un análisis propio del mismo. Después regresaremos a la revisión acerca de la trascendencia histórica de su obra.

Ejemplos

Fuente:

Galilei, Galileo (2003). *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*. (Tr. del italiano por José San Román Villasante). Buenos Aires: Editorial Losada.

La obra está escrita en forma de diálogos entre los personajes: Salviati, Sagrado y Simplicio), en los que se diserta acerca de varios fenómenos físicos.

Los ejemplos consisten básicamente, en la presentación textual de los fragmentos de la fuente que explican el fenómeno, después en la descripción y resolución de estos utilizando el lenguaje matemático, salvo en el estudio del fenómeno del péndulo, en el cual dejo al lector el placer de disfrutar la comprensión y resolución del problema propuesto por Galilei. El propósito fundamental de estos ejemplos, es hacer un contraste entre la descripción hecha en los diálogos y la realizada con el lenguaje matemático e ilustrar cómo es posible con este, describir, comprender y resolver, el fenómeno físico involucrado.

Ejemplo 1 Sobre la relación entre las velocidades y las distancias correspondientes recorridas por un cuerpo en caída libre.

Basado en: *Diálogos…; jornada tercera, en torno de los movimientos locales; del movimiento uniformemente acelerado*, pp. 228-230.

A continuación, los fragmentos sustanciales de los *Diálogos*:

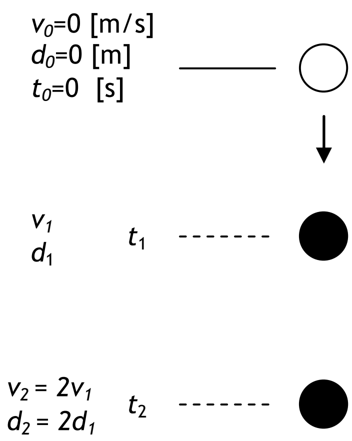
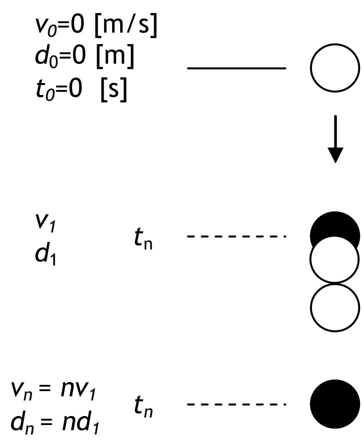
> **Salviati**. No me parece ocasión oportuna para entrar, al presente, en investigaciones sobre la causa de la aceleración del movimiento natural, en torno a la cual han sido diversas las opiniones emitidas por los filósofos, […] Por ahora, a nuestro Autor le basta con que comprendamos que él quiere investigar y demostrar algunas propiedades de un movimiento acelerado […] tal, que los aumentos de su velocidad vayan acrecentándose, después de su partida del reposo, en la misma simplicísima proporción en que crece la continuación del tiempo, que es lo mismo que decir que en tiempos iguales se llevan a cabo iguales aditamentos de velocidad…
>
> **Sagredo**. Por lo que ahora viene a mi mente, me parece que tal vez con mayor claridad se lo hubiera podido definir, sin cambiar la idea, diciendo: Movimiento naturalmente acelerado es aquel en que la velocidad va creciendo a medida que crece el espacio que se va recorriendo; de modo que, por ejemplo, la velocidad adquirida por un móvil en una caída de cuatro codos, sería doble de la que tendría al caer de un espacio de dos, y este doble del conseguido en el espacio del primer codo…
>
> **Salviati**. Mucho me consuela el haber tenido un tan grande compañero en el error; y más te diré: tu razonamiento tiene tanto de verosímil y de probable, que nuestro mismo Autor no me negó, cuando yo se lo propuse, que también él había estado durante algún tiempo en la misma equivocación…

> **Simplicio**. Sin duda alguna que yo sería uno del número de los que las conceden; y que un grave en descenso adquiera energía al caer (vires acquirat eundo), creciendo la velocidad en proporción al espacio, y que el efecto del choque del mismo grave sea doble viniendo del doble altura, me parecen proposiciones que se han de conceder sin repugnancia ni controversia.
>
> **Salviati**. Sin embargo son tan falsas e imposibles, como el que el movimiento se efectúa instantáneamente; y he aquí su clarísima demostración. **Si las velocidades están en la misma proporción que los espacios recorridos o a recorrerse, tales espacios son recorridos en tiempos iguales; por consiguiente, si las velocidades con las que el cuerpo en descenso recorrió el espacio de cuatro codos, fueron dobles de las velocidades con que recorrió los dos primeros codos (así como un espacio es doble del otro espacio), también en este caso los tiempos de tales recorridos son iguales. Pero el que un mismo móvil recorra los cuatro y los dos codos en el mismo tiempo, no puede tener lugar fuera del movimiento instantáneo**. Sin embargo, nosotros vemos que el grave en descenso efectúa su movimiento en el tiempo, y que recorre los dos codos en menos tiempo que los cuatro; por consiguiente, es falso que su velocidad crezca como el espacio…

El problema está dado:

¿Las velocidades de un cuerpo (grave) en caída libre, están en la misma proporción que las distancias correspondientes recorridas?

Para describir y resolver la situación planteada, se utilizará la traducción y operación algebraica del fenómeno, lo cual se realiza en la tabla siguiente:

<table>
<tr><td colspan="2">Tabla 1: Sobre la relación entre las velocidades y las distancias correspondientes recorridas por un cuerpo en caída libre</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hipótesis: Para un cuerpo en caída libre, las velocidades están en la misma proporción que los espacios recorridos correspondientes.</td></tr>
<tr><td>Caso particular
Dadas v_1, d_1 y su duplo.</td><td>Caso general
Dadas v_1, d_1 y n veces éstas.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$v = \frac{d}{t}\left[\frac{m}{s}\right] \Rightarrow t = \frac{d}{v}[s]$$</td></tr>
<tr><td>Para la posición 1,
$t_1 = \frac{d_1}{v_1}$

Para la posición 2 y tomando en cuanta la hipótesis,
$t_2 = \frac{d_2}{v_2} = \frac{2d_1}{2v_1}$
$t_2 = \frac{d_1}{v_1}$</td><td>Para la posición 1,
$t_1 = \frac{d_1}{v_1}$

Para la posición n y tomando en cuenta la hipótesis,
$t_n = \frac{d_n}{v_n} = \frac{nd_1}{nv_1}$
$t_n = \frac{d_1}{v_1}$</td></tr>
<tr><td>¡$t_2 = t_1$!</td><td>¡$t_n = t_1$!</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conclusión: Tal y como argumenta Salviati en los diálogos, no es posible que un móvil recorra al caer, espacios distintos en el mismo tiempo, por lo tanto:

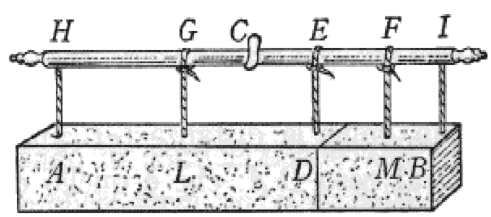
Las velocidades de un cuerpo (grave) en caída libre, no están en la misma proporción que las distancias correspondientes recorridas.</td></tr>
</table>

Ejemplo 2 La balanza

Basado en: *Diálogos…; jornada segunda, en torno a la resistencia: de los sólidos a la fractura*, pp. 158-160.

El siguiente fragmento de los diálogos, describe el problema de la balanza. La tabla posterior ilustra como el lenguaje matemático ayuda a plantear y resolver el problema.

> **Salviati**. Debiendo hacerlo así, tal vez será mejor que yo, por un camino un poco distinto del de Arquímedes, os introduzca en el campo de todas las especulaciones futuras, y suponiendo solamente que pesos iguales puestos en balanzas de brazos iguales producen el equilibrio (principio supuesto igualmente por el mismo Arquímedes), yo pase después a demostrar que no sólo es verdad que pesos desiguales producen equilibrio en una romana de brazos desiguales según la razón inversa de los pesos suspendidos, sino también que idéntico efecto consigue aquel que coloca pesos iguales en distancias iguales, que aquel que coloca pesos desiguales en distancias que tengan inversamente la misma razón que los pesos.



> Ahora bien, para una más clara demostración de cuanto digo, imaginemos un prisma o cilindro sólido AB, suspendido de los extremos de la línea HI, y sostenido por los hilos HA, IB. Es evidente, que si yo suspendiese el todo del hilo C, puesto en medio de la palanca HI, el prisma AB, quedará equilibrado, estando la mitad de su peso de un lado, y la otra mitad del otro lado del punto de suspensión C, de acuerdo con el principio supuesto. Supongamos, ahora, que el prisma, por medio de un plano que pasa por la línea D, está dividido en partes desiguales, y que la parte DA, es mayor, y la DB menor; y a fin de que, después de hecha la división, las partes del prisma permanezcan en el mismo estado y posición respecto a la línea HI,

ayudémonos con el hilo ED, que, sujeto en el punto E, sostenga las partes del prisma AD, DB.

No se puede dudar que, no habiéndose introducido ninguna mutación local en el prisma respecto a la balanza HI, ésta permanecerá en el mismo estado de equilibrio. Pero en la misma disposición quedará también, si la parte del prisma que ahora está sostenida en los dos extremos por los hilos AH, DE, se suspende de un solo hilo GL, puesto en medio; e igualmente, la otra parte DB, no cambiará su posición al ser suspendida por medio y ser sostenida por el hilo FM. Por consiguiente, al soltar los hilos HA, ED, IB, dejando sólo los dos GL, FM, subsistirá el mismo equilibrio, hacha siempre la suspensión en el punto C. Ahora bien, procedamos a considerar que tenemos dos graves AD, DB, pendientes de los puntos extremos G, F, de una balanza GF, que efectúa su equilibrio en el punto C, de modo que la distancia de la suspensión del grave AD, desde el punto C, es la línea CG, y la otra parte CF es la distancia de la cual pende el otro grave DB. Sólo queda, pues, por demostrar que tales distancias están entre sí en igual proporción que los mismos pesos, pero tomados inversamente; es decir, que el prisma DB es al prisma DA, como la distancia GC es a la distancia CF: lo que probaremos así.

Siendo la línea GE la mitad de la EH, y la EF la mitad de la EI, toda la GF será la mitad de toda la HI, y por ello igual a la CI; y si quitamos la parte común CF, la remanente GC será igual a la remanente FI, o sea a la FE; y sumándole a ambas la CE, las dos GE, CF serán iguales; y de ahí, FC será a CG, como la GE a la EF; pero GE está en relación a EF como una doble a la otra doble, es decir HE a EI es decir el prisma AE al prisma DB; por consiguiente, por igualdad de razones y conmutando (*e convertendo*), la distancia GC es a la distancia CF, como el peso BD es al peso DA: que es lo que quería demostraros.

Tabla 2. Situación descrita utilizando el lenguaje algebraico.	
Siendo la línea GE la mitad de la EH, y la EF la mitad de la EI,	$\overline{GE} = \frac{\overline{EH}}{2}$ $\overline{GE} = \frac{\overline{EH}}{2}$
toda la GF será la mitad de toda la HI, y por ello igual a la CI;	$\overline{GF} = \overline{GE} + \overline{EF}$ $\overline{GF} = \frac{\overline{EH}}{2} + \frac{\overline{EI}}{2}$ $\overline{GF} = \frac{\overline{EH} + \overline{EI}}{2}$ $\overline{GF} = \frac{\overline{HI}}{2} = \overline{CI}$
y si quitamos la parte común CF, la remanente GC será igual a la remanente FI, o sea a la FE;	$\overline{GF} = \overline{CI}$ $\overline{GF} - \overline{CF} = \overline{CI} - \overline{CF}$ $\overline{GC} = \overline{FI}$ $\overline{GC} = \overline{FE}$
y sumándole a ambas la CE, las dos GE, CF serán iguales;	$\overline{GC} + \overline{CE} = \overline{FE} + \overline{CE}$ $\overline{GE} = \overline{CF}$
y de ahí, FC será a CG, como la GE a la EF;	$\frac{\overline{GE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CG}}$
pero GE está en relación a EF como una doble a la otra doble,	$\frac{\overline{GE}}{\overline{EF}} = \frac{2\overline{GE}}{2\overline{EF}}$
es decir HE a EI es decir el prisma AE al prisma DB;	$\frac{\overline{GE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{HE}}{\overline{EI}} = \frac{AD}{DB}$ $\frac{\overline{GE}}{\overline{EF}} = \frac{AD}{DB}$
por consiguiente, por igualdad de razones y conmutando (*e convertendo*), la distancia GC es a la distancia CF, como el peso BD es al peso DA: que es lo que quería demostraros.	$DB\overline{GE} = AD\overline{EF}$ $DB\overline{CF} = AD\overline{CG}$
	$\frac{\overline{CG}}{\overline{CF}} = \frac{DB}{AD}$ $F_{DB}d_{DB} = F_{AD}d_{AD}$

Ejemplo 3 El Péndulo

Salviati. …Paso ahora a las otras preguntas referentes a los péndulos, materia que a muchos podría parecer demasiado árida, principalmente a aquellos filósofos que se hallan continuamente ocupados en los más profundos problemas de las cosas de la naturaleza; no obstante, yo no quiero despreciarla, alentado por el ejemplo del mismo Aristóteles, en quien admiro por sobre todas las cosas, el que no haya dejado, se puede decir, materia alguna en algo digna de consideración, que él no haya tocado.

Y ahora, acicateado por las preguntas, espero poder decirte algunas de mis ideas referentes a la música, materia nobilísima de la que han escrito tantos grandes hombres y aun el mismo Aristóteles, quien considera acerca de ella curiosos problemas. Por esta razón, si también yo deduzco de algunos experimentos fáciles y tangibles, las razones de ciertas propiedades maravillosas en materia de sonidos, podré esperar que mis razonamientos sean de tu agrado.

Sagredo. No sólo bien recibidos, sino también, por lo que a mí se refiere, sumamente deseados, como que hallando deleite en todos los instrumentos de música, y habiendo meditado mucho acerca de las armonías, he quedado siempre en dudas y perplejo en lo concerniente a saber de dónde procede que me agrade más una que la otra, y que alguna no sólo no me deleite, sino que me moleste en sumo grado. Después, el trillado problema de las dos cuerdas, templadas al unísono, de modo que al sonido de una vibre la otra y resuene simultáneamente, permanece todavía sin solución para mí; así como tampoco están muy claras las razones de las consonancias y otras peculiaridades.

Salviati. Veamos si de estos nuestros péndulos se puede sacar alguna solución a todas estas dificultades. En cuanto a la primera duda sobre si verdadera y realmente un mismo péndulo cumple todas sus oscilaciones, máximas, intermedias y mínimas en tiempos exactamente iguales, yo me remito a lo que ya he oído a nuestro Académico; el cual demuestra bien que el móvil, que descienda por las cuerdas subtensas a cualquier arco, las recorrerá todas necesariamente en tiempos iguales, tanto la subtensa bajo ciento ochenta grados (o sea todo el diámetro), como las subtensas bajo cien, sesenta, diez, dos, medio grados, y la subtensa bajo cuatro minutos, a condición de que todas vayan a terminar en el punto inferior de tangencia con el plano horizontal. Después, acerca de aquellos que descienden por los arcos de las mismas cuerdas, elevados sobre la horizontal y que no sean mayores que un cuadrante, o sea de noventa grados, el experimento demuestra que todos son recorridos en tiempos iguales, pero más breves que los tiempos del trayecto por las cuerdas; hecho que parece maravilloso, ya que a primera vista parece que debería suceder lo contrario. Porque siendo comunes los puntos extremos del principio y del fin del movimiento, y siendo la línea recta la más corta comprendida entre éstos dos mismos términos, parece razonable que el movimiento efectuado sobre ella debiera cumplirse en el más breve tiempo. Sin embargo no es así, sino que el tiempo más breve, y en consecuencia el movimiento más veloz, es el que se lleva a cabo sobre el arco que tiene por cuerda a dicha línea recta (30). Por lo tanto, en cuanto a la proporción de los tiempos de las oscilaciones de móviles pendientes de hilos de diferente longitud, esos tiempos están en la misma proporción que las raíces cuadradas de las longitudes de los hilos, o si se prefiere, las longitudes están en proporción de la segunda potencia de los tiempos; es decir, están entre sí como los cuadrados de los tiempos. De modo que si se quiere, v. g., que el tiempo de una oscilación de un péndulo, sea doble del tiempo de una oscilación de otro, es necesario que la longitud del hilo de aquél sea cuádruple de la longitud del hilo de este. Y también, durante el tiempo de una oscilación del primero, efectuará tres oscilaciones el segundo, si el hilo del primero es nueve veces más largo que el del segundo. De donde se sigue que las longitudes de los hilos tienen entre sí la misma proporción que tienen los cuadrados de los números de vibraciones que se efectúan en un mismo tiempo.

Sagredo. En este caso, si yo he entendido bien, podrá cómodamente averiguar la longitud de un cordel pendiente desde una gran altura cualquiera, aun cuando el punto superior de sostén me fuese invisible, y si viera sólo el del extremo inferior. Porque si yo suspendo en el extremos inferior de dicho cordel un grave bastante pesado, y hago que vaya oscilando en vaivén, y que un amigo vaya contando un cierto número de sus oscilaciones, mientras yo voy simultáneamente contando también las oscilaciones de otro móvil suspendido de un hilo de un codo exacto de longitud, yo podré deducir la longitud del cordel, del número de oscilaciones de los dos péndulos, hechas durante un mismo tiempo. Por ejemplo, pongamos que durante el tiempo en que mi amigo haya contado veinte oscilaciones del cordel largo, yo cuente doscientas cuarenta de mi hilo de un codo de longitud; hallando los cuadrados de los dos números veinte y doscientos cuarenta, que son 400 y 57600, respectivamente, diré que el cordel largo contiene 57600 medidas de la misma clase de las que mi hilo contiene 400; y como el hilo es de un solo codo, dividiré 57600 por 400, que me da 144; luego podré decir que el cordel tiene 144 codos de largo.

Salviati. No te habrás equivocado ni en un palmo, máxime si el cálculo fue hecho sobre un gran número de oscilaciones.

Sagredo: Con frecuencia tú me das ocasión de admirar la riqueza y simultáneamente la suma prodigalidad de la naturaleza, mientras de cosas tan comunes, y podría decirse triviales, vas extrayendo datos tan curiosos y nuevos, y casi siempre diversos de lo que uno pudiera imaginarse. Mil veces he observado yo las oscilaciones, en particular de las lámparas que en algunas iglesias penden de cuerdas larguísimas, cuando inadvertidamente las mueve alguno; pero lo más que yo he podido observar de tal observación ha sido la probabilidad de la opinión de quienes pretenden que es el medio, es decir el aire, el que mantienen y continua semejantes movimientos, porque me parece que en ese caso el aire debería tener un gran discernimiento, y al mismo tiempo muy poco que hacer, para gastar horas y horas de tiempo para empujar con tanta regularidad hacia acá y hacia allá un peso en suspensión. Pero que yo hubiese llegado a comprender que un mismo móvil, suspendido de una cuerda de cien codos de largo, desviado del punto muerto una vez noventa grados, y otra un solo grado o medio, empleare tanto tiempo en recorrer este arco mínimo, como en pasar el otro máximo, no creo que yo lo hubiese comprendido jamás, porque aun ahora me parece tener algo de imposible. Ahora estoy esperando que estas mismas simplísimas minucias, me proporciones unas explicaciones de los fenómenos de música, tales que puedan, al menos en parte, aquietar mi mente.

Retomo el análisis de la obra de Galileo y destaco una frase del ejemplo previo referido al péndulo: "*Por lo tanto, en cuanto a la proporción de los tiempos de las oscilaciones de móviles pendientes de hilos de diferente longitud, esos tiempos están en la misma proporción que las raíces cuadradas de las longitudes de los hilos, o si se prefiere, las longitudes están en proporción de la segunda potencia de los tiempos.*" Si bien es cierto que tal descripción, y la del resto de este ejemplo y los otros, carecen de un desarrollo matemático con la perspectiva actual de uso del lenguaje algebraico, es indudable la presencia de un componente matemático, el cual resulta ser un elemento intrínseco en la descripción del fenómeno físico.

La obra de Galileo es cuestionada respecto a qué tanto fundamentó sus resultados en alguno de los dos aspectos siguientes: la experimentación por un lado o el mero pensamiento y deducción lógica por otro. Sirva de ejemplo lo que Álvarez y Posadas (2003) comentan: "*Es muy frecuente encontrar comentarios y referencias a la obra de Galileo que sugieren que este basaba sus afirmaciones más en un pensamiento lógico que en observaciones".* Parece que en lo que concierne a la metodología empleada por Galileo el debate sigue abierto, lo que es incuestionable es su contribución en ambos aspectos en la configuración y consolidación posterior del método experimental en la física y en la construcción de modelos matemáticos para explicar los fenómenos.

En lo particular, me resulta muy interesante, acertada y sugerente la visión que aporta Ortega y Gasset (1985) en torno a la metodología empleada por Galileo. Al respecto y al responder a la pregunta: "*¿Qué hace, en cambio, Galileo?*", aquel comenta:

> En vez de perderse en la selva de los hechos entrando en ellos como pasivo espectador, comienza por imaginar la génesis del movimiento en los cuerpos lanzados *cujus motus generationem talem constituo*. *Mobile quoddam super planum horizontale proiectum* mente concipio *omni secluso impedimento*. […]
> "Concibo por obra de mi mente un móvil lanzado sobre un plano horizontal y quitando todo impedimento". Es decir, se trata de un móvil en un plano idealmente horizontal y sin estorbo alguno –pero estos estorbos, impedimentos que Galileo imaginariamente quita al móvil son los hechos-, ya que todo cuerpo observable se mueve entre impedimentos, rozando otros cuerpos y por ellos rozado. Comienza, pues, por construir idealmente, mentalmente, una realidad. Sólo cuando tiene ya lista su imaginaria realidad observa los hechos, mejor dicho, observa que relación guardan los hechos con la imaginada realidad.

Ortega y Gasset remata diciendo: "…*Se convencerán [los historiadores] de que la ciencia, se entiende toda ciencia de cosas, sean éstas corporales o espirituales, es tanto obra de imaginación como de observación, que esta última no es posible sin aquella –en suma, que la ciencia es construcción*".

Imaginación y observación son dos elementos que pretendo utilizar e impregnar en la propuesta didáctica de este trabajo, construyendo al mismo tiempo modelos matemáticos, los cuales han justificado y lo seguirán haciendo, el empleo de las matemáticas en diversas ramas de las ciencias naturales y, con esto, motivar el estudio del álgebra como una forma de modelar diversos fenómenos de la naturaleza.

> "*Este carácter, en parte al menos, imaginativo de la ciencia, hace de ella una hermana de la poesía. Pero entre la imaginación de Galileo y la de un poeta hay una radical diferencia: aquella es una imaginación exacta. El móvil y el plano horizontal que con su mente concibe son figuras rigurosamente matemáticas…*"
>
> Ortega y Gasset.

2.3 Otras perspectivas sobre el desarrollo de las matemáticas

A medida que los teoremas de las matemáticas
se refieren a la realidad no son seguros
y a medida que son seguros no se refieren a la realidad.[*]

Albert Einstein

Hasta este momento, he hecho énfasis en la perspectiva de la *matemática como lenguaje de la naturaleza* para construir una propuesta didáctica que amplíe el sentido al estudio del álgebra, en tanto los modelos matemáticos nos ayudan a explicar y predecir comportamientos de diversos fenómenos de la naturaleza; sin embargo, no es conveniente agotar nuestra visión de la matemática: su significado, utilidad y las tareas de las cuales se ocupa, con esta perspectiva.

Mi afán por dar respuesta al cuestionamiento de para qué sirven las matemáticas, no debe ignorar que el desarrollo histórico de éstas no siempre ha estado impulsado por las aplicaciones, utilidad, fines prácticos o vínculo intrínseco con la realidad misma.

El origen de las matemáticas se remonta a la operación surgida de la necesidad práctica de contar objetos y a la consecuente creación de sistemas de numeración para representar cantidades; también, al estudio de elementos geométricos para el cálculo de longitudes o áreas de superficies. En este sentido, las matemáticas forman parte de una dicotomía junto con la realidad. Se trata de una relación indisociable en la que las matemáticas son una representación de la realidad o la realidad misma. Una forma de expresarla o simbolizarla, en la que no se concibe un desarrollo independiente y abstracto de la realidad. No siempre ha sido así.

---

[*] "Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit"

Respecto a la afirmación previa y tan sólo como un ejemplo, Eves (1969) comenta: "…*Poco después de la primera cuarta parte del siglo diecinueve tuvo lugar un evento geométrico que demostró ser de tremenda importancia, no sólo para la geometría, sino para todas las matemáticas; se inventó una geometría que difería radicalmente de la geometría tradicional de Euclides*". Se refiere evidentemente, a la invención de la geometría no euclidiana.

Tal geometría difiere con postulados esenciales de la euclidiana, como es el caso de la suma de ángulos internos en todo triángulo. Para la geometría no euclidiana, la suma no es igual a dos ángulos rectos, lo cual es un ejemplo de dicha ruptura con la realidad o con lo que percibimos de esta. En este sentido y retomando a Eves (1969), tenemos que:

> La invención de una geometría no euclidiana, invalidando una creencia tradicional y rompiendo con el hábito de pensar que se había tenido durante siglos, asestó un fuerte golpe al punto de vista de la verdad absoluta de las matemáticas. Realmente, la invención no sólo liberó la geometría, sino que tuvo un efecto semejante en las matemáticas como un todo. Las matemáticas emergieron como una creación arbitraria de la mente humana, y no como algo que esencialmente nos haya impuesto forzosamente el mundo en que vivimos.

Coherente con la perspectiva anterior, Wigner (1960), luego de comentar que "*los conceptos […] de la geometría elemental, fueron formulados para describir entidades sugeridas directamente del mundo real*", nos dice: "*parece no ser cierto para los más avanzados conceptos, en particular aquellos que juegan un importante papel en física*"; es decir, diversos conceptos matemáticos, como por ejemplo los números complejos, fueron creados o surgieron en un contexto puramente matemático, sin referencia específica al mundo físico. Fue con el paso del tiempo que estos resultaron ser, parafraseando a Wigner, irrazonablemente efectivos para describir diversos fenómenos en las ciencias de la naturaleza.

Es así como se configura el desarrollo de la matemática como una ciencia que requiere de un sistema axiomático en abstracto, es decir, de acuerdo con Eves (1969): *"se evidenció que los matemáticos podían elegir sus postulados adecuados a su conveniencia siempre que fueran compatibles unos con otros. Un postulado, como lo emplea el matemático, no necesita ser autoevidente ni veraz"*. Wigner nos dice: "*…el matemático puede formular sólo un puñado de interesantes teoremas sin definir conceptos más allá de los que estos contienen en los axiomas…*"

Corresponde a otras disciplinas científicas, al menos en primera instancia, ocuparse de la posible aplicación de los conceptos matemáticos en las mismas, o como dice Barot (2005a): *"Exagerando podemos decir que las matemáticas ya no tenían el afán de describir el mundo real sino de estudiar un sistema axiomático en abstracto, dejando la aplicación de sus modelos a otras áreas de las ciencias como la física"*.

Como comenté al principio de este apartado, no me parece conveniente agotar nuestra visión de la matemática con la perspectiva de ésta como *lenguaje de la naturaleza*. Es importante ofrecerla tan sólo como una vertiente, muy fructífera y de suma importancia, entre una gama amplia de riqueza y posibilidades que brinda el estudio y ejercicio de las matemáticas. Hacerlas implica, tal y como ocurre desde la antigüedad, el curioso placer por conocer, descubrir y crear mediante el uso de la razón y la imaginación, independientemente de los contextos de aplicación en los que pueda surgir o aplicarse, los cuales por supuesto, son muy importantes.

3 Propuesta didáctica basada en la matemática como lenguaje de la naturaleza

3.1 Problemas pseudoreales y el proceso de matematización de la realidad: dificultades y oportunidades para transformar la práctica docente

La realidad es una ilusión, pero muy persistente
Albert Einstein

Antes de presentar los ejemplos que conforman la propuesta didáctica, cabe la reflexión en torno a los llamados problemas pseudoreales y al proceso de matematización de la realidad. Ambos son un referente de análisis y creación del tipo de actividades que propongo. Veamos a qué se refiere cada uno de estos.

Problemas pseudoreales

Según la definición dada por Alsina (2007), tomada del ICMI[3] Study sobre "Aplicaciones y modelización en la enseñanza de las matemáticas", "*mundo real es todo lo que tenga que ver con naturaleza, sociedad o cultura, incluyendo tanto lo referente a la vida cotidiana como a los temas escolares y universitarios y disciplinas curriculares diferentes de las matemáticas*".

Varios programas de estudio de matemáticas en el nivel medio superior, señalan la importancia de vincular éstas con situaciones de la vida cotidiana o del *mundo real*. En la definición de propósitos del programa de la ENP se plantea que "*el alumno comprenda que las Matemáticas son un lenguaje y una herramienta que lo vincula con su entorno social",* sin embargo, al igual que en

[3] The International Commission on Mathematical Instruction.

la definición previa de "*mundo real"*, queda abierta la discusión acerca de cuáles son las situaciones o ejemplos vinculados con la realidad o el entorno social que harán más efectivo el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Debido al uso frecuente que se le da al concepto de la realidad, me interesa abordar algunos de sus usos e implicaciones en la enseñanza de las matemáticas; destacar que de manera frecuente se plantean ejercicios o actividades que, disfrazadas con un lenguaje coloquial, pretenden simular situaciones de la realidad o la vida cotidiana, pero que distan mucho de serlo. A tales tipos de ejercicios o "problemas" los considero pseudoreales.

Del Breviario de la Didáctica de la Matemática de Barot (2005b) retomo los siguientes ejemplos:

"Estás fuera de tu casa y la puerta se cerró. La única ventana abierta está en el segundo piso a una altura de 25 pies. Necesitas pedir una escalera de uno de tus vecinos. Hay un arbusto a lo largo de la casa y por eso tienes que poner la escalera a una distancia de 10 pies de la casa. ¿Qué longitud necesita tener la escalera para llegar a la ventana?"

Barot cuestiona al respecto:

"*… ¿usted haría el cálculo necesario para obtener la longitud de la escalera…? La situación no requiere que la escalera tenga una longitud precisa: si es un poco más corta y llega medio metro debajo de la ventana de cualquier forma nos serviría, y si fuera dos metros más largo podríamos colocarla a un lado de la ventana y pasarnos de lado una vez que subimos lo suficiente en altura…*"

De acuerdo con Barot, *podemos concluir que este no es un ejercicio real sino un ejercicio pseudoreal, es decir un ejercicio que pretende ser de la vida real pero que al verlo con cuidado no lo es*. A pesar de que emplea un lenguaje cotidiano vinculado a contextos concretos, éstos no son realistas.

Al respecto, Alsina (2007) hace referencia a las "*falsas realidades tan presentes aun en nuestra enseñanza e indicando las características deseables del realismo educativo*". Comenta que "*gran parte del tiempo dedicado a la enseñanza de la matemática se dedica a la resolución de ejercicios rutinarios alejados de la vida cotidiana*". Habla del "*timo de las realidades matemáticas*" al manifestar su interés por:

> …desenmascarar con detalle aquellas referencias a «realidades» que pueden confundir substrayendo el interés por su conocimiento. Estas realidades matemáticas abundan en nuestras explicaciones y forman parte prominente de nuestros libros de texto, convirtiendo lo que debería ser una motivación para unas matemáticas activas en un artificio para consagrar unas matemáticas pasivas. […] Son situaciones aparentemente realistas (al contar con palabras y datos de uso cotidiano) pero deformadas o cambiadas para poder dar lugar a ejercicios matemáticos rutinarios. Se trata de una preparación ad-hoc justificada por motivos pedagógicos.

Aunado a la crítica de los problemas pseudoreales o a las *falsas realidades*, tenemos la de los efectos de tales problemas o situaciones en la enseñanza de las matemáticas. De acuerdo con Barot, de modo implícito se muestra que:

- Las matemáticas sólo sirven para resolver ejercicios que se dan en el salón de clases.
- Los contenidos abstractos son ajenos de aquella vida fuera de clase, la que sí es real.
- Impiden que el alumno vea que las matemáticas sí le pueden ofrecer algo para su vida profesional.

Coincido con Barot en que "*el uso de ejercicios pseudoreales tiene el efecto contrario al intencionado*". En caso de emplear problemas pseudoreales en clase se requiere, al menos, la debida aclaración en torno a los alcances y fines de la actividad y por supuesto, no darlos como ejemplos de la vida real o aplicaciones de las matemáticas. En este sentido, el problema didáctico no radica esencialmente en la presentación de situaciones, ejercicios o problemas abstractos desvinculados de la realidad asociada al mundo físico y concreto, sino presentarlos como reales a pesar de no serlo.

La propuesta didáctica no excluye la posibilidad de realizar en cierto momento un manejo abstracto o puramente imaginativo de situaciones relacionadas con conceptos y habilidades matemáticas; sí procura resaltar la perspectiva de la matemática de la naturaleza como una visión asociada a problemas reales y de enorme trascendencia cultural y social.

La matematización de la realidad

Considero la matematización, de acuerdo con el *Marco Teórico de Pisa 2003*[4], como un proceso matemático fundamental descrito en cinco pasos:

1. *Se inicia con un problema enmarcado en la realidad.*
2. *Se organiza de acuerdo a conceptos matemáticos que identifican las matemáticas aplicables.*
3. *Gradualmente se va reduciendo la realidad mediante procedimientos como la formulación de hipótesis, la generalización y la formalización. Ello potencia los rasgos matemáticos de la situación y transforma el problema real en un problema matemático que la representa fielmente.*

[4] Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD) e Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE), (2004). Marcos Teóricos de Pisa 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas.

4. *Se resuelve el problema matemático.*
5. *Se da sentido a la solución matemática en términos de la situación real, a la vez que se identifican las limitaciones de la solución*.

Se trata en síntesis, de un proceso matemático que, tomando como punto de partida un problema de la realidad, plantea este en términos matemáticos, lo resuelve y, finalmente, lo vuelve a relacionar con el problema de la realidad.

Dicho proceso "*implica traducir el problema de la realidad a las matemáticas […] engloba actividades como:*

- *Identificar los elementos matemáticos pertinentes con relación a un problema situado en la realidad.*
- *Representar el problema de un modo diferente, organizándolo entre otras cosas de acuerdo a conceptos matemáticos y realizando suposiciones apropiadas.*
- *Comprender las relaciones entre el lenguaje utilizado para describir el problema y el lenguaje simbólico y formal necesario para entenderlo matemáticamente.*
- *Localizar regularidades, relaciones y recurrencias.*
- *Reconocer aspectos que son isomórficos con relación a problemas conocidos.*
- *Traducir el problema en términos matemáticos, es decir, en términos de un modelo matemático*.

> Cuando el alumno ha traducido el problema a una forma matemática, el procedimiento continúa ya dentro de las matemáticas. Los estudiantes formularán preguntas como: '¿Hay...?', 'En ese caso, ¿cuántos?' o 'Cómo puedo hallar...' utilizando destrezas y conceptos matemáticos conocidos. Intentarán trabajar en su modelo de problema, adaptarlo, establecer regularidades, identificar conexiones y crear una buena argumentación matemática. A esta

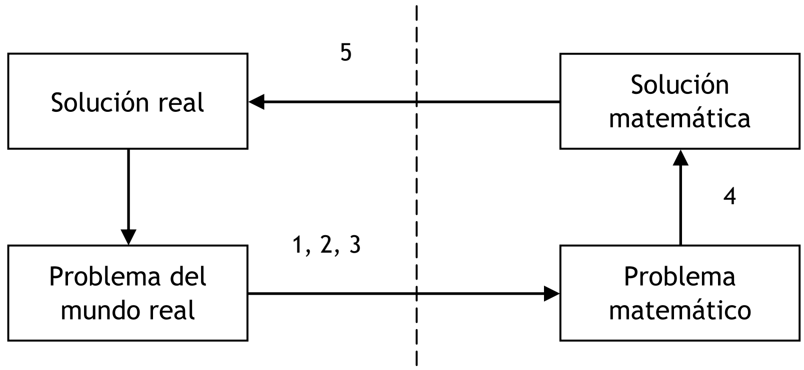
parte del proceso de matematización se la conoce normalmente como la parte deductiva del ciclo de construcción de modelos (Blum, 1996; Schupp, 1988). No obstante, en este estadio pueden desempeñar un papel otros procesos que no sean estrictamente deductivos. Esta parte del proceso de matematización incluye:

- Utilizar diferentes representaciones e ir cambiando entre ellas.
- Utilizar operaciones y lenguaje simbólico, formal y técnico.
- Pulir y adaptar los modelos matemáticos, combinando e integrando modelos.
- Argumentar.
- Generalizar.

El último o los últimos pasos a la hora de resolver un problema conllevan una reflexión sobre todo el proceso matemático y los resultados obtenidos. En este punto los estudiantes deben interpretar los resultados con una actitud crítica y validar todo el proceso. Esta reflexión tiene lugar en todas las fases del proceso, pero resulta de especial importancia en la fase final. Este proceso de reflexión y validación incluye:

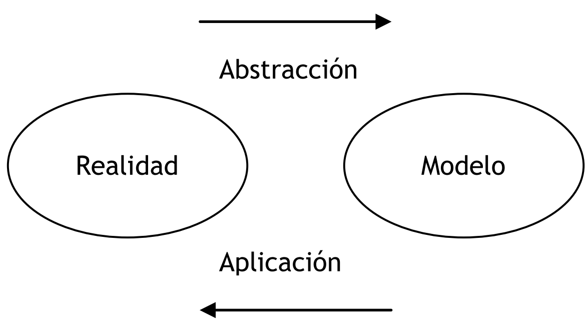
- La comprensión del alcance y los límites de los conceptos matemáticos.
- La reflexión sobre los argumentos matemáticos y la explicación y justificación de los resultados.
- La comunicación del proceso y de la solución.
- La crítica del modelo y de sus límites."

Tal descripción se representa gráficamente con el esquema siguiente, tomado también del *Marco Teórico* y en el que se representan los cinco pasos descritos antes.



Esquema 1. El ciclo de la matematización

Un esquema similar propuso López de Medrano (1990) para representar el proceso de construcción de: "*un modelo para resolver un problema real, cómo se trabaja con el modelo y cómo se utiliza la situación abstracta que se obtiene con el modelo para resolver el problema real o, por lo menos, como una guía para resolverlo* (aplicación del modelo). El esquema es el siguiente:



Esquema 2. Modelo de resolución de problemas (López de Medrano).

Finalmente, comento que me interesa por un lado, alejarme del planteamiento de problemas pseudoreales, o al menos reconocerlos como tales; por otro lado, hacer énfasis en las características del proceso de matematización de la realidad para su manejo didáctico en el aula y para la comprensión y resolución de problemas y ejercicios matemáticos que lo requieran.

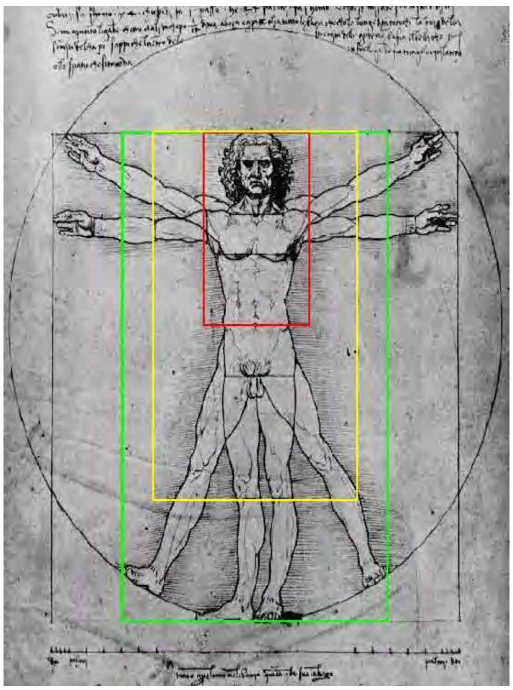
3.2 Ejemplos de la propuesta didáctica: construcción de situaciones de aprendizaje y puesta en práctica

Expongo a continuación una serie de ejemplos construidos a partir de la perspectiva de *la matemática como lenguaje de la naturaleza*. Son la concreción de aquella y con los cuales espero aportar favorablemente a la práctica docente en lo que respecta a la reconceptualización de las matemáticas, la reflexión en torno al sentido de las mismas y su didáctica. Tales ejemplos, más que ajustarse a una estructura o esquema didáctico común, son presentados de acuerdo a como fueron investigados, construidos y preparados para trabajar en clase. Incluyo el trabajo de investigación documental (Antecedentes teóricos) para acercarme al tema y a su comprensión, a pesar de no recrear tal cual dicha labor en el momento de abordar los ejemplos con los estudiantes. Por ejemplo, los antecedentes teóricos que incluyo en el tratamiento del tema de la "divina proporción" resultarían inconvenientes para abordarse tal cual en el contexto del bachillerato, sin embargo, considero que sí aportan a la formación disciplinaria que como profesores requerimos obligadamente; sobre todo, posibilitan acercarse de una manera fascinante al conocimiento o profundización de los temas tratados, tal como a mí me ocurrió al redescubrir y reinterpretar algunos de éstos.

Se trata en esencia de fundamentos, planteamiento de ejercicios y problemas matemáticos que aterrizan en la creación de secuencias didácticas para abordarse en clase. Queda abierta la posibilidad para que las situaciones aquí expuestas sean replanteadas y reconstruidas para adaptarlas a diversos escenarios, en aras de ampliar las alternativas didácticas para la enseñanza de las matemáticas. En el anexo incluyo los planes de clase que preparé para trabajar la propuesta didáctica con el grupo de bachillerato durante la Práctica Docente. De manera paralela a la descripción de la propuesta, hago un relato de experiencias que tuve al implementarla frente a grupo, al mismo tiempo que recomendaciones para una mejor ejecución.

Ejemplo 1

Φ y la divina proporción



A ti, maravillosa disciplina
media, extrema razón de la hermosura que
claramente acata la clausura viva en la malla
de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina áurea sección,
celeste cuadratura misteriosa fontana de
mesura que el universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños angulares flor de las
cinco formas regulares dodecaedro azul, arco
sonoro.

Luces por alas un compás ardiente. Tu canto es
una esfera transparente.

A ti divina proporción de oro.

Rafael Alberti.

Temas del programa que contempla:

- Operaciones con monomios y polinomios.
- Productos notables y factorización.
- Operaciones con fracciones y radicales.
- Ecuaciones y desigualdades.

Objetivo:

Analizar acerca del significado dado por varias culturas a la divina proporción, así como de la relación de ésta con fenómenos naturales y creaciones humanas, las cuales serán vinculadas con diversos conceptos matemáticos, tales como la proporción, los patrones numéricos o las operaciones algebraicas.

Secuencia de trabajo propuesta:

Proyección en video de la sección *Razón aurea*, la cual se encuentra dentro del portal "PUEMAC" y de *Materiales Didácticos* del portal "Proyecto Descartes":

-Instituto de Matemáticas, UNAM. 2004. Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora [en línea]. Disponible en http://www.interactiva.matem.unam.mx/index.html. (Diciembre del 2009).

-Ministerio de educación, gobierno de España. Proyecto Descartes. Matemáticas Interactivas [en línea]. Disponible en http://recursostic.educacion.es/descartes/web/ (Diciembre del 2009).

Mediante la exposición general de contenidos seleccionados: explicaciones, imágenes y desarrollos matemáticos, se puede comentar acerca de la perspectiva en la Grecia antigua de la razón aurea, su uso en diversas edificaciones, la relación que guarda con objetos de la naturaleza y los conceptos matemáticos asociados.

En dicha sección dentro del portal PUEMAC, se puede usar el artículo "¿Está Britney Spears bien proporcionada?" como una forma amena para abordar los conceptos de razón, proporción y la existencia de un patrón numérico en las dimensiones del cuerpo humano. Comprendidos estos, será posible, como yo lo hice, la deducción junto con los estudiantes del valor de Φ a partir de la igualdad de razones geométricas, aunque si el docente lo prefiere, puede ahondar antes de la deducción, en las aplicaciones de la razón y proyección de imágenes de objetos que la contienen, basándose en los contenidos de dichos portales.

Luego de estudiar la razón aurea, puede aprovecharse para abordar el tema de la sucesión de Fibonacci y su presencia en algunas situaciones tales como el proceso de crecimiento de la población de conejos, las espirales de los girasoles, etc.

A continuación expongo brevemente algunos antecedentes históricos y conceptuales de la razón aurea y presento la transcripción del texto "¿Está Britney Spears bien proporcionada?", el cual utilicé durante las sesiones de trabajo frente a grupo. Resultó un elemento atractivo, claro y motivante para los estudiantes. Luego agrego algunas imágenes alusivas a los temas de razón aurea y sucesión de Fibonacci, las cuales fueron tomadas de los portales PUEMAC y Proyecto Descartes. La información que se encuentra en éstos es amplia y corresponderá al docente decidir cuál de los materiales utilizar y si se basará en las animaciones para el tratamiento matemático de la información. En mi caso, decidí sólo aprovechar algunas imágenes y explicaciones breves, en tanto no era el propósito esencial profundizar en el estudio matemático de la razón aurea, sino tan sólo mostrarla como un ejemplo de aplicación de las matemáticas en la elaboración de modelos de un fenómeno físico.

La divina proporción es un término introducidos por Luca Pacioli (1445-1517) en su obra del mismo nombre *De Divina Proportione* y corresponde a lo que en la definición 3 del libro VI de L*os Elementos*, Euclides expone como sigue:

Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor.

Tal condición se identifica también con los términos: razón de oro, razón áurea o número de oro, cuando se hace referencia al cociente de las magnitudes de la *recta* entre el segmento mayor, así como entre este y el menor, según lo expresado en la definición. Dicho número tradicionalmente se representa por la letra griega Φ (Fi), que es la inicial del artista griego Fifias, escultor y arquitecto del Partenón (González, 2001: 184).

Un posible desarrollo para la condición de la *recta cortada*, basado en una perspectiva algebraica posterior a la empleada en *Los Elementos*, es el siguiente:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

$$\frac{AC + CB}{AC} = \frac{AC}{CB} \qquad \text{ya que } AB = AC + CB$$

$$\frac{AC}{AC} + \frac{CB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \qquad \text{ya que } \frac{AC}{CB} = \varphi$$

$$\varphi + 1 = \varphi^2$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Ecuación cuyas raíces son:

$$\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

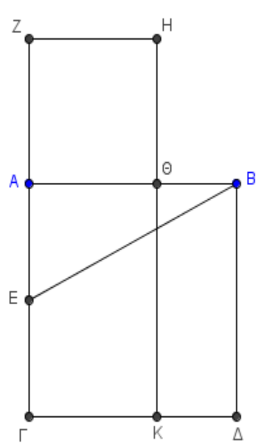
$$\varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$$

En las proposiciones 11 y 30 de los libros II y VI respectivamente de *Los Elementos*, también se aborda el tema de la *recta cortada en extrema y media razón*, la cual es construida con proposiciones previas y sin la sofisticación del lenguaje algebraico del desarrollo previo. A decir de González (2001, 186) es plausible que Pitágoras resolviera la ecuación $x^2 = a^2 - ax$ −obtenida a partir de un segmento $AB = a$, dividido por el punto *H* de forma áurea, siendo $AH = x$ el segmento mayor de la división−, por un procedimiento análogo al que encontramos en *Los Elementos*.

Con el propósito de señalar la concordancia entre el desarrollo algebraico previo y el geométrico que destaca en *Los Elementos* (Euclides, 1944), a continuación se presenta la proposición 11 del Libro II.

Proposición 11 (Libro II)

Dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la (recta) entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante.



Sea AB la recta dada.

Así pues, hay que dividir AB de modo que el rectángulo comprendido por la (recta) entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante.

Pues constrúyase a partir de AB el cuadrado ABΔΓ y divídase en dos AΓ por el punto E y trácese BE y prolónguese ΓA hasta Z, y hágase EZ igual a BE, y constrúyase a partir de AZ el cuadrado ZΘ, y prolónguese HΘ hasta K.

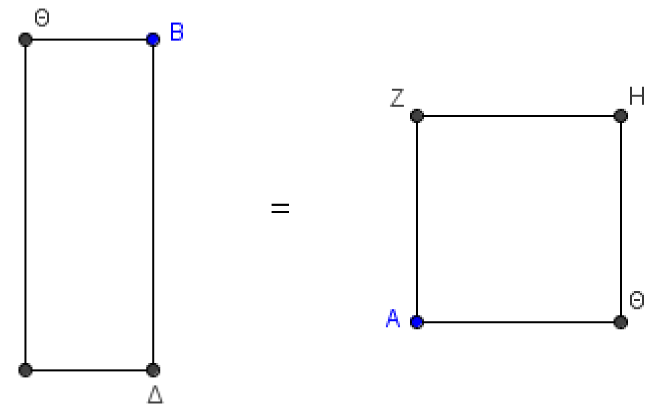
Digo que AB ha sido cortada en Θ, de modo que hace el rectángulo comprendido por AB, BΘ igual al cuadrado AΘ.

Pues como la recta AΓ ha sido dividida en dos por el (punto) E y se le ha añadido ZA, entonces el rectángulo comprendido por ΓZ, ZA junto con el cuadrado de AE es igual al cuadrado de EZ. Pero EZ es igual a EB; por tanto, el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZA junto con el (cuadrado) de AE es igual al cuadrado de EB. Pero los (cuadrados) de BA, AE son iguales al (cuadrado) de EB, porque el ángulo correspondiente a A es recto; por tanto, el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZA junto con el (cuadrado) de AE es igual a los cuadrados de BA, AE. Quítese de ambos el (cuadrado) de AE; entonces el rectángulo restante comprendido por ΓZ, ZA es igual al (cuadrado) de AB. Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZA es ZK: porque AZ es igual a ZH; pero el cuadrado de AB es AΔ; por tanto, ZK es igual a AΔ. Quítese de ambos AK; entonces el (cuadrado) restante ZΘ es igual a ΘΔ. Y ΘΔ es el (rectángulo comprendido) por AB, BΘ: porque AB es igual a BΔ; pero ZΘ es el cuadrado de AΘ; por tanto, el rectángulo comprendido por AB, BΘ es igual al cuadrado de ΘA.

Por consiguiente, la recta dada AB ha sido dividida en Θ de modo que hace el rectángulo comprendido por AB, BΘ igual al cuadrado de ΘA.

Tal división de la recta dada AB, construida de modo que "AB ha sido cortada en Θ, de modo que hace el rectángulo comprendido por AB, BΘ igual al cuadrado AΘ", implica lo siguiente:

"Rectángulo comprendido por AB, BΘ" = "Cuadrado AΘ"



O bien que $(AB)(B\Theta) = (A\Theta)(A\Theta)$, lo cual es equivalente a la condición de la definición 3, antes descrita: $AB/AC = AC/CB$, ya que $C=\Theta$.

Es interesante la concordancia entre la interpretación geométrica dada a la divina proporción en *Los Elementos* (como proporción entre áreas) y la interpretación algebraica que conduce a la obtención de Φ, sin embargo, lo que más interesa en este caso, es la presencia de Φ en la naturaleza y la interpretación dada por los antiguos griegos, en términos de que la divina proporción es la más estética y sobre todo, expresa matemáticamente diversas situaciones.

Un ejemplo destacado de la presencia de Φ en la naturaleza, al menos de manera aproximada, es el que se refiere a diversas proporciones entre partes del cuerpo humano. Sirva de ejemplo la imagen *El homo cuadratus* (El hombre de Vitrubio o Canon de las Proporciones Humanas) de Leonardo da Vinci (1452-1519), la cual, según González (2001: 192), apareció por primera vez en 1511 formando parte de una reedición del tratado *De Architectura* de Vitrubio (alrededor del siglo I a. de C.), como ejemplo de las proporciones ideales del cuerpo de un hombre, que puede inscribirse tanto en un círculo como en un cuadrado. El círculo está centrado en el ombligo y el cuadrado en los genitales.

Las proporciones ideales del cuerpo humano corresponden a la razón áurea entre el lado del cuadrado y el radio del círculo.

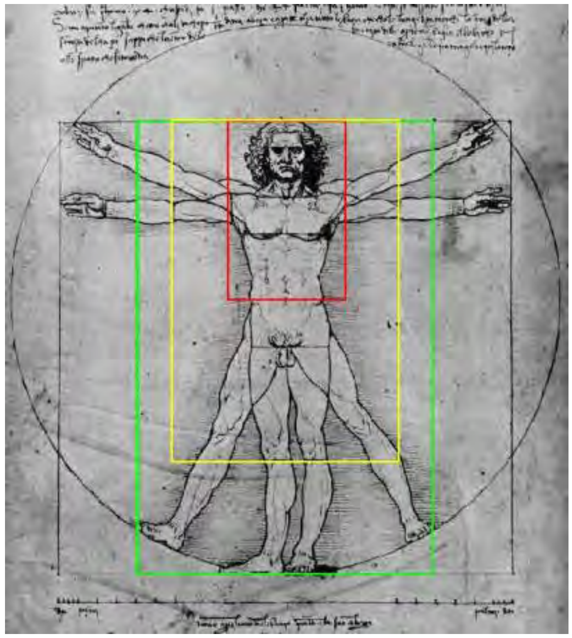


Figura 3.1a Tomada de PUEMAC(2004).

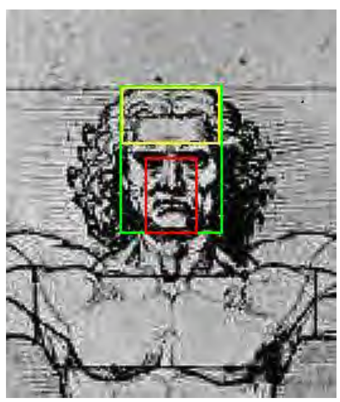


Figura 3.1b Tomada de PUEMAC(2004).

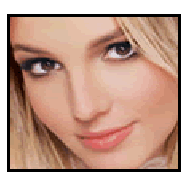
¿Está Britney Spears bien proporcionada?

(Material de trabajo).

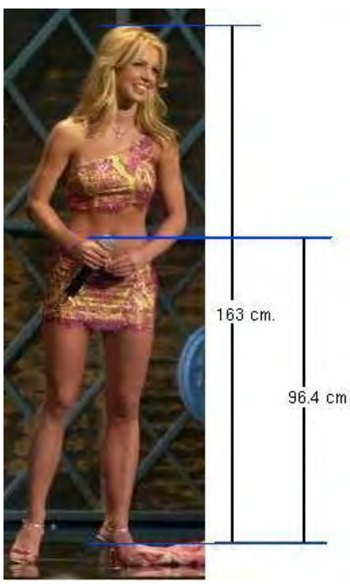
Texto tomado del portal PUEMAC. Se distribuyó entre los estudiantes para su lectura y análisis en equipos de trabajo y luego en el grupo. Resultó ser una forma motivante para abordar el concepto de razón, realizar algunas operaciones algebraicas y calcular la razón áurea.

El otro día, mientras visitaba a mis tíos en su casa fui testigo de una discusión entre dos de mis primos: Pedro, un adolescente de 16 años había tenido a bien pegar este poster en la habitación que comparte con Raúl, un joven de 21. Esto disgustó a Raúl que, de hecho, mantiene tapizada la

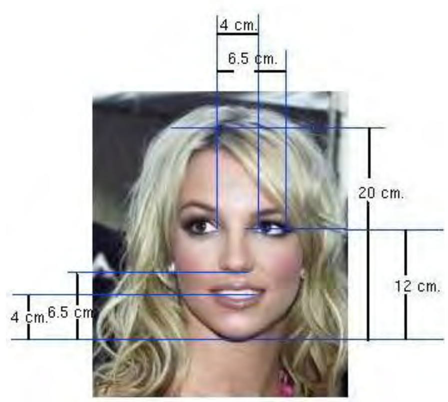
habitación con sus propios posters. "Quítame eso de aquí", le dijo a Pedro. Pedro es fan de la cantante, mientras que Raúl prefiere el hip-hop y otras corrientes menos comerciales. "¿En qué te molesto si la pongo? también es mi cuarto, además no puedes decir que no está... preciosa" respondió Pedro. No puedo poner aquí lo que contestó Raúl, pero incluyó el calificativo "horrible" refiriéndose a Britney. A mí me pareció que su aversión al tipo de música que interpreta la cantante le hizo perder la objetividad, "viéndola bien es bonita" pensé. Como la belleza es, por supuesto, una cualidad subjetiva, no hay cómo refutar la afirmación de que Britney es horrible, ni cómo probar lo contrario. "Está mal proporcionada", concluyó Raúl en la discusión. ¡Ah! ahí sí que perdió, pensé, podemos demostrar que eso es falso. Se me subió lo matemático a la cabeza, ciertamente Britney no es un orangután (piernas cortas, brazos largos, etc.) eso es evidente, pero habrá que medirla para constatarlo indubitablemente.



Me di entonces a la tarea de conseguir algunas imágenes de la cantante y averiguar su estatura real. Con las fotografías y la estatura real basta hacer simples "reglas de tres" para determinar el resto de sus medidas. Una vez hecho esto basta ver qué distancia hay entre algunos elementos del cuerpo *con relación a* otros. La clave aquí es "con relación a"; Britney puede ser alta o pequeña de estatura, pero la longitud de sus piernas, por ejemplo, debe estar *en proporción* con su tamaño; eso es lo que significa *estar proporcionado*, más que las medidas reales de Britney, lo que importa aquí son las medidas relativas: qué tan larga es tal o cual cosa *respecto* a alguna otra, proporciones a fin de cuentas.



Averigüé que Britney mide 1.63 m. de altura y entonces, con base en la fotografía que aparece a la izquierda, pude calcular la distancia aproximada que hay del piso a su ombligo (lo cual es significativo porque el centro de masas de las personas bien proporcionadas es el ombligo), la que resultó ser 96.4 cm. Si dividimos 163/96.4 obtenemos 1.6908. Si ahora nos dedicamos a su rostro, estimando las medidas reales obtenemos lo que se muestra en la imagen de la derecha.



El largo total de su cara es de unos 20 cm. y la altura de su barbilla al lagrimal es de 12 cm., ahora la proporción es 20/12=1.6666. La distancia entre la punta de la nariz y la barbilla es de 6.5 cm. que si es dividida entre la distancia de la barbilla a la boca, que son 4 cm, arroja la proporción 1.625. La misma proporción se obtiene dividiendo la distancia que hay entre el lagrimal del ojo izquierdo y el extremo opuesto del ojo derecho y la distancia entre los lagrimales: 1.625.

¡Qué curioso! hemos obtenido cuatro diferentes proporciones y todas son muy parecidas: 1.69, 1.666 y 1.625 (dos veces). Resulta que eso no es una coincidencia ni una cualidad exclusiva de Britney Spears, todos los seres humanos bien proporcionados tienen, aproximadamente, la proporción 1.618 entre las distancias medidas en Britney. A este número se le ha considerado muy especial desde la antigüedad y se le llama con diversos nombres, aquí le llamaremos la *razón áurea*. Por cierto la razón áurea no es exactamente 1.618, eso es sólo una aproximación. Este número aparece de pronto en muchos objetos y fenómenos interesantes en la naturaleza.

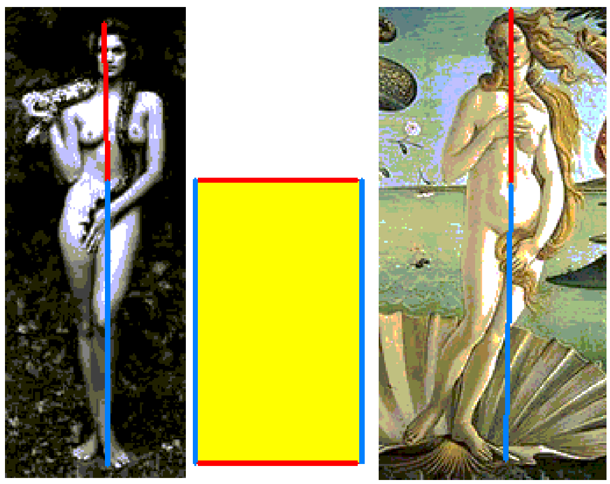
Así que en conclusión, Britney Spears sí está bien proporcionada. Cuando le mostré el resultado de mis pesquisas a Raúl, insistió en que no estaba bien proporcionada, cuando le cuestioné su terquedad repuso: "Britney no está bien proporcionada porque no me la han proporcionado". ¡La riqueza del español!. Finalmente Pedro pudo poner su poster, más por un ejercicio de autoridad de mi tío que por demostraciones ociosas.

Fuente:
Galaviz, José. ¿Está Britney Spears bien proporcionada? [en línea]. Disponible en http://www.interactiva.matem.unam.mx/ Fecha de consulta: diciembre del 2009.

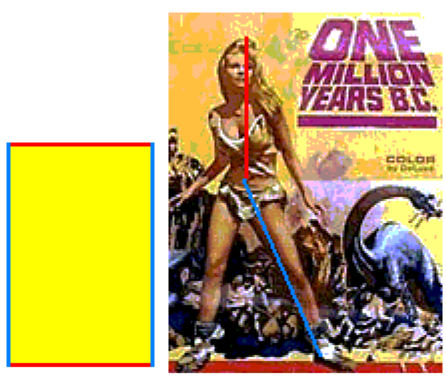
La proporción aurea

Imágenes tomadas del portal educativo Proyecto Descartes. Sirvieron de ejemplo para ilustrar acerca de la presencia de la razón aurea en obras artísticas.

El uso de la proporción áurea produce una estilización de las figuras que busca la "belleza divina". En las siguientes imágenes podemos observar dicha proporción áurea.



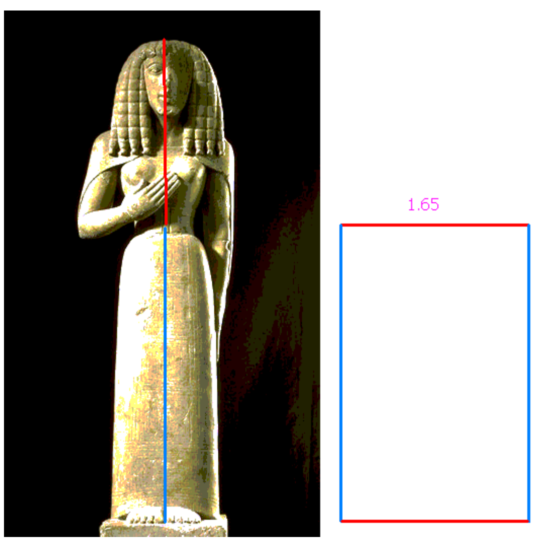
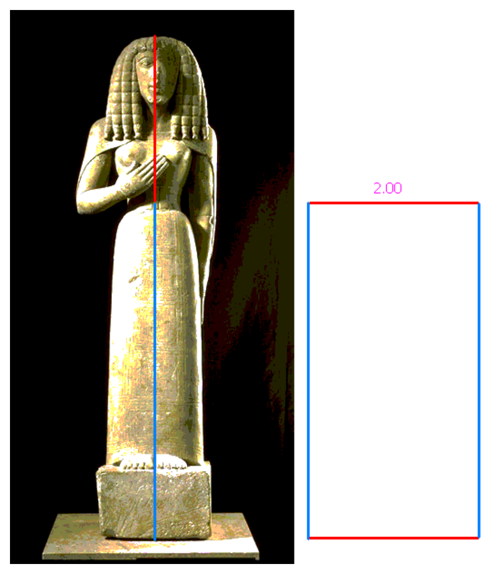
Cineva Fragmento del Nacimiento de Venus

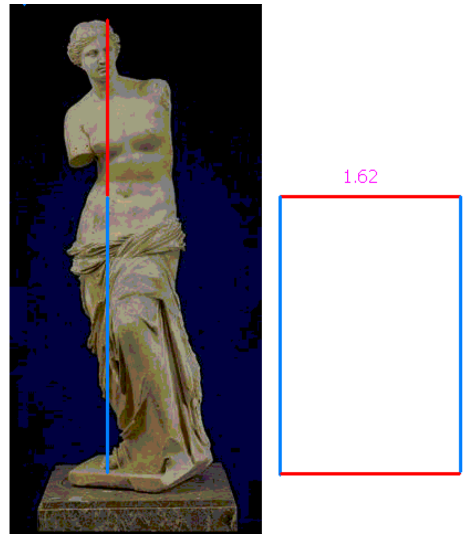
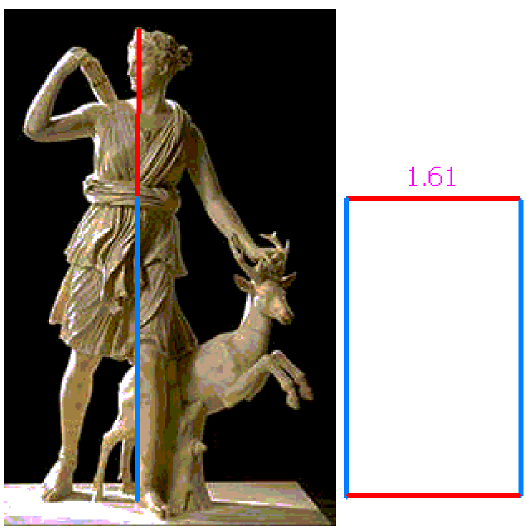
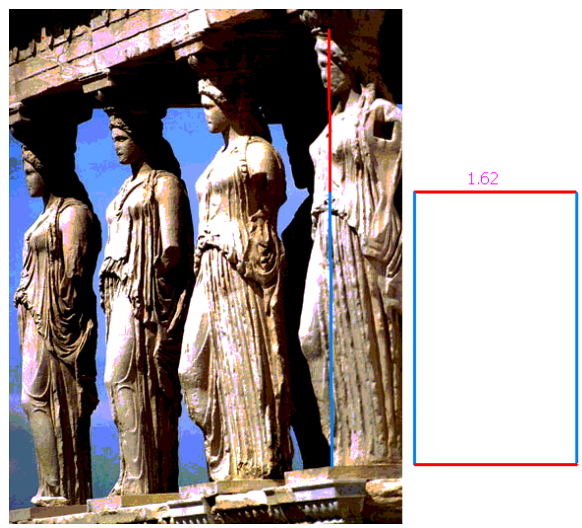


Raquel Welch

Fuente: Galo Sánchez, José R. La proporción aurea, armónica o divina. [en línea]. Disponible en: http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/belleza/canonaureo.htm. Fecha de consulta: diciembre del 2009.

- 1,618... que es el denominado número áureo y a la proporción se le denomina áurea o divina. Esta proporción refleja la máxima belleza y perfección, es decir la belleza divina. El rectángulo asociado se denomina áureo.
- 1,306... que es el denominado número cordobés y a la proporción se le denomina cordobesa o en contraposición a la anterior proporción humana. El rectángulo asociado se denomina cordobés.

	
Dama de Auxerre (sin pedestal) 1.65 (divina)	Venus de Willendorf 2.00 (superestilizada)

	
Venus Capitoline 1.32 (humana)	Venus de Milo 1.62 (divina)
	
Artemis 1.61 (divina)	Cariátides 1.62 (divinas)

Fuente:

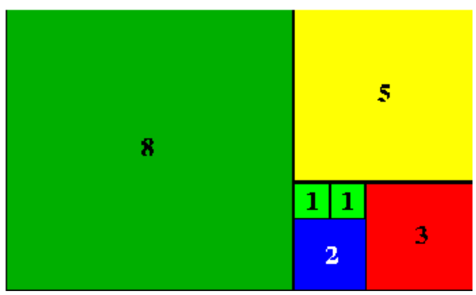
Galo Sánchez, José R. Proporciones en esculturas clásicas. [en línea] Disponible en: http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/belleza/eclasica.htm Fecha de consulta: diciembre del 2009.

La sucesión de Fibonacci

Tomada del portal PUEMAC. Sirvió para observar la relación entre la razón aurea y la sucesión de Fibonacci, así como para ilustrar acerca de la presencia de ésta en fenómenos de crecimiento.

Es posible construir un rectángulo que se aproxime, tanto como se desee, a un rectángulo áureo. El proceso es el siguiente:

1. Dibújense juntos dos cuadrados idénticos cuyo lado mida una unidad elegida arbitrariamente. Estos dos cuadrados pegados constituyen lo que llamaremos nuestro rectángulo de etapa 1.
2. Supongamos que tenemos el rectángulo áureo de etapa *k*. Para obtener el de etapa *k+1* añadimos al de etapa *k* un cuadrado cuyo lado mida lo mismo que el lado mayor del rectángulo de etapa *k*



Las longitudes de los lados de los dos cuadrados iniciales son 1 (unidad arbitraria), luego se añade un cuadrado de lado 2, luego se añade uno de lado 3, luego uno de 5, luego uno de 8. La secuencia de las longitudes es:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

A esta sucesión de números se le conoce como la sucesión de Fibonacci y tiene una cualidad muy interesante: un término cualquiera de ella se obtiene sumando los dos términos previos. Por ejemplo, el tercero es 2 que resulta de sumar los dos primeros unos; el octavo es 21 que resulta de sumar 13 y 8.

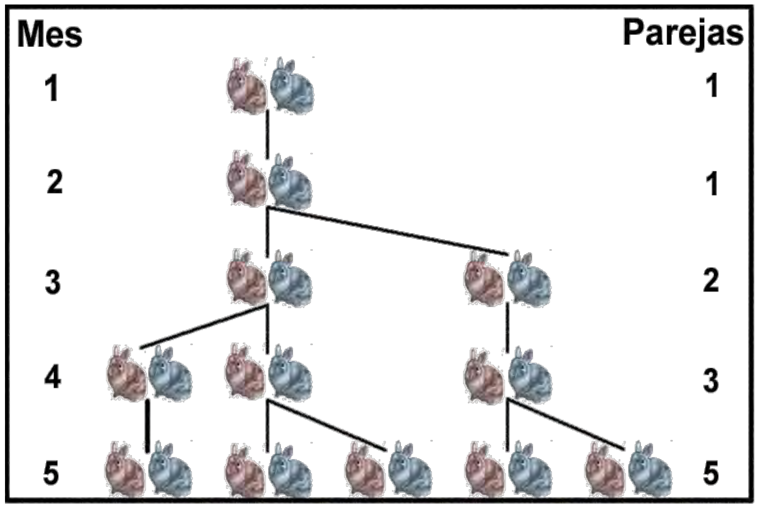
En la aproximación al rectángulo áureo que hemos construido, siempre ocurre que el lado mayor del rectángulo es un término de la sucesión de Fibonacci y el lado menor es el término anterior. Curiosamente si dividimos el *i*-ésimo término de la sucesión entre el inmediato anterior, es decir, el (*i-1*)-ésimo; el resultado se acerca tanto al valor de la razón áurea, cuanto mayor sea el valor de *i*. Es decir, mientras más avancemos en la sucesión, el cociente de un término entre el término que le antecede se aproxima más al valor de Φ. Así que conforme vayamos agregando cada vez más cuadrados a nuestra construcción, nuestra aproximación a un rectángulo áureo será mejor.

Por ejemplo los cocientes que obtenemos para los términos mostrados arriba son: 1, 2, 1.5, 1.666..., 1.6, 1.625, 1.615, 1.619, 1.617. Nótese que los valores de los cocientes son, alternadamente, superiores e inferiores al valor de Φ.

La sucesión de Fibonacci apareció por primera vez en el *Liber Abaci* escrito por Leonardo de Pisa (Fibonacci o *Hijo de Bonaccio*) en 1202. En esta obra que, contrario a lo que indica el título, no versa sobre el ábaco, Fibonacci habla del sistema de numeración indoarábigo y de sus virtudes como medio para expresar y manipular números. Al final el autor pone una serie de ejercicios que permiten evidenciar dichas virtudes. La sucesión de Fibonacci surge de uno de esos ejercicios. El ejercicio de Fibonacci pregunta cuántas parejas de conejos habrá en una granja luego de 12 meses, si se coloca inicialmente una sola pareja y se parte de las siguientes premisas:

1. Los conejos alcanzan la madurez sexual a la edad de un mes.
2. En cuanto alcanzan la madurez sexual los conejos se aparean y siempre resulta preñada la hembra.
3. El periodo de gestación de los conejos es de un mes.
4. Los conejos no mueren.
5. La hembra siempre da a luz una pareja de conejos de sexos opuestos.
6. Los conejos tienen una moral y un instinto de variedad genética muy relajados y se aparean entre parientes.

El proceso de crecimiento de la población de conejos es mejor descrito con la siguiente ilustración.



Como se puede observar el número de parejas de conejos por mes está determinado por la sucesión de Fibonacci. Así que la respuesta al ejercicio del *Liber Abaci*, acerca de cuántas parejas de conejos habrá luego de un año, resulta ser el doceavo término de la sucesión: 144.

Fuente:

Galaviz, José. ¿Está Britney Spears bien proporcionada? [en línea]. Disponible en http://www.interactiva.matem.unam.mx/ Fecha de consulta: diciembre del 2009.

Las espirales en la naturaleza (y su relación con la sucesión de Fibonacci)

Tomada del Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas (Divulgamat). Sirvió para ilustrar acerca de la presencia de la sucesión de Fibonacci en fenómenos naturales.

En cualquier piña de los pinos, si la observamos desde arriba, descubriremos que los piñones se distribuyen formando un buen número de espirales. Y no precisamente de forma aleatoria. No es ninguna casualidad. Los piñones han de distribuirse de forma óptima, es decir, aprovechando el espacio al máximo; y esa optimización del espacio se consigue mediante una distribución en espiral. Si contamos las espirales en un sentido siempre aparecen 8, si las contamos en el otro sentido encontraremos exactamente 13. Y no importa en qué piña las contemos.

La distribución de las pipas en un girasol también se hace dibujando espirales, la variedad más frecuente tiene 89 espirales en un sentido y 144 en otro, aunque otras variedades presentan 55 y 89 respectivamente. La margarita también dispone sus semillas en 21 espirales dextrógiras y 34 levógiras.

¿Es esto una mera casualidad? No. Las semillas se distribuyen siempre según una ley natural que minimiza el volumen ocupado. Esta optimización natural produce inevitablemente una distribución en espiral.

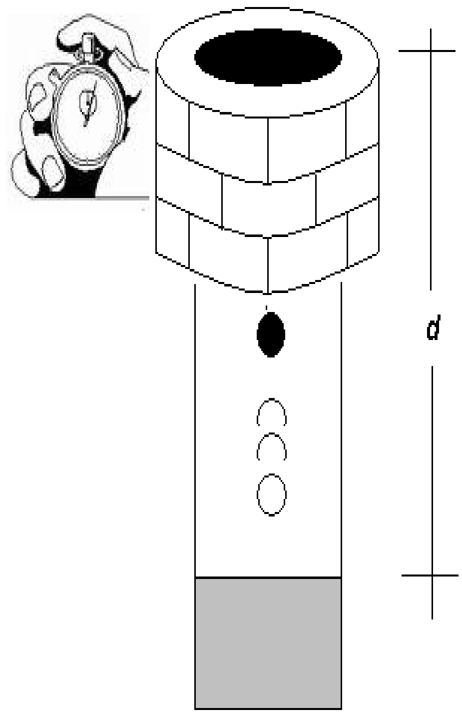
Observemos estos números... 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... Una curiosa sucesión, que está directamente relacionada con las espirales. Con las espirales y con el crecimiento y la forma de las plantas. La sucesión de Fibonacci.

Fuente:

Pérez, Antonio. Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas. Las espirales en la naturaleza [en línea] Disponible en http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Exposiciones/Expode/AntonioPerez/Naturaleza/Vegetal/MundoVegetal.asp Fecha de consulta: diciembre del 2009.

Ejemplo 2

Cálculo de la profundidad de un pozo en función del tiempo de caída de un objeto*



Temas del programa que contempla:

- Operaciones con monomios y polinomios.
- Operaciones con fracciones y radicales.
- Ecuaciones y desigualdades.

Objetivo:

Dado el caso hipotético del lanzamiento de una piedra a un pozo y la medición del tiempo de caída, calcular la profundidad de aquel mediante el análisis de las variables físicas y los modelos matemáticos asociados a los fenómenos de caída libre y movimiento rectilíneo uniforme, para ilustrar acerca de la posibilidad de las matemáticas como una herramienta para calcular de manera indirecta una longitud y elaborar modelos matemáticos que representen un fenómeno.

Secuencia de trabajo propuesta:

Proponer el problema a los estudiantes, indagando en todo momento acerca de posibles formas de resolución o conocimientos pertinentes que ayuden a construir la respuesta. El planteamiento es el siguiente:

Suponer que se desea conocer la profundidad de un pozo seco. Para hacerlo, se deja caer una piedra desde la boca y se mide el tiempo a partir de este momento y hasta escuchar el impacto de la piedra con el fondo, digamos por ejemplo 3s. ¿Qué profundidad tiene el pozo? Si los estudiantes no lo plantean, será necesario en primera instancia recordar el fenómeno de caída libre y ecuaciones de movimiento asociadas, en especial la que permite calcular la distancia que recorre un cuerpo en caída libre: $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2} at^2$

Tal y cómo he preguntado a los estudiantes con quienes he implementado este problema de clase, pregunto al lector si considera que tomando condiciones iniciales $x_0 = 0$ [m] y $v_0 = 0$ [m/s] y dado que la aceleración gravitacional se puede tomar como una constante, ¿para calcular la profundidad del pozo bastará con sustituir el tiempo medido $t = 3$[s] en la ecuación para calcular la distancia recorrida por la piedra y entonces obtener la profundidad del pozo? Si es así, entonces el problema tiene una solución trivial y requiere tan sólo sustituir t = 3 [s] en el modelo matemático. La solución, o mejor dicho, una mejor aproximación para el cálculo de la profundidad del pozo no es trivial. Veamos algunos antecedentes teóricos de conceptos pertinentes.

Antecedentes teóricos

Posición de un objeto en caída libre

Se trata de uno de los ejemplos más comunes del movimiento uniformemente acelerado. Consiste en dejar caer libremente un objeto cerca de la superficie de la Tierra.

En el apartado "Galileo y la matematización de la naturaleza" tuvimos oportunidad de analizar cómo abordo Galilei dicho fenómeno al hablar de la *relación entre las velocidades y las distancias correspondientes recorridas por un cuerpo en caída libre*, con lo cual concluye que las velocidades de un cuerpo en caída libre no están en la misma proporción que las distancias correspondientes recorridas. Galileo también afirmó que los objetos que caen aumentan su rapidez con la misma aceleración, al menos en ausencia del aire (Giancoli, 2006). A esta aceleración se le llama aceleración debida a la gravedad de la Tierra y se le designa con el símbolo g, cuya magnitud aproximada es g = 9.8 [ms^{-2}]. El valor de g varía ligeramente de acuerdo con la latitud y elevación, pero son despreciables en la mayoría de los propósitos.

La ecuación de interés para la resolución del problema del pozo, es la de la posición del objeto en caída libre después de un tiempo t. Son fundamentales las ecuaciones de velocidad promedio y la aceleración que se supone constante en el tiempo:

Velocidad promedio:

$$\bar{v} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{x - x_0}{t}, suponiendo\ t_0 = 0$$

de donde:

$$x = x_0 + \bar{v}t \qquad \text{(a.1)}$$

Aceleración constante:

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

de donde:

$$v = v_o + at \qquad \text{(a.2)}$$

Al considerar que la velocidad aumenta a un ritmo constante, tenemos que la velocidad promedio está dada por:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} \qquad \text{(a.3)}$$

donde v_0, v son las velocidades inicial y final respectivamente.

Sustituyendo (a.3) en (a.1), tenemos:

$$x = x_0 + \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)\text{t} \qquad \text{(a.4)}$$

luego (a.2) en (a.4):

$$x = x_0 + \left(\frac{v_0 + v_0 + at}{2}\right)t$$

tenemos que:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Ecuación que nos permite calcular la posición de un cuerpo en caída libre después de un tiempo t. Si las condiciones iniciales las suponemos nulas, entonces:

$$x = \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{(a.5)}$$

El Sonido y su transmisión

El sonido es una perturbación que se propaga en los medios materiales y que nuestro sentido del oído puede percibir. El sonido no se propaga en el vacío. La rapidez del sonido es diferente en distintos materiales. En el aire a 0°C y 1 atm, el sonido viaja con una rapidez de 331 [m/s]. La tabla siguiente indica la rapidez del sonido en varios materiales (Giancoli, 2006):

Tabla T.1 rapidez del sonido en varios materiales (20°C y 1 atm.)

Material	**Rapidez [m/s]**
Aire	343
Aire (0°C)	331
Helio	1005
Hidrógeno	1300
Agua	1440
Agua de mar	1560
Hierro y acero	≈5000
Vidrio	≈4500
Aluminio	≈5100
Madera dura	≈4000
Concreto	≈3000

Para el aire, la velocidad del sonido está dada de manera aproximada por el modelo: $v \approx (331 + 0.60T)$ [m/s]

Si consideramos una temperatura de 20°C, tendremos una velocidad de 343 [m/s], la cual será la que supondremos para la resolución de nuestro problema de clase. Por cierto que dado que la velocidad del sonido en cierto material es constante, podemos considera que se trata de un movimiento rectilíneo, donde aplica la ecuación de movimiento:

v = d/t [m/s] ó v = x/t [m/s] (a.6)

Regresemos a la solución de nuestro problema:

Solución al problema (1ª aproximación)

Sugiero llevar a cabo esta primera aproximación, la cual consiste en sustituir el tiempo t = 3 [s] en la ecuación (a.5), es decir:

$$x = \frac{1}{2} g t^2 \text{ [m]}$$

$$x = \frac{1}{2}(9.8)(3)^2 [m]$$

$$x = 44.1\ [m]$$

Solución al problema (2ª aproximación)

Quizá ya se advirtió que una mejor aproximación para el cálculo de la profundidad del pozo debe considerar que el tiempo t = 3 [s] comprende dos eventos físicos: uno, el de caída libre de la piedra, desde el momento en que se deja caer ésta y hasta que impacta en el fondo; dos, el de transmisión del sonido desde el momento de generación de la onda sonora en el impacto, hasta el momento en el que el observador percibe la onda.

El tiempo total t_T puede plantearse como:

$t_T = t_{caida} + t_{sonido}$, es decir:

$3 = t_{caida} + t_{sonido}$ (a.7)

Por lo sencillo y claro de comprender tal situación, aunque no evidente al momento de plantearla, sugiero que no se haga esta consideración inicialmente, sino luego de cuestionar acerca de si es sólo el fenómeno de caída libre el que está involucrado y qué otras consideraciones son pertinentes. En mi caso, opté por la estrategia de inducirlos a pensar en la primera aproximación, sin considerar el tiempo de propagación del sonido y aparentar una solución trivial al ejercicio, para luego hacer notar lo inexacto de tal consideración y la necesidad de incluir otras ecuaciones y resolverlas.

Destaco la posibilidad de disertar, a partir de la ecuación anterior, en torno a la posibilidad del lenguaje matemático para modelar o expresar el comportamiento de un fenómeno físico.

Al resolver para t en (a.5) y (a.6) para luego sustituir en (a.7), tenemos:

$3 = t_{caida} + t_{sonido}$

$$3 = \sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v}$$

$$g = 9.8[ms^{-2}]$$

$$v = 343[ms^{-1}]$$

por lo que:

$$3 = \sqrt{\frac{2}{9.8}}\sqrt{x} + \frac{1}{343}x$$

La solución de esta ecuación nos dará una mejor aproximación del cálculo de la profundidad x. Para resolverla, se plantea un cambio de variable:

$\sqrt{x} = y$, entonces:

$$3 = \sqrt{\frac{2}{9.8}}\, y + \frac{1}{343} y^2$$

$$\frac{1}{343} y^2 + \sqrt{\frac{2}{9.8}}\, y - 3 = 0$$

cuyas soluciones son $y_1 = 6.37$ y $y_2 = -161.32$

Como $x = y^2$, tenemos que:

$x_1 = 40.68\ [m]$, $x_2 = 26027$

Sólo x_1 es significativa. Tal y como se esperaba, su valor es menor que el obtenido mediante la primera aproximación.

El procedimiento matemático mostrado hasta ahora en la segunda aproximación es tan sólo una simplificación de lo que ha sido necesario explicar durante las clases. No resulta claro para algunos estudiantes, por ejemplo, por qué $\sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{x}$, sin embargo, las dificultades en la comprensión o realización de procedimientos son hasta cierto punto detectables al abordarse junto con los estudiantes en clase. Sugiero tomar tiempo suficiente para indagar acerca del grado de dominio que tienen los estudiantes con tales procedimientos y para explicarlos, sin profundizar demasiado o dejar de lado el objetivo del problema matemático.

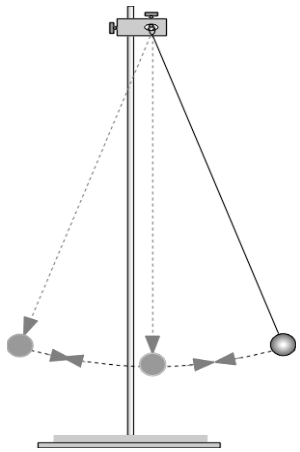
En lo particular, me ha resultado efectivo desarrollar de manera paralela tanto el procedimiento esencial y simplificado de las expresiones, al mismo tiempo que el concepto en el cual se basan acompañado de un ejemplo para confirmar la validez –al menos particular- del mismo.

Sirva de ejemplo lo siguiente:

Desarrollo simplificado	Concepto básico	Ejemplo
$\sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}x} = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{x}$	$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$	$\sqrt{(9)(4)} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ $\sqrt{36} = \sqrt{9}\sqrt{4}$ 6 = (3) (2) 6 = 6

Sugiero que el docente trabaje junto con todos los estudiantes desde la ecuación (a.7) hasta el cálculo de la profundidad del pozo, así como que se comente respecto a la posibilidad que brindan las matemáticas de modelar fenómenos, expresar la relación cuantitativa entre variables físicas y predecir su comportamiento.

Ejemplo 3



El Péndulo

***Sagredo**: Con frecuencia tú me das ocasión de admirar la riqueza y simultáneamente la suma prodigalidad de la naturaleza, mientras de cosas tan comunes, y podría decirse triviales, vas extrayendo datos tan curiosos y nuevos, y casi siempre diversos de lo que uno pudiera imaginarse. Mil veces he observado yo las oscilaciones, en particular de las lámparas que en algunas iglesias penden de cuerdas larguísimas, cuando inadvertidamente las mueve alguno; pero lo más que yo he podido observar de tal observación ha sido la probabilidad de la opinión de quienes pretenden que es el medio, es decir el aire, el que mantienen y continua semejantes movimientos, porque me parece que en ese caso el aire debería tener un gran discernimiento, y al mismo tiempo muy poco que hacer, para gastar horas y horas de tiempo para empujar con tanta regularidad hacia acá y hacia allá un peso en suspensión. Pero que yo hubiese llegado a comprender que un mismo móvil, suspendido de una cuerda de cien codos de largo, desviado del punto muerto una vez noventa grados, y otra un solo grado o medio, empleare tanto tiempo en recorrer este arco mínimo, como en pasar el otro máximo, no creo que yo lo hubiese comprendido jamás, porque aun ahora me parece tener algo de imposible. Ahora estoy esperando que estas mismas simplísimas minucias, me proporciones unas explicaciones de los fenómenos de música, tales que puedan, al menos en parte, aquietar mi mente...*

GALILEO GALILEI.

Temas del programa que contempla:

- Operaciones con fracciones y radicales.
- Ecuaciones y desigualdades.

Objetivo:

Analizar experimentalmente la relación cualitativa y cuantitativa entre las variables involucradas en el fenómeno del péndulo para observar la validez del modelo matemático asociado que permite calcular el periodo, así como obtener experimentalmente el valor de la constante g. Con esto se busca ilustrar acerca de la importancia de las matemáticas para modelar fenómenos de la naturaleza y predecir el comportamiento de las variables, al mismo tiempo que mostrar que conceptos como las funciones cuadráticas, las operaciones con radicales o lugares geométricos como la parábola, están relacionados con la descripción de fenómenos físicos.

Secuencia de trabajo propuesta:

Para llevar a cabo el objetivo anterior propongo hacerlo con la práctica de clase "El Péndulo", la cual incluye una secuencia de trabajo para analizar y disertar en torno a la relación entre las variables: longitud, masa y periodo. La idea es sistematizar el análisis y registrar la relación cualitativa y cuantitativa entre las variables. El análisis cuantitativo está centrado en registrar la relación del periodo del péndulo en función de la longitud de la cuerda de este, hacer énfasis en que la relación L/τ^2 es una constante y en el cálculo a partir de datos experimentales del valor de la constante g.

Me parece que lo más destacable del experimento es:

-Que la representación gráfica de la relación entre las variables L y τ es una parábola.

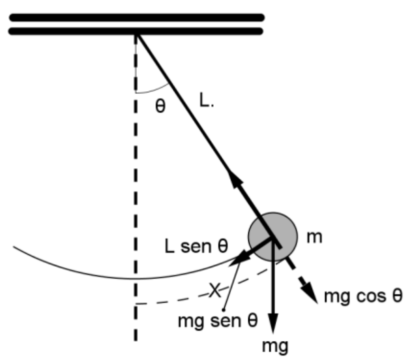
-La concordancia entre el modelo teórico y el experimental para el periodo del péndulo, así como del valor de la constante g obtenida a partir del experimento con el supuesto: g=9.8 [ms^{-2}].

Además de las actividades propuestas en la práctica, deberá realizarse la gráfica del periodo respecto a la longitud. Al finalizar la práctica propongo disertar en torno a la importancia de las matemáticas para modelar los fenómenos físicos. Señalar la validez de éstos y la posibilidad de predicción.

Antecedentes teóricos

El péndulo simple

Este tipo de péndulo consiste en un pequeño objeto suspendido del extremo de un cordón ligero. Se supone que el cordón no se estira y que su masa es despreciable con relación a la del objeto. El movimiento que describe el péndulo puede considerarse como un movimiento armónico simple, lo cual implica que la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento.



Para demostrar esto considérese que el desplazamiento del péndulo a lo largo del arco está dado por $x = L\theta$, donde θ es el ángulo que el cordón forma con la vertical y L es la longitud del cordón (figura 2.1). Si la fuerza restauradora es proporcional a x ó a θ, el movimiento es armónico simple.

Figura 2.1. Variables del péndulo.

La fuerza restauradora es la fuerza neta sobre el objeto y está dada por:
$F = -mgsen\theta$

Si el ángulo θ es pequeño (obsérvese la tabla 2.1), entonces sen θ es muy cercano a θ, por lo que para esta condición tendremos el caso del movimiento armónico simple (Giancoli, 2006).

Tabla 2.1 Sen θ para ángulos pequeños			
θ[°]	θ [rad]	sen θ	% diferencia
0°	0	0	0%
1°	0.01745	0.01745	0.005%
5°	0.08727	0.08716	0.15
10°	0.17453	0.17365	0.5%
15°	0.26180	0.25882	1.1%
20°	0.34907	0.34202	2.0%
30°	0.52360	0.50000	4.7%

Tenemos entonces que para ángulos pequeños menores que 15°:

$$F = -mgsen\theta \approx -mg\theta$$

Al sustituir $x = L\theta$ ó $\theta = x/L$, tenemos:

$$F \approx -\frac{mg}{L}x$$

ecuación que concuerda con la ley de Hooke, $F = -kx$, por lo que la constante de fuerza efectiva es $k = mg / L$.

Al considerar que el periodo en el movimiento armónico simple está dado por:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, entonces, para el péndulo simple, tenemos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

La práctica del péndulo que se plantea a continuación, requiere de este modelo matemático, el cual permite calcular el periodo del péndulo en función de la longitud de la cuerda. Además, la amplitud de las oscilaciones para la práctica propuesta, requirió de ángulos no mayores a 15°, para que el fenómeno se trate como un movimiento armónico simple.

Práctica de clase:

Presento a continuación el contenido de la práctica de clase propuesta. Agrego en el anexo la reproducción del cuadernillo de trabajo que se distribuyó con los estudiantes, el cual contiene un ejemplo de realización de la práctica.

"El Péndulo"

Problema

Primera etapa

Es posible implementar empíricamente y de manera aproximada, un péndulo cuyo periodo de oscilación (tiempo necesario para efectuar un ciclo) sea de 1 segundo; sin embargo, ¿es posible hacerlo utilizando las matemáticas? Es decir, ¿determinar mediante conceptos matemáticos las características del péndulo que harán que este tenga un periodo de oscilación de 1s?

¿Qué magnitudes están asociadas con el movimiento del péndulo?
¿De qué magnitudes depende el periodo de oscilación de un péndulo?

Segunda etapa

¿Es posible encontrar el valor de la constante física "g"?
En caso afirmativo, ¿cuál es su valor?

Objetivos

Primera etapa

1. Determinar cualitativamente la relación entre las variables:
   a) Longitud de la cuerda y periodo de oscilación.
   b) Amplitud del desplazamiento y periodo de oscilación.
   c) Masa de la bola y periodo de oscilación.
2. Cuantificar experimentalmente la relación entre la(s) variable(s) que afecten el periodo de oscilación (τ), para tratar de elaborar un modelo matemático que describa el fenómeno.

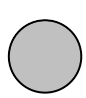
Segunda etapa

3. Relacionar los datos experimentales de la relación $\frac{L}{\tau^2}$ asociados a la magnitud "g" con el modelo matemático $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Para hacerlo es necesario efectuar operaciones matemáticas con las que será posible determinar el valor de la constante.

Hipótesis

> La idea es que los estudiantes planteen, luego de una breve experimentación cualitativa, la relación entre las variables físicas del péndulo. Después corroboren su hipótesis y establezcan la validez del modelo teórico respectivo.

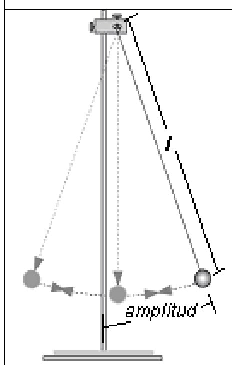
Material

1 bola de esponja.  1 metro de hilo cáñamo.  1 cronómetro. 

Desarrollo y resultados

Manipular las magnitudes: masa de la bola, amplitud del movimiento y longitud de la cuerda, para observar los efectos que producen en el periodo de oscilación (τ). Para hacerlo, auxiliarse con la siguiente tabla (1):

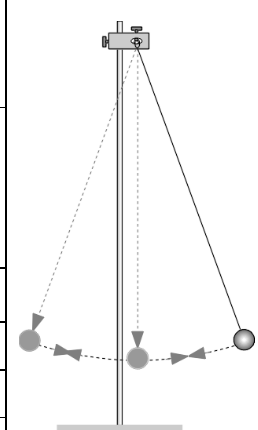
Tabla 1. Efectos de las magnitudes masa, amplitud y longitud, sobre el periodo de oscilación τ.

		Magnitud			
	Observación	Masa m	Amplitud A	Longitud L	Observación o efecto en τ
	1				
	2				
	3				

Nota: En las columnas correspondientes a cada una de las magnitudes, anotar *variable* o *constante*, según la observación realizada. Con este ejercicio, destaca el procedimiento de "aislamiento de variables", útil para determinar los efectos de sólo una magnitud sobre otra.

Con el fin de observar cuantitativamente la relación entre el periodo de oscilación y longitud, realizar las mediciones sugeridas en la tabla 2.

Tabla 2. **Longitud *l* del hilo y periodo de oscilación τ.**

EVENTO	Longitud l [m]	Para 10 oscilaciones: Tiempo medido t: Repetición 1	2	3	4	5	Tiempo promedio: $\bar{t} = (t_{PROMEDIO})$	Para 1 oscilación: Tiempo τ τ: periodo	
							$\bar{t} = \sum_{1}^{5} t_n / 5$	$\tau = \bar{t} / 10$	
1	1.00								
2	0.80								
3	0.60								
4	0.40								
5	0.20								

Dados los tiempos τ y τ^2, obtener las relaciones:

$\frac{L}{\tau}$ y $\frac{L}{\tau^2}$. ¿A qué magnitud física se asocia $\frac{l}{\tau^2}$?

Tabla 2.		**Relación L con τ y τ^2.**			
EVENTO	l, [m]	**τ**	**τ^2**	$\frac{L}{\tau}\left[\frac{m}{s}\right]$	$\frac{L}{\tau^2}\left[\frac{m}{s^2}\right]$
1	1.00				
2	0.80				
3	0.60				
4	0.40				
5	0.20				
	0.00				

A partir del modelo matemático siguiente, aplicable a pequeñas amplitudes del péndulo: $\tau=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ y tomando en cuenta los datos experimentales recién obtenidos, determinar el valor de la constante "g".

¿Cuál es la longitud necesaria del hilo para obtener un periodo de oscilación aproximado de 1 segundo?

Nota: Considerar que para este experimento se desprecian condiciones como los efectos del aire circundante y la masa del hilo.

Conclusiones

Considerarlas en los siguientes aspectos:

1. Efecto de las magnitudes: masa de la bola, amplitud del movimiento y longitud del hilo, sobre el periodo de oscilación.
2. Conceptos y operaciones matemáticas asociadas al péndulo; esto es, en el sentido de "la matemática como lenguaje de la naturaleza".
3. Acerca del desarrollo de la práctica: si fue comprensible, interesante, coherente, etc.

4. CONCLUSIONES

La propuesta didáctica que he presentado y las conclusiones respectivas, pueden plantearse a partir de dos referentes: por un lado, como la concreción de una postura con enfoque instrumental acerca de la enseñanza de las matemáticas, centrada en la idea de *la matemática como lenguaje de la naturaleza* y como resultado de la investigación en torno al enfoque histórico de la misma y de la aportación de materiales y estrategias al respecto; por otro, como la conformación de una propuesta para la reflexión y análisis del significado del conocimiento matemático y de la forma de construirlo, basada también en una perspectiva histórica y en dicha idea. Este último referente resultó ser un componente esencial de mi trabajo, incluso predominante, de modo que podemos hablar de una propuesta didáctica dirigida sobre todo a colegas docentes. Tomemos en cuenta que contrario al supuesto –que observo predominante en el ámbito del ejercicio docente– de que la didáctica es sólo una ciencia aplicada, una técnica con carácter instrumental y normativa, considero que la didáctica tiene un componente esencial caracterizado por el análisis histórico y social del conocimiento y de los procesos de enseñanza-aprendizaje asociados, de modo que se promueva la reflexión y creatividad de los docentes para la construcción y replanteamiento de los mismos. Podemos decir que *la técnica de enseñanza es importante, pero articulada con su necesario plano conceptual; una visión antinormativa de la didáctica requiere de la formación y creatividad docentes* (Díaz Barriga, A., 1998). Vista así, la propuesta didáctica se ha centrado fundamentalmente en la reconstrucción, replanteamiento y análisis, representativo, de la perspectiva histórica de *la matemática como lenguaje de la naturaleza*, con la idea de promover la reflexión en torno a la relevancia cultural de la misma y de los procesos implicados, tales como el de matematización de los fenómenos. Todo esto, con miras a incorporar un discurso y quizá algunas estrategias de las que he planteado para la enseñanza de las matemáticas, en particular del álgebra.

Cabe, con relación a los dos referentes que planteo: concreción y conformación de una propuesta didáctica, describir brevemente cómo se concibió y acabó por construirse este trabajo: originalmente, me propuse realizar una propuesta dirigida a los estudiantes, que incluyera componentes que consideré esenciales: fundamentos pedagógicos, referentes teóricos disciplinarios, objetivos, estrategias de aprendizaje, evaluación de los procesos, etc. Conforme fui avanzando en la investigación y diseño de la propuesta, la misma fue derivando en una labor de indagación y análisis en torno a la perspectiva de *la matemática como lenguaje de la naturaleza* desde un punto de vista histórico y de reflexión en torno a los procesos de pensamiento asociados. Me pareció importante que luego de la exposición de este punto, concretara tal perspectiva con estrategias o recursos de enseñanza-aprendizaje. Así lo hice, sin embargo, dadas las posibilidades para concretar sistemáticamente y evaluar dicha perspectiva, la propuesta adquirió el sentido predominante actual: de reflexión y análisis dirigido a los docentes, con la posibilidad de hacer uso de tales estrategias y recursos. A continuación las conclusiones para cada uno de dichos referentes.

La concreción de una postura

En tanto que planteé la construcción de una alternativa didáctica para el estudio del álgebra, la serie de ejemplos que elaboré concretan tal propósito. Se trata de situaciones que ilustran cómo efectivamente las matemáticas posibilitan modelar fenómenos, describen la relación cuantitativa entre variables y predicen su estado.

En el caso de φ y la Divina Proporción, así como de la sucesión de Fibonacci, los ejemplos de la aplicación del primer concepto en la construcción de edificaciones antiguas, de la creencia asociada en torno a la belleza y las imágenes de diversas esculturas, así como de elementos naturales asociados con la sucesión, me parece que aportaron elementos interesantes para los estudiantes acerca de la presencia de las matemáticas en la cultura y la naturaleza. Destaco el empleo del texto de Galaviz tomado del portal PUEMAC, ya que resultó un excelente texto de divulgación con lenguaje claro y atractivo para los estudiantes, así como base para que ellos realizaran la actividad en clase de medición y cálculo posterior de razones entre ciertas partes del cuerpo, para verificar la concordancia aproximada con φ. Hago la observación de que en este caso predominó el tono de ejemplificación basado en la presentación de imágenes. Es factible abordar formalmente ciertos conceptos y habilidades, como proporciones, series, construcciones geométricas o la resolución de ecuaciones de segundo grado para el cálculo de la constante.

Acerca del Problema del pozo, fue evidente la importancia de considerar conceptos básicos para la construcción de un conocimiento, así como de ajustar el ritmo de trabajo con base en la comprensión lograda por los estudiantes. Sería infructuosa e incluso perjudicial la pretensión de resolver un ejercicio o problema si el planteamiento del mismo y de dichos conceptos, no son comprendidos del todo. En concreto, fue necesario aclarar respecto al significado de la constante “g”, erróneamente asociada con frecuencia a la “fuerza de gravedad”, así como a las características de transmisión de las ondas sonoras. Resultó atractiva, por su sencillez y credibilidad, la traducción del tiempo total registrado desde la caída de un objeto en la boca de un pozo hasta escuchar el impacto del mismo por un observador, como una suma de dos tiempos asociados a los siguientes eventos: el de la caída libre del objeto más el de transmisión del sonido luego del impacto. Dada la necesidad de emplear la estrategia de cambio de variable y operaciones algebraicas como el uso de radicales y resolución de ecuaciones cuadráticas, me pareció que en este caso sería más conveniente emplear tal ejemplo luego del estudio de las tales operaciones. Fue relevante el hecho de confirmar una estimación junto con los estudiantes, ya que con la primera aproximación del cálculo de la profundidad del pozo, con base sólo en el evento de caída libre, fue posible disertar acerca de cómo sería la profundidad con la otra aproximación, considerando la caída libre y la transmisión del sonido. Confirmamos que efectivamente resultó una distancia menor.

Respecto al ejemplo del Péndulo, destaco la experimentación vinculada a los conceptos matemáticos. Trabajamos con el modelo teórico que relaciona el periodo de oscilación con la longitud y contrastamos la concordancia entre los resultados teóricos y experimentales. Me parece que se puede hacer énfasis en la posibilidad de las matemáticas para el diseño de artefactos y predicción del estado de las variables. Además, hice énfasis en la relación de conceptos, tales como el de la parábola y las ecuaciones, en la descripción de tal fenómeno.

En todos los casos, considero que predominó la ejemplificación del uso de conceptos y habilidades matemáticas para la modelación de fenómenos naturales, no tanto el estudio formal o como parte de una secuencia didáctica, de los temas implicados. Digamos que el tema fue precisamente la perspectiva de *la matemática como lenguaje de la naturaleza*. Aunque considero que se cumplió el propósito de ilustrar acerca de esta, es factible incorporar tales ejemplos en dicha secuencia o en el estudio de algún otro tema.

Conformación de una propuesta

Una acepción del término conformar, es “darle forma a algo”. Fue tal lo que sucedió con la propuesta mientras emprendí la investigación en torno a la perspectiva histórica de *la matemática como lenguaje de la naturaleza*. Aquella adquirió forma predominante de reconstrucción y análisis de los procesos de pensamiento asociados a dicha perspectiva.

En tanto una conclusión general y primordial de tal referente es haber aportado elementos de reflexión y análisis acerca del conocimiento matemático y la didáctica del mismo, a continuación las conclusiones respectivas.

Los referentes teóricos en la propuesta didáctica

La teoría no necesariamente antecede a la práctica. La distinción entre ambas es una de tantas clasificaciones útiles con fines de análisis, pero que no describen en su totalidad y con la complejidad debida, cómo se puede construir el conocimiento a partir de las tareas implicadas con cada uno de los conceptos. En la propuesta didáctica se observa como una perspectiva teórica –como la de la motivación o la enseñanza situada– puede, por un lado, aportar un marco de referencia a partir del cual explicar mis concepciones en torno a la enseñanza de las matemáticas y la forma de implementarla; por otro, plantear una serie de sugerencias o aportaciones para mi desempeño docente, en aras de hacerlo más efectivo de modo que resulte o provoque una participación más comprometida y entusiasta de los estudiantes con quienes trabajo, en tanto los conocimientos y habilidades que abordemos, adquieran mayor sentido y relevancia para ellos.

Visto así, me parece que los apartados correspondientes a los fundamentos didácticos y psicopedagógicos de la propuesta, promueven la reflexión en torno a la didáctica de las matemáticas, las características del conocimiento, sugieren maneras –al menos generales– de construirlo y posibilitan replantear un discurso en torno al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; sobre todo aportan respuestas, entre las varias posibles, acerca de la importancia de su enseñanza y estudio. Respecto al capítulo La matemática como lenguaje de la naturaleza, si bien es cierto que buena parte del contenido puede ubicarse en el campo de lo teórico, es al mismo tiempo la práctica y recreación, fascinante y motivante, del conocimiento matemático, con lo cual se lleva a cabo uno de los principios que considero fundamentales para la enseñanza de las matemáticas: para mostrar cómo enseñar matemáticas hay que hacer matemáticas.

Acerca del estudio histórico que emprendí con fuentes originales como las de Galilei, así como con textos de análisis, cabe decir que si bien es cierto que no era para mí desconocido el hecho de que las matemáticas han sido por mucho tiempo un lenguaje a través del cual se pueden modelar diversos fenómenos de la naturaleza, por ejemplo en la Física que utiliza modelos matemáticos para describir la relación entre variables, el acercamiento a las perspectivas históricas descritas en el capítulo 2: la de los pitagóricos y la de Galilei, aportan para mí dos ideas significativas:

1. El interés intrínsecamente humano por conocer y explicar los fenómenos. Para ello se han valido de herramientas matemáticas, a pesar de que en casos como el de los pitagóricos se hizo con un fuerte componente místico y religioso. En el caso de Galilei, destaca la utilización del método experimental y el análisis de su validez con los modelos matemáticos planteados.

2. El papel relevante de la imaginación para explicar y representar de manera simbólica diversos fenómenos. Algo parecido a lo que afirma Ortega y Gasset al responder *¿Qué hace, en cambio, Galileo?*:

> "En vez de perderse en la selva de los hechos entrando en ellos como pasivo espectador, comienza por imaginar la génesis del movimiento en los cuerpos lanzados […] 'Concibo por obra de mi mente un móvil lanzado sobre un plano horizontal y quitando todo impedimento' […] Comienza, pues, por construir idealmente, mentalmente, una realidad. Sólo cuando tiene ya lista su imaginaria

realidad observa los hechos, mejor dicho, observa que relación guardan los hechos con la imaginada realidad…”

En este sentido, la imaginación ha y puede desempeñar un papel relevante para la construcción del conocimiento. Valdrá la pena buscar los medios o recursos para que ésta se haga patente.

La transformación de mi discurso.

Alejado más de afirmaciones que pretenden justificar el estudio de diversos temas de matemáticas por la necesidad de comprender otros, es decir, el ejercicio de las matemáticas como una actividad autorreferencial desvinculada de otras disciplinas y fenómenos, he logrado realzar individual y colectivamente, con especial importancia al interactuar con los estudiantes, el papel de las matemáticas como un lenguaje para explicar y modelar diversos fenómenos de la naturaleza. Tanto más será comprendida y relevante esta postura, en la medida en que logre replantearse y reconstruirse didácticamente. Parafraseando a Díaz Barriga en lo que respecta a la enseñanza situada, se trata de generar y recrear el conocimiento en determinada situación, aquella que pretendo resulte más significativa en función de la relevancia cultural del uso de las matemáticas.

Al respecto, comparto una reflexión: a lo largo de mi experiencia profesional docente, he observado que de manera frecuente en cursos o actividades de formación, existe un reclamo reiterado, en primera instancia legítimo, para que los formadores o el contenido de los programas planteen estrategias concretas para ser utilizadas con nuestros estudiantes. Desde mi punto de vista, poco se atiende a la reflexión en torno al sentido o fines de las actividades y a los supuestos pedagógicos a partir de los cuales se construyen.

Es más el énfasis en aspectos disciplinarios, necesarios e imprescindibles por cierto, de los contenidos matemáticos en las actividades. Poco se valora que las actividades de reflexión o análisis de perspectivas históricas o teóricas, contribuyen a transformar nuestro discurso, el cual manifestamos a través de formas diversas: lenguaje escrito, verbal, decisiones que tomamos, el tipo de interacción que construimos con nuestros estudiantes, etc.

Con relación a lo anterior, cabe la pregunta: ¿la propuesta didáctica que he presentado aporta favorablemente y de manera concreta al proceso de enseñanza-aprendizaje en mis grupos de bachillerato? Sí, definitivamente. Ha transformado mi discurso al ampliar mis perspectivas en torno al papel que han tenido las matemáticas a lo largo de la historia, para comprender diversos fenómenos de la naturaleza. Además, cuento con ejemplos o alternativas didácticas, que sabemos no siempre resultarán efectivas o será necesario replantear, para abordar temas diversos y disertar en torno a *la matemática como lenguaje de la naturaleza*, su importancia en la elaboración de modelos que describen la relación entre variables físicas y la posibilidad de predecir su estado. Con esto, es posible propiciar una participación más activa y motivada por parte de los estudiantes.

La transformación de mi práctica.

Primero una reflexión: si bien es cierto que la propuesta didáctica es una alternativa para contribuir a ampliar el sentido a conceptos y habilidades matemáticas en el terreno del álgebra, estoy consciente de que la utilización e importancia de las matemáticas no se agota ni se explica del todo con la perspectiva de *la matemática como lenguaje de la naturaleza*. Existen otros puntos de vista en los que, por ejemplo, no importan los contextos de aplicación o utilidad, en los que el proceso de razonamiento puramente matemático es valioso y aprovechable didácticamente por sí mismo.

Hecha tal reflexión a modo de aclaración de mi postura, destaco la aportación que significa para mi práctica docente el hecho de haberme acercado a dicha perspectiva. Resalto el contraste entre saber de la matemática como una herramienta, parte imprescindible de otras disciplinas, y haber trabajado para construir situaciones de aprendizaje con miras a que los estudiantes se percaten como efectivamente las matemáticas sirven como un lenguaje que describe y modela diversos fenómenos de la naturaleza. Es factible reconstruir y adaptar tales situaciones en los grupos de clase con los cuales trabajo, así como indagar otros fenómenos que, dado el contexto del bachillerato, sean posibles de abordar matemáticamente mediante su modelación.

Perspectivas

Finalmente, en el terreno de las perspectivas de la propuesta didáctica, señalo que pretendo que la lectura de ésta resulte benéfica para los docentes que tengan la oportunidad de analizarla en los siguientes aspectos:

- Conocer con cierta profundidad acerca de la perspectiva matemática de los pitagóricos y de las aportaciones al pensamiento científico hechas por Galilei, en lo que respecta a la idea de *la matemática como lenguaje de la naturaleza*. Esto implica ofrecer una oportunidad de, como yo lo hice, comprender los procesos imaginativos, experimentales y de construcción de modelos matemáticos realizados por él. En lo particular me resultó fascinante y motivante conocer, comprender y recrear al menos parcialmente, algunos de los estudios hechos por Galilei, analizados en la sección de ejemplos en el apartado de *Galileo y la matematización de la naturaleza*. Espero que para el lector también lo sea.

- Aportar elementos concretos de conocimiento respecto a la perspectiva histórica de *la matemática como lenguaje de la naturaleza*, tanto en el terreno del análisis histórico de tal perspectiva, como en el de la didáctica, al aportar ejemplos que contribuyan a su vivencia en el aula.

Siguiendo con las perspectivas, ahora con relación al impacto de la propuesta con los estudiantes y nuestro proceso de enseñanza-aprendizaje, espero lo siguiente:

- Procurar que los estudiantes participen más activamente y con mayor motivación en el estudio de diversos conceptos y habilidades matemáticas, en tanto se aporta un contexto de aplicación o uso de las matemáticas de suma relevancia en lo que respecta a la comprensión de los fenómenos de la naturaleza y a la predicción del estado de variables físicas u otras.

- Enfatizar con ellos la importancia de la construcción de modelos matemáticos que representen o simbolicen la relación entre variables. Que comprendan que las matemáticas son parte de una cultura en la que la comprensión de fenómenos o la solución de problemas reales, ha sido una fuente primordial para la evolución de la disciplina. No está de más reiterar la importancia de ésta no sólo en contextos de aplicación vinculados a situaciones prácticas, sino también en contextos abstractos e intrínsecamente humanos que van más allá de aplicaciones prácticas: comprender nuestro mundo y ejercer la poderosa función imaginativa y creadora que poseemos.

ANEXO

Planes de clase y Bitácoras

MAdEMS Maestría en Docencia para la Educación Media Superior

MATEMÁTICAS

PLANEACIÓN DE PRÁCTICAS DOCENTES

Alumno:	Alberto J. Ramírez Romero.	Plantel:	ENP 6,"Antonio Caso"
Profesor tutor:	Michael Barot Schlatter.	Materia:	Matemáticas IV.
Profesor de P. D.:	Roberto Rodríguez Pérez.	Grupo:	453 Turno: Vesp.
Profesor supervisor:	Roberto Rodríguez Pérez.	Fecha:	02 al 12 de Octubre, 2006.

Horario		
Día	Hrs.	
L	—	—
M	2	15:20-17:00
Mi	2	14:30-16:10
J	1	18:40-19:30
V	—	—

Proyecto de Tesis	
Tema:	"Propuesta de motivación del álgebra a partir de la matemática como *lenguaje de la naturaleza*."
Objetivo general:	Generar una propuesta de motivación del álgebra, mediante el estudio de la matemática como *lenguaje de la naturaleza*, para eficientar el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra.
Objetivo general de P. D.:	Preparar e implementar una secuencia didáctica, trabajando como profesor en el grupo de la ENP, para desarrollar y consolidar la propuesta de motivación del álgebra.

Objetivos específicos de la P. D.	
Conceptual:	Conocer cómo es que la matemática permite explicar, comprender y modelar fenómenos físicos, observando algunos ejemplos, para darle significado a esta disciplina y potenciar su empleo para la solución de problemas reales.
Procedimental:	Construir un modelo matemático, mediante el análisis sistemático de algún fenómeno físico, para comprender la importancia del álgebra en la descripción de fenómenos físicos.
Actitudinal:	Promover una actitud favorable de los alumnos hacia el estudio del álgebra, mediante su empleo significativo, para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina.

Sesiones		Actividades programadas
1	03/Oct. Martes 2 horas	— Presentación personal. — Presentación general de mi proyecto de trabajo. — Introducción a la matemática como *lenguaje de la naturaleza* y en este sentido, al significado de las operaciones algebraicas. — Análisis histórico breve del siglo XVII y su relación con las matemáticas: De la Edad Media al Renacimiento; Kepler y las órbitas planetarias; Descartes y la geometría Analítica; Galileo, el método experimental y la matematización de la ciencia.
2	04/Oct. Miércoles 2 horas	— Presentación de ejemplos que ilustren a la matemática como *lenguaje de la naturaleza*: Problema del pozo: determinación de la profundidad de este mediante varias aproximaciones y operaciones algebraicas.
3	05/Oct. Jueves 1 hora	— Presentación de ejemplos que ilustren a la matemática como *lenguaje de la naturaleza*. (Continuación). Análisis de resultados y del proceso llevado a cabo para solucionar el problema.
4	10/Oct. Martes 2 horas	— Realización de un experimento físico para obtener un modelo matemático que describa el fenómeno: "El experimento de Galilei…actualizado".
5	11/Oct. Miércoles 2 horas	— Conclusiones: • El *lenguaje de la naturaleza*. • El modelo matemático o la matematización del mundo físico. Discusión sobre estos puntos y organización de las conclusiones mediante alguna estrategia (esquema sobre la matematización, diagrama, etc.).
6	12/Oct. Jueves 1 hora	— Evaluación del grupo y de mi trabajo. Aplicación de cuestionarios y discusión sobre los contenidos y formas de trabajo.

PLAN DIARIO DE CLASES

Datos de identificación	Plantel:	ENP 6, “Antonio Caso”.	
	Alumno:	Alberto Jorge Ramírez Romero.	
Asignatura: Matemáticas IV	Grupo: 453	Fecha: 03-10-2006	Ciclo escolar: 2006-2007

Clase(s) No(s):	Tema:	Nivel de asimilación:
1/6	Introducción al Álgebra.	Conocimiento

Estrategias: - Lluvia de ideas. - Preguntas exploratorias. - Presentación en audio y video.	**Título:**	“La matemática como lenguaje de la naturaleza o la matematización del mundo físico”.
	Objetivos de aprendizaje:	Ilustrar acerca del concepto de *la matemática como lenguaje de la naturaleza*, mediante algunos ejemplos, para reflexionar sobre la importancia de aquella en la comprensión del mundo físico.
Recursos: - PUEMAC. - Videoproyector.	**Objetivos actitudinales:**	

Actividades programadas (TE)

APERTURA (TE: 30)

Introducción:
- Presentación personal.
- Presentación general de mi proyecto de trabajo.

Reactivación de conocimientos previos:

Lluvia de ideas:
¿Por qué son importantes las matemáticas?
Videoproyección:
PUEMAC (Álgebra-Una embarrada…)
Ejemplo prioritario (importancia de las matemáticas):
“La matemática cómo lenguaje de la naturaleza”

Situación problemática:
- ¿Cómo podemos describir matemáticamente el “mundo físico”?
- ¿Cómo podemos modelar matemáticamente los fenómenos físicos?

Preguntas que serán retomadas en una sesión posterior: El modelo matemático.

DESARROLLO (TE: 50)

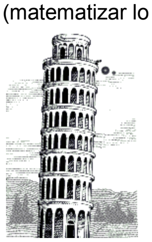
Construcción de significados:

Ejemplos sobre la matematización del mundo físico:

- Determinación de las órbitas planetarias, visión Ptolomeica vs Copernicana
(El mural de la Biblioteca Central).
- Videoproyección: Kepler y órbitas planetarias (PUEMAC-Bach. y Lic.-Kepler-Historia).
- Descartes y la geometría analítica (parte del programa de estudios y posibilidad de expresar algebraicamente lugares geométricos).

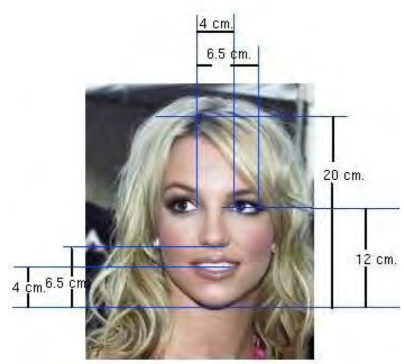
- Galileo, el método experimental y la matematización de la ciencia (algunos ejemplos de sus experimentos: caída libre, “medición del tiempo”, etc.)

Videoproyección: “PISAesferas.gif“, “ExperimentoGalileo” y “caida_pendulo.mov” (matematizar lo observado).



Organización y aplicación de los conocimientos:

Cuestionario A:
- Explica que significa para ti “la matemática cómo lenguaje de la naturaleza”.
- En los ejemplos vistos durante la clase, ¿qué papel desempeñan las matemáticas?



CIERRE (TE: 20)

Conclusión:
- Resumen.
- Hemos platicado matemáticas, pero haremos matemáticas (panorama de las siguientes sesiones).

Evaluación:

Cuestionario A, útil para indagar acerca de lo que piensan y han comprendido los estudiantes. Servirá como un indicador de mi trabajo.

Tarea:
- Investigar sobre el experimento (real o no) de la torre de PISA, realizado por Galileo.
- Revisar PUEMAC, Bachillerato y lic., razón áurea:

¿Está Britney Spears bien proporcionada? Para proseguir la discusión sobre el *lenguaje de la naturaleza* o la relación de conceptos matemáticos con características del mundo físico.

TE: Tiempo estimado [min.] TE total: 2 horas-clase = 01:40.

FOLIO O1/06
Fecha: 03/Octubre/2006.
Hora de inicio: 15:20. Hora de término: 17:00.

<table>
<tr><th>Actividad planeada</th><th>Actividad realizada y observaciones</th></tr>
<tr><td colspan="2">Presentación del programa del día y forma de trabajo</td></tr>
<tr><td>Presentación personal y presentación general de mi proyecto de trabajo.</td><td>Además de lo previsto, solicité a los alumnos que se presentaran (uno presentaba a varios). Me pareció una decisión acertada, ya que ayudo a relajar su actitud y la mía.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exposición de un tema completo</td></tr>
<tr><td>El previsto en el plan de clase, que fue básicamente:
Discusiones: La importancia de las matemáticas.
El proceso de matematización.
Tema inicial: “La M como L de la N “.
Tenía previsto en el plan de clase referirme a los fenómenos físicos. Me percaté que esto era limitante de mi propuesta de trabajo y opté por referirme a los fenómenos naturales.</td><td>Respecto a la pregunta: ¿Por qué son importantes las matemáticas?, los alumnos vertieron opiniones variadas e interesantes. Reconozco que esto fue algo inesperado y me hizo pensar en que en ocasiones puedo subestimar a los estudiantes; de hecho, para algunas de sus opiniones, tuve que hacer un esfuerzo por comprenderlas y valorarlas justamente.
En varios momentos decidí apresurar la exposición, ya que percibí poco interés.
Respecto al título de la clase (La M… como L… de la N…), mi intención fue que ellos dedujeran el tema de nuestra clase. Fue grato que varios alumnos supieran la respuesta.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Empleo de material didáctico específico</td></tr>
<tr><td>Videoproyección (PUEMAC).</td><td>Me pareció que la presentación de PUEMAC (Una embarrada de álgebra), resultó un elemento interesante. Creó expectativas positivas y percibí que esta sección fue agradable; sin embargo, la parte histórica creo que no fue así. Me pareció que no logré interesar a los alumnos. Una posible forma de interesarlos quizá hubiera sido sugerirles que pensaran en las características de la época en que ubique la discusión (siglo XVI).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Uso de estrategias didácticas</td></tr>
<tr><td>Lluvia de ideas.
Preguntas exploratorias.
Presentación en audio y video.</td><td>Reafirmé que el uso de estrategias como la lluvia de ideas, permiten preservar y organizar la información.
Me pareció que las preguntas exploratorias respecto a cómo describir y modelar matemáticamente fenómenos, fueron hechas con un contexto deficiente. Fue como proponer repentinamente, sin la debida motivación, estas preguntas. Parece conveniente que antes de preguntar, debo generar interés en la situación en cuestión.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Técnicas o estrategias para propiciar el trabajo en equipo</td></tr>
<tr><td>Lluvia de ideas y preguntas exploratorias dirigidas al grupo.</td><td>Efectué las actividades previstas, aunque sólo es posible conocer la opinión de aquellos que deciden participar verbalmente y frente a grupo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Demostración de un procedimiento experimental o teórico</td></tr>
<tr><td>Presentación de ejemplos acerca de la matemática como lenguaje de la naturaleza.</td><td>No existió alguna demostración sobre alguno de los ejemplos dados, fue tan sólo una exposición (plática de varias situaciones en las que la matemática resulta una herramienta indispensable. Tomar como pretexto el mural de la Biblioteca Central provocó una discusión interesante (probablemente porque es algo conocido por ellos).</td></tr>
</table>

Actividad planeada	Actividad realizada y observaciones
Desarrollo de una actividad experimental	
Ninguna	
Aclaración de dudas	
Preguntas constantes al grupo.	Me parece que mantuve la disposición de aclarar dudas, sin embargo, observo que no emplee alguna estrategia más eficiente para detectarlas; es decir, puedo preguntar como una forma de detectar dudas, pero esto no asegura que no existan.
Manejo de alumnos con dificultades de aprendizaje	
No planee alguna estrategia específica.	Me parece que estuve dispuesto a atender a alumnos con dificultades, con la gran limitante de que sólo era posible si ellos se acercaban. Concentré mis esfuerzos en posibles dificultades de los alumnos para comprender algún concepto, pero hasta ahora reparo en aquellos casos en los que la dificultad existe en la disposición para atender la clase. En este sentido, no apliqué alguna estrategia.
Evaluación	
Cuestionario A: 1. Explica qué significa para ti, la matemática como lenguaje de la naturaleza. 2. En los ejemplos vistos durante la clase, ¿qué papel desempeñan las matemáticas?	Apliqué el cuestionario. Procuré que todos lo respondieran y revisar el mayor número posible de respuestas (durante la clase), aunque no fue una revisión completa y exhaustiva. Me pareció que en general, los alumnos hicieron más énfasis en la importancia de las matemáticas considerando la lluvia de ideas, que acerca del concepto el *lenguaje de la naturaleza*. Parece que aunque la lluvia de ideas fue interesante, dispersó o amplió (en cierto sentido inconvenientemente) la discusión. Quizá debería preguntar por la importancia de los modelos matemáticos o el álgebra.

OBSERVACIONES

En general, la disposición de los alumnos a participar fue muy buena. Muchas de sus opiniones y conocimientos, son muy valiosos e interesantes.
Creo que esta fue una de las clases donde estuve más receptivo con los alumnos.
La parte más complicada de mi exposición fue la parte histórica. En ciertos momentos decidí apresurar la exposición porque percibí desinterés y aburrimiento en los alumnos. Pienso que esto se debió en parte a la falta de claridad en mi discurso, el cual noté apresurado y disperso.

REFLEXIONES

Parece que la estrategia de “romper el hielo” resulta indispensable para generar cierto ambiente de confianza y relajamiento en el grupo, lo cual es conveniente. Pienso que la presentación propia y de los alumnos, fue acertada.
La primera parte de PUEMAC (Una embarrada de álgebra) fue un elemento de interés y agrado para los alumnos; sin embargo, la parte histórica no resultó así. Con esto pienso en la posibilidad de que algunas cosas que resultan interesantes para mí, no lo son para ellos. En todo caso, aquellas pueden serlo si logro construir un discurso claro y coherente y logro conectarlo con situaciones de mayor interés para ellos.

MADEMS
Maestría en Docencia para la Educación Media Superior

PLAN DIARIO DE CLASES

Datos de identificación			
Plantel:	ENP 6, “Antonio Caso”.		
Alumno:	Alberto Jorge Ramírez Romero.		
Asignatura: Matemáticas IV	Grupo: 453	Fecha: 04,05-10-2006	Ciclo escolar: 2006-2007

Clase(s) No(s):	Tema:	Nivel de asimilación:
2,3/6	“Introducción al álgebra”	Conocimiento

Estrategias:	Título:	“Ejemplos sobre la matematización del mundo físico”
Resolución de problemas. Preguntas exploratorias. Tabla clasificatoria.	Objetivos de aprendizaje:	Observar el proceso de solución de un problema real, utilizando herramientas algebraicas, para determinar en que consiste la matematización del mundo físico.
Recursos: Calculadora.	Objetivos actitudinales:	Fomentar el gusto por la matemática, relacionándola con aspectos de la vida cotidiana, para lograr una mejor participación.

Actividades programadas

APERTURA (TE: 40)

Introducción:

Revisión de tarea (Britney S.), para retomar discusión sobre *la matemática como…*).

Discusión (continuación): Platicar y hacer matemáticas, como introducción a la realización de ejemplos.

Reactivación de conocimientos previos:

El experimento (ficticio o no) de la torre de Pisa:

¿En qué consiste?
Dados dos cuerpos con masa distinta caída libre, ¿cómo es la velocidad relativa entre ambos?
Perspectiva actual: g = 9.8 ms^{-2}.
$d = ½ at^2$. x_0, v_0 = 0.
Explicación de la ecuación y de g.

Situación problemática:

Problema:
Es lanzada una piedra verticalmente en un pozo. Algunos segundos después, los cuáles son medidos, el lanzador escucha cuando la piedra hace contacto con el agua.
¿Cuál es la profundidad o distancia (d) a la que se encuentra el agua?

DESARROLLO (TE: 60 + 30 (1ª, 2ª y 3ª aproximación hasta plantear ecuación de 2º grado + solución de esta y elaboración de tabla-resumen).)

Construcción de significados:

Resolución del problema planteado:

Aproximación 1

t = 4 [s] (el observador cuenta mentalmente)

$$d = \frac{1}{2}gt^2 = 0.5(9.8)(4)^2\left[\frac{m}{s^2}\right][s]^2 = 78.4[m]$$

Aproximación 2

t_1 = 3.40 [s].
t_2 = 3.50 [s].
t_3 = 3.45 [s].
t_4 = 3.52 [s].
t_5 = 3.48 [s].
~~t_6 = 6.50 [s].~~
t = (t_1 +t_2 +t_3 +t_4 +t_5) / 5
t = 3.47 [s]

$$d = \frac{1}{2}gt^2 = 0.5(9.8)(3.47)^2 = 59[m]$$

Aproximación 3

t = 3.47 [s] (considerando el sonido)

$$t_{TOTAL} = t_{caida} + t_{sonido}$$

$$t = \sqrt{\frac{2d}{g}} + \frac{d}{v}, \sqrt{d} = x$$

$$\frac{1}{v}x^2 + \sqrt{\frac{2}{g}}x - t = 0$$

$$\left(\frac{1}{342}\right)x^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{9.8}}\right)x - 3.47 = 0$$

$$x = 7.333, d = 53.77[m]$$

Organización y aplicación de los conocimientos:

Aprox	Descripción	Ecuaciones	Distancia
1	Tiempo estimado sin reloj (mental).	$d = \frac{1}{2}gt^2$	d = 78.4 [m]
2	Varias mediciones	$\bar{t} = \sum t_n / n$ $d = \frac{1}{2}gt^2$	d = 59 [m]
3	Tomando en cuenta el sonido.	$t_T = t_{caida} + t_{sonido}$ $ax^2 + bx + c = 0$	d = 53.77[m]

CIERRE (TE: 20)

Conclusión:

Resumen.
Discusión sobre el proceso de matematización.

Evaluación:

Cuestionario:
¿Con lo observado hasta ahora, explica en que consiste el proceso de matematización del mundo físico?
¿Cuál fue el proceso seguido para resolver el problema?

Tarea:

Clase 2: Resolver la ecuación de segundo grado (sustituir en ecuación general).
Clase 3: Solicitud de material para la práctica e información acerca del experimento de la rampa, para determinar el valor de g.

TE: Tiempo estimado [min.] TE total: 3 horas-clase = 02:30.

FOLIO O2/06
Fecha: 04/Octubre/2006.
Hora de inicio: 14:30. Hora de término: 16:10.

Actividad planeada	Actividad realizada y observaciones
Presentación del programa del día y forma de trabajo	
Discusiones previstas (como introducción a la clase): Platicar y hacer matemáticas.	Expliqué verbalmente acerca de lo que hicimos la clase pasada (platicar de matemáticas) y de lo que haríamos: ejemplos sobre el uso de las matemáticas.
Exposición de un tema completo	
*Reactivación de los conocimientos previos: - El experimento de la torre de Pisa: ¿En qué consiste? - Dados dos cuerpos con masa distinta caída libre, ¿cómo es la velocidad relativa entre ambos? - Perspectiva actual: $g = 9.8\ ms^{-2}$ y $d = ½\ at^2$. x_0, $v_0 = 0$. - Explicación de la ecuación y de g. *Presentación del problema del pozo. *Solución al problema.	Omití hablar sobre el experimento de la torre de Pisa y creo que hubiera sido una buena introducción; sin embargo, aborde una sección que llamé “antecedentes”, la cual resultó crucial y útil para observar la importancia del concepto de *reactivación de conocimientos previos* para la comprensión adecuada del problema y su resolución. Abordé el problema, aunque no llevé a cabo la consideración de la primera aproximación (conteo mental) y la segunda aproximación prevista (con varias mediciones), debido al escaso tiempo para realizarlas. Creo que hubiera sido posible con una mejor organización de mi parte, pero olvidé ciertos detalles importantes y no acudí a la planeación de clase, en el momento de presentar el problema.
Empleo de material didáctico específico	
Ninguno.	
Uso de estrategias didácticas	
Resolución de problemas. Preguntas exploratorias. Tabla clasificatoria.	Propuse el problema e hice las preguntas que consideré pertinentes, para saber sobre la comprensión y formas de resolución del problema; sin embargo, al igual que en la clase anterior, las preguntas dirigidas al grupo, tienen la limitante de no saber con certeza la situación de todos los alumnos. La tabla clasificatoria fue realizada dos sesiones después. Esto fue por la falta de tiempo, pero creo que era posible hacerlo en la clase siguiente (3ª), según el plan.
Técnicas o estrategias para propiciar el trabajo en equipo	
Preguntas exploratorias y acerca del procedimiento para resolver el problema, dirigidas al grupo.	Mantuve la idea de que entre todos resolveríamos el problema, aunque en la práctica me parece que esto resulta muy ambicioso, quizá ingenuo. Me agradó el hecho de que cuando discutimos acerca del significado de “g”, consideré todas las respuestas, incluso las equivocadas, pero a partir de las unidades de esta constante, concluimos sobre su significado. Aunque en general pienso que fue comprensible, tengo dudas sobre el número de alumnos para los que fue así.
Demostración de un procedimiento experimental o teórico	
Sólo explicación verbal del problema del pozo.	No realicé alguna demostración. Pensé después en que el fenómeno de los rayos en las tormentas eléctricas, en los que el sonido es posterior a la aparición visual de estos, hubiera ilustrado bien la aproximación que considera el sonido.

Actividad planeada	Actividad realizada y observaciones
Desarrollo de una actividad experimental	
Ninguna.	
Aclaración de dudas	
Preguntas exploratorias.	Las preguntas constantes acerca de los conocimientos previos, resultaron una forma de percatarme de sus dudas o concepciones erróneas. Aunque percibí en general, la comprensión del problema y su resolución, no tengo mayor certeza de esto.
Manejo de alumnos con dificultades de aprendizaje	
No planee alguna estrategia específica.	Observé que tomar en cuenta las opiniones equivocadas, resultó conveniente, como una forma de reflexionar acerca de las razones del error y de comprensión del concepto correcto.
Evaluación	
Cuestionario: ¿Con lo observado hasta ahora, explica en que consiste el proceso de matematización del mundo físico? ¿Cuál fue el proceso seguido para resolver el problema? Previsto para aplicarse la 3ª clase, al finalizar el problema.	Pendiente.

OBSERVACIONES

Observé que puede resultar provechoso partir de situaciones sencillas, como los conceptos de velocidad o aceleración en sus formas más simples, para comprender situaciones más complejas; también, acerca de la importancia de hacer énfasis en los conocimientos previos que muy probablemente los alumnos poseen o que es necesario que posean para comprender temas posteriores.

Cuando quise que expresaran la ecuación $t_{total}= t_{caida}+ t_{sonido}$, muchos presentaron dificultades, debidas en parte a la falta de claridad y justificación de mi parte acerca del empleo de esta, para determinar la profundidad del pozo. Creo que fue importante aclarar que sugerí esta consideración (de los tiempos) porque nos permitiría expresar la distancia desconocida, en términos de otras magnitudes conocidas y, sobre todo, que lo hacía porque ya conocía el procedimiento de resolución y que la intención era que vieran la importancia del conocimiento de conceptos y operaciones matemáticas, para dicha resolución..

REFLEXIONES

Considero que el concepto de “matematización” es muy importante, sin embargo no hice mucho énfasis en él.

Concentré mis esfuerzos en la resolución del problema y no en el proceso de resolución. Me parece que esto se debió al aún escaso trabajo de preparación del tema. En lo posterior, será importante trabajar más al respecto; incluso, es posible que en la tesis y en la práctica docente posterior, tenga que hacer más énfasis en dicho concepto.

FOLIO O3/06
Fecha: 05/Octubre/2006.
Hora de inicio: 18:40. Hora de término: 19:30.

Actividad planeada	Actividad realizada y observaciones
Presentación del programa del día y forma de trabajo	
Problema del pozo (continuación): Resumen de lo hacho hasta la clase anterior.	Efectué el resumen y proseguí con la resolución. .
Exposición de un tema completo	
Resolución del problema. Discusión sobre el proceso de matematización.	Aunque pensé que resultaría complicado abordar la aproximación 3 prevista e incluso contemplé omitirla, el hecho de haber trabajado en la sección "antecedentes" (conocimientos previos), contribuyó a avanzar y concluir convenientemente el problema. Percibí que en general, este resultó comprensible. No ahondé en la discusión acerca del proceso de matematización. Al menos esta clase, no hubo tiempo de hacerlo, pero reconozco, como lo hecho antes, que fue un tema que no preparé convenientemente. Contemplé su importancia y discusión, pero no las estrategias para estudiarlo mejor.
Empleo de material didáctico específico	
Ninguno.	
Uso de estrategias didácticas	
Resolución de problemas. Preguntas exploratorias. Tabla clasificatoria.	Efectué continuamente las preguntas exploratorias, de nueva cuenta con las limitantes que ya mencioné (conocimiento parcial). Con la tabla clasificatoria pretendía resumir las características y expresiones matemáticas de las aproximaciones de resolución del problema. Así lo hice, pero hasta la clase siguiente, por falta de tiempo. Esto fue indudablemente, por falta de organización.
Técnicas o estrategias para propiciar el trabajo en equipo	
Preguntas exploratorias y acerca del procedimiento para resolver el problema, dirigidas al grupo.	Percibí especial interés en el momento en que explique la forma de realizar los "despejes" para la obtención de la ecuación de segundo grado. Creo que hubo interés y confianza para preguntar, ya que varios alumnos realizaron preguntas sobre el proceso. Parece que esto fue un indicador importante sobre cierta confianza generada hasta ese momento en el grupo. Confirmé después que algunos percibieron que mantuve *interés para que todos entendieran*, según la opinión de una alumna.
Demostración de un procedimiento experimental o teórico	
Ninguno.	Sólo explicación verbal de la situación. La resolución de la ecuación de segundo grado obtenida, pudo ser un elemento probatorio de la validez del modelo, pero no asigné tiempo para resolverla.

Actividad planeada	Actividad realizada y observaciones
Desarrollo de una actividad experimental	
Ninguna.	
Aclaración de dudas	
Preguntas exploratorias.	Esta clase contribuyó de manera positiva, me parece, a generar un ambiente de confianza para que los alumnos preguntaran. Pienso que mostré disposición a aclarar dudas. Reitero lo limitante que resulta hecer preguntas abiertas al grupo.
Manejo de alumnos con dificultades de aprendizaje	
No planee alguna estrategia específica.	Procuré explicar suficientemente, incluso en varias ocasiones, acerca de los procedimientos matemáticos utilizados.
Evaluación	
Cuestionario: ¿Con lo observado hasta ahora, explica en que consiste el proceso de matematización del mundo físico? ¿Cuál fue el proceso seguido para resolver el problema? Previsto para aplicarse la 3ª clase, al finalizar el problema.	Aunque previsto para esta sesión, no efectué el cuestionario. Este era el punto de partida para la discusión sobre el proceso de matematización. A pesar de que reitero la no aplicación por falta de tiempo, reconozco que esta se debió a que no asigné el tiempo necesario, ya que me faltó profundizar acerca del tema y prepararlo adecuadamente.

OBSERVACIONES

La resolución del problema del pozo, me satisfizo en varios aspectos como:

-La importancia de los conocimientos previos.
-El interés y la capacidad de los alumnos, para comprender algún problema y resolverlo, siempre que este sea tratado convenientemente.

Percibí en general, comprensión e interés de los alumnos del problema del pozo, pero me parece que faltaron actividades además de mi exposición, para que los alumnos trabajaran más activamente.
Observé que la mayoría de los alumnos realizó la tarea acerca de: ¿Está bien proporcionada Britney Spears?

REFLEXIONES

Destaco la importancia de la planeación de las sesiones de clase. Así como fue muy bueno para desarrollar convenientemente el problema del pozo, también fue notable mi omisión de un tema muy importante: el proceso de matematización. Esto fue debido a una falta de planeación adecuada. Planee preguntarles, pero las respuestas que o daría para construir conjuntamente el tema.

En esta clase como en ninguna otra, percibí compresión y gusto por los temas vistos por parte de algunos alumnos. Gran satisfacción.

PLAN DIARIO DE CLASES

Datos de identificación	Plantel: ENP 6, “Antonio Caso”. Alumno: Alberto Jorge Ramírez Romero.		
Asignatura: Matemáticas IV	Grupo: 453	Fecha: 10-10-2006	Ciclo escolar: 2006-2007

Clase(s) No(s):	Tema:	Nivel de asimilación:
4/6	Introducción al Álgebra.	Conocimiento

Estrategias:	Título:	“El Péndulo”, clase teórico-práctica.
Tablas-resumen. Práctica: “El Péndulo”	Objetivos de aprendizaje:	Describir la relación entre magnitudes asociadas al péndulo, mediante expresiones matemáticas, para realizar un modelo matemático (parcial) que explique el fenómeno.
Recursos: Cuadernillo de práctica. Material para el péndulo.	Objetivos actitudinales:	Promover la participación grupal de los alumnos, mediante la formación de equipos, para impulsar la capacidad de trabajar colectivamente.

Actividades programadas (TE)

APERTURA (TE: 25)

Introducción:
Revisión de tarea (proporciones de Britney).
Completar tabla-resumen del problema del pozo.

Reactivación de conocimientos previos:
Breve repaso de los conceptos: *matematización* y *matemáticas como lenguaje de la naturaleza*, observados en las clases anteriores.
Observación cualitativa de las características del péndulo, para comenzar a asociarlas con posibles expresiones matemáticas.

Situación problemática:
¿Es posible diseñar con conceptos matemáticos, un péndulo cuyo periodo de oscilación sea de 1 [s]?

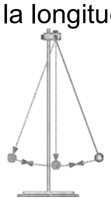
DESARROLLO (TE: 65)

Construcción de significados:
Práctica: “El Péndulo”, la cual será realizada básicamente mediante:

Observación cualitativa y cuantitativa de la relación entre las magnitudes asociadas al péndulo, la cual se compone de dos etapas:

Primera etapa:

1. Relación entre las variables:
   a) Longitud y periodo.
   b) Amplitud y periodo.
   c) Masa de la bola y periodo.
2. Cuantificación experimental del periodo de oscilación (τ) en función de la longitud del hilo.



Segunda etapa:

1. Descubrimiento y énfasis de la presencia de la aceleración “g” en el péndulo.
2. Utilización del modelo matemático:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

para determinar el valor de “g”.

Nota: En la práctica, no hago explícita desde el principio ésta etapa, ya que considero relevante el descubrimiento de la presencia de la constante “g”.

Organización y aplicación de los conocimientos:
Tablas descriptivas (cuantitativas y cualitativas) de la relación entre las magnitudes: masa de la bola, amplitud del movimiento y longitud del hilo.

	Magnitud			Efecto en τ
Observación	M	A	L	
1	VAR.	CTE.	CTE.	
2	CTE.	VAR.	CTE.	
3	CTE.	CTE.	VAR.	

Longitud *l* del hilo y periodo de oscilación τ.

EVENTO	l [m]	10 oscilaciones: t, Repetición 1 … n	t prom.	1 oscilación τ	l/τ^2 a
1	1.0				
2	0.8				
3	0.6				
4	0.4				
5	0.2				

CIERRE (TE: 10)

Conclusión:
– Énfasis en la relación constante: l/τ^2 y su asociación con la aceleración.
– Comprobación del valor de “g” (validez del modelo matemático).
– Conclusiones de la práctica.

Evaluación:
Observación de realización de la práctica.
Análisis de conclusiones (tarea).

Tarea:
Elaboración de conclusiones.

TE: Tiempo estimado [min.] TE total: 2 horas-clase = 01:40.

FOLIO O4/06
Fecha: 10/Octubre/2006.
Hora de inicio: 15:20. Hora de término: 17:00.

<table>
<tr><th>Actividad planeada</th><th>Actividad realizada y observaciones</th></tr>
<tr><td colspan="2">Presentación del programa del día y forma de trabajo</td></tr>
<tr><td>Planteamiento del problema del péndulo y las actividades asociadas: observación cualitativa y cuantitativa, apoyándose en el cuadernillo.</td><td>Realicé las actividades programadas, sin embargo, esto ocurrió varios minutos después (25 aprox.) de la hora de inicio, ya que ocupe tiempo en preparar el material para el experimento. Erróneamente, consideré que dicha preparación sería más rápida.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exposición de un tema completo</td></tr>
<tr><td>Realización de las actividades incluidas en el cuadernillo, para después analizarlas conjuntamente.</td><td>Debido a la demora para iniciar las actividades, no fue posible concluir las actividades programadas. Apenas dio tiempo para iniciar el experimento y realizar algunas mediciones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Empleo de material didáctico específico</td></tr>
<tr><td>*Material para el péndulo:
-Pelota de esponja.
-Trozo de hilo (1.2 m.)
-Cronómetro (incluido en teléfonos celulares)
*Cuadernillo de prácticas.
*Calculadora.</td><td>Me parece que la elección de este experimento fue acertada, debido a que es de fácil adquisición e implementación. Creo que en general resultó interesante para los alumnos e incluso la utilización del teléfono celular fue un recurso atractivo para ellos. Fue muy perjudicial para el desarrollo de la clase y su comprensión, no contar a tiempo con el material. Prepararlo, fue un distractor relevante y “tiempo perdido”.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Uso de estrategias didácticas</td></tr>
<tr><td>Tablas-resumen.
Práctica: “El Péndulo”.</td><td>Fue posible utilizar las estrategias previstas, pero no totalmente en esta clase, debido al retardo mencionado para iniciar las actividades. Fueron notables las dificultades que presentaron algunos alumnos para comprender el procedimiento del experimento. Aunque observé que esto fue en parte por distracción de los alumnos, reconozco que faltó claridad de mi parte para explicar dicho procedimiento.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Técnicas o estrategias para propiciar el trabajo en equipo</td></tr>
<tr><td>Formación de equipos de trabajo.</td><td>Fue posible trabajar en equipos, pero me parece que era necesario organizar mejor la forma de trabajo, ya que no contemplé, por ejemplo: definir a los integrantes, que pasaría con los que faltaron y se integrarían a la siguiente clase o las actividades de cada integrante.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Demostración de un procedimiento experimental o teórico</td></tr>
<tr><td>Práctica del péndulo.
Obtención parcial del modelo matemático del péndulo y confirmación del modelo teórico.</td><td>Decidí realizar el experimento del péndulo –además de su fácil implementación–, porque el valor experimental de “g”, concuerda con el teórico; también, porque esperaba ilustrar como las matemáticas nos ayudan a modelar el fenómeno. Pienso que aunque en general esto se logró, las deficiencias en la organización, afectaron su mejor comprensión.</td></tr>
</table>

Actividad planeada	Actividad realizada y observaciones
Desarrollo de una actividad experimental	
Experimento del péndulo.	El experimento se realizó, con los inconvenientes de la organización, los cuales ya he mencionado.
Aclaración de dudas	
Preguntas exploratorias al grupo. Actividades y preguntas del cuadernillo.	Las preguntas dirigidas al grupo, son un recurso que he utilizado continuamente. Pienso que son necesarias aunque no es posible detectar totalmente ciertas dificultades de aprendizaje. Las actividades y preguntas del cuadernillo fueron indicadores importantes, lo lamentable fue que no asigné tiempo para comentar las respuestas y los aciertos y errores asociados.
Manejo de alumnos con dificultades de aprendizaje	
No planee alguna estrategia específica.	El acercamiento a los equipos, fue conveniente para detectar dificultades y ayudar a la mejor comprensión de las actividades.
Evaluación	
Preguntas exploratorias. Cuadernillo de prácticas.	Las preguntas exploratorias dirigidas al grupo, pienso que son un instrumento limitado, pero indispensable para observar la situación del grupo. El cuadernillo proporcionó información relevante sobre la comprensión del proceso involucrado y de los resultados obtenidos, pero no asigné tiempo para analizarlo conjuntamente con el grupo.

OBSERVACIONES
Considero que las actividades programadas son adecuadas para los objetivos propuestos, pero en ésta clase como en ninguna otra, fue evidente que el hecho de no contar con el material debidamente preparado, alteró el ritmo y claridad de las acciones propuestas. Observé que el experimento resultó atractivo para varios alumnos. Fue un reto importante darle sentido a las actividades hechas, más allá del carácter lúdico. Un recurso tan utilizado –en muchas veces de forma inconveniente–, como es el teléfono celular, resultó un elemento atractivo para muchos de ellos. El limitado tiempo para realizar las actividades programadas, aunado a la intención de realizar éstas tal y como estaba previsto, resultó perjudicial para la comprensión y buen término de la actividad. Quizá era mejor no realizarla. Fue hasta la siguiente clase cuando logré concretar las actividades propuestas.
REFLEXIONES
Si en otras ocasiones ha sido evidente el inconveniente de no contar con una planeación adecuada, en esta ocasión fue claro que de poco sirve una buena planeación, si la implementación de esta es deficiente; es decir: la actividad parecía acertada, al igual que la integración de equipos, pero el hecho de comenzar tarde, apresurada y desorganizadamente, alteró negativamente el desarrollo de la clase. En todo caso, estos son aspectos que debí contemplar en la planeación.

FOLIO O6/06
Fecha: 12/Octubre/2006.
Hora de inicio: 18:40. Hora de término: 19:30.

NOTA:
Esta sesión estaba programada básicamente para que los alumnos respondieran al cuestionario de evaluación de mi desempeño docente.

Decidí ocupar parte de la clase para resumir lo expuesto hasta ese momento y procurar clarificar aun más, el sentido de las sesiones de trabajo; también, para dialogar con ellos acerca de mi desempeño docente.

Las actividades fueron básicamente las siguientes:

-Resumen de las clases hecho por algunos alumnos, realizado frente a grupo de manera verbal y guiado por mí.
-Breve explicación de los procesos y resultados de las clases, con relación al objetivo general de las sesiones de trabajo.
-Explicación del contenido de la tarea "¿Está bien proporcionada Britney Spears?" y su relación con el lenguaje de la naturaleza.
-Discusión con los alumnos acerca de mi desempeño docente.

Debido al tipo de actividades realizadas en esta sesión y a su brevedad, incluiré solamente las observaciones y reflexiones que considero relevantes:

OBSERVACIONES
Me pareció que el hecho de que fueran los alumnos quienes hicieron el resumen, logró, al menos, activar a los demás para que reflexionaran un poco sobre lo hecho hasta entonces. Fue grata la respuesta de los expositores, ya que aunque en ciertos momentos mi guía resulto necesaria, fueron capaces de explicar adecuadamente los temas de clase. Procuré con la explicación-resumen que di, sintetizar las ideas principales asociadas con el objetivo de clase. Pienso que esta era necesaria, aunque parece que hicieron falta otras actividades y estrategias concretas realizadas por los alumnos, para consolidar lo visto hasta entonces; esto es: hice énfasis en la importancia de las matemáticas para describir el fenómeno del péndulo, en la validez del modelo matemático y en la importancia del modelo de matematización, pero no tengo evidencias concretos y más amplias acerca de la comprensión y dominio de los temas por parte de los alumnos. Observé que un tema tan rico como es la "proporción áurea" fue escasamente expuesto por mí, debido en parte al tiempo limitado, pero también a la planeación y conocimientos insuficientes.
REFLEXIONES
Dado que en las observaciones aproveché para reflexionar sobre las actividades de la clase, ahora quiero exponer algunas reflexiones sobre el diálogo que pretendí realizar con los alumnos: Parto del siguiente supuesto: cualquier instrumento para conocer la opinión de los alumnos acerca de mi desempeño, tiene un margen de error o incertidumbre, pero también de certeza y claridad; por lo tanto, considero que el diálogo directo y abierto con ellos, es un instrumento más que contribuye a la mejor comprensión de lo que somos y lo que debemos ser o modificar. Me satisfizo que tuvieran confianza para compartir su opinión, a pesar de la crítica –la principal– más frecuente hacia mí: mi "falta de carácter" para "controlar" al grupo. Me satisfizo aun más, la opinión de varios alumnos en el sentido de que mi desempeño les pareció adecuado. Sin duda, seguiré practicando este ejercicio de reflexión y diálogo conjunto entre l@s alumn@s y yo.

Bibliografía

- Alsina, C. (2007). “Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes”. *Revista Iberoamericana de Educación*, (43), pp. 85-101.

- Altshuler, J. (2002). *A propósito de Galileo*. Colección “La ciencia para todos, 190”. México: Fondo de Cultura Económica.

- Álvarez G., J. L. y Posadas V., Y. (2003). “La obra de Galileo y la conformación del experimento en la física”. *Revista Mexicana de Física, 49*(1), pp. 61-73.

- Baquero, R. (2002). “Del experimento escolar a la experiencia educativa. La transmisión educativa desde una perspectiva psicológica situacional”. *Perfiles Educativos, 24* (96-97), pp. 57-75.

- Barot, M. (2005a). *Un paseo a hiperbolia*. México: Centro de Investigación en Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana.

- Barot, M. (2005b). *Breviario de la didáctica de la matemática*. [en línea]. Recuperado en (diciembre de 2009) de: http://www.matem.unam.mx/~barot/articles/didactica2.pdf

- Bautista, R., Martínez J., Rafael y Miramontes, Pedro (Coords.). (2004). *Las matemáticas y su entorno*. México: Siglo XXI editores.

- Bell, E. (1985). *Historia de las matemáticas* (2ª ed.). México: Fondo de Cultura Económica.

- Cañon, C. (1993). *La matemática: creación y descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontificia Comillas.

- Díaz Barriga, A. (1998). “La investigación en el campo de la didáctica. Modelos históricos”. *Perfiles Educativos*, 20(79-80), pp. 5-29.

- Díaz Barriga, F. (1996). *Enseñanza situada: vínculo entre la escuela y la vida*. México: Mc Graw Hill.

- Díaz Barriga, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista* (2ª. ed.). México: McGraw Hill.

- Euclides, de Alejandría. (1944). *Elementos de geometría, precedidos de los elementos de geometría*. Vers. Directa, introducciones y notas por Juan David Garcia Bacca. Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Mexicana. México, UNAM.

- Eves, H. (1969). *Estudio de las geometrías*. (Traducción al español por Francisco Paniagua). México: U. t. e. h. a.

- Galilei, G. (2003). *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*. (Tr. del italiano por José San Román Villasante). Buenos Aires: Losada.

- Galilei, G. (1981). *El ensayador*. (Tr. del italiano, prol. y notas por José Manuel Revuelta). Buenos Aires: Aguilar.

- García B., Francisco y Doménech B., Fernando. (1997). “Motivación, aprendizaje y rendimiento escolar”. *Revista Electrónica de Motivación y Emoción, 1*(0). Recuperada de http://reme.uji.es/articulos/pa0001/texto.html

- Giancoli, D. (2006). *Física: principios con aplicaciones* (Traducción de Víctor Campos Olguín, 6ª ed.). México: Pearson Educación.

- González U., Pedro Miguel. (2001). *Pitágoras: el filósofo del número*. Madrid: Nivola.

- Husserl, E. (1996). *La filosofía en la crisis de la humanidad europea* (2ª ed.). Valencia, España: Universidad de Valencia.

- López de Medrano, S. (1990). *Modelos matemáticos* (3ª ed.). México: Trillas.

- Núñez, J.C. y González-Pumariega, S. (1996). "Motivación y aprendizaje escolar". *Congreso Nacional sobre Motivación e Instrucción*. Actas, pp. 53-72.

- Onrubia, J., Rochera, Ma. J. y Barberà, E. (2001). *La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica*. En C. Coll, A.

- Marchesi, A. y J. Palacios (Comps.). *Desarrollo Psicológico y Educación 2. Psicología de la Educación Escolar* (pp.487-508). Madrid: Alianza Editoria.

- Ortega y Gasset, J. (1985). *En torno a Galileo y El hombre y la gente*. Colección "Sepan Cuantos…". México: Editorial Porrua.

- Strathern, P. (1999). *Pitágoras y su teorema*. España: Siglo XXI de España editores.

- Vaquero, J. M. (2003). *La nueva física. Galileo*. Madrid: Nivola.

- Wigner, E. (1960). "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. *Reading Materials"*. New Hampshire, USA: Mathematics Across the Curriculum at Dartmouth College. Recuperado de http://www.dartmouth.edu/~matc/MathDrama/reading/Wigner.html

- Xirau, R. (1998). *Introducción a la historia de la filosofía*. (13ª ed.). México: UNAM.