



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES "ARAGÓN"**

"ANÁLISIS ESTÁTICO DE UNA PLATAFORMA DE  
STEWART DE 6-UPS"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA

ÁREA: MECÁNICA

PRESENTAN:

ARMENTA RAMIREZ NOÉ

MIGUEL JIMÉNEZ MARCO

ASESOR:

M. en I. JOSÉ ANTONIO SOUZA JIMÉNEZ



ESTADO DE MÉXICO

JULIO 2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# ANÁLISIS ESTÁTICO DE UNA PLATAFORMA DE STEWART DE 6-UPS.

## Capitulado

1. **Generalidades**
  - 1.1 *Introducción*
  - 1.2 *Definiciones*
    - 1.2.1 Transformaciones
    - 1.2.2 Rotaciones
    - 1.2.3 Cambio de Base
    - 1.2.4 Matrices de rotación
    - 1.2.5 Cuerpo Rígido
    - 1.2.6 Transformaciones Principales
  
2. **Manipuladores Paralelos**
  - 2.1 *Antecedentes*
  - 2.2 *Plataforma de Stewart*
  - 2.3 *Tipos de juntas*
  - 2.4 *Configuraciones*
    - 2.4.1 *Configuración cúbica*
  
3. **Análisis Cinemático**
  - 3.1 *Análisis de Posición*
    - 3.1.1 Desarrollo de Cadenas Motrices
  - 3.2 *Solución numérica*
  
4. **Análisis Estático**
  - 4.1 *Antecedentes*
    - 4.1.1 Tipos de juntas
    - 4.1.2 Referencias para el análisis estático
  - 4.2 *Análisis Estático Empleando Torsores*
    - 4.2.1 Cuerpo 1i
    - 4.2.2 Cuerpo 2i
    - 4.2.3 Cuerpo 3i
    - 4.2.4 Cuerpo 4i
    - 4.2.5 Cuerpo 5i
  - 4.3 *Solución Estática*
  
5. **Conclusiones**
  
6. **Apéndice**

# CAPITULO 1. GENERALIDADES

En este capítulo se presentan los aspectos teóricos generales del tema a desarrollar, de acuerdo a los conocimientos de la ingeniería mecánica aplicados en el campo de estudio de las plataformas paralelas.

## 1.1 Introducción

La palabra robot se introdujo en la lengua inglesa en 1921 con el drama satírico R.U.R. de Karel Capek (Rossum Universal Robots). Los robots básicamente son maquinas que asemejan a los seres humanos pero que trabajan sin descanso. Inicialmente, los robots se fabricaron como ayudas para sustituir a los operarios humanos.

Los primeros trabajos que condujeron a los primeros robots industriales de hoy en día se remontan al periodo que siguió inmediatamente a la segunda guerra mundial. Durante los años finales de la década de los 40's, comenzaron programas de investigación en Oak Ridge y Argonne National Laboratories para desarrollar manipuladores mecánicos controlados de forma remota para manejar materiales radiactivos. Estos sistemas eran del tipo Maestro-esclavo, diseñados para reproducir fielmente los movimientos de mano y brazos realizados por un operario humano. A mediados de los años 50, el acople mecánico se sustituyó por sistemas eléctricos e hidráulicos en manipuladores tales como Handyman en general, el General electric y el minotaur I, construido por General Mills. [1]

En términos generales, el sistema de un robot se compone de un sistema de control el cual incluye bucles de realimentación de la alimentación suministrada por los sensores internos que a su vez obedecen a ciertos movimientos del entorno, miden el estado de la estructura mecánica y, en particular, giros o desplazamientos relativos entre articulaciones, velocidades, fuerzas y pares. Se compone también de sensores externos que permiten dotar de sentidos al robot. Los sistemas de percepción sensorial hacen posible que un robot pueda adaptar automáticamente su comportamiento en función de las variaciones que se producen en su entorno, haciendo frente a las situaciones imprevistas. Para ello el sistema de control del robot incorpora bucles de realimentación sensorial del entorno, generando automáticamente acciones en función de la comparación de dicha información sensorial con patrones de referencia.

De acuerdo a las variantes de robots que existen, los podemos clasificar como manipuladores, móviles y autónomos y telerrobotica. Los robots manipuladores son, esencialmente, brazos articulados, generalmente son cadenas cinemáticas abiertas formadas por un conjunto de eslabones o elementos de la cadena interrelacionados

---

<sup>1</sup> González Lee, Fu. "Robótica: control, detección, visión e inteligencia", México 1988, Ed. McGrawHill. pp. 4 y 5

mediante articulaciones o pares cinemáticos los cuales permiten el movimiento relativo entre los sucesivos eslabones. Los robots móviles que son vehículos que generalmente emplean diferentes tipos de locomoción que les confieren características y propiedades diferentes con respecto a la eficiencia energética, dimensiones, cargas útiles y maniobrabilidad, su locomoción puede darse por ruedas, por medio de orugas que son largas pistas de deslizamiento y mediante patas. Y los robots automáticos los cuales son máquinas capaces de percibir, modelar el entorno, planificar y actuar para alcanzar objetivos sin la intervención, o una intervención humana muy pequeña. [2]

En materia de robots y manipuladores podemos recalcar que existen diferencias entre ellos; a grandes rasgos el robot es aquel mecanismo que para realizar sus movimientos utiliza motores eléctricos y que sabe en qué posición se encuentra en cada momento por medio de sus traductores de posición. Permite ir a cualquier punto del espacio dentro del campo de trabajo y utilizar diferentes velocidades dentro de un mismo desplazamiento. Por otra parte el manipulador es aquel mecanismo que para realizar sus movimientos utiliza cilindros neumáticos y que solo conoce la posición inicial y posición final de cada uno de los ejes de desplazamiento (x, y, z) por medio de detectores de posición por lo tanto podemos decir que un manipulador es un mecanismo utilizado bajo control humano para manipular materiales sin establecer un contacto directo.[3]

Los manipuladores seriales son por mucho el manipulador industrial más común, ya que por lo general presentan una estructura en forma de brazo mecánico, una cadena en serie con eslabones rígidos unidos por medio de juntas formando así un “hombro”, “un codo” y una “muñeca”.

Su principal ventaja es su amplio espacio de trabajo dado su volumen y el espacio en la superficie que puede ocupar.

Como principal desventaja tenemos su poca rigidez y el hecho de que en ocasiones tienen que mover gran peso y la serie de actuadores que lo conforman a veces no lo soporta, (figura 1-1).

---

<sup>2</sup> Ollero Bartulone, Anibal. “Robótica: Manipuladores y robots móviles”, México 2001, Ed. Marcombo, pp. 2-4

<sup>3</sup> [http://grupos.emagister.com/documento/orientacion\\_basica\\_de\\_robot/22853-528244](http://grupos.emagister.com/documento/orientacion_basica_de_robot/22853-528244)

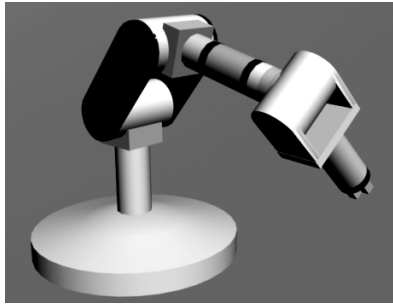


Figura 1-1 Manipulador serial

Los manipuladores paralelos son un conjunto de mecanismos articulados cuyo movimiento es similar entre ellos, tal movimiento es generado tanto en su base como en dichos mecanismos, su característica de paralelismo se opone a la de un manipulador serial y esto es que la punta del efector (o mano) o su enlace (o brazo) va conectado a otra base en un numero de cadenas separadas e independientes, las cuales trabajan en paralelo (usualmente 3 o 6 cadenas); el termino paralelo es usado en sentido topológico dada su geometría; y sus cadenas que actúan juntas, pero no se caracteriza por que sus cadenas se encuentren alineadas (Figura 1-2).

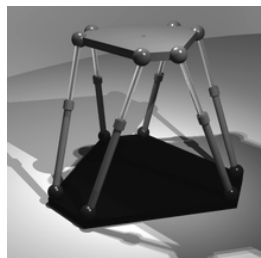


Figura 1-2 Manipulador paralelo

Podemos encontrar básicamente tres tipos de manipulador móvil, los cuales son, con ruedas, tipo oruga, y mediante patas.

Los manipuladores con ruedas son la solución más simple y eficiente para conseguir la movilidad en terrenos suficientemente duros libres de obstáculos, permitiendo conseguir velocidades relativamente altas.

Estos manipuladores presentan una limitación significativa en el deslizamiento de impulsión. Dependiendo de las características del terreno puede presentarse también deslizamientos y vibraciones. Cabe mencionar que la locomoción mediante ruedas es poco eficiente en terrenos blandos.

Este tipo de manipuladores (figura 1-3) emplean diferentes características de locomoción mediante ruedas que les confieren propiedades diferentes respecto a la eficiencia energética, dimensiones, cargas útiles y maniobrabilidad.



Figura 1-3 Manipulador móvil de locomoción por ruedas

El siguiente tipo de manipulador, es el tipo oruga (Figura 1-4), el cual consigue su impulsión mediante pistas de deslizamiento. De forma más precisa las pistas actúan de forma análoga a ruedas de gran diámetro. La locomoción mediante pistas de deslizamiento es útil en navegación “campo a través” o en terrenos irregulares, en los cuales presenta un buen rendimiento. En este caso, la impulsión esta menos limitada por el deslizamiento y la resistencia al desgaste es mayor.

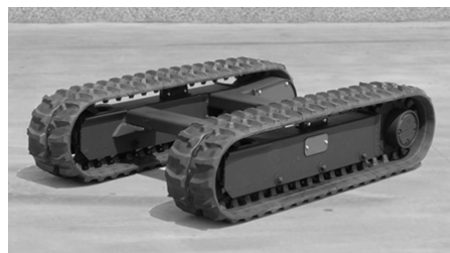


Figura 1-4 Manipulador móvil de locomoción por pistas de deslizamiento

Por último, el manipulador que logra su locomoción mediante patas (figura 1-5), permite aislar el cuerpo del terreno empleando únicamente puntos discretos de soporte. Es posible adaptar el polígono de soporte para mantener la estabilidad y pasar sobre obstáculos. Por consiguiente, tiene mejores propiedades que las ruedas para atravesar terrenos difíciles los cuales presenten obstáculos. Así mismo, mediante patas es posible conseguir movilidad en todas direcciones. La complejidad de los mecanismos en los robots con patas es mayor, así como el consumo de energía en la locomoción. La configuración más común es la de seis patas, aunque existen también las configuraciones de ocho patas.

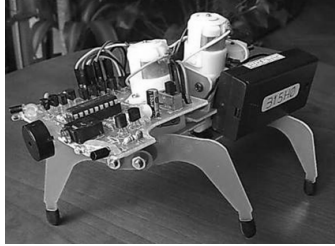


Figura 1-5 Manipulador móvil de locomoción por patas

En cuanto a los manipuladores móviles, podemos recalcar que es muy común, que les sea acoplado un manipulador serial, o un paralelo, para realizar tareas más versátiles, tal y como se muestra en la figura 1-6. Estos sistemas combinan las ventajas del manipulador móvil con la del manipulador acoplado, por lo cual reduce sus desventajas. Y de esta manera, el sistema extiende su área de trabajo mediante la plataforma móvil mientras que el manipulador acoplado ofrece varias funcionalidades adicionales.

Sus grados de libertad extra proveen al usuario con más opciones, sin embargo la operación tiende a ser difícil por que consta de una amplia variación de grados de libertad y tan es así que puede trabajar hasta en entornos irregulares. [4]



Figura 1-6 Manipulador móvil con un brazo acoplado

### 1.1.1 Plataforma de Stewart como un manipulador paralelo.

En el presente trabajo, se realiza el análisis estático de un manipulador paralelo espacial, la plataforma de Stewart, cuya estructura cinemática es 6-UPS ya que consta de 6 cadenas cinemáticas que se hacen funcionales por medio de tres tipos de juntas, de acuerdo a sus abreviaturas en ingles (Universal, Prismatic, Spherical), junta universal, prismática y esférica. Con el objetivo de obtener el modelo matemático que nos permita predecir su comportamiento.

---

<sup>4</sup> Ollero Bartulone, Anibal. "Robótica: Manipuladores y robots móviles", México 2001, Ed. Marcombo, pp. 28-35



Es importante señalar que dicho estudio es válido siempre y cuando se trate de un caso cuasi estático, partiendo de este principio los resultados obtenidos nos permitirán hacer un estimado de los esfuerzos que se generan en el mecanismo y de esta forma diseñar cada una de las partes que lo integran.

### **1.1.2 Metodología**

La estructura de la plataforma de Stewart se establece por medio de dos placas de forma triangular, unidas entre sí por medio de seis cadenas cinemáticas idénticas entre sí, y conectadas de forma entrelazada con el fin de sostener ambas placas de manera equilibrada y equidistante, y de esta manera obtener los movimientos y rigidez deseados.

El análisis de dicho manipulador se hace por medio del análisis vectorial de transformaciones homogéneas para determinar la posición de cada una de las partes de la cadena cinemática, así como de las placas triangulares de acuerdo a los movimientos que se le puedan dar dentro de las aplicaciones reales; para ello es necesario realiza el análisis Cinemático, a fin de comprender los movimientos, gracias a los cuales varían las fuerzas durante una trayectoria dada.

### **1.1.3 Objetivo**

Crear el modelo matemático de una plataforma de Stewart 6UPS para poder predecir su comportamiento mecánico y conocer sus propiedades estáticas dentro de las aplicaciones reales.

## **1.2 Definiciones**

### **1.2.1 Transformaciones**

Una transformación es una función la cual a su vez es una relación entre elementos de dos conjuntos. Un conjunto inicial llamado Dominio y un conjunto Final llamado Imagen, una función asigna a cada elemento del dominio un elemento de la Imagen

Para que una relación sea función se deben cumplir dos condiciones

Una función es una relación entre dos variables numéricas, habitualmente las denominamos  $x$  e  $y$ ; a una de ellas la llamamos variable dependiente pues depende de

los valores de la otra para su valor, suele ser la  $y$ ; a la otra por tanto se la denomina variable independiente  $y$  suele ser la  $x$ .

Una función es como una máquina: tiene una entrada y una salida.

Y lo que sale está relacionado de alguna manera con lo que entra.

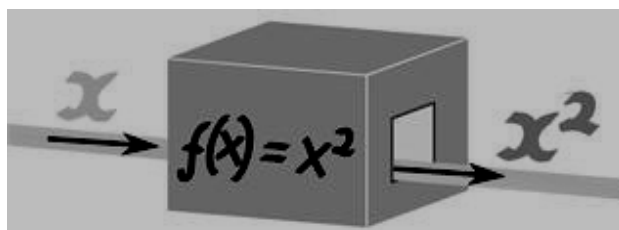


Figura 1-7 Representación de una función, y su relación de entrada y salida

Así que con la función " $f(x) = x^2$ ", una entrada de 4 da una salida de 16. De hecho podemos escribir  $f(4) = 16$ .

Por lo tanto, lo que nos interesa analizar aquí es como obtener la transformación de una función.

La palabra transformación significa "cambio". En geometría, una transformación cambia la posición de una forma en un plano de coordenadas. Lo que realmente significa es que una forma es pasar de un lugar a otro. Hay tres transformaciones básicas: reflexión, traslación y rotación

La reflexión tiene lugar cuando una forma se voltea al revés de una línea y se enfrenta a la dirección opuesta. Debido a la forma termina frente a la dirección contraria, parece que se refleja, como en un espejo. De ahí el nombre de REFLEXIÓN.



Figura 1-8 Reflexión

La traslación tiene lugar cuando se mueve un cuerpo en una dirección de un lugar a otro. Cuando ves el movimiento forma, parece ser deslizante. A menudo verá una flecha debajo de la forma para mostrar en qué dirección se está moviendo pulgadas

**W**

**W**

Figura 1-9 Traslación

Cuando ves el movimiento T, se convierte, o gira en su lugar de modo que ahora parece que es por su lado. Casi parece una mano reloj girando alrededor de la cara de un reloj.



Figura 1-10 Movimiento T

### 1.2.3 Cambio de Base

Una matriz de rotación es aquella que define la orientación de un eje coordenado con respecto a otro, y sirve para transformar las coordenadas de un vector en un sistema a las del otro. También recibe el nombre de matriz de cosenos directores. Es fácil de comprobar que se trata de una matriz ortonormal, tal que  $R^{-1} = R^T$ .

En el caso de dos dimensiones, la orientación viene definida por un único parámetro independiente. Si se considera la posición relativa de un sistema “UV” con un origen 0, girando un ángulo  $\alpha$  sobre otro sistema “XY”, también con origen =, tras realizar los correspondientes productos escalares, la matriz R será de la forma:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Para el caso de que  $\alpha = 0$ , en el que los ejes coordenados de ambos sistemas coinciden, la matriz R corresponderá a la matriz unitaria.

Las matrices de rotación son el método más extendido para la descripción de orientaciones debido principalmente a la comodidad que proporciona el uso del álgebra matricial.

Supóngase que se tiene en el plano 2 sistemas de referencia XY y UV ambos con origen en 0, siendo el sistema XY el de referencia fijo y el sistema V el móvil solidario al objeto(figura) los vectores unitarios de los ejes coordenados del sistema XY son  $i_x, j_y$ , mientras que los del sistema UV son  $i_u, j_v$ .

Un vector  $V$  del plano se puede representar en ambos sistemas como:

$$P_{xy} = [P_x, P_y]^T = p_x i_x + p_y j_y$$

$$P_{uv} = [P_u, P_v]^T = p_u i_u + p_v j_v$$

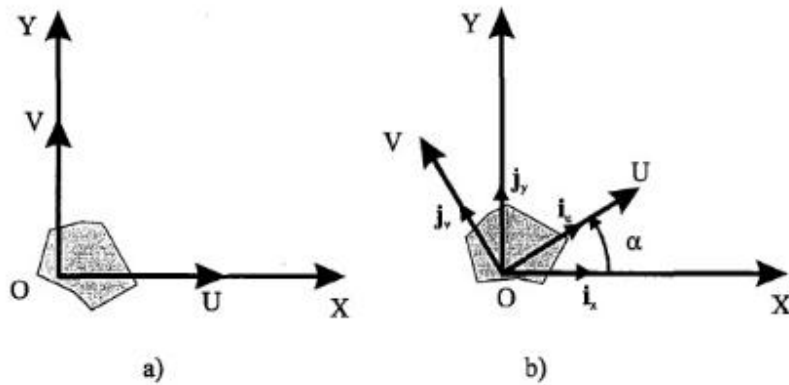


Figura I-II Rotación en dos dimensiones

En un espacio tridimensional, el razonamiento a seguir es similar. Supóngase los sistemas  $XYZ$  y  $UVW$ , coincidentes en el origen  $O$ , siendo el  $XYZ$  el sistema de referencia fijo, y el  $UVW$  el solidario al objeto cuya orientación se desea definir. Los vectores unitarios del sistema  $XYZ$  serían  $i_x, j_y$  y  $k_z$ , mientras que los del  $UVW$  serán  $i_u, j_v, k_w$ .

Un vector  $p$  del espacio podrá ser referido a cualquiera de los sistemas de la siguiente manera: <sup>[5]</sup>

$$P_{xyz} = [P_x, P_y, P_z]^T = p_x i_x + p_y j_y + p_z k_z$$

$$P_{uvw} = [P_u, P_v, P_w]^T = p_u i_u + p_v j_v + p_w k_w$$

<sup>5</sup> Barrientos, Antonio. "Fundamentos de robótica", España 1997, Ed. McGrawHill, pp. 53 - 55  
Consultado en línea desde <http://es.scribd.com/doc/39632243/Fundamentos-de-robotica>

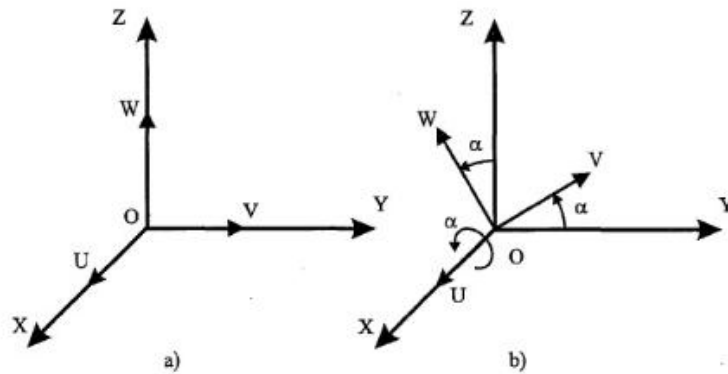


Figura 2-12 Rotación en tres dimensiones

## Matrices homogéneas.

La representación mediante coordenadas homogéneas de la localización de sólidos en un espacio dimensional se realiza a través de coordenadas de un espacio (n+1) dimensional. Es decir, un espacio n-dimensional se encuentra representado en coordenadas homogéneas por (n+1) dimensiones, de tal forma que un vector  $p(x,y,z)$  vendrá representado por  $p(wx,wy,z,w)$ , donde w tiene un valor arbitrario y representan un factor de escala.

A partir de la definición de las coordenadas homogéneas surge inmediatamente el concepto de matriz de transformación homogénea. Se define como matriz de transformación homogénea T a una matriz de dimensión 4\*4 que representa la transformación de un vector de coordenadas homogéneas de un sistema de coordenadas a otro.

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & p_{3 \times 1} \\ f_{1 \times 3} & w_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{escalado} \end{bmatrix}$$

Así pues, se puede considerar que una matriz homogénea se haya compuesta por cuatro submatrices de distinto tamaño: una submatriz  $R_{3 \times 3}$  que corresponde a una matriz de rotación; una submatriz  $p_{3 \times 1}$  que corresponde al vector de traslación; una submatriz  $f_{1 \times 3}$  que representa una transformación de perspectiva, y una submatriz  $w_{1 \times 1}$  que representa un escalado global. En robótica generalmente solo interesara conocer el valor de  $R_{3 \times 3}$  y de  $p_{3 \times 1}$ , considerándose las componentes  $f_{1 \times 3}$  nulas y la de  $w_{1 \times 1}$  la unidad, aunque más adelante se estudia su utilidad en otros campos. Al tratarse de una matriz 4x4, los vectores sobre los que se aplique deberán contar con 4 dimensiones, que serán las coordenadas homogéneas del vector tridimensional de que se trate.

Si como se ha mencionado, se considera la transformación de perspectiva nula y el escalado global unitario, la matriz homogénea T resultara de la siguiente forma:

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & p_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que representa la orientación y posición de un sistema **O'UVW** rotado y trasladado con respecto al sistema de referencia **OXYZ**. Esta matriz sirve para conocer las coordenadas  $r_x, r_y, r_z$  del vector r en el sistema **OXYZ** a partir de sus coordenadas  $r_u, r_v, r_w$  en el sistema **O'XYZ**:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

En resumen, una matriz de transformación homogénea se puede aplicar para:

1. Representar la posición y orientación de un sistema girado y trasladado **O'UVW** con respecto a un sistema fijo de referencia **oxyz**, que es lo mismo que representar una rotación y traslación realizada sobre un sistema de referencia.
2. Transformar un vector expresado en coordenadas con respecto a un sistema **O'UVW**, a su expresión en coordenadas del sistema de referencia **OXYZ**.
3. Rotar y trasladar un vector con respecto a un sistema de referencia fijo **OXYZ**.<sup>[6]</sup>

## 1.2.4 Matrices de rotación

Matrices que nos indican los giros presentes durante el movimiento, indicándonos a su vez respecto a que eje se tiene cada uno de los giros del sistema; tales giros están representados por un carácter del alfabeto griego, generalmente la letra theta ( $\theta$ ) cuando se presenta un movimiento de ángulos variables, que cambian con respecto al tiempo, y un subíndice indicando una de las letras (x, y, z) según sea el eje respecto al cual se tiene el giro.

<sup>6</sup> <http://148.202.12.20/~cin/robotic/tarease/dh/mhomogeneas.htm>

Los modelos matemáticos de las matrices de rotación se indican como sigue:

$$T_{Z4}(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & 0 \\ 0 & \text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{Z5}(\theta_y) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \text{sen } \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{Z6}(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Ángulos de Euler

Para la representación de orientación en un espacio tridimensional mediante una matriz de rotación es necesario definir nueve elementos. Aunque la utilización de las matrices de rotación presente múltiples ventajas, existen otros métodos de definición de orientación que hacen únicamente uso de tres componentes para su descripción. Este es el caso de los llamados ángulos de Euler.

Todo sistema **UVW** solidario al cuerpo cuya orientación se quiere describir puede definirse con respecto al sistema **XYZ** mediante 3 ángulos:  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , denominados ángulos de Euler. Girando sucesivamente el sistema **XYZ** sobre unos ejes determinados de un triedro orto normal los valores de  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  se obtendrá el sistema **UVW**. Es necesario, por tanto, conocer además de los valores de los ángulos, cuales son los ejes sobre los que se realizan los giros. Tal y como se muestra en la figura:

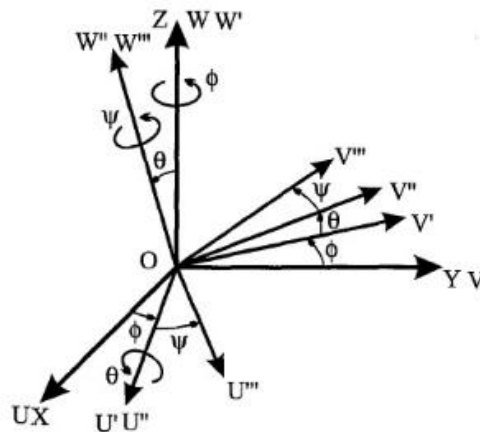


Figura 3-13 Ángulos de Euler

## Ángulos de Euler ZXZ

Es una de las representaciones más habituales entre las que se realizan los giros sobre los ejes previamente girados. Se les suele asociar con los movimientos básicos de un giroscopio. Si se parte de los sistemas  $XYZ$  y  $UVW$  inicialmente coincidentes, se puede colocar al sistema  $UVW$  en cualquier orientación siguiendo los siguientes pasos.

1. Girar el sistema  $UVW$  un ángulo  $\varphi$  con respecto al eje  $Z$  convirtiéndose así en  $U'V'W'$
2. Girar el sistema  $U'V'W'$  un ángulo  $\theta$  con respecto al eje  $U'$  convirtiéndose así en el  $U''V''W''$ .
3. Girar el sistema  $U''V''W''$  un ángulo  $\psi$  con respecto al eje  $W''$  convirtiéndose finalmente en el  $U'''V'''W'''$ .

Es importante que estas operaciones se realicen en la secuencia especificada, pues las operaciones de giros consecutivos sobre ejes no son conmutativas. [7]

### 1.2.5 Cuerpo Rígido

Un cuerpo rígido es aquel cuya forma no varía pese a ser sometido a la acción de fuerzas externas. Eso supone, desde un punto de vista más profundo, que la distancia entre las diferentes partículas que lo conforman resulta invariable a lo largo del tiempo.

El cuerpo rígido es el modelo ideal, que se utiliza para representar a aquellos cuerpos sólidos que no presentan deformación alguna, con el fin de realizar estudios de cinemática y de mecánica. Sin embargo, en la práctica, todos los cuerpos se deforman, aunque sea de forma mínima, al ser sometidos al efecto de una fuerza externa. Por lo tanto, las máquinas y las estructuras reales nunca pueden ser consideradas absolutamente rígidas. [8]

### Estática del cuerpo rígido.

Cuando un cuerpo está sometido a un sistema de fuerzas, tal que la fuerza resultante es nula, esto es, que la resultante de todas las fuerzas y el momento resultante sean cero, entonces el cuerpo está en equilibrio. Esto, físicamente, significa que el cuerpo, a menos que esté en movimiento uniforme rectilíneo, no se trasladará ni podrá rotar bajo la acción de ese sistema de fuerzas. Las posibilidades de movimiento que tiene un cuerpo o los

---

<sup>7</sup> Barrientos, Antonio. "Fundamentos de robótica", España 1997, Ed. McGrawHill, pp. 57 - 59  
Consultado en línea desde <http://es.scribd.com/doc/39632243/Fundamentos-de-robotica>

<sup>8</sup> R.C. Hibbeler, "Ingeniería mecánica, Estática", México 1995, 6ª ed, Ed. Pearsons Education, p. 5



grados de libertad, son seis: tres de traslación, en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y tres de rotación, alrededor de los mismos ejes.

Como en general, los cuerpos que son objeto de estudio en ingeniería están unidos, soportados, en contacto con otros, las posibilidades de movimiento en traslación y rotación son menores, esto es, disminuyen los grados de libertad. Es, entonces, importante conocer qué tipo de restricción ofrecen los apoyos, uniones o contactos que tiene el cuerpo objeto del análisis. Las restricciones a que es sometido un cuerpo, se manifiestan físicamente por fuerzas o pares (momentos) que impiden la traslación o la rotación respectivamente y se les conoce como reacciones.

El estudio del equilibrio de un cuerpo rígido consiste básicamente en conocer todas las fuerzas, incluidos los pares que actúan sobre él para mantener ese estado. Estas fuerzas son las fuerzas aplicadas por contacto, el peso y las reacciones de los apoyos. Las fuerzas aplicadas y el peso en general son conocidos, entonces el estudio del equilibrio consiste básicamente en la determinación de las reacciones. También puede ser objeto de estudio las condiciones geométricas que se requieren para mantener en equilibrio el cuerpo. Para determinar las reacciones que se ejercen sobre un cuerpo es importante entender las restricciones que otros cuerpos le imponen al movimiento. La cuestión es fácil, si un cuerpo restringe la traslación en una dirección, por ejemplo en  $x$ , éste ejercerá una fuerza en esta dirección; si impide la rotación alrededor de un eje, ejercerá un par en la dirección de ese eje.

### 1.2.6. Transformaciones principales

Son aquellas presentadas de una forma matricial, las cuales nos serán de gran utilidad para plantear la ecuación de nuestro modelo cinemático, la cual a su vez, es la que nos representará cada uno de los movimientos de la plataforma dentro de un espacio vectorial. Dichas transformaciones se obtendrán de la manera siguiente:

Los ejes de movimiento de la plataforma son:  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\alpha$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ . Acordado ya, que el movimiento en un espacio vectorial se presenta por medio de 3 traslaciones, uno en cada una de las tres dimensiones, y 3 ángulos, también, uno respecto a cada uno de los ejes, tomamos en cuenta que  $x$ ,  $y$ ,  $z$  son de posicionamiento, y  $\alpha$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  son de orientación. Utilizando las bases locales de cada eje de rotación y traslación, se plantean las siguientes ecuaciones de lazo matricial

$$T_{Z1}(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{Z2}(Y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{Z3}(Z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{Z4}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & 0 \\ 0 & \text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{Z5}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \text{sen } \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{Z6}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cabe mencionar que el robot motivo de esta tesis, se compone de seis cadenas cinemáticas, las cuales se van a analizar teniendo en cuenta que son idénticas entre sí, y con sus movimientos correspondientes de acuerdo a las ecuaciones de lazo ya mencionadas según la orientación y el posicionamiento que sea requerido según cada cambio de base.

# CAPITULO 2. MANIPULADORES PARALELOS

## 2.1 Antecedentes

El diseño de manipuladores paralelos se remonta a varias décadas atrás y se ha ido realizando de acuerdo a los intereses de algunos científicos por la automatización, por el uso de maquinas como una extensión del hombre, entre varios otros motivos que conllevaron a ir mejorando los manipuladores para su aplicación en la robótica.

La primera patente registrada basada en una estructura paralela data del año 1931 a cargo de James E. Gwinett. Su funcionamiento era el de efectuar una simulación de vuelo mediante un movimiento de una plataforma. En realidad nunca se construyo pero se le reconoce como el primer diseño registrado de un mecanismo paralelo. El primer robot paralelo que fue ocupado para una aplicación fue el de William L.V. Pollard, conceptualizado para aplicación de pintura por dispersión en 1938.

En 1947 fue construida la estructura paralela que se popularizó en la industria y cuyo diseño se adjudica a Eric Gough. Su construcción, un hexápodo de forma octagonal, fue empleado para efectuar pruebas de resistencia bajo distintas combinaciones de carga a llantas de aviones.

En 1962, cuando Gough y Witehall diseñaron un sistema paralelo para ser usado en una máquina de pruebas universales. Stewart en 1965 diseñó un manipulador de plataforma para ser usado en simuladores de vuelo. Hunt en 1983 realizó un estudio de la estructura cinemática de los manipuladores paralelos. Desde entonces se han venido desarrollando numerosos estudios por diversos investigadores, entre los más recientes destacan J.P. Merlet y L.W. Tsai.<sup>9</sup>

Una característica destacable de los manipuladores paralelos es la alta rigidez, la cual está directamente relacionada con la precisión en el posicionamiento. El primer estudio relevante de rigidez lo realizo Gosselin en 1990 en la elaboración de un método analítico, Ceccarelli y Carbone en 2002 realizaron un estudio de rigidez para el robot CaPaMan, y en 2005 estos dos autores presentaron un estudio analítico y experimental de la rigidez de la plataforma de Gough-Stewart. En 2002 Yu-Wen Li presenta un análisis de la plataforma de Gough-Stewart, en el cual divide el manipulador en estructura fija y estructura móvil analizándolas por separado a la rigidez del robot, utilizando el método de elementos finitos para la estructura fija, y la matriz jacobiana cinemática para la estructura móvil.

---

<sup>9</sup> Ricardo Lopez, Yusniel. "Robots paralelos de 6 grados de libertad", pp. 3, 4  
Consultado en línea desde <http://www.docstoc.com/docs/526459/Robots-paralelos-de-6-gdl>

Los manipuladores pueden ser clasificados de muchas formas. Por citar algunas, podemos mencionarlas de acuerdo a su forma, su volumen de trabajo, su área a desempeñar y su estructura. Esta última se puede dividir en dos ramas: manipuladores seriales o de cadena cinemática abierta, y manipuladores paralelos o de cadena cinemática cerrada. Una cadena cinemática es la unión de eslabones conectados por articulaciones. Se dice que es abierta cuando un eslabón se encuentra conectado con cualquier otro de una sola forma. Se dice cerrada cuando un eslabón se encuentra conectado por otro por al menos dos formas

El primer manipulador paralelo con actuadores giratorios fue propuesto por Hunt en el año 1983. Es un manipulador que se forma de una plataforma fija, sobre la cual van montados seis actuadores giratorios, y una plataforma móvil, unidas por medio de seis cadenas cinemáticas de tipo biela-manivela. Así mismo Hunt cita también dos posibles tipos de configuraciones: Cuando la plataforma móvil permanece inmóvil aunque se introduzca algún movimiento por alguno o varios actuadores, y otro cuando la plataforma móvil puede realizar pequeños desplazamientos aun que todos los actuadores permanezcan inmóviles.<sup>10</sup>

El manipulador que nos interesa estudiar en esta tesis es el de la plataforma de Stewart, que es el manipulador paralelo más reconocido. Debido al funcionamiento de su estructura, a la cual la plataforma de Stewart debe su nombre, fue propuesta como un tema de interés particular en 1965, se convirtió en un tema de investigación popular de la robótica sólo en la década de 1980.

En la década de 1990, hubo un aumento constante en la investigación de interés en los estudios de manipuladores paralelos en general y la plataforma de Stewart, en particular, como se puede deducir a partir de las publicaciones en este estudio en revistas técnicas y actas de congresos relacionados con la robótica. Aparte de esto, la evolución de este estudio ha motivado la investigación en algunos temas asociados también.

## 2.2 Plataforma de Stewart

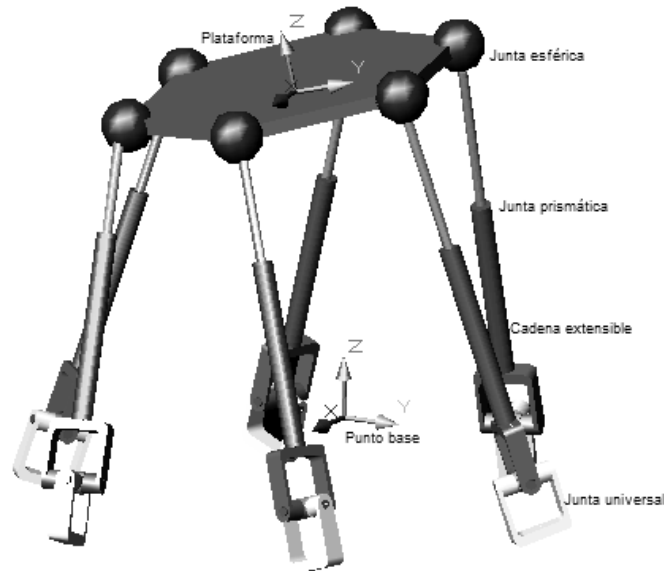
La estructura de manipulación conocida como la plataforma de Stewart tiene su origen en el diseño por Stewart basado en un mecanismo de 6 cadenas para simular condiciones de flote y generar movimiento global en el espacio. El mecanismo de Stewart consiste de seis conectores montados sobre una superficie plana en tres pares, distribuidas uniformemente en una plataforma superior. Los dispositivos se encuentran colocados de manera que proporcionan a este manipulador seis grados de libertad de los cuales tres son de rotación y tres son de traslación.<sup>11</sup>

---

<sup>10</sup> K.H. Hunt, "Trans. ASME, J. Mech". Transm. Automn Des. 105 (1983), pp 705-712.

<sup>11</sup> <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/404/40470402.pdf>

Esta plataforma es conocida también como plataforma de movimiento sinérgico, debido a que los movimientos se producen por una combinación de movimientos de varios de los lados en lo que sería una sinergia o interacción mutua, entre la forma en que los conectores se encuentran unidos.



Las plataformas de Stewart tienen su principal aplicación en la tecnología de la máquina-herramienta, la técnica de grúas, la investigación submarina, antena de posicionamiento por satélite, telescopios y cirugía ortopédica, pero es muy utilizado especialmente en la simulación de vuelo, en especial el llamado simulación de vuelo completo donde los 6 grados de libertad son de uso obligatorio.

La plataforma de Stewart es un diseño mecánico utilizado para el control de posición. Las cadenas están diseñadas con un cuerpo superior e inferior que se puede ajustar, de modo que cada pierna debe ajustarse en longitud.

La posición y orientación de la plataforma móvil varía en función de los extremos a los que las seis cadenas son ajustadas. La plataforma Stewart se puede utilizar para la posición de la plataforma en los tres grados de libertad de rotación y tres grados de libertad de traslación. En general la placa superior tiene forma relativamente triangular que gira 60 grados respecto a la placa inferior, permitiendo que las seis cadenas se muevan de manera equidistante aun moviéndose de manera independiente cada una de ellas.<sup>[12]</sup>

---

<sup>12</sup> M. Baret, in: Proc. AGARD Conf. 249, Piloted Aircraft Environment Simulation Techniques, 1978, pp. 22.1-22.8.

Entre sus ventajas puede recalcarse su capacidad de posicionamiento preciso, su gran rigidez y agarrotamiento, el cual provee una fuente importante de seguridad en la posición y operación del movimiento. Es compatible con una gran capacidad de carga, pues su diseño soporta grandes fuerzas de tensión y compresión sin involucrar fuerza de flexión no deseada. Todo esto gracias a que las fuerzas se concentran en un punto medio, o centro sobre la placa superior, a diferencia de los diseños en serie donde la carga es admitida sobre un solo brazo. [<sup>13</sup>]

## 2.3 Tipos de juntas.

### Juntas Cardán o Universales.

Con el fin de dar solución constructiva al ángulo variable entre la salida del cambio de velocidades (eje secundario) y el eje de transmisión se emplean las llamadas juntas universales; éstas permiten transmitir el movimiento y esfuerzo de giro entre ejes que forman un cierto ángulo.

Para aplicaciones en las que el eje secundario y el de transmisión formen un pequeño ángulo y con pequeñas variaciones nos podemos encontrar con una junta universal elástica, constituida por una serie de discos de tela cauchutada, unidos a los ejes por medio de horquillas de tres brazos. Reciben también el nombre de "articulaciones en seco". Se colocan siempre a la salida del secundario cuando existe tramo recto, lo que facilita la absorción de pequeñas desviaciones y filtra la transmisión de vibraciones entre el cambio y el eje de transmisión.

Una Junta Universal Cardan es un mecanismo de velocidad no constante, consistente en dos horquillas conectadas mediante una cruz a través de cuatro rodamientos (generalmente de agujas) en los que el anillo interior está formado por el mismo brazo de la cruz y el exterior por la caja del cojinete, como se ve en la figura precedente.

El uso habitual de la Junta Cardan consiste en la transmisión de movimiento y potencia entre dos ejes que se cortan. Su principal ventaja estriba en su bajo costo de fabricación, sencilla construcción y montaje, larga vida y escaso mantenimiento.<sup>14</sup>

---

<sup>13</sup> P. Watson, Electron. Aust. 46 (4) (1984) 12-17.

<sup>14</sup> "Cursos de mecánica eléctrica id Ad Del Automóvil" p. 151

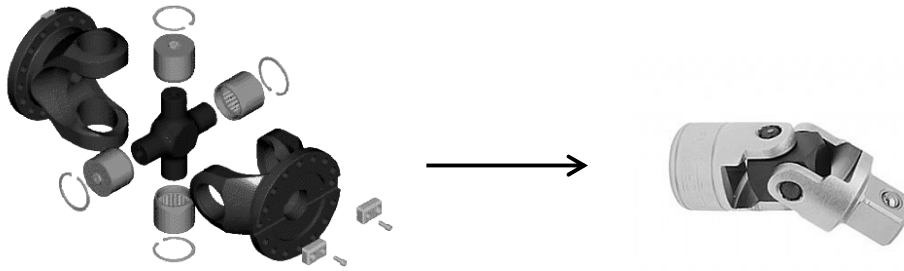


Figura 2.2 Junta universal.

### Junta prismática.

Permite solamente un desplazamiento axial. Las juntas de rotación y prismáticas son muy frecuentes en mecanismos concebibles en un plano. Mientras que las juntas cilíndricas y esféricas son más comunes en los mecanismos de movimientos espaciales o en tres dimensiones.



Figura 2.3 Junta prismática

### Junta empotrada.

El empotramiento es aquella coacción que impide todo tipo de movimiento. Están impedidos los desplazamientos en las direcciones de los ejes  $x$  e  $y$  así como el giro en el plano  $x, y$ , quedando, por tanto, inmovilizada la sección. La reacción se compone de una fuerza  $R$ , de componentes  $R_X$  y  $R_Y$ , y de un momento  $M$  con eje de giro perpendicular al plano. Un empotramiento equivale, pues, a tres incógnitas.



Figura 2-4 Junta empotrada

## Junta rotacional (o revoluta)

En la que 2 eslabones se encuentran atravesados por un eje imaginario de rotación que es perpendicular a los ejes de las dos uniones, y que pasa justo por la unión, y es alrededor de este eje que uno de los 2 eslabones rota mientras el otro permanece fijo.<sup>[15]</sup>

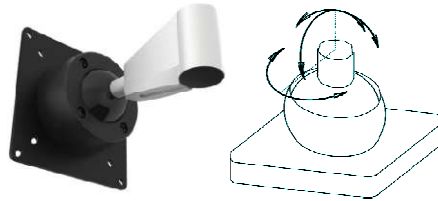


Figura 2-5 Junta rotacional

## 2.4 Configuraciones.

Existen diferentes tipos de articulaciones. Las más utilizadas en robótica son las que se indican a continuación. La articulación de rotación suministra un grado de libertad consistente en una rotación alrededor del eje de la articulación. Esta articulación es, con diferencia la más empleada.

En la articulación prismática el grado de libertad consiste en una traslación a lo largo del eje de la articulación.

En la articulación cilíndrica existen 2 grados de libertad: una rotación y una traslación.

La articulación planar está caracterizada por el movimiento de desplazamiento en un plano en medio de 2 placas.

Por último la articulación esférica combina 3 giros en 3 direcciones perpendiculares en el espacio los grados de libertad son el número de parámetros independientes que fijan la situación del órgano terminal. El número de grados de libertad suele coincidir con el número de eslabones de la cadena cinemática. Aunque hay casos en que existen 2 eslabones y dos articulaciones de un grado de libertad por tanto la cadena tan solo tiene un grado de libertad.

---

<sup>15</sup> Rico Martínez, José María. "Introducción a la cinemática de máquinas", Facultad de Ingeniería Mecánica, Eléctrica y Electrónica, Departamento de Ingeniería Mecánica, Salamanca, Gto. 36730, México, Julio 30, 2008. pp 5 y 6



La estructura típica de un manipulador consiste en un brazo compuesto por elementos con articulaciones entre ellos. En el último enlace se coloca un órgano terminal o efector final tal como una pinza, una plataforma o un dispositivo especial para realizar operaciones.

Dichas estructuras tienen diferentes propiedades en cuanto a espacio de trabajo y accesibilidad a posiciones determinadas.

La configuración cartesiana tiene tres articulaciones prismáticas, 3D o estructura PPP. La especificación de la posición de un punto se efectúa mediante las coordenadas cartesianas **XYZ**. Los valores que deben tomar las variables articulares corresponden directamente a las coordenadas que toma el extremo del brazo.

La configuración cilíndrica posee 2 articulaciones prismáticas y una de rotación 2D, 1G. La primera articulación es normalmente de rotación y la posición se especifica de forma natural en coordenadas cilíndricas.

Configuración polar esférica, es la que se caracteriza por 2 articulaciones de rotación y 1 prismática (2G, 1D o estructura RRP) en este caso las variables articuladas expresan la posición del extremo del tercer enlace en coordenadas polares.

La configuración angular es una estructura con 3 articulaciones de rotación (3G o RRR) la posición del extremo final se especifica de forma natural en coordenadas naturales partiendo de cero a A, de A a B y así sucesivamente.

## **Manipulador paralelo de Stewart de 6 grados de libertad.**

Este manipulador móvil tiene 6 grados de libertad, siendo posible moverse a lo largo de los ejes **x**, **y**, **z** (lateral, longitudinal y vertical), y las tres rotaciones debido a que consta de una configuración angular. La base y la plataforma móvil son conectadas a través de seis actuadores extensibles mediante articulaciones esféricas y universales, los cuales se accionan de manera independiente. Todo este conjunto se une en una cadena de tipo UPS denominado así por sus siglas en inglés Universal + Prismatic + Spherical.

A fin de simplificar el análisis directo de posición, la plataforma de Stewart puede descomponerse en dos manipuladores paralelos ensamblados en serie, uno para rotación y otro para traslación, y con ello es posible obtener la solución en forma cerrada.<sup>[16]</sup>

### **2.4.1 Configuración cúbica**

---

<sup>16</sup> K.H. Hunt, "Kinematic Geometry of Mechanisms", Clarendon Press, Oxford, 1978.

La topología de la Plataforma de Stewart es la llamada cúbica la cual se menciona que es la que presenta mayor rigidez respecto a otras topologías. En la figura 2-2 se aprecian los triángulos que representan las placas superior e inferior de dicha plataforma, las cuales están conectadas por medio de los actuadores que en la figura representan las aristas del cubo.

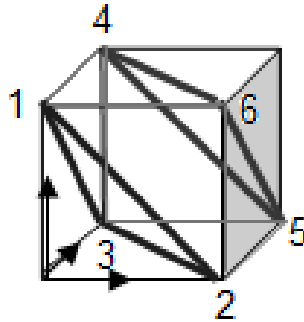


Figura 2-2 Esquema de la configuración cubica

Podemos notar que el triangulo inferior se forma en las vértices 1, 2 y 3 del cubo, y mientras tanto el triangulo superior lo tenemos dibujado con sus aristas unidas a las aristas 4, 5 y 6 del cubo. A partir de dichos triángulos, tenemos la base para formar las placas de nuestra plataforma de Stewart, a la cual le daremos un diseño que va de acuerdo a nuestros principios de estabilidad deseados, para que sea montada sobre un carro.

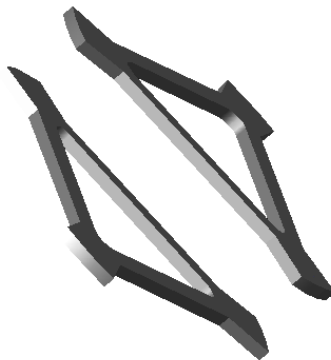


Figura 2-3 Placas de la Plataforma de Stewart de acuerdo a la configuración cubica

En la figura 2.4 se puede mostrar las placas ya unidas por medio de las 6 cadenas cinemáticas diseñadas de acuerdo a los principios de estabilidad mencionados, en estado de equilibrio estático.

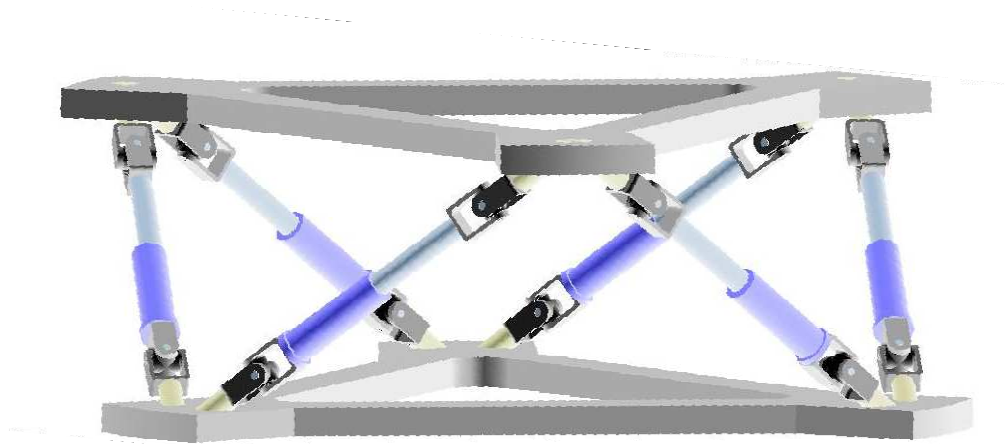


Figura 2-4 Esquema completo de la plataforma de Stewart

Dada la simetría del manipulador, el análisis cinemático se puede realizar a través de una sola cadena la cual es posible que actúe de forma análoga en las otras 5 sin afectar en planteamiento y la solución de las ecuaciones correspondientes.

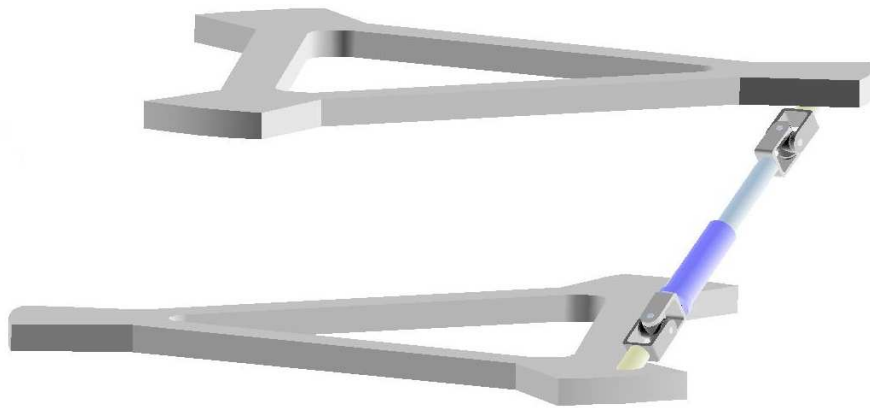


Figura 2-5 Placas de la Plataforma de Stewart con una sola cadena

# CAPITULO 3 ANÁLISIS CINEMÁTICO

## 3.1 Introducción

El análisis cinemático consiste en el estudio de la geometría del movimiento de la cadena cinemática, y de los cuerpos que la componen, sin tener en consideración las fuerzas que lo originan. Se desarrollará en este capítulo el análisis de posición y velocidad de la plataforma como un mecanismo espacial, para tener los parámetros requeridos de movimiento y angulaje en base a los cuales se realizará el análisis estático.

El primer paso consiste en determinar las variables que se requieren para generar el desplazamiento, para que de esta manera, podamos establecer la posición y la orientación de los eslabones del sistema. La plataforma se puede representar dentro de un diagrama de cuerpo libre como una cadena cinemática de eslabones unidos por juntas, y separado para su estudio en cinco cuerpos, dentro de los cuales se parte desde el primero, que se encuentra conectado en uno de sus extremos a la placa que proporciona el efecto final, estando conectada a un carro. La cinemática inversa se aplica para el análisis y el problema se resuelve empleando matrices de transformación homogéneas, aplicadas en el planteamiento matemático de un arreglo en paralelo, las expresiones algebraicas resultantes se generalizan empleando un índice  $i$  que tomara los valores de 1 al 6 para hacer referencia a cada base local correspondiente; por último se presentan las gráficas que describen el comportamiento de cada una de las cadenas cinemáticas con el propósito de especificar por medio de señales y puntos la trayectoria propuesta para la plataforma, se emplea un polinomio de quinto grado.

## 3.2 Análisis de posición

Para comenzar el análisis de posición de un cuerpo rígido que está en el espacio, se considera como un punto dentro del mismo cuerpo una base local, ubicándose con respecto a un sistema de referencia establecido sobre el cuerpo con respecto al otro marco de referencia; las matrices de transformación homogénea que se emplean en el sistema se definen como sigue:

$$T_{Z1}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_{Z2}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_{Z3}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En dicha ecuación, se representa un  $T_{Z1}$  el cual corresponde a la transformación lineal dentro del sistema de referencia  $T_{Z2}$  correspondiente a la transformación lineal en el eje, el sistema  $T_{Z3}$ , a su vez, va asociada a la transformación lineal del eje coordenado  $z$ , en este caso, un desplazamiento lineal es la variable designada por  $x$ ,  $y$ ,  $z$  mientras que será común que la designación correspondiente a longitudes constantes sea designada como  $d_{ji}$

$$T_{Z4}(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x & 0 \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{Z5}(\theta_y) = \begin{bmatrix} c\theta_y & 0 & s\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{Z6}(\theta_z) = \begin{bmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 & 0 \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En el caso de la rotación tenemos que  $T_{Z4}$  nos señala que hay una transformación homogénea con relación al giro del sistema con respecto al eje  $x$ , siendo en lo general el ángulo de giro,  $\theta_x$ ; las transformaciones asociadas a los giros con respecto al eje  $y$  y al eje  $z$  son,  $T_{Z5}$  y  $T_{Z1}$  respectivamente, con los ángulos de giro etiquetados como  $\theta_y$  y  $\theta_z$ . En todos los casos de rotación se les asignará a los giros con una letra del alfabeto griego, y es importante tener en cuenta que las funciones trigonométricas seno y coseno han sido representadas como  $s$  y  $c$  con el fin de abreviar la escritura de las ecuaciones. [17]

### 3.3 Marcos de referencia

#### Transformaciones homogéneas

La ecuación cinemática para representar las transformaciones homogéneas en la plataforma en cada uno de sus brazos la podemos desarrollar de la siguiente manera:

$$T_{Z1i}(x_C)T_{Z2i}(y_C)T_{Z3i}(z_C)T_{Z6i}(\psi_C)T_{Z4i}(\theta_C)T_{Z6i}(\varphi_C)T_{Z3i}(Z_{CBi})T_{Z6i}(\delta_{1Bi})T_{Z1i}(X_{21i})T_{Z6i}(\delta_{32i})T_{Z4i}(\delta_{43i})T_{Z6i}(\delta_{54i})T_{Z6i}(\theta_{65i})T_{Z3i}(Z_{76i})T_{Z5i}(\theta_{87i})T_{Z4i}(\theta_{98i})T_{Z3i}(Z_{109i})T_{Z4i}(\theta_{1110i})T_{Z5i}(\theta_{1211i})T_{Z3i}(Z_{1312i})T_{Z1i}(X_{Pi})T_{Z2i}(Y_{Pi})T_{Z3i}(Z_{Pi})T_{Z6i}(\psi_{Pi})T_{Z4i}(\theta_{Pi})T_{Z6i}(\varphi_{ri})T_{Z6i}(\delta_{14Pi})T_{Z1i}(X_{1514i})T_{Z6i}(\delta_{1615i})T_{Z4i}(\delta_{1716i})T_{Z6i}(\delta_{1817i})$$

Donde se toma en cuenta la secuencia de las transformaciones homogéneas partiendo desde un sistema de coordenadas  $i_0, j_0, k_0$  que representa la superficie de el área de trabajo de la plataforma, un sistema de coordenadas  $i_c, j_c, k_c$  que se encuentra representada en el móvil sobre el cual se monta la plataforma, y el sistema de coordenadas  $i_B, j_B, k_B$  establecido en la placa inferior, y a partir del cual se comienza el

<sup>17</sup> <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/404/40470402.pdf>

análisis cinemático de la plataforma de acuerdo a los movimientos que su diseño proporciona con respecto a sus ángulos de acción y de reacción.

Para el primer miembro consideramos una serie de movimientos en nuestro sistema de coordenadas que nos ira generando diferentes bases locales y bases fijas, dependiendo de las características cinemáticas que nos presente cada una de las partes de nuestras cadenas. Partiendo así de la base fija  $i_0, j_0, k_0$  para lo cual se realizan las traslaciones pertinentes, una sobre cada uno de los componentes generando así una base  $i_c, j_c, k_c$ , para que a partir de ahí generemos  $i_b, j_b, k_b$ .

Considerando  $Tz_{1i}, Tz_{2i}, Tz_{3i}$ , nuestras expresiones de traslación y  $Tz_{4i}, Tz_{5i}, Tz_{6i}$ , nuestras expresiones de rotación es como se hará la secuencia con las transformaciones correspondientes a cada uno de las partes de la cadena tomando en cuenta a su vez los ángulos de Euler,  $\delta_i$  para ángulos fijos y  $\theta_i$  para los ángulos móviles dados por la juntas que brindan movilidad a la cadena, hasta posicionarnos en uno de los vértices de la placa superior la cual es fija.

Por otra parte, y posteriormente ligado al análisis previamente mencionado se toma en cuenta nuevamente el sistema de coordenadas  $i_0, j_0, k_0$ , por medio del cual se relaciona un sistema de coordenadas  $i_p, j_p, k_p$  establecido para la placa superior aplicando nuevamente los ángulos de Euler, llevando la transformación a la arista de la placa superior anteriormente elegida y generando lo que sería nuestra última base local  $i_{18}, j_{18}, k_{18}$ .

Se hace la igualación entre ambos análisis, el que pasa por todos los componentes y el directo, respectivamente, para dejar establecido que ambas placas, analizadas por separado cumplen con un mismo trabajo, pero de diferente manera ya que la placa superior es fija mientras que la placa inferior actúa como “placa móvil”.

## Desglose de las transformaciones pasó a paso.

1. Las bases locales del sistema se van a generar a partir de la base inercial, se considera que la plataforma irá montada sobre un móvil, no especificado, para ser desplazada, la base que representa a dicho móvil es  $i_c, j_c, k_c$  por lo que su movimiento estará representado por 6 transformaciones, 3 desplazamientos y 3 rotaciones, los cuales se muestran a continuación.

$$T_{Z1}(x_c)T_{Z2}(y_c)T_{Z3}(z_c)T_{Z6}(\psi_c)T_{Z4}(\theta_c)T_{Z6}(\varphi_c)$$

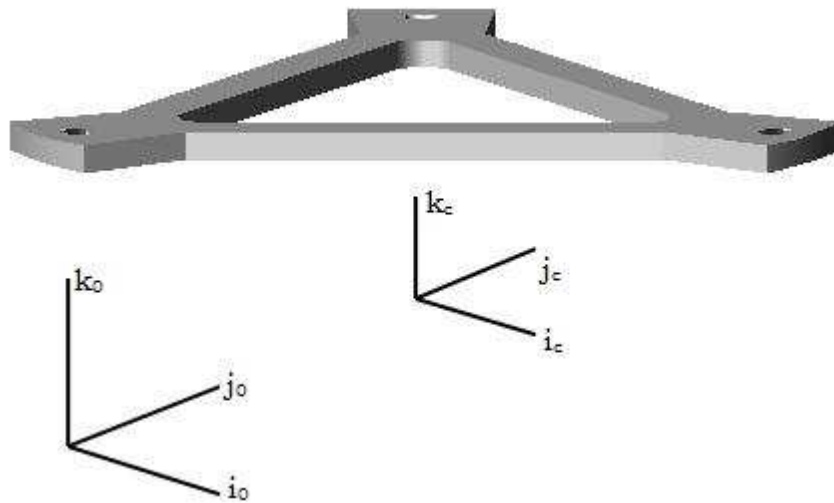


Figura 1-1. Placa inferior de la plataforma de Stewart.

- Debido a que la placa inferior de la plataforma de Stewart va fija al móvil se requiere un desplazamiento sobre el eje  $k_c$  para posicionarnos en la parte central de la placa, Figura (3-2).

$$T_{Z1}(x_c)T_{Z2}(y_c)T_{Z3}(z_c)T_{Z6}(\psi_c)T_{Z4}(\theta_c)T_{Z6}(\varphi_c)T_{Z3}(z_{CB})$$

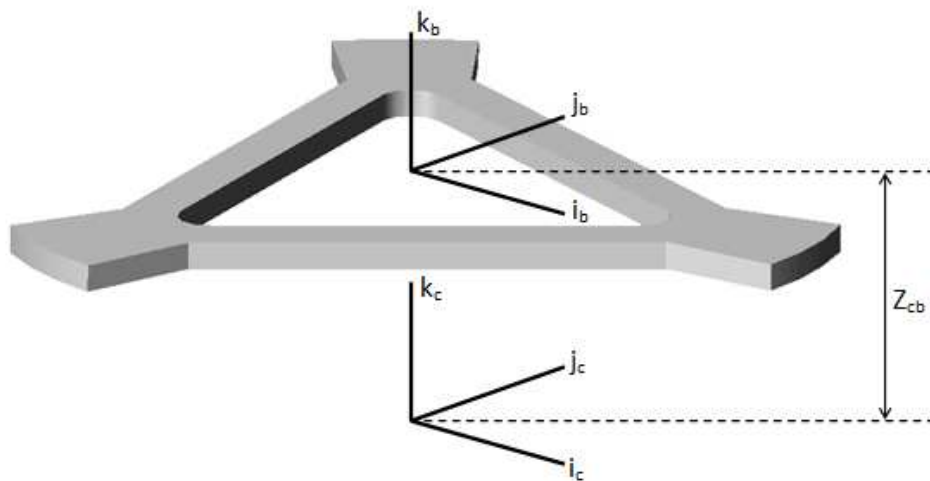


Figura 3-2 Placa inferior de la plataforma de Stewart con una distancia del móvil no especificado  $Z_{cb}$

- Se realiza una rotación respecto al eje  $k$  para que el eje  $x$  quede alineado a la primera junta de la base que la une con nuestra cadena cinemática, generando así la base  $(i_{1i}, j_{1i}, k_{1i})$

$$T_{Z1i}(x_c)T_{Z2i}(y_c)T_{Z3i}(z_c)T_{Z6i}(\psi_c)T_{Z4i}(\theta_c)T_{Z6i}(\varphi_c)T_{Z3i}(Z_{CBi})T_{Z6i}(\delta_{1Bi})$$

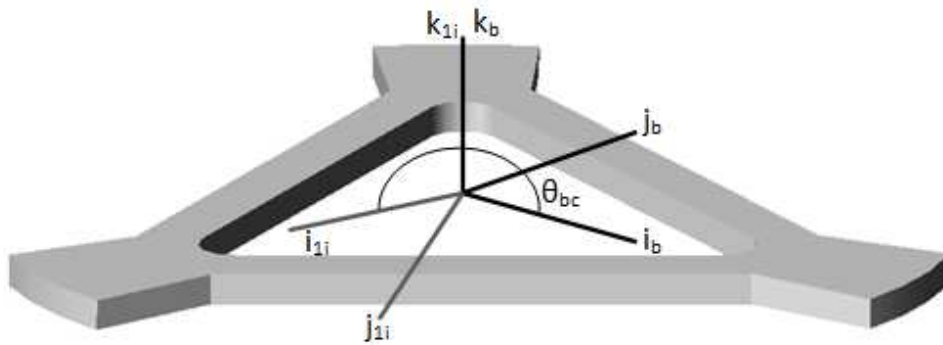


Figura 3-3 Placa inferior de la plataforma de Stewart con un giro de posicionamiento

- En la figura 3-4 se muestra el primer desplazamiento que va del centro de la placa móvil a la junta antes mencionada, de ahí, se procede a realizar un giro de Euler cuyas transformaciones se realizan en la junta cilíndrica localizada en la arista de la plataforma que se selecciono arbitrariamente. Nos desplazamos una distancia  $X_{21i}$  para formar una base local  $(i_{2i}, j_{2i}, k_{2i})$  justo donde empieza nuestra junta cilíndrica, y después se realiza un giro de Euler generando las bases locales  $(i_{3i}, j_{3i}, k_{3i})$ ,  $(i_{4i}, j_{4i}, k_{4i})$ ,  $(i_{5i}, j_{5i}, k_{5i})$  es decir

$$T_{Z6}(\delta_{32})T_{Z4}(\delta_{43})T_{Z6}(\delta_{54})$$

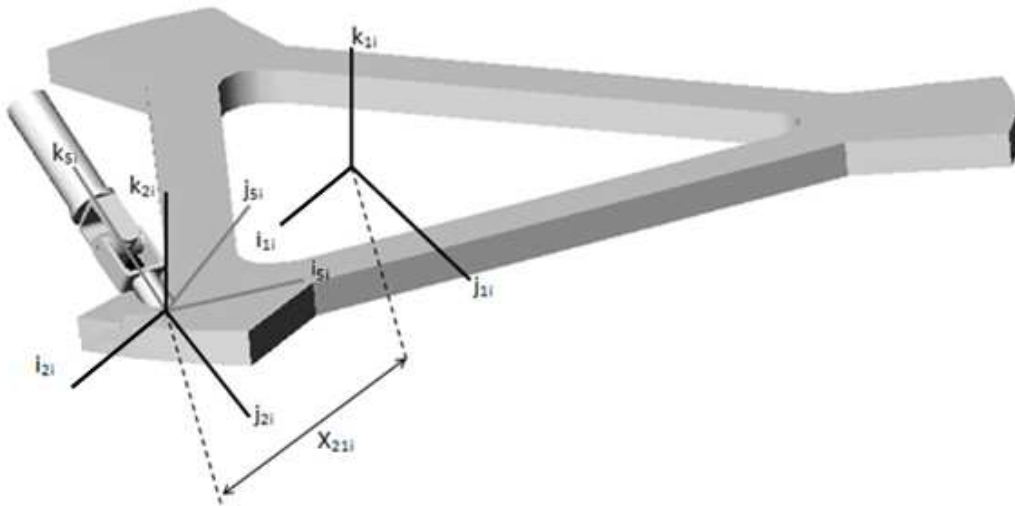


Figura 3-4 Cuerpo I con sus bases locales, unido a la placa inferior



5. La siguiente figura representa el ángulo  $\theta_{65}$ , designando el carácter  $\theta$  para un ángulo variable dado el movimiento que se genera en la junta cilíndrica localizada en el punto inferior de la cadena cinemática, que nos puede generar ángulos variados, la cual va unida a la placa inferior (Figura 3-5).

$$T_{Z1i}(x_C)T_{Z2i}(y_C)T_{Z3i}(z_C)T_{Z6i}(\psi_C)T_{Z4i}(\theta_C)T_{Z6i}(\varphi_C)T_{Z3i}(Z_{CBi})T_{Z6i}(\delta_{1Bi})T_{Z1i}(X_{21i})T_{Z6i}(\delta_{32i})T_{Z4i}(\delta_{43i})T_{Z6i}(\delta_{54i})T_{Z6i}(\theta_{65i})$$

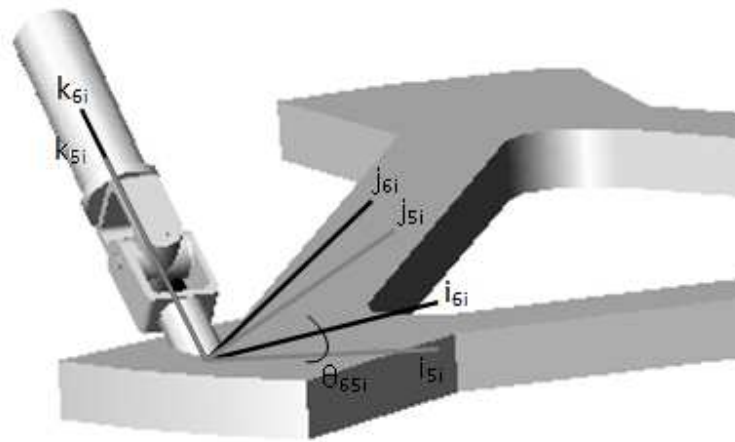


Figura 3-5 Giro rotacional del cuerpo I respecto al eje k

6. Posteriormente se procede a realizar un desplazamiento, con una distancia  $Z_{76i}$  hasta llegar al punto donde tenemos el centro de la intersección de la junta universal, donde se genera una base local.

$$T_{Z1i}(x_C)T_{Z2i}(y_C)T_{Z3i}(z_C)T_{Z6i}(\psi_C)T_{Z4i}(\theta_C)T_{Z6i}(\varphi_C)T_{Z3i}(Z_{CBi})T_{Z6i}(\delta_{1Bi})T_{Z1i}(X_{21i})T_{Z6i}(\delta_{32i})T_{Z4i}(\delta_{43i})T_{Z6i}(\delta_{54i})T_{Z6i}(\theta_{65i})T_{Z3i}(Z_{76i})$$

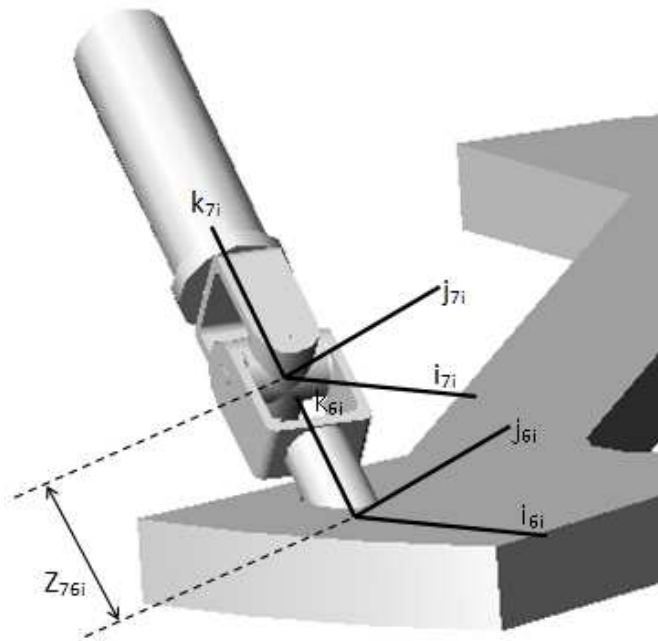


Figura 3-6 Base local desplazándose sobre el eje Z

7. En la siguiente figura se muestra que cada uno de los giros de la junta universal generan las bases  $(i_{8i}, j_{8i}, k_{8i})$ ,  $(i_{9i}, j_{9i}, k_{9i})$  en los cuales la rotación se designa por los ángulos  $\theta_{87i}$  y  $\theta_{98i}$  respectivamente.

$$T_{Z1i}(x_C)T_{Z2i}(y_C)T_{Z3i}(z_C)T_{Z6i}(\psi_C)T_{Z4i}(\theta_C)T_{Z6i}(\varphi_C)T_{Z3i}(Z_{CBi})T_{Z6i}(\delta_{1Bi})T_{Z1i}(X_{21i})T_{Z6i}(\delta_{32i})T_{Z4i}(\delta_{43i})T_{Z6i}(\delta_{54i})T_{Z6i}(\theta_{65i})T_{Z3i}(Z_{76i})T_{Z5i}(\theta_{87i})T_{Z4i}(\theta_{98i})$$

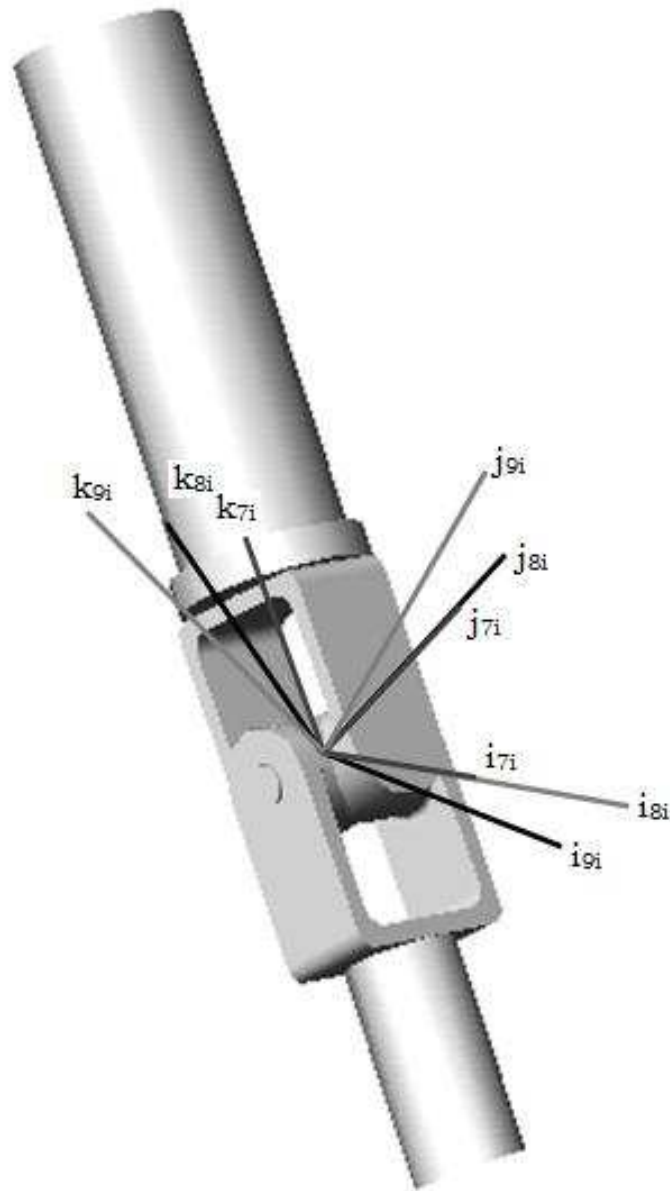


Figura 3-7 Rotaciones de la unión en la junta universal del cuerpo 1 al cuerpo 2

8. En la siguiente figura el eje de coordenadas recorre una distancia  $Z_{109i}$  con respecto al eje  $k$ .

$$T_{Z1i}(x_C)T_{Z2i}(y_C)T_{Z3i}(z_C)T_{Z6i}(\psi_C)T_{Z4i}(\theta_C)T_{Z6i}(\varphi_C)T_{Z3i}(Z_{CBi})T_{Z6i}(\delta_{1Bi})T_{Z1i}(X_{21i})T_{Z6i}(\delta_{32i})T_{Z4i}(\delta_{43i})T_{Z6i}(\delta_{54i})T_{Z6i}(\theta_{65i})T_{Z3i}(Z_{76i})T_{Z5i}(\theta_{87i})T_{Z4i}(\theta_{98i})T_{Z3i}(Z_{109i})$$

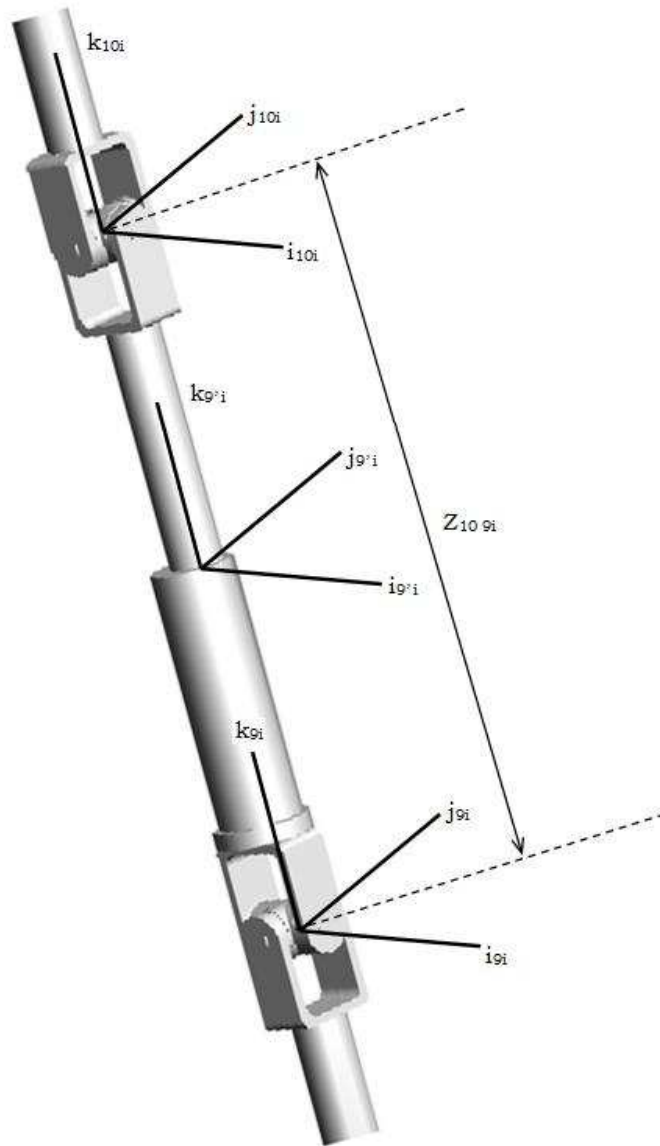


Figura 3-8 Bases locales que van de la junta del cuerpo 2 a la junta del cuerpo 3 a una distancia  $Z_{109i}$

9. En la figura se observa que se dan ciertas rotaciones en la junta que genera los ángulos  $\theta_{1011i}$  y  $\theta_{1112i}$  que a su vez generan las bases  $(i_{11i}, j_{11i}, k_{11i})$ ,  $(i_{12i}, j_{12i}, k_{12i})$ .

$$T_{Z1i}(x_C)T_{Z2i}(y_C)T_{Z3i}(z_C)T_{Z6i}(\psi_C)T_{Z4i}(\theta_C)T_{Z6i}(\varphi_C)T_{Z3i}(Z_{CBi})T_{Z6i}(\delta_{1Bi})T_{Z1i}(X_{21i})T_{Z6i}(\delta_{32i})$$

$$T_{Z4i}(\delta_{43i})T_{Z6i}(\delta_{54i})T_{Z6i}(\theta_{65i})T_{Z3i}(Z_{76i})T_{Z5i}(\theta_{87i})T_{Z4i}(\theta_{98i})T_{Z3i}(Z_{109i})T_{Z4i}(\theta_{1110i})$$

$$T_{Z5i}(\theta_{1211i})$$

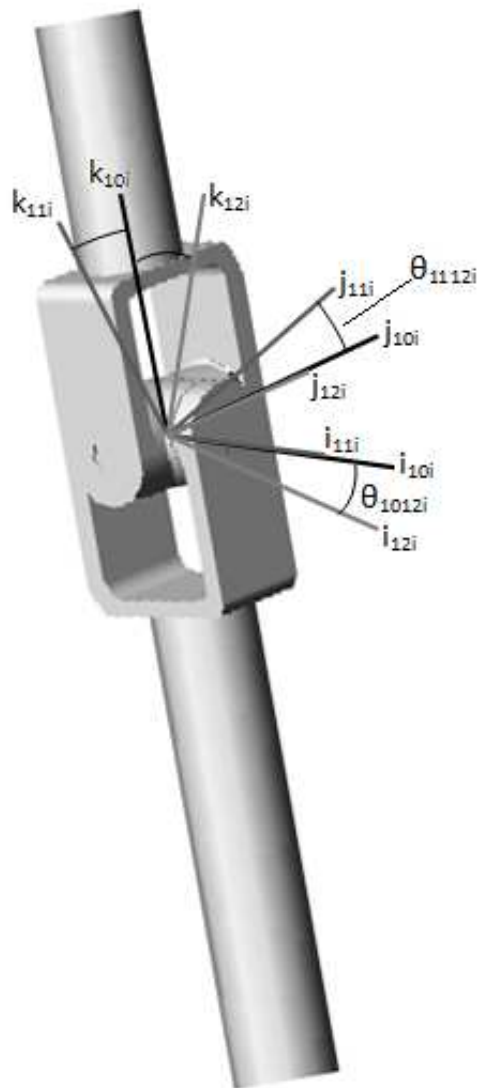


Figura 3-9 Rotaciones de la unión de la junta universal del cuerpo 3 al cuerpo 4

10. En la siguiente figura se muestra la traslación del sistema de coordenadas con respecto al eje **k** el cual nos posiciona en el vértice de la placa superior.

$$\begin{aligned}
 &T_{Z1i}(x_C)T_{Z2i}(y_C)T_{Z3i}(z_C)T_{Z6i}(\psi_C)T_{Z4i}(\theta_C)T_{Z6i}(\varphi_C)T_{Z3i}(Z_{CBi})T_{Z6i}(\delta_{1Bi})T_{Z1i}(X_{21i}) \\
 &T_{Z6i}(\delta_{32i})T_{Z4i}(\delta_{43i})T_{Z6i}(\delta_{54i})T_{Z6i}(\theta_{65i})T_{Z3i}(Z_{76i})T_{Z5i}(\theta_{87i})T_{Z4i}(\theta_{98i})T_{Z3i}(Z_{109i}) \\
 &T_{Z4i}(\theta_{1110i})T_{Z5i}(\theta_{1211i})T_{Z3i}(Z_{1312i})
 \end{aligned}$$

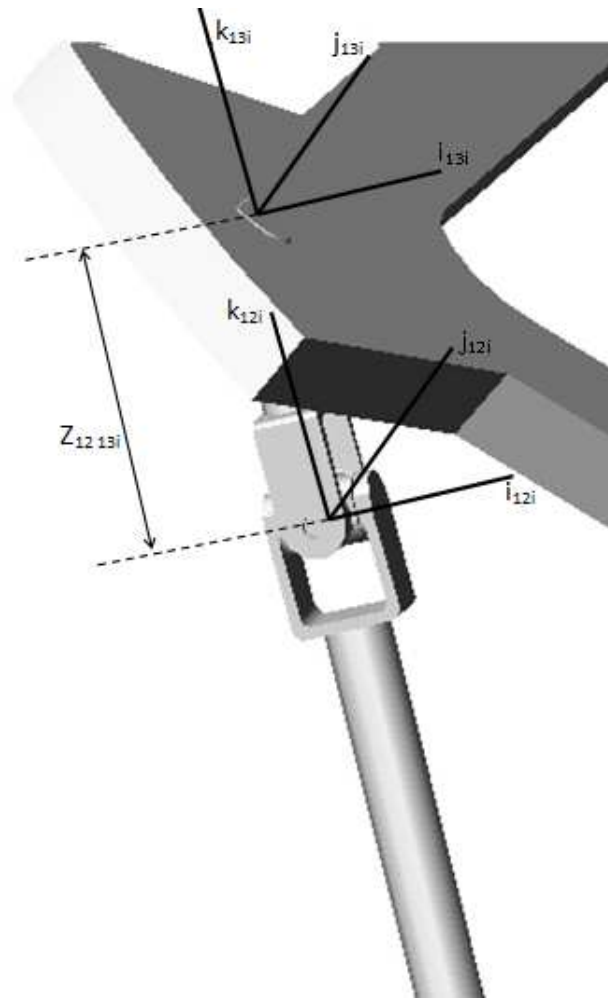


Figura 3-10 Traslación de las bases locales con respecto al eje K.

Para hacer el análisis de la placa superior, hacemos por el método directo, método por el cual se parte desde el sistema de coordenadas  $i_0, j_0, k_0$ , y se posiciona al centro de la placa superior, en lo cual se genera una sola translación generando  $i_P, j_P, k_P$

$$T_{Z1i}(X_{Pi})T_{Z2i}(Y_{Pi})T_{Z3i}(Z_{Pi})$$

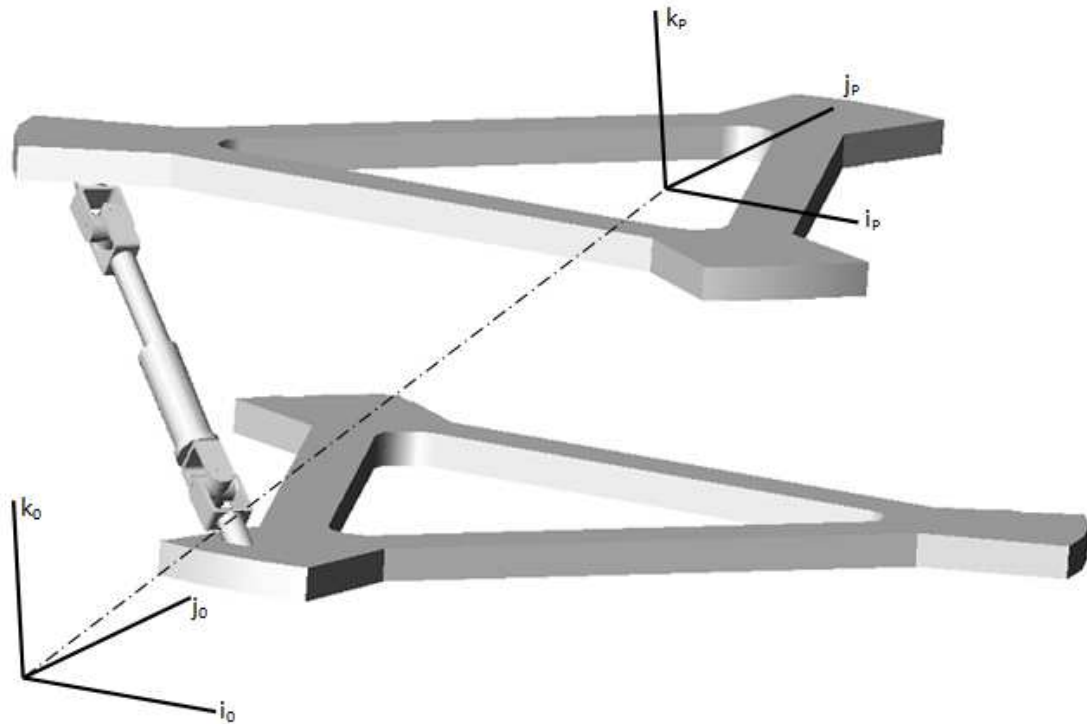


Figura 3-11 Método directo de la base local O, posicionado al centro de la placa superior.

Ahora se hace una traslación sobre el eje  $X$  una distancia  $X_{1514}$  para posicionarnos en el vértice de la plataforma estática generando  $i_{15}$ ,  $j_{15}$ ,  $k_{15}$

$$T_{Z1i}(X_{Pi})T_{Z2i}(Y_{Pi})T_{Z3i}(Z_{Pi})T_{Z6i}(\psi_{Pi})T_{Z4i}(\theta_{Pi})T_{Z6i}(\varphi_{ri})T_{Z6i}(\delta_{14Pi})T_{Z1i}(X_{1514i})$$

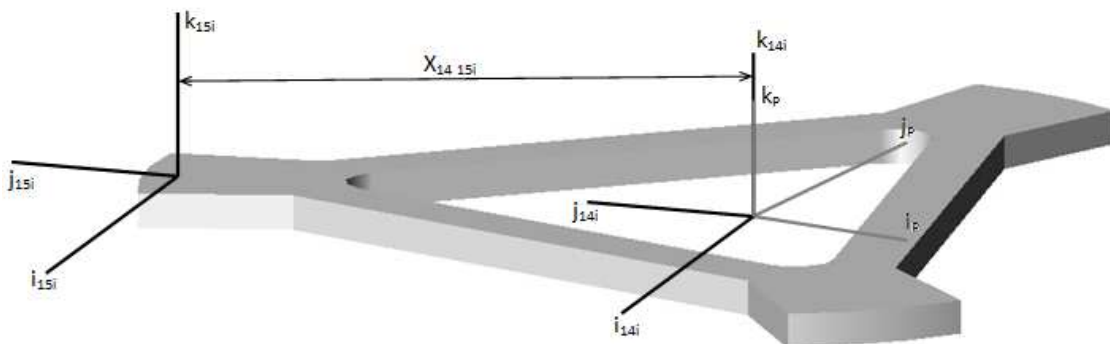


Figura 3-12 Posicionamiento del centroide de la placa superior hacia una arista cualquiera, que recorre una distancia  $X_{1415i}$

Giramos de acuerdo a los ángulos de Euler, con el propósito de alinear nuestro eje  $k_{18}$  con la cadena cinemática que se haya analizado en el primer miembro de nuestra ecuación de posición.

$$T_{Z1i}(X_{Pi})T_{Z2i}(Y_{Pi})T_{Z3i}(Z_{Pi})T_{Z6i}(\psi_{Pi})T_{Z4i}(\theta_{Pi})T_{Z6i}(\varphi_{ri})T_{Z6i}(\delta_{14Pi})T_{Z1i}(X_{1514i})$$

$$T_{Z6i}(\delta_{1615i})T_{Z4i}(\delta_{1716i})T_{Z6i}(\delta_{1817i})$$

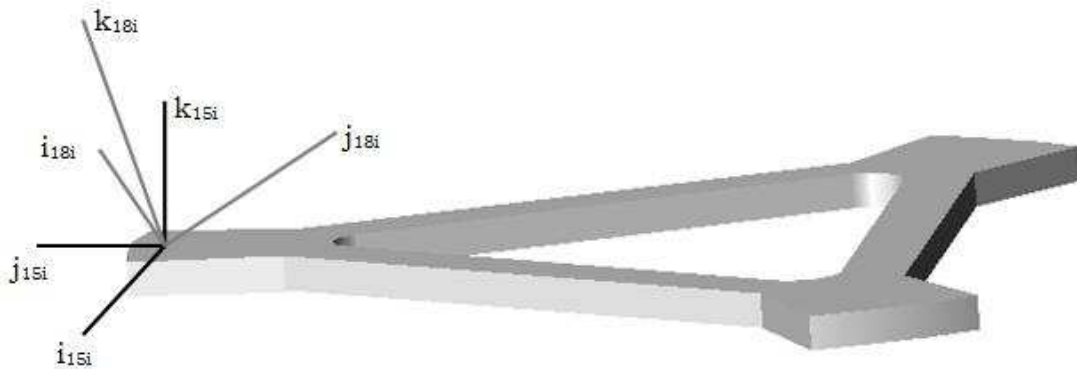


Figura 3-13 Alineación de la base local de acuerdo al Teorema de Euler, respecto al cuerpo 4.

## Solución del análisis cinemático del sistema.

Como ya se menciona anteriormente, el análisis cinemático requiere el uso de matrices de transformaciones homogéneas, ya que proporcionan traslación y rotación de un cuerpo en el espacio. Tenemos en cuenta básicamente, una referencia móvil que son inercial  $i_0, j_0, k_0$ , del móvil  $i_C, j_C, k_C$ , de la plataforma de Stewart  $i_B, j_B, k_B$ ,  $i_P, j_P, k_P$  y del manipulador serial  $i_D, j_D, k_D$ .

El diseño completo de la plataforma se muestra en la siguiente figura:



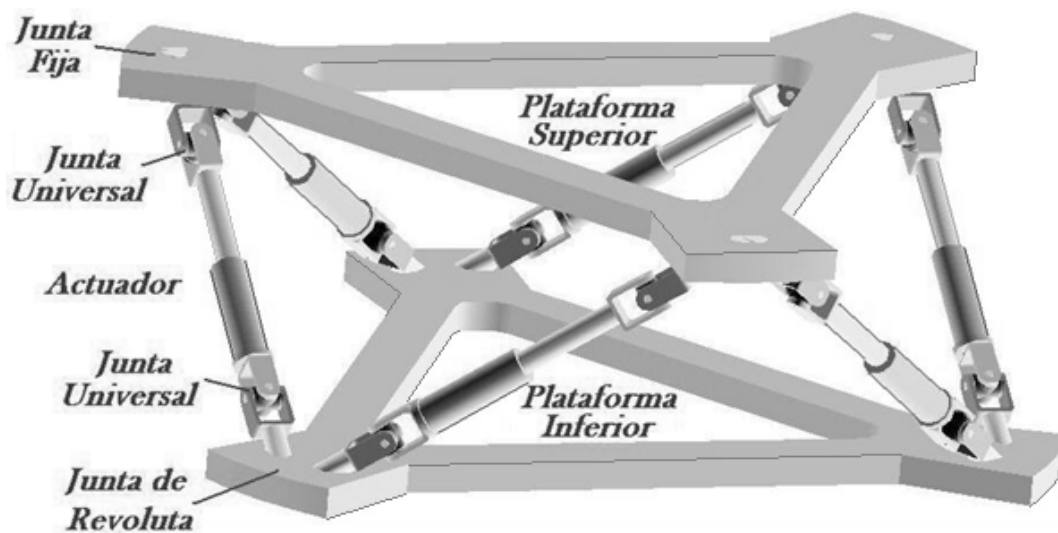


Figura 3-14 Diseño completo de la plataforma.

La figura 3-15 nos muestra a la plataforma en su movimiento inicial o cerrado de la cual se puede observar el centro de masa representado por una esfera.

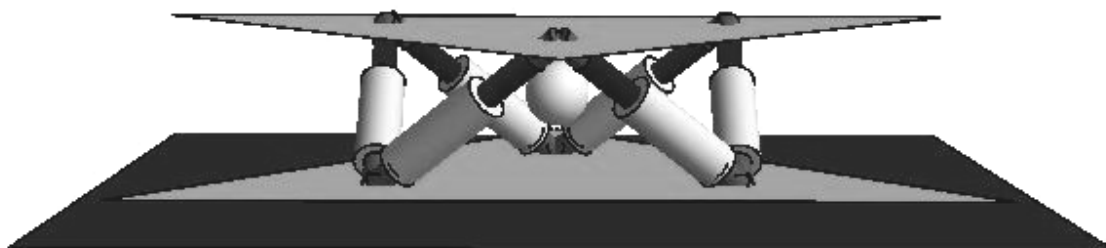


Figura 3-15 Plataforma cerrada

En la figura 3-16 se observa a la plataforma semi-abierta y se puede notar como las cadenas se van estirando en función del tiempo.

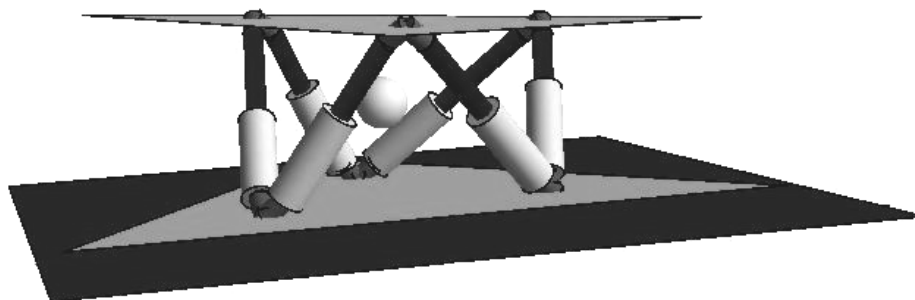


Figura 3-16 Plataforma semi-abierta

En la figura 3-17 se observa a la plataforma completamente abierta y se nota como los actuadores están completamente estirados.

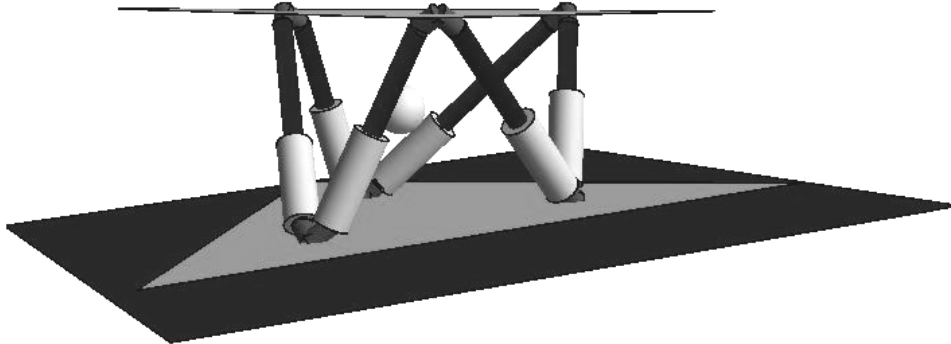


Figura 3-17 Plataforma abierta

Tal y como se logra apreciar, y en base a lo antes mencionado, su topología es cúbica, y gracias a ello, se provee una capacidad de control uniforme, así como una rigidez uniforme, además de que tiene como ventaja que minimiza el acoplamiento cruzado entre los actuadores, gracias a su diseño ortogonal.

Una aplicación muy eficaz de este manipulador es la de posicionarlo como interface entre un objeto móvil, y un brazo serial, y como se menciona en el capítulo 1 de esta tesis, su aplicación más común es la de interconectar la base de dichos dispositivos para buscar que el móvil se desplace a lo largo de un área de trabajo determinada, mientras que el brazo serial realiza sus tareas para las que fue diseñado, mientras que el móvil aumenta sus grados de libertad.

## Características geométricas.

En la siguiente tabla, se registran detalladamente las distancias y ángulos pertenecientes a cada una de las cadenas que conforma el manipulador.

	Cadena 1	Cadena 2	Cadena 3	Cadena 4	Cadena 5	Cadena 6
$\delta_{1i}$	300°	180°	60°	-60°	180°	60°
$X_{21i}$	6.3686"	6.3686"	6.3686"	6.3686"	6.3686"	6.3686"
$\delta_{32i}$	-30°	30°	-210°	30°	-30°	210°
$\delta_{43i}$	55°	-55°	-55°	-55°	55°	55°
$\delta_{54i}$	45°	135°	45°	-45°	-135°	-45°
$Z_{76i}$	1"	1"	1"	1"	1"	1"
$Z_{1312i}$	1"	1"	1"	1"	1"	1"
$\delta_{14pi}$	240°	240°	0°	0°	120°	120°
$X_{1514i}$	6.3686"	6.3686"	6.3686"	6.3686"	6.3686"	6.3686"
$\delta_{1615i}$	30°	-30°	210°	-30°	30°	-210°
$\delta_{1716i}$	55°	-55°	-55°	-55°	55°	55°
$\delta_{1817i}$	45°	135°	45°	-45°	-135°	-45°

De ahí, nos quedan como incógnitas los valores de los ángulos de las juntas, así como la longitud de cada actuador,  $\theta_{65i}$ ,  $\theta_{87i}$ ,  $\theta_{98i}$ ,  $\theta_{1110i}$ ,  $\theta_{1211i}$ ,  $Z_{109i}$ , respectivamente, dándonos así un total de 36 variables a determinar, de donde los correspondientes a los actuadores lineales de  $Z_{109i}$ , son seis actuadas, una para cada cadena.

## Método Newton/Rhaphson para el cálculo de la trayectoria.

El método de Newton-Raphson es un método abierto, en el sentido de que su convergencia global no está garantizada. La única manera de alcanzar la convergencia es seleccionar un valor inicial lo suficientemente cercano a la raíz buscada. Así, se ha de comenzar la iteración con un valor razonablemente cercano al cero (denominado punto de arranque o valor supuesto). La relativa cercanía del punto inicial a la raíz depende mucho de la naturaleza de la propia función; si ésta presenta múltiples puntos de inflexión o pendientes grandes en el entorno de la raíz, entonces las probabilidades de que el algoritmo diverja aumentan, lo cual exige seleccionar un valor supuesto cercano a la raíz. Una vez se ha hecho esto, el método linealiza la función por la recta tangente en ese valor supuesto. La abscisa en el origen de dicha recta será, según el método, una mejor aproximación de la raíz que el valor anterior. Se realizarán sucesivas iteraciones hasta que el método haya convergido lo suficiente.

Note que el método de Newton-Raphson no trabaja con intervalos donde nos asegure que encontraremos la raíz, y de hecho no tenemos ninguna garantía de que nos

aproximaremos a dicha raíz. Desde luego, existen ejemplos donde este método no converge a la raíz, en cuyo caso se dice que el método diverge. Sin embargo, en los casos donde si converge a la raíz lo hace con una rapidez impresionante, por lo cual es uno de los métodos preferidos por excelencia.

## Trayectoria.

Se cuenta con un cuerpo, el cual tiene como principal limitante, una trayectoria que solo nos servirá de posicionamiento, y de ningún modo para cambio de orientación, y ese cuerpo es nada menos que la placa superior de nuestra plataforma.

El propósito de esta acción es la de mantener dicha placa de manera horizontal respecto al marco inercial, para tenerlo nivelado respecto al eje horizontal de nuestra área de trabajo, lo cual nos proporcionara la estabilidad necesaria para la realización de tareas variadas, sin importar que el sistema quede “fuera” de su punto de equilibrio estático.

## Trayectoria lineal

La trayectoria desde el punto de vista cinemático, es el lugar geométrico de las sucesivas posiciones que toma secuencialmente el cuerpo durante su movimiento, y cuya determinación se obtiene por medio del punto de vista del observador que establece un sistema de referencia por medio del cual se hace la descripción de dicho movimiento.

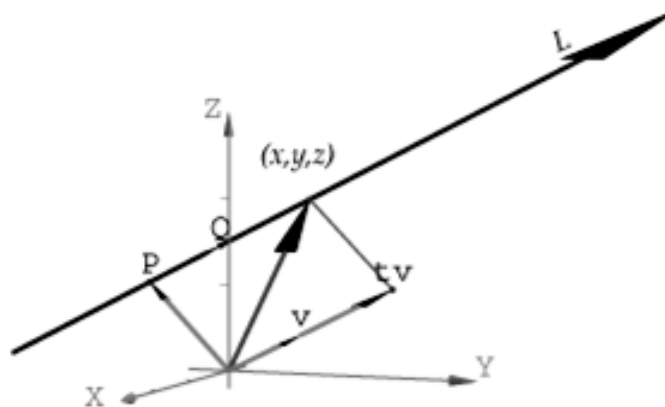


Figura 3-18. Características vectoriales de la trayectoria lineal

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= \mathbf{Q} + \mathbf{S} \\
 &= \mathbf{Q} + s\mathbf{u}
 \end{aligned}$$

Donde  $s$  es la magnitud del vector  $S$  y  $u$  corresponde al vector unitario que define la orientación de  $S$ . Para definir  $R$  en función del tiempo, se requiere que la magnitud  $s$ , cambie con respecto al mismo, es decir:

$$R(t) = Q + s(t)u$$

Las ecuaciones de velocidad y aceleración son definidos como la primera y segunda derivada de la ecuación de la recta respecto al tiempo:

$$V(t) = \dot{s}(t)u$$

$$A(t) = \ddot{s}(t)u$$

$Q$  y  $u$  no varían respecto al tiempo, porque están definidos por puntos fijos en el espacio, por ello la magnitud  $s(t)$  deberá satisfacer ciertas condiciones iniciales y finales de posición, velocidad y aceleración, es decir debe satisfacer 6 condiciones, según se muestra en la figura 3-19.

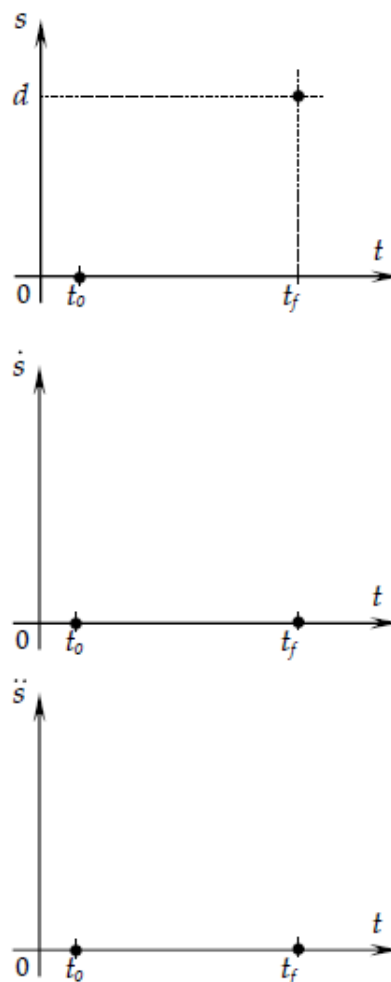


Figura 3-19. Características gráficas de una trayectoria lineal

En la primera gráfica se indica el cambio de magnitud del vector  $\mathbf{S}$ , el cual tendrá variaciones de 0 en un tiempo inicial  $d = \|\mathbf{S}\|$  para un tiempo final  $t_f$  los valores de tiempo,  $t_0$  y  $t_f$  son determinados de manera arbitraria.

La segunda gráfica muestra la rapidez con la que la magnitud del vector varia respecto al tiempo, es decir, es la rapidez con que realiza el traslado del punto  $p_i$  a  $p_f$  para un tiempo inicial  $t_0$  y un tiempo final  $t_f$ .

La tercera gráfica es el cambio de la rapidez (aceleración) con que la magnitud del vector  $\mathbf{S}$  cambia respecto, para un tiempo inicial  $t_0$  y un tiempo final  $t_f$ .

Para satisfacer las 6 condiciones, se deberá emplear un polinomio de quinto grado, ya que este cuenta con 6 coeficientes a determinar. De esta manera, se tiene:

$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

$$\dot{s}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4$$

$$\ddot{s}(t) = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3$$

Dadas las condiciones iniciales y finales de velocidad y aceleración, se obtienen las derivadas respecto al tiempo del polinomio de  $s(t)$ , y tomando como referencia la figura 3-16, para  $t=t_0$  se tienen 3 condiciones iniciales:

$$s(t_0) = s(0) = 0$$

$$\dot{s}(t_0) = \dot{s}(0) = 0$$

$$\ddot{s}(t_0) = \ddot{s}(0) = 0$$

Al sustituirlas en las ecuaciones anteriormente planteadas, se obtiene:

$$s(0) = 0 = a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 + a_3(0)^3 + a_4(0)^4 + a_5(0)^5$$

$$\dot{s}(0) = 0 = a_1 + 2a_2(0) + 3a_3(0)^2 + 4a_4(0)^3 + 5a_5(0)^4$$

$$\ddot{s}(0) = 0 = 2a_2 + 6a_3(0) + 12a_4(0)^2 + 20a_5(0)^3$$

Simplificando:

$$0 = a_0$$

$$0 = a_1$$

$$0 = 2a_2$$

Finalmente, los 3 primeros coeficientes son:

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0$$

A partir de la figura 3-16 y repitiendo el proceso para  $t=t_f$  se tiene las 3 condiciones finales:

$$s(t_f) = d = \|p_f - p_i\|$$

$$\dot{s}(t_f) = 0$$

$$\ddot{s}(t_f) = 0$$

Donde  $p_i = x_i, y_i, z_i$  y  $p_f = x_f, y_f, z_f$  son las coordenadas de los puntos inicial y final de la trayectoria respectivamente.

La magnitud de la diferencia entre ellos, será la distancia que necesitamos recorrer en la línea recta. Al sustituir los coeficientes iniciales, y las 3 condiciones finales en la ecuación de  $s$  y sus derivadas se obtiene:

$$\|p_f - p_i\| = a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5$$

$$0 = 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4$$

$$0 = 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3$$

El sistema de ecuaciones se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|p_f - p_i\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al resolver dicho sistema de ecuaciones se obtiene los 3 últimos coeficientes:

$$a_3 = 10 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^3}$$

$$a_4 = -15 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^4}$$

$$a_5 = 6 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^5}$$

Sustituyendo en la ecuación  $s$  y sus derivadas:

$$s(t_f) = 10 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^3} t_f^3 - 15 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^4} t_f^4 + 6 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^5} t_f^5$$

$$\dot{s}(t_f) = 30 \frac{|p_f - p_i|}{t_f^3} t^2 - 60 \frac{|p_f - p_i|}{t_f^4} t^3 + 30 \frac{|p_f - p_i|}{t_f^5} t^4$$

$$\ddot{s}(t_f) = 60 \frac{|p_f - p_i|}{t_f^3} t - 180 \frac{|p_f - p_i|}{t_f^4} t^2 + 120 \frac{|p_f - p_i|}{t_f^5} t^3$$

Finalmente se obtiene las ecuaciones que representan el cambio de la magnitud de la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

$$s(t_f) = |p_f - p_i| \left[ 10 \frac{|p_f - p_i|}{t_f^3} t^3 - 15 \frac{|p_f - p_i|}{t_f^4} t^4 + 6 \frac{|p_f - p_i|}{t_f^5} t^5 \right]$$

$$\dot{s}(t_f) = |p_f - p_i| \left[ 30 \frac{|p_f - p_i|}{t_f^3} t^2 - 60 \frac{|p_f - p_i|}{t_f^4} t^3 + 30 \frac{|p_f - p_i|}{t_f^5} t^4 \right]$$

$$\ddot{s}(t_f) = |p_f - p_i| \left[ 60 \frac{|p_f - p_i|}{t_f^3} t - 180 \frac{|p_f - p_i|}{t_f^4} t^2 + 120 \frac{|p_f - p_i|}{t_f^5} t^3 \right]$$

Donde  $t$ —tiempo para realizar el movimiento y  $t_f$ —tiempo final para terminar el movimiento. Reescribiendo las ecuaciones en función de los puntos de la recta.

$$R(t) = Q + s(t)u = (p_i - 0) + s(t) \frac{(p_f - p_i)}{|p_f - p_i|}$$

$$V(t) = s(t)u = s(t) \frac{(p_f - p_i)}{|p_f - p_i|}$$

$$A(t) = s(t)u = s(t) \frac{(p_f - p_i)}{|p_f - p_i|}$$

Sustituyendo las ecuaciones de  $R$ , velocidad y aceleración, se obtiene finalmente la ecuación vectorial de posición, la ecuación de velocidad y la de aceleración que debe seguir la plataforma móvil:

$$R(t) = p_i + \left[ 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right] (p_f - p_i)$$

$$V(t) = \left[ 30 \left( \frac{t^2}{t_f^3} \right) - 60 \left( \frac{t^3}{t_f^4} \right) + 30 \left( \frac{t^4}{t_f^5} \right) \right] (p_f - p_i)$$

$$A(t) = \left[ 60 \left( \frac{t}{t_f^3} \right) - 180 \left( \frac{t^2}{t_f^4} \right) + 120 \left( \frac{t^3}{t_f^5} \right) \right] (p_f - p_i)$$



## Orientación Angular

Para la orientación se sigue un procedimiento similar, en el entendido de que para este caso, solo se desea pasar de valores iniciales a finales, para la posición, velocidad y aceleración angular de la plataforma móvil, ya que no se requiere cumplir con una trayectoria particular en el espacio. Esto conducirá a las siguientes ecuaciones.

$$\beta(t) = \beta_i + \left[ 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right] (\beta_f - \beta_i)$$

$$\dot{\beta}(t) = \left[ 30 \left( \frac{t^2}{t_f^3} \right) - 60 \left( \frac{t^3}{t_f^4} \right) + 30 \left( \frac{t^4}{t_f^5} \right) \right] (\beta_f - \beta_i)$$

$$\ddot{\beta}(t) = \left[ 60 \left( \frac{t}{t_f^3} \right) - 180 \left( \frac{t^2}{t_f^4} \right) + 120 \left( \frac{t^3}{t_f^5} \right) \right] (\beta_f - \beta_i)$$

Donde el vector  $\beta = \psi, \theta, \varphi$ . De la misma manera  $\beta_i = \psi_i, \theta_i, \varphi_i$  y  $\beta_f = \psi_f, \theta_f, \varphi_f$ , que se refiere a los valores iniciales y finales.

Para el sistema bajo estudio se propone que la trayectoria del centro de la plataforma móvil  $x_p, y_p, z_p$ , tenga como coordenadas inicial y final, las siguientes:

$$p_f = (0.15, 0.15, -0.25)m \quad p_i = (0, 0, -0.5)m$$

Siendo la orientación:

$$\beta_f = (30^\circ, 30^\circ, 0) \quad \beta_i = (0, 0, 0) \text{ [}^{18}\text{][}^{19}\text{]}$$

Para nuestro análisis tomamos un intervalo de tiempo de un segundo, presentándose entonces, el siguiente comportamiento de desplazamiento, velocidad y aceleración para el centro de la plataforma móvil.

<sup>18</sup> K.H. Hunt, Kinematic Geometry of Mechanisms, Clarendon Press, Oxford, 1978.

<sup>19</sup> Waldron K. J. and Kinzel G.L. Kinematics, dynamics, and design of machinery, John Wiley & Sons, 2003

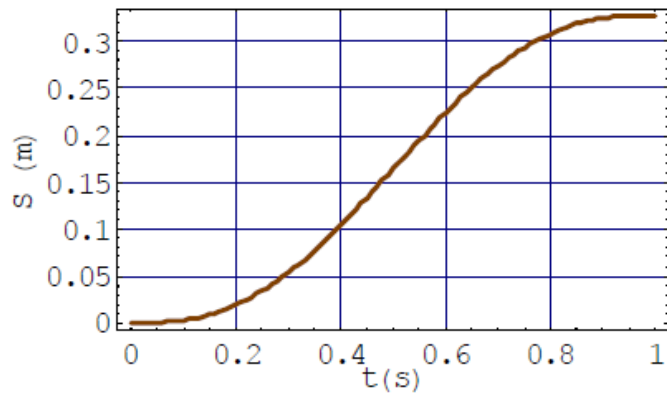


Figura 3-20. Desplazamiento del centro de la plataforma móvil.

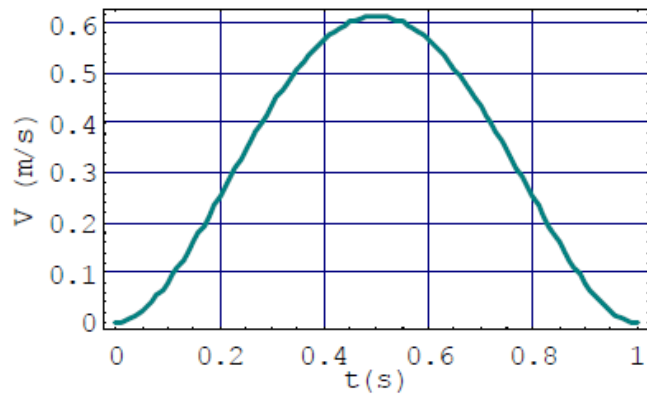


Figura 3-21. Velocidad lineal del centro de la plataforma móvil.

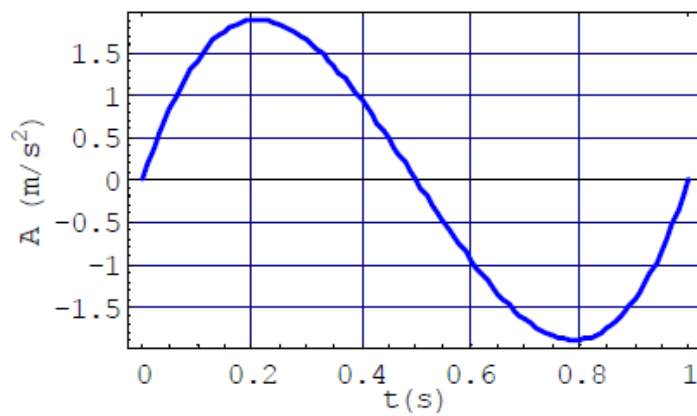


Figura 3-22. Aceleración lineal del centro de la plataforma móvil.

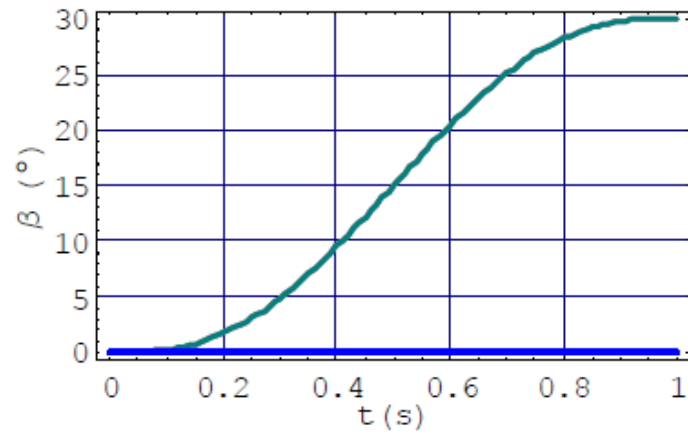


Figura 3-23. Orientación angular del centro de la plataforma móvil.

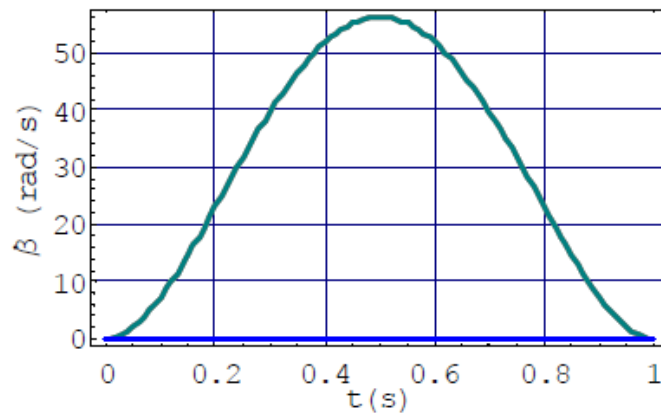


Figura 3-24. Velocidad angular del centro de la plataforma móvil.

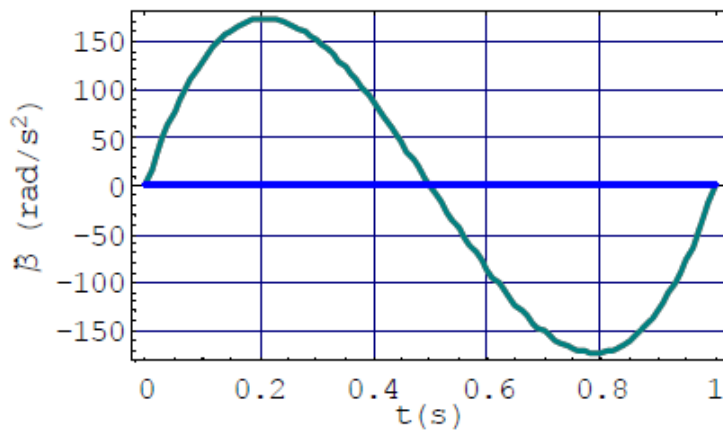


Figura 3-25. Aceleración angular del centro de la plataforma móvil.

## RESULTADOS

Gráficas del análisis cinemático.

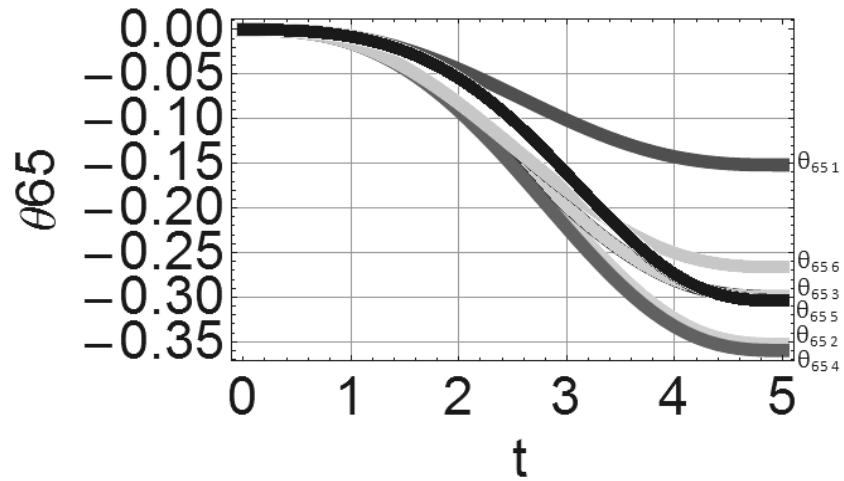


Figura 3-26 Gráficas de  $\theta_{65}$

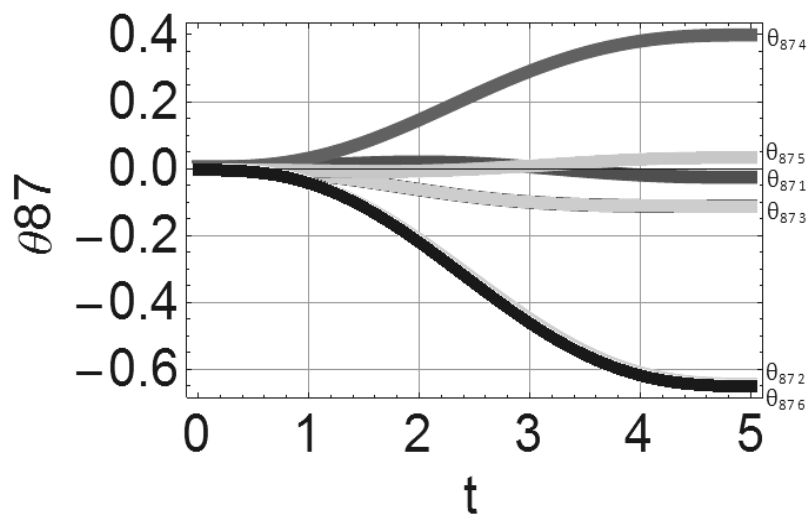


Figura 3-27 Gráficas de  $\theta_{87}$

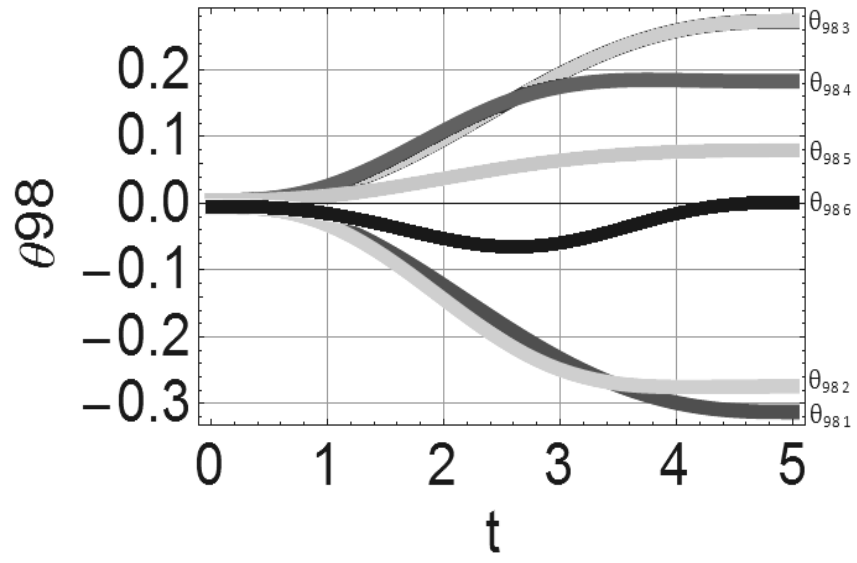


Figura 3-28 Gráficas de  $\theta_{98}$

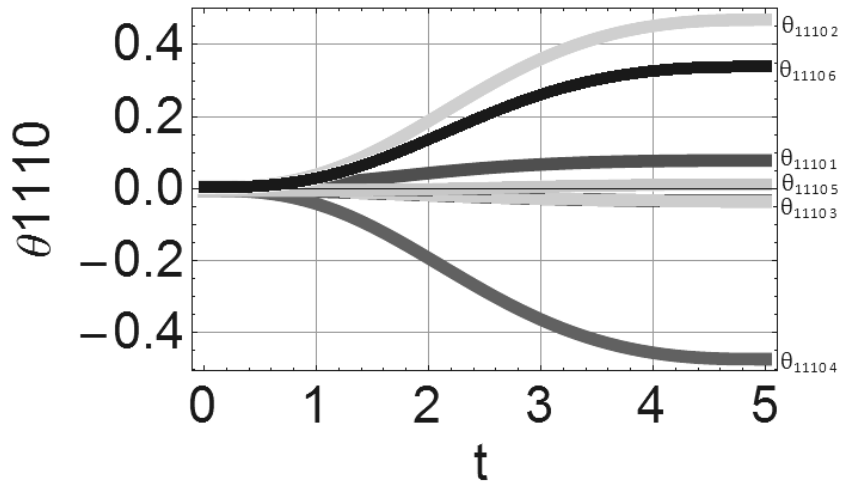


Figura 3-29 Gráficas de  $\theta_{1110}$

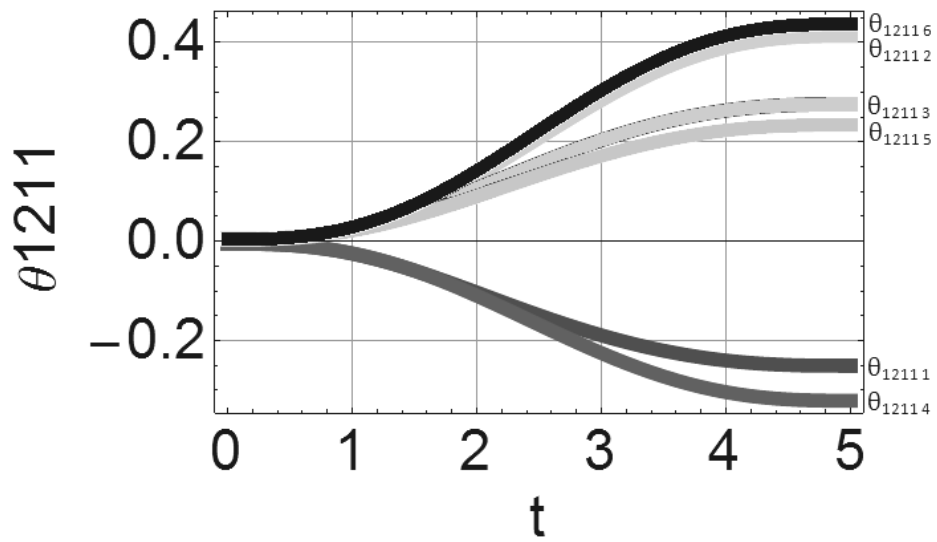


Figura 3-30 Gráficas de  $\theta_{1211}$

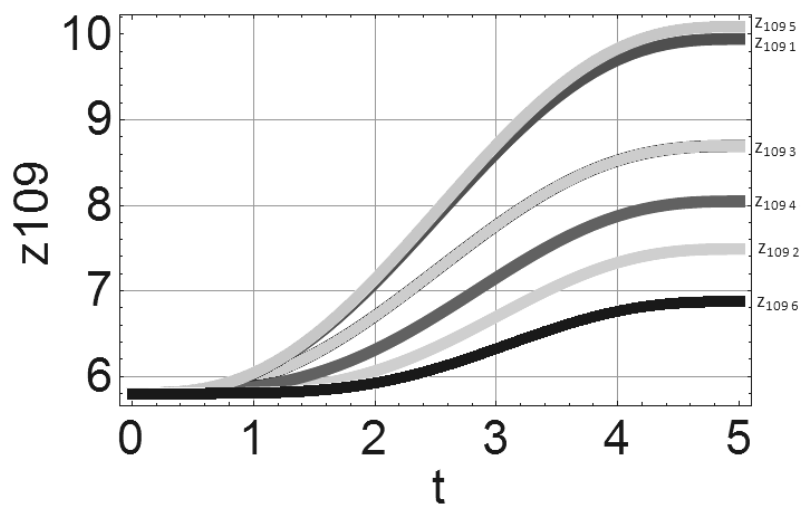


Figura 3-31 Gráficas de  $z_{109}$

# CAPITULO 4. ANÁLISIS ESTÁTICO.

## 4.1 Antecedentes

Se entiende por análisis de una estructura el proceso sistemático que concluye con el conocimiento de las características de su comportamiento bajo un cierto estado de cargas; se incluye, habitualmente, bajo la denominación genérica de estudio del comportamiento tanto el estudio del análisis de los estados tensional y deformacional alcanzados por los elementos y componentes físicos de la estructura como la obtención de conclusiones sobre la influencia recíproca con el medio ambiente o sobre sus condiciones de seguridad. Es pues el objetivo del análisis de una estructura la predicción de su comportamiento bajo las diferentes acciones para las que se postule o establezca que debe tener capacidad de respuesta.

En este caso el análisis estático es el que se podría estudiar en un curso básico de ingeniería, sin embargo, en una plataforma, el número de componentes y su configuración geométrica le añaden cierta complejidad al problema en estudio, de ahí que sea necesario emplear un método específico para obtener una solución rápida en forma eficiente, siendo la base, la segunda ley de Newton ya que involucra en forma directa el concepto de equilibrio estático.

En general, llamamos fuerza a la acción de un “empuje” o un “tirón” ejercidos por un cuerpo sobre otro. Esta interacción puede ocurrir cuando existe contacto directo entre los cuerpos. En esta tesis se pretende analizar el comportamiento de los “empujes” ejercidos en cada uno de los cuerpos que conforman la base conformada por actuadores, sean los contactos directos o los indirectos (ejercidos por el aire a presión del actuador)

El momento de una fuerza respecto a un punto o eje proporciona una medida de la tendencia de la fuerza a causar la rotación de un cuerpo alrededor de un punto o eje.

La acción de las fuerzas mencionadas pueden manifestarse como un momento, en el cual se observa la tendencia a la rotación de algún elemento de la cadena con respecto al brazo de palanca, lo cual implica en la posible deformación y la posible flexión de alguno de los cuerpos creando esfuerzos que afecten la vida útil del sistema.<sup>[20]</sup>

---

<sup>20</sup> Z. Geng, L. Haynes, Six degree of freedom active vibration isolation system using the Stewart platforms, IEEE Transactions on Control Systems Technology 2 (1) (1994) pp. 45–53

## 4.2 Referencias para el análisis estático.

La plataforma, para su análisis estático, se irá colocando con sus respectivos cuerpos en un marco de referencia  $x_0, y_0, z_0$ , como se ilustra en la figura siguiente, y sobre el que actúa tanto una fuerza externa  $f_p$  como su propio peso  $W$ .

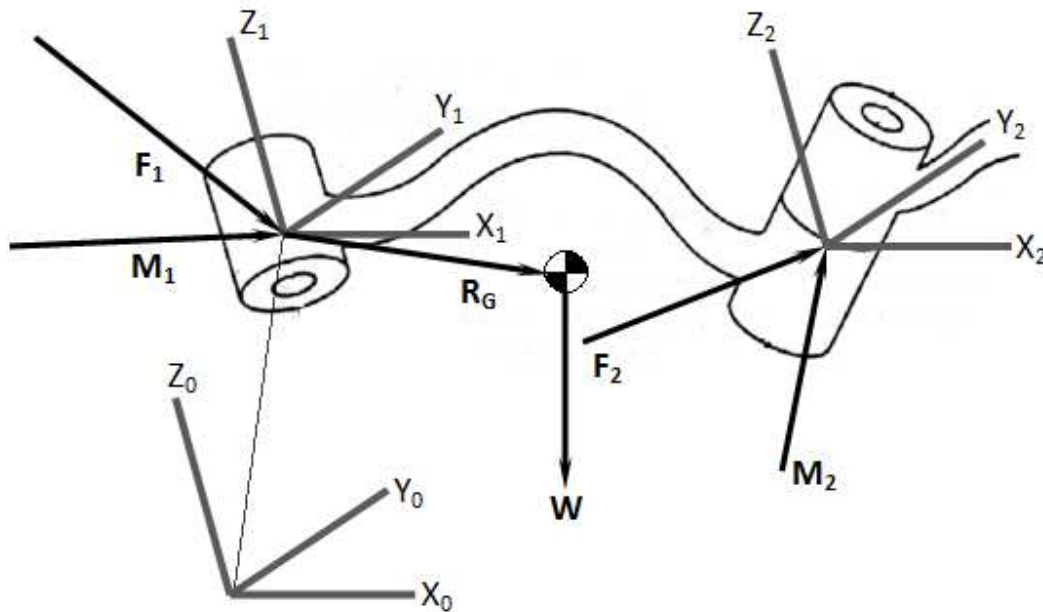


Figura 4-1 Ejemplo de diagrama de cuerpo libre

Donde para el análisis se tomarán en cuenta las siguientes variables:

$F_1$  = Fuerza de reacción definida en la base local unida al cuerpo  $x_1, y_1, z_1$

$M_1$  = momento de reacción definido en la base local  $x_1, y_1, z_1$

$F_2$  = fuerza de reacción definida en la base local unida al otro cuerpo  $x_2, y_2, z_2$

$M_2$  = momento de reacción definido en la base local  $x_2, y_2, z_2$

$W$  = peso del cuerpo definido en la base inercial  $x_0, y_0, z_0$

$R_G$  = Radio que va de uno de los extremos del cuerpo al centro de gravedad

La aplicación de la tercera ley de Newton (acción y reacción) y la aplicación directa de la segunda ley de Newton establecen nuestro análisis estático en base a las siguientes formulas:

$$\Sigma F = 0$$

$$\Sigma M = 0$$



De esta forma la aplicación directa de estas ecuaciones al sistema mostrado no hace llegare a la siguiente ecuación:

$$f_1 - [R_{12}]f_2 + [R_{10}]w + [R_{10}]f_p = 0$$

$$m_1 - [R_{12}]m_2 - r_1x([R_{12}]f_2) + r_Gx([R_{10}]w) + r_px([R_{10}]f_p) + [R_{10}]m_p = 0$$

Donde las matrices  $[R_{12}]$  y  $[R_{10}]$  transforman los vectores definidos en las bases  $x_2, y_2, z_2$  y  $x_0, y_0, z_0$  a la base  $x_1, y_1, z_1$  respectivamente, decidiendo de manera arbitraria escribir tales ecuaciones.

La ecuación de momentos se puede reescribir sustituyendo el producto cruz mediante una matriz anti simétrica formada por los elementos de los vectores de posición, es decir:

$$r \times (R)(f) = (S)(R)(f)$$

donde:

$$r = [x, y, z]^T$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

de manera que se tiene:

$$m_1 - [R_{12}]m_2 - r_1x([R_{12}]f_2) + r_Gx([R_{10}]w) + r_px([R_{10}]f_p) + [R_{10}]m_p = 0$$

La forma matricial del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ m_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{12} & 0 \\ [S_1 R_{12}] & R_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{10} & 0 \\ [S_p] & [R_{10}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_p \\ m_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{10} & 0 \\ [S_G] & [R_{10}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Renombrando

$$F_1 - [Q_{12}]F_2 + [Q_{10}]F_p + [Q_w]W = 0$$

Donde:

$$F_1 = \begin{bmatrix} f_1 \\ m_1 \end{bmatrix} \quad F_2 = \begin{bmatrix} f_2 \\ m_2 \end{bmatrix} \quad F_p = \begin{bmatrix} f_p \\ m_p \end{bmatrix}$$

$$[Q_{12}] = \begin{bmatrix} R_{12} & 0 \\ [S_1 R_{12}] & R_{12} \end{bmatrix}$$

$$[Q_w] = \begin{bmatrix} R_{10} & 0 \\ [S_G R_{10}] & R_{10} \end{bmatrix}$$

$$[Q_{10}] = \begin{bmatrix} R_{10} & 0 \\ [S_p R_{10}] & R_{10} \end{bmatrix}$$

$$[W] = \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix}$$

De tal manera que en lo general establecemos que:

$$F^A + F^R = 0$$

Y en donde:

$$F^A = [Q_{10}]F_p + [Q_w]W$$

$$F^R = F_1 - [Q_{12}]F_2$$

Siendo

$F^A$ = Torsor de agentes externos (fuerzas y momentos aplicados)

$F^R$ = Torsor de reacción (fuerza resultante y momento) [14]

## Análisis Estático

Para la aplicación directa de las ecuaciones de equilibrio procedemos a verificar en forma previa que exista conformidad en n nuestro sistema de ecuaciones, es decir que exista un numero de incógnitas similar al número de ecuaciones que se puede establecer.

ESTATICA

Numero de cuerpos=25

Ecuaciones por cuerpo=6

Total de ecuaciones=6 x 25=150

	Juntas por elemento	Incógnitas	= Parcial
Fuerza en juntas rotacionales	1x6	x5	30
Fuerza en juntas universales	2x6	x4	48
Fuerza en juntas prismáticas	1x6	x5	30
Fuerza en junta prismática.	1x6	x1	6
Fuerza en junta empotrada	1x6	x6	36
Total	= 150		

## 4.2. Cálculos para el análisis estático.

### 4.2.1. Cuerpo 1

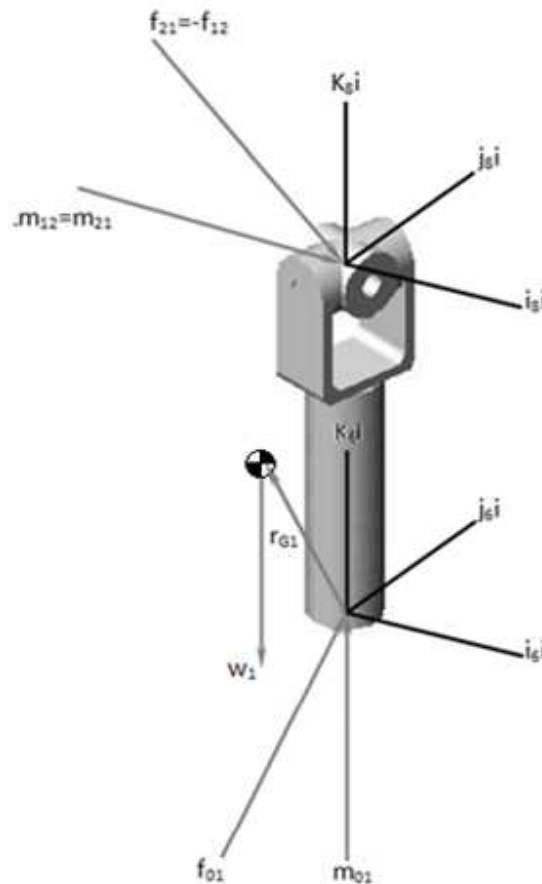


Figura 4-2 Análisis del cuerpo 1

Una fuerza externa  $F$  resultante representa, los efectos de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo generando efectos de acción y reacción. Si tomamos en cuenta las condiciones de equilibrio, y aplicando la primera Ley de Newton, tenemos las ecuaciones tal y como siguen:

$$F_{1i}^A + F_{1i}^R = 0$$

Donde:

$$F_{1i}^A = Q_{10} W$$

$$F_{1i}^R = F_{01i} - Q_{12i} F_{12i}$$

Las reacciones que estarían planteadas como sigue:

$$R_{68i} = R_{Z5i}(\theta_{87i})$$

$$R_{06i} = R_{Z6i}(\psi_{Ci}) R_{Z4i}(\theta_{Ci}) R_{Z6i}(\varphi_{Ci}) R_{Z6i}(\delta_{1Bi}) R_{Z6i}(\delta_{32i}) R_{Z4i}(\delta_{43i}) R_{Z6i}(\delta_{54i}) R_{Z6i}(\theta_{65i})$$

$$R_{60i} = R_{Z6i}^T(\theta_{65i}) R_{Z6i}^T(\delta_{54i}) R_{Z4i}^T(\delta_{43i}) R_{Z6i}^T(\delta_{32i}) R_{Z6i}^T(\delta_{1Bi}) R_{Z6i}^T(\varphi_{Ci}) R_{Z4i}^T(\theta_{Ci}) R_{Z6i}^T(\psi_{Ci})$$

Cambiando de signo para quitar la transpuesta

Entonces:

$$R_{60i} = R_{Z6i}(-\theta_{65i}) R_{Z6i}(-\delta_{54i}) R_{Z4i}(-\delta_{43i}) R_{Z6i}(-\delta_{32i}) R_{Z6i}(-\delta_{1Bi}) R_{Z6i}(-\varphi_{Ci}) R_{Z4i}(-\theta_{Ci}) R_{Z6i}(-\psi_{Ci})$$

La ecuación general de equilibrio estatico es:

$$\sum F = 0$$

$$F_{01i} - R_{68i} F_{12i} + R_{60i} W_{1i} = 0$$

Para el caso de momentos:

$$\sum M = 0$$

Aplicando la tercera Ley de Newton la sumatoria de momento queda como se marca a continuación.

$$M_{01i} - S_{68i} R_{68i} F_{12i} - R_{68i} M_{12i} + S_{w1i} R_{60i} W_{1i} = 0$$

Donde

$$S_{w1i} = S(x_{w1i}, y_{w1i}, z_{w1i}) = \begin{bmatrix} 0 & -z_{w1i} & y_{w1i} \\ z_{w1i} & 0 & -x_{w1i} \\ -y_{w1i} & x_{w1i} & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_{1i} = [0, 0, -m_{1i}g]^T$$

$$S_{68i} = S(0, 0, z_{76i}) = \begin{bmatrix} 0 & -z_{76i} & 0 \\ z_{76i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo rígido se resume en:

$$\sum f = 0 \quad ; \quad \sum m = 0$$

La matriz indica las coordenadas del cuerpo que se está analizando con la finalidad de determinar su posición, que en este caso obtenemos factorizando la ecuación de fuerzas y momentos de manera combinada.

$$f_{01i} - \begin{bmatrix} (R_{68i}) & 0 \\ (S_{68i})(R_{68i}) & (R_{68i}) \end{bmatrix} f_{12i} + \begin{bmatrix} (R_{60i}) & 0 \\ (S_{w1i})(R_{60i}) & (R_{60i}) \end{bmatrix} W_{1i} = 0$$

$$F_{01i} - Q_{12i} F_{12i} + Q_{10i} W = 0$$

Con:

$$Q_{60i} = \begin{bmatrix} (R_{60i}) & \mathbf{0} \\ (S_{60i})(R_{60i}) & (R_{60i}) \end{bmatrix}$$

$$Q_{68i} = \begin{bmatrix} (R_{68i}) & \mathbf{0} \\ (S_{68i})(R_{68i}) & (R_{68i}) \end{bmatrix}$$

## 4.2.2 Cuerpo 2

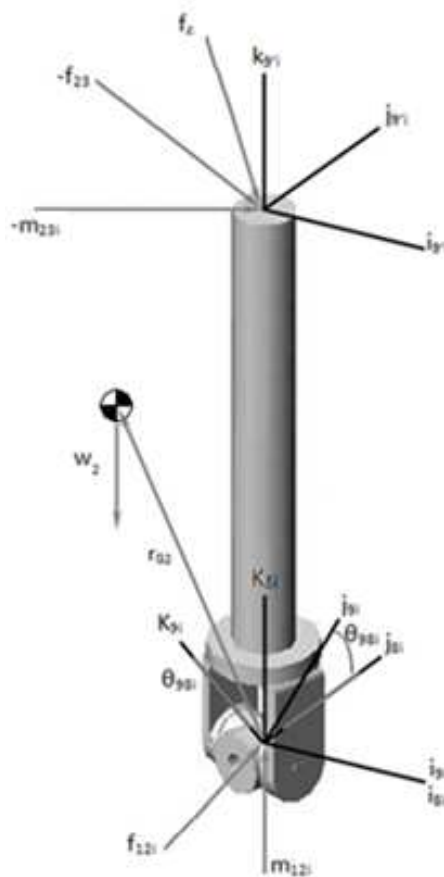


Figura 4-3 Análisis del cuerpo 2

El diagrama de cuerpo libre es el siguiente

Las fuerzas y momento ejercidos en el cilindro y la junta son

$f_{12}$  = Torsor de fuerza que ejerce el cuerpo 1 sobre el 2

$f_{23}$  = Torsor de fuerza que ejerce el cuerpo 2 sobre el cuerpo 3

$m_{12i}$ =Momento que ejerce el cuerpo 1 sobre cuerpo 2

$m_{23i}$ =Momento que ejerce el cuerpo 2 sobre cuerpo 3

$$f_{12i} - R_{89'i} f_{23i} + R_{89'i} f_{Ci} + R_{80i} W_{2i} = 0$$

Y definiendo las reacciones

entonces:

$$R_{89'i} = R_{Z4i}(\theta_{98i})$$

$$R_{08i} = R_{Z6i}(\psi_{Ci}) R_{Z4i}(\theta_{Ci}) R_{Z6i}(\varphi_{Ci}) R_{Z6i}(\delta_{1Bi}) R_{Z6i}(\delta_{32i}) R_{Z4i}(\delta_{43i}) R_{Z6i}(\delta_{54i}) R_{Z6i}(\theta_{65i}) R_{Z5i}(\theta_{87i})$$

$$R_{80i} = R_{Z5i}^T(\theta_{87i}) R_{Z6i}^T(\theta_{65i}) R_{Z6i}^T(\delta_{54i}) R_{Z4i}^T(\delta_{43i}) R_{Z6i}^T(\delta_{32i}) R_{Z6i}^T(\delta_{1Bi}) R_{Z6i}^T(\varphi_{Ci}) R_{Z4i}^T(\theta_{Ci}) R_{Z6i}^T(\psi_{Ci})$$

Cambiando de signo para quitar la transpuesta

Entonces:

$$R_{80i} = R_{Z5i}(-\theta_{87i}) R_{Z6i}(-\theta_{65i}) R_{Z6i}(-\delta_{54i}) R_{Z4i}(-\delta_{43i}) R_{Z6i}(-\delta_{32i}) R_{Z6i}(-\delta_{1Bi}) R_{Z6i}(-\varphi_{Ci}) R_{Z4i}(-\theta_{Ci}) R_{Z6i}(-\psi_{Ci})$$

Aplicando la ecuación de equilibrio tenemos:

$$\sum f = 0$$

donde:

$$f_{12i} - R_{89'i} f_{23i} + R_{80i} W_{2i} + R_{89'i} f_{Ci} = 0$$

Y de igual manera:

$$\sum m = 0$$

$$m_{12i} - S_{89'i} R_{89'i} f_{23i} - R_{89'i} m_{23i} + S_{G2i} R_{80i} W_{2i} + S_{89'i} R_{89'i} f_{Ci} = 0$$

entonces:

$$f_{12i} - \begin{bmatrix} (R_{89'i}) & 0 \\ (S_{89'i})(R_{89'i}) & (R_{89'i}) \end{bmatrix} f_{23i} + \begin{bmatrix} (R_{80i}) & 0 \\ (S_{G2i})(R_{80i}) & (R_{80i}) \end{bmatrix} W_{2i} - \begin{bmatrix} (R_{89'i}) & 0 \\ (S_{89'i})(R_{89'i}) & (R_{89'i}) \end{bmatrix} f_{Ci} = 0$$

$$F_{23i} - Q_{89'i} F_{23i} + Q_{80i} W_{2i} = 0$$

$$F_{23i} = [f_{23Xi}, f_{23Yi}, 0, m_{23Xi}, m_{23Yi}, 0]$$

$$S_{G2i} = S(x_{G2i}, y_{G2i}, z_{G2i}) = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G2i} & y_{G2i} \\ z_{G2i} & 0 & -x_{G2i} \\ -y_{G2i} & x_{G2i} & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{89'i} = \begin{bmatrix} (R_{89'i}) & \mathbf{0} \\ ((S_{89'i})(R_{89'i}) & (R_{89'i}) \end{bmatrix}$$

$$Q_{80i} = \begin{bmatrix} (R_{80i}) & \mathbf{0} \\ ((S_{80i})(R_{80i}) & (R_{80i}) \end{bmatrix}$$

### 4.2.3 Cuerpo 3

El diagrama de cuerpo libre es el siguiente:

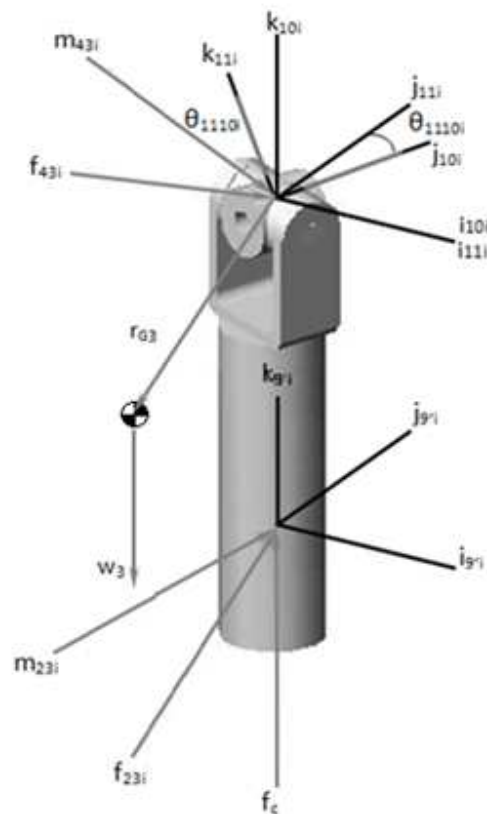


Figura 4-4 Análisis del cuerpo 3

Las fuerzas y momento ejercidos en el cilindro y la junta son

$f_{23i}$  = Torsor de fuerza que ejerce el cuerpo 2 sobre el 3

$f_{43i}$  = Torsor de fuerza que ejerce el cuerpo 4 sobre el cuerpo 3

$m_{23i}$  = Momento que ejerce el cuerpo 2 sobre cuerpo 3

$m_{43i}$ =Momento que ejerce el cuerpo 4 sobre cuerpo 3

$f_{Ci}$ =Fuerza de empuje provocada por el sistema neumático (fuerza requerida para levantar el vástago).

Y definiendo las reacciones

entonces:

$$R_{911i}=R_{Z5i}(\theta_{1110i})$$

$$R_{09i}=R_{Z6i}(\psi_{Ci}) R_{Z4i}(\theta_{Ci}) R_{Z6i}(\varphi_{Ci}) R_{Z6i}(\delta_{1Bi}) R_{Z6i}(\delta_{32i}) R_{Z4i}(\delta_{43i}) R_{Z6i}(\delta_{54i}) R_{Z6i}(\theta_{65i}) R_{Z5i}(\theta_{87i}) R_{Z5i}(\theta_{911i})$$

$$R_{90i}=R_{Z4i}^T(\theta_{98i}) R_{Z5i}^T(\theta_{87i}) R_{Z6i}^T(\theta_{65i}) R_{Z6i}^T(\delta_{54i}) R_{Z4i}^T(\delta_{43i}) R_{Z6i}^T(\delta_{32i}) R_{Z6i}^T(\delta_{1Bi}) R_{Z6i}^T(\varphi_{Ci}) R_{Z4i}^T(\theta_{Ci}) R_{Z6i}^T(\psi_{Ci})$$

Cambiando de signo para quitar la transpuesta

Entonces:

$$R_{90i}=R_{Z4i}(-\theta_{98i}) R_{Z5i}(-\theta_{87i}) R_{Z6i}(-\theta_{65i}) R_{Z6i}(-\delta_{54i}) R_{Z4i}(-\delta_{43i}) R_{Z6i}(-\delta_{32i}) R_{Z6i}(-\delta_{1Bi}) R_{Z6i}(-\varphi_{Ci}) R_{Z4i}(-\theta_{Ci}) R_{Z6i}(\psi_{Ci})$$

Aplicando la ecuación de equilibrio tenemos:

$$\sum f=0$$

donde:

$$F_{23i}-R_{911i}F_{34i}+R_{90i}W_{3i}+R_{911i}F_{Ci}=0$$

Y de igual manera:

$$\sum m=0$$

$$m_{23i}-S_{911i}R_{911i}f_{34i}+R_{911i}m_{34i}+S_{G3i}R_{90i}w_{3i}+S_{911i}R_{911i}f_{Ci}=0$$

entonces:

$$\begin{bmatrix} f_{23i} \\ m_{23i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (R_{911i}) & 0 \\ (S_{23i})(R_{911i}) & (R_{911i}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{34i} \\ m_{34i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (R_{911i}) & 0 \\ (S_{G3i})(R_{911i}) & (R_{911i}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{3i} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (R_{89'i}) & 0 \\ (S_{89'i})(R_{89'i}) & (R_{89'i}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{Ci} \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$F_{34i}-Q_{911i}F_{34i}+Q_{90i}W_{3i}+R_{911i}F_{Ci}=0$$

$$F_{23i}=[f_{23Xi}, f_{23Yi}, 0, m_{23Xi}, m_{23Yi}, m_{23Zi}]$$

$$W_{3i}=[0, 0, -m_3ig]^T$$



$$\mathbf{S}_{G3i} = \mathbf{S}(x_{G3i}, y_{G3i}, z_{G3i}) = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G3i} & y_{G3i} \\ z_{G3i} & 0 & -x_{G3i} \\ -y_{G3i} & x_{G3i} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{911i} = \mathbf{S}(0, 0, z_{109i}) = \begin{bmatrix} 0 & -z_{109i} & 0 \\ z_{109i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{911i} = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_{911i}) & 0 \\ (\mathbf{S}_{911i})(\mathbf{R}_{911i}) & (\mathbf{R}_{911i}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{90i} = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_{90i}) & 0 \\ (\mathbf{S}_{90i})(\mathbf{R}_{90i}) & (\mathbf{R}_{90i}) \end{bmatrix}$$

#### 4.1.4 Cuerpo 4

El diagrama de cuerpo libre es el siguiente:

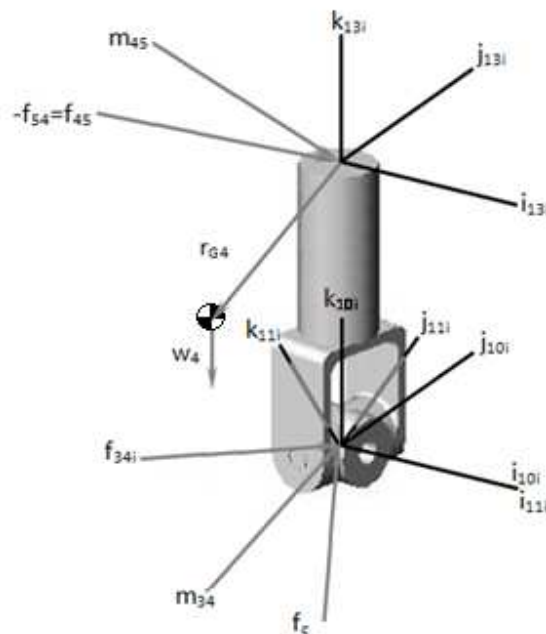


Figura 4-5 Análisis del cuerpo 4

Las fuerzas y momento ejercidos en el cilindro y la junta son

$f_{34i}$  = Torsor de fuerza que ejerce el cuerpo 3 sobre el cuerpo 4

$f_{45i}$  = Torsor de fuerza que ejerce el cuerpo 4 sobre el cuerpo 5

$m_{34i}$  = Momento que ejerce el cuerpo 3 sobre cuerpo 4

$m_{45i}$ =Momento que ejerce el cuerpo 4 sobre cuerpo 5

$f_c$ =Fuerza de empuje provocada por el sistema neumático (fuerza requerida para levantar el vástago).

Y definiendo las reacciones

entonces:

$$R_{1113i} = R_{Z5i}(\theta_{1211i})$$

$$R_{011i} = R_{Z6i}(\psi_{Ci}) R_{Z4i}(\theta_{Ci}) R_{Z6i}(\varphi_{Ci}) R_{Z6i}(\delta_{1Bi}) R_{Z6i}(\delta_{32i}) R_{Z4i}(\delta_{43i}) R_{Z6i}(\delta_{54i}) R_{Z6i}(\theta_{65i}) \\ R_{Z5i}(\theta_{87i}) R_{Z4i}(\theta_{98i}) R_{Z4i}(\theta_{1110i})$$

$$R_{110i} = R_{Z4i}^T(\theta_{1110i}) R_{Z4i}^T(\theta_{98i}) R_{Z5i}^T(\theta_{87i}) R_{Z6i}^T(\theta_{65i}) R_{Z6i}^T(\delta_{54i}) R_{Z4i}^T(\delta_{43i}) R_{Z6i}^T(\delta_{32i}) R_{Z6i}^T(\delta_{1Bi}) \\ R_{Z6i}^T(\varphi_{Ci}) R_{Z4i}^T(\theta_{Ci}) R_{Z6i}^T(\psi_{Ci})$$

Cambiando de signo para quitar la transpuesta

Entonces:

$$R_{110i} = R_{Z4i}(-\theta_{1110i}) R_{Z4i}(-\theta_{98i}) R_{Z5i}(-\theta_{87i}) R_{Z6i}(-\theta_{65i}) R_{Z6i}(-\delta_{54i}) R_{Z4i}(-\delta_{43i}) R_{Z6i}(-\delta_{32i}) R_{Z6i}(-\delta_{1Bi}) \\ R_{Z6i}(-\varphi_{Ci}) R_{Z4i}(-\theta_{Ci}) R_{Z6i}(-\psi_{Ci})$$

Aplicando la ecuación de equilibrio tenemos:

$$\sum f = 0$$

donde:

$$f_{34i} - R_{1113i} f_{45i} + R_{110i} W_{4i} = 0$$

Y de igual manera

$$\sum m = 0$$

entonces:

$$m_{34i} - S_{1113i} R_{1113i} f_{45i} - R_{1113i} m_{45i} + S_{G4i} R_{110i} W_{4i} = 0$$

$$f_{34i} \begin{bmatrix} (R_{1113i}) & 0 \\ (S_{1113i})(R_{1113i}) & (R_{1113i}) \end{bmatrix} f_{45i} + \begin{bmatrix} (R_{1113i}) & 0 \\ (S_{1113i})(R_{1113i}) & (R_{1113i}) \end{bmatrix} W_{4i} = 0$$

$$F_{34i} - Q_{1113i} F_{45i} + Q_{110i} W_{4i} = 0$$

$$F_{45i} = [f_{45Xi}, f_{45Yi}, 0, m_{45Xi}, m_{45Yi}, 0]$$

$$R_{1113i} = (R_{Z2i})(d_{7i}) + (R_{Z11i})(\theta_{8i})$$

$$W_{4i} = (0, 0, -m_{4i}g)$$

$$S(0,0,Z_{1312i}) = \begin{bmatrix} 0 & -Z_{1312i} & 0 \\ Z_{1312i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{1113i} = R_{Z5}(\theta_{1211}) S(0,0,Z_{1312i}) R_{Z5}(-\theta_{1211})$$

$$S(x_{G4i}, y_{G4i}, z_{G4i}) = \begin{bmatrix} 0 & -Z_{G4i} & Y_{G4i} \\ Z_{G4i} & 0 & -X_{G4i} \\ -Y_{G4i} & X_{G4i} & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{G4i} = R_{Z5}(\theta_{1211}) S(x_{G4i}, y_{G4i}, z_{G4i}) R_{Z5}(-\theta_{1211})$$

$$Q_{1113i} = \begin{bmatrix} (R_{1113i}) & 0 \\ (S_{1113i})(R_{1113i}) & (R_{1113i}) \end{bmatrix}$$

$$Q_{110i} = \begin{bmatrix} (R_{110i}) & 0 \\ (S_{110i})(R_{110i}) & (R_{110i}) \end{bmatrix}$$

### 4.1.5 Cuerpo 5

El diagrama de cuerpo libre es el siguiente:

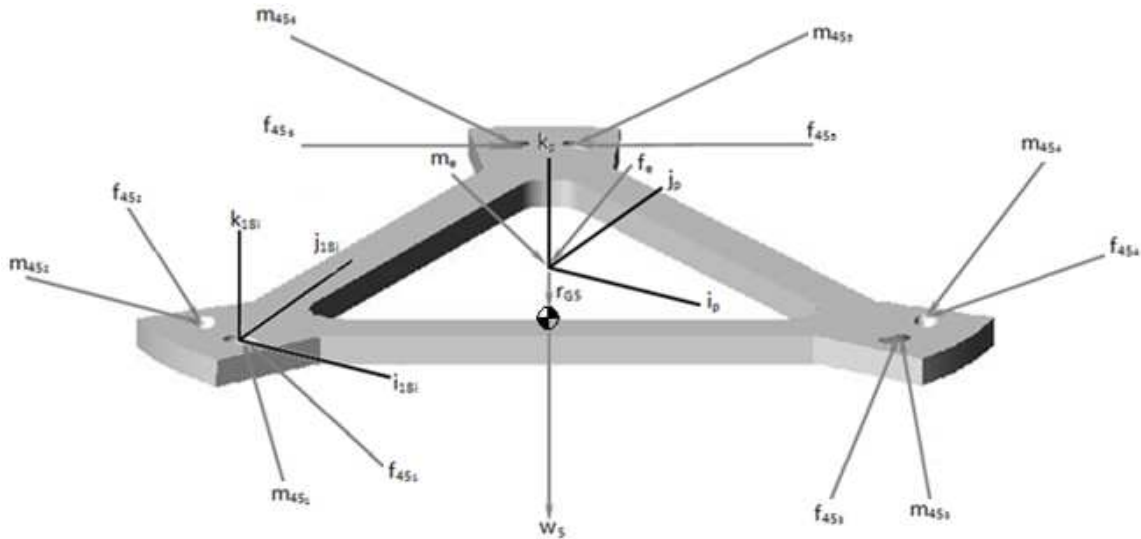


Figura 4-6 Análisis del cuerpo 5

Las fuerzas y momento ejercidos en el cilindro y la junta son

$F_{451}$  = Torsor de fuerza que ejerce el cuerpo 5 sobre el cuerpo 4 de la cadena 1

$F_{452}$  = Torsor de fuerza que ejerce el cuerpo 5 sobre el cuerpo 4 de la cadena 2

$F_{453}$  Torsor de fuerza que ejerce el cuerpo 5 sobre el cuerpo 4 de la cadena 3

$F_{454}$  Torsor de fuerza que ejerce el cuerpo 5 sobre el cuerpo 4 de la cadena 4

$F_{455}$  Torsor de fuerza que ejerce el cuerpo 5 sobre el cuerpo 4 de la cadena 5

$F_{456}$  Torsor de fuerza que ejerce el cuerpo 5 sobre el cuerpo 4 de la cadena 6

La ecuación general de equilibrio estático es:

$$F_P^A + F_P^R = 0$$

$$F_P^A = Q_{Pe} f_e + Q_{P,0} W_P$$

$$F_P^R = \sum_{i=1}^6 Q_{P,18i} f_{45i}$$

Y definiendo las reacciones:

Entonces:

$$R_{P18} = R_{Z6}(\delta_{14P}) R_{Z6}(R_{1615}) R_{Z4}(\delta_{1716}) R_{Z6}(\delta_{1817})$$

$$R_{0P} = R_{Z6}(\psi_P) R_{Z4}(\theta_P) R_{Z6}(\varphi_P)$$

Cambiando signos para quitar la transpuesta

Entonces:

$$R_{P0} = R_{Z6}(-\varphi_P) R_{Z4}(-\theta_P) R_{Z6}(-\psi_P)$$

Aplicando la ecuación de equilibrio tenemos:

$$\sum f = 0$$

entonces:

$$\sum R_{P18} f_{45i} + R_{P0} f_e + R_{P0} W_5 = 0$$

donde

$$f_e = f_{ex}, f_{ey}, f_{ez}$$

Aplicando la ecuación de equilibrio de momentos:

$$\sum m = 0$$

Entonces:

$$\sum S_{P18} R_{P18} f_{45i} + \sum R_{P18} m_{45i} + S_{P0} R_{P0} f_e + \sum R_{P0} m_e = 0$$

Donde:

$$S_{P18} = R_{Z6}(\delta_{14P})S(X_{1514}, \mathbf{0}, \mathbf{0})R_{Z6}(-\delta_{14P})$$

## Resultados

### Graficas del análisis estático

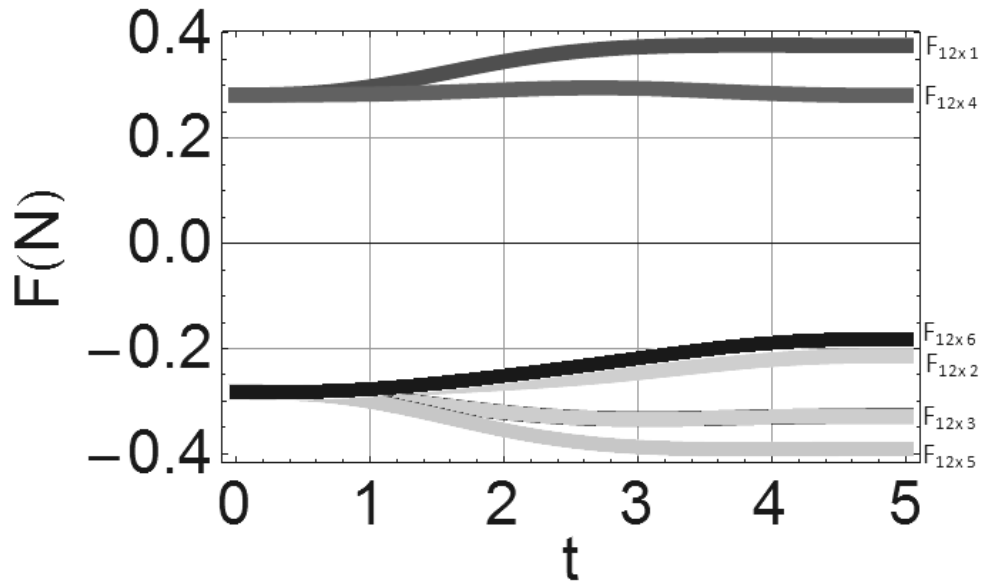


Figura 4-7 Gráfica de  $F_{12x}$

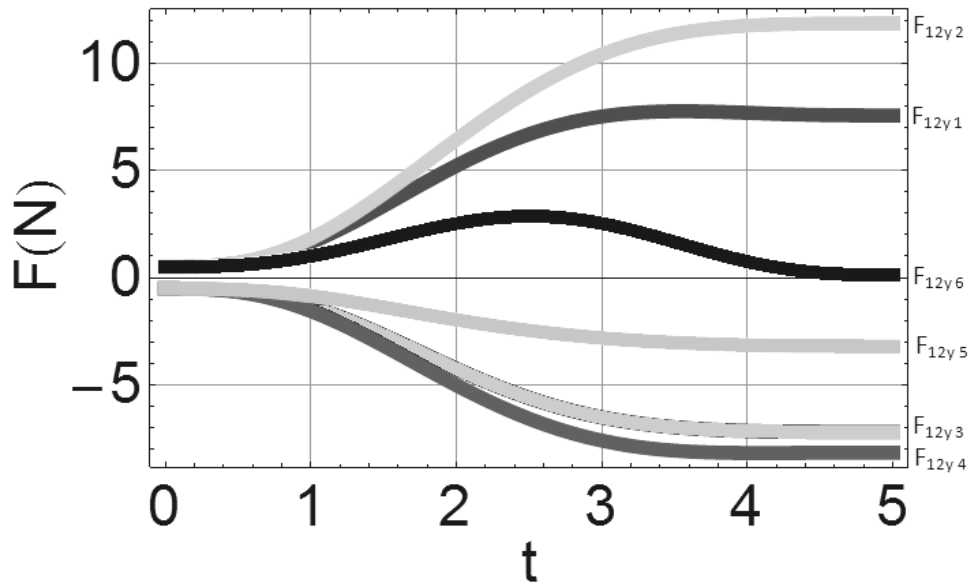


Figura 4-8 Gráfica de  $F_{12yi}$

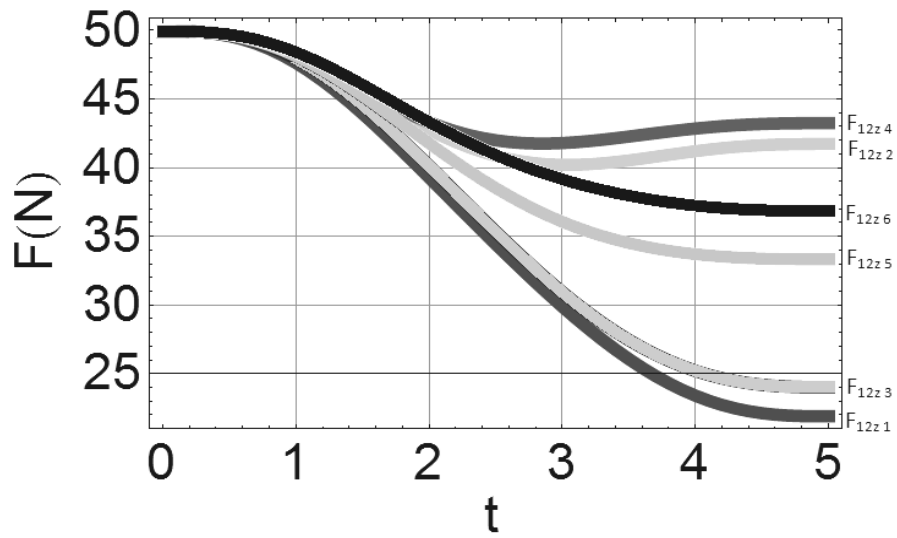


Figura 4-9 Gráfica de  $F_{12z_i}$

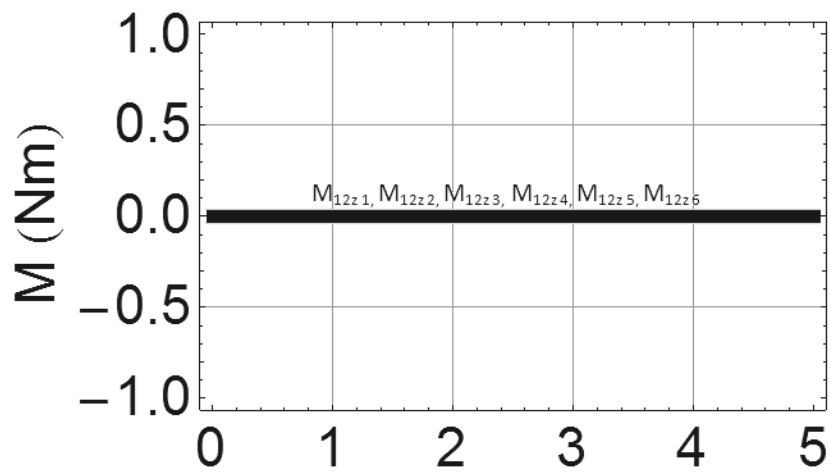


Figura 4-10 Gráfica de  $M_{12z_i}$

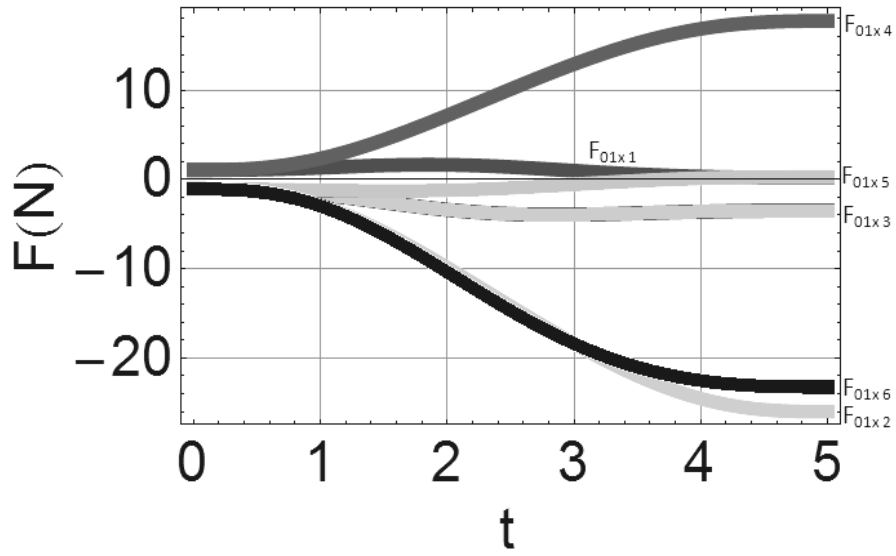


Figura 4-11 Gráfica de  $F_{01x_i}$

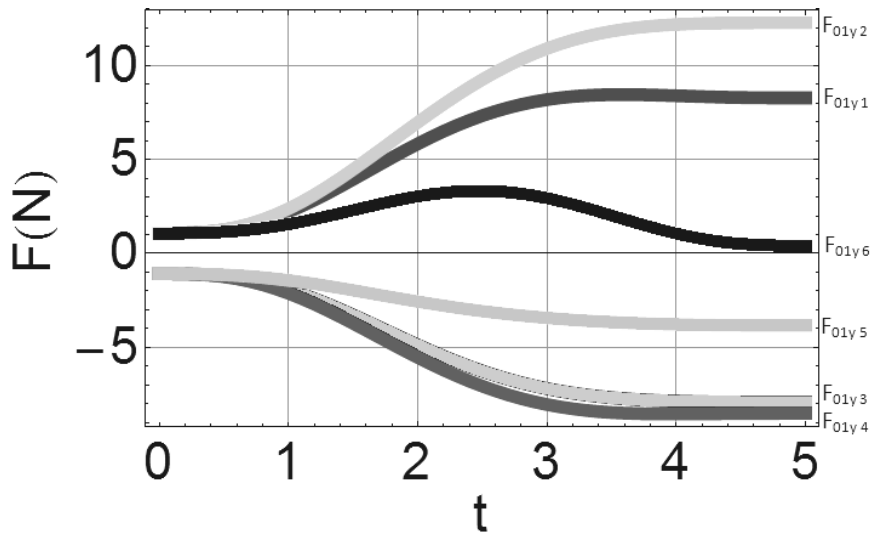


Figura 4-12 Gráfica de  $F_{01y_i}$

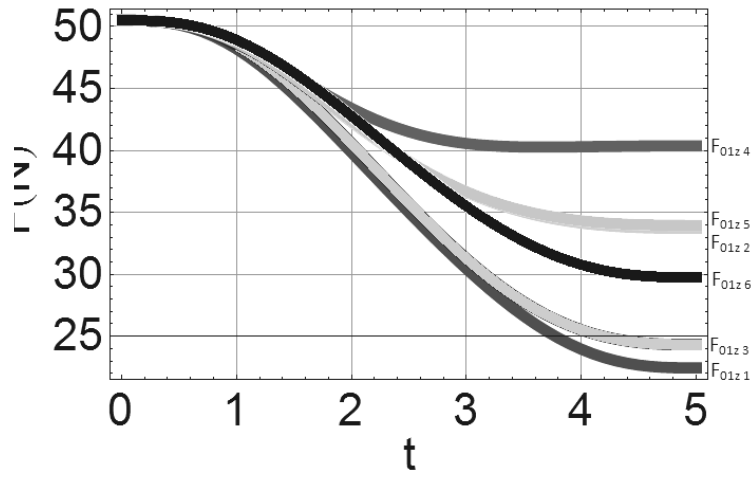


Figura 4-13 Gráfica de  $F_{012i}$

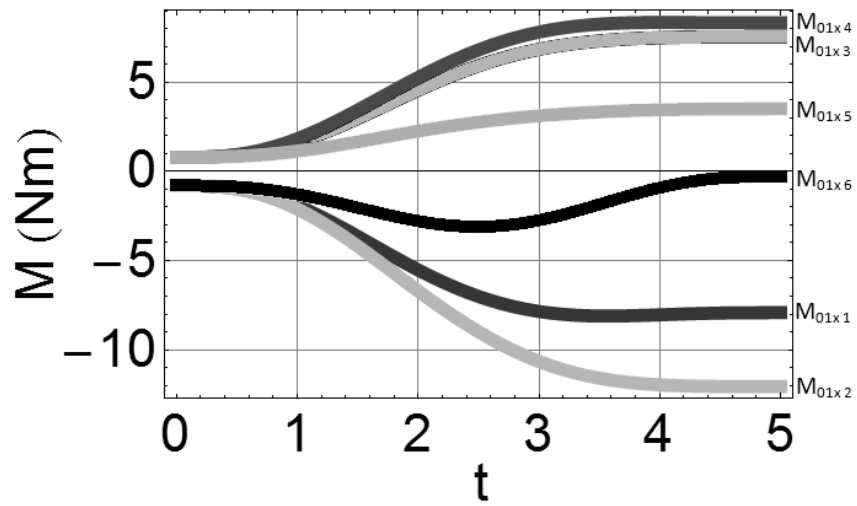


Figura 4-14 Gráfica de  $M_{01xi}$



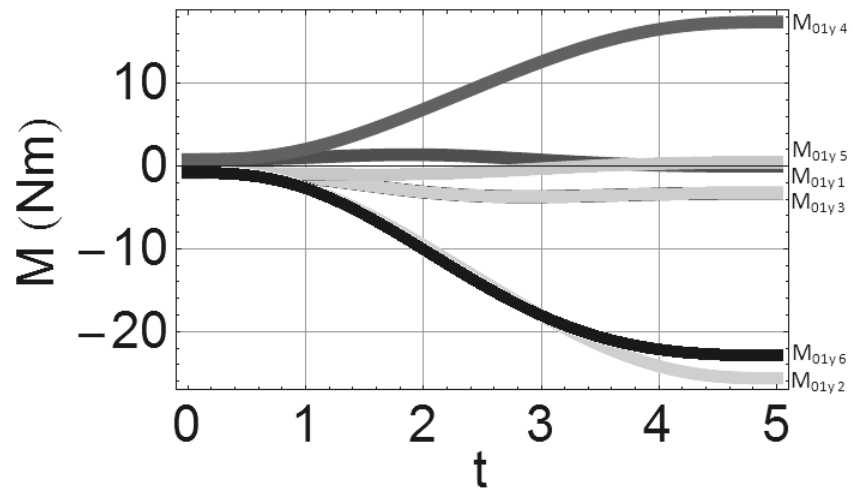


Figura 4-15 Gráfica de  $M_{01y_i}$

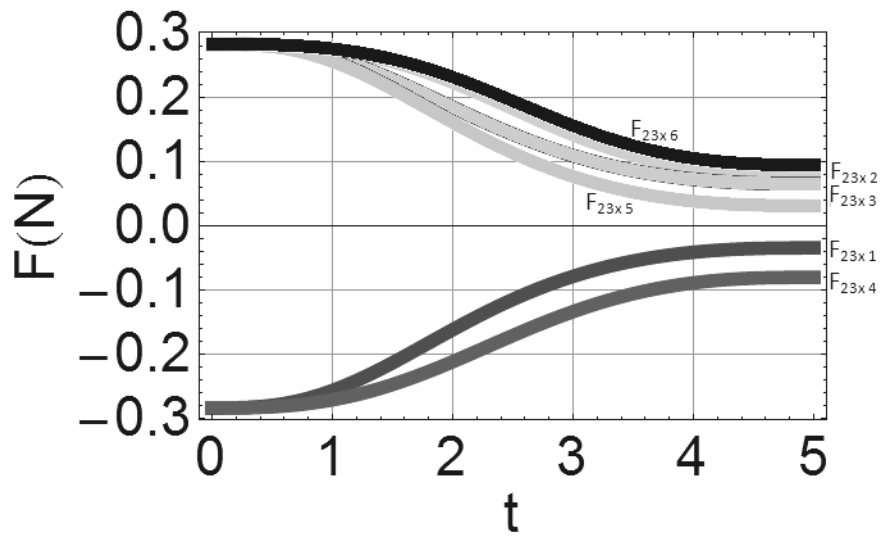


Figura 4-16 Gráfica de  $F_{23x_i}$

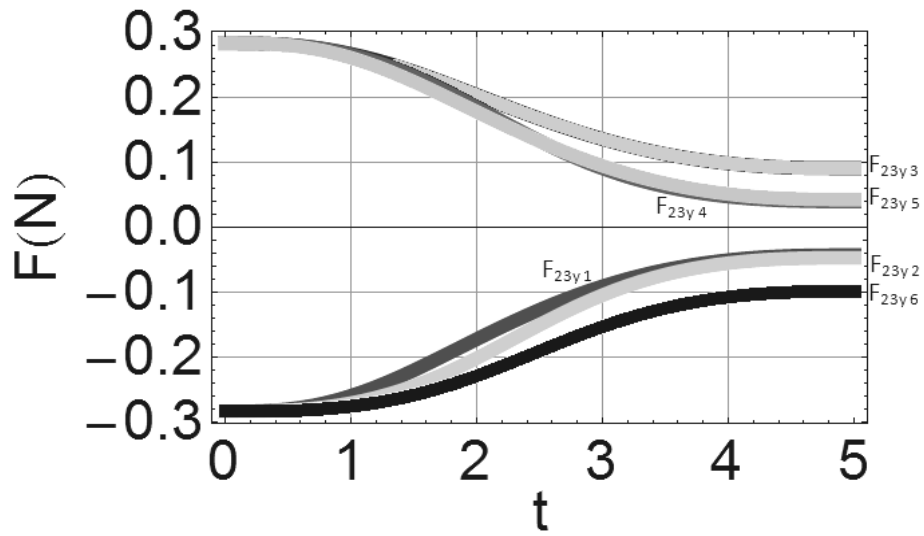


Figura 4-17 Gráfica de  $F_{23y_i}$

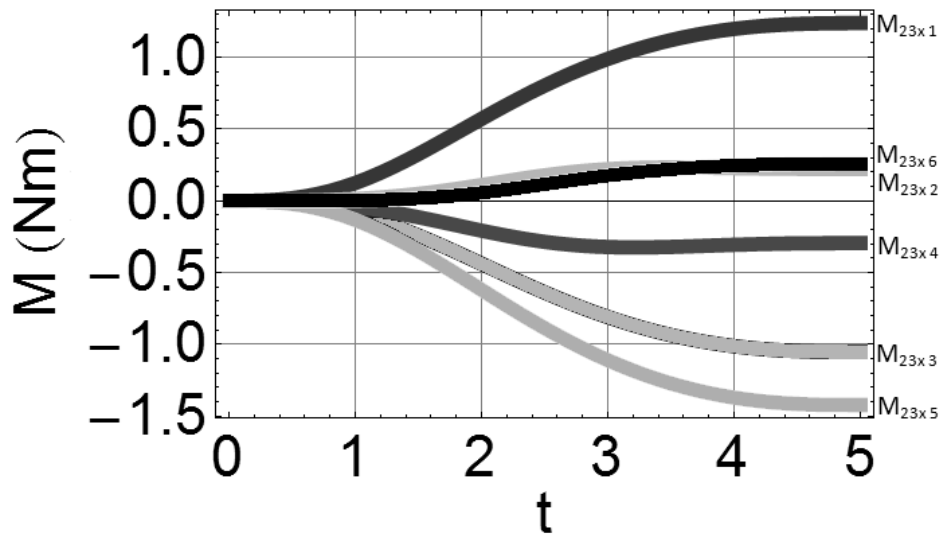


Figura 4-18 Gráfica de  $M_{23x_i}$

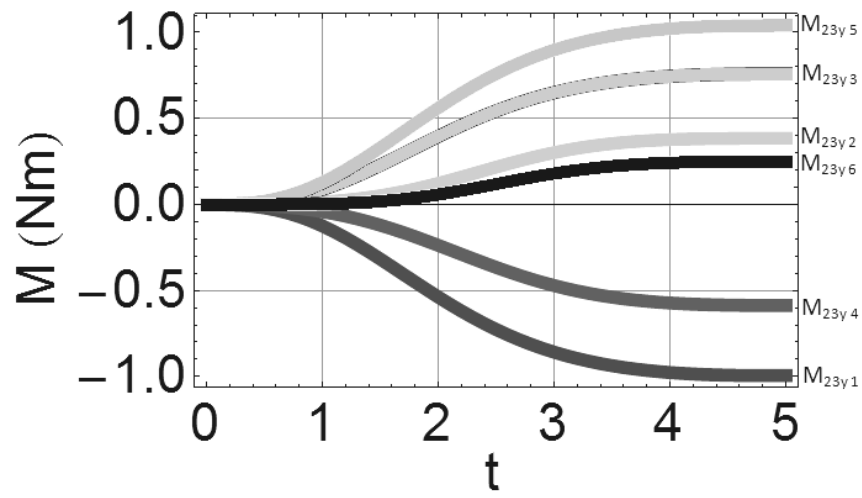


Figura 4-19 Gráfica de  $M_{23y_i}$

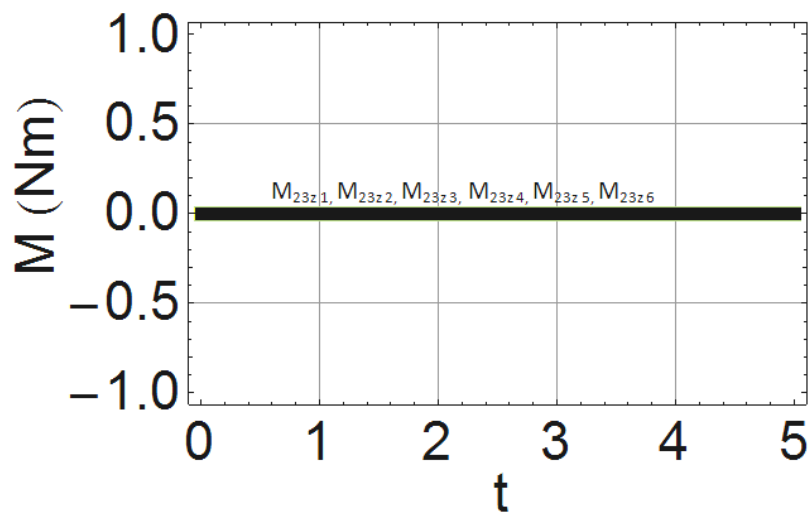


Figura 4-20 Gráficas de  $M_{23z_i}$

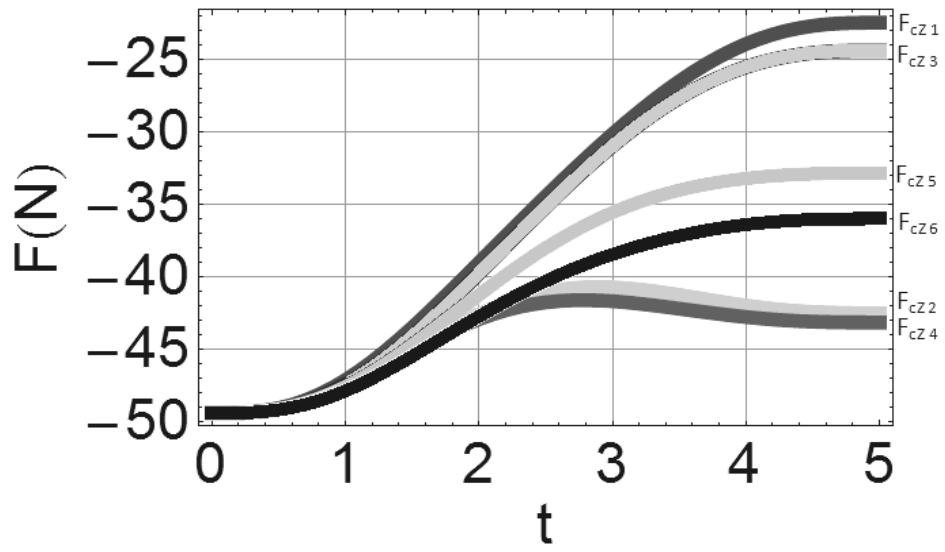


Figura 4-21 Gráfica de  $F_{cz_i}$

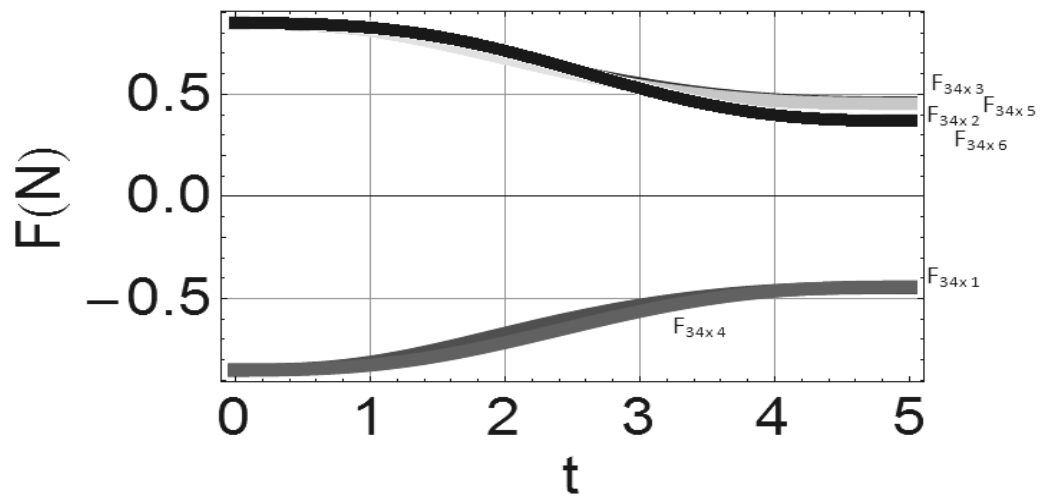


Figura 4-22 Gráfica de  $F_{34x_i}$

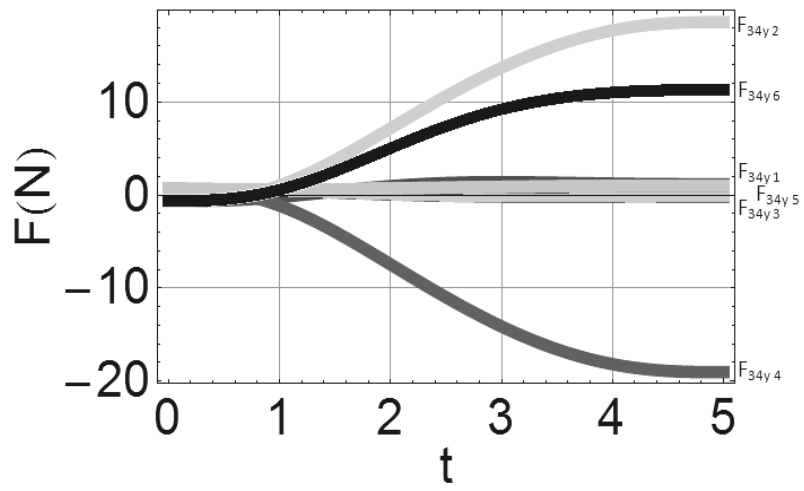


Figura 4-23 Gráfica de  $F_{34y_i}$

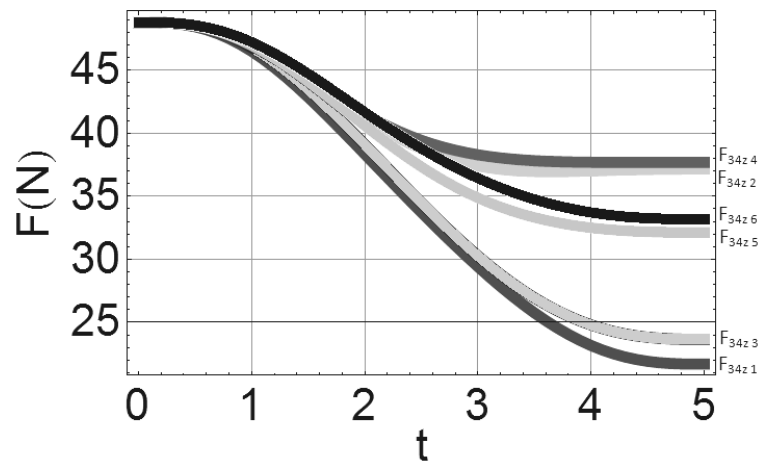


Figura 4-24 Gráfica de  $F_{34z_i}$

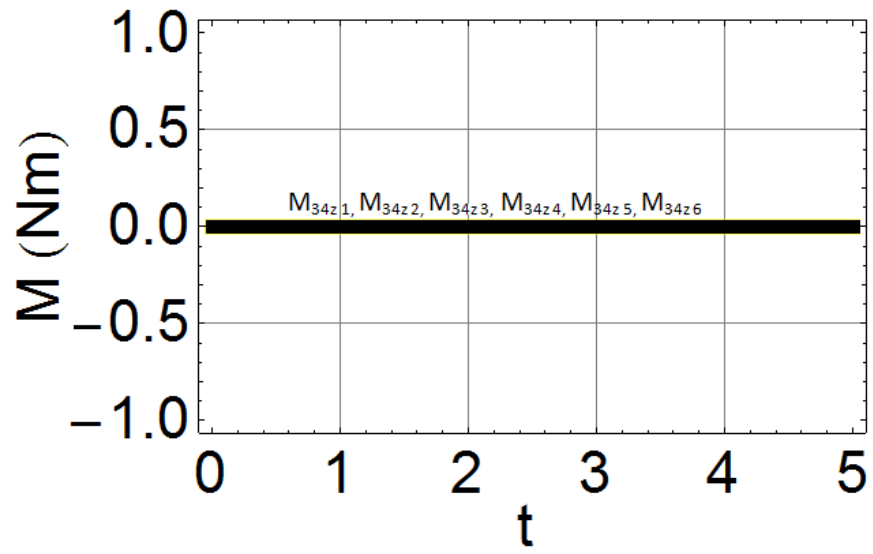


Figura 4-25 Gráficas de  $M_{34z_i}$

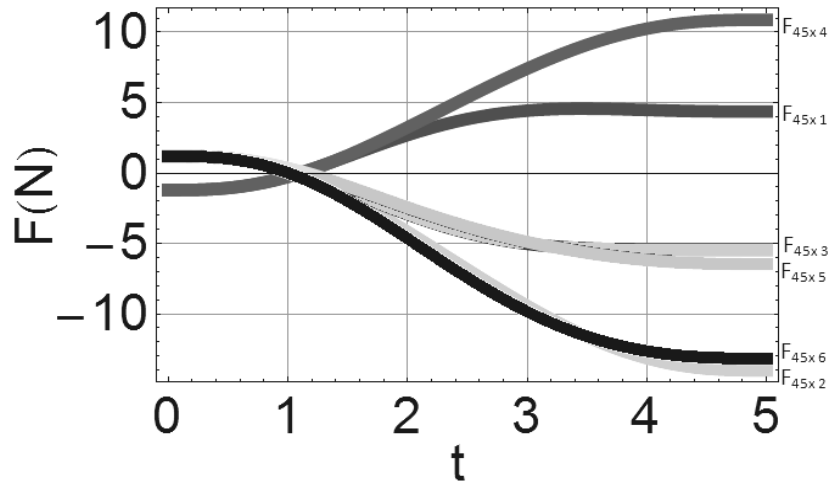


Figura 4-26 Gráficas de  $F_{45x_i}$

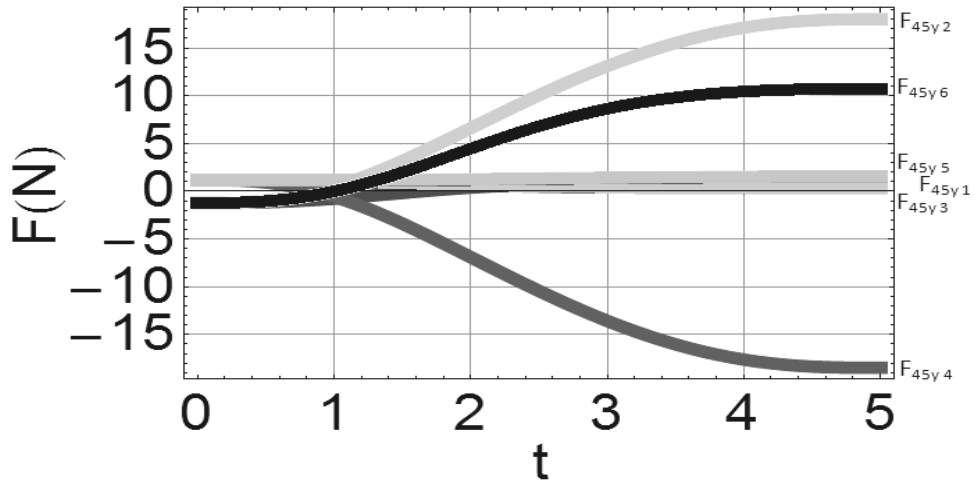


Figura 4-27 Gráficas de  $F_{45y_i}$

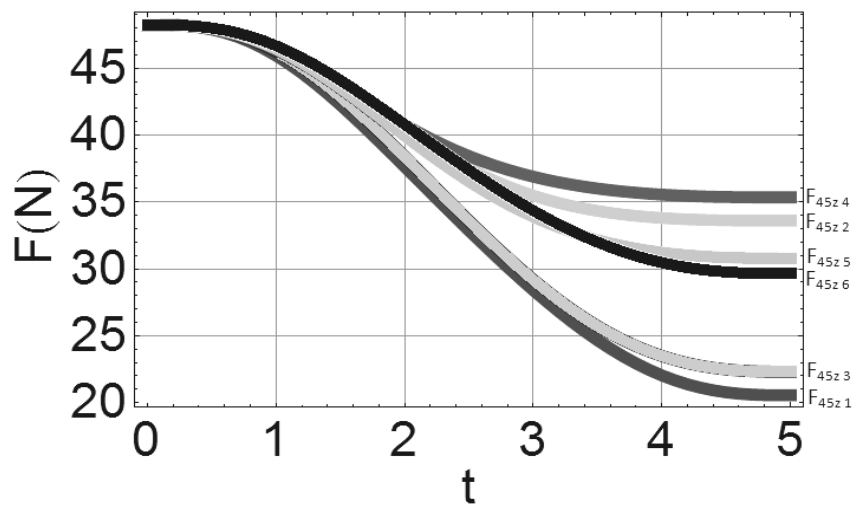


Figura 4-28 Gráficas de  $F_{45z_i}$

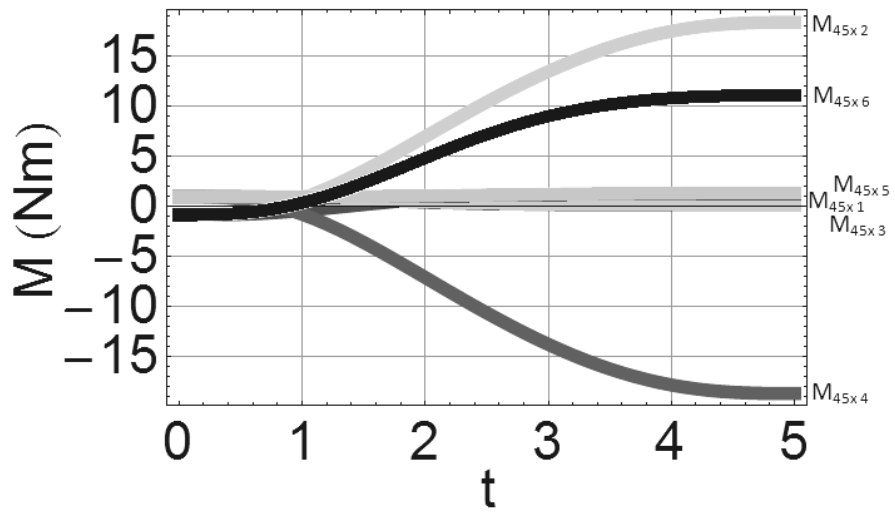


Figura 4-29 Gráficas de  $M_{45X_i}$

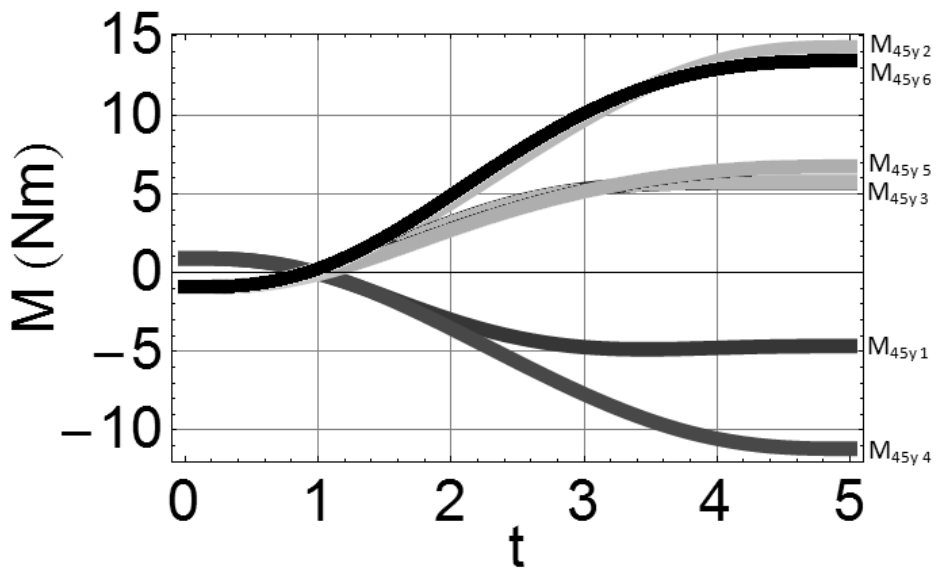


Figura 4-30 Gráficas de  $M_{45Y_i}$



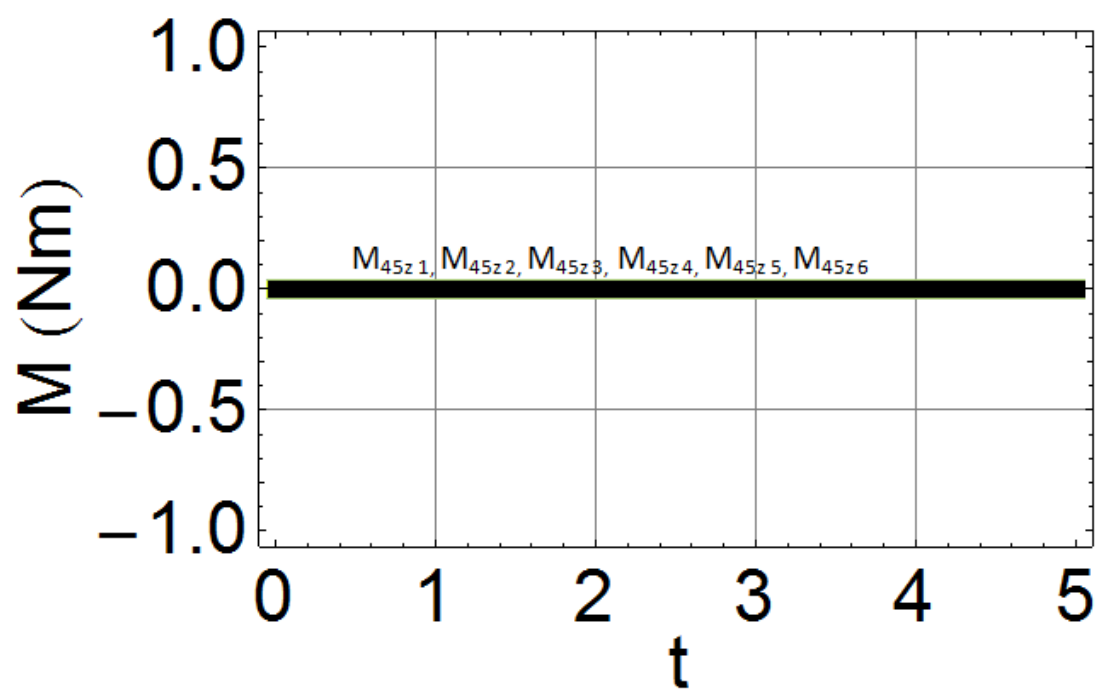


Figura 4-31 Gráficas de  $M_{45z_i}$

# CONCLUSIONES.

Se realizó el análisis cinemático y estático que nos permite predecir el comportamiento de la plataforma de Stewart bajo condiciones cuasi estáticas, con esto es posible conocer el movimiento del manipulador y realizar un diseño óptimo en el cual se dimensionen las partes que lo componen, del tal forma que soporten las condiciones a las que estará sujeto el manipulador.

La plataforma de Stewart es un mecanismo complejo cuyo análisis requirió un análisis matemático riguroso en cada una de sus partes, dada su amplia variedad de movimientos que realiza en interacción mutua, siendo esta una plataforma de movimiento sinérgico, obteniendo así diferentes magnitudes de ángulos y el desplazamiento del actuador para el análisis cinemático, y las diferentes magnitudes de fuerza y momentos ejercidas sobre el dispositivo, todas estas variables que van en función de un corto periodo de 5 segundos, para que de esta manera, fuera posible obtener los resultados elementales de cómo se da el movimiento y la magnitud de las fuerzas en el dispositivo durante el transcurso del movimiento, para ello requerimos una serie de ecuaciones planteadas con base a los cambios de base y matrices homogéneas con la que fue posible determinar en un gran sistema de ecuaciones dichas incógnitas, asignando para ello, obviamente, diferentes valores para el tiempo y estableciendo en forma gráfica los resultados.

Aparte de los comportamientos estáticos de sus componentes, la determinación de las fuerzas nos sirve también como un factor importante para conocer cuáles son los materiales idóneos y las características correctas de cada una de sus piezas que conforman la plataforma, para anticipar cualquier posible falla que pueda presentarse en el diseño de la plataforma, especialmente las juntas, los soportes y las placas de la plataforma; aun que eso no fue tomado en cuenta en la elaboración de este proyecto, es otra utilidad muy importante del análisis aplicable dentro de nuestro campo ingenieril.

La aplicación de este manipulador en el campo ingenieril puede abarcar varias áreas de trabajo, la primera, y para la cual fue estructurada por su creador, James Stewart, fue para la simulación de vuelo, aun que de ahí se pueden desprender muchas más, tales como estabilidad sobre un manipulador móvil, tareas de ensamble, actividades heliostáticas de seguimiento solar, inclusive aplicaciones terapéuticas para masaje y amortiguación del pie

# BIBLIOGRAFIA.

- [1]. Robótica: control, detección, visión e inteligencia, K.S. Fu, R.C. González, C.S.G. Lee, 1a edición, McGraw-Hill
- [2]. Robótica: Manipuladores y robots móviles, Ollero Baturone Anibal, coedición, editorial marcombo.
- [3]. Barrientos, Antonio. "Fundamentos de robótica", España 1997, Ed. McGrawHill
- [4]. [http://grupos.emagister.com/documento/orientacion\\_basica\\_de\\_robot/22853-528244](http://grupos.emagister.com/documento/orientacion_basica_de_robot/22853-528244)
- [5]. Howard Anton, Introducción al algebra lineal, Limusa.
- [6]. <http://148.202.12.20/~cin/robotic/tarease/dh/mhomogeneas.htm>
- [7]. Algebra lineal, Serge Lang, 2ª edición , Ed. Fondo educativo interamericano
- [8]. Mecánica para ingeniería; Estática, Antony Berford y Wallace Fowler, Ed Addison westley longman de México S.A., única edición.
- [9]. D. Stewart, Proc. Instn. Mech. Engrs. (Part I) 180 (15) (1965/66) 371±386
- [10]. V.E. Gough, S.G. Whitehall, in: Proc. 9th Int. Tech. Congr. F.I.S.I.T.A. May 1962, Instn Mech. Engrs 117,1962.
- [11]. K.H. Hunt, "Trans. ASME, J. Mech". Transm. Automn Des. 105 (1983),
- [12]. K.H. Hunt, Kinematic Geometry of Mechanisms, Clarendon Press, Oxford, 1978.
- [13]. <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/404/40470402.pdf>
- [14]. Z. Geng, L. Haynes, Six degree of freedom active vibration isolation system using the Stewart platforms, IEEE Transactions on Control Systems Technology 2 (1) (1994) 45–53.]
- [15]. Shen H. Yang T. and Ma L.Synthesis and structure analysis of kinematic structures of 6-dof parallel robotic mechanism, Mechanism and Machine Teory, Volume 40, Issue 10, October 2005
- [16]. Ingeniería mecánica; Estática, Hibbeler, 6ª edición, McGraw-hill
- [17]. Cursos de mecánica eléctrica id Ad Del Automóvil (más de 600 páginas)
- [18]. Waldron K. J. and kinzelG.L. Kinematics, dynamics, and design of machinery, john Wiley & sons, 2003