



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

Familia de controladores PID tolerantes a fallas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA ELÉCTRICA - CAMPO CONTROL

P R E S E N T A

Javier Alejandro Mora Hernández

TUTOR:

Dra. Maria Cristina Verde Rodarte

2012

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Marco Antonio Artéaga Pérez

Secretario: Dr. Paul Rolando Maya Ortíz

Vocal: Dra. María Cristina Verde Rodarte

1^{er} Suplente: Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria

2^{do} Suplente: Dr. Yu Tang Xu

Tesis realizada en el Instituto de Ingeniería de la UNAM

TUTOR DE TESIS:

DRA. CRISTINA VERDE RODARTE

FIRMA

Agradecimientos

A Dios.

A mis padres Javier y Concepción, y a mis hermanos José Alfredo y Edgar, por su infinito apoyo.

A la Dra. Cristina Verde por su gran apoyo en la realización de este trabajo, así como por su excelente calidad humana.

A mis amigos.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo otorgado a través del Programa de Becas Nacionales.

Al Instituto de Ingeniería de la UNAM por las facilidades otorgadas en la realización de este trabajo.

Contenido

Agradecimientos	V
Contenido	V
Resumen	IX
1. Introducción	1
2. Diseño de controladores PID estabilizantes	5
2.1. Teorema de Hermite - Biehler	5
2.2. Generalización del Teorema de Hermite - Biehler	6
2.3. Familia de controladores PID estabilizantes	9
2.4. Antecedentes de Programación Lineal	13
2.5. Búsqueda de la región de los parámetros ID estabilizantes	16
2.5.1. Ejemplo 1	21
2.6. Control tolerante a fallas	24
2.6.1. Estabilización por medio de controladores PID	27
2.6.2. Estabilidad conmutada	27
2.6.3. Ejemplo 2	29
2.6.4. Implementación en MATLAB®	30
3. Familias de controladores PID estabilizantes para sistemas de 2×2	33
3.1. Diseño de canales individuales	34
3.2. Diseño de controladores PID estabilizantes	41
4. Aplicaciones	43
4.1. Suspensión magnética. Resultados experimentales	43
4.1.1. Actuador	44
4.1.2. Sensor	45
4.1.3. Sistema magnético	45
4.2. Turbina de gas. Control tolerante a fallas	49
4.3. Sistema MIMO. Modelo de un helicóptero	52
5. Conclusiones	61
A. Diagrama de flujo para el cálculo de controladores PID	63

Referencias

67

Resumen

En los procesos industriales, es necesario tener un control eficiente sobre aquellas variables que intervienen de manera crítica en ellos. Por esto, es importante contar con dispositivos o programas capaces de llevar a cabo este control de manera segura, eficiente y económica.

En la actualidad existen diversas técnicas de control orientadas a satisfacer dicho objetivo. Una de las más conocidas es la estructura de control Proporcional Integral Derivativa ó PID, la cual ofrece entre otras características, sencillez de implementación, un bajo número de parámetros a sintonizar y una amplia gama de técnicas de diseño e implementación. Debido a ello, el controlador de tipo PID sigue siendo muy popular entre los ingenieros de control, y se siguen desarrollando técnicas de sintonización, diseño y numerosas aplicaciones.

Uno de los trabajos mas recientes al respecto consiste en una técnica propuesta por Bhattacharyya y otros (Datta *et al.* 2000), (Bhattacharyya y Keel 2008) que permite hallar toda una familia de controladores estabilizantes para una planta determinada.

En este trabajo se presenta la teoría relacionada a dicha técnica, así como algunos de los resultados obtenidos en la elaboración de un software de diseño de controladores que implementa esta técnica. Se presenta además, una modificación realizada al programa base que permite obtener las familias de controladores estabilizantes de múltiples plantas de manera simultánea con la finalidad de aplicar los resultados en el área de control tolerante a fallas. Finalmente, se propone utilizar el marco de referencia conocido como diseño de canales individuales para extender los resultados del diseño de controladores estabilizantes al caso de sistemas multivariable.

Introducción

Entender y controlar segmentos del entorno, comúnmente llamados sistemas físicos, para proveer de productos útiles a la sociedad es una tarea fundamental del ingeniero de control (Dorf y Bishop 2008).

En la actualidad, la gran mayoría de los procesos industriales requieren de un estricto control de calidad, ya sea para ofrecer productos que satisfagan de manera cabal las exigencias de los consumidores, o bien para proporcionar una mayor seguridad a las personas e insumos que intervienen en la realización de dichos procesos.

En particular, asegurar la estabilidad de sistemas físicos en presencia de perturbaciones e incertidumbre en los modelos utilizados para describirlos es un problema fundamental en la teoría de control.

De aquí la necesidad de crear dispositivos o programas que sean capaces de compensar las incertidumbres y perturbaciones inherentes del sistema de manera eficiente, segura y reduciendo en la medida de lo posible los costos de operación. Para lograr este objetivo, es preciso conocer lo más ampliamente posible el proceso que se quiere controlar, y determinar cuáles son las variables de interés para llevar a cabo dicho control.

En los últimos 70 años, se han desarrollado una gran cantidad de métodos orientados a resolver dicho problema tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia (Åström y Murray 2008). Entre los más conocidos se encuentran los llamados métodos clásicos, tales como el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz, el criterio de Nyquist y el método



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

del lugar de las raíces propuesto por W. R. Evans.

Sin embargo, los métodos mencionados están diseñados para sistemas lineales de una entrada y una salida (SISO) y no es posible aplicarlos en sistemas más complejos como son los sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO). Los sistemas SISO juegan un papel central en el desarrollo de la teoría de control y es por eso que existe una amplia gama de técnicas de análisis y control para estos sistemas.

Entre las múltiples estructuras de control conocidas, el controlador de Proporcional-Integral-Derivativo ó PID, es probablemente el más utilizado a nivel industrial. De acuerdo con (Åström y Hägglund 1995), más del 90 % de los lazos de control industriales poseen alguna variación del controlador PID. En la actualidad, este controlador sigue siendo uno de los preferidos por los ingenieros de control tanto en sistemas que se componen de un solo lazo de control, como sistemas de múltiples lazos de control (Knospe 2006), (Dorf y Bishop 2008) ya que, a través de una estructura de tres términos relativamente sencilla, se puede lograr error nulo en estado estacionario gracias a la acción integral, rechazo a perturbaciones y se pueden satisfacer requerimientos de modesto desempeño (Johnson y Mohammad 2005).

Existen así mismo una gran cantidad de métodos de sintonización de los parámetros del controlador, siendo uno de los primeros y también más conocidos, el método propuesto por Ziegler y Nichols para la respuesta a escalón de sistemas lineales. Aunque las reglas de sintonización de controladores PID propuestas por Ziegler y Nichols han sido muy influyentes, éstas padecen de algunos defectos importantes, e.g. utilizan información insuficiente del proceso y el criterio de diseño produce sistemas en lazo cerrado con robustez muy pobre (Åström y Hägglund 2004).

Una aproximación distinta a los métodos clásicos consiste en hallar no uno, sino toda una familia de controladores estabilizantes asociados a una planta. Dentro de esta categoría, una de las aproximaciones más conocidas es la parametrización de Youla-Jabr-Bongiorno-Kucera (YJBK), la cuál caracteriza todos los controladores racionales, propios y estabilizantes asociados a una planta a través de la matriz $Q(s)$ (Zhou 1999).

La utilidad de esta parametrización es que un controlador óptimo podría ser seleccionado haciendo una búsqueda sobre el conjunto de matrices estables $Q(s)$. Sin embargo, se debe tener en cuenta que a pesar de que todos los controladores estabilizantes se pueden describir

por medio de la parametrización YJBK, en general no es posible utilizarla para diseñar controladores de un orden pre-establecido, e incluso no es posible garantizar la existencia de un controlador de un orden pre-establecido.

Una aproximación diferente se ha planteado en trabajos como (Ho *et al.* 1997), (Datta *et al.* 2000) y (Bhattacharyya y Keel 2008), donde se presenta una solución al problema de hallar familias de controladores estabilizantes de orden fijo para una planta SISO, lineal e invariante en el tiempo. En particular se han obtenido resultados importantes para el caso del controlador PID. Estos resultados permiten hallar todos los controladores PID estabilizantes a través de un método sistemático que se reduce a resolver un sistema de desigualdades lineales en términos de dos de los parámetros del controlador.

En este trabajo se presentan algunas aplicaciones al utilizar esta técnica, además de proponer una extensión para el caso MIMO. Para contar con un software original para el diseño de controladores PID, se desarrolló y mejoró una herramienta que implementa el algoritmo propuesto por Bhattacharyya en el entorno de programación MATLAB®. Una vez que se tuvo una versión confiable del programa, se buscó hacer modificaciones de manera que se pudiera aplicar para obtener de manera simultánea regiones estabilizantes para aplicar dichos resultados al caso de control tolerante a fallas. Cabe mencionar que el software ha sido probado con múltiples ejemplos de la literatura y se han obtenido resultados satisfactorios.

En el Capítulo 2 se presentan algunos de los resultados obtenidos en la construcción del programa escrito en MATLAB® que implementa el algoritmo propuesto por Bhattacharyya para la solución del problema de estabilización por medio de un controlador PID. Se muestra así mismo, la implementación para resolver el conjunto de desigualdades lineales resultante, formulado como un problema en el contexto de programación lineal.

Se presentan además los resultados obtenidos en el marco de sistemas tolerantes a fallas. En este contexto se considera un esquema que plantea obtener distintos modelos de una planta bajo condiciones de falla. De esta manera se propone la idea de utilizar un controlador sintonizado fuera de línea, que será de tipo PID, capaz de mantener la estabilidad de la planta aún bajo condiciones de falla. Dicho controlador se obtendrá buscando a través de la superposición de regiones estabilizantes de la planta nominal y de cada una de las plantas con falla, una región común que permita hallar controladores que puedan ser implementados para controlar la planta aún bajo condiciones de falla sin la necesidad de re-sintonizar el controlador. Este enfoque, aunque resulta una idea natural, ha sido poco explotado en el

área de control tolerante a fallas. Se presenta además la modificación al software para un solo modelo de planta, de manera que pueda ser empleado para hallar la superposición de múltiples regiones estabilizantes.

En el Capítulo 3 se presenta una aproximación al diseño de familias de controladores PID estabilizantes descentralizados para sistemas MIMO, en el marco del Diseño de Canales Individuales (O'Reilly y Leithead 1991). Es decir, utilizando el enfoque de diseño de canales individuales, se busca descomponer un sistema multivariable en múltiples sistemas monovariables. De esta manera es posible aplicar técnicas de diseño para sistemas SISO a los canales, y en particular se busca aplicar la técnica de diseño propuesta por Bhattacharyya (Datta *et al.* 2000). La propuesta se hace con un enfoque específico de sistemas de dos entradas y dos salidas.

El Capítulo 4 trata sobre casos de estudio en los que se aplican los conceptos desarrollados en las secciones anteriores. En particular, se presentan los resultados experimentales del control de un sistema de suspensión magnética partiendo de la familia de controladores PID estabilizantes, se obtienen también las regiones de controladores PID estabilizantes para una turbina de gas sujeta a distintas condiciones de falla, y se busca la región estabilizante común utilizando la herramienta de software desarrollada en el Instituto de Ingeniería. Para el caso de sistemas MIMO, se utiliza el modelo linealizado de un helicóptero de un solo rotor según se presenta en (Liceaga-Castro *et al.* 1995) y para el cual se busca obtener la familia de controladores PID estabilizantes y descentralizados considerando sólo la dinámica longitudinal del mismo. Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones.

Diseño de controladores PID estabilizantes

Asegurar la estabilidad de un sistema dinámico en presencia de perturbaciones e incertidumbre en el modelo del mismo, es uno de los problemas más importantes y más estudiados de la teoría de control (Zhou 1999). En la actualidad existen diversas técnicas desarrolladas para lograr este objetivo. Una de las condiciones de estabilidad más conocidas para sistemas lineales está relacionada con la distribución de raíces del polinomio característico en el plano complejo. Cuando un polinomio tiene todas sus raíces en el lado izquierdo del plano complejo, se dice que es Hurwitz *i.e.* es estable. Así mismo, se han desarrollado condiciones de estabilidad equivalentes para sistemas con incertidumbre paramétrica. Una de las más difundidas es quizá el Teorema de Kharitonov, el cual establece condiciones de estabilidad para polinomios reales sujetos a incertidumbre en los coeficientes (Barmish 1994).

2.1. Teorema de Hermite - Biehler

Existen diversas condiciones equivalentes a la condición de estabilidad en el sentido Hurwitz, una de ellas es el teorema de Hermite-Biehler, el cual provee de condiciones necesarias y suficientes para garantizar la estabilidad en el sentido Hurwitz de un polinomio real de orden n . Bhattacharyya y otros (Datta *et al.* 2000) han mostrado además, que basándose en una generalización del teorema de Hermite-Biehler es posible obtener un método que permite realizar el cálculo de todos los controladores PID estabilizantes para un sistema SISO de orden n . Para establecer el teorema, deben hacerse primero algunas consideraciones.

Sea $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \dots + \delta_n s^n$ un polinomio de grado n . Considérese también la descomposición:

$$\delta(s) = \delta_e(s^2) + s\delta_o(s^2) \quad (2.1)$$

Donde $\delta_e(s^2)$ y $\delta_o(s^2)$ son las componentes de $\delta(s)$ formadas por los términos de las potencias pares e impares de s respectivamente. Para cada frecuencia $\omega \in \mathbb{R}$ se denota:

$$\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega) \quad (2.2)$$

Donde $p(\omega) = \delta_e(-\omega^2)$, $q(\omega) = \omega\delta_o(-\omega^2)$. Sean $\omega_{e1}, \omega_{e2}, \dots$ los ceros reales no negativos de $\delta_e(s)$, y sean $\omega_{o1}, \omega_{o2}, \dots$ los ceros reales no negativos de $\delta_o(s)$, ambos ordenados de manera ascendente en cuanto a magnitud.

Teorema 1 (Hermite - Biehler) *Sea $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \dots + \delta_n s^n$ un polinomio real de orden n . Entonces $\delta(s)$ es estable en el sentido Hurwitz, si y sólo si, todos los ceros de $\delta_e(s^2)$ y $\delta_o(s^2)$ son reales y distintos, δ_n y δ_{n-1} son del mismo signo, y los ceros reales no negativos satisfacen la siguiente propiedad:*

$$0 < \omega_{e1} < \omega_{o1} < \omega_{e2} < \omega_{o2} < \dots$$

□

De acuerdo con el Teorema 1, el criterio de estabilidad establece que las raíces de los polinomios $\delta_e(s^2)$ y $\delta_o(s^2)$ deben cumplir con una propiedad de alternancia entre sí (Figura 2.1), lo cual es producto de la propiedad de crecimiento monotónico de fase de los polinomios Hurwitz. El teorema enunciado en la forma anterior proporciona una interpretación gráfica de una característica propia de los polinomios estables; es decir, la alternancia entre las raíces de la parte real y la parte compleja de $\delta(s)$ cuando el polinomio es estable. Sin embargo, si esta propiedad no se cumple (Figura 2.2), es interesante saber si se puede inferir algo más a partir de la gráfica, más allá de si el polinomio es estable o no.

2.2. Generalización del Teorema de Hermite - Biehler

Buscando responder a la pregunta anterior, Bhattacharyya muestra que es posible reformular el Teorema 1 de manera que se puede hallar una equivalencia a éste al relacionar el cambio neto de fase en un polinomio, cuando ω varía desde 0 hasta ∞ , con la diferencia entre el número de raíces en el lado derecho del plano complejo (RHP) y el número de raíces

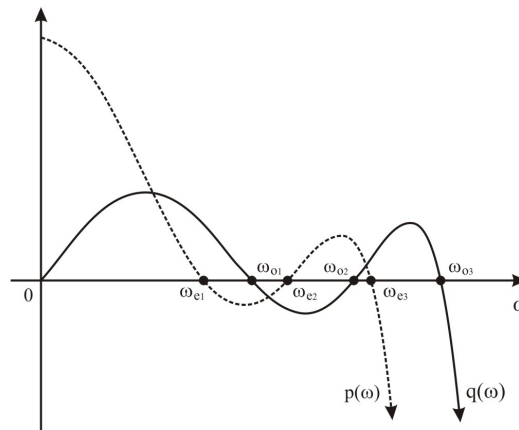


Figura 2.1: Propiedad de alternancia en las raíces de polinomios estables en el sentido Hurwitz

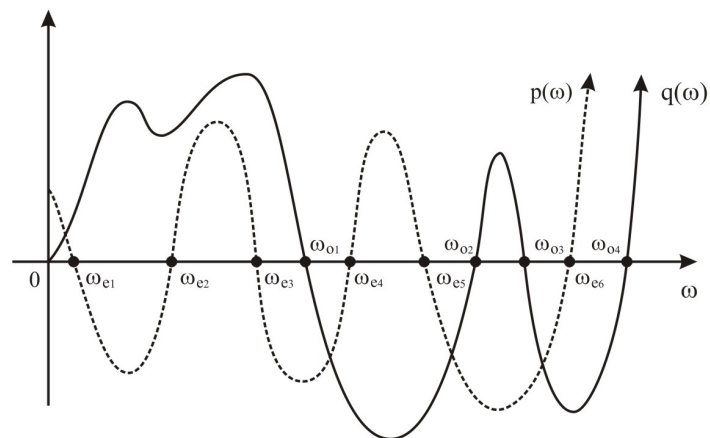


Figura 2.2: Gráfica de $\delta_e(s)$ y $\delta_o(s)$ cuando no se cumplen las condiciones del Teorema 1

en el lado izquierdo del plano complejo (LHP). Dicha relación se establece a través de una función conocida como la firma imaginaria de un polinomio y que se denota por $\sigma_i(\cdot)$. La firma imaginaria de $\delta(s)$, se define como:

Definición 1 Sea $\delta(s)$ un polinomio real dado de grado n como se definió anteriormente,

con k denotando el grado de multiplicidad de una raíz en el origen. Se define también:

$$p_f(\omega) := \frac{p(\omega)}{(1+\omega)^{\frac{n}{2}}} \quad q_f(\omega) := \frac{q(\omega)}{(1+\omega)^{\frac{n}{2}}} \quad (2.3)$$

Sean $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ los ceros reales, finitos, distintos y no negativos de $q_f(\omega)$ con multiplicidad impar. También se define $\omega_m = \infty$. Entonces, la firma imaginaria $\sigma_i(\delta)$ de $\delta(s)$ está definida como:

$$\sigma_i(\delta) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{sgn} [p_f^{(k)}(\omega_0)] - 2\text{sgn} [p_f(\omega_1)] + 2\text{sgn} [p_f(\omega_2)] + \dots \\ + (-1)^{m-1} 2\text{sgn} [p_f(\omega_{m-1})] + (-1)^m \text{sgn} [p_f(\omega_m)] \end{array} \right\} * (-1)^{m-1} \text{sgn} [q(\infty)] \\ \text{si } n \text{ es par} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{sgn} [p_f^k(\omega_0)] - 2\text{sgn} [p_f(\omega_1)] + 2\text{sgn} [p_f(\omega_2)] + \dots \\ + (-1)^{m-1} 2\text{sgn} [p_f(\omega_{m-1})] \end{array} \right\} * (-1)^{m-1} \text{sgn} [q(\infty)] \\ \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (2.4)$$

Donde: $p_f^{(k)}(\omega_0) := \frac{d^k}{d\omega^k} [p_f(\omega)]_{\omega=\omega_0}$ y $\text{sgn}(x)$ es conocida como la función signo y se define como:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

□

Teorema 2 (Generalización del teorema de Hermite Biehler) Sea $\delta(s)$ un polinomio real de grado n como se definió anteriormente. Entonces se cumple que

$$l(\delta) - r(\delta) = \sigma_i(\delta) \quad (2.6)$$

□

En donde, $l(\delta)$ representa el número de raíces de $\delta(s)$ que se encuentran del lado izquierdo del plano complejo y $r(\delta)$ representa el número de raíces de $\delta(s)$ que se encuentran del lado derecho del plano complejo.

El Teorema 1 es útil para determinar la estabilidad de polinomios reales, sin embargo, si el polinomio no es Hurwitz, el teorema no proporciona mayor información. El Teorema 2, en cambio, se puede aplicar incluso a polinomios que no son Hurwitz de manera que la distribución de raíces se puede relacionar con la firma del polinomio para extraer información a partir de esta. La demostración del Teorema 2 se puede consultar en (Datta *et al.* 2000), mientras que, en el caso del Teorema 1 se puede consultar en (Olga 2003).

2.3. Familia de controladores PID estabilizantes

Ahora bien, utilizando el Teorema 2 es posible derivar una metodología para el diseño de controladores PID. Para ello considérese el sistema retroalimentado de la Figura 2.3.

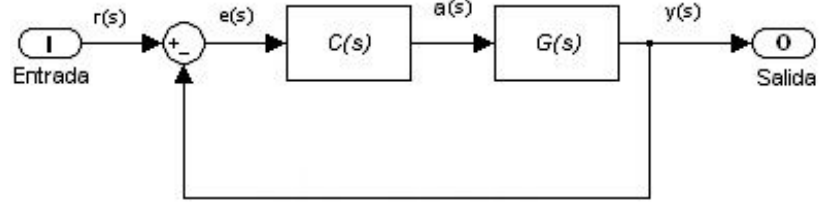


Figura 2.3: Sistema retroalimentado

donde la planta $G(s)$ y el controlador $C(s)$ se definen como:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} C(s) &= k_p + \frac{k_i}{s} + sk_d \\ &= \frac{s^2k_d + sk_p + k_i}{s} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sea m el grado de $N(s)$ y p el grado de $D(s)$. Considérense además las descomposiciones del numerador y denominador de la planta:

$$N(s) = N_e(s^2) + sN_o(s^2) \quad (2.9)$$

$$D(s) = D_e(s^2) + sD_o(s^2) \quad (2.10)$$

siendo $N_e(s)$ y $D_e(s)$ son los polinomios formados por los términos de potencia par del numerador y denominador de $G(s)$ respectivamente, y $N_o(s)$ y $D_o(s)$ son los polinomios formados por los términos de potencia impar de $G(s)$. El polinomio característico de lazo cerrado es:

$$\delta(s, k_p, k_i, k_d) = sD(s) + (k_i + k_p s + k_d s^2)N(s) \quad (2.11)$$

donde $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ es de grado n . Al desarrollar la ecuación (2.11) y reescribirla en términos de su parte real y parte compleja, se observa que ambos miembros dependen de al menos dos de las constantes k_p , k_i y k_d .

Sin embargo, multiplicando $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ por el polinomio auxiliar

$$\begin{aligned} N^*(s) &:= N(-s) \\ &= N_e(s^2) - sN_o(s^2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

desarrollando las operaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s) &= [s^2(N_e(s^2)D_o(s^2) - D_e(s^2)N_o(s^2)) \\ &\quad + (k_i + k_d s^2)(N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2N_o(s^2)N_o(s^2))] \\ &\quad + s[D_e(s^2)N_e(s^2) - s^2D_o(s^2)N_o(s^2) \\ &\quad + k_p(N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2N_o(s^2)N_o(s^2))] \end{aligned} \quad (2.13)$$

sustituyendo $s = j\omega$ se obtiene:

$$\delta(j\omega, k_p, k_i, k_d)N^*(j\omega) = p(\omega, k_i, k_d) + jq(\omega, k_p) \quad (2.14)$$

$$p(\omega, k_i, k_d) = p_1(\omega) + (k_i - k_d\omega^2)p_2(\omega) \quad (2.15)$$

$$q(\omega, k_p) = q_1(\omega) + k_p q_2(\omega) \quad (2.16)$$

$$p_1(\omega) = -\omega^2(N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) - D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \quad (2.17)$$

$$p_2(\omega) = N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2) \quad (2.18)$$

$$q_1(\omega) = \omega(D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \quad (2.19)$$

$$q_2(\omega) = \omega(N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \quad (2.20)$$

Nótese que al realizar la multiplicación de $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ por $N(s)$ se logra que la parte imaginaria de la ecuación (2.14) dependa exclusivamente de k_p , mientras que la parte real depende sólo de (k_i, k_d) . Este resultado es importante porque, en términos del Teorema 1, la distribución de las raíces de la parte imaginaria del polinomio $\delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s)$, depende sólo del parámetro k_p y, como se verá mas adelante, los valores de las constantes k_i y k_d que permiten que se satisfaga la propiedad de alternancia con la parte real, se pueden obtener a través de la solución de un conjunto de desigualdades lineales en términos de dichas constantes.

Considerando el Teorema 2, y a partir de la ecuación (2.14) se puede hacer una deducción

importante. Si se utiliza $\delta \triangleq \delta(s, k_p, k_i, k_d)$, $N^*(s) \triangleq N^*$ y $N(s) \triangleq N$:

$$\begin{aligned}\sigma_i(\delta N^*) &= l(\delta N^*) - r(\delta N^*) \\ &= l(\delta) + l(N^*) - (r(\delta) + r(N^*)) \\ &= l(\delta) + r(N) - (r(\delta) + l(N)) \\ &= l(\delta) - r(\delta) - (l(N) - r(N))\end{aligned}$$

Finalmente, $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ que es de grado n , será Hurwitz sí y sólo si:

$$l(\delta(s, k_p, k_i, k_d)) = n \quad (2.21)$$

$$r(\delta(s, k_p, k_i, k_d)) = 0 \quad (2.22)$$

por lo tanto:

$$\sigma_i(\delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s)) = n - (l(N(s)) - r(N(s))) \quad (2.23)$$

La tarea es entonces, hallar los valores de (k_p, k_i, k_d) que hacen que la ecuación (2.23) se satisfaga. Para ello se deben hacer antes algunas definiciones.

Se representa por A_{k_p} a todas las posibles combinaciones en que se puede dar la alternancia entre las raíces de $p(\omega, k_i, k_d)$ y las raíces de $q(\omega, k_p)$ y se define como sigue:

Definición 2 Sea n el grado de $\delta(j\omega, k_p, k_i, k_d)$, m el grado de $N(s)$ y $q(\omega, k_p)$ como se definió en (2.16). Para un valor de k_p fijo en la ecuación (2.14), sean $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{l-1}$ los ceros reales, positivos, finitos y distintos de $q(\omega, k_p)$. Sea también $\omega_l = \infty$. Se define una secuencia de números $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{l-1}$ como sigue:

1. Si $N^*(j\omega_t) = 0$ para algún $t = 1, 2, \dots, l-1$, entonces:

$$i_t = 0;$$

2. Si $N^*(s)$ tiene un cero de multiplicidad k_n en el origen, entonces se define:

$$i_0 = \text{sgn}[p_{1f}^{(k_n)}(0)]$$

donde:

$$p_{1f}(\omega) := \frac{p_1(\omega)}{(1 + \omega^2)^{\frac{m+n}{2}}};$$

3. Para cualquier otra $t = 0, 1, 2, \dots, l$,

$$i_t \in \{-1, 1\}$$

Con i_0, i_1, \dots definidos de esta manera, se construye el conjunto A_{k_p} como:

$$A_{k_p} := \begin{cases} \{\{i_0, i_1, \dots, i_l\}\} & \text{si } m+n \text{ es par} \\ \{\{i_0, i_1, \dots, i_{l-1}\}\} & \text{si } m+n \text{ es impar} \end{cases}$$

□

A continuación, se presenta también el conjunto $A_{k_p}(\gamma)$ que es un subconjunto de cadenas que pertenecen a A_{k_p} y que cumplen con ciertas restricciones llamadas “firma imaginaria”. La definición de esta firma imaginaria es como sigue:

Definición 3 Sean $m, n, q(\omega, k_p)$, como se definieron anteriormente. Para una k_p determinada, sean $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{l-1}$ los ceros reales, positivos, finitos y distintos de $q(\omega, k_p)$. También se define $\omega_l = \infty$. Para cada cadena $\Gamma = \{i_0, i_1, \dots\}$ en A_{k_p} , sea $\gamma(\Gamma)$ la “firma imaginaria” asociada a la cadena Γ definida como:

$$\gamma(\Gamma) := \begin{cases} \{i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{l-1}2i_{l-1} + (-1)^l i_l\}(-1)^{l-1} \text{sgn}[q(\infty, k_p)] & \text{para } m+n \text{ par} \\ \{i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{l-1}2i_{l-1}\}(-1)^{l-1} \text{sgn}[q(\infty, k_p)] & \text{para } m+n \text{ impar} \end{cases}$$

□

$A_{k_p}(\gamma)$ se define como sigue:

Definición 4 El conjunto de cadenas en A_{k_p} con una firma imaginaria determinada $\gamma = \psi$ se denota como $A_{k_p}(\psi)$. Para una k_p determinada, se define también el conjunto de cadenas factibles para el problema del controlador PID estabilizante como:

$$F_{k_p}^* = A_{k_p}(n - (l(N(s)) - r(N(s))))$$

□

Es decir, se requiere asignar a $F_{k_p}^*$ aquellas combinaciones de i_t que garanticen que la propiedad de alternancia mencionada en el Teorema 1 se satisface. De acuerdo con (Datta *et al.* 2000), para que $F_{k_p}^*$ no sea vacío, una condición necesaria es que, para $m+n$ par

$$l \geq \frac{|n - (l(N(s)) - r(N(s)))|}{2} \quad (2.24)$$

y para $m + n$ impar

$$l \geq \frac{|n - (l(N(s)) - r(N(s)))| + 1}{2} \quad (2.25)$$

Finalmente, tomando en cuenta las definiciones anteriores se establece el resultado siguiente:

Teorema 3 *El problema de determinar los controladores PID estabilizantes, con k_p fija, tiene solución para una planta dada con función de transferencia $G(s)$ si y sólo si, las siguientes condiciones se cumplen:*

1. $F_{k_p}^*$ no es un conjunto vacío.
2. Existe al menos una cadena $\Gamma = \{i_0, i_1, \dots\} \in F_{k_p}^*$, y valores de k_i y k_d tales que $\forall t = 0, 1, 2, \dots$ para los cuales $N^*(j\omega_t) \neq 0$

$$p(\omega_t, k_i, k_d) i_t > 0 \quad (2.26)$$

□

Nótese que cada desigualdad que satisface (2.26) representa un semiplano en el espacio (k_i, k_d) , por lo tanto, la solución será una intersección de semiplanos. Dado que la desigualdad es lineal en k_i y k_d el resultado de las intersecciones es un conjunto convexo. Esto implica que para un valor determinado de k_p , el correspondiente conjunto de valores (k_i, k_d) se obtiene al resolver un sistema de desigualdades lineales. En diversos artículos publicados (ver (Bhattacharyya y Keel 2008), (Datta *et al.* 2000), (Ho *et al.* 1997), (Kim y Kim 2005)) se menciona que una manera de resolver dicho sistema de desigualdades consiste en aplicar técnicas de programación lineal, sin embargo en ningún caso se presenta un procedimiento sistemático para llevarlo a cabo.

A continuación, se presenta un procedimiento para formular el problema de encontrar las regiones que satisfacen la ecuación (2.26) con herramientas de programación lineal.

2.4. Antecedentes de Programación Lineal

Se denota un programa lineal (PL) como un problema de optimización donde la función objetivo (función a optimizar) es lineal en las incógnitas y las restricciones son igualdades y desigualdades lineales (Luenberger 1984).

Independientemente de la forma que adopte, cualquier problema de programación lineal se puede llevar a la llamada forma estándar:

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimizar} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
 \text{sujeto a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 & \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
 \text{con} & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0
 \end{array}$$

donde las a_{ij} , b_j y c_i ($i = 1, 2, \dots, n$ $j = 1, 2, \dots, m$) son constantes reales, y las x son valores que deben ser determinados. En forma compacta se puede escribir:

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimizar} & c^T x \\
 \text{sujeta a} & Ax = b \quad x \geq 0
 \end{array} \tag{2.27}$$

donde x es un vector columna de dimensión n , c^T es un vector fila de dimensión n , A es una matriz de dimensión $m \times n$ y b es un vector columna de dimensión m .

Si el sistema de ecuaciones que define el problema no se encuentra en la forma estándar, se puede hacer uso de variables auxiliares para transformar el problema y llevarlo a dicha forma. Considérese el problema en el que el conjunto de restricciones se encuentra formado exclusivamente por desigualdades, es decir:

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimizar} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
 \text{sujeto a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
 & \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\
 \text{con} & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0
 \end{array}$$

B se igualan a cero, la solución resultante del conjunto de ecuaciones lineales se conoce como solución básica de (2.28) con respecto a la base B . Si además $x \geq 0$, entonces la solución se llama solución básica factible.

□

La importancia de la solución básica radica en su relación con el concepto de punto extremo en la teoría de conjuntos convexos. El principal enlace entre las teorías algebraica y geométrica es la relación formal entre soluciones básicas factibles de sistemas de desigualdades en forma estándar, y los puntos extremos de un politopo.

De acuerdo con (Luenberger 1984), un punto límite en un conjunto convexo se define de la siguiente manera:

Definición 6 (Punto límite) *Un punto x en un conjunto convexo C se llama punto extremo, si no existen otros dos puntos x_1 y x_2 en C tales que $x = x_1\alpha + (1 - \alpha)x_2$ para cualquier α tal que $0 < \alpha < 1$.*

□

Un punto extremo es por lo tanto, un punto que no se encuentra estrictamente dentro de un segmento que conecta cualesquiera dos puntos que pertenecen al conjunto convexo. La relación entre la solución básica factible y puntos extremos se establece mediante el siguiente teorema:

Teorema 4 *Sea A una matriz de $m \times n$ de rango m y b un vector de dimensión m . Sea K un politopo formado por todos los vectores x de dimensión n que satisfacen:*

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Un vector x es un punto extremo de K , si y sólo si x es una solución básica factible de (2.30).

□

La demostración del Teorema 4 se encuentra reportada en (Luenberger 1984).

2.5. Búsqueda de la región de los parámetros ID estabilizantes

Utilizando los conceptos mencionados anteriormente, se puede realizar el planteamiento para buscar la región estabilizante definida por el conjunto de desigualdades dadas en la

ecuación (2.26). Definiendo una desigualdad para cada ω_t que es una raíz real, finita y no negativa de $q(\omega, k_p)$ se puede escribir:

$$p(\omega_t, k_i, k_d)i_t > 0 \quad (2.31)$$

$$p_1(\omega_t) + p_2(\omega_t) (k_i - k_d\omega_t^2) i_t > 0 \quad (2.32)$$

$$(k_i - k_d\omega_t^2) i_t > -\frac{p_1(\omega_t)}{p_2(\omega_t)} \quad (2.33)$$

donde, tomando en cuenta todas las desigualdades se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} (k_i - k_d\omega_0^2)i_0 &> -\frac{p_1(\omega_0)}{p_2(\omega_0)} \\ (k_i - k_d\omega_1^2)i_1 &> -\frac{p_1(\omega_1)}{p_2(\omega_1)} \\ &\vdots \\ (k_i - k_d\omega_m^2)i_m &> -\frac{p_1(\omega_m)}{p_2(\omega_m)} \end{aligned} \quad (2.34)$$

En términos de una desigualdad matricial, el sistema de desigualdades (2.34) se puede reescribir como sigue:

$$A_{or}x_{or}i_t > b_{or} \quad (2.35)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_{or} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\omega_0^2 & -\omega_1^2 & \dots & -\omega_m^2 \end{bmatrix}^T \\ x_{or} &= \begin{bmatrix} k_i & k_d \end{bmatrix}^T \\ b_{or} &= \begin{bmatrix} -\frac{p_1(\omega_0)}{p_2(\omega_0)} & -\frac{p_1(\omega_1)}{p_2(\omega_1)} & \dots & -\frac{p_1(\omega_m)}{p_2(\omega_m)} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Nótese que el sistema de desigualdades (2.35) no se encuentra en la forma estándar dado que las restricciones son exclusivamente desigualdades y además, el sentido de éstas depende del valor de i_t .

Para llevarlo a la forma estándar, se puede hacer uso de variables auxiliares según se mencionó anteriormente, de manera que el problema se transforma en:

$$\hat{A}\hat{x} = \hat{b} \quad (2.36)$$

con

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} A_{or} & I_{m \times m} \end{bmatrix} \\ \hat{x} &= \begin{bmatrix} k_i & k_d & y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{bmatrix}^T \\ \hat{b} &= \begin{bmatrix} -\frac{p_1(\omega_0)}{p_2(\omega_0)} & -\frac{p_1(\omega_1)}{p_2(\omega_1)} & \dots & -\frac{p_1(\omega_m)}{p_2(\omega_m)} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Tomando en cuenta el Teorema 4, se puede afirmar que los puntos extremos de la región convexa, solución al problema de controladores PID se puede hallar obteniendo las soluciones básicas factibles del sistema de desigualdades (2.35).

El mecanismo de solución se puede ejemplificar de la siguiente manera; considérese el ejemplo mostrado en la Figura 2.4, definido por el sistema:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 > b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 > b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 > b_3$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0$$

Se puede observar, de acuerdo con la Figura 2.4, que el conjunto tiene cinco puntos extremos. Dado que el problema no se encuentra en forma estándar, se deben agregar las variables auxiliares x_3 , x_4 y x_5 de manera que el sistema se transforma en:

$$\mathbf{r}_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 = b_1$$

$$\mathbf{r}_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_4 = b_2$$

$$\mathbf{r}_3 : a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_5 = b_3$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0; \quad x_5 \geq 0$$

Una solución básica para este nuevo sistema se obtiene haciendo cualesquiera dos variables iguales a cero y resolviendo para las otras tres. De hecho, se puede ver que cada orilla en la Figura 2.4 corresponde a una ecuación donde una variable se ha igualado a cero.

Por lo tanto, cuando se hacen cualesquiera dos variables x_i y x_j ; $i \neq j$ iguales a cero, y se resuelve el sistema de ecuaciones para las tres restantes, se obtiene un punto extremo del conjunto convexo.

Esta idea sencilla permite ver que, para hallar los puntos extremos del problema de desigualdades expresado en la ecuación (2.35), es preciso llevarlo a la forma estándar y después hallar todas las soluciones básicas tomando cualesquiera dos variables igualadas a cero. De acuerdo con el Teorema 4, al hallar dichas soluciones básicas se obtienen los puntos extremos de la región convexa.

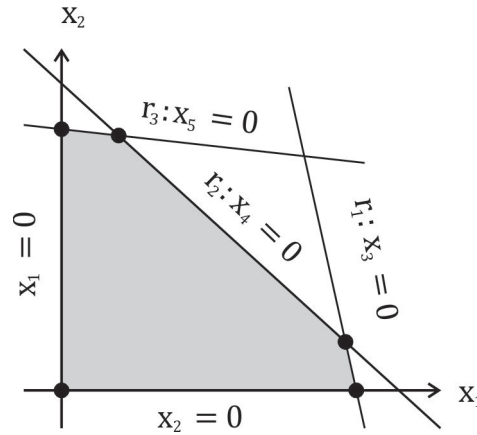


Figura 2.4: Puntos extremos en la solución de un conjunto de desigualdades lineales

Para hallar estos puntos, se propone utilizar la función `linprog` de MATLAB® dentro de un ciclo iterativo en el cual, a cada paso se busca hallar un punto extremo del conjunto convexo que es solución de (2.35).

La forma de usar `linprog` es la siguiente:

$$[P, fval, exitflag] = \text{linprog}(f, A, b, Aeq, beq);$$

donde, P es el vector solución al programa lineal, $fval$ es el valor de la función f valuada en P y `exitflag` es un valor entero que indica si el algoritmo converge o no, y la posible razón para la no convergencia.

Los argumentos de entrada para la función son f , que es la función a optimizar, A y b , que representan las matrices del problema original (2.35), y finalmente A_{eq} y b_{eq} , que se forman como se explica a continuación.

Como se mencionó anteriormente, se deben buscar los puntos donde dos de las variables sean iguales a cero, por lo cual se debe agregar a \hat{A} un par de renglones que representen $x_i = 0$ y $x_j = 0$ con $i, j = 0, 1, 2, \dots, m; i \neq j$, por lo tanto, la matriz aumentada se convierte en:

$$A_{eq} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 & d_2 & \dots & d_m \end{array} \right]$$

$$b_{eq} = \left[b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

donde

$$c = \left[c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_m \right] \quad (2.37)$$

$$d = \left[d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_m \right] \quad (2.38)$$

son vectores unitarios tales que en cada iteración, solo una de las componentes de cada vector c y d vale 1 y en cada paso, el elemento que vale 1 rota su posición de manera que se consideren todas las posibles combinaciones del vector \hat{x} tal que dos de sus componentes sean 0. Esto es, en la primera iteración se tiene

$$c = \left[0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \right]$$

$$d = \left[0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \right]$$

dato que los vectores c y d son iguales, el algoritmo no converge en esta iteración ya que ambos vectores representan $x_m = 0$. En la segunda iteración, los vectores c y d serán

$$c = \left[0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \right]$$

$$d = \left[0 \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad 0 \right]$$

de manera que el elemento que vale 1 ha sido rotado a la izquierda en el vector d , y esto representa $x_m = 1$ y $x_{m-1} = 0$. De esta manera, en cada ciclo se aplica la función `linprog` para una matriz A_{eq} distinta, y cuando ésta converge, devuelve un vector P , del cual sólo se deben considerar las dos primeras componentes, es decir, los valores de k_i y k_d en el punto extremo.

Una vez que se han obtenido todas las soluciones básicas, se tendrá el conjunto de puntos extremos de la región ID .

Finalmente, para dibujar la región, se utiliza la función `convhull`, cuyos argumentos de entrada son los puntos que se hallaron en el paso anterior, y la salida serán los índices de aquellos puntos que definen la región convexa. La forma de utilizar `convhull` es:

$$\mathbf{k} = \text{convhull}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

donde \mathbf{x} es el vector que contiene las abscisas, \mathbf{y} es el vector que contiene las ordenadas y \mathbf{k} es un vector que contiene los índices de aquellos puntos (\mathbf{x}, \mathbf{y}) que forman el conjunto convexo.

2.5.1. Ejemplo 1

Con el propósito de ilustrar explícitamente el procedimiento, a continuación se presenta un ejemplo. Considérese la planta:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{s^3 + 2s^2 - s + 2}{s^6 + 9s^5 + 32s^4 + 26s^3 + 266s^2 + 90s - 4} \\ &= \frac{(s + 2.6590)(s - 0.3295 \pm 0.8023j)}{(s + 5.0716 \pm 3.3724j)(s - 0.7446 \pm 2.5453j)(s + 0.3857)(s - 0.0398)} \end{aligned}$$

Según se puede observar, la planta es de fase no mínima y además tiene polos inestables. Realizando las descomposiciones del numerador y denominador de $G(s)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} N_e(s) &= 2 + 2s^2 \\ N_o(s) &= -1 + s^2 \\ D_e(s) &= -4 + 266s^2 + 32s^4 + s^6 \\ D_o(s) &= 90 + 26s^2 + 9s^4 \end{aligned}$$

para este caso en particular, $N(s)$ tiene dos raíces complejas en el RHP y una real en el LHP, por lo tanto $l(N(s)) = 1$ y $r(N(s)) = 2$.

Además $m = 3$ y $n = 7$. Sustituyendo $s = j\omega$ y utilizando las ecuaciones (2.17) a (2.20) se obtienen los polinomios:

$$\begin{aligned} p_1(\omega) &= \omega^{10} - 13\omega^8 + 164\omega^6 + 502\omega^4 - 176\omega^2 \\ p_2(\omega) &= \omega^6 + 6\omega^4 - 7\omega^2 + 4 \\ q_1(\omega) &= -7\omega^9 - 49\omega^7 + 532\omega^5 - 614\omega^3 - 8\omega \\ q_2(\omega) &= \omega^7 + 6\omega^5 - 7\omega^3 + 4\omega \end{aligned}$$

utilizando las ideas acerca del lugar de las raíces presentadas en (Datta *et al.* 2000), se selecciona un valor apropiado de k_p , en este caso $k_p = 50$. Sustituyendo este valor en la ecuación (2.16), se obtiene

$$q(\omega, 50) = -7s^9 + s^7 + 832s^5 - 964s^3 + 192s \quad (2.39)$$

donde los ceros reales no repetidos de $q(\omega, 50)$ son:

$$\omega_0 = 0 \quad \omega_1 = 0.505 \quad \omega_2 = 0.954 \quad \omega_3 = 3.218$$

a partir de las definiciones 2 y 4, considerando que $m+n$ es par, $l = 4$ y $(-1)^{l-1} \text{sgn}(q(\infty, k_p)) = 1$ se forma el conjunto A_{k_p} y se buscan en éste aquellas cadenas de números que satisfagan:

$$i_0 - 2i_1 + 2i_2 - 2i_3 + i_4 = 8$$

De entre éstas, aquellas que satisfacen la restricción se utilizan para formar el conjunto F_{k_p} de cadenas factibles, en este caso:

$$F_{k_p} = \left\{ \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{matrix} \right\}$$

donde el último elemento de la cadena F_{k_p} corresponde a $(\omega_4 = \infty)$. Dado que sólo hay una cadena de valores en F_{k_p} , sólo habrá una combinación posible de desigualdades para este valor de k_p tal que las correspondientes parejas (k_i, k_d) existen también.

De acuerdo con el Teorema 3, el sistema de desigualdades (2.35) toma la forma:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -0.2555 \\ -1 & 0.9106 \\ 1 & -10.3585 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_i \\ k_d \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ 3.6325 \\ 110.6962 \\ -120.8887 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo en particular, nótese que para $\omega_4 = \infty$ la desigualdad se puede escribir como:

$$i_t k_d < \left(\frac{p_1(\omega_t)}{p_2(\omega_t)\omega_t^2} + \frac{k_i}{\omega_t^2} \right) i_t$$

tomando el límite cuando $\omega \rightarrow \infty$ del lado derecho de la desigualdad se observa que el término $k_i/\omega_t^2 \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow \infty$. En cambio el término $p_1(\omega_t)/(p_2(\omega_t)\omega_t^2)$ arroja una indeterminación que se puede intentar resolver utilizando la regla de L'Hôpital, sin embargo dado que el grado de $p_1(\omega)$ es mayor que el grado de $p_2(\omega)$, el límite de la expresión tiende a ∞ cuando $\omega \rightarrow \infty$.

En este caso $i_4 = 1$, por lo que la desigualdad se puede interpretar como:

$$k_d < \infty$$

y por lo tanto, se puede ignorar como restricción pues se cumple trivialmente. Al llevar el

sistema a la forma estándar se tiene:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0.2555 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0.9106 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -10.358 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} k_i & k_d & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix}^T$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 3.6325 & 110.6962 & -120.8887 \end{bmatrix}^T$$

de modo que la matriz A_{eq} y el vector b_{eq} se convierten en:

$$A_{eq} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0.2555 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0.9106 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -10.358 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

$$b_{eq} = \begin{bmatrix} 0 & 3.6325 & 110.6962 & -120.8887 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Para hallar los puntos extremos correspondientes, se utilizará la función `linprog` cuyos datos de entrada son A , b , \hat{A} y \mathbf{f} , donde \mathbf{f} es la función a optimizar. En este caso se utilizará $\mathbf{f} = 2k_i + k_d$. Cabe mencionar que en este procedimiento la función objetivo se asignó de manera arbitraria, pues aunque se utilizan métodos de programación lineal, no se busca una optimización a través de una función particular ni tampoco una relación entre los parámetros. Las ideas de programación lineal se utilizan porque proporcionan un algoritmo bien conocido que permite hallar los puntos extremos que definen la región de controladores estabilizantes.

Realizando las iteraciones necesarias, el conjunto de puntos que devuelve el algoritmo es:

$$P_{ID} = \begin{bmatrix} 0 & 6.7815 & 0 & 48.2232 \\ 11.6705 & 12.3252 & 121.5669 & 174.5258 \end{bmatrix}$$

Finalmente, utilizando la función `convhull(x,y)` con la primera fila de P_{ID} como vector \mathbf{x} y la segunda fila como vector \mathbf{y} , para este ejemplo en particular y para el valor de $k_p = 50$ se obtiene la región mostrada en la Figura 2.5.

Realizando un barrido sobre distintos valores de k_p se obtiene la región mostrada en la Figura 2.6. Es importante mencionar que estas regiones fueron obtenidas utilizando la

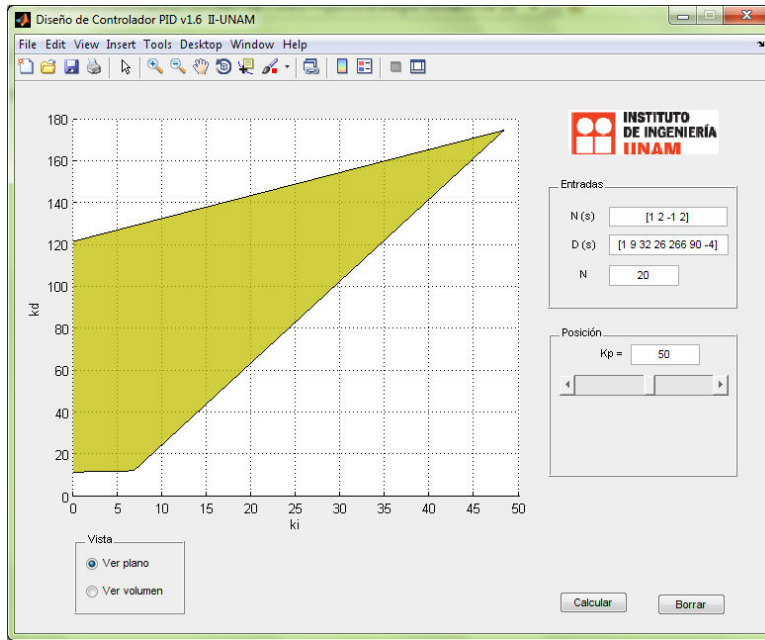


Figura 2.5: Región de controladores ID estabilizantes para el Ejemplo 1 ($k_p = 50$)

herramienta desarrollada en el Instituto de Ingeniería y cuyo diagrama de flujo se presenta en el Apéndice A.

2.6. Control tolerante a fallas

Existen diversas aplicaciones en las que un mal funcionamiento del sistema puede resultar peligroso o costoso. En general, cuando se presenta en el sistema un evento que altera el comportamiento del mismo, de manera que aquel no es capaz de cumplir con su objetivo original, se dice que el sistema presenta una falla.

Una falla puede ser un evento interno del sistema (corte del suministro de energía, ruptura de líneas de comunicación, fuga en una tubería, etc.), un cambio en las condiciones del entorno (cambio de temperatura, humedad, etc.) o incluso la aplicación incorrecta de una acción de control por parte de un operador (Blanke 2003).

En general, se desea que el sistema sea capaz de continuar operando aún bajo condiciones de falla. Por ello es necesario que el sistema sea capaz de identificar la falla con precisión,

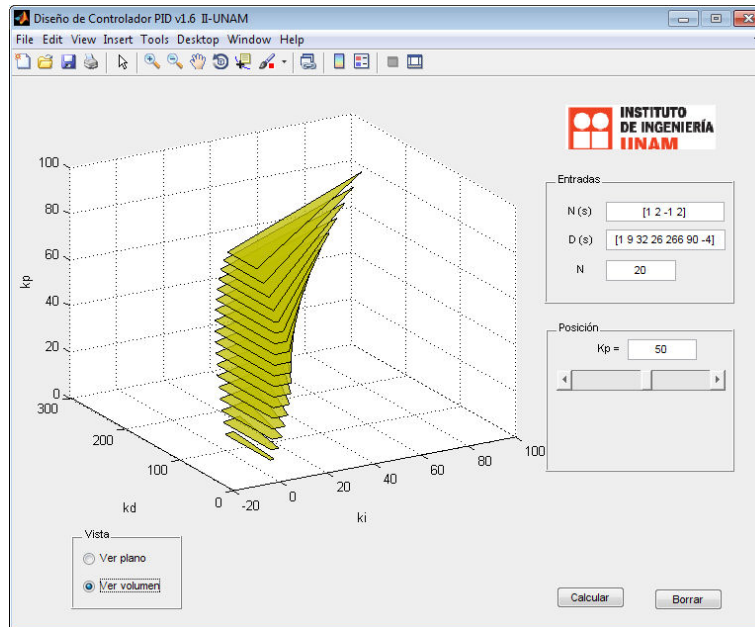


Figura 2.6: Región de controladores PID estabilizantes para el Ejemplo 1

actualizar referencias y sintonizar el controlador (Zhang y Jiang 2006). Un sistema que posee dicha capacidad se denomina sistema tolerante a fallas.

En el enfoque adoptado por (Narendra *et al.* 1995) para tratar con este tipo de sistemas, se plantea un esquema de control tolerante a fallas basado en múltiples modelos de plantas con falla, donde cada uno de estos modelos está asociado a una intensidad de falla. Así mismo, se emplean múltiples controladores junto con esquemas de conmutación, de manera que se garantice estabilidad y desempeño ante un posible escenario de falla. Este enfoque es conocido como esquema pasivo tolerante a fallas.

El trabajo de (Rauch 1995) complementa al anterior considerando múltiples modelos de falla para representar características de sistemas poco seguros. Se asume un conocimiento inicial del sistema, incluyendo el control, y de la misma forma se asume que el sistema puede variar lentamente en el tiempo, por lo que es necesario modificar el modelo de la planta y por consiguiente, la ley de control.

Un enfoque distinto consiste en el esquema de control activo tolerante a fallas. Dentro de

este esquema se asume que es posible plantear una familia de modelos lineales de plantas con falla, en los que la falla se encuentra parametrizada. Se considera además que el esquema de control tiene la capacidad de reconfigurar de manera autónoma los parámetros del controlador en términos de la situación de falla.

En la Figura 2.7 se muestra el esquema general de un sistema bajo el esquema de control activo tolerante a fallas.

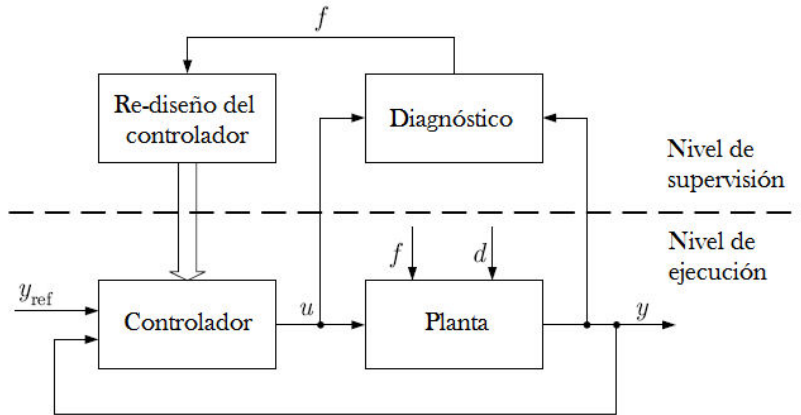


Figura 2.7: Esquema general de un sistema tolerante a fallas activo

En caso de presentarse una falla f en la planta, existe un sistema de detección y diagnóstico que identifica el tipo de falla. Con base en esta información, la lógica de reconfiguración del controlador actúa de forma que los parámetros de éste se ajustan para que, en primer lugar, la planta sea capaz de seguir operando de manera segura y, en segundo lugar, que el desempeño sea satisfactorio aún en presencia de la falla f y las perturbaciones d .

El esquema de múltiples modelos de planta se puede aplicar entonces al esquema de control activo, parametrizando dichos modelos en términos de la intensidad de la falla. De esta manera, se tiene una familia de $n + 1$ modelos lineales, donde existe un modelo para el sistema nominal sin falla y p modelos para los distintos escenarios de falla.

$$G(s) = \{G_0(s), G_1(s), G_2(s), \dots, G_p(s)\} \quad (2.40)$$

donde $G_0(s)$ corresponde al modelo de la planta nominal y $G_i(s)$; $i = 1, 2, \dots, p$, corresponden a modelos de planta con distintas intensidades de falla.

2.6.1. Estabilización por medio de controladores PID

En este trabajo se considera el caso particular en el que cada elemento de (2.40) se puede estabilizar por medio de un controlador de tipo PID. De esta manera, se propone utilizar el procedimiento descrito en la sección anterior para hallar familias de controladores estabilizantes para cada uno de los elementos de (2.40) y buscar entre ellos, una familia de controladores comunes.

En este contexto se plantea que la sintonización de los controladores se realice fuera de línea, por esto, contar con la familia de controladores estabilizantes *a priori*, permite realizar búsquedas más rápidas de controladores, reduciendo así el tiempo de diseño.

Considérese que a cada elemento $G_i(s)$ en (2.40), se puede asociar una región PID estabilizante P_i . Si existe $P_i \cap P_j \neq \emptyset$; $i \neq j$, entonces existe una familia $P_{PID} = P_1 \cap P_2 \cdots \cap P_p$ de controladores PID comunes a todos los elementos de (2.40) tales que cualquiera de los controladores que pertenecen a dicha intersección garantiza la estabilidad de la planta nominal y las plantas con falla.

Una manera sencilla de implementar la idea anterior, consiste en obtener cada una de las regiones P_i de controladores PID asociadas a los elementos de (2.40), y superponerlas entre si de manera que se vea claramente la intersección.

2.6.2. Estabilidad conmutada

Como se muestra en (Liberzon y Morse 1999) y (Liberzon 2003) no es suficiente garantizar la estabilidad individual de la planta nominal y de los sistemas con falla, sino que se debe garantizar además la estabilidad del sistema durante la conmutación entre los distintos modelos y ante cualquier posible secuencia de conmutación.

Aún cuando los sistemas sean estables, puede existir una secuencia de conmutación tal que el sistema conmutado se comporte como si fuera un sistema inestable. Considérese por ejemplo el escenario propuesto en la Figura 2.8, donde se muestran las trayectorias de un par de sistemas de segundo orden. En este caso, las trayectorias de las Figuras 2.8(a) y 2.8(b) convergen al origen cuando $t \rightarrow \infty$, sin embargo, seleccionando una secuencia de conmutación arbitraria, la trayectoria del sistema conmutado podría comportarse según se muestra en la Figura 2.8(c). Por esta razón se debe garantizar la estabilidad independientemente de la

secuencia de conmutación.

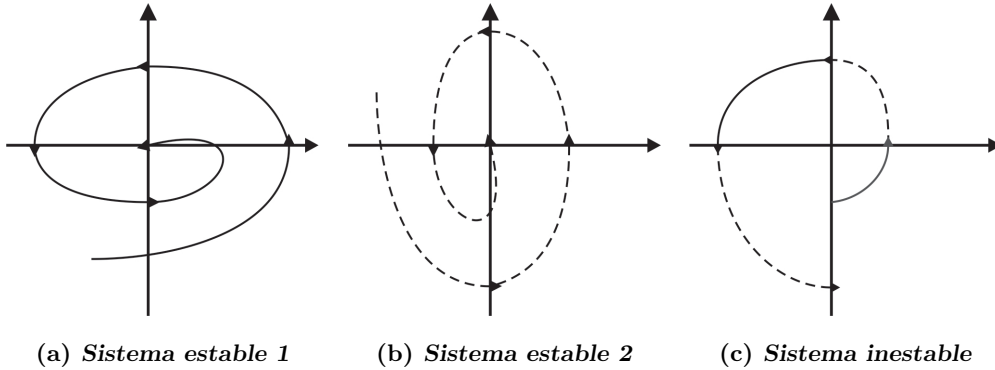


Figura 2.8: Pérdida de estabilidad por conmutación para un sistema de segundo orden

De acuerdo con el trabajo de (Liberzon y Morse 1999) un sistema conmutado se puede describir mediante una ecuación diferencial de la forma

$$\dot{x} = f_\sigma(x) \quad (2.41)$$

donde $\{f_p : p \in P\}$ es una familia de funciones suficientemente regulares de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n , que está parametrizada por algún conjunto de índices P , y $\sigma : [0, \infty) \rightarrow P$ es una función del tiempo continua a tramos llamada señal de conmutación.

Se asume además que los sistemas individuales tienen el origen como un punto de equilibrio común ($f_p(0) = 0$), por lo tanto, una condición necesaria para la estabilidad asintótica bajo una secuencia de conmutación arbitraria, es que todos los sistemas individuales sean asintóticamente estables.

Considerando ahora el caso particular de una familia de sistemas lineales

$$\dot{x} = A_p x, \quad p \in P \quad (2.42)$$

tal que las matrices A_p son estables, y el conjunto $\{A_p : p \in P\}$ es compacto en \mathbb{R}^n , si todos los sistemas en esta familia comparten una función de Lyapunov cuadrática común, el sistema lineal conmutado

$$\dot{x} = A_\sigma x \quad (2.43)$$

es global, uniforme y exponencialmente estable. Esto significa que si existen dos matrices simétricas, positivas definidas P y Q tales que:

$$A_i^T P + P A_i < -Q \quad i = 1, 2, \dots, n$$

existen constantes positivas c y μ tales que las trayectorias $x(t)$ del sistema conmutado $\dot{x} = A_\sigma x$, para cualquier condición inicial $x(0)$ satisfacen:

$$\|x(t)\| \leq ce^{-\mu t} \|x(0)\| \quad \forall t \geq 0$$

y además, el resultado es independiente de la secuencia de conmutación σ .

2.6.3. Ejemplo 2

Considérese el sistema de segundo orden

$$\dot{x} = A_p x \quad (2.44)$$

donde

$$A_p = \left\{ \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -3 & -6 \end{array} \right] \right\} \quad (2.45)$$

En este ejemplo, el sistema lineal conmutado (2.44), con las matrices (2.45), será estable bajo cualquier secuencia de conmutación en sus elementos, si todos los elementos de (2.45) son estables, y si ambos sistemas comparten una función de Lyapunov común.

Los elementos de (2.45) son estables ya que los valores característicos de ambas matrices son negativos:

$$\lambda(A_p(1)) = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \lambda(A_p(2)) = \begin{bmatrix} -0.55 \\ -5.44 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Para hallar una función de Lyapunov común, se emplea el paquete de solución de desigualdades matriciales del Robust Control Toolbox de MATLAB® para resolver el sistema de desigualdades matriciales

$$A_{p_i}^T P + P A_{p_i} < -Q \quad i = 1, 2 \quad (2.47)$$

donde, en particular, $Q = 0$. Con estos datos, se utilizó el siguiente script en MATLAB®

```
% Se declaran las matrices A1 y A2
A1=[0 1;-3 -4];
A2=[0 1;-3 -6];

%Se crea un nuevo conjunto de desigualdades lineales matriciales
setlmis([])

% Se crea la variable matricial "p" para el sistema de LMI's
p=lmivar(1,[2 1]);

% Se crea la primera LMI
lmiterm([1 1 1 p],A1',1,'s') % A1' * P + P * A1 < 0

% Se crea la segunda LMI
```



```

lmiterm([2 1 1 p],A2',1,'s') % A2' * P + P * A2 < 0

% Se crea la tercera LMI que establece P>0
lmiterm([-3 1 1 p],1,1) % P
lmiterm([3 1 1 0],0) % 0

% Se crea la representación del problema para la computadora, o "descripción interna"
lmis = getlmis;

% Se utiliza "feasp" para resolver el sistema de LMI's
[tmin,xfeas] = feasp(lmis);

% Se obtiene la matriz P
P = dec2mat(lmis,xfeas,p);

% Se muestran los valores característicos de P
eig(P)

```

y se obtiene como resultado la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1.2524 & 0.1683 \\ 0.1683 & 0.1459 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

cuyos valores característicos son

$$\lambda(P) = \{ 0.1208 \quad 1.2774 \} \quad (2.49)$$

por lo tanto, dado que existe Q , existe P positiva definida y los elementos de (2.45) son estables, el sistema (2.44) será estable bajo cualquier secuencia de conmutación. En la Figura 2.9 se muestra la respuesta a escalón del sistema en lazo abierto cuando se conmuta de $A_p(1)$ a $A_p(2)$.

2.6.4. Implementación en MATLAB®

Los resultados de familias de controladores PID estabilizantes mostrados a lo largo de éste capítulo, fueron obtenidos a través de un paquete de software desarrollado en el Instituto de Ingeniería de la UNAM. Dicho software es capaz de obtener familias de controladores PID para un sistema SISO de orden n siguiendo el esquema propuesto por Bhattacharyya.

Sin embargo, según se mencionó anteriormente, una idea poco explotada en área de sistemas de control tolerantes a fallas, consiste en hallar regiones de controladores estabilizantes comunes para sistemas diseñados bajo el esquema de múltiples plantas.

El algoritmo propuesto por Bhattacharyya puede ser utilizado para obtener regiones comunes de controladores PID de una manera relativamente sencilla:

1. A partir de las funciones de transferencia del sistema (2.40) se calcula para cada una de ella el o los intervalos válidos de k_p , utilizando las ideas del lugar de las raíces

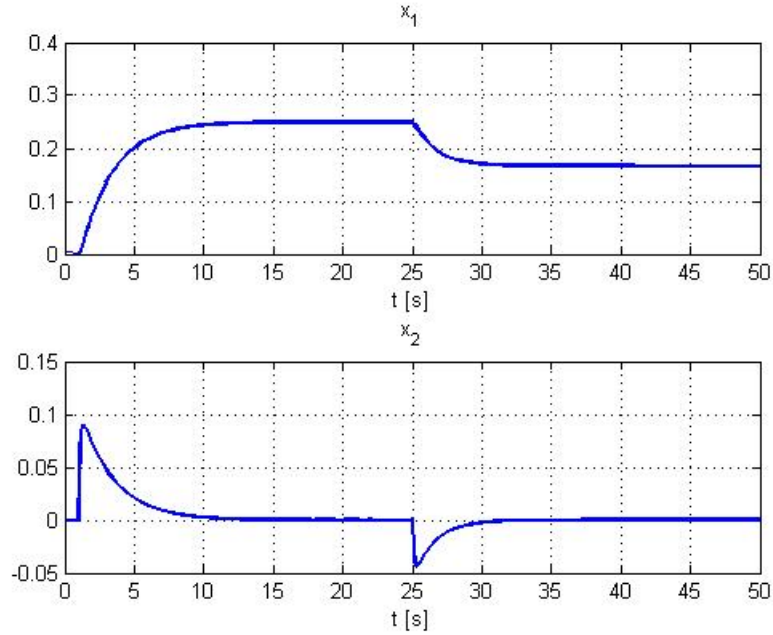


Figura 2.9: Respuesta del sistema (2.44) cuando se conmuta de $A_p(1)$ a $A_p(2)$

planteadas en (Datta *et al.* 2000), y que básicamente establecen que en el LGR cuando k_p varía de $-\infty$ a ∞ , la distribución de las raíces entre los intervalos de k_p donde ocurren rupturas sobre el eje real, permanece constante. Utilizando este hecho se pueden reducir los intervalos de búsqueda pues, como se mencionó anteriormente, para que $F_{k_p}^*$ no sea vacío se requiere que l en la Definición 2, tenga un valor mínimo.

2. Utilizando los intervalos válidos de k_p para cada planta, se busca la intersección entre ellos.
3. Si no existe intersección, entonces no hay solución al problema y se termina el proceso.
4. Si existe intersección, se obtienen los valores máximo y mínimo del intervalo donde se da la intersección.
5. Utilizando los valores obtenidos en el punto anterior, se busca la región de parámetros k_i , k_d estabilizantes para cada planta, tomando valores sobre el intervalo de k_p válido para todas las plantas.
6. Se dibujan las regiones estabilizantes de manera que se pueda apreciar si hay superpo-

sición. Esto se puede lograr dibujando la región con transparencia.

Haciendo algunas modificaciones al paquete desarrollado en el Instituto de Ingeniería, es posible obtener una herramienta que calcula las regiones de controladores estabilizantes, tanto de manera individual para cada una de las plantas, como para un conjunto simultáneo de hasta 6 plantas. La pantalla principal del paquete se muestra en la Figura 2.10.

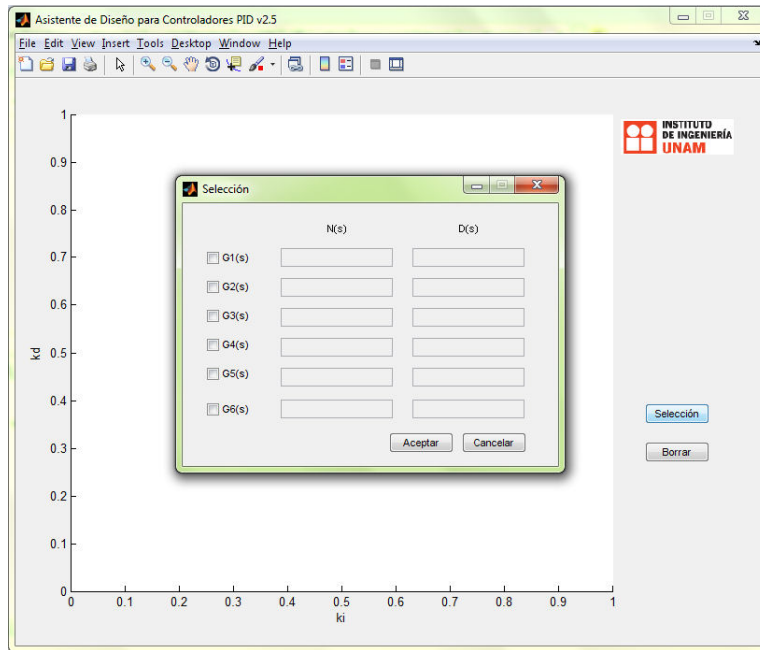


Figura 2.10: Pantalla principal del asistente para diseño de múltiples familias de controladores PID.

En la Sección 4.2 se muestra un ejemplo en el que se obtienen las regiones de controladores estabilizantes para el modelo de una turbina de gas. Según se muestra, la variación del parámetro de falla produce una reducción en el área de la región estabilizante, sin embargo, la forma de la región se mantiene muy similar en todas las condiciones.

Familias de controladores PID estabilizantes para sistemas de 2×2

Uno de los objetivos de este trabajo es buscar mecanismos para extender el método de diseño de controladores PID estabilizantes propuesto por Bhattacharyya (Datta *et al.* 2000), para hacerlo aplicable a sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO).

Para llevar a cabo este objetivo se enfrentan diversos problemas, siendo uno de los más importantes elegir un método de diseño. La propuesta de este trabajo es emplear una técnica conocida como Diseño de Canales Individuales, presentada inicialmente en (O'Reilly y Leithead 1991). El análisis a través del Diseño de Canales Individuales permite al diseñador trabajar con un sistema multivariable, en términos de un conjunto de entidades más pequeñas llamadas canales. Sin embargo, es conveniente hacer notar que esta transformación del sistema, no afecta su naturaleza multivariable original.

En esencia, el diseño de canales individuales propone expresar un sistema multivariable, en términos de funciones de transferencia monovariadas, conservando las características estructurales del sistema multivariable; en este contexto, es posible utilizar muchas de las técnicas de diseño de controladores para sistemas SISO, ya sean técnicas clásicas, o bien como es el caso de este apartado, técnicas más avanzadas de diseño.

En este contexto, el problema de hallar familias de controladores estabilizantes para sistemas multivariables, resulta atractivo puesto que, como se ha mencionado anteriormente, contar con una familia de controladores estabilizantes, permite acelerar la búsqueda, una

vez garantizada la estabilidad, de controladores que cumplan con condiciones de desempeño específicas, reduciendo así el tiempo de diseño.

En esta sección se presentan los fundamentos de la técnica de Diseño de Canales Individuales (DCI), así como la propuesta de cómo aplicar en este contexto el trabajo realizado previamente por Bhattacharyya para buscar familias de controladores estabilizantes para sistemas multivariable.

3.1. Diseño de canales individuales

La técnica de diseño de canales individuales establece fundamentalmente que es posible expresar un sistema multivariable de m entradas y m salidas, en términos de funciones de transferencia monovariable llamadas canales, preservando las propiedades estructurales del sistema multivariable.

De acuerdo con O'Reilly y Leithead, la técnica de DCI no es un método de diseño de controladores en si mismo, sino un marco de trabajo a través del cual, es posible obtener una representación de un sistema multivariable que permite llevar a cabo el diseño de controladores evitando hasta cierto punto la complejidad propia de los sistemas MIMO. Sin embargo, se hace énfasis en la característica del método de preservar las propiedades de naturaleza multivariable del sistema. Dichas propiedades se preservan a través de funciones de transferencia especiales llamadas Funciones de Estructura Multivariable.

El diseño de controladores en el marco de referencia del DCI, se ve fuertemente influenciado por la interacción entre los requerimientos de desempeño que se busca satisfacer utilizando el sistema retroalimentado, y las limitaciones impuestas por los atributos propios de la planta.

El concepto de canales individuales que relacionan la transferencia de una señal desde un punto de entrada hasta un punto de salida, surge de manera natural en el contexto de la especificación de los objetivos de control. En general, se busca que la manipulación de una variable de entrada (voltaje, flujo, fuerza, etc.), tenga como efecto la modificación de una variable de salida (corriente, temperatura, velocidad, etc.), sin afectar el resto del proceso en el que éstas intervienen. Es decir, se busca que la manipulación de una variable de control, sólo afecte a la variable controlada sin afectar de forma significativa el resto del proceso. En este sentido, se encuentra implícita la suposición de un canal de transferencia directa entre

la entrada y salida correspondientes.

Una segunda característica del DCI consiste en tratar las interacciones debidas al acoplamiento entre entradas y salidas en el sistema, como perturbaciones en el lazo de control de cada canal individual. Dentro de este esquema, las interacciones debidas al acoplamiento entre canales se consideran como perturbaciones mutuas. De esta forma, si el controlador diseñado es capaz de rechazar estas perturbaciones, es posible alcanzar un mayor desacoplamiento entre señales.

El esquema general del sistema multivariable retroalimentado de dos entradas y dos salidas se muestra en la Figura 3.1:

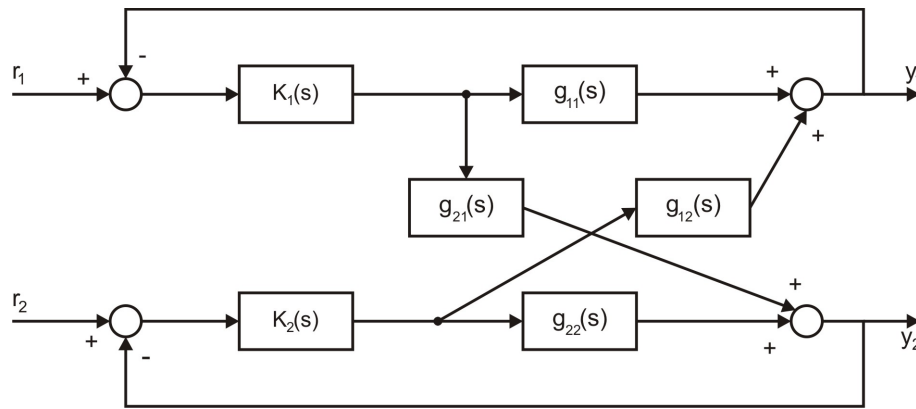


Figura 3.1: Sistema multivariable retroalimentado

El sistema retroalimentado consta de un par de términos de transferencia directa $g_{11}(s)$ y $g_{22}(s)$, así como un par de términos de acoplamiento $g_{21}(s)$ y $g_{12}(s)$. El control de la planta se realiza a través de la matriz de controlador diagonal $K(s)$ cuyos elementos en la diagonal son $K_1(s)$ y $K_2(s)$, esto es:

$$K(s) = \begin{bmatrix} K_1(s) & 0 \\ 0 & K_2(s) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Es importante mencionar que utilizar una matriz de control diagonalizada permite simplificar el diseño al asignar señales de control orientadas específicamente a cada canal.

En particular se busca diseñar $K_1(s)$ y $K_2(s)$ como controladores de tipo PID, donde los valores de las ganancias (k_p, k_i, k_d) se puedan establecer a partir de regiones estabilizantes

independientes para cada controlador.

$$K_j(s) = \frac{k_{d_j}s^2 + k_{p_j}s + k_{i_j}}{s}; \quad j = 1, 2 \quad (3.2)$$

Nótese que la topología del sistema de la Figura 3.1 es simétrica ya que la estructura que existe al considerar el lazo entre la entrada r_1 y la salida y_1 , es idéntica a la estructura del lazo entre la entrada r_2 y la salida y_2 .

Considerando el recorrido de la señal de transmisión entre r_1 y y_1 se observa que ésta sigue dos vías paralelas, la primera de ellas directamente a través de $g_{11}(s)$, y la segunda a través de $g_{21}(s)$ siguiendo el lazo en retroalimentación entre $g_{22}(s)$ y $K_2(s)$, para finalmente pasar por $g_{12}(s)$. Lo anterior se expresa en el diagrama mostrado en la Figura 3.2.

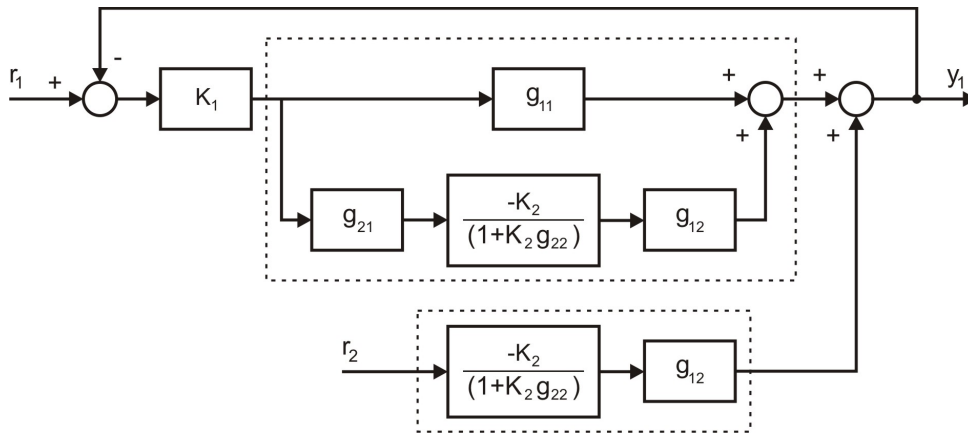


Figura 3.2: Señal de transmisión a la salida y_1

Reordenando los términos del lazo de retroalimentación entre la referencia r_1 y la salida y_1 de la Figura 3.2 éste se puede reescribir según se muestra en la Figura 3.3.

La Figura 3.3 muestra el esquema de transferencia desde la entrada r_1 hasta la señal de salida y_1 , donde se aprecia propiamente la estructura del canal de transferencia directa y el término asociado al efecto de acoplamiento proveniente de la señal de referencia r_2 .

La función de transferencia de lazo abierto desde la entrada r_1 hasta la salida y_1 se conoce como canal C_1 y se define como:

$$C_1 \triangleq K_1 g_{11} (1 - \gamma h_2) \quad (3.3)$$

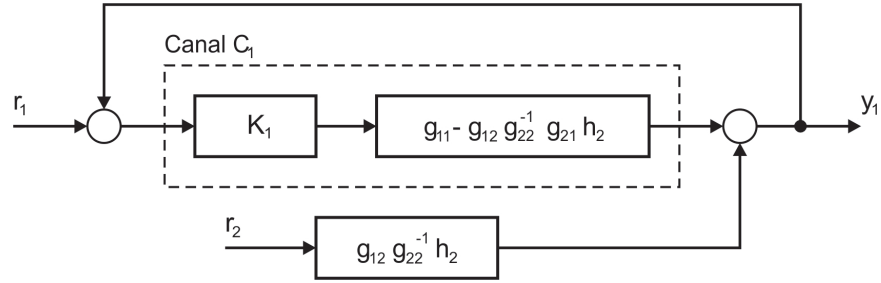


Figura 3.3: Canal Individual C_1 con señal de perturbación debida a acoplamiento y retroalimentación unitaria negativa

donde

$$\gamma \triangleq \frac{g_{12}g_{21}}{g_{22}g_{11}} \quad (3.4)$$

$$h_2 \triangleq \frac{K_2 g_{22}}{1 + K_2 g_{22}} \quad (3.5)$$

De la misma manera, y por la simetría topológica que existe entre los elementos de la Figura 3.1, el canal C_2 se define como

$$C_2 \triangleq K_2 g_{22} (1 - \gamma h_1) \quad (3.6)$$

donde

$$h_1 \triangleq \frac{K_1 g_{11}}{1 + K_1 g_{11}} \quad (3.7)$$

La función γ se conoce como función de estructura multivariable (FEM) y tiene una gran importancia dentro del contexto del diseño de canales individuales. No se hace ninguna suposición particular respecto de la estructura de cualquiera de las funciones de transferencia g_{ij} ó h_i . No se requiere que sean estables o de fase mínima.

Considerando la estructura de los canales C_1 y C_2 dadas por las ecuaciones (3.3) y (3.6) respectivamente, la estructura de polos y ceros de éstos se resume en la Tabla 3.1 (Leithead y O'Reilly 1991).

	Ceros	Polos
Canal C_1	Ceros de $(1 - g_{12}g_{22}^{-1}h_2g_{21}g_{22}^{-1})$	Polos de $g_{11}, g_{12}, g_{21}, h_2$
Canal C_2	Ceros de $(1 - g_{21}g_{11}^{-1}h_1g_{12}g_{22}^{-1})$	Polos de $g_{22}, g_{12}, g_{21}, h_1$

Tabla 3.1: Estructura de lazo abierto de polos y ceros de los canales C_1 y C_2

La respuesta de lazo cerrado del Canal C_1 se puede describir como

$$y_1(s) = T_1(s)r_1(s) + S_1(s)r_2(s) \quad (3.8)$$

donde

$$\begin{aligned} T_1(s) &= [1 + K_1g_{11}(1 - \gamma h_2)]^{-1} K_1g_{11}(1 - \gamma h_2) \\ &= [1 - \gamma h_1h_2]^{-1} h_1(1 - \gamma h_2) \end{aligned} \quad (3.9)$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} S_1(s) &= [1 + K_1g_{11}(1 - \gamma h_2)]^{-1} g_{12}g_{22}^{-1}h_2 \\ &= [1 - \gamma h_1h_2]^{-1} (1 - h_1)g_{12}g_{22}^{-1}h_2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Si K_1 es un controlador estabilizante para el Canal C_1 y las señales de referencia $r_1(s)$ y $r_2(s)$ son estables, entonces las contribuciones de éstas a $y_1(s)$ (T_1r_1 y S_1r_2 respectivamente), son estables, y por lo tanto, la contribución de r_2 en la Figura 3.3 se puede tratar como una perturbación normal actuando en un sistema SISO representado por el Canal C_1 (Leithead y O'Reilly 1992).

De manera similar, la respuesta de lazo cerrado del Canal C_2 se describe por

$$y_2(s) = T_2(s)r_2(s) + S_2(s)r_1(s) \quad (3.11)$$

donde

$$\begin{aligned} T_2(s) &= [1 + K_2g_{22}(1 - \gamma h_1)]^{-1} K_2g_{22}(1 - \gamma h_1) \\ &= [1 - \gamma h_1h_2]^{-1} h_2(1 - \gamma h_1) \end{aligned} \quad (3.12)$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} S_2(s) &= [1 + K_2g_{22}(1 - \gamma h_1)]^{-1} g_{21}g_{11}^{-1}h_1 \\ &= [1 - \gamma h_2h_1]^{-1} (1 - h_2)g_{21}g_{11}^{-1}h_1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde, de la misma forma, la señal proveniente de r_1 y que actúa sobre y_2 puede ser tratada como una señal de perturbación normal que actúa en el sistema SISO que representa al Canal C_2 (Leithead y O'Reilly 1992).

De acuerdo con (Ugalde-Loo *et al.* 2005), la correcta interpretación de la FEM (3.4) es de gran importancia ya que

- determina las características dinámicas de cada configuración entrada-salida;
- tiene una interpretación en el dominio de la frecuencia;
- su magnitud cuantifica el acoplamiento entre canales (en el dominio de la frecuencia), es decir, cuando la magnitud de γ es pequeña, el acoplamiento entre entradas y salidas es débil y cuando la magnitud de γ es grande, el acoplamiento entre entradas y salidas es fuerte;
- está relacionada con los ceros de transmisión de la planta (i.e. los ceros de $(1 - \gamma(s))$, $|G(s)| = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 0$);
- $\gamma(s) = 1$ determina la condición de fase no mínima;
- su cercanía con el punto $(1, 0)$ en la gráfica de Nyquist indica en qué grado la planta es sensible a las incertidumbres en términos de margen de ganancia y margen de fase.

Un obstáculo aparente en el diseño de controladores para el sistema multivariable, surge de la dependencia que existe en la función de transferencia (3.3) respecto del controlador K_2 por medio de la función de transferencia (3.5) y de la misma forma en el canal C_2 por la dependencia de K_1 a través de h_1 .

Una propuesta para superar dicho obstáculo proviene de las especificaciones de desempeño de la planta, entendiendo que dichas especificaciones se dan en términos del desempeño de cada canal.

Una de estas especificaciones es el ancho de banda, el cuál se selecciona con base en la velocidad de respuesta deseada del canal, así como la reducción de perturbaciones persistentes que lo afectan (O'Reilly y Leithead 1991). Por lo tanto, partiendo de la especificación del ancho de banda se pueden enfrentar dos casos:

- Los anchos de banda de los canales C_1 y C_2 son esencialmente iguales.
- Los anchos de banda de los canales C_1 y C_2 son significativamente diferentes.

Es posible llevar a cabo el planteamiento en cualquiera de las situaciones anteriores; sin embargo por simplicidad se asumirá que:

Consideración 1 *El ancho de banda de lazo cerrado ω_{b_1} del canal C_1 , es significativamente menor que el ancho de banda de lazo cerrado ω_{b_2} , del canal C_2 .*

□

Lo anterior implica que la frecuencia ω_{C_1} , de la ganancia de cross-over del canal C_1 en lazo abierto, es significativamente menor que la frecuencia ω_{C_2} , de la ganancia de cross-over del canal C_2 , según se muestra en la Figura 3.4. La frecuencia de ganancia de cross-over, se refiere a la frecuencia para la cuál, la función de transferencia de lazo abierto tiene ganancia de 0 [dB]. La consideración anterior establece que la ganancia en lazo abierto del Canal C_2 es mayor que la ganancia de lazo abierto del Canal C_1 sobre el rango de frecuencias $[0, \omega_{b_1}]$, y según se muestra mas adelante, esta relación se conserva en las funciones de estructura multivariable h_i , permitiendo llevar a cabo el diseño de los controladores de forma independientemente.

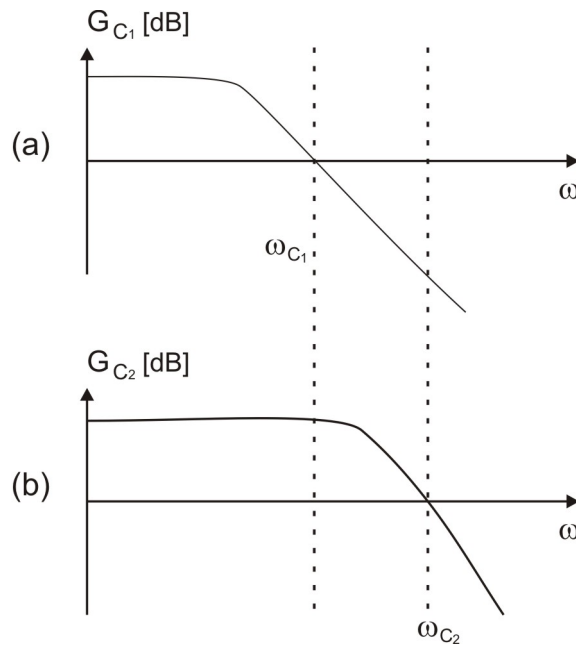


Figura 3.4: Formas típicas de respuesta en frecuencia para las funciones de transferencia de lazo abierto de los canales C_1 y C_2

Se debe hacer además una segunda consideración respecto a las funciones γh_2 y γh_1 en (3.3) y (3.6) respectivamente, esto es:

Consideración 2 *El diagrama polar de las funciones de estructura multivariable $\gamma h_i(s)$, $i = 1, 2$ en (3.3) y (3.6) nunca es cercano a 1.*

□

Según se demuestra en (O'Reilly y Leithead 1991), las consideraciones 1 y 2 permiten establecer el resultado siguiente:

Resultado 1 *Los anchos de banda ω'_{b_i} de los sistemas en retroalimentación*

$$h_i = \frac{K_i g_{ii}}{1 + K_i g_{ii}}, \quad i = 1, 2 \quad (3.14)$$

son aproximadamente iguales a los anchos de banda ω_{b_i} correspondientes, de los sistemas en lazo cerrado h_i^C preservando la separación entre ellos, y donde:

$$h_1^C \triangleq \frac{K_1 g_{11} (1 - \gamma h_2)}{[1 + K_1 g_{11} (1 - \gamma h_2)]} \quad (3.15)$$

$$h_2^C \triangleq \frac{K_2 g_{22} (1 - \gamma h_1)}{[1 + K_2 g_{22} (1 - \gamma h_1)]} \quad (3.16)$$

□

Lo anterior significa que la relación entre anchos de banda de las funciones de transferencia de lazo cerrado de cada canal (h_i^C), obtenidas por especificación, se mantienen reflejadas en los sistemas retroalimentados h_i ; $i = 1, 2$ respectivos.

La demostración de este resultado se puede consultar en (O'Reilly y Leithead 1991).

3.2. Diseño de controladores PID estabilizantes

Tomando en cuenta las ideas anteriores, se plantea ahora una aproximación para la búsqueda de familias de controladores estabilizantes utilizando el método propuesto por Bhattacharyya dentro del marco de Diseño por Canales Individuales.

En primer lugar, se considera que la planta con la que se trabaja es de dos entradas y dos salidas. En segundo lugar, se asume que la planta cumple además con la condición establecida en la Consideración 1, es decir, que los anchos de banda de los canales individuales de la planta cumplen con la condición de separación; por lo tanto, es posible aplicar a la planta el Resultado 1, es decir, que la separación de anchos de banda de los canales C_1 y C_2 se preserve a través de las funciones h_i $i = 1, 2$.

La manera de proceder es como sigue. Tomando en cuenta el Resultado 1, se puede observar que la especificación de los anchos de banda se preserva para las funciones h_i ,

además, por la Consideración 1 se sabe que como el ancho de banda del canal C_2 es mayor que el ancho de banda del canal C_1 , entonces la magnitud de la función h_2 es relativamente grande.

Además, si se diseña K_2 lo suficientemente grande, entonces de acuerdo con la ecuación (3.5), el valor de h_2 tiende a 1, y por lo tanto se puede proceder a diseñar K_1 en términos de la función de transferencia del canal C_1 como:

$$C_1(s) = g_{11} (1 - \gamma) \quad (3.17)$$

A través de esta función de transferencia se puede utilizar el método descrito en el Capítulo 2 para obtener la región estabilizante del canal C_1 . Una vez que se obtiene la región estabilizante para el canal C_1 , se debe seleccionar un controlador $K_1^*(s)$ de ésta región. Utilizando el controlador $K_1^*(s)$ se puede conocer la función de transferencia h_1 de la ecuación (3.7) y con esta, llevar a cabo el diseño del controlador $K_2(s)$ en términos de la función de transferencia

$$C_2(s) \triangleq K_2 g_{22} (1 - \gamma h_1) \quad (3.18)$$

De esta forma, se puede proceder de manera similar para obtener una región estabilizante para el controlador del canal C_2 y completar así el diseño de la matriz $K(s)$ de la ecuación (3.1).

Aplicaciones

Uno de los productos obtenidos en el desarrollo de este trabajo, es el software de diseño de controladores PID cuyo diagrama de flujo se muestra en el Apéndice A. Sin embargo, la gran mayoría de los resultados que se obtuvieron a través de éste, fueron para ejemplos tomados de la literatura.

Una de las inquietudes que se tenían, era verificar experimentalmente la validez de las regiones obtenidas con respecto a los resultados en simulación. Con esta finalidad se buscó obtener la región de controladores estabilizantes el sistema de suspensión magnética con el que cuenta la Coordinación de Eléctrica y Computación del Instituto de Ingeniería. Se seleccionó este equipo en particular porque cuenta con un controlador PID analógico de fábrica, lo cual permite sintonizar directamente los parámetros del controlador.

Partiendo de un modelo linealizado desarrollado en trabajos anteriores (Fragoso 1996), se obtuvo la región de controladores PID estabilizantes y seleccionando uno de ellos, se obtuvo su respuesta en simulación. Finalmente, se calibró el equipo y se obtuvo la respuesta experimental.

4.1. Suspensión magnética. Resultados experimentales

El esquema general del sistema se muestra en la Figura 4.1. El objetivo de control es regular la posición de la masa que se encuentra suspendida generando un campo magnético mediante la manipulación de la corriente en la bobina de control.

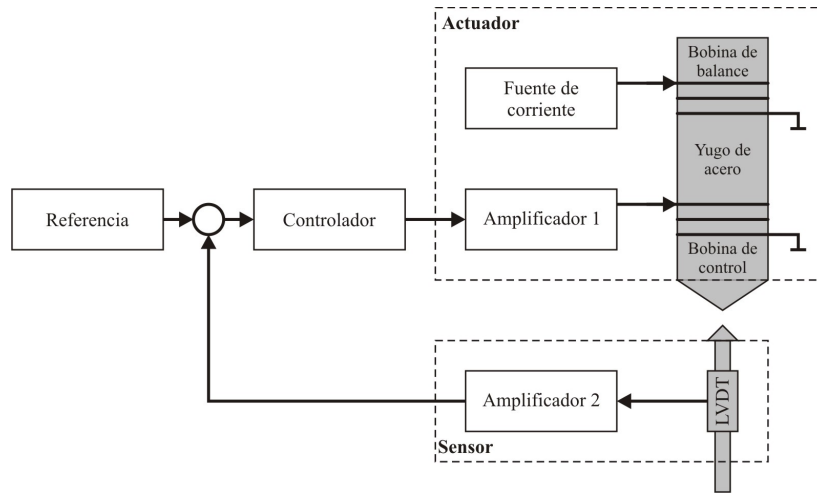


Figura 4.1: Diagrama del sistema de suspensión magnética

El sistema se puede dividir en cuatro bloques principales según se muestra en la Figura 4.2:

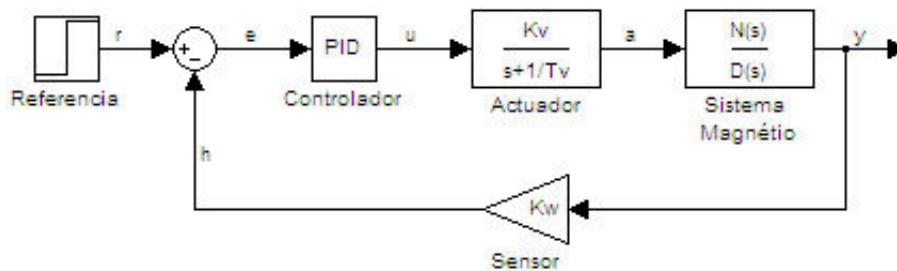


Figura 4.2: Diagrama de bloques de la suspensión magnética

4.1.1. Actuador

El actuador se divide en dos bobinas, una de ellas tiene la función de generar un campo magnético que compense la fuerza de gravedad; y la segunda es una bobina de control cuya función es compensar los cambios en la posición de la masa suspendida. La bobina de control se representa como un sistema RL en serie alimentado por una fuente de voltaje y cuya salida es la corriente generada en la bobina, por lo tanto, la función de transferencia del actuador

se puede modelar como un sistema de primer orden con los siguientes parámetros:

$$G_A(s) = \frac{k_v}{s + \frac{1}{T_v}} \quad (4.1)$$

donde, de acuerdo con los resultados presentados por (Fragoso 1996), la ganancia es $k_v = 100 \left[\frac{\text{A}}{\text{V}_s} \right]$ y la constante de tiempo es $T_v = 1 \text{ [ms]}$

4.1.2. Sensor

El sensor de posición se considera un convertidor lineal de posición a voltaje con ampli-ficación constante, de modo que la función de transferencia es:

$$G_w = k_w \quad (4.2)$$

donde $k_w = 4000 \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$.

4.1.3. Sistema magnético

Una suspensión magnética actúa como un resorte mecánico con una característica no lineal.

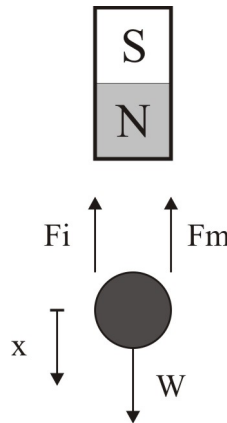


Figura 4.3: Diagrama de cuerpo libre para el sistema magnético

De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre mostrado en la Figura 4.3, el modelo matemático para la masa suspendida es

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - F_m \quad (4.3)$$

la fuerza magnética F_m esta dada por:

$$F_m = c \frac{i^2}{x^2} \quad (4.4)$$

donde c es constante y se puede calcular a partir del punto de equilibrio mediante:

$$c = mg \frac{x_0^2}{i_0^2} \quad (4.5)$$

Las cantidades i_0 y x_0 corresponden a la corriente y la distancia en el punto de operación. A través de una expansión en serie de Taylor, y despreciando los términos de orden superior, la ecuación linealizada de la fuerza magnética se puede calcular mediante

$$\Delta F_m = \frac{2mg}{x_0} \Delta x + \frac{2mg}{i_0} \Delta i \quad (4.6)$$

Utilizando la transformada de Laplace, la función de transferencia del modelo linealizado entre la posición x y la corriente i es:

$$G_{SM}(s) = \frac{\frac{2g}{i_0}}{s^2 - \frac{2g}{x_0}} \quad (4.7)$$

donde se puede observar que la función de transferencia posee un polo inestable en $s = \sqrt{\frac{2g}{x_0}}$.

Para llevar a cabo el experimento y comparar con las simulaciones se debe seleccionar un punto de operación. En este caso se seleccionó $x_0 = 2.5$ [mm] y la corriente correspondiente es $i_0 = 0.39$ [A].

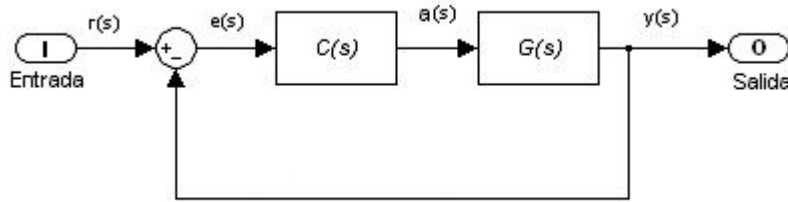


Figura 4.4: Sistema de control en lazo cerrado

Finalmente, de acuerdo con la Figura 4.4, y tomando en cuenta los valores para el punto de operación, la función de transferencia $G(s) = G_A(s) * G_w * G_{SM}(s)$ es

$$G(s) = \frac{2.0123 \times 10^7}{s^3 + 666.66s^2 - 7848s - 5232000} \quad (4.8)$$

Como se mencionó en el Capítulo 2, dados $N(s)$ y $D(s)$ es posible hallar la región de controladores PID estabilizantes utilizando el algoritmo propuesto por Bhattacharyya.

Ahora bien, utilizando el software desarrollado en el Instituto de Ingeniería que implementa dicho algoritmo, se halló la región mostrada en la Figura 4.5 para la suspensión magnética:

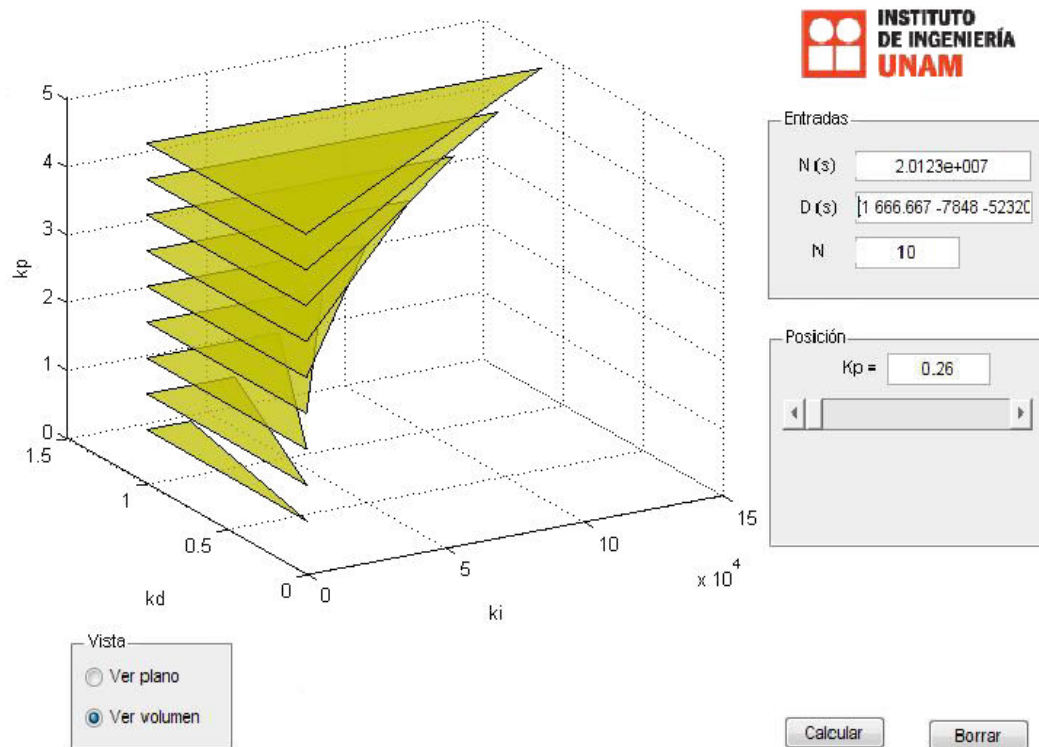


Figura 4.5: Familia de controladores estabilizantes para la suspensión magnética

Cabe mencionar que en la Figura 4.5 solo se muestra una porción representativa de la región original ya que dicha región es abierta pues $k_p \in (0.26, \infty)$. Por otro lado k_i y k_d pueden crecer indefinidamente dentro de los límites establecidos por las rectas que acotan la región triangular dada por cada semiplano en dirección k_d^+ y k_i^+ .

Debido a las limitaciones propias del controlador analógico implementado en el sistema físico, se deben establecer las siguientes restricciones: $0 < k_p < 1$; $0 < k_d < 0.1$; $0 < k_i < 10$, por lo tanto la región físicamente factible se reduce a la región mostrada en la Figura 4.6.

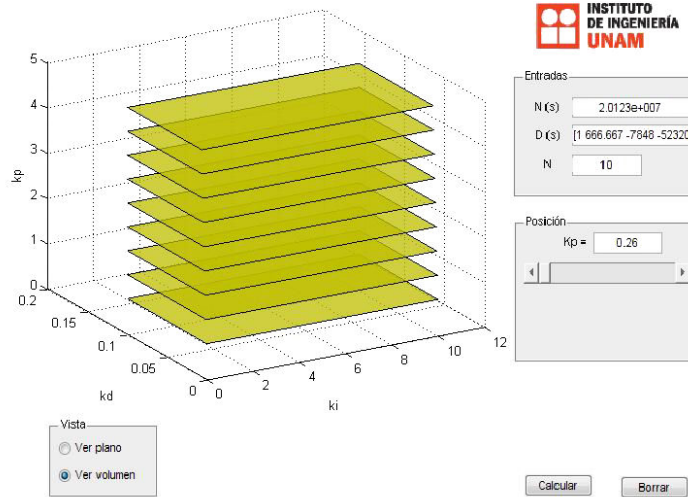


Figura 4.6: Familia reducida de controladores estabilizantes

Seleccionando $k_p = 1$, la región ID correspondiente se muestra en la Figura 4.7, donde cada uno de los puntos dentro de la región sombreada corresponde a un controlador estabilizante.

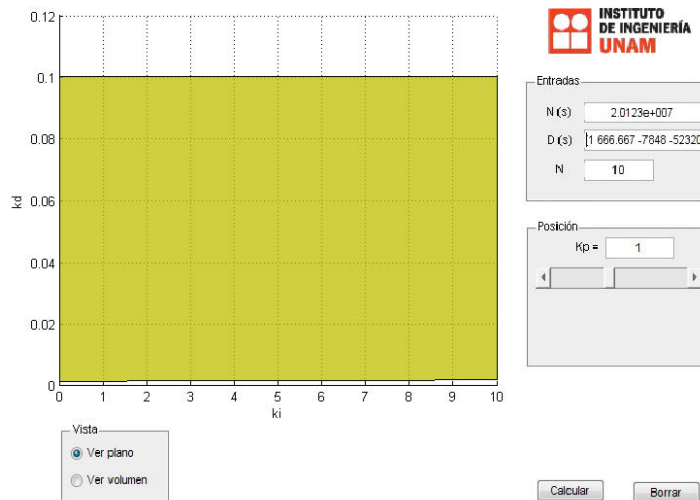


Figura 4.7: Región ID estabilizante para $k_p = 1$

Del conjunto de valores obtenidos en la región anterior, se elige ($k_i = 2, k_d = 0.025$). Los resultados en simulación y experimentales se muestran en la Figura 4.8.

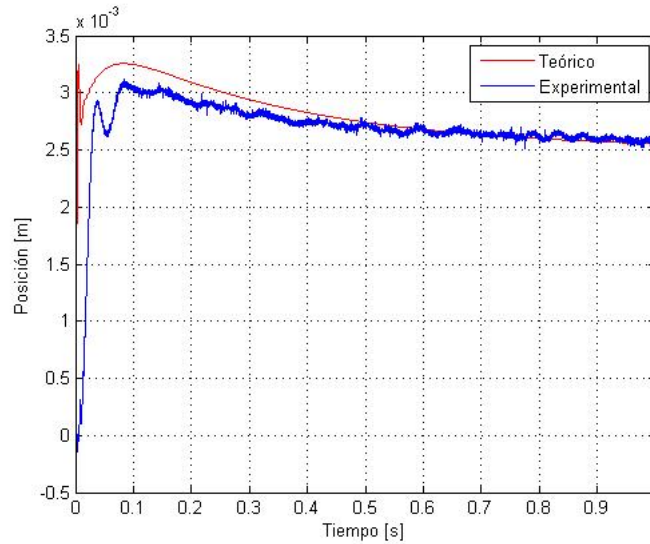


Figura 4.8: Respuesta a escalón en simulación y experimental de la suspensión magnética

Se puede observar que aunque las dos respuestas son muy parecidas, el sistema físico responde más lento en comparación con el resultado en simulación. Esto se puede explicar por el desgaste normal del equipo.

4.2. Turbina de gas. Control tolerante a fallas

Según se mencionó en el Capítulo 2, la técnica desarrollada por Bhattacharyya se puede aplicar en el diseño de controladores para sistemas tolerantes a fallas, en particular, se busca aplicar la técnica al esquema de múltiples modelos para buscar regiones traslapadas o comunes que permitan seleccionar de entre distintas familias de controladores estabilizantes, aquellos que sean capaces de operar bajo todas las condiciones de falla previstas, sin necesidad de re-sintonizar el controlador.

En esta sección, se tratará en particular el caso de una planta nominal con múltiples modelos de planta con falla, y se busca obtener una familia de controladores estabilizantes para el conjunto de la planta nominal y plantas con falla.

Con el fin de ilustrar el procedimiento, se muestra la aplicación de la metodología y

resultado en simulación para el caso del modelo de una turbina de gas.

Considérese la turbina de gas cuyo diagrama se muestra en la Figura 4.9:

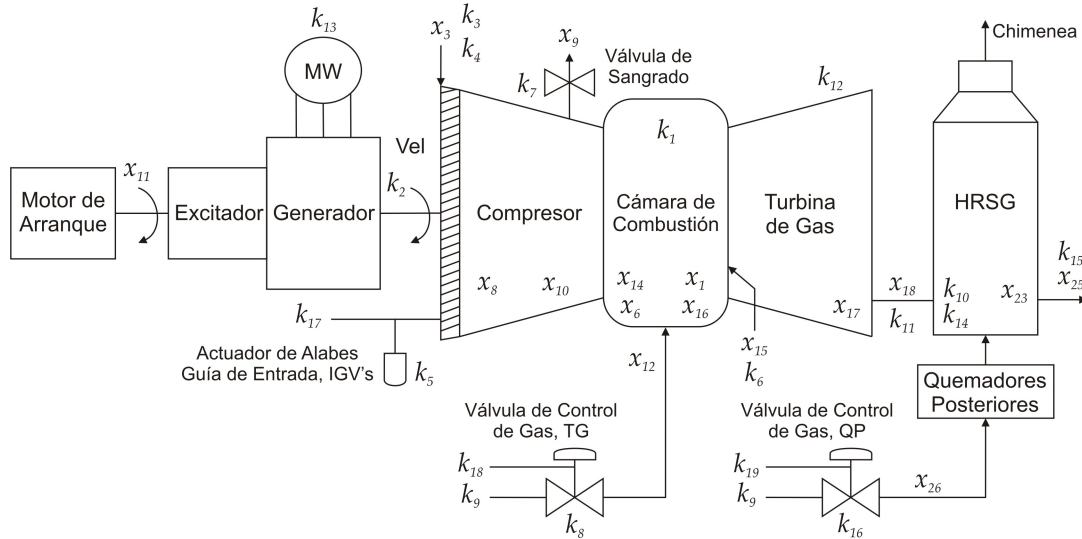


Figura 4.9: Esquema de la turbina de gas

Esta turbina puede ser operada en ciclo abierto, donde los gases de combustión son expulsados al medio ambiente, o bien conectada a un generador de vapor para formar una planta de ciclo combinado.

El objetivo de control de la turbina de gas es mantener valores nominales de velocidad en el rotor $k_2 = 60$ [rps] y potencia eléctrica generada $k_{13} = 47$ [MW].

Según se menciona en (Sánchez 2010), el modelo no lineal de la turbina esta conformado por un conjunto de 28 ecuaciones, de las cuales 19 son ecuaciones algebraicas y 9 son ecuaciones de estado. Existen así mismo 27 variables no medibles y 19 variables medibles, además de 28 parámetros de valor constante.

Con el fin de simplificar el análisis, el sistema no lineal original se somete a ciertas consideraciones y reducciones para posteriormente llevar a cabo una linealización. De esta forma, el sistema linealizado operando con una carga base de 47[MW] y velocidad del rotor de 60[rps] se describe a través de la función de transferencia

$$G(s) = \frac{5.1681s^4 + 7.5371s^3 + 4.2933s^2 + 1.2661s + 0.1052}{s^7 + 8.330s^6 + 21.051s^5 + 25.064s^4 + 15.949s^3 + 5.515s^2 + 0.940s + 0.057} \quad (4.9)$$

donde, $G(s)$ se obtiene tomando como entrada la apertura de la válvula k_{18} y como salida la potencia suministrada k_{13} .

Existen diversos factores que pueden alterar el desempeño de la turbina, tales como el desgaste natural por uso, fallas mecánicas, degradación del combustible, etc. Sin embargo, para este caso en particular se considera exclusivamente el escenario de una sola falla debida al cambio en el coeficiente de fricción en el rotor. Se considera a la falla como una variación de la forma

$$\theta = \theta_0 \times \Delta_\theta \quad (4.10)$$

donde θ_0 representa el valor nominal del parámetro θ , y Δ_θ representa un factor que determina la variación del parámetro y por lo tanto, la intensidad de la falla. De este modo, cuando $\Delta_\theta = 1$ se tiene el sistema nominal.

Con la finalidad de estudiar los efectos de la variación del coeficiente de fricción como fuente de la falla, se han considerado como valores representativos $\Delta_\theta = \{2, 5, 8, 10\}$. De esta manera, las funciones de transferencia correspondientes son

$$G_2(s) = \frac{4.97s^4 + 7.29s^3 + 4.17s^2 + 1.23s + 0.10}{s^7 + 8.14s^6 + 20.45s^5 + 24.33s^4 + 15.51s^3 + 5.39s^2 + 0.92s + 0.05} \quad (4.11)$$

$$G_5(s) = \frac{4.11s^4 + 6.20s^3 + 3.68s^2 + 1.13s + 0.11}{s^7 + 7.28s^6 + 17.78s^5 + 21.09s^4 + 13.63s^3 + 4.88s^2 + 0.89s + 0.06} \quad (4.12)$$

$$G_8(s) = \frac{3.66s^4 + 5.56s^3 + 3.32s^2 + 1.03s + 0.10}{s^7 + 6.84s^6 + 16.31s^5 + 19.17s^4 + 12.37s^3 + 4.45s^2 + 0.82s + 0.05} \quad (4.13)$$

$$G_{10}(s) = \frac{2.71s^4 + 4.39s^3 + 2.83s^2 + 20.95s + 0.12}{s^7 + 5.89s^6 + 13.39s^5 + 15.72s^4 + 10.47s^3 + 4.00s^2 + 0.81s + 0.06} \quad (4.14)$$

Como se mencionó, cada uno de estos modelos puede tener asociada una región de controladores PID estabilizantes P_i , por lo tanto, se busca calcular estas regiones y verificar si se cumple la condición de intersección $P_{PID} = P_i \cap P_j$. Utilizando el software diseñado en el Instituto de Ingeniería se obtienen los resultados mostrados en la Figura 4.10

Según se observa, cuando aumenta la intensidad de la falla, la región estabilizante se va reduciendo progresivamente. Sin embargo, aún es posible hallar una intersección de las regiones correspondientes a los sistemas con falla y la región de la planta nominal; por lo tanto, existe una región de controladores P_{PID} tales que cualquiera de ellos puede estabilizar al conjunto de plantas $G(s) = \{G_0(s), G_1(s), G_2(s), \dots, G_n(s)\}$.

Para este caso en particular, la región es:

$$P_{PID} = P_1 \cap P_2 \cap P_5 \cap P_8 \cap P_{10} \quad (4.15)$$

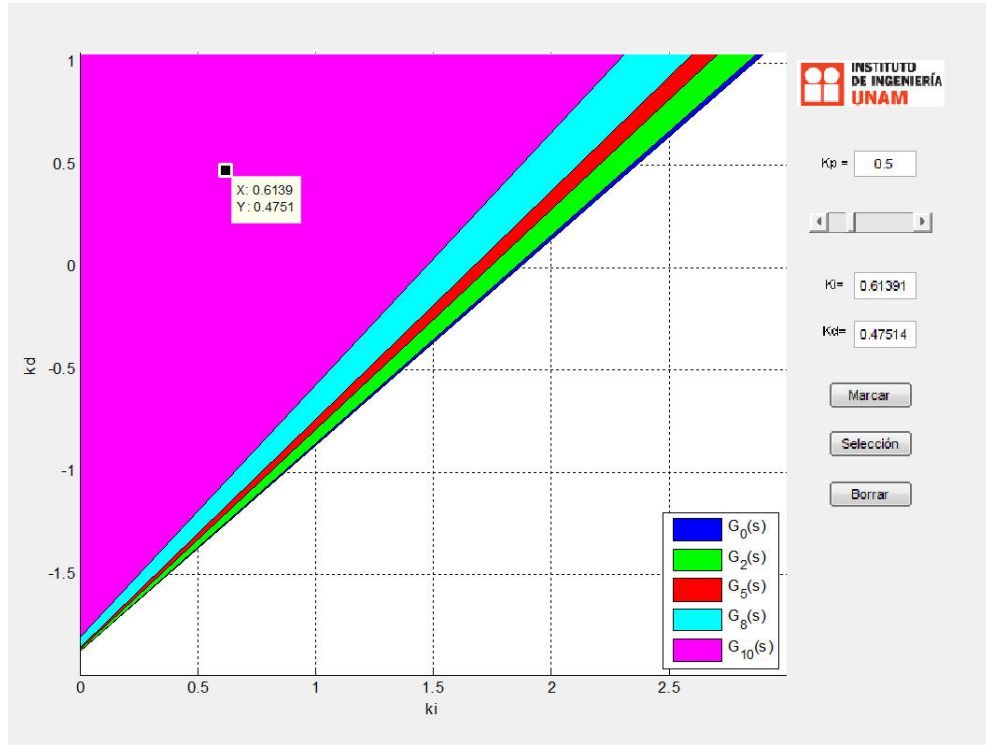


Figura 4.10: Regiones de controladores PID para la planta nominal y plantas con falla

o simplemente:

$$P_{PID} = P_{10} \quad (4.16)$$

Ahora bien, utilizando el controlador señalado en la Figura 4.10 ($k_p = 0.5$, $k_i = 0.6139$, $k_d = 0.4751$); se tienen las respuestas y señales de control mostradas en la Figura 4.11.

4.3. Sistema MIMO. Modelo de un helicóptero

En esta sección se presenta una aplicación de la propuesta para diseñar controladores PID estabilizantes descentralizados para un sistema multivariable, realizada en el Capítulo 3. Para ello se utilizará como ejemplo, el modelo de un helicóptero según se presenta en (Liceaga-Castro *et al.* 1995). De acuerdo con dicho trabajo, el modelo presentado es un modelo lineal de pequeña señal que considera la dinámica de cuerpo rígido del helicóptero. En este modelo se consideran incertidumbres en ganancia y fase debido a que no se toman en cuenta las dinámicas del rotor y el actuador. El modelo nominal del helicóptero es de orden ocho, y se considera un régimen de vuelo horizontal a 80 [nudos] ($\approx 148.16[\frac{km}{h}]$).

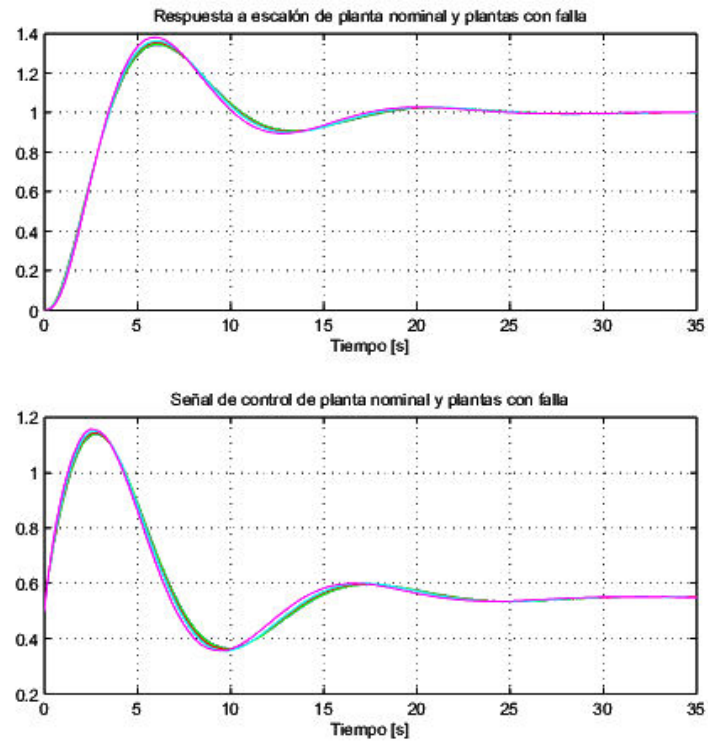


Figura 4.11: Respuesta a escalón y señal de control de la planta nominal y plantas con falla para el caso lineal

Considerando el modelo en espacio de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.17)$$

$$y = Cx \quad (4.18)$$

el vector x está descrito por

$$x = \begin{bmatrix} \mu \\ w \\ q \\ \theta \\ \nu \\ p \\ \phi \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Velocidad longitudinal} \\ \text{Velocidad vertical} \\ \text{Tasa de cabeceo} \\ \text{Ángulo de cabeceo} \\ \text{Velocidad lateral} \\ \text{Tasa de alabeo} \\ \text{Ángulo de alabeo} \\ \text{Tasa de guiñada} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

mientras que el vector de salidas está dado por

$$\begin{aligned}
 y &= \begin{bmatrix} \text{Tasa de elevación} \\ \text{Ángulo de cabeceo} \\ \text{Tasa de giro} \\ \text{Ángulo de "side-slip"} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{11}\mu + c_{12}w + c_{14}\theta + c_{15}\nu + c_{17}\phi \\ \theta \\ c_{33}q + c_{38}r \\ c_{45} \end{bmatrix} \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

y el vector de entradas es

$$u = \begin{bmatrix} \text{Vertical collective} \\ \text{Longitudinal cyclic} \\ \text{Lateral cyclic} \\ \text{Tail rotor collective} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Las matrices nominales del modelo (4.17) se pueden consultar en (Liceaga-Castro *et al.* 1995). Por conveniencia, se utiliza la notación siguiente para un polinomio $p(s)$ de orden n con ganancia k y ceros $-a_1, -a_2, \dots, -a_n$:

$$\begin{aligned}
 p(s) &= k(s + a_1)(s + a_2) \cdots (s + a_n) \\
 &:= \left[k, -a_1, -a_2, \dots, -a_n \right]^T
 \end{aligned}$$

Según se muestra en el artículo, el modelo nominal del helicóptero bajo las condiciones mencionadas resulta ser inestable, por lo tanto se realiza una compensación previa de forma

que el modelo compensado tiene la siguiente matriz de transferencia

$$\bar{G}(s) = \frac{1}{\bar{\Delta}} \begin{bmatrix} 117.8421 & 30.6525 & -0.2618 & 0.2202 \\ -10.7519 & -10.3509 & -262.2300 & -5.2552 \pm 5.3272j \\ -0.6712 \pm 2.2565j & -1.2202 \pm 5.30081j & -2.4637 \pm 7.3586j & 0.5984 \pm 5.0372j \\ -1.1484 \pm 1.0531j & -0.6504 \pm 2.24761j & -0.6417 \pm 2.2676j & -2.4243 \\ -0.1305 & -0.0283 \pm 0.00490j & -0.0422 \pm 0.0155j & -0.0501 \\ -0.0316 & -1.5 & -1.5 & -0.0426 \\ -1.5 & -1.5 & -1.4999 & -1.5 \\ -1.5 & & & -1.5 \\ \hline 14.5287 & 28.3289 & -6.7329 & -0.5937 \\ -11.5784 & -10.3714 & -18.9181 & -12.5004 \\ -0.6622 \pm 2.1969j & -0.6586 \pm 2.23673j & -0.5986 \pm 2.2666j & -2.7651 \pm 0.8226j \\ -0.3305 \pm 0.5087j & -0.0284 \pm 0.001j & -1.5597 \pm 0.3999j & -0.4240 \pm 0.5000j \\ -2.8319 & -0.7806 & -0.6899 & 1.2601 \\ -0.0339 \pm 0.0030j & -1.5 & -0.0549 & 0.1354 \\ & -1.5 & -0.0338 & -0.0327 \\ \hline 13.48 & -6.8926 & -26.6062 & -18.0634 \\ -4.5867 \pm 2.7639j & -8.2678 & -2.7055 \pm 1.5761j & -10.2517 \\ 0.2816 \pm 0.9700j & 0.5797 \pm 2.9001j & -0.0959 \pm 0.2249j & -2.9390 \pm 0.8628j \\ -3.0191 & 0.0454 \pm 0.1677j & -1.9433 & -0.1364 \pm 0.8907j \\ -0.3559 \pm 0.5294j & -1.5 & 0.8421 \pm 1.4980j & -0.0398 \pm 0.3823j \\ -0.0852 \pm 0.1978j & -1.5 & -0.3188 \pm 1.0617j & -0.1118 \pm 0.2346j \\ & -0.9262 & & \\ & 0.5769 & & \\ \hline 0.0364 & -0.0371 & -0.2263 & 0.1627 \\ 370.7522 & 142.9512 & 100.4791 & -111.1415 \\ -4.5153 \pm 2.8394j & -7.9616 & 2.5056 & -10.1939 \\ 0.0731 \pm 0.7945j & 1.3006 \pm 2.6431j & -2.6307 \pm 1.4296j & -2.9392 \pm 0.8625j \\ -2.9421 & 0.30101 & -0.0193 \pm 0.2398j & -0.1331 \pm 0.8820j \\ -0.1327 \pm 0.3223j & -1.5 & -0.5703 \pm 0.8566j & -0.1034 \pm 0.2310j \\ 0.0229 & -1.5 & -0.7643 & 0.0048 \\ & -0.3475 & & \\ & 0.0141 & & \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

El polinomio característico $\bar{\Delta}$, de acuerdo con la notación adoptada es:

$$\bar{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & -10.5518 & -2.9354 \pm 0.8629j & -0.6522 \pm 2.2540j & -0.1289 \pm 0.8763j & -0.1053 \pm 0.2244j & -0.0305 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

El controlador utilizado está dado por una matriz diagonal descrita de la siguiente manera:

$$K(s) = \begin{bmatrix} K_1(s) & 0 \\ 0 & K_2(s) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

La ecuación (4.22) se puede dividir según la partición que se muestra a continuación:

$$\bar{G}(s) = \left[\begin{array}{c|c} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ \hline G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{array} \right] \quad (4.25)$$

G_{11} representa la dinámica longitudinal y G_{22} representa la dinámica lateral. De acuerdo con el análisis realizado en (Liceaga-Castro *et al.* 1995), para efectos de diseño del control, el acoplamiento entre la dinámica longitudinal y la dinámica lateral del helicóptero se puede considerar débil y por lo tanto se puede proceder a diseñar los controladores $K_1(s)$ y $K_2(s)$ de manera independiente en términos de sistemas de dos entradas y dos salidas.

Por lo anterior, se procederá a diseñar solamente el controlador $K_1(s)$ de la dinámica longitudinal teniendo en cuenta que el proceso para la parte lateral es similar.

En este caso se considera nuevamente que el controlador $K_1(s)$ es un controlador diagonal donde los elementos diferentes de cero son controladores PID, es decir:

$$\begin{aligned} K_1(s) &= \begin{bmatrix} k_{l1}(s) & 0 \\ 0 & k_{l2}(s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{k_{d_{l1}}s^2 + k_{p_{l1}}s + k_{i_{l1}}}{s} & 0 \\ 0 & \frac{k_{d_{l2}}s^2 + k_{p_{l2}}s + k_{i_{l2}}}{s} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.26)$$

La submatriz G_{11} se puede describir a su vez a través de cuatro funciones de transferencia de acuerdo con la ecuación:

$$G_{11}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Los diagramas de Bode de magnitud de las funciones individuales se muestran en la Figura 4.12.

Se consideran entonces dos canales C_1 y C_2 , donde las funciones de transferencia de los mismos están dadas según las ecuaciones (3.3) y (3.6).

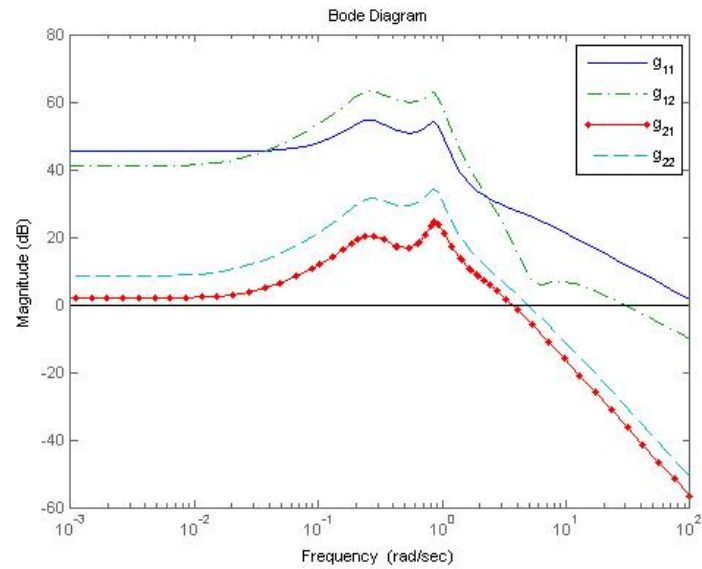
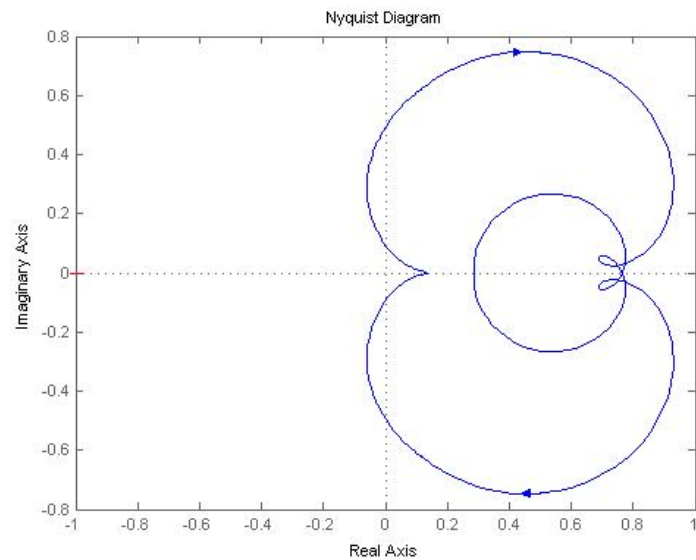
Según se observa en la Figura 4.13, la gráfica de Nyquist de la función γ no es cercana a 1.

Procediendo entonces a diseñar la familia de controladores $K_2(s)$ en términos de $C_2(s)$, se considera la función de transferencia:

$$C_2(s) = g_{22}(1 - \gamma) \quad (4.28)$$

donde, obteniendo el numerador y denominador correspondientes se tiene:

$$C_2(s) = \frac{24.55s^7 + 320.99s^6 + 995.18s^5 + 3615.65s^4 + 4557.66s^3 + 7782.06s^2 + 435.75s + 6.18}{s^9 + 15.85s^8 + 76.99s^7 + 291.56s^6 + 682.84s^5 + 1232.53s^4 + 1393.81s^3 + 996.31s^2 + 133.95s + 3.27} \quad (4.29)$$

Figura 4.12: Diagramas de Bode de las funciones individuales de $G_1(s)$ Figura 4.13: Diagramas de Nyquist de la función $\gamma(s)$

Ahora bien, utilizando la técnica mostrada en el Capítulo 2, se obtiene la región mostrada en la Figura 4.14 para un valor de $k_{p12} = 1$. Cabe mencionar que la región mostrada en la Figura 4.14 es abierta en dirección a k_{d12}^+ .

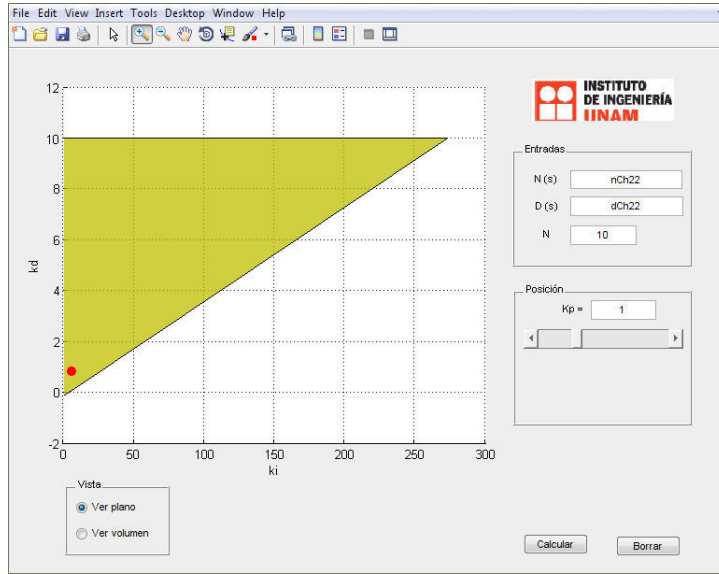


Figura 4.14: Región PID estabilizante para el canal $C_2(s)$ con $k_{p12} = 1$

Para buscar la región estabilizante del controlador del canal C_1 se selecciona uno de los controladores de la región estabilizante de C_2 dados en la Figura 4.14. En este caso se utiliza $(k_{p12} = 1, k_{i12} = 0.8, k_{d12} = 0.5)$. En términos de este controlador se puede conocer la función h_2 y utilizando ésta, se puede diseñar el controlador para el canal C_1 .

Al realizar este ejemplo se consideró el siguiente razonamiento. De acuerdo con la Consideración 1 respecto a la separación de anchos de banda, que en este caso se toma al revés, asumir que el ancho de banda (ω_{C_1}) del canal C_1 es mayor que el ancho de banda (ω_{C_2}) del canal C_2 , implica que el controlador k_{l1} se selecciona de tal forma que éste es lo suficientemente grande como para que

$$h_1(s) = \frac{k_{l1}g_{11}}{1 + k_{l1}g_{11}} \approx 1$$

Dentro de una banda $0 < \omega < \omega_{C_2}$. Una primera aproximación es proponer un controlador proporcional para k_{l1} . Es decir, en el controlador k_{l1} se establece $k_{p11} \neq 0$, $k_{i11} = 0$ y $k_{d11} = 0$.

Dado que ya se puede diseñar k_{l1} a partir de

$$C_1(s) = k_{l1}g_{11}(1 - \gamma h_2) \quad (4.30)$$

utilizando el algoritmo propuesto en (Datta *et al.* 2000) para familias de controladores proporcionales se obtiene:

$$k_{p11} \in \left[-0.0076 \quad , \quad \infty \right) \quad (4.31)$$

donde, al seleccionar $k_{p11} = 1$ se obtienen las respuestas mostradas en la Figura 4.15. De esta

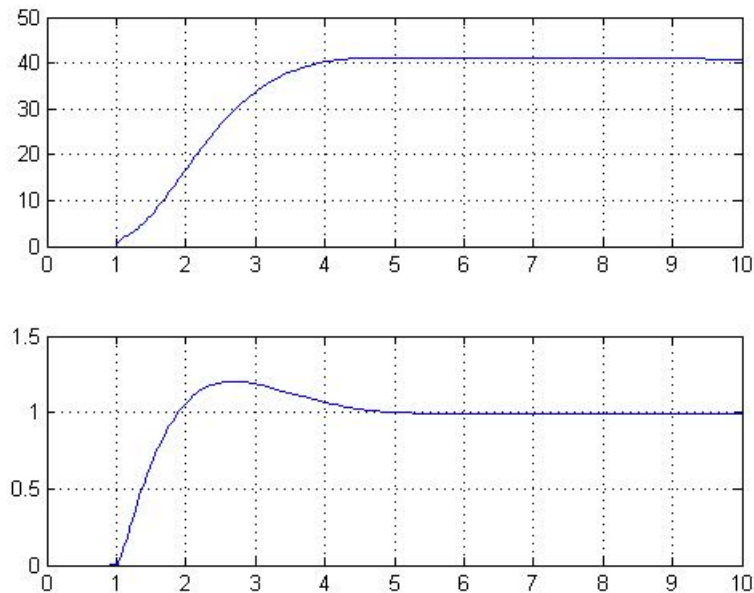


Figura 4.15: Respuesta a escalón seleccionando $k_{p11} = 1$, $k_{i11} = 0$, $k_{d11} = 0$ y $k_{p12} = 1$, $k_{i12} = 0.8$, $k_{d12} = 0.5$

forma se tiene un diseño completo para $K_1(s)$. El procedimiento se puede repetir utilizando ahora h_1 en términos de k_{l1} para re-diseñar el controlador k_{l2} a fin de mejorar la respuesta y_2 y nuevamente en el otro canal. Sin embargo, en este caso solo se buscó hallar regiones de controladores estabilizantes independientes.

Conclusiones

Se ha presentado en este trabajo la teoría que sustenta la técnica de diseño de familias de controladores PID estabilizantes, así como una manera de implementar, a través del software escrito en MATLAB®, el algoritmo propuesto por Bhattacharyya en (Datta *et al.* 2000). Anteriormente el software había sido probado utilizando diversos ejemplos presentados en la literatura. Sin embargo, también se ha validado experimentalmente el resultado a través del controlador diseñado para la suspensión magnética.

Se ha presentado así mismo, una propuesta para resolver el problema del sistema de desigualdades lineales como parte del problema de diseño de familias de controladores PID estabilizantes, utilizando las herramientas de programación lineal, ya que aunque se menciona en la literatura, no se ha reportado la manera de llevar a cabo el procedimiento.

De acuerdo con los resultados obtenidos, la región de controladores PID obtenida en el caso de la suspensión magnética es válida. Aunque se pueden observar diferencias en las respuestas teórica y experimental, esto se puede atribuir al hecho de que el movimiento de la masa suspendida altera el valor de la inductancia en la bobina de control y por lo tanto el modelo del sistema, de igual forma, el desgaste normal del equipo puede ser otro factor a considerar. Por otro lado, se observó que de forma experimental, al seleccionar controladores que se encuentran muy cercanos al límite de estabilidad (i.e. la frontera de la región), la estabilidad se pierde antes de alcanzar los valores límite. Esto se puede explicar como resultado de incertidumbres en el modelo producto del mismo desgaste o del hecho de despreciar los términos de orden superior en la linealización del modelo.

Así mismo, el software se ha modificado para buscar de manera simultánea, regiones de controladores PID estabilizantes válidas para múltiples plantas, a través de superposiciones de regiones estabilizantes con el fin de aplicarlo en problemas como el Control Tolerante a Fallas mostrado en el Capítulo 2. De acuerdo con los resultados observados en simulación, estas regiones son válidas.

Finalmente, se ha presentado una aproximación a la solución del problema de hallar familias de controladores PID estabilizantes para plantas multivariadas en el caso específico de sistemas de 2 entradas y 2 salidas. Para el caso particular del modelo del helicóptero presentado en el trabajo de (Liceaga-Castro *et al.* 1995), se encontró que aún cuando uno de los canales de la dinámica longitudinal se puede estabilizar a través de un PID, el otro canal no tiene una región PID válida. Sin embargo es posible hallar al menos una familia de controladores proporcionales.

El trabajo que se puede desarrollar en el futuro consiste en extender el software de manera que se puedan localizar de manera inmediata, regiones de controladores sujetas a condiciones de desempeño tales como tiempo de respuesta, margen de fase y margen de ganancia. Esto es especialmente importante en el caso de controladores descentralizados para plantas de tipo multivariable, ya que el diseño de canales individuales está fuertemente basado en la interacción que existe entre las especificaciones de desempeño y las restricciones impuestas por la planta.

Apéndice A

Diagrama de flujo para el cálculo de controladores PID

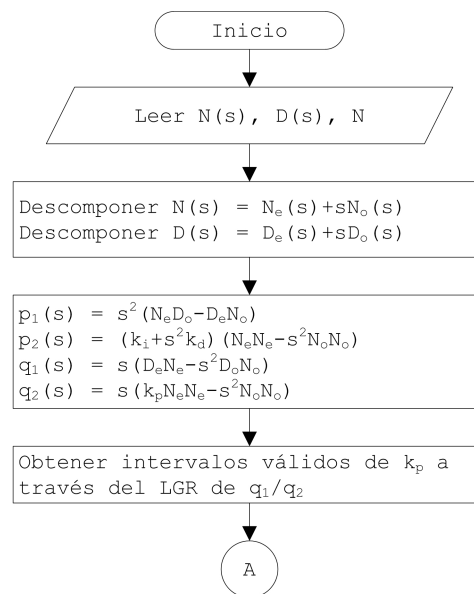


Figura A.1: Diagrama de flujo del software de diseño de controladores PID estabilizantes

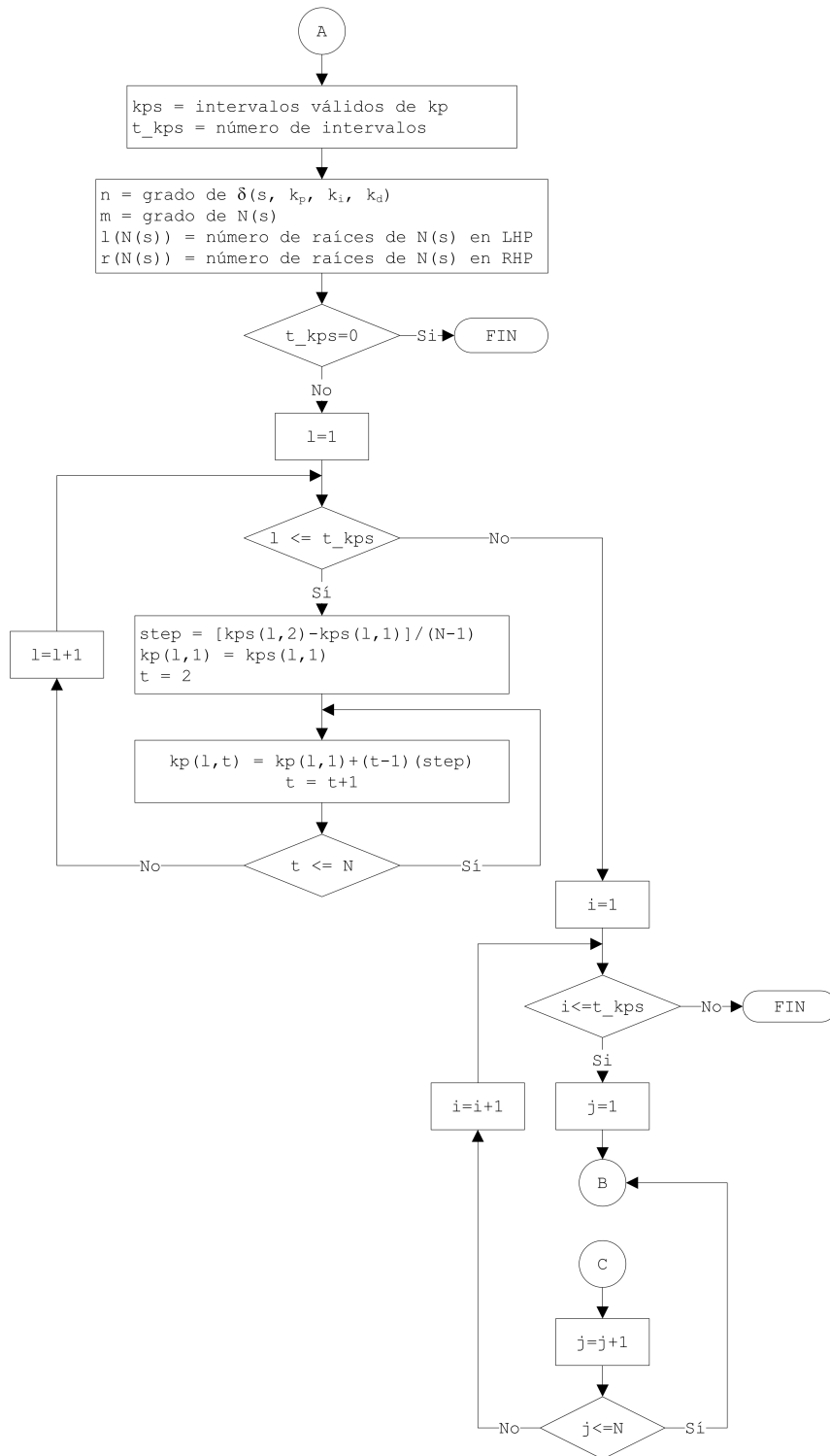


Figura A.2: Diagrama de flujo del software de diseño de controladores PID estabilizantes (cont.)

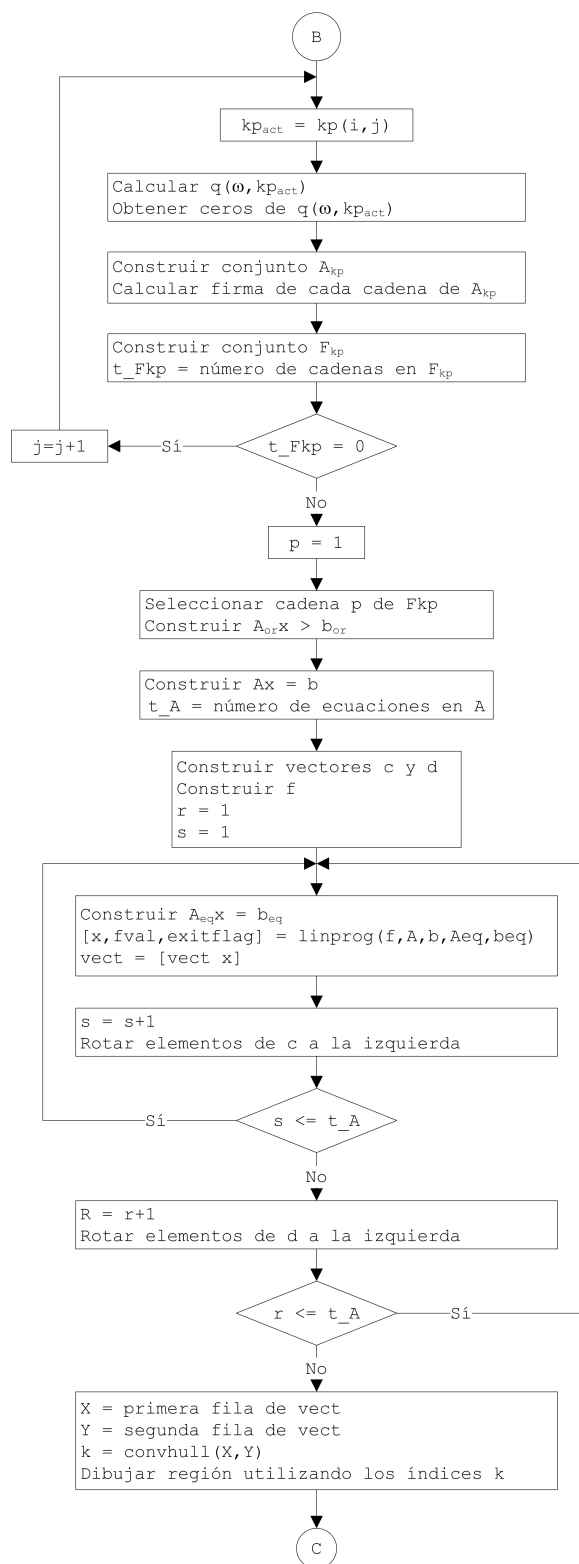


Figura A.3: Diagrama de flujo del software de diseño de controladores PID estabilizantes (cont.)

Referencias

- Åström, Karl Johan y Tore Hägglund (1995). *PID Controllers: Theory, design and tuning*. ISA-The Instrumentation, Systems and Automation Society.
- Åström, Karl y Tore Hägglund (2004). Revisiting the Ziegler-Nichols step response method for PID control. *Journal of Process Control* **14**(6), 635–650.
- Åström, K.J. y R.M. Murray (2008). *Feedback systems: an introduction for scientists and engineers*. Princeton University Press.
- Barmish, Ross (1994). *New tools for robustness of linear systems*. Macmillan Publishing Company.
- Bhattacharyya, S. P. y L. H. Keel (2008). Controller Synthesis Free of Analytical Models: Three Term Controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control* **53**(6), 1353–1369.
- Blanke, M. (2003). *Diagnosis and fault-tolerant control*. Springer Verlag.
- Dantzig, G.B. y M.N. Thapa (2003). *Linear programming: theory and extension*. Springer Verlag.
- Datta, A., M.T. Ho y S.P. Bhattacharyya (2000). *Structure and synthesis of PID controllers*. Springer Verlag.
- Dorf, Richard y Robert Bishop (2008). *Modern Control Systems*. Pearson Prentice Hall.
- Fragoso, J. L. (1996). Diseño de controladores para un sistema magnético. Tesis de licenciatura.
- Ho, M.T., A. Datta y SP Bhattacharyya (1997). A linear programming characterization of all stabilizing PID controllers. En: *Proceedings of the American Control Conference*. Vol. 6. IEEE. pp. 3922–3928.

- Johnson, Michael y Moradi Mohammad (2005). *PID Control: New identification and design methods*. Springer Verlag.
- Kim, K. y Y.C. Kim (2005). The complete set of PID controllers with guaranteed gain and phase margins. En: *Proceedings of the Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on*. IEEE. pp. 6533–6538.
- Knospe, C. (2006). PID control. *Control Systems, IEEE* **26**(1), 30 – 31.
- Leithead, W. y J. O'Reilly (1992). m-input m-output feedback control by individual channel design. I: Structural issues. *International Journal of Control* **56**(6), 1347–1397.
- Leithead, WE y J. O'Reilly (1991). Performance issues in the individual channel design of 2-input 2-output systems Part 1. Structural issues. *International Journal of Control* **54**(1), 47–82.
- Liberzon, D. (2003). *Switching in systems and control*. Springer.
- Liberzon, D. y A.S. Morse (1999). Basic problems in stability and design of switched systems. *Control Systems Magazine, IEEE* **19**(5), 59–70.
- Liceaga-Castro, J., C. Verde, J. O'Reilly y WE Leithead (1995). Helicopter flight control using individual channel design. En: *Control Theory and Applications, IEE Proceedings-*. Vol. 142. IET. pp. 58–72.
- Luenberger, David G. (1984). *Linear and Nonlinear Programming*. Addison Wesley.
- Mora, Alejandro y Cristina Verde (2011). Sistematización del cálculo de controladores PID. En: *Memorias del Congreso Anual de la Asociación de México de Control Automático*. Art. Num. 73.
- Narendra, K.S., J. Balakrishnan y M.K. Ciliz (1995). Adaptation and learning using multiple models, switching, and tuning. *Control Systems, IEEE* **15**(3), 37 –51.
- Olga, Holtz (2003). Hermite - Biehler, Routh - Hurwitz, and total positivity. *Linear Algebra and its Applications* **372**, 105–110.
- O'Reilly, J. y W. Leithead (1991). Multivariable control by individual channel design. *International Journal of Control*.
- Rauch, H.E. (1995). Autonomous control reconfiguration. *Control Systems, IEEE* **15**(6), 37 –48.

-
- Sánchez, Marino (2010). Control PID tolerante a fallas para una turbina de gas. Tesis de doctorado. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Ugalde-Loo, C.E., E. Liceaga-Castro y J. Liceaga-Castro (2005). 2x2 Individual Channel Design MATLAB Toolbox. En: *Proceedings of the Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on.* pp. 7603 – 7608.
- Zhang, Y. y J. Jiang (2006). Issues on integration of fault diagnosis and reconfigurable control in active fault tolerant control systems. En: *Proceedings of the IFAC Symposium SAFEPROCESS'06.* pp. 1513–1524.
- Zhou, Kemin (1999). *Essentials of robust control.* Prentice Hall.