

Surgimiento de  
patrones de  
segregación en modelos  
poblacionales.

Carlos Bárcenas Navarrete



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **Introducción**

A través del tiempo, en distintas sociedades, es frecuente observar patrones de segregación dentro de casi todas las comunidades. En algunos casos, podemos ver estas segregaciones como producto de algún agente externo (gobierno, leyes, grupos racistas, etc.) que impone ciertas reglas de comportamiento. Pero, ¿es esa la única forma de generar divisiones entre grupos de una misma sociedad?

Existen muy diversas características por las que la gente se diferencia: sexo, edad, religión, lugar de residencia, raza, estatus socioeconómico, preferencias musicales, estado civil, nivel escolar, preferencias culturales, etc. Además, como si este nivel de complejidad no fuera suficiente, estas características están, en muchos casos, interrelacionadas, por ejemplo:

Consideremos el conjunto de personas de una comunidad que son aficionados a los Pumas y los que son aficionados al América. En principio, no hay razones para que estos conjuntos no permanezcan unidos. Sin embargo, ocurrirán varias cosas que los llevan a una división como, por ejemplo, los lugares de reunión de los dos grupos serán distintos: el estadio de CU y el estadio Azteca. A partir de los lugares de reunión es probable que se den relaciones de amistad, salidas sociales, etc., creando redes cada vez menos incluyentes.

Así, los pumistas tienen una mayor probabilidad de interactuar con los pumistas y los americanistas con los americanistas, generando, sin necesidad de demasiados factores externos, una segregación bien definida.

En esta tesis mostraremos algunos modelos que tienen la cualidad de tener resultados de segregación, basándose únicamente en las decisiones individuales de los agentes.

Lo más notable de estos resultados es que los agentes no buscan esta segregación (en muchos casos no saben que pueda presentarse) o, incluso, pueden llegar a estar abiertamente en contra de resultados de ese tipo (segregacionistas), pero el actuar de cada individuo nos da como resultado patrones separados en algún grado.

El objetivo de esta tesis es presentar tanto simulaciones como formalizaciones de algunos modelos, para poder comparar y contrastar unas con otras.

Aunque en los cuatro capítulos obtenemos como resultado configuraciones en las que la sociedad se separa en dos grupos, es importante aclarar que los modelos que estudiaremos no tienen mucho más en común. Revisemos esto, dando un breve avance de lo que encontraremos en cada capítulo.

En el primer capítulo tendremos tres modelos, dos tomando como base un artículo de Thomas Schelling y uno más de Young. En dichos modelos veremos la conformación de vecindarios, que fácilmente se pueden interpretar como ciudades, en

donde los agentes decidirán su posición en el espacio con base en un nivel de tolerancia a personas diferentes a él.

En el segundo capítulo formalizaremos el modelo de Young que estudiamos en el capítulo 1, encontrando propiedades importantes relacionadas con los distintos equilibrios a los que llega este modelo al introducirlo a una dinámica determinada. Es en este capítulo donde podemos empezar a comparar los resultados teóricos con lo obtenido en simulaciones.

En el tercer capítulo presentamos un modelo distinto, llamado el juego de la minoría, basándonos en un artículo presentado en una revista de física. En este modelo la segregación se dará gracias al intento de cada agente por estar en la minoría respecto a una decisión. Aquí compararemos los resultados de simulación presentados en el artículo con los resultados teóricos que desarrollaremos utilizando como herramienta la teoría de juegos.

En el cuarto y último capítulo observaremos una versión del juego de negociación de Nash, en el cual, dos agentes intentan repartir un bien, obteniendo la mayor porción posible. A este juego, le aplicaremos también un proceso de aprendizaje para dos modelos distintos. El primero donde todos los agentes son iguales, el segundo donde existe una característica que diferencia a los agentes que son de un tipo y de otro. Es aquí donde se generan clases sociales marcadas.

Ahora, profundicemos cada modelo, empezando por los lineales.

# CAPÍTULO 1

## *Modelos lineales y solitario de Schelling*

Fue Thomas Schelling, en su artículo de 1969 el primero en plantear este tipo de modelos, generándose después algunas variantes, como la propuesta por Peyton Young en 1998.

### **1.1 El modelo lineal de Schelling**

El modelo lineal de Schelling fue publicado en un artículo en 1969. El modelo muestra un segmento de recta sobre la cual se distribuyen los agentes, de acuerdo con las preferencias de composición de sus vecinos circundantes. Existen dos tipos de agentes, claramente diferenciables (estrellas o ceros). Se hablará de agentes contentos o descontentos (sean estrellas o ceros) dependiendo de la proporción de vecinos de los dos tipos que existan en su vecindario. Si un agente no está contento, se moverá a la posición más cercana en donde su demanda sea satisfecha. Todos los agentes son reconocibles y se preocupan por el tipo de vecinos que tienen.

Schelling inicia con una línea de 35 estrellas y 35 ceros, correspondientes a los dos tipos de agentes, distribuidos aleatoriamente. Cada agente tiene una única preocupación: si sus vecinos son estrellas o ceros.

Como primera hipótesis se propone que cada agente desea que al menos la mitad de sus vecinos sean de su mismo tipo y cada agente define su vecindario como

los cuatro agentes más cercanos a él en cada lado. Es decir, cada agente querrá que al menos cuatro de sus ocho vecinos sean de su mismo tipo.

Ahora definimos una regla de movimiento: En cada periodo, se escogerá un agente al azar, en caso de que esté contento, no se moverá, en caso de que esté descontento se moverá al lugar más cercano tal que esté contento. Donde, “más cercano” significa que tiene que moverse menos lugares hacia su izquierda o hacia su derecha. Una vez que encontró el lugar, se posicionará entre los dos agentes que habitan ahí, recorriendo a los demás. Esto nos trae diversas consecuencias, por ejemplo, si un agente se mueve, sus vecinos pueden ya no estar contentos, ya que pueden perder un vecino de su tipo y ganar uno del otro. Es similar para los nuevos vecinos de este agente. Pero también puede ser el caso de que agentes descontentos se vuelvan contentos por la llegada de un nuevo vecino que es como ellos y antiguos vecinos distintos a él llegan a la misma conclusión.

Otra de las consecuencias importantes se deriva de la regla de movimiento, más específicamente de la forma como se agrega a su nuevo vecindario el agente que se mueve. Veámoslo con un ejemplo. Llamemos a los vecinos del lado derecho de X con 1, 2, 3, 4, y supongamos que en el vecindario se incorpora un nuevo individuo llamado Y:



Fig. 1.1

Ahora, el individuo 4 no pertenece al vecindario de X, porque éste está definido con los cuatro individuos de cada lado del individuo X.

A continuación, mostramos con un ejemplo sencillo, un posible comportamiento en el modelo lineal de Schelling:

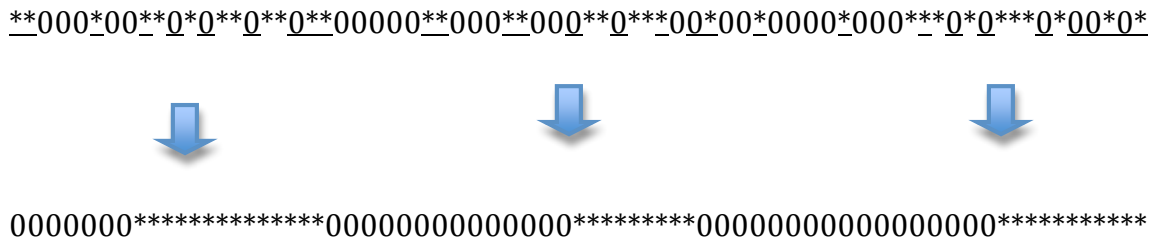


Fig. 1.2

La primera línea representa la posición inicial, con 0's y \*'s distribuidos aleatoriamente. Los agentes subrayados son los descontentos en dicha posición.

La configuración de la parte de debajo de la fig 1.2 se alcanza después de varios periodos, siguiendo los movimientos válidos.

Uno de los aparentes problemas se da con los agentes ubicados en las esquinas, ya que la definición de vecindario no es consistente con estos. Pero esto se soluciona simplemente definiendo un vecindario distinto para ellos, es decir, hasta donde la línea lo permite.

Diremos que una configuración es de equilibrio si ningún agente quiere cambiar de posición, es decir, si todos ellos están contentos. Además, definiremos una



configuración como segregada si para algún tipo, todos los agentes de éste pueden ser unidos con una línea sin pasar por uno del otro tipo.

Uno de los problemas más fuertes de éste modelo es que no nos asegura que desde cualquier configuración inicial podamos llegar a un equilibrio. Y, además de esto, los estados segregados tampoco son necesariamente configuraciones de equilibrio. Para mostrar esto, basta un contraejemplo.

\*\*\*\*00000000000000000000000000000000\*\*\*\*\*

Fig. 1.3

En este caso, a partir del primer “0” todos los agentes están contentos, así como los primeros tres “\*”. El único agente descontento es el cuarto “\*”, pero si se mueve al lugar entre el segundo y tercer “\*”, se vuelve contento. Pero el que estaba en el tercer lugar, pasa ahora al cuarto, volviéndose descontento. Encontramos un ciclo del que nunca podemos salir utilizando solo movimientos válidos, es decir, desde esta configuración inicial no es posible llegar a una configuración de equilibrio.

Más aún, esta configuración cumple la definición de ser estado segregado, pero, como ya vimos, no es configuración de equilibrio

## 1.2 El Solitario de Schelling

Buscando una generalización al modelo lineal, Schelling propuso manejar una idea semejante, pero ahora en dos dimensiones, con el cual los conceptos manejados anteriormente se generalizan de una manera natural.

Tenemos de nuevo una población y dos grupos dentro de ella. Los miembros de cada grupo son claramente diferenciables de los del otro, no hay cambios de grupo y cada agente está en uno y solo uno de los grupos.

Esta vez se maneja una superficie rectangular, a su vez dividida por líneas verticales y horizontales, formando una red. Cada uno de los rectángulos de dicha red será una posición (casa) a ocupar por algún agente. A diferencia del modelo lineal, existirán casas vacías, es decir, el número de posiciones será estrictamente mayor al número de agentes. Esto se debe al cambio en la regla de movimiento.

Antes, para moverse, los agentes se introducían en el lugar más cercano a su posición donde su demanda era cumplida. Ahora, deberán buscar la casa vacía más cercana donde su demanda sea cumplida, donde la distancia se mide como el número de casas que deben atravesar, ya sea moviéndose horizontal o verticalmente.

El vecindario de cada agente estará definido como las 8 casas que lo rodean, y sus vecinos serán los habitantes de dichas casas. Como antes, tenemos el problema del límite del rectángulo, pero se soluciona definiendo el vecindario, para los que están

sobre uno de los lados, como las 5 casas que lo rodean y para quien vive en cualquiera de las cuatro esquinas, como las 3 casas que lo rodean.

La tolerancia se manejará de la siguiente manera: cada tipo de agente tendrá una tolerancia determinada, y esta será la proporción de vecinos de tipo contrario que están dispuestos a tener en su vecindario respecto al total de casas.

Para éste modelo, definiremos un estado como un arreglo de fichas verdes, rojas y casillas vacías. Un estado será segregado si para algún color, cualquier par de fichas de ese color pueden ser unidas mediante líneas verticales u horizontales sin pasar por encima de una ficha del otro color. Un estado segregado será de segregación total si es segregado para ambas poblaciones. Si no es de segregación total, le llamaremos de segregación parcial. Diremos que un estado es de equilibrio cuando, para cualquier agente, no exista un movimiento válido tal que mejore su estado.

La proposición de Schelling es que, bajo ciertas restricciones (en cuanto a periodos transcurridos, proporción de casas vacías, niveles de tolerancia, proporción de poblaciones, etc.) el resultado final es un estado de segregación (total o parcial) de ambas poblaciones.

Las restricciones son: Se usa un tablero de ajedrez (8x8), las tolerancias serán menores a  $2/3$ , es decir, de cada 3 casas se pide que a lo más, dos sean ocupadas por agentes de color distinto. Y alrededor de  $1/3$  de espacios vacíos, para permitir el movimiento de los agentes.

Lejos de dar una demostración formal de dicha proposición, Schelling lanzó una especie de reto: jugar el solitario bajo las restricciones planteadas y no llegar a un estado de segregación.

Lo que aquí presentamos son simulaciones, con lo que se puede modificar el tamaño del tablero, la proporción de poblaciones, la proporción de casas vacías y la tolerancia de cada grupo.

Con esto, observaremos la sensibilidad del modelo respecto a cualquiera de estos parámetros, manteniendo todos los demás fijos.

Primero presentamos algunas de las simulaciones realizadas con los parámetros que manejaremos como estándar, los cuales son:

Posición de los agentes: Al azar

Tamaño del tablero: 8x8

Porcentaje población verde / roja: 40 / 40

Tolerancia población verde / roja: 50 / 50

Iteraciones : 1000

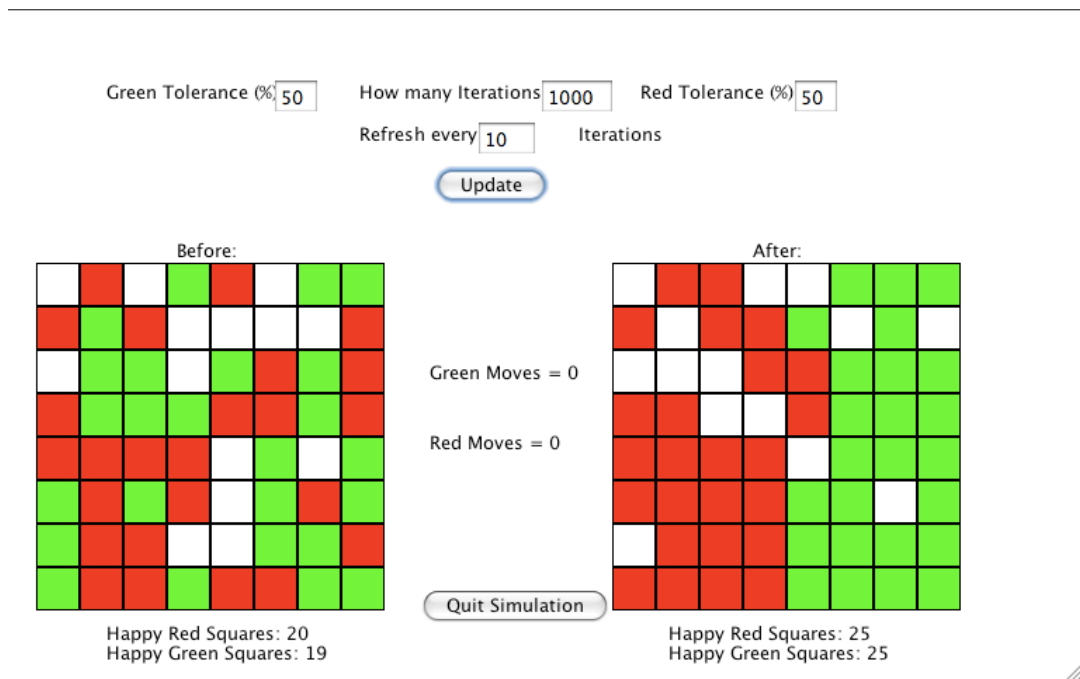


Fig. 1.4

En este caso es fácil notar la segregación que resulta de esta simulación, siendo una segregación total, ya que aunque hay personas con vecinos de distinto color, son solo aquellos que ocupan el límite de la zona de su color. Es decir, no hay colonias de agentes de un color entre agentes del otro color. Veamos que este no es el único resultado posible, manteniendo los mismos valores en nuestros parámetros. Esto significa que los resultados varían según cambie la posición inicial de los agentes en el tablero. También es importante notar que el nivel de felicidad de cada comunidad es el mismo.

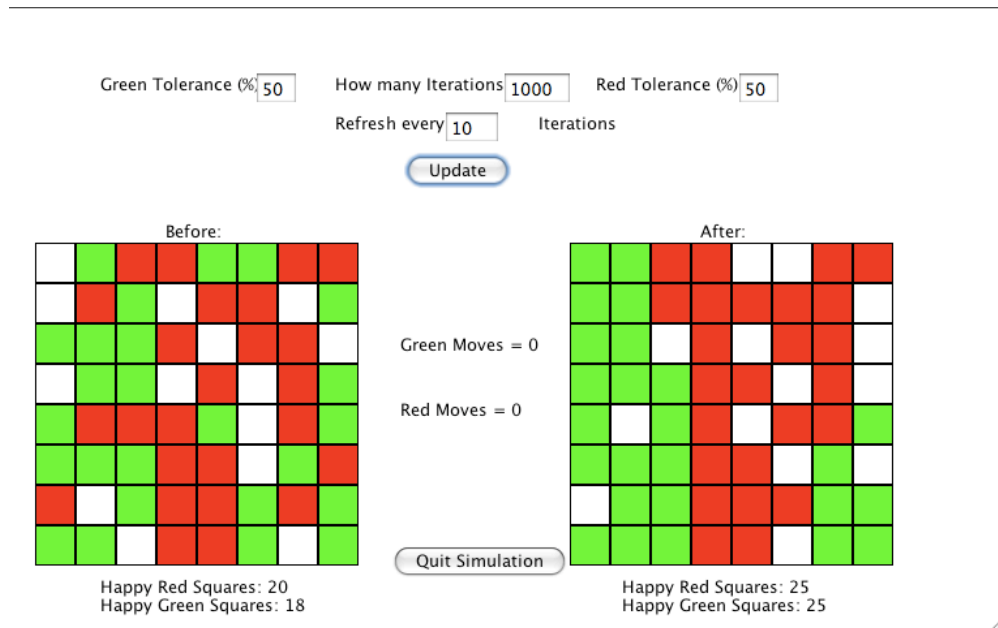


Fig. 1.5

En este caso tenemos una distribución final muy parecida a la anterior, con ambas poblaciones repartiéndose de manera casi equitativa la ciudad, sin embargo, existe una colonia verde que se instaló dentro de lo que podría considerarse territorio de los rojos. Esto nos indica que la segregación no siempre será total, sino que pueden existir más de dos colonias en la ciudad, cada una de un color determinado, repartiéndose todo el territorio. Y de nuevo se tenemos un nivel de felicidad igual en ambas comunidades.

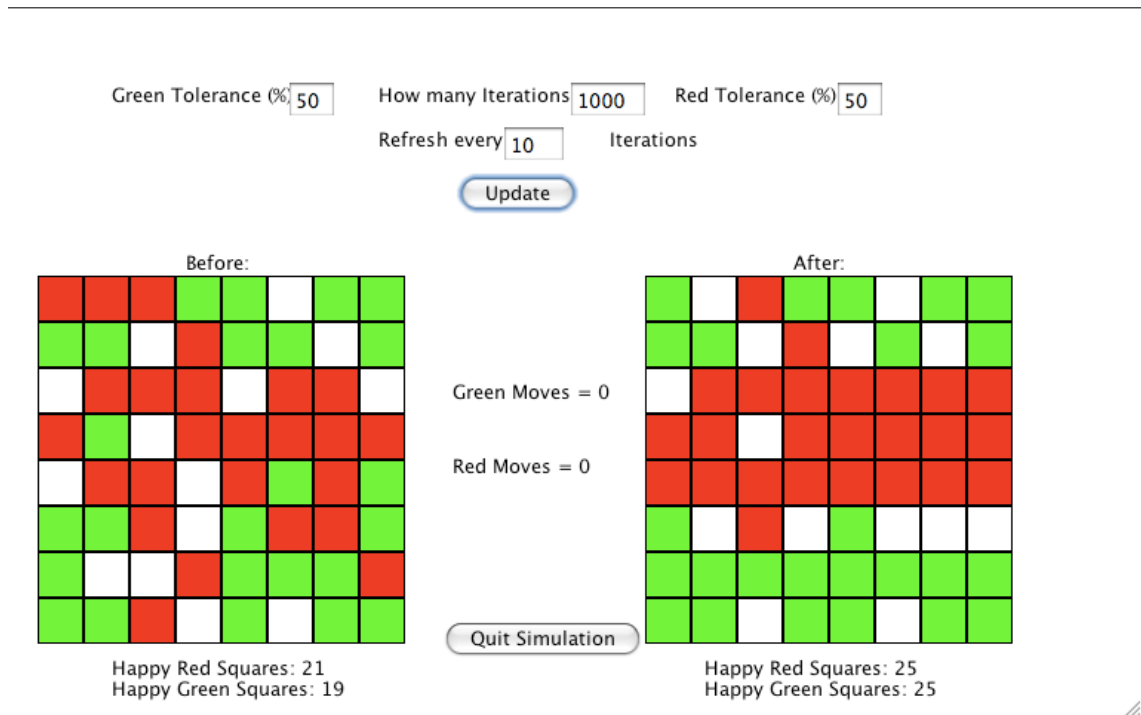


Fig. 1.6

Ahora, podemos observar que los rojos ocupan toda la franja central de la ciudad, mientras que los verdes ocupan las zonas más alejadas. Esto podría interpretarse como un grupo de gente alejándose de la zona más poblada para poder conseguir una mayor tranquilidad. Una vez más, se tiene el mismo número de agentes felices de cada color.

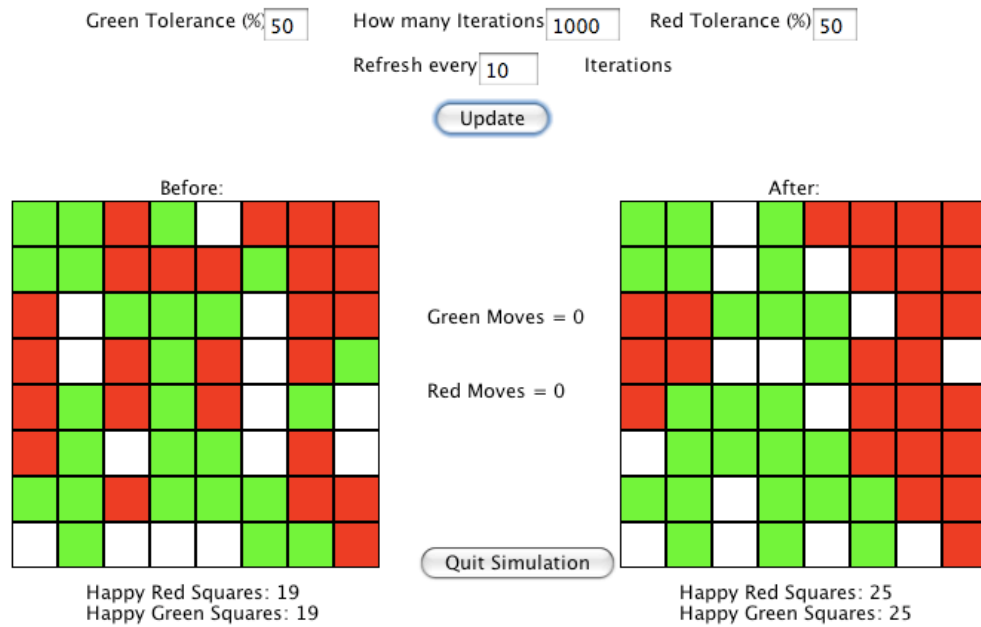


Fig. 1.7

En esta situación podemos ver que son ahora los agentes rojos los que se separaron entre sí, mientras que los verdes se mantuvieron relativamente juntos. Y, otra vez, tenemos 25 agentes rojos felices y 25 agentes verdes felices.

Ahora observemos el comportamiento de la población cuando alteramos las proporciones, haciendo a una (la verde), significativamente mayor que a la otra (la roja). Los demás parámetros se mantienen fijos.



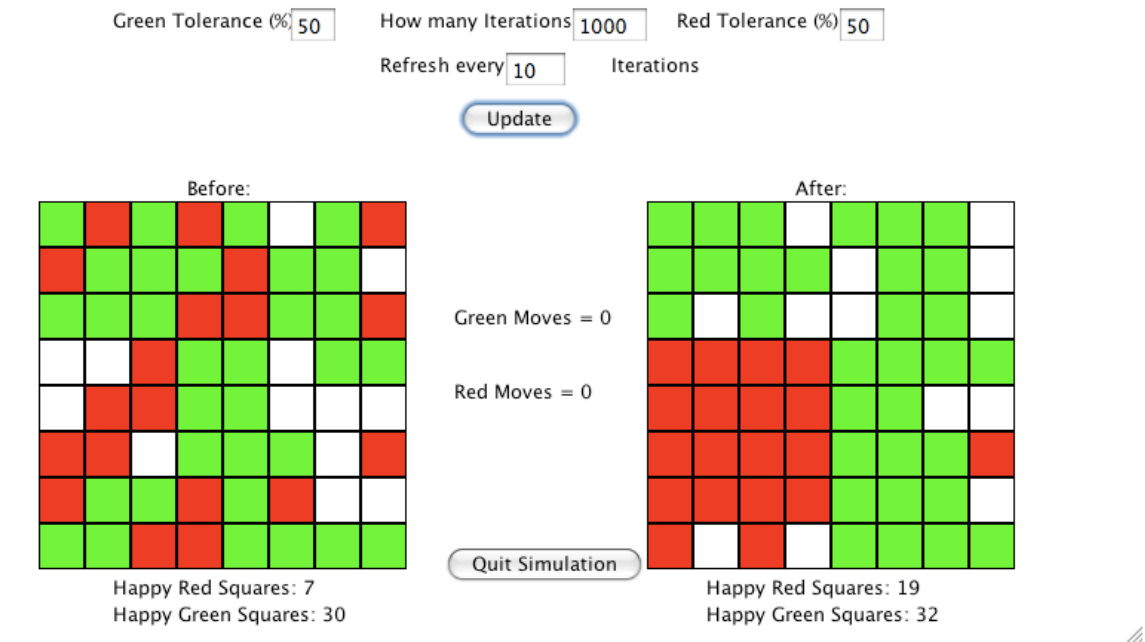


Fig. 1.8

Por primera vez observamos un patrón de segregación en el que la ciudad no se dividió equitativamente. Los agentes rojos fueron arrinconados en una sola esquina (con la excepción de uno de ellos, a quién le faltó tiempo para unirse a sus compañeros), dejando el resto para la comunidad verde. También por primera vez el número de agentes felices mostrado por cada una de las comunidades es distinto, pero con un poco de atención, notamos que en porcentaje, ambas acaban 100 % felices.

Ahora, volveremos a las proporciones iniciales, pero la tolerancia de uno de los grupos (los rojos) será solo de 25%, es decir, querrá que a lo más 1 de cada 4 casas sea habitada por un agente de color distinto al suyo.

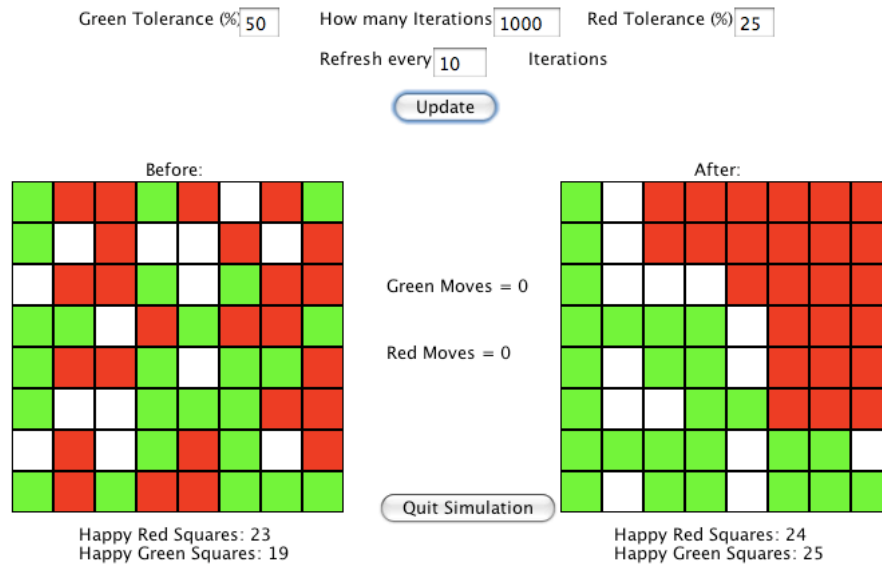


Fig. 1.9

En este caso, parece que, como en el anterior, la ciudad se divide por la mitad y ambas partes son felices, pero esto puede ser un poco engañoso. Veamos un caso en el que la población intolerante (que ésta vez serán los verdes) es, además, una mayoría en la ciudad.

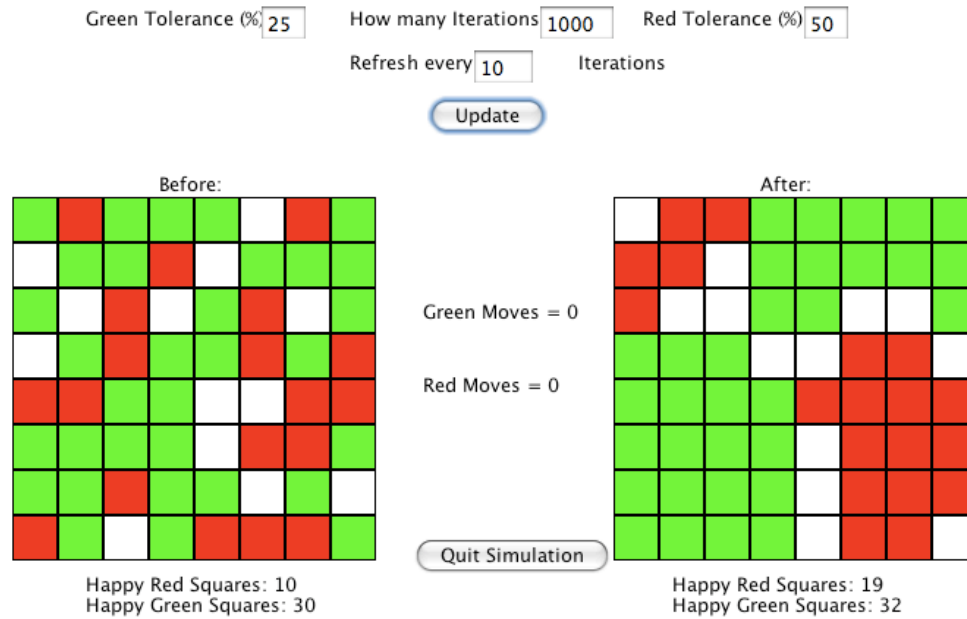


Fig. 1.10

Es ahora un poco más claro el arrinconamiento que sufre la minoría, ante la intolerancia ejercida por la población verde. Este resultado es muy parecido al que se presentó cuando existía una minoría sin importar tanto el hecho de la intolerancia.

Ahora el parámetro modificado será el tamaño del tablero, agregando 36 posiciones más. Es importante notar que, aunque las proporciones de población se mantienen fijas, no pasa lo mismo con el número real de pobladores.

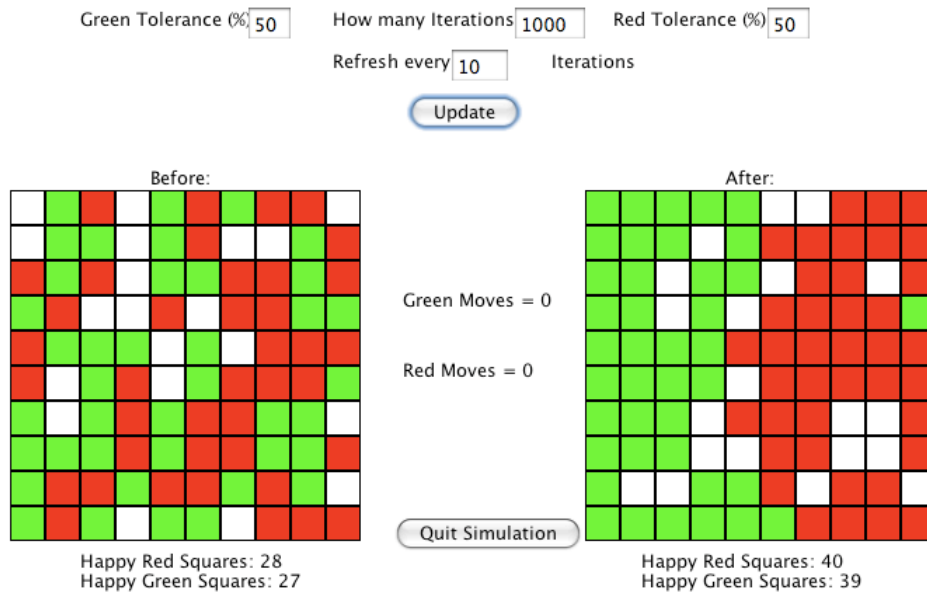


Fig. 1.11

Podemos observar que se da un patrón de segregación muy semejante al del caso de 8x8, pero esta vez, al ser más agentes, las iteraciones no fueron suficientes, dejando a un agente verde solo y rodeado de agentes rojos.

En un caso más drástico, veamos lo que ocurre si alteramos varios de los parámetros al mismo tiempo. Esta vez tenemos un tablero de 25x25 y la tolerancia de los agentes verdes se reduce al 25%. Es también importante notar que, al tener un tablero mucho más grande, el tiempo necesario para llegar a este resultado también se eleva, utilizando 10000 iteraciones. Esta vez los agentes rojos descontentos fueron dos, mientras que los agentes verdes descontentos fueron 32. Esto se debe a la baja

tolerancia que presentan, ya que cuesta más trabajo encontrar una casa donde sus demandas sean cumplidas.

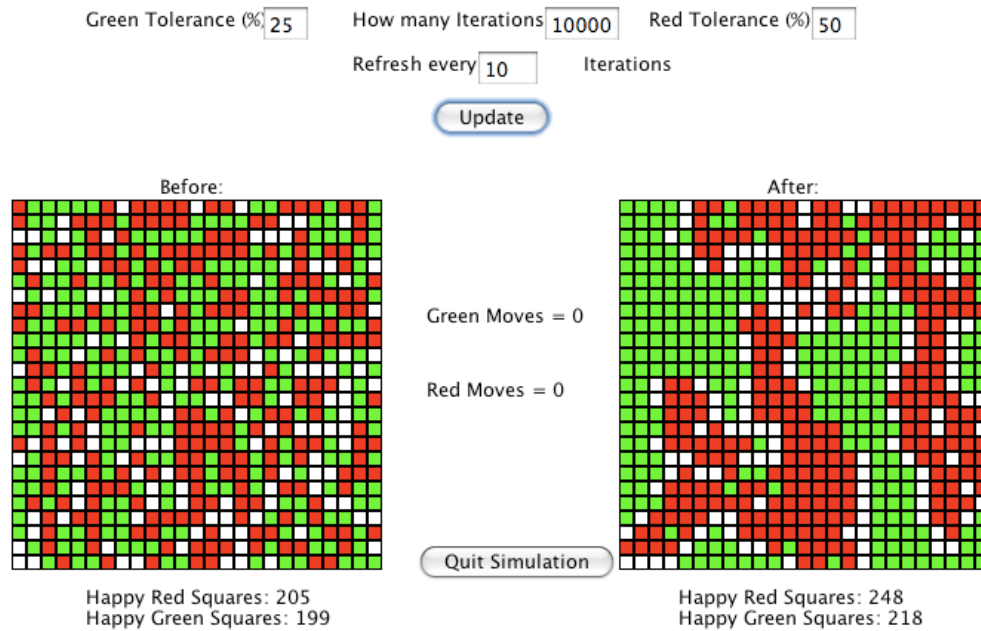


Fig. 1.12

Podemos observar que en este caso no se llega a la segregación propuesta por Schelling, pero esto no quiere decir que su idea sea errónea, ya que lo que pasa en este tablero es que no cumple con las restricciones que planteamos al principio, con lo que nos es posible llegar a un equilibrio que no sea segregado en un número finito de iteraciones.

### 1.3 El modelo lineal de Young

En este modelo, igual que en el anterior, tendremos dos tipos de agente –A y B– y de nuevo, la felicidad que obtienen los agentes como pago depende de la composición de su vecindario.

Esta vez la ciudad está situada alrededor de un círculo, con posiciones (casas) determinadas y los vecindarios se restringirán a los dos vecinos inmediatos, es decir, uno de cada lado.

Supondremos de nuevo que un agente está descontento si más de la mitad de sus vecinos son distintos a él, es decir, si ambos vecinos son distintos a él. Esta vez no permitiremos casas vacías.

Es importante notar que en este modelo, los agentes se mueven de manera distinta a los anteriores. En cada periodo se escoge, al azar, una pareja de agentes y en función de su estado (contentos o descontentos) deciden si intercambian posiciones o no. Habrá un costo por movimiento, por lo que los agentes no se moverán tan libremente como antes. Por ahora, solo permitimos intercambios *ventajosos*, es decir, que ambos agentes salen ganando, ya sea porque pasan de descontentos a contentos o si alguno ya estaba contento, el agente descontento lo compensará de modo que a pesar del costo por movimiento, salga ganando. Cualquier otro cambio será considerado *desventajoso*. Más adelante observaremos qué sucede cuando aceptamos estos cambios en el modelo.

Diremos que una configuración es de equilibrio si no existen dos agentes que quieran intercambiar o negociar su posición. Es decir, no hay dos agentes tales que uno, o ambos estén descontentos y que intercambiando posiciones ambos estarían contentos.

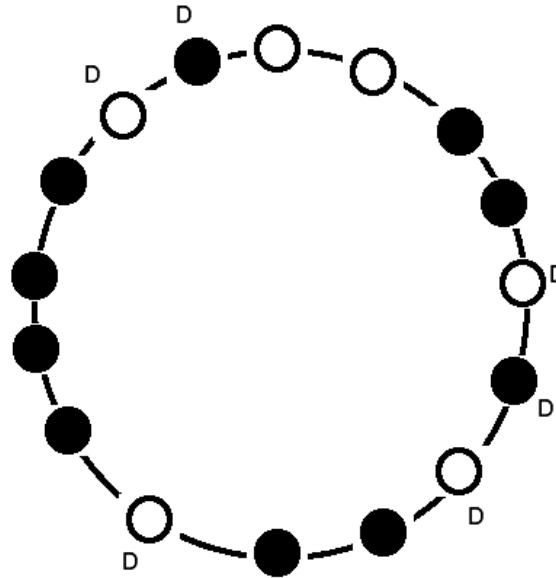


Fig. 1.13

Pongamos por ejemplo la posición inicial de la figura 1.13. Tenemos agentes blancos y negros, y marcamos a los agentes descontentos con una D.

Un periodo después, se escogen los dos agentes de arriba a la izquierda, a quienes les conviene intercambiar posiciones, ya que ambos están descontentos y después del intercambio estarían contentos, y la configuración quedaría de la

siguiente manera, donde podemos ver que estos dos agentes cumplen sus demandas, por lo que están contentos.

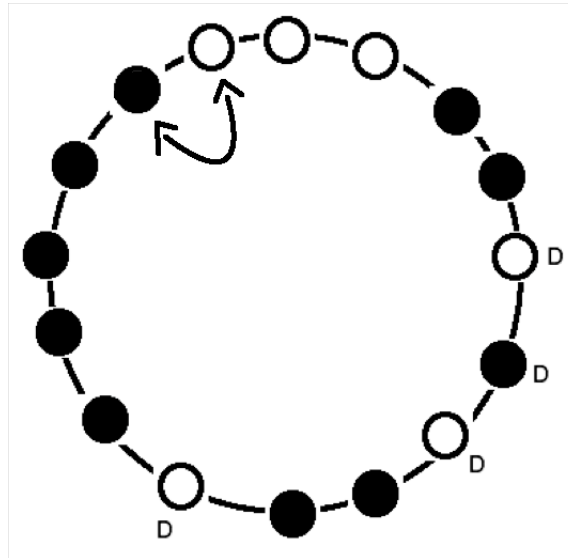


Fig. 1.14

Ahora, un ejemplo de configuración de equilibrio sería el siguiente:

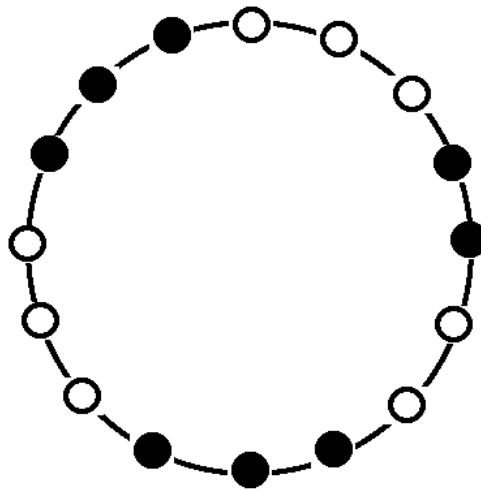


Fig. 1.15



Esta configuración nos muestra que existen equilibrios que no son estados completamente segregados.

**Proposición:** Si hay al menos dos personas de cada tipo, en el equilibrio, ningún agente estará descontento.

**Demostración:** Supongamos que estamos en una configuración de equilibrio en la que un A está rodeada de B (es decir, está descontento). Sea A' dicho agente de tipo A.

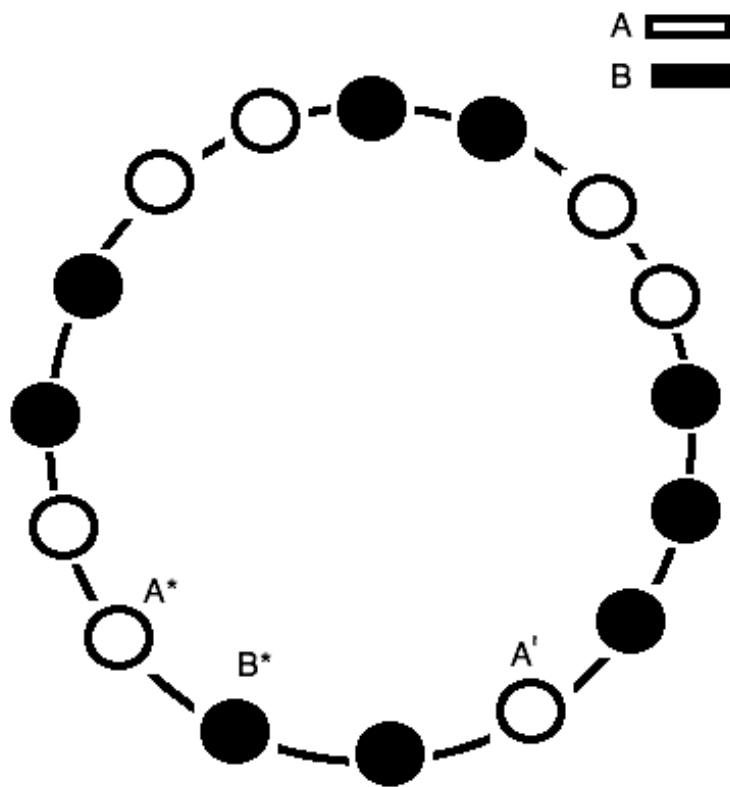


Fig. 1.16

Moviéndonos en dirección de las manecillas del reloj sobre el círculo encontraremos  $B^*$  el último B de la cadena que sigue a  $A'$  sea  $A^*$  el que sigue a  $B^*$ .

Como hay al menos dos agentes de cada tipo estamos seguros de que  $A'$  es distinto a  $A^*$ . Pero entonces  $A'$  podría cambiar con  $B^*$ , que está contento, y ambos estarían contentos después del cambio, negando que la configuración era de equilibrio como habíamos supuesto.■

Una de las diferencias más notables entre estos dos modelos es la regla de movimiento, en la que Schelling hace que sus agentes se muevan al punto más cercano mientras que Young da una mayor libertad de movimiento. Además, los agentes de Schelling se introducen entre dos, mientras que los de Young tienen que estar ambos de acuerdo en intercambiar posiciones.

Veamos que las configuraciones estacionarias, es decir, aquellas a las que conducen los movimientos válidos partiendo de cualquier configuración y que llegadas a ellas ya no cambiarían, son siempre equilibrios.

Llamemos al proceso Adaptación Ingenua (después explicaremos por qué) a una sucesión finita de movimientos válidos a partir de una configuración dada.

**Proposición:** Para cualquier configuración del modelo lineal de Young, existe un

proceso de adaptación ingenua que termina en una configuración de equilibrio.

**Demostración:** Consideremos una configuración que no sea de equilibrio. Entonces

contiene al menos un individuo descontento, digamos  $i$ , que podemos asumir de

tipo A. Moviéndonos en dirección de las manecillas del reloj, sea  $i'$  el siguiente

individuo de tipo A. El individuo anterior a  $i'$  debe ser de tipo B, lo llamamos  $j$ .

Si  $i$  y  $j$  cambian lugares ambos estarán contentos después. En cualquier periodo dado hay una probabilidad positiva de que este par sea elegido y que si cambiarán. El estado resultante tiene menos individuos descontentos. Es importante observar que ni los antiguos vecinos de  $i$ , ni los de  $j$ , quedan descontentos después de éste intercambio. En caso de que ambos estén descontentos antes del cambio, al efectuarse éste, tienen ahora un vecino de su mismo tipo, con lo que se convierten en agentes contentos. En caso de que alguno (o ambos) esté contento antes de las mudanzas, al final, sus dos vecinos serán iguales a él, por lo que se mantiene contento. Continuando de esta manera, vemos que de cualquier configuración de no equilibrio se puede llegar a una configuración de equilibrio en un número finito de periodos. Es claro que partiendo desde cualquier configuración de equilibrio ya no habría cambios, pues todos estarían contentos. ■

## **CAPÍTULO 2**

### ***PROCESOS DE ADAPTACIÓN EN COMUNIDADES ENVUELTAS EN ALGÚN CONFLICTO***

#### **2.1. Motivación del modelo.**

En este capítulo expondremos un modelo de aprendizaje, debido a Peyton Young, que pretende tomar en cuenta varios aspectos que tienen los procesos en que las personas reales reajustan su conducta.

En una comunidad la manera de pensar de cada individuo es diferente. Tienen diferentes gustos, miedos, cualidades, defectos, etc. Dentro de estas diferencias está también el modo de analizar lo que resulta mejor para ellos.

Algunas de las decisiones se toman por razones distintas a lo que diría la lógica para ese individuo. Por ejemplo, la propia idiosincrasia, falta de información, dificultad para encontrar mejores respuestas, distracciones, deseos de experimentación, etc.

Para los modelos anteriores se ha utilizado, implícitamente, una hipótesis que en este capítulo buscaremos eliminar, aunque lo hemos hecho utilizando la intuición y la simulación con la computadora y no utilizando un modelo que precise como reajustan su comportamiento los diversos individuos que van cambiando su conducta tomando en cuenta sus decisiones anteriores. En cada uno de los modelos, los agentes eran lo

suficientemente racionales como para no cometer errores. Y si buscamos que los modelos se ajusten lo más posible a una sociedad real, es claro que esto debe cambiar.

En este capítulo estudiaremos procesos que nos ayudarán a eliminar la excesiva racionalidad de los agentes, además de ayudarnos a llegar a resultados más fuertes. Lo haremos a través de un modelo de aprendizaje.

## **2.2 Los procesos de adaptación de Young**

Pensemos en una población  $K$ , en la que se presenta un conflicto. Los estados posibles del conflicto serán los elementos de un conjunto  $Z$ . La dinámica dentro de  $Z$  será un proceso estocástico especial, en la que los individuos optimizan con limitaciones, por ejemplo, respecto a la información que pueden coleccionar y analizar.

Para ejemplificar, pensemos en los conflictos de los vecindarios que se expusieron en el capítulo anterior.  $K$  será la población del vecindario y el conjunto  $Z$  las distribuciones posibles de los individuos en los diversos lugares del vecindario. Por otro lado, la dinámica consiste en las reglas que deben respetar los individuos y que permiten pasar de un estado a otro.

Young considera, además, que los individuos cometen errores y experimentan en forma aleatoria, lo que perturba la dinámica original. Se estudia cuáles son los estados de  $Z$  que son equilibrios de esta dinámica perturbada a largo plazo, cuando la probabilidad de error y la de experimentación tienden a cero. Hemos ejemplificado con las dinámicas que ocurren en los vecindarios del capítulo anterior, a las que

agregaremos perturbaciones, pero los procesos de Young que se expondrán son más generales y estudiaremos otros ejemplos en los siguientes capítulos.

El proceso de adaptación de Young es un proceso de Markov que se somete a perturbaciones. Expliquemos brevemente que quiere decir esto.

Se dice que un proceso es de Markov sobre un espacio de estados si su siguiente resultado depende únicamente de la situación actual y no de resultados anteriores. A cada proceso de Markov sobre un espacio de estados finito lo podemos analizar mediante su matriz de transición, que nos indica la probabilidad de que el proceso se mueva de un estado dado a cualquier otro, es decir,  $p_{ij}$  será la probabilidad de pasar del estado  $i$  al estado  $j$ .

Si en un proceso de Markov es posible pasar a través de todos los estados, sin que este paso se realice de una forma cíclica, decimos que dicho proceso es *regular*.

Es posible que, habiendo llegado a un determinado estado, el proceso no salga de él. Esto quiere decir que la probabilidad de quedarse estático en el estado  $i$  es  $p_{ii} = 1$ . A dichos estados los llamaremos *estados recurrentes*. Y siguiendo con la misma idea, podemos encontrar que el proceso llega en algún periodo a un estado y a partir de dicho periodo, se mantiene transitando entre un subconjunto bien definido de estados. En este caso, a dicho subconjunto de estados lo llamaremos *clase de*

*comunicación recurrente*. Y si en un proceso existe una sola clase de comunicación recurrente que contiene a todos los estados, diremos que dicho proceso es *irreducible*.

Ejemplos de clase de comunicación recurrente tenemos los siguientes, todos del capítulo anterior.

\*\*\*\_0000000000000000000000\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\_0000000000000000000000\*\*\*\*\*

Fig. 2.1

En este caso, el \* subrayado cambiará de lugar con su vecino inmediato de la izquierda, generando la misma configuración, pero siendo un estado distinto. En este caso la clase recurrente consta de dos estados que se siguen uno del otro indefinidamente.

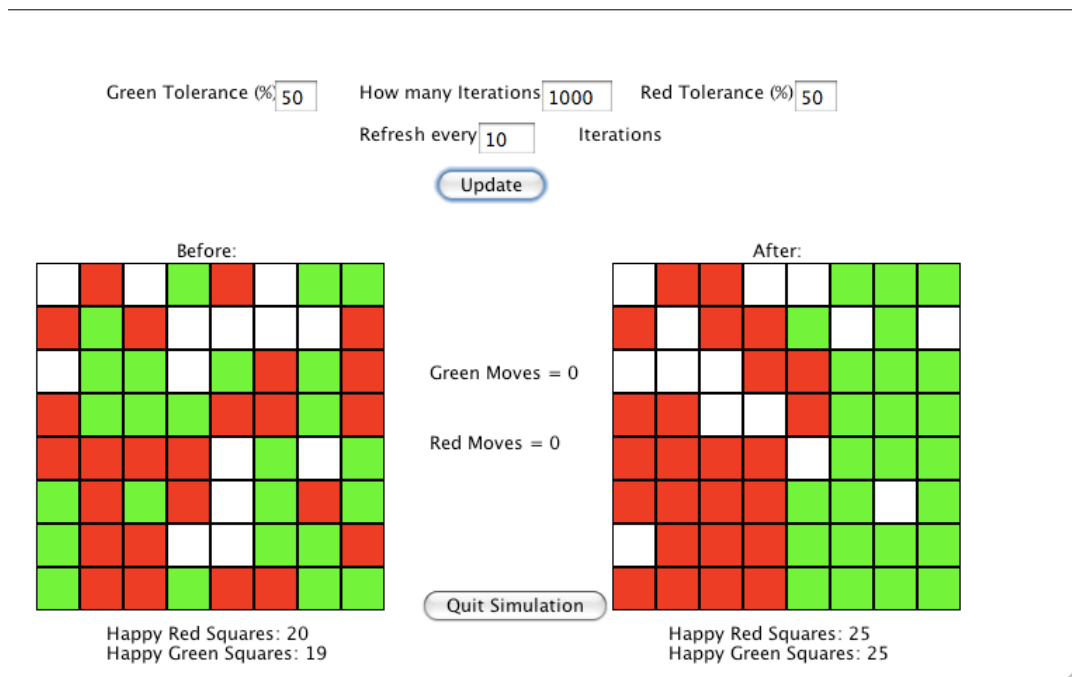


Fig. 2.2

Aquí podemos observar que todos los agentes de ambas poblaciones están contentos, por lo que a partir de este estado nadie cambiará, es decir, este estado se repetirá en cada periodo del proceso una vez que se llegue a él. Esta vez la clase recurrente consta de un solo elemento.



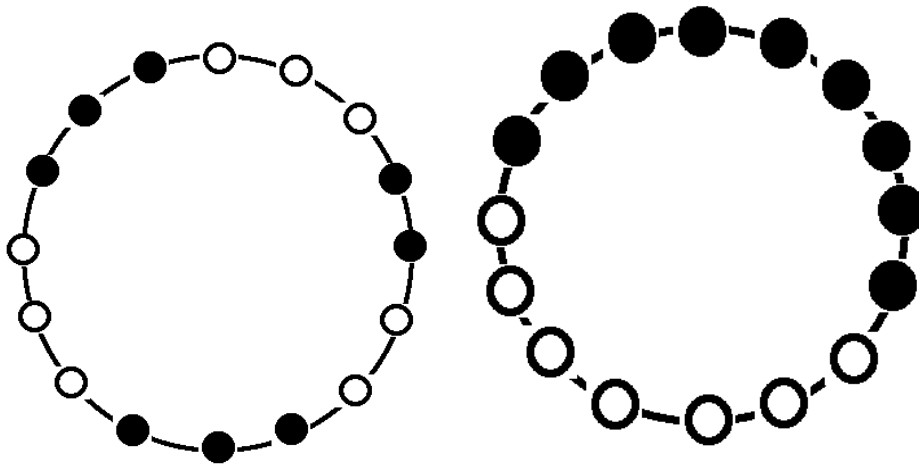


Fig. 2.3

Aquí tenemos un ejemplo de dos clases recurrentes, de nuevo cada una consta de un estado. Es importante entender que un mismo proceso puede tener más de una clase recurrente.

Ahora, consideremos un proceso de Markov  $P^0$  definido en un espacio de estados finito  $Z$ . Una *perturbación* de  $P^0$  es un proceso de Markov donde las probabilidades de transición de  $P^0$  han sido ligeramente perturbadas, es decir, son versiones distorsionadas de las probabilidades de transición  $P_{zz'}^0$ . Específicamente, para cada  $\epsilon$  en un intervalo  $[0, \epsilon^*]$  sea  $P^\epsilon$  un proceso de Markov sobre  $Z$ . Decimos que  $P^\epsilon$  es un *proceso de Markov regular perturbado* si

a)  $P^\epsilon$  es irreducible para cada  $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$ ,

b) para cada  $z, z' \in Z$ ,  $P_{zz'}^\epsilon$  tiende a  $P_{zz'}^0$  de manera que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_{z,z'}^\varepsilon = P_{z,z'}^0 \quad (2.11)$$

y c) si  $P_{z,z'}^\varepsilon > 0$  para algún  $\varepsilon > 0$ , entonces  $0 < \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P_{z,z'}^\varepsilon}{\varepsilon^{r(z,z')}} < \infty$  para algún

$$r(z,z') \geq 0. \quad (2.12)$$

**Proposición:** El real  $r(z,z')$  es único .

**Demostración:** Supongamos que  $\exists s \neq r$  tal que  $0 < \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (P_{z,z'}^\varepsilon / \varepsilon^{s(z,z')}) < \infty$

Entonces, sabemos que  $0 < \frac{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (P_{z,z'}^\varepsilon / \varepsilon^{r(z,z')})}{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (P_{z,z'}^\varepsilon / \varepsilon^{s(z,z')})} < \infty$  (\*) y por otro lado, tenemos:

$$\frac{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (P_{z,z'}^\varepsilon / \varepsilon^{r(z,z')})}{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (P_{z,z'}^\varepsilon / \varepsilon^{s(z,z')})} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(P_{z,z'}^\varepsilon / \varepsilon^{r(z,z')})}{(P_{z,z'}^\varepsilon / \varepsilon^{s(z,z')})} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P_{z,z'}^\varepsilon (\varepsilon^{s(z,z')})}{\varepsilon^{r(z,z')} (P_{z,z'}^\varepsilon)} =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^{s(z,z')}}{\varepsilon^{r(z,z')}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{s(z,z') - r(z,z')}$$

Lo cual, dado que  $s \neq r$ , nos deja únicamente con estos dos casos:

$$1) s < r \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{s'(z,z')}, \text{ donde } s'(z,z') = s(z,z') - r(z,z') < 0$$

$$\text{por lo tanto, } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{s'(z,z')} = \infty$$

$$2) s > r \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{s'(z,z')}, \text{ donde } s'(z,z') = s(z,z') - r(z,z') > 0$$

por lo tanto,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{s'(z,z')} = 0$ .

Lo cual produce una contradicción con (\*), por lo que  $s = r$ . †

El número real  $r(z,z')$  es llamado la *resistencia* de la transición  $z \rightarrow z'$ .  
Notemos también que  $P_{zz'}^0 > 0$  si y solo si  $r(z,z') = 0$ . En otras palabras, las transiciones que pueden ocurrir bajo  $P^0$  tiene resistencia cero. Por comodidad, adoptaremos la convención de que  $r(z,z') = \infty$  si  $P_{zz'}^\varepsilon = P_{zz'}^0 = 0$  para toda  $\varepsilon \in [0, \varepsilon']$ , para que así,  $r(z,z')$  esté definido para todos los pares ordenados  $(z,z')$ .

A un vector  $\bar{v}$  tal que  $\bar{v} \cdot P = \bar{v}$  le llamaremos *distribución estacionaria de P*. Alcanzar dicha distribución nos dice que el proceso ha alcanzado un cierto grado de estabilidad.

Como  $P^\varepsilon$  es irreducible para cada  $\varepsilon > 0$ , si su espacio de estados es finito, entonces tiene una única distribución estacionaria, que denotaremos  $\mu^\varepsilon$ .

Una pregunta importante es la siguiente: ¿existe el límite de la sucesión de  $\mu^\varepsilon$ ?, pues, de existir, representaría una distribución límite.

Veremos en esta sección que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon(z) = \mu^0(z)$  existe para toda  $z$ , y la distribución límite  $\mu^0$  es una distribución estacionaria de  $P^0$ .

Con esto podremos decir que un estado  $z$  es *estocásticamente estable* si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon(z) > 0 \quad (2.13)$$

De aquí se seguirá, en particular, que cualquier proceso de Markov regular perturbado tiene al menos un estado estocásticamente estable. Intuitivamente, estos son los estados que tienen mayor probabilidad de ser observados después de un largo tiempo cuando las perturbaciones son pequeñas.

Para ejemplificar lo siguiente, veamos, a grandes rasgos, como sería este proceso en la ciudad circular planteada en el capítulo 1.

Como para los agentes solo importa el hecho de estar contentos o descontentos en ese momento, y así deciden si intercambiar posiciones o no, tenemos que resultará un proceso de Markov.

Cada configuración distinta será un estado, y el conjunto de todos ellos será el  $Z$  que buscamos.

Ya vimos algunas clases de comunicación recurrente de este modelo y es claro que el proceso que definimos en el capítulo anterior será el llamado  $P^0$ , ya que solo se permiten los intercambios ventajosos, es decir, en los que los agentes emplean su mejor respuesta sin probabilidad de error o experimentación. Para definir  $P^\varepsilon$ , lo que haremos será permitir los intercambios desventajosos, lo cual más adelante se explicará con mayor detalle.

Ahora mostraremos como caracterizar las clases de comunicación recurrente con menor “resistencia total”. Posteriormente estableceremos un teorema que justifica que estas clases son la clave para encontrar los equilibrios estocásticamente estables de cualquier proceso de Markov regular perturbado  $P^\varepsilon$  sobre un espacio finito de estados.

Consideremos una gráfica dirigida que tiene como conjunto de vértices a  $Z$ . Las aristas de esta gráfica forman un  $z$  - árbol (para algún  $z \in Z$  particular) si ésta consiste de  $|Z| - 1$  aristas y desde cada vértice  $z' \neq z$  existe un único camino dirigido desde  $z'$  hasta  $z$ . Las aristas dirigidas pueden ser representadas por pares ordenados de vértices  $(z, z')$  y podemos representar un  $z$  - árbol  $T$  como un subconjunto de pares ordenados. Sea  $T_z$  la familia de todos los  $z$  - árboles. Definimos la *expectativa* de un  $z$  - árbol  $T \in T_z$  como:

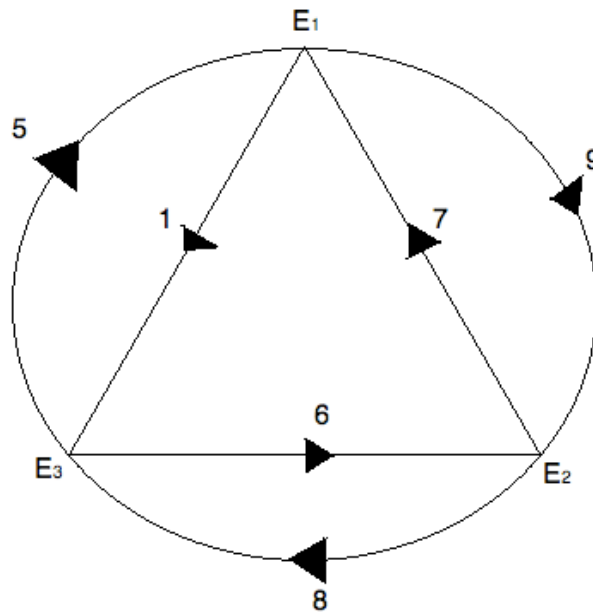
$$P(T) = \prod_{(z, z') \in T} P_{z z'}.$$

Sea  $P^0$  con clases recurrentes  $E_1, E_2, \dots, E_K$ . Para cada par de clases recurrentes distintas  $E_i$  y  $E_j$ ,  $i \neq j$ , un *ij-camino* es una sucesión de estados  $\zeta = (z_1, z_2, \dots, z_q)$ , con los  $z_i$  distintos dos a dos, y tales que para cada  $j$ ,  $P_{z_j, z_{j+1}}^\varepsilon > 0$ , que inicia en  $E_i$  y termina en  $E_j$ .

La *resistencia* de este camino es la suma de las resistencias de sus aristas, esto es:  $r(\zeta) = r(z_1, z_2) + r(z_2, z_3) + \dots + r(z_{q-1}, z_q)$ .

Sea  $r_{ij} = \min r(\zeta)$  la menor resistencia de todos los  $ij$ - caminos  $\zeta$ . Notemos que, por la definición de clase recurrente,  $r_{ij}$  debe ser positivo, ya que no hay caminos de resistencia cero de  $E_i$  a  $E_j$ , ya que siempre existe una resistencia positiva para salir de una clase de comunicación recurrente.

Ahora construyamos una gráfica dirigida completa con  $K$  vértices, uno por cada clase recurrente, que como ya vimos podrían consistir de uno o más estados. El vértice correspondiente a la clase  $E_j$  será llamado  $j$ . El peso de la arista dirigida  $i \rightarrow j$  es  $r_{ij}$ . En la siguiente figura se muestra un ejemplo con tres clases.



Un árbol enraizado en un vértice  $j$  (un  $j$ -árbol) es un conjunto de  $K-1$  aristas dirigidas tales que, desde cada vértice distinto de  $j$  hay, en el árbol, un único camino dirigido hacia  $j$ . En la figura anterior, existen tres  $j$ -árboles enraizados en cada vértice  $j$  y en total, nueve árboles enraizados.

La *resistencia* de un árbol enraizado  $T$  es la suma de las resistencias  $r_{ij}$  sobre las  $K-1$  aristas que lo componen. El *potencial estocástico*  $\gamma_j$  de la clase recurrente  $E_j$  está definido como la mínima resistencia sobre todos los árboles enraizados en  $j$ . Intuitivamente, cuando el parámetro  $\epsilon$  es pequeño y positivo, es más probable que el proceso siga caminos que llevan hacia las clases recurrentes con menor potencial. Esto sugiere que los estados estocásticamente estables son precisamente aquellos que están en clases con potencial mínimo. Formalmente:

*Teorema 2.1 (Young, 1993a) Sea  $P^\epsilon$  un proceso de Markov regular perturbado y sea  $\mu^\epsilon$  la distribución estacionaria única de  $P^\epsilon$  para cada  $\epsilon > 0$ . Entonces  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu^\epsilon = \mu^0$  existe y  $\mu^0$  es una distribución estacionaria de  $P^0$ . Los estados estocásticamente estables son precisamente los que están contenidos en las clases recurrentes de  $P^0$  y tienen potencial estocástico mínimo.*

La gran virtud de éste teorema es que no sólo afirma la existencia de equilibrios estocásticamente estables sino que nos dice donde se concentra la

probabilidad de resultado del proceso de aprendizaje en el largo plazo cuando no tenemos una estimación precisa de  $\epsilon$ , pero sabemos que es “pequeño”. Si conociéramos  $\epsilon$  precisamente, podríamos (en teoría) computar la distribución  $\mu^\epsilon$ . Sin embargo, sería muy complicado resolver las ecuaciones estacionarias

$$\mu P = \mu, \quad \text{donde } \mu \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{z \in Z} \mu(z) = 1,$$

directamente, debido al excesivo tamaño del espacio de estados. Afortunadamente, existe otra manera de computar  $\mu^\epsilon$  que produce, en algunas situaciones, resultados manejables analíticamente.

Así como el cálculo de la función de potencial estocástico, el cálculo de  $\mu^\epsilon$  está basado en la noción de árboles enraizados. Sin embargo, a diferencia del caso anterior, estos árboles deben ser construidos sobre el espacio de estados  $Z$  completo. Por ello, el acercamiento es útil analíticamente solo en algunos casos especiales.

Ahora veamos la importancia de los  $z$  - árboles definidos anteriormente.

**Lema 2.1 (Friedlin and Wentzell, 1984):** Sea  $P$  un proceso de Markov irreducible sobre un espacio de estados finitos  $Z$ . Su distribución estacionaria  $\mu$  tiene la propiedad de que la probabilidad  $\mu(z)$  de cada estado  $z$  es proporcional a la suma de las expectativas de sus  $z$  - árboles, es decir,



$$\mu(z) = v(z) / \sum_{w \in Z} v(w), \quad \text{donde} \quad v(z) = \sum_{T \in T_z} P(T)$$

### 2.3 Procesos de cambio en el vecindario de Young en que los agentes cometen errores con una pequeña probabilidad.

En esta sección estudiaremos el modelo del vecindario circular, pero esta vez desde el punto de vista de los procesos de adaptación descritos en la sección anterior.

Consideremos un vecindario circular como los descritos en el capítulo 1. El conjunto de estados  $Z$  será el conjunto de configuraciones posibles del vecindario. La dinámica que da lugar al proceso de Markov  $P$  son las reglas de cambio que se establecieron en el capítulo 1 y que escribimos en una forma distinta:

Manejaremos un tiempo discreto y así, en cada periodo, tomaremos un par de individuos al azar, dando a cada par la misma probabilidad de ser seleccionados.

Consideremos al par de individuos  $i$  y  $j$ . La probabilidad de que intercambien posición depende de sus respectivas *ganancias* después del cambio. Asumiremos que cualquier intercambio genera costos por mudanza. Así, puede haber ganancia positiva solo si ambos individuos son de diferente tipo y al menos uno de ellos (digamos  $i$ ) estaba descontento antes del intercambio y si ambos están contentos después, es decir, antes del intercambio  $i$  estaba rodeado por personas que no eran de su tipo y  $j$  estaba de cualquier manera. Si  $j$  estaba contento antes del intercambio, asumiremos que  $i$  le compensa los gastos de mudanza y algo más, con lo que el intercambio los deja

mejor a ambos. A estos intercambios los llamaremos *ventajosos* y cualquier otro será *desventajoso*. En la sección 1 solo aceptábamos intercambios ventajosos, debido a la hipótesis de que los agentes no cometían errores. Es precisamente esta la diferencia entre estos dos enfoques.

Decimos que un estado del proceso imperturbado  $P^0$  es absorbente si cada persona está ubicada junto a alguien de su mismo tipo

Un estado es *segregado* si las As forman un grupo contiguo y las B forman el grupo complementario.

**Proposición:** Un estado es absorbente si y solo si es una clase recurrente que consta únicamente de un estado de equilibrio.

**Demostración:** Estas clases obviamente incluyen a los estados absorbentes, que son clases recurrentes de un solo elemento. Para probar que estas son las únicas clases recurrentes, consideremos un estado no absorbente.

Entonces contiene al menos un individuo descontento, digamos que es  $i$  y que podemos asumir es de tipo A. Moviéndonos en dirección de las manecillas del reloj, sea  $i'$  el siguiente individuo de tipo A. El individuo anterior a  $i'$  debe ser de tipo B, lo llamaremos  $j$ . Si  $i$  y  $j$  cambian lugares ambos estarán contentos después. En cualquier periodo dado hay una probabilidad positiva de que este par sea elegido y que si cambiarán. El estado resultante tiene menos individuos descontentos. Continuando de

esta manera, vemos que de cualquier estado no absorbente hay una probabilidad positiva de llegar a un estado absorbente en un número finito de periodos. Por lo tanto, los estados absorbentes son las únicas clases recurrentes.

Algunas clases de comunicación recurrente se observan en las figuras 1, 2 y 3. Como se observa en dichas figuras, existen configuraciones de equilibrio que son muy diferentes entre sí. El proceso de Young que describimos en 2.2 se pregunta si alguna de estas configuraciones se presentará con una probabilidad más alta cuando el proceso de movimientos en el vecindario se repite a largo plazo, suponiendo que toda persona comete errores aunque sea con una pequeña probabilidad.

Veamos un poco cómo es este procedimiento de Young en el vecindario circular.

Para descartar los resultados triviales supondremos que existen al menos dos individuos de cada tipo.

Supongamos que cada intercambio ventajoso ocurre con una alta probabilidad, y que cada intercambio desventajoso ocurre con una baja probabilidad que decrece exponencialmente con la pérdida neta en la utilidad de los individuos. Específicamente, supongamos que existen reales  $a, b, c$  tales que  $0 < a < b < c$  y la probabilidad de un intercambio desventajoso es  $\epsilon^a$  si el aumento en la felicidad de uno de los individuos es compensada por el descenso de felicidad del otro (y así, las pérdidas netas solo incluyen costos de mudanza), la probabilidad es  $\epsilon^b$  si ambos individuos estaban contentos antes y uno de ellos está descontento después, y es  $\epsilon^c$  si

ambos estaban contentos antes y ambos están descontentos después. En cambio, los intercambios ventajoso ocurren con una probabilidad que tiende a uno cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; además de esto, no se necesita especificar las probabilidades exactamente.

Todo esto resulta en un proceso de Markov  $P^\varepsilon$  que es irreducible para cualquier  $\varepsilon > 0$ , pues siempre es posible pasar de un estado  $z$  a cualquier otro  $z'$  en un número finito de periodos. Además satisface las condiciones (2.11) y (2.12)

**Proposición:** Los estados segregados son los únicos estados estocásticamente estables.

**Demostración:** Denotemos como  $Z^0$  al conjunto de estados absorbentes, que son las únicas clases recurrentes. Para cualquiera dos estados  $z$  y  $z'$  en  $Z^0$ , sea  $r(z, z')$  la *menor* resistencia de todos los caminos de  $z$  a  $z'$ . El potencial estocástico de  $z \in Z^0$  está definido como la resistencia del  $z$ -árbol de mínima resistencia sobre el conjunto de nodos  $Z^0$ .

Por el teorema 2.1 sabemos que los estados estocásticamente estables son aquellos con potencial estocástico mínimo. Por ello, basta mostrar que un estado absorbente tiene potencial mínimo si y solo si es un estado segregado.

Para esto haremos lo siguiente: sea  $Z^0 = Z^S \cup Z^{NS}$  donde  $Z^S$  es el conjunto de estados segregados y  $Z^{NS}$  es el conjunto de estados no segregados. Afirmamos que:

- (i) para cada  $Z^{NS}$ , cada  $z$ -árbol tiene al menos una arista con resistencia  $b$  o  $c$  (que son mayores que  $a$ ); y
- (ii) para cada  $z \in Z^S$  existe un  $z$ -árbol en el que cada arista tiene resistencia igual a  $a$ .

Supongamos por ahora que (i) y (ii) se cumplen. En cualquier  $z$ -árbol hay exactamente  $|Z^0| - 1$  aristas, y la resistencia de cada arista es *al menos*  $a$ . Por (i) y (ii) sabemos que el potencial estocástico de cada estado segregado es  $a|Z^0| - a$ , mientras que el potencial estocástico de cada estado no segregado es de al menos  $a|Z^0| - 2a + b$ , que es estrictamente mayor a  $a|Z^0| - a$ . Y así, el teorema 2.1 implica que los estados segregados son precisamente los estados estocásticamente estables.

Ahora, para demostrar (i), sea  $z \in Z^{NS}$  un estado absorbente no segregado. Dado cualquier  $z$ -árbol  $T$ , existe al menos una arista en  $T$  que está dirigida de un estado absorbente segregado  $z^S$  a un estado absorbente no segregado  $z^{NS}$ . Afirmamos que cualquiera de dichas aristas tiene una resistencia de al menos  $b$ . La razón es que cualquier intercambio que rompa un estado segregado debe crear al menos un individuo descontento, y por ello, la probabilidad de dicho intercambio es  $\varepsilon^b$  o  $\varepsilon^c$ . Así, la resistencia de un arista de  $z^S$  a  $z^{NS}$  debe ser al menos  $b$ , lo cual demuestra (i). Para demostrar (ii), sea  $z$  un estado absorbente segregado. De cada

estado  $z'$  construiremos una sucesión de estados absorbentes  $z' = z^1, z^2, \dots, z^k = z$  tal que  $z_j \neq z_k$  para  $1 < j \leq k$ . Llamaremos a esto un  $z'-z$ -camino. Haremos esta construcción de manera que la unión de todas las aristas dirigidas en todos estos caminos forme un  $z$ -árbol. Como cada arista tiene una resistencia de  $a$ , la resistencia total del árbol es  $a|Z^0| - a$ , como se afirma en (ii).

Supongamos primero que  $z'$  es también segregado, es decir,  $z'$  consiste de un solo grupo contiguo de A y un grupo contiguo complementario de B. Etiquetamos las posiciones en el círculo  $1, 2, \dots, n$  en el sentido de las manecillas del reloj. Dejamos que el primer miembro del grupo de A intercambie lugares con el primer miembro del grupo B. Como ambos estaban contentos antes del intercambio, y así continúan, este intercambio tiene probabilidad  $\varepsilon^a$ . Esto resulta en un nuevo estado absorbente, que mueve al grupo A y al B una posición en dirección de las manecillas del reloj alrededor del círculo. Así, en  $n$  pasos llegamos a cualquier estado absorbente y, en particular, podemos alcanzar  $z$ . Hemos entonces construido una sucesión de estados absorbentes que va de  $z'$  a  $z$ , donde la resistencia de cada par sucesivo en la sucesión es de  $a$ .

Supongamos ahora que  $z'$  es no segregado. Moviéndonos en dirección desde la posición 1, sea  $A^*$  el primer grupo completo contiguo de agentes de tipo A y B' el siguiente grupo de agentes de tipo B y A' el siguiente de A. Como  $z'$  es no absorbente, cada uno de esos grupos contiene al menos dos miembros. Dejemos que el primer

jugador en  $A^*$  intercambie lugares con el primer jugador de  $B'$ . Como ambos jugadores estaban contentos antes y siguen contentos después del intercambio, éste ocurre con probabilidad  $\varepsilon^a$ . Este intercambio mueve a  $A'$  una posición en dirección de las manecillas del reloj y reduce en uno el número de agentes de tipo B entre  $A^*$  y  $A'$ . Esto resulta en un nuevo estado absorbente o un solo jugador B queda entre  $A^*$  y  $A'$ . En el último caso este jugador B puede intercambiar con el primer jugador de  $A^*$  y este intercambio tiene resistencia cero. El resultado es un estado absorbente con menos grupos distintos de  $A$ s y  $B$ s.

Repetimos el proceso descrito en el párrafo anterior hasta que todos los  $A$ s son contiguos y todos los  $B$ s son contiguos. Entonces, repetimos el proceso que se especificó primero para así alcanzar el estado buscado  $z$ . Esta construcción arroja una sucesión de estados absorbentes que inicia en  $z'$  y termina en  $z$ , donde la resistencia entre cada par sucesivo de estados es  $a$ . El camino no contiene ciclos ya que el número de grupos distintos nunca se incrementa; de hecho, con cada transición uno de los grupos se reduce hasta que es eliminado. Así, la unión de estos caminos forma un  $z$ -árbol cuya resistencia total es  $a|Z^0| - a$  y esto concluye la prueba de que los estados estocásticamente estables son precisamente los segregados.

## Capítulo 3

### *El juego de la minoría*

#### 3.1 ¿Qué son los juegos de minoría?

Una forma diferente de segregación la encontramos en situaciones en las que los agentes compiten por una porción de un bien.

Por ejemplo, al entrar a un concurso como la lotería, es claro que el agente buscará estar en el conjunto de los ganadores, pero además esperará que pocos agentes pertenezcan a dicho conjunto, con lo que el premio se repartiría entre menos personas, ganando más cada uno.

Otro ejemplo, que será el que trabajemos en este capítulo, es el de dos rutas que permiten transitar desde el punto A hasta el punto B, dentro de una ciudad. La única diferencia entre dichas rutas consiste en cuánto tráfico tendrá cada una de ellas, es decir, cuántos individuos eligieron una u otra. En este caso, los agentes buscarán tomar la ruta menos transitada en ese momento.

A este tipo de situaciones, donde cada agente busca estar en la minoría, las llamaremos juegos de minoría. Más adelante explicaremos con mayor detalle este nombre, por ahora, hagamos la siguiente observación: En los juegos de las dos secciones anteriores, la segregación provocaba la existencia de una ligera



preferencia, de cada persona, por obtener la compañía de sus iguales. En cambio, en los juegos de minoría, la segregación la provocará el deseo de soledad de cada agente.

Estos juegos han llamado la atención de especialistas en mecánica estadística que encuentran similitudes en las dinámicas y los patrones que emergen y las que ellos estudian. Es frecuente encontrar en diversas revistas de física artículos sobre juegos de minoría estudiados a través de simulaciones. Aquí presentaremos algunos resultados arrojados por dichas simulaciones. Esto se debe a la dificultad que tienen los participantes para tomar decisiones en un periodo, pues lo que puede parecer una buena decisión, en este juego simétrico, sería buena para todos, pero si todos la toman (o la mayoría), ya no sería buena.

### **3.2 Una simulación en un juego de minoría.**

En el artículo “Self-Organized Segregation within an Evolving Population” [N.F. Johnson, P.M. Hui, R. Jonson, T.S. Lo] se presentan los juegos de minoría como una dinámica del siguiente tipo: Teniendo una población de  $N$  agentes, con  $N$  impar, se les presenta, a cada uno, en cada periodo de tiempo, la decisión de escoger una de dos rutas, la ruta 0 o la ruta 1, para llegar de un punto a otro. Un agente ganará si escoge la ruta donde hay menos tráfico, es decir, si al final, está en la minoría. Lo que interesa a cada participante es el pago acumulado.

El resultado de cada periodo lo denotaremos con un dígito binario que será el correspondiente a la ruta ganadora.

Cada agente tendrá una memoria de longitud  $m$ , que contendrá los resultados de los últimos  $m$  periodos. Tendrá también una apreciación estadística de que  $w=0$ ,  $1$  suele suceder después de que han ocurrido  $x_1x_2\dots x_m$ , para cada  $m$ -ada posible, donde  $x_j$  es 0 o 1. Por ejemplo, con  $m=3$   $(xyz)w$  significa que  $(xyz)$  son los últimos tres resultados y que la experiencia dice que el próximo resultado (la tendencia) será  $w$ .

Un ejemplo de memoria lo podemos mostrar en la siguiente tabla:

Memoria	Resultado esperado
000	1
001	0
010	0
100	0
011	1
101	1
110	0
111	1

En la primera fila tenemos que, después de que 0 fue la ruta ganadora tres veces seguidas, lo usual fue que en la cuarta, 1 fue la que ganó.

Tratemos de entender el significado de  $(xyz)w$ . ¿Por qué no puede ocurrir que  $(xyz)$  implique necesariamente  $w$ ? Supongamos  $(xyz)w$ , entonces cada agente simplemente escogería la ruta  $w$  basándose en  $(xyz)$ , pero eso significa que  $w$  no sería la ruta ganadora.  $(xyz)w$ , sólo significa que  $w$  es lo que todos esperan que ocurra, una tendencia, que puede no darse, por lo que cambiará a lo largo del tiempo. Por ejemplo, si

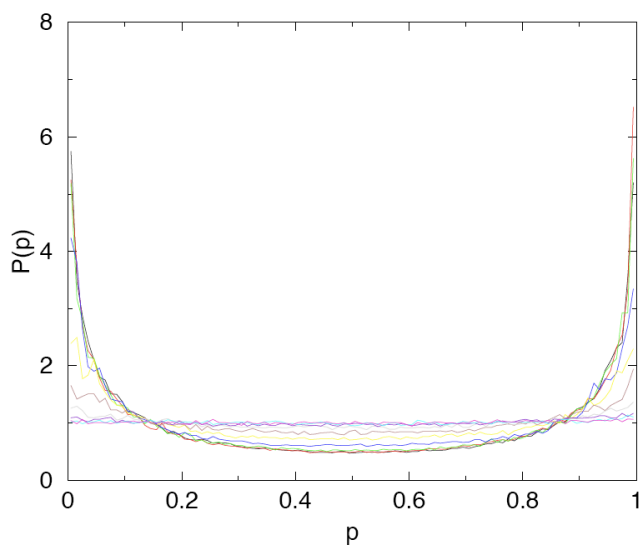
estamos en la situación  $(000)$  cada agente esperará que triunfe 1, si resulta que 0 es la ruta ganadora, entonces reemplazamos  $(000)1$  por  $(000)0$ .

Es decir, si todos los agentes se comportaran siguiendo la tendencia esperada, el sistema se volvería ineficiente, ya que todos los agentes tomarían la misma ruta y por lo tanto perderían. Todos los agentes piensan que la tendencia se mantendrá, así que la siguen, y por ello, la tendencia cambia y ellos siempre pierden.

Para evitar esto, se introduce para cada agente, un parámetro  $p$  que significará que dicho agente seguirá la tendencia con una probabilidad  $p$  y no la seguirá con probabilidad  $1-p$ , por ejemplo, si tenemos la configuración (000), un agente escogerá 1 con probabilidad  $p$  y 0 con probabilidad  $1-p$ . Esta elección será la estrategia que usarán los agentes durante el tiempo que dure el juego. Poco a poco, dicha estrategia puede ir variando, como sigue.

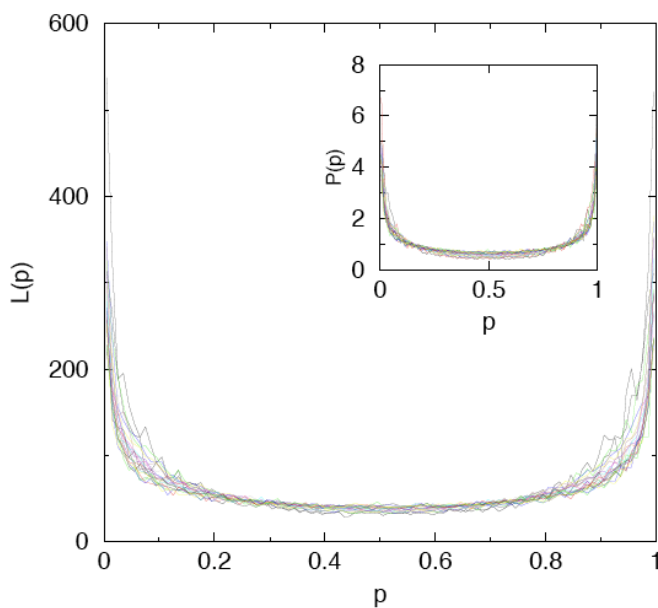
Si un agente queda en la minoría gana un punto, mientras que si queda en la mayoría pierde un punto. Utilizando  $p$ , una persona ganará algunas veces, otras perderá. ¿Cuándo considerará un agente  $j$  que la  $p$  que utiliza no es una buena estrategia? Supondremos que cuando el número de puntos que consigue llega a ser menor a cierta  $r < 0$  que será fijada para todos los agentes,  $j$  cambiará su estrategia. Es decir, el agente elige una nueva  $p$ , tomada de entre un rango de valores, centrados en la antigua  $p$  y un radio de  $R$ . Todos estos valores tendrán la misma probabilidad de ser escogidos. Por lo tanto,  $r$  es el número de veces más que un agente está dispuesto a tomar la ruta equivocada que la correcta antes de modificar su estrategia. Una vez que se modificó la estrategia, la puntuación del agente es reiniciada desde

cero. Cambiar  $R$  nos permite variar el modo en que los agentes aprenden, ya que dependiendo de su tamaño, las estrategias de los agentes variarán, estando más cercanas o más lejanas entre sí al momento de elegir una nueva. Por ejemplo, para  $R=0$ , las estrategias nunca cambian, aunque las memorias si. Para  $R=2$ , las estrategias de antes y después de la modificación no están correlacionadas. Para  $R$  pequeña, el nuevo valor de  $p$  estará cerca del antiguo. Como los agentes constantemente están buscando hacer lo opuesto de lo que hagan los demás agentes, sonaría razonable esperar que eventualmente se organicen de modo que sus estrategias estén bien distribuidas dentro de  $0 < p < 1$ . Además, como sabemos que no existe una mejor estrategia a priori, estaríamos tentados a esperar que los agentes sean ambivalentes sobre si una tendencia continuará y así, sus estrategias se concentrarán en  $p = \frac{1}{2}$ . Sorpresivamente, es lo contrario lo que sucede, como vemos en la siguiente figura.



Aquí se muestra la distribución de la frecuencia  $P(p)$  en diversos tiempos. Esta distribución eventualmente tiene picos en  $p=0$  y  $p=1$ , sin importar la distribución inicial; estos valores de  $p$ , corresponden

respectivamente a siempre o nunca seguir lo que pasó la vez pasada. (la tendencia). La duración  $L(p)$ , definida como la longitud promedio del tiempo en que sobrevive una estrategia  $p$  entre modificaciones, muestra un comportamiento similar. Así, decimos que  $P(p)$  y  $L(p)$ , en la siguiente figura, representan los límites al largo plazo.



Si consideramos el comportamiento de los individuos simplemente como una caminata aleatoria unidimensional, con agentes individuales decidiendo al azar que ruta tomar, esperaríamos que la media fuera de  $N/2$  con una desviación estándar de  $\sqrt{N/4}$ . En cada periodo de tiempo, el número neto de puntos otorgados sería entonces de  $-\sqrt{N}$ . La duración promedio sería de  $r\sqrt{N}$ . Todo esto lo sabemos

porque las caminatas aleatorias unidimensionales se distribuyen de manera binomial, con parámetros  $p$  y  $q$ , que al ser completamente aleatorio tenemos que  $p, q = \frac{1}{2}$ , con lo que obtenemos los valores mencionados.

La duración observada es proporcional a  $r\sqrt{N}$ . Sin embargo el valor promedio de  $L(p)$  en la figura es más grande que  $r\sqrt{N}$ , por un factor aproximado de 2 para  $r = -4$ , confirmando que los agentes que se comportan estratégicamente se están organizando mejor que los que actúan aleatoriamente.

Profundizando un poco más, la raíz media cuadrática de la separación de las estrategias es más alta que el valor para  $P(p)$  uniforme, indicando, con ello, el deseo de los agentes a hacer lo opuesto de la mayoría. Esto es creciente respecto al número de jugadores  $N$  debido a las mayores posibilidades para la organización. Incluso cuando  $R$  es grande y los valores de las estrategias son escogidos aleatoriamente en las modificaciones, la raíz media cuadrática de la separación se mantiene alta. Este valor y el de  $L(p)$  típicamente son máximos para  $R \sim 0.5$ ; esto es una mediación entre la falta de aprendizaje de  $R \sim 0$  y modificación excesiva de estrategias con  $R$  grande.

Variar  $m$ , el largo de las secuencias de memoria, tiene poco efecto en  $P(p)$  y  $L(p)$ , ya que todos los agentes tienen capacidades similares y la misma información disponible, estos beneficios se cancelan entre si. Es lo que cada agente

decide hacer con la información disponible lo que importa. Es por eso que los agentes con  $p=0,1$  obtienen mejores resultados que los de  $p=1/2$ . Similarmente, si la memoria no se actualiza dinámicamente de acuerdo a los resultados recientes, si no que se mantiene constante, es decir, independiente del tiempo, o es escogida aleatoriamente en cada periodo de tiempo, entonces  $P(p)$  y  $L(p)$  también se mantienen esencialmente sin cambios. Una vez más, la memoria es común para todos los agentes y por ello todos los agentes concuerdan en la predicción actual, ningún agente tiene ventaja relativa en cuanto a la información disponible.

Ahora mostraremos algunos resultados más analíticos. El ejemplo más simple de nuestro sistema consiste en tres agentes ( $N=3$ )  $i,j,k$  con tamaño de memoria  $\infty$  y tres valores posibles de  $p$ ,  $\{0,1,1/2\}$ . Todos los agentes concuerdan en la predicción actual, digamos 0. Entonces, el agente  $i$  escoge 0 o 1 con probabilidad  $p_i$  y  $1-p_i$  respectivamente. Igual para los agentes  $j$ , ( $p_j$ ) y  $k$ , ( $p_k$ ). Las  $2^3$  decisiones posibles para  $i,j,k$  son 000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111. Hay  $3^3=27$  configuraciones posibles  $(p_i,p_j,p_k)$ . Para una  $(p_i,p_j,p_k)$  dada, las 8 decisiones posibles nos dan la ganancia esperada de los agentes. Por ejemplo para  $(p_i,p_j,p_k)=(0,0,1/2)$   $i$  y  $j$  escogen 1, mientras que  $k$  escoge 0 con probabilidad  $1/2$  Entonces,  $k$  gana con

probabilidad  $\frac{1}{2}$ , mientras que  $i$  y  $j$  ambos pierden. El número neto de puntos esperados ganados por agente por turno menos los puntos deducidos es  $-1$  para  $i$ ,  $-1$  para  $j$  y  $0$  para  $k$ . El total es entonces  $-2$ . Como el máximo es  $-1$ , ya que hay un máximo de un ganador, vemos que esta configuración  $(0,0,\frac{1}{2})$  no es óptima.

Clase	$p = 0$	$p = \frac{1}{2}$	$p = 1$	No. Config.	Pts prom /agente
i)	-	xxx $[-\frac{1}{2}][-\frac{1}{2}][-\frac{1}{2}]$	-	1	$[-\frac{1}{2}]$
ii)	x $[-\frac{1}{2}]$	xx $[-\frac{1}{2}][-\frac{1}{2}]$	-	3	$[-\frac{1}{2}]$
iii)	xx $[-1][{-1}]$	x $[0]$	-	3	$[-\frac{2}{3}]$
iv)	xxx $[-1][{-1}][{-1}]$	-	-	1	$[-1]$
v)	-	-	xxx $[-1][{-1}][{-1}]$	1	$[-1]$
vi)	x $[1]$	-	xx $[-1][{-1}]$	3	$[-\frac{1}{3}]$
vii)	xx $[-1][{-1}]$	-	x $[1]$	3	$[-\frac{1}{3}]$
viii)	x $[0]$	x $[-1]$	x $[0]$	6	$[-\frac{1}{3}]$
ix)	-	xx $[-\frac{1}{2}][{-\frac{1}{2}]$	x $[-\frac{1}{2}]$	3	$[-\frac{1}{2}]$



$x)$	-	$x[0]$	$xx[-1][-1]$	3	$[-\frac{2}{3}]$
------	---	--------	--------------	---	------------------

En la tabla anterior se muestran las distintas clases de configuraciones. La leeremos por filas, ya que cada fila representa una clase de configuraciones posibles en nuestro ejemplo. En las columnas 2, 3 y 4 se presenta cuántos agentes escogen la respectiva estrategia, la cantidad de  $x$ 's nos dice cuántos jugadores escogieron esa estrategia, y pueden ser  $i, j$  o  $k$ , y también, dentro de los corchetes, se muestra el pago esperado para dicha estrategia. La columna 5 nos dice cuántas configuraciones posibles existen de cada clase y la última columna muestra el promedio de puntos por agente:  $[-\frac{1}{2}]$  de la clase  $i$ ) implica que el agente promedio pierde  $\frac{1}{2}$  punto por turno, y modificaría entonces su estrategia después del tiempo  $2r$ . Esta modificación de estrategias es lo que permite que el sistema visite las 27 configuraciones posibles. Las clases  $vi)$ ,  $vii)$  y  $viii)$  son óptimas al tener el número máximo de puntos.

Para obtener las distribuciones promedio  $P(p)$  y  $L(p)$ , debemos promediar sobre las 27 configuraciones. Como algunas clases son más favorables que otras al tener más puntos, deberíamos dar un peso apropiado a las distintas distribuciones. En un caso extremo de gran peso, incluiremos solo las clases óptimas  $vi)$ ,  $vii)$  y  $viii)$ , obteniendo  $P(0):P(1/2):P(1)=2.5:1:2.5$  y  $L(0):L(1/2):L(1)=5:1:5$ . Para peso cero, consideramos que el sistema visita

todas las configuraciones con la misma probabilidad sin importar el número de puntos ganados por agente; con esto obtenemos  $P(0):P(1/2):P(1)=1:1:1$  y  $L(0):L(1/2):L(1)=1:1:1$ . Para un caso intermedio, donde las clases son pesadas por los puntos promedio por agente obtenemos  $P(0):P(1/2):P(1)=1.1:1:1.1$  y  $L(0):L(1/2):L(1)=1.5:1:1.5$ . De hecho con cualquier manera de pesar que favorezca a las configuraciones más provechosas obtenemos  $P(p)$  y  $L(p)$  no uniformes. Esto implica que la población, al segregarse, logró también organizarse alrededor de las configuraciones más redituables. Es importante notar que el sistema es dinámico, ya que los miembros de cada configuración pueden cambiar, pero  $P(p)$  permanece esencialmente constante.

En resumen, este modelo muestra como una población de agentes, con capacidades e información similares, se segregará. Para poder ganar más en esta población, los agentes deben comportarse de un modo extremo ( $p=0,1$ ) y lo logran hacer espontáneamente.

Lo que buscaremos ahora es estudiar el juego de la minoría dando forma a un juego rectangular que se repita y utilizando un modelo de adaptación de Young, del estilo de los que utilizamos en la problemática de Schelling, para estudiar la dinámica que se establece en esta búsqueda de estar en la minoría. Estableceremos la relación entre los equilibrios estocásticamente estables y los equilibrios de Nash del juego.

Para esto, primero introduciremos algunas definiciones de la teoría de juegos.

### 3.3.- Algunos conceptos básicos de la teoría de juegos

Entenderemos como *juego* cualquier conflicto con dos o más participantes, cada uno con un objetivo y diversas opciones a elegir para tratar de lograr dicho objetivo. El aspecto más importante en un juego es que el resultado de dicho conflicto esté condicionado a las decisiones de todos los participantes. Un jugador será, claramente, el participante en un juego. Nos reduciremos a juegos finitos, es decir el conjunto de jugadores y los conjuntos de opciones de cada jugador son finitos. Las diversas opciones que tendrá cada jugador serán sus estrategias. Y, por último, tendremos una función de pago, que dependerá de la elección de estrategias de todos los jugadores. Un modelo que puede expresar a un conflicto de este tipo en una terna ordenada (primero) al conjunto de jugadores, (después) cada uno con su conjunto de estrategias y (por último) con su respectiva función de pago tendremos lo que se conoce como un juego rectangular. Formalmente, tenemos la siguiente:

DEFINICIÓN: Un juego rectangular finito es una terna  $(N, \{D_j\}_{j \in N}, \{\varphi_j\}_{j \in N})$ , donde  $N, D_1, D_2, \dots, D_n$  son conjuntos finitos y, para  $j=1, 2, \dots, n$ ,  $\varphi_j$  es una función de valor real definida en  $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$ .

A  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  le llamamos el conjunto de jugadores, a cada  $D_j$  el conjunto de acciones o estrategias puras del jugador  $j$  y a cada  $\varphi_j$  la función de pago de  $j$ . Denotamos como  $l_j$  al número de elementos de  $D_j$ .

Un perfil de estrategias será un elemento de  $D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$ . La función  $\varphi$  será la función de pago de todos los jugadores que asocia, a cada perfil  $d$ , un vector en  $\mathbb{R}^n$ , de tal manera que la coordenada  $i$ -ésima de ese vector es  $\varphi_i(d)$ . Con esto está completamente definido el desarrollo y pago de un juego. Para mayor comodidad utilizaremos la terna  $(N, D, \varphi)$  para referirnos a un juego rectangular.

Dado el perfil de estrategias puras  $d$  usamos la notación  $(k, d_{-i})$  para indicar que el jugador  $i$  elegirá la estrategia  $k$  mientras los demás elegirán de acuerdo al perfil  $d$ .

Dentro de este modelo, podemos hablar de estrategias puras y de estrategias mixtas. Como mencionamos, para cada decisión que deba tomar, cada jugador tendrá un conjunto de acciones posibles. Sin embargo, es posible que decida asignar a cada una de dichas acciones cierta probabilidad. Podemos interpretar las estrategias puras como un caso particular de estrategias mixtas. Así si le asigna a una de ellas la probabilidad 1, entonces ésta será una estrategia pura entendida como estrategia mixta. Si asigna una probabilidad positiva a más de una acción, entonces tendremos una estrategia mixta propiamente dicha.

Existen varias interpretaciones para las estrategias mixtas. Las que tienen interés en los procesos adaptativos de Young son aquellas en las que se piensa que cada individuo en cada ocasión que participa en el juego elige una estrategia pura y los individuos no eligen estrategias mixtas, sino que:

- 1- El juego se repite a lo largo del tiempo y una estrategia mixta nos informa con que frecuencia el jugador escoge una acción, respecto al total de sus elecciones.
- 2- Otra es útil cuando subconjuntos de una gran población están involucrados en un juego dado y una estrategia mixta puede interpretarse como las proporciones de la población que han elegido cada una de las estrategias puras. En esta interpretación, mientras los individuos eligen estrategias puras, es como si la población eligiera estrategias mixtas.

Al introducir probabilidades distintas a uno para las estrategias, entonces el pago también sufre modificaciones, ya que no podremos saber a ciencia cierta cuanto estará ganando cada jugador, si no que tendremos el pago esperado, dependiendo de las probabilidades asignadas. Formalmente:

**Definición:** Dado un juego  $(N, D, \varphi)$ , decimos que un vector  $X^j \in \mathbb{R}^{D_j}$  es una estrategia mixta si  $x^i \geq 0$ , para toda  $i \in D_j$  y  $\sum_{i \in D_j} x_i^j = 1$ .

Denotemos como  $M_j$  al conjunto de estrategias mixtas del jugador  $j$ . Podemos naturalmente incluir a cada estrategia pura  $i$  del jugador  $j$  entre las estrategias

mixtas, pues a la  $i$ -ésima estrategia pura  $i$  le asociamos el vector estándar que tiene todas sus coordenadas iguales a cero excepto la  $i$ -ésima que será 1. Tanto pensada como estrategia mixta como pura, nos referiremos a ella como  $i$ .

Los perfiles de estrategias mixtas son los elementos de  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ .

Dado el perfil de estrategias mixtas  $X$  usamos la notación  $(\hat{X}_i, X_{-i})$  para indicar que el jugador  $i$  elegirá la estrategia  $\hat{X}_i$  mientras los demás elegirán de acuerdo a  $X$ , análogamente para  $(d, X_{-i})$ .

**Definición:** Dado un juego  $(N, D, \varphi)$ , la función de pago esperado del jugador  $j$

es una función  $E_j : M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \rightarrow \mathbb{R}$  definida como:

$$E_j(X^1, X^2, \dots, X^n) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} x_{i_1}^1 x_{i_2}^2 \dots x_{i_n}^n \varphi_j(i_1, i_2, \dots, i_n).$$

Otro concepto importante sobre las estrategias, que además necesitaremos fuertemente, es el de mejor respuesta en estrategias puras. Esto se refiere a que, suponiendo que un jugador sabe las estrategias mixtas que los demás decidirán, él buscará dentro de su conjunto de acciones o estrategias puras, la que más le convenga según su función de pago, es por ello que lo trabajamos en estrategias puras. Es decir, dado  $d$  un perfil de estrategias puras, llamamos la mejor respuesta del jugador  $i$  al perfil  $d_{-i}$  a la estrategia pura que maximiza  $\varphi_i(k, d_{-i})$ . Dado  $X$  un perfil de

estrategias mixtas, llamamos mejor respuesta pura del jugador  $i$  al perfil  $X_{-i}$ , a la estrategia pura que maximiza  $E_i(k, X_{-i})$ .

Uno de los conceptos más importantes dentro de la teoría de juegos es el llamado equilibrio de Nash, propuesto por John Nash, que es entendido como la solución no cooperativa de un juego. Decimos que un perfil de estrategias es un equilibrio de Nash si no existe algún jugador tal que, cambiando él a alguna de sus otras posibles estrategias mientras que los demás se mantienen en ese perfil, el jugador que cambia mejora su pago. Formalmente:

**Definición:** Un perfil de estrategias mixtas  $X^*$  es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas (em), si para cada jugador  $j$  en  $N$  se cumple:

$$E_j(X^*) \geq E_j(X^* | X^j), \text{ para toda } X^j \in M_j,$$

Cuando un equilibrio de Nash es tal que cada jugador da probabilidad 1 a alguna de sus estrategias puras, decimos que el equilibrio es en estrategias puras.

Cuando para algún perfil que es equilibrio de Nash se da la desigualdad estricta para todos los jugadores y en todos los cambios posibles de estrategias, decimos que dicho perfil es un equilibrio de Nash estricto. Es fácil darse cuenta que un equilibrio de Nash estricto es necesariamente un equilibrio en estrategias puras.

Un equilibrio de Nash es una especie de acuerdo, en el que nadie tiene un incentivo unilateral para no cumplirlo. Algunos juegos tienen equilibrios de Nash en estrategias puras y otros en cambio no tienen, en cambio todo juego finito tiene equilibrios de Nash en estrategias mixtas.

**TEOREMA DE EXISTENCIA DE EQUILIBRIOS DE NASH EN ESTRATEGIAS MIXTAS,  
PARA JUEGOS FINITOS:**

Para cada juego rectangular finito existe al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Veamos ahora algunos ejemplos para observar en juegos concretos todas las definiciones que hemos introducido:

Para empezar, veamos un juego parecido al volado. Tendremos dos jugadores,  $A$  y  $B$ .  $A$  escogerá águila o sol, escondiendo su moneda con la cara que escogió hacia arriba. Ahora  $B$  debe adivinar que fue lo que escogió  $A$ . Si adivina, ganará un peso, que pagará  $A$ , si no,  $A$  ganará un peso, que pagará  $B$ .

Así, tendremos que el conjunto de jugadores constará de dos elementos,  $A$  y  $B$ .

Cada uno tendrá en su conjunto de estrategias, dos elementos: águila y sol.



Para mostrar la función de pago, mostraremos el juego como una matriz de  $2 \times 2$ :

A\B	Águila	Sol
Águila	$(-1,1)$	$(1,-1)$
Sol	$(1,-1)$	$(-1,1)$

Aquí vemos, en forma de vector, el pago que recibe cada jugador, dependiendo de las decisiones de ambos. La primera entrada es el pago de **A**, y la segunda es el de **B**.

Los posibles perfiles de estrategias puras serían:  $(a,s)$ ,  $(a,a)$ ,  $(s,a)$  y  $(s,s)$

Dado cualquier perfil, el que resulta perdedor según dicho perfil puede cambiar de estrategia y ganar, es decir, conseguir su estrategia de mejor respuesta. Esto nos muestra que no hay equilibrios de Nash en estrategias puras.

Mediante un proceso geométrico llamado cruz gamada, podemos encontrar los equilibrios de Nash en estrategias mixtas para juegos de dos jugadores con dos estrategias. Aplicándolo a nuestro ejemplo, obtenemos que el perfil de estrategias mixtas  $((1/2,1/2),(1/2,1/2))$  es el único equilibrio de Nash del juego. A este perfil de equilibrio lo podemos interpretar como que cada jugador escoge probabilidad  $1/2$  para cualquiera de sus estrategias. Otra de las posibles interpretaciones de dicho perfil es que después de un número de repeticiones muy grande del juego, cada jugador escogió la mitad de veces águila y la mitad de veces sol. Una interpretación más sería que, si una población está involucrada en un juego, la mitad de la población elige águila y la mitad sol.  $((1/2,1/2),(1/2,1/2))$ , ya no se esperarían cambios en ese patrón social de conducta. Para cada jugador, obtenemos el pago esperado que es

de 0. Usando la interpretación de que cada jugador juega la mitad de las veces águila y la mitad de las veces sol, éste pago esperado nos indica que al final no habría ganador o perdedor. Ambos jugadores terminarán con la misma cantidad con la que empezaron a jugar. O si la mitad de la población ha elegido águila y la otra mitad sol y se enfrentan azarosamente, a la larga cada persona ganaría 0.

Veamos ahora un ejemplo de los más famosos, conocido como el dilema del prisionero:

Dos criminales son capturados al tratar de escapar tras robar un banco, pero antes han tirado sus armas, por lo que no se les puede acusar de gran cosa. Pero al tenerlos por separado se les propone lo siguiente, si ambos confiesan, ambos recibirán 10 años en prisión, si uno confiesa y el otro no, el que confesó sale libre y el otro recibe 20 años, si ninguno confiesa, ambos reciben 2 años. Viéndolo en forma de matriz queda de la siguiente manera:

A \ B	Confesar	No confesar
Confesar	$(-10,-10)$	$(0,-20)$
No confesar	$(-20,0)$	$(-2,-2)$

En cuanto a eficiencia, el perfil  $(nc,nc)$  es el mejor, ya que entre ambos pierden 4 años, mientras que en los demás casos, se pierden 20. Sin embargo, al no confesar, cada uno corre el riesgo de que su compañero confiese y perder 20 años.

El equilibrio de Nash en estrategias puras es  $(c,c)$  y además si alguno decidiera cambiar de estrategia, obtendría **10** años más en prisión, por lo que este equilibrio es estricto en estrategias puras.

Como caso particular del modelo que estudiamos en este capítulo podemos hablar del juego de la minoría con **3** jugadores, como un juego rectangular de una sola tirada, algo parecido al famoso disparejo.

Cada jugador escoge que ruta tomar, **0** ó **1** y ganará un punto si solo él toma esa ruta, en otro caso, perderá un punto. En la siguiente tabla vemos las **8** posibles situaciones. De un lado observamos la estrategia de cada jugador, y del otro tenemos el pago que reciben al final del juego.

Estrategia			Pagos		
Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3	Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3
0	0	0	-1	-1	-1
0	0	1	-1	-1	1
0	1	0	-1	1	-1

1	0	0	1	-1	-1
0	1	1	1	-1	-1
1	0	1	-1	1	-1
1	1	0	-1	-1	1
1	1	1	-1	-1	-1

Es fácil ver que cuando todos escogen la misma ruta la situación es altamente ineficiente, ya que se pierden **3** puntos, mientras que en las otras situaciones se pierde solo uno, ya que se cuenta con un ganador.

Si tomamos cualquiera de los perfiles en los que existe ganador, podemos observar que será un equilibrio de Nash en estrategias puras, ya que, si uno de los agentes que perdió cambia de estrategia, seguirá perdiendo al convertir la minoría en mayoría, y si el agente que gana decide cambiar, perderá. Esto nos muestra que al estar en estos perfiles quien cambie, no mejora, por lo que es un equilibrio de Nash, aunque no es estricto. También existen equilibrios en estrategias mixtas, que no son puras, como el que cada jugador elija la estrategia  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Por último, tenemos el caso contrario al modelo que buscamos, llamado el juego de la mayoría, en el que cada agente tendrá varias opciones donde elegir, y ganará si escoge la mayoritaria.

Por simplicidad tomaremos el caso de dos opciones, también con un número impar de agentes. En este caso es fácil mostrar que los únicos equilibrios de Nash en estrategias puras son cuando todos los agentes escogen la misma estrategia. Al ser un número impar, siempre habrá un lado ganador y si algún agente no tomó esa estrategia, puede cambiar y ganar. Así sucederá con todos los agentes que no estaban en la mayoría. También existen equilibrios en estrategias mixtas que no son puras.

Ahora, asociaremos una gráfica dirigida a cada juego rectangular finito llamada la gráfica de mejor respuesta. Esta gráfica es parte de la estructura de un juego que determina aspectos importantes del comportamiento dinámico de un juego. Veamos rápidamente en que consiste dicha gráfica.

Dado un juego  $n$ -personal  $G$ , con conjunto de perfiles de estrategias puras finito  $D = \prod_{i \in N} D_i$ , construimos una gráfica dirigida de la manera siguiente: Asociamos a cada perfil de estrategias puras un vértice. Es decir el conjunto de vértices es  $D$ . Dibujamos una arista dirigida del vértice  $x$  al  $x'$  si y solo si existe exactamente un agente  $i$  tal que  $x_{-i} = x'_{-i}$ ,  $x_i \neq x'_i$  y  $x'_i$  es una mejor respuesta de  $i$  a  $x_{-i}$ . A esto le llamamos la gráfica de mejor respuesta de  $G$ . Un camino de mejor respuesta es una sucesión  $x_1, x_2, \dots, x_k$  tal que cada par  $(x_j, x_{j+1})$  corresponde a una

arista de la gráfica de mejor respuesta. Un pozo es un vértice del que no salen aristas. Claramente,  $x$  es un pozo si y solo si es un equilibrio de Nash estricto en estrategias puras.

Aquí vemos la gráfica de mejor respuesta asociada a un juego con dos pozos,  $(C,A)$  y  $(B,B)$ .  $\{A,B,C\}$  es el conjunto de estrategias puras de ambos jugadores.

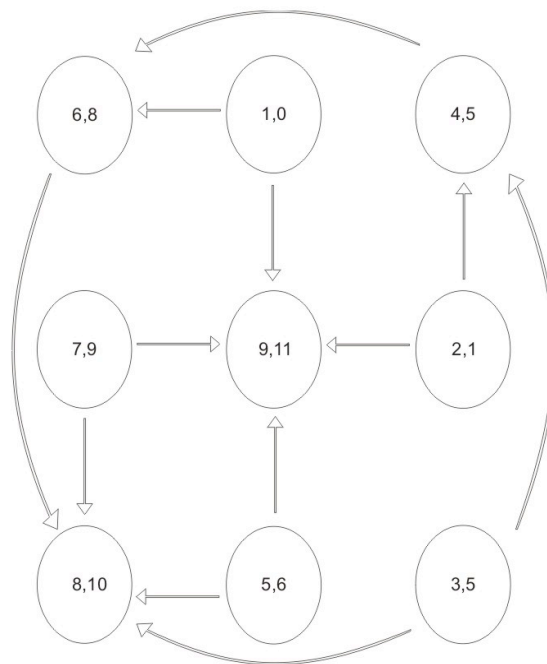


Fig. 3.3

La base de atracción de un pozo es el conjunto de todos los vértices desde los cuales existe un camino dirigido que termina en ese pozo. Es importante notar que un

vértice puede estar simultáneamente en varias bases de atracción. Por ejemplo,  $(B,A)$  está en la base de  $(C,A)$  y también en la de  $(B,B)$ .

Un juego es acíclico si su gráfica de mejor respuesta no contiene ciclos dirigidos. Es débilmente acíclico si cada vértice está en la base de atracción de al menos un pozo. Es fácil ver que el juego de la figura anterior es acíclico. Si cambiamos el pago  $(8,10)$  a  $(8,2)$  y  $(5,6)$  a  $(5,5)$ , entonces la gráfica contiene un solo pozo,  $(B,B)$ , y el juego es débilmente acíclico, pero no acíclico.

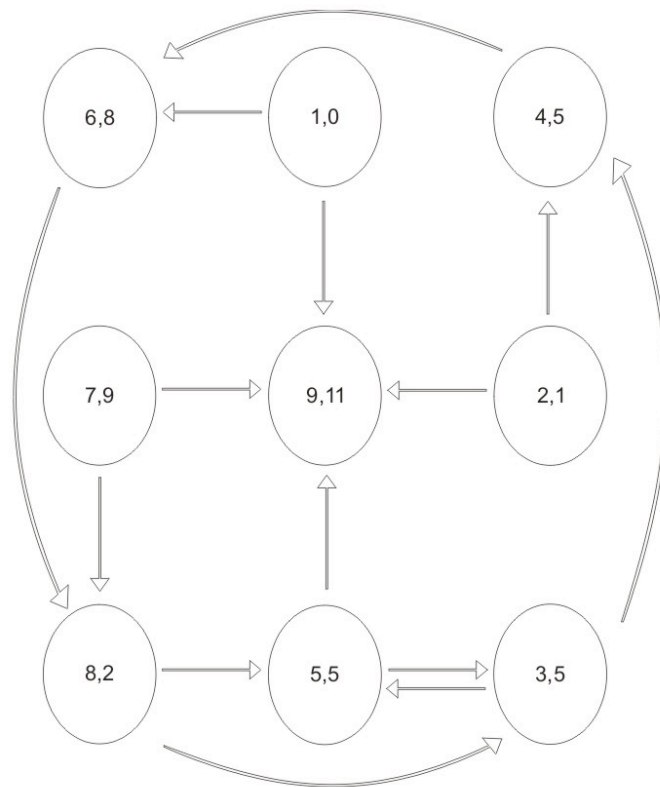


Fig. 3.5

### 3.4 Juegos de adaptación con historia

Ahora estableceremos dinámicas de adaptación de poblaciones involucradas en algún juego rectangular finito, utilizaremos procesos de Markov, como en el capítulo anterior, pero esta vez trabajaremos con ciertos procesos específicos.

Pensamos en una población  $J$  y un juego  $(N, D, \varphi)$ . Este juego se repite a lo largo del tiempo (en tiempo discreto) y en cada periodo, tiene lugar un solo encuentro del juego. Esta vez, los estados del proceso se formarán con lo que la población, en su conjunto, puede recordar sobre eventos anteriores. Supongamos que solo puede recordar los últimos  $m$  encuentros. Es decir, los estados serán vectores que registran las decisiones que se tomaron en los últimos  $m$  periodos  $y$ , con base en esta memoria social, cada uno de los agentes podrá apropiarse de parte de la información  $y$  de acuerdo a esto decidirá su estrategia para el siguiente periodo.

Veamos un poco más a profundidad estos procesos para, antes que nada, asegurarnos que estamos trabajando con procesos de Markov.

#### 3.4.1 Descripción de los procesos

Sea  $G$  un juego rectangular  $(N, D, \varphi)$ , donde  $N$  son los jugadores,  $D$  los perfiles de estrategias y  $\varphi$  la función de pago. Sea  $J$  una población finita de individuos que tiene una partición  $C$  de  $n$  clases no vacías  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Suponemos



que  $G$  se jugará a lo largo del tiempo y que el tiempo corre en forma discreta, es decir  $t = 1, 2, \dots$  serán los períodos sucesivos en el tiempo.

Cada miembro de  $c_i$  es candidato a tomar el lugar del jugador  $i$  en el encuentro (partida de  $(N, D, \varphi)$ ) que tendrá lugar en el periodo  $t$ . Supongamos que para todo  $i, j \in c_i, \varphi_i = \varphi_j$ .

El juego  $G$  es jugado una vez cada período. En el período  $t$ , un individuo  $i$  en  $c_i$  es escogido al azar con  $i = 1, 2, \dots, n$  y es asignado para jugar como el jugador  $i$  en el juego. Será conveniente referirnos al papel en el juego como jugador " $i$ " solamente aunque la identidad del individuo cambie de un período a otro.

El jugador " $i$ " escoge una estrategia pura  $D_i(t)$  del conjunto de estrategias puras de  $S_i$  de acuerdo a una regla que se definirá después. A  $d(t) = (d_1(t), d_2(t), \dots, d_n(t))$  se le llama la jugada al tiempo  $t$ . Las historias de las jugadas al tiempo  $t$  son una secuencia  $h(t) = (D(1), D(2), \dots, D(t))$ .

Los jugadores deciden como escoger sus estrategias de la siguiente manera. Sean  $k, m \in \mathbb{N}$  fijos tales que  $1 \leq k \leq m$ . En el período  $t+1$  ( $t \geq m$ ), cada jugador toma una muestra de  $k$  jugadas escogidas sin reemplazo de las  $m$  jugadas más recientes es decir de una secuencia o historia.

$h(t) = (D(t-m+1), D(t-m+2), \dots, D(t))$ , es una secuencia (historia) de tamaño  $m$ .

A  $m$  se le llama el tamaño de la memoria y a  $k$  el tamaño de la muestra. Sea  $H$  el conjunto de las secuencias de tamaño  $m$ .  $H$  será el conjunto de estados del proceso. Las muestras se toman de forma independiente para los distintos jugadores. También se supone que cada subconjunto de  $k$  antecedentes tiene una probabilidad positiva de ser parte de la información del agente " $i$ " para toda  $i$ .

La fracción  $k/m$  mide que tan completa es la información con que cuentan los agentes con relación a los antecedentes que sobreviven en el tiempo.

Supongamos que las primeras  $m$ -jugadas son escogidas al azar, entonces podemos estudiar el proceso de selección al principio del período  $t = m + 1$ . Para alguna secuencia inicial de  $m$  jugadas.  $h(m) = (D(1), D(2), \dots, D(m))$ .

Definición: Un sucesor de la secuencia  $h$  en  $H$  es cualquier secuencia de jugadas

$h'$  en  $H$ , obtenido de la eliminación del elemento que está más a la izquierda de  $h$  y añadiendo en la derecha el nuevo elemento.

### 3.4.2 El proceso de adaptación sin errores

Consiste en moverse de la secuencia en curso  $h$  a un sucesor  $h'$  en cada período de acuerdo con la siguiente regla de transición. Para cada  $d \in D_i$  sea

$P_i(d|h)$  la probabilidad de que el agente  $i$  escoja  $d$  dado que la historia  $h$  ha ocurrido. Supondremos que para toda  $i$ ,  $d$  y  $h$ ,  $P_i(d|h)$  no depende de  $t$ .

Diremos que la función  $P_i(\cdot)$  es una distribución de mejores réplicas puras en el sentido que  $P_i(d|h) > 0$  si y solo si existe una muestra de tamaño  $k$  para cada jugador tal que  $d_i$  sea una mejor réplica pura para el jugador  $i$  al perfil de estrategias mixtas determinado por la muestra de  $i$ . Si  $d$  es el elemento que está más a la derecha de  $h$  la probabilidad de moverse de  $h$  a  $h'$  es:

$$P_{hh'}^0 = \prod_{i=1}^n P_i(d|h)$$

$$P_{hh'}^0 = 0 \text{ si } h' \text{ no es sucesor de } h$$

El proceso  $P^0 = (N, D, m, k)$  será llamado proceso o juego de adaptación con memoria  $\boxtimes$  y muestra de tamaño  $k$ , sin errores. Un juego de adaptación consiste en un juego  $n$ -personal fijo que es jugado una vez cada período de tiempo discreto y en donde los jugadores son escogidos al azar de una población grande y finita de individuos.

Cada jugador escoge una estrategia óptima basada en las opiniones acerca del entorno que lo rodea. El jugador o agente forma sus opiniones con base en una observación estadística de lo que los otros agentes han hecho en un pasado reciente. Como la recolección de información es costosa, se hace la hipótesis de que cada

jugador conoce solo una pequeña parte de la historia del juego esto es, basa sus acciones en una muestra pequeña de acciones realizadas en períodos comprendidos entre los últimos  $m$  periodos, que son los únicos que registra la memoria social.

Una forma de imaginar el proceso de la muestra es que cada jugador pregunta a su alrededor para ver lo que se ha hecho en períodos recientes; el jugador se detiene cuando ha aprendido sobre  $k$  diferentes jugadas o que solo recuerda  $k$  jugadas que le llaman la atención.

Las estrategias que los jugadores escogen en el período en curso son registradas y el juego es jugado nuevamente en el siguiente período por otro grupo de  $n$  agentes que son tomados de la misma población la cual es fija.

No es necesario suponer que cada subconjunto  $k$  de antecedentes de los últimos  $m$  tiene igual probabilidad de constituir la información del agente, pero supondremos que todas las muestras posibles tienen probabilidad positiva de ser tomadas por cada agente. Cada vez que un agente juega empieza por buscar información para saber cual es la situación del juego o conflicto.

Uno de los estados importantes en estos procesos son las llamadas convenciones, que son estados absorbentes, es decir, que una vez que el proceso alcanza dicho estado no sale de él. Son estados que se refuerzan a sí mismos. Las convenciones son historias que tienen en todas sus entradas equilibrios de Nash

estrictos, lo cual asegura que ningún agente cambiará de estrategia en periodos posteriores.

Al igual que en el capítulo anterior, estos procesos suponen todavía una racionalidad relativamente alta por parte de los agentes, pues aunque tienen problemas para obtener información, no contemplan la posibilidad de errores o experimentaciones. Para debilitar esta hipótesis, introduciremos nuevamente un parámetro de error, al que denotaremos como  $\varepsilon$ , con  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ .

Con esto, lograremos contemplar agentes no tan racionales, más afectados por intentos de experimentación o diversas idiosincrasias como los que analizamos en el capítulo anterior.

La idea es generar un proceso similar al que se introdujo para el vecindario circular en el capítulo anterior, para así poder analizar la estabilidad estocástica de los estados, para saber hacia donde tenderá la distribución de los agentes, lo cual analizamos a continuación.

Recordando el capítulo anterior, tenemos el siguiente teorema:

*Teorema 2.1 (Young, 1993a) Sea  $P^\varepsilon$  un proceso de Markov regular perturbado y sea  $\mu^\varepsilon$  la distribución estacionaria única de  $P^\varepsilon$  para cada  $\varepsilon > 0$ . Entonces  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon = \mu^0$  existe y  $\mu^0$  es una distribución estacionaria de  $P^0$ . Los estados estocásticamente*

*estables son precisamente los que están contenidos en las clases recurrentes de  $P^0$  que tienen potencial estocástico mínimo.*

Ahora, veamos que nuestro proceso cumple las hipótesis de dicho teorema, con lo que podremos encontrar los estados estocásticamente estables.

Para empezar, debemos asegurarnos de que nuestro proceso es de Markov, es decir, que el resultado siguiente depende únicamente del periodo actual, lo cual es fácil de ver, ya que la regla de movimiento se refiere solo a las proporciones de la historia actual, sin importar las anteriores.

Ahora veamos que dicho proceso de Markov es regular, es decir, que cumple las 3 propiedades con las que definimos regularidad. Por ejemplo, desde un estado (una historia) dado, podemos llegar a cualquier otro en un número finito de pasos. Esto se debe precisamente a la posibilidad de error o experimentación en cada periodo.

Supongamos que en el periodo  $t$  estamos en una historia  $h$  y buscamos llegar a  $h'$ . Nos fijamos en la primera entrada de  $h'$ . Existe una probabilidad positiva de que todos los agentes elijan precisamente esas estrategias. Ahora, en el siguiente periodo existe una probabilidad positiva de que elijan las estrategias que aparecen en la segunda entrada de  $h'$ . Siguiendo este procedimiento, en el periodo  $t+m$  estaremos en  $h'$ .

Ahora bastaría encontrar las clases recurrentes de  $P^0$ , para saber cuales serán los estados estocásticamente estables de nuestro proceso.

Ahora, estudiaremos cómo se comporta el proceso de adaptación con historias, cuando el juego involucrado es débilmente acíclico.

**Proposición** Si  $G$  es débilmente acíclico y  $k \leq m/L_G + 2$  entonces, las únicas clases de comunicación recurrente son las convenciones.

**Corolario:** Si  $G$  es débilmente acíclico y  $k \leq m/L_G + 2$  entonces, los estados estocásticamente estables de un juego adaptativo son las convenciones de mínimo potencial estocástico.

### 3.5. Los juegos de minoría tratados con el proceso de adaptación con historias

#### 3.5.1 Un juego rectangular para modelar los juegos de minoría y sus propiedades.

Como mencionamos anteriormente, lo que buscamos es introducir un modelo de adaptación para estudiar los patrones que surgen en los juegos de minoría. Por lo que empezaremos modelando el juego de minoría como un juego rectangular  $(N, D, \varphi)$ . Después consideraremos que se repite al modo de Young.

Como en el artículo de los físicos, los jugadores toman en cuenta lo que ocurre en el pasado. Para simplificar nosotros sólo consideraremos un periodo pasado. Las

decisiones que se toman en los dos periodos influyen en el pago, pero de forma distinta. En el primero de ellos todos los agentes han escogido una ruta, decisión que podrán cambiar o mantener en el segundo. Un cambio de ruta para el segundo periodo, tendrá un pequeño costo, que podemos interpretar como gasolina, tiempo, etc. Si no cambian, no habrá dicho costo. Ganarán si quedan en la minoría según la segunda decisión. El modelo formal queda de la siguiente manera:

Sea  $N$  impar el número de jugadores. Cada jugador escogerá al inicio del juego una ruta  $A$  o  $B$ . Después de avanzar un poco, revisarán su decisión escogiendo de nuevo  $A$  o  $B$ . De modo que las estrategias posibles son:  $(A,B)$ ,  $(A,A)$ ,  $(B,A)$  y  $(B,B)$ . Tendremos que  $N = n_A + n_B$  donde  $n_i$  es el número de jugadores con  $i$  como segunda entrada de estrategia. Sea  $c > 0$  el costo por cambio de decisión.

Entonces la función de pago  $\varphi$  quedará definida como sigue:

$$\varphi(A,A) = n_B$$

$$\varphi(B,A) = n_B - c$$

$$\varphi(A,B) = n_A - c$$

$$\varphi(B,B) = n_A$$

Con esto, queda completamente determinado nuestro juego. Vemos que, como buscábamos, a cada jugador le conviene mantenerse en la minoría, para así ganar más.



Además, si estarán en minoría es preferible no haber cambiado de decisión, para no perder lo correspondiente al costo.

Este juego tiene muchos equilibrios en estrategias puras, pero, como veremos a continuación, todos son equivalentes en cuanto el patrón que determinan.

**Proposición:** Los únicos equilibrios en estrategias puras de este juego son los perfiles

tales que  $n_A = \frac{N+1}{2}$  y  $n_B = \frac{N-1}{2}$  o viceversa y todos los jugadores eligen

$(A,A)$  o  $(B,B)$ .

**Demostración:** Veamos primero que, bajo ninguna circunstancia  $(A,B)$  o  $(B,A)$

serán equilibrios.

Tomemos s.p.g. el caso de que algún jugador haya elegido  $(A,B)$ , en donde tendremos dos casos. El primero, en donde  $n_B > n_A$ , del cual se desprenden otras dos opciones.

La primera, cuando existe un jugador  $j$  que eligió  $(A, B)$  y  $n_B > n_A + 1$

Sabemos que las desigualdades siguientes se cumplen, por ser  $N$  impar:

$$n_B > n_A + 1 \Rightarrow n_B \geq n_A + 3 \Rightarrow n_B - 1 \geq n_A + 2$$

✗ si el jugador cambia a  $(A,A)$  su pago será mayor, ya que:

$$\varphi_j(A,A) = n'_B = n_B - 1 \geq n_A + 1 + 1 = n'_A + 1 > n'_A > n_A > n_A - c = \varphi_j(A,B)$$

$\therefore \varphi_j(A,A) > \varphi_j(A,B)$ . Es decir, no existe un equilibrio, donde un jugador haya elegido (A, B) y  $n_B > n_A + 1$ .

Supongamos que j eligió (A, B) y  $n_B = n_A + 1$ , entonces

$$n_B = \frac{N+1}{2} \text{ y } n_A = \frac{N-1}{2} \Rightarrow \varphi_j(A,B) = \frac{N-1}{2} - c.$$

$$\text{Si cambia a } (A,A) \Rightarrow n'_B = \frac{N-1}{2}, n'_A = \frac{N+1}{2}$$

$$\therefore \varphi_j(A,A) = \frac{N-1}{2} > \frac{N-1}{2} - c \text{ y tampoco es equilibrio.}$$

En el segundo caso tenemos que  $n_B < n_A$  y entonces, cuando el jugador cambia a (B, B) tenemos que  $\varphi(A,B) = n_A - c < n_A = \varphi(B,B)$ .

Por lo tanto, que un jugador elija (A, B) no es equilibrio, bajo ninguna circunstancia.

Y el razonamiento es análogo para el que un jugador elija (B, A).

Esto demuestra que el equilibrio consta sólo de elecciones (A, A) y (B, B).

Únicamente falta definir las proporciones en que dichas estrategias aparecen para lograr dicho equilibrio. Veremos que se necesita que los jugadores se dividan lo más equitativamente posible.

Veamos, sin pérdida de generalidad, el caso de que las proporciones cumplen que  $n_B > n_A + 1$  y encontraremos que entonces no estamos en equilibrio.

Es claro que a los agentes que escogieron  $(A,A)$  no les conviene cambiar, ya que están en la minoría y cambiar los haría perder. Como mostramos anteriormente, no habrá  $(A,B)$  en el perfil, por lo que solo falta ver que pasa si un agente que escogió  $(B,B)$  cambia de estrategia a  $(A,A)$ .

Tenemos lo siguiente:  $\varphi_j(B,B) = n_A < n'_A \leq n_B - 1 = \varphi_j(A,A)$ . Lo cual muestra que existe al menos un agente tal que cambiando de estrategia, mejora y no estamos en el equilibrio. El caso de  $n_A > n_B + 1$  es análogo.

Con esto tenemos que los únicos posibles equilibrios son elecciones  $(A,A)$  y  $(B,B)$  cuando  $n_A = n_B + 1$  ó  $n_B = n_A + 1$ . Veamos que, en efecto, estos son equilibrios.

Supongamos  $n_B = n_A + 1$ , es decir,  $n_A < n_B$ .

Si alguno que escogió como segunda decisión  $A$  cambia a  $B$ , perderá, ya que estaba en la minoría y pasará a la mayoría. Si alguno de los que están en  $B$  cambia a  $A$ , entonces la desigualdad se voltea y obtenemos:  $n_B < n_A$ , con lo que el agente que cambia, se mantiene con el mismo pago, es decir, no mejora. Con esto se cumple la definición de equilibrio de Nash.

Es importante notar que estos equilibrios no son estrictos, ya que cualquiera de ellos que escojamos, los pagos son los mismos, cambiando solo los jugadores que escogen  $A$  y  $B$ . Además, el juego no es débilmente acíclico, pues claramente en la gráfica de mejor réplica se tienen ciclos entre equilibrios en los que  $n_A = n_B + 1$  y aquellos en los que  $n_B = n_A + 1$ . Es decir, estamos lejos de poder aplicar el resultado de Young sobre juegos débilmente acíclicos. Sin embargo construiremos una dinámica de adaptación cuyos equilibrios estocásticamente estables son las convenciones esperadas de que los se dividen entre las rutas del modo más equitativamente posible.

Ahora, estudiemos que ocurre si el juego se repite una enorme cantidad de veces siguiendo una dinámica de adaptación tipo Young. Con ello, podremos encontrar los estados estocásticamente estables y los podremos comparar con los resultados de las simulaciones de Johnson, Hui, Jonson y Lu reportadas al principio del capítulo.

### *3.5.2 Un modelo de adaptación para los juegos de minoría*

La dinámica que proponemos es en tiempo discreto, será un proceso de Markov perturbado regularmente que consiste en lo siguiente:

Tendremos  $N$  impar, que será el número de agentes. Los estados del proceso consisten en todas las historias posibles de las decisiones que han tomado los  $N$  agentes durante los  $m$  últimos periodos. En cada periodo, cada agente elige  $A$  o  $B$ .

Dada una historia sus sucesores posibles son como ya explicamos en la sección 2.2 sobre los procesos de Young.

Veamos cómo serían los procesos sin errores. En el periodo  $t+1$ , cada agente toma una muestra de cómo se han comportado los demás agentes en  $k$  de los  $m$  periodos que componen la historia y elige una mejor respuesta relativa a esta experiencia. Los pagos corresponden al juego de minoría que hemos construido y la mejor respuesta toma en cuenta el costo en el que se incurre si cambia su decisión respecto al periodo  $t$ . Es decir, elige la estrategia pura que le hubiera dado mejor pago total si la hubiera escogido durante los  $k$  periodos de la muestra. En el caso de que las dos estrategias dieran lo mismo, cualquiera de ellas es una respuesta válida.

En cambio, en el proceso que admite errores, cualquier respuesta que elija cada jugador, en el periodo  $t+1$  es válida y la flecha que une las dos historias tiene peso igual al número de errores que se han cometido. Esto nos da como resultado un proceso regular. Por lo que ahora, podemos aplicar el teorema 2.1 para estudiar los equilibrios estocásticamente estables. Primero hace falta encontrar hacia qué estados nos conduce el proceso sin errores, cuando se parte de cualquier estado posible. O lo que es lo mismo determinar cuáles son las clases de comunicación recurrentes del proceso.

Establezcamos la siguiente proposición que dice que las clases de comunicación recurrente son convenciones en los que hay una repartición casi igualitaria entre las dos rutas.

**Proposición:** Si  $k \leq m/2$ , las clases de comunicación recurrente del proceso son de la

forma en que en los  $m$  periodos, cada jugador elige lo mismo,  $\frac{N-1}{2}$  de ellos

eligen siempre  $A$  (o  $B$ ) y los  $\frac{N+1}{2}$  restantes eligen siempre  $B$  (o  $A$ ).

**Demostración:** Sea  $h$  una historia posible. Por ahora, supongamos que  $m$  y  $k$  tienen

los tamaños relativos para que sea posible llevar adelante el proceso que

describiremos. Más adelante, nos preocuparemos por buscar la cota más

pequeña posible de  $m/k$ . Si  $h$  es tal que los  $k$  últimos periodos constituyen

una muestra (a la que llamaremos  $\eta$ ) para la que existe una mejor respuesta

pura que es la misma para todos los jugadores, sea  $A$  o  $B$ , digamos que  $A$

(los mismos razonamientos serían válidos para  $B$ ). Supongamos que, desde el

periodo  $t$ , y durante  $k$  periodos, todos los jugadores eligen la muestra  $\eta$  y

que todos eligen la misma mejor respuesta, es decir  $A$ . Este hecho tiene

probabilidad positiva de ocurrir. Se ha provocado una muestra  $\tilde{\eta}$  en donde todos los jugadores eligen  $A$ . Numeremos a los jugadores. Con probabilidad positiva, durante los siguientes  $k$  periodos, los  $\frac{N-1}{2}$  primeros eligen la muestra  $\eta$  y los  $\frac{N+1}{2}$  últimos eligen la muestra  $\tilde{\eta}$ . Con sus mejores respuestas, entre todos los jugadores, generan una muestra de  $k$  periodos, a la que llamamos  $\eta^*$ , en la que los  $\frac{N-1}{2}$  primeros jugadores eligen siempre  $A$  y los  $\frac{N+1}{2}$  últimos eligen siempre  $B$ . Entonces, con probabilidad positiva, todos los jugadores pueden escoger como muestra a  $\eta^*$  durante todos los periodos que sean necesarios para que lleguemos a la historia  $h^*$  en la que, durante los  $m$  periodos los  $\frac{N-1}{2}$  primeros jugadores eligen siempre  $A$  y los  $\frac{N+1}{2}$  últimos eligen siempre  $B$ . Si el proceso ha llegado a  $h^*$  y los jugadores no cometen errores, no se puede salir de esa historia. Cualquier jugador que esté en minoría (los que eligen  $A$ ) elegiría de nuevo  $A$  y cada uno de los que

están en mayoría, y ha estado eligiendo  $B$ , tampoco cambiaría, pues de nuevo estaría en mayoría y además tendría un descuento de  $c$ . Es decir, ganaría

$\frac{N-1}{2} - c$  en lugar de  $\frac{N-1}{2}$ . Entonces,  $h^*$  es un estado que se autorrefuerza.

Es decir, es una convención.

Hemos demostrado que, para las  $h$  tales que sus últimos  $k$  periodos forman una muestra que tiene una mejor respuesta única, el proceso sin errores nos conduce a una convención que consiste en una repartición casi igualitaria,  $\frac{N-1}{2}$  de un lado y  $\frac{N+1}{2}$  del otro. ¿Qué ocurre cuando en la  $h$  inicial, los últimos  $k$  periodos no constituyen una muestra para la que no hay una mejor respuesta pura que es la misma para todos los jugadores? Quiere decir que la muestra consiste de  $k$  periodos en los que  $\frac{N-1}{2}$  jugadores eligen siempre  $A$  y  $\frac{N+1}{2}$  eligen siempre  $B$  y ya explicamos cómo llegaríamos a alguna  $h^*$ .

Establezcamos una cota inferior para  $m/k$  de tal manera que se asegure que con probabilidad positiva se puede alcanzar alguna de las convenciones. Si  $m/k \geq 2$ , todo el proceso puede llevarse a cabo porque para generar  $\tilde{\eta}$  se necesita que esté presente  $\eta$  durante  $k$  periodos. Si suponemos que  $m = 2k$ , Cuando generamos el



primer periodo de  $\eta^*$  se olvidaría el primero de  $\eta$  y necesitamos  $k$  periodos que refuercen a los  $\frac{N-1}{2}$  jugadores que eligen  $A$ , a que lo sigan haciendo. Sin embargo, se puede utilizar el primero de  $\eta^*$  para completar la muestra truncada de  $\eta$ . Esta nueva muestra  $\eta'$  funciona igual que  $\eta$ . Así al ir generando los demás periodos de  $\eta^*$ , al irse olvidando los periodos de  $\eta$  se pueden ir sustituyendo por los que se generan de  $\eta^*$ . Si  $k \leq m/2$  el proceso sin errores siempre llega a una convención. ■

Es claro que todas las clases de comunicación recurrente juegan un papel equivalente y todas tienen el mismo potencial estocástico, entonces todas las convenciones son equilibrios estocásticamente estables y se presentarán en el largo plazo con la misma probabilidad.

Ahora, cada jugador tendrá una memoria que consiste en recordar la estrategia utilizada por los  $N$  jugadores por los últimos  $m$  periodos..

Los estados en nuestro proceso serán las historias, dadas por los arreglos de  $m \times N$  que en la columna  $i$  tendrán las últimas  $m$  estrategias utilizadas por el jugador  $i$ .

Para pasar de un estado a otro se empleará la siguiente dinámica:

De la información mostrada en la historia obtendrá una muestra de tamaño  $k$  con la que generará su estrategia, basándose en la proporción de  $A$ 's y  $B$ 's que se

encuentran en las estrategias de cada jugador y usará esto como un perfil de estrategias mixtas para escoger como estrategia aquella que le de un mejor pago esperado. Con esto el proceso queda definido. Ahora estudiaremos sus propiedades.

Para empezar, ya conocemos los equilibrios del juego rectangular, por lo que sabemos que si dichos equilibrios se repiten formarán una convención dentro de nuestra dinámica. Es importante notar que para esto pedimos que la estrategia consista solo en la segunda elección de ruta, evitando así que se forme un ciclo entre los distintos equilibrios.

Lo que intentamos es encontrar sus estados estocásticamente estables. Para esto, emplearemos algo parecido a la demostración de que en un proceso de adaptación, si los agentes tienen una muestra suficientemente pequeña, se tiende con probabilidad 1 a un estado estocásticamente estable.

**Afirmación:** Si  $m \geq k+1$  entonces el proceso de adaptación tiende con probabilidad 1 a alguna de sus convenciones.

**Demostración:** Necesitaremos que existan dos muestras,  $k_A$  que nos garantiza que, al tomarla, la mejor respuesta será  $A$  y  $k_B$  que al tomarla la mejor respuesta será  $B$ .

Si ambas existen, tendríamos lo que necesitamos para concluir, así que sin pérdida de generalidad supongamos que solo existe una,  $k_A$ .

Existe una probabilidad positiva de que todos los agentes tomen  $k_A$  como muestra, respondiendo  $A$ . También existe una probabilidad positiva de que esto pase  $\frac{k+1}{2}$  periodos consecutivos. Con esto generamos  $k_B$ .

Ahora existe una probabilidad positiva de que  $\frac{N+1}{2}$  agentes tomen  $k_A$  como muestra y  $\frac{N-1}{2}$  tomen  $k_B$ . Como por la muestra gana la ruta  $B$ , no se alteran las proporciones necesarias para que existan aun ambas muestras.

Tomando las muestras correctas, conseguimos que la población se divida en  $\frac{N-1}{2}$  para una ruta y  $\frac{N+1}{2}$  para la otra.

Con esto llegamos a la misma conclusión que se obtuvo mediante las simulaciones.

## Capítulo 4

### *Surgimiento de clases sociales inequitativas*

Hasta ahora hemos presentado modelos en los que la población se segrega en distintas clases sociales, pero esta segregación ha sido casi puramente geográfica, por ejemplo, donde viven los agentes o que caminos toman. Sin embargo, en cuanto a sus ganancias, esta segregación no es tan evidente.

En el ajedrez de Schelling y la ciudad circular de Young ambas partes de la población eran felices, aún viviendo segregadas.

En el juego de la minoría, en el equilibrio, la ganancia que recibe el conjunto ganador es mayor por muy poco a lo que recibe el conjunto perdedor, por lo que no se da una diferencia marcada en cuanto a utilidad.

Lo que ahora presentaremos es un modelo de negociación en el que la población se enfrentará por la posesión de un bien.

Primero lo explicaremos con una población homogénea, encontrando su equilibrio, para después compararlo con lo que sucede cuando los agentes pueden distinguirse entre sí.

#### 4.1 Introducción del modelo

Utilizaremos el juego de demanda de Nash, pero restringiendo las estrategias a solo tres, **A** (alta), **B** (baja) y **M** (media).

Para empezar, tendremos dos jugadores y un bien a repartir. Una característica importante del bien en cuestión es que sea divisible, al menos en las proporciones que necesitamos para el juego, que son 30 %, 50 % y 70 %.

Cada jugador tendrá 3 estrategias que representarán su demanda respecto al bien. Pueden tener una demanda baja (30%), media (50%) o alta (70%).

Si la suma de ambas demandas no es mayor a 100, cada jugador se lleva lo que pidió. Si se exceden, ninguno se lleva nada. Esto se puede mostrar en la siguiente matriz.

$J_1 \setminus J_2$	<b>B</b>	<b>M</b>	<b>A</b>
<b>B</b>	(30,30)	(30,50)	(30,70)
<b>M</b>	(50,30)	(50,50)	(0,0)
<b>A</b>	(70,30)	(0,0)	(0,0)

Podemos ver que los equilibrios de Nash en estrategias puras son  $(B,A)$ ,  $(M,M)$  y  $(A,B)$ , que son precisamente en aquellos donde el bien se reparte eficientemente.

Veamos ahora el modelo cuando nuestros agentes son indistinguibles el uno del otro, pero cada uno tendrá diferentes experiencias que condicionan su comportamiento

Sea  $N$  par, el número de agentes. Cada periodo consistirá de  $N/2$  encuentros. En cada uno, un par de agentes es tomado al azar para jugar el juego de la matriz anterior. Cada agente usará la información que obtiene de su experiencia, que en este caso será representada por las peticiones de sus últimos  $m$  oponentes. Dicha  $m$  será conocida como la longitud de la memoria de cada agente.

Si concatenamos la memoria de todos los agentes tendremos un estado de nuestro modelo.

Cada agente utiliza su memoria para generar una mejor respuesta. Primero obtiene la frecuencia relativa de cada una de las estrategias y toma estas como una estrategia mixta del oponente en turno para, con base en esta, escoger la estrategia que arroje el mejor pago esperado. Esto pasará con una probabilidad de  $1-\epsilon$ , mientras que con una probabilidad de  $\epsilon$  el agente tomará una estrategia al azar.

Estas reglas de comportamiento nos definen una dinámica social particular, en función del tamaño de población  $N$ , el largo de la memoria  $m$  y la probabilidad de error  $\epsilon$ . Esto resulta en un proceso de Markov, ya que existe una probabilidad bien definida de pasar de cualquier estado  $s$  a otro estado  $s'$  en el siguiente periodo.

Las creencias de un agente evolucionan de acuerdo a sus experiencias particulares, por lo que dichas creencias pueden llegar a ser muy heterogéneas.

Un punto importante es que las creencias de los agentes no son necesariamente representativas de la situación del mundo. Por ejemplo, un agente puede haber sido enfrentado con puros agentes que escogieron  $A$  como estrategia, por lo que en su siguiente enfrentamiento, con alta probabilidad escogerá  $B$ , mientras que puede haber algún agente que haya sido enfrentado con puros agentes que escogen  $M$ , por lo que con alta probabilidad escogerá  $M$ . Sin embargo la realidad puede ser que la mayoría de la población escoge  $B$ , por lo que ambas creencias son incorrectas.

Una *norma social* es un estado auto perpetuante en el que las memorias de los agentes, y por consecuencias sus mejores respuestas, son invariantes. En otras palabras, es un equilibrio del sistema dinámico cuando  $\epsilon = 0$ . Un ejemplo es cuando todas las memorias coinciden en que todos demandan  $M$ . Entonces todos creen que su mejor respuesta será demandar  $M$ . Asumiendo que no hay errores ( $\epsilon = 0$ ), todos demandan  $M$  en el siguiente periodo. Con esto, las creencias resultan correctas, perpetuándose. Esta es la *norma igualitaria* en donde todos esperan que el otro

demande  $M$  y como resultado demanda  $M$  . Notemos que esta norma no presenta ningún desbalance entre igualdad y eficiencia: la situación es igualitaria, ya que todos reciben lo mismo y eficiente, ya que no queda ninguna parte del bien sin dueño. Se puede verificar que cuando no hay diferencias observables entre los agentes, la norma igualitaria es el único equilibrio del juego de demanda de Nash y el único estado absorbente de la dinámica social sin perturbaciones.

Para un mejor entendimiento de los estados los representaremos en simplejos con tres regiones, como los de la siguiente figura:

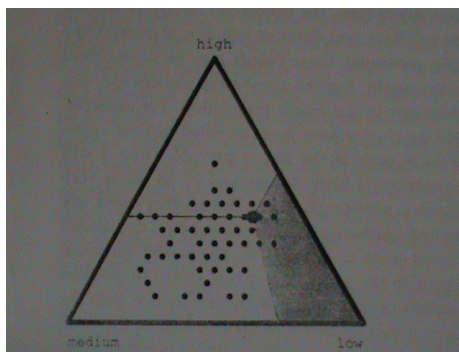


Fig 4.1

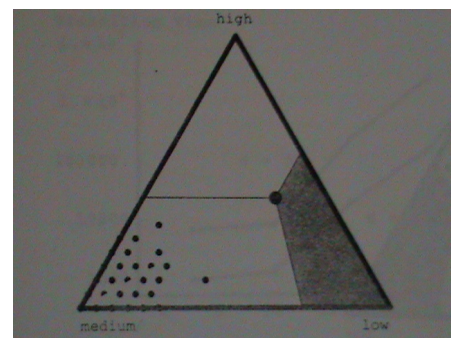


fig 4.2

En cada periodo todos los agentes ocupan una posición sobre el simplejo, que es determinada por el contenido de su memoria. Por ejemplo, un agente que solo ha encontrado agentes que demandan  $B$  estará localizado en el vértice de abajo a la derecha. La zona en la que cada agente también determina su mejor respuesta. El sombreado de cada región representa la mejor respuesta en estrategias puras para cada agente, ya que la posición de cada agente representa su memoria.



Si el proceso se inicia en el estado que muestra la figura 4.1, la probabilidad de que la mayoría de los agentes se mantengan en esa zona por un largo periodo de tiempo es alta. Esto se debe a que la norma igualitaria tiene una base de atracción grande, e incluso desviaciones sustanciales causadas por mutaciones en comportamiento de algunos individuos pueden no ser suficientes para llevar a la sociedad a un régimen diferente. Sin embargo, estos cambios pueden llegar a ocurrir, conduciendo a la sociedad a regímenes que son fundamentalmente distintos.

Si observamos la figura 4.2 podemos ver uno de estos regímenes, en el que podemos observar un estado fraccionado. En este, los agentes deben decidir en cada periodo si son agresivos o pasivos. Si en su experiencia la mayoría de sus oponentes han sido agresivos (escogiendo **A**), lo mejor que puede hacer es someterse (escogiendo **B**). Estos estados existen por un periodo muy largo. A menudo existe descoordinación, es decir, los jugadores exigen mucho (ambos juegan **A**) quedándose sin nada, o demandan muy poco (juegan **B**) y dejan una parte del bien sin dueño.

Es importante aclarar que aunque así parece, estos estados no presentan clases sociales, ya que los agentes pueden cambiar de zona entre **A** y **B**, generando más bien un estado fraccionado.

Usando métodos asintóticos se puede mostrar que cuando  $m$  y  $N$  son suficientemente grandes, la probabilidad de estar en la región de igualdad es sustancialmente mayor a la de estar en un estado fraccionado, si uno espera lo

suficiente (es decir con  $t$  suficientemente grande) y con una probabilidad de error  $\epsilon$  suficientemente pequeña. Esto significa que, semejante a los resultados en capítulos anteriores, la norma igualitaria es estocásticamente estable. La razón intuitiva es que, una vez que se establece, es más difícil romper la norma igualitaria que romper un estado fraccionado. Sin embargo, la *inercia*, es decir, el tiempo de espera para alcanzar el régimen estocásticamente estable, puede ser muy grande.

Por ejemplo, supongamos que empezamos con una sociedad establecida en un estado fraccionado, con  $N=10$ ,  $\epsilon=0.10$  y computamos el número esperado de periodos para llegar a una vecindad de la norma igualitaria, es decir, a un estado en el que todos los agentes tienen al menos  $(1-\epsilon)m$  apariciones de  $M$  en su memoria.

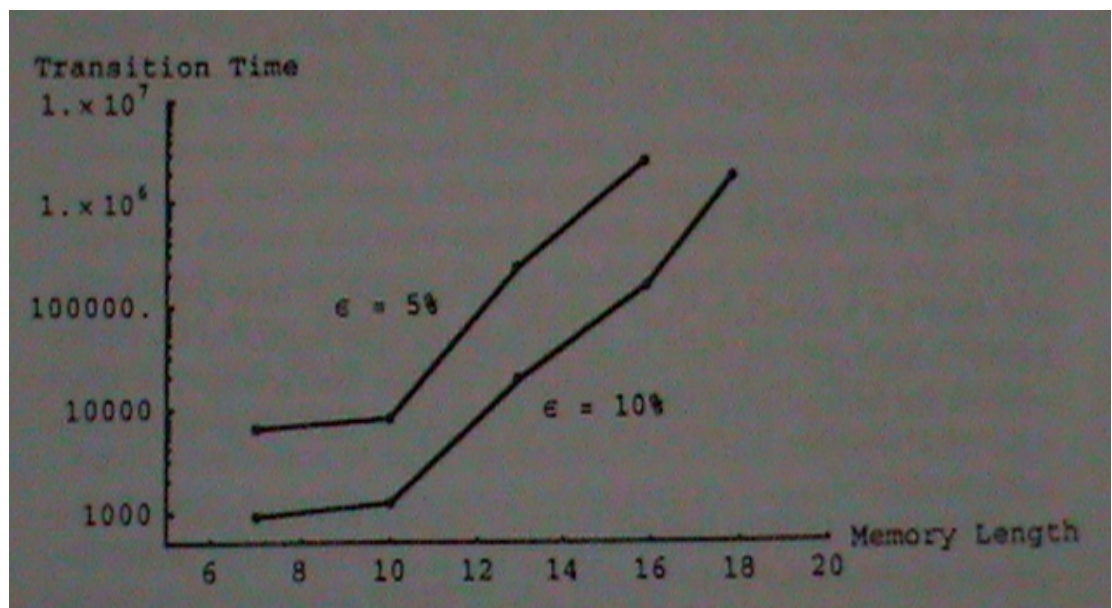


Fig. 4.3

Observamos en la Fig. 4.3 que el tiempo de espera aumenta exponencialmente con respecto a  $m$ . Por ejemplo, para  $m=13$  tomaría, en promedio, alrededor de  $10^5$  periodos para que el estado fraccionado sea reemplazado por la norma igualitaria.

Por lo tanto, aunque la norma igualitaria es estocásticamente estable, el modelo computacional nos muestra que, dependiendo del número de agentes y el largo de su memoria, el tiempo de espera para llegar de un estado fraccionado a la norma igualitaria puede ser excesivamente largo.

Como vemos en la figura 8.4, el número esperado de periodos que la sociedad debe esperar para moverse de un régimen fraccionado a la norma igualitaria es de  $O(10^6)$ . Para sociedades humanas, no son realizables un millón de interacciones por agente. Si cada periodo es de un día, equivaldrían a casi 2740 años. Si cada periodo fuera una hora, se necesitarían algo más de 114 años.

Los sistemas dinámicos que, como éste, son formalmente ergódicos, pero tienen subregiones del espacio de estados que, con gran probabilidad, confinan al sistema por un gran número de periodos muestran ergodicidad rota con respecto a ese número de periodos. Sea  $R_{trans}(m, N, \epsilon)$ , la velocidad de transición del estado fraccionado a la norma igualitaria. Por ejemplo, de acuerdo a la figura 8.4, para  $m=18$ , esta velocidad es de aproximadamente  $10^{-6}$ . Ahora, digamos que la vida de

una sociedad es  $T \ll 1/R_{trans}(m, N, \epsilon)$ . Entonces, para una primera aproximación la probabilidad de transición de régimen tenemos que:  $Pr_{trans}(T, m, N, \epsilon) = TR_{trans}(m, N, \epsilon)$ . Un sistema tiene ergodicidad rota efectiva si  $Pr_{trans}(T, m, N, \epsilon) < p_0$ , donde  $p_0$  es algún nivel pequeño de significancia, digamos 0.001. Claramente, la dependencia exponencial de los tiempos de transición respecto a la longitud de la memoria y el tamaño de la población implica que el modelo que presentamos muestra ergodicidad rota.

En resumen, decisiones al azar ocasionales pueden generar ruido en el sistema, lo que implica que ningún estado es perfectamente absorbente. Sin embargo, hay dos regiones del espacio de estados que son muy persistentes, es decir, una vez que el proceso entra en ellas tiende a quedarse ahí por una gran cantidad de periodos. Una de sus implicaciones es que, aunque hay un solo equilibrio puro, puede resultar difícil para los agentes descubrirlo desde ciertas condiciones iniciales.

#### **4.2 Dos tipos de agentes: El modelo con etiquetas.**

Hasta ahora, todos los agentes han sido indistinguibles uno de otro, a excepción de sus memorias, es decir, todos se ven iguales para los demás. Ahora, supongamos que los agentes tienen una etiqueta que los distingue, digamos, blancos y negros. Esta etiqueta será completamente insignificante respecto a la competitividad de los agentes; por ejemplo, tienen la misma cantidad de memoria, siguen la misma regla de comportamiento, etc. Sin embargo, la presencia de la etiqueta permite que los

agentes condicionen su comportamiento con respecto a la etiqueta de su contrincante. Asumimos que cada agente registra en su memoria la etiqueta de su oponente y la estrategia que utiliza. Ahora, al enfrentarse a un oponente negro, el agente demanda la cantidad que maximiza su pago esperado, según la distribución obtenida por su memoria contra agentes negros y se hará el mismo procedimiento al enfrentarse a un agente blanco, considerando ahora sus recuerdos contra agentes blancos. Todo esto pasará con alta probabilidad, pero con una probabilidad  $\epsilon > 0$  los agentes escogerán su demanda al azar.

En este modelo tenemos posibilidades sociales más ricas que antes, ya que la igualdad, la desigualdad y los estados fraccionados pueden existir entre agentes con la misma etiqueta y entre agentes con etiquetas distintas.

Asumamos por un momento que no hay ruido para los agentes ( $\epsilon = 0$ ). Definimos un *equilibrio intergrupar* como un estado en el que cada agente blanco demanda  $x$  contra agentes negros, cada agente negro demanda  $1 - x$  contra agentes blancos y esto pasa en todos los encuentros anteriores que cada agente recuerda. Definimos un *equilibrio intragrupal* como un estado en el que todos demandan  $\frac{1}{2}$  contra agentes de su misma etiqueta y esto es cierto para todos los encuentros anteriores que cada agente recuerda.

Usando métodos de la teoría de procesos de Markov perturbados, se puede mostrar que cuando  $m$  y  $N/m$  son suficientemente grandes, entonces el único

estado estocásticamente estable corresponde al caso particular cuando  $x = \frac{1}{2}$ ; esto significa que la igualdad prevalece entre y dentro de los grupos. Cuando  $\epsilon$  es suficientemente pequeño, este estado, o alguno muy cercano a él, será observado con muy alta probabilidad en el largo plazo. Pero, como antes, existen estados fraccionados y normas no igualitarias que tienen un considerable poder de persistir.

Para estudiar estas dinámicas representaremos los estados en dos simplejos, el de la derecha corresponde a la memoria de los agentes cuando juegan contra agentes con distinta etiqueta, es decir, muestra las dinámicas intergrupales, mientras que del lado izquierdo se muestran las memorias de los agentes cuando juegan contra agentes de su mismo grupo, es decir, muestra las dinámicas intragrupalas. Los puntos negros son los agentes negros, los grises son los blancos. En cada corrida hay un total de  $N = 100$  agentes, cincuenta de cada tipo. Todos los agentes tienen longitud de memoria  $m = 20$  y el nivel de ruido será  $\epsilon = 0.1$ . El estado inicial es diferente entre cada corrida para mostrar los efectos de la dependencia en los caminos.

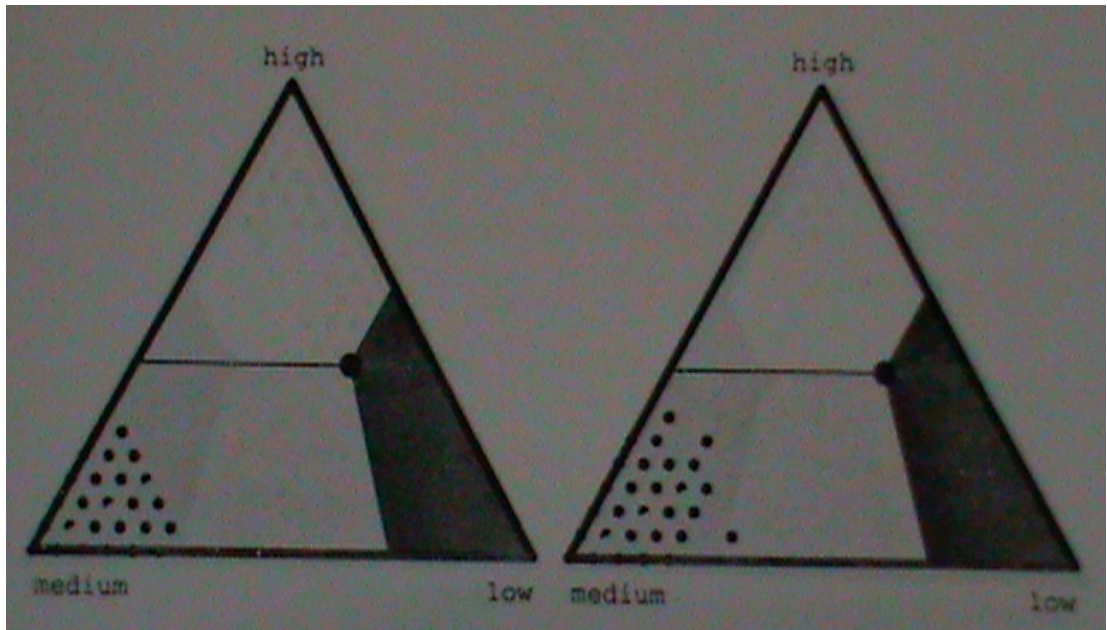


Fig. 4.4

La figura 4.4 ilustra nuestro primer caso. Iniciando de condiciones iniciales al azar, nos muestra el estado del sistema en el periodo  $t = 150$ .

En este punto, el proceso ha alcanzado un estado donde algo muy cercano a la norma igualitaria prevalece dentro y entre los grupos. En particular, el proceso está en la base de atracción de la norma igualitaria para agentes negros contra agentes negros, blancos contra blancos y blancos contra negros. Los pagos promedio son altos, ya que los agentes logran dividir el bien, en lugar de pelear por él.

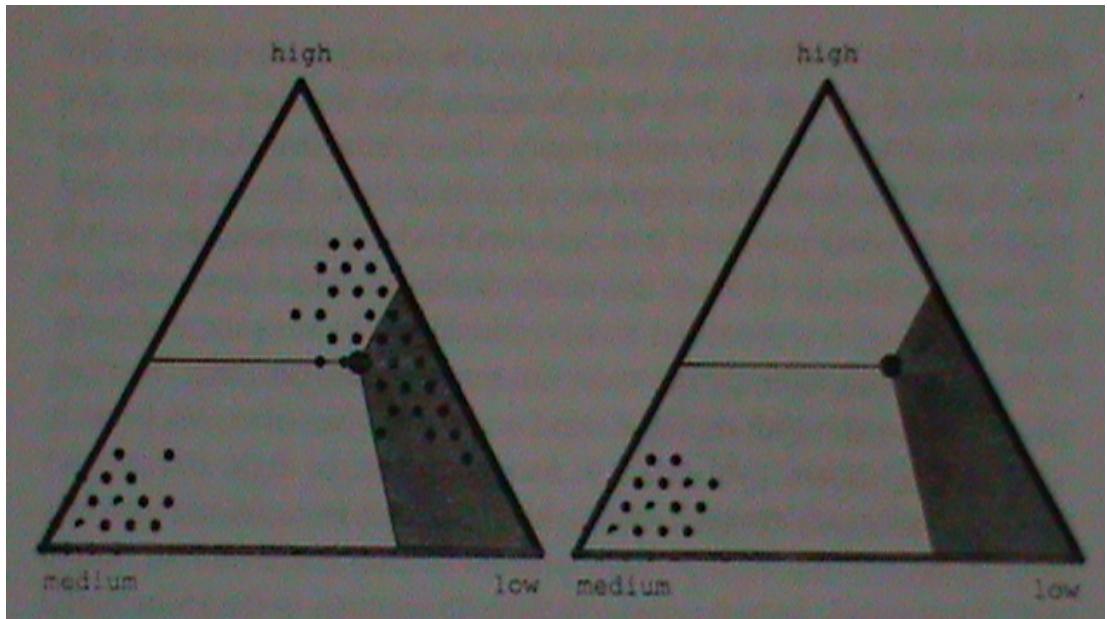


Fig. 4.5

La figura 4.5 cuenta una historia diferente. Con condiciones iniciales al azar, muestra el sistema en el periodo  $t = 150$ . Internamente, los agentes negros se han acercado a la norma igualitaria, mientras que los blancos están aun en el estado fraccionado. Sin embargo, algo cercano a la norma igualitaria prevalece entre los blancos y los negros.



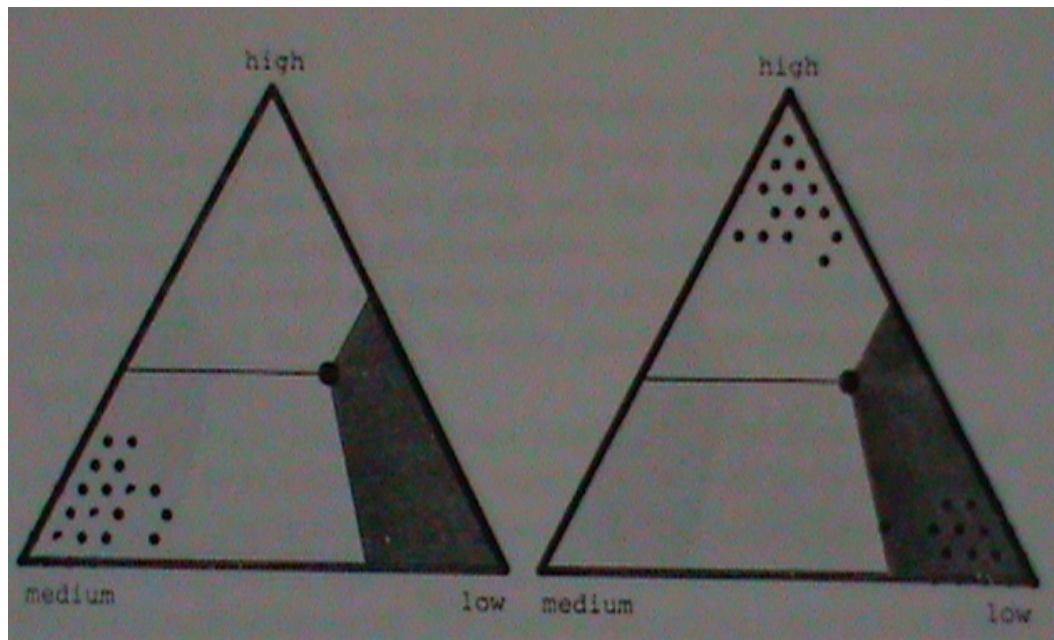


Fig. 4.6

Y otra historia la tenemos en la figura 4.6. En este caso el proceso evoluciona bastante rápido (solo 225 periodos) a un estado en el que la norma igualitaria se presenta dentro de ambos grupos, mientras que una norma discriminatoria rige la dinámica intergrupala. Cuando los agentes se encuentran con otros de su mismo tipo, la mayoría espera que el bien se divida a la mitad. Pero cuando un agente negro se encuentra con uno blanco, el negro actúa agresivamente y el blanco actúa pasivamente. El resultado es que, en promedio, el pago de los agentes negros (70) es más del doble que el de los blancos (30). En otras palabras, se han generado distinciones de clase de manera endógena. Una vez establecidas estas estructuras sociales, pueden persistir por largos periodos de tiempo. La razón es que los blancos han llegado a esperar que los negros serán muy demandantes, por lo que es racional

acceder a esa demanda. Similarmente, los negros esperan que los blancos accedan, por lo que es racional aprovecharse de ello.

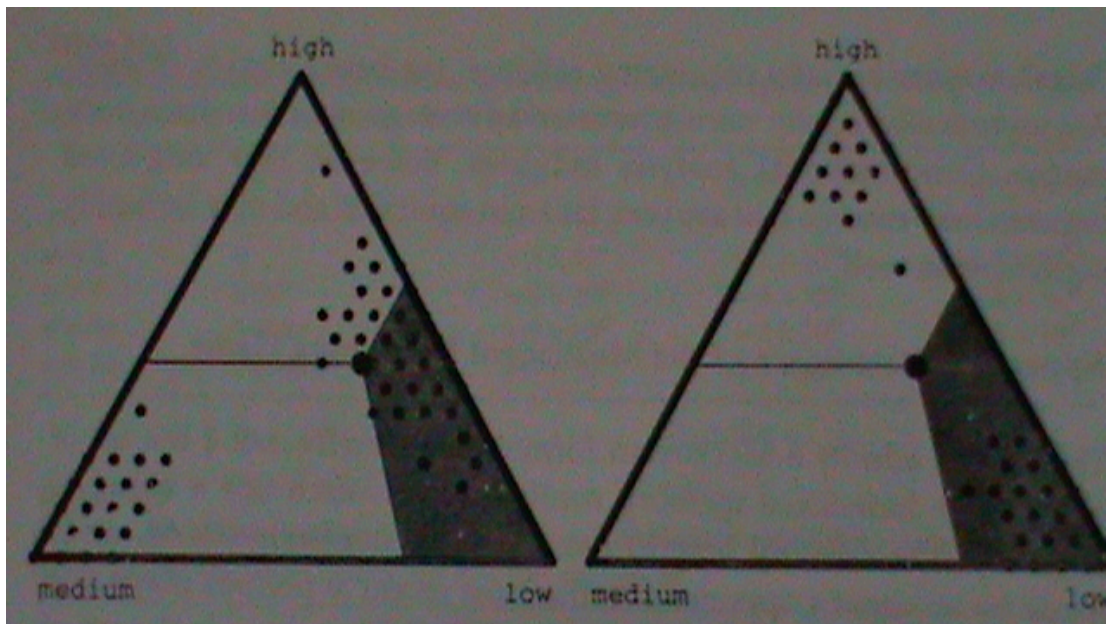


Fig. 4.7

El último caso es muy interesante también. Con condiciones iniciales al azar, la sociedad evoluciona y llega, en el periodo 260 al estado mostrado en la figura 4.7. Como vemos en el simplejo de la derecha, los negros dominan a los blancos. Sin embargo, del simplejo de la izquierda, es claro que la norma igualitaria prevalece dentro de la clase dominante, mientras que los blancos forman una sociedad fraccionada. Esto representa a una clase baja dividida, oprimida por una elite unificada. Esto resulta inquietante por el hecho de que cada individuo está actuando racionalmente, utilizando su mejor respuesta, y aun así el resultado social está lejos de

ser óptimo. Y aunque este régimen no corresponde a ningún equilibrio del juego de negociación, puede persistir por largos periodos de tiempo.

En conclusión, aunque se pueden generar sistemas de clases a través de coerción, hemos visto que algunos órdenes sociales, incluyendo segregación, discriminación y sistemas de clase, también pueden emerger a partir de las interacciones descentralizadas de agentes en donde los accidentes de la historia se refuerzan en el tiempo. En estas dinámicas, que dependen de la trayectoria que se vaya tomando, la sociedad se auto-organiza mediante distinciones que son bastante arbitrarias *a priori*. Etiquetas que en un inicio no tienen importancia, adquieren relevancia para organizar a la sociedad, de modo que emergen clases basadas en dichas etiquetas. Asintóticamente, la norma igualitaria tiene una ventaja sobre las normas discriminatorias. Sin embargo, el análisis computacional nos muestra que podemos encontrar regímenes, lejanos a la igualdad y altamente ineficientes, que se mantengan por un largo periodo de tiempo.

Esto nos habla de la importancia de manejar simulaciones de cualquier tipo, para tener algún contraste con los resultados teóricos.

En este caso, si nos conformamos con lo que nos dice la teoría de procesos estocásticos, tendremos que en ambos casos, agentes sin y con etiqueta, la norma igualitaria es el estado con mayor probabilidad de aparecer en el largo plazo. Sin embargo, al contar con las simulaciones realizadas, nos damos cuenta de que ese largo plazo es humanamente inalcanzable desde ciertas condiciones iniciales.

## Conclusión

La segregación social no es un tema fácil de abordar y mucho menos de abarcar completamente. En estas páginas, intentamos estudiar ciertos aspectos interesantes, desde un punto de vista matemático, por ejemplo, ¿la segregación necesita medidas externas para surgir?, ¿se puede ser feliz en un estado de segregación?, ¿segregación necesariamente indica desigualdad?

Hasta cierto punto y con algunas restricciones podemos contestar estas preguntas con los modelos que aquí estudiamos. Pero, ¿cuáles serían estas restricciones y cual sería la respuesta que obtuvimos? Veamos un breve resumen de lo que encontramos en cada capítulo.

En los capítulos 1 y 2, debido a la complejidad de las variables que entrarían en acción al momento de hablar sobre las preferencias de los agentes, tuvimos que restringirnos a solo una característica notable, es decir, estamos dando todo el peso de la decisión a una sola etiqueta, lo cual, deja fuera muchas otras situaciones que podrían acelerar o alentar la segregación.

Con esta consideración, pudimos observar que no se necesitó de alguna imposición externa para el alcance de los estados segregados, es decir, los agentes, con sus propias decisiones, llevan a la sociedad a esas configuraciones.

Además, también debido a la simplificación de las variables, es muy fácil para los agentes estar contentos en su vecindario, aún cuando ninguno de ellos busca la segregación de la sociedad. Y por último, esta segregación no representa una diferencia significativa, es decir, es simplemente geográfica.

En el capítulo 3, por el lado de las restricciones, podemos nombrar el hecho de que entre más aumenta la población, el tiempo para alcanzar el equilibrio aumenta también.

En cuanto a resultados, este modelo nos muestra que la segregación si puede llegar a dar pie a distintas clases sociales, ya que en este caso si se habla de ganadores y perdedores. Sin embargo, esta misma situación nos habla del nivel de organización y que pueden llegar a tener los agentes en este modelo, ya que, una vez más sin factores externos, llegan a una configuración óptima, en la que a nadie le puede ir mejor. Esto nos refiere también a la racionalidad que suponemos en los agentes, situación desafortunadamente no tan común en la vida real.

Por lo que respecta al capítulo 4, el problema más fuerte lo encontramos en el tiempo que debe transcurrir para pasar de una configuración inicial a una de equilibrio, ya que en la realidad ninguna persona lograría vivir lo suficiente para llegar a la cantidad de periodos necesarios. Otra situación a considerar es la unicidad del bien a negociar y su importancia. Y, por último, nos encontramos de nuevo con el problema de las etiquetas que diferencian a los agentes, es decir, se repite el problema del capítulo 1.

De nuevo, la segregación surgió como resultante solo de las decisiones de los agentes, sin factores externos. Además, en este modelo la segregación si puede llegar a resultar en desigualdad económica para las dos clases que se presentan.

En conclusión, pudimos observar, a través de distintos modelos, que la segregación puede presentarse sin necesidad de modificaciones externas, ya que tan solo fueron necesarias las interacciones entre los agentes, cada uno buscando mejorar su pago al final de cada periodo.

También debemos destacar la congruencia de los resultados que se presentan al realizar simulaciones, con los resultados que nos da la teoría. Este hecho es muy importante ya que si tan solo observamos la teoría, sabremos que los modelos tienden a alguna configuración en especial, pero no sabríamos el tiempo estimado que transcurre entre el inicio del modelo y el tiempo de llegada de dicha configuración. Pero por otro lado, si tan solo observamos las simulaciones, no tendríamos la seguridad de si dicho modelo siempre tiende a algún estado en particular, ya que estaríamos trabajando con casos particulares en cada ocasión.

Pero al tener ambos resultados podemos afirmar lo siguiente: Por parte de la teoría, podemos estar seguros de que nuestro modelo tiende al equilibrio. Y por parte de la simulación, observamos los alcances de cada modelo, en cuanto a tiempo necesario, capacidad de reacción de los agentes, etc.

## **Bibliografía**

- 1.- Young, H. Peyton, 1998 "Individual Strategy and Social Structure, an evolutionary theory of institutions", Princeton University Press
- 2.- Epstein Joshua M., 2006, "Generative Social Science, Studies in agent-based computational modeling", Princeton University Press.
- 3.- Axtell Robert L. et al. "The Emergence of Classes in a Multi-Agent Bargaining Model", en Social Dynamics 7, 191-212, 2001, Brookings Institution
- 4.- Schelling Thomas C., 1969, "Models of segregation", The RAND Corporation
- 5.- T.S. Lo et al, 2000, "Theory of the evolutionary minority game", Physical review volumen 62 número 3.
- 6.- Zapata Lillo Paloma, 2007, "Economía, política y otros juegos", La prensa de Ciencias.
- 7.- Young Peyton, 1993, "The Evolutions of Conventions", Econometrica.
- 8.- Challet D., 1997, "Emergence of Cooperation and Organization in an Evolutionary Game", Instituto de física teórica, Universidad de Fribourg.

9.- Arthur W. Brian, 1994, "Inductive Reasoning and Bounded Rationality", Amer. Econ. Review (Papers and Proceedings), 84, 406, 1994.

10.- Wärneryd Karl, 1993, "Anarchy, uncertainty, and the emergence of property rights", Economics and politics, volumen 5 número 1.

11.- Johnson N.F. et al, 1999, "Self-organized segregation within an evolutionary population", Phys. Rev. Lett.

12.- Yeung C.H. y Zhang Y.C, 2008, "Minority Games".



## Índice

Introducción _____	2
Cap 1 Modelos lineales y solitario de Schelling _____	5
Cap 2 Procesos de adaptación en comunidades envueltas en algún conflicto ____	27
Cap 3 El juego de la minoría _____	47
Cap 4 Surgimiento de clases sociales inequitativas _____	91
Conclusión _____	107
Bibliografía _____	110