



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO
EN INGENIERÍA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Síntesis Cinemática y Estática de Mecanismos
Planos con Eslabones, Engranajes y Resortes**

Tesis

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA MECÁNICA – DISEÑO MECÁNICO

PRESENTA

CLAUDIO ARTURO DOMÍNGUEZ MIGOYA

TUTOR

DR. FRANCISCO CUENCA JIMÉNEZ



Ciudad Universitaria, México D.F., Diciembre de 2011.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. MARCELO LÓPEZ PARRA

Secretario: Dr. ALEJANDRO RAMÍREZ REIVICH

Vocal: Dr. FRANCISCO CUENCA JIMÉNEZ

1er. Suplente: Dr. VICENTE BORJA RAMÍREZ

2do. Suplente: Dr. JESÚS MANUEL DORADOR GONZÁLEZ

Lugar donde se realizó la tesis:

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

TUTOR DE TESIS:

DR. FRANCISCO CUENCA JIMÉNEZ

FIRMA

A mi familia y amigos

Agradecimientos

Me gustaría expresar mi más sincera admiración y gratitud al Dr. Francisco Cuenca Jiménez por haber encontrado el tiempo y la paciencia para escuchar ideas, además de examinar y pulir la presentación final de la Tesis presente.

Al Dr. Mario Acosta Flores por sus observaciones y sugerencias, las cuales fueron de gran ayuda en este trabajo.

Y al Diseñador Gráfico Yamil Benitez Acosta por su apoyo en la realización de las ilustraciones presentes.

Resumen

En los últimos años en el Centro de Diseño Mecánico e Investigación Tecnológica (CDMIT) se ha formado un grupo de investigación dedicado al estudio y desarrollo de prótesis inteligentes de extremidades humanas dirigido por el Dr. Jesús Manuel Dorador González. Una de las necesidades que se ha presentado en las prótesis accionadas por motores, es la de contar con actuadores pequeños y como consecuencia de poco peso. Sin embargo el torque producido por los actuadores es bajo. Es por ello que es necesario desarrollar un sistema, el cual sea capaz de multiplicar dicho torque para soportar una carga establecida de una tarea cotidiana. Este problema motivó la realización del presente trabajo.

Sistemas multiplicadores de torque, suelen estar constituidos de eslabones, engranes, poleas, bandas y cadenas. Se desea diseñar un dispositivo integrado principalmente por eslabones y engranes asistidos por resortes, capaces de incrementar el torque de entrada. Existen métodos de síntesis adecuados para eslabones y engranes. La investigación en la síntesis de eslabonamientos se ha enfocado en el diseño de estos para movimientos prescritos. En muchas aplicaciones, además de estos movimientos la interacción entre el mecanismo y su entorno debe ser considerada en este proceso. Para el caso de los engranes, la síntesis se ha enfocado a determinar radios, número de dientes, interferencia y razón de contacto en función de los movimientos de entrada y salida.

El enfoque de esta tesis es determinar las variables de diseño, las cuales son las dimensiones longitudinales de los eslabones, los radios de los engranes y las constantes elásticas de los resortes que integran a un mecanismo de cinco barras con engranes de un grado de libertad, para ser implementado como un dispositivo de asistencia que permita multiplicar fuerza, el cual pueda ser utilizado por ejemplo, en la articulación en un brazo protésico de una persona y con esto llevar a cabo actividades cotidianas como: verter una jarra, cortar con cuchillo, levantarse de una silla, cargar un envase de agua, entre otros [1], y ejecutar la tarea con menos fuerza en los actuadores. La razón de trabajar en este tipo de mecanismos se sustenta en las características que tienen, donde los engranes presentes en él y asistidos por resortes generan una mayor capacidad de carga.

Los métodos de síntesis desarrollados en este trabajo son la síntesis cinemática y la síntesis estática. En la síntesis cinemática se emplean ecuaciones de diseño basadas en la condición de longitud constante para representar los eslabones, matrices de desplazamiento para relacionar las rotaciones y traslaciones que experimenta el mecanismo y ecuaciones de trenes de engranes planetarios para establecer la relación en las rotaciones entre engranes y eslabones.

Mientras que en la síntesis estática se emplean ecuaciones de diseño que relacionan el torque de entrada del motor, fuerzas de resortes lineales y torsionales, fuerzas y momentos producidos por las cargas aplicadas al sistema, en términos de las dimensiones del eslabonamiento y radios de engranes, todo lo anterior utilizando el principio de trabajo virtual.

Contenido

Resumen	5
1 Antecedentes	
1.1 Objetivo	15
1.2 Introducción	15
2 Ecuaciones de Diseño Cinemático	
2.1 Introducción	18
2.2 Ecuaciones de Diseño de Eslabones	18
2.2.1 Matrices de Desplazamiento de Cuerpo Rígido	18
2.2.2 Ecuaciones de Longitud Constante –Manivela de Dos Juntas	20
2.3 Ecuaciones de Diseño de Engranés	21
2.4 Ecuaciones de Radios de Engranés	24
3 Ecuaciones de Diseño Estático	
3.1 Introducción	26
3.2 Principio de Trabajo Virtual	27
3.2.1 Desplazamientos Virtuales	28
3.3 Desplazamiento Virtual de los resortes lineales δl_{1j} y δl_{2j}	32
3.4 Desplazamiento Virtual de los resortes torsionales $\delta \beta_{2j}$ y $\delta \beta_{5j}$	35
3.5 Desplazamientos Virtuales del mecanismo de 5 barras engranado	41

4 Aplicación de las Ecuaciones de Diseño

4.1 Diseño Cinemático	48
4.1.1 Puntos de Precisión	49
4.1.2 Ecuaciones de Diseño	50
4.1.3 Radios de Engranés	54
4.2 Diseño Estático	58
4.2.1 Ecuaciones de Diseño	58
4.2.2 Soluciones	61
5 Conclusiones	66
Referencias	68

Lista de tablas

Tabla 4. 1 Valores sugeridos para los ángulos θ_{3j} y las razones de los engranes	39
Tabla 4.2 Los puntos \mathbf{a}_1 , \mathbf{b}_1 y \mathbf{c}_1 establecidos en la síntesis con números complejos para cada una de las propuestas de diseño	40

Lista de Figuras

1.1 Mecanismo de cinco barras con engranes con un periodo de detención.	2
1.2 Extremidad en donde se implementará el mecanismo	3
2.1 Cuerpo rígido en movimiento plano	5
2.2 Manivela que satisface la condición de longitud constante para el movimiento	6
2.3 Engranes T_{k-1} y T_{k+1} , mostrando su posición $\phi_{(k-1)}$ y $\phi_{(k+1)}$ respectivamente y el eslabón k con su posición ϕ_k	8
2.4 Tren Externo y Tren Interno	9
2.5 Engranes T_{k-1} y T_{k+1} , mostrando su velocidad angular ω_{k-1} y ω_{k+1} respectivamente y el eslabón k con su velocidad ω_k	10
3.1 Extremidad en donde se implementará el mecanismo	12
3.2 Fuerzas y momentos aplicados en el mecanismo, se tienen los vectores que representan los eslabonamientos y resortes lineales, los puntos en donde son conectados estos a tierra y los ensambles de los resortes torsionales.	18
3.3 Longitudes de las barras y ángulos presentes en los eslabones del mecanismo	19
3.4 Los cuerpos i y j conectados por un resorte y los puntos en donde se encuentra empotrado este en cada uno de los cuerpos	22
3.5 La fuerza generada por el resorte en cada uno de los cuerpos i y j	19
3.6 Los cuerpos i y j ensamblados por una junta y conectados por medio de un resorte torsional.	25

3.7	Cuerpos I y J establecidos en su primera posición y su j -ésima posición	22
3.8	Dos cuerpos I y J definidos, tanto en su primera posición como en su j -ésima posición en la cual la posición del cuerpo I no cambia y se encuentra en la horizontal	23
3.9	El mecanismo presente en su primera configuración y las juntas establecidas en donde se encuentran ensamblados los resortes torsionales.	24
3.10	Las posiciones del eslabón 2 en donde se encuentra ensamblado el primer resorte torsional.	24
3.11	Las posiciones del eslabón 5 en donde se encuentra ensamblado el segundo resorte torsional.	28
3.12	Vector de posición para el punto p_j con respecto al punto de referencia o	30
3.13	Puntos geométricos del mecanismo y vectores que lo conforman.	31
4.1	El mecanismo de 5 barras con engranes tanto en su primera, así como su j -ésima posición y el punto en donde se encuentra localizado el origen del sistema	34
4.2	Ángulos presentes entre los engranes A y B_1 , así como el eslabón x_2	37
4.3	Ángulos presentes entre los engranes B_2 y C_1 , así como el eslabón x_3	37
4.4	Ángulos presentes entre los engranes C_2 y D , así como el eslabón x_4	37
4.5	Gráfica del mecanismo resuelto por medio de la cinemática para la propuesta 1 . .	41
4.6	Gráfica del mecanismo resuelto por medio de la cinemática para la propuesta 2 . .	41
4.7	Gráfica del mecanismo resuelto por medio de la cinemática para la propuesta 3 . .	42
4.8	Gráfica del mecanismo resuelto por medio de la cinemática para la propuesta 4 . .	42
4.9	Gráfica del mecanismo resuelto por medio de la estática para la propuesta 1	47
4.10	Gráfica del mecanismo resuelto por medio de la estática para la propuesta 2 . . .	48

- 4.11 Gráfica del mecanismo resuelto por medio de la estática para la propuesta 3 . . 49
- 4.12 Gráfica del mecanismo resuelto por medio de la estática para la propuesta 4 . . 50

Nomenclatura

$\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0$ Pivotes fijos del mecanismo.

$\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1$ Pivotes móviles del mecanismo.

$\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j$ y \mathbf{c}_j Pivotes móviles del mecanismo en su j -ésima posición.

θ_{i1} ángulo que define la primera posición del i -ésimo eslabón.

θ_{ij} ángulo que define la j -ésima posición del i -ésimo eslabón.

$T_A, T_{B1}, T_{B2}, T_{C1}, T_{C2}$ y T_D Número de los dientes en los engranes

r_{e2}, r_{e3} y r_{e4} razones entre los dientes de los engranes del mecanismo.

θ_B , y θ_C ángulo girado de los engranes B y C a partiendo de su posición inicial a su j -ésima posición.

$[\mathbf{R}_{\theta_{ij}}]$ Transformación de rotación del i -ésimo eslabón.

$[\mathbf{A}_{1j}]$, $[\mathbf{B}_{1j}]$ y $[\mathbf{C}_{1j}]$ Matrices de desplazamiento plano.

a_{0x}, a_{0y}, b_{0x} y b_{0y} Componentes de los pivotes fijos del mecanismo.

$a_{1x}, a_{1y}, c_{1x}, c_{1y}, b_{1x}$ y b_{1y} Componentes de los pivotes móviles del mecanismo.

δ Cantidades virtuales.

T_{2j} Torque de entrada aplicado en el eslabón 2.

\mathbf{F}_{n_j} Fuerza externa aplicada al mecanismo en el punto \mathbf{n}_j .

M_{n_j} Momento externo aplicado al mecanismo en el punto \mathbf{n}_j .

$M_{r_{2j}}$ y $M_{r_{5j}}$ Momentos resultantes de los resortes torsionales.

\mathbf{R}_j Vectores de posición para las j -ésimas posiciones con respecto al origen.

\mathbf{r}_j Vectores de posición con respecto a los eslabones.

\mathbf{o} y \mathbf{p} Puntos en donde son conectados a tierra los resortes lineales.

\mathbf{r}_{1j} y \mathbf{r}_{2j} Puntos en donde son conectados al mecanismo los resortes lineales.

\mathbf{R}_{s1j} Vector de posición para el resorte lineal conectado al punto \mathbf{r}_{1j} .

- \mathbf{R}_{s2j} Vector de posición para el resorte lineal conectado al punto \mathbf{r}_{2j} .
- $[\mathbf{E}]$ Matriz antisimétrica.
- θ_{3r}, θ_{4r} y θ_{4c} ángulos que definen los puntos en los eslabones en donde son conectados los resortes lineales y aplicada la fuerza externa.
- \mathbf{p}_i y \mathbf{p}_j Puntos en los cuerpos i e j en donde es conectado el resorte lineal.
- k Constante elástica del resorte lineal.
- l Longitud final del resorte lineal.
- l_0 Longitud en la cual se encuentra el resorte lineal sin deformar.
- f_s Fuerza generada por el resorte lineal.
- δW Trabajo Virtual del sistema de fuerzas.
- \mathbf{F}_s Fuerza del resorte actuando sobre los cuerpos i e j .
- \mathbf{u} Vector unitario con la dirección de la fuerza f_s .
- δW_{1j} y δW_{2j} Trabajo virtual para los resortes lineales.
- f_{1j} y f_{2j} Fuerzas presentes en los resortes lineales.
- k_3, k_4 Constantes elásticas de los resortes lineales establecidos en el eslabón 3 y eslabón 4 respectivamente.
- l_{1j}, l_{2j} Longitud de los resortes en la j -ésima posición del mecanismo.
- l_{11}, l_{21} Longitud de los resortes en su posición sin deformar.
- k_t Constante elástica del resorte torsional.
- θ_0 Ángulo relativo entre ambos cuerpos en su primera posición.
- θ Ángulo relativo entre ambos cuerpos para su j -ésima posición.
- M_s Momento resultante del resorte torsional.
- θ_{I1} y θ_{J1} Ángulos para la primera posición de dos cuerpos I y J .
- θ_I y θ_J Ángulos para la j -ésima posición de dos cuerpos I y J .
- k_2 y k_5 Constantes elásticas de los resortes torsionales.

β_{2j} y β_{5j} deflexiones angulares de los resortes torsionales.

θ_1 Ángulo establecido con respecto a la horizontal en tierra.

$\theta_{21}^s, \theta_{2j}^s$ son los ángulos relativos para la primera y j-ésima posición del eslabón 2

$\theta_{51}^s, \theta_{5j}^s$ son los ángulos relativos para la primera y j-ésima posición del eslabón 5

\mathbf{G}_j Vector en función de las coordenadas geométricas del mecanismo.

$[\mathbf{J}_j]$ Vector en función de las coordenadas geométricas del mecanismo.

$\delta\boldsymbol{\theta}$ Vector de coordenadas generalizadas.

Capítulo 1 Antecedentes

1.1 Objetivo

Diseñar por medio de la síntesis cinemática y estática un mecanismo integrado con eslabones, engranes y resortes de un grado de libertad, para ser instalado en el codo de una prótesis para antebrazo y este pueda realizar el movimiento de flexión, el cual se presenta en esta articulación. Este sistema debe levantar por medio de la prótesis un envase de agua de 1 ½ litro de capacidad, minimizando el torque del motor que controla el eslabón de entrada del mecanismo.

1.2 Introducción

El uso de mecanismos integrados por engranes es amplio, debido a las características mecánicas que estos poseen. De manera individual los trenes de engranes son usados normalmente para transmitir potencia o torque entre dos o más ejes. Existen una enorme variedad de posibles configuraciones de trenes de engranes para aplicaciones tales como diferenciales y transmisiones para automóviles y helicópteros, motores de turbinas de gas, reductores de máquinas y herramientas, mecanismos de muñecas robóticas. Por otra parte, los mecanismos con eslabones tienen la característica de producir una gran amplitud de movimientos.

Los engranes usados en conjunción con mecanismos de eslabonamientos, forman un sistema de eslabones engranados, heredando las características arriba mencionadas. Existen aplicaciones industriales en los cuales han sido utilizados.

En la Industria química [2], existen problemas de control que requieren el poder mezclar distintas sustancias en procesos por medio de la rotación de una válvula de mezclado, en donde es necesario que la posición de la válvula sea proporcional con relación al logaritmo de la temperatura absoluta que se tiene en cierto tipo de mezcla. Para esto, un generador de función mecánico era utilizado con el fin de controlar la posición de la válvula mencionada.

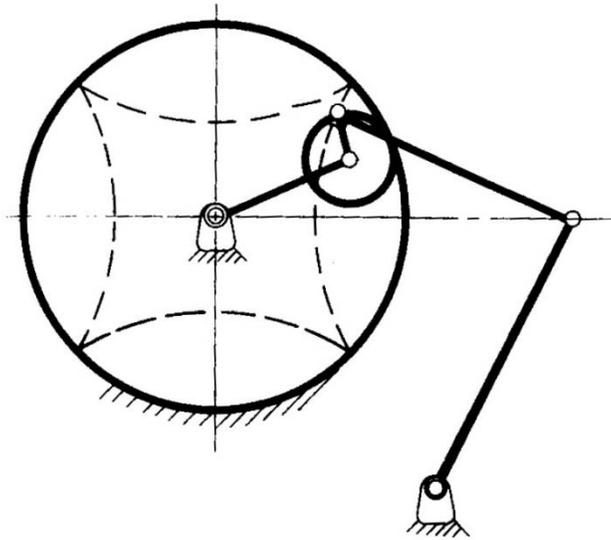


Figura 1.1

En el campo de la instrumentación [3], por lo general es deseable linealizar la escala de la variable de salida para poder tener una lectura más simple. Por ejemplo, la relación que existe entre el condensador de la capacitancia y el dispositivo utilizado para la visualización del movimiento es no lineal.

De lo anterior y conociendo la relación existente entre estas variables, un generador de función con eslabones y engranes puede ser diseñado para linealizar la escala de frecuencia de este sistema.

También existen aplicaciones en donde se requiere pausar por un cierto lapso de tiempo algún movimiento en específico, para esto se utilizan mecanismos con la capacidad de generar detenciones y un ejemplo en donde este tipo de mecanismos se utilizan en la industria tiene lugar en las maquinas empaquetadoras [4]. En este caso puede ser necesario conectar un eje de entrada con un eje de salida, tal que el eje de salida oscila con cierta sincronización y un periodo de detención (*dwell*) prescrito mientras el eje de entrada rota continuamente. Un mecanismo de 5 barras con engranes como el de la figura 1.1 puede ser diseñado para producir el periodo de detención.

Otro caso es el de las máquinas de embobinado de armaduras para motores eléctricos, la bobina del alambre debe ser llevada a través de una trayectoria prescrita en el espacio. El problema de síntesis es diseñar un mecanismo para producir la trayectoria deseada (generación de trayectoria) y los mecanismos con engranes y eslabones son de gran utilidad en estos casos.

Otra aplicación a considerar son mecanismos diseñados para poder conectar un motor eléctrico a una válvula de globo grande. Lo que se presenta en tal situación es un bajo torque inicial del motor, con esto es necesario que al inicio y final del movimiento de la válvula el motor tenga la libertad de operar sin carga. En otras palabras, cuando el actuador se encuentre en una posición extrema el eje del motor pueda girar sin afectar el eje de salida.

El diseñador de mecanismos **Sandor** [5], propuso el diseño de eslabones engranados, sugiriendo que los engranes pueden ser sustituidos por poleas debido a la similitud del movimiento producido. En este sentido, **Krovi** [6], muestra una aplicación más moderna de eslabones engranados, siguiendo la sugerencia de **Sandor** al diseñar un mecanismo integrado por poleas y eslabones, asistido por resortes torsionales para ayudar a minimizar el torque de entrada del motor. Los eslabones utilizados formaban una cadena abierta.

En virtud de las características ya mostradas anteriormente de los mecanismos con eslabones engranados, y del trabajo desarrollado por **Sandor** y **Krovi**, surge la motivación para diseñar un mecanismo de cadena cerrada con eslabones y engranes provisto con resortes lineales y torsionales para minimizar el torque de entrada, que pueda ser integrado en un brazo protésico cuya finalidad es soportar una carga establecida empleando un motor de torque pequeño (4-7 Nm) como se muestra en la figura 1.2.

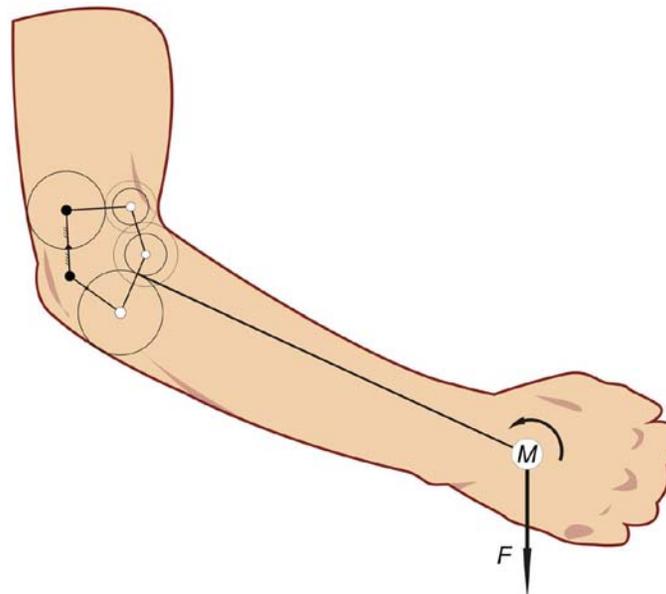


Figura 1.2

Capítulo 2 Ecuaciones de Diseño Cinemático

2.1 Introducción

Para poder diseñar un mecanismo con eslabones y engranes es necesario el uso de dos tipos de ecuaciones. El primer tipo de estas considera la descripción analítica del desplazamiento de un cuerpo rígido, el cual está basado sobre la noción de que todos los puntos en un cuerpo rígido deben mantener sus posiciones relativas originales sin tener en cuenta la nueva orientación del cuerpo, es decir la distancia escalar entre dos puntos arbitrarios cualesquiera en el cuerpo permanecen constantes durante el desplazamiento.

El desplazamiento total de un cuerpo rígido puede siempre ser considerado como la suma de sus componentes básicos: la rotación angular del cuerpo más el desplazamiento lineal de cualquier punto de referencia arbitrario.

El movimiento angular puede ser descrito con un conjunto de rotaciones alrededor de un conjunto derecho de ejes cartesianos. Con esto, las matrices de desplazamiento son utilizadas para poder llevar a cabo lo antes establecido.

Se sabe que el mecanismo debe cumplir con distintas configuraciones sucesivas a partir de una configuración original. Con esto se tienen las ecuaciones de longitud constante, las cuales a partir de la configuración original restringen las longitudes de los eslabones presentes en el mecanismo durante su movimiento.

El otro tipo de ecuaciones desarrolla una relación matemática para expresar las rotaciones absolutas entre los eslabones y engranes del mecanismo. Es decir, al tener una rotación en el eslabón de entrada, esta produce rotaciones tanto en eslabones como en engranes del mecanismo y queda establecida la rotación de estos en función de la rotación de entrada.

2.2 Ecuaciones de Diseño de Eslabones

2.2.1 Matrices de Desplazamiento de Cuerpo Rígido

A partir del movimiento de un cuerpo rígido en el plano como se muestra en la figura 2.1, se pueden escribir sus ecuaciones de posición inicial y final. La ecuación de posición absoluta de la posición 1 es:

$$\begin{aligned} Q_1 &= S_1 + R_1 \\ &= S_1 + [R_{\theta_1}]r_1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{r}_1 = [x_1, y_1]^T$$

$$[\mathbf{R}_{\theta_1}] = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 \end{bmatrix}$$

La ecuación de posición absoluta de la posición 2 es:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_2 &= \mathbf{S}_2 + \mathbf{R}_2 \\ &= \mathbf{S}_2 + [\mathbf{R}_{\theta_2}]\mathbf{r}_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

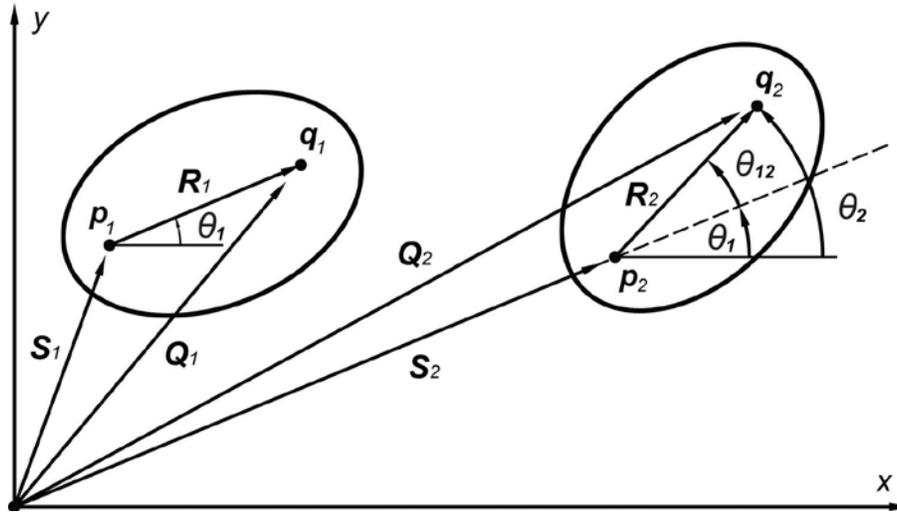


Figura 2.1

Estableciendo la posición 2 en función de la posición 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_2 &= \mathbf{S}_2 + \mathbf{R}_2 \\ &= \mathbf{S}_2 + [\mathbf{R}_{\theta_{12}}]\mathbf{R}_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_2 &= (\mathbf{q}_2 - \mathbf{0}) \\ \mathbf{S}_2 &= (\mathbf{p}_2 - \mathbf{0}) \\ \mathbf{R}_1 &= (\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_1) \end{aligned}$$

Escribiendo la ecuación 2.3 en función de los puntos:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_2 &= \mathbf{S}_2 + [\mathbf{R}_{\theta_{12}}]\mathbf{R}_1 \\ (\mathbf{q}_2 - \mathbf{0}) &= (\mathbf{p}_2 - \mathbf{0}) + [\mathbf{R}_{\theta_{12}}](\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_1) \\ \mathbf{q}_2 &= [\mathbf{R}_{\theta_{12}}](\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_1) + \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_2 &= [\mathbf{R}_{\theta_{12}}]\mathbf{q}_1 + (\mathbf{p}_2 - [\mathbf{R}_{\theta_{12}}]\mathbf{p}_1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

La ecuación 2.4 representa la posición relativa del cuerpo 2 respecto al cuerpo 1. En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{\theta_{12}}] & (\mathbf{p}_2 - [\mathbf{R}_{\theta_{12}}]\mathbf{p}_1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$(\mathbf{q}_2) = [\mathbf{D}_{12}](\mathbf{q}_1) \quad (2.6)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_{2x} \\ \mathbf{q}_{2y} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_{12} & -s\theta_{12} & \mathbf{p}_{2x} - (c\theta_{12}\mathbf{p}_{1x} - s\theta_{12}\mathbf{p}_{1y}) \\ s\theta_{12} & c\theta_{12} & \mathbf{p}_{2y} - (s\theta_{12}\mathbf{p}_{1x} + c\theta_{12}\mathbf{p}_{1y}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{1x} \\ \mathbf{q}_{1y} \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz $[\mathbf{D}_{12}]$ es de 3 x 3 y es llamada **matriz de desplazamiento plano** [7].

2.2.2 Ecuaciones de Longitud Constante –Manivela de Dos Juntas

Estas ecuaciones se basan en que cada una de las manivelas debe satisfacer la condición de longitud constante para el movimiento.

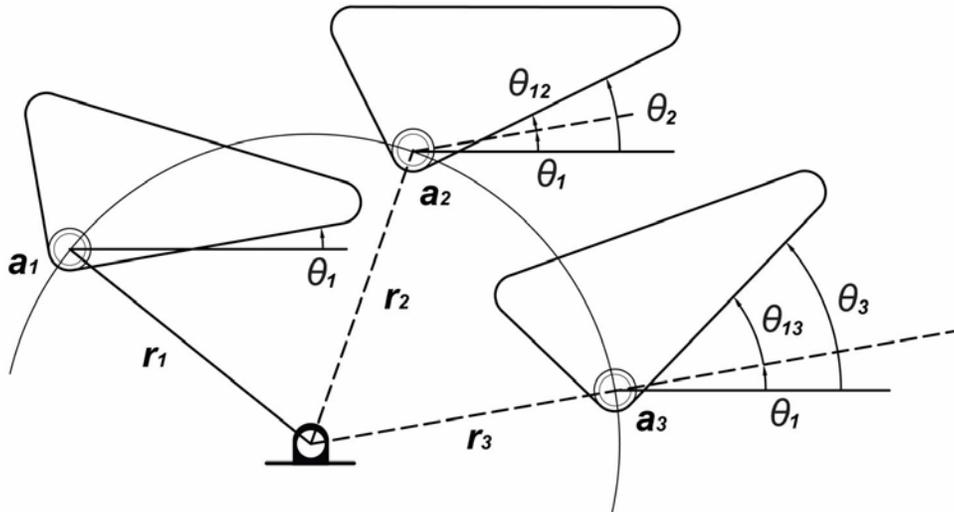


Figura 2.2

Para la figura 2.2 se tiene:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_2\| &= \|\mathbf{r}_1\| \\ \|\mathbf{r}_3\| &= \|\mathbf{r}_1\| \\ &\dots\dots \\ \|\mathbf{r}_j\| &= \|\mathbf{r}_1\| \quad j = 2,3, \dots, n \end{aligned} \quad (2.7)$$

Por otro lado, la norma se define matricialmente como:

$$\|\mathbf{r}\| = (\mathbf{r}^T \mathbf{r})^{1/2}$$

Donde:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [x, y, z]^T$$

$$\mathbf{r}^T = [x, y, z]$$

Por lo tanto, sustituyendo en la ecuación 2.7:

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_j^T \mathbf{r}_j)^{1/2} &= (\mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_1)^{1/2} \\ \mathbf{r}_j^T \mathbf{r}_j &= \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

En función de los puntos:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_j &= (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_0) \\ \mathbf{r}_1 &= (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación 2.8:

$$(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_0)^T (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_0) = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0)^T (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) \quad j = 2, 3, \dots, n \quad (2.9)$$

La ecuación 2.9 es la ecuación de diseño que será utilizada para dimensionar las longitudes de los eslabones en el mecanismo de lazo cerrado.

2.3 Ecuaciones de Diseño de Engranés

De la teoría de trenes de engranes planetarios [8], se sabe:

$$\frac{\omega_{LA}}{\omega_{FA}} = \frac{\omega_L - \omega_A}{\omega_F - \omega_A} = \frac{\text{Producto del número de dientes de los engranes impulsores}}{\text{Producto del número de dientes de los engranes impulsados}}$$

Donde:

ω_{LA} velocidad angular del último engrane relativo al brazo

ω_{FA} velocidad angular del primer engrane relativo al brazo

ω_L velocidad angular absoluta del último engrane

ω_F velocidad angular absoluta del primer engrane

ω_A velocidad angular absoluta del brazo

Aplicando la ecuación anterior a la figura 2.3, se tiene:

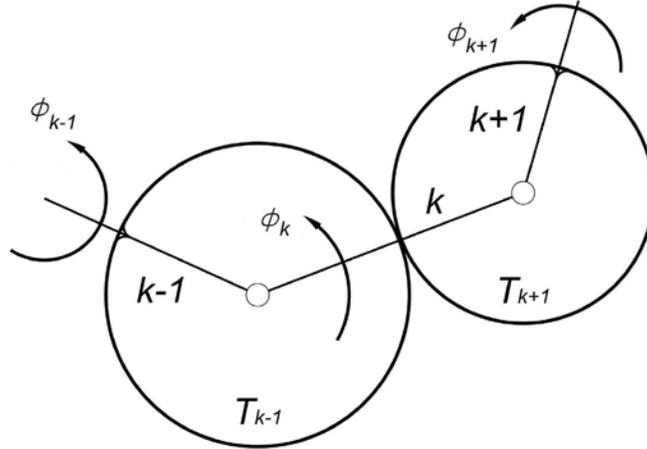


Figura 2.3

$$\frac{\omega_{(k+1)} - \omega_k}{\omega_{(k-1)} - \omega_k} = -\frac{T_{k-1}}{T_{k+1}}$$

$$\omega_{(k+1)} - \omega_k = -\frac{T_{k-1}}{T_{k+1}} (\omega_{(k-1)} - \omega_k)$$

Donde T = número de dientes de engranes. El signo negativo, es debido al giro contrario de engranes. También:

$$\frac{d\phi_{(k+1)}}{dt} - \frac{d\phi_k}{dt} = -\frac{T_{k-1}}{T_{k+1}} \left(\frac{d\phi_{(k-1)}}{dt} - \frac{d\phi_k}{dt} \right)$$

Multiplicando por dt para obtener los desplazamientos angulares:

$$d\phi_{(k+1)} - d\phi_k = -\frac{T_{k-1}}{T_{k+1}} (d\phi_{(k-1)} - d\phi_k)$$

Integrando para obtener posiciones angulares:

$$\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi_{(k+1)} - \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi_k = -\frac{T_{k-1}}{T_{k+1}} \left(\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi_{(k-1)} - \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi_k \right)$$

$$[\phi_{(k+1)} - \phi_{0(k+1)}] - [\phi_k - \phi_{0k}] = -\frac{T_{k-1}}{T_{k+1}} ([\phi_{(k-1)} - \phi_{0(k-1)}] - [\phi_k - \phi_{0k}])$$

$$\Delta\phi_{j0(k+1)} - \Delta\phi_{j0(k)} = -\frac{T_{k-1}}{T_{k+1}} (\Delta\phi_{j0(k-1)} - \Delta\phi_{j0(k)})$$

Sea el incremento $\Delta\phi_{j0}$ de ϕ a partir de la posición inicial 0 a la j -ésima posición ser denotado por ϕ_j , se tiene:

$$\phi_{j(k+1)} - \phi_{jk} = -\frac{T_{k-1}}{T_{k+1}} (\phi_{j(k-1)} - \phi_{jk}) \quad (2.10)$$

También:

$$\frac{\phi_{j(k+1)} - \phi_{jk}}{\phi_{j(k-1)} - \phi_{jk}} = \pm \frac{T_{k-1}}{T_{k+1}} \quad (2.11)$$

Donde los signos \pm indican si el tren es externo (giro signo negativo) o si el tren es interno (giro signo positivo), figura 2.4.

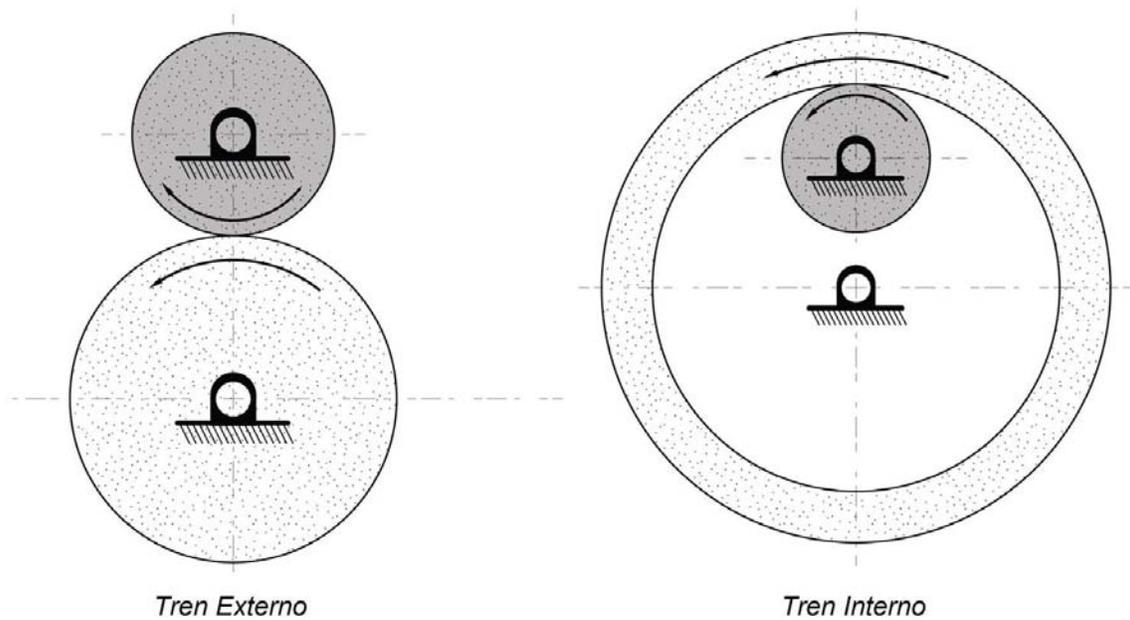


Figura 2.4

Además:

ϕ_{jk} es el ángulo girado del k -ésimo eslabón, a partir de su posición inicial a su j -ésima posición.

$\phi_{j(k+1)}$ es el ángulo girado del eslabón (k+1), a partir de su posición inicial a su j -ésima posición.

$\phi_{j(k-1)}$ es el ángulo girado del eslabón (k-1), a partir de su posición inicial a su j -ésima posición.

Despejando $\phi_{j(k+1)}$ a partir de la ecuación 2.11, se tiene finalmente:

$$\phi_{j(k+1)} = \phi_{jk} + (\phi_{jk} - \phi_{j(k-1)}) \frac{T_{k-1}}{T_{k+1}} \quad (2.12)$$

La ecuación 2.12 es la ecuación que establece el movimiento entre eslabones y engranes.

2.4 Ecuaciones de Radios de Engranes

Una vez conocidos los puntos fijos y móviles del mecanismo, se procede a obtener los radios de los engranes a partir de las razones de los mismos y de la longitud de los eslabones.

Para las razones de engranes, se tiene la ley fundamental del engranaje [8], la cual expresa que la razón de velocidad angular entre elementos de una transmisión de engranes debe permanecer constante en toda la conexión. Esta razón de velocidad equivale a la razón de radio del engrane de entrada al del engrane de salida. Para la figura 2.1, se tiene:

$$r_e = \frac{\omega_{k+1}}{\omega_{k-1}} = \frac{r_{k-1}}{r_{k+1}} \quad (2.13)$$

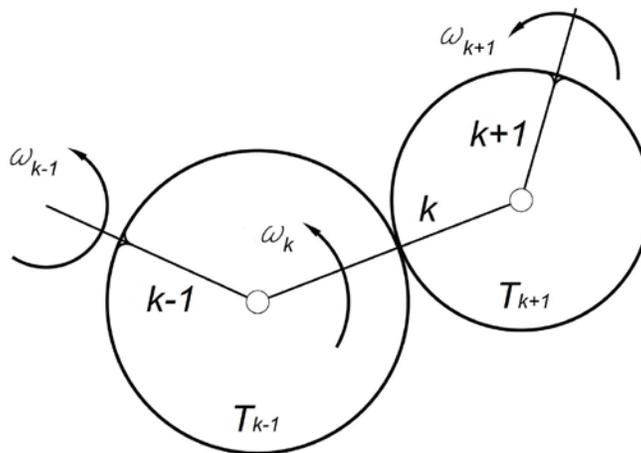


Figura 2.5

En donde:

$$\begin{aligned} r_{k+1} & \text{ radio del engrane } k + 1 \\ r_{k-1} & \text{ radio del engrane } k - 1 \end{aligned}$$

A partir de la figura 2.5, la longitud del eslabón k debe ser igual a la suma de los radios r_{k-1} y r_{k+1} de paso de los engranes T_{k-1} y T_{k+1} , y utilizando la ecuación 2.13 se tiene:

$$r_{k-1} + r_{k+1} = \|k\| \quad (2.14)$$

$$\frac{r_{k-1}}{r_{k+1}} = r_e \quad (2.15)$$

Con esto es posible encontrar los radios r_{k-1} y r_{k+1} de cada uno de los engranes.

Capítulo 3 Ecuaciones de Diseño Estático

3.1 Introducción

Los brazos protésicos realizan múltiples tareas, algunas de ellas involucran manipular objetos que ejercen sobre el brazo grandes cargas. Para poder generar las fuerzas que soporten dichas cargas, se necesitan de motores grandes que generen gran par. Esto tiene como consecuencia un aumento en el peso de los motores, aumentando de esa manera el peso del brazo y resultando una prótesis incomoda para el usuario.

Para no aumentar el peso debido al tamaño del motor, se requiere diseñar una transmisión que incremente el torque en motores pequeños, los cuales se encuentran en el orden de 4-7 Nm [1]. Mecanismos que funcionen como transmisiones pueden estar formados por: trenes de engranes ordinarios, trenes de engranes planetarios, arreglo de bandas y poleas, arreglo de cadenas y catarinas, arreglo de eslabones, etc. Se sabe que los trenes planetarios son arreglos compactos y de gran capacidad de reducción. Estas características son debidas a que sus engranes y eslabones se encuentran en movimiento.

Tomando en cuenta esta característica de movimiento, se desea explorar el diseño de una transmisión (figura 3.1), constituida por un mecanismo de lazo cerrado formado por eslabones y engranes que se asemejan a los trenes planetarios. La transmisión contará además con elementos de fuerzas, representada por resortes lineales y torsionales que ayudarán a minimizar el torque de entrada.

En el capítulo anterior se establecieron ecuaciones de diseño cinemático para la posición del mecanismo. En este capítulo se necesita establecer ecuaciones de diseño estático para tomar en cuenta las cargas externas que son aplicadas.

Un método, el cual es adecuado para encontrar tales ecuaciones haciendo uso del principio del trabajo virtual es el establecido por **Huang y Roth** [9], el cual permite escribir ecuaciones de diseño que involucran fuerzas y momentos. En este método se combinan dos procesos independientes, la síntesis cinemática y la síntesis estática. El siguiente desarrollo muestra la aplicación de este método al mecanismo de eslabones, engranes y resortes para obtener las ecuaciones de diseño estático.

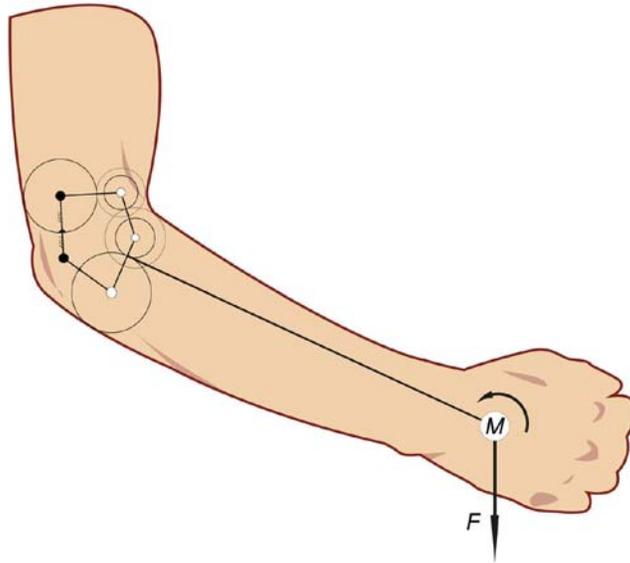


Figura 3.1

3.2 Principio de Trabajo Virtual

A diferencia de la mecánica Newtoniana, el principio del trabajo virtual [10], no requiere de considerar las fuerzas de restricción y se basa solo en cantidades escalares de trabajo para definir tales ecuaciones. Puede ser usado para obtener un mínimo de ecuaciones de movimiento en los sistemas de multicuerpos mediante la eliminación de las fuerzas de restricción. En el trabajo virtual se utilizan conceptos tales como el desplazamiento virtual y también las llamadas fuerzas generalizadas que serán usadas para formular las ecuaciones en donde se encuentran involucrados elementos que tienen la capacidad de generar fuerza, tales como los resortes.

Los desplazamientos virtuales se definen como un desplazamiento infinitesimal, el cual es consistente con las restricciones cinemáticas en el sistema que se estudia. Estos desplazamientos pueden considerarse imaginarios porque ocurren en un tiempo el cual no presenta variaciones. En cuanto al concepto de fuerzas generalizadas, se hacen presentes en la ecuación de trabajo virtual atribuidas a las fuerzas y momentos que actúan en el sistema.

En la figura 3.2 se muestran las fuerzas y momentos aplicados en el mecanismo, los vectores que definen a cada uno de sus eslabonamientos y resortes lineales, los puntos en donde son conectados estos a tierra, así como el lugar en donde se encuentran ensamblados los resortes torsionales. Suponiendo que los eslabones son rígidos y la

fricción entre ellos se puede despreciar, el trabajo virtual asociado con el sistema engranado es el siguiente [10]:

$$\begin{aligned} \delta W_j = & \mathbf{F}_{nj}^T \delta \mathbf{R}_{nj} - f_{1j} \delta l_{1j} - f_{2j} \delta l_{2j} + T_{2j} \delta \theta_{2j} \\ & + M_{nj} \delta \theta_{4j} - M_{2j} \delta \beta_{2j} - M_{5j} \delta \beta_{5j} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Donde el símbolo δ denota las cantidades virtuales y las \mathbf{R}_j los vectores de posición para las j -ésimas posiciones con respecto al origen.

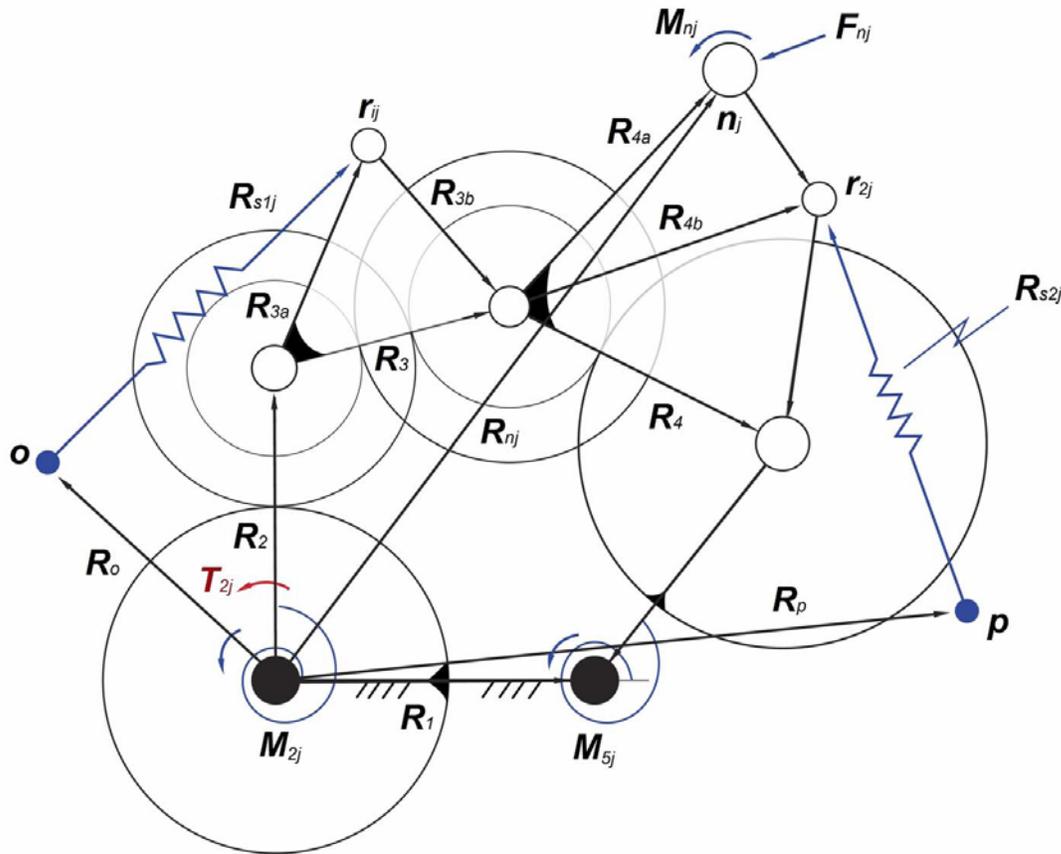


Figura 3.2

3.2.1 Desplazamientos Virtuales

Desplazamiento Virtual $\delta \mathbf{R}_{nj}$

A partir de la figura 3.2, se observa que la fuerza \mathbf{F}_{nj} se encuentra aplicada en el punto n_j , cuyo vector de posición se define como:

$$\mathbf{R}_{nj} = \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_{4a} \quad (3.2)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_2 &= [\mathbf{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_2 &= [x_2, 0]^T \\
 \mathbf{R}_3 &= [\mathbf{R}_{\theta_3}] \mathbf{r}_3 & \mathbf{r}_3 &= [x_3, 0]^T \\
 \mathbf{R}_{4a} &= [\mathbf{R}_{\theta_{4a}}] \mathbf{r}_{4a} & \mathbf{r}_{4a} &= [x_{4a}, 0]^T \\
 [\mathbf{R}_{\theta_j}] &= \begin{bmatrix} c\theta_j & -s\theta_j \\ s\theta_j & c\theta_j \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

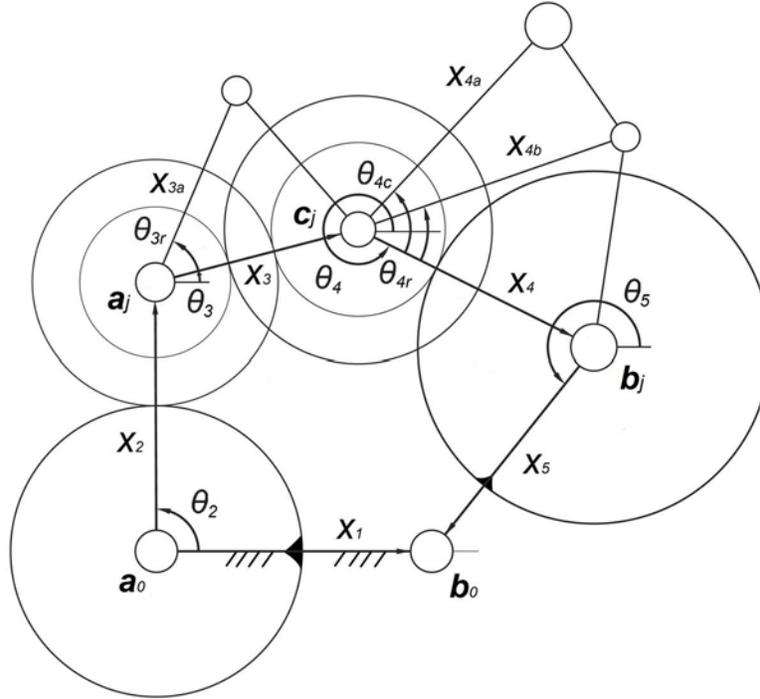


Figura 3.3

En la figura 3.3 se tienen las longitudes de las barras y los ángulos presentes en los eslabones. La ecuación de desplazamiento virtual [10], para la ecuación 3.2 se define como:

$$\delta \mathbf{R}_{nj} = \delta \mathbf{R}_2 + \delta \mathbf{R}_3 + \delta \mathbf{R}_{4a} \quad (3.3)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{R}_2 &= \delta [\mathbf{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}_2 \\
 \delta \mathbf{R}_3 &= \delta [\mathbf{R}_{\theta_3}] \mathbf{r}_3 \\
 \delta \mathbf{R}_{4a} &= \delta [\mathbf{R}_{\theta_{4a}}] \mathbf{r}_{4a}
 \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
 \delta [\mathbf{R}_{\theta_j}] &= \frac{\partial [\mathbf{R}_{\theta_j}]}{\partial \theta_j} \delta \theta_j \\
 \frac{\partial [\mathbf{R}_{\theta_j}]}{\partial \theta_j} &= \begin{bmatrix} -s\theta_j & -c\theta_j \\ c\theta_j & -s\theta_j \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Por otra parte, se define la matriz antisimétrica $[E]$ como:

$$[E] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Así:

$$\frac{\partial [\mathbf{R}_{\theta_j}]}{\partial \theta_j} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_j & -s\theta_j \\ s\theta_j & c\theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s\theta_j & -c\theta_j \\ c\theta_j & -s\theta_j \end{bmatrix} = [E] [\mathbf{R}_{\theta_j}]$$

$$\delta [\mathbf{R}_{\theta_j}] = \frac{\partial [\mathbf{R}_{\theta_j}]}{\partial \theta_j} \delta \theta_j = [E] [\mathbf{R}_{\theta_j}] \delta \theta_j$$

Sustituyendo en la ecuación 3.3, se tiene:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_{nj} &= [E][\mathbf{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}_2 \delta \theta_2 + [E][\mathbf{R}_{\theta_3}] \mathbf{r}_3 \delta \theta_3 + [E][\mathbf{R}_{\theta_{4a}}] \mathbf{r}_{4a} \delta \theta_{4a} \\ &= [E]([\mathbf{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}_2 \delta \theta_2 + [\mathbf{R}_{\theta_3}] \mathbf{r}_3 \delta \theta_3 + [\mathbf{R}_{\theta_{4a}}] \mathbf{r}_{4a} \delta \theta_{4a}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

A continuación se define el desplazamiento $\delta \theta_{4a}$ en función de $\delta \theta_4$. De la figura 3.3 se tiene:

$$\theta_{4a} = \theta_4 + \theta_{4c}$$

Al obtener el desplazamiento virtual se llega a:

$$\begin{aligned} \delta \theta_{4a} &= \delta \theta_4 + \delta \theta_{4c} \\ \delta \theta_{4a} &= \delta \theta_4 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Reescribiendo la ecuación 3.4 y usando la ecuación 3.5, se tiene:

$$\delta \mathbf{R}_{nj} = [E]([\mathbf{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}_2 \delta \theta_2 + [\mathbf{R}_{\theta_3}] \mathbf{r}_3 \delta \theta_3 + [\mathbf{R}_{\theta_{4a}}] \mathbf{r}_{4a} \delta \theta_4) \quad (3.6)$$

Con la ecuación 3.6 queda definido el desplazamiento $\delta \mathbf{R}_{nj}$.

Los vectores \mathbf{R}_{s1j} , \mathbf{R}_{s2j} y sus desplazamientos virtuales serán utilizados en la definición de trabajo virtual para los resortes lineales.

Desplazamiento Virtual $\delta \mathbf{R}_{s1j}$

Se tiene la ecuación vectorial que define la posición relativa para el primer resorte:

$$\mathbf{R}_{s1j} = \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_{3a} - \mathbf{R}_o \quad (3.7)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_o &= [x_o, y_o]^T \\ \mathbf{R}_2 &= [\mathbf{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_2 &= [x_2, 0]^T \\ \mathbf{R}_{3a} &= [\mathbf{R}_{\theta_{3a}}] \mathbf{r}_{3a} & \mathbf{r}_{3a} &= [x_{3a}, 0]^T \end{aligned}$$

La ecuación de desplazamiento virtual a partir de la ecuación 3.7 es:

$$\delta \mathbf{R}_{s1j} = \delta \mathbf{R}_2 + \delta \mathbf{R}_{3a} - \delta \mathbf{R}_o \quad (3.8)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_o &= \mathbf{0} \\ \delta \mathbf{R}_2 &= \delta [\mathbf{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}_2 \\ \delta \mathbf{R}_{3a} &= \delta [\mathbf{R}_{\theta_{3a}}] \mathbf{r}_{3a} \end{aligned}$$

Sustituyendo los desplazamientos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_{s1j} &= \delta [\mathbf{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}_2 \delta \theta_2 + \delta [\mathbf{R}_{\theta_{3a}}] \mathbf{r}_{3a} \delta \theta_{3a} \\ &= [\mathbf{E}] ([\mathbf{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}_2 \delta \theta_2 + [\mathbf{R}_{\theta_{3a}}] \mathbf{r}_{3a} \delta \theta_{3a}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

De la figura 3.3, se tiene:

$$\theta_{3a} = \theta_3 + \theta_{3r}$$

Obteniendo el desplazamiento virtual de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \delta \theta_{3a} &= \delta \theta_3 + \delta \theta_{3r} \\ \delta \theta_{3a} &= \delta \theta_3 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Reescribiendo la ecuación 3.9 y utilizando la ecuación 3.10:

$$\delta \mathbf{R}_{s1j} = [\mathbf{E}] ([\mathbf{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}_2 \delta \theta_2 + [\mathbf{R}_{\theta_{3a}}] \mathbf{r}_{3a} \delta \theta_3) \quad (3.11)$$

Con la ecuación 3.11 queda definido el desplazamiento $\delta \mathbf{R}_{s1j}$.

Desplazamiento Virtual $\delta \mathbf{R}_{s2j}$

La ecuación vectorial que define la posición relativa para el segundo resorte es:

$$\mathbf{R}_{s2j} = \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_{4b} - \mathbf{R}_p \quad (3.12)$$

Donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_p &= [x_p, y_p]^T \\ \mathbf{R}_2 &= [\mathbf{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_2 &= [x_2, 0]^T \\ \mathbf{R}_3 &= [\mathbf{R}_{\theta_3}] \mathbf{r}_3 & \mathbf{r}_3 &= [x_3, 0]^T \\ \mathbf{R}_{4b} &= [\mathbf{R}_{\theta_{4b}}] \mathbf{r}_{4b} & \mathbf{r}_{4b} &= [x_{4b}, 0]^T\end{aligned}$$

La ecuación de desplazamiento virtual a partir de la ecuación 3.12 es:

$$\delta \mathbf{R}_{s2j} = \delta \mathbf{R}_2 + \delta \mathbf{R}_3 + \delta \mathbf{R}_{4b} - \delta \mathbf{R}_p \quad (3.13)$$

Donde:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{R}_p &= \mathbf{0} \\ \delta \mathbf{R}_2 &= \delta [\mathbf{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}_2 \\ \delta \mathbf{R}_3 &= \delta [\mathbf{R}_{\theta_3}] \mathbf{r}_3 \\ \delta \mathbf{R}_{4b} &= \delta [\mathbf{R}_{\theta_{4b}}] \mathbf{r}_{4b}\end{aligned}$$

Sustituyendo los desplazamientos, se obtiene:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{R}_{s2j} &= \delta [\mathbf{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}_2 \delta \theta_2 + \delta [\mathbf{R}_{\theta_3}] \mathbf{r}_3 \delta \theta_3 + \delta [\mathbf{R}_{\theta_{4b}}] \mathbf{r}_{4b} \delta \theta_{4b} \\ &= [\mathbf{E}] ([\mathbf{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}_2 \delta \theta_2 + [\mathbf{R}_{\theta_3}] \mathbf{r}_3 \delta \theta_3 + [\mathbf{R}_{\theta_{4b}}] \mathbf{r}_{4b} \delta \theta_{4b})\end{aligned} \quad (3.14)$$

De la figura 3.3, se tiene:

$$\theta_{4b} = \theta_4 + \theta_{4r}$$

Obteniendo el desplazamiento virtual de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}\delta \theta_{4b} &= \delta \theta_4 + \delta \theta_{4r} \\ \delta \theta_{4b} &= \delta \theta_4\end{aligned} \quad (3.15)$$

Reescribiendo la ecuación 3.14 y utilizando la ecuación 3.15:

$$\delta \mathbf{R}_{s2j} = [\mathbf{E}] ([\mathbf{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}_2 \delta \theta_2 + [\mathbf{R}_{\theta_3}] \mathbf{r}_3 \delta \theta_3 + [\mathbf{R}_{\theta_{4b}}] \mathbf{r}_{4b} \delta \theta_4) \quad (3.16)$$

Con la ecuación 3.16 queda definido el desplazamiento $\delta \mathbf{R}_{s2j}$.

3.3 Desplazamiento Virtual de los resortes lineales δl_{1j} y δl_{2j}

En la Figura 3.4 se tienen dos cuerpos i y j conectados por un resorte [10]. La constante elástica del resorte es k . También se muestran los puntos en donde se encuentra empotrado el resorte en cada uno de los cuerpos, en el caso del cuerpo i se denomina \mathbf{p}_i , mientras que para el cuerpo j es \mathbf{p}_j . Los vectores de posición para estos puntos son \mathbf{R}_i y \mathbf{R}_j respectivamente. La fuerza que genera el resorte queda establecida como:

$$f_s = k(l - l_0) \quad (3.17)$$

Donde l es la longitud final del resorte y l_0 es la longitud en la cual se encuentra el resorte sin deformar. Se observa en la figura 3.5 como actúa la fuerza del resorte en cada uno de los cuerpos ya mencionados, con esto el trabajo virtual en el sistema es [10]:

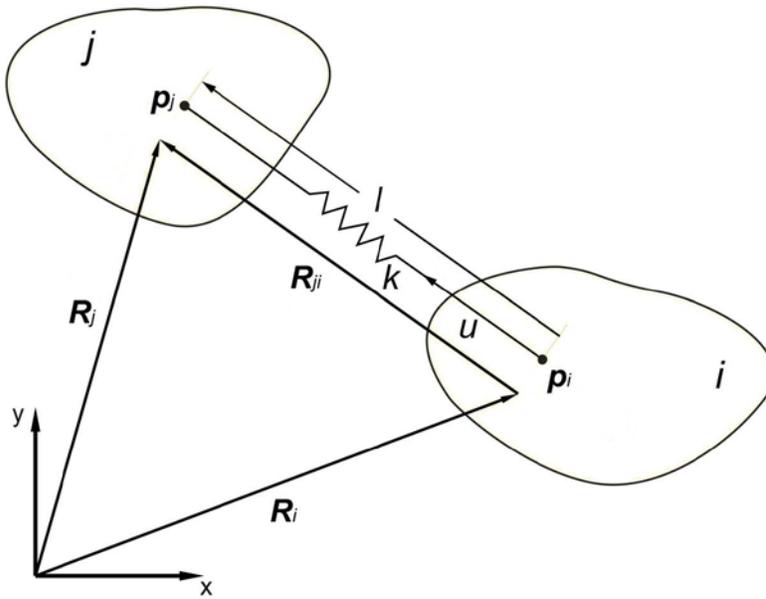


Figura 3.4

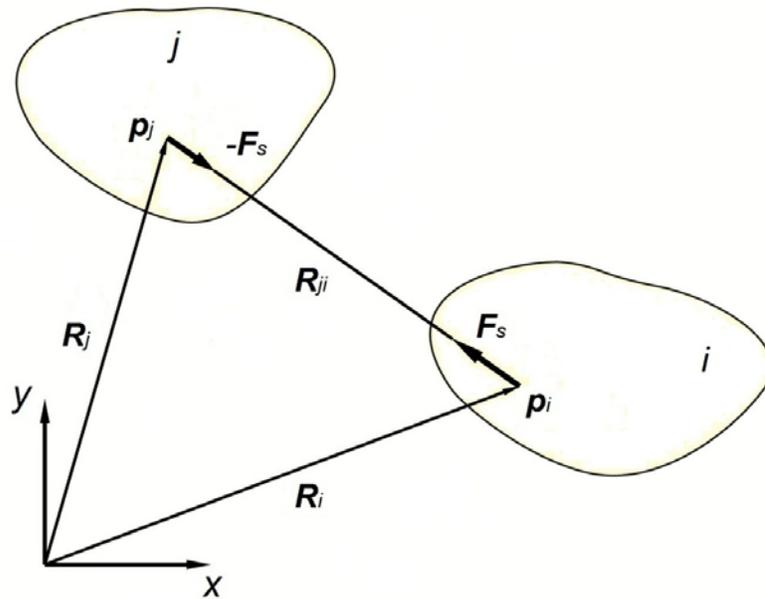


Figura 3.5

$$\begin{aligned}
\delta W &= \mathbf{F}_s^T \delta \mathbf{R}_i + (-\mathbf{F}_s)^T \delta \mathbf{R}_j \\
&= \mathbf{F}_s^T (\delta \mathbf{R}_i - \delta \mathbf{R}_j) \\
&= \mathbf{F}_s^T (-\delta \mathbf{R}_j + \delta \mathbf{R}_i) \\
&= -\mathbf{F}_s^T (\delta \mathbf{R}_j - \delta \mathbf{R}_i) \\
\delta W &= -\mathbf{F}_s^T \delta \mathbf{R}_{ji}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Donde:

$$\mathbf{F}_s = f_s \mathbf{u} \tag{3.19}$$

$$\mathbf{R}_{ji} = \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i = l \mathbf{u} \tag{3.20}$$

$$\mathbf{u} = [\mathbf{R}_\theta] \mathbf{i} \tag{3.21}$$

El desplazamiento virtual para la ecuación 3.20 es:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{R}_{ji} &= \delta l \mathbf{u} + l \delta \mathbf{u} \\
&= \delta l \mathbf{u} + l (\delta [\mathbf{R}_\theta] \mathbf{i}) \\
&= \delta l \mathbf{u} + l \left(\frac{\partial [\mathbf{R}_\theta]}{\partial \theta} \mathbf{i} \delta \theta \right)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.19 y 3.22 en la ecuación 3.18, se tiene:

$$\begin{aligned}
\delta W &= -\mathbf{F}_s^T \delta \mathbf{R}_{ji} \\
&= -(f_s \mathbf{u})^T \left(\delta l \mathbf{u} + l \left(\frac{\partial [\mathbf{R}_\theta]}{\partial \theta} \mathbf{i} \delta \theta \right) \right) \\
&= -f_s \delta l \mathbf{u}^T \mathbf{u} - f_s l \mathbf{u}^T \left(\frac{\partial [\mathbf{R}_\theta]}{\partial \theta} \mathbf{i} \right) \delta \theta \\
\delta W &= -f_s \delta l
\end{aligned} \tag{3.23}$$

El segundo término se elimina debido a que es el producto punto de dos vectores ortogonales. Por otro lado, tanto δl_{1j} como δl_{2j} se definirán en función de los resortes lineales. Aplicando la definición de trabajo virtual para estos resortes, se tiene:

$$\delta W_{1j} = -f_{1j} \delta l_{1j} \tag{3.24}$$

$$\delta W_{2j} = -f_{2j} \delta l_{2j} \tag{3.25}$$

Con esto, las fuerzas presentes en los resortes lineales son:

$$f_{1j} = k_3 (l_{1j} - l_{11}) \tag{3.26}$$

$$f_{2j} = k_4 (l_{2j} - l_{21}) \tag{3.27}$$

Donde:

k_3, k_4 Constantes elásticas de los resortes lineales establecidos en el eslabón 3 y eslabón 4 respectivamente.

l_{1j}, l_{2j} Longitud de los resortes en la j -ésima posición del mecanismo.

l_{11}, l_{21} Longitud de los resortes en su posición sin deformar.

Las longitudes l_{1j} , l_{2j} y sus respectivos desplazamientos virtuales son:

$$l_{1j} = (\mathbf{R}_{s1j}^T \mathbf{R}_{s1j})^{\frac{1}{2}} \quad (3.28)$$

$$l_{2j} = (\mathbf{R}_{s2j}^T \mathbf{R}_{s2j})^{\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

Se obtiene el desplazamiento virtual l_{1j} de la ecuación 3.28:

$$\begin{aligned} \delta l_{1j} &= \frac{1}{2} (\mathbf{R}_{s1j}^T \mathbf{R}_{s1j})^{-\frac{1}{2}} (2 \delta \mathbf{R}_{s1j}^T \mathbf{R}_{s1j}) \\ &= \frac{1}{(\mathbf{R}_{s1j}^T \mathbf{R}_{s1j})^{\frac{1}{2}}} (\delta \mathbf{R}_{s1j}^T \mathbf{R}_{s1j}) \\ &= \frac{1}{l_{1j}} (\delta \mathbf{R}_{s1j}^T \mathbf{R}_{s1j}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Se obtiene el desplazamiento virtual l_{2j} de la ecuación 3.29:

$$\begin{aligned} \delta l_{2j} &= \frac{1}{2} (\mathbf{R}_{s2j}^T \mathbf{R}_{s2j})^{-\frac{1}{2}} (2 \delta \mathbf{R}_{s2j}^T \mathbf{R}_{s2j}) \\ &= \frac{1}{(\mathbf{R}_{s2j}^T \mathbf{R}_{s2j})^{\frac{1}{2}}} (\delta \mathbf{R}_{s2j}^T \mathbf{R}_{s2j}) \\ &= \frac{1}{l_{2j}} (\delta \mathbf{R}_{s2j}^T \mathbf{R}_{s2j}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

En la siguiente sección se procede de manera análoga para los resortes torsionales.

3.4 Desplazamiento Virtual de los resortes torsionales $\delta\beta_{2j}$ y $\delta\beta_{5j}$

Los siguientes conceptos son desarrollados por **Shabana** [10]. La figura 3.6 muestra los cuerpos i y j los cuales se encuentran ensamblados por una junta y conectados por medio de un resorte torsional, el cual actúa en ambos cuerpos.

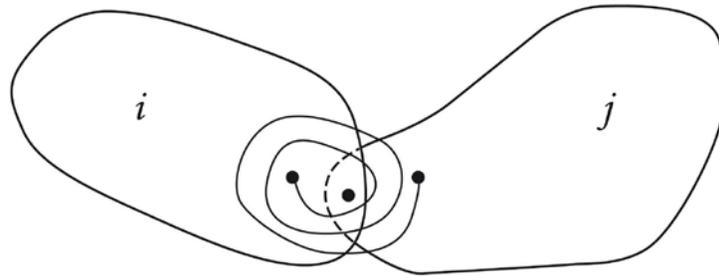


Figura 3.6

El momento resultante en el ensamble se define como:

$$M_s = k_t(\theta - \theta_0) \quad (3.32)$$

En donde k_t es la constante elástica del resorte torsional, mientras que θ_0 es el ángulo relativo entre ambos cuerpos en su primera posición y θ es el ángulo relativo en estos para su j -ésima posición. El trabajo virtual realizado por el momento expresado en la ecuación 3.32 es:

$$\delta W = -M_s \delta\theta = -k_t(\theta - \theta_0)\delta\theta \quad (3.33)$$

En la figura 3.7 se tienen dos cuerpos I y J en su primera posición definida por los ángulos θ_{I1} y θ_{J1} , mientras que para la j -ésima posición de estos se tienen los ángulos θ_I y θ_J . Estos cuerpos están unidos por una junta rotacional y el ángulo relativo entre ellos para su primera posición es θ_0 , mientras que para la j -ésima es θ .

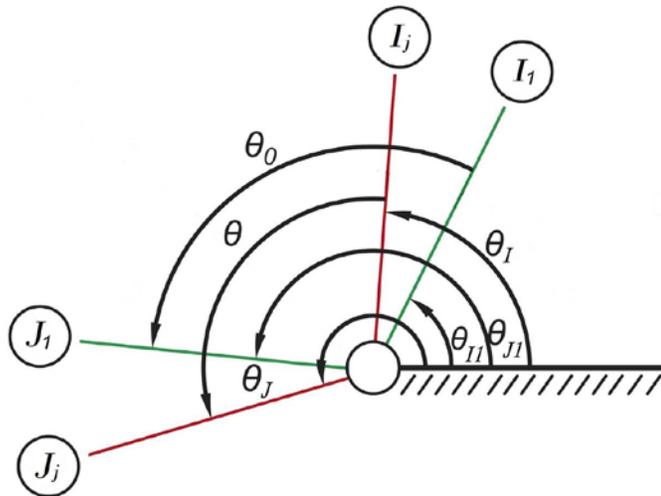


Figura 3.7

En la figura 3.8 se muestra un caso particular, se tiene una primera posición del arreglo así como su j -ésima posición en el cual la posición del cuerpo I no cambia y se encuentra establecido en la horizontal. Con esto, tanto el ángulo relativo θ_0 así como los ángulos que definen la posición del cuerpo J son medidos a partir de la posición del cuerpo I . El mecanismo presente tiene estas características.

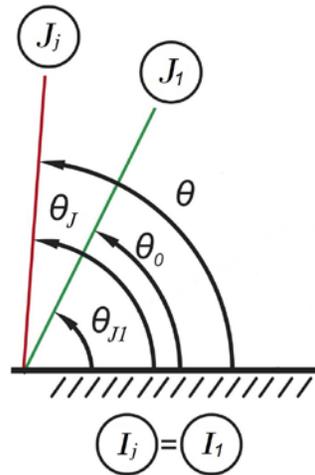


Figura 3.8

En el sistema se tienen resortes torsionales los cuales modifican el torque de entrada. En la Figura 3.9 se muestra al mecanismo en su primera configuración y los ángulos de las juntas establecidas en tierra es donde se encuentran ensamblados los resortes torsionales. Las constantes elásticas de estos son k_2 y k_5 en base a los eslabones en donde se encuentran estos. Los ángulos β_{2j} y β_{5j} son las deflexiones angulares de los resortes y quedan definidas mediante las siguientes ecuaciones:

$$\beta_{2j} = \theta_{2j}^s - \theta_{21}^s \quad (3.34)$$

$$\beta_{5j} = \theta_{5j}^s - \theta_{51}^s \quad (3.35)$$

En donde:

$\theta_{21}^s, \theta_{2j}^s$ son los ángulos relativos para la primera y j -ésima posición del eslabón 2

$\theta_{51}^s, \theta_{5j}^s$ son los ángulos relativos para la primera y j -ésima posición del eslabón 5

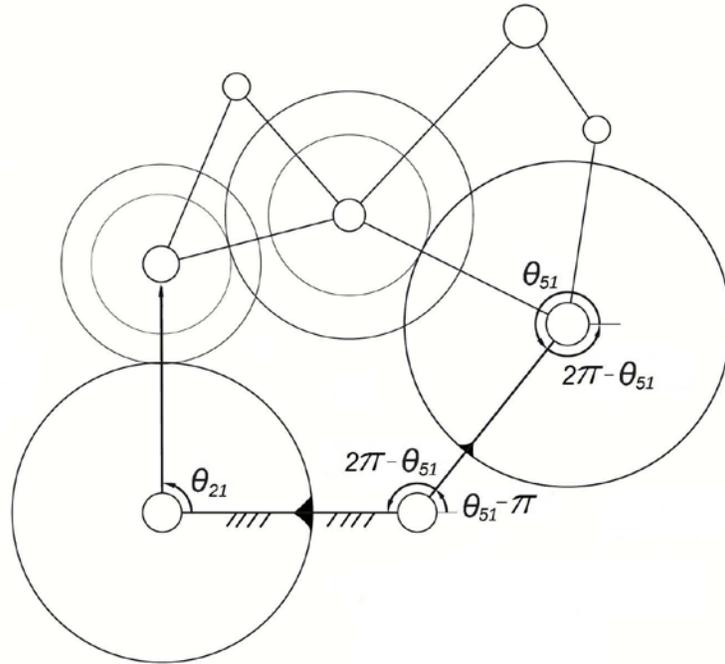


Figura 3.9

En base a lo antes mencionado, se muestra en la figura 3.10 las posiciones del eslabón 2 en donde se encuentra ensamblado el primer resorte torsional, así como también la posición del eslabón 1 el cual se encuentra establecido en la horizontal y empotrado en tierra. El ángulo relativo entre los dos cuerpos para su primera posición es:

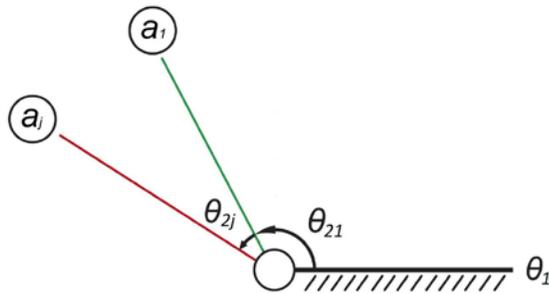


Figura 3.10

$$\theta_{21}^s = \theta_{21} - \theta_1 \quad (3.36)$$

Tanto θ_1 y θ_{21} son los ángulos que definen la primera posición para cada uno de los eslabones. Para la j-ésima posición se tiene:

$$\theta_{2j}^s = \theta_{21} + \theta_{2j} - \theta_1 \quad (3.37)$$

Donde $\theta_1 = 0^\circ$, ya que se mide desde la horizontal. De las ecuaciones 3.36 y 3.37:

$$\theta_{21}^s = \theta_{21} \quad (3.38)$$

$$\theta_{2j}^s = \theta_{21} + \theta_{2j} \quad (3.39)$$

La deflexión β_{2j} se determina haciendo uso de las ecuaciones 3.38 y 3.39 e introduciéndolas en 3.34 se tiene:

$$\beta_{2j} = \theta_{21} + \theta_{2j} - \theta_{21}$$

$$\beta_{2j} = \theta_{2j} \quad (3.40)$$

En cuanto a la deflexión β_{5j} , se tiene en la figura 3.11 las posiciones del eslabón 5 en donde se encuentra ensamblado el segundo resorte torsional, el ángulo relativo para los dos cuerpos en su primera posición es:

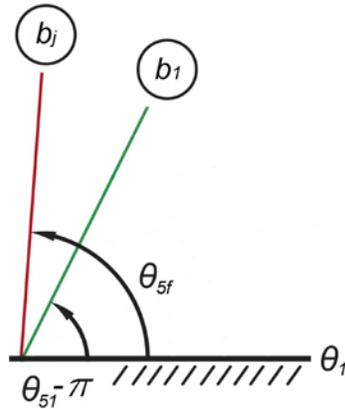


Figura 3.11

$$\theta_{51}^s = (\theta_{51} - \pi) - \theta_1 \quad (3.41)$$

En el caso de la j -ésima posición de este arreglo, se tiene:

$$\theta_{5j}^s = \theta_{5f} - \theta_1$$

En donde:

$$\theta_{5f} = \theta_{51} + \theta_{5j} - \pi$$

$$\theta_{5j}^s = \theta_{51} + \theta_{5j} - \pi - \theta_1 \quad (3.42)$$

Con $\theta_1 = 0^\circ$, las ecuaciones 3.41 y 3.42 se definen como sigue:

$$\theta_{51}^s = \theta_{51} - \pi \quad (3.43)$$

$$\theta_{5j}^s = \theta_{51} + \theta_{5j} - \pi \quad (3.44)$$

La deflexión β_{5j} se determina haciendo uso de las ecuaciones 3.43 y 3.44 e introduciéndolas en 3.35, con esto se tiene:

$$\begin{aligned} \beta_{5j} &= \left((\theta_{51} + \theta_{5j} - \pi) - (\theta_{51} - \pi) \right) \\ \beta_{5j} &= \theta_{5j} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Los desplazamientos virtuales $\delta\beta_{2j}$ y $\delta\beta_{5j}$ se expresarán en términos del desplazamiento virtual $\delta\theta_{2j}$:

$$\begin{aligned} \delta\beta_{2j} &= \frac{\partial\beta_{2j}}{\partial\theta_{2j}} \delta\theta_{2j} \\ \delta\beta_{2j} &= \frac{\partial\theta_{2j}}{\partial\theta_{2j}} \delta\theta_{2j} \\ \delta\beta_{2j} &= \delta\theta_{2j} \end{aligned} \quad (3.46)$$

En cuanto al desplazamiento virtual $\delta\beta_{5j}$ se sabe que la ecuación obtenida por **Sandor** proporciona la relación existente entre los ángulos de los eslabones, la cual es:

$$\theta_{5j} = Q\theta_{4j} + S\theta_{2j} - M\theta_{3j} \quad (3.47)$$

De esta manera el desplazamiento virtual $\delta\beta_{5j}$ se define como:

$$\begin{aligned} \delta\beta_{5j} &= \frac{\partial\beta_{5j}}{\partial\theta_{2j}} \delta\theta_{2j} \\ \delta\beta_{5j} &= \frac{\partial\theta_{5j}}{\partial\theta_{2j}} \delta\theta_{2j} \\ \delta\beta_{5j} &= \frac{\partial(Q\theta_{4j} + S\theta_{2j} - M\theta_{3j})}{\partial\theta_{2j}} \delta\theta_{2j} \\ \delta\beta_{5j} &= \delta S\theta_{2j} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Con esto quedan definidos los desplazamientos angulares $\delta\beta_{2j}$ y $\delta\beta_{5j}$.

3.5 Desplazamientos Virtuales del mecanismo de 5 barras engranado.

Se debe encontrar la relación existente entre el desplazamiento $\delta\theta_{2j}$ y los desplazamientos virtuales $\delta\theta_{3j}$ y $\delta\theta_{4j}$ para ser establecidos en la ecuación de trabajo virtual [9]. Para este fin, un vector se encuentra definido de la siguiente manera:

$$\mathbf{R}_j = [\mathbf{R}_\theta]\mathbf{r}_j \quad (3.49)$$

En la figura 3.12, se tiene para cada uno de los ejes coordenados vectores unitarios como aquellos paralelos a estos. Se puede observar el vector \mathbf{R}_{pj} que determina la posición del punto \mathbf{p}_j , en donde \mathbf{R}_{oj} es el vector de posición al punto de referencia \mathbf{o}_j y \mathbf{r}_j es el vector de posición para el punto \mathbf{p}_j con respecto al punto de referencia \mathbf{o}_j .

La ecuación 3.49 establece a $\mathbf{r}_j = [x_j, y_j]^T$ y θ como el ángulo que define la orientación del vector \mathbf{r}_j . Observando la figura 3.11 se puede definir a \mathbf{R}_j en base a la geometría del sistema:

$$\mathbf{R}_j = [\mathbf{R}_\theta]\mathbf{r}_j = (\mathbf{p}_j - \mathbf{o}_j)$$

Estos puntos son las coordenadas geométricas que definen el vector. La ecuación de lazo para el mecanismo es:

$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_4 + \mathbf{R}_5 - \mathbf{R}_1 = \mathbf{0} \quad (3.50)$$

En la figura 3.13 se observan los puntos geométricos que definen el mecanismo y los vectores que lo conforman. Con lo anterior, se tienen los vectores de la ecuación de lazo en función de las coordenadas geométricas del mecanismo:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= (\mathbf{b}_0 - \mathbf{a}_0) \\ \mathbf{R}_2 &= [\mathbf{R}_{\theta_2}]\mathbf{r}_2 = (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_0) \\ \mathbf{R}_3 &= [\mathbf{R}_{\theta_3}]\mathbf{r}_3 = (\mathbf{c}_j - \mathbf{a}_j) \\ \mathbf{R}_4 &= [\mathbf{R}_{\theta_4}]\mathbf{r}_4 = (\mathbf{b}_j - \mathbf{c}_j) \\ \mathbf{R}_5 &= [\mathbf{R}_{\theta_5}]\mathbf{r}_5 = (\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_j) \end{aligned}$$

En la figura 3.2 se tienen los puntos en donde se encuentran conectados a tierra los resortes lineales, los vectores que definen su posición son:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_o &= (\mathbf{o} - \mathbf{a}_0) \\ \mathbf{R}_p &= (\mathbf{p} - \mathbf{a}_0) \end{aligned}$$

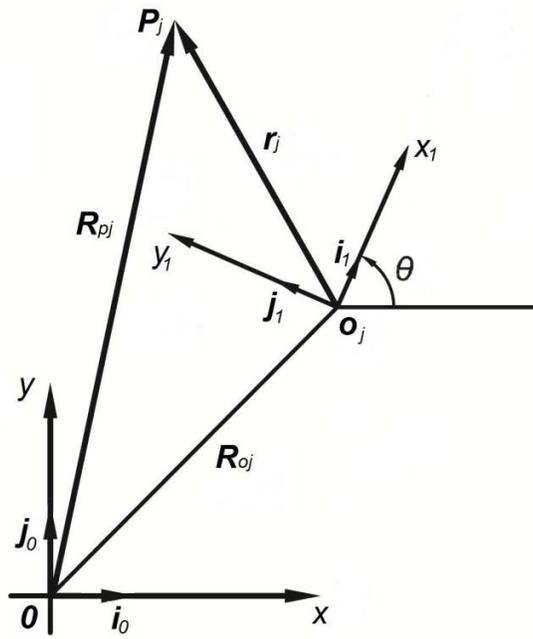


Figura 3.12

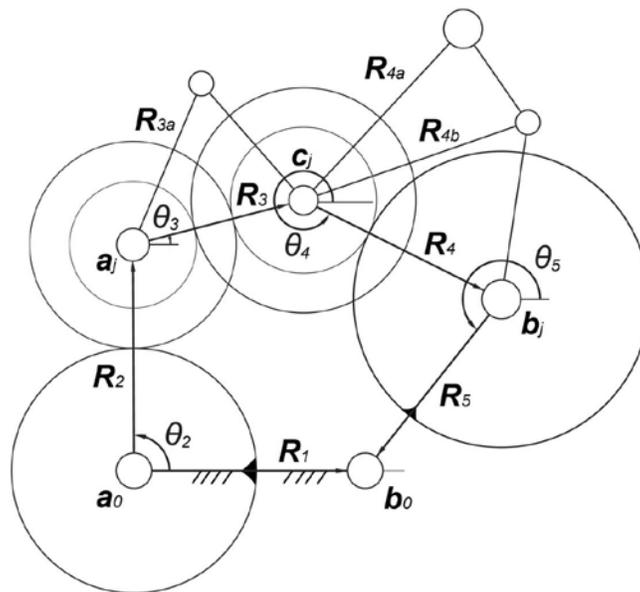


Figura 3.13

La ecuación de desplazamiento virtual se obtiene de la ecuación 3.50:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_2 + \delta \mathbf{R}_3 + \delta \mathbf{R}_4 + \delta \mathbf{R}_5 - \delta \mathbf{R}_1 &= \mathbf{0} \\ [\mathbf{E}][\mathbf{R}_{\theta 2}]\mathbf{r}_2 \delta \theta_2 + [\mathbf{E}][\mathbf{R}_{\theta 3}]\mathbf{r}_3 \delta \theta_3 + [\mathbf{E}][\mathbf{R}_{\theta 4}]\mathbf{r}_4 \delta \theta_4 + [\mathbf{E}][\mathbf{R}_{\theta 5}]\mathbf{r}_5 \delta \theta_5 &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}]([\mathbf{R}_{\theta 2}]\mathbf{r}_2 \delta \theta_2 + [\mathbf{R}_{\theta 3}]\mathbf{r}_3 \delta \theta_3 + [\mathbf{R}_{\theta 4}]\mathbf{r}_4 \delta \theta_4 + [\mathbf{R}_{\theta 5}]\mathbf{r}_5 \delta \theta_5) &= \mathbf{0} \\ ([\mathbf{R}_{\theta 2}]\mathbf{r}_2 \delta \theta_2 + [\mathbf{R}_{\theta 3}]\mathbf{r}_3 \delta \theta_3 + [\mathbf{R}_{\theta 4}]\mathbf{r}_4 \delta \theta_4 + [\mathbf{R}_{\theta 5}]\mathbf{r}_5 \delta \theta_5) &= [\mathbf{E}]^{-1} \mathbf{0} \\ [\mathbf{R}_{\theta 2}]\mathbf{r}_2 \delta \theta_2 + [\mathbf{R}_{\theta 3}]\mathbf{r}_3 \delta \theta_3 + [\mathbf{R}_{\theta 4}]\mathbf{r}_4 \delta \theta_4 + [\mathbf{R}_{\theta 5}]\mathbf{r}_5 \delta \theta_5 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_0) \delta \theta_2 + (\mathbf{c}_j - \mathbf{a}_j) \delta \theta_3 + (\mathbf{b}_j - \mathbf{c}_j) \delta \theta_4 + (\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_j) \delta \theta_5 &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Renombrando términos de la ecuación 3.52:

$$\mathbf{w}_j \delta \theta_2 + \mathbf{x}_j \delta \theta_3 + \mathbf{y}_j \delta \theta_4 + \mathbf{z}_j \delta \theta_5 = \mathbf{0} \quad (3.53)$$

En donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_j &= (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_0) \\ \mathbf{x}_j &= (\mathbf{c}_j - \mathbf{a}_j) \\ \mathbf{y}_j &= (\mathbf{b}_j - \mathbf{c}_j) \\ \mathbf{z}_j &= (\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_j) \\ \mathbf{d} &= (\mathbf{o} - \mathbf{a}_0) \\ \mathbf{f} &= (\mathbf{p} - \mathbf{a}_0) \end{aligned}$$

Por otra parte, en la figura 3.2 se establecen los puntos en donde actúa la fuerza \mathbf{F}_{nj} y en donde son conectados los resortes lineales al mecanismo. Estos vectores no conforman la ecuación de lazo y son:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{3a} &= [\mathbf{R}_{\theta 3a}]\mathbf{r}_{3a} = (\mathbf{r}_{1j} - \mathbf{a}_j) \\ \mathbf{R}_{4a} &= [\mathbf{R}_{\theta 4a}]\mathbf{r}_{4a} = (\mathbf{n}_j - \mathbf{c}_j) \\ \mathbf{R}_{4b} &= [\mathbf{R}_{\theta 4b}]\mathbf{r}_{4b} = (\mathbf{r}_{2j} - \mathbf{c}_j) \end{aligned}$$

En donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_j &= (\mathbf{r}_{1j} - \mathbf{a}_j) \\ \mathbf{w}'_j &= (\mathbf{n}_j - \mathbf{c}_j) \\ \mathbf{y}'_j &= (\mathbf{r}_{2j} - \mathbf{c}_j) \end{aligned}$$

La ecuación 3.47 presenta una relación entre los ángulos del mecanismo, con esto el desplazamiento virtual $\delta \theta_{5j}$ es:

$$\delta \theta_{5j} = Q \delta \theta_{4j} + S \delta \theta_{2j} - M \delta \theta_{3j}$$

Sustituyendo la ecuación 3.47 en la ecuación 3.53, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}_j \delta\theta_2 + \mathbf{x}_j \delta\theta_3 + \mathbf{y}_j \delta\theta_4 + \mathbf{z}_j (Q\delta\theta_4 + S\delta\theta_2 - M\delta\theta_3) &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{w}_j \delta\theta_2 + \mathbf{z}_j S\delta\theta_2 &= \mathbf{z}_j M\delta\theta_3 - \mathbf{x}_j \delta\theta_3 - \mathbf{y}_j \delta\theta_4 - \mathbf{z}_j Q\delta\theta_4 \\
 (\mathbf{w}_j + S\mathbf{z}_j)\delta\theta_2 &= -(\mathbf{x}_j - M\mathbf{z}_j)\delta\theta_3 - (\mathbf{y}_j + Q\mathbf{z}_j)\delta\theta_4
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Escribiendo en forma matricial la ecuación 3.54:

$$\begin{bmatrix} -(\mathbf{x}_j - M\mathbf{z}_j) & -(\mathbf{y}_j + Q\mathbf{z}_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta_{3j} \\ \delta\theta_{4j} \end{bmatrix} = (\mathbf{w}_j + S\mathbf{z}_j)\delta\theta_{2j} \tag{3.55}$$

Renombrando los elementos de la ecuación 3.55:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_j &= (\mathbf{w}_j + S\mathbf{z}_j) \\
 [\mathbf{J}_j] &= \begin{bmatrix} -(\mathbf{x}_j - M\mathbf{z}_j) & -(\mathbf{y}_j + Q\mathbf{z}_j) \end{bmatrix} \\
 \delta\boldsymbol{\theta} &= \begin{bmatrix} \delta\theta_{3j} \\ \delta\theta_{4j} \end{bmatrix} \\
 [\mathbf{J}_j] \delta\boldsymbol{\theta} &= \mathbf{G}_j \delta\theta_{2j}
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Despejando la ecuación 3.56, se tiene:

$$\delta\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{J}_j]^{-1} \mathbf{G}_j \delta\theta_{2j}$$

$$\delta\theta_{3j} = \delta\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{i} \delta\theta_{2j} = ([\mathbf{J}_j]^{-1} \mathbf{G}_j)^T \mathbf{i} \delta\theta_{2j} = h_{1j} \delta\theta_{2j} \tag{3.57}$$

$$\delta\theta_{4j} = \delta\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{j} \delta\theta_{2j} = ([\mathbf{J}_j]^{-1} \mathbf{G}_j)^T \mathbf{j} \delta\theta_{2j} = h_{2j} \delta\theta_{2j} \tag{3.58}$$

Donde:

$$h_{1j} = ([\mathbf{J}_j]^{-1} \mathbf{G}_j)^T \mathbf{i}$$

$$h_{2j} = ([\mathbf{J}_j]^{-1} \mathbf{G}_j)^T \mathbf{j}$$

Se sustituyen las ecuaciones 3.57 y 3.58 en las ecuaciones 3.6, 3.11 y 3.16 de tal manera que todas ellas queden en función del desplazamiento $\delta\theta_{2j}$. Renombrando términos para los vectores \mathbf{R}_{nj} , \mathbf{R}_{s1j} y \mathbf{R}_{s2j} junto con sus desplazamientos virtuales se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{nj} &= \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_{4a} \\
 &= \mathbf{w}_j + \mathbf{x}_j + \mathbf{w}'_j
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{R}_{nj} &= [\mathbf{E}]([\mathbf{R}_{\theta 2}] \mathbf{r}_2 \delta \theta_{2j} + [\mathbf{R}_{\theta 3}] \mathbf{r}_3 \delta \theta_{3j} + [\mathbf{R}_{\theta 4a}] \mathbf{r}_{4a} \delta \theta_{4j}) \\
&= [\mathbf{E}](\mathbf{w}_j \delta \theta_{2j} + \mathbf{x}_j h_{1j} \delta \theta_{2j} + \mathbf{w}'_j h_{2j} \delta \theta_{2j}) \\
&= [\mathbf{E}](\mathbf{w}_j + \mathbf{x}_j h_{1j} + \mathbf{w}'_j h_{2j}) \delta \theta_{2j}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{s1j} &= \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_{3a} - \mathbf{R}_o \\
&= \mathbf{w}_j + \mathbf{x}'_j - \mathbf{d}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{R}_{s1j} &= [\mathbf{E}]([\mathbf{R}_{\theta 2}] \mathbf{r}_2 \delta \theta_{2j} + [\mathbf{R}_{\theta 3a}] \mathbf{r}_{3a} \delta \theta_{3j}) \\
&= [\mathbf{E}](\mathbf{w}_j \delta \theta_{2j} + \mathbf{x}'_j h_{1j} \delta \theta_{2j}) \\
&= [\mathbf{E}](\mathbf{w}_j + \mathbf{x}'_j h_{1j}) \delta \theta_{2j}
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{s2j} &= \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_{4b} - \mathbf{R}_p \\
&= \mathbf{w}_j + \mathbf{x}_j + \mathbf{y}'_j - \mathbf{f}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{R}_{s2j} &= [\mathbf{E}]([\mathbf{R}_{\theta 2}] \mathbf{r}_2 \delta \theta_{2j} + [\mathbf{R}_{\theta 3}] \mathbf{r}_3 \delta \theta_{3j} + [\mathbf{R}_{\theta 4b}] \mathbf{r}_{4b} \delta \theta_{4j}) \\
&= [\mathbf{E}](\mathbf{w}_j \delta \theta_{2j} + \mathbf{x}_j h_{1j} \delta \theta_{2j} + \mathbf{y}'_j h_{2j} \delta \theta_{2j}) \\
&= [\mathbf{E}](\mathbf{w}_j + \mathbf{x}_j h_{1j} + \mathbf{y}'_j h_{2j}) \delta \theta_{2j}
\end{aligned} \tag{3.64}$$

La ecuación 3.30 ya se encuentra definida:

$$\delta l_{1j} = \frac{1}{l_{1j}} (\delta \mathbf{R}_{s1j}^T \mathbf{R}_{s1j})$$

Haciendo uso de las ecuaciones 3.61 y 3.62, se tiene:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{R}_{s1j}^T \mathbf{R}_{s1j} &= ([\mathbf{E}](\mathbf{w}_j + \mathbf{x}'_j h_{1j}) \delta \theta_{2j})^T (\mathbf{w}_j + \mathbf{x}'_j - \mathbf{d}) \\
&= (\mathbf{w}_j + \mathbf{x}'_j h_{1j})^T [\mathbf{E}]^T (\mathbf{w}_j + \mathbf{x}'_j - \mathbf{d}) \delta \theta_{2j} \\
&= -(\mathbf{w}_j + \mathbf{x}'_j h_{1j})^T [\mathbf{E}] (\mathbf{w}_j + \mathbf{x}'_j - \mathbf{d}) \delta \theta_{2j} \\
&= -\mathbf{w}_j^T [\mathbf{E}] (\mathbf{w}_j + \mathbf{x}'_j - \mathbf{d}) \delta \theta_{2j} - h_{1j} \mathbf{x}'_j{}^T [\mathbf{E}] (\mathbf{w}_j + \mathbf{x}'_j - \mathbf{d}) \delta \theta_{2j} \\
&= -\mathbf{w}_j^T [\mathbf{E}] (\mathbf{x}'_j - \mathbf{d}) \delta \theta_{2j} - h_{1j} \mathbf{x}'_j{}^T [\mathbf{E}] (\mathbf{w}_j - \mathbf{d}) \delta \theta_{2j} \\
&= -(\mathbf{w}_j^T [\mathbf{E}] (\mathbf{x}'_j - \mathbf{d}) + h_{1j} \mathbf{x}'_j{}^T [\mathbf{E}] (\mathbf{w}_j - \mathbf{d})) \delta \theta_{2j}
\end{aligned} \tag{3.65}$$

En donde $\mathbf{w}_j^T [\mathbf{E}] \mathbf{w}_j = 0$ y $\mathbf{x}'_j{}^T [\mathbf{E}] \mathbf{x}'_j = 0$. Usando la ecuación 3.65 en la ecuación 3.30, se tiene:

$$\begin{aligned}
\delta l_{1j} &= -\frac{1}{l_{1j}} (\mathbf{w}_j^T [\mathbf{E}] (\mathbf{x}'_j - \mathbf{d}) + h_{1j} \mathbf{x}'_j{}^T [\mathbf{E}] (\mathbf{w}_j - \mathbf{d})) \delta \theta_{2j} \\
&= h_{3j} \delta \theta_{2j}
\end{aligned} \tag{3.66}$$

La ecuación 3.31 ya se encuentra definida:

$$\delta l_{2j} = \frac{1}{l_{2j}} (\delta \mathbf{R}_{s2j}{}^T \mathbf{R}_{s2j})$$

Haciendo uso de las ecuaciones 3.63 y 3.64, se tiene:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{R}_{s2j}{}^T \mathbf{R}_{s2j} &= ([\mathbf{E}] (\mathbf{w}_j + \mathbf{x}_j h_{1j} + \mathbf{y}'_j h_{2j}) \delta \theta_{2j})^T (\mathbf{w}_j + \mathbf{x}_j + \mathbf{y}'_j - \mathbf{f}) \\
&= (\mathbf{w}_j + \mathbf{x}_j h_{1j} + \mathbf{y}'_j h_{2j})^T [\mathbf{E}]^T (\mathbf{w}_j + \mathbf{x}_j + \mathbf{y}'_j - \mathbf{f}) \delta \theta_{2j} \\
&= -(\mathbf{w}_j + \mathbf{x}_j h_{1j} + \mathbf{y}'_j h_{2j})^T [\mathbf{E}] (\mathbf{w}_j + \mathbf{x}_j + \mathbf{y}'_j - \mathbf{f}) \delta \theta_{2j} \\
&= -\mathbf{w}_j^T [\mathbf{E}] (\mathbf{w}_j + \mathbf{x}_j + \mathbf{y}'_j - \mathbf{f}) \delta \theta_{2j} - h_{1j} \mathbf{x}_j^T [\mathbf{E}] (\mathbf{w}_j + \mathbf{x}_j + \mathbf{y}'_j - \mathbf{f}) \delta \theta_{2j} \\
&\quad - h_{2j} \mathbf{y}'_j{}^T [\mathbf{E}] (\mathbf{w}_j + \mathbf{x}_j + \mathbf{y}'_j - \mathbf{f}) \delta \theta_{2j} \\
&= -\mathbf{w}_j^T [\mathbf{E}] (\mathbf{x}_j + \mathbf{y}'_j - \mathbf{f}) \delta \theta_{2j} - h_{1j} \mathbf{x}_j^T [\mathbf{E}] (\mathbf{w}_j + \mathbf{y}'_j - \mathbf{f}) \delta \theta_{2j} \\
&\quad - h_{2j} \mathbf{y}'_j{}^T [\mathbf{E}] (\mathbf{w}_j + \mathbf{x}_j - \mathbf{f}) \delta \theta_{2j} \\
&= -(\mathbf{w}_j^T [\mathbf{E}] (\mathbf{x}_j + \mathbf{y}'_j - \mathbf{f}) + h_{1j} \mathbf{x}_j^T [\mathbf{E}] (\mathbf{w}_j + \mathbf{y}'_j - \mathbf{f}) \\
&\quad + h_{2j} \mathbf{y}'_j{}^T [\mathbf{E}] (\mathbf{w}_j + \mathbf{x}_j - \mathbf{f})) \delta \theta_{2j}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

En donde $\mathbf{y}'_j{}^T [\mathbf{E}] \mathbf{y}'_j = 0$. Usando la ecuación 3.67 en la ecuación 3.31, se tiene:

$$\begin{aligned}
\delta l_{2j} &= -\frac{1}{l_{2j}} (\mathbf{w}_j^T [\mathbf{E}] (\mathbf{x}_j + \mathbf{y}'_j - \mathbf{f}) + h_{1j} \mathbf{x}_j^T [\mathbf{E}] (\mathbf{w}_j + \mathbf{y}'_j - \mathbf{f}) \\
&\quad + h_{2j} \mathbf{y}'_j{}^T [\mathbf{E}] (\mathbf{w}_j + \mathbf{x}_j - \mathbf{f})) \delta \theta_{2j} \\
&= h_{4j} \delta \theta_{2j}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Para el término de la ecuación 3.1 que contiene el producto interno $\mathbf{F}_{nj}{}^T \delta \mathbf{R}_{nj}$ se utiliza la ecuación 3.60:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{nj}{}^T \delta \mathbf{R}_{nj} &= \mathbf{F}_{nj}{}^T [\mathbf{E}] (\mathbf{w}_j + \mathbf{x}_j h_{1j} + \mathbf{w}'_j h_{2j}) \delta \theta_{2j} \\
&= h_{5j} \delta \theta_{2j}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Utilizando las ecuaciones 3.58, 3.66, 3.68 y 3.69 en la ecuación 3.1, se define la ecuación de trabajo virtual en términos de la geometría del sistema y en función del desplazamiento virtual $\delta \theta_{2j}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \delta W_j = & h_{5j} \delta \theta_{2j} - k_3(l_{1j} - l_{11})h_{3j} \delta \theta_{2j} - k_4(l_{2j} - l_{21})h_{4j} \delta \theta_{2j} \\ & + T_{2j} \delta \theta_{2j} + M_{nj} h_{2j} \delta \theta_{2j} - k_2 \beta_{2j} \delta \theta_{2j} - S k_5 \beta_{5j} \delta \theta_{2j} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Arreglando la ecuación 3.70:

$$\begin{aligned} \delta W_j = & (h_{5j} - k_3(l_{1j} - l_{11})h_{3j} - k_4(l_{2j} - l_{21})h_{4j} \\ & + T_{2j} + M_{nj} h_{2j} - k_2 \beta_{2j} - S k_5 \beta_{5j}) \delta \theta_{2j} \\ \delta W_j = & Q_j \delta \theta_{2j} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Donde Q_j :

$$\begin{aligned} Q_j = & h_{5j} - k_3(l_{1j} - l_{11})h_{3j} - k_4(l_{2j} - l_{21})h_{4j} \\ & + T_{2j} + M_{nj} h_{2j} - k_2 \beta_{2j} - S k_5 \beta_{5j} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Considerando que el desplazamiento $\delta \theta_{2j}$ es un valor arbitrario diferente de cero y por el principio de trabajo virtual se tiene de la ecuación 3.72:

$$Q_j = 0$$

$$\begin{aligned} h_{5j} - k_3(l_{1j} - l_{11})h_{3j} - k_4(l_{2j} - l_{21})h_{4j} \\ + T_{2j} + M_{nj} h_{2j} - k_2 \beta_{2j} - S k_5 \beta_{5j} = 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Esta ecuación de diseño incluye la información de fuerzas y momentos aplicados al brazo.

Capítulo 4 Aplicación de las Ecuaciones de Diseño

4.1 Diseño Cinemático

A continuación se mostrará la aplicación de las ecuaciones de diseño cinemático desarrolladas, a un problema para controlar los ángulos de las barras de entrada y salida de un mecanismo. La figura 4.1 muestra el mecanismo de 5 barras con engranes tanto en su primera, así como su j -ésima posición y el punto en donde se encuentra localizado el origen del sistema.

Ejemplo de Diseño de Mecanismos de Generación de Función [4]

En **mecanismos generadores de función**, la rotación o deslizamiento de los eslabones de entrada o salida deben estar correlacionados. La tarea de la síntesis cinemática puede ser diseñar un mecanismo para correlacionar entrada y salida, tal que cuando la entrada se mueve x , la salida se mueve $y = f(x)$ para el rango $x_0 \leq x \leq x_{n+1}$.

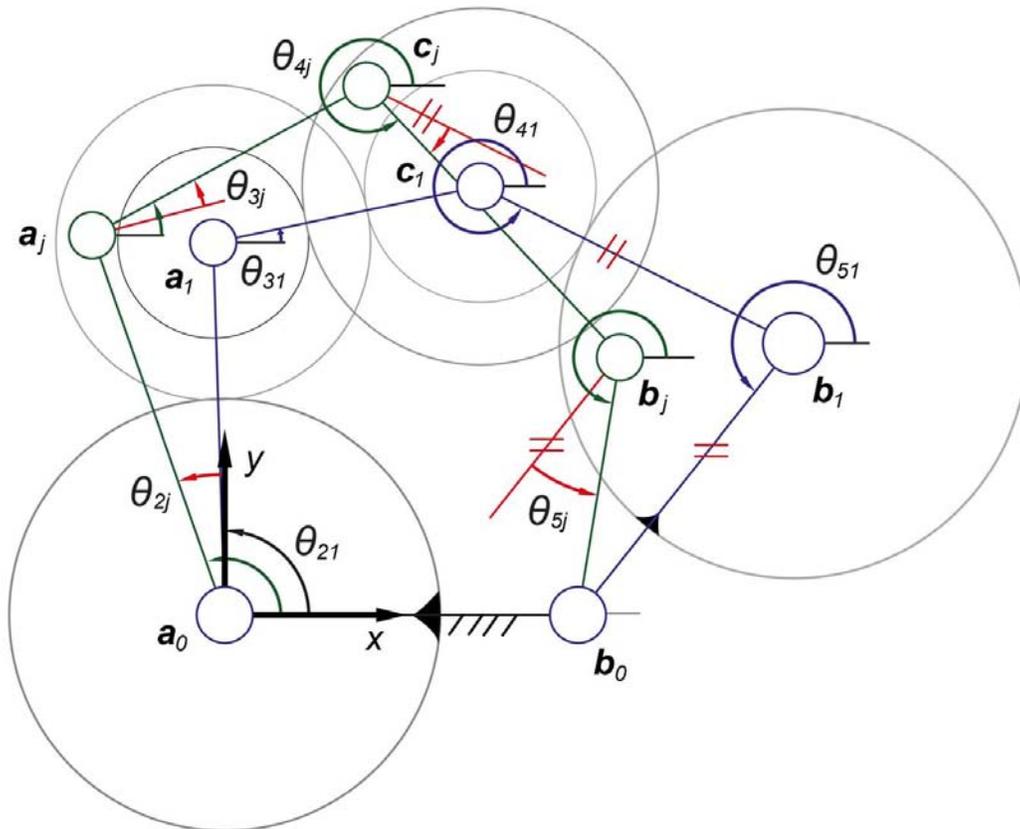


Figura 4.1

4.1.1 Puntos de Precisión

Supóngase que la función para ser generada es $y = \tan(x)$, $0 \leq x \leq 45^\circ$. Para 4 puntos de exactitud con **espaciamiento de Chebyshev** [8], valores de x pueden ser hallados mediante la fórmula:

$$x_j = x_0 + \frac{1}{2} \Delta x \left(1 - \cos \left(\frac{\pi(2j-1)}{2n} \right) \right)$$

Para este ejemplo

$$j = 1, 2, 3, 4, \quad n = 4, \quad \Delta x = x_{n+1} - x_0 = x_5 - x_0 = 45^\circ - 0^\circ = 45^\circ:$$

$$x_0 = 0^\circ$$

$$x_1 = 0^\circ + \frac{1}{2} (45^\circ) \left(1 - \cos \left(\frac{\pi(2(1) - 1)}{2(4)} \right) \right) = 1.71271^\circ$$

$$x_2 = 0^\circ + \frac{1}{2} (45^\circ) \left(1 - \cos \left(\frac{\pi(2(2) - 1)}{2(4)} \right) \right) = 13.8896^\circ$$

$$x_3 = 0^\circ + \frac{1}{2} (45^\circ) \left(1 - \cos \left(\frac{\pi(2(3) - 1)}{2(4)} \right) \right) = 31.1104^\circ$$

$$x_4 = 0^\circ + \frac{1}{2} (45^\circ) \left(1 - \cos \left(\frac{\pi(2(4) - 1)}{2(4)} \right) \right) = 43.2873^\circ$$

$$x_5 = 45^\circ$$

Valores de y son hallados mediante:

$$y_0 = \tan(x_0) = 0$$

$$y_1 = \tan(x_1) = 0.029901$$

$$y_2 = \tan(x_2) = 0.247283$$

$$y_3 = \tan(x_3) = 0.603486$$

$$y_4 = \tan(x_4) = 0.941934$$

$$y_5 = \tan(x_5) = 1$$

Así

$$\Delta y = y_{n+1} - y_0 = y_5 - y_0 = 1 - 0 = 1$$

Dados los rangos de la manivela de entrada y salida $\Delta\theta_2 = 90^\circ$, $\Delta\theta_5 = 90^\circ$, respectivamente, los valores de θ_{2j} y θ_{5j} pueden ser calculados, mediante:

$$\theta_{2j} = (x_j - x_1) \frac{\Delta\theta_2}{\Delta x}$$

$$\theta_{5j} = (y_j - y_1) \frac{\Delta\theta_5}{\Delta y}$$

Estos valores de θ_{2j} y θ_{5j} corresponden a la rotación de la entrada y salida, de la primera posición de precisión a la j -ésima posición de precisión ($j=2, 3, 4$).

$$\theta_{2j} = (x_j - x_1) \frac{\Delta\theta_2}{\Delta x} = (x_j - x_1) \frac{90^\circ}{45^\circ} = 2(x_j - x_1)$$

$$\theta_{5j} = (y_j - y_1) \frac{\Delta\theta_5}{\Delta y} = (y_j - y_1) \frac{90^\circ}{1} = 90(y_j - y_1)$$

Los resultados de estos cálculos son:

$$\begin{array}{ll} \theta_{22} = 24.353824^\circ & \theta_{52} = 19.56438^\circ \\ \theta_{23} = 58.795332^\circ & \theta_{53} = 51.62265^\circ \\ \theta_{24} = 83.149156^\circ & \theta_{54} = 82.0829^\circ \end{array}$$

4.1.2 Ecuaciones de Diseño

De la teoría de trenes de engranes se obtiene la relación existente entre las rotaciones de los eslabones y los engranes en el mecanismo. En las figuras 4.2, 4.3 y 4.4 se tienen los ángulos presentes de los engranes y eslabones del sistema. Esta relación se encuentra en función de la rotación de entrada θ_{2j} , con esto se tiene:

$$\begin{array}{l} \theta_{Bj} = (1 + r_{e2})\theta_{2j} \\ \theta_{Cj} = (1 + r_{e3})\theta_{3j} - (r_{e3} + r_{e2}r_{e3})\theta_{2j} \\ \theta_{5j} = (1 + r_{e4})\theta_{4j} - (r_{e4} + r_{e3}r_{e4})\theta_{3j} + (r_{e3}r_{e4} + r_{e2}r_{e3}r_{e4})\theta_{2j} \end{array}$$

En donde:

$$r_{e2} = \frac{T_A}{T_{B1}} \quad r_{e3} = \frac{T_{B2}}{T_{C1}} \quad r_{e4} = \frac{T_{C2}}{T_D}$$

$$Q = 1 + r_{e4}$$

$$M = r_{e4} + r_{e3}r_{e4}$$

$$S = r_{e3}r_{e4} + r_{e2}r_{e3}r_{e4}$$

Los ángulos θ_{2j} y θ_{5j} son conocidos a partir de la función para ser generada, con esto si valores de θ_{3j} son asumidos, se puede despejar θ_{4j} :

$$\theta_{4j} = \frac{1}{Q} (\theta_{5j} + M\theta_{3j} - S\theta_{2j}) \quad (4.1)$$

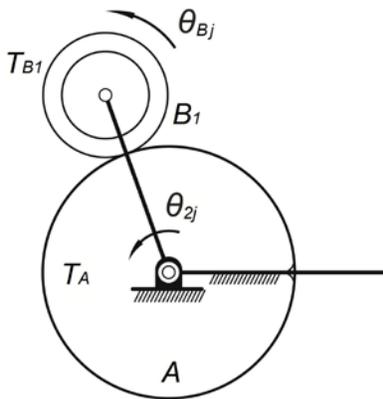


Figura 4.2

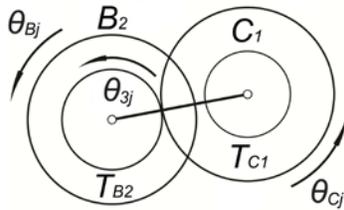


Figura 4.3

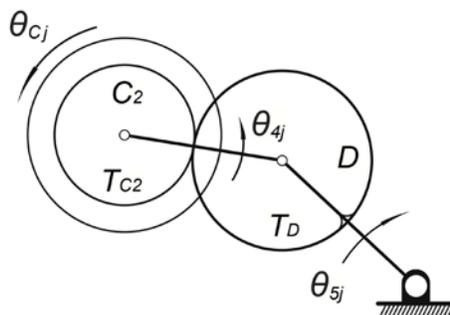


Figura 4.4

Por otra parte, las matrices de desplazamiento son:

$$\begin{aligned}
 [A_{1j}] &= \begin{bmatrix} [R_{\theta 2j}] & (\mathbf{a}_0 - [R_{\theta 2j}]\mathbf{a}_0) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{a}_j &= [A_{1j}]\mathbf{a}_1 \\
 [B_{1j}] &= \begin{bmatrix} [R_{\theta 3j}] & (\mathbf{a}_j - [R_{\theta 3j}]\mathbf{a}_1) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{c}_j &= [B_{1j}]\mathbf{c}_1 \\
 [C_{1j}] &= \begin{bmatrix} [R_{\theta 4j}] & (\mathbf{c}_j - [R_{\theta 4j}]\mathbf{c}_1) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{b}_j &= [C_{1j}]\mathbf{b}_1
 \end{aligned}$$

La ecuación de diseño es:

$$(\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_0)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_0) = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)^T (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \quad (4.2)$$

Las matrices de desplazamiento para cada punto de precisión son:

$$\begin{aligned}
 [A_{12}] &= \begin{bmatrix} [R_{\theta 22}] & (\mathbf{a}_0 - [R_{\theta 22}]\mathbf{a}_0) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \\
 [A_{13}] &= \begin{bmatrix} [R_{\theta 23}] & (\mathbf{a}_0 - [R_{\theta 23}]\mathbf{a}_0) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \\
 [A_{14}] &= \begin{bmatrix} [R_{\theta 24}] & (\mathbf{a}_0 - [R_{\theta 24}]\mathbf{a}_0) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{a}_2 &= [A_{12}]\mathbf{a}_1 \\
 \mathbf{a}_3 &= [A_{13}]\mathbf{a}_1 \\
 \mathbf{a}_4 &= [A_{14}]\mathbf{a}_1 \\
 [B_{12}] &= \begin{bmatrix} [R_{\theta 32}] & (\mathbf{a}_2 - [R_{\theta 32}]\mathbf{a}_1) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \\
 [B_{13}] &= \begin{bmatrix} [R_{\theta 33}] & (\mathbf{a}_3 - [R_{\theta 33}]\mathbf{a}_1) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \\
 [B_{14}] &= \begin{bmatrix} [R_{\theta 34}] & (\mathbf{a}_4 - [R_{\theta 34}]\mathbf{a}_1) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{c}_2 &= [B_{12}]\mathbf{c}_1 \\
 \mathbf{c}_3 &= [B_{13}]\mathbf{c}_1 \\
 \mathbf{c}_4 &= [B_{14}]\mathbf{c}_1 \\
 [C_{12}] &= \begin{bmatrix} [R_{\theta 42}] & (\mathbf{c}_2 - [R_{\theta 42}]\mathbf{c}_1) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \\
 [C_{13}] &= \begin{bmatrix} [R_{\theta 43}] & (\mathbf{c}_3 - [R_{\theta 43}]\mathbf{c}_1) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \\
 [C_{14}] &= \begin{bmatrix} [R_{\theta 44}] & (\mathbf{c}_4 - [R_{\theta 44}]\mathbf{c}_1) \\ 00 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 &= [\mathbf{C}_{12}] \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_3 &= [\mathbf{C}_{13}] \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_4 &= [\mathbf{C}_{14}] \mathbf{b}_1 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de diseño para los cuatro puntos de precisión ya establecidos se obtienen a partir de la ecuación 4.2:

$$(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_0)^T (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_0) = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)^T (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \quad (4.3)$$

$$(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_0)^T (\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_0) = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)^T (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \quad (4.4)$$

$$(\mathbf{b}_4 - \mathbf{b}_0)^T (\mathbf{b}_4 - \mathbf{b}_0) = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)^T (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \quad (4.5)$$

Los puntos fijos \mathbf{a}_0 y \mathbf{b}_0 del mecanismo se establecen como datos, los cuales son:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= [a_{0x}, a_{0y}, 1]^T = [0, 0, 1]^T \\ \mathbf{b}_0 &= [b_{0x}, b_{0y}, 1]^T = [1, 0, 1]^T \end{aligned}$$

Por otro lado se tienen las juntas móviles en el mecanismo, que son las variables a determinar:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= [a_{1x}, a_{1y}, 1]^T \\ \mathbf{c}_1 &= [c_{1x}, c_{1y}, 1]^T \\ \mathbf{b}_1 &= [b_{1x}, b_{1y}, 1]^T \end{aligned}$$

Tabla 4.1 Datos propuestos.

Propuesta 1	Propuesta 2	Propuesta 3	Propuesta 4
$a_{1x} = 0.4026011$ $a_{1y} = -1.115433$ $b_{1x} = 1.4081391$	$a_{1x} = 1.335217$ $a_{1y} = 0.026992$ $b_{1x} = 2.366034$	$a_{1x} = 0.3327153$ $a_{1y} = -1.126069$ $b_{1x} = 1.1367290$	$a_{1x} = 0.1788762$ $a_{1y} = 0.3557727$ $b_{1x} = 0.9144578$
$\theta_{32} = 20^\circ$ $\theta_{33} = 0^\circ$ $\theta_{34} = 0^\circ$	$\theta_{32} = 0^\circ$ $\theta_{33} = 0^\circ$ $\theta_{34} = 60^\circ$	$\theta_{32} = 0^\circ$ $\theta_{33} = 20^\circ$ $\theta_{34} = 40^\circ$	$\theta_{32} = -5^\circ$ $\theta_{33} = -18^\circ$ $\theta_{34} = -35^\circ$
$r_{e2} = 3$ $r_{e3} = 0.5$ $r_{e4} = 0.5$	$r_{e2} = 3$ $r_{e3} = 0.5$ $r_{e4} = 0.5$	$r_{e2} = 3$ $r_{e3} = 0.5$ $r_{e4} = 0.5$	$r_{e2} = 2.6$ $r_{e3} = 0.6$ $r_{e4} = 0.6$

Con esto se tiene un sistema de 3 ecuaciones con 6 coordenadas incógnitas, para resolver se sugieren arbitrariamente 3 de las coordenadas incógnitas, para este problema fueron (a_{1x}, a_{1y}, b_{1x}) . El problema se desarrolló con cuatro propuestas de diseño y además se sugieren los valores de los ángulos θ_{3j} para cada una de ellas, las cuales se presentan en la tabla 4.1, y con esto ser utilizadas en la ecuación 4.1. Esta ecuación define los ángulos θ_{4j} y con esto se tienen los datos angulares necesarios para ser usados en las matrices de desplazamiento.

A partir de la solución de las ecuaciones se muestran las coordenadas de los puntos solución (b_{1y}, c_{1x}, c_{1y}) en la tabla 4.2. Las soluciones de la tabla 4.2 obtenidas con las matrices de desplazamiento, son las mismas que se obtienen mediante la síntesis con el método de números complejos del artículo de **Sandor** [4].

Tabla 4.2 Resultados de la síntesis cinemática.

Propuesta 1	Propuesta 2	Propuesta 3	Propuesta 4
$b_{1y} = -1.109439$	$b_{1y} = 0.262982$	$b_{1y} = -1.354616$	$b_{1y} = 0.605182$
$c_{1x} = -0.306129$	$c_{1x} = 0.446882$	$c_{1x} = -0.892323$	$c_{1x} = 0.418876$
$c_{1y} = -0.640501$	$c_{1y} = 0.873533$	$c_{1y} = -1.608093$	$c_{1y} = 1.106081$

4.1.3 Radios de Engranés

Para poder encontrar los radios de paso de los engranes presentes en el mecanismo, se tienen dos ecuaciones: una de ellas asocia los radios a la longitud del eslabón y la otra los radios a la razón de engranes. A continuación se muestra su aplicación para cada engrane.

Engranés A – B₁

A partir de la figura 4.2, la longitud del eslabón $(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0)$ y la razón de engranes se expresan como:

$$r_A + r_{B1} = \|(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0)\|$$

$$\frac{r_A}{r_{B1}} = r_{e2}$$

Engranés B₂ – C₁

A partir de la figura 4.3, la longitud del eslabón $(\mathbf{c}_1 - \mathbf{a}_1)$ y la razón de engranes se expresan como:

$$r_{B2} + r_{C1} = \|(\mathbf{c}_1 - \mathbf{a}_1)\|$$

$$\frac{r_{B2}}{r_{C1}} = r_{e3}$$

Engranes C₂ – D

A partir de la figura 4.4, la longitud del eslabón ($\mathbf{b}_1 - \mathbf{c}_1$) y la razón de engranes se expresan como:

$$r_{C2} + r_D = \|(\mathbf{b}_1 - \mathbf{c}_1)\|$$
$$\frac{r_{C2}}{r_D} = r_{e4}$$

Los mecanismos encontrados utilizando el programa *MATHEMATICA* [11], se muestran a continuación.

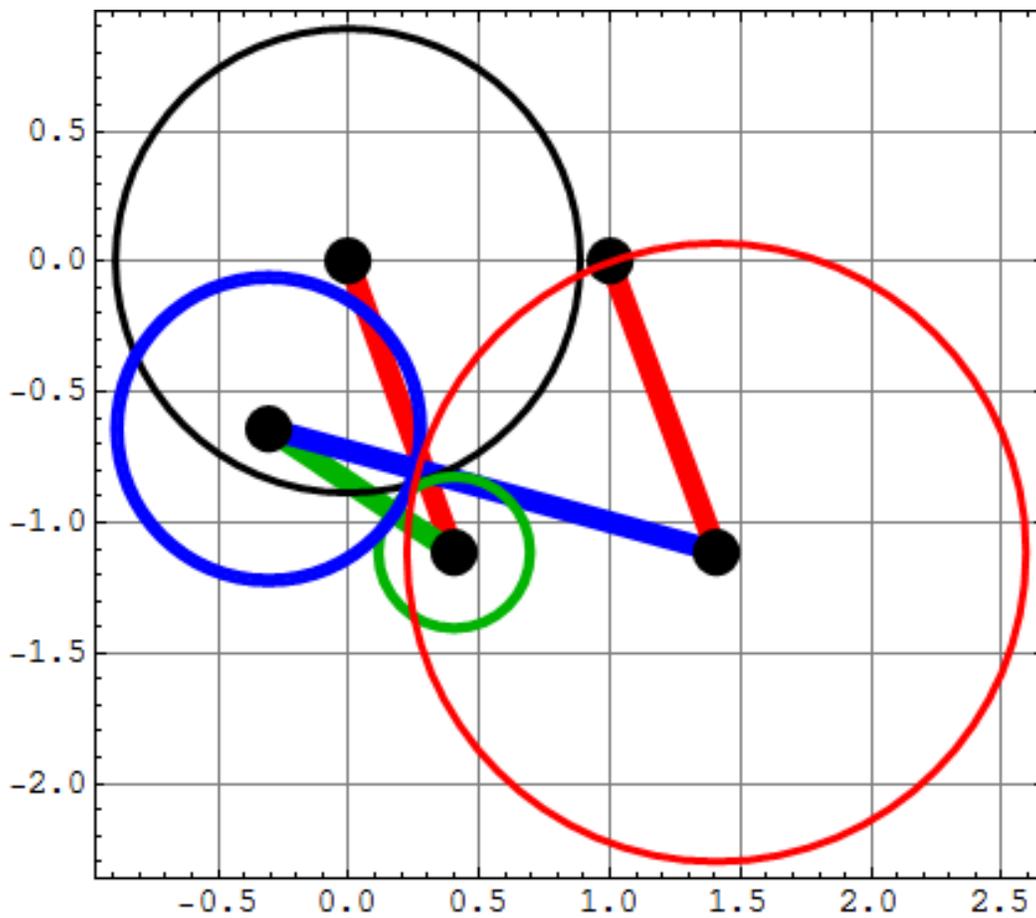


Figura 4.5 Propuesta 1

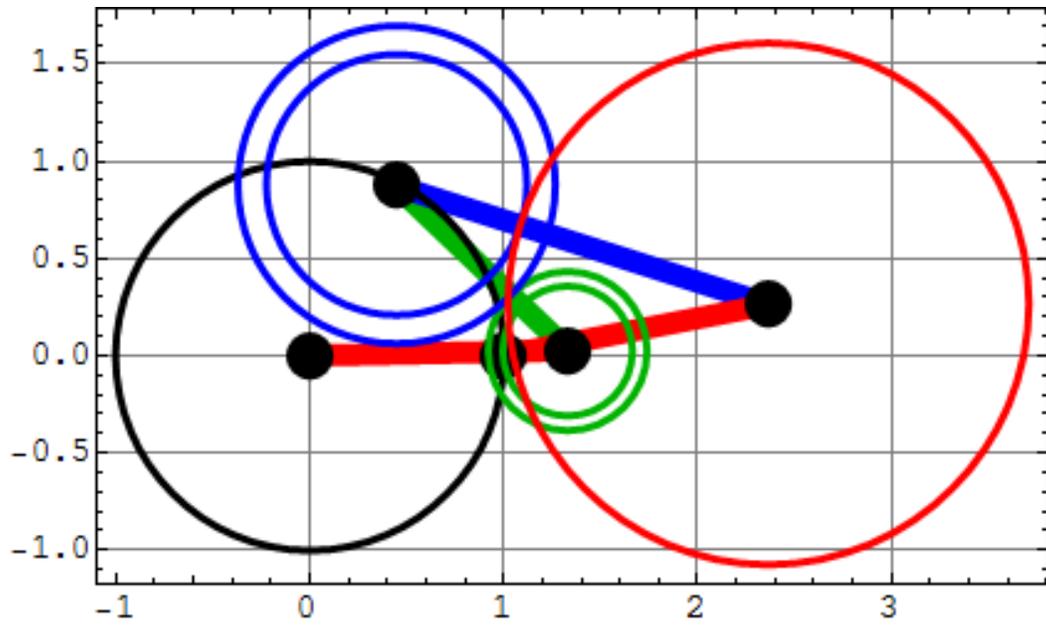


Figura 4.6 Propuesta 2

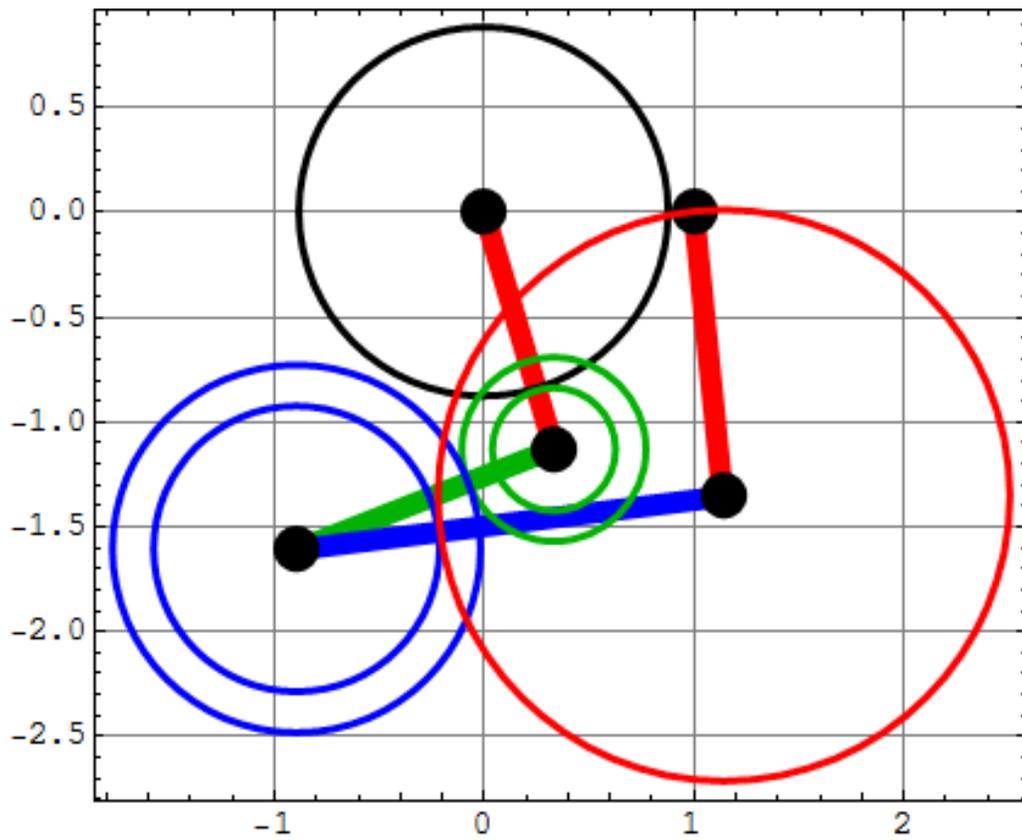


Figura 4.7 Propuesta 3

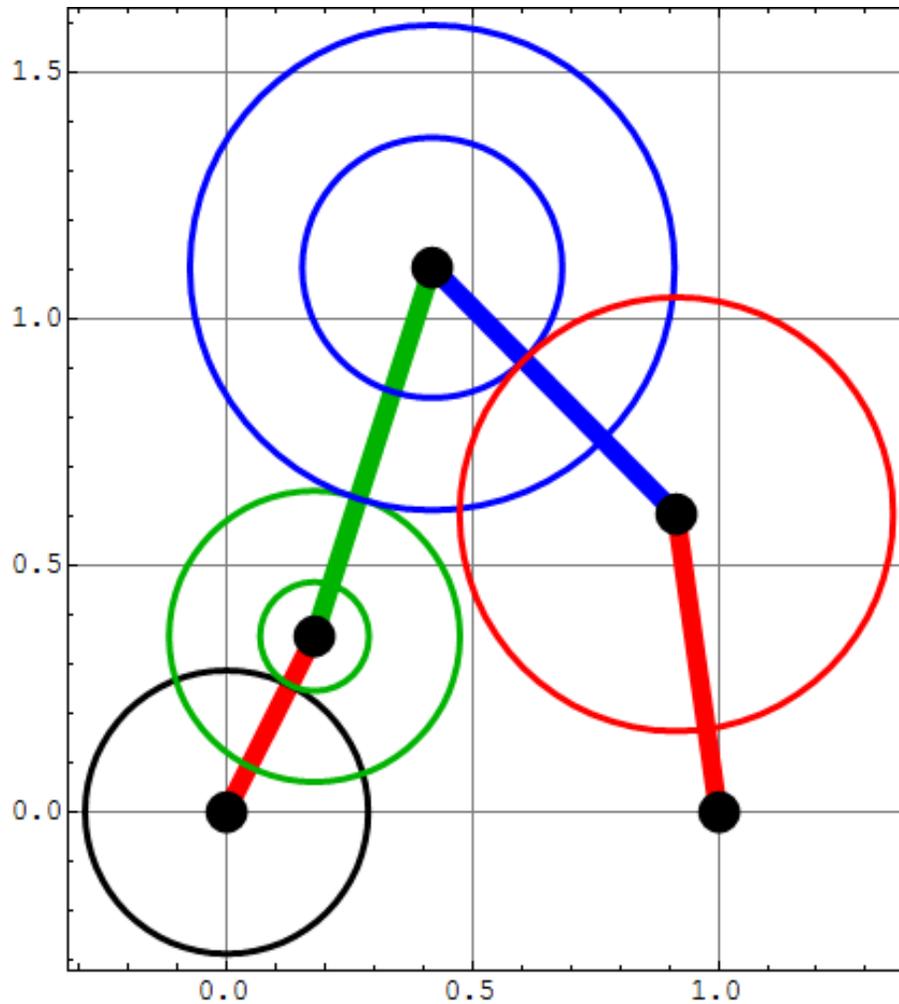


Figura 4.8 Propuesta 4

Mediante la simulación de la solución de la posición se percibe que las tres primeras soluciones no cumplen las especificaciones de diseño, ya que se traban en su trayectoria o no pasan por los puntos de precisión establecidos. El cuarto ejemplo es el mecanismo que presenta continuidad en el movimiento, además de cumplir con los puntos de posición para el que fue diseñado.

Los resultados obtenidos son los mismos que se encontraron utilizando el método con números complejos para cuatro puntos de precisión. Con esto se establece que este método de síntesis con matrices de desplazamiento puede ser usado para este tipo de mecanismos.

4.2 Diseño Estático

A continuación se mostrará la aplicación de las ecuaciones de diseño cinemático y estático desarrolladas, a un problema para controlar los ángulos de las barras de entrada y salida de un mecanismo, además de poder soportar cargas externas aplicadas a él.

4.2.1 Ecuaciones de Diseño

De las ecuaciones de diseño cinemático se tiene:

$$r_{e2} = \frac{T_A}{T_{B1}} \quad r_{e3} = \frac{T_{B2}}{T_{C1}} \quad r_{e4} = \frac{T_{C2}}{T_D}$$

$$\begin{aligned} Q &= 1 + r_{e4} \\ M &= r_{e4} + r_{e3}r_{e4} \\ S &= r_{e3}r_{e4} + r_{e2}r_{e3}r_{e4} \end{aligned}$$

$$\theta_{4j} = \frac{1}{Q}(\theta_{5j} + M\theta_{3j} - S\theta_{2j}) \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} [A_{1j}] &= \begin{bmatrix} [R_{\theta 2j}] & (\mathbf{a}_0 - [R_{\theta 2j}]\mathbf{a}_0) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_j &= [A_{1j}]\mathbf{a}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [B_{1j}] &= \begin{bmatrix} [R_{\theta 3j}] & (\mathbf{a}_j - [R_{\theta 3j}]\mathbf{a}_1) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_j &= [B_{1j}]\mathbf{c}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [C_{1j}] &= \begin{bmatrix} [R_{\theta 4j}] & (\mathbf{c}_j - [R_{\theta 4j}]\mathbf{c}_1) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{b}_j &= [C_{1j}]\mathbf{b}_1 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_0)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_0) = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)^T (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \quad (4.7)$$

En cuanto a la síntesis estática, a partir de la ecuación 3.73:

$$\begin{aligned} T_{2j} + h_{5j} + M_{nj} h_{2j} - k_3(l_{1j} - l_{11})h_{3j} \\ -k_4(l_{2j} - l_{21})h_{4j} - k_2\beta_{2j} - S k_5\beta_{5j} = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

El mecanismo es diseñado para cumplir posiciones prescritas y especificaciones de fuerza para tres puntos de precisión. Para esto se trabajó con cuatro casos distintos, el primero de ellos se establece a continuación. En la figura 3.3 se presentan las juntas del mecanismo y se proponen para la ecuación cinemática 4.7 los puntos \mathbf{a}_0 y \mathbf{b}_0 .

$$\mathbf{a}_0 = [0, 0, 1]^T$$

$$\mathbf{b}_0 = [0.07, 0, 1]^T$$

De la figura 3.2 se tienen los puntos \mathbf{R}_o y \mathbf{R}_p en donde se encuentran conectados a tierra los resortes lineales, estos datos también son propuestos y son los siguientes:

$$\mathbf{R}_o = [-0.01, 0.02, 1]^T$$

$$\mathbf{R}_p = [-0.01, 0.03, 1]^T$$

Las relaciones propuestas presentes en los engranes son:

$$r_{e2} = 1$$

$$r_{e3} = 1$$

$$r_{e4} = 2$$

Se tienen los ángulos θ_{2j} y θ_{5j} que corresponden a la rotación de los eslabones de entrada y salida del mecanismo para tres puntos de precisión, estos son los siguientes:

$$\theta_{22} = 30^\circ$$

$$\theta_{23} = 100^\circ$$

$$\theta_{52} = 15^\circ$$

$$\theta_{53} = 65^\circ$$

Para la ecuación estática 4.8 se tiene al torque constante de entrada T_{2j} :

$$T_{2j} = 1 \text{ Nm}$$

La carga en la mano aplicada en el punto \mathbf{n}_j del mecanismo, se tomó como el peso de una botella de agua de 1 ½ litro de capacidad igual a 14.715 N, la cual quedó establecida en el vector de peso $\mathbf{F}_{n_j} = [14.715, 0]^T$, este dato es el mismo para cada una de las propuestas de diseño. Al no generarse ningún par en el punto \mathbf{n}_j se tiene que el momento M_{n_j} de la ecuación estática es nulo. También este valor se utiliza para todas las propuestas.

Por otro lado el ángulo θ_{4j} se encuentra en función del ángulo θ_{3j} y de los ángulos de los eslabones de entrada y salida del mecanismo, este se obtiene haciendo uso de la ecuación

4.6. El ángulo θ_{3j} se establece como variable y al tener 3 puntos de precisión a resolver se tienen dos incógnitas para este ángulo. Las incógnitas para la ecuación cinemática 4.7 son las juntas del mecanismo \mathbf{a}_1 , \mathbf{b}_1 y \mathbf{c}_1 , las cuales son seis variables a determinar:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= [a_{1x}, a_{1y}, 1]^T \\ \mathbf{b}_1 &= [b_{1x}, b_{1y}, 1]^T \\ \mathbf{c}_1 &= [c_{1x}, c_{1y}, 1]^T\end{aligned}$$

Con esto se tienen ocho variables a resolver con dos ecuaciones cinemáticas y dos ecuaciones estáticas.

La inclusión de resortes al mecanismo añade a las ecuaciones de diseño nuevas variables, con esto es posible encontrar nuevos puntos de precisión y la presencia de estos elementos en el sistema no genera más ecuaciones de diseño. Las deflexiones angulares de los resortes torsionales son los ángulos de cada j -ésima posición de los eslabones en donde estos se encuentran ensamblados y quedaron establecidas en las ecuaciones 3.40 y 3.45:

$$\begin{aligned}\beta_{2j} &= \theta_{2j} \\ \beta_{5j} &= \theta_{5j}\end{aligned}$$

Las constantes elásticas de los resortes presentes en la ecuación 4.8 son:

$$\begin{aligned}k_3 \text{ y } k_4, & \text{ las constantes elásticas de los resortes lineales} \\ k_2 \text{ y } k_5, & \text{ las constantes elásticas de los resortes de torsión}\end{aligned}$$

Estas constantes de los resortes añaden al problema cuatro incógnitas más, teniendo con esto un total de doce incógnitas para las cuatro ecuaciones de diseño. Por otro lado, es necesario establecer los ángulos presentes en los eslabones que definen los puntos en donde se conectan los resortes lineales al mecanismo, así como el punto en donde se aplica la fuerza en el sistema. Para esto se utiliza la definición de ángulo entre dos vectores por medio del producto punto. En la figura 3.3 se presentan los eslabones con los ángulos mencionados y estos son propuestos para ser utilizados en esta definición, en el ejemplo uno se tiene:

$$\begin{aligned}\theta_{3r} &= 57^\circ \\ \theta_{4r} &= 13^\circ \\ \theta_{4c} &= 40^\circ\end{aligned}$$

Se tiene con esto definido a cada uno de los ángulos de los eslabones de la siguiente manera:

$$\theta_{3r} = \frac{(\mathbf{c}_j - \mathbf{a}_j)(\mathbf{r}_{1j} - \mathbf{a}_j)}{\|\mathbf{c}_j - \mathbf{a}_j\| \|\mathbf{r}_{1j} - \mathbf{a}_j\|}$$

$$\theta_{4r} = \frac{(\mathbf{b}_j - \mathbf{c}_j)(\mathbf{r}_{2j} - \mathbf{c}_j)}{\|\mathbf{b}_j - \mathbf{c}_j\| \|\mathbf{r}_{2j} - \mathbf{c}_j\|}$$

$$\theta_{4c} = \frac{(\mathbf{b}_j - \mathbf{c}_j)(\mathbf{n}_j - \mathbf{c}_j)}{\|\mathbf{b}_j - \mathbf{c}_j\| \|\mathbf{n}_j - \mathbf{c}_j\|}$$

Para cada uno de los puntos de precisión se aplica esta definición, obteniendo con esto 3 ecuaciones para cada eslabón. Esto da por resultado nueve ecuaciones de producto punto, que al integrarse con las ecuaciones de diseño tanto cinemática como estática dan lugar a un total de trece ecuaciones con doce incógnitas a resolver.

Para restringir al mecanismo y este cumpla con la trayectoria de puntos \mathbf{n}_j en donde es aplicada la fuerza externa, es necesario establecer la siguiente matriz de desplazamiento, en donde la primera posición \mathbf{n}_1 sirve de pivote con respecto a los otros puntos \mathbf{n}_2 y \mathbf{n}_3 .

$$[\mathbf{F}_{1j}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{\alpha_j}] & (\mathbf{n}_j - [\mathbf{R}_{\theta_{4j}}]\mathbf{n}_1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_j = [\mathbf{F}_{1j}]\mathbf{b}_1$$

4.2.2 Soluciones

Se utilizó el programa *MATHEMATICA* [11] para solucionar a cada uno de los ejemplos con los que se trabajó. La solución para los puntos móviles, las constantes elásticas de los resortes y los ángulos θ_{3j} obtenidos para el primer caso en el cual el torque de entrada es constante se presenta a continuación:

$$\mathbf{a}_1 = [0.0124441, 0.0377753, 1]^T$$

$$\mathbf{b}_1 = [0.0126036, 0.00718803, 1]^T$$

$$\mathbf{c}_1 = [-0.0318044, 0.0182958, 1]^T$$

$$k_2 = -927.212 \text{ N/m}$$

$$k_3 = -362.336 \text{ N/m}$$

$$k_4 = -169.25 \text{ N/m}$$

$$k_5 = -237.268 \text{ N/m}$$

$$\theta_{32} = 1.67536 \text{ rad}$$

$$\theta_{33} = -2.79325 \text{ rad}$$

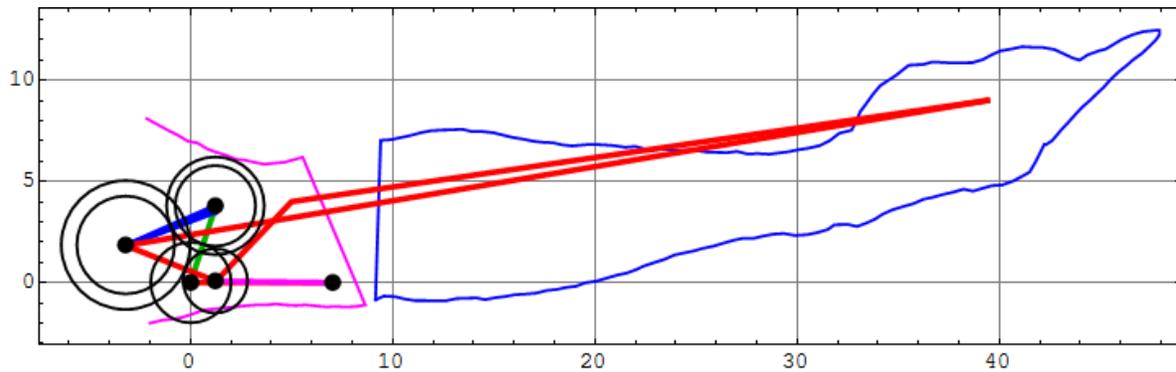


Figura 4.9

La gráfica de la solución se presenta en la figura 4.9.

En el caso de la segunda propuesta los puntos fijos, las relaciones de los engranes, los ángulos θ_{2j} y θ_{5j} , son los mismos que se utilizaron en el primer ejemplo, el torque de entrada T_{2j} , también es constante y su valor es:

$$T_{2j} = 1.4 \text{ Nm}$$

En cuanto a los ángulos de los eslabones para el segundo ejemplo, se tiene:

$$\theta_{3r} = 57^\circ$$

$$\theta_{4r} = 33^\circ$$

$$\theta_{4c} = 50^\circ$$

La solución para la segunda propuesta, en donde el torque de entrada también es constante se presenta a continuación:

$$\mathbf{a}_1 = [0.0208868, 0.0270383, 1]^T$$

$$\mathbf{b}_1 = [0.0149727, -0.00586733, 1]^T$$

$$\mathbf{c}_1 = [-0.0213889, 0.0153802, 1]^T$$

$$k_2 = 322.96 \text{ N/m}$$

$$k_3 = 102.48 \text{ N/m}$$

$$k_4 = 116.703 \text{ N/m}$$

$$k_5 = 181.873 \text{ N/m}$$

$$\theta_{32} = 2.00401 \text{ rad}$$

$$\theta_{33} = -2.73792 \text{ rad}$$

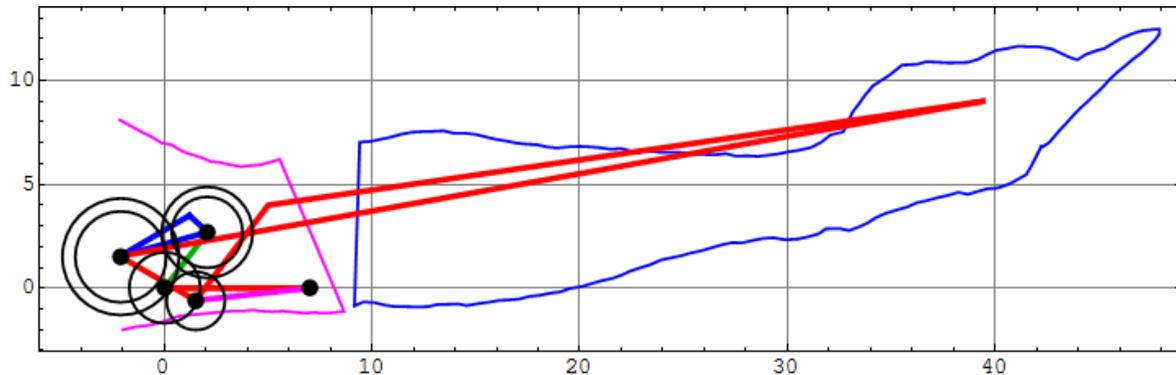


Figura 4.10

La gráfica de la solución se presenta en la figura 4.10.

Para la tercera propuesta los puntos fijos, las relaciones de los engranes, los ángulos θ_{2j} y θ_{5j} , son los mismos que se utilizaron en el primer ejemplo. En cambio el torque de entrada T_{2j} en este caso es variable y sus valores son:

$$T_{22} = 1.4 \text{ Nm}$$

$$T_{23} = 1.2 \text{ Nm}$$

Los ángulos de los eslabones del tercer ejemplo son los mismos que los del segundo. La solución para la tercera propuesta se presenta a continuación:

$$\mathbf{a}_1 = [0.0252599, 0.0250327, 1]^T$$

$$\mathbf{b}_1 = [0.018604, 0.00247652, 1]^T$$

$$\mathbf{c}_1 = [-0.00668219, 0.0137034, 1]^T$$

$$k_2 = -174.547 \text{ N/m}$$

$$k_3 = -156.571 \text{ N/m}$$

$$k_4 = 136.337 \text{ N/m}$$

$$k_5 = -90.1278 \text{ N/m}$$

$$\theta_{32} = 1.88842 \text{ rad}$$

$$\theta_{33} = 1.86978 \text{ rad}$$

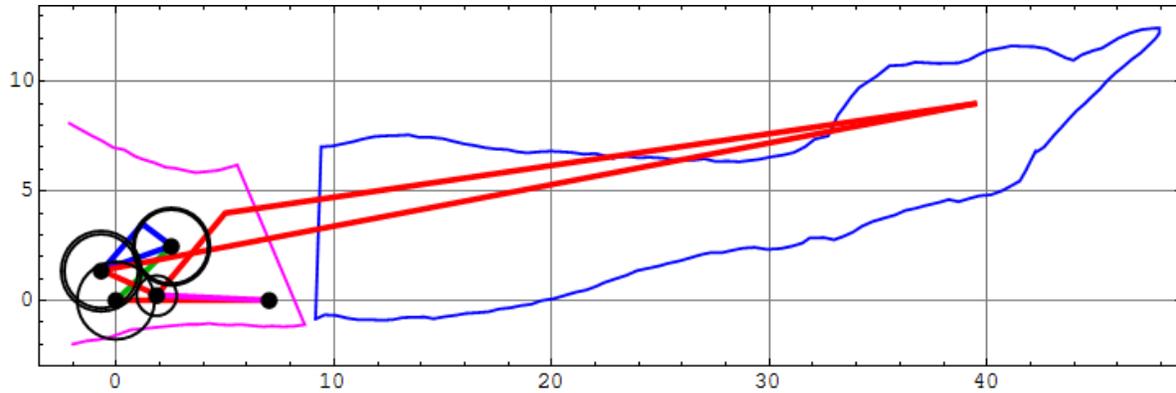


Figura 4.11

La gráfica de la solución se presenta en la figura 4.11.

En la cuarta propuesta los puntos fijos, las relaciones de los engranes, los ángulos θ_{2j} y θ_{5j} , son los mismos que se utilizaron en el primer ejemplo. El torque de entrada T_{2j} también es variable y sus valores son:

$$T_{22} = 1.6 \text{ Nm}$$

$$T_{23} = 1.4 \text{ Nm}$$

Los ángulos de los eslabones para el cuarto ejemplo también son los mismos que los del segundo. La solución para esta propuesta se presenta a continuación:

$$\mathbf{a}_1 = [0.0252599, 0.0250327, 1]^T$$

$$\mathbf{b}_1 = [0.018604, 0.00247652, 1]^T$$

$$\mathbf{c}_1 = [-0.00668219, 0.0137034, 1]^T$$

$$k_2 = -148.192 \text{ N/m}$$

$$k_3 = -77.962 \text{ N/m}$$

$$k_4 = 294.152 \text{ N/m}$$

$$k_5 = -42.0144 \text{ N/m}$$

$$\theta_{32} = 1.88842 \text{ rad}$$

$$\theta_{33} = 1.86978 \text{ rad}$$

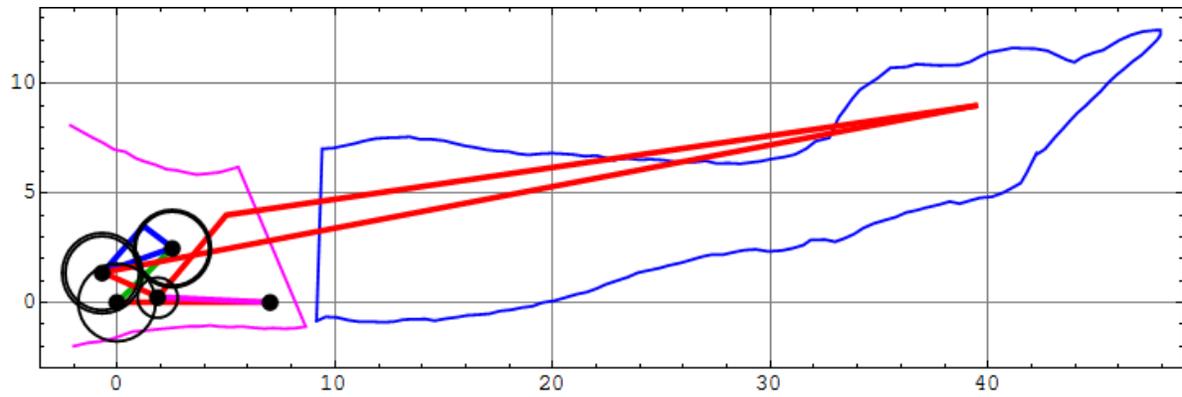


Figura 4.12

La gráfica de la solución se presenta en la figura 4.12.

Capítulo 5 Conclusiones

La contribución de esta tesis es desarrollar un proceso de síntesis estática de un mecanismo que pueda servir como transmisión, la cual está constituida de eslabones, engranes y resortes, con la finalidad de reducir el torque de entrada del motor para mover una carga en el extremo de una prótesis de brazo.

Dicho proceso permite determinar las dimensiones longitudinales de los eslabones, los radios de paso de los engranes y las constantes elásticas de los resortes presentes en un mecanismo de un grado de libertad, el cual tiene la capacidad de seguir los puntos de una trayectoria previamente establecida, en los cuales este pueda soportar cargas prescritas aplicadas en él a través de una prótesis en donde este se encuentra instalado.

El proceso de síntesis se estableció como una combinación de síntesis cinemática y síntesis estática. A su vez en la síntesis cinemática, se resolvieron dos problemas clásicos de la misma, que fueron: el control de la posición de eslabones de entrada y salida (generación de función) y el de seguimiento de un punto en el plano (generación de trayectoria).

Este último problema de generación de trayectoria, permitió acoplar los puntos donde se aplicaron las cargas, al resto de los eslabones. Así se pudo controlar mucho mejor el giro del codo de la prótesis donde la transmisión trabaja, de tal manera que el centro de rotación del codo no generó grandes desplazamientos y de esa manera mostró un movimiento más natural.

Por otra parte, en la síntesis estática quedaron establecidas las cargas ejercidas en el extremo de la prótesis y en los eslabones del mecanismo, mediante el principio de trabajo virtual. Dicho principio elimina variables indeseables de diseño como son las fuerzas de reacción que surgen al establecer ecuaciones de equilibrio estático mediante la suma de fuerzas y momentos. De esta manera fue posible relacionar los efectos del torque del motor en el eslabón de entrada, las fuerzas de resortes lineales y torsionales y el peso que la prótesis transporta, a las coordenadas de los pivotes que forman el mecanismo.

Además los resortes del mecanismo no solo tienen la función de soportar carga, si no desde el punto de vista de la síntesis, permiten incrementar el número de posiciones de diseño, ya que añaden incógnitas para el mismo número de ecuaciones y por consecuencia se pueden añadir más puntos en la trayectoria a seguir.

En los mecanismos solución obtenidos, el torque de entrada en los puntos de diseño, se trató de controlar para que no excedieran los 1.6 Nm , esto con el propósito de mejorar dicha prestación en comparación con las prótesis comerciales presentes en el mercado, las cuales requieren más de 4 Nm para llevar a cabo esta tarea. En base a esto, los beneficios para el usuario de esta prótesis serían el utilizar un motor más pequeño y por consiguiente de menor peso.

Aunque esto sugiere una mejora, no se debe perder de vista que se tiene una transmisión que puede generar un incremento de peso en la prótesis, además del problema inherente de la manufactura de los eslabones, de los engranes, del diseño de los resortes con la constante de rigidez requerida y la localización de sus extremos dentro del pequeño volumen de la prótesis, situaciones de diseño que no fueron exploradas en la presente tesis.

Por otra parte, el proceso de síntesis cinemática suele ser abordado empleando los métodos de números complejos o matrices de desplazamiento (matrices que contienen información de la posición y orientación de los cuerpos). La razón por la cual se decidió utilizar matrices de desplazamiento, es porque a futuro se desea extender este trabajo a otras articulaciones del cuerpo humano en donde los movimientos que se presentan no son únicamente planos, como fue el caso del codo con que se trabajó, dichas articulaciones generan movimientos espaciales, los cuales pueden ser representados de manera directa y simple mediante matrices, lo cual representa una ventaja respecto al método con números complejos, ya que como se sabe está restringido a movimientos planos.

De lo anterior, se tiene planeado trabajar en el hombro, en donde se desea implementar un sistema como el utilizado en el codo, para llevar a cabo actividades cotidianas donde el tipo de movimiento requerido en la articulación es espacial.

Dentro del desarrollo de este trabajo no se tiene un índice de mérito, que permita evaluar si los mecanismos solución tienen la capacidad de cumplir con un movimiento suave durante su trayectoria establecida, por lo tanto es posible que se presenten aceleraciones altas y no deseables. Tampoco se puede garantizar que entre los eslabones y engranes exista una adecuada transmisión de fuerza, por ello no se sabe si los mecanismos puedan llegar a flexionarse de manera excesiva en sus componentes e incluso trabarse en el transcurso de su movimiento. Dicho índice es conocido como ángulo de transmisión, y que a futuro tiene que ser desarrollado para la elección correcta de la transmisión.

Referencias

- [1] Maira Gloria Pérez Vielma. **Diseño de Prótesis mecatrónica de codo con dos movimientos, flexión-extensión y prono-supinación.** Tesis en Ingeniería Mecatrónica. Junio 2008.
- [2] Oleksa, Stephen Alexander, **Generalized Synthesis of the Geared Five-Bar Mechanism for Function Generator,** Master's Thesis, University of Florida, June 1970.
- [3] Oleksa, S.A., Tesar, D. **Multiply Separated Position Design of the Geared Five-Bar Function Generator.** Transactions of the ASME, Paper No. 70-Mech 16. July 1970.
- [4] George N. Sandor. **Kinematic Synthesis of Geared Linkages.** Journal of Mechanisms. Volume 5. December 1970. Pages 59 – 87.
- [5].– Arthur G. Erdman & George N. Sandor. **Advanced Mechanism Design – Analysis and Synthesis Volume 2.** First Edition 1984. Prentice Hall.
- [6] Venkat Krovi, G.K. Ananthasuresh, Vijay Kumar. **Kinetostatic Synthesis of Coupled Serial Chains,** ASME Design Engineering Technical Conferences, September 13-16, 1998, Atlanta, Georgia, USA.
- [7] Suh, Chung Ha, Radcliffe, Charles W. **Kinematic and Mechanisms Design,** Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar Florida, 1983
- [8] Arthur G. Erdman & George N. Sandor. **Mechanism Design – Analysis and Synthesis Volume 1.** Third Edition 1997. Prentice Hall.
- [9] Huang, C., Roth, B. **Dimensional Synthesis of Closed-Loop Linkages to Match Force and Position Specifications.** Transactions of the ASME, June 1993.
- [10] Shabana, Ahmed A. **Computational Dynamics.** Second Edition. John Wiley & Sons, Inc. 2001.
- [11] Wellin, Paul. Kamin, Sam and Gaylord, Richard. **An Introduction to Programming with MATHEMATICA.** Third Edition. Cambridge University Press. 2005.