"Sobre Ideales Cerrados y Finitamente Generados en Algebras Topológicas de Funciones Continuas y las Algebras $C_b(X, A)$ y $C_p(X, A)$"

Alejandra García García

Mayo 2011

Índice general

Introducción **VII**

1. Preliminares **1**
1.1. Sobre espacios completamente regulares y espacios de funciones . . . 2
1.2. Ideales máximos en espacios de funciones continuas 3
1.3. Algebras Topológicas 7
1.3.1. Algebras m-convexas 10

2. Algunos resultados sobre $(C_b(X), \beta)$ **15**
2.1. Ideales finitamente generados en$(C_b(X), \beta)$ 18

2.2. Sucesiones de funciones en $(C_b(X), \beta)$. 20

3. Sobre las algebras $C_b(X, A)$ **y** $C_p(X, A)$ **25**

3.1. El espacio de ideales máximos en algebras localmente m-convexas . . 25
3.2. Las algebras $C_b(X, A)$ y $C_p(X, A)$ 27
3.3. Un Homomorfismo definido en $C_b(X, A)$ 30

3.4. Sobre la m-convexidad de $C_b(X, A)$ y $C_p(X, A)$ 35
3.5. Condiciones de m-convexidad para el álgebra $(C_b(X, A), \beta)$ 39
3.6. Espectros e Invertibilidad en $C_b(X, A)$ y $C_p(X, A)$ 41

3.6.1. Espectros en $C_p(X, A)$ 41
3.6.2. Algo de invertibilidad 42

4. Govaerst y las familias de Nachbin **49**
4.1. Algunos ejemplos 55

A. Conceptos de Topología **57**

Bibliografía **61**

Agradecimientos

Introducción

En las matemáticas, específicamente en el Análisis Funcional, se estudian a los espacios vectoriales topológicos sobre un campo $\mathbb{F}$, el cual usualmente es el campo de los números reales o complejos. Más aún, dentro de estos existen espacios vectoriales topológicos con una estructura algebraica adicional, a los cuales llamamos álgebras topológicas. En este trabajo, nuestro objeto de estudio son precisamente las álgebras topológicas.

Un álgebra topológica A es un álgebra que es un espacio vectorial topológico tal que tiene definida una operación asociativa y continua, llamada multiplicación $(\cdot : A \times A \to A)$, donde $A \times A$ tiene la topología producto. Si A es un álgebra topológica de tal manera que como espacio topológico es un espacio de Banach, decimos que es un álgebra de Banach.

El estudio de las álgebras topológicas, en particular de las álgebras de Banach, comienza en el siglo XX y se origina al observar que algunos espacios de Banach tienen propiedades interesantes cuando se les dota de una operación extra, la multiplicación.

Un ejemplo conocido es el espacio de todos los operadores lineales y acotados definidos en un espacio de Banach, pero otros que son de suma importancia son los espacios de funciones: ya sea de funciones continuas, acotadas, que se anulan al infinito, etc. ó funciones con serie de Fourier absolutamente convergente. Gracias a las propiedades que tienen este tipo de álgebras de funciones, han hecho que las álgebras topológicas se hayan convertido en un área con una variedad de aplicaciones.

El propósito de este trabajo es presentar resultados que hemos obtenido sobre álgebras topológicas de funciones continuas definidas en un espacio completamente regular X, no sólo para funciones con valores en los complejos sino que también para funciones con valores en un álgebra topológica A.

La clase de álgebras topológicas sobre las que nos interesa trabajar en esta Tesis son las álgebras localmente convexas. Donde A es un álgebra localmente convexa si es un álgebra topológica de tal manera que como espacio topológico es un espacio localmente convexo; es decir, su topología esta dada por una familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ que satisfacen la condición: $\forall\alpha \in \Lambda$, $\exists\beta \in \Lambda$ tal que $\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \|y\|_\beta$ para todo $x, y \in A$.

Dentro de las álgebras topológicas localmente convexas destacan las álgebras de Banach y las localmente m-convexas, estas últimas se caracterizan porque sus topologías están dadas por seminormas submultiplicativas.

Algunos de los resultados que se presentan en este trabajo requieren para su demostración una base de topología, más precisamente de la Teoría de los primeros capítulos del libro de Gillman-Jerison [11] y de la cual mencionamos lo más importante en la sección 1.2 del primer capítulo.

Decimos que un álgebra A tiene unidad si existe un elemento e en A tal que $e \cdot a = a \cdot e = a$ para cada elemento $a \in A$.

Por otro lado, el papel importante de las álgebras de Banach conmutativas radica en la Teoría de Gelfand; es decir, en la relación entre sus funcionales lineales multiplicativos y sus ideales máximos, así como el espectro de sus elementos. Por lo que en la sección 1.3 del primer capítulo, además de dar conceptos básicos de las álgebras topológicas damos resultados importantes acerca de las álgebras de Banach, todos estos relacionados con la Teoría de Gelfand, donde el resultado que nos interesa es el Teorema de Gelfand-Mazur, el cual nos dice que: si un álgebra de Banach es un álgebra con división, entonces es isomorfa a $\mathbb{C}$ el campo de los números complejos.

Por ultimo, en este capítulo dedicamos una pequeña sección a las álgebras m-convexas, debido a que si tenemos un álgebra m-convexa completa, conmutativa con unidad esta se puede ver como el límite inverso de álgebras de Banach.

En el Capítulo 2, damos dos resultados nuevos acerca de $(C_b(X), \beta)$, el álgebra de todas las funciones con valores en $\mathbb{F}$, continuas y acotadas definidas en X, con las operaciones algebraicas usuales y dotado con la topología estricta β; es decir, la topología dada por las seminormas $\|f\|_{\varphi} = \sup_{x \in X} |f(x)|\, |\varphi(x)|$, $f \in C_b(X)$, $\varphi \in B_0(X)$, donde $B_0(X)$ es el espacio de todas las funciones definidas de X en $\mathbb{R}$ que se anulan al infinito. Estos resultados forman parte de un artículo del cual la autora de esta Tesis es coautora.

En este Capítulo definimos la propiedad de la síntesis espectral para un álgebra conmutativa con unidad, donde un álgebra conmutativa con unidad A tiene esta propiedad si y sólo si todo ideal cerrado es la intersección de ideales máximos cerrados de A de codimensión 1. En Arizmendi-Carrillo-García [3] se prueba que $(C_b(X), \beta)$ tiene la propiedad de la síntesis espectral (p.s.s.). Con esto, en la sección 2.1 probamos el primero de estos resultados, el cual nos dice que si X es un espacio conexo y de Fréchet-Urysohn, entonces $(C_b(X), \beta)$ no tiene ideales propios, cerrados y finitamente generados. Esto último implica que todo elemento no cero y no invertible es un divisor topológico de cero.

En la sección 2.2, además de presentar el segundo resultado importante, definimos el espectro tanto para un elemento como para eneadas de elementos de un álgebra topológica con unidad.

Sea A un álgebra m-convexa conmutativa. Denotamos por $\mathfrak{M}(A)$ al espacio de todos los funcionales lineales, multiplicativos, continuos y no nulos de A; y por $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ al espacio de todos los funcionales lineales, multiplicativos y no cero de A, ambos dotados con la topología débil estrella (w^*). Observemos que $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ solamente depende de la estructura algebraica de A y no se modifica si cambiamos la topología de A. Sin embargo, $\mathfrak{M}(A)$ depende de la topología que le asignemos a A.

Para un álgebra m-convexa, compleja , conmutativa, metrizable, completa y con unidad sabemos que todo funcional lineal multiplicativo no nulo es continuo en subalgebras finitamente generadas, pero esto no necesariamente sucede para subalgebras numerablemente generadas. Aunque $(C_b(X), \beta)$ no siempre es un álgebra m-convexa, probamos que si X es un espacio seudocompacto, entonces todo funcional lineal multiplicativo no nulo de $(C_b(X), \beta)$ es continuo en subalgebras numerablemente generadas.

En esta Tesis también estudiamos a los espacios de ideales máximos de álgebras topológicas de funciones continuas A-valuadas, definidas en un espacio completamente regular; donde A es un álgebra topológica conmutativa, con unidad, de Banach o m-convexa. Por lo que en el Capítulo 3 definimos al álgebra $C(X, A)$ de todas las funciones continuas A-valuadas y definidas en X, para A un álgebra localmente m-convexa conmutativa y X un espacio completamente regular. Con respecto a esta álgebra, en la sección 3.1 desarrollamos parte del artículo *On the ideal structure of algebras of LMC-algebra valued functions* de J. Arhippainen [1], donde se prueba que si $C(X, A)$ tiene asignada la topología compacto abierta $\mathcal{K}$, entonces tenemos la igualdad $\mathfrak{M}(C(X, A), \mathcal{K}) = X \times \mathfrak{M}(A)$ siempre que $\mathfrak{M}(A)$ sea un conjunto equicontinuo.

El resto del capítulo está dedicado a desarrollar, en el contexto de las álgebras de Banach o m-convexas, la teoría de las álgebras $C_b(X, A)$, de todas las funciones continuas y acotadas de X en A, y $C_p(X, A)$, el espacio de todas las funciones continuas de X en A con $\overline{f(X)}$ un subconjunto compacto de A. De manera que la sección 3.2 la dedicamos a definir la topología del supremo y la topología estricta en dichas álgebras, y demostrar que ambas álgebras dotadas con la topología del supremo son de Banach.

Nuevamente, en la sección 3.3, consideramos a $C_b(X, A)$ y definimos un homomorfismo de este espacio en $C_b(X \times \mathfrak{M}(A))$. Podemos considerar a un álgebra de Banach, compleja, conmutativa con unidad y semisimple A, en este caso dicho homomorfismo encaja al álgebra $C_b(X, A)$ en $C_b(X \times \mathfrak{M}(A))$, esta última isomorfa a $C(\beta(X \times \mathfrak{M}(A)))$. Más aún, esto nos da una caracterización para el espacio de ideales máximos de $C_b(X, A)$, utilizando un resultado que aparece en Royden [18].

En la siguiente sección, definimos a $C_b(X, A)$ y $C_p(X, A)$ para A un álgebra m-convexa completa, conmutativa con unidad. A estas álgebras las dotamos con una topología que las hace álgebras m-convexas, completas, conmutativas con unidad. De manera que cada una de estas se pueden ver como el límite inverso de álgebras de Banach.

Las mismas técnicas que llevan a la caracterización de la m-convexidad de las álgebras $(C_b(X), \beta)$, para un espacio completamente regular, y que se mencionan en el artículo *On the m-convexity of* $C_b(X)$ de Arizmendi-Carrillo [2], con una pequeña modificación, nos han dado las herramientas para mostrar que un álgebra $(C_b(X, A), \beta)$ es m-convexa si y sólo si $B_0(X) = B_{00}(X)$, donde X es un espacio completamente regular y $(A, \|\cdot\|)$ es un álgebra de Banach; mientras que en el caso de que X sea un espacio localmente compacto tenemos que $(C_b(X, A), \beta)$ es m-convexa si y sólo si $C_0(X) = C_{00}(X)$, todo esto lo vemos dentro de la sección 3.5.

Finalmente, ya que en este trabajo consideramos sólo a las álgebras topológicas con unidad, entonces obtenemos que $C_b(X, A)$ y $C_p(X, A)$ son álgebras con unidad. Esto nos permite discutir la invertibilidad de un elemento f en $C_b(X, A)$ (o $C_p(X, A)$

respectivamente). Así, en la última sección del Capítulo 3 discutimos las condiciones necesarias y/o suficientes para que f sea invertible en $C_b(X,A)$ (o $C_p(X,A)$). Al mismo tiempo, mostramos que en $C_p(X,A)$ existe una relación entre el espectro de un elemento f en esta álgebra y el espectro de $\widetilde{f}$, la extensión de f a βX la compactificación de Stone-Čech de X.

En el Capítulo 4, dados un espacio completamente regular X y un algebra localmente convexa A, exponemos los conceptos de Familia de Nachbin, Familia de Nachbin multiplicativa y Familia de Nachbin multiplicativa de tipo puntual. Estas definiciones, dadas en Govaerst [12], las mencionamos aquí para poder expresar al álgebra $(C_b(X,A),\beta)$ como un espacio del tipo $CV(X,A)$, los cuales se conocen como espacios con peso "weighted spaces τ que consisten de todas las funciones continuas f, definidas de X en A, tales que $q_{v,\lambda}(f)=\sup\limits_{x\in X} p_\lambda(v(x)f(x))$ para todo v en una familia de Nachbin V de funciones no negativas en X y $\lambda\in\Lambda$, donde $\{p_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ es la familia de seminormas que generan la topología en A. Así, la prueba de que $\mathfrak{M}(C_b(X,A),\beta)=X\times\mathfrak{M}(A)$ es relativamente sencilla aplicando el Teorema 1 de Govaerst [12].

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introducimos algunos conceptos y resultados básicos que nos servirán para el desarrollo de este trabajo. Empezamos por dar algunas definiciones, y en la sección 1.2 estudiamos resultados sobre el espacio de funciones continuas con valores en el campo de los números reales y definidas en un espacio completamente regular. Por último, en la sección 1.3 definimos conceptos importantes sobre algebras topológicas.

En lo que sigue, consideramos a $\mathbb{F}$ como el campo de los numeros reales o complejos.

Definición 1 *Sea X un conjunto. Decimos que $(X, \prec)$ es un* conjunto ordenado *si X tiene definida la relación $\prec$ tal que satisface:*

(i) $x \prec x$

(ii) si $x \prec y$ y $y \prec z$, entonces $x \prec z$,

(iii) si $x \prec y$ y $y \prec x$, entonces $x = y$.

Mientras que si $(X, \prec)$ además cumple que cualesquiera dos de sus elementos son comparables; es decir que para cada par $x, y \in X$ tenemos que $x \prec y$ ó $y \prec x$, decimos que $(X, \prec)$ es totalmente ordenado*. Y a un subconjunto totalmente ordenado Y de un conjunto ordenado $(X, \prec)$ lo llamamos* cadena*, mientras que decimos que una cadena Y está* acotada superiormente *si existe $x_0 \in X$ tal que $y \preccurlyeq x_0$ para todo $y \in Y$.*

Definición 2 *Dado $x_0 \in X$ lo llamamos máximo en X si siempre que $x_0 \prec y$ esto implica que $x = y$.*

Lema 3 (Zorn) *Sean $(X, \prec)$ un conjunto ordenado, no vacío y tal que toda cadena $Y \subset X$ esta acotada superiormente. Entonces, Y tiene un elemento máximo $x_Y \in X$ tal que $y \preccurlyeq x_Y$ para todo $y \in Y$.*

1.1. Sobre espacios completamente regulares y espacios de funciones

Definición 4 *Sea X un espacio topológico, no vacío y de Hausdorff. Decimos que X es un espacio* completamente regular *si para cada conjunto cerrado y no vacío $L \subset X$ y cada $x \in X \diagdown L$, existe $f : X \to \mathbb{C}$ una función continua tal que $f(x) \notin \overline{f(L)}$.*

Equivalentemente tenemos el siguiente resultado que aparece en Engelking [8].

Proposición 5 *Sea X un espacio no vacío y de Hausdorff. Entonces, X es un espacio completamente regular si y sólo si para cada cerrado no vacío $L \subset X$ y cada $x \in X \diagdown L$, existe una función continua $g : X \to [0,1]$ tal que $g(x) = 0$ y $g(L) = \{1\}$.*

Definición 6 *Sean (X, τ) un espacio vectorial topológico, de Hausdorff, completamente regular y (E, ν) un espacio vectorial topológico, donde τ y ν son las topologías dadas en X y E respectivamente. Definimos*

$$\begin{aligned} C(X,E) &= \{f : X \to E : \ f \text{ es una función continua}\}, \\ C_b(X,E) &= \{f : X \to E : \ f \text{ es una función continua y acotada}\} \end{aligned}$$

Si $E = \mathbb{F}$ dotado con la topología usual, escribiremos

$$\begin{aligned} C(X) &= \{f : X \to \mathbb{F} : \ f \text{ es una función continua}\}, \ y \\ C_b(X) &= \{f : X \to \mathbb{F} : \ f \text{ es una función continua y acotada}\}. \end{aligned}$$

Para $a \in E$, por $\underline{a}$ representaremos a la función constante *a; es decir, $\underline{a}(x) = a$ para todo $x \in X$.*

Definición 7 *Sea $f \in C(X)$ (ó $C_b(X)$). Denotamos por $Z(f)$ al* conjunto nulo *$f^{-1}(0)$. Si f es lineal, $Z(f)$ usualmente denota al espacio nulo de f. Para f definimos en X al conjunto $suppf = cl(X \diagdown Z(f))$, donde* cl *denota al operador cerradura.*

Teorema 8 *Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces, X es completamente regular si y sólo si la familia $Z(X) = \{Z(f) : f \in C(X)\}$ de todos los conjuntos nulos es una base para los conjuntos cerrados de X.*

Demostración. Para la necesidad, supongamos que X es un espacio completamente regular. Entonces, dado $F \subset X$ cerrado y $x \in X \diagdown F$, existe $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 1$ y $f[F] = \{0\}$. Así, $Z(f) \supset F$ y $x \notin Z(f)$; por tanto $Z(X)$ es base.

Por otro lado, si $Z(X)$ es base para los conjuntos cerrados de X, entonces para $F \subset X$ cerrado y $x \in X \diagdown F$, existe un conjunto nulo, digamos $Z(g)$ tal que $Z(g) \supset F$ y $x \notin Z(g)$. De esto último tenemos que $g(x) \neq 0$, llamemos $r = g(x)$. Claramente, $f = r^{-1}g \in C(X)$, $f(x) = 1$ y $f(F) = \{0\}$, por lo que X es completamente regular.
■

1.2. Ideales máximos en espacios de funciones continuas

En esta sección consideramos sólo funciones con valores en el campo de los números reales, denotando por $C(X)$ a $C(X, \mathbb{R})$ y por $C_b(X)$ a $C_b(X, \mathbb{R})$; además, enunciamos resultados del libro de Gillman-Jerison [11]. Empezamos por estudiar algunas relaciones entre propiedades topológicas del espacio X y propiedades algebraicas de $C(X)$.

Sean X un espacio de Hausdorff y $f, g \in C(X)$. Entonces, es claro que tenemos las siguientes propiedades:

1.-$Z(f) = Z(|f|) = Z(f^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$,

2.-$Z(\underline{0}) = X$ y $Z(\underline{1}) = \emptyset$,

3.-$Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$,

4.-$Z(f^2 + g^2) = Z(|f| + |g|) = Z(f) \cap Z(g)$, y

5.- $Z(X)$ es cerrado bajo intersecciones numerables.

Notemos también que si f y g son funciones con valores en el campo de los números complejos tenemos:

1'.-$Z(f) = Z(f\ \overline{f})$,

4'.-$Z(f\ \overline{f} + g\ \overline{g}) = Z(f) \cap Z(g)$.

La siguiente definición para una familia de subconjuntos de X no vacía que cumple ciertas propiedades es similar a la que se tiene para filtro.

Definición 9 *Sea $\mathfrak{F} \subset C(X)$ una familia no vacía, decimos que $\mathfrak{F}$ es* z-filtro *en X si cumple:*

i) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$

ii) $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{F} \Longrightarrow Z_1 \cap Z_2 \in \mathfrak{F}$

iii) $Z \in \mathfrak{F}$, $Z' \in Z(X)$ y $Z \subset Z' \Longrightarrow Z' \in \mathfrak{F}$

Teorema 10 *a) Sea I un ideal en $C(X)$, entonces $Z[I] = \{Z(f) : f \in I\}$ es un z-filtro en X.*

b) Sea $\mathfrak{F}$ un z-filtro en X, entonces $Z^{\leftarrow}[\mathfrak{F}] = \{f : Z(f) \in \mathfrak{F}\}$ es un ideal en $C(X)$.

Demostración.

a) Sea I un ideal en $C(X)$.

i) Como I no contiene a la unidad, $\emptyset \notin Z[I]$.

ii) Sean $Z_1, Z_2 \in Z[I]$. Sean $f_1, f_2 \in I$ tales que satisfacen $Z_1 = Z(f_1)$, $Z_2 = Z(f_2)$. Dado que I es un ideal, $f_1^2 + f_2^2 \in I$. De donde

$$Z_1 \cap Z_2 = Z(f_1^2 + f_2^2) \in Z[I].$$

iii) Sean $Z \in Z[I]$, y $Z \in Z(X)$. Consideremos $f \in I$, $f' \in C(X)$ tales que $Z = Z(f)$, $Z' = Z(f')$. Ya que I es un ideal, tenemos $ff' \in I$. Ahora, si $Z' \supset Z$, entonces

$$Z' = Z \cup Z' = Z(ff') \in Z[I].$$

b) Sea $J = Z^{\leftarrow}[\mathfrak{F}]$. Por la definición anterior, J no contiene a la unidad. Sean $f, g \in J$, y $h \in C(X)$. Entonces,

$$Z(f-g) \supset Z(f) \cap Z(g) \in \mathfrak{F},$$

y $Z(hf) \supset Z(f) \in \mathfrak{F}$. Por la definición 9) ii), $Z(f-g)$, $Z(hf) \in \mathfrak{F}$. Por lo cual, $f-g$, $hf \in J$, con lo que J es un ideal.

■

Observemos que para $\mathfrak{F} \subset Z(X)$, los conjuntos nulos cumplen

$$Z[Z^{\leftarrow}[\mathfrak{F}]] = \mathfrak{F} \quad \text{y} \quad Z^{\leftarrow}[Z[I]] \supset I.$$

Donde la primera relación implica que todo z-filtro es de la forma $Z[J]$ para algún ideal J. Mientras que en la segunda, la inclusión puede ser propia.

Definición 11 *Decimos que* $\mathfrak{F}$ *es un* z-ultrafiltro *si este es un z-filtro máximo.*

Así, como Z y $Z^{\leftarrow}$ preservan la inclusión, si $M \subset C(X)$ es un ideal máximo, entonces $Z[M]$ es un z-ultrafiltro; y a la inversa, si $\mathfrak{F}$ es un z-ultrafiltro, $Z^{\leftarrow}[\mathfrak{F}]$ es un ideal máximo en $C(X)$.

Definición 12 *Sea* $p \in X$*, decimos que p es* punto cerradura *de un z-filtro* $\mathfrak{F}$ *si cada vecindad de p intersecta a todo elemento de* $\mathfrak{F}$*. Definimos por*

$$A_p := \{Z(f) \in Z(X) : p \in Z(f)\}.$$

Definición 13 *Sea* $\mathfrak{F}$ *un z-filtro, decimos que* $\mathfrak{F}$ converge *al* límite p *si toda vecindad de p contiene un elemento de* $\mathfrak{F}$*.*

Notemos que, como los elementos de $\mathfrak{F}$ son conjuntos cerrados, p es punto cerradura de $\mathfrak{F}$ si y sólo sí $p \in \cap\mathfrak{F}$. Así, A_p es un z-ultrafiltro y p es punto cerradura de un z-filtro $\mathfrak{F}$ si y sólo si $\mathfrak{F} \subset A_p$. Además A_p es el único z-ultrafiltro que converge a p.

Definición 14 *Sea I ideal de* $C(X)$ *o* $C_b(X)$*:*

1) Si $\cap Z[I] \neq \emptyset$*, decimos que I es un* ideal fijo.

2) Si $\cap Z[I] = \emptyset$*, decimos que I es un* ideal libre.

Observemos que si $Z(f) \neq \emptyset$, entonces el ideal $\langle f \rangle = fC(X)$ (ó $\langle f \rangle = fC_b(X)$) es fijo pues $\cap Z[\langle f \rangle] = Z(f)$. Por lo que todo ideal libre I en $C(X)$ (ó $C_b(X)$) contiene ideales fijos no triviales; por ejemplo, si I es un ideal libre y $f \in I$ es no nula tenemos que $\langle f \rangle$ es un ideal fijo.

Teorema 15 *a) Los ideales máximos fijos en $C(X)$ son los conjuntos*

$$M_p = \{f : f(p) = 0\}, \ \ p \in X$$

Los ideales M_p son distintos para elementos $p \in X$ distintos. Además,

$$C(X) \diagup M_p \cong \mathbb{R}, M_p(f) \longrightarrow f(p).$$

b) Los ideales máximos fijos en $C_b(X)$ son los conjuntos

$$M_p^* = \{f \in C_b : f(p) = 0\}, \ \ p \in X$$

Los ideales M_p^* son distintos para elementos $p \in X$ distintos. Además,

$$C_b(X) \diagup M_p \cong \mathbb{R}, M_p^*(f) \longrightarrow f(p).$$

Demostración.

a) M_p es el núcleo del homomorfismo $H_p : C(X) \to \mathbb{R}$, $f \to f(p)$; H_p es sobre, pues $\underline{r}(p) = r$ para cada $r \in \mathbb{R}$. Además, M_p es un ideal máximo y la unicidad de p se debe a que si p y p' son elementos distintos de X, como X es completamente regular, existe $f \in C(X)$ tal que $f(p) \neq f(p')$.

   Por otro lado, si M es un ideal fijo en $C(X)$, existe $p \in \cap Z[M]$. Así, $M \subset M_p$ y, en caso de ser M ideal máximo, tenemos que $M = M_p$.

   Por último, M_p es el núcleo del homomorfismo H_p y este es sobre, por tanto $C(X) \diagup M_p \cong \mathbb{R}$.

b) Para la demostración véase el inciso anterior.

■

Definición 16 *Decimos que un ideal máximo M es* real *si $C(X) \diagup M \cong \mathbb{R}$ (respectivamente $C_b(X) \diagup M \cong \mathbb{R}$) y su correspondiente z-ultrafiltro es un z-ultrafiltro real.*

Dos resultados importantes que utilizamos en el siguiente capítulo son los siguientes (para su demostración véase Gillman-Jerison [11], págs. 71 y 76).

Teorema 17 *a) Todo ideal máximo en $C_b(X)$ es real.*
b) Todo ideal máximo en $C(X)$ es real si y sólo si X es seudocompacto.

Teorema 18 *Sea M un ideal máximo en $C(X)$. Son equivalentes:*
1) M es real.
2) $Z[M]$ es cerrado bajo intersecciones numerables.
3) $Z[M]$ tiene la propiedad de la intersección numerable.

Sean T un espacio completamente regular tal que $X \subset T$ denso y $\mathfrak{F}$ un z-filtro en X. Las definiciones 12 y 13 se pueden traducir a lo siguiente:

Definición 19 *Sea $p \in T$, decimos que p es* punto cerradura *de un z-filtro $\mathfrak{F}$ si cada vecindad, en T, de p intersecta a todo elemento de $\mathfrak{F}$. Definimos por*

$$A^p := \{Z(f) \in Z(X) : p \in cl_T\,(Z(f))\}.$$

Es decir, p es un punto cerradura de $\mathfrak{F}$ si $p \in \bigcap\limits_{Z \in \mathfrak{F}} cl_T\,(Z)$.

Definición 20 *Sea $\mathfrak{F}$ un z-filtro, decimos que $\mathfrak{F}$* converge *al* límite p *si toda vecindad, en T, de p contiene un elemento de $\mathfrak{F}$.*

Existen varios procedimientos para construir a βX, la compactificación de Stone-Čech del espacio X, en general, una compactificación de un espacio no compacto X se hace adjuntando nuevos puntos, los cuales son puntos límite de conjuntos cerrados y no compactos de X. Considerando este proceso, en Gillman-Jerison [11] se hace restringiendo la atención a los conjuntos nulos; esto es, ya que los conjuntos nulos forman una base para los cerrados, se adjunta a X un nuevo punto para cada z-ultrafiltro, tal punto es definido como el límite de dicho z-ultrafiltro.

Así que, la familia de z-ultrafiltros de X es $(A^p)_{p\in\beta X}$; donde A^p es el z-ultrafiltro en X con límite p. Si $p \in X$, $A^p = A_p$; y si $p \in \beta X$, p es el límite de un z-ultrafiltro

A^p en X.

Además, $cl_{\beta X}(Z) = \{p \in \beta X : Z \in A^p\}$, es decir $p \in cl_{\beta X}(Z) \iff Z \in A^p$; y $\{cl_{\beta X}(Z)\}_{Z\in Z(X)}$ forman una base para los cerrados de βX.

Todo esto gracias al siguiente Teorema (véase Gillman-Jerison [11], Teorema (6.5)):

Teorema 21 (Teorema de Compactificación) *Todo espacio (completamente regular) X tiene una compactificación βX, con las siguientes propiedades equivalentes:*

(1) (Stone) Toda función continua f de X en un espacio compacto Y, tiene una extensión continua $\widetilde{f}$ de βX en Y.

(2) (Stone-Čech) Toda función $f \in C_b(X)$, tiene una extensión a una función $\widetilde{f} \in C(\beta X)$.

(3) (Čech) Cualesquiera dos conjuntos nulos ajenos en X, tienen cerraduras ajenas en βX.

(4) Para cualesquiera dos conjuntos nulos Z_1 y Z_2 en X,

$$cl_{\beta X}\left(Z_1 \cap Z_2\right) = cl_{\beta X}\left(Z_1\right) \cap cl_{\beta X}\left(Z_2\right).$$

(5) Distintos z-ultrafiltros en X, tienen distintos limites en βX.

Además, βX es único, salvo homomorfismos, tal que satisface cualquiera de las condiciones anteriores.

Notación 22 *Denotemos por M^p (M^{p*}) al ideal en $C(X)$ (resp. $C_b(X)$) correspondiente al z-ultrafiltro A^p; si $p \in X$, $M^p = M_p$ $(M^{p*} = M_p^*)$.*

1.3. Algebras Topológicas

Ahora, empezamos a dar definiciones sobre los espacios que estudiaremos en los siguientes capítulos.

Definición 23 *Decimos que A es un* álgebra topológica *sobre $\mathbb{F}$ si es un álgebra que es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial topológico Hausdorff; además tiene asociado un producto que es asociativo y continuo*

$$\cdot : A \times A \to A,$$

donde $A \times A$ tiene asociada la topología producto, en este caso diremos que este producto es conjuntamente continuo.

Definición 24 *Si un algebra topológica A es conmutativa, decimos que A es un* álgebra topológica conmutativa . *En caso de que el álgebra tenga unidad* e, *diremos que es un* álgebra topológica con unidad.

Definición 25 *Un álgebra topológica A es un* álgebra topológica completa *si como espacio vectorial topológico es completo.*

Definición 26 *Decimos que un álgebra topológica A es un* álgebra normada *si su topología está dada por una norma $(A, \|\cdot\|)$ tal que*

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \, , \forall x, y \in A.$$

Definición 27 *Un* álgebra de Banach *A es un álgebra normada y completa.*

Definición 28 *Decimos que A es un* álgebra localmente convexa *si es un álgebra topológica que como espacio topológico es un espacio localmente convexo. En este caso su topología esta dada por una familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ que satisfacen la siguiente condición:*

$$\forall \alpha \in \Lambda, \ \exists \beta \in \Lambda \ \text{ tal que } \ \|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \, \|y\|_\beta \ \text{ para todo } x, y \in A. \tag{1}$$

Definición 29 *Decimos que un álgebra localmente convexa A es* m-convexa *si toda seminorma es submultiplicativa:*

$$\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha \|y\|_\alpha \qquad \forall\alpha \in \Lambda \quad y \ todo \ x, y \in A \tag{2}$$

Notemos que toda álgebra normada es m-convexa.

Definición 30 *Decimos que un álgebra topológica es un* álgebra de Fréchet *si es metrizable y completa.*

Dentro de la Teoría de operadores, al estudiar el espacio de todos los operadores lineales definidos en un espacio de Hilbert H, se encontró que este espacio tiene estructura de espacio vectorial; más aún, si consideramos a $\mathfrak{B}$ el espacio de todos los operadores lineales acotados definidos en H, a este espacio le podemos asociar una norma que lo hace espacio vectorial normado. Además, algebraicamente se tiene definido en $\mathfrak{B}$ una multiplicación que le da una estructura multiplicativa suplementaria que lo convierte en un álgebra. Por otro lado, la teoría espectral de operadores acotados encuentra su homólogo en los resultados sobre álgebras de Banach:

Definición 31 *Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad e. Decimos que $a \in A$ es invertible si existe $b \in A$ tal que $ab = e$. En tal caso, el inverso de a es evidentemente único, y lo denotamos por a^{-1}. A la familia de todos los elementos invertibles en A la denotamos por $G(A)$.*

El siguiente teorema es fundamental en la teoría de Algebras de Banach, véase Zelazko [20].

Teorema 32 (Gelfand-Mazur) *Un álgebra de Banach conmutativa con unidad tal que es un campo, es isométricamente isomorfo al campo de los números complejos.*

También, de suma importancia, por su estructura algebraica, resulta el estudio de los ideales de un álgebra de Banach, aún más el estudio de los ideales máximos.

Un teorema conocido e importante en la teoría de anillos, que podemos ver en Rotman [17], es el siguiente:

Teorema 33 *Sean R y R' dos anillos y un homomorfismo suprayectivo de R en R' con núcleo I, $I \subset R$. Entonces R' es isomorfo a R/I. Además hay una correspondencia entre el conjunto de ideales en R' y el conjunto de ideales en R que contienen a I.*

El siguiente lema también es fundamental y es válido en general para anillos conmutativos con unidad.

Lema 34 *Todo ideal propio de un álgebra de Banach A conmutativa con unidad está contenido en un ideal máximo. Un ideal M en A es máximo si y sólo si A/M es un campo.*

Demostración. Para la primera parte, sean A un álgebra de Banach, conmutativa con unidad, I un ideal propio en A, $\mathfrak{F}$ la familia de todos los ideales en A que contienen a I y $\Im$ el conjunto formado por los ideales siguientes:

Sea $y \in A-(I \cup \{e\})$ fijo, que existe por ser I un ideal propio en A. Consideremos el ideal I_y generado por $I \cup \{y\}$, si este es máximo acabamos el proceso y obtenemos lo que deseamos. En otro caso, I_y es un ideal propio que contiene a I y procedemos a tomar un elemento $z \in A - (I_y \cup \{e\})$ fijo, siguiendo el mismo procedimiento construimos $\Im$ el conjunto de los ideales construidos de esta manera. Es obvio que $\Im$ es una cadena no vacía y que $\mathfrak{F}$ es un conjunto ordenado y no vacío bajo la relación de contención. Por el lema de Kuratowski-Zorn (lema 3), $\Im$ tiene elemento máximo, con lo que concluimos con lo que se pide.

Por otro lado, sea M un ideal en A y supongamos que es máximo. Entonces, A/M tiene como únicos ideales al trivial y al total, y como A/M es un álgebra de Banach, conmutativa con unidad por tener A estas propiedades. Entonces, tenemos que A/M es campo. A la inversa, si A/M es campo, sus únicos ideales son el trivial y el mismo A/M. Por el Teorema anterior, hay una correspondencia inyectiva entre el conjunto de ideales de A/M y el conjunto de ideales de A que contienen a M. El ideal M corresponde con el ideal trivial de A/M, mientras que A corresponde al ideal A/M de A/M, por lo que M debe ser máximo. ■

Teorema 35 *Sea A un álgebra de Banach, compleja, conmutativa con unidad. Entonces, todo ideal máximo en A es cerrado y si M es un ideal máximo de A, entonces A/M es isométricamente isomorfo al campo de los números complejos.*

Sea M un ideal máximo del álgebra de Banach conmutativa con unidad A. La proyección de $A \to A/M$ es un homomorfismo de álgebras con núcleo o espacio nulo M. El Teorema de Gelfand-Mazur permite identificar a A/M con el campo de los números complejos. De manera que M resulta ser el núcleo de un homomorfismo complejo no nulo ϕ.

Si $a \in A$, podemos definir a $\phi(a)$ como el único complejo λ tal que $a + M = \lambda e + M$; es decir, $a - \lambda e \in M$.

A la inversa, si ϕ es un homomorfismo complejo no nulo definido en A, y M_ϕ es su espacio nulo, entonces A/M_ϕ es un campo, por lo que M_ϕ es un ideal máximo en A. Entonces tenemos el siguiente Teorema, véase Zelazko [20]:

Teorema 36 *Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad y ϕ un homomorfismo complejo no nulo definido en A con espacio nulo M_ϕ. Entonces, la correspondencia $\phi \longmapsto M_\phi$ es una correspondencia biyectiva del espacio de los homomorfismos complejos no nulos sobre A en el espacio de ideales máximos de A.*

Sea A un álgebra topológica con unidad. Denotamos por $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ al espacio de todas las funcionales lineales multiplicativas no triviales definidas en A y por $\mathfrak{M}(A)$ al espacio de todas las funcionales lineales multiplicativas continuas no triviales definidas en A, ambos dotados con la topología débil estrella w^*; donde cada elemento F de $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ tiene como base de vecindades a la familia formada por los conjuntos

$$U(F, x_1, ..., x_n, \varepsilon) = \left\{G \in \mathfrak{M}^{\#}(A) : |F(x_i) - G(x_i)| < \varepsilon, i = 1, 2, ..., n\right\}$$

donde $\varepsilon > 0$, $x_1, ..., x_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, y en $\mathfrak{M}(A)$ tal topología es la topología relativa. Dado $x \in A$, $\hat{x}$ está definido por la transformada de Gelfand: $\hat{x}(F) = F(x)$, $F \in \mathfrak{M}^{\#}(A)$.

Entonces, por el Teorema anterior, existe una relación entre las funcionales lineales multiplicativas de un álgebra de Banach A y sus ideales máximos. Donde si $F \in \mathfrak{M}^{\#}(A)$, entonces $M_F = \{x \in A : F(x) = 0\}$ es un ideal máximo en A por ser de codimensión 1. Por otro lado, si M es un ideal máximo en A, por ser cerrado y $A \diagup M = \mathbb{C}$. Por tanto tenemos lo siguiente, véase Zelazko [20], pág. 36:

Teorema 37 *Si A es un álgebra de Banach y F es un funcional lineal multiplicativo, entonces F es continuo y de codimensión 1.*

Como consecuencia del resultado anterior obtenemos el siguiente (véase Zelazko [20], pág. 38):

Teorema 38 *Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Entonces $\mathfrak{M}(A)$ es no vacío y cualquier ideal propio de A está contenido en uno máximo.*

Cabe señalar que para un álgebra topológica conmutativa con unidad A el espacio nulo de los elementos de $\mathfrak{M}(A)$ son los ideales cerrados máximos de codimensión 1 (véase Zelazko [20]).

Definición 39 *Dada un álgebra topológica A, y $x \in A$, $x \neq 0$, decimos que x es un* divisor topológico bilateral de cero *si existen dos redes (y_v) y (z_v) en A no convergentes a cero y tales que $y_v x \to 0$ y $x z_v \to 0$. Si A es un álgebra topológica conmutativa, decimos simplemente que x es un* divisor topológico de cero.

Un divisor topológico bilateral de cero es *propio* si no es divisor de cero.

Definición 40 *Sea A un álgebra con unidad e. Dado $x \in A$, decimos que x es topológicamente invertible si $cl(Ax) = cl(xA) = A$.*

Esta definición es equivalente a la existencia de dos redes $\tilde{a} = (a_\lambda)$ y $\tilde{b} = (b_\lambda)$, a las que llamamos *inverso topológico derecho e izquierdo* respectivamente, y son tales que $x a_\lambda \to e$ y $b_\lambda x \to e$. Por $G_t(A)$ denotamos al conjuntos de todos los elementos topológicamente invertibles de A. Equivalentemente, x es topológicamente invertible si para cada vecindad de cero $V(0)$ existen a_v y a'_v en A tales que $x a_v - e \in V(0)$ y $a'_v x - e \in V(0)$.

1.3.1. Algebras m-convexas

Esta pequeña sección la dedicamos a las algebras m-convexas, ya que algunas algebras m-convexas se pueden representar como el límite inverso de algebras de Banach, lo cual es importante resaltar y que utilizamos más adelante. Para esto, primero recordemos que para A un álgebra *m-convexa* podemos encontrar una familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ que definen su topología y cada una de estas seminormas es submultiplicativa; es decir, cumple la desigualdad

$$\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha \|y\|_\alpha \qquad \forall \alpha \in \Lambda \text{ y todo } x, y \in A$$

Además, necesitamos definir lo siguiente.

Definición 41 *A un conjunto Λ y una relación $\preceq$ definida en él, tal que $(\Lambda, \preceq)$ es ordenado, lo llamamos* conjunto dirigido *si satisface que para α, $\beta \in \Lambda$, existe $\gamma \in \Lambda$ tal que $\alpha \preceq \gamma$ y $\beta \preceq \gamma$.*

Definición 42 *Sean $(\Lambda, \preceq)$ un conjunto dirigido, $\{X_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ un sistema de espacios vectoriales topológicos, los cuales podemos asumir que son de Banach, y supongamos que se satisface que para todo $\alpha, \beta \in \Lambda$ tal que $\alpha \preceq \beta$ existe una función lineal $\Pi_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$ y este sistema de funciones $\left\{\Pi_\alpha^\beta, \alpha, \beta \in \Lambda\right\}$ satisface que $\Pi_\alpha^\beta \Pi_\beta^\gamma = \Pi_\alpha^\gamma$ siempre que $\alpha \preceq \beta \preceq \gamma$. Por* el límite inverso *de $\{X_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$, denotamos a $\underleftarrow{\lim}_{\alpha} X_\alpha$ el subconjunto del producto cartesiano $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$, formado por los elementos $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ tales que $\Pi_\alpha^\beta (x_\beta) = x_\alpha$, siempre que $\alpha \preceq \beta$.*

Si $\{X_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ es una familia de espacios de Banach, entonces $\underleftarrow{\lim}_{\alpha} X_\alpha$ es un espacio localmente convexo. Esto se debe a que si $|\cdot|_\alpha$ es la norma en X_α, entonces dado $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in \underleftarrow{\lim}_{\alpha} X_\alpha$ podemos definir la seminorma $\|x\|_\alpha = |x_\alpha|_\alpha$, este sistema de seminormas induce una topología en $\underleftarrow{\lim}_{\alpha} X_\alpha$ que lo hace espacio localmente convexo.

Sea $(A, \{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in \Lambda\})$ un álgebra m-convexa completa, conmutativa, con unidad e tal que si $\alpha \preceq \beta$ entonces $\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta$ para todo $x \in A$. Consideremos el conjunto $Ker(\|\cdot\|_\alpha) = \{x \in A : \|x\|_\alpha = 0\}$ el cual es un ideal en A, esto lo tenemos ya que para $x \in A$, $y \in Ker(\|\cdot\|_\alpha)$ se cumple que $0 \leq \|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha \|y\|_\alpha = 0$, y así $xy \in Ker(\|\cdot\|_\alpha)$. Además, $Ker(\|\cdot\|_\alpha)$ es cerrado en $(A, \{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in \Lambda\})$, pues para $x \in \overline{Ker(\|\cdot\|_\alpha)}$, existe $(x_\lambda) \subset Ker(\|\cdot\|_\alpha)$ una red tal que $x_\lambda \to x$ en A; esto último implica que $\|x_\lambda - x\|_\beta \to 0$ para cada $\beta \in \Lambda$, en particular $\|x_\lambda - x\|_\alpha \to 0$ y como $\|x\|_\alpha \leq \|x_\lambda - x\|_\alpha + \|x_\lambda\|_\alpha$ obtenemos que $x \in Ker(\|\cdot\|_\alpha)$, de aquí que $A \diagup Ker(\|\cdot\|_\alpha)$ es un álgebra normada, donde su norma esta dada por

$$\|x + Ker(\|\cdot\|_\alpha)\|'_\alpha = \inf_{y \in Ker(\|\cdot\|_\alpha)} \|x + y\|_\alpha .$$

Sea $\Pi_\alpha : A \to A \diagup Ker(\|\cdot\|_\alpha)$ definida por $\Pi_\alpha (x) = x + Ker(\|\cdot\|_\alpha)$ para cada $x \in A$. Como $0 \in Ker(\|\cdot\|_\alpha)$ se cumple que $\|\Pi_\alpha (x)\|'_\alpha \leq \|x\|_\alpha$ y dado que

$$\|x\|_\alpha = \|x + y - y\|_\alpha \leq \|x + y\|_\alpha + \|-y\|_\alpha$$

para todo $y \in Ker(\|\cdot\|_\alpha)$ tenemos que $\|x\|_\alpha \leq \|\Pi_\alpha (x)\|'_\alpha$ y por lo tanto $\|\Pi_\alpha (x)\|'_\alpha = \|x\|_\alpha$.

Denotamos por A_α a la completación de $A \diagup Ker(\|\cdot\|_\alpha)$. A_α es un álgebra de Banach y como Π_α es sobre $(\Pi_\alpha (A) = A \diagup Ker(\|\cdot\|_\alpha))$ cada $x \in A_\alpha \diagdown (A \diagup Ker(\|\cdot\|_\alpha))$ es el límite de una sucesión de Cauchy en $A \diagup Ker(\|\cdot\|_\alpha)$; así que $\Pi_\alpha (A)$ es denso en A_α.

Definimos

$$\Pi_\alpha^\beta : A \diagup Ker\left(\|\cdot\|_\beta\right) \to A \diagup Ker(\|\cdot\|_\alpha)$$

como $\Pi_\alpha^\beta\left(x+Ker(\|\cdot\|_\beta)\right)=x+Ker(\|\cdot\|_\alpha)$ siempre que $\alpha\preceq\beta$, el cual está bien definido pues si $x+Ker(\|\cdot\|_\beta)=y+Ker(\|\cdot\|_\beta)$ entonces

$$x-y\in Ker(\|\cdot\|_\beta)\subset Ker(\|\cdot\|_\alpha).$$

Esto implica que $x+Ker(\|\cdot\|_\alpha)=y+Ker(\|\cdot\|_\alpha)$ y ya que $\Pi_\alpha(xy)=\Pi_\alpha(x)\Pi_\alpha(y)$ se cumple que

$$\begin{aligned}\Pi_\alpha^\beta(\Pi_\beta(x)\Pi_\beta(y)) &= \Pi_\alpha^\beta(\Pi_\beta(xy))=\Pi_\alpha(xy)\\ &= \Pi_\alpha(x)\Pi_\alpha(y)=\Pi_\alpha^\beta(\Pi_\beta(x))\Pi_\alpha^\beta(\Pi_\beta(y)),\end{aligned}$$

por lo que Π_α^β es un homomorfismo de algebras.

Ahora veamos que Π_α^β es continuo; como $\|x\|_\alpha\le\|x\|_\beta$ para todo $x\in A$, esto implica que $\left\|\Pi_\alpha^\beta(\Pi_\beta(x))\right\|_\alpha\le\|\Pi_\beta(x)\|_\beta$ y así Π_α^β es un homomorfismo continuo. Debido a la continuidad de Π_α^β, este se puede extender a un homomorfismo continuo de A_β en A_α.

Por otro lado definamos

$$\Pi:A\to\underset{\overleftarrow{\alpha}}{\text{lím}}A_\alpha\subset\prod_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$$

por $\Pi(x)=(\Pi_\alpha(x))_{\alpha\in\Lambda}$ para cada $x\in A$. Es claro que $(\Pi_\alpha(x))_{\alpha\in\Lambda}$ pertenece a $\underset{\overleftarrow{\alpha}}{\text{lím}}A_\alpha$ pues $\Pi_\alpha^\beta(\Pi_\beta(x))=\Pi_\alpha^\beta\left(x+Ker(\|\cdot\|_\beta)\right)=x+Ker(\|\cdot\|_\alpha)=\Pi_\alpha(x)$. Notemos que Π es inyectivo ya que si $\Pi(x)=(\Pi_\alpha(x))_{\alpha\in\Lambda}=0$, entonces $\Pi_\alpha(x)=0$ para todo $\alpha\in\Lambda$ y así $x=0$.

Además, $\underset{\overleftarrow{\alpha}}{\text{lím}}A_\alpha$ es cerrado en $\prod_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$:

Sea $x\in\overline{\underset{\overleftarrow{\alpha}}{\text{lím}}A_\alpha}$, entonces existe $(x_\lambda)\in\underset{\overleftarrow{\alpha}}{\text{lím}}A_\alpha$, $x_\lambda=(x_\lambda^\gamma)$, tal que $x_\lambda\underset{\lambda}{\to}x$ y $\Pi_\alpha^\beta(x_\lambda^\gamma)\underset{\lambda}{\to}\Pi_\alpha^\beta(x^\gamma)$. Esto implica que $x_\lambda^\gamma\underset{\lambda}{\to}\Pi_\alpha^\beta(x^\gamma)$ y como $x_\lambda^\alpha\underset{\lambda}{\to}x_\alpha$ y el límite es único, por lo que obtenemos que $x\in\underset{\overleftarrow{\alpha}}{\text{lím}}A_\alpha$.

Por último, observemos que $\Pi(A)$ es denso en $\underset{\overleftarrow{\alpha}}{\text{lím}}A_\alpha$:

Sean $\varepsilon'>0$, $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\in\underset{\overleftarrow{\alpha}}{\text{lím}}A_\alpha$ y $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}+V_{\alpha_1}\times...\times V_{\alpha_n}\times\prod A_\alpha$ una vecindad de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Sabemos que existe $\gamma\in\Lambda$ tal que $\|\cdot\|'_{\alpha_i}\le\|\cdot\|'_\gamma$ para todo $1\le i\le n$ y como $\Pi_\alpha(A)$ es denso en A_α existe $x\in A$ tal que $\|x_\gamma-\Pi_\gamma(x)\|'_\gamma<\varepsilon'$, de donde

$$\|x_{\alpha_i}-\Pi_{\alpha_i}(x)\|'_{\alpha_i}=\left\|\Pi_{\alpha_i}^\gamma(x_\gamma)-\Pi_{\alpha_i}^\gamma(\Pi_\gamma(x))\right\|'_{\alpha_i}\le M\|x_\gamma-\Pi_\gamma(x)\|'_\gamma<M\varepsilon'$$

para algún $M>0$. Por lo que $\Pi(A)$ es denso en $\underset{\overleftarrow{\alpha}}{\text{lím}}A_\alpha$.

Recordemos que $\|\Pi_\alpha(x)\|'_\alpha=\|x\|_\alpha$, lo cual implica que A y $\Pi(A)$ tienen topologías equivalentes y así $\Pi(A)$ es completo y por tanto cerrado. Concluimos que $A=\underset{\overleftarrow{\alpha}}{\text{lím}}A_\alpha$. Entonces, tenemos el resultado siguiente:

Teorema 43 *Sea A un álgebra m-convexa, completa, conmutativa, con unidad e. Entonces, A es el límite inverso de algebras de Banach.*

Además, en un álgebra A la cual es m-convexa, completa, conmutativa y con unidad e se cumple la *Propiedad de Wiener*: $x \in A$ es invertible si y sólo si $F(x) = \hat{x}(F) \neq 0$, $\forall F \in \mathfrak{M}(A)$.

Capítulo 2

Algunos resultados sobre $(C_b(X), \beta)$

En lo que sigue, consideramos a X como un espacio completamente regular, no vacío y de Hausdorff a menos que se diga lo contrario.

Una función acotada $f : X \to \mathbb{F}$ se dice que se anula al infinito si dado $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto compacto K de X tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para cada $x \in X \diagdown K$.

Denotamos por $B(X)$ al álgebra de todas las funciones con valores en el campo de los números complejos y acotadas definidas en X, por $B_0(X)$ al ideal en $B(X)$ de todas las funciones con valores en $\mathbb{C}$ acotadas que se anulan al infinito y por $B_{00}(X)$ al subespacio de $B_0(X)$ formado por todas las funciones con valores en el campo de los complejos y con soporte compacto definidas en X.

Sea $(C_b(X), \beta)$ el álgebra de todas las funciones con valores en $\mathbb{F}$, continuas y acotadas definidas en X, con las operaciones algebraicas usuales y dotado con la topología estricta β; es decir, la topología dada por las seminormas:

$$\|f\|_{\varphi} = \sup_{x \in X} |f(x)| \, |\varphi(x)| \qquad f \in C_b(X), \ \varphi \in B_0(X) \tag{3}$$

Sea $(C(X), \mathcal{K})$ el álgebra de todas las funciones continuas con valores en $\mathbb{F}$ definidas en un espacio completamente regular y de Hausdorff X, con las operaciones algebraicas usuales y dotado con la topología compacto abierta $\mathcal{K}$; es decir, la topología dada por las seminormas:

$$\|f\|_{K} = \sup_{t \in K} |f(t)| \qquad f \in C(X), \quad K \in \mathcal{K} \tag{4}$$

donde $\mathcal{K}$ es el conjunto de todos los subconjuntos compactos de X. Esta familia de seminormas definen una topología Hausdorff localmente m-convexa sobre $C(X)$. Observemos que la topología compacto abierta $\mathcal{K}$ la podemos definir por la familia de seminormas dadas en (3) pero considerando φ variando sobre $B_{00}(X)$.

Las seminormas $\|\cdot\|_{\varphi}$ que definen la topología en $(C_b(X), \beta)$ satisfacen (1) y así $C_b(X, \beta)$ es un álgebra conmutativa localmente convexa. Esta es completa si X

es un k-espacio (i.e. $F \subset X$ es cerrado sí y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$, véase Giles [10]). Mientras la familia de seminormas que definen la topología Hausdorff sobre $C(X)$ satisfacen (2) y así $(C(X), \mathcal{K})$ es un álgebra localmente m-convexa y completa.

Si X es un espacio localmente compacto, entonces la topología estricta β en $C_b(X)$ la podemos definir por la familia de seminormas dadas en (3), pero considerando a φ variando sobre el espacio $C_0(X) = B_0(X) \cap C_b(X)$.

En el caso de $(C_b(X), \beta)$, con X completamente regular, tenemos que

$$\mathfrak{M}((C_b(X), \beta)) = \{\phi_x : x \in X\},$$

donde $\phi_x(f) = f(x)$ para todo $f \in C_b(X)$. Entonces, podemos escribir

$$\mathfrak{M}(C_b(X), \beta) = X$$

y dar una correspondencia inyectiva entre X y el conjunto de todos los ideales cerrados de A vía

$$x \to \phi_x \to Z(\phi_x).$$

Por otro lado, tenemos que $\mathfrak{M}^{\#}(C_b(X))$ es homeomorfo a la *compactación de Stone-Čech* βX de X, donde $C_b(X)$ es isomorfo a $C(\beta X)$ bajo el mapeo $\Psi : C_b(X) \to C(\beta X)$ dado por $\Psi(f) = \widetilde{f}$, donde $\widetilde{f}$ es la extensión de $f \in C_b(X)$ a βX (véase Gillman-Jerison [11], pág. 88). En Arizmendi-Perez-Roa [5], se prueba que para cada $p \in \beta X \diagdown X$ tenemos que $F_p \in \mathfrak{M}^{\#}(C_b(X))$ donde F_p es la evaluación en p, es discontinua.

Definición 44 *Decimos que un álgebra de Banach conmutativa con unidad tiene la* propiedad de la síntesis espectral (p.s.s.) *si cada ideal cerrado es la intersección de ideales máximos (cerrados, véase Teorema 34). Similarmente, decimos que un álgebra topológica conmutativa con unidad A tiene la* propiedad de la síntesis espectral (p.s.s.) *si todo ideal cerrado es la intersección de ideales máximos cerrados de A de codimensión 1, i.e. una intersección de espacios nulos de funcionales en $\mathfrak{M}(A)$.*

Definición 45 *Sea A un álgebra topológica conmutativa con unidad tal que $\mathfrak{M}(A)$ es un conjunto no vacío. Para $E \subset \mathfrak{M}(A)$ definimos al* kernel $k(E)$ *como el ideal cerrado $k(E) = \bigcap_{\phi \in E} Z(\phi)$ siempre que E sea no vacío y $k(\emptyset) = A$.*

Definición 46 *Sea I un ideal de A, a la envolvente o* hull $h(I)$ *la definimos como $h(I) = \{\phi \in \mathfrak{M}(A) : I \subset Z(\phi)\}$.*

Es claro que A tiene la propiedad de la síntesis espectral sí y sólo si $I = k(h(I))$ para cada ideal cerrado I de A.

Recordemos que $\mathfrak{M}(C_b(X), \beta) = X$ (véase Arizmendi-Perez-Roa [5]), entonces podemos ver que

$$k(E) = \{f \in C_b(X) : f(x) = 0 \text{ para todo } x \in E\},$$

si $E \subset X$ es no vacío, y

$$h(I) = \{x \in X : f(x) = 0 \text{ para cada } f \in I\}$$

si I es un ideal de $(C_b(X), \beta)$.

Es claro, $h(cl(I)) = h(I)$ si I es un ideal de $C_b(X)$ y así $k(h(cl(I))) = k(h(I))$. También es obvio que $I = k(h(I))$ si $I = C_b(X)$, (véase Arizmendi-Carrillo-García [3]).

Por otro lado, es importante mencionar que el álgebra $(C_b(X), \beta)$ tiene muchas propiedades interesantes tales como:

1. $(C_b(X), \beta)$ es m-convexa si y sólo si $B_0(X) = B_{00}(X)$ (véase Arizmendi-Carrillo-García [3]),
2. $(C_b(X), \beta)$ es m-convexa si y sólo si la inversión $f \to f^{-1}$ es continua (véase Arizmendi-Carrillo-García [4]).

Algunas otras propiedades que cumple el álgebra $(C_b(X), \beta)$ han sido extendidas a espacios más generales, como por ejemplo, los espacios con peso "weighted spaces "$CV(X)$ que consisten de todas las funciones complejas y continuas definidas en X, tales que

$$\|f\|_\nu = \sup_{x \in X} |f(x)\nu(x)|$$

para todo ν en una familia Nachbin V de funciones en X (véase Govaerst [12]). En Arizmendi-Carrillo-García [3] se prueba que $(C_b(X), \beta)$ tiene la *propiedad de la síntesis espectral (p.s.s.)*. Usando esto, en la sección 2.1 probamos que si X es un espacio conexo y de Fréchet-Urysohn, entonces $(C_b(X), \beta)$ no tiene ideales propios, cerrados y finitamente generados. Esto último implica que todo elemento no cero y no invertible es un divisor topológico de cero, ya que de la proposición 2.4 de Arizmendi-Carrillo-García [3]:

Proposición 47 *Sea A un álgebra localmente convexa ó localmente pseudoconvexa y completa, con unidad e. Si $a \in A$ es topologicamente invertible y no invertible, entonces sus inversos topológicos laterales $\tilde{b} = (b_\lambda)$ y $\tilde{c} = (c_\lambda)$ son no acotados y a es un divisor topológico bilateral de cero.*

Tenemos como consecuencia el corolario siguiente.

Corolario 48 *Si $f \in C_b(X)$ tal que no se anula en X, entonces $fC_b(X)$ es denso en $(C_b(X), \beta)$, es decir f es topológicamente invertible; si X es un k-espacio y f es no invertible, entonces f es un divisor topológico propio de cero y su inverso topológico es no acotado.*

Demostración. Sea $I = fC_b(X)$, tal que f no se anula en X. Entonces, $h(I) = \emptyset$ y $cl\,(I) = C_b(X)$; por lo que f es topológicamente invertible.

Si X es un k-espacio, entonces $(C_b(X), \beta)$ es un álgebra localmente convexa completa con unidad y si además f es no invertible, de la proposición anterior obtenemos que en efecto f es un divisor topológico propio de cero y su inverso topológico es no acotado. ■

2.1. Ideales finitamente generados en$(C_b(X), \beta)$

En Arizmendi-Carrillo-García [3] se prueba el siguiente resultado:

Teorema 49 *Un ideal propio I de $(C_b(X), \beta)$ es cerrado si y sólo si $I = k(h(I))$. Así, $(C_b(X), \beta)$ tiene la p.s.s. Además, $g \in cl(I)$ si y sólo si $h(I) \subset Z(g)$.*

Usando este Teorema más adelante podremos establecer uno de los resultados importantes de este trabajo.

Definición 50 *Un espacio topológico X es de* Fréchet-Urysohn *(véase Franklin [9]) si para cada $S \subset X$, un punto $x \in cl(S)$ si y sólo si existe una sucesión en S que converge a x.*

En particular, todo espacio primero numerable es de Fréchet-Urysohn.

Ahora enunciemos el siguiente lema que aparece en Arizmendi-Carrillo-García [3].

Lema 51 *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de reales positivos que convergen a cero, donde (a_n) es una sucesión estrictamente decreciente. Entonces, existe una función continua $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que satisface: $h(a_n) = b_n$ para toda $n \geq 1$, $h(0) = 0$ y $h(t) \neq 0$ si $t \neq 0$.*

Usando esto, hemos obtenido una relación entre una propiedad topológica de un espacio X y una propiedad algebraica, utilizando resultados sobre el espacio de funciones continuas y acotadas definidas de X en $\mathbb{C}$, mencionados arriba. Así, tenemos la siguiente afirmación:

Teorema 52 *Si $(C_b(X), \beta)$ no tiene ideales propios, cerrados, no triviales y finitamente generados entonces X es un espacio conexo. A la inversa, si X es un espacio conexo y de Fréchet-Urysohn, entonces $(C_b(X), \beta)$ no tiene ideales propios, cerrados ,no triviales y finitamente generados.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio disconexo y que $(C_b(X), \beta)$ no tiene ideales propios, cerrados, no triviales y finitamente generados. Entonces, existe una función continua y suprayectiva $f : X \to \{0, 1\}$. Así, $fC_b(X)$ es un ideal propio, cerrado, no trivial y finitamente generado, lo cual es una contradicción.

A la inversa, supongamos que X es un espacio conexo de Fréchet-Urysohn.

Sea $I = f_1C_b(X) + f_2C_b(X) + ... + f_nC_b(X)$ ideal propio finitamente generado y no trivial de $C_b(X)$, con $f_1, f_2, ..., f_n \neq 0$. Tenemos que $\bigcap_{i=1}^{n} Z(f_i)$ es un conjunto cerrado y $|f_1|^2 + ... + |f_n|^2$ es una función continua y acotada pues cada f_i lo es. Además, $\bigcap_{i=1}^{n} Z(f_i)$ es no vacío pues en otro caso la función invertible $|f_1|^2 + ... + |f_n|^2$ esta en I.

Sea $z \in \partial\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} Z(f_i)\right) = \partial\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} (Z(f_i))^c\right)$, entonces existe una sucesión $(x_k)_{k\in N} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (Z(f_i))^c$ tal que $x_k \to z$, sí $k \to \infty$. Además, $|f_i(x_k)| \to 0$, para $i = 1, 2, ..., n$, cuando $k \to \infty$.

Sea $f = \max\limits_{1\leq i\leq n} \{|f_i|\}$. Como $Z(f) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} Z(f_i)$ tenemos que $f(x_k) \neq 0$ para todo $k \in N$ y $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = 0$.

Podemos suponer, tomando una subsucesión si es necesario, que

1) $(f(x_k))_{k\in N}$ es una sucesión estrictamente decreciente, y

2) cada sucesión $\left(\frac{f_i(x_k)}{f(x_k)}\right)_{k\in N}$, $1 \leq i \leq n$ es convergente.

Entonces, por el Lema podemos dar una función continua $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(f(x_k)) = b_k$ para cada $k \geq 1$, $h(0) = 0$ y $h(t) \neq 0$, si $t \neq 0$, donde $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es la sucesión definida como

$$b_{2k-1} = \frac{2}{(4k+1)\pi} \quad \text{y} \quad b_{2k} = \frac{2}{(4k+3)\pi} \quad \text{para} \quad k \geq 1.$$

Es claro que la sucesión $\left(sen\left(\frac{1}{h(f(x_k))}\right)\right)_{k\in N}$ es no convergente.

Probemos que el ideal $I = f_1C_b(X) + f_2C_b(X) + ... + f_nC_b(X)$ no es cerrado.

Definimos la siguiente función

$$g(x) = \begin{cases} f(x)\, sen\left(\frac{1}{h(f(x))}\right) & \text{si } f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) = 0 \end{cases}$$

Sea $y \in X$. Si $f(y) \neq 0$, entonces g es continua en y, ya que $f(x)$ y $sen(x)$ son funciones continuas acotadas y $h(x)$ es una función continua. Por otro lado, si $f(y) = 0$, tenemos que $g(y) = 0 = \lim\limits_{x\to y} g(x)$ donde $\lim\limits_{x\to y} f(x) = 0$ y $|g(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in X$.

Entonces, g es una función continua y acotada en X y con esto $h(I) = Z(f) \subset Z(g)$. Así, por el Teorema 49, $g \in cl(I)$.

Si I es cerrado, entonces $g = f_1h_1 + f_2h_2 + ... + f_nh_n$ para algunas h_1, h_2,...,$h_n \in C_b(X)$.

Esto es,

$$sen\left(\frac{1}{h(f(x))}\right) = \frac{f_1(x)}{f(x)}h_1(x) + \frac{f_2(x)}{f(x)}h_2(x) + ... + \frac{f_n(x)}{f(x)}h_n(x)$$

si $f(x) \neq 0$.

De donde, $\left(\frac{f_1(x_k)}{f(x_k)}h_1(x_k) + \frac{f_2(x_k)}{f(x_k)}h_2(x_k) + ... + \frac{f_n(x_k)}{f(x_k)}h_n(x_k)\right)_{k\in N}$ es una sucesión convergente y la sucesión $\left(sen\left(\frac{1}{h(f(x_k))}\right)\right)_{k\in N}$ es no convergente, lo cual es una contradicción. Por tanto, I no es cerrado como queríamos. ∎

2.2. Sucesiones de funciones en $(C_b(X), \beta)$.

Ahora vamos a definir y enunciar algunas propiedades importantes que se tienen acerca del espectro de un elemento y para eneadas de elementos. Además consideramos algunos resultados relevantes en $(C_b(X), \beta)$ sobre dichos espectros para ver la importancia que tiene el Teorema que se da al final de la sección; donde si X es un espacio seudocompacto, entonces todo homomorfismo lineal y multiplicativo definido en $(C_b(X), \beta)$ es continuo en subálgebras numerablemente generadas.

Definición 53 *Sea A un álgebra topológica con unidad. Dado $x \in A$ definimos el* espectro *de x como*

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda e - x) \text{ no es invertible en } A\},$$

el espectro topológico *de x es*

$$\sigma_t(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda e - x) \text{ no es topológicamente invertible en } A\},$$

y si $\mathfrak{M}(A) \neq \emptyset$ el espectro funcional *es*

$$\sigma_{\mathfrak{M}}(x) = \{F(x) : F \in \mathfrak{M}(A)\} = \hat{x}(\mathfrak{M}(A)),$$

mientras que denotamos por

$$\sigma_{\mathfrak{M}^{\#}}(x) = \hat{x}\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right).$$

Observemos que en A un álgebra topológica con e y tal que $\mathfrak{M}(A) \neq \emptyset$, siempre tenemos que $\sigma_{\mathfrak{M}(A)}(x) \subset \sigma_t(x) \subset \sigma(x)$ ya que todo elemento invertible es topológicamente invertible, lo que nos da la segunda contención; mientras que si $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{M}(A)}(x)$, entonces $\lambda = F(x)$ para alguna $F \in \mathfrak{M}(A)$, lo cual implica que $x - F(x)e \in \ker(F)$ el cual es un ideal máximo cerrado, de donde obtenemos la primera contención.

En un álgebra de Banach conmutativa con unidad se da la igualdad de los tres espectros, al igual que para un álgebra m-convexa, conmutativa, completa, con unidad (véase Perez [15]).

Mientras que para eneadas de elementos en A un álgebra topológica con unidad e tenemos definido lo siguiente:

Definición 54 *Sea $(x_1, x_2, ..., x_N) \in A^N$,decimos que*

i) $(x_1, x_2, ..., x_N)$ *es* regular *si el ideal $x_1A + x_2A + ... + x_NA$ no genera todo A,*

ii) $(x_1, x_2, ..., x_N)$ *es* regular topológico *(regular top.) si*

$$\overline{x_1A + x_2A + ... + x_NA} = A;$$

es decir, existe una red de eneadas $\left(y_{[1,\lambda]}, y_{[2,\lambda]}, ..., y_{[N,\lambda]}\right)_\lambda \in A^N$ tal que $x_1y_{[1,\lambda]} + x_2y_{[2,\lambda]} + ... + x_Ny_{[N,\lambda]}$ converge a e.

La definición del primer inciso corresponde al equivalente a ser invertible, mientras que el segundo a la invertibilidad topológica ambos para un elemento.

Observación 55 *Si $(x_1, x_2, ..., x_N) \in A^N$ es regular, entonces $(x_1, x_2, ..., x_N)$ es regular topológico en A^N.*

Un resultado importante e interesante con respecto a estas definiciones es el Teorema de Arens que se enuncia a continuación, el cual puede encontrarse en Zelazko [20].

Teorema 56 (Arens) *Sean A un álgebra topológica m-convexa, conmutativa, de Fréchet, con unidad e y $(x_1, x_2, ..., x_N) \in A^N$. Entonces,*

$$(\Pi_n(x_1), \Pi_n(x_2), ..., \Pi_n(x_N))$$

es regular para cada n si y sólo si $(x_1, x_2, ..., x_N)$ es regular en A.

Ahora, al igual que para un elemento, podemos definir diferentes espectros para una eneada de elementos.

Definición 57 *Sean A un álgebra topológica conmutativa con unidad e y $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_N) \in A^N$. Definimos*

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{x}) &= \left\{ \begin{array}{r} (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N) \in \mathbb{C}^N : (x_1 - \lambda_1 e, x_2 - \lambda_2 e, ..., x_N - \lambda_N e) \\ \textit{no es regular en } A \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{r} (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N) \in \mathbb{C}^N : \sum_{i=1}^{N} (x_i - \lambda_i e) y_i \notin G(A), \\ \forall (y_1, y_2, ..., y_N) \in A^N \end{array} \right\},\end{aligned}$$

$$\sigma_t(\bar{x}) = \left\{ \begin{array}{r} (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N) \in \mathbb{C}^N : (x_1 - \lambda_1 e, x_2 - \lambda_2 e, ..., x_N - \lambda_N e) \\ \textit{no es regular top. en } A \end{array} \right\},$$

$$\sigma_{\mathfrak{M}}(\bar{x}) = \{(F(x_1), F(x_2), ..., F(x_N)) : F \in \mathfrak{M}(A)\} = \widehat{\bar{x}}(\mathfrak{M}(A)), \ y$$

$$\sigma_{\mathfrak{M}^{\#}}(\bar{x}) = \left\{(F(x_1), F(x_2), ..., F(x_N)) : F \in \mathfrak{M}^{\#}(A)\right\} = \widehat{\bar{x}}\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right)$$

Podemos ver que siempre se tienen las contenciones:

$$\sigma_{\mathfrak{M}}(\bar{x}) \subset \sigma_{\mathfrak{t}}(\bar{x}) \subset \sigma(\bar{x})$$

En álgebras de Banach tenemos la igualdad entre estos espectros; esto es, ya que en este caso los funcionales lineales multiplicativos sobre A son continuos, entonces $\sigma_{\mathfrak{M}}(\bar{x}) = \sigma_{\mathfrak{M}^{\#}}(\bar{x})$. Además, como $\sigma_{\mathfrak{M}}(\bar{x}) \subset \sigma_{\mathfrak{t}}(\bar{x}) \subset \sigma(\bar{x})$ nos resta mostrar que $\sigma(\bar{x}) \subset \sigma_{\mathfrak{M}}(\bar{x})$: si tomamos $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N) \in \sigma(\bar{x})$, por definición $(x_1 - \lambda_1 e) A + (x_2 - \lambda_2 e) A + ... + (x_N - \lambda_N e) A = I$ es un ideal propio de A y está contenido en un ideal máximo M. Sea $F_M : A \to A/M$, $a \to [a]$, F_M es un funcional lineal multiplicativo y continuo, y dado que $(x_i - \lambda_i e) \in I$ tenemos que $F_M(x_i) = \lambda_i$ como queríamos.

Además, de Perez [15] tenemos el siguiente resultado:

Proposición 58 *Sea A un álgebra m-convexa de Frechét, conmutativa y con unidad e. Entonces*

$$\sigma(\bar{x}) = \sigma_t(\bar{x}) = \sigma_{\mathfrak{M}}(\bar{x}).$$

Mientras que si consideramos a $(C_b(X), \beta)$, con X un espacio completamente regular, sabemos que $\mathfrak{M}(C_b(X), \beta) = X$, de donde

$$\sigma_{\mathfrak{M}}(f_1, f_2, ..., f_N) = \sigma_X(f_1, f_2, ..., f_N) = \{(f_1(p), f_2(p), ..., f_N(p)) : p \in X\}$$

para cada eneada $(f_1, f_2, ..., f_N) \in (C_b(X))^N$. Además, en Perez [15] tenemos el siguiente resultado:

Corolario 59 *Sea $(f_1, f_2, ..., f_N) \in (C_b(X))^N$. Entonces,*

$$\sigma_t(f_1, f_2, ..., f_N) = \sigma_X(f_1, f_2, ..., f_N) \subset cl(\sigma_X(f_1, f_2, ..., f_N)) \subset \sigma(f_1, f_2, ..., f_N).$$

Por otro lado, en esta álgebra no se cumple que

$$\sigma_t(f_1, f_2, ..., f_N) = \sigma(f_1, f_2, ..., f_N).$$

El problema fundamental del álgebra lineal sobre el campo de los números complejos es encontrar solución a sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Bx = y$, para B una matriz de $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{C}$ y y es un vector dado. Como sabemos, en dimensión finita, las soluciones de este sistema dependen de la invertibilidad de la matriz B que es lo mismo que pedir que su determinante sea distinto de cero.

Sin embargo, para dimensión infinita no podemos generalizar este concepto. Por otro lado, encontrar soluciones a este tipo de sistemas en dimensión finita, la teoría espectral la podemos reducir a encontrar valores propios y que podemos relacionar con la invertibilidad si estamos considerando un álgebra de Banach con unidad. Donde, los valores propios de un operador definido en un álgebra de Banach con unidad, con respecto a un vector propio fijo, van a formar el espectro de dicho vector. Así, este concepto lo podemos generalizar a dimensión infinita.

Pero aún no conocemos resultados que nos permitan caracterizar al espectro para sucesiones infinitas de elementos de un álgebra topológica. En relación al espectro de una eneada en W. Zelazko [19] se prueba lo siguiente:

Teorema 60 *Sea A un álgebra m-convexa compleja conmutativa metrizable y completa con unidad e, y sean $x_1, x_2, ..., x_n \in A$. Para cada $F \in \mathfrak{M}^{\#}(A)$ existe $f \in \mathfrak{M}(A)$ tal que $F(x_i) = f(x_i)$ para $i = 1, 2, ..., n$.*

Por lo regular tenemos resultados relacionados con el espectro para álgebras m-convexas y eneadas de elementos. Aunque $(C_b(X), \beta)$ no siempre es un álgebra m-convexa, nos podemos preguntar si se puede dar una propiedad similar a la anterior en dicha álgebra?

En este caso probamos un teorema para $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $(C_b(X), \beta)$ cuando X es un espacio seudocompacto.

Teorema 61 *Sea X un espacio seudocompacto y sea $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $C_b(X)$. Entonces, para todo $F \in \mathfrak{M}^{\#}(C_b(X))$ existe otro funcional $G \in \mathfrak{M}(C_b(X), \beta)$ tal que $F(f_i) = G(f_i)$, para todo $i = 1, 2, ...$*

Demostración. Sea $F \in \mathfrak{M}^{\#}(C_b(X)) \diagdown \mathfrak{M}(C_b(X), \beta)$, entonces existe $p \in \beta X \diagdown X$ tal que $F(f) = \widetilde{f}(p)$, para toda $f \in C_b(X)$, donde $\widetilde{f}$ es la extensión continua de f a βX. Dada $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $C_b(X)$, sea $\widetilde{f_n}$ la extensión de f_n para cada $n = 1, 2, ...$, entonces definimos

$$g_n = f_n - \widetilde{f_n}(p)$$

y

$$\widetilde{h_n} = \widetilde{g_n} \cdot \overline{\widetilde{g_n}}$$

para $n = 1, 2, ...$, donde por $\widetilde{g_n}$ denotamos a la extensión de g_n a βX y $\overline{\widetilde{g_n}}$ es la función conjugada de $\widetilde{g_n}$.

Cada $\widetilde{h_n}$ es una función real-valuada, y su restricción h_n a X está en M^{p*} (véase Notación 22, y Gillman-Jerison [11]).

Por otro lado, como el espacio X es seudocompacto, Por los teoremas 17 y 18 (véase Gillman-Jerison [11]) tenemos que M^{p*} es un ideal real y con esto $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Z(h_n) \neq \emptyset$. Además, existe $p' \in X$ tal que

$$0 = h_n(p') = \widetilde{h_n}(p') = \widetilde{g_n}(p') = g_n(p') = f_n(p') - \widetilde{f_n}(p)$$

ya que $Z\left(\widetilde{h_n}\right) = Z\left(\widetilde{g_n}\right) = Z\left(\overline{\widetilde{g_n}}\right)$, lo cual implica que

$$F(f_n) = \widetilde{f_n}(p) = f_n(p') = G(f_n)$$

para cada $n = 1, 2, ...$, donde $G \in \mathfrak{M}(C_b(X), \beta)$ esta definido por $G(f) = f(p')$ para todo $f \in C_b(X)$. ■

Ejemplo 62 *Sea $[0, \Omega)$ el espacio de todos los números ordinales menores que el primer ordinal no numerable Ω, dotado con la topología del orden. Este espacio tiene la propiedad, bien conocida, de que cualquier función compleja y continua f en $[0, \Omega)$ es eventualmente constante, esto es, es constante en algún conjunto $[\alpha, \Omega)$. Así, f tiene que ser acotada y por tanto $C([0, \Omega)) = C_b([0, \Omega))$. Es fácil ver que la topología estricta β dada en $C_b([0, \Omega))$ coincide con la topología compacto abierta k, de donde $(C_b([0, \Omega)), \beta)$ es un álgebra m-convexa. $(C_b([0, \Omega)), \beta)$ tiene sólo un funcional lineal multiplicativo no continuo F_Ω dado por*

$$F_\Omega(f) = f(\alpha)$$

Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C_b([0, \Omega))$. Entonces, f_n es constante en algún conjunto $[\alpha_n, \Omega)$, sea $\alpha = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{\alpha_n\} < \Omega$. Entonces, tenemos que cada función f_n es constante en algún conjunto $[\alpha, \Omega)$. Además, obtenemos que el funcional F_α dado por

$$F_\alpha(f) = f(\alpha)$$

es el funcional continuo, dado por el teorema anterior, tal que

$$F_{\Omega}(f_n) = F_{\alpha}(f_n)$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$

Capítulo 3

Sobre las algebras $C_b(X, A)$ y $C_p(X, A)$

En la primera sección de este capítulo empezamos por dar algunos resultados que aparecen en J. Arhippainen [1] y que utilizamos más adelante. En la segunda sección definimos las algebras $C_b(X, A)$ y $C_p(X, A)$, donde $(A, \|\cdot\|)$ es un álgebra de Banach (o un álgebra m-convexa) y X es un espacio de Hausdorff, completamente regular. Mientras que en la tercera parte damos un homomorfismo relacionado con estas algebras de funciones. En las secciones 4 y 5 hablamos de la m-convexidad de este tipo de álgebras dotadas con la topología del supremo ó, en su caso, la estricta. Nuestro propósito es ver como se comportan los ideales máximos de dichas álgebras. Por último, en la sección 6 veremos algunas propiedades de estos espacios en cuanto a espectros e invertivilidad.

Cabe señalar que todos los resultados que se dan en este capítulo, tales que no se menciona referencia alguna y con excepción de la primera sección, son el resultado del arduo trabajo al tratar de ver el comportamiento de los ideales máximos de las álgebras $C_b(X, A)$ y $C_p(X, A)$ y la caracterización de los elementos invertibles en estas algebras.

3.1. El espacio de ideales máximos en algebras localmente m-convexas

En esta pequeña sección daremos algunas definiciones y resultados sobre el espacio de ideales máximos del álgebra $C(X, A)$ de todas las funciones continuas definidas en X con valores en un álgebra m-convexa A, y que se tienen en J. Arhippainen [1] .

Empezamos por considerar a X como un espacio de Hausdorff y completamente regular, y por A a un álgebra localmente m-convexa, conmutativa, compleja y con unidad e. Sea $\mathcal{P} = \{p_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ la familia de seminormas que definen la topología en A, la cual denotamos por $\tau_{\mathcal{P}}$. Además, supongamos que $\tau_{\mathcal{P}}$ es una topología de Hausdorff (es decir, $p_\lambda(x) = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$ si y sólo si $x = 0$).

Definición 63 *Sean Y y Z dos espacios vectoriales topológicos y Γ una colección de funciones lineales definidas de Y en Z.*

1. *Decimos que Γ es equicontinuo si para cada vecindad W de 0 en Z existe una vecindad V de cero en Y tal que $F(V) \subset W$ para todo $F \in \Gamma$; es decir, $\forall x \in Y$ y cada vecindad W de $F(x)$ en Z existe una vecindad V de x en Y tal que $F(V) \subset W$ para todo $F \in \Gamma$.*
2. *Si además pedimos que Γsea un espacio topológico, decimos que Γ es localmente equicontinuo si para cada $F \in \Gamma$ existe una vecindad U de F en Γ tal que U es un conjunto equicontinuo.*

Por ejemplo, si A es un álgebra topológica tal que $\mathfrak{M}(A) \neq \emptyset$ y consideramos a este espacio dotado con la topología débil estrella w^*, tenemos que $\mathfrak{M}(A)$ es localmente equicontinuo siempre que para cada $F \in \mathfrak{M}(A)$ existe $V(F, x_1, ..., x_n, \delta)$ vecindad de F tal que es equicontinuo.

Definición 64 *Denotamos por $C(X,A)$ al espacio de todas las funciones continuas A-valuadas definidas en X, dotado con las operaciones algebraicas puntuales.*

Sea $\boldsymbol{K}$ una familia de subconjuntos de X tal que es una cubierta compacta de X, la cual es cerrada bajo uniones finitas. Sean $K \in \boldsymbol{K}$ y $\lambda \in \Lambda$, donde Λ es el conjunto dirigido bajo el cual esta indexada la familia de seminormas $\mathcal{P} = \{p_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ que definen la topología en A. Entonces, podemos definir una seminorma $p_{(K,\lambda)}$ en $C(X,A)$ dada por

$$p_{(K,\lambda)}(f) = \sup_{t \in K} (p_\lambda(f(t))), \; f \in C(X,A).$$

Consideremos al conjunto $\mathcal{P}(\boldsymbol{K}, \Lambda) = \{\, p_{(K,\lambda)} : K \in \boldsymbol{K},\, \lambda \in \Lambda\}$, y notemos que $\{\, (K,\lambda) : K \in \boldsymbol{K},\, \lambda \in \Lambda\}$ es un conjunto dirigido bajo la relación

$$(K_1, \lambda_1) \prec (K_2, \lambda_2) \text{ si y sólo si } \lambda_1 \prec \lambda_2 \text{ y } K_1 \subset K_2,$$

y así $\mathcal{P}(\boldsymbol{K}, \Lambda)$ es una familia dirigida de seminormas. Esta familia $\mathcal{P}(\boldsymbol{K}, \Lambda)$ define una topología localmente m-convexa y de Hausdorff en $C(X,A)$ a la cual denotaremos por $T(\boldsymbol{K}, \Lambda)$.

Además, observemos que si $\boldsymbol{K}$ coincide con el conjunto $\mathcal{K}(X)$ de todos los subconjuntos compactos de X, entonces $T(\boldsymbol{K}, \Lambda)$ es la topología compacto-abierta definida en $C(X,A)$.

Sean $t \in X$ y $F \in \mathfrak{M}(A)$ dados. Podemos definir el mapeo

$$\phi_{(t,F)} : C(X,A) \to \mathbb{C}$$

definido como $\phi_{(t,F)}(f) = F(f(t))$, $f \in C(X,A)$. Es claro que $\phi_{(t,F)} \in \mathfrak{M}(C(X,A))$ y $\ker \phi_{(t,F)} = \{f \in C(X,A) : f(t) \in \ker F\}$.

Por otro lado, definimos la función

$$\varphi : X \times \mathfrak{M}(A) \to \mathfrak{M}(C(X,A), T(\boldsymbol{K}, \Lambda))$$

dada por $\varphi(t,F) = \phi_{(t,F)}$ para cada $(t,F) \in X \times \mathfrak{M}(A)$. Con respecto a esta función tenemos lo siguiente, véase J. Arhippainen [1]:

Teorema 65 *La función φ definida arriba es una biyección de $X \times \mathfrak{M}(A)$ en $\mathfrak{M}(C(X,A), T(\boldsymbol{K}, \Lambda))$. Además, la función inversa φ^{-1} es continua y φ es continua si $\mathfrak{M}(A)$ es localmente equicontinuo.*

Gracias a este Teorema también tenemos el siguiente corolario, para su demostración véase J. Arhippainen [1] .

Corolario 66 *El espacio $\mathfrak{M}(C(X,A), T(\boldsymbol{K}, \Lambda))$ es homeomorfo a $X \times \mathfrak{M}(A)$ si $\mathfrak{M}(A)$ es un conjunto localmente equicontinuo.*

Por lo que si $(A, \|\cdot\|)$ es un álgebra de Banach y consideramos al álgebra $C(X,A)$ dotada con la topología compacto abierta $\mathcal{K}$, entonces $\mathfrak{M}(A)$ es compacto, donde $\mathfrak{M}(A)$ esta dotado con la topología débil estrella w^*, y por tanto $\mathfrak{M}(A)$ localmente equicontinuo, y $\mathfrak{M}(C(X,A), \mathcal{K}) \cong X \times \mathfrak{M}(A)$.

3.2. Las algebras $C_b(X,A)$ y $C_p(X,A)$

Definición 67 *Sean $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach, conmutativa, con unidad e y X un espacio completamente regular, de Hausdorff y compacto. Por $(C(X,A), \|\cdot\|_\infty)$ denotamos al álgebra de todas las funciones continuas A-valuadas y definidas en X, dotada con la topología del supremo*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|,$$

$f \in C(X,A)$.

Notemos que la topología dada arriba está bien definida pues estamos considerando a X como un espacio compacto.

Sea X un espacio completamente regular y de Hausdorff, consideremos las dos álgebras topológicas siguientes:

Definición 68 *Sea $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach, conmutativa y con unidad e. Definimos*

$$C_b(X,A) = \{f : X \to A : \ f \ \text{ es continua y } \sup_{x \epsilon X} \|f(x)\| < \infty\}, \text{ y}$$

$$C_p(X,A) = \{f : X \to A : \ f \ \text{ es continua y } \ \overline{f(X)} \ \text{ es compacto en } A\}.$$

A estas dos algebras las dotamos con la seminorma del supremo

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \epsilon X} \|f(x)\|.$$

La importancia de definir el álgebra $C_p(X,A)$ radica en que

$$\mathfrak{M}(C(\beta X,A),\|\cdot\|_\infty)=\mathfrak{M}(C_p(X,A),\|\cdot\|_\infty)=\beta X\times\mathfrak{M}(A),$$

como veremos más adelante.

Además, tenemos las siguientes afirmaciones:

Proposición 69 *Sean X un espacio completamente regular, de Hausdorff y $(A,\|\cdot\|)$ un álgebra de Banach, conmutativa y con unidad e. Entonces, $(C_b(X,A),\|\cdot\|_\infty)$ es un álgebra de Banach.*

Demostración. Sea $(f_n)\subset C_b(X,A)$ una sucesión de Cauchy con respecto a $\|\cdot\|_\infty$. Entonces, $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en A para cada $x\epsilon X$, pues

$$\|f_n(x)-f_m(x)\|\leq\|f_n-f_m\|_\infty.$$

Por lo que, dado $x\in X$ tenemos que $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\to}f(x)$ para algún $f(x)\in A$ único. Por otro lado, dado $\varepsilon>0$ se cumple que

$$\|f_n-f_m\|_\infty=\sup_{x\epsilon X}\|f_n(x)-f_m(x)\|<\varepsilon$$

$\forall n,m\geq N(\varepsilon)$ para algún $N(\varepsilon)$.

Si fijamos m y hacemos crecer n obtenemos

$$\|f(x)-f_m(x)\|\leq\varepsilon\quad\forall x,\quad\forall m\geq N(\varepsilon),\tag{5}$$

De donde:

a) f es una función acotada:

De (5) tenemos que $\|f(x)-f_m(x)\|\leq\varepsilon\quad\forall x$. Como f_m es acotada y por la desigualdad del triángulo se cumple que

$$\|f(x)\|\leq\varepsilon+\|f_m(x)\|<\varepsilon+M_m$$

para algún $M_m>0$ y $\forall x$. Por tanto podemos hablar de $\|f-f_m\|_\infty$ $\forall m\in\mathbb{N}$.

b) f es continua:

Tomemos $\frac{\varepsilon}{3}$, entonces existe $N(\frac{\varepsilon}{3})$ tal que $\|f-f_n\|_\infty<\frac{\varepsilon}{3}$ si $n>N(\frac{\varepsilon}{3})$. Sea $n>N(\frac{\varepsilon}{3})$ fija, por ser f_n continua en x existe $U(x)$, una vecindad de x en X, tal que $\forall y\in U(x)$, $\|f_n(x)-f_n(y)\|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Si $y\in U(x)$,

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\| &\leq \|f(x)-f_n(x)\|+\|f_n(x)-f_n(y)\|+\|f(y)-f_n(y)\|\\ &\leq \|f-f_n\|_\infty+\frac{\varepsilon}{3}+\|f-f_n\|_\infty<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

con lo que en efecto f es continua en x, para cada $x\in X$.

Podemos concluir que $(C_b(X,A), \|\cdot\|_\infty)$ es un álgebra completa como queríamos ver. ■

De manera similar se cumple lo siguiente.

Proposición 70 *Sean X un espacio completamente regular, de Hausdorff y $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach, conmutativa y con unidad e. Entonces, $(C_p(X,A), \|\cdot\|_\infty)$ es un álgebra de Banach.*

Para demostrar esta afirmación primero veamos lo siguiente.

Dado βX, la compactificación de Stone-Čhec de X, sabemos que βX cumple lo siguiente, véase Engelking [8], pág. 173.:

Teorema 71 *Para cada función continua $f : X \to K$, tal que K es compacto, existe una única extensión $\tilde{f} : \beta X \to K$ de f, la cual también es continua.*

Gracias a esto podemos definir la siguiente función

$$H : (C_p(X,A), \|\cdot\|_\infty) \to (C(\beta X, A), \|\cdot\|_\infty) \tag{6}$$

dada por $H(f) = \widetilde{f}$.

Entonces H cumple:

i) H es isomorfismo:

   Demostración. H es inyectivo, pues si $f \neq g$ en $(C_p(X,A), \|\cdot\|_\infty)$ existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$; por lo tanto, de la definición de $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ tenemos que $\widetilde{f}(x_0) = f(x_0) \neq g(x_0) = \widetilde{g}(x_0)$ y así $\widetilde{f} \neq \widetilde{g}$.

   Por otro lado, es claro que H es sobre y por unicidad (véase Teo. 71) $\widetilde{f+g} = \widetilde{f} + \widetilde{g}$ y $\widetilde{f \cdot g} = \widetilde{f} \cdot \widetilde{g}$. ■

ii) H es una isometría, por ser X denso en βX y de la definición de la norma $\|\cdot\|_\infty$, ya que $\|f\|_\infty = \left\|\widetilde{f}\right\|_\infty$.

iii) H es un homeomorfismo, pues dado $U \subset C_p(X,A)$ abierto, también $H(U)$ es abierto en $C(\beta X, A)$ por ser H isomorfismo e isometría.

De esto último, ya que H es un homeomorfismo y

$$(C_b(\beta X, A), \|\cdot\|_\infty) = (C(\beta X, A), \|\cdot\|_\infty),$$

por ser βX compacto, concluimos que en efecto $(C_p(X,A), \|\cdot\|_\infty)$ es un álgebra de Banach.

Además, con respecto a los ideales máximos cerrados tenemos:

Proposición 72 *Sean X un espacio de Hausdorff, completamente regular y $(A, \|\cdot\|_1)$ un álgebra de Banach, conmutativa y con unidad e. Entonces*

$$\mathfrak{M}(C_p(X,A), \|\cdot\|_\infty) = \mathfrak{M}(C(\beta X, A), \|\cdot\|_\infty) = \beta X \times \mathfrak{M}(A).$$

Demostración. Esta afirmación se da ya que la topología dada por la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $C(\beta X, A)$ es equivalente a la topología $T(\boldsymbol{K} = \{\beta X\}, \Lambda = \{1\})$, donde $\|f\|_\infty = \|f\|_{\beta X}$, y por ser $\mathfrak{M}(A)$ equicontinuo, por el Corolario 66 (también véase J. Arhippainen [1]) y el homeomorfismo anterior obtenemos que en efecto $\beta X \times \mathfrak{M}(A) = \mathfrak{M}(C(\beta X, A), \|\cdot\|_\infty) = \mathfrak{M}(C_p(X,A), \|\cdot\|_\infty)$. ■

Ahora definamos otra topología en $C_b(X,A)$, la cual también es de interés en este trabajo.

Definición 73 *Sean X un espacio de Hausdorff completamente regular y $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach, conmutativa y con unidad e. Definimos en $C_b(X,A)$ la topología estricta β dada por las seminormas*

$$\|f\|_\varphi = \sup_{x\in X} \|\varphi(x) f(x)\| < \infty,$$

donde $\varphi \in B_0(X)$.

Estas seminormas hacen a $C_b(X,A)$ un álgebra localmente convexa.

3.3. Un Homomorfismo definido en $C_b(X,A)$

Antes de dar un homomorfismo que nos servirá para obtener otro resultado importante de este trabajo, mencionamos algunos aspectos básicos sobre algebras de funciones que se mencionan en Royden [18] y otros resultados que aparecen en Rickart [16]. Esto es para poder mostrar que si A es un álgebra conmutativa, semisimple, de Banach y X es un espacio seudocompacto entonces $\mathfrak{M}^{\#}(C_b(X,A)) = \beta X \times \mathfrak{M}(A)$ si y sólo sí $\widehat{C_b(X,A)}$ cumple cierta propiedad (β).

Definición 74 *Definimos un álgebra de funciones A como una colección de funciones con valores en el campo de los números complejos definidas en un conjunto X, tales que la suma y el producto (definidas puntualmente) de dos elementos de A también estan en A. Decimos que un álgebra de funciones A es semi-adjunta si la conjugación compleja de cada elemento en A está también en A.*

Además, cuando hablamos de algebras de funciones, supondremos que A separa los puntos de X y que A contiene a las funciones constantes, $\underline{1} \in A$, por lo que si A es un álgebra de funciones también la podemos ver como un álgebra con unidad sobre el campo de los numeros complejos.

Definición 75 *Si X es un espacio topológico, decimos que A es un álgebra de funciones continuas si A es un álgebra de funciones, cumple con lo anterior y cada $f \in A$ es continua.*

Por ejemplo, $C(X)$ el álgebra de todas las funciones continuas con valores en el campo de los numeros complejos y definidas en el espacio topológico X es un álgebra de funciones continuas semi-adjunta.

Observe que pedimos que A separe los puntos de X para asegurar que A no contenga sólo a las funciones constantes. En este caso, es claro que $\widehat{X} \subset \mathfrak{M}^{\#}(A)$.

Proposición 76 *Sean X un espacio completamente regular y A un álgebra de Banach, conmutativa, semisimple y con unidad e. Definamos la función:*

$$T : C_b(X, A) \to C_b(X \times \mathfrak{M}(A)) \cong C(\beta(X \times \mathfrak{M}(A)))$$

dada por $T(f) = \widehat{f}$, donde $\widehat{f}(x, F) = F(f(x))$. Entonces, tenemos las siguientes afirmaciones:

1. *T es un homomorfismo de algebras,*
2. *T es inyectivo, y*
3. *Si $A = C(Y)$ y en A consideramos la topología del supremo, tenemos que T es sobre.*

Demostración.

1. Mostremos que en efecto T es homomorfismo de algebras:

   a) $T(f + g) = \widehat{f} + \widehat{g}$, pues $T(f + g) = \widehat{f + g}$ y

   $$\begin{aligned} \widehat{f+g}(x, F) &= F((f + g)(x)) = F(f(x) + g(x)) \\ &= F(f(x)) + F(g(x)) = \left(\widehat{f} + \widehat{g}\right)(x, F) \end{aligned}$$

   para todo $(x, F) \in X \times \mathfrak{M}(A)$.

   b) $T(f \cdot g) = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$, ya que $T(f \cdot g) = \widehat{f \cdot g}$ y

   $$\begin{aligned} \widehat{f \cdot g}(x, F) &= F((f \cdot g)(x)) = F(f(x) \cdot g(x)) \\ &= F(f(x)) \cdot F(g(x)) = \left(\widehat{f} \cdot \widehat{g}\right)(x, F) \end{aligned}$$

   para cada $(x, F) \in X \times \mathfrak{M}(A)$.

   c) $T(\lambda f) = \lambda \widehat{f}$, pues $T(\lambda f) = \widehat{\lambda f}$ y

   $$\widehat{\lambda f}(x, F) = F((\lambda f)(x)) = F(\lambda f(x)) = \lambda F(f(x))) = \left(\lambda \widehat{f}\right)(x, F)$$

   siempre que $(x, F) \in X \times \mathfrak{M}(A)$.

2. Para ver que T es inyectivo, sean $f, g \in C_b(X, A)$, tales que $T(f) = T(g)$. Entonces, $\widehat{f}(x, F) = \widehat{g}(x, F) \;\; \forall (x, F) \in X \times \mathfrak{M}(A)$. Esto último implica que $F(f(x) - g(x)) = 0 \; \forall (x, F) \in X \times \mathfrak{M}(A)$, y como A es semisimple tenemos que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$. Por tanto, T es un homomorfismo inyectivo.

3. Notemos que si $A = C(Y)$, con Y un espacio compacto, y dotamos a esta álgebra con la topología del supremo, tenemos que A es semisimple y $\mathfrak{M}(A) = Y$. En este caso veamos que en efecto T es sobre: dadas estas hipótesis tenemos que
$$T : C_b(X, C(Y)) \to C_b(X \times Y) \cong C(\beta(X \times Y))$$
donde para cada $f \in C_b(X, C(Y))$, f es tal que $f : X \to C(Y)$ y esta dada por $x \longmapsto (f_x : Y \to \mathbb{C})$, por lo que T esta definida como $T(f) = \widehat{f}$ y $\widehat{f}(x,y) = f_x(y)$.

   Sea $g \in C_b(X \times Y)$. Para cada $x \in X$ definamos $g_x : Y \to \mathbb{C}$, dada por $g_x(y) = g(x,y)$ $\forall y \in Y$. Entonces, g_x esta bien definida para todo $x \in X$ y
$$\sup_{y\in Y} |g_{x_0}(y)| = \sup_{y\in Y} |g(x_0,y)| \leq \sup_{(x,y)\in X\times Y} |g(x,y)| < \infty$$
para cada $x_0 \in X$. Ahora, si $(y_\lambda) \subset Y$ es una red tal que $y_\lambda \underset{\lambda}{\to} y$ en Y, se cumple que $(x_0, y_\lambda) \underset{\lambda}{\to} (x_0, y)$ en $X \times Y$ y así
$$|g_{x_0}(y_\lambda) - g_{x_0}(y)| = |g(x_0,y_\lambda) - g(x_0,y)| \underset{\lambda}{\to} 0$$
por ser g es continua. Por lo tanto, g_{x_0} es continua y acotada $\forall x_0 \in X$.

   Ahora, definamos $h : X \to C(Y)$ por $h(x) = g_x$. Afirmamos que h es continua:

   Sean $\varepsilon > 0$, $x_0 \in X$, $y \in Y$, $V_y(x_0)$ una vecindad de x_0 en X y U_y una vecindad de y en Y tales que $g(V_y(x_0) \times U_y) \subset B_\varepsilon(g(x_0,y))$; esto último lo obtenemos de la continuidad de g. Entonces, $\{U_y : y \in Y\}$ forman una cubierta abierta de Y, y como Y es compacto, existe $\{U_{y_i} : 1 \leq i \leq n\}$ una subcubierta finita de Y. Sea $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}(x_0)$, el cual es una vecindad de x_0 en X. De aquí que $g(V \times U_{y_i}) \subset B_\varepsilon(g(x_0,y_i))$ y con esto, dado $x \in V$
$$\begin{aligned} \|h(x_0) - h(x)\|_\infty &= \|g_{x_0} - g_x\|_\infty = \sup_{y\in Y} |g_{x_0}(y) - g_x(y)| \\ &= \sup_{y\in Y} |g(x_0,y) - g(x,y)| \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$
de donde obtenemos la continuidad de h.

   Por otro lado, h es acotada ya que
$$\begin{aligned} \sup_{x\in X} \|h(x)\|_\infty &= \sup_{x\in X} \|g_x\|_\infty = \sup_{x\in X} \left(\sup_{y\in Y} |g_x(y)| \right) \\ &\leq \sup_{(x,y)\in X\times Y} |g(x,y)| = \|g\|_\infty < \infty \end{aligned}$$
con lo que $T(h) = g$ y T es sobre como queríamos ver.

■

Con esto, tenemos que

$$C_b(X, C(Y)) \cong C_b(X \times Y) \cong C(\beta(X \times Y))$$

y así

$$\mathfrak{M}^{\#}(C_b(X, C(Y))) = \mathfrak{M}^{\#}(C_b(X \times Y)) = \beta(X \times Y).$$

Observación 77 *Como* $(C_b(X \times Y), \|\cdot\|_\infty) \cong (C(\beta(X \times Y)), \|\cdot\|_\infty)$ *y dados* $f \in C_b(X, C(Y))$ *y* $t \in X$ *se cumple que*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\| \geq |(f(t))(y)|$$

para todo $y \in Y$*, lo que trae como consecuencia que*

$$\|f\|_\infty \geq \sup_{(t,y) \in X \times Y} |(f(t))(y)| = \left\| \hat{f} \right\|_\infty$$

A la inversa, para cada $x \in X$

$$\|f(x)\|_\infty = \sup_{y \in Y} \|(f(x))(y)\| \leq \sup_{(t,y) \in X \times Y} |(f(t))(y)| = \left\| \hat{f} \right\|_\infty,$$

entonces $\|f\|_\infty = \left\| \hat{f} \right\|_\infty$.

Por lo tanto, la función

$$T : (C_b(X, C(Y)), \|\cdot\|_\infty) \to (C_b(X \times Y), \|\cdot\|_\infty) \cong (C(\beta(X \times Y)), \|\cdot\|_\infty)$$

dada por $T(f) = \widehat{f}$*, donde* $\widehat{f}(x, F) = F(f(x))$*, es una isometría y además es una función continua por ser* Y *un espacio compacto.*

Sea A un álgebra conmutativa, semisimple, de Banach y con unidad e, entonces esta álgebra es un álgebra de funciones $A \subset C(Y)$, donde $Y = \mathfrak{M}(A)$ es compacto. De la proposición anterior tenemos que el homomorfismo

$$T : C_b(X, A) \to C_b(X \times \mathfrak{M}(A)) \cong C(\beta(X \times \mathfrak{M}(A)))$$

dado por $T(f) = \widehat{f}$, donde $\widehat{f}(x, F) = F(f(x))$, es inyectivo y como

$$T(C_b(X, A)) = \widehat{C_b(X, A)} \subset C_b(X \times \mathfrak{M}(A)) = C(\beta(X \times \mathfrak{M}(A))),$$

para X un espacio seudocompacto también se cumple que $C(\beta(X \times \mathfrak{M}(A))) = C(\beta X \times \mathfrak{M}(A))$ y así $B = \widehat{C_b(X, A)}$ es subálgebra de $(C(\beta X \times \mathfrak{M}(A)), \|\cdot\|_\infty)$. Afirmamos lo siguiente:

Proposición 78 *Sean* X *un espacio de Hausdorff, seudocompacto y* A *un álgebra conmutativa, semisimple, de Banach y con unidad* e*. Entonces,* $B = \widehat{C_b(X, A)}$ *es álgebra de funciones continuas en* $\beta X \times \mathfrak{M}(A)$*.*

Demostración. Para demostrar esta afirmación nos basta con probar que B contiene a las funciones constantes y que separa los puntos de $\beta X \times \mathfrak{M}(A)$.

Primero, notemos que para cada $a \in A$ tenemos definida una función H_a que incluye a $C_b(X)$ en $C_b(X,A)$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} & & C_b(X) \overset{H_a}{\to} C_b(X,A) \\ f & \longmapsto & f(\cdot)\, a : X \to A \end{array}$$

donde $(f(\cdot)\, a)(x) = f(x)\, a$. De aquí que $\widehat{C_b(X)} = \widehat{a}(\mathfrak{M}(A))\, C_b(X)$, y $C(\beta X) = C_b(X) \hookrightarrow T(C_b(X,A))$.

(a) B contiene a las constantes ya que si $c \in \mathbb{C}$, la función constante $\underline{c}$ esta dada por $\widetilde{\widehat{\underline{c}(\cdot)\, e_A}} : \beta(X \times \mathfrak{M}(A)) \to \mathbb{C}$, donde$^{\sim}$ indica, como siempre, la extensión a $\beta(X \times \mathfrak{M}(A))$ y $\widehat{\underline{c}(\cdot)\, e_A}(x,F) = F(\underline{c}(x)\, e_A) = F(ce_A) = c$.

(b) Como X es un espacio seudocompacto obtenemos que

$$\beta(X \times \mathfrak{M}(A)) = \beta(X) \times \mathfrak{M}(A)$$

(véase Apéndice). Así, B separa puntos de $\beta(X \times \mathfrak{M}(A))$:

Sean $(p,F),(q,G)$ elementos distintos de $\beta X \times \mathfrak{M}(A)$.

Si $p \neq q$ existe $\widetilde{f} \in C(\beta X)$ tal que $\widetilde{f}(p) \neq \widetilde{f}(q)$; en este caso consideremos la función

$$\widetilde{f}\,\widehat{|_X(\cdot)\, e_A} \in \{g \in \widehat{a}(\mathfrak{M}(A))\, C_b(X) : a \in A\} \subset B.$$

Entonces, $\widetilde{f}\,\widehat{|_X(\cdot)\, e_A}(p,F) = \widetilde{f}(p)\, F(e_A) = \widetilde{f}(p) \neq \widetilde{f}(q) = \widetilde{f}(q)\, G(e_A) = \widetilde{f}\,\widehat{|_X(\cdot)\, e_A}(q,G)$.

Si $F \neq G$, como A es semisimple existe $a \in A$ tal que $F(a) \neq G(a)$ y en este caso podemos considerar a la función $\widehat{\underline{1}(\cdot)\, \widehat{a}}$ donde $\underline{1}(\cdot)$ es la constante 1. Con esto obtenemos que $\widehat{\underline{1}(\cdot)\, \widehat{a}}(p,F) = \underline{1}(p)\, F(a) = F(a) \neq G(a) = \underline{1}(q)\, G(a) = \widehat{\underline{1}(\cdot)\, \widehat{a}}(q,G)$.

■

De este modo, por la proposición 5 de H. L. Royden [18]:

Proposición 79 *Sea A un álgebra de funciones continuas en un espacio compacto Y. Entonces $Y = \mathfrak{M}^{\#}(A)$ si y sólo sí A cumple la propiedad (β).*

Donde la propiedad (β) pide lo siguiente:

(β) *Si $f_1, f_2, ..., f_n \in A$ sin ceros en común, entonces existen $g_1, g_2, ..., g_n \in A$ tales que $g_1 f_1 + g_2 f_2 + ... + g_n f_n = 1$.*

Obtenemos el siguiente resultado, el cual nos ha dado otra condición para el estudio del espacio de ideales máximos en $C_b(X,A)$:

Proposición 80 *Sean X un espacio de Hausdorff, seudocompacto y A un álgebra conmutativa, semisimple, de Banach y con unidad e. Entonces, $B = \widehat{C_b(X,A)}$ es álgebra de funciones continuas en $\beta X \times \mathfrak{M}(A) = Y$ un espacio compacto, y $\mathfrak{M}^{\#}(C_b(X,A)) = \beta(X \times \mathfrak{M}(A)) = \beta X \times \mathfrak{M}(A)$ si y sólo sí $\widehat{C_b(X,A)}$ cumple la propiedad (β) (ó lo que es lo mismo si y sólo si $C_b(X,A)$ cumple la propiedad (β)).*

Demostración. Esta afirmación se da por la proposición dada anteriormente, y ya que el homomorfismo T, definido antes, es inyectivo tenemos que

$$\mathfrak{M}^{\#}\left(\widehat{C_b(X,A)}\right) = \mathfrak{M}^{\#}(C_b(X,A)).$$

Además, por la proposición anterior, $\widehat{C_b(X,A)}$ cumple la propiedad (β) si y sólo sí $\mathfrak{M}^{\#}\left(\widehat{C_b(X,A)}\right) = \mathfrak{M}^{\#}(C_b(X,A)) = \beta(X \times \mathfrak{M}(A)) = \beta X \times \mathfrak{M}(A)$ ■

De manera que nos queda por ver que condiciones sobre X y/o A necesitamos pedir para que $\widehat{C_b(X,A)}$ cumpla la propiedad (β).

3.4. Sobre la m-convexidad de $C_b(X,A)$ y $C_p(X,A)$

En esta sección damos elementos interesantes que hemos obtenido sobre la m-convexidad de algebras del tipo $(C_b(X,A), \tau)$, las cuales son nuestro objeto de estudio, donde A es un álgebra m-convexa.

Para empezar, recordemos lo siguiente:

Sea $(A, \{\|\cdot\|_\alpha\}, \alpha \in \Lambda)$ un álgebra m-convexa, completa conmutativa con e. Entonces dada $(A, \{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in \Lambda\})$, se tienen los morfismos de algebras

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha &: A \to A_\alpha = \widehat{A/\ker\|\cdot\|_\alpha}, \text{ y} \\ \Pi_\alpha^\beta &: A_\beta \to A_\alpha \end{aligned}$$

y estos son continuos para cada $\alpha, \beta \in \Lambda$, con $\alpha \leq \beta$; donde cada $\left(A_\alpha, \|\cdot\|'_\alpha\right)$ es un álgebra de Banach y $\|[x]\|'_\alpha = \|x\|_\alpha$ para cada $x \in A$. Además, la topología de A coincide con la topología más débil que hace continuos a los morfismos $\{\Pi_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$.

Así, tenemos

$$\lim_{\substack{\longleftarrow \\ \alpha}} A_\alpha = A$$

Además, $\Pi_\alpha^\gamma(x) = \Pi_\alpha^\beta \circ \Pi_\beta^\gamma(x)$ $\forall \alpha \leq \beta \leq \gamma$ y $\Pi_\alpha(x) = \Pi_\alpha^\beta \circ \Pi_\beta(x)$ $\forall\ \alpha \leq \beta$, $\forall x \in X$. Por otra parte,

$$A = \{x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in \prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha : x_\alpha = \Pi_\alpha^\beta(x_\beta)\ \ \forall \alpha \leq \beta\}.$$

Entonces, podemos definir dos álgebras m-convexas. Primero definimos y estudiamos propiedades del álgebra

$$(C_b(X,A), \{\|\cdot\|_{\alpha,\infty}\}, \alpha \in \Lambda) = \left\{ \begin{array}{ll} f : X \to A: & f \text{ es continua y} \sup\limits_{x \in X} \|f(x)\|_\alpha < \infty \\ & \text{para cada } \alpha \in \Lambda \end{array} \right\}$$

y posteriormente de

$$(C_p(X,A),\{\|\cdot\|_{\alpha,\infty}\},\alpha\in\Lambda)=\left\{f:X\to A\ : f \text{ es continua y } \overline{f(x)} \text{ es compacto en } A\right\}$$

Observación 81 *Si consideramos las álgebras $(C_b(X,A_\alpha),\|\cdot\|_{\alpha,\infty})$, $\alpha\in\Lambda$, estas son de Banach; esto es, por ser $\left(A_\alpha,\|\cdot\|'_\alpha\right)$ un álgebra de Banach para cada $\alpha\in\Lambda$, $\underset{\overleftarrow{\alpha}}{\text{lím}}A_\alpha=A$ y por la sección anterior.*

Así, con respecto al álgebra $(C_b(X,A),\{\|\cdot\|_{\alpha,\infty}\},\alpha\in\Lambda)$ hemos demostrado lo siguiente:

Proposición 82 *Sea $(A,\{\|\cdot\|_\alpha\},\alpha\in\Lambda)$ un álgebra m-convexa, completa conmutativa con e. Entonces, $(C_b(X,A),\{\|\cdot\|_{\alpha,\infty}\},\alpha\in\Lambda)=\underset{\longleftarrow\alpha}{\text{lím}}(C_b(X,A_\alpha),\|\cdot\|_{\alpha,\infty})$, donde $\underset{\overleftarrow{\alpha}}{\text{lím}}A_\alpha=A$.*

Demostración. Dados $f\in C_b(X,A)$ y $\beta\in\Lambda$, definimos el morfismo

$$\widetilde{\Pi}_\beta : C_b(X,A)\to C_b(X,A_\beta)$$

dado por $\widetilde{\Pi}_\beta\,(f)=\Pi_\beta\circ f\in C_b(X,A_\beta)$; y

$$\widetilde{\Pi}^\beta_\alpha : C_b(X,A_\beta)\to C_b(X,A_\alpha)$$

definido como $\widetilde{\Pi}^\beta_\alpha\,(f)=\Pi^\beta_\alpha\circ f\in C_b(X,A_\alpha)$, por lo que $\widetilde{\Pi}_\beta$ y $\widetilde{\Pi}^\beta_\alpha$ estan bien definidas, por ser Π^β_α y Π_β lineales y continuos.

Además:

i) Si $f_\gamma\to f$ en $(C_b(X,A),\{\|\cdot\|_{\alpha,\infty}\},\alpha\in\Lambda)$, entonces $\widetilde{\Pi}_\beta\,(f_\gamma)\to\widetilde{\Pi}_\beta\,(f)$ en $(C_b(X,A_\beta),\|\cdot\|_{\beta,\infty})$, para cada $\beta\in\Lambda$. Esto se debe a que

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{\Pi}_\beta\,(f_\gamma)-\widetilde{\Pi}_\beta\,(f)\right\|_{\beta,\infty} &= \sup_{x\in X}\|\Pi_\beta(f_\gamma\,(x))-\Pi_\beta(f\,(x))\|'_\beta\\ &= \sup_{x\in X}\|\Pi_\beta(f_\gamma\,(x)-f\,(x))\|'_\beta\\ &= \sup_{x\in X}\|f_\gamma\,(x)-f\,(x)\|_\beta<\varepsilon\end{aligned}$$

si $\gamma\geq\lambda_0=\lambda_0\,(\varepsilon)$. Por tanto $\widetilde{\Pi}_\beta : C_b(X,A)\to C_b(X,A_\beta)$ es continua.

ii) Si $\alpha\leq\beta$, entonces $\widetilde{\Pi}_\alpha=\widetilde{\Pi}^\beta_\alpha\circ\widetilde{\Pi}_\beta$. Esto lo tenemos ya que

$$\widetilde{\Pi}^\beta_\alpha\circ\widetilde{\Pi}_\beta\,(f)=\Pi^\beta_\alpha(\Pi_\beta\circ f)=(\Pi^\beta_\alpha\circ\Pi_\beta)(f)=(\Pi_\alpha)(f)=\widetilde{\Pi}_\alpha\,(f)\,.$$

iii) $\widetilde{\Pi}_\alpha^\beta$ es continua $\forall\alpha\leq\beta$: Sean $(f_\gamma), f\subset C_b(X,A_\beta)$ tales que (f_γ) converge f bajo $\|\cdot\|_\beta'$. Entonces, $\|f_\gamma - f\|_{\beta,\infty}<\varepsilon$ si $\gamma\geq\gamma_0(\varepsilon)$, y así

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{\Pi}_\alpha^\beta(f_\gamma - f)\right\|_{\alpha,\infty} &= \sup_{x\in X}\left\|\widetilde{\Pi}_\alpha^\beta(f_\gamma - f)(x)\right\|_\alpha' = \sup_{x\in X}\left\|\Pi_\alpha^\beta(f_\gamma(x)-f(x))\right\|_\alpha' \\ &\leq \sup_{x\in X}\|f_\gamma(x)-f(x)\|_\beta = \|f_\gamma - f\|_{\beta,\infty}<\varepsilon\end{aligned}$$

por ser Π_α^β lineal, multiplicativo y continuo.

iv) Sean $\alpha\leq\beta\leq\gamma$ y $f\in C_b(X,A_\gamma)$. Así, obtenemos que

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{\Pi}_\alpha^\beta\circ\widetilde{\Pi}_\beta^\gamma\right)(f)(x) &= \widetilde{\Pi}_\alpha^\beta\left(\widetilde{\Pi}_\beta^\gamma(f(x))\right) = \left(\Pi_\alpha^\beta\circ\Pi_\beta^\gamma\right)(f(x)) \\ &= \Pi_\alpha^\gamma(f(x)) = (\Pi_\alpha^\gamma\circ f)(x) = \widetilde{\Pi}_\alpha^\gamma(f(x))\end{aligned}$$

$\forall x$, $\forall f\in C_b(X,A_\gamma)$. Por lo tanto $\widetilde{\Pi}_\alpha^\beta\circ\widetilde{\Pi}_\beta^\gamma = \widetilde{\Pi}_\alpha^\gamma$.

v) Ahora veamos que

$$C_b(X,A) = \{(g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\in\prod_{\alpha\in\Lambda}C_b(X,A_\alpha):\widetilde{\Pi}_\alpha^\beta(g_\beta) = g_\alpha\forall\alpha\leq\beta\}$$

Para esto, si

$$(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\in\{(g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\in\prod_{\alpha\in\Lambda}C_b(X,A_\alpha):\widetilde{\Pi}_\alpha^\beta(g_\beta) = g_\alpha\forall\alpha\leq\beta\},$$

entonces $f_\alpha\in C_b(X,A_\alpha)$ para todo $\alpha\in\Lambda$, y $(f_\alpha(x))_{\alpha\in\Lambda}\in A$ para cada $x\in X$ ya que $\underset{\overleftarrow{\alpha}}{\lim}A_\alpha = A$. Esto último implica que $f_\alpha(x) = \Pi_\alpha^\beta(f_\beta(x))$ para todo $x\in X$ y $\forall\alpha\leq\beta$, $\alpha,\beta\in\Lambda$. Por lo tanto tenemos la contención

$$\{(g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\in\prod_{\alpha\in\Lambda}C_b(X,A_\alpha):\widetilde{\Pi}_\alpha^\beta(g_\beta) = g_\alpha\forall\alpha\leq\beta\}\subset C_b(X,A)$$

Para la otra contensión tomemos $f\in C_b(X,A)$ y consideremos $f_\alpha := \widetilde{\Pi}_\alpha(f) = \Pi_\alpha\circ f$, $\alpha\in\Lambda$. Entonces $f_\alpha\in C_b(X,A_\alpha)$ para cada $\alpha\in\Lambda$. Además, tenemos que

$$\widetilde{\Pi}_\alpha^\beta(f_\beta) = \widetilde{\Pi}_\alpha^\beta(\Pi_\beta\circ f) = \Pi_\alpha^\beta\circ\Pi_\beta\circ f = \Pi_\alpha\circ f = \widetilde{\Pi}_\alpha(f) = f_\alpha$$

Concluimos que

$$C_b(X,A) = \{(g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\in\prod_{\alpha\in\Lambda}C_b(X,A_\alpha):\widetilde{\Pi}_\alpha^\beta(g_\beta) = g_\alpha\forall\alpha\leq\beta\}.$$

vi) Por último, para $f\in C_b(X,A)$

$$\|f\|_{\alpha,\infty} = \sup_{x\in X}\|f(x)\|_\alpha = \sup_{x\in X}\|(\Pi_\alpha\circ f)(x)\|_\alpha = \sup_{x\in X}\|f_\alpha(x)\|_\alpha$$

Por lo que la topología dada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{\alpha,\infty} : \alpha \in \Lambda\}$ definida en $C_b(X,A)$ es equivalente a la topología del límite inverso

$$\varprojlim_{\alpha} (C_b(X,A_\alpha), \|\cdot\|_{\alpha,\infty})$$

y así

$$(C_b(X,A), \{\|\cdot\|_{\alpha,\infty}\}, \alpha \in \Lambda) \cong \varprojlim_{\alpha} (C_b(X,A_\alpha), \|\cdot\|_{\alpha,\infty}).$$

■

De manera similar, definimos el álgebra

$$(C_p(X,A), \{\|\cdot\|_{\alpha,\infty}\}, \alpha \in \Lambda) = \{f : X \to A \text{ es continua y } \overline{f(x)} \text{ es compacto en } A\}$$

Entonces, al igual que el caso anterior

Observación 83 *Cada álgebra $(C_p(X,A_\alpha), \|\cdot\|_{\alpha,\infty})$ es de Banach para cada $\alpha \in \Lambda$, por ser $\left(A_\alpha, \|\cdot\|'_\alpha\right)$ un álgebra de Banach para cada $\alpha \in \Lambda$, $\varprojlim_{\alpha} A_\alpha = A$ y por la sección anterior.*

Además, tenemos lo siguiente:

Proposición 84 *Sea $(A, \{\|\cdot\|_\alpha\}, \alpha \in \Lambda)$ un álgebra m-convexa, completa conmutativa con e. Entonces, $(C_p(X,A), \{\|\cdot\|_{\alpha,\infty}\}, \alpha \in \Lambda) = \varprojlim_{\alpha} (C_p(X,A_\alpha), \|\cdot\|_{\alpha,\infty})$, donde $\varprojlim_{\alpha} A_\alpha = A$.*

Demostración. Dados $f \in C_p(X,A)$ y $\beta \in \Lambda$, de la misma manera que en la afirmación anterior, definimos

$$\overline{\Pi}_\beta : C_p(X,A) \to C_p(X,A_\beta)$$

como $\overline{\Pi}_\beta (f) = \Pi_\beta \circ f$; y

$$\overline{\Pi}^\beta_\alpha : C_p(X,A_\beta) \to C_p(X,A_\alpha)$$

dado por $\overline{\Pi}^\beta_\alpha (f) = \Pi^\beta_\alpha \circ f$, donde $\Pi_\beta \circ f \in C_p(X,A_\beta)$ y $\Pi^\beta_\alpha \circ f \in C_p(X,A_\alpha)$; ya que Π^β_α y Π_β son lineales y continuos, además Π^β_α y Π_β mandan compactos en compactos, con lo que obtenemos que $\overline{\Pi}_\beta$ y $\overline{\Pi}^\beta_\alpha$ estan bien definidos.

Además:

i) Si $f_\gamma \to f$ en $(C_p(X,A), \{\|\cdot\|_{\alpha,\infty}\}, \alpha \in \Lambda)$, entonces $\overline{\Pi}_\beta (f_\gamma) \to \overline{\Pi}_\beta (f)$ en $(C_p(X,A_\beta), \|\cdot\|_{\beta,\infty})$, para cada $\beta \in \Lambda$, pues tenemos las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned}
\left\|\overline{\Pi}_\beta (f_\gamma) - \overline{\Pi}_\beta (f)\right\|_{\beta,\infty} &= \sup_{x \in X} \|\Pi_\beta(f_\gamma (x)) - \Pi_\beta(f (x))\|'_\beta \\
&= \sup_{x \in X} \|\Pi_\beta(f_\gamma (x) - f (x))\|'_\beta \\
&= \sup_{x \in X} \|f_\gamma (x) - f (x)\|_\beta < \varepsilon
\end{aligned}$$

si $\gamma \geq \lambda_0 = \lambda_0 (\varepsilon)$. Por tanto $\overline{\Pi}_\beta : C_p(X,A) \to C_p(X,A_\beta)$ es continua.

ii) Si $\alpha \leq \beta$, entonces $\overline{\Pi}_\alpha = \overline{\Pi}_\alpha^\beta \circ \overline{\Pi}_\beta$. Esto lo debemos a que

$$\overline{\Pi}_\alpha^\beta \circ \overline{\Pi}_\beta\left(f\right) = \Pi_\alpha^\beta(\Pi_\beta \circ f) = (\Pi_\alpha^\beta \circ \Pi_\beta)(f) = (\Pi_\alpha)(f) = \overline{\Pi}_\alpha\left(f\right).$$

iii) Afirmamos que $\overline{\Pi}_\alpha^\beta$ es continua $\forall \alpha \leq \beta$. Sean $(f_\gamma), f \subset C_p(X, A_\beta)$ tales que $f_\gamma \underset{\|\cdot\|_\beta'}{\rightarrow} f$. Entonces, $\|f_\gamma - f\|_{\beta,\infty} < \varepsilon$ si $\gamma \geq \gamma_0\left(\varepsilon\right)$ y así

$$\begin{aligned}
\left\|\overline{\Pi}_\alpha^\beta(f_\gamma - f)\right\|_{\alpha,\infty} &= \sup_{x\in X}\left\|\overline{\Pi}_\alpha^\beta(f_\gamma - f)\left(x\right)\right\|_\alpha' = \sup_{x\in X}\left\|\Pi_\alpha^\beta(f_\gamma\left(x\right) - f\left(x\right))\right\|_\alpha' \\
&\leq \sup_{x\in X}\left\|f_\gamma\left(x\right) - f\left(x\right)\right\|_\beta = \|f_\gamma - f\|_{\beta,\infty} < \varepsilon
\end{aligned}$$

pues Π_α^β es lineal, multiplicativo y continuo.

iv) Sean $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ y $f \in C_p(X, A_\gamma)$. Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\Pi}_\alpha^\beta \circ \overline{\Pi}_\beta^\gamma\right)\left(f\right)\left(x\right) &= \overline{\Pi}_\alpha^\beta\left(\overline{\Pi}_\beta^\gamma\left(f\left(x\right)\right)\right) = \left(\Pi_\alpha^\beta \circ \Pi_\beta^\gamma\right)\left(f\left(x\right)\right) \\
&= \Pi_\alpha^\gamma\left(f\left(x\right)\right) = \left(\Pi_\alpha^\gamma \circ f\right)\left(x\right) = \overline{\Pi}_\alpha^\gamma\left(f\left(x\right)\right)
\end{aligned}$$

$\forall x, \forall f \in C_p(X, A_\gamma)$. Por lo tanto $\overline{\Pi}_\alpha^\beta \circ \overline{\Pi}_\beta^\gamma = \overline{\Pi}_\alpha^\gamma$.

Observemos que siguiendo la demostración de la propocisión anterior, en el inciso v) y vi), cambiando $\widetilde{\Pi}_\alpha^\beta$ y $\widetilde{\Pi}_\alpha$ por $\overline{\Pi}_\alpha^\beta$ y $\overline{\Pi}_\alpha$ respectivamente $\forall \alpha, \beta$, obtenemos:

v) $C_p(X, A) = \{(g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} C_b(X, A_\alpha) : \overline{\Pi}_\alpha^\beta\left(g_\beta\right) = g_\alpha \forall \alpha \leq \beta\}$ y

vi) la topología dada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{\alpha,\infty} : \alpha \in \Lambda\}$ definida en $C_p(X, A)$ es equivalente a la topología del límite inverso $\varprojlim_\alpha (C_p(X, A_\alpha), \|\cdot\|_{\alpha,\infty})$.

Podemos concluir que $(C_p(X, A), \{\|\cdot\|_{\alpha,\infty}\}, \alpha \in \Lambda) \cong \varprojlim_\alpha (C_p(X, A_\alpha), \|\cdot\|_{\alpha,\infty})$.
■

3.5. Condiciones de m-convexidad para el álgebra $(C_b(X, A), \beta)$

Del artículo Arizmendi-Carrillo [2], con una pequeña modificación en sus demostraciones tenemos los siguientes resultados relacionados con la m-convexidad del álgebra $(C_b(X, A), \beta)$. Para esto sea $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach, conmutativa y con unidad e.

Proposición 85 *Sea X un espacio completamente regular, de Hausdorff y no compacto. El conjunto de todos los elementos no invertibles en $C_b(X, A)$ es denso en $(C_b(X, A), \beta)$.*

Demostración. Sea $\varphi \in B_0(X)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $\emptyset \neq K \subset X$ compacto tal que $|\varphi(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \notin K$. Como X es completamente regular, de Hausdorff y no compacto, existe $x_0 \in X$, $x_0 \notin K$ y $g \in C_b(X)$ tal que $g(x) = 1 \ \forall x \in K$, $g(x_0) = 0$ y $0 \leq g(x) \leq 1 \ \forall x \in X$. Sea

$$\begin{aligned} \tilde{g} \quad &: \quad X \to A \\ x \quad &\longmapsto \quad g(x)e \end{aligned}$$

$\tilde{g}(x) = g(x)e$. Así, $\tilde{g}$ no es invertible pues $\tilde{g}(x_0) = 0_A$ en $C_b(X,A)$, y

$$\|\tilde{g} - \tilde{e}\|_{\varphi} = \sup_{x \in X} \|\tilde{g}(x) - e\|_A |\varphi(x)| = \sup_{x \in X} |g(x) - 1| \|e\|_A |\varphi(x)| \leq \sup_{x \in X - K} |\varphi(x)| \leq \varepsilon$$

■

Teorema 86 *Sea X un espacio completamente regular de Hausdorff. $(C_b(X,A), \beta)$ es álgebra m-convexa sí y sólo si $B_0(X) = B_{00}(X)$.*

Demostración. Por una parte, supongamos que $B_{00}(X) \subsetneq B_0(X)$ y además que $(C_b(X,A), \beta)$ es un álgebra m-convexa; entonces existe P un sistema de seminormas submultiplicativas que definen a β. Esto implica que para $\varphi \in B_0(X) \backslash B_{00}(X)$ podemos dar una seminorma $\|\cdot\|$ en P y dos constantes positivas p y q tales que

$$p \|f\|_{\varphi} \leq \|f\| \leq q \|f\|_{\varphi} \qquad (7)$$

$\forall f \in C_b(X,A)$. De donde $\|f\| < 1$ siempre que $q \|f\|_{\varphi} < 1$, y por tanto $\|f^n\| < 1$, así como $p \|f^n\|_{\varphi} < 1 \ \forall n \geq 1$.

Como $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$, $\exists K \subset X$ compacto tal que $q |\varphi(x)| < \frac{1}{2} \ \forall x \notin K$. Sea $g \in C_b(X)$ con $g(x) = 0$ para $x \in K$, $0 \leq g(x) \leq 2 \ \forall x \in X$ y $g(x_1) = 2$ para algún $x_1 \notin K$, para el cual $\varphi(x_1) \neq 0$. De aquí que, si definimos a la función $\tilde{g} : X \to A$ como $\tilde{g}(x) = g(x)e$ para cada $x \in X$, tenemos

$$q \|g(x)\|_{\varphi} = q \|\tilde{g}\|_{\varphi} < 1$$

donde $\|g(x)\|_{\varphi}$ es la seminorma definida en $C_b(X)$. Esta desigualdad se da ya que

$$\|g(x)\|_{\varphi} = \sup_{x \in X} |g(x)| |\varphi(x)| = \sup_{x \in X - K} |g(x)| |\varphi(x)| < 2\frac{1}{2q} = \frac{1}{q}$$

y por (7) $\|\tilde{g}\| < 1$, además $p \|\tilde{g}^n\|_{\varphi} < 1 \quad \forall n \geq 1$.

Por otro lado,

$$p \|\tilde{g}^n\|_{\varphi} = p \sup_{x \in X} \|\tilde{g}^n(x)\| |\varphi(x)| \geq p \|\tilde{g}^n(x_1)\| |\varphi(x_1)| = p |g^n(x_1)| |\varphi(x_1)| = p |\varphi(x_1)| 2^n$$

pues $g(x_1) = 2$ y $g^n(x_1) = 2^n$. Entonces, $p \|\tilde{g}^n\|_{\varphi} \geq 2^n p |\varphi(x_1)| \neq 0 \ \ \forall n \geq 1$; y con esto $p \|\tilde{g}^n\|_{\varphi} \underset{n \to \infty}{\to} \infty$.

Por lo tanto $(C_b(X,A), \beta)$ no es m-convexa, lo cual es una contradicción. Con esto obtenemos que en efecto $B_0(X) = B_{00}(X)$.

A la inversa, sabemos que si $B_0(X) = B_{00}(X)$, entonces la topología estricta β y la topología compacto abierta $\mathcal{K}$ en $C_b(X,A)$ son iguales, y así, ya que $(C_b(X,A), \mathcal{K})$ es m-convexa, tenemos lo que se pide. ■

Corolario 87 *Sea X un espacio localmente compacto y de Hausdorff. Entonces, $(C_b(X,A),\beta)$ es m-convexa sí y sólo si $C_0(X)=C_{00}(X)$.*

Demostración. Para la demostración de este corolario primero supongamos que $(C_b(X,A),\beta)$ es m-convexa; entonces, por el teorema anterior $B_0(X)=B_{00}(X)$ y si $f\in C_0(X)$, $f\in B_0(X)=B_{00}(X)$, y como f es continua obtenemos lo que queríamos. Por tanto, ya que siempre se da la contensión $C_0(X)\supset C_{00}(X)$; obtenemos $C_0(X)=C_{00}(X)$.

A la inversa, si X es localmente compacto, $C_0(X)$ genera a la topología estricta β y $C_{00}(X)$ genera a la topología compacto abierta $\mathcal{K}$, ambas en $C_b(X,A)$ (véase Buck [6], pág. 97). Entonces, como $(C_b(X,A),\mathcal{K})$ es m-convexa y $C_0(X)=C_{00}(X)$, concluimos que $(C_b(X,A),\beta)$ es m-convexa. ■

3.6. Espectros e Invertibilidad en $C_b(X,A)$ y $C_p(X,A)$

3.6.1. Espectros en $C_p(X,A)$

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Consideremos $f\in C_p(X,A)$, entonces tenemos lo siguiente (véase proposiciones 69 y 70):

$$\begin{array}{ccc} H & : & (C_p(X,A),\|\cdot\|_\infty)\to(C(\beta X,A),\|\cdot\|_\infty) \\ f & \longmapsto & \widetilde{f} \end{array}$$

donde $\widetilde{f}$ es la extensión continua de $f:X\to A$ a $\widetilde{f}:\beta X\to A$. Sabemos que H es un homeomorfismo y por tanto $\mathfrak{M}((C_p(X,A),\|\cdot\|_\infty))=\beta X\times\mathfrak{M}(A)$. Consideremos

a $\widehat{f}$ y $\widehat{\widetilde{f}}$ dadas por la transformada de Gelfand correspondiente.

Afirmamos que

$$\sigma(f)\subset\overline{\widehat{f}(X\times\mathfrak{M}(A))}=\widehat{\widetilde{f}}(\beta X\times\mathfrak{M}(A))=\sigma\left(\widetilde{f}\right).$$

Para demostrarlo veamos las siguientes afirmaciones:

1. $\overline{\widehat{f}(X\times\mathfrak{M}(A))}=\widehat{\widetilde{f}}(\beta X\times\mathfrak{M}(A))$

   Demostración. Sean $x\in X$, $F\in\mathfrak{M}(A)$, como f y $\widetilde{f}$ coinciden en X tenemos:

   $\widehat{f}(x,F)=F(f(x))=F(\widetilde{f}(x))=\widehat{\widetilde{f}}(x,F)\ \ \forall x\in X$, esto implica que

   $$\widehat{f}(X\times\mathfrak{M}(A))\subset\widehat{\widetilde{f}}(\beta X\times\mathfrak{M}(A))$$

   y como $\beta X\times\mathfrak{M}(A)$ es compacto, entonces $\widehat{\widetilde{f}}(\beta X\times\mathfrak{M}(A))$ es cerrado y así

   $$\overline{\widehat{f}(X\times\mathfrak{M}(A))}\subset\widehat{\widetilde{f}}(\beta X\times\mathfrak{M}(A)).$$

Para la otra contensión, sea $y \in \beta X$ y tomemos $F(\widetilde{f}(y))$. Sabemos que existe una red $(x_\alpha) \subset X$ tal que converge a y en βX, y de la continuidad de $\widetilde{f}$ tenemos que $\widetilde{f}(x_\alpha) = f(x_\alpha) \underset{\alpha}{\to} \widetilde{f}(y)$, por lo que $F(f(x_\alpha)) \to F(\widetilde{f}(y))$ para cada $F \in \mathfrak{M}(A)$. Por tanto $F(\widetilde{f}(y)) \in \overline{\widehat{f}(X \times \mathfrak{M}(A))}$. ■

2. La igualdad $\widehat{\widetilde{f}}(\beta X \times \mathfrak{M}(A)) = \sigma\left(\widetilde{f}\right)$ se da por ser A un álgebra de Banach, y por tanto $(C(\beta X, A), \|\cdot\|_\infty)$ también lo es (véase Proposición 69).

3. $\sigma(f) \subset \sigma\left(\widetilde{f}\right)$, pues para $\lambda \notin \sigma\left(\widetilde{f}\right)$ tenemos que $\widetilde{f} - \lambda\widehat{e}$ es invertible en $C(\beta X, A)$. Así, $\widetilde{f}(x) - \lambda e$ es invertible en A para todo $x \in X$.

   Sea $g \in C(\beta X, A)$ tal que $g \cdot (\widetilde{f} - \lambda\widehat{e}) = \widehat{e}$ en $C(\beta X, A)$. Entonces,

$$g(x)(\widetilde{f}(x) - \lambda\widehat{e}(x)) = g(x)(f(x) - \lambda e) = e$$

   para todo $x \in X$. Y por otro lado $g\mid_X$ es continua y acotada, y como $g(\beta X)$ es compacto y $g(X) \subset g(\beta X)$ obtenemos que $\overline{g(X)}$ es compacto. Con esto, $f - \lambda\widehat{e}$ es invertible en $C_p(X,A)$ y $\lambda \notin \sigma(f)$. Por lo tanto tenemos la contención que se pide.

3.6.2. Algo de invertibilidad

En esta sección consideramos a X como un espacio de Hausdorff, completamente regular, de Hausdorff y no vacío.

Sabemos que una condición necesaria para que f sea invertible en $C_b(X,A)$ es que $f(x)$ sea invertible para cada $x \in X$, con lo que siempre se tiene que $f(X) \subset G(A)$. Buscamos otra condición que nos ayude a ver más claramente cuando hay invertibilidad en estas algebras. Así, hemos obtenido los siguientes resultados:

Teorema 88 *Sean A un álgebra de Banach, conmutativa, con unidad e y $f \in C_i(X,A)$, $i = b, p$. Si f es invertible, entonces $\overline{f(X)} \subset G(A)$.*

Demostración. Como f es invertible, existe $g \in C_i(X,A)$ tal que $f \cdot g = \widehat{e_A}$; y $\overline{f(X)} \subset \overline{G(A)}$ pues $f(X) \subset G(A)$. Ahora, si $\overline{f(X)} \cap \delta G(A) \neq \emptyset$, existe $y \in \delta G(A) \cap \delta f(X)$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tales que $f(x_n) \to y$, si $n \to \infty$. Pero, como A es álgebra de Banach, y es divisor topológico de cero en A y entonces $\|g(x_n)\| \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, y así $g \notin C_i(X,A)$ lo cual es una contradicción. Por tanto, $\overline{f(X)} \subset G(A)$. ■

Con esto, surge la pregunta: si $\overline{f(X)} \subset G(A)$, cuándo f es invertible en $C_i(X,A)$, $i = b, p$? En el caso de $C_p(X,A)$ tenemos la siguiente equivalencia:

Teorema 89 *Sean A un álgebra de Banach, conmutativa, con unidad e y $f \in C_p(X,A)$. Entonces, f es invertible si y sólo si $\overline{f(X)} \subset G(A)$.*

Demostración. Por el Teorema anterior, basta probar que si $\overline{f(X)} \subset G(A)$ entonces f es invertible. Puesto que $\overline{f(X)} \subset G(A)$, $\overline{f(X)}$ es compacto en A, y la función $(\cdot)^{-1} : G(A) \to G(A)$ es una función continua, obtenemos que $\left(\overline{f(X)}\right)^{-1}$ es compacto en $G(A)$ y por tanto acotado. Así mismo, $(f(X))^{-1}$ es acotado,

$$\left(\overline{(f(X))^{-1}}\right) \subset \left(\overline{f(X)}\right)^{-1}$$

y la función $g : X \to A$, dada por $g(x) = f^{-1}(x)$ esta en $C_p(X,A)$. Con esto f es invertible. ■

De estos dos resultados tenemos como consecuencia lo siguiente.

Corolario 90 *Sean A un álgebra de Banach, conmutativa, con unidad e y $f \in C_p(X,A)$, tal que f es invertible en $C_b(X,A)$. Entonces, f es invertible en $C_p(X,A)$.*

Demostración. Como f es invertible en $C_b(X,A)$, por el Teorema 83, tenemos que $\overline{f(X)} \subset G(A)$ y por el Teorema anterior esto último se cumple si y sólo si f es invertible en $C_p(X,A)$ como queríamos ver. ■

Corolario 91 *Sean A un álgebra de Banach, conmutativa, con unidad e y $f \in C_i(X,A)$, $i = b,p$. Si f invertible con inverso $f^{-1} \in C_i(X,A)$, $i = b,p$, entonces $\overline{f(X)} \subset G(A)$ y $\overline{f^{-1}(X)} \subset G(A)$.*

También nos podemos preguntar qué pasa si A es un álgebra m-convexa, podemos dar una condición similar sobre invertibilidad en $C_i(X,A)$, $i = b,p$? El resultado que pudimos obtener es similar al Teorema 8.

Teorema 92 *Sean A un álgebra m-convexa, completa, conmutativa con unidad e y $f \in C_i(X,A)$, $i = b,p$. Si f es invertible, entonces $\overline{f(X)} \subset G(A)$.*

Demostración. Por hipótesis, sabemos que $\left(A, \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\right)$ es el límite inverso de una familia de algebras de Banach $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, , consideremos sus respectivos morfismos de algebras

$$\Pi_\alpha : A \to A_\alpha = A/\widehat{\ker \|\cdot\|_\alpha}.$$

Como f es invertible, existe $g \in C_i(X,A)$ tal que $fg = \hat{e}_A$; además, $\overline{f(X)} \subset G(A)$.

Por otro lado, ya que f es invertible, $f(x)$ es invertible en A, para cada $x \in X$. Pero esto último pasa sí y sólo si $\Pi_\alpha(f(X)) \subset G(A_\alpha)$ para todo $\alpha \in \Lambda$.

Afirmamos que $\overline{\Pi_\alpha(f(X))} \subset G(A_\alpha)$, esto para todo $\alpha \in \Lambda$:

En caso contrario, existe α tal que $\overline{\Pi_\alpha(f(X))} \cap \delta G(A_\alpha) \neq \emptyset$. Entonces, existen $y_\alpha \in \delta G(A_\alpha) \cap \delta\Pi_\alpha(f(X))$ y $(x_n) \subset X$ tales que $\Pi_\alpha(f(x_n)) \to y_\alpha$. Ya que A_α es álgebra de Banach, y_α es divisor topológico de cero y no invertible en A_α (pues $y_\alpha \in \delta G(A_\alpha)$); $f(x_n)g(x_n) = e_A$, y $\Pi_\alpha(f(x_n))\Pi_\alpha(g(x_n)) = e_\alpha$, entonces

$$\begin{aligned}
\|e_\alpha - y_\alpha\Pi_\alpha(g(x_n))\|_\alpha^{'} &= \|\Pi_\alpha(f(x_n))\Pi_\alpha(g(x_n)) - y_\alpha\Pi_\alpha(g(x_n))\|_\alpha^{'} \\
&\leq \|\Pi_\alpha(f(x_n)) - y_\alpha\|_\alpha^{'} \|\Pi_\alpha(g(x_n))\|_\alpha^{'}
\end{aligned}$$

y dado que y_α no es invertible en A_α, tampoco es topológicamente invertible en A_α, por lo que tenemos

$$\|g(x_n)\|_\alpha = \|\Pi_\alpha(g(x_n))\|_\alpha^{'} \to \infty.$$

Así que $g \notin C_i(X,A)$, lo que nos lleva a una contradicción.
Por tanto $\overline{\Pi_\alpha(f(X))} \subset G(A_\alpha)$, para todo $\alpha \in \Lambda$.

Sea $y \in \overline{f(X)}$, entonces existe $(x_\lambda) \subset X$ una red tal que $f(x_\lambda) \to y$ en A. Esto implica que $\Pi_\alpha(f(x_\lambda)) \to \Pi_\alpha(y) \in \overline{\Pi_\alpha(f(X))} \subset G(A_\alpha)$, para todo $\alpha \in \Lambda$. De aquí que $\Pi_\alpha(y) \in G(A_\alpha)$, para todo $\alpha \in \Lambda$, y esto último se cumple si y sólo si $y \in G(A)$. Así obtenemos que $\overline{f(X)} \subset G(A)$. ■

Además, buscamos ver cuando tenemos la otra imlicación tanto para el caso en que A es un álgebra de Banach, como cuando pedimos que sea m-convexa. Hasta ahora sólo hemos podido ver que se cumple lo siguiente.

Proposición 93 *Sean A un álgebra de Banach, conmutativa, con unidad e y $f \in C_b(X,A)$, tal que $\overline{f(X)} \subset G(A)$. Entonces, f es invertible en $C(X,A)$.*

Demostración. Como $\overline{f(X)} \subset G(A)$, podemos definir la función $f^{-1} : X \to A$ como $f^{-1}(x) = (f(x))^{-1}$. Afirmamos que f^{-1} es una función continua ya que la podemos ver como la composición de dos funciones continuas, $f^{-1} = (\cdot)^{-1} \circ f$. Donde $(\cdot)^{-1}$ es la función $(\cdot)^{-1} : G(A) \to G(A)$ que manda a cada elemento invertible en A en su inverso. ■

Otra condición que se ha podido obtener es la siguiente.

Proposición 94 *Sean A un álgebra de Banach, conmutativa con unidad e y $f \in C_b(X,A)$. Si f es invertible, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\left|\hat{f}(x,F)\right| > \varepsilon$ para todo $(x,F) \in X \times \mathfrak{M}(A)$.*

Demostración. Sea $f \in C_b(X,A)$ invertible, entonces existe $g \in C_b(X,A)$ tal que $fg = \hat{e}_A$.

Por otro lado, como f es invertible se cumple que $\overline{f(X)} \subset G(A)$.

Hagamos la demostración por contradicción. Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $(x_0,F_0) \in X \times \mathfrak{M}(A)$ tal que $|F_0(f(x_0))| = \left|\hat{f}(x_0,F_0)\right| < \varepsilon$. En particular, para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $(x_n,F_n) \in X \times \mathfrak{M}(A)$ tal que

$$|F_n(f(x_n))| = \left|\hat{f}(x_n,F_n)\right| < \frac{1}{n},$$

lo cual implica que $\left|\hat{f}(x_n,F_n)\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Dado que existe $g \in C_b(X,A)$, con $g = f^{-1}$, obtenemos que

$$\hat{g}(x_n,F_n)\hat{f}(x_n,F_n) = F_n(g(x_n)f(x_n)) = 1$$

y por lo tanto $|\hat{g}(x_n,F_n)| \to \infty$, es decir g no es acotada, lo que nos lleva a una contradicción. ■

El siguiente ejemplo nos muestra que existen espacios completamente regulares, X, tales que $C_b(X,A)$ tienen elementos que son invertibles en $C(X,A)$ pero no lo son en $C_b(X,A)$.

Ejemplo 95 *Sea $A = (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ y $X = \mathbb{N}$ dotado con la topología discreta. Por la topología que se da para $\mathbb{N}$ tenemos que toda función definida de $\mathbb{N}$ en $C([0,1])$ es continua. Sea*

$$f : \mathbb{N} \to C([0,1])$$
$$n \to f_n$$

donde cada $f_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ está dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-x & si \;\; 0 \le x \le 1 - \frac{1}{n} \\ (n-1)(x-1)+1 & si \;\; 1 - \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases},$$

$n \in \mathbb{N}$, tenemos que f es continua y $f(\mathbb{N}) = \overline{f(\mathbb{N})}$. Por otro lado

$$f^{-1} : \mathbb{N} \to C([0,1])$$
$$n \to f_n^{-1}$$

donde $f_n^{-1} : [0,1] \to \mathbb{C}$ esta definida por

$$f_n^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & si \;\; 0 \le x \le 1 - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{(n-1)(x-1)+1} & si \;\; 1 - \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases},$$

$n \in \mathbb{N}$; también f^{-1} esta bien definida y es continua,

$$f^{-1} \in C(\mathbb{N}, C([0,1])) \diagdown C_b(\mathbb{N}, C([0,1])).$$

Por tanto f es invertible en $C(\mathbb{N}, C([0,1]))$ pero no lo es en $C_b(\mathbb{N}, C([0,1]))$.

Cabe señalar que en el ejemplo anterior tenemos que $f_n : \underset{n\to\infty}{\nrightarrow} g$, para toda $g \in C([0,1])$. Sin embargo, podemos dar las funciones

$$h_n(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{2(n-1)}{n}\right)x & \text{si } \;\; 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \left(\frac{2(n-1)}{n}\right)(x-1)+1 & \text{si } \;\; \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

las cuales cumplen que $h_n : \underset{n\to\infty}{\to} g$ en $C([0,1])$, y g es tal que

$$g(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } \;\; 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2(x-1)+1 & \text{si } \;\; \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Por otro lado, la función h es continua, donde

$$h : \mathbb{N} \to C([0,1])$$
$$n \to h_n$$

además de que es invertible en $C(\mathbb{N}, C([0,1]))$ pero no lo es en $C_b(\mathbb{N}, C([0,1]))$.

Para lo siguiente, supongamos que X es un espacio completamente regular, de Hausdorff y A un álgebra de Banach, conmutativa, con unidad y no necesariamente semisimple. Definamos la función:

$$T : C_b(X,A) \to C_b(X \times \mathfrak{M}(A)) \cong C(\beta(X \times \mathfrak{M}(A)))$$

dada por $T(f) = \widehat{f}$, donde $\widehat{f}(x,F) = F(f(x))$, como en la proposición 74. Entonces, tenemos que T es un homomorfismo de algebras y se cumple la siguiente afirmación:

Proposición 96 *Si f es invertible en $C_b(X,A)$, entonces $\widehat{f}$ es invertible en $C_b(X \times \mathfrak{M}(A))$.*

Proposición 97 *Sea $f \in C_b(X,A)$, y supongamos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\left|\widehat{f}(x,F)\right| \geq \varepsilon_0$ para todo $(x,F) \in X \times \mathfrak{M}(A)$. Entonces, f es invertible en $C(X,A)$.*

Demostración. Dado $x \in X$, sabemos que $\widehat{f}(x,F) = F(f(x))$ y $|F(f(x))| \geq \varepsilon_0$ para cada $F \in \mathfrak{M}(A)$, donde $f(x) \in A$. Esto implica que $F(f(x)) \neq 0$ $\forall F \in \mathfrak{M}(A)$, pero en A se cumple la propiedad de Wiener, es decir, $a \in A$ es invertible si y sólo si $F(a) \neq 0$ $\forall F \in \mathfrak{M}(A)$. Por tanto existe $(f(x))^{-1}$ para todo $x \in X$ y podemos definir la función $f^{-1} : X \to A$ como $f^{-1}(x) = (f(x))^{-1}$, la cual es continua ya que la podemos ver como la composición las funciones continuas, $f^{-1} = (\cdot)^{-1} \circ f$. Donde $(\cdot)^{-1}$ es la función $(\cdot)^{-1} : G(A) \to G(A)$ que manda a cada elemento invertible en A en su inverso. Concluimos que $f^{-1} \in C(X,A)$, que al mismo tiempo es la inversa de f, como queríamos ver. ■

Proposición 98 *Dada $f \in C_b(X,A)$ se cumple lo siguiente:*

1) Si f es invertible en $C_b(X,A)$, entonces $\widehat{f}$ es invertible en $C_b(X \times \mathfrak{M}(A))$.

2) Si $\widehat{f}$ es invertible en $C_b(X \times \mathfrak{M}(A))$, entonces $\widetilde{\widehat{f}}$ es invertible en $C(\beta(X \times \mathfrak{M}(A)))$.

3) Si $\widetilde{\widehat{f}}$ es invertible en $C(\beta(X \times \mathfrak{M}(A)))$, entonces $\widetilde{\widehat{f}}$ no se anula en $\beta(X \times \mathfrak{M}(A))$.

4) Si $\widetilde{\widehat{f}}$ no se anula en $\beta(X \times \mathfrak{M}(A))$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\left|\widehat{f}(x,F)\right| \geq \varepsilon$ para todo $(x,F) \in X \times \mathfrak{M}(A)$.

Demostración. Los incisos 1), 2) y 3) son claros, por ser T un homomorfismo de algebras y de la definición de $\beta(X \times \mathfrak{M}(A))$.

Para ver la afirmación 4), utilizamos que

$$\widetilde{\widehat{f}}(\beta(X \times \mathfrak{M}(A))) = cl_{\beta(X \times \mathfrak{M}(A))}\left(\widehat{f}(X \times \mathfrak{M}(A))\right)$$

y si $\widetilde{\widehat{f}}$ no se anula en $\beta(X \times \mathfrak{M}(A))$, entonces $0 \notin cl_{\beta(X \times \mathfrak{M}(A))}\left(\widehat{f}(X \times \mathfrak{M}(A))\right)$. Esto pasa si y sólo si $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(0) \cap \widehat{f}(X \times \mathfrak{M}(A)) = \emptyset$, pero esto es equivalente a la existencia de algún $\varepsilon > 0$ tal que $\left|\widehat{f}(x,F)\right| \geq \varepsilon$ $\forall (x,F) \in X \times \mathfrak{M}(A)$. Con lo que concluimos que se cumple 4). ■

Proposición 99 *Sean $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach, conmutativa, con unidad e, X un espacio completamente regular y de Hausdorff, y $f \in C_b(X,A)$.*

Si $\mathfrak{M}(C_b(X,A), \|\cdot\|_\infty) = \beta(X \times \mathfrak{M}(A))$, entonces f es invertible en $C_b(X,A)$ si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\left|\widehat{f}(x,F)\right| \geq \varepsilon$ para todo $(x,F) \in X \times \mathfrak{M}(A)$.

Demostración. De la proposición 91, tenemos que si f es invertible en $C_b(X,A)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\left|\widehat{f}(x,F)\right| \geq \varepsilon$ para todo $(x,F) \in X \times \mathfrak{M}(A)$.

A la inversa, supongamos que $\mathfrak{M}(C_b(X,A), \|\cdot\|_\infty) = \beta(X \times \mathfrak{M}(A))$ y además que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\left|\widehat{f}(x,F)\right| \geq \varepsilon$ para todo $(x,F) \in X \times \mathfrak{M}(A)$.

Nos basta con mostrar que $T(f) \neq 0$ para todo $T \in \mathfrak{M}(C_b(X,A), \|\cdot\|_\infty)$ ya que $(C_b(X,A), \|\cdot\|_\infty)$ es un álgebra de Banach y cumple la propiedad de Wiener. Sea $T_s \in \mathfrak{M}(C_b(X,A), \|\cdot\|_\infty)$, donde $s \in \beta(X \times \mathfrak{M}(A))$, $((x_\lambda, F_\lambda))_\lambda \subset X \times \mathfrak{M}(A)$ es una red tal que $(x_\lambda, F_\lambda) \underset{\lambda}{\to} s$, $\widetilde{\widehat{f}} \in C(\beta(X \times \mathfrak{M}(A)))$ es la extensión de $\widehat{f}$ y T_s está dada por

$$T_s(f) = \widetilde{\widehat{f}}(s) = \lim_{\lambda} \widetilde{\widehat{f}}(x_\lambda, F_\lambda) = \lim_{\lambda} \widehat{f}(x_\lambda, F_\lambda).$$

Como $\varepsilon \leq \left|\widehat{f}(x_\lambda, F_\lambda)\right| \leq \left|\widehat{f}(x_\lambda, F_\lambda) - \widetilde{\widehat{f}}(s)\right| + \left|\widetilde{\widehat{f}}(s)\right| \quad \forall\lambda$, obtenemos que $\varepsilon \leq \left|\widetilde{\widehat{f}}(s)\right| = |T_s(f)|$. De aquí que $T(f) \neq 0$ para todo $T \in \mathfrak{M}(C_b(X,A), \|\cdot\|_\infty)$, por lo tanto f es invertible en $C_b(X,A)$. ■

Capítulo 4

Govaerst y las familias de Nachbin

En este último capítulo desarrollamos aspectos importantes del artículo de Govaerst [12]. Presentamos ejemplos que están relacionados con las álgebras de funciones que hemos trabajado en los capítulos anteriores.

Consideramos a X un espacio de Hausdorff, completamente regular y a (A, Q) un álgebra localmente convexa, donde $Q = \{q_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es el sistema dirigido de seminormas que determinan su topología τ_Q, a menos que se diga lo contrario.

Definición 100 *Definimos las algebras*

$$\begin{aligned} C_b(X, A) &= \left\{ \begin{array}{c} f : X \to A : \ f \quad \textit{es continua con respecto a } \tau_Q \textit{ y} \\ \sup\limits_{x \epsilon X} q(f(x)) < \infty, \ \forall q \in Q \end{array} \right\}, \textit{ y} \\ C(X, A) &= \{ f : X \to A : \ f \quad \textit{es continua bajo la topología } \tau_Q \} \end{aligned}$$

Definición 101 *Una familia de Nachbin en X es una familia V de funciones con valores reales, no negativas y definidas en X tales que*

$$(v_1) \qquad \forall u, v \in V \textit{ y } \lambda \geq 0, \ \exists w \in V \textit{ con } \lambda u \leq w, \ \lambda v \leq w.$$

Definición 102 *Definimos*

$$CV(X, A) = \{ f \in C(X, A) : p_{q,v}(f) = \sup_{x \in X} q(v(x) f(x)) < \infty, \forall q \in Q, v \in V \}$$

Así, $\{p_{q,v} : q \in Q, \ v \in V\}$ es un sistema dirigido de seminormas en $CV(X, A)$ que la hacen un álgebra localmente convexa.

Definición 103 *Decimos que V es una familia de Nachbin multiplicativa si además de (v_1) cumple*

$$\begin{aligned} &(v_2) \qquad \forall u \in V, \ \exists w, v \in V \textit{ con } u \leq wv. \\ &(v_3) \qquad \forall u \in V, \ u \textit{ es acotada.} \end{aligned}$$

Notemos que si V es una familia de Nachbin multiplicativa, entonces $CV\,(X,A)$ contiene al espacio $C_b(X,A)$ de todas las funciones continuas y acotadas, definidas de X en A. Para verlo claramente tomemos $f \in C_b(X,A) \subset C(X,A)$, $q \in Q$ y $v \in V$; entonces, existe $M_v > 0$ tal que $\sup\limits_{x\in X} v(x) < M_v$ y así

$$p_{q,v}\,(f) = \sup_{x\in X} q\,(v(x)f(x)) = \sup_{x\in X} v(x)q\,(f(x)) \leq M_v \sup_{x\in X} q\,(f(x)) < \infty.$$

Notación 104 *Si $A = \mathbb{C}$, denotaremos por $CV\,(X)$ al álgebra $CV\,(X,\mathbb{C})$.*

Definición 105 *Decimos que una familia de Nachbin multiplicativa V es de tipo puntual si y sólo si para cada homomorfismo continuo de algebras, no trivial, $\varphi : CV\,(X) \to \mathbb{C}$ existe $x_0 \in X$ tal que $\varphi\,(f) = f\,(x_0)$ para todo $f \in CV\,(X)$.*

Definición 106 *Sea V una familia de Nachbin multiplicativa. Dados $u \in V$ y $r > 0$ consideramos los siguientes conjuntos nivel :*

$$\begin{aligned} L(u,r) &= \{x \in X : u(x) \geq r\} \\ Supp(V) &= \cup\{\overline{L(u,r)}^{\beta X} : u \in V,\ r > 0\} \end{aligned}$$

Con estas definiciones y al estudiar el espacio $C_b\,(X,A)$ podemos afirmar lo siguiente.

Proposición 107 *Sea $V_0 = \{|\varphi| : \varphi \in B_0\,(X)\}$, donde $B_0\,(X)$ es el espacio de funciones de X en $\mathbb{C}$ que se anulan al infinito. Entonces:*

1. *V_0 es una familia de Nachbin en X.*
2. *V_0 es una familia de Nachbin multiplicativa.*

1. Esta afirmación se debe a que $|\varphi| \geq 0 \;\; \forall \varphi \in B_0(X)$; y además claramente se cumple

   (v_1) $\qquad \forall u = |\varphi|\,, v = |\psi| \in V_0$ y $\lambda \geq 0$, $\exists w \in V_0$ con $\lambda u \leq w$, $\lambda v \leq w$,

   para $w = \lambda u + \lambda v$ ó $w = \text{máx}\,\{\lambda u, \lambda v\}$, veamos que $w \in V_0$: si $\varepsilon > 0$, entonces existen K_1 y K_2 subconjuntos compactos de X tales que $v(x) = |\psi\,(x)| < \frac{\varepsilon}{2(\lambda+1)}$ $\;\forall x \notin K_v$ y $u(x) = |\varphi\,(x)| < \frac{\varepsilon}{2(\lambda+1)}$ $\;\forall x \notin K_u$. Consideramos $K_w = K_v \cup K_u$ y $x \notin K_w$; entonces $x \notin K_v$, $\;x \notin K_u$. Esto implica que si $\lambda \geq 0$ tenemos que $\lambda v(x) = |\lambda\psi\,(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\lambda u(x) = |\lambda\varphi\,(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, por tanto $w(x) = \lambda v(x) + \lambda u(x) < \varepsilon \;\; (w(x) = \text{máx}(\lambda v(x), \lambda u(x)) < \varepsilon)$.

2. V_0 es una familia de Nachbin multiplicativa, ya que cumple:

   (v_2) $\quad \forall u = |\varphi| \in V$, $\exists w, v \in V$ con $\;u \leq wv$, donde $v = \sqrt{u} = \sqrt{|\varphi|} = w$.

   (v_3) $\quad$ Cada $u \in V$, u es acotada.

Así, para $V = V_0$ y $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach tenemos

$$\begin{aligned} CV(X,A) &= \{f \in C(X,A) : p_{q,v}(f) = \sup_{x\in X} q(v(x)f(x)) < \infty, \forall q \in Q, v \in V\} \\ &= \{f \in C(X,A) : p_{\varphi}(f) = \sup_{x\in X} \|\varphi(x)f(x)\| = \|f\|_{\varphi} < \infty, \forall \varphi \in B_0(X)\} \end{aligned}$$

y también obtenemos lo siguiente:

Proposición 108 *Sea X un espacio de Hausdorff, completamente regular, $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach, conmutativa, con unidad e y $V_0 = \{|\varphi| : \varphi \in B_0(X)\}$. Entonces, $(C_b(X,A), \beta) = \left(CV_0(X,A), \{p_\varphi\}_{\varphi \in B_0(X)}\right)$.*

Demostración. Primero, siempre tenemos la contención $C_b(X,A) \subset CV_0(X,A)$, nos resta por probar que la otra contención también se tiene.

Sea $f \in CV_0(X,A)$, por definición de $CV_0(X,A)$, f cumple que

$$\|f\|_{\varphi} = \sup_{x\in X} \|\varphi(x)f(x)\| < \infty, \forall \varphi \in B_0(X).$$

Demostremos que f es acotada; si esto no pasara, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $\|f(x_n)\| > n$.

Definamos

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}. \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } x = x_n, \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Afirmamos que $\varphi \in B_0(X)$: Sea $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \ \ \forall n \geq N$. Tomemos $K = \{x_1, ..., x_{N-1}\}$ el cual es un subconjunto compacto de X y si $x \notin K$, entonces $|\varphi(x)| < \varepsilon$.

Ahora,

$$\|f\|_{\varphi} = \sup_{x\in X} \|\varphi(x)f(x)\| \geq \|\varphi(x_n)f(x_n)\| = \varphi(x_n)\|f(x_n)\| \geq n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n},$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Así, $\|f\|_{\varphi} = \infty$, lo que nos lleva a una contradicción.

Por lo tanto, $(C_b(X,A), \beta) = \left(CV_0(X,A), \{p_\varphi\}_{\varphi \in B_0(X)}\right)$ si tomamos $V_0 = \{|\varphi| : \varphi \in B_0(X)\}$. ■

En el caso en que X sea un espacio localmente compacto, la topología estricta en $C_b(X,A)$ está dada por $C_0(X)$, el espacio de funciones continuas definidas de X en $\mathbb{C}$ que se anulan al infinito. Es claro que $V_0' = \{|\varphi| : \varphi \in C_0(X)\}$ es una familia de Nachbin multiplicativa. Análogamente, si $V = V_0'$ siempre se tiene la contensión $C_b(X,A) \subset CV(X,A)$ y afirmamos lo siguiente:

Proposición 109 *Sea X un espacio de Hausdorff, localmente compacto, $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach, conmutativa, con unidad e y $V_0' = \{|\varphi| : \varphi \in C_0(X)\}$. Si $V = V_0'$, entonces $(C_b(X,A), \beta) = \left(CV(X,A), \{p_\varphi\}_{\varphi \in C_0(X)}\right)$.*

Demostración. Sea $f \in CV(X,A)$, por definición de $CV(X,A)$, $f \in C(X,A)$ y cumple que

$$\|f\|_{\varphi} = \sup_{x\in X} \|\varphi(x)f(x)\| < \infty, \forall \varphi \in C_0(X).$$

Si f no es acotada, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $\|f(x_n)\| > n2^n$.

$(*)$ Sea $A_n = \{x_1, ..., x_n\}$, A_n es un subconjunto compacto de X. Entonces, existe U_n una vecindad abierta de A_n tal que $\overline{U_n}$ es compacto y $\overline{U_n} \subset \{x_{n+1}\}^c$ por ser X un espacio localmente compacto. Por lo que $\exists \varphi_n : X \to [0, \frac{1}{2^n}]$ tal que $\varphi_n(x) = \frac{1}{2^n}$ $\forall x \in A_n$ y $\varphi_n(x) = 0$ $\forall x \notin U_n$.

Definamos

$$\varphi : X \to [0, \infty)$$

como $\varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$.

Probemos que $\varphi \in C_0(X)$:

1. φ esta bien definida: ya que $0 \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{2^n}$ y $0 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

2. φ es continua en X: Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{4}$. Ahora, como cada φ_n es continua, $1 \leq n \leq N-1$, existe V_n vecindad de x tal que $|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| < \frac{\varepsilon}{2N}$ $\forall y \in V_n$. Sea $V = \bigcap\limits_{n-1}^{N-1} V_n$, que es una vecindad de x. Para $y \in V$, tenemos:

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n(x) - \varphi_n(y))\right| \leq \\ &\leq \left|\sum_{n=1}^{N-1} (\varphi_n(x) - \varphi_n(y))\right| + \left|\sum_{n=N}^{\infty} \varphi_n(x)\right| + \left|\sum_{n=N}^{\infty} \varphi_n(y)\right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{N-1} |(\varphi_n(x) - \varphi_n(y))| + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \\ &< (N-1)\frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon \end{aligned}$$

   Por tanto, φ es continua.

3. φ se anula al infinito. Para demostrarlo sea $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Tomemos $K = \bigcup\limits_{n=1}^{N-1} \overline{U}_n$, donde $\overline{U}_n$ es la correspondiente de $(*)$. Obviamente K es un subconjunto compacto de X, pues cada $\overline{U}_n$ lo es, $1 \leq n \leq N-1$. Además; si $x \notin K$, $\varphi(x) = 0$, ya que $x \notin U_n$, $1 \leq n \leq N-1$. Entonces, dado $x \notin K$

$$|\varphi(x)| = \varphi(x) = 0 + \sum_{n=N}^{\infty} \varphi_n(x) \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\|f\|_{\varphi} &= \sup_{x\in X}\|\varphi(x)f(x)\| \geq \|\varphi(x_n)f(x_n)\| = \varphi(x_n)\,\|f(x_n)\| = \\ &= \|f(x_n)\|\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\,(x_n) \geq \|f(x_n)\|\,\varphi_n\,(x_n) \geq n2^n\varphi_n\,(x_n) = \\ &= n2^n\left(\frac{1}{2^n}\right) = n,\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Así, $\|f\|_{\varphi} = \infty$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto,

$$(C_b(X,A),\beta) = \Big(CV\,(X,A)\,, \{p_{\varphi}\}_{\varphi\in C_0(X)}\Big)$$

si $V = \{|\varphi| : \varphi \in C_0\,(X)\}$ y X un espacio localmente compacto. ■

Lema 110 *Si $K \subset X$ es compacto, entonces K es compacto en βX.*

Demostración. Si $\{U_\lambda\}$ es una cubierta abierta de K en βX, entonces $\{U_\lambda \cap X\}$ es una cubierta abierta de K en X. Esto último implica que existe una subcubierta finita $\{U_n \cap X\}_{n=1}^{m}$ de K en X. Con esto, $\{U_n\}_{n=1}^{m}$ es una subcubierta finita de K en βX. ■

Proposición 111 *Sea V una familia de Nachbin multiplicativa. Entonces, V es de tipo puntual si y sólo si $\overline{L(u,r)}^{\beta X} \subset X$, $\forall\, u \in V$, $r > 0$.*

Demostración. Para la necesidad supongamos lo contrario; es decir, existen $x_0 \in \beta X - X$, $u \in V$ y $r > 0$ tales que $x_0 \in \overline{L(u,r)}^{\beta X}$.

Sea $f \in CV(X)$ arbitraria; entonces, existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{x\in X}|u(x)f(x)| \leq C.$$

Observemos que si $x \in L(u,r)$, tenemos que $u(x) \geq r$ y

$$u(x)\,|f(x)| = |u(x)f(x)| \leq C,$$

por lo que

$$|f(x)| \leq \frac{C}{r}. \tag{8}$$

Sea $\mathbb{C}^e$ la compactación natural por un punto de $\mathbb{C}$. Así, $f : X \to \mathbb{C}$ se puede extender a una función continua $f^e : \beta X \to \mathbb{C}^e$.

Como $x_0 \in \overline{L(u,r)}^{\beta X}$, y de la desigualdad (8) tenemos que $|f^e(x_0)| \leq \frac{C}{r}$. Esto es ya que si tomamos (x_λ) una red en $L(u,r)$ que converge a x_0, de (8) obtenemos esta desigualdad.

Con esto, tenemos una función $\varphi : CV(X) \to \mathbb{C}$ definiendo $\varphi(f) = f^e(x_0)$. De donde tenemos que $|\varphi(f)| = |f^e(x_0)| \leq \frac{C}{r}$; y así φ es continua:

Sean $\varepsilon > 0$ y $\varepsilon' > 0$ tal que $\frac{\varepsilon'}{r} < \varepsilon$. Si $g \in CV(X)$ es tal que

$$\sup_{x\in X} |(f(x) - g(x))\, u(x)| < \varepsilon',$$

como

$$\sup_{x\in L(u,r)} |(f(x) - g(x))\, u(x)| \leq \sup_{x\in X} |(f(x) - g(x))\, u(x)| < \varepsilon'$$

tenemos que

$$r\, |f(x) - g(x)| \leq |(f(x) - g(x))\, u(x)| < \varepsilon',$$

para $x \in L(u,r)$. Entonces,

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon'}{r} < \varepsilon$$

si $x \in L(u,r)$ y para $(x_\lambda) \subset L(u,r)$ una red que converge a x_0 en βX obtenemos

$$|\varphi(f) - \varphi(g)| = |f^e(x_0) - g^e(x_0)| = \lim_{\lambda} |f(x_\lambda) - g(x_\lambda)| \leq \frac{\varepsilon'}{r} < \varepsilon.$$

Sea $x_1 \in X$, como $x_1 \neq x_0$ y βX es un espacio completamente regular y por tanto normal, existe $\tilde{f} : \beta X \to [0,1]$ una función continua tal que $\tilde{f}(x_1) = 0$ y $\tilde{f}(x_0) = 1$, con lo que $\tilde{f}\,|_X =: f \in CV(X)$. Por lo tanto, no existe $x_1 \in X$ tal que $f(x_1) = \varphi(f)$ para todo $f \in CV(X)$, lo que nos lleva a una contradicción.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que $\overline{L(u,r)}^{\beta X} \subset X$, $\forall\, u \in V$, $r > 0$ y veamos que V es de tipo puntual. Sea $v_V(X)$ el conjunto de todos los homomorfismos de algebras, lineales, multiplicativos, no triviales y no necesariamente continuos definidos en $CV(X)$. A $v_V(X)$ lo dotamos con la topología débil inducida por

$$\widehat{CV(X)} = \left\{ \widehat{f} : f \in CV(X) \right\},$$

donde $\widehat{f}(\varphi) = \varphi(f)$ para cada $\varphi \in v_V(X)$ y $f \in CV(X)$. Como $C_b(X) \subset CV(X)$, podemos ver a X como un subespacio de $v_V(X)$; inclusive X es un subconjunto denso. Sea $\varphi \in v_V(X) \diagdown X$ y supongamos que existen $u \in V$ y $\delta > 0$ tales que $|\varphi(f)| \leq \frac{1}{2}$ siempre que $\sup_{x\in X} |f(x)\, u(x)| \leq \delta$. Como $L(u,\delta)$ es un subconjunto relativamente compacto en X, existe una función continua f' en $v_V(X)$ tal que $0 \leq f' \leq 1$, $f'(\varphi) = 1$ y $f' = 0$ en $L(u,\varphi)$. Sea $f = f'\,|_X$, entonces $\sup_{x\in X} |f(x)\, u(x)| \leq \delta$ y $\varphi(f) = 1$ lo cual es una contradicción. ■

Corolario 112 *Sea V una familia de Nachbin multiplicativa. Entonces, V es una familia de tipo puntual si y sólo si cada $u \in V$ se anula al infinito.*

Demostración. Primero,tomemos $u \in V$ y $r > 0$. Por hipótesis, para $r > 0$ existe $K_r \subset X$ compacto tal que $|u(x)| < r$ si $x \notin K_r$. Entonces, $L(u,r) = \{x \in X : |u(x)| \geq r\} \subset K_r$.

Por el lema anterior, K_r es compacto en βX; esto implica que

$$\overline{L(u,r)}^{\beta X} \subset \overline{K_r}^{\beta X} = K_r \subset X,$$

y de la proposición anterior, V es una familia de tipo punto.

A la inversa, supongamos que V es de tipo puntual, por la proposición anterior dado $u \in V$ y $r > 0$, $\overline{L(u,r)}^{\beta X} \subset X$.

Sean $u \in V$. Demostremos que u se anula al infinito; es decir, dado $r > 0$ existe $K_r \subset X$ compacto tal que $|u(x)| < r$ si $x \notin K_r$. Sea $r > 0$, como βX es compacto, $\overline{L(u,r)}^{\beta X}$ es compacto en βX y al mismo tiempo compacto en X. Sea $K_r = \overline{L(u,r)}^{\beta X}$; si $x \notin K_r$, $|u(x)| < r$, como queríamos. ∎

Además tenemos el siguiente teorema, para su demostración véase Govaerst [12]:

Teorema 113 *Sean V una familia de Nachbin multiplicativa de tipo puntual, (A, Q) un álgebra localmente convexa y $H : CV(X, A) \to \mathbb{C}$ un homomorfismo de algebras continuo. Entonces, existen $x_0 \in Supp(V)$ y $F \in \mathfrak{M}(A)$ tales que $H(f) = F(f(x_0))$ para todo $f \in CV(X, A)$.*

Gracias a este Teorema y de la proposición [108] hemos podido obtener lo siguiente:

Teorema 114 *Sean X un espacio de Hausdorff, completamente regular y $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach, conmutativa y con unidad e. Entonces, $\mathfrak{M}(C_b(X, A), \beta) = X \times \mathfrak{M}(A)$.*

Demostración. Como $\mathfrak{M}(C_b(X), \beta) = X$ y de la proposición [108] $(C_b(X), \beta) = \left(CV_0(X), \{p_\varphi\}_{\varphi \in B_0(X)}\right)$, donde $V_0 = \{|\varphi| : \varphi \in B_0(X)\}$; obtenemos que V_0 es de tipo puntual. Entonces, por el Teorema anterior

$$\mathfrak{M}(C_b(X, A), \beta) = \mathfrak{M}\left(CV_0(X, A), \{p_\varphi\}_{\varphi \in B_0(X)}\right) = X \times \mathfrak{M}(A),$$

ya que siempre tenemos la contensión $\mathfrak{M}(C_b(X, A), \beta) \supset X \times \mathfrak{M}(A)$. ∎

4.1. Algunos ejemplos

Consideremos el álgebra $A = (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, la cual es semisimple, y $X = \mathbb{N}$ dotado con la topología discreta. Por la topología que se da para $\mathbb{N}$ tenemos que toda función definida de $\mathbb{N}$ en $C([0, 1])$ es continua. Entonces, por la sección 3.3, proposición 76, sabemos que

$$T : C_b(\mathbb{N}, C([0, 1])) \to C_b(\mathbb{N} \times [0, 1]) \cong C(\beta(\mathbb{N} \times [0, 1]))$$

dada por $T(f) = \widehat{f}$, donde $\widehat{f}(n, t) = (f(n))(t)$, es un homomorfismo de algebras y además es biyectivo. Inclusive, por la observación 77, T es un homeomorfismo e isometría de $(C_b(\mathbb{N}\ , C([0,1])), \|\cdot\|_\infty)$ en $(C_b(\mathbb{N}\ \times [0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Esto quiere decir que

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}\left(C_b(\mathbb{N}\ , C([0,1])), \|\cdot\|_\infty\right) &\cong \mathfrak{M}\left(C_b(\mathbb{N}\ \times [0,1]), \|\cdot\|_\infty\right) \\ &= \beta\left(\mathbb{N}\ \times [0,1]\right).\end{aligned}$$

Notemos además que si tomamos el álgebra $(C_p(\mathbb{N}\ , C([0,1])), \|\cdot\|_\infty)$, por la sección 3.2, proposición 72, obtenemos que

$$\mathfrak{M}\left(C_p(\mathbb{N}\ , C([0,1])), \|\cdot\|_\infty\right) \cong \beta\mathbb{N}\ \times \mathfrak{M}\left(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty\right) = \beta\mathbb{N}\ \times [0,1].$$

Sea X un espacio completamente regular y $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach. Entonces, de la sección 3.2 tenemos que

$$\mathfrak{M}\left(C_p(X\ , A), \|\cdot\|_\infty\right) \cong \mathfrak{M}\left(C_b(X \times \mathfrak{M}\left(A\right)), \|\cdot\|_\infty\right) \cong \beta X \times \mathfrak{M}\left(A\right).$$

Ejemplo 115 *Si X es un espacio seudocompacto, entonces por lo anterior se cumple que*

$$\mathfrak{M}\left(C_p(X\ , A), \|\cdot\|_\infty\right) \cong \mathfrak{M}\left(C_b(X \times \mathfrak{M}\left(A\right)), \|\cdot\|_\infty\right) \cong \beta X \times \mathfrak{M}\left(A\right) \cong \beta\left(X \times \mathfrak{M}\left(A\right)\right).$$

Dado que $\mathfrak{M}\left(C_p(X\ , A), \|\cdot\|_\infty\right) \cong \beta X \times \mathfrak{M}\left(A\right)$ y $T_{(p,F)} \in \mathfrak{M}\left(C_p(X\ , A), \|\cdot\|_\infty\right)$, $T_{(p,F)}\left(f\right) = F(\widetilde{f}(p))$. Entonces, existe una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset X$ tal que $x_\lambda \underset{\lambda}{\to} p$, por lo que de la continuidad de F y la definición de $\widetilde{f}$ tenemos que

$$\lim_{\lambda} F(f\left(x_\lambda\right)) = F(\widetilde{f}(p))$$

para cada $f \in .C_p(X\ , A)$.

Observación 116 *Notemos que la existencia de esta red no depende de la f que tomemos, sin embargo para $f \in .C_p(X\ , A)$ dada podemos garantizar que existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \underset{n}{\to} p$ y*

$$\lim_{n} F(f\left(x_n\right)) = F(\widetilde{f}(p))$$

En este caso, ya que $cl_A\left(f(X)\right)$ es compacto, existe $a \in cl_A\left(f(X)\right)$ tal que $F(a) = T_{(p,F)}\left(f\right)$.

Ahora, supongamos que $\mathfrak{M}\left(C_b(X\ , A), \|\cdot\|_\infty\right) = \beta\left(X \times \mathfrak{M}\left(A\right)\right)$. Sean $s \in \beta\left(X \times \mathfrak{M}\left(A\right)\right)$ y $f \in .C_b(X\ , A)$, entonces existe una red $(x_\lambda, F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset X \times \mathfrak{M}\left(A\right)$ tal que $(x_\lambda, F_\lambda) \underset{\lambda}{\to} s$. Así, obtenemos que

$$T_s\left(f\right) = \widetilde{\widehat{f}}\left(s\right) = \lim_{\lambda} \widehat{f}\left(x_\lambda, F_\lambda\right) = \lim_{\lambda} F_\lambda(f\left(x_\lambda\right))$$

Con esto:

Proposición 117 *Si $f \in .C_p(X\ , A)$, entonces $cl_A\left(f(X)\right)$ es compacto en A y $\overline{\bigcup_{F\in\mathfrak{M}(A)} F(f(X))}$ es compacto en $\mathbb{C}$. Además, $\overline{\bigcup_{F\in\mathfrak{M}(A)} F(f(X))} = \widetilde{\widehat{f}}\left(\beta X \times \mathfrak{M}\left(A\right)\right)$.*

Apéndice A

Conceptos de Topología

En esta pequeña sección daremos algunos aspectos importantes sobre topología que son conocidos y que al mismo tiempo utilizamos en el presente trabajo sin mencionarlo específicamente.

Sean X, Y espacios topológicos, $B_\alpha \subset X$, $A_\alpha \subset Y$, $\alpha \in \Lambda$, no vacíos y $f : X \to Y$ una función.

Observemos que se cumple lo siguiente: $y \in f\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha\right)$ si y sólo si existe $x \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$ tal que $f(x) = y$; es decir, existe $x \in B_\alpha$ para algún $\alpha \in \Lambda$ tal que $f(x) = y$; pero esto pasa si y sólo si $y \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f(B_\alpha)$. Por tanto toda función $f : X \to Y$ preserva uniones.

Una situación similar pasa para la imagen inversa de f: $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)$ si y sólo si existe $f(x) \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, y esto se cumple si y solamente si existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $f(x) \in A_\alpha$. Esto último pasa si y sólo si existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $x \in f^{-1}(A_\alpha)$, lo que equivale a que $y \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(A_\alpha)$.

Por otro lado, si X, Y son espacios topológicos, $A \subset X$ no vacío y $f : X \to Y$ una función continua, ya que $A \subset \overline{A}$, tenemos que $f(A) \subset f\left(\overline{A}\right)$ y así $\overline{f(A)} \subset \overline{f\left(\overline{A}\right)}$. Además, en este caso también se cumple que la imagen de un subconjunto compacto de X es compacto en Y:

Demostración. Sea $\emptyset \neq K \subset X$ compacto y $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cubierta abierta de $f(K)$, esto implica que $\left\{f^{-1}(U_\alpha)\right\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una cubierta abierta de K por la continuidad de f, con lo que podemos dar una subcubierta finita de K, digamos $\left\{f^{-1}(U_{\alpha_i})\right\}_{i=1}^{n}$, y $f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_i}) \supset K$. Entonces, $\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \supset f(K)$.
■

Sabemos que si X es un espacio topológico y $D \subset X$, D es denso en X si $cl(D) = X$. Además se cumple lo siguiente, véase J. Dugundji [7], pág. 72:

Proposición 118 *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(1) *D es denso en X.*

(2) *Si Fes cerrado en X y $D \subset F$, entonces $F = X$.*

(3) *Cada conjunto abierto y no vacío en X contiene un elemento de D.*

(4) *El complemento de D tiene interior no vacío.*

Definición 119 *Sean X un espacio topológico, Y un conjunto arbitrario y no vacío, y $p : X \to Y$ una función suprayectiva. Definimos a la topología de Identificación en Y como la topología determinada por p definida como*

$$\tau(p) = \left\{U \subset Y : p^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\right\}.$$

En efecto, $\tau(p)$ es una topología pues p^{-1} preserva las operaciones de conjuntos; y como p^{-1} también preserva complementos, un subconjunto $A \subset Y$ es cerrado si y sólo si $p^{-1}(A)$ es cerrado en X.

Definición 120 *Sean X y Y dos espacios topológicos. Dada una función $p : X \to Y$ decimos que es una identificación si la topología dada en Y coincide con $\tau(p)$.*

Sabemos que si $f : X \to Y$ es un homomorfismo de grupos, podemos construir a $f(X)$ en base a X y al Núcleo de f. También podemos hacer un proceso similar para funciones continuas entre espacios topológicos si y sólo si f es una identificación.

Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua, definimos la relación $K(f)$ en X como: $x \sim x'$ si y sólo si $f(x) = f(x')$. Esta relación es de equivalencia en X, al conjunto de clases de equivalencia lo denotamos por $X \diagup K(f)$ y definimos a la función

$$p : X \to X \diagup K(f)$$

por $x \longmapsto [x]$. Además, como p es sobre a $X \diagup K(f)$ lo podemos dotar con la topología de identificación $\tau(p)$ y así p es una identificación.

Ahora, tomamos la función

$$fp^{-1} : X \diagup K(f) \to Y,$$

donde $fp^{-1}[x] = f(x)$. Si $x' \in p^{-1}([x])$, entonces $f(x) = f(x')$, por lo que fp^{-1} esta bien definida y adem's es continua, e inclusive es inyectiva.

Por otro lado, si $f : X \to Y$ es suprayectiva, entonces

$$fp^{-1} : X \diagup K(f) \to Y$$

es biyectiva y continua; pero no necesariamente es un homeomorfismo, véase J. Dugundji [7] pág. 130:

Teorema 121 *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces, $fp^{-1}(X \diagup K(f)) \cong Y$ si y sólo si f es una identificación.*

Como sabemos, todo espacio completamente regular y no compacto se puede sumergir dentro de un espacio compacto y existen diferentes procedimientos para esto.

Definición 122 *Una compactificación de un espacio completamente regular X es una pareja $(\alpha X, h)$ donde αX es un espacio de Hausdorff compacto y h es un homeomorfismo de X en un subconjunto denso de αX.*

Consideremos $i : X \to \beta X$ la función inclusión de X en su compactación de Stone Čech βX (véase Teorema 21). Entonces tenemos lo siguiente:

Teorema 123 *Sea X un espacio completamente regular, entonces βX tiene las siguientes propiedades:*

(1) *Sea Y un espacio compacto. Entonces, toda función continua $f : X \to Y$ tiene una única extensión continua $\tilde{f} : \beta X \to Y$ tal que $f = \tilde{f} \circ i$.*

(2) *(Unicidad) Toda compactificación $(\alpha X, h)$ de X tal que cumple la propiedad (1) es homeomorfo a βX.*

(3) *βX es la compactificación más grande de X: Si $(\alpha X, j)$ es una compactificación de X, entonces $(\alpha X, j)$ es un espacio cociente de βX.*

Demostración. Para la demostración de los incisos (1) y (2) véase J. Dugundji [7], pág. 243, y Engelking [8], pág. 173.

Veamos la demostración de (3). Por (1) existe $\tilde{j} : \beta X \to \alpha X$ tal que $\tilde{j}$ es la extensión de la función $j : X \to X \subset \alpha X$. Como βX es compacto, $\tilde{j}(\beta X)$ es cerrado y contiene a X, $X \subset \alpha X$ denso, entonces por la proposición (primera del apéndice) $\tilde{j}(\beta X) = \alpha X$ y así $\tilde{j}$ es suprayectiva. Dado que $\tilde{j}$ es una función cerrada, por el Teorema anterior, $\alpha X \cong \beta X \diagup K(\tilde{j})$. ■

Como consecuencia de este resultado tenemos lo siguiente, véase Engelking [8], pág.173.

Corolario 124 *Sea X es un espacio completamente regular e $I = [0, 1]$. Entonces:*

a) *Toda función continua $f : X \to I$ se puede extender a una función continua $\tilde{f} : \beta X \to I$.*

b) *Si toda función continua $f : X \to I$ se puede extender continuamente sobre una compactificación αX de X, entonces αX es equivalente a la compactificación de Stone-Čech de X, βX.*

Definición 125 *Decimos que un espacio no vacío X es seudocompacto si $C(X) = C_b(X)$.*

Para los siguientes resultados véase Engelking [8], págs. 238 y 239.

Proposición 126 (Tamano) *El producto cartesiano $X \times Y$ de dos espacios completamente regulares X y Y es seudocompacto si y sólo si X y Y son seudocompactos y la proyección $p : X \times Y \to X$ es una función cerrada; es decir, manda cerrados de $X \times Y$ en cerrados de X.*

Proposición 127 (Glicksberg) *Si el producto cartesiano $X \times Y$ de dos espacios completamente regulares X y Y es seudocompacto, entonces $\beta X \times \beta Y$ es la compactación de Stone-Čech de $X \times Y$; es decir, toda función $f : X \times Y \to I$ se puede extender continuamente sobre . Además, si $\beta X \times \beta Y$ es la compactación de Stone-Čech de $X \times Y$ y ambos X y Y son infinitos, entonces el producto cartesiano $X \times Y$ es seudocompacto.*

Proposición 128 *El producto cartesiano $X \times Y$ de un espacio seudocompacto X y un k-espacio seudocompacto Y es seudocompacto.*

Bibliografía

[1] J. Arhippainen, *On the ideal structure of algebras of LMC-algebra valued functions*, Studia Math. 101 (3) (1992), 311–318.

[2] H. Arizmendi-Peimbert, A. Carrillo-Hoyo, *On the m-convexity of* $C_b(X)$, Publ. Math. Debrecen 63/3 (2003), 379–388.

[3] H. Arizmendi-Peimbert, A. Carrillo-Hoyo, A. García, *A spectral synthesis property for* $C_b(X, \beta)$, Contemporary Math. 48 (2) (2008), 121–127.

[4] H. Arizmendi-Peimbert, A. Carrillo-Hoyo, A. García, manuscrito.

[5] H. Arizmendi-Peimbert, R. Perez-Tiscareño, J. Roa-Fajardo, *On the spectral radii in* $(C_b(X), \beta)$ *and the* $M(\beta)$ *topology*, International Conference on Topological Algebras and their Applications. ICTAA 2008, 29–33.

[6] R. C. Buck, *Bounded continuous functions on a locally compact space*, Michigan Math. J. 5 (1958), 95–104.

[7] J. Dugundji, Topology, Boston, 1966.

[8] R. Engelking, General Topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[9] S. P. Franklin, *Spaces in which sequences suffice*, Fund. Math. 57 (1965), 107–115.

[10] R. Giles, *A generalization of the strict topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 161 (1971), 467–474.

[11] L. Gillman, M. Jerison, Rings of Continuous Functions, Springer Verlag, New York, 1960.

[12] W. Govaerst, *Homomorphisms of weighted algebras of continuous functions*, Ann. Math. Pura Appl. (4) 116 (1978), 151-158.

[13] A. Mallios, Topological algebras. Selected Topics, North Holland Publishing Co., Amsterdan, 1986.

[14] L. Oubbi, *On the bounded sets in weighted spaces of vector-valued continuous functions*, Acta Univ. Oulu. Ser. A Sci. Rerum Natur. No. 408 (2004), 169–178.

[15] R. Perez-Tiscareño, Tesis Doctoral: Sobre eneadas de elementos que son topológicamente invertibles, 2010.

[16] C. E. Rickart, General Theory of Banach Algebras, Robert E. Krieger Publishing co., New York, 1974.

[17] J. J. Rotman, An Introduction to the Theory of Groups, Springer-Verlag, 4^{th} ed., 1995.

[18] H. L. Royden, *Function Algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (3) (1963), 281-298.

[19] W. Zelazko, Selected Topics in Topological Algebras, Aarhus University Lecture notes No. 31, 1971.

[20] W. Zelazko, Banach Algebras, Elsevier Publishing Company, 1973.

Índice alfabético

álgebra de Banach, 7
álgebra de Fréchet, 8
álgebra de funciones, 30, 33
álgebra de funciones continuas, 30, 33
álgebra localmente convexa, 7, 49
álgebra m-convexa, 8, 10, 35
álgebra normada, 7
álgebra topológica, 7
álgebra topológica completa, 7
álgebra topológica con unidad, 7
álgebra topológica conmutativa, 7

A_p, 4

$B(X)$, 15
$B_{00}(X)$, 15
$B_0(X)$, 15
βX, 59

cadena, 1
Stone-Čech, Compactación de, 16
Stone-Čech, compactificación de, 6
Stone-Čhec, Compactificación de , 29
Compactificación de Stone Čhec, 59
conjunto dirigido, 11
conjunto nivel, 50
conjunto nulo, 2
$Z(f)$, 2
conjunto ordenado, 1
conjunto totalmente ordenado, 1
$C_b\left(X,E\right)$, 2
$C(X,E)$, 2
$(C(X),\mathcal{K})$, 15
$CV\left(X,A\right)$, 49
$(C_b(X),\beta)$, 15, 17, 18
$(C_b(X,A),\beta)$, 30, 51, 55
$C_b(X,A)$, 27, 49
$C_p(X,A)$, 27, 29
$C_0(X)$, 16
$C(X,A)$, 26, 49

divisor topológico bilateral de cero, 10
divisor topológico de cero, 10

elemento invertible, 8
equicontinuo, conjunto, 26
espacio completamente regular, 2
espacio seudocompacto, 56, 59, 60
espectro, 20, 41
$\sigma\left(\bar{x}\right)$, 21
espectro funcional, 20
$\sigma_{\mathfrak{M}^{\#}}\left(\bar{x}\right)$, 21
$\sigma_{\mathfrak{M}}\left(\bar{x}\right)$, 21
espectro topológico, 20
$\sigma_t\left(\bar{x}\right)$, 21

familia de Nachbin, 49
familia de Nachbin multiplicativa, 49, 54
Fréchet-Urysohn, espacio, 18
función constante, 2

$G(A)$, 8
Glicksberg, 60

$h(I)$, 16

ideal fijo, 4
ideal libre, 4
ideal máximo, 8
ideal máximo cerrado, 9
ideal máximo real, 5
identificación, 58
inverso topológico derecho, 10
inverso topológico izquierdo, 10
invertibilidad, 42

$k(E)$, 16

límite inverso, 11
Lema de Zorn, 1
localmente equicontinuo, conjunto, 26, 27

M_p^*, 5
M_p, 5
$\mathfrak{M}(A)$, 9
$\mathfrak{M}^{\#}(A)$, 9

números ordinales, espacio de, 23

producto conjuntamente continuo, 7
propiedad (β), 34
Propiedad de Wiener, 13
punto cerradura, 4
punto límite de un z-filtro, 4
puntual, familia de Nachbin de tipo, 50, 53

regular topológico, n-ada, 20
regular, n-ada, 20

síntesi espectral, propiedad, 16
síntesis espectral, propiedad, 17

Tamano, 59
Teorema de Arens, 21
Teorema de Compactificación, 6
Teorema de Gelfand-Mazur, 8
topológicamente invertible, 10, 17
topología compacto abierta, $\mathcal{K}$, 15, 27
topología débil estrella w^*, 9, 27
topología de identificación, 58
topología estricta β, 30
topología estricta, β, 15
Transformada de Gelfand, 10

z-filtro, 3
$Z[I]$, 3
$Z^{\leftarrow}[\mathfrak{F}]$, 3
z-ultrafiltro, 4