UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

EXTENSIONES MICROTONALES DE CONTRAPUNTO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

P R E S E N T A

OCTAVIO ALBERTO AGUSTÍN AQUINO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. GUERINO BRUNO MAZZOLA

MÉXICO, D. F. SEPTIEMBRE DE 2011

Este trabajo está dedicado:

a mi esposa, Angélica,
por brindarme todo su amor y paciencia
mientras batallaba con mi doctorado y esta tesis,

y a mis padres,
Zoila D. Aquino Pérez y
Gregorio Alberto Agustín Escamilla,
por todo su apoyo y cariño incondicional.

Índice general

Prefacio

> Yo creía que, sin las fórmulas [matemáticas], nunca podría transmitir la dulce melodía que tocaba mi corazón.
>
> Kiyoshi Itô (1915-2008)

Desde que tuve mis primeros contactos simultáneos con la Música y la Matemática, percibí una íntima conexión entre ellas. Y empecé a soñar con modelos matemáticos que capturaran la belleza de ambas disciplinas. En ellos, el Álgebra, la Teoría de Números, el contrapunto y la fuga brillaban con inefable esplendor.

No imaginaba que esto ya hubiese sido hecho (o, al menos, iniciado) por Guerino Mazzola, ni que su modelo emplease poderosas herramientas matemáticas. Estoy convencido de que sus resultados y los de sus colaboradores superan ampliamente mis más audaces expectativas, y me alegro profundamente por ello. El presente trabajo pretende contribuir a esos esfuerzos, y a continuación describo brevemente su contenido, capítulo por capítulo.

En el primero se introduce de manera sumaria el concepto de contrapunto y se justifica el modelo matemático que inspira esta tesis, haciendo énfasis en su importancia como medio para poner en perspectiva la teoría tradicional.

En el segundo, se establecen algunas definiciones concernientes al modelo contrapuntístico en el ámbito microtonal. Se demuestra que el modelo es viable y se demuestra el teorema microtonal de contrapunto. También se proporciona un algoritmo para calcular las simetrías de contrapunto, que pueden verse como la parte "tangible" del teorema microtonal de contrapunto.

En el tercero, se estudian las cuasipolaridades y las dicotomías de intervalos con mayor detalle y se establecen algunas propiedades útiles para subsecuentes resultados. Las cuasipolaridades son desarreglos involutivos de los espacios de $2k$ tonos que, cuando están asociadas a las llamadas dicotomías fuertes, son polaridades.

En el cuarto, se definen las torres de contrapunto y se demuestra su existencia. Las torres de contrapunto son el mecanismo mediante el cual el contrapunto se puede extender razonablemente de un espacio microtonal de cardinalidad $2k$ a otro con un múltiplo de tonos, digamos $2ak$. En particular, se demuestra que existe una torre que conduce a una polaridad continua; esto podría ser fundamento futuro de una teoría *continua* de contrapunto.

Finalmente, en el quinto capítulo, se propone una manera de extender el esquema anterior al contrapunto de la segunda especie. Se obtiene también un teorema de contrapunto y un algoritmo para el cálculo de simetrías. Las simetrías en este nuevo contexto no son, sin embargo, invertibles en general.

Es muy oportuno dar algunos agradecimientos. Primero que nada, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por su apoyo a través de una beca con número de becario 217020/207309, que me permitió concluir esta investigación. También a los doctores Emilio Lluis-Puebla, Guerino Mazzola y Rodolfo San Agustín Chi por guiarme e infundirme ánimo mientras redactaba esta tesis. Por último, pero no por ello de forma menos importante, a los doctores Emmanuel Amiot, Pablo Padilla Longoria y María de Lourdes Palacios Fábila por su revisión del borrador y sus atinados comentarios y correciones; espero haberlos incorporado con acierto en la versión final.

Todos los resultados son originales salvo donde se especifica explícitamente.

Octavio Alberto Agustín Aquino
Teotitlán de Flores Magón, Oaxaca
Febrero de 2011

Algunas advertencias sobre la terminología y la notación

En el texto usamos el formalismo de formas y denotadores, introducido por G. Mazzola en su magna obra *The Topos of Music* [Maz02]. Intuitivamente, una forma es un espacio y un denotador es un punto en una forma.

Una forma de particular interés para nosotros es $PiMod_{2k}$, el espacio de tonos módulo la octava en la afinación equitemperada de $2k$-tonos. Siempre que aparezca tal símbolo, el lector lo puede reemplazar por $\mathbb{Z}_{2k}$ para una mejor comprensión. Se mantiene aquí por coherencia con otras fuentes y porque la construcción $PiMod_{2k}$ está dotada con características adicionales que pueden ser (y de hecho son) útiles.

La notación de teoría de números viene del maravilloso libro *Concrete Mathematics* [GKP94] de Graham, Knuth y Patashnik. En particular, la relación de divisibilidad se representa con una barra inclinada $\backslash$, usamos mód en la forma usual y como una operación binaria y

$$[P] = \begin{cases} 1, & P \text{ es verdadera,} \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es el corchete de Iverson.

Capítulo 1

Introducción

1.1. ¿Qué es el contrapunto?

Puesto que el tema principal de este trabajo es el *contrapunto*, vale la pena examinar el significado de este término con algo de detalle. Ciertamente no lo haremos de manera exhaustiva, por que tal empresa rebasa los límites de esta obra. Además, la definición de contrapunto varió notablemente antes de asentarse en la teoría escrita y aún después de eso no resultó del todo nítida ni careció de polisemia.

Pese a todo, una noción bastante estable del contrapunto surge alrededor del siglo XV. Johannes Tinctoris, por ejemplo, dice [Tin77]:

> El contrapunto es un concierto racional y moderado de sonidos que resulta de colocar una voz contra otra. Se denomina contrapunto por "contra" y "punto", pues se pone una nota contra otra justo como un punto se pone contra otro. En consecuencia, todo contrapunto se compone de una mezcla de voces.

Después J. J. Fux (en el siglo XVIII), explica esto más detalladamente [Man65]:

> [...] En tiempos prístinos, en lugar de nuestras notas modernas, se utilizaban puntos o círculos. Así, se acostumbraba a llamar a una composición en la que cada punto se colocaba contra otro punto, *contrapunto*; esta usanza se conserva hoy todavía, aun cuando la forma de las notas ha cambiado.
>
> Por el término contrapunto, por lo tanto, se entiende una composición que se escribe estrictamente de acuerdo a reglas técnicas.

Finalmente, K. Jeppesen nos proporciona la acepción moderna más común [Jep92]:

> [...] Es el arte de preservar la independencia melódica en un complejo polifónico armónicamente balanceado.

En suma, podríamos descomponer la definición de contrapunto en tres partes:

1. Dos o más voces (polifonía),
2. independientes entre sí,
3. armónica y racionalmente conjuntadas.

Del anhelo de preservar los últimos dos aspectos de la definición surgen las reglas técnicas mencionadas por Fux. La búsqueda de la armonía entre las voces (refiriéndonos a la biensonancia del conjunto polifónico) justifica la predominancia de las consonancias como las relaciones interválicas entre ellas. No obstante, a lo largo de los siglos, ha fluctuado el consenso sobre cuáles intervalos son consonancias o si lo son de manera absoluta. Por ejemplo: el tratado *Musica enchiriadis* del siglo IX (alguna vez atribuido a Hucbald) reconoce primordialmente a la cuarta, la quinta y la octava como tales y secundariamente a las terceras y las sextas. Posteriormente, la cuarta es reclasificada como disonancia y se afianzan las terceras y sextas como consonancias *imperfectas*, en contraste con el resto que son llamadas *perfectas*. Que estas distinciones hayan cuajado en el contrapunto clásico (como lo describe Fux, al menos) confirma que el contrapunto no está fundado exclusivamente en consideraciones psicoacústicas: la cuarta perfecta es acústicamente una consonancia, pero existe al menos una teoría que no la considera como tal.

¿Y qué se puede decir sobre la independencia? A lo largo del *Gradus ad Parnassum* se establecen varias reglas cuyo fin presumiblemente es el de preservar distinguibles a las voces, aunque no resulta claro por qué resultan efectivas (si es que lo son). Al respecto, Klaus-Jürgen Sachs [Sac74, p. 33] menciona que a veces el "contra" del contrapunto se refiere a la prevalencia del movimiento contrario en las voces. ¿Pero puede garantizar la independencia de las voces la observancia irrestricta de este principio? El comportamiento resultante es, a fin de cuentas, tan dependiente como el movimiento paralelo.

Adicionalmente, Sachs [Sac74, p. 34] indica que la independencia de las voces no es exclusiva del ámbito vertical (en la separación entre ellas), sino que también se da horizontalmente. En tal caso, el "contra" se interpreta como la yuxtaposición de intervalos[1]. Siendo que hay consonancias perfectas e imperfectas, la juxtaposición alternada de éstas aporta otro elemento (posiblemente vital) de tensión.

El modelo propuesto por Guerino Mazzola [Maz02], aunque restringido a cierta instancia sencilla pero fundamental del contrapunto, aporta una nueva perspectiva sobre estas cuestiones. Utilizando ciertas propiedades algebraicas y geométricas de los intervalos consonantes, permite obtener reglas técnicas basadas en la noción de *simetría de contrapunto* que, al ser simetrías locales, en cierto modo representan las fuerzas motoras del contrapunto. Discutimos a continuación dicho modelo y su relevancia.

[1] Los intervalos de contrapunto pueden verse, a fin de cuentas, como puntos en el espacio de números duales $\mathbb{Z}_{12}[\epsilon]$.

1.2. El modelo mazzoliano

La encarnación más simple del contrapunto consiste en dos voces que simultáneamente tocan notas de idéntica duración. Se acostumbra prescribir la melodía de una de ellas y llamarla *cantus firmus*, mientras que la otra (el *discantus*) se compone utilizando reglas técnicas ya mencionadas.

A esto Tinctoris [Tin77] lo denominó *contrapunto simple* y es el primero que estudia Fux en el *Gradus*, aunque él lo llama *contrapunto de la primera especie*. También lo denominaremos así en lo subsecuente.

A pesar de su simplicidad, esta instancia del contrapunto es lo suficientemente compleja para instituir varias reglas de composición y plantear preguntas teóricas interesantes. Sachs [Sac74, p. 123], por ejemplo, lo cataloga como el núcleo de la teoría del contrapunto durante los siglos XIV y XV, y el resto como elaboraciones graduales. Aún durante el siglo XVI, se esperaba que un músico entrenado fuese capaz de improvisar voces contrapuntísticas de la primera especie sobre otra voz dada (en lo que se denominaba *contraponto alla mente*). En virtud de la importancia de este tipo de contrapunto, resulta natural que sea el primer objeto de un modelo matemático.

Como ya hemos mencionado, uno de los aspectos más importantes de la teoría del contrapunto desde el siglo XIV es la división de los intervalos musicales en consonancias y disonancias. Restringiéndonos a las equivalencias enarmónicas y de octavas, los 12 intervalos resultantes se dividen en dos mitades con seis elementos cada una. Adicionalmente, todos los intervalos que aparecen en el contrapunto de la primera especie deben ser consonantes. Evidentemente, este hecho inextricablemente ata al contrapunto de la primera especie con la noción de consonancia[2].

Guerino Mazzola [Maz02, Parte VII] usa esta división de consonancias y disonancias como punto de partida para su modelo matemático. A esta división de intervalos la denomina *dicotomía de intervalos*. Más precisamente, si las distancias interválicas módulo octava se modelan con la forma $PiMod_{12}$, donde 0 es el unísono, 1 la segunda menor, etcétera, entonces la dicotomía clásica de intervalos es

$$K = \{0, 3, 4, 7, 8, 9\}, \quad D = \{1, 2, 5, 6, 10, 11\},$$

donde K son las consonancias y D las disonancias. Esta dicotomía disfruta de "buenas" propiedades algebraicas y geométricas para fines contrapuntísticos. Quizá la más notable es el hecho de que la transformación afín

$$p_{(K/D)}(x) = e^2 \circ 5(x) = 5x + 2$$

manda a K en D y viceversa. Esta propiedad es esencial para formular las llamadas *simetrías de contrapunto*. Como mostraremos más tarde, la teoría mazzoliana se funda esencialmente en las simetrías de contrapunto y los números

[2] Esto sucede incluso si la definición de consonancia varía, como en el caso del contrapunto disonante. El modelo mazzoliano predice que la única prohibición general en el contrapunto disonante son las segundas menores paralelas, mientras que Cowell [Cow96, p. 35] se contenta con invertir los papeles de las consonancias y disonancias y prohibir las octavas porque "probablemente sonarían inconsistentes".

duales para explicar la tensión horizontal del contrapunto que mencionamos anteriormente.

Salvo isomorfía afín, existen otras cinco biparticiones de $PiMod_{12}$ que tienen las mismas propiedades matemáticas deseables de la dicotomía (K/D), como mostró Jens Hichert en su tesis de maestría [Hic93]. Después definiremos como *fuertes* a las dicotomías de este tipo en los ámbitos microtonales. Una dicotomía fuerte notable aparte de la clásica es la *dicotomía jónica*

$$I = \{2, 4, 5, 7, 9, 11\}, \quad J = \{0, 1, 3, 6, 8, 10\},$$

cuya primera parte consiste precisamente en la escala mayor medida desde la tónica.

Dado un cantus firmus, la teoría de Fux limita la sucesión de intervalos en la composición basándose puramente en los movimientos de las voces con la dicotomía de consonancias y disonancias en mente. La teoría mazzoliana, por otra parte, usa el concepto de simetría de contrapunto para establecer un conjunto de *sucesores admisibles* de un intervalo dado. Este nuevo enfoque ha conducido a notables resultados:

1. El teorema de contrapunto, que establece que para cualquier dicotomía fuerte cualquier intervalo tiene al menos 36 sucesores admisibles; incluso si se prescribe el cantus firmus, el sucesor admisible existe. Para el caso particular de la dicotomía (K/D), las quintas paralelas están siempre prohibidas. Cabe mencionar que esta es una consecuencia, y no un prerequisito, del modelo.
2. Con respecto a la dicotomía (K/D), la escala mayor es la que brinda la mayor libertad de elección para intervalos sucesores (si uno restringe al discanto a permanecer en la escala mayor), en contraste con la escala melódica menor. Por ejemplo, si el primer intervalo y el cantus firmus están dados, en sólo dos casos el intervalo sucesor está unívocamente determinado. En contraste, esto ocurre en 16 caso para la escala melódica menor.
3. La dicotomía (K/D) es antipodal a la dicotomía jónica, en el siguiente sentido: no siempre es posible encontrar un sucesor admisible dentro de la primera mitad de la dicotomía jónica tal que tanto el cantus firmus como el discanto pertenescan a la escala mayor, mientras que la escala $K^* = 0, 3, 4, 7, 8, 9, 11$ (que es muy similar al conjunto K de consonancias y también a una escala básica de las ragas hindúes) no tiene este problema.
4. El primer teorema de "unificación de la armonía y el contrapunto", debido a Noll [Nol95]. A grandes rasgos, pone a los intervalos consonantes (de la dicotomía única en la clase de (K/D) que es un monoide) en correspondencia algebraica con las simetrías afines de una tríada mayor.
5. Los "mundos de contrapunto" derivados de las seis dicotomías fuertes (que son rigurosamente definidos por Junod y Mazzola en [MJ07]) pueden usarse para propósitos composicionales. Los morfismos entre estos "mundos" pueden definirse de manera matemáticamente precisa, lo que provee una

herramienta pionera para la transformación de una composición del contrapunto clásico a otros sistemas "exóticos" de reglas, siempre que sea posible. De hecho, tales transformaciones han sido implementadas por Junod como módulos del programa RUBATO [Jun10].

6. Investigaciones que emplean electroencefalografía ha demostrado la relevancia cognitiva de la polaridad $p_{(K/D)}$ que relaciona algebraicamente las consonancias y disonancias clásicas [Maz02, p. 637]. Esto ha conducido también a nuevas perspectivas sobre la manera en que el cerebro humano interpreta la música.

1.3. Variaciones al modelo

Los logros del modelo mazzoliano alientan un mayor examen del mismo. En particular, sera deseable ampliar la discusión del *principio antrópico* de Mazzola. En este caso, el principio establece que, si interpretamos la aparición histórica de una escala musical o dicotomía como resultado de una elección entre una familia de posibilidades parametrizada, entonces la elección efectiva corresponde a cierta optimalidad de los parámetros relevantes. Un ejemplo de esto es el punto concerniente a las escalas mayores y menores. En esta tesis, la cardinalidad par de las escalas cromáticas equitemperadas se toma como el parámetro a elegir. Podemos entonces formular las siguientes preguntas:

1. ¿Qué hace a la escala de 12 tonos equitemperada tan especial? En otras palabras: tiene esta escala propiedades especiales entre las escalas equitemperadas en relación al contrapunto?
2. ¿Es posible definir dicotomías fuertes de intervalos para escalas más generales?
3. Si es así, ¿cuáles harán patente el principio antrópico? En otras palabras ¿las elecciones máximas serán las más musicales de todas?
4. ¿Para cuáles de ellas existe un teorema de contrapunto?
5. ¿Existe algún resultado similar al teorema de unificación de Noll que nos permita estudiar (o incluso definir) una morfología armónica en estas escalas?

Como menciona Mazzola en [Maz07], estas preguntas sobre las *variaciones al modelo* son importantes para apreciar mejor el valor de los "mundos" musicales en los que vivimos. Si bien es importante saber que existe una explicación para, por ejemplo, la prohibición de las quintas paralelas, es necesario explorar alternativas para entender *por qué* funciona este principio. Es preciso transgredir los límites de los modelos para justificar la belleza en nuestras elecciones y para encontrar nuevas maneras de crearla.

En este sentido, el presente trabajo extiende los seis mundos de contrapunto de 12 tonos al ámbito microtonal, donde su número se multiplica infinitamente. Por ejemplo: para las escalas 24-tonales equitemperadas existen ¡359 clases de dicotomías fuertes de contrapunto! Resulta intrigante pensar si debieran rechazarse más de trescientas maneras de hacer contrapunto 24-tonal para preferir las seis de la escala 12-tonal, o cuáles nos deleitarán más después de experimentar con ellas.

También podríamos preguntarnos por qué no se toman menos tonos. Pudiera ser que la posibilidad de contraponer un mundo de contrapunto a otras cinco sea la razón pues, por un lado, no hay manera de hacer contrapunto con cuatro tonos. Para dos, seis y ocho tonos, esencialmente sólo hay una.

Pero, por otro lado, la escala de 10 tonos tiene tres mundos de contrapunto. ¿Por qué no fue elegida? Un resultado de J. Junod [Jun10] podría ser la respuesta, pues dice que las isometrías afines de este espacio (con la topología métrica inducida por su descomposición de Sylow) no coincide con el total de sus simetrías afines. El sistema de 12 tonos sí tiene esta propiedad.

Algo más que vale la pena estudiar es la posibilidad de transformar coherentemente las composiciones regidas por ciertos parámetros de un modelo, a otra que obedezca a las impuestas por otros parámetros. Por ejemplo, si se compone algo utilizando las reglas deducidas de la dicotomía (K/D), nos gustaría transformarla razonablemente de modo que ahora obedezca a las reglas dadas por la dicotomía (I/J). Como habíamos mencionado antes, esto es un *morfismo entre mundos de contrapunto* [Jun10]. En esta tesis encontramos algunas las relaciones entre las dicotomías microtonales de diferente cardinaldiad y bosquejamos algunas consecuencias que tendría en las reglas de contrapunto que determina cada una. Un resultado importante es que existe una sucesión de dicotomías anidadas de modo que, en el límite, su polaridad se puede extender a *todas* las frecuencias en la octava. Esto abre la puerta a un contrapunto *continuo*, donde la polaridad es continua para alguna topología apropiadamente definida en el espacio de intervalos de contrapunto.

Capítulo 2

Nociones preliminares

En este capítulo demostraremos que el contrapunto microtonal basado en dicotomías fuertes y simetrías de contrapunto es viable para una cantidad par arbitraria de tonos (salvo cuatro). También describimos el algoritmo de Hichert para la búsqueda de simetrías de contrapunto en este nuevo contexto.

2.1. Dicotomías marcadas de intervalos

Definición 2.1. Sea A un módulo. Una *dicotomía marcada* X (con domicilio A) es una composición local A-domiciliada que tiene la misma cardinalidad que su complemento $\complement(X)$ en la composición local total.

Ciertas dicotomías marcadas nos interesan en el contrapunto, que distinguimos a continuación.

Definición 2.2. Sea A un $\mathbb{Z}$-módulo. Una *dicotomía marcada de intervalos* X es una dicotomía marcada con espacio ambiente $PiMod_{2k,q}$.

Una dicotomía marcada de intervalos usualmente se denota con $(X/\complement X)$, para hacer explícito al complemento. Más aún, el complemento define una acción de $\mathbb{Z}_2$ sobre el conjunto de dicotomías marcadas de intervalos. Una órbita de esta acción se denomina *dicotomía de intervalos*. Por otra parte, el grupo

$$\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k}) = \{e^b \circ a : b \in \mathbb{Z}_{2k}, a \,\text{invertible}\}$$

donde

$$e^b \circ a(x) = ax + b,$$

también actúa sobre las dicotomías marcadas de intervalos. Las órbitas de esta acción se llaman *clases de dicotomías marcadas*. No es difícil ver que estas acciones conmutan; las órbitas de la acción conjunta son conocidas como *clases de dicotomía*.

Definición 2.3. Una dicotomía marcada de intervalos X se dice *autocomplementaria* si es isomorfa a su complemento $\complement(X)$, esto es, si y sólo si su clase de dicotomía coincide con con su clase de dicotomía marcada. La dicotomía marcada X se dice *rígida* si su grupo de simetría es trivial. Se dice *fuerte* si es autocomplementaria y rígida.

Escolio 2.4. Un automorfismo $p \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})$ tal que $pX = Y = \complement X$ recibe el nombre de *polaridad*. Para una dicotomía fuerte (X/Y), la polaridad es única. En efecto, si hubiese otra q tal que $qX = Y$ entonces

$$(p^{-1} \circ q)X = X$$

y la fuerza de (X/Y) implica que $p^{-1} \circ q = \mathrm{id}$. En consecuencia $q = p$.

No es inmediato que existan dicotomías autocomplementarias, rígidas o fuertes. Pero, siempre que dispongamos una involución p de $\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})$ que no tenga puntos fijos, entonces podemos construir fácilmente una dicotomía autocomplementaria. De hecho, escojemos primero un elemento arbitrario $x_1 \in \mathbb{Z}_{2k}$, luego elegimos $x_2 \in \mathbb{Z}_{2k}$ distinto de $x_1, p(x_1)$, y así tomamos x_j diferente de

$$x_1, \ldots, x_{j-1}, p(x_1), \ldots, p(x_{j-1})$$

hasta llegar a $j = k$. De este modo, $X = (\{x_1, \ldots, x_k\}/\{p(x_1), \ldots, p(x_k)\})$ es una dicotomía marcada autocomplementaria.

Lema 2.5. *Para cualquier n y $0 \leq t \leq 2n$ impar, $e^t \circ -1 \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2n})$ es involutivo y no tiene puntos fijos (es decir, es un desarreglo involutivo afín).*

Demostración. Dado que

$$(e^t \circ -1) \circ (e^t \circ -1) = e^t \circ e^{-t} \circ 1 = e^0 \circ 1 = 1$$

queda establecido su carácter involutivo. Si $e^t \circ -1(x) = t - x = x$ para algún x, entonces $2x - t = 0$. Esto significa que $2n$ divide a $2x - t$, lo que contradice que $2x - t$ es impar. En consecuencia, $e^t \circ -1$ no tiene puntos fijos. $\square$

Cuando $k = 1$, es obvio que $(\{1\}/\{0\})$ y $(\{0\}/\{1\})$ son las únicas dicotomías fuertes. Para $k = 2$, no hay dicotomías fuertes. Basta verificar esto para

$$X_1 = (\{0,1\}/\{2,3\}), X_2 = (\{0,2\}/\{1,3\}), X_3 = (\{0,3\}/\{1,2\}),$$

pues todas ellas son autocomplementarias. Sin embargo, $e^1 \circ -1(X_1) = X_1$, $-1(X_2) = X_2$ y $e^{-1} \circ -1(X_3) = X_3$, así que ninguna de ellas es rígida.

Ahora podemos demostrar que existe al menos una dicotomía fuerte con espacio ambiente $PiMod_{2k}$ para $k \geq 3$. Hay que tener en mente que los elementos invertibles de $\mathbb{Z}_{2k}$ son impares pues son coprimos con $2k$.

Proposición 2.6. *Sea $k \geq 3$. La dicotomía*

$$(X/Y) = (\{-1, 2k-2, 2k-4, \ldots, 4, 2\}/\{0, 1, 3, \ldots, 2k-5, 2k-3\})$$

en $PiMod_{2k}$ (que se obtiene del automorfismo $e^{-1} \circ -1$) es fuerte.

Demostración. En general, la dicotomía propuesta es claramente autocomplementaria, con isomorfismo $e^{-1} \circ -1$. Para demostrar su rigidez, mostraremos que bajo cualquier automorfismo $e^u \circ w$, salvo la identidad, al menos un elemento de la dicotomía marcada es enviado a un elemento en el complemento. Si $u = 0$, entonces $w(-1) = -w \neq -1$ es impar y por lo tanto $w(-1) \in \complement X$. Si $u \neq 0$ es par, entonces $X \ni -w^{-1}u \neq 0$ es par y $e^u \circ w(-w^{-1}u) = u - u = 0 \in \complement X$. Si u es impar, $e^u \circ w(2) = u + 2w$ es impar. Si pertenece $\complement X$, ya está. De otro modo, $e^u \circ w(2) = u + 2w = -1$. Es imposible que $e^u \circ w(4) = u + 4w = -1$, pues implicaría que $2w = 0$ y $2 = 0$, lo que contradice que $k \geq 3$. $\square$

Vale la pena hacer énfasis en que existen dicotomías fuertes de cardinalidad par arbitraria excepto 4. Esto significa que, en términos de este modelo, no podemos formular una teoría contrapuntística para la escala equitemperada de cuatro tonos. Esta escala puede interpretarse como los tonos de un acorde disminuído de séptima en la escala equitemperada de doce tonos.

Escolio 2.7. La dicotomía construída para $k = 6$ en la Proposición 2.6

$$(\{11, 10, 8, 6, 4, 2\}/\{0, 1, 3, 5, 7, 9\})$$

pertenece a la clase de la dicotomía

$$\Delta_{78} = (\{0, 1, 2, 4, 6, 10\}/\{3, 5, 7, 8, 9, 11\})$$

en la lista de Mazzola, [Maz02, ap. L].

2.2. Dicotomías de contrapunto

Guerino Mazzola descubrió que los intervalos de contrapunto pueden modelarse muy bien usando a $\mathbb{Z}_{2k}[\epsilon]$ (el álgebra de números duales sobre $\mathbb{Z}_{2k}$), dotándolos tangencialmente con notables propiedades algebraicas. Así, a cualquier $x + \epsilon.y \in \mathbb{Z}_{2k}[\epsilon]$ se le llama intervalo de contrapunto, donde x es el cantus firmus y y es el intervalo. Nos adherimos a esta convención para $\mathbb{Z}_{2k}[\epsilon]$.

Definición 2.8. Una *dicotomía marcada de contrapunto* X con espacio ambiente $PiMod_{2k}[\epsilon]$ es una dicotomía marcada con espacio ambiente $PiMod_{2k,q}[\epsilon]$.

Escolio 2.9. Dada una dicotomía marcada de intervalos (X/Y), la dicotomía marcada de contrapunto cuyo soporte es el conjunto

$$X[\epsilon] := \mathbb{Z}_{2k} + \epsilon.X$$

es una dicotomía marcada de contrapunto.

Las definiciones de dicotomía de contrapunto y de clases de contrapunto, autocomplementariedad, rigidez y fuerza se definen modificando las anteriores adecuadamente usando

$$\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k}[\epsilon]) := \{e^{s+\epsilon.t} \circ (u + \epsilon v) : s, t, u, v \in \mathbb{Z}_{2k}, u \text{ invertible}\}$$

en lugar de $\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})$. Ahora enumeramos algunas definiciones y resultados en preparación para el algoritmo de Hichert general. Las demostraciones que se omiten son similares a las que se encuentran en [Maz02] y [Agu09], salvo modificaciones menores.

Proposición 2.10. *Sea $\Delta = (X/Y)$ una dicotomía fuerte con polaridad $p_\Delta = e^u \circ v$. Escójase un cantus firmus x. Entonces existe exactamente un automorfismo p_Δ^x en el espacio de intervalos de contrapunto $PiMod_{2k}[\epsilon]$ que es una polaridad de $(X[\epsilon]/Y[\epsilon])$ tal que*

$$p_\Delta^x(x + \epsilon.\mathbb{Z}_{2k}) = x + \epsilon.\mathbb{Z}_{2k},$$
$$p_\Delta^x = e^{x(1-v)+\epsilon.u} \circ v \quad y \quad p_\Delta^{x+y} = e^x \circ p_\Delta^y \circ e^{-x}.$$

Definición 2.11. Dada una dicotomía $(X[\epsilon]/Y[\epsilon])$ y un automorfismo $g \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k}[\epsilon])$, un par de intervalos $\xi, \eta \in \mathbb{Z}_{2k}[\epsilon]$ se dice que es *polarizado por g* si $\xi \in gY[\epsilon]$ y $\eta \in gX[\epsilon]$.

De ahora en adelante, supondremos que (X/Y) es una dicotomía fuerte.

Proposición 2.12. *Sea $(X[\epsilon]/Y[\epsilon])$ y ξ, η dos intervalos diferentes. Entonces existe un automorfismo $g \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k}[\epsilon])$ tal que el par ξ, η is polarizado por g.*

Definición 2.13. Sea $\Delta[\epsilon] = (X[\epsilon]/Y[\epsilon])$ y $\xi = x + \epsilon.i \in X[\epsilon]$. Un $g \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})$ es una *simetría de contrapunto* para ξ si, y sólo si,

1. $\xi \in gX[\epsilon]$,
2. p_Δ^x es una polaridad de $g\Delta[\epsilon]$,
3. la cardinalidad de $gX[\epsilon] \cap X[\epsilon]$ es máxima entre todos los g que tienen las primeras dos propiedades.

Definición 2.14. Si son dados una dicotomía $\Delta[\epsilon] = (X[\epsilon]/Y[\epsilon])$ y un intervalo $\xi \in X[\epsilon]$, otro intervalo η se dice un *sucesor admisible* de ξ si está contenido en la intersección $gX[\epsilon] \cap X[\epsilon]$ para una simetría de contrapunto g de ξ.

Lema 2.15. *El grupo de automorfismos de $X[\epsilon]$ es $e^{\mathbb{Z}_{2k}}$.*

Lema 2.16. *Para $g = e^{\epsilon.t} \circ (u + \epsilon.v) \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k}[\epsilon])$ y $z \in \mathbb{Z}_{2k}$, definimos*

$$g^{(z)} = g \circ e^{\epsilon.u^{-2}vz} \in H := e^{\epsilon.\mathbb{Z}_{2k}} \circ GL(\mathbb{Z}_{2k})$$

Entonces

$$(g^{(z_1)})^{(z_2)} = g^{(z_1+z_2)}$$
$$e^z \circ gX[\epsilon] = g^{(z)}X[\epsilon] \quad y \quad e^z \circ gY[\epsilon] = Y[\epsilon].$$

Demostración. Sólo la segunda parte necesita demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} e^z \circ g &= e^{z+\epsilon.t} \circ (u + \epsilon.v) \\ &= e^{\epsilon.t} \circ (u + \epsilon.v) \circ e^{z(u^{-1} - \epsilon.u^{-2}v)} \\ &= g \circ e^{(-z)} \circ e^{zu^{-1}} \end{aligned}$$

de donde
$$e^z \circ gX[\epsilon] = g^{(-z)} \circ e^{zu^{-1}} X[\epsilon] = g^{(-z)} X[\epsilon],$$
usando el Lema 2.15. El caso para Y es enteramente análogo. □

Corolario 2.17. *Para $g \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k}[\epsilon])$ y la dicotomía marcada de contrapunto inducida $X[\epsilon]$, existe una simetría $h \in H$ tal que $gX[\epsilon] = hX[\epsilon]$.*

Lema 2.18. *Sean $\xi = x + \epsilon.k$, $g \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k}[\epsilon])$ y $z \in \mathbb{Z}_{2k}$. Si*
$$\xi \notin gX[\epsilon] \quad y \quad p^x_\Delta : gX[\epsilon] \xrightarrow{\cong} gY[\epsilon]$$
entonces
$$e^z \xi \notin e^z \circ gX[\epsilon] \quad y \quad p^{z+x}_\Delta : e^z gX[\epsilon] \xrightarrow{\cong} e^z gY[\epsilon].$$

Además
$$e^z \circ gX[\epsilon] \cap X[\epsilon] = e^z(gX[\epsilon] \cap X[\epsilon])$$
y, en particular,
$$|gX[\epsilon] \cap X[\epsilon]| = |e^z \circ gX[\epsilon] \cap X[\epsilon]|.$$

Proposición 2.19. *Las simetrías de contrapunto se pueden calcular si uno conoce las simetrías de contrapunto $g \in H$ con cantus firmus $x = 0$. De modo más preciso, si $\xi = x + \epsilon.y \in X[\epsilon]$ y g es de contrapunto para ξ, entonces existe una simetría de contrapunto $h = e^t \circ (u + \epsilon.v) \in H$ para ξ. Más aún, para verificar que h es de contrapunto, basta comprobar que $h^{(x)}$ es de contrapunto para el intervalo $\epsilon.y$ y la polaridad p^0_Δ.*

2.3. El teorema microtonal de contrapunto

Como puede verse de la Proposición 2.19, para determinar las simetrías de contrapunto es importante evaluar el número de sucesores admisibles $|gX[\epsilon] \cap X[\epsilon]|$ para $g = e^{\epsilon.t} \circ (u + \epsilon.uv)$. Mazzola demostró que, con la notación de la Proposición 2.19, t debe satisfacer
$$t = y - up(s) \quad \text{y} \quad wt + r = ur + t, \tag{2.1}$$
donde $p = e^r \circ w$ es la polaridad de (X/Y) y $s \in X$.

Escolio 2.20. Las condiciones (2.1) implican que
$$u(s(w-1) - wr) = y(1-w) - r$$
y se satisfacen tomando $s = y$ y $u = w$, por lo que existe por lo menos una simetría de contrapunto para el intervalo consonante $\epsilon.y$.

Sea $\rho = \gcd(v, 2k)$ cuando $v \neq 0$. En [Maz02], se demuestra que

$$|gX[\epsilon] \cap X[\epsilon]| = \begin{cases} \sum_{y \in \mathbb{Z}_{2k}} |e^y \circ uX \cap X|, & v \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k}), \\ 2k|e^{y-up(s)} \circ uX \cap X|, & v = 0, \\ \rho \sum_{j=0}^{(2k/\rho)-1} |e^{j\rho+y-up(s)} \circ uX \cap X|, & \text{de otro modo,} \end{cases} \tag{2.2}$$

donde $y, s \in X$ y p es la polaridad de (X/Y). Adicionalmente, para el primer caso, Mazzola da la fórmula

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}_{2k}} |e^y \circ uX \cap X| = |X|^2 = k^2.$$

Para el resto, obsérvese que la cardinalidad de $e^{y-up(s)} \circ uX \cap X$ no puede exceder $k - 1$, porque (X/Y) es fuerte y $y - p(s) \neq 0$, al ser p la polaridad. Por lo tanto,

$$2k|e^{y-up(s)} \circ uX \cap X| \leq 2k(k-1).$$

La ecuación $j\rho + y - p(s) = 0$ tiene a lo más una solución en el intervalo $0 \leq j < 2k/\rho$. Esto significa que

$$\begin{aligned} \rho \sum_{j=0}^{2k/\rho-1} |e^{j\rho+y-up(s)} \circ uX \cap X| &\leq \rho \left[\left(\frac{2k}{\rho} - 1 \right) (k-1) + k \right] \\ &= \rho + 2k(k-1) \\ &\leq k + 2k(k-1) = 2k^2 - k. \end{aligned}$$

Resumiendo, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.21 (Teorema microtonal de contrapunto)**.** *Sea $\Delta = (X/Y)$ una dicotomía fuerte, y sea $\xi \in X[\epsilon]$. El número N de sucesores admisibles de ξ satisface*

$$k^2 \leq N \leq 2k^2 - k.$$

La cota superior es justa: la dicotomía

$$\Delta = (\{0, 2, 3\}/\{1, 4, 5\})$$

(con polaridad $e^1 \circ -1$) en $PiMod_6$ es fuerte[1], y el número de sucesores admisibles de $\epsilon.2$ es exactamente $15 = 2 \cdot 3^2 - 3$. Su única simetría de contrapunto es $e^{\epsilon.3} \circ (1 + \epsilon.3)$.

Para el cálculo efectivo de las simetrías de contrapunto, damos el siguiente algoritmo; la versión para $k = 6$ se debe a Jens Hichert.

Algoritmo 2.22. Aquí $\chi(x, y)$ es una función que devuelve la cardinalidad del conjunto $e^x \circ yX \cap X$.

Entrada: Una dicotomía fuerte $\Delta = (X/Y)$ y su polaridad $e^r \circ w$.

[1]De hecho, es la *única* dicotomía fuerte en $PiMod_6$, salvo por imágenes afines isomorfas.

Salida: El conjunto de simetrías de contrapunto $\Sigma_y \subseteq H$ para cada $\epsilon.y \in X[\epsilon]$.

para todo $y \in X$ **hacer**
  $M \leftarrow 0, \Sigma_y \leftarrow \emptyset$.
  para todo $u \in GL(\mathbb{Z}_{2k})$ **hacer**
    para todo $s \in X$ **hacer**
      para todo $v \in \mathbb{Z}_{2k}$ **hacer**
        $t \leftarrow y - u(ws + r)$.
        si $wt + r = ur + r$ **entonces**
          si $v = 0$ **entonces**
            $S \leftarrow 2k\chi(t, u)$.
          si no si $v \in GL(\mathbb{Z}_{2k})$ **entonces**
            $S \leftarrow k^2$
          si no
            $\rho \leftarrow \gcd(v, 2k), S \leftarrow \rho \sum_{j=0}^{\frac{2k}{\rho}-1} \chi(j\rho + t, u)$.
          si $S > M$ **entonces**
            $\Sigma_y \leftarrow \{e^{\epsilon.t} \circ (u + \epsilon.uv)\}, S \leftarrow M$.
          si no si $S = M$ **entonces**
            $\Sigma_y \leftarrow \Sigma_y \cup \{e^{\epsilon.t} \circ (u + \epsilon.uv)\}$.
  devolver Σ_y.

Ejemplo 2.23. La salida del algoritmo para la dicotomía fuerte

$$\Delta = (\{0, 2, 3\}/\{1, 4, 5\})$$

es

$$\Sigma_0 = \{e^{\epsilon.4} \circ (5 + \epsilon.4), e^{\epsilon.4} \circ (5 + \epsilon.2)\},$$
$$\Sigma_2 = \{e^{\epsilon.3} \circ (1 + \epsilon.3)\},$$
$$\Sigma_3 = \{e^{\epsilon.4} \circ (5 + \epsilon.4), e^{\epsilon.4} \circ (5 + \epsilon.2)\},$$

El número de sucesores admitidos es, respectivamente: 10, 15, 10. Se enlistan de manera explícita en el Cuadro 2.1.

y	N	Simetrías	Sucesores admisibles
0	10	$e^{\epsilon.4} \circ (5 + \epsilon.4)$	$\{1,4\} + \epsilon.\{0,3\}$
			$\{2,5\} + \epsilon.\{0,2\}$
			$\{0,3\} + \epsilon.2$
		$e^{\epsilon.4} \circ (5 + \epsilon.2)$	$\{2,5\} + \epsilon.\{0,3\}$
			$\{1,4\} + \epsilon.\{0,2\}$
			$\{0,3\} + \epsilon.2$
2	15	$e^{\epsilon.3} \circ (1 + \epsilon.3)$	$\mathbb{Z}_6 + \epsilon.\{0,3\}$
			$z + \epsilon.2$, z impar
3	10	$e^{\epsilon.4} \circ (5 + \epsilon.4)$	ver $y = 0$
		$e^{\epsilon.4} \circ (5 + \epsilon.2)$	ver $y = 0$

Cuadro 2.1: Sucesores admisibles para la dicotomía $\{0, 2, 3\}$.

Capítulo 3

Cuasipolaridades y dicotomías de intervalos

Como vimos en el capítulo anterior, los desarreglos afines involutivos son importantes pues son las polaridades de las dicotomías fuertes en $PiMod_{2k,p}$. En este capítulo los caracterizaremos para futuras referencias. Vale decir aquí que

$$|GL(\mathbb{Z}_n)| = \varphi(n)$$

donde φ es la función totalizadora de Euler. Por lo tanto, $|\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_n)| = n\varphi(n)$.

3.1. Consideraciones previas

Sea $g = e^u \circ v \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_n)$. La función g es una involución afín si, y sólo si,

$$v^2 = 1, \tag{3.1}$$

$$u(v+1) = 0. \tag{3.2}$$

Sea $n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \cdots p_\ell^{\alpha_\ell}$ la descomposición en primos de n. En [Vin71] se demuestra que el número de soluciones Q de (3.1) es

$$Q = \begin{cases} 2^\ell, & \alpha = 0, 1, \\ 2^{\ell+1}, & \alpha \geq 2, \end{cases}$$

y se pueden determinar resolviendo explícita y simultáneamente

$$v \equiv 1 \pmod{2^{[\alpha>0]}a}, \quad v \equiv -1 \pmod{2^{[\alpha>0]}b}$$

para todas las maneras de escribir $n = 2^\alpha ab$. Aquí $[P]$ es el corchete de Iverson.

Para que g sea un desarreglo, es necesario y suficiente que la ecuación

$$(v-1)x = -u \tag{3.3}$$

no tenga soluciones. En adelante ν será un representante de la clase de v y

$$\sigma(\nu, n) = \mathrm{mcd}(\nu - 1, n), \quad \tau(\nu, n) = \mathrm{mcd}(\nu + 1, n);$$

los valores de u que satisfacen (3.2) son múltiplos de

$$u_0 = \frac{n}{\tau(\nu, n)}.$$

Lema 3.1. *Sea $v \in GL(\mathbb{Z}_n)$ una involución. Entonces*

$$u_0 = \frac{n}{\tau(\nu, n)} \backslash \sigma(\nu, n),$$

donde ν es un representante de la clase v.

Demostración. Existen enteros a, b, c, d tales que

$$\sigma(\nu, n) = a(\nu - 1) + nb, \quad \tau(\nu, n) = c(\nu - 1) + nd.$$

Tenemos el producto

$$\sigma(\nu, n)\tau(\nu, n) = ac(\nu^2 - 1) + n((ad + bc)(\nu - 1) + nbd).$$

Puesto que $v^2 - 1 = 0$, existe un entero m tal que $\nu^2 - 1 = nm$, por lo tanto

$$\sigma(\nu, n)\tau(\nu, n) = n(acm + (ad + bc)(\nu - 1) + nbd)$$

y el resultado es inmediato. □

3.2. Caracterización de las cuasipolaridades

Definición 3.2. Una *cuasipolaridad* es un desarreglo involutivo afín.

La ecuación (3.3) no se satisface si, y sólo si, $\sigma(\nu, n) = \mathrm{mcd}(\nu - 1, n)$ no divide a $-u$ (o, equivalentemente, no divide a u). Vale mencionar aquí que, al ocuparnos de una involución, n no puede ser impar pues toda involución actuando sobre un conjunto de cardinalidad impar tiene un punto fijo. Por lo tanto, en adelante tomaremos $n = 2k$.

Por el algoritmo de la división, u debe ser un múltiplo de u_0 de la forma

$$u = \sigma(\nu, 2k)q + r, \quad 0 < r < \sigma(\nu, 2k), q \in \mathbb{Z} \tag{3.4}$$

De esto y el Lema 3.1 deducimos que r también debe ser un múltiplo de u_0. Es claro que $u_0 \leq \sigma(\nu, 2k)$.

Proposición 3.3. *Si $u_0 = \frac{2k}{\tau(\nu,2k)} = \sigma(\nu, 2k)$, no hay cuasipolaridades con v como su parte lineal.*

Demostración. Pues si $u_0 = \sigma(\nu, 2k)$, entonces $\sigma(\nu, 2k) \backslash u$. □

Teorema 3.4. *La transformación afín $g = e^u \circ v \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})$ es una cuasipolaridad si, y sólo si, se cumple lo siguiente:*

1. *la parte lineal v es involutiva,*
2. *se satisface que $u_0 = \frac{2k}{\tau(\nu,2k)} < \sigma(\nu, 2k)$ (de hecho, $\sigma(\nu, 2k) = 2u_0$),*
3. *se satisface que u es de la forma (3.4) con $r = u_0$.*

Si k es impar, el segunda condición se puede omitir.

Demostración. Supóngase que $e^u \circ v$ es una cuasipolaridad. Entonces se cumplen las ecuaciones (3.1) y (3.2) y (3.3) no tiene soluciones. En consecuencia, u es un múltiplo de u_0. El entero u garantiza que (3.3) no tiene soluciones si, y sólo si, es de la forma (3.4). Esto sucede si, y sólo si, $u_0 < \sigma(\nu, 2k)$. Esta desigualdad es suficiente porque u_0 divide a $\sigma(\nu, 2k)$ y por la Proposición 3.3; es necesaria porque u_0 divide a r y por lo tanto $u_0 \leq r < \sigma(\nu, 2k)$.

Recíprocamente, dado $g = e^u \circ v \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})$ con v involutivo, supongamos que u es de la forma (3.4). Por el Lema 3.1, u es un múltiplo de u_0, por lo que es una solución de (3.2). También garantiza que (3.3) no tiene soluciones pues $u_0 < \sigma(\nu, 2k)$. En conclusión, g es una cuasipolaridad.

Demostramos enseguida que $u_0 < \sigma(\nu, 2k)$ es verdadero cuando k es impar. Sean λ y μ tales que

$$\nu - 1 = 2\lambda, \quad \nu + 1 = 2\mu. \tag{3.5}$$

Nótese que λ y μ son coprimos pues

$$\mu - \lambda = \frac{\nu + 1}{2} - \frac{\nu - 1}{2} = 1$$

y entonces $\mathrm{mcd}(\lambda, \mu)\backslash 1$, por lo que $\mathrm{mcd}(\lambda, \mu) = 1$.

Tenemos ahora

$$2km = \nu^2 - 1 = 4\lambda\mu$$

así que

$$km = 2\lambda\mu,$$

por lo que 2 divide a m (de lo contrario, km es impar, lo que es contradictorio). Se sigue que $\lambda\mu$ es un múltiplo de k. Puesto que $\lambda \perp \mu$, entonces $\mathrm{mcd}(\lambda, \mu)\backslash \frac{k}{\mathrm{mcd}(\mu,k)}$ Afirmamos que $\frac{k}{\mathrm{mcd}(\mu,k)}$ divide también a $\mathrm{mcd}(\lambda, \mu)$. Efectivamente, existen enteros a, b, c, d tales que

$$\phi = \mathrm{mcd}(\lambda, k) = a\lambda + bk, \quad \psi = \mathrm{mcd}(\mu, k) = c\mu + dk. \tag{3.6}$$

La afirmación se sigue del examen del producto

$$\begin{aligned} \phi\psi &= ac\lambda\mu + ad\lambda k + bck\mu + k^2 bd \\ &= kac\tfrac{m}{2} + kad\lambda + kbc\mu + k^2 bd \\ &= k(ac\tfrac{m}{2} + ad\lambda + bc\mu + kbd). \end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que

$$\sigma(\nu, 2k) = 2\,\mathrm{mcd}(\lambda, k) = 2\frac{k}{\mathrm{mcd}(\mu, k)} = 2\frac{2k}{\tau(\nu, 2k)} = 2u_0$$

y se sigue inmediatamente que $u_0 < \sigma(\nu, 2k)$.

Resta demostrar que cuando $u_0 < \sigma(\nu, 2k)$ entonces $\sigma(\nu, 2k) = 2u_0$ si k es par. Por la discusión previa sabemos que $\frac{k}{\phi\psi}$ es un entero no nulo y, por hipótesis,

$$\frac{k}{\phi\psi} = \frac{4k}{(2\phi)(2\psi)} = 2\frac{2k}{\sigma(\nu, 2k)\tau(\nu, 2k)} < 2.$$

lo que implica que $\frac{k}{\phi\psi} = 1$. Por ello, tanto si k es par como si no, tenemos que $r = u_0$ en (3.4) si, y sólo si, g es una cuasipolaridad. □

Escolio 3.5. Obsérvese que el Lema 2.5 es un corolario directo del Teorema 3.4 tomando $v = -1$, pues

$$\sigma(\nu, 2k) = \mathrm{mcd}(-2, 2k) = 2, \quad \tau(\nu, 2k) = \mathrm{mcd}(0, 2k) = 2k.$$

Entonces

$$u_0 = \frac{2k}{\tau(\nu, 2k)} = \frac{2k}{2k} = 1$$

y por lo tanto todos los enteros de la forma

$$u = \sigma(\nu, 2k)q + u_0 = 2q + 1$$

(es decir, todos los enteros impares) son tales que $e^u \circ -1$ es una cuasipolaridad.

Proposición 3.6. *El grupo de isotropía de una cuasipolaridad $g = e^u \circ v$ bajo la acción de conjugación tiene cardinalidad $\sigma(\nu, 2k)\varphi(2k)$. Equivalentemente, hay exactamente $\frac{2k}{\sigma(\nu,2k)}$ elementos en la órbita de g bajo la acción de conjugación.*

Demostración. Sea $h = e^t \circ s \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})$. Tenemos

$$g' = h \circ g \circ h^{-1} = (e^t \circ s) \circ (e^u \circ v) \circ (e^{-s^{-1}t} \circ s^{-1}) = e^{t(1-v)+su} \circ v. \qquad (3.7)$$

Los elementos del estabilizador de g son aquellos cuyos parámetros satisfacen la ecuación

$$t(1 - v) = u(1 - s),$$

que tiene solución para cada $s \in GL(\mathbb{Z}_{2k})$ fijo pues

$$\sigma(\nu, 2k) = \mathrm{mcd}(1 - \nu, 2k)\backslash u(1 - s).$$

dado que $1 - s$ es par.

Más aún, tiene exactamente $\sigma(\nu, 2k)$ soluciones diferentes. Dado que esto ocurre para cada $s \in GL(\mathbb{Z}_{2k})$, la cardinalidad del grupo de isotropía de g es

$$|\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})_g| = \sigma(\nu, 2k)\varphi(2k).$$

Esto quiere decir que cada órbita consta de

$$\frac{|\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})|}{\sigma(\nu, 2k)\varphi(2k)} = \frac{2k}{\sigma(\nu, 2k)}$$

elementos. □

Corolario 3.7. *El grupo $\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})$ actúa transitivamente (por conjugación) sobre el conjunto de todas las cuasipolaridades con parte lineal fija v.*

Demostración. Pues (3.4) puede tomar $\frac{2k}{\sigma(\nu,2k)}$ valores módulo $2k$, y la órbita de cada cuasipolaridad $e^u \circ v$ tiene ese mismo número de elementos. □

3.3. Cálculo de dicotomías fuertes

Dada una dicotomía autocomplementaria de intervalos (X/Y) en $PiMod_{2k}$ y p es alguna de sus polaridades, entonces cualquier $gX \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})X$ también es autocomplementaria y una de sus polaridades es $g \circ p \circ g^{-1}$. En efecto,

$$(g \circ p \circ g^{-1})(gX) = (g \circ p)(X) = gY.$$

Cuando X es fuerte, también gX es fuerte: si h es uno de sus automorfismos entonces $g^{-1} \circ h \circ g$ sería un automorfismo de X, luego $g^{-1} \circ h \circ g = \mathrm{id}$ y en consecuencia $h = \mathrm{id}$.

Ahora bien, por el Teorema 3.4 y la demostración de la Proposición 3.6, la órbita bajo la acción de conjugación de las cuasipolaridades está determinada por su parte lineal. Es decir, las órbitas de las cuasipolaridades $f_1 = e^{u_1} \circ v_1$ y $f_2 = e^{u_2} \circ v_2$ coinciden si, y sólo si, $v_1 = v_2$.

Consideremos la descomposición en transposiciones de la cuasipolaridad p

$$\begin{pmatrix} x_1 & p(x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & p(x_2) \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_k & p(x_k) \end{pmatrix}$$

de modo que podemos definir $C = \{x_i\}_{i=1}^k$ tal que $(C/p(C))$ es una dicotomía autocomplementaria de intervalos. Afirmamos que las dicotomías marcadas de intervalos autocomplementarias están en biyección con los subconjuntos de C.

Ciertamente: a la dicotomía autocomplementaria de intervalos (X/Y) con polaridad p (que denotaremos con $\mathcal{A}_p$) le asociamos un subconjunto $X \cap C$ mediante la función

$$\begin{aligned} \kappa_{p,C} : \mathcal{A}_p &\to \wp(C), \\ X &\mapsto X \cap C, \end{aligned}$$

y a cualquier subconjunto de $D \subseteq C$ le asignamos una dicotomía de intervalos autocomplementaria definiendo

$$\begin{aligned} \theta_{p,C} : \wp(C) &\to \mathcal{A}_p, \\ D &\mapsto D \cup p(C \setminus D). \end{aligned}$$

$2k$	2	4	6	8	10	12	14	16
N_D	1	0	1	1	3	6	9	15

$2k$	18	20	22	24	26	28	30	32
N_D	40	90	105	359	355	1092	3007	2152

$2k$	34	36	38	40	42	44	46	48
N_D	4305	17826	15267	48549	130839	170820	198753	780645

Cuadro 3.1: Número de dicotomías fuertes para $4 \leq 2k \leq 48$.

Estas dos aplicaciones son inversas una de la otra pues $\wp(C)$ es un conjunto finito y

$$\begin{aligned}\kappa_{p,C} \circ \theta_{p,C}(D) &= \kappa_{p,C}(D \cup p(C \setminus D)) \\ &= (D \cup p(C \setminus D)) \cap C \\ &= (D \cap C) \cup (p(C \setminus D) \cap C) = D,\end{aligned}$$

pues $p(C \setminus D) \subseteq p(C) = \complement C$.

Escolio 3.8. El grupo $\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})_p$ actúa sobre las dicotomías autocomplementarias con polaridad p. Pues si para $h \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})_p$, una dicotomía autocomplementaria $(C/p(C))$ y $D \subset C$ tenemos $h(x) \in h(\theta_{p,C}(D))$ and also $p \circ h(x) \in h(\theta_{p,C}(D))$, entonces

$$h^{-1} \circ h(x) = x \in \theta_{p,C}(D) \quad \text{y} \quad h^{-1} \circ p \circ h(x) = p(x) \in \theta_{p,C}(D)$$

lo que contradice el hecho de que $(C/p(C))$ es autocomplementaria.

En vista de lo anterior, podemos encontrar las dicotomías fuertes de intervalos calculando, para cada subconjunto $D \in \wp C$, el grupo de isotropía de la dicotomía marcada $\theta(D)$ y descartando aquellas $\theta(D)$ que no sean rígidas. Además, si se examina a un D en particular, no es necesario examinar a $C \setminus D$ pues $\theta(C \setminus D) = p(D)$, lo que significa que $C \setminus D$ está en la órbita de D.

Para lo que sigue, definimos la biyección

$$\begin{aligned}\omega : \wp C &\to \{0, 1, \ldots, 2^k\}, \\ D &\mapsto \sum_{i=1}^{k} \chi_D(x_i) 2^{i-1}\end{aligned}$$

donde $C = \{x_i\}_{i=1}^k$ es una dicotomía autocomplementaria en $PiMod_{2k}$ y χ_D es la función característica del conjunto D. Nótese que $\omega(\complement D) = 2^{k-1} - \omega(D)$, así que $\{\omega^{-1}(i)\}_{i=0}^{2^{k-1}-1}$ consiste en todos los subconjuntos de C que no son complementarios entre sí. Podemos describir ahora el algoritmo "inocente" para calcular las clases marcadas de dicotomías fuertes.

Algoritmo 3.9. Consideramos $\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k}) = \{g_1 = e^0 \circ 1, g_2, \ldots, g_{|\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})|}\}$.

Entrada: Una cuasipolaridad p en $PiMod_{2k}$.
Salida: El conjunto F de los representantes de las clases de dicotomías fuertes con polaridad p.

$C \leftarrow \emptyset, F \leftarrow \emptyset$.
para todo $x \in \mathbb{Z}_{2k}$ **hacer**
  si $x, p(x) \notin C$ **entonces**
    $C \leftarrow C \cup \{x\}$.
para $0 \leq i < 2^{k-1}$ **hacer**
  $b \leftarrow 1, X \leftarrow \theta(\omega^{-1}(i)), \ell \leftarrow 2$.
  mientras $\ell \leq |\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})|$ y $b \neq 0$ **hacer**
    si $g_\ell X = X$ o $g_\ell X \in F$ **entonces**
      $b \leftarrow 0$
    $\ell \leftarrow \ell + 1$.
  si $b = 0$ **entonces**
    $F \leftarrow F \cup \{X\}$.

En el Cuadro 3.1 se ve cuántas clases de dicotomías fuertes hay para $PiMod_{2k}$, $4 \leq 2k \leq 42$, calculadas utilizando el Algoritmo 3.9.

De lo anterior podemos sacar en conclusión que el número N_D de dicotomías fuertes en $PiMod_{2k}$ no es mayor que el número de involuciones en $GL(\mathbb{Z}_{2k})$ multiplicado por la mínima cantidad de órbitas que determinan los $\theta(D)$ para cada $D \subseteq C$ de la dicotomía $(C/p(C))$. Dada la cuasipolaridad $p = e^u \circ v$, por la Proposición 3.6 el subgrupo de $\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})$ que actúa sobre los subconjuntos de C tiene cardinalidad

$$\sigma(\nu, 2k)\varphi(2k) \geq 2\varphi(2k),$$

donde la desigualdad resulta de considerar la polaridad $e^1 \circ -1$ y la dicotomía fuerte de la Proposicion 2.6.

Para concluir este capítulo, damos una cota superior para el número de clases de dicotomía fuertes en $PiMod_{2k}$.

Para una involución dada $v \in GL(\mathbb{Z}_{2k})$ tal que existe una cuasipolaridad $p = e^u \circ v$, sea $(C/p(C))$ una dicotomía autocomplementaria. Llamaremos a una dicotomía $\theta(D)$ para $D \subseteq C$ *relativamente fuerte* respecto a la acción de $\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})_p$ si para cualquier $h \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})_p$ distinto de la identidad, tenemos $h(\theta(D)) \neq \theta(D)$.

Por la Proposición 3.6, el subgrupo de $\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})$ que actúa sobre los subconjuntos de C tiene cardinalidad

$$\sigma(\nu, 2k)\varphi(2k) \geq 2\varphi(2k),$$

donde la desigualdad resulta de considerar la polaridad $e^1 \circ -1$ y la dicotomía fuerte de la Proposición 2.6. Por lo tanto, el número N_p de dicotomías relativamente fuertes para una p fija está acotado por

$$N_p \leq \frac{|\wp C|}{|\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})_p|} = \frac{2^k}{\sigma(\nu, 2k)\varphi(2k)} \leq \frac{2^k}{2\varphi(2k)} \leq \frac{2^{k-1}}{\varphi(2k)}.$$

Las dicotomías fuertes con polaridad p siempre son dicotomías relativamente fuertes, así que el número de clases de dicotomías fuertes debe estar acotado por el número de clases de dicotomías relativamente fuertes. Puesto que hay $\frac{2k}{\sigma(\nu,2k)}$ conjugados de p, el número total de clases de dicotomías relativamente fuertes es a lo más

$$\left| \bigcup_{h \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2k})} N_{h^{-1} \circ p \circ h} \right| \leq \frac{2k}{\sigma(\nu, 2k)} \cdot \frac{2^{k-1}}{\varphi(2k)} \leq \frac{k2^{k-1}}{\varphi(2k)}.$$

Para el número N_D de clases de dicotomía fuertes de $PiMod_{2k}$ tenemos

$$N_D \leq |GL(\mathbb{Z}_{2k})| \cdot k2^{k-1} = \varphi(2k) \cdot \frac{k2^{k-1}}{\varphi(2k)} = k2^k$$

ya que el número de involuciones de $\mathbb{Z}_{2k}$ es, evidentemente, a lo más $|GL(\mathbb{Z}_{2k})|$.

Capítulo 4

Torres de contrapunto

El propósito de este capítulo es introducir la noción de *torre de contrapunto*, que surge del embebimiento progresivo de una instancia microtonal en otra al subdividir (y, a veces, transponer) tonos. Demostraremos que existen torres infinitas de contrapunto, y que una en particular contiene una instancia isomorfa a la dicotomía clásica de consonancias y disonancias. También se prueba que hay torres infinitas cuyo límite es denso en la octava, y su polaridad puede extenderse continuamente en la topología estándar de S^1.

4.1. La categoría de dicotomías fuertes

Sean $\Delta_1 = (X_1/Y_1)$ y $\Delta_2 = (X_2/Y_2)$ dos dicotomías marcadas fuertes en espacios ambientes $PiMod_{2k_1}$ y $PiMod_{2k_2}$, respectivamente. Un morfismo entre estas dicotomías es un morfismo de módulos $\phi : \mathbb{Z}_{2k_1} \to \mathbb{Z}_{2k_2}$ tal que

$$\phi(X_1) \subseteq X_2, \phi(Y_1) \subseteq Y_2$$

y el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}_{2k_1} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{Z}_{2k_2} \\
{\scriptstyle p_{\Delta_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{\Delta_2}} \\
\mathbb{Z}_{2k_1} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{Z}_{2k_2}
\end{array}$$

donde p_{Δ_1} y p_{Δ_2} son sendas polaridades de Δ_1 y Δ_2. Definidos de esta manera, los morfismos entre dicotomías fuertes se convierte en una categoría que denotaremos con $\mathfrak{DF}$.

Estamos particularmente interesados en los morfismos de dicotomías donde

$$\phi : \mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}_{2k} : x \mapsto 2x$$

es la inyección canónica, y más específicamente en las dicotomías donde $k = 2^n{\cdot}3$ para $n \geq 0$. Para demostrar que existen, demostraremos primero que existen ciertas cuasipolaridades en sus espacios subyacentes.

Proposición 4.1. *El morfismo afín*

$$e^{2^{n-1}} \circ (4^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 1) \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2^n \cdot 3})$$

es una cuasipolaridad.

Demostración. Empezamos definiendo $v = 4^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 1$ y observando que

$$\begin{aligned} v^2 &= 4^{2\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 2 \cdot 4^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 1 \\ &= 2^{4\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 2^{2\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1} + 1 \\ &= 2^{2\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}(2^{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} + 1) + 1 \\ &\equiv 1 \mod 3 \cdot 2^n \end{aligned}$$

dado que $2^{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} \equiv 2 \mod 3$ y $2\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 > n$. Ahora sean

$$\begin{aligned} \sigma &= \gcd(v - 1, 3 \cdot 2^n) \\ &= \gcd(4^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}, 3 \cdot 2^n) \\ &= 2^n, \\ \tau &= \gcd(v + 1, 3 \cdot 2^n) \\ &= \gcd(4^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 2, 3 \cdot 2^n) \\ &= \gcd(2(2^{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} + 1), 3 \cdot 2^n) \\ &= 2\gcd(2^{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} + 1, 3 \cdot 2^{n-1}) \\ &= 3 \cdot 2. \end{aligned}$$

Entonces

$$u = \frac{3 \cdot 2^n}{\tau} = \frac{3 \cdot 2^n}{3 \cdot 2} = 2^{n-1} < \sigma = 2^n.$$

Por el criterio del Teorema 3.4, tenemos que

$$e^u \circ v = e^{2^{n-1}} \circ (4^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 1)$$

es una cuasipolaridad. □

Proposición 4.2. *El cuadrado*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{3 \cdot 2^n} \arrow[r, "2"] \arrow[d, "e^{2^{n-1}} \circ (4^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 1)"'] & \mathbb{Z}_{3 \cdot 2^{n+1}} \arrow[d, "e^{2^n} \circ (4^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} + 1)"] \\ \mathbb{Z}_{3 \cdot 2^n} \arrow[r, "2"'] & \mathbb{Z}_{3 \cdot 2^{n+1}} \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. Por un lado tenemos

$$\begin{aligned} 2 \circ e^{2^{n-1}} \circ (4^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 1) &= e^{2^n} \circ (2 \cdot 4^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}) \\ &= e^{2^n} \circ (2^{2\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}) \end{aligned}$$

mientras que por el otro

$$\begin{aligned} e^{2^n} \circ (4^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 1) \circ 2 &= e^{2^n} \circ (2 \cdot 4^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}) \\ &= e^{2^n} \circ (2^{2\lceil \frac{n+1}{2} \rceil + 1}). \end{aligned}$$

Los números $2\lceil \frac{n+1}{2} \rceil + 1$ y $2\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ difieren por 0 o por 2. En el último caso tenemos

$$\begin{aligned} 2^{2\lceil \frac{n+1}{2} \rceil + 1} - 2^{2\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1} &= 2^{2\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}(2^2 - 1) \\ &= 2^{2\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1} \cdot 3 \\ &\equiv 0 \quad \text{mód } 3 \cdot 2^{n+1}. \end{aligned}$$

En consecuencia, el cuadrado conmuta. □

4.2. Torres de contrapunto

El resultado principal de esta sección se refiere a la existencia de un sistema dirigido infinito de dicotomías fuertes muy especial. Para poder construirlos, necesitamos primero el siguiente resultado.

Lema 4.3. *Sea n un entero par y (X_n/Y_n) una dicotomía fuerte en $PiMod_n$ con polaridad $p_n \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_n)$. Para cualquier conjugado p' de p_n existe una dicotomía autocomplementaria $(V/\complement V)$ con función de autocomplementariedad p' tal que ni pertence a la órbita X_n ni es invariante bajo el morfismo* antipodal

$$\begin{aligned} e^{n/2} : \mathbb{Z}_n &\to \mathbb{Z}_n, \\ x &\mapsto x + n/2. \end{aligned}$$

Demostración. Empezamos con las desigualdades

$$\begin{aligned} &n\varphi(n) < n^2 \le \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & n > 15, \\ 2^{\frac{n}{4}} - 1, & n > 43, \end{cases} \\ &n\varphi(n) < 2^{\frac{n}{2}}, \quad n = 12, 14, \\ &n\varphi(n) < 2^{\frac{n}{4}} - 1, \quad n = 36, 40. \end{aligned}$$

La órbita de X_n tiene $n\varphi(n)$ elementos, mientras que el número de dicotomías autocomplementarias con función de autocomplementariedad p' es $2^{\frac{n}{2}}$. Así es seguro que para $n > 12$ existe al menos una dicotomía V que no pertenece a la órbita de X_n y $p'(V) = \complement V$.

Ahora demostraremos que al menos una de esas V no es invariante bajo la acción del morfismo antipodal. Considérese el grafo H cuyos vértices son $\mathbb{Z}_n$ y sus aristas son $\{x, e^{\frac{n}{2}}(x)\}$. Coloréense las aristas de H con *negro* si sus dos vértices pertenecen a V, con *blanco* si sus dos vértices no pertenecen a V y con *gris* de otro modo. Denótense con N_B^V, N_W^V, N_G^V el número de aristas negras, blancas y grises definidas por V. Nótese que (o véase [Igl81])

$$2N_B^V + N_G^V = 2N_W^V + N_G^V = \tfrac{n}{2}$$

y de aquí que $N_B^V = N_W^V$.

Si $\frac{n}{2}$ es impar, la ecuación anterior implica que N_G^V es impar, así que $N_G^V \geq 1$. Por lo tanto, al menos un elemento de V es enviado al complemento de V bajo la aplicación antipodal.

Si $\frac{n}{2}$ es par, entonces N_G^V es par. Supongamos que $N_G^V = 0$ y que en consecuencia $N_W^V = N_B^V = \frac{n}{4}$.

Para encontrar una biyección f entre las aristas negras y blancas, añadimos primero a H las aristas $\{x, p'(x)\}$ para obtener H'. Ninguna de estas aristas estaba ya en H, pues no tenía aristas grises. Todos los vértices de H' son de grado 2, pues cualquier vértice tiene como vecinos exactamente un vértice de su mismo color (definido por la aplicación antipodal) y exactamente uno de su color opuesto (definido por p') y no tiene lazos (pues tanto p' como la aplicación antipodal son involuciones y no tienen puntos fijos). Por lo tanto, H' es euleriano, así que puede descomponerse en k ciclos. Tales ciclos son disjuntos en los vértices, pues de otro modo algún vértice de H' tendría grado mayor que 2.

En cada ciclo, no hay dos aristas del mismo color que sean adyacentes, pues cada una de ellas está definida por la función antipodal. Tampoco puede ser que aristas del mismo color estén conectadas por una arista de la forma $\{x, p'(x)\}$, pues esto significa que x y $p'(x)$ pertenecerían o bien ambos a V o bien ambos a $\complement V$, una imposibilidad por la definición misma de p'. De esto deducimos que en cada ciclo las aristas blancas y negras alternan y son iguales en número.

Ahora dotemos a cada ciclo de una orientación arbitraria pero fija, y ordenemos linealmente sus aristas blancas y negras acorde con dicha orientación. Hagámoslo de modo que el ínfimo de cada ordenamiento sea una arista negra cuyo vértice tenga el representante más pequeño. Así, para el j-ésimo ciclo que tiene r_j aristas negras resulta

$$b_{1,j} < w_{1,j} < b_{2,j} < w_{2,j} < \cdots < b_{r_j,j} < w_{r_j,j}.$$

Definamos f según $f(b_{i,j}) = w_{i,j}$. Así definida, f es una biyección, porque cada arista negra pertenece a exactamente un ciclo y su sucesor en el ordenamiento correspondiente es blanco y unívocamente determinado. Obsérvese que la arista $b_{i,j}$ tiene un vértice x tal que $p'(x)$ está en $f(b_{i,j})$, por lo que si reemplazamos a x por $p'(x)$ entonces obtenemos una nueva dicotomía V' tal que $N_G^{V'} = 2$.

Puesto que inicialmente existen $\frac{n}{4}$ aristas negras, podemos construir al menos $2^{\frac{n}{4}} - 1$ dicotomías autocomplementarias diferentes distintas de V que definen al menos dos aristas grises (usando todos los subconjuntos de las aristas negras). Así, para $n > 35$, existe al menos una de ellas fuera de la órbita de X_n.

Los casos $n = 6, 8, 10, 12, 16, 20, 24, 28, 32$ no están cubiertos por el razonamiento anterior, pero tenemos las siguientes dicotomías:

- $PiMod_6 \ni V = \{1, 2, 3\} + k$, $p' = e^{2k+1} \circ 5$,

- $PiMod_8 \ni V = \{1,2,3,4\} + k$, $p' = e^{2k+1} \circ 7$,
- $PiMod_{10} \ni V = \{1,2,3,4,5\} + k$, $p' = e^{2k+1} \circ 9$,
- $PiMod_{12} \ni V = \{2,4,5,6,7,9\} + 2k$, $p' = e^{4k+2} \circ 5$,
- $PiMod_{12} \ni V = \{1,2,3,4,5,6\} + k$, $p' = e^{2k+1} \circ 11$,
- $PiMod_{16} \ni V = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, $p' = e^{8} \circ 1$,
- $PiMod_{16} \ni V = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} + k$, $p' = e^{2k+1} \circ 15$.
- $PiMod_{20} \ni \{0,1,2,4,9,13,15,16,17,18\}$, $p' = e^{10} \circ 1$.
- $PiMod_{20} \ni \{0,6,7,8,9,10,11,17,18,19\} + 2k$, $p' = e^{2+4k} \circ 9$.
- $PiMod_{20} \ni \{0,3,6,7,9,12,13,15,16,19\} + 5k$, $p' = e^{5+10k} \circ 11$.
- $PiMod_{20} \ni \{1,3,10,12,13,14,15,16,17,19\} + k$, $p' = e^{1+2k} \circ 19$.
- $PiMod_{24} \ni \{0,1,2,4,9,10,11,15,17,18,19,20\}$, $p' = e^{12} \circ 1$.
- $PiMod_{24} \ni \{0,1,4,5,8,9,12,16,17,20,21,22\} + 3k$, $p' = e^{3+6k} \circ 7$.
- $PiMod_{24} \ni \{0,1,2,3,5,6,911,12,15,20,22\} + 4k$, $p' = e^{4+8k} \circ 17$.
- $PiMod_{24} \ni \{0,4,5,6,7,8,11,12,15,16,22,23\} + k$, $p' = e^{1+2k} \circ 23$.
- $PiMod_{28} \ni \{0,2,4,5,7,10,12,15,17,20,22,23,25,27\}$, $p' = e^{14} \circ 1$.
- $PiMod_{28} \ni \{1,2,6,7,8,10,11,13,14,18,21,25,26,27\} + 2k$, $p' = e^{2+4k} \circ 13$.
- $PiMod_{28} \ni \{0,1,2,5,10,11,13,14,15,16,18,19,24,27\} + 7k$, $p' = e^{7} \circ 15 + 14k$.
- $PiMod_{28} \ni \{2,4,5,6,9,11,12,13,14,19,21,22,26\} + k$, $p' = e^{1+2k} \circ 27$.
- $PiMod_{32} \ni \{0,1,3,4,6,7,8,9,10,12,18,21,27,29,30,31\}$, $p' = e^{16} \circ 1$.
- $PiMod_{32} \ni \{0,2,7,8,9,10,15,17,19,20,21,22,27,28,29,30\} + k$, $p' = e^{1+2k} \circ 31$.

Todas ellas no son fuertes ni invariantes bajo su respectiva aplicación antipodal. □

Otra demostración. Para el caso $N_G^V = 0$, hay otro argumento para establecer la función biyectiva entre el conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_{\frac{n}{4}}\}$ de aristas negras y el conjunto $W = \{w_1, \ldots, w_{\frac{n}{4}}\}$ de aristas blancas. Sea H' el grafo con vértices $B \cup W$ y aristas definidas por

$$e = \{x, y\} \in H' \iff p'(x) \cap y \neq \emptyset.$$

Todos los vertices de H' son de grado 1 or 2, pues para una arista x en H tenemos que $p'(x)$ intersecta a una o dos aristas de H. Esto sucede porque cada vértice de H pertenece a alguna arista de H y éstas son disjuntas dos a dos (pues la aplicación antipodal es una involución).

Sea H'' el subgrafo de H' generado por los vértices de grado 2 y F' el sugrafo de H' generado por los vértices de grado 1. Ninguna arista de H'' cruza de H' a F', pues si un vértice y de F' es adyacente a un vértice x de H', entonces o bien $p'(x) = y$ o bien $p'(y) = x$ y la involutividad de p' implica que $x' \in F'$.

Por un teorema de teoría de grafos (véase [Die05, p. 37]), H'' tiene un 1-factor F, i. e., un subgrafo generador 1-regular. Claramente, F' es un 1-factor de sí mismo, por lo tanto $F \cup F'$ es un 1-factor de H'.

Ahora podemos definir la biyección f enviando b_i a su vecino en $F' \cup F$. Por la construcción de H', al menos un vértice x de b_i es enviado por p' al vértice $p'(x) \in f(b_i)$. Reemplazando a x por $p'(x)$ en la dicotomía V obtenemos una dicotomía V' que induce una nueva coloración en H tal que $N_G^{V'} = 2$. El resto de la demostración continúa como antes. $\square$

Lema 4.4. *Sea n un número par. Supóngase que existen cuasipolaridades $p_n = e^u \circ v$ y $p_{2n} = e^r \circ w$ tales que el cuadrado*

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}_n & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z}_{2n} \\
{\scriptstyle p_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{2n}} \\
\mathbb{Z}_n & \xrightarrow[2]{} & \mathbb{Z}_{2n}
\end{array}$$

conmuta. Entonces $p' = e^{u + \frac{w-1}{2}} \circ v$ es una cuasipolaridad en $\mathbb{Z}_n$.

Demostración. Usando el Teorema 3.4, sabemos que

$$\begin{aligned}
u &= \gcd(v-1, n)q + \frac{n}{\gcd(v+1, n)}, \\
r &= \gcd(w-1, 2n)q' + \frac{2n}{\gcd(w+1, 2n)}, \\
2\frac{n}{\gcd(v+1, n)} &= \gcd(v-1, n), \\
2\frac{2n}{\gcd(w+1, 2n)} &= \gcd(w-1, 2n).
\end{aligned}$$

Obsérvese que debido a la hipótesis de conmutatividad, $r \equiv 2u \pmod{2n}$ y $v - w = kn$ para algún entero k, así que

$$\gcd(v \pm 1, n) = \gcd(v - kn \pm 1, n) = \gcd(w \pm 1, n).$$

Si $2\gcd(w+1,n) = \gcd(w+1,2n)$ entonces

$$\begin{aligned}\gcd(w-1,2n) &= 2\frac{2n}{\gcd(w+1,2n)}\\ &= 2\frac{n}{\gcd(w+1,n)}\\ &= 2\frac{n}{\gcd(v+1,n)}\\ &= \gcd(v-1,n) = \gcd(w-1,n).\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}2u = r = \gcd(w-1,2n)q' &+ \frac{2n}{\gcd(w+1,2n)}\\ = \gcd(w-1,n)q' &+ \frac{n}{\gcd(w+1,n)}\\ = \gcd(v-1,n)q' &+ \frac{n}{\gcd(v+1,n)},\end{aligned}$$

por lo que $u = \gcd(v-1,n)(q-q')$, lo que implica que $\gcd(v-1,n)\backslash u$. Pero esto es imposible por el Teorema 3.4.

Si $\gcd(v+1,n) = \gcd(w+1,n) = \gcd(w+1,2n)$, entonces

$$\gcd(v-1,n) = 2\frac{n}{\gcd(v+1,n)} = \frac{2n}{\gcd(w+1,n)} = \frac{2n}{\gcd(w+1,2n)}$$

y

$$\begin{aligned}r &= \gcd(w-1,2n)q' + \frac{2n}{\gcd(w+1,2n)}\\ &= \gcd(w-1,2n)q' + \gcd(v-1,n)\\ &= \gcd(w-1,2n)q' + \gcd(w-1,n)\end{aligned}$$

Tampoco es posible que $\gcd(w-1,2n) = \gcd(w-1,n)$, pues la igualdad anterior implica que $\gcd(w-1,2n)\backslash r$, lo que nuevamente es una imposibilidad por el Teorema 3.4.

La única posibilidad válida que queda es

$$\gcd(w-1,2n) = 2\gcd(w-1,n) = 2\gcd(v-1,n)$$

lo que implica inmediatamente que $\gcd(\frac{w-1}{2}, n) = \gcd(v-1,n)$ y

$$\gcd(v-1,n)\backslash\left(\frac{w-1}{2}\right).$$

En consecuencia $e^{u+\frac{w-1}{2}} \circ v$ es una cuasipolaridad, pues $\frac{w-1}{2} = m \gcd(v-1, n)$ para algún entero m y

$$u + \frac{w-1}{2} = \gcd(v-1,n)(q+m) + \frac{n}{\gcd(v+1,n)},$$

una parte afín válida para una cuasipolaridad según el Teorema 3.4. □

Teorema 4.5. *Sea n un número par. Si existe una dicotomía fuerte (X_n/Y_n) con polaridad $p_n = e^u \circ v$ y el cuadrado*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_n & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z}_{2n} \\ {\scriptstyle p_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{2n}} \\ \mathbb{Z}_n & \xrightarrow[2]{} & \mathbb{Z}_{2n} \end{array}$$

conmuta con $p_{2n} = e^{2u} \circ w$, entonces existe una dicotomía fuerte (X_{2n}/Y_{2n}) con polaridad p_{2n} tal que 2 es un morfismo de dicotomías, i. e. el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{2} & X_{2n} \\ {\scriptstyle p_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{2n}} \\ Y_n & \xrightarrow[2]{} & Y_{2n} \end{array}$$

conmuta.

Demostración. Por los dos previos lemas, sabemos que existe una dicotomía autocomplementaria V en $\mathbb{Z}_n$ con función autocomplementaria $p'_n = e^{(w-1)/2} \circ p_n = e^{u+(w-1)/2} \circ v$ que no pertenece a la órbita de X_n ni es invariante bajo la aplicación antipodal $e^{\frac{n}{2}}$. La hipótesis de conmutatividad implica que

$$p_{2n}(2V+1) = p_{2n}(2V) + w = 2p_n(V) + w = 2p'_n(V) + 1.$$

Definamos $X_{2n} = (2X_n) \cup (2V+1)$ y notemos que $p_{2n}(X_{2n}) = \complement X_{2n}$. Supongamos que $e^{2b} \circ s$ es una simetría no trivial de X_{2n}. Si $2q \in 2X_n$, entonces

$$e^{2b} \circ s(2q) = 2sq + 2b = 2(sq+b) \in 2X_n$$

lo que implica que $e^b \circ s$ es una simetría de X_n. Por lo tanto, $s = 1+n$ y $b = n$. Así, $2b = 0$ y para cualquier $2q+1 \in 2V+1$ tenemos que

$$\begin{aligned} e^{2b} \circ s(2q+1) &= e^0 \circ (1+n)(2q+1) \\ &= 2q + 2qn + 1 + n \equiv 2q + 1 + n \pmod{2n}, \end{aligned}$$

por lo que $2q+1+n \in 2V+1$ y $q + \frac{n}{2} \in V$. Esto no puede ser, pues V no es invariante bajo la aplicación antipodal.

Las simetrías restantes son de la forma $e^{2b+1}\circ s$. Entonces para $2q+1 \in 2V+1$

$$\begin{aligned} e^{2b+1} \circ s(2q+1) &= 2sq + s + 2b + 1 \\ &= 2\left(sq + b + \frac{s+1}{2}\right) \in 2X_n \end{aligned}$$

lo cual también es imposible, porque entonces $e^{b+\frac{s+1}{2}} \circ s(V) = X_n$y esto contradice que V no está en la órbita de X_n. □

Teorema 4.6. *Existe una sucesión infinita de dicotomías fuertes* $\{\Delta_{2^n.3}\}_{n=1}^{\infty}$ *(con* $\Delta_{2^n.3}$ *en* $PiMod_{2^n.3}$*) e inyecciones canónicas*

$$\Delta_6 \rightarrowtail \Delta_{12} \rightarrowtail \Delta_{24} \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail \Delta_{2^n.3} \rightarrowtail \cdots \tag{4.1}$$

con sendas polaridades

$$p_n = e^{2^{n-1}} \circ (4^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 1) \tag{4.2}$$

En particular, Δ_{12} *puede elegirse en la órbita de*

$$(\{0, 3, 4, 7, 8, 9\}/\{1, 2, 5, 6, 10, 11\}),$$

que es la dicotomía clásica de consonancias y disonancias del contrapunto occidental.

Demostración. Es un simple cálculo verificar que la sucesión en cuestión puede comenzar con

$$\{0, 2, 3\} \rightarrowtail \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$$

y ser continuada por inducción usando la Proposición 4.2 y el Teorema 4.5. □

Definición 4.7. Una *torre de contrapunto* es un diagrama $\Gamma : \mathbb{N} \to \mathfrak{DF}$ tal que $\Gamma(j < j + 1) : \Gamma(j) \rightarrowtail \Gamma(j + 1)$ es un monomorfismo.

En términos de esta definición, el Teorema 4.6 establece que existe una torre de contrapunto que incluye a una dicotomía de clase de (K/D). Su límite existe y es una dicotomía en el límite de $\mathbb{Z}_{2^n.3}$.

4.3. Consonancias y disonancias densas

A continuación exhibimos una torre de contrapunto tal que su límite es denso en S^1. La estrategia es encontrar una dicotomía autocomplementaria no fuerte apropiada para completar la dicotomía fuerte de cada "piso" de la torre.

Lema 4.8. *Sean* $A_n = \{0, \ldots, 2^{n-1} - 1\}$ *y* $B_n = \{2^{n-1}, \cdots, 2^n - 1\}$ *dicotomías marcadas con espacio ambiente* $PiMod_{2^n}$ *y*

$$g = e^{2^{n-1}-1} \circ (2^n - 1) \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{2^n}).$$

Entonces los cuadrados

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{3} & 3A_n \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e^{3\cdot(2^{n-1}-1)}\circ(2^n-1)=:h'} \\ A_n & \xrightarrow[3]{} & 3A_n \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{e^2\circ 3} & 3B_n+2 \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e^{2^{n-1}+1}\circ(2^{n+1}-1)=:h''} \\ B_n & \xrightarrow[e^2\circ 3]{} & 3B_n+2 \end{array}$$

(donde $3A_n$ y $3B_n+2$ están en $PiMod_{2^n\cdot 3}$) conmutan. Como $gA_n = A_n$ y $gB_n = B_n$, entonces

$$h'(3A_n) = 3gA_n = 3A_n \tag{4.3}$$

$$h''(3B_n+2) = 3g(B_n)+2 = 3B_n+2. \tag{4.4}$$

Demostración. La conmutatividad del primer cuadrado es obvia. Para el segundo es claro que

$$3(2^n-1) \equiv 3(2^{n+1}-1) \quad (\text{mód } 2^n\cdot 3),$$

y además

$$\begin{aligned} 3(2^{n-1}-1)+2 &= 3\cdot 2^{n-1}-3+2 \\ &= 3\cdot 2^{n-1}-1 \\ &\equiv 3\cdot 2^{n+1}+3\cdot 2^{n-1}-1 \quad (\text{mód } 2^n\cdot 3) \\ &= 2^{n+2}+2^{n-1}+2^{n+1}+2^n-1 \\ &= 2^{n+2}+2^{n-1}+3\cdot 2^n-1 \\ &= 2^{n+2}+2^{n-1}-1 \\ &= 2^{n+2}-2+2^{n-1}+1 \\ &= (2^{n+1}-1)\cdot 2+(2^{n-1}+1), \end{aligned}$$

por lo que el resultado se sigue. □

Lema 4.9. *Supóngase que (X/Y) es una dicotomía marcada en $PiMod_{2^{n-1}\cdot 3}$ ($n \geq 2$) con polaridad*

$$q = e^{2^{n-2}+2^{2\lceil \frac{n}{2}\rceil-1}} \circ (4^{\lceil \frac{n}{2}\rceil}+1).$$

Entonces el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{e^1\circ 2} & 2X+1 \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_n} \\ Y & \xrightarrow[e^1\circ 2]{} & 2Y+1, \end{array}$$

donde $2X+1$ *y* $2Y+1$ *están en* $PiMod_{2^n \cdot 3}$ *y* p_n *está dado por* (4.2).

Demostración. Nótese que $4^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}+1 \in GL(\mathbb{Z}_{2^{n-1} \cdot 3})$ puesto que

$$4^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}+1 \text{ mód } 3 = 2 \quad \text{and} \quad 4^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}+1 \text{ mód } 2 = 1$$

por lo que es coprimo con $2^{n-1} \cdot 3$. La conmutatividad se sigue de

$$\begin{aligned} 2(2^{n-2}+2^{2\lceil \frac{n}{2} \rceil -1})+1 &= 2^{n-1}+2^{2\lceil \frac{n}{2} \rceil}+1 \\ &= 2^{n-1}+(4^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}+1)\cdot 1. \end{aligned}$$

□

Ahora es muy fácil verificar que

$$(4^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}+1) \text{ mód } 3 = 2$$

y

$$2^{n-2}+2^{2\lceil \frac{n}{2} \rceil -1} \text{ mód } 3 = \begin{cases} 0, & n \text{ par}, \\ 1, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

Esto significa que, si n es par

$$q(x) \text{ mód } 3 = \begin{cases} 0 & x \text{ mód } 3 = 0, \\ 2 & x \text{ mód } 3 = 1, \\ 1 & x \text{ mód } 3 = 2. \end{cases}$$

y que si n es impar,

$$q(x) \text{ mód } 3 = \begin{cases} 1 & x \text{ mód } 3 = 0, \\ 0 & x \text{ mód } 3 = 1, \\ 2 & x \text{ mód } 3 = 2. \end{cases}$$

Finalmente, obsérvese que tanto h' como h'' son la identidad módulo 3 para n impar y par, respectivamente, así que usando (4.3) y (4.4) vemos que se extienden a un automorfismo no trivial[1] de la dicotomía

$$U'_{n+1} = \begin{cases} \{1+3k\}_{k=0}^{2^n-1} \cup 3A_{n-1}, & n \text{ par}, \\ \{1+3k\}_{k=0}^{2^n-1} \cup (3B_{n-1}+2), & n \text{ impar} \end{cases}$$

cuya polaridad es precisamente q. Nótese que U'_{n+1} no es invariante bajo la aplicación antipodal, pues para n impar tenemos que $0 \in 3A_{n-1}$ y

$$e^{3\cdot 2^{n-1}}(0) = 0 + 3\cdot 2^{n-1} \notin 3A_{n-1}$$

[1] El inverso de su parte lineal es él mismo, pues

$$(2^s-1)^2 = 2^{2s} - 2^{s+1} + 1 \equiv 1 \pmod{2^n \cdot 3}$$

cuando $s \geq n$ y s es impar, pues $2^n \cdot 3$ divide a $2^{2s}-2^{s+1}$.

mientras que para n par tenemos $3 \cdot (2^n - 1) + 2 \in 3B_{n-1} + 2$ y

$$e^{3 \cdot 2^{n-1}}(3 \cdot (2^n - 1) + 2) = -3 + 2 + 3 \cdot 2^{n-1} = 3(2^{n-1} - 1) + 2 \notin 3B_{n-1} + 2.$$

Ahora, si X_n es una dicotomía fuerte en $PiMod_{2^n \cdot 3}$ como en la demostración del Teorema 4.6, entonces U'_{n+1} no está en su órbita, pues no es fuerte. Sabemos entonces que

$$X_{n+1} = (2X_n) \cup (2U'_{n+1} + 1)$$

es una dicotomía fuerte en $PiMod_{2^n \cdot 3}$ que extiende a X_n canónica y equivariantemente. Construída de este modo, X_n tiene la propiedad

$$\{6k + 3\}_{k=0}^{2^{n-1}} \subset X_{n+1}, n \geq 2.$$

La relevancia de esta propiedad radica en lo siguiente. El límite de la torre de contrapunto (4.1) puede ser visto como una dicotomía contenida en el siguiente subconjunto del círculo unitario,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp\left(2\pi i \frac{k}{2^n \cdot 3}\right) \right\}_{k=0}^{2^n \cdot 3 - 1} \subset S^1$$

que, junto con su complemento, es un subconjunto denso de S^1 en la topología métrica estándar. Como hemos visto, el límite de las consonancias $\lim X_n$ contiene al conjunto $\{\exp(2\pi i(6k+3)/(2^n \cdot 3)) : n, m \in \mathbb{N}\}$, que también corresponde a un subconjunto denso de S^1, luego $\lim X_n$ también es denso. Reduciendo módulo 6 a todas las polaridades, vemos que el límite de las disonancias $\lim \mathbb{Z}_n \setminus \lim X_n$ contiene al conjunto $\{\exp(2\pi i(6k + 1)/(2^n \cdot 3)) : n, m \in \mathbb{N}\}$, que también es denso.

Teorema 4.10. *Existe una torre de contrapunto tal que el límite inyectivo de tanto sus consonancias como disonancias es denso en S^1 con la topología métrica estándar. En consecuencia, el interior de dichos límites es vacío.*

Para finalizar, mostramos una torre de contrapunto cuyo límite tiene una polaridad continua. Considérense los siguientes hechos:

1. Hay 15 clases de dicotomías fuertes en $PiMod_{24}$ con polaridad $e^{12} \circ 1$.

2. Para n par, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_n \arrow[r, "2"] \arrow[d, "e^{\frac{n}{2}} \circ 1"'] & \mathbb{Z}_{2n} \arrow[d, "e^n \circ 1"] \\ \mathbb{Z}_n \arrow[r, "2"] & \mathbb{Z}_{2n} \end{tikzcd}$$

conmuta, donde $e^{\frac{n}{2}} \circ 1$ y $e^n \circ 1$ son cuasipolaridades en sus espacios respectivos.

Por el Teorema 4.5 se sigue de lo anterior (por inducción) que existe una torre de contrapunto

$$X_{24} \rightarrowtail X_{48} \rightarrowtail X_{96} \rightarrowtail \cdots .$$

En la demostración del Teorema 4.5, las dicotomías fuertes $X_{24\cdot 2^n}$ pueden construirse usando la dicotomía

$$U_{24\cdot 2^n} := \begin{cases} \mathbb{Z}_{24\cdot 2^n} \setminus \{0,1,2,\dots,12\cdot 2^n - 1\}, & n \text{ impar}, \\ \{0,1,2,\dots,12\cdot 2^n - 1\}, & n \text{ par}, \end{cases}$$

en $PiMod_{24\cdot 2^n}$, puesto que no es fuerte (la transformación $e^{12\cdot 2^n - 1} \circ -1 \in \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{24\cdot 2^n})$ es un isomorfismo no trivial de $U_{24\cdot 2^n}$) ni tampoco es invariante bajo el morfismo antipodal (¡de hecho es su polaridad!). Entonces

$$X_{24\cdot 2^n} = 2X_{24\cdot 2^{n-1}} \cup (2U_{24\cdot 2^{n-1}} + 1).$$

para $n \geq 1$.

Ejemplo 4.11. Tomemos la dicotomía

$$X_{24} = \{0,1,3,5,6,7,8,9,10,11,14,16\}$$

en $PiMod_{24}$. Ahora

$$U_{24} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$$

y

$$\begin{aligned} X_{48} = 2X_{24} \cup (2U_{24}+1) = \{&0,1,2,3,5,6,7,9, \\ &10,11,12,13,14,15,16,17, \\ &18,19,20,21,22,23,28,32\} \end{aligned}$$

es una dicotomía fuerte en $PiMod_{48}$.

El límite $X = \lim_{n\to\infty} X_{24\cdot 2^n}$ contiene a los subconjuntos

$$A = \left\{ \exp\left(2\pi i \frac{2\ell+1}{24\cdot 2^{2m+1}}\right)\right\}_{2\ell+1 > 12\cdot 2^{2m+1}}$$

y

$$B = \left\{ \exp\left(2\pi i \frac{2\ell+1}{24\cdot 2^{2m}}\right)\right\}_{2\ell+1 < 12\cdot 2^{2m}},$$

por lo que X contiene a $A \cup B$, que es un subconjunto denso de S^1.

Sea $p = \lim_{n\to\infty} p_{24\cdot 2^n}$. Nótese que

$$\exp\left(2\pi i \frac{s}{24\cdot 2^n}\right) \overset{p}{\mapsto} \exp\left(2\pi i \frac{s + 24\cdot 2^{n-1}}{24\cdot 2^n}\right) = \exp\left(2\pi i \left(\frac{s}{24\cdot 2^n} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

así que p envía a una sucesión convergente de consonancias $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq X \subseteq S^1$ a sucesión convergente de dissonancias $\{x_j e^{\pi i}\}_{j=1}^{\infty} \subseteq pX \subseteq S^1$. Esto significa que el límite se extiende a la función continua

$$\begin{aligned} P : S^1 &\to S^1, \\ x &\mapsto x e^{i\pi}. \end{aligned}$$

Capítulo 5

Contrapunto de la segunda especie

En este capítulo final damos una tentativa de teoría para el contrapunto de la segunda especie, análoga a la de la primera. Nuestro enfoque es extender la noción de intervalo de contrapunto a un 2-intervalo, i. e., uno tal que dos intervalos se pegan a un cantus firmus.

Las simetrías de contrapunto en este caso no determinan otro 2-intervalo sucesor, sino un intervalo simple. La idea detrás de esto es permitir que los dos tipos de contrapunto se mezclen.

5.1. Dicotomías de 2-intervalos

Para los propósitos del contrapunto de la segunda especie, necesitamos una estructura algebraica tal que dos intervalos puedan asociarse a un tono base. En el espíritu del modelo presentado anteriormente en esta tesis y en [Maz02] para el contrapunto de la primera especie, tomaremos todos los polinomios de la forma

$$x + \epsilon_1.y + \epsilon_2.z \in \frac{\mathbb{Z}_{2k}[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]}{\langle \mathcal{X}^2, \mathcal{Y}^2, \mathcal{X}\mathcal{Y} \rangle}$$

donde x es el tono base y y, z son los intervalos. Si $\Delta = (X/Y)$ es una dicotomía marcada fuerte de intervalos (como la ha definido Mazzola) con polaridad $p = e^u \circ v$, entonces

$$X[\epsilon_1, \epsilon_2] := \mathbb{Z}_{2k} + \epsilon_1.X + \epsilon_2.\mathbb{Z}_{2k}$$

es una dicotomía 0-domiciliada en $PiMod_{2k}[\epsilon_1, \epsilon_2]$. Elegimos esta dicotomía porque las reglas del contrapunto demandan que el primer intervalo de un compás sea una consonancia. Una polaridad para esta dicotomía, que es análoga a la de la primera especie, es

$$p^{x,z} = e^{x(1-v)+\epsilon_1.u+\epsilon_2.u} \circ v$$

puesto que

$$\begin{aligned} p^x X[\epsilon_1, \epsilon_2] &= e^{x(1-v)} \circ v.\mathbb{Z}_{2k} + \epsilon_1.pX + \epsilon_2.p\mathbb{Z}_{2k} \\ &= \mathbb{Z}_{2k} + \epsilon_1.Y + \epsilon_2.\mathbb{Z}_{2k} \\ &= Y[\epsilon_1, \epsilon_2] \end{aligned}$$

y es tal que

$$p^x(x + \epsilon_1.\mathbb{Z}_{2k} + \epsilon_2.z) = x + \epsilon_1.\mathbb{Z}_{2k} + \epsilon_2.\mathbb{Z}_{2k}.$$

También es cierto que

$$\begin{aligned} p^{x_1+x_2} &= e^{(x_1+x_2)(1-v)+\epsilon_1.u+\epsilon_2.u} \circ v \\ &= e^{x_1(1-v)+x_2(1-v)+\epsilon_1.u+\epsilon_2.u} \circ v \\ &= e^{x_1} \circ e^{-vx_1} \circ e^{x_2(1-v)+\epsilon_1.u+\epsilon_2.u} \circ v \\ &= e^{x_1} \circ e^{x_2(1-v)+\epsilon_1.u+\epsilon_2.u} \circ v \circ e^{-x_1} \\ &= e^{x_1} \circ p^{x_2} \circ e^{-x_1}. \end{aligned}$$

5.2. Simetrías de contrapunto

Representando el polinomio $x + \epsilon_1.y + \epsilon_2.z$ como un vector columna, los candidatos a simetrías (no invertibles) de contrapunto son

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z}_{2k}[\epsilon_1, \epsilon_2] &\to \mathbb{Z}_{2k}[\epsilon_1] \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ sw_1 & s & sw_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \\ &= [sx + t_1] + \epsilon_1.[s(w_1x + y + w_2z) + t_2] \end{aligned}$$

pues queremos que la segunda parte del intervalo influya en la primera parte del sucesor, pero no en la segunda. No requerimos que la simetría sea biyectiva pues deseamos poder cambiar de contrapunto de la segunda especie a la primera si hace falta[1].

Sea $X[\epsilon_1, \epsilon_2.z] = \mathbb{Z}_{2k} + \epsilon_1.X + \epsilon_2.z$. Podemos definir a una simetría de contrapunto para un 2-intervalo $\xi = x + \epsilon_1.y + \epsilon_2.z$ como una que satisface:

1. $x + \epsilon_1.y \notin gX[\epsilon_1, \epsilon_2.z]$,
2. el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} PiMod_{2k}[\epsilon_1, \epsilon_2] & \xrightarrow{g} & PiMod_{2k}[\epsilon_1] \\ {\scriptstyle p^x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p^x_\Delta} \\ PiMod_{2k}[\epsilon_1, \epsilon_2] & \xrightarrow[g]{} & PiMod_{2k}[\epsilon_1], \end{array} \tag{5.1}$$

[1] Para el cambio recíproco las reglas de la primera especie bastan, pues es posible definir arbitrariamente la tercera componente del 2-intervalo sucesor. Esto es coherente con la el caracter local de las reglas de Fux.

conmuta, donde

$$p^x_\Delta := e^{x(1-v)+\epsilon_1.u} \circ v$$

es la polaridad estándar de $(X[\epsilon_1]/Y[\epsilon_1])$, y

3. la cardinalidad de $gX[\epsilon_1, \epsilon_2.z] \cap X[\epsilon_1]$ es máxima entre las simetrías con las dos propiedades anteriores.

La razón del segundo requerimiento es que si se cumple entonces

$$p^x_\Delta(gX[\epsilon_1, \epsilon_2]) = g(p^x X[\epsilon_1, \epsilon_2]) = gY[\epsilon_1, \epsilon_2],$$

por lo que p^x_Δ es una "polaridad" de $gX[\epsilon_1, \epsilon_2]$.

5.3. Algoritmo para el cálculo de simetrías

Como en el caso de la primera especie, si para una simetría de la forma

$$g = e^{\epsilon_1.t_2} \circ \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ sw_1 & s & sw_2 \end{pmatrix}$$

definimos

$$g^{(t_1)} = g \circ e^{\epsilon_1.s^{-1}w_1t_1+\epsilon_2.t_1}$$

entonces se tiene la relación

$$e^{t_1} \circ g = g^{(-t_1)} \circ e^{s^{-1}t_1+\epsilon_2.t_1},$$

y por lo tanto el análogo del Teorema 2.19 es válido. Siendo así, nos podemos concentrar en las simetrías de contrapunto con $t_1 = 0$ y trabajar con los intervalos de la forma $\xi = \epsilon_1.y + \epsilon_2.z$. Si (5.1) ha de conmutar, es necesario y suficiente que

$$t_2 + su(1 + w_2) = u + vt_2. \tag{5.2}$$

Para que $\epsilon_1.y \notin gX[\epsilon_1, \epsilon_2.z]$ debemos tener

$$y = sp(\ell) + t_2 + sw_2z$$

para algún $\ell \in X$. Consecuentemente, para algún $\ell \in X$ se tiene que

$$t_2 = y - s(p(\ell) + w_2z). \tag{5.3}$$

Escolio 5.1. Haciendo $w_2 = 0$ en (5.2) y (5.3), se reducen a las condiciones de la primera especie. Por lo tanto, tomando $s = v$ y $\ell = y$ se satisfacen ambas y concluímos que existe al menos una simetría de contrapunto de la segunda especie.

Sólo falta trabajar con el siguiente conjunto

$$\begin{aligned} gX[\epsilon_1, \epsilon_2.z] &= \bigcup_{x\in\mathbb{Z}_k} g(x + \epsilon_1.X + \epsilon_2.z) \\ &= \bigcup_{x\in\mathbb{Z}_{2k}} (sx + \epsilon_1.(sw_1x + sw_2z + t_2 + sX)) \\ &= \bigcup_{r\in\mathbb{Z}_{2k}} (r + \epsilon_1.(w_1r + sX + w_2sz + t_2)) \\ &= \bigcup_{r\in\mathbb{Z}_{2k}} (r + \epsilon_1.e^{w_1r+w_2sz+t_2} \circ sX) \end{aligned}$$

para calcular la siguiente cardinalidad

$$|gX[\epsilon_1, \epsilon_2.z] \cap X[\epsilon_1, \epsilon_2.z]| = \sum_{r\in\mathbb{Z}_{2k}} |e^{w_1r+w_2sz+t_2} \circ sX \cap X|.$$

Cuando se satisface (5.3), esto se reduce a

$$|gX[\epsilon_1, \epsilon_2.z] \cap X[\epsilon_1, \epsilon_2.z]| = \sum_{r\in\mathbb{Z}_{2k}} |e^{w_1r+y-sp(\ell)} \circ sX \cap X|. \tag{5.4}$$

A partir de aquí sólo se necesita adaptar *mutatis mutandis* el algoritmo de Hichert para buscar las simetrías que maximicen la intersección.

Vale resaltar que (5.2) y (5.3) son perturbaciones de las condiciones para encontrar las simetrías de contrapunto para el caso de la primera especie. Además, en vista de (5.4), se satisface nuevamente (2.2); esto nos permite obtener el siguiente teorema.

Teorema 5.2. *Dada una dicotomía marcada fuerte* (X/Y) *en* $PiMod_{2k}$*, el* 2*-intervalo* $\xi \in X[\epsilon_1, \epsilon_2]$ *tiene al menos* k^2 *y a lo más* $2k^2 - k$ *sucesores admisibles.*

Algoritmo 5.3. Nuevamente $\chi(x, y)$ es una función que devuelve la cardinalidad del conjunto $e^x \circ yX \cap X$.

Entrada: Una dicotomía fuerte $\Delta = (X/Y)$ y su polaridad $e^u \circ v$.

Salida: El conjunto de simetrías de contrapunto $\Sigma_{y,z} \subseteq H$ para cada $\epsilon.y+\epsilon.z \in X[\epsilon_1, \epsilon_2]$.

para todo $y, z \in X$ **hacer**
  $M \leftarrow 0, \Sigma_{y,z} \leftarrow \emptyset$.
  para todo $s \in GL(\mathbb{Z}_{2k})$ **hacer**
    para todo $\ell \in X$ **hacer**
      para todo $w_1, w_2 \in \mathbb{Z}_{2k}$ **hacer**
        $t_2 \leftarrow y - s((v\ell + u) + w_2z)$.
        si $t_2 + su(1 + w_2) = u + vt_2$ **entonces**
          si $w_1 = 0$ **entonces**
            $S \leftarrow 2k\chi(t_2, s)$.
          si no si $w_1 \in GL(\mathbb{Z}_{2k})$ **entonces**
            $S \leftarrow k^2$

si no

$\rho \leftarrow \gcd(w_1, 2k)$

$S \leftarrow \rho \sum_{j=0}^{\frac{2k}{\rho}-1} \chi(j\rho + t_2 + w_2 z, s).$

si $S > M$ **entonces**

$\Sigma_{y,z} \leftarrow \left\{ e^{\epsilon_2 . t_2} \circ \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ sw_1 & s & sw_2 \end{pmatrix} \right\}.$

$S \leftarrow M.$

si no si $S = M$ **entonces**

$\Sigma_{y,z} \leftarrow \Sigma_{y,z} \cup \left\{ e^{\epsilon . t_2} \circ \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ sw_1 & s & sw_2 \end{pmatrix} \right\}.$

devolver $\Sigma_{y,z}$.

Ejemplo 5.4. El primero ejemplo (válido) de contrapunto de la segunda especie en el *Gradus ad Parnassum* [Man65] es

$$\xi_1 = 2 + \epsilon_1.7 + \epsilon_2.0,\ \xi_2 = 5 + \epsilon_1.4 + \epsilon_2.6,\ \xi_3 = 4 + \epsilon_1.8 + \epsilon_2.3,$$
$$\xi_4 = 2 + \epsilon_1.7 + \epsilon_2.0,\ \xi_5 = 7 + \epsilon_1.4 + \epsilon_2.5,\ \xi_6 = 5 + \epsilon_1.9 + \epsilon_2.4,$$
$$\xi_7 = 9 + \epsilon_1.3 + \epsilon_2.5,\ \xi_8 = 7 + \epsilon_1.9 + \epsilon_2.4,\ \xi_9 = 5 + \epsilon_1.9 + \epsilon_2.4,$$
$$\xi_{10} = 4 + \epsilon_1.7 + \epsilon_2.9,\ \xi_{11} = 2 + \epsilon_1.0$$

Algunas simetrías de contrapunto para los sucesores son

$$g_1 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}, g_2 = e^{\epsilon_1 . 6} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}, g_3 = e^{\epsilon_1 . 3} \circ \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$
$$g_4 = g_1, g_5 = g_2, g_6 = e^{\epsilon_1 . 8} \circ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix},$$
$$g_7 = g_6, g_8 = g_6, g_9 = g_6, g_{10} = g_1.$$

Conclusiones y trabajo futuro

Este trabajo aporta lo siguiente:

1. Hay una teoría mazzoliana de contrapunto para escalas equitemperadas de cardinalidad arbitraria, a menos que ésta sea 4.
2. Hay una sucesión infinita equivariante de embebimientos canónicos de teorías de contrapunto microtonal, lo que permite formular una teoría de contrapunto infinita, cuya polaridad es continua al extenderse a toda la octava.
3. Es posible extender el contrapunto de la primera especie a la segunda perturbando las simetrías de contrapunto, sacrificando su biyectividad.

Queda pendiente:

1. Hallar una cota inferior para el número de dicotomías fuertes en $PiMod_{2k}$.
2. Describir de manera más completa las torres de contrapunto cuya polaridad límite pueda extenderse continuamente.
3. Realizar para el contrapunto de la segunda especie el análisis que hicieran Muzzulini y Mazzola del estilo estricto reducido para el contrapunto de la primera especie.
4. Extender el modelo para abarcar las disonancias de suspensión.

Apéndice A

Código fuente

A.1. Algoritmo de Hichert generalizado

Este código corresponde al algoritmo de Hichert generalizado para $PiMod_6$ y la dicotomía fuerte $\{0, 2, 3\}$. Para otros valores de $2k$ hay que modificar `NI` (la cardinalidad de $GL(\mathbb{Z}_{2k})$, `CPM` (el valor de $2k$), `CPM2` (el valor de k), y los contenidos de `u`, `s` y la polaridad adecuadamente.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#define NI 2
#define CPM 6
#define CPM2 3

using namespace std;

int u[NI] = {1,5}, s[CPM2] = {0,2,3};
int w = 5, r = 1;
bool chi[CPM] = {0};

int card(int p,int q)
{
 // Calculo de la cardinalidad de la interseccion
 // de g.X y X
 int cont = 0;
 for(int i=0; i<CPM2; i++)
  if(chi[(q*s[i]+p)%CPM])
   cont++;
 return cont;
}

int main()
```

```
{
 for(int g = 0; g<CPM2; g++)
  chi[s[g]] = true;
 vector < vector <int> > sim;
 vector < int > aux;
 for(int o=0; o<CPM2; o++)
 // k: el intervalo consonante en cuestion
  {
   sim.clear();
   int max = 0;
   for(int l=0; l<NI; l++)
 // u: la parte invertible "real" de la parte lineal de g
    {
     for(int m=0; m<CPM2; m++)
 // s: barrido de las consonancias para el parametro t
      {
       for(int v=0; v<CPM; v++)
 // v: la parte "imaginaria" de la parte lineal de g
        {
         int t = (s[o]-u[l]*(w*s[m]+r))%CPM; // t = k - up(s)
         t = (t+CPM)%CPM;

         if(((w*t+r)%CPM)==((u[l]*r+t)%CPM))
 // Verificar si g es polaridad de (g.X/g.Y)
          {
           int suma = 0;
 // Calculo de la cardinalidad de la interseccion
           bool esinv = false;
           for(int h=0; h<NI; h++)
            if(v==u[h])
             esinv = true;
           if(v==0)
            suma = CPM*card(t,u[l]);
           else if(esinv)
            suma = CPM2*CPM2;
           else
            {
             int vv;
             if(v>CPM2)
              vv = CPM-v;
             else
              vv = v;
             for(int j=0;j<(CPM/vv); j++)
              suma += vv*card(((j*vv+t)%CPM+CPM)%CPM,u[l]);
            }
```

```
 // Actualizacion de la lista de simetrias de contrapunto
           if(suma > max)
            {
             aux.clear();
             aux.push_back(t); aux.push_back(u[l]);
             aux.push_back(u[l]*v%CPM);
             sim.clear();
             sim.push_back(aux);
             max = suma;
            }
           else if(suma == max)
            {
             aux.clear();
             aux.push_back(t); aux.push_back(u[l]);
             aux.push_back(u[l]*v%CPM);
             sim.push_back(aux);
            }
          }
        }
      }
    }
   cout << "Intervalo: "<< s[o] << endl;
   cout << "Numero de sucesores admisibles: "<< max << endl;
   for(int x=0; x<sim.size(); x++)
    {
     cout << "e^(0," << sim[x][0] << ").(";
     cout << sim[x][1] << "," << sim[x][2] << ")\n";
    }
  }
 return 0;
}
```

A.2. Cálculo de dicotomías fuertes

```
#include<iostream>
#include<vector>
#include<cmath>
#include<set>

using namespace std;

int mcd(int u, int v)
{
    while((u>0)&&(v>0))
    {
               if(u>v)
               u = u%v;
               else
               v = v%u;
    }
    return ((u==0)?v:u);
}

int main()
{
    vector <bool> marca;
    vector <int> inv,idem,dicot,mitad,transf;
    set < vector <int> > lista;
    idem.clear(); inv.clear();
    int k,tau,sigma,u0,pot,aux,cont;
    bool fuerte,esta,c;
    cont = 0;
    cin >> k;
    for(int i=1; i<2*k; i+=2)
     {
            if((i*i)%(2*k)==1)
 { idem.push_back(i); inv.push_back(i); }
            else if(mcd(i,2*k)==1)
             { inv.push_back(i); }
     }
              pot = 1;
              for(int j=0; j<k; j++) pot = pot << 1;
              cout << pot << endl;
    for(int i=0; i<idem.size(); i++)
     {
            lista.clear();
            sigma = mcd(idem[i]-1,2*k);
            tau = mcd(idem[i]+1,2*k);
            u0 = 2*k/tau;

            //Comprobacion de involutividad sin puntos fijos
```

```
            if(u0<sigma)
            {
              marca.clear();
              mitad.clear();
              for(int j=0; j<2*k;j++)
               marca.push_back(false);

              for(int j=0; j<2*k;j++)
              {
                    // Separacion de PiMod2k en dos mitades
// complementarias segun e^u0.idem[i]

                    if(!marca[j])
                     { mitad.push_back(j); marca[j]=true;
   marca[(idem[i]*j+u0)%(2*k)] = true; }
              }

              for(int j=0; j<((pot>>1)+1); j++)
               {
                    aux = j;
                    dicot.clear(); transf.clear();

                    // Construccion de una dicotomia
// autocomplementaria de e^u0.idem[i]

                    for(int l = 0; l < k; l++)
                     {
                        if((aux%2)==0)
                         dicot.push_back(mitad[l]);
                        else
                         dicot.push_back((mitad[l]*idem[i]+u0)%(2*k));
                        transf.push_back(0);
                        aux = aux >> 1;
                     }
                    fuerte = true;
                    esta = false;
                    sort(dicot.begin(),dicot.end());

                    // Verificar que sea fuerte o que no este ya
// entre la lista de las fuertes.

                    for(int s=0;(s<inv.size())&&!esta&&fuerte;s++)
                     {
                      for(int t=0; (t<2*k)&&!esta&&fuerte; t++)
                       if((inv[s]!=1)||(t!=0))
                        {
                           for(int m=0; (m<k)&&!esta&&fuerte;m++)
                            transf[m] = (inv[s]*dicot[m]+t)%(2*k);
                           sort(transf.begin(),transf.end());
                           esta = (lista.find(transf)!=lista.end());
```

```
                    if(transf==dicot)
                     fuerte = false;
                  }
                if(fuerte&&!esta)
                  lista.insert(dicot);
               }
         }

      if(lista.size()>0)
       cout << "polaridad: e^" << u0 << "." << idem[i] << endl;
      cont += lista.size();
      set< vector <int> >::const_iterator pos;
              for(pos=lista.begin(); pos != lista.end(); ++pos)
               {
                for(int v=0; v<(*pos).size(); v++)
                 cout << (*pos)[v] << " ";
                cout << endl;
               }

      }

     }
    cout << cont << endl;
    return 0;
}
```

A.3. Simetrías de contrapunto para la segunda especie

El siguiente código calcula las simetrías de contrapunto de la segunda especie para la dicotomía clásica de contrapunto.

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

int u[4] = {1,5,7,11}, s[6] = {0,3,4,7,8,9};
int w = 5, r = 2;
bool chi[12] = {0};

int card(int p,int q)
{
 // Calculo de la cardinalidad de la interseccion
 // de g.X y X
 int cont = 0;
 for(int i=0; i<6; i++)
  if(chi[(q*s[i]+p)%12])
   cont++;
 return cont;
}

int main()
{
 for(int g = 0; g<6; g++)
  chi[s[g]] = true;
 vector < vector <int> > sim;
 vector < int > aux;
 for(int p=0;p<12;p++){
 for(int o=0; o<6; o++)
 // s[o]: el intervalo consonante en cuestion
  {
   sim.clear();
   int max = 0;
   for(int v2=0;v2<12;v2++){
   for(int l=0; l<4; l++)
 // u[l]: la parte invertible "real" de la parte lineal de g
    {
     for(int m=0; m<6; m++)
 // s[m]: barrido de las consonancias para el parametro t
      {
       for(int v=0; v<12; v++)
```

```
// v,v2: partes "imaginarias" de la parte lineal de g
       {
        int t = (s[o]-u[l]*(w*s[m]+r+v2*p))%12; // t = k - up(s)
        t = (t+12)%12;

        if(((w*t+r)%12)==((u[l]*r*(1+v2)+t)%12))
// Verificar si g es polaridad de (g.X/g.Y)
         {
          int suma = 0;
// Calculo de la cardinalidad de la interseccion
          if(v==0)
           suma = 12*card(t,u[l]);
          else if(v==1 || v==5 || v== 7 || v == 11 )
           suma = 36;
          else
           {
            int vv;
            if(v>6)
             vv = 12-v;
            else
             vv = v;
            for(int j=0;j<(12/vv); j++)
             suma += vv*card(((j*vv+t)%12+12)%12,u[l]);
           }

// Actualizacion de la lista de simetrias de contrapunto
          if(suma > max)
           {
            aux.clear();
            aux.push_back(t); aux.push_back(u[l]);
            aux.push_back(u[l]*v%12);
            aux.push_back(u[l]*v2%12);
            sim.clear();
            sim.push_back(aux);
            max = suma;
           }
          else if(suma == max)
           {
            aux.clear();
            aux.push_back(t); aux.push_back(u[l]);
            aux.push_back(u[l]*v%12);
            aux.push_back(u[l]*v2%12);
            sim.push_back(aux);
           }
         }
       }
```

```
      }
    }}
   cout << "Intervalo: "<< s[o] << " " << p << endl;
   cout << "Numero de sucesores admisibles: "<< max << endl;
   for(int x=0; x<sim.size(); x++)
    {
     cout << "e^[0 " << sim[x][0] << "].[";
     cout << sim[x][1] << " 0 0; " << sim[x][2];
     cout << " " << sim[x][1] << " " << sim[x][3]<< "]\n";
    }
  }}
 return 0;
}
```

Bibliografía

[Agu09] Agustín Aquino, Octavio Alberto: *El Teorema de Contrapunto.* Tesis de Maestría, UNAM, 2009.

[Cow96] Cowell, Henry: *New Musical Resources.* Cambridge University Press, 1996.

[Die05] Diestel, Reinhard: *Graph Theory.* Springer-Verlag, 2005.

[GKP94] Graham, Ronald L., Donald E. Knuth y Oren Patashnik: *Concrete Mathematics.* Addison-Wesley, 1994.

[Hic93] Hichert, Jens: *Verallgemeinerung des Kontrapunkttheorems für die Hierarchie aller starken Dichotomien in temperierter Stimmung.* TU Ilmenau, 1993. Diplomarbeit.

[Igl81] Iglesias, Juan E.: *On Patterson's cyclotomic sets and how to count them.* Zeitschrift für Kristallographie, 156(3-4):187–196, 1981.

[Jep92] Jeppesen, Knud: *Counterpoint, The Polyphonic Vocal Style of the Sixteenth Century.* Dover, 1992.

[Jun10] Junod, Julien: *Counterpoint Worlds and Morphisms.* Tesis de Doctorado, Universität Zürich, 2010.

[Man65] Mann, Alfred: *The Study of Counterpoint.* W. W. Norton & Company, 1965. Traducción de fragmentos del *Gradus ad Parnassum* de J. J. Fux.

[Maz02] Mazzola, Guerino: *The Topos of Music.* Birkhäuser-Verlag, 2002.

[Maz07] Mazzola, Guerino: *La vérité du beau dans la musique.* Delatour-IRCAM, 2007.

[MJ07] Mazzola, Guerino y Julien Junod: *From Fux to Ragas - Morphing Contrapuntal Worlds.* En *Proceedings of the ICMC 2007*, Ann Harbor, 2007.

[Nol95] Noll, Thomas: *Morphologische Grundlagen der abendländischen Harmonik.* Tesis de Doctorado, TU Berlin, 1995.

[Sac74] Sachs, Klaus Jürgen: *Der Contrapunctus im 14. und 15. Jahrhundert*, volumen 13 de *Beihefte zum Archiv für Musikwissenschaft*. Franz Steiner Verlag, 1974.

[Sch72] Schubert, Horst: *Categories*. Springer-Verlag, 1972.

[Tin77] Tinctoris, Johannes: *Liber de arte contrapuncti*. c. 1477.

[Vin71] Vinogradov, Ivan M.: *Fundamentos de la Teoría de Números*. MIR, 1971.