Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Análisis de riesgo en portafolios de deuda

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
ACTUARIO

PRESENTA:
JORGE ALBERTO SANDOVAL DE LA ROSA

DIRECTOR DE TESIS:
ACT. GERMÁN VALLE TRUJILLO

2011

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
   Sandoval
   de la Rosa
   Jorge Alberto
   57 52 02 59
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   403008588
2. Datos del tutor
   Act
   Valle
   Trujillo
   Germán
3. Datos del sinodal 1
   Dr
   Padilla
   Longoria
   Pablo
4. Datos del sinodal 2
   Dr
   Rubio
   Hernández
   Gerardo
5. Datos del sinodal 3
   Act
   Cadena
   Martínez
   Alberto
6. Datos del sinodal 4
   Act
   Agoitia
   Hurtado
   María Fernanda del Carmen
7. Datos del trabajo escrito Análisis de riesgo en portafolios de deuda
   163 p
   2011

A mis padres María y Ángel.

A mis hermanos Roxana y José Antonio.

A mis hermanos Gloria Jazmín y René Fernando.

A mi amor, cómplice y confidente Rebeca.

Agradecimientos

Agradezco al Ser Supremo que nos da las cosas en tiempo y medida justas. A la vida y sus grandes enseñanzas.

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México, y a la gente que hace de la educación pública una educación de calidad.

A mi Facultad de Ciencias, por todo lo que ha dejado en mí.

A mi familia. A mis padres María y Ángel, que siempre han sido soporte y base en mi vida. A ellos, que siempre me han dado todo cuanto he necesitado: amor. A ella, que siempre ha sido luz en mi camino; ¡gracias mamá!. A él, que siempre nos ha puesto antes que cualquier cosa o persona; ¡gracias papá!. Los amo.
A mis hermanos Roxana y José Antonio, que siempre me han apoyado y me han amado, aún sin entenderme. A ellos, que me han enseñado tantas cosas y me han negado muy pocas. ¡Gracias hermanitos!. Ha sido bastante divertido crecer con ustedes. Los amo, aunque a veces no se dejen abrazar.
A mis abuelos, mis otros padres. A ellos, que tratan de predicar con el ejemplo. Mi ejemplo de trabajo y perseverancia, de honradez y dignidad. A ustedes, mis raices. Los amo.
A mis tíos Lupita y Enrique, ustedes siempre echándome porras, sobre todo tú, tía. ¡Cómo los quiero!. A mis padrinos Emma y Marcelino, que aunque nos veamos a veces poco, recibo su cariño constante, y por supuesto, ustedes tienen el mío. A mis tíos Lupita y Abel, nunca se me va a olvidar tío aquella visita al hospital, ¡los quiero!. A mi tío Alejandro, a quien admiro mucho y de quien disfruto enórmemente escuchar sus reflexiones, ¡te quiero!. ¡Cómo disfruto estar con todos ustedes!.
A mis tíos Malena y Rubén, a mis compadres-tíos Rocío y Boni , con quienes he compartido tanto, sobre todo risas y momentos muy divertidos, ¡gracias por sus consejos!. A mis tíos Lety y Jaime, a tí mi tiíta, a tí tío, mi compañero de ajedrez favorito. A mis tíos Jesús y Zita, gracias tío por llevarme aquellos días cuando era niño a trabajar como “persona grande”, y a tí tía, por ser siempre tan linda. ¡Los quiero a todos!

A mis hermanos Gloria y René, que siempre me han brindado amor frater-

nal. A ellos, que siempre me han dado su confianza y que tantas veces han sido muy tolerantes conmigo. A ellos, que siempre se han portado como verdaderos hermanos. Saben que son de las personas más importantes en mi vida (y si no lo saben... pfff, no se hagan, sí lo saben). Los quiero ingratotes.
A Rebeca, mi amor. A ella, que ha compartido conmigo grandes dosis de locura. A ella, que me levanta cuando caigo, que me anima y me reanima cuando no tengo ánimo, que comparte cuanto tiene y lo que tiene. A ella, que me llena de ilusión, que es capaz de iluminarlo todo con una sonrisa. Con quien comparto todo lo que tengo en este instante. ¡Eres inspiración preciosa!. Te amo.

A un sinfín de personas que han compartido conmigo, aquellas personas que me brindaron su confianza, que me dieron fortaleza en momentos de debilidad: mis amigos. A mis amigos, nuevos o viejos, flacos o no tan flacos, mujeres u hombres, pero todos ellos grandes amigos y excelentes personas: Lemus, Diana, Erika, Héctor, Tania, Rodrigo, Fabiola, Carlos, Jonathan, Norma, Alberto Cadena, Anita, Laliux, Maf, Armando, David (aunque ya estés en Yucatán mano), Dr. Rincón, Germán Valle, Mar, Juan Carmona, Tania, Gladys, Alex's, Carito, Eddy, Ángel, Sofia, Mafer, Israel, Luzma, Gaby, Moni, Jorge, Omar, Carlos, Enrique. Y aunque seguro se me fue alguno, ustedes saben que no me imagino mi vida en la Fac, o fuera de ella, sin ustedes.
Por otra parte, de manera especial agradezco la ayuda de mi asesor, maestro y amigo Germán Valle Trujillo. ¡Gracias Ger!, ¡por fin!. Y de ustedes Dr. Pablo Padillla y Act. Alberto Cadena, gracias por sus valiosos comentarios.

A todos ustedes, gracias por regalarme sonrisas, por arrancarme carcajadas, por compartir momentos especiales. En fin, gracias por compartir su visión del mundo y de vida; ¡gracias por ser parte y darle sazón a mi vida!.

Jorge Alberto Sandoval de la Rosa

Índice general

Introducción

Actualmente, el mercado financiero ha cobrado una gran importancia alrededor del mundo al permitir interactuar a diferentes entes a través de unadiversidad de instrumentos. Por medio de estos instrumentos, los agentes participantes tienen la capacidad de vender o comprar activos bajo condiciones previamente pactadas, entre los cuales se encuentran aquellos que representan "deuda".

La deuda, entendida como la obligación que tiene un ente de reintegrar un bien monetario a otro, es importante en el medio financiero debido a que, es a partir de ésta, que una empresa o gobierno es capaz de capitalizarse y será objeto de estudio en el presente trabajo a través del análisis del instrumento financiero denominado "bono".

Un bono representa una promesa de pago (valor nominal) por parte del emisor al término del contrato (plazo), sin embargo como toda promesa, ésta puede cumplirse o no; cuando ésta se cumple con certeza, su única fuente de incertidumbre la constituye la tasa de interés.

Debido a la relación intrínseca entre el bono y la tasa de interés, cambios en esta última tiene repercusiones en el precio del primero; por lo que si al inversionista no le interesa conservar el bono hasta el final del plazo, cambios en la tasa de interés pueden tener como consecuencia, desde la obtención de un rendimiento no deseado, hasta inclusive pérdidas, y es ahí donde la capacidad de inmunización es un tema importante para el inversionista.

El objetivo principal del presente trabajo será el de abordar conceptos y métodos que permitan valuar e inmunizar un portafolio de bonos con certidumbre de pago; estos se desarrollan en tres capítulos bajo dos perspectivas diferentes.

En el primer capítulo se introducen los conceptos de bono y de tasa de interés, mismos que serán fundamentales en el presente trabajo debido a la relación existente entre éstos. Se desarrollarán algunos conceptos que permitan medir de manera aproximada el cambio proporcional en el precio del bono cuando existen variaciones en la tasa de interés. Posteriormente, se presentan un par de métodos para aproximar la "curva de tasa de interés", cuya aplicación final será la de crear un portafolio de bonos que sea inmune por un tiempo determinado ante algún cambio en la tasa de interés.

En el segundo capítulo se expone a la tasa de interés como un ente aleatorio, para lo cual, se desarrolla una breve introducción al cálculo estocástico necesario para definir la integral estocástica. Este concepto es la base bajo la cual se basará el modelo de mercado continuo que le dará sustento a los modelos de tasas de interés estocásticas más comunes.

En el tercer capítulo se presenta de manera intuitiva el comportamiento de modelos de tasas estocásticas y se hace una ligera revisión a los modelos Vasicek, Ho-Lee y CIR, concluyendo el capítulo con una aproximación vía Hull-White a modelos discretos, a fin de crear una estrategia de inversión que inmunice a un portafolio de bonos de posibles cambios en la tasa de interés.

Capítulo 1

Bonos e inmunización no aleatoria

El material del presente capítulo puede ser consultado principalmente en de La Grandville [3], Brigo-Mercurio [2], Luenberger [8], Nelson-Siegel [10], Márquez et al. [9].
En este capítulo se definirán los conceptos básicos necesarios para los fines del presente trabajo. Se definirán conceptos como: bono, duración, convexidad, estructura de tasas. Posteriormente se presentará una forma de inmunizar un portafolio de bonosstо haciendo uso de algunos de estos conceptos.

1.1. Preliminares

De entre los grandes problemas e intereses que existen en finanzas, posiblemente uno de los más importantes sea el de asignar precios razonables y consistentes a instrumentos con características de pago definidas, ya que la existencia de incon sistencias en los precios podría conducir a comportamientos de mercado indeseables. La principal quizá sea la existencia de alguna estrategia de inversión para la cual, con una inversión inicial de cero unidades monetarias, se puede obtener una posible ganancia sin posibilidad de tener pérdidas, lo que comúnmente recibe el nombre de *arbitraje*.
Una manera de lograr esta asignación razonable, es hacer uso de la información disponible para crear algún modelo del activo subyacente y así crear una estimación en el precio del instrumento en cuestión.

Otro aspecto de gran interés es, sin duda, la creación de estrategias que sean capaces de reducir riesgos financieros asociados directamente a los procesos normales del negocio o de inversiones realizadas; conocidas comúnmente bajo el nombre de *cobertura*. La única manera posible de lograrlo, es analizando el comportamiento de los factores de riesgo y la relación que éstos guardan con la inversión hecha.

Sin embargo, para cualquiera de los objetivos mencionados, es necesario analizar y fijar conceptos que sean de utilidad. Uno de ellos (y quizá el más importante por establecer equivalencias de dinero a través del tiempo), es el concepto de tasa de interés. La importancia de este concepto se ve reflejada al crear instrumentos donde juega un rol protagónico y donde incluso puede ser el único factor de riesgo. De entre estos instrumentos son los bonos los instrumentos con los que principalmente guarda una estrecha relación, ya que el comportamiento del precio de los bonos es, sin lugar a dudas, reflejo del comportamiento de la tasa de interés.

1.2. Tasa de interés y otros conceptos

Dentro de las finanzas, el concepto más básico y primordial es el de *interés*, para el cual existen diversas definiciones que por lo general remiten a la misma idea de “el valor del dinero en el tiempo”. Esta perspectiva sugiere que la tasa de interés es una especie de “recompensa”.
Cuando esta recompensa es conocida se habla de una *tasa de interés fija.* Este tipo de tasas es muy común. Si bien no es la más utilizada, mas bien es la más conocida, pues de hecho es la empleada por los bancos.

En términos generales, cuando se conoce la tasa de interés de alguna inversión, es decir, cuando se trabaja con una tasa de interés fija, es posible conocer el valor que tendrá esa inversión en el futuro. Este concepto es comúnmente llamado *valor futuro* y se calcula utilizando un *factor de acumulación.*
La forma que toma el factor de acumulación puede ser variada y depende principalmente de la manera en que se “recapitalice” o “reinvierta” una unidad monetaria y que, por lo mismo, tiene por objetivo el representar la manera en que dichos “intereses” son acumulados.
Cuando el interés que se genera es proporcional al tiempo y se calcula sólo sobre el capital inicial, recibe el nombre de *interés simple.* Si la tasa empleada para el cálculo de intereses generados se denota como i por periodo y se invierte una unidad monetaria, entonces el capital total al final del n-ésimo periodo es de

$$a_n^s = 1 + ni.$$

El que exista algún periodo de “recapitalización” significa que el interés generado por la deuda hasta el momento se tomará como parte del capital principal para el cálculo del interés generado subsecuentemente. De esta idea surge el concepto de *interés compuesto.* Si la recapitalización se lleva a cabo al final del periodo y la tasa de interés en el periodo k es i_k, al final del primer periodo se tendrán $1 + i_1$ unidades monetarias, mismas que se usan como capital principal para la generación de intereses del siguiente periodo. Al final del segundo periodo se tendrán $(1 + i_1)(1 + i_2)$ unidades monetarias correspondientes de invertir $1 + i_1$ unidades monetarias, obtenidas al final del primer periodo, a una tasa i_2 y así en adelante. En general, si la tasa de interés en el periodo k es i_k y se invierte una unidad monetaria al momento 0 que se recapitaliza al final de cada periodo k, entonces el valor de la inversión al final del periodo n será:

$$a_n^c = \prod_{k=1}^{n}(1+i_k).$$

Además, si se trata de una tasa fija e igual para todos los periodos, el término anterior se reduce a $(1+i)^n$.
En ambos casos (interés simple y compuesto), se ha considerado el supuesto de que la inversión inicial es de una unidad monetaria, por lo que ambos denotan un factor de acumulación. Para obtener el capital acumulado de cualquier otra cantidad, sólo es necesario multiplicar dicho monto por ese factor.

Por otra parte, el concepto de *valor presente* hace referencia al valor actual que tendría cierta cantidad de dinero que se obtendrá en un tiempo futuro. Se calcula utilizando un *factor de descuento* que por lo general toma la forma del inverso del factor de acumulación. Cuando se toma como referencia la tasa simple i, su tasa de descuento asociada recibe comúnmente el nombre de *tasa de descuento simple* y está descrita por la expresión

$$d_n^s = 1 - in.$$

En caso de que se trate de interés compuesto y la tasa por periodo sea de i_k, el factor de descuento es

$$d_n^c = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1+i_k)} = \prod_{k=1}^{n} V_k \quad , \quad V_k := \frac{1}{1+i_k}.$$

Si la tasa de interés es la misma para todos los periodos, entonces el término anterior se reduce a V^n.

Sin embargo, aunque se conozcan *el valor presente* y *el valor futuro* de una inversión, no es posible conocer la tasa de interés de cada periodo k, pues se trataría entonces con una ecuación de n variables o incógnitas para la cual existiría más de una única solución. Pero si se toma el supuesto de que la tasa de interés implicada es igual para todos los periodos, es posible conocerla explícitamente, y recibe el nombre de *tasa interna de retorno*. Por lo general, ésta es utilizada como un índice comparativo de inversiones donde existen flujos de dinero, es decir, donde existen ingresos y egresos. Como es posible observar, este tipo de conceptos hacen referencia a una equivalencia del dinero entre el presente y el futuro, donde el concepto unificador es la tasa de interés.

La tasa de interés juega entonces un papel fundamental en el mercado, pues sirve como punto de comparación al evaluar diferentes inversiones o flujos de dinero. Además, el mercado asociado a ésta es muy vasto dando paso a la creación de algunos *instrumentos financieros*, que son registros que representan una promesa de pago. Estas promesas de pago tienen un mercado definido y bien regulado por lo que se negocian amplia y libremente, y en general cuando esto ocurre, se les da el calificativo de *títulos*.

Existen muchos instrumentos y títulos que están relacionados directamente con la tasa de interés; de entre todos aquellos, son los *títulos de renta fija* los que definen el mercado de dinero, llamado comúnmente así al mercado de deudas de corto plazo. Estos títulos proveen al propietario una renta definida (fija) durante un lapso de tiempo, misma que contiene como única fuente de incertidumbre la posible omisión o aplazamiento de pago cuando son llevadas a cabo hasta el final del plazo.
Quizá el instrumento más común de entre los instrumentos de renta fija sean los *depósitos de ahorro*, donde el banco paga una tasa de interés fija bajo la condición que dicha cuenta se mantenga durante cierto lapso de tiempo.

Por otra parte, existen títulos de renta fija entre cuyos de sus emisores puede encontrarse el gobierno federal y que sus pagos están avalados por el mismo, y por tanto son considerados libre de riesgo por omisión en el pago; entre estos se encuentran distintos tipos de *bonos*.

1.3. Bonos

En general, un bono es un contrato que representa una obligación de pago contraída por el emisor con condiciones acordadas y especificadas en el mismo. Usualmente, el valor de la obligación que ha de enfrentar el emisor del bono es denominado *valor nominal*, y representa la cantidad que el emisor está dispuesto a pagar al término del contrato, que se conoce como *fecha de madurez* o *plazo*. Sin embargo, en algunas ocasiones los bonos hacen pagos periódicos denominados *cupones*, cuyo pago es descrito en términos de cierto porcentaje del valor nominal del bono, llamado *tasa cupón*. La periodicidad de pago de estos puede estar establecida en fracciones de año; es decir, puede ser trimestral, cuatrimestral, semestral, etc. Cuando los bonos carecen de cupones, son comúnmente llamados *bonos cupón cero*.

Definición 1.3.1. Un *bono cupón cero* de plazo T es un contrato que le garantiza a su propietario el pago de una unidad monetaria en el tiempo T, sin pagos intermedios. El precio de este bono al tiempo $t < T$ se denotará como $B(t, T)$.

Los bonos cupón cero serán de gran interés en el presente trabajo pues, como se muestra a continuación, los bonos cuponados pueden ser expresados en términos de éstos.

Definición 1.3.2. Un bono cuponado de plazo T es un contrato que garantiza al tenedor el pago a tiempos futuros $\mathcal{T}_n = \{t_1, t_2, \ldots, t_n = T\}$ de montos monetarios determinísticos $C := \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, donde usualmente $c_t = Nc$ para $i < n$ y $c_n = N + Nc$, donde c es una tasa de interés (tasa cupón) fija y N denota el valor nominal del bono.
El precio de este bono al tiempo $t < T$ se denotará como $B(t, \mathcal{T}_n, C)$ y claramente es:

$$B(t; \mathcal{T}_n; C) = \sum_{k=1}^{n} c_i B(t, t_k) \tag{1.1}$$

En adelante se hará el supuesto que el valor nominal es de una unidad monetaria, lo cual no altera en nada los cálculos realizados en el presente trabajo, pues el precio de cualquier bono con otro valor nominal puede ser calculado fácilmente al multiplicar ese valor nominal por el precio del bono que tiene como valor nominal una unidad monetaria.

Cuando se retiene un bono hasta el final del plazo es posible considerarlo como una inversión y calcular su tasa interna de retorno, misma que recibe el nombre de *rendimiento al vencimiento* cuando se trata específicamente de bonos, por lo que en el presente trabajo se hará referencia al rendimiento y no a la tasa interna de retorno.

Definición 1.3.3. Se define como *rendimiento al vencimiento* a aquella tasa de interés compuesto que hace equivalentes el precio del bono y el valor presente de los pagos que se obtendrá de este. Es decir, es la tasa i tal que

$$B(0; \mathcal{T}_n; C) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(1+i)^{t_k}} \tag{1.2}$$

Sin embargo, como es posible observar en la definición de bono, no se ha mencionado que el dueño de éste tenga que retenerlo hasta el final del plazo, así que el propietario puede venderlo cuando le resulte conveniente o necesario. Es por esta razón que los bonos tienen otro factor de riesgo además de la posible omisión de pago: *la tasa de interés.*

Los bonos se comercializan comúnmente en nuestro país bajo diferentes nombres: *BREM, BONDES D, CETES, BONDES 182, UDIBONOS, BPA, BPAT, BPA182.* Estos son utilizados para diferentes propósitos, como financiar o refinanciar deuda, aumentar y regular la liquidez del mercado nacional de dinero. Sin embargo, la regulación de los mismos escapa de los objetivos del presente trabajo, aunque es digno mencionar que el emisor de los bonos antes mencionados es el gobierno federal y que en su mercado primario, llamado así al mercado en el cual se comercializan recién emitidos, son vendidos a través de subastas a organizaciones especialmente seleccionadas.

1.3.1. Propiedades de los bonos

Antes de proponer formas de comparar la eficacia de los bonos para diferentes propósitos, es conveniente analizar sus propiedades internas. Recuérdese que los bonos se caracterizan principalmente por la tasa de interés, los cupones, y el plazo; la intención es tener un panorama claro de lo que le ocurre al precio del bono al variar estos parámetros.
Para fijar la idea anterior, denótese por i el rendimiento actual, sea B_0 el precio del bono actualmente, por c se denotará la tasa cupón, además se supondrá que faltan n periodos por transcurrir y cupones por pagar.

Ahora bien, con estas características, según (1.2) el valor del bono estará dado por:

$$B_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{c}{(1+i)^t} + \frac{1}{(1+i)^n}$$

¿Qué le ocurre al precio del bono al variar el rendimiento?. Se pueden observar dos consecuencias dependiendo si aumenta o disminuye: si aumenta el rendimiento, cada denominador crecerá tras lo cual el precio del bono disminuirá, y sucederá de manera contraria si el rendimiento disminuye. Pero aún más importante, es posible observar de la relación (1.2) que el precio del bono no comparte una relación lineal con el rendimiento, es decir, si cambia el rendimiento, el precio del bono no cambiará de manera proporcional.

De la misma fórmula se puede deducir el comportamiento del precio del bono con respecto al valor de los cupones pues se puede observar que si el bono carece de ellos, el valor del bono es menor a su valor nominal. En cambio, si existen cupones el precio del bono irá aumentando conforme el valor de los cupones sea mayor, por lo que es lógico pensar que existe un valor para el cual el precio del bono será equivalente a su valor nominal.
Si el valor nominal del bono y su precio son idénticos, se puede pensar al bono como una deuda en la cual los intereses generados por dicho préstamo se pagan precisamente en la fecha de pago de los cupones, y que cada cupón representa en realidad el pago de dichos intereses. Es decir, el valor nominal del bono será idéntico al precio de éste si la tasa cupón es igual al rendimiento.

Por último, ¿de qué manera afecta el incremento o decremento en el plazo del bono?. Si el bono es cupón cero, es inmediato observar que mientras más tiempo falte para que expire el contrato, menor será el precio del bono y viceversa. También es claro que si el pago de cupones es equivalente al pago de intereses, entonces no importará qué tanto aumente o disminuya el plazo, el precio del bono seguirá igual. Sin embargo, en general no se puede concluir algún resultado, pues en caso en que aumente el plazo un periodo, se postergaría el pago del valor nominal y como consecuencia se disminuiría su valor presente, aunque por otro lado se tendría el pago de un cupón extra. Si se disminuye el plazo se tendría la misma situación aunque a la inversa. De esto se puede deducir que el comportamiento entonces dependería del valor del cupón y de la tasa de interés. Siguiendo la idea del pago de cupones como el pago de alguna proporción de intereses generados, se puede decir en general que, si la tasa cupón es mayor que la tasa de interés y aumenta el plazo significaría que la deuda contraída por el emisor se incrementaría y, por lo tanto, el precio del bono aumentará si aumenta su plazo.

Es justo y congruente pensar que si ha transcurrido tiempo desde la última fecha de pago de cupón, el propietario del bono tenga derecho a recibir los intereses devengados del siguiente si quiere vender el bono. Por tratarse de un momento intermedio entre las fechas de capitalización, dichos intereses son calculados generalmente con una tasa de interés simple. Es decir, que la cantidad percibida de interés es proporcional al tiempo que ha transcurrido desde el último tiempo de pago de cupón a la fecha. Es precisamente por esta razón que todo el ejercicio anterior se ha realizado de una manera imprecisa, pues no se han considerado los intereses devengados, aunque esto no afecte en lo mínimo los resultados obtenidos.

Un beneficio adicional del ejercicio anterior, es que permite detectar el único posible factor de riesgo existente en los bonos cuando se tratan de bonos protegidos por el gobierno federal, el cual se trata precisamente de la tasa de interés. Además, esta se torna mucho más importante a medida que el plazo del bono sea más largo precisamente por su relación no lineal con el precio del bono.
Si no existe la posibilidad de incumplimiento de contrato en el bono, la tasa de interés es el único factor de riesgo debido a que, al ser el bono un instrumento de renta fija, se ha especificado la duración del contrato y el esquema de pagos que ha de recibir el propietario del bono. Pero ¿qué hay de la tasa de interés?; La respuesta es sencilla: en este caso, la tasa de interés actúa como un puente que hace equivalente el precio del bono con el esquema de pagos que recibirá el propietario del mismo. Esto significa que si cambia la tasa de interés en el mercado el precio del bono cambiará, reflejando así el hecho de que el bono sólo tiene como fuente de incertidumbre a la tasa de interés.

Una manera muy tentadora para llevar a cabo una comparación de rendimiento entre bonos es a través del rendimiento. Recuérdese que el concepto de rendimiento es la tasa de interés que hace equivalentes el valor presente del flujo de dinero del bono al precio del bono. Este concepto se puede interpretar como la tasa de interés en una inversión llevada a cabo hasta el final del plazo, lo que sugiere que al propietario del bono le interesa retener a este hasta su vencimiento. Es precisamente esta la desventaja, pues no necesariamente debe ocurrir esto y la tasa de interés puede cambiar en el tiempo, es por ello que es necesario contar con otro tipo de conceptos que tomen en cuenta este aspecto.

1.3.2. Tasa horizonte

Supóngase que al propietario del bono le interesa retener el mismo por un lapso de tiempo H, al cual se le nombrará *horizonte*. Además supóngase que todo lo que obtenga de rendimientos por concepto de cupones del bono es reinvertido a la tasa de interés vigente en el mercado de dinero. Esto es equivalente a pensar que el valor total del bono (B_0) es reinvertido durante un plazo H a una tasa de retorno r_H y cuyo valor futuro será de F_H.
De lo anterior se obtiene que el valor futuro de la inversión al tiempo H será

$$B_0(1 + r_H)^H = F_H. \tag{1.3}$$

La tasa de interés r_H, recibe el nombre de *tasa horizonte*. Por tratarse de una tasa de retorno, no necesariamente es la tasa de interés del momento, pues puede haber variaciones en la tasa debidas a movimientos internos del mercado.
A esta tasa se le debe pensar como una especie de "tasa promedio" durante el tiempo H bajo el cual es invertido, por lo que, al desconocer los cambios en la tasa de interés, tanto r_H como F_H son desconocidos. Esto deja cabida a un sin fin de posibilidades, pues puede ocurrir que la tasa de interés no cambie una, sino varias veces durante el horizonte. Pero considérese el caso más simple, ¿qué sucedería si al comprar un bono, la tasa de interés cambia inmediatamente después y ésta se mantiene durante el horizonte H? Esto es de importancia para el inversionista, pues se ha hecho anteriormente el supuesto que a él no le interesa retener su inversión por más tiempo que el horizonte, y movimientos muy bruscos en la tasa de interés podrían conllevar inclusive a pérdidas. Pues bien, si cambia la tasa de interés al siguiente día a i^*, el precio del bono cambiará de B_0 a B_{i^*}, y si la nueva tasa se mantiene durante todo el horizonte, entonces se obtiene que el valor de F_H será:

$$F_H = B_{i^*}(1 + i^*)^H$$

Nótese que esto no significa que r_H sea igual a i^*, pues al ser r_H una tasa promedio debe de considerar el incremento o decremento del precio del bono. Pero igualando ambas fórmulas se obtiene que

$$B_0(1 + r_H)^H = B_{i^*}(1 + i^*)^H$$

de donde resulta que

$$r_H = \left(\frac{B_{i^*}}{B_0}\right)^{\frac{1}{H}}(1 + i^*) - 1$$

Como se mencionó anteriormente, se puede apreciar claramente que la tasa r_H toma en cuenta el cambio en el precio del bono como la proporción existente entre ambos. El exponente surge del hecho de que la pérdida o ganancia en el cambio del precio del bono es "distribuida" durante todo el horizonte. Esto se ve multiplicado por el nuevo factor de acumulación y se le resta una unidad para obtener sólo la tasa, pues de otra forma se obtendría una función de acumulación.
Nótese que al conocer el precio inicial del bono y la tasa de interés i^*, r_H es

una función que tiene como única variable el horizonte. De hecho, es claramente visible que si la tasa de interés original i_0 baja, entonces aumenta el precio del bono, con lo que la proporción existente entre el nuevo precio del bono y el precio anterior del mismo es mayor a uno. Esto significa que la tasa de interés r_H decrece cuando el horizonte crece y viceversa.
La importancia de este hecho radica en que existe un horizonte en específico para el cual, no importando si la tasa de interés incrementa o disminuye, la tasa de interés r_H será muy aproximada a la tasa de interés original i_0. Más aún, el horizonte en ambos casos es el mismo y recibe el nombre de *duración*.

La existencia de la duración no es sólo sorprendente, sino también muy importante, pues intuitivamente resulta una herramienta muy útil para buscar formas de proteger un portafolio de bonos de movimientos inesperados en la tasa de interés. Es decir, de *inmunizar* un portafolio de bonos.

1.3.3. Duración

La definición propia de duración es simple: es el promedio ponderado de los tiempos de pago del bono. Los ponderadores utilizados para su cálculo están constituidos por la proporción existente entre el valor presente de los flujos de pago del bono y su precio. Es decir, es una especie de tiempo esperado de pago una vez dada la tasa de interés que se utilizará para su cálculo. Pero, ¿qué tasa se debe utilizar para calcular la duración?, Esta es una pregunta obligada, pues indudablemente el valor que tome la duración depende explícitamente de la tasa de interés utilizada en el cálculo de los valores presentes. La tasa utilizada comúnmente es la tasa interna de retorno y, cuando esto sucede, a la duración se le conoce como *Duración de Maculay.* En adelante, se utilizará el término "duración" para referirse a la Duración de Maculay.

El cálculo explícito de la duración es:

$$D = 1 \cdot \frac{\frac{cN}{B}}{(1+i)} + 2 \cdot \frac{\frac{cN}{B}}{(1+i)^2} + \cdots + T \cdot \frac{\frac{N(c+1)}{B}}{(1+i)^T} = \sum_{t=1}^{T} \frac{tc_t V^t}{B}, \tag{1.4}$$

donde se ha denotado por c_t el valor del pago recibido al tiempo t y por V^t la función de descuento del periodo t, es decir, $V^t = \frac{1}{(1+i)^t}$, donde i es el rendimiento del bono.

Cuando se utiliza el rendimiento para calcularla, la duración se interpreta intuitivamente como el tiempo esperado en el que el rendimiento del bono se aproxima al rendimiento original. Esta interpretación y la relación directa que la duración guarda con el precio del bono y con el rendimiento, sugieren que se puede utilizar para medir, aunque de forma no muy precisa, el riesgo del bono con respecto a los cambios en el rendimiento. Para ello, resulta conveniente reescribir la ecuación (1.4) en términos del incremento del bono debido a incrementos en el rendimiento de la siguiente forma:

$$D = \sum_{t=1}^{T} \frac{tc_t V^t}{B} = -(1+i)\sum_{t=1}^{T} \frac{-tc_t V^{t+1}}{B} = -\frac{1+i}{B}\frac{dB}{di}.$$

Esta última expresión es muy importante, pues permite observar que la duración depende directamente del cambio en el precio del bono con respecto al rendimiento, del mismo rendimiento y del precio mismo del bono. Al reescribir esta expresión, se obtiene la relación

$$\frac{dB}{B} = -\frac{D}{1+i}di, \tag{1.5}$$

es decir, el incremento en el precio del bono se reexpresa ahora en términos de la duración y el incremento del rendimiento. Además, usando el hecho de que $\frac{dB}{B} \approx \frac{\Delta B}{B}$ en la relación anterior, a saber

$$\frac{\Delta B}{B} \approx \frac{dB}{B} = -\frac{D}{1+i}di,$$

se tiene una aproximación porcentual del cambio del precio del bono con respecto al cambio en el rendimiento y la duración. Sin embargo, ésta aproximación no es del todo precisa como se mostrará posteriormente, pues se trata de una aproximación lineal con respecto al incremento en el rendimiento.

A manera de ejemplo, considérese un bono con las siguientes características: tasa cupón del 3 %, rendimiento del 3 % ($i_0 = 3\,\%$) y un plazo de 6 periodos (años). Con estos datos, el bono tiene una duración de 5.5797 años. El cálculo de la duración de forma detallada se encuentra en la tabla 1.1 .

Periodo	c_t	V^t (i=3 %)	$c_t V^t$	$tc_t V^t$	$\frac{tc_t V^t}{B}$
1	3	0.9709	2.9126	2.9126	0.029126
2	3	0.9426	2.8278	5.6556	0.0565556
3	3	0.9151	2.7454	8.2363	0.082363
4	3	0.8885	2.6655	10.6618	0.106618
5	3	0.8626	2.5878	12.9391	0.129391
6	103	0.8375	86.2609	517.5653	5.175653
Total	118		100 = Bono		5.5797 = duración

Cuadro 1.1: Ejemplo de cálculo de duración.

Supóngase que el rendimiento se incrementa en 1 % ($i_1 = 4\,\%$) al día siguiente de la compra; entonces, se tiene que una aproximación lineal es

$$\frac{\Delta B}{B} \approx \frac{dB}{B} = -\frac{D}{1+i}di = -\frac{5.5797}{1.03}\cdot 1\,\% = -5.4172\,\%.$$

Es decir, el valor del bono disminuiría aproximadamente un 5.4172 % con respecto a su valor original, y en en caso de que el rendimiento bajara a 2 % aumentaría aproximadamente este mismo porcentaje según esta aproximación.
Esto ofrece una forma rápida de obtener una aproximación del cambio instantáneo en el precio del bono, aunque, ¿qué tan buena es esta aproximación?. Para responder esta pregunta, a continuación se muestra el cálculo de la proporción del cambio real:

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{B(i_1) - B(i_0)}{B(i_0)} = \frac{B(4\,\%) - B(3\,\%)}{B(3\,\%)} = \frac{94.7579 - 100}{100} = -5.2421\,\%.$$

Como puede observarse, la aproximación lineal no es tan mala. Sin embargo, debe considerarse que, al ser una aproximación lineal, ésta empeora conforme el cambio en el rendimiento i_1 se aleja del rendimiento original i_0 debido a la relación no lineal entre este y el precio del bono. Además, la proporción de cambio no es la misma si el rendimiento disminuye en vez de aumentar. Si aumenta, la proporción de cambio en el precio sería de $\frac{B(2\,\%)-B(3\,\%)}{B(3\,\%)}$=5.6 %. Esto se debe a otra propiedad del bono que se analizará posteriormente en la siguiente subsección.

Por un lado, se ha hecho una breve análisis sobre el cambio del precio del bono haciendo uso de la duración. Por otro lado, también es importante analizar el comportamiento de la duración según se producen variaciones en las características del bono.
De la definición de duración y su intrínseca relación con el precio del bono, se puede deducir de inmediato que la duración depende del rendimiento, cupones y plazo. Sin embargo, para conocer su comportamiento a partir de la variación de estos parámetros, se debe tomar en cuenta que -en principio- la duración siempre es una función cuya cota inferior es cero y con una cota superior igual al plazo, es decir $0 \leq D \leq T$. Esto no es sorprendente pues cada término $\frac{c_tV^t}{B}$ es menor o igual a uno y la suma de todos estos términos es uno, debido a que la suma de c_tV^t es el precio del bono. Por lo que, el caso extremo se presenta cuando existe un único pago, es decir, cuando se trata de un bono cupón cero. Además, puesto que el factor de descuento es decreciente con respecto al tiempo, la función $\frac{c_tV^t}{B}$ lo será también, excepto quizá para el último término, debido a que c_T contiene el pago del cupón y el valor nominal del bono. Así que es de suponer que ciertos pagos recibidos serán más tomados en cuenta que otros por la duración. Esta es precisamente la razón de que en algunas ocasiones se haga referencia a la analogía de la duración como centro de equilibrio de una balanza, pues proporciona una buena explicación intuitiva del comportamiento de la duración cuando varía alguno de sus componentes.

Más concretamente, supóngase que la tasa cupón varía mientras que la tasa de interés y el plazo quedan fijos. Si el pago por cupones aumenta, se intuye que, al tener más peso los primeros pagos, la balanza se movería hacia la izquierda, teniendo como consecuencia que para mantener el equilibrio, el centro

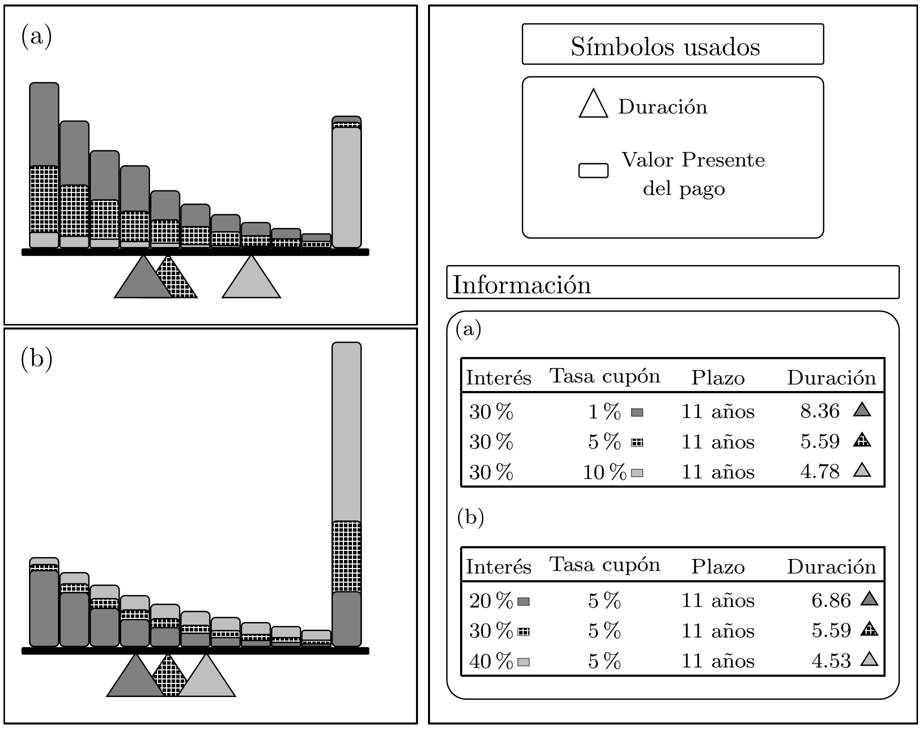


Figura 1.1: (a) Duración frente a cambios en la tasa cupón (b) Duración frente a cambios en el rendimiento.

de equilibrio debería moverse a la izquierda (es decir, la duración disminuiría); de forma contraria, si el pago de cupones disminuyera, entonces la balanza se inclinaría a la derecha, por lo que la duración incrementaría.
Ahora bien, si la tasa de interés es la que varía mientras que las otras dos variables se mantienen fijas sucede que, si la tasa de interés aumenta, propiciaría que los pesos de la balanza disminuyeran progresivamente. Es decir, los primeros términos no se verían tan afectados, provocando de esta manera que la balanza una vez más se incline hacia la izquierda. En caso contrario, si la tasa de interés disminuye, la balanza se inclinará hacia la derecha. Un ejemplo de esto se encuentra en la Figura 1.1.

Por último, ¿qué sucede si varía el plazo?, En el caso de los bonos cupón cero que están constituidos por un único pago, su duración es igual a su plazo, por lo que si aumenta el plazo lo hará la duración. Pero, ¿en general sucede que la duración aumenta conforme aumenta el plazo?, Para dar respuesta a esa pregunta retomando la analogía con una balanza, se puede decir que la duración aumentará siempre y cuando se le agregue peso al lado derecho de la balanza. En este sentido, al aumentar el plazo del bono se aumenta el número de cupones, pero al mismo tiempo disminuye el peso de la balanza en esos pagos y -sobre todo-

de su valor nominal. Por ello, no es posible emitir un juicio *a priori*, y como es de esperarse, el comportamiento de la duración con respecto al incremento de la madurez depende en realidad del rendimiento y de la tasa cupón.
Considerando nuevamente la idea de la duración como una balanza, en el caso en que la tasa de interés es menor que la tasa cupón (es decir $i \leq c$), se puede pensar que el pago de los cupones sobrepasa al pago periódico de los intereses generados por la deuda. De esta manera, no importa que el valor presente del valor nominal se vea mermado por la tasa de interés, pues el aumento de un cupón resanará dicho peso y con creces. Ello conduce intuitivamente a que se incrementa el peso del lado derecho de la balanza, implicando un incremento en la duración.
En el caso en que la tasa de interés sobrepasa a la tasa cupón, es decir $i > c$, se puede pensar que hasta cierta madurez la tasa de interés no es capaz de reducir suficientemente el peso del valor nominal y los pagos de cupones extra, por lo que al principio la balanza tiende a inclinarse a la derecha. Sin embargo, existe un punto en el que la balanza se inclinará hacia la izquierda debido a que el pago que se recibe de cupones no es suficiente para compensar lo que debería obtenerse como interés periódico de la deuda, además de que el valor nominal se reduce en valor presente. Hay que destacar que, sin importar el caso que se presente, según de La Grandville [3], cuando el plazo tiende a infinito la duración siempre tenderá hacia un mismo límite, el cual es:

$$D = 1 + \frac{1}{i} + \frac{T(i-c) - (1+i)}{[(1+i)^T - 1]c + i}.$$

Un ejemplo del comportamiento de la duración se encuentra en la Figura 1.2.

Duración de un portafolio

Para extender el concepto de duración a un portafolio supóngase que se tienen N tipos de bonos, además de que D_k y n_k representaran respectivamente la duración y el número de bonos que se tienen del tipo k; estos bonos no tienen porqué tener el mismo rendimiento, por lo que además se representará como $i^{(k)}$ el rendimiento del bono de tipo k. Con estas características, el valor del portafolio (que se denotará como P) visto como función de los rendimientos será:

$$P(i^{(1)}, \cdots, i^{(N)}) = \sum_{k=1}^{N} n_k B_k(i^{(k)}).$$

Para simplificar el problema, considérese el caso en que todos los bonos del portafolio tienen el mismo rendimiento, en cuyo caso el incremento en el valor del portafolio por incrementos muy pequeños en este será

$$\frac{dP}{di} = \sum_{k=1}^{N} n_k \frac{dB_k}{di}.$$

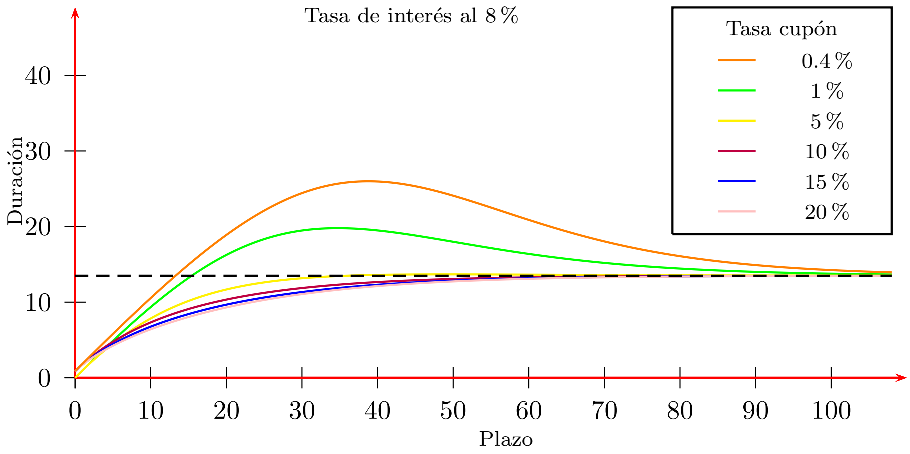


Figura 1.2: Ejemplo del comportamiento de la duración. En la gráfica se muestra la relación de la duración con respecto al plazo para bonos con un rendimiento común del 8 % y con diferente tasa cupón.

Es decir, que el incremento en el valor del portafolio estará dado por los respectivos incrementos en los valores de los bonos. Considerando este hecho, la extensión del concepto de duración a un portafolio compuesto por bonos que tienen el mismo rendimiento es inmediata al utilizar la relación (1.5). Denotando como D_P la duración del portafolio se concluye que es:

$$D_P = -\frac{1+i}{P}\frac{dP}{di} = \sum_{k=1}^{N} \frac{n_k B_k}{P}\left(-\frac{1+i}{B_k}\frac{dB_k}{di}\right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{n_k B_k}{P} D_k. \tag{1.6}$$

Es decir, la duración de un portafolio de bonos es una combinación lineal de la duración de los mismos. La aportación del bono de tipo k a la duración del portafolio está dado por la proporción existente entre su valor total y el valor total del portafolio, es decir, por el peso relativo que tiene en el portafolio. Sin embargo, se ha hecho el supuesto que todos los bonos tienen el mismo rendimiento, lo que no sucede comúnmente.

Con un sencillo ejemplo puede verificarse que aplicar (1.6) a un portafolio de bonos con diferente rendimiento es incorrecto; para ello, considérense dos bonos cupón cero con las características descritas en la tabla 1.2.
Según (1.6), la duración de un portafolio que contiene un bono de cada tipo debería ser

$$\frac{9.611}{14.42185879}(2) + \frac{4.81}{14.42185879}(15) = 6.335.$$

	Rendimiento	Plazo	Tasa cupón	Valor nominal	Precio	Duración
Bono 1	2 %	2 años	0 %	\$10	\$9.611	2 años
Bono 2	5 %	15 años	0 %	\$10	\$4.81	5 años

Cuadro 1.2: Características.

Sin embargo, el cálculo por medio de (1.4) requiere que primero se calcule el rendimiento del portafolio, el cual debe cumplir la relación:

$$\frac{10}{(1+i)^2} + \frac{10}{(1+i)^{15}} = 14.42185879.$$

Esto da como resultado una tasa aproximada de 4.01995 %, con la cual la duración es

$$D_P = 2 \cdot \frac{10\frac{1}{(1.0401995)^2}}{14.42185879} + 15 \cdot \frac{10\frac{1}{(1.0401995)^{15}}}{14.42185879} = 7.040314173.$$

Se observa que se obtienen resultados diferentes, puesto que utilizar (1.6) es incorrecto cuando se trata de un portafolio con bonos de diferente rendimiento. El punto clave de este error radica en que (1.6) fue encontrado a partir de considerar el incremenento infinitesimal en el valor del portafolio debido al incremento en su (único) rendimiento. En el caso en que el portafolio se compone de bonos con diferente rendimiento, esto carece de sentido pues primero debe definirse qué rendimientos tienen un cambio, lo que indudablemente implica más de una posibilidad. Este problema será abordado posteriormente en otra sección.

Como se ha visto anteriormente, la duración puede ser utilizada para obtener una estimación no muy precisa de la proporción de cambio en el precio del bono. Además, se ha mostrado con un ejemplo que la proporción de cambio real es diferente cuando aumenta el rendimiento que cuando disminuye. A continuación se mostrará una forma de mejorar la estimación y se explicará en forma breve la razón por la cual la proporción de cambio es asimétrica entre incrementos y decrementos.

1.3.4. Convexidad

Supóngase que en el mercado existen dos bonos cuponados con valor nominal de \$10, uno con un rendimiento del 7.5 %, plazo de 10 años y cupones anuales con una tasa de 7.5 %, por lo que tendrá una duración de 7.378 años. El otro, con un rendimiento también del 7.5 %, plazo de 8 años y cupones anuales con una tasa de 1.826 %, por lo que tendrá una duracion también de 7.378 años. Estas características han sido capturadas en el Cuadro (1.3).

Un inversionista podría pensar que es lo mismo comprar 668 bonos del tipo 1

	Rendimiento	Plazo	Tasa cupón	Valor nominal	Precio	Duración
Bono 1	7.5 %	10 años	7.5 %	$10	$10	7.378 años
Bono 2		8 años	1.826 %		$6.68	

Cuadro 1.3: Características.

que comprar 1000 bonos del tipo 2, puesto que ambos portafolios tendrían el mismo costo de 6680, el mismo rendimiento y la misma duración. Sin embargo, pensar eso es completamente incorrecto. Una muestra de ello es que si el rendimiento sube o baja, el portafolio de bonos tipo 1 siempre tendrá un valor mayor al portafolio conformado por bonos de tipo 2. En la tabla (1.4) se expone el valor de ambos portafolios para diferentes rendimientos.

Rendimiento (%)	Valor del portafolio 1	Valor del portafolio 2
5	7969.52	7948.57
6	7417.48	7408.03
7.5	6680	6680
9	6036.95	6029.32
10	5653.85	5639.23

Cuadro 1.4: Comparación de portafolios. Se muestra el valor de dos portafolios para diferente rendimiento. Para un rendimiento del 7.5 % el valor de ambos es igual, para cualquier otro, el valor del portafolio 1 supera al del portafolio 2.

De este ejercicio surgen las preguntas: ¿por qué a pesar de tener la misma duración dos portafolios no tienen un cambio idéntico en su precio ante cambios idénticos en el rendimiento? ¿Cómo saber si un bono es más inmune que otro frente a cambios en el rendimiento?

Para responder a estas preguntas, considérese a los bonos como funciones que dependen de la tasa cupón, interés y plazo. Utilizando la aproximación de Taylor para funciones, se obtiene que el incremento infinitesimal de una función es proporcional a las parciales de la misma con respecto a las variables independientes. Sin embargo, para cupones y tiempo fijos, la única variable independiente de interés es el rendimiento, por lo que la aproximación de Taylor de segundo grado de la relación (1.2) alrededor de la tasa actual i_0 es:

$$B(i) \approx B(i_0) + \frac{\delta B(i_0)}{\delta i}(i - i_0) + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 B(i_0)}{\delta i^2}(i - i_0)^2,$$

de donde se obtiene

$$B(i) - B(i_0) \approx \frac{\delta B(i_0)}{\delta i}(i - i_0) + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 B(i_0)}{\delta i^2}(i - i_0)^2. \tag{1.7}$$

Al denotar como $di = (i - i_0)$ y dividir la ecuación anterior entre el precio del bono $B(i_0)$ se obtiene una estimación de la proporción de cambio en el precio del bono, la cual es

$$\frac{\Delta B}{B(i_0)} \approx -\frac{1}{1+i}D(i_0)di + \frac{1}{2B}\frac{\delta^2 B(i_0)}{\delta i^2}(di)^2 \tag{1.8}$$

Como puede observarse de la relación anterior, en el primer término del lado derecho se encuentra la duración, por lo cual al ser parte de la aproximación y de grado uno puede interpretarse como una *aproximación lineal*. Sin embargo, dado el carácter no lineal de la relación, esta aproximación es menos exacta conforme se aleje del punto i_0, el centro de la aproximación. El segundo término captura el cambio marginal o curvatura, lo cual permite mejorar la aproximación. Este término recibe el nombre de *convexidad* y se define simplemente como el incremento infinitesimal en las pendientes; se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Convexidad &= \frac{1}{B}\frac{d}{di}\left(\frac{dB}{di}\right) \\ &= \frac{1}{B}\frac{d}{di}\left(\sum_{k=1}^{T}\frac{-tc_tV^{t+1}}{B}\right) \\ &= \frac{1}{B}\left(\sum_{k=1}^{T}\frac{t(t+1)c_tV^{t+2}}{B}\right) \\ &= \frac{1}{B(1+i)^2}\sum_{k=1}^{T}\frac{t(t+1)c_tV^t}{B}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Para fines prácticos, en futuras referencias se denotará simplemente por C. No es coincidencia que a este término se le nombre “convexidad”, pues toda función que tiene segunda derivada positiva recibe el calificativo de “convexa” con respecto al origen. Como puede notarse de la última ecuación, este término siempre es positivo en el caso de bonos, por lo que su precio es siempre convexo con respecto al rendimiento.

La convexidad es un concepto muy importante, pues no solo permite mejorar la aproximación del cambio en el precio del bono, sino que además denota la rapidez con la que la pendiente cambia de una dirección a otra. Así en el caso de bonos con igual duración, una mayor convexidad es mejor para el inversionista, pues su valor incrementará de una forma más rápida por decrementos en la tasa de interés. Además, disminuirá más lentamente debido a incrementos en la tasa de interés en comparación con bonos que tengan una convexidad menor. Esto puede apreciarse en (1.8): si dos bonos tienen la misma duración, aquel que tenga mayor convexidad tendrá un mayor incremento en proporción del precio. Es por esta razón que la convexidad debe ser contemplada también como un aspecto importante en el proceso de inmunización de portafolios.

Convexidad de un portafolio

De igual manera, el concepto y manera de calcular la convexidad puede ser extendida a la convexidad de un portafolio compuesto por bonos con idéntico rendimiento:

$$C_P = \frac{1}{P}\frac{d}{di}\left(\frac{dP}{di}\right) = \frac{1}{P}\frac{d}{di}\left(\sum_{k=1}^{n} n_k \frac{dB_k}{di}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n_k}{P}\frac{B_k}{B_k}\frac{d}{di}\left(\frac{dB_k}{di}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n_k B_k}{P} C_k.$$

Como era de esperarse, la convexidad de un portafolio es, al igual que la duración, una combinación lineal de la convexidad de los bonos que lo integran. La participación de cada integrante está dada por la proporción relativa que guardan con el portafolio.

Para ejemplificar una manera de utilizar a la duración y la convexidad para crear una estrategia de inmunización, supóngase que una empresa tiene una serie de obligaciones a cumplir en los próximos T periodos. Dichas obligaciones pueden ser pensadas como un portafolio de deuda que se denotará por O. Supóngase además que la empresa actualmente tiene los recursos para enfrentar el valor presente de sus obligaciones. Una buena idea será crear un portafolio que le retribuya una serie de ingresos durante el mismo número de periodos, de tal forma que el valor presente de los ingresos sea exactamente igual al valor presente de sus obligaciones. Notacionalmente, las ideas anteriores se expresarían como:

$$O = \sum_{k=1}^{T} O_t(1+i)^{-t} = \sum_{k=1}^{T} I_t(1+i)^{-t} = I.$$

Entonces, el problema de inmunización queda resuelto si se escoge un portafolio de ingresos I de tal manera que tenga la misma duración y convexidad que el portafolio de deuda O. Si la convexidad del portafolio de ingresos es mayor que la del portafolio de deuda, se podría entonces asegurar que, no importando lo que pase con los movimientos en el rendimiento, siempre se obtendrá cierta ventaja de éstos.

Hasta ahora se han analizado algunas propiedades de los bonos y portafolios que podrían ser útiles para reducir el riesgo producido por cambios en el rendimiento. Estas propiedades también resultan útiles para obtener una estimación del cambio en el precio del bono si existen cambios instantáneos en el rendimiento. Sin embargo, debido a que el único factor que determina el precio de los bonos es también su único factor de riesgo, analizar su comportamiento resulta también de vital importancia.

1.4. Tasa spot y forward

El rendimiento observado en los bonos contiene información sobre lo que actualmente se considera como tasa de interés aplicable en periodos posteriores, pero ¿qué sucede si dos bonos con el mismo plazo tienen rendimiento diferente? ¿Qué significa esto?

Supóngase que existen dos bonos en el mercado cuyas características se encuentran compiladas en el cuadro 1.3. ¿Por qué tienen diferente rendimiento?, Como se ha mencionado anteriormente, el rendimiento es una tasa interna de retorno y, como tal, presupone que la tasa de interés involucrada para cualquier periodo dentro del plazo es la misma, aunque esto no sea necesariamente así. El precio del bono tipo 1 al contener un pago en cada periodo, considera tanto la tasa de interés del primer periodo como del segundo, por lo que su rendimiento no refleja lo que el mercado considera que es la tasa de interés compuesta aplicable en un plazo de dos periodos. El Bono 2, al no contener pagos intermedios, es el que realmente refleja la tasa compuesta que el mercado considera que se debe aplicar en un lapso de dos periodos. De esta misma manera, el rendimiento de cualquier bono cupón cero representa la tasa que el mercado considera que es la tasa compuesta por periodo aplicable durante el plazo del bono.

	Plazo	Tasa cupón	Valor nominal	Precio	Rendimiento
Bono 1	2 años	20 %	\$1	\$1.248677249	6.3665202 %
Bono 2	2 años	0 %	\$1	\$0.85733882	8 %

Cuadro 1.5: Características.

Además, el conocer la tasa rendimiento de un bono cupón cero es equivalente a conocer el precio del mismo. Por ello, representar el rendimiento de los bonos cupón cero tiene gran utilidad a la hora de valuar bonos cuponados a través de (1.1) y cuya representación resulta ser un caso particular de *tasa spot*. Existen diferentes tipos de tasas spot, las cuales quedan definidas según su forma de capitalización; por lo general para plazos menores a un año se utiliza interés simple:

Definición 1.4.1. Se define a la *tasa de interés simple spot* al tiempo t y de plazo T, denotado como $L(t,T)$, como la tasa de interés simple constante a la cual una inversión de $B(t,T)$ al tiempo t produce una unidad monetaria al final del plazo.

$$L(t,T) := \frac{1 - B(t,T)}{(T-t)B(t,T)}. \tag{1.10}$$

Esta tasa de interés, al ser simple, refleja en su función de acumulación el concepto de acumular intereses proporcionalmente al tiempo transcurrido. Sin embargo, como toda tasa spot, esta tasa sólo es aplicable en el intervalo de tiempo $[t,T]$. Este último hecho es el que caracteriza a las tasas spot y es necesario tenerlo en mente siempre que se traten de los mismos.

Para plazos mayores a un año generalmente se utiliza interés compuesto. Si se considera un bono cupón cero de plazo t, se puede pensar en su plazo como un horizonte (ecuación 1.3) y por lo mismo se puede calcular su tasa horizonte de la siguiente forma:

$$r_t = (\frac{1}{B(0,t)})^{1/t} - 1$$

Se puede observar que esta tasa horizonte define inmediatamente su rendimiento. Esta tasa es conocida como tasa spot compuesta, y se define de la siguiente manera:

Definición 1.4.2. Se define a la *tasa de interés compuesta spot* al tiempo t y de plazo T, denotado como $Y(t,T)$, como la tasa de interés constante a la cual una inversión de $B(t,T)$ al tiempo t produce una unidad monetaria al final del plazo cuando la recapitalización se realiza una vez al año.

$$Y(t,T) := \frac{1}{B(t,T)^{\frac{1}{(T-t)}}} - 1. \tag{1.11}$$

Es importante remarcar el hecho que tanto la tasa $L(t,T)$, como $Y(t,T)$ son desconocidas para cualquier tiempo $s < t$. Esto se debe a que ambas dependen del precio al tiempo t de un bono cupón cero de plazo T, y éste es desconocido pues para $s < t$ se trata de un evento del que no se posee información. Este es otro hecho que caracteriza a toda tasa spot: si la tasa spot es aplicable en el periodo $[t,T]$ entonces para cualquier tiempo $s < t$ la tasa aplicable en $[t,T]$ es desconocida.

Considerando como 0 el tiempo actual, entonces para $t = 0$ es posible calcular las tasas spot explícitamente. Un método para calcular las tasas spot $Y(0,T)$ que considera para su cálculo bonos cuponados, es comúnmente llamado *bootstrap*.

El método bootstrap considera en primer lugar un bono con plazo de un periodo, y a partir del precio de éste se encuentra la tasa spot $Y(0,1)$ correspondiente al primer periodo. Una vez conocida la tasa spot para el primer periodo, se utiliza ésta junto con el precio de un bono cuponado con plazo de dos periodos que toma la forma

$$B(0,2,C) = \frac{c}{(1+Y(0,1))} + \frac{c+1}{(1+Y(0,2))^2}$$

para calcular la tasa spot $Y(0,2)$. Para calcular la tasa spot $Y(0,3)$, se utilizan las tasas anteriormente calculadas junto con un bono cuponado con plazo de tres periodos. Para obtener las subsecuentes tasas spot, se repite este procedimiento para cada uno de los plazos.

Este procedimiento puede llevarse a cabo de forma más sencilla al denotar este problema matricialmente. De manera general, denotando como $B^{(t)} = B(0, t, \{c_1^{(t)}, c_2^{(t)}, \cdots, c_t^{(t)}\})$, y $V_t = \frac{1}{(1+Y(0,t))^t}$ se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} B^{(1)} = c_1^{(1)}V_1 \\ B^{(2)} = c_1^{(2)}V_1 + c_2^{(2)}V_2 \\ B^{(3)} = c_1^{(3)}V_1 + c_2^{(3)}V_2 + c_3^{(3)}V_3 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ B^{(n)} = c_1^{(n)}V_1 + c_2^{(n)}V_2 + c_3^{(3)}V_3 + \cdots + c_n^{(n)}V_n. \end{array}$$

Denotando como $\mathbf{B}$ el vector de precios de bonos, $\mathbf{C}$ la matriz de pagos y $\mathbf{V}$ el vector de factores de descuento, el sistema puede expresarse en forma matricial de la forma:

$$\mathbf{B} = \mathbf{CV},$$

de donde se obtiene que la solución para $\mathbf{V}$ es de la siguiente forma:

$$\mathbf{V} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}.$$

Haciendo $Y(0, k) = (\frac{1}{V_k})^{\frac{1}{k}} - 1$ con $1 \leq k \leq n$, se obtienen las tasas spot deseadas.

	Tasa cupón (%)	Plazo (años)	Valor nominal	Precio
Bono 1	0	1	100	95.98291299
Bono 2	3	2	100	97.69461668
Bono 3	4.5	3	100	100.8117657
Bono 4	4	4	100	99.07875281
Bono 5	3	5	100	94.32157683

Cuadro 1.6: Características.

Como ejemplo, considérense bonos con las características dadas por el cuadro 1.6. Según se ha discutido previamente, se puede expresar de manera matricial como

$$\begin{pmatrix} 95.98291299 \\ 97.69461668 \\ 100.8117657 \\ 99.07875281 \\ 94.32157683 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 103 & 0 & 0 & 0 \\ 4.5 & 4.5 & 104.5 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 104 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 103 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{pmatrix}.$$

Calculando la inversa de la primera matriz del lado derecho de la igualdad y multiplicándola por el vector de precios, el vector $\mathbf{V}$ resulta ser

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95982913 \\ 0.920535236 \\ 0.883733263 \\ 0.846368868 \\ 0.810584246 \end{pmatrix}.$$

Recuérdese que el vector $\mathbf{V}$ contiene elementos de la forma $V_t = \frac{1}{(1+Y(0,t))^t}$, por lo que haciendo $Y(0,k) = (\frac{1}{V_k})^{\frac{1}{k}} - 1$ se obtienen las tasas spot. En la tabla (1.7) se encuentran las tasas spot $Y(0,t)$ obtenidas con este método junto con los cálculos del valor presente de los flujos recibido por los bonos.

Plazo	Tasa spot	Valor presente de los pagos				
		Bono 1	Bono 2	Bono 3	Bono 4	Bono 5
(años)	Y(0,t)	$\frac{c_t^{(1)}}{(1+Y(t))^t}$	$\frac{c_t^{(2)}}{(1+Y(t))^t}$	$\frac{c_t^{(3)}}{(1+Y(t))^t}$	$\frac{c_t^{(4)}}{(1+Y(t))^t}$	$\frac{c_t^{(5)}}{(1+Y(t))^t}$
1	0.04185210	95.9829	2.8794	4.3192	3.8393	2.8794
2	0.04226893		94.8151	4.1424	3.6821	2.7616
3	0.04206049			92.3501	3.5349	2.6511
4	0.04258165				88.0223	2.5391
5	0.04289447					83.4901
Precio del bono		95.9829	97.6946	100.8117	99.0787	94.3215

Cuadro 1.7: Resultado de bootstrap.

Nótese que debido a su naturaleza, la tasa spot representa la tasa de interés aplicable (al tiempo t) entre el tiempo t y el plazo del bono T, y no la tasa comprendida (al tiempo t) entre dos periodos intermedios. Es decir, no representa la tasa (al tiempo t) que debe aplicarse al intervalo $[t_1, t_2]$ con $t < t_1 < t_2 < T$. Aunque la tasa spot no revela información de manera inmediata sobre estas tasas intermedias, sí contiene la información necesaria para desglosar la estructura al tiempo t de la tasa de interés en bloques más pequeños. Estos bloques reciben el nombre de *tasas forward*.

Para construir la definición de tasa forward simple, considérese como 0 el tiempo actual, y supóngase que un inversionista quiere fijar durante los tiempos T y S ($T < S$) una tasa de interés simple K a cambio de un pago basado en la tasa spot $L(T,S)$ la cual se reajusta en T con un plazo de S. Es decir, que al tiempo S, recibe $(S-T)K$ unidades monetarias y paga un monto de $(T-S)L(T,S)$. Este contrato, llamado *Forward Rate Agreement* (FRA) tiene, por cada unidad monetaria, un valor en S de

$$\mathbf{FRA}(S,T,S,S-T,K) = (S-T)(K - L(T,S)).$$

Haciendo uso de (1.10) este valor se puede reexpresar como

$$\mathbf{FRA}(S,T,S,S-T,K) = (S-T)K - \frac{1}{B(T,S)} + 1. \tag{1.12}$$

Ahora bien, $\frac{1}{B(T,S)}$ unidades monetarias al tiempo S son equivalentes a una unidad monetaria al tiempo T . Asimismo, una unidad monetaria al tiempo T es equivalente a $B(t,T)$ al tiempo t, por lo que $\frac{1}{B(T,S)}$ unidades monetarias en

S son equivalentes a $B(t,T)$ unidades monetarias en t. El valor de este contrato al tiempo t es de

$$\mathbf{FRA}(t,T,S,S-T,K) = KB(t,S)(T-S) - B(t,T) + B(t,S). \tag{1.13}$$

Sólo existe un valor para K para el cual este contrato tiene un precio "justo" al tiempo t, es decir, para el cual su valor es de 0 en t, y esta es la *tasa forward simple*.

Definición 1.4.3. Se define a la *tasa de interés forward simple* al tiempo t entre los tiempos T y S con $t < T < S$, denotada como $F(t,T,S)$, como la tasa de interés:

$$F(t,T,S) := \frac{1}{(S-T)}\Big(\frac{B(t,T)}{B(t,S)} - 1\Big). \tag{1.14}$$

Al ser la tasa simple que hace justo el FRA al tiempo t, puede pensarse a la tasa forward simple $F(t,T,S)$ como una estimación al tiempo t de la tasa spot simple $L(T,S)$.

Para obtener la definición para el caso de interés compuesto se utiliza una idea similar. Supóngase que una persona vende al tiempo t un bono de plazo T, por lo que obtendrá en t un capital de $B(t,T)$, e inmediatamente compra $\frac{B(t,T)}{B(t,S)}$ bonos de plazo S $(T < S)$. Esta estrategia no incurre en gasto alguno, y tiene valor inicial de cero unidades monetarias. Al tiempo T, la persona tendrá que enfrentar la obligación contraída por el bono, por lo que tendrá que pagar una unidad monetaria en este tiempo y puede ser considerado como la inversión inicial de la persona al tiempo T. Posteriormente al tiempo S la persona obtendrá $\frac{B(t,T)}{B(t,S)}$ unidades monetarias de los bonos comprados inicialmente. Este procedimiento produce al final del tiempo S una ganancia A de

$$A = \frac{B(t,T)}{B(t,S)} - 1.$$

Esta ganancia es por unidad monetaria invertida, por lo que puede ser interpretada como una tasa de interés [1] producida entre los tiempos T y S. P ara obtener la tasa compuesta por periodo se realiza la siguiente equivalencia:

$$1 + A = (1+K)^{S-T} = \frac{B(t,T)}{B(t,S)}.$$

Despejando K en esta ecuación se obtiene la siguiente definición.

[1] Aquí se ha aplicado el hecho de que si A representa el capital inicial y B el capital final entonces $\frac{B-A}{A}$; es la tasa de interés que se obtiene del periodo total.

Definición 1.4.4. Se define a la *tasa de interés forward compuesta* al tiempo t entre los tiempos T y S con $t < T < S$, denotado como $F_c(t, T, S)$, como la tasa de interés:

$$F_c(t,T,S) := \Big(\frac{B(t,T)}{B(t,S)}\Big)^{\frac{1}{S-T}} - 1. \tag{1.15}$$

Al estudiar la forma en como se obtuvo la tasa forward compuesta, se observa que es la tasa capitalizable una vez por periodo que al tiempo t se estima estará vigente entre los periodos T y S. Es decir, es una estimación al tiempo t de la tasa spot compuesta $Y(T, S)$ (recuérdese que para $t < T$, ésta es desconocida). Por ello, estas tasas sirven también para tener un indicativo de si el mercado estima actualmente que las tasas spot compuesta posteriormente subirán o bajarán con respecto a las tasas obtenidas actualmente.

Una relación importante entre las tasas forward y spot surge del hecho de que una unidad monetaria invertida en un lapso de tiempo determinado bajo la tasa spot correspondiente debe equivaler a reinvertir esa misma unidad monetaria de manera consecutiva en lapsos más cortos, pero con el mismo intervalo total. Es por ello que la función de acumulación de la tasa spot compuesta es el promedio geométrico de la función de acumulación de las tasas forward compuestas en el periodo correspondiente. Por ejemplo, una inversión de una unidad monetaria al tiempo t a un plazo de T periodos con tasa spot $Y(t, T)$ puede ser reescrita en términos de las tasas forward. Para ello considérense las ecuaciones (1.11) y (1.15):

$$\begin{aligned}
\big(1 + Y(t,T)\big)^{T-t} &= \frac{1}{B(t,T)} \\
&= \frac{1}{B(t,t+1)}\frac{B(t,t+1)}{B(t,t+2)}\cdots\frac{B(t,T-1)}{B(t,T)} \\
&= \frac{B(t,t)}{B(t,t+1)}\frac{B(t,t+1)}{B(t,t+2)}\cdots\frac{B(t,T-1)}{B(t,T)} \\
&= \big(1 + F_c(t,t,t+1)\big)\big(1 + F_c(t,t+1,t+2)\big)\ldots\big(1 + F_c(t,T-1,T)\big) \\
&= \prod_{k=t}^{T-1}(1 + F_c(t,k,k+1)). \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

Además, otra relación importante surge de (1.16) pues indica que el precio de un bono al tiempo t y de plazo T puede ser reescrito de la forma

$$B(t,T) = \prod_{k=t}^{T-1} \frac{1}{(1 + F_c(t,k,k+1))}. \tag{1.17}$$

En la última ecuación se describe al precio del bono como una función de descuento que está conformada por estimaciones al tiempo t de las futuras tasas spot compuestas que tienen como plazo un periodo, es decir, de las verdaderas tasas que deberían aplicarse sobre periodos de la forma $(s, s+1)$. En efecto, como se ha mencionado, $F_c(t, s, s+1)$ es una estimación al tiempo t de la tasa spot $Y(s, s+1)$, (lo que permite enfatizar el hecho de) que la tasa de interés no tiene porqué ser igual en un periodo que en otro. Sin embargo, de las anteriores discusiones puede observarse que existe una relación entre las estimaciones de estas tasas spot y las estimaciones de tasas spot compuestas de plazos mayores. Esta idea puede trasladarse a un nivel más general, pues una tasa de interés tampoco tiene porqué ser igual en cualquier instante dentro del periodo. Pero antes de introducir esta idea, es preciso introducir la idea de "recapitalización continua".

Cuando se habla de una recapitalización continua, una persona invierte una unidad monetaria bajo un esquema que produce intereses de manera constante. En esta, la inversión en cada intervalo infinitesimal de tiempo genera intereses para utilizarlos posteriormente como parte del capital principal.
A pesar de que se pueda recapitalizar de manera continua, la acumulación generada en un periodo bajo un sistema discreto y el continuo debe ser el mismo. Por ello, es preciso establecer una relación de equivalencia entre el factor de acumulación discreto y el nuevo factor de acumulación.

La idea de recapitalizar continuamente puede generarse al dividir un periodo en subintervalos más pequeños y del mismo tamaño, para posteriormente hacer tender el número de subintervalos a infinito.
Sin pérdida de generalidad, considérese una función de acumulación que recapitaliza la inversión m veces por periodo a una tasa de interés que se denotará por $i^{(m)}$. Esto significa que en cada lapso de la forma $[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]$ con $0 \leq k \leq m-1$ el interés generado será proporcional al tamaño del intervalo. Es decir, será una tasa de interés simple que generará $1 + \frac{i^{(m)}}{m}$ unidades monetarias (por cada unidad monetaria invertida) al final de cada subperiodo $\frac{k+1}{m}$ para luego considerar estos intereses generados como parte del capital inicial del siguiente subperiodo. De esta manera, al final del periodo se tendrá:

$$\big(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\big)^m.$$

Por lo que, si el número de intervalos tiende a infinito (es decir, si la inversión se recapitaliza continuamente, se obtiene la nueva función de acumulación:

$$\lim_{m\to\infty} \big(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\big)^m = \exp\{i^{(\infty)}\}.$$

Es importante recalcar que al obtener una nueva función de acumulación, la tasa de interés no es la misma. Este hecho enfatiza al denotar a la nueva tasa de interés como $i^{(\infty)}$. Por otra parte, se debe recordar que el interés generado por un periodo bajo esta función de acumulación debe ser igual al interés generado por la función de acumulación discreta de la tasa recapitalizable por periodo

$1 + i^{(1)}$, de donde se obtiene que

$$i^{(\infty)} = \ln(1 + i^{(1)}).$$

Estas ideas pueden aplicarse al caso de la tasa spot: a continuación se dará la definición formal de la tasa spot que divide un periodo en k subperiodos, donde al final de cada subperiodo se recapitaliza la inversión hecha.

Definición 1.4.5. Se define a la *tasa de interés spot compuesta pagadera k veces por periodo* al tiempo t y de plazo T, denotada como $Y^k(t,T)$, como la tasa de interés compuesta constante a la cual una inversión de $B(t,T)$ al tiempo t produce una unidad monetaria al final del plazo cuando la recapitalización se realiza k veces por periodo.

$$Y^k(t,T) := \frac{k}{B(t,T)^{\frac{1}{k(T-t)}}} - k. \tag{1.18}$$

La idea de capitalización continua se reflejará en la siguiente definición de tasa, misma que será de gran importancia en las secciones posteriores del presente capítulo. Es a partir de estimaciones pertinentes de ésta que se hará inferencia de los precios de bonos y se adecuarán las condiciones de inmunidad.

Definición 1.4.6. Se define a la *tasa de interés spot compuesta continuamente* al tiempo t y de plazo T, denotada como $R(t,T)$, como la tasa de interés compuesta constante a la cual una inversión de $B(t,T)$ al tiempo t produce una unidad monetaria al final del plazo cuando la recapitalización se realiza continuamente.

$$R(t,T) := -\frac{\ln B(t,T)}{T-t}. \tag{1.19}$$

Retomando la idea de que la tasa de interés no tiene porqué ser igual dentro de un periodo, considérese que la tasa de interés varía $n-1$ veces en el intervalo de tiempo $[u,v]$ en los puntos equiespaciados $\{t_0 = u, t_1 = u + \frac{1(v-u)}{n}, t_2 = u + \frac{2(v-u)}{n} \cdots, t_n = v\}$. Defínese la tasa de interés como:

$$i_t = \{\ i_{t_k} \quad \text{si } t_k \le t < t_{k+1} \quad .$$

Defínase además $\Delta_k = t_{k+1} - t_k = \frac{v-u}{n}$, denotando así el tamaño del lapso de tiempo durante el cual se mantiene la tasa i_k. Entonces, se tiene que para cualquier $s \in [u,v]$ existe $j \in \{1, \cdots n\}$ tal que $s \in [t_{j-1}, t_j)$, por lo que la función de acumulación entre u y s es:

$$e^{\sum_{k=0}^{j-2} i_k \Delta_k + i_{j-1}(s - t_{j-1})}.$$

Debido a que durante Δ_k se mantiene una tasa constante i_k, se puede reescribir el término $i_k \Delta_k$ como $\int_{t_k}^{t_{k+1}} i_t dt$; lo mismo sucede para el término $i_{j-1}(s - t_{j-1})$, el cual puede ser reescrito como $\int_{t_{j-1}}^{s} i_t dt$. Entonces, es posible reescribir la ecuación anterior como

$$e^{\int_u^s i_t dt}.$$

De manera muy informal, haciendo $n \to \infty$ o equivalentemente $\Delta_k \to 0$ significaría que la tasa de interés cambia una infinidad de veces en el intervalo de tiempo $[u, v]$. Se obtiene de esta forma que la función de acumulación del intervalo es

$$e^{\int_u^v i_t dt},$$

donde ahora i_t denota una tasa inifinitesimal. Análogamente, si $s \in [u, v]$, la función de acumulación entre los tiempos u y s es $e^{\int_u^s i_t dt}$. Evidentemente, las últimas dos expresiones sólo tienen sentido si la tasa de interés puede ser vista como una función integrable que depende del tiempo.
Aplicando esta manera de proceder a la tasa de interés compuesta spot, se obtiene la siguiente definición.

Definición 1.4.7. Se define a la *tasa corta*, denotado como $r(t)$ ó r_t, como la tasa de interés:

$$r(t) := \lim_{T \to t^+} Y(t, T). \tag{1.20}$$

La función de acumulación bajo esta tasa sobre el intervalo $[t, T]$ según lo deducido anteriormente es

$$e^{\int_t^T r_u du}.$$

Ésta función de acumulación es totalmente desconocida para $s < t$ y totalmente conocida si $s > T$. Sin embargo, es importante notar que si $t < s < T$, la expresión anterior puede expresarse como $e^{\int_t^s r_u du} e^{\int_s^T r_u du}$ donde la primera parte es totalmente conocida y la segunda desconocida. Por lo que, para obtener una aproximación de esta función de acumulación, es muy útil la siguiente definición:

Definición 1.4.8. Se define a la *tasa forward instantánea*, denotada como $f(t, T)$, como la tasa de interés:

$$f(t, T) := \lim_{S \to T^+} F(t, T, S). \tag{1.21}$$

Esta definición es muy importante, pues este límite puede ser calculado de la siguiente forma cuando $B(t, T)$ es diferenciable con respecto a T:

$$\begin{aligned} \lim_{S \to T^+} F(t, T, S) &= -\lim_{S \to T^+} \frac{1}{B(t, S)} \frac{B(t, S) - B(t, T)}{S - T} \\ &= -\frac{1}{B(t, T)} \frac{\delta B(t, T)}{\delta T} \\ &= -\frac{\delta \ln B(t, T)}{\delta T}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que el precio del bono puede ser escrito de la forma

$$B(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds}. \tag{1.22}$$

Finalmente, se puede utilizar esta última ecuación con la relación (1.19) para concluir que

$$e^{-\int_t^T f(t,s)ds} = e^{-(T-t)R(t,T)}. \tag{1.23}$$

Esta última ecuación muestra que invertir una unidad monetaria con la tasa spot compuesta continuamente debe ser equivalente a invertir esa misma unidad monetaria a través de las tasas forward instantáneas.
Previamente se había considerado a la función de acumulación de la tasa spot compuesta como un promedio geométrico. Ahora, bajo la recapitalización continua se obtiene que la función de acumulación continua de la tasa spot $R(t,T)$ es el promedio aritmético de las tasas forward instantáneas $f(t,s)$ con $s \in [t,T]$.

A continuación, se presenta una definición útil para visualizar gráficamente el comportamiento de alguna tasa spot o tasa forward instantánea a través del tiempo; más aún, esta definición caracteriza completamente el comportamiento de la tasa en cuestión con respecto al plazo.

Definición 1.4.9. De forma general, se define como *estructura de tasa interés* al tiempo t a la gráfica de la función:

$$T \to H(t,T) \tag{1.24}$$

donde H es algún tipo de tasa de interés spot o forward instantánea.

Obtener estimaciones sobre la estructura de algún tipo de tasa de interés permite obtener una aproximación sobre precios de bonos que no se encuentren disponibles en el mercado. Por otra parte, la estimación de la estructura de tasas resulta de gran utilidad, como se mostrará posteriormente, al momento de inmunizar portafolios de bonos.

1.5. Estimación de tasas forward y spot

Como se ha mencionado, es posible valuar el precio de un bono cupón cero al conocer el rendimiento que debe tener. También se ha mencionado la relación de esta última con las tasas spot y forward. Entonces, para valuar el precio actual de un bono cupón cero, el problema se reduce a obtener la estructura actual de la tasa de interés. Dicho problema ha sido analizado por diferentes autores, y las formas más destacadas para obtener una estimación de la tasa forward comúnmente echan mano de *métodos paramétricos*. Por tratarse de tasas al tiempo 0, se suprimirá en las siguientes secciones el primer parámetro en las notaciones de las diversas tasas spot y forward.

Los métodos paramétricos suponen que es posible caracterizar el comportamiento de un objeto de estudio a partir de un modelo con ciertos parámetros. En este caso de especial interés, el comportamiento que se desea modelar es el de la estructura de la tasa de interés, es decir, el comportamiento de las tasas spot o de las tasas forward. Uno de los modelos paramétricos más utilizado es el creado por Nelson y Siegel [10], debido a la base parsimónica sobre la que opera.
Otro método paramétrico que busca ajustar la estructura de interés es la de splines, que básicamente son funciones que buscan ajustar una curva suave a un grupo de puntos u observaciones. Sin embargo, existe un método muy sencillo y utilizado ampliamente por instituciones financieras y hasta casas de bolsa, que es el de *interpolación lineal*, y que por su simplicidad se comenzará exponiendo este último.

1.5.1. Interpolación lineal de tasas de interés

El método de interpolación lineal considera a la tasa spot compuesta continuamente como si se tratase de una gráfica lineal a pedazos. Esto es, dados dos puntos conocidos y consecutivos de la tasa compuesta continuamente, toda tasa spot compuesta continuamente entre ellos se comportará como una combinación lineal de estos.
Si se tiene que los plazos de los bonos cupón cero son $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n$ y definiendo como $x_{\tau_i} = \tau_i$ y $y_{\tau_k} = R(0, \tau_k)$, entonces toda tasa spot recapitalizable continuamente entre los plazos τ_i y τ_{i+1}, denotada como y, puede obtenerse bajo el argumento de igualdad de pendientes:

$$\frac{(y - y_{\tau_i})}{(x - x_{\tau_i})} = \frac{(y_{\tau_{i+1}} - y_{\tau_i})}{(x_{\tau_{i+1}} - x_{\tau_i})} \quad , \quad x \in (\tau_i, \tau_{i+1}).$$

De donde se obtiene que la tasa spot recapitalizable continuamente es de la forma:

$$y = \frac{(x - x_{\tau_i})}{(x_{\tau_{i+1}} - x_{\tau_i})}(y_{\tau_{i+1}} - y_{\tau_i}) + y_{\tau_i} \quad , \quad x \in [\tau_i, \tau_{i+1}],$$

y en el intervalo $[0, x_{\tau_1})$ suele definirse $y = y_{\tau_1}$.
Para ejemplificar este ajuste de tasas, considérese la tasa spot recapitalizable continuamente de $28, 91, 182$ y 336 días como $R(0, 0.078) = \frac{4.4921}{100}$, $R(0, 0.2528) = \frac{4.5636}{100}$, $R(0, 0.5) = \frac{4.7524}{100}$, $R(0, .93) = \frac{4.8677}{100}$ respectívamente. Entonces, la tasa spot recapitalizable continuamente entre el intervalo $[0, .93]$ es como se muestra en la figura 1.3.

1.5.2. Modelo Nelson-Siegel

Como se ha mencionado, entre los métodos paramétricos más utilizados para estimar tasas spot compuestas continuamente se encuentra el creado por Nelson y Siegel [10]. Esto se debe principalmente a la flexibilidad de este modelo para representar las formas más comunes asociadas a la tasa spot: monótonas,

$$y = \begin{cases} \frac{4.4921}{100} & , \text{ si } x \in [0, 0.078] \\ \frac{4.0819(x-0.078)}{10^3} + \frac{4.4921}{100} & , \text{ si } x \in [0.078, 0.2528] \\ \frac{1.2677(x-.2528)}{10^3} + \frac{4.5635}{10^2} & , \text{ si } x \in [0.2528, 0.5] \\ \frac{2.69491(x-.5)}{10^3} + \frac{4.7524}{10^2} & , \text{ si } x \in [0.5, .93] \end{cases}$$

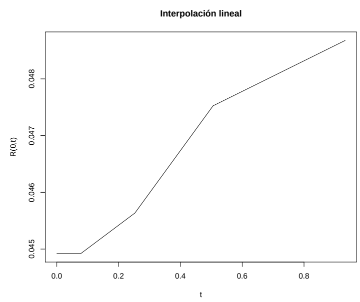


Figura 1.3: Ajuste obtenido mediante interpolación lineal.

jorobadas y en forma de S.
Sin embargo, existe otra razón fundamental por la cual se utilizan este modelo paramétrico sobre otros. En la mayoria de dichos modelos se incluye por lo menos un término lineal que forzaría la extrapolación para tasas forward de largo plazo a ser ilimitadamente grandes. Esto es, incitan un comportamiento a largo plazo explosivo o no limitado.
Nelson y Siegel encuentran que una clase de funciones que genera las formas típicas de la tasa spot son aquellas asociadas con soluciones de una ecuación diferencial o de ecuaciones en diferencias. En primera instancia suponen que la tasa forward instantánea es la solución de una ecuación diferencial de segundo grado con dos soluciones diferentes y reales. Así, su primer modelo toma la forma

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \exp\Big(-\frac{m}{\tau_1}\Big) + \beta_2 \cdot \exp\Big(-\frac{m}{\tau_2}\Big),$$

donde τ_1 y τ_2 son constantes asociadas a la ecuación y β_0, β_1 y β_2 son determinadas por condiciones iniciales. Sin embargo, dicha hipótesis se ve desechada en el instante en el que observan que al variar las constantes τ_1 y τ_2 es posible encontrar diferentes valores para las β's, con las cuales se obtiene un resultado muy similar. Este hecho muestra que el modelo tiene demasiados parámetros, es decir que el modelo presenta una *sobreparametrización*. Es por ello cambian su supuesto al proponer que las tasas forward son la solución de una ecuación diferencial de segundo grado con dos raices idénticas y reales, cambiando su modelo a:

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \exp\Big(-\frac{m}{\tau}\Big) + \beta_2 \Big[\frac{m}{\tau} \cdot \exp\Big(-\frac{m}{\tau}\Big)\Big].$$

Este modelo es completamente lineal en todos sus parámetros una vez establecido τ. Además, al ser la tasa spot compuesta continuamente el promedio aritmético de las tasas forward instantáneas (ecuación 1.23), se puede obtener la tasa spot compuesta continuamente al integrar las tasas forward desde el tiempo 0 hasta el tiempo s y dividiendo entre s, por lo que la tasa spot resultante será:

$$R(s) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cdot \frac{[1 - \exp\left(-\frac{s}{\tau}\right)]}{\frac{s}{\tau}} - \beta_2 \cdot \exp\left(\frac{-s}{\tau}\right)$$

Ésta tasa también es lineal en todos los parámetros una vez establecido τ. El modelo está formado a partir de tres componentes. La componente de corto plazo, la cual tiene la característica de decaer rápidamente hacia cero. La componente de mediano plazo, aquella que originalmente inicia en cero para después volver a decaer hacia cero. Por último la de largo plazo, que no decae, sino que se mantiene constante. Estos componentes se observan de manera gráfica en la Figura (1.4).

La flexibilidad de este modelo permite suponer que es posible capturar la relación intrínseca entre la tasa spot compuesta continuamente y el plazo del bono sin necesidad de establecer un modelo más complicado que involucre más parámetros. Además, dicha flexibilidad en el modelo debe entenderse como la interacción de fuerzas entre los componentes de corto, mediano y largo plazo que envuelven a la estructura del modelo. En el modelo de Nelson y Siegel, el componente de largo plazo es β_0, el componente de corto plazo es β_1 y el de mediano es β_2. Con esto es posible ver que una combinación de los tres componentes brindan la posibilidad de ajustar curvas con las formas antes mencionadas. Asimismo, τ es un parámetro de decaída, es decir, es el parámetro que determina a qué velocidad decaen los parámetros. Valores pequeños de τ corresponderán a una rápida decaida, con lo que el modelo se ajustará bien para plazos pequeños, mientras que al decaer rápidamente tendrá un mal ajuste para plazos largos. De manera contraria, para valores grandes de τ los parámetros decaerán de manera gradual y lenta. En dicho caso, el ajuste del modelo para plazos largos será bueno, pero no será capaz de seguir la curvatura generada por los plazos cortos y, por ende, tendrá un mal ajuste para estas.

El método de Márquez et al. [9] publicado por el Banco de México para obtener los parámetros apropiados consiste en hacer uso de la linealidad que tiene el modelo en todos los parámetros excepto τ. Por ello, primero se fija τ para después calcular las betas que minimicen los errores del modelo con las observaciones realizadas, en este caso las tasas spot compuestas continuamente. Éste es en realidad un problema lineal múltiple, pues el modelo es lineal sobre las betas, mismas que tienen que ajustar a diferentes observaciones. Una vez obtenidas las betas que minimizan los errores, se fijan en el modelo para obtener ahora la τ que minimice las estimaciones del modelo para esas betas. Una vez realizado lo anterior, se utiliza esta nueva τ para obtener nuevos valores de las betas, y así sucesivamente hasta que se obtienen los cuatro parámetros que minimizan de manera "local" los errores entre las observaciones estimadas del modelo y las reales. Para ello, se ha hecho uso del método de la sección dorada para encontrar

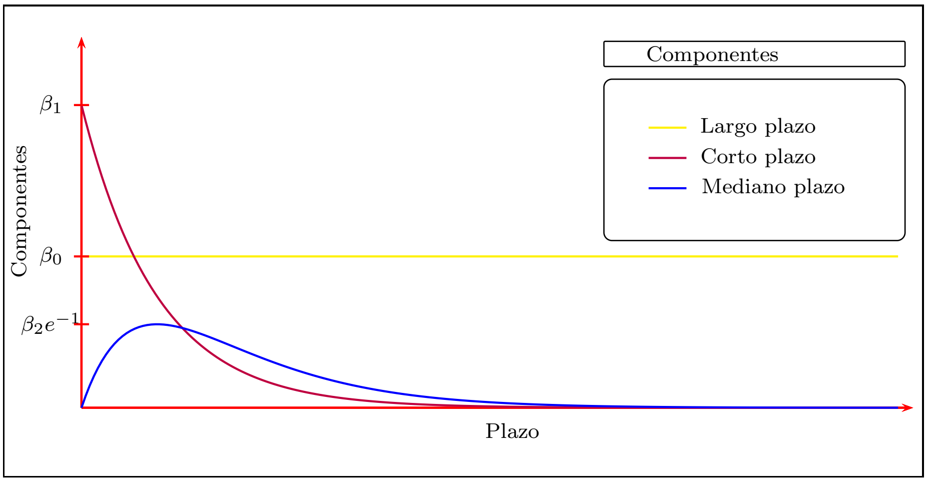


Figura 1.4: Componentes de la tasa forward en el modelo Nelson-Siegel. El componente de largo plazo se mantiene constante, el de mediano plazo crece para después decrecer a cero, y el de corto plazo decrece monótamente.

la τ, donde la función a minimizar es

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \widehat{\widehat{y}}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (\widehat{y}_i - \widehat{\widehat{y}})^2},$$

donde y_i representa la i-ésima observación real, $\widehat{y}_i$ representa el ajuste de la i-ésima observación, mientras que $\widehat{\widehat{y}}$ representa el promedio del ajuste obtenido. A continuación, se presenta el ajuste obtenido a partir del método de Nelson-Siegel con los datos anteriormente usados en la interpolación lineal, anualizado a 360 días.

plazo	$R(0,t)$ observada	$R(0,t)$ ajustada
28	0.04492143	0.04478028
91	0.04563577	0.04596444
182	0.04752448	0.04728189
336	0.04867730	0.04873238
Parámetros		
τ=359.9968		β_0=0.047739927
β_1=-0.003571532		β_2=0.012903153

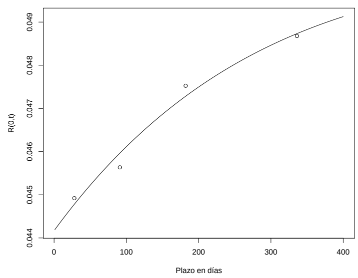


Figura 1.5: Ajuste obtenido mediante el modelo Nelson-Siegel.

1.5.3. Modelo Fisher-Nychka-Zervos

El modelo de Fisher-Nychka-Zervos [4] pertenece a un método de aproximación y suavizamiento de curvas a partir de *splines cúbicos.* Los splines eran originalmente barras de metal muy maleables utilizadas para ajustar una curva suave a un grupo de puntos que corresponden a información obtenida de algún experimento, y de ahí proviene el nombre de este método.
Esta curva ajustada debe cumplir principalmente dos condiciones. Primero, el valor de la curva en los tiempos correspondientes de las observaciones debe ser exactamente el valor del experimento en los mismos. Segundo, debe ser una curva suave, lo que comúnmente hace referencia a la continuidad de la segunda derivada de la función obtenida como spline. Es considerado de esta forma debido a que si la segunda derivada es continua significaría intuitivamente que no existen cambios repentinos en la dirección de cambio en la pendiente.

El cumplimiento de las condiciones anteriores puede presentarse de diversas maneras, por consiguiente, la forma del spline obtenido depende en gran medida de diversos criterios utilizados para su construcción. Entre estos se encuentra la distancia entre tiempos de las observaciones y de los puntos donde se han de ensamblar los segmentos, llamados comúnmente como *puntos de ruptura* o *knots.*

La construcción del modelo Fisher-Nychka-Zervos comienza proponiendo crear un spline de cualquier curva $h(\tau)$ de la estructura temporal de la tasa de interés. La única restricción que imponen es que exista una función g que transforme a $h(\tau)$ en una función de descuento $\delta(\tau)$. La forma utilizada para obtener el spline de dicha función es a partir de una parametrización de la base B-spline, ya que al ser ésta una base, es capaz de crear cualquier spline utilizando los coeficientes correctos para ello. Ésto precisamente es lo que busca el modelo: encontrar los coeficientes adecuados para que dicha función ajuste lo mejor posible los datos con las restricciones que impone el mismo.

El modelo considera los puntos de ruptura denotados como $\{s_k\}_{k=1}^{K}$, con $s_k < s_{k+1}$, donde $s_1 = 0$ denotará el punto de ruptura para el tiempo actual y $s_K = T$ para el máximo de los plazos de la muestra de bonos. Los autores distribuyen estos puntos de ruptura de acuerdo a los plazos de los bonos [2]. Sin embargo, debido a la manera en que se define la base B-spline, es necesario definir un conjunto aumentado de puntos de ruptura $\{d_k\}_{k=1}^{K+6}$, donde $d_1 = d_2 = d_3 = s_1, d_{K+4} = d_{K+5} = d_{K+6} = s_K$ y $d_{k+3} = s_k$ para $1 \leq k \leq K$. Nótese que se han agregado tres puntos de ruptura al tiempo 0 y tres puntos de ruptura al tiempo T.
La base B-spline cúbico está conformado por $\kappa = K + 2$ B-splines donde cada uno está definido por la siguiente recursión, donde $r = 4$ por tratarse de un

[2] Para obtener estabilidad numérica en el método descrito, el número de bonos debe exceder al número de puntos de ruptura por lo menos en dos.

spline cúbico y $1 \leq k \leq \kappa$

$$\phi_k^r(\tau) = \frac{\phi_k^{r-1}(\tau)(\tau - d_k)}{d_{k+r-1} - d_k} + \frac{\phi_{k+1}^{r-1}(\tau)(d_{k+r} - \tau)}{d_{k+r} - d_{k+1}},$$

para $\tau \in [0, T]$, con

$$\phi_k^1(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{si } d_k \leq \tau < d_{k+1} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Sin embargo, para simplificar la notación se denotará como $\phi_k(\tau)$ a $\phi_k^4(\tau)$.
La parametrización de $h(\tau)$ por medio de splines queda entonces de la siguiente manera:

$$h_s(\tau, \beta) := \sum_{k=1}^{\kappa} \beta_k \phi_k(\tau) = \phi(\tau)\beta,$$

donde se ha hecho énfasis al escribir h_s que la función obtenida no es la función h, sino una parametrización de ésta en términos de splines.

Denótese por π_i el precio estimado del bono i-ésimo, como $\tau_{i,k}$ el plazo del pago k-ésimo del bono i-ésimo y m_i al número de pagos restantes. Al ser el precio del bono el valor descontado de los pagos que realizará el mismo, se obtiene que una estimación del precio utilizando h_s es:

$$\pi_i(\beta) := \sum_{k=1}^{m_i} c_{i,k}\delta_s(\tau_{i,k}, \beta) = \sum_{k=1}^{m_i} c_{i,k} g(h_s(\cdot, \beta), \tau_{i,k}) = c_i^\top \tilde{g}(\phi(\cdot)\beta, \tau_i),$$

donde la última igualdad se ha denotado de manera matricial, es decir, $\tilde{g}(\phi(\cdot)\beta, \tau_i) = (\tilde{g}(\phi(\cdot)\beta, \tau_{i1}), \cdots, \tilde{g}(\phi(\cdot)\beta, \tau_{im_i}))^\top$.
Entonces, utilizando el factor de descuento $\delta(\tau)$ se obtiene una función del precio de los bonos que depende exclusivamente de las betas a calcular, por lo que el problema pasa a ser un problema de minimización de los errores (mínimos cuadrados no lineales). Este problema es resuelto a partir de linealizar, mediante la aproximación de Taylor la función obtenida del precio de los bonos, alrededor de una estimación apriori β^0 de los coeficientes del spline $h(\tau)$. La aproximación de Taylor en forma matricial alrededor de la estimación a priori queda de la siguiente manera:

$$\Pi(\beta) \approx \Pi(\beta^0) + (\beta - \beta^0)\frac{\partial \Pi(\beta)}{\partial \beta^\top}\Big|_{\beta=\beta^0}.$$

Para simplificar notación, se define $X(\beta^0) := \partial \Pi(\beta)/\partial \beta^\top \big|_{\beta=\beta^0}$ y $Y(\beta^0) := P - \Pi(\beta^0) + \beta^0 X(\beta^0)$. Entonces, el nuevo problema de minimización de cuadrados queda expresado de la siguiente manera:

$$\min_{\beta} \Big[\big(Y(\beta^0) - X(\beta^0)\beta\big)^\top \big(Y(\beta^0) - X(\beta^0)\beta\big)\Big],$$

donde las betas que minimizan la expresión anterior, denotadas de manera matricial, son:

$$\beta^1 = \left(X(\beta^0)^\top X(\beta^0)\right)^{-1} X(\beta^0)^\top Y(\beta^0).$$

Debe tomarse en cuenta que estas betas son las que minimizan la diferencia entre el precio de los bonos y la linealización de la función del precio de los bonos, y no la diferencia entre el precio de los bonos y la función del precio de los bonos. Por esta razón, lo que este procedimiento conlleva es a obtener una "actualización" β^1 de los coeficientes de $\delta(\tau)$, misma que se utiliza como una nueva estimación a priori. De esta forma se obtiene un algoritmo recursivo que finaliza cuando se obtiene convergencia, es decir, cuando las betas apriori son iguales a su "actualización".

Como se ha mencionado, la única restricción que se ha impuesto sobre la función h es que exista una función g de tal manera que la composición dé como resultado una función de descuento, es decir $g(h(\cdot)) = \delta(\cdot)$. Las funciones consideradas en el trabajo de los autores son principalmente la función de descuento δ, la tasa spot compuesta continuamente $R(0,\cdot)$ y la tasa forward instantánea $f(0,\cdot)$. Por ello, la función g, las estimaciones de los precios del bono y el término $\partial\Pi(\beta)/\partial\beta^\top$ toman la forma que muestra la tabla (1.8), donde se ha definido $\psi(\tau) = \int_0^\tau \phi(s)ds$.

$h(\tau)$	$g(h(\cdot),\tau)$	$\pi_i(\beta)$	$\delta\pi_i(\beta)/\delta\beta^\top$
$\delta(\tau)$	$h(\tau)$	$c_i^\top \tilde{\phi}(\tau_i)\beta$	$c_i^\top \tilde{\phi}(\tau_i)$
$R(0,\tau)$	$\exp(-h(\tau))$	$c_i^\top \exp(-\tilde{\phi}(\tau_i)\beta)$	$\pi_i(\beta)c_i^\top \tilde{\phi}(\tau_i)$
$f(0,\tau)$	$\exp(-\int_0^\tau h(s)ds)$	$c_i^\top \exp(-\tilde{\psi}(\tau_i)\beta)$	$-\pi_i(\beta)c_i^\top \tilde{\psi}(\tau_i)$

Cuadro 1.8: Formas que toma h.

Sin embargo, el modelo Fisher-Nychka-Zervos permite que en el ajuste de la curva exista un equilibrio entre exactitud y suavidad. Esto lo logran al definir un parámetro de castigo que actúe como un compensador que equilibre estas dos propiedades. La estrategia consiste entonces en utilizar muchos puntos de ruptura y castigar el exceso de variabilidad. El castigo está definido de la siguiente manera:

$$\lambda \int_0^T \left(\frac{\partial^2 h_s(\tau,\beta)}{\partial\tau^2}\right)^2 d\tau = \lambda\beta^\top \left(\int_0^T \phi''(\tau)^\top \phi''(\tau) d\tau\right)\beta = \lambda\beta^\top H\beta.$$

Al estar definida en términos de la segunda derivada de la función ajustada, intrínsecamente está ligado al spline modelado y por tanto de las betas. Esta dependencia en las betas tiene como consecuencia que la forma en que se equilibran las dos propiedades antes mencionadas y la forma que tenga la curva ajustada dependería del valor que tome λ .

Entonces según la lógica del modelo, el problema es

$$\min_{h(\tau)\in\mathcal{H}} \Big[\sum_{i=1}^{n} \big(p_i - c_i^\top \tilde{g}(h(\cdot),\tau_i)\big)^2 + \lambda \int_0^T h''(\tau)^2 d\tau\Big].$$

La manera en que se resuelve es utilizando una recursión parecida a la relatada anteriormente; la diferencia radica en que, al existir ahora un parámetro de castigo, la actualización de las betas debe tomarlo también en cuenta. La recursión referida es entonces de la siguiente manera:

$$\beta^{i+1}(\lambda) = \Big(X(\beta^i(\lambda))^\top X(\beta^i(\lambda)) + \lambda H\Big)^{-1} X(\beta^i(\lambda))^\top Y(\beta^i(\lambda)),$$

donde se ha hecho explícita la dependencia que existe en las betas de la λ, puesto que para cada λ el problema que se presenta es diferente. Es este hecho lo que da una idea de la razón por la cual la λ designe completamente la forma de la curva ajustada.
La forma de escoger una λ apropiada se logra a partir del *método general de validación cruzada*, el cual define que la λ apropiada es aquella que minimice la función

$$\gamma(\lambda) := \frac{\Big((I - A(\lambda))Y(\beta^*(\lambda))\Big)^\top \Big(((I - A(\lambda))Y(\beta^*(\lambda))\Big)}{\Big(n - \theta tr(A(\lambda))\Big)^2},$$

donde $A(\lambda) := X(\beta^*(\lambda))\Big(X(\beta^*(\lambda))^\top X(\beta^*(\lambda)) + \lambda H\Big)^{-1} X(\beta^*(\lambda))^\top$, y $\theta = 2$ en el método descrito por Fisher-Nychka-Zervos.

Como se ha mencionado, el modelo Fisher-Nychka-Zervos no hace en principio intención alguna en referir qué función $h(\tau)$ es la más apropiada para ser ajustada por este método, pues es precisamente uno de los propósitos de su trabajo. Ellos proponen tres funciones para ser ajustadas: la función de descuento $\delta(\tau)$, la función de tasa spot $l(\tau)$ y por último la función de tasa forward $f(\tau)$, según las denotaciones del propio trabajo. Sin embargo, los autores concluyen que la función que mejor estima la información al ser aproximada con splines bajo este método es principalmente la tasa forward.

En la presente sección se considera de manera especial el ajuste hecho a la tasa forward y spot compuesta continuamente.
Debido a que $\psi(0) = (0, 0, \dots, 0)$, entonces se tiene que $B(0,0) = \exp(-\psi(0)\beta) = 1$ no importando el valor que tome el vector β, por lo que ninguna restricción debe imponerse al ajustar esta curva. Sin embargo, algunas consideraciones especiales deben ser hechas cuando la curva ajustada es la tasa spot compuesta continuamente a través de ϕ. Debido a que $\phi(0) = (1, 0, \dots, 0)$ y $B(0,0) = 1$, se tiene que $B(0,0) = \exp -((\phi(0)\beta)) = \exp -(\beta_1)$, lo que conlleva en imponer la restricción $\beta_1 = 0$.

Para reexpresar el problema de forma apropiada cuando se impone esta restricción, es conveniente definir β como $\beta = \omega + \rho\hat{\beta}$ donde $\hat{\beta} = (\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\kappa)$, $\omega = (0, 0, \ldots, 0)^\top$ es un vector de tamaño κ y ρ es una matriz de $\kappa \times (\kappa - 1)$, cuya primera fila es una fila de ceros y las restantes conforman una matriz identidad de dimensión $\kappa - 1$.
Bajo estas características, según Fisher-Nychka-Zervos [4] el problema se convierte en

$$\begin{aligned}\min_{\hat{\beta}} & \left[\left(Y - X(\omega + \rho\hat{\beta}) \right)^\top \left(Y - X(\omega + \rho\hat{\beta}) \right) + \lambda(\omega + \rho\hat{\beta})^\top H(\omega + \rho\hat{\beta}) \right] \\ &= \left[\left(Y - \hat{X}\hat{\beta} \right)^\top \left(Y - \hat{X}\hat{\beta} \right) + \lambda(\omega + \rho\hat{\beta})^\top H(\omega + \rho\hat{\beta}) \right],\end{aligned}$$

donde $\hat{X} = X\rho$. La recursión para resolver este problema es

$$\hat{\beta}^{i+1} = (\hat{X}(\beta^i(\lambda))^\top \hat{X}(\beta^i(\lambda)) + \lambda\hat{H})^{-1}(\hat{X}(\beta^i(\lambda))^\top \hat{Y}(\beta^i(\lambda))).$$

A manera de ejercicio, se ha hecho uso de la información contenida en la tabla (1.9) y se ha hecho el supuesto que la estructura de tasas forward y spot tienen alguno de los siguientes comportamientos:

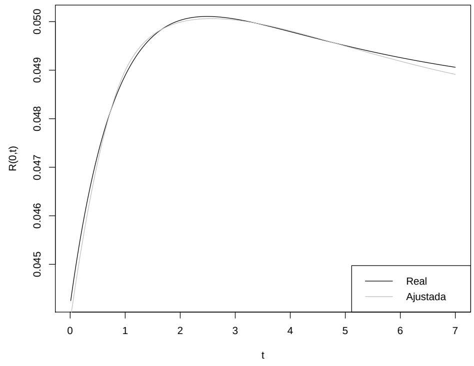
$$\begin{aligned}
f_1(0,t) &= 0.047739927 - 0.003571532e^{-t} + 0.012903153te^{-t}. \\
R_1(0,t) &= 0.047739927 + 0.009331621(\frac{1-e^{-t}}{t}) - 0.012903153e^{-t}. \\
f_2(0,t) &= 0.0266 + .00088t + .009622\cos(.566t)(1-e^{-t}) \\
&\quad +0.017e^{-t}\sin(.566t) + 0.02975\sin(.566t) \\
&\quad +0.02975\sin(1.75t)(1-e^{-3t}) + 0.051e^{-3t}\cos(1.75t). \\
R_2(0,t) &= 0.04 + 0.00266t + 0.00044t^2 + 0.017\sin(.566t)(1-e^{-t}) \\
&\quad -0.017\cos(1.75t)(1-e^{-3t}).
\end{aligned}$$

	Tasa cupón (%)	Plazo (años)	Cupones por año
Bono 1	0	.5	0
Bono 2	4	1	4
Bono 3	3	2	2
Bono 4	5	3.5	2
Bono 5	7	5	1
Bono 6	3	7	3

Cuadro 1.9: Características.

a)

Parámetros	
β_1=0	β_2=0.014611
β_3=0.074993	β_4=0.192701
β_5=0.287316	β_6=0.342396
Puntos de ruptura	
s_1=0	s_2=1
s_3=3.5	s_4=7



b)

Parámetros	
β_1=0	β_2=0.015284
β_3=0.074184	β_4=0.193494
β_5=0.28683	β_6=0.342421
Puntos de ruptura	
s_1=0	s_2=1
s_3=3.5	s_4=7

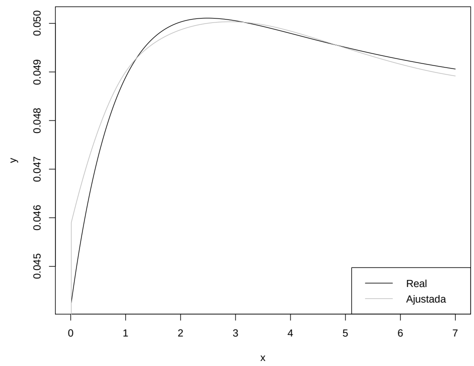


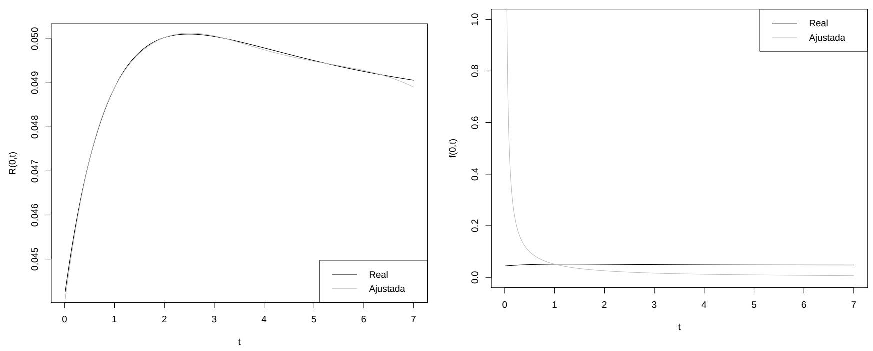
Figura 1.6: Ajuste de la estructura R_1 por medio del modelo Fisher-Nychka-Zervos a través de ϕ. En a) se presenta el ajuste sin parámetro de castigo. En b) se presenta el ajuste con parámetro de castigo.

Es posible observar que se reproduce a la estructura R_1 a través de ϕ y ψ de forma muy parecida. Por otra parte, la estructura R_2 es mejor estimada a través de ψ que ϕ para plazos menores a 3.5 años, mientras que para plazos entre 5 y 7 años ocurre a la inversa.

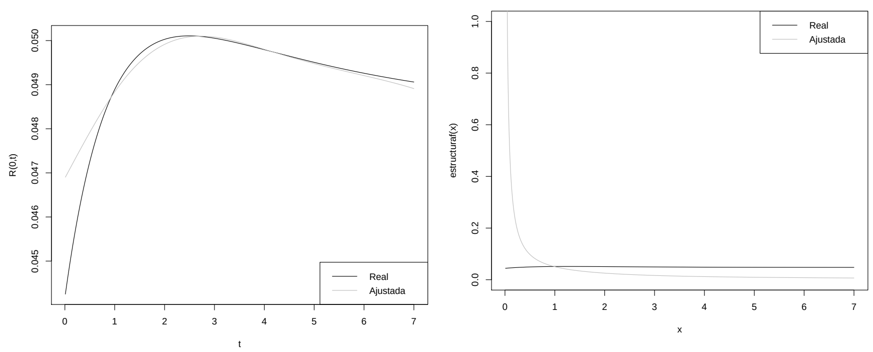
1.6. Más sobre la duración e inmunización

Anteriormente se han expuesto los conceptos de duración y convexidad. En la presente sección se retomará el concepto de duración y se abordará a grandes rasgos el tema de inmunización. Estos temas serán abordados paulatinamente:

a)



b)



a)

Parámetros	
β_1=0.044	β_2=0.049784
β_3=0.05301	β_4=0.045965
β_5=0.050136	β_6=0.044972
Puntos de ruptura	
s_1=0	s_2=1
s_3=3.5	s_4=7

b)

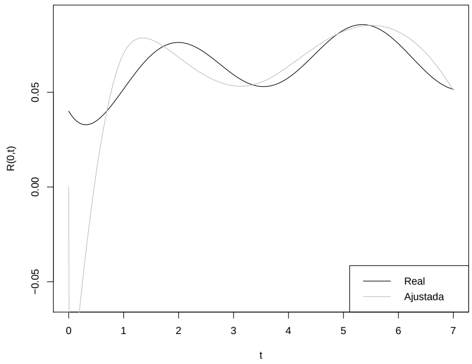
Parámetros	
β_1=0.046882	β_2=0.04829
β_3=0.05327	β_4=0.046657
β_5=0.048581	β_6=0.046472
Puntos de ruptura	
s_1=0	s_2=1
s_3=3.5	s_4=7

Figura 1.7: Ajuste de la estructura R_1 y f_1 por medio del modelo Fisher-Nychka-Zervos a través de ψ. En a) se presenta el ajuste sin parámetro de castigo. En b) se presenta el ajuste con parámetro de castigo.

primero se considerará un movimiento paralelo en la estructura de interés para posteriormente proseguir con el problema de un movimiento no paralelo.

a)

Parámetros	
β_1=0	β_2=-0.041802
β_3=0.202267	β_4=0.025709
β_5=0.694448	β_6=0.356235
Puntos de ruptura	
s_1=0	s_2=1
s_3=3.5	s_4=7



b)

Parámetros	
β_1=0	β_2=-0.0112
β_3=0.15448	β_4=0.09176
β_5=0.635198	β_6=0.360346
Puntos de ruptura	
s_1=0	s_2=1
s_3=3.5	s_4=7

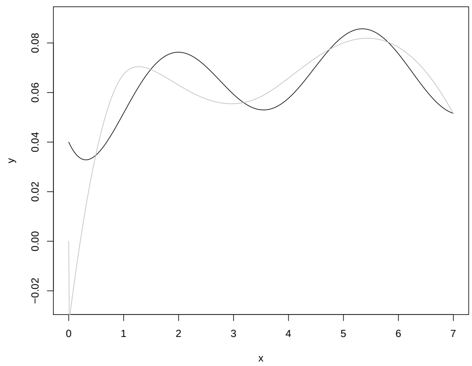
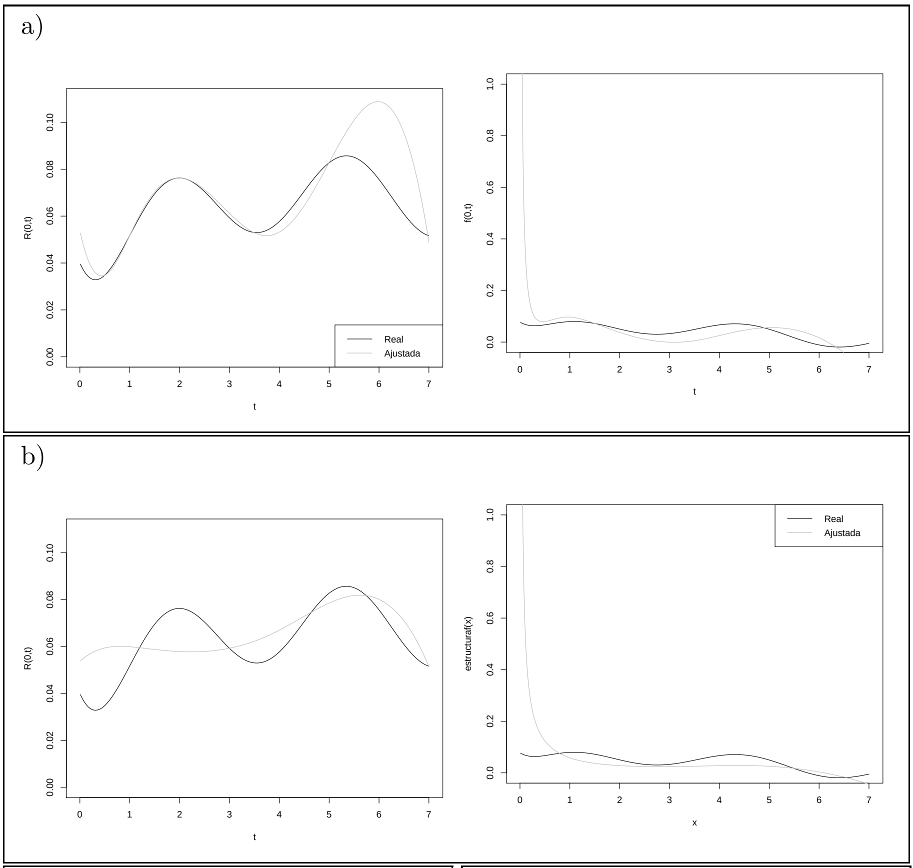


Figura 1.8: Ajuste de la estructura R_2 por medio del modelo Fisher-Nychka-Zervos a través de ϕ. En a) se presenta el ajuste sin parámetro de castigo. En b) se presenta el ajuste con parámetro de castigo.

1.6.1. Inmunización frente a movimientos paralelos en la estructura de tasa de interés

Como se ha mencionado, a menos que se trate de un bono cupón cero, el rendimiento es una tasa promedio y como tal no representa lo que realmente tiene considerado el mercado como la tasa de interés aplicable entre periodos. Para este propósito se ha definido las tasas spot. Las tasas spot, por su parte, representan la tasa vigente aplicable al plazo, por lo que el valor presente de algún pago recibido en un tiempo futuro debe ser descontado en función de la tasa spot que le corresponde. Ésto será significativo pues según (1.1) el precio del bono puede ser considerado como un portafolio de bonos cupón cero, es por ello que es importante considerar la estructura de tasas que pueda ser generada



a)

Parámetros	
β_1=0.053775	β_2=-0.011591
β_3=0.266202	β_4=-0.408295
β_5=0.912444	β_6=-0.892388
Puntos de ruptura	
s_1=0	s_2=1
s_3=3.5	s_4=7

b)

Parámetros	
β_1=0.053711	β_2=0.066401
β_3=0.048691	β_4=0.061123
β_5=0.243334	β_6=-0.30698
Puntos de ruptura	
s_1=0	s_2=1
s_3=3.5	s_4=7

Figura 1.9: Ajuste de la estructura R_2 y f_2 por medio del modelo Fisher-Nychka-Zervos a través de ψ. En a) se presenta el ajuste sin parámetro de castigo. En b) se presenta el ajuste con parámetro de castigo.

con la información disponible. En especial, supóngase que con la información disponible al momento se generan las siguientes tasas spot

$$R(0,1), R(0,2), \cdots, R(0,T).$$

De la relación (1.23), se obtiene

$$R(0,t)t = \int_0^t f(0,s)ds.$$

Cuando toda la estructura reciba un incremento de α se le referirá como un movimiento paralelo en la estructura de tasas. Ésto significaría que la forma original de la curva $(t, R(0,t))$ no se pierde, sino que es trasladada a una estructura de idéntica forma pero diferente valor. Si se agrega αt a ambos lados de la última igualdad no se afectaría la relación, lo cual podría ser reescrito como

$$[R(0,t)+\alpha]t = \int_0^t f(0,s)ds + \int_0^t \alpha ds = \int_0^t [f(0,s)+\alpha]ds. \tag{1.25}$$

Esto quiere decir que una perturbación paralela en la estructura de tasas spot compuestas continuamente equivale a una perturbación de idéntica magnitud en la estructura de tasas forward continuas.

Es posible pensar al pago de cupones de forma continua, suponiendo que el bono es cuponado y de plazo T y definiendo

$$c(t) = \begin{cases} c, & \text{si } t < T-1 \\ c+1, & T-1 \le t \le T \end{cases}.$$

Se tiene que el pago recibido por el propietario del bono en un intervalo infinitesimal de tiempo entre cualquier periodo anterior y el último es cdt, mientras que en el último periodo es de $(c+1)dt$. De esta forma, el valor presente de los pagos infinitesimales puede expresarse indistintamente entonces como $c(t)e^{-\int_0^t f(0,s)ds}$ o $c(t)e^{-tR(0,t)}$, por lo que tiene sentido reexpresar el valor del bono como

$$B(\vec{i}) = \int_0^T c(t)e^{-R(0,t)t}dt. \tag{1.26}$$

Como se hizo anteriormente, la duración se definirá como un promedio ponderado de los tiempos de pago:

$$D(\vec{i}) = \frac{1}{B(\vec{i})}\int_0^T tc(t)e^{-R(0,t)t}dt. \tag{1.27}$$

Además, si inmediatamente después de comprar el bono, la estructura de tasas spot compuestas continuamente recibe un incremento α, entonces la estructura cambia de $\vec{i}$ a $\vec{i}+\alpha$. Bajo estas condiciones, el valor del bono pasa a ser

$$B(\vec{i}+\alpha) = \int_0^t c(t)e^{-[R(0,t)+\alpha]t}dt,$$

y su duración cambiaría a

$$D(\vec{i}+\alpha) = \frac{1}{B(\vec{i}+\alpha)}\int_0^T tc(t)e^{-[R(0,t)+\alpha]t}dt. \tag{1.28}$$

Si se calcula el incremento infinitesimal del precio del bono con respecto a incrementos paralelos en la estructura, se encuentra que

$$\frac{dB(\vec{i}+\alpha)}{d\alpha} = \int_0^T -tc(t)e^{[R(0,t)+\alpha]t}dt.$$

Donde se concluye que entonces la duración puede ser expresada como

$$-\frac{1}{B(\vec{i}+\alpha)}\frac{dB(\vec{i}+\alpha)}{d\alpha} = -\frac{1}{B(\vec{i}+\alpha)}\int_0^T -tc(t)e^{[R(0,s)+\alpha]}ds = D(\vec{i}+\alpha).$$

Si se sustituye $\alpha = 0$ en esta última ecuación, se obtiene la duración inicial antes de existir cambios en la estructura de tasas inicial. Esto quiere decir que el incremento infinitesimal del precio del bono con respecto a cambios paralelos en la estructura está ligado de manera directa con la duración del mismo.
Nuevamente, se determinará el tiempo H que es necesario retener el bono para obtener por lo menos el rendimiento inicial. Para ello, se puede considerar nuevamente el valor que tendrá en un futuro el valor del bono:

$$F_H(\vec{i}) = B(\vec{i}) \cdot e^{[R(0,H)]H}.$$

Si la estructura sufre una perturbación paralela de α, entonces

$$F_H(\vec{i}+\alpha) = B(\vec{i}+\alpha) \cdot e^{[R(0,H)+\alpha]H}.$$

Debemos entonces encontrar el horizonte H de tal que el valor futuro sea mayor o igual al que hubiera tenido si la estructura de tasas no hubiera cambiado ($\alpha = 0$). Esto quiere decir que, viendo F_H como función, ésta debe tener un mínimo global en el espacio (α, F_H) en la coordenada $(\alpha = 0, F_H = F_H(\vec{i}))$. Sin embargo, minimizar $F_H(\vec{i}+\alpha)$ es equivalente a minimizar la función $\ln F_H(\vec{i}+\alpha)$, cuya expresión en términos del valor del bono después del movimiento en la estructura, la tasa spot, el horizonte y el término α es:

$$\ln F_H(\vec{i}+\alpha) = \ln B(\vec{i}+\alpha) + R(0,H)H + \alpha H.$$

Para hacer que esta función tenga a $\alpha = 0$ como mínimo, se requiere en primer lugar que la función en el punto $\alpha = 0$ sea un punto de inflexión, es decir, que su derivada con respecto a α evaluada en dicho punto sea cero:

$$\left.\frac{d\ln F_H(\vec{i}+\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left.\frac{d\ln B(\vec{i}+\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} + H = 0.$$

Esta última ecuación implica a la siguiente relación

$$H = \left.\frac{d\ln B(\vec{i}+\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = -\frac{1}{B(i\vec{+}\alpha)}\left.\frac{dB(\vec{i}+\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = D(\vec{i}+\alpha)\Big|_{\alpha=0} = D(\vec{i}).$$

Esto quiere decir que la duración es el posible candidato a ser el horizonte buscado. Para mostrar que efectivamente F_H posee un mínimo global en el punto, se debe verificar que la segunda derivada es positiva.

$$\frac{d^2\ln F_H(\vec{i}+\alpha)}{d\alpha^2} = \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{B(i\vec{+}\alpha)}\frac{dB(\vec{i}+\alpha)}{d\alpha}\right] = \frac{d}{d\alpha}\left[-D(\vec{i}+\alpha)\right],$$

donde la derivada de $D(\vec{i}+\alpha)$ con respecto a α es

$$\begin{aligned}
\frac{dD(\vec{i}+\alpha)}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha}\left\{\frac{1}{B(\vec{i}+\alpha)}\int_0^T tc(t)e^{-[R(0,t)+\alpha]t}dt\right\} \\
&= \frac{1}{[B(\vec{i}+\alpha)]^2}\left\{\int_0^T -t^2c(t)e^{-[R(0,t)+\alpha]t}dt\cdot B(\vec{i}+\alpha)\right. \\
&\qquad \left. -\int_0^T tc(t)e^{-[R(0,t)+\alpha]t}dt\cdot\frac{dB(\vec{i}+\alpha)}{d\alpha}\right\} \\
&= -\left\{\frac{\int_0^T t^2c(t)e^{-[R(0,t)+\alpha]t}dt}{B(\vec{i}+\alpha)}\right. \\
&\qquad \left. +\frac{\int_0^T tc(t)e^{-[R(0,t)+\alpha]t}dt}{B(\vec{i}+\alpha)}\cdot\frac{1}{B(\vec{i}+\alpha)}\frac{dB(\vec{i}+\alpha)}{d\alpha}\right\} \\
&= -\left\{\frac{\int_0^T t^2c(t)e^{-[R(0,t)+\alpha]t}dt}{B(\vec{i}+\alpha)}+D(\vec{i}+\alpha)\cdot(-D(\vec{i}+\alpha))\right\} \\
&= -\left\{\frac{\int_0^T t^2c(t)e^{-[R(0,t)+\alpha]t}dt}{B(\vec{i}+\alpha)}-D^2(\vec{i}+\alpha)\right\}.
\end{aligned}$$

Esta última expresión es negativa, pues lo que se encuentra dentro de las llaves es la varianza del tiempo de los pagos (en términos del bono) la cual siempre es positiva, de donde se concluye entonces que $\frac{d^2\ln F_H(\vec{i}+\alpha)}{d\alpha^2}=\frac{d}{d\alpha}\big[-D(\vec{i}+\alpha)\big]>0$.

Todo lo anterior indica que, efectivamente, tomando como horizonte la duración del bono, éste quedará protegido ante variaciones paralelas en la estructura de tasas. Sin embargo ¿qué ocurre si la estructura sufre una variación cualquiera? Supóngase que la estructura inicial $R(0,t)$ sufre una variación $\alpha\eta(0,t)$, esta estructura puede ser considerada fija, pero no existe razón alguna para creer que el inversionista tenga la certeza de cómo debe ser esta variación. Al analizar el incremento infinitesimal en el precio del bono con respecto a la variación, es posible observar que tiene poco parecido a la definición de duración. En efecto, al calcular el incremento infinitesimal con respecto al incremento no paralelo, resulta:

$$\frac{dB}{d\alpha}=\int_0^T t\eta(0,t)c(t)e^{-R(0,t)t}dt$$

lo cual no es igual a la duración.
Si se busca un horizonte H bajo el cual el bono sea inmune, nuevamente debe considerarse el valor futuro del valor del bono al horizonte H después de que la estructura sufre la variación, el cual es:

$$F_H=B(\alpha)e^{[R(0,H)+\alpha\eta(0,H)]H}.$$

El mínimo de esta función con respecto a α es equivalente a encontrar el mínimo de la función $\ln F_H$ cuya expresión es:

$$\ln F_H=\ln B(\alpha)+[R(0,H)+\alpha\eta(0,H)]H.$$

Para encontrar el mínimo de esta función, como se ha hecho anteriormente, se debe encontrar α de tal forma que la derivada de lnF_H sea cero:

$$\frac{d\ln F_H}{d\alpha} = \frac{d\ln B(\alpha)}{d\alpha} + \eta(0,H)H.$$

Para encontrar la H^* que minimice esta función, se debe igualar la parte del lado derecho de la expresión anterior a cero, donde H^* resultaría ser

$$H^* = -\left.\frac{\frac{d\ln B(\alpha)}{d\alpha}}{\eta(0,H)}\right|_{\alpha=0}.$$

Sin embargo, al ser desconocida $\eta(0,H)$ no es posible asignar un valor a H^* en el momento de compra del bono. Ésto pareciera indicar que no existe forma alguna de encontrar un horizonte bajo el cual la tasa de interés sea parecida a la inicial.

Otro enfoque para comprender un poco mejor el problema de inmunización bajo variaciones no paralelas en la estructura de tasas es el presentado por la duración direccional.

1.6.2. Duración direccional

Para comprender un poco mejor el problema de inmunizar un bono ante movimientos no paralelos en su estructura, se debe considerar el precio del bono como función de las tasas spot compuestas continuamente bajo las cuales los pagos periódicos serán descontados:

$$B(R(0,1), R(0,2), \cdots, R(0,n)) = \sum_{t=1}^{n} c_t e^{-R(0,t)t}. \tag{1.29}$$

Ahora, la pregunta es ¿qué sucede si la estructura comienza a moverse del punto $\vec{i} = (R(0,1), R(0,2), \cdots, R(0,n))$ al punto $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$? Recuérdese que el precio del bono puede ser visto como una función que toma valores en los números reales (no negativos) y que al ser vista como en (1.29) como una función que depende de n variables, su incremento infinitesimal será:

$$d_a(B) := \lim_{h\to 0} \frac{B(\vec{i} + h\vec{a}) - B(\vec{i})}{h}.$$

La interpretación del límite anterior es la proporción de cambio infinitesimal que recibe la función (en este caso el precio del bono) al ir hacia la dirección $\vec{a}$ y recibe el nombre de *derivada direccional*. Al ser esta una función diferenciable se puede reexpresar en términos del gradiente del bono y la dirección $\vec{a}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{B(\vec{i} + h\vec{a}) - B(\vec{i})}{h} = \bigtriangledown B(\vec{i}) \cdot \vec{a} = \sum_{t=1}^{n} \frac{dB}{dR(0,t)}(R(0,t))a_t.$$

Haciendo uso del lado derecho de esta última ecuación y realizando los cálculos pertinentes en la ecuación (1.29), esto se reduce a

$$d_a(B(\vec{i})) = -\sum_{t=1}^{n} t a_t c_t e^{-(R0,t)t},$$

o equivalentemente

$$D_a(\vec{i}) := \frac{d_a(B(\vec{i}))}{B(\vec{i})} = -\frac{\sum_{t=1}^{n} t a_t c_t e^{-(R0,t)t}}{B(\vec{i})}. \tag{1.30}$$

A D_a se le dará el nombre de *duración direccional.* Además, una vez fijada la dirección $\vec{a}$, se puede interpretar a la duración direccional de la misma forma que la duración, es decir, como una aproximación en el cambio proporcional en el precio del bono, $D_a \approx \frac{\Delta B}{B}$. Sin embargo, es posible observar que al existir una infinidad de direcciones $\vec{a}$ no existe una única "duración" y por tanto no existe manera alguna de dar una única aproximación en el cambio proporcional en el precio del bono ante cambios en la estructura de tasas (este hecho se hizo presente anteriormente cuando se trató de estimar H^*). Aunque se podría inferir el cambio en la estructura de tasas y de este modo dar una "aproximación", no puede afirmarse categóricamente que el bono es inmune bajo algún plazo en específico.

1.6.3. El Teorema de Inmunización y su aplicación

A pesar de que no existe una forma de fijar un periodo bajo el cual un bono cuponado o portafolio de bonos sea inmune ante cambios en la estructura de tasas, el problema será transportado a uno de la siguiente forma: dado un horizonte específico de interés, ¿cuál debe ser la constitución del portafolio para inmunizarlo por un periodo de tiempo cuando la estructura sufre alguna variación cualquiera? Para ello se hará uso del Teorema general de inmunización, aunque también será de utilidad la siguiente definición.

Definición 1.6.1. Se define el *momento de orden k* de un portafolio de bonos como el promedio ponderado de la k-ésima potencia de sus tiempos de pago, donde los pesos serán la proporción que representan los flujos con respecto al precio del bono inicial.

Por ejemplo, dos formas de expresar el momento k-ésimo es a través de la tasa forward instantanea y spot compuesta continuamente, con las cuales toma la siguiente forma:

$$\frac{\sum_{t=1}^{N} t^k c_t e^{-\int_0^t f(0,s)ds}}{B_0} = \frac{\sum_{t=1}^{N} t^k c_t e^{-tR(0,t)}}{B_0}.$$

Nótese que el momento de orden k puede ser calculado de diferentes formas debido a las relaciones existentes entre las diferentes tasas. Sin embargo, expresado bajo cualquiera de éstas se debe llegar al el mismo resultado numérico.

El teorema de inmunización que ahora se presenta es una poderosa herramienta para construir un portafolio inmune ante movimientos no paralelos en la estructura de interés.

Teorema 1.6.2. *Supóngase que la tasa spot compuesta continuamente sobre un periodo* t, $G(t) = tR(0,t) = \int_0^t f(0,s)ds$ *se puede desarrollar como una serie de Taylor de la forma* $\sum_{j=0}^m A_j t^j + \frac{1}{(m+1)!}G^{(m+1)}(\theta t)t^{m+1}$, *con* $0 < \theta < 1$, *donde* $A_j = (\frac{1}{j!})G^{(j)}(0)$, $j = 0, 1, \cdots, m$.
Sea B_H *el valor del portafolio después del cambio en la estructura de tasas spot. Para que un inversionista con horizonte* H *esté inmunizado contra cualquier cambio en la estructura de tasas spot, basta con que se cumplan las siguientes condiciones al momento de compra*

- *Cualquier momento de orden* j ($j = 0, 1 \cdots, m$) *del bono es igual a* H^j.
- *La matriz Hessiana de segundas derivadas parciales* $\frac{d^2 B_H}{dA_j^2}$ *es positiva definida.*

Demostración. Supóngase que se puede escribir la serie

$$\begin{aligned} G(t) &= G(0) + G'(0)t + \frac{1}{2!}G''(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{m!}G^{(m)}(0)t^m \\ &\quad + \frac{1}{(m+1)!}G^{(m+1)}(\theta t)t^{m+1}. \end{aligned}$$

Esto significa que puede aproximarse $G(t)$ con cierta exactitud deseada a un polinomio de la forma

$$G(t) \approx A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_m t^m = \sum_{j=0}^m A_j t^j,$$

donde $A_j = \frac{1}{j!}G^{(j)}(0)$, con $j = 0, 1, \cdots, m$.
Si se considera $[1, N]$ el intervalo de tiempo bajo los cuales hay flujo de dinero, entonces el precio del portafolio puede ser aproximado como

$$B_0 = \sum_{t=1}^N c_t e^{-\int_0^t f(0,s)ds} = \sum_{t=1}^N c_t e^{-tR(0,t)} \approx \sum_{t=1}^N c_t e^{-(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_m t^m)}.$$

Para inmunizar al portafolio se tiene que garantizar el valor futuro del valor del portafolio a un horizonte H (con $H < N$) cuyo valor es

$$B_H = \Big[\sum_{t=1}^N c_t e^{-R(0,t)t}\Big] e^{R(H)H} = \Big[\sum_{t=1}^N c_t e^{-G(t)}\Big] e^{G(H)},$$

y que por hipótesis se puede aproximar como

$$B_H \approx \Big[\sum_{t=1}^{N} c_t e^{-(A_0+A_1t+A_2t^2+\cdots+A_mt^m)}\Big] e^{(A_0+A_1H+A_2H^2+\cdots+A_mH^m)}.$$

Además el valor futuro debe pasar por un mínimo en el espacio $m+1$-dimensional $(B_H, A_0, \cdots, A_m)$, y, como se ha hecho anteriormente, se minimizará la función equivalente $\log B_H$ que puede expresarse como

$$\log B_H \approx \log \Big[\sum_{t=1}^{N} c_t e^{-(A_0+A_1t+A_2t^2+\cdots+A_mt^m)}\Big] + A_0 + A_1H + A_2H^2 + \cdots + A_mH^m.$$

Una condición para minimizar $\log B_H$ es que su gradiente sea cero en el punto inicial $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_m$, lo que implica el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d\log B_H}{dA_0} &= 0 \\ \frac{d\log B_H}{dA_1} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{d\log B_H}{dA_m} &= 0. \end{aligned} \tag{1.31}$$

La primera de estas ecuaciones implica la siguiente relación

$$\frac{d\log B_H}{dA_0} = \frac{\sum_{t=1}^{N} c_t e^{-(A_0+A_1t+A_2t^2+\cdots+A_mt^m)}}{B_0}(-1) + 1 = 0,$$

o equivalentemente

$$1 = \frac{\sum_{t=1}^{N} c_t e^{-(A_0+A_1t+A_2t^2+\cdots+A_mt^m)}}{B_0}.$$

Esta ecuación es importante, pues expresa que la aproximación tiene que ser lo suficientemente buena como para que el valor del portafolio sea el mismo bajo la aproximación. Considerando el j-ésimo, término se obtiene

$$\frac{d\log B_H}{dA_j} = \frac{\sum_{t=1}^{N} c_t e^{-(A_0+A_1t+A_2t^2+\cdots+A_mt^m)}}{B_0}(-t^j) + H^j = 0,$$

o equivalentemente

$$H^j = \frac{\sum_{t=1}^{N} t^j c_t e^{-(A_0+A_1t+A_2t^2+\cdots+A_mt^m)}}{B_0} \qquad j = 0, 1, \cdots, m, \tag{1.32}$$

lo que conduce a la primera parte del teorema. La segunda parte es el requerimiento para garantizar que efectivamente se trate de un mínimo, con lo que se concluye la demostración. □

Obsérvese que la ecuación (1.32) contiene $m+1$ ecuaciones, por lo que si la expansión de Taylor que se ha escogido es de grado m, el portafolio a inmunizar tendrá que contener $m+1$ bonos. La razón de esto es que se busca generar que el sistema de ecuaciones tenga solución única, hecho que se visualizará mejor con un ejemplo.

Primero, supóngase que la aproximación de Taylor de la función $R(0,t)$ obtenida a través de algún método presentado anteriormente es $R(0,t) \approx 0.03779936 + (2.545992)10^{-3}t - (1.030853)10^{-4}t^2 + (3.035141)10^{-6}t^3$.
Considérese además un portafolio de bonos compuesto por alguna combinación lineal de bonos con características dadas en el cuadro 1.10.

	Tasa cupón (%)	Plazo (años)	Valor nominal
Bono 1	4.5	3	100
Bono 2	4	4	100
Bono 3	4.5	6	100
Bono 4	5	7	100
Bono 5	2	10	100

Cuadro 1.10: Características.

Bajo esta estructura inicial, la valuación de los bonos quedaría conformada según se muestra en el cuadro 1.11.

		Valor presente de los pagos				
Plazo	Tasa spot	Bono 1	Bono 2	Bono 3	Bono 4	Bono 5
(años)	R(0,t)	$c_t^{(1)}e^{R(t)t}$	$c_t^{(2)}e^{R(t)t}$	$c_t^{(3)}e^{R(t)t}$	$c_t^{(4)}e^{R(t)t}$	$c_t^{(5)}e^{R(t)t}$
1	0.040245	4.322492	3.842215	4.322492	4.802769	1.921108
2	0.042503	4.133278	3.674025	4.133278	4.592531	1.837013
3	0.044592	91.41526	3.499149	3.936543	4.373936	1.749575
4	0.046528		86.33871	3.735810	4.150900	1.660360
5	0.048332			3.533962	3.926624	1.570650
6	0.050020			77.40629	3.703650	1.481460
7	0.051611				73.16243	1.393570
8	0.053124					1.307552
9	0.054576					1.223803
10	0.055986					58.27154
Precio del bono		99.87103	97.35409	97.06837	98.71284	72.41663

Cuadro 1.11: Valuación de bonos con la estructura inicial.

Supóngase que se quiere invertir una cantidad de 100 unidades monetarias a un periodo de 3 años a una tasa del $R(3)$ =4.4592 %, aunque desafortunadamente no exista algún bono cupón cero que garantice dicha tasa. Para resolver el problema, se debe encontrar un portafolio que tenga un valor total de 100 unidades monetarias repartidas en los cinco tipos de bonos. Sin embargo, para dicho propósito será necesario suponer que es posible comprar o vender una cantidad no entera de bonos. Además, se deben calcular los momentos de orden k con $k = 0, 1, 2, \cdots, m$ para alguna m. Pero ¿qué valor de m es apropiado? Para darle respuesta a esta pregunta se debe considerar, respetando la notación del teorema de inmunización, que la función $G(t)$ tiene como aproximación $G(t) \approx 0.03779936t + (2.545992)10^{-3}t^2 - (1.030853)10^{-4}t^3 + (3.035141)10^{-6}t^4$. De aquí se puede observar que $A_0 = 0$, $A_1 = 0.03779936$, $A_2 = (2.545992)10^{-3}$, $A_3 = -(1.030853)10^{-4}$, $A_4 = (3.035141)10^{-6}$, por lo que el valor de m es 4.

Según (1.32) con $m = 4$, debe resolverse un sistema de cinco ecuaciones, pero para que este sistema tenga solución única el número de incógnitas (número de bonos) debe ser también cinco. Esto quiere decir que si existen más de cinco bonos con diferente plazo en el mercado deben seleccionarse sólo cinco, pero ¿qué bonos son los indicados para conformar el portafolio? En principio, si se conociera con exactitud la estructura $R(t)$, la selección sería indistinta siempre que el plazo de estos bonos sean distintos entre sí y mayores o iguales al horizonte H. Sin embargo, al tratarse de una aproximación alrededor de $t = 0$, esto significa que mientras más cercano se esté del punto 0, más parecida será la función definida por la aproximación, por lo que intuitivamente deberían seleccionase aquellos bonos con plazos más cercanos al horizonte H. En el ejemplo aquí expuesto, denotando como $m_k^{(j)}$ el k-ésimo momento del j-ésimo bono y P el valor del portafolio, se necesita resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{n_1 B_0^{(1)}}{P} m_0^{(1)} + \frac{n_2 B_0^{(2)}}{P} m_0^{(2)} + \frac{n_3 B_0^{(3)}}{P} m_0^{(3)} + \frac{n_4 B_0^{(4)}}{P} m_0^{(4)} + \frac{n_5 B_0^{(5)}}{P} m_0^{(5)} &= H^0 \\
\frac{n_1 B_0^{(1)}}{P} m_1^{(1)} + \frac{n_2 B_0^{(2)}}{P} m_1^{(2)} + \frac{n_3 B_0^{(3)}}{P} m_1^{(3)} + \frac{n_4 B_0^{(4)}}{P} m_1^{(4)} + \frac{n_5 B_0^{(5)}}{P} m_1^{(5)} &= H^1 \\
\frac{n_1 B_0^{(1)}}{P} m_2^{(1)} + \frac{n_2 B_0^{(2)}}{P} m_2^{(2)} + \frac{n_3 B_0^{(3)}}{P} m_2^{(3)} + \frac{n_4 B_0^{(4)}}{P} m_2^{(4)} + \frac{n_5 B_0^{(5)}}{P} m_2^{(5)} &= H^2 \\
\frac{n_1 B_0^{(1)}}{P} m_3^{(1)} + \frac{n_2 B_0^{(2)}}{P} m_3^{(2)} + \frac{n_3 B_0^{(3)}}{P} m_3^{(3)} + \frac{n_4 B_0^{(4)}}{P} m_3^{(4)} + \frac{n_5 B_0^{(5)}}{P} m_3^{(5)} &= H^3 \\
\frac{n_1 B_0^{(1)}}{P} m_4^{(1)} + \frac{n_2 B_0^{(2)}}{P} m_4^{(2)} + \frac{n_3 B_0^{(3)}}{P} m_4^{(3)} + \frac{n_4 B_0^{(4)}}{P} m_4^{(4)} + \frac{n_5 B_0^{(5)}}{P} m_4^{(5)} &= H^4
\end{aligned}$$

Fijando el valor del portafolio en un valor de 100 unidades monetarias, todo en el sistema anterior es conocido, excepto el número de bonos que deben obtenerse de cada tipo. Esto puede reexpresarse de forma matricial como

$$\mathbf{nm} = \mathbf{h}$$

donde

- $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)^\top$ el vector columna de incógnitas
- $\mathbf{m}$ la matriz de los términos de la forma $\frac{1}{P} B_0^{(l)} m_k^{(l)}$ con $k = 0, 1, 2, 3$ y $l = 1, 2, 3, 4$

- **h** el vector de potencias del horizonte.

El cálculo de los momentos 1, 2, 3 y 4 se encuentran en los cuadros 1.12, 1.13, 1.14, 1.15 respectivamente
Una vez hechos los cálculos pertinentes la matriz **m** resulta ser

Plazo (años)	Tasa spot R(0,t)	Valor presente de los pagos Bono 1 $\frac{tc_t^{(1)}e^{R(t)t}}{B^{(1)}}$	Bono 2 $\frac{tc_t^{(2)}e^{R(t)t}}{B^{(2)}}$	Bono 3 $\frac{tc_t^{(3)}e^{R(t)t}}{B^{(3)}}$	Bono 4 $\frac{tc_t^{(4)}e^{R(t)t}}{B^{(4)}}$	Bono 5 $\frac{tc_t^{(5)}e^{R(t)t}}{B^{(5)}}$
1	0.040245	0.043281	0.039466	0.044530	0.048654	0.026529
2	0.042503	0.082772	0.075478	0.085162	0.093048	0.050735
3	0.044592	2.745999	0.107827	0.121663	0.132929	0.072480
4	0.046528		3.547409	0.153945	0.168201	0.091712
5	0.048332			0.182035	0.198891	0.108445
6	0.050020			4.784645	0.225117	0.122745
7	0.051611				5.188150	0.134706
8	0.053124					0.144448
9	0.054576					0.152095
10	0.055986					8.046707
Momento de orden 1		2.872052	3.770181	5.371981	6.054990	8.950601

Cuadro 1.12: Momento de Orden 1.

Plazo (años)	Tasa spot R(0,t)	Valor presente de los pagos Bono 1 $\frac{t^2c_t^{(1)}e^{R(t)t}}{B^{(1)}}$	Bono 2 $\frac{t^2c_t^{(2)}e^{R(t)t}}{B^{(2)}}$	Bono 3 $\frac{t^2c_t^{(3)}e^{R(t)t}}{B^{(3)}}$	Bono 4 $\frac{t^2c_t^{(4)}e^{R(t)t}}{B^{(4)}}$	Bono 5 $\frac{t^2c_t^{(5)}e^{R(t)t}}{B^{(5)}}$
1	0.040245	0.043281	0.039466	0.044530	0.048654	0.026529
2	0.042503	0.165545	0.150955	0.170324	0.186097	0.101469
3	0.044592	8.237998	0.323482	0.364989	0.398787	0.217439
4	0.046528		14.189637	0.615782	0.672804	0.366846
5	0.048332			0.910173	0.994456	0.542227
6	0.050020			28.707872	1.350700	0.736468
7	0.051611				36.317050	0.942945
8	0.053124					1.155581
9	0.054576					1.368857
10	0.055986					80.467072
Momento de orden 2		8.446823	14.703541	30.813671	39.968547	85.925434

Cuadro 1.13: Momento de Orden 2.

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 0.99871039 & 0.973540993 & 0.987128454 & 0.724166346 & 0.724166346 \\ 2.868348549 & 3.670425527 & 5.977053057 & 6.481723916 & 6.481723916 \\ 8.435930245 & 14.31450018 & 39.45409042 & 62.22430734 & 62.22430734 \\ 25.05600977 & 56.53388886 & 268.1082856 & 609.9760429 & 609.9760429 \\ 74.75091721 & 224.4876747 & 1038.729638 & 1844.122797 & 6029.462296 \end{pmatrix}$$

		Valor presente de los pagos				
Plazo	Tasa spot	Bono 1	Bono 2	Bono 3	Bono 4	Bono 5
(años)	R(0,t)	$\frac{t^3 c_t^{(1)} e^{R(t)t}}{B^{(1)}}$	$\frac{t^3 c_t^{(2)} e^{R(t)t}}{B^{(2)}}$	$\frac{t^3 c_t^{(3)} e^{R(t)t}}{B^{(3)}}$	$\frac{t^3 c_t^{(4)} e^{R(t)t}}{B^{(4)}}$	$\frac{t^3 c_t^{(5)} e^{R(t)t}}{B^{(5)}}$
1	0.040245	0.043281	0.039466	0.044530	0.048654	0.026529
2	0.042503	0.331089	0.301910	0.340649	0.372193	0.202938
3	0.044592	24.713994	0.970447	1.094967	1.196362	0.652316
4	0.046528		56.758549	2.463128	2.691216	1.467384
5	0.048332			4.550866	4.972281	2.711134
6	0.050020			172.247232	8.104198	4.418811
7	0.051611				254.219348	6.600618
8	0.053124					9.244651
9	0.054576					12.319716
10	0.055986					804.670719
Momento de orden 3		25.088364	58.070373	180.741372	271.604252	842.314817

Cuadro 1.14: Momento de Orden 3.

		Valor presente de los pagos				
Plazo	Tasa spot	Bono 1	Bono 2	Bono 3	Bono 4	Bono 5
(años)	R(0,t)	$\frac{t^4 c_t^{(1)} e^{R(t)t}}{B^{(1)}}$	$\frac{t^4 c_t^{(2)} e^{R(t)t}}{B^{(2)}}$	$\frac{t^4 c_t^{(3)} e^{R(t)t}}{B^{(3)}}$	$\frac{t^4 c_t^{(4)} e^{R(t)t}}{B^{(4)}}$	$\frac{t^4 c_t^{(5)} e^{R(t)t}}{B^{(5)}}$
1	0.040245	0.043281	0.039466	0.044530	0.048654	0.026529
2	0.042503	0.662178	0.603820	0.681298	0.744386	0.405876
3	0.044592	74.141982	2.911342	3.284900	3.589085	1.956947
4	0.046528		227.034197	9.852511	10.764863	5.869537
5	0.048332			22.754331	24.861404	13.555670
6	0.050020			1033.483394	48.625190	26.512864
7	0.051611				1779.535438	46.204329
8	0.053124					73.957210
9	0.054576					110.877445
10	0.055986					8046.707195
Momento de orden 4		74.847441	230.588826	1070.100965	1868.169021	8326.073601

Cuadro 1.15: Momento de Orden 4.

cuya inversa es

$$\mathbf{m}^{-1} = \begin{pmatrix} 10.19540342 & -5.142049497 & 0.765508287 & -0.03555393 & 6.23797 \times 10^{-17} \\ -12.82225661 & 7.628668687 & -1.262979783 & 0.062996842 & -8.60275 \times 10^{-17} \\ 4.101826265 & -2.889148317 & 0.60261287 & -0.035642238 & 3.01395 \times 10^{-17} \\ -0.976258009 & 0.715441299 & -0.162757803 & 0.012521454 & -0.000238929 \\ -0.0570575 & 0.058630966 & -0.016503217 & 0.000405878 & 0.000238929 \end{pmatrix}$$

Además, el vector columna de horizontes $\mathbf{h}$ es

$$\mathbf{h} = (1, 3, 9, 27, 81)^{\top}$$

Por lo que el número de bonos a adquirir de cada tipo es

$$\mathbf{n} = (0.698873393, 0.397846143, -0.104443281, 0.023971634, 0.000618415)$$

Con este número adquirido de bonos, el precio del portafolio es de 100.8021168 unidades monetarias, presumiblemente por errores numéricos de cálculo, con este valor del portafolio se espera obtener $100.8021168e^{R(3)3} = 115.2304351$.
Ahora, supóngase que se ha adquirido dicho portafolio de bonos y que la estructura cambia a $\hat{R}(t) = .056$, es decir, es una estructura constante para cualquier valor en el tiempo. Bajo esta nueva estructura, la valuación queda según se muestra en el cuadro 1.16.
El nuevo valor del portafolio es de 97.71210613 unidades monetarias, es decir, su valor disminuyó en 3.0654224 % (nótese que intuitivamente ha disminuido pues la tasa ha aumentado en todos los periodos excepto el último, de esta forma el valor de todos los bonos ha disminuido con excepción del último). Sin embargo, bajo esta nueva estructura el valor del portafolio al final del año tres es de $97.71210613e^{\hat{R}(3)3} = 115.236277$ el cual es muy parecido a la cantidad que se deseaba obtener inicialmente.
Ahora, supóngase que la estructura sufre un cambio paralelo, es decir, conserva su forma pero ésta es trasladada. Sea $R^*(t) = 0.03379936 + (2.545992)10^{-3}t - (1.030853)10^{-4}t^2 + (3.035141)10^{-6}t^3$ dicha traslación, bajo esta estructura el precio inicial del portafolio es de 102.0367266 unidades monetarias (nótese que intuitivamente ha incrementado el precio del bono debido a que toda tasa spot implicada ha bajado de valor), las cuales al final del año tres tienen un valor de $102.0367266e^{3R^*(3)} = 115.2504244$ unidades monetarias, lo cual difiere 0.019989 unidades monetarias de lo esperado inicialmente. La valuación de los bonos bajo esta estructura se encuentra en la tabla 1.17.

Ahora, supóngase que la estructura aumenta pero mantiene su punto final: la estructura $\widehat{R}(t) = .05 + (1.5)10^{-4}t - (1.2)10^{-5}t^2 + (5.686)10^{-6}t^3$ tiene esta propiedad y la valuación de los bonos con ésta se encuentra en el cuadro 1.18.
Bajo esta nueva estructura el valor del portafolio es de 99.05834182, es decir, que el precio del portafolio disminuyó en 1.7298993 % (nuevamente, intuitivamente ha disminuido el valor del portafolio debido a un incremento en toda la estructura excepto en el último punto). Sin embargo, el valor del portafolio a final del

Plazo (años)	Tasa spot $\hat{R}(0,t)$	Valor presente de los pagos Bono 1 $c_t^{(1)}e^{R(t)t}$	Bono 2 $c_t^{(2)}e^{R(t)t}$	Bono 3 $c_t^{(3)}e^{R(t)t}$	Bono 4 $c_t^{(4)}e^{R(t)t}$	Bono 5 $c_t^{(5)}e^{R(t)t}$
1	0.056	4.254926	3.782157	4.254926	4.727696	1.891078
2	0.056	4.023199	3.576177	4.023199	4.470221	1.788089
3	0.056	88.33947	3.381415	3.804092	4.226769	1.690708
4	0.056		83.12877	3.596918	3.996576	1.598630
5	0.056			3.401027	3.778919	1.511567
6	0.056			74.67811	3.573116	1.429246
7	0.056				70.94893	1.351408
8	0.056					1.277809
9	0.056					1.208219
10	0.056					58.26332
Precio del bono		96.61760	93.86852	93.75827	95.72222	72.01007

Cuadro 1.16: Valuación de bonos con la estructura $\hat{R}$.

año tres bajo esta estructura es de $99.05834182e^{3\widehat{R}(3)} = 115.2605887$, lo cual no difiere mucho del valor del portafolio que se deseaba obtener (115.2304351 unidades monetarias).
Ahora supóngase que la estructura disminuye manteniendo su punto inicial $\bar{R}(t) = 0.03779936 + (3.18249)10^{-4}t - (1.288566)10^{-5}t^2 + (3.793926)10^{-7}t^3$. La valuación de los bonos bajo esta nueva estructura se encuentra compilada en la tabla 1.19. Además, el valor presente del portafolio es de 102.6885778 unidades monetarias, mientras que su valor al final del año tres es de $102.6885778e^{\bar{R}(3)3} = 115.3125227$,que tampoco difiere mucho del valor que se esperaba obtener al final del plazo de la inversión.

Ahora supóngase que la estructura cambia de tal forma que incrementa en un inicio y luego decrece; sea $\breve{R}(t) = 0.05279936-(4.243321)10^{-4}t-(1.030853)10^{-4}t^2-(3.035141)10^{-6}t^3$ la nueva estructura, bajo esta nueva estructura el valor inicial del portafolio es de 99.07146638 unidades monetarias y su valor al final del año tres es de $99.07146638e^{3\breve{R}(3)} = 115.2831659$ unidades monetarias. La valuación bajo esta estructura se encuentra en la tabla 1.20.
Por último, supóngase que la estructura cambia y toma una forma de "S" $\widetilde{R}(t) = 0.047724489 + 0.0017766t - 0.000546646t^2 + 0.00004555357t^3$. La valuación bajo esta estructura se encuentra en la tabla 1.21; el valor presente del portafolio es de 99.41250571 unidades monetarias, mientras que su valor al final del tercer periodo es de $99.41250571e^{3\widetilde{R}} = 115.2808335$.
La forma que toman todas estas estructuras así como una breve comparación con la estructura inicial pueden ser encontradas en la figura 1.6 y 1.7.

Plazo (años)	Tasa spot R^*(0,t)	Valor presente de los pagos Bono 1 $c_t^{(1)}e^{R(t)t}$	Bono 2 $c_t^{(2)}e^{R(t)t}$	Bono 3 $c_t^{(3)}e^{R(t)t}$	Bono 4 $c_t^{(4)}e^{R(t)t}$	Bono 5 $c_t^{(5)}e^{R(t)t}$
1	0.036245	4.339817	3.857615	4.339817	4.822018	1.928807
2	0.038503	4.166477	3.703535	4.166477	4.629419	1.851768
3	0.040592	92.518860	3.541392	3.984066	4.426740	1.770696
4	0.042528		87.731240	3.796063	4.217848	1.687139
5	0.044332			3.605352	4.005947	1.602379
6	0.046020			79.286516	3.793613	1.517445
7	0.047611				75.239932	1.433142
8	0.049124					1.350070
9	0.050576					1.268663
10	0.051986					60.649652
Precio del bono		101.025154	98.833782	99.178291	101.135518	75.059761

Cuadro 1.17: Valuación de bonos con la estructura R^*.

Plazo (años)	Tasa spot $\widehat{R}(0,t)$	Valor presente de los pagos Bono 1 $c_t^{(1)}e^{R(t)t}$	Bono 2 $c_t^{(2)}e^{R(t)t}$	Bono 3 $c_t^{(3)}e^{R(t)t}$	Bono 4 $c_t^{(4)}e^{R(t)t}$	Bono 5 $c_t^{(5)}e^{R(t)t}$
1	0.050143	4.279917	3.804371	4.279917	4.755464	1.902186
2	0.050297	4.069346	3.617197	4.069346	4.521496	1.808598
3	0.050495	89.81037	3.437718	3.867432	4.297147	1.718859
4	0.050771		84.88549	3.672930	4.081034	1.632413
5	0.051160			3.484323	3.871470	1.548588
6	0.051696			76.63163	3.666586	1.466634
7	0.052412				72.75330	1.385777
8	0.053343					1.305259
9	0.054523					1.224386
10	0.055986					58.27148
Precio del bono		98.15963	95.74478	96.00558	97.94649	72.26418

Cuadro 1.18: Valuación de bonos con la estructura $\widehat{R}$.

Plazo (años)	Tasa spot $\bar{R}(0,t)$	Valor presente de los pagos: Bono 1 $c_t^{(1)}e^{R(t)t}$	Bono 2 $c_t^{(2)}e^{R(t)t}$	Bono 3 $c_t^{(3)}e^{R(t)t}$	Bono 4 $c_t^{(4)}e^{R(t)t}$	Bono 5 $c_t^{(5)}e^{R(t)t}$
1	0.038105	4.331753	3.850447	4.331753	4.813059	1.925224
2	0.038387	4.167443	3.704394	4.167443	4.630492	1.852197
3	0.038648	93.059766	3.562096	4.007358	4.452620	1.781048
4	0.038890		89.017149	3.851704	4.279671	1.711868
5	0.039116			3.700611	4.111790	1.644716
6	0.039327			82.535257	3.949055	1.579622
7	0.039526				79.621128	1.516593
8	0.039715					1.455614
9	0.039896					1.396654
10	0.040073					68.322972
Precio del bono		101.558962	100.134086	102.594126	105.857816	83.186508

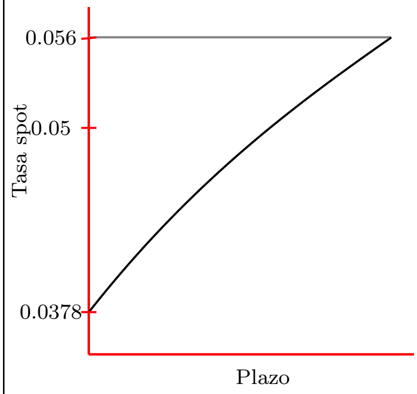
Cuadro 1.19: Valuación de bonos con la estructura $\bar{R}$.

Plazo (años)	Tasa spot $\breve{R}(0,t)$	Valor presente de los pagos: Bono 1 $c_t^{(1)}e^{R(t)t}$	Bono 2 $c_t^{(2)}e^{R(t)t}$	Bono 3 $c_t^{(3)}e^{R(t)t}$	Bono 4 $c_t^{(4)}e^{R(t)t}$	Bono 5 $c_t^{(5)}e^{R(t)t}$
1	0.052269	4.270831	3.796294	4.270831	4.745368	1.898147
2	0.051514	4.059457	3.608406	4.059457	4.510508	1.804203
3	0.050517	89.804684	3.437500	3.867187	4.296875	1.718750
4	0.049258		85.400950	3.695233	4.105815	1.642326
5	0.047721			3.544764	3.938626	1.575451
6	0.045887			79.349872	3.796645	1.518658
7	0.043737				77.308409	1.472541
8	0.041253					1.437810
9	0.038418					1.415364
10	0.035212					71.725701
Precio del bono		98.134972	96.243151	98.787345	102.702246	86.208951

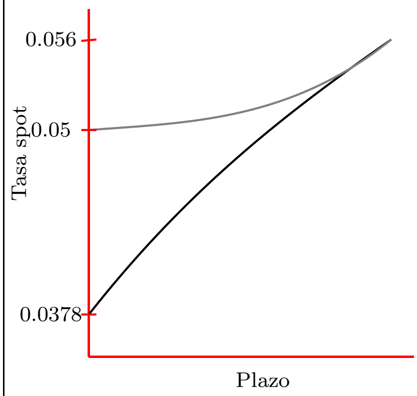
Cuadro 1.20: Valuación de bonos con la estructura $\breve{R}$.

		Valor presente de los pagos				
Plazo	Tasa spot	Bono 1	Bono 2	Bono 3	Bono 4	Bono 5
(años)	$\widetilde{R}(0,t)$	$c_t^{(1)}e^{R(t)t}$	$c_t^{(2)}e^{R(t)t}$	$c_t^{(3)}e^{R(t)t}$	$c_t^{(4)}e^{R(t)t}$	$c_t^{(5)}e^{R(t)t}$
1	0.049000	4.284815	3.808725	4.284815	4.760906	1.904362
2	0.049456	4.076205	3.623293	4.076205	4.529116	1.811647
3	0.049364	90.115647	3.449403	3.880578	4.311753	1.724701
4	0.049000		85.489279	3.699055	4.110061	1.644025
5	0.048636			3.528595	3.920661	1.568264
6	0.048544			78.094579	3.736583	1.494633
7	0.049000				74.512059	1.419277
8	0.050275					1.337690
9	0.052644					1.245267
10	0.056379					58.042658
Precio del bono		98.476666	96.370699	97.563827	99.881140	72.192525

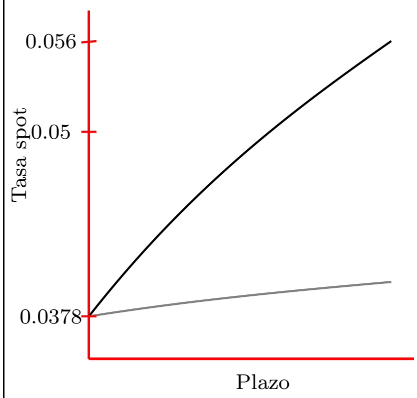
Cuadro 1.21: Valuación de bonos con la estructura $\widetilde{R}$.



Tipo de tasa Spot	Valor Presente del Portafolio	Valor Futuro del Portafolio
—$R(t)$	100.8021168	115.2304351
—$\hat{R}(t)$	97.71210613	115.236277

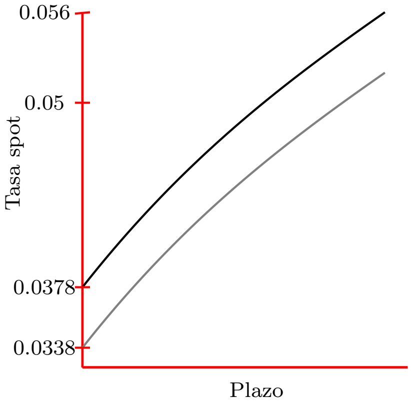


Tipo de tasa spot	Valor Presente del Portafolio	Valor Futuro del Portafolio
—$R(t)$	100.8021168	115.2304351
—$\widehat{R}(t)$	99.05834182	115.2605887

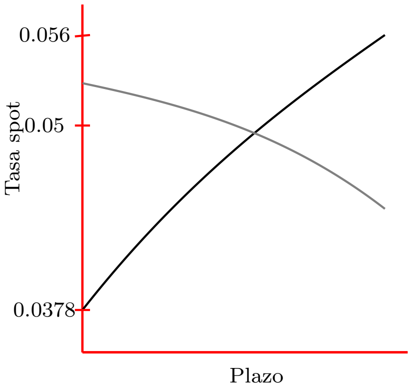


Tipo de tasa Spot	Valor Presente del Portafolio	Valor Futuro del Portafolio
—$R(t)$	100.8021168	115.2304351
—$\bar{R}(t)$	102.6885778	115.3125227

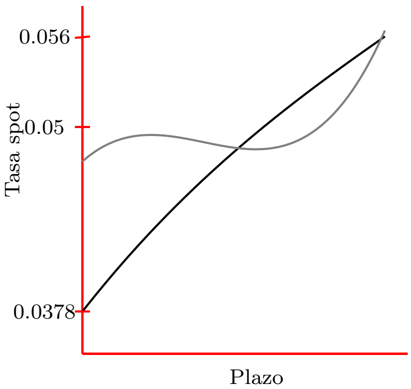
Figura 1.10: Alteraciones en la estructura de tasas. En negro se muestra la estructura original. En gris se muestra la estructura alterada. En la tabla se encuentra el valor presente y futuro del portafolio bajo ambas estructuras.



Tipo de tasa Spot	Valor Presente del Portafolio	Valor Futuro del Portafolio
— $R(t)$	100.8021168	115.2304351
— $R^*(t)$	102.0367266	115.2504244



Tipo de tasa Spot	Valor Presente del Portafolio	Valor Futuro del Portafolio
— $R(t)$	100.8021168	115.2304351
— $\breve{R}(t)$	99.07146638	115.2831659



Tipo de tasa Spot	Valor Presente del Portafolio	Valor Futuro del Portafolio
— $R(t)$	100.8021168	115.2304351
— $\widetilde{R}(t)$	99.41250571	115.2808335

Figura 1.11: Alteraciones en la estructura de tasas. En negro se muestra la estructura original. En gris se muestra la estructura alterada. En la tabla se encuentra el valor presente y futuro del portafolio bajo ambas estructuras.

Capítulo 2

Modelos de Mercado

El presente capítulo está basado principalmente en los libros de Resnick [13] y Shreve [12], así como del trabajo realizado por Harrison-Pliska [5].
En este capítulo se introducirán algunos conceptos y herramientas importantes para el manejo de modelos de tasas de interés estocásticos; de entre los cuales destaca el concepto integral estocástica. Asimismo se asentarán las bases de los modelos de mercado utilizados en el presente trabajo.

2.1. Preliminares

Anteriormente se han expuesto las propiedades inherentes de los bonos así como su relación intrínseca con la tasa de interés. Además, se han introducido los conceptos más importantes sobre la estructura de tasas de interés y algunos métodos para ajustar dichas estructuras. Sin embargo, éstos se han hecho de manera determinista debido a la naturaleza del ajuste. A partir de este ajuste y con base en la relación existente entre la tasa de interés y los bonos, se han podido establecer estimaciones en los precios de los últimos.
Otra perspectiva existente para la valuación de bonos es crear modelos que describan el comportamiento de la tasa de interés, permitiendo capturar el hecho de que ésta es un consenso de mercado, y que el constante movimiento interno de éste provoca que la tasa de interés se mueva continuamente y de manera errática. Esta perspectiva tiene como objetivo crear herramientas que permitan describir el comportamiento de la tasa de interés, pues al ser esta última *aleatoria*, no es posible obtener su valor con una completa exactitud.

En términos generales, un modelo estocástico es aquel que busca representar los posibles eventos de un fenómeno a través de un conjunto de variables aleatorias indexadas con algún conjunto. En particular, en el presente trabajo se tiene especial interés en representar como fenómeno aleatorio el cambio en la tasa de interés (o análogamente el cambio en el precio de bonos) con relación al tiempo.
Los modelos existentes generalmente pueden agruparse en dos grandes grupos:

aquellos que modelan la tasa de interés (o el cambio en el precio del bono) de una manera *discreta*, y aquellos que lo hacen de una manera *continua*. La diferencia entre ambos surge principalmente en que los primeros buscan representar el fenómeno para alguna periodicidad (o periodos) de interés en específico, y la segunda lo hace de forma más general para cualquier momento en el tiempo.

Una manera efectiva para describir el comportamiento de una tasa de interés es mediante el comportamiento que sigue su estructura a través de su incremento infinitesimal. En el presente capítulo se tendrá especial atención a la evolución de la tasa corta que también puede ser descrita en términos de los incrementos que ha de seguir la misma.
Por ejemplo, si se describe el incremento de la tasa corta $r(t)$ como

$$dr = \alpha(r,t)dt, \tag{2.1}$$

donde $\alpha(r,t)$ es una función que depende únicamente del tiempo y quizá de la tasa, significa que el incremento en la tasa será de una forma conocida, por lo que este modelo sería uno determinístico: todo es conocido para cualquier tiempo t una vez establecido $r(0)$.
Es común utilizar este tipo de supuestos cuando la tasa de interés juega un papel secundario en la modelación del precio de algún instrumento, debido a que la variabilidad en la tasa de interés contribuye de manera "despreciable" en el precio del instrumento a modelar. Sin embargo, esto claramente no ocurre cuando la tasa de interés es el principal o único elemento en la modelación del precio del instrumento, como es en el caso de los bonos. En este caso, la variabilidad de la tasa de interés en el modelo puede ser expresada mediante un modelo estocástico.

Sea $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = t$ y de manera preeliminar, considérese la discretización del modelo anterior, el cual quedaría de la forma

$$\Delta r_{t_{k+1}} = \alpha_{t_k}\Delta t_k,$$

donde $\Delta r_{t_k} = r_{t_{k+1}} - r_{t_k}$ y $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$. Se podría pensar en introducir la aleatoriedad en el modelo al agregar además un incremento de carácter aleatorio en el incremento discreto de la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$\Delta r_{t_k} = \alpha(r_k,t_k)\Delta t_k + \sigma(r_k,t_k)\Delta B_{t_k}, \tag{2.2}$$

para obtener

$$r_t = r_0 + \sum_{j=0}^{m-1}\alpha(r_j,t_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{m-1}\sigma(r_j,t_j)\Delta B_{t_j}. \tag{2.3}$$

Si el límite cuando $\Delta t_j \to 0$ existe en algún sentido, y usando la notación usual de integral, se obtendría

$$r_t = r_0 + \int_0^t \alpha(r_s,s)ds + \int_0^t \sigma(r_s,s)dB_s. \tag{2.4}$$

La interpretación de este modelo es que el incremento de la tasa de interés se asocia a un incremento proporcional al tiempo más un ajuste de origen estocástico. Es importante recalcar que este paso es uno de los más importantes dentro del modelado, pues del comportamiento o distribución del incremento aleatorio obviamente dependerá la distribución que tenga r. No sólo eso, sino que dependiendo de la distribución que tenga el incremento existirán algunas propiedades que sean "heredadas" de ésta, haciendo de la obtención de resultados un proceso más simple o mucho más complejo. Además, al introducir un elemento de carácter aleatorio, será de importancia poder medir la incertidumbre que genera el modelo.

Al ser de gran importancia el comportamiento del carácter aleatorio que se le ha de agregar al modelo, en principio sería agradable que los supuestos que se hagan sobre éste tuvieran propiedades deseables en el sentido de que no sólo simplifiquen en cierta manera la valuación, sino que el modelo refleje algún comportamiento observado en el mundo real. Una manera de simplificar el modelo sería suponer que los incrementos no dependan unos de otros y que su tipo de distribución no dependa del tiempo. Además, sería útil que reflejara el hecho de que el precio de los bonos fluctúa continuamente.

Algunas de las propiedades anteriormente mencionadas y otras más las tiene el proceso conocido como *movimiento browniano*. Sin embargo, este no será utilizado de manera directa, sino que se usará para modelar el incremento en la tasa por lo que es necesario conocer algunas de sus propiedades.

2.2. Movimiento browniano

Es posible construir al movimiento browniano de diversas maneras, pero se ha escogido aquella que parte de variables aleatorias independientes con distribución Normal pues esta construcción permite además demostrar su existencia. Sin embargo, antes se dará una idea intuitiva usando caminatas aleatorias simétricas. Se ha de aclarar que el contenido de esta sección será poco formal y un tanto superficial.

Caminatas Aleatorias Simétricas

Una forma de modelar la tasa de interés aplicable en periodos posteriores a la observada, es hacer que ésta aumente o disminuya de manera aleatoria. Como ejemplo para obtener aleatoriedad, se puede suponer que se tiene una moneda no necesariamente "justa" (es decir, que no necesariamente la probabilidad de que salga cara o cruz es la misma), y defínase

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{si cae cara en el j-ésimo lanzamiento} \\ -1 & \text{si cae cruz en el j-ésimo lanzamiento} \end{cases}$$

Sean n el número de lanzamientos hechos, si se define $X_0 = 0$ se tiene que en cada lanzamiento de la moneda la variable $M(t) = \sum_{j=0}^{t} X_j$, donde t es un número natural, aumenta o disminuye una unidad de manera aleatoria.
Y eso precisamente es un ejemplo de caminata aleatoria unidimensional, procesos en los cuales para cada tiempo discreto t, ésta aumenta en cada paso con probabilidad p, y disminuye con probabilidad q; donde $0 < p < 1$ y $p+q = 1$. De manera general la caminata aleatoria puede ser definida de la siguiente forma:

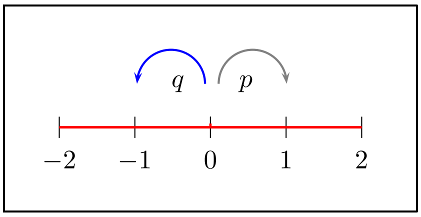


Figura 2.1: Probabilidades.

Sean $X_0 = 0$ y $X_1, X_2, ...$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{P}(X_j = 1) = p$ y $\mathbb{P}(X_j = -1) = q$, con $0 < p < 1$ y $p + q = 1$, entonces el proceso:

$$M(t) = \sum_{j=0}^{t} X_j,$$

es una caminata aleatoria unidimensional.
Cuando sucede que $p = q = \frac{1}{2}$ se dice que $M(t)$ es una caminata aleatoria simétrica unidimensional; el término "simétrico" se debe precisamente a que la probabilidad de que $M(t)$ en cada paso aumente o disminuya sea la misma. Pues bien, las caminatas aleatorias unidimensionales simétricas serán de interés para dar una idea intuitiva de lo que es un movimiento browniano y cuando se hable de caminatas aleatorias, serán de estas de las que se trate.
Primero, nótese que la caminata aleatoria cumple con la propiedad de tener incrementos independientes, es decir, que si se escogen enteros no negativos $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_m$, las variables aleatorias

$$(M_{k_1} - M_{k_0}), (M_{k_2} - M_{k_1}), \cdots, (M_{k_{m-1}} - M_{k_m})$$

son independientes; esto es directamente observable, pues las variables $\{X_k\}_{k>0}$ que lo conforman lo son. Además, si se conoce el valor de la variable $M(s)$ con s entero no negativo, se tiene que para todo $t > s$ entero no negativo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[M(t)|M(s)\big] &= \mathbb{E}\big[(M(t) - M(s)) + M(s)|M(s)\big] \\
&= \mathbb{E}\big[M(t) - M(s)|M(s)\big] + \mathbb{E}\big[M(s)|M(s)\big] \\
&= \mathbb{E}\big[M(t) - M(s)\big] + M(s) \\
&= \sum_{j=s}^{t} \mathbb{E}\big[X_j\big] + M(s) \\
&= M(s),
\end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho de que la caminata aleatoria tiene incrementos independientes, la linealidad de la esperanza y que el valor esperado $\mathbb{E}[X_j]$ es cero.

Además, para n entero no negativo, la caminata aleatoria pudo haber recorrido alguno de 2^n caminos. De hecho, es posible mostrar que para n impares la caminata aleatoria sólo podrá tomar valores impares, asimismo, para valores pares sólo podrá tomar valores pares. Siendo así, para calcular la probabilidad de que la caminata aleatoria tome el valor $k \geq 0$ al tiempo entero no negativo n, se necesita que de los n ensayos bernoulli totales, $\frac{n-k}{2}$ hayan tomado el valor de -1 y $\frac{n-k}{2} + k$ hayan tomado el valor de 1. De manera análoga, si $k < 0$, el procedimiento es exactamente igual pero con los papeles invertidos. De aquí se sigue que, tomando las consideraciones pertinentes anteriormente expuestas, la caminata aleatoria tiene una distribución binomial.

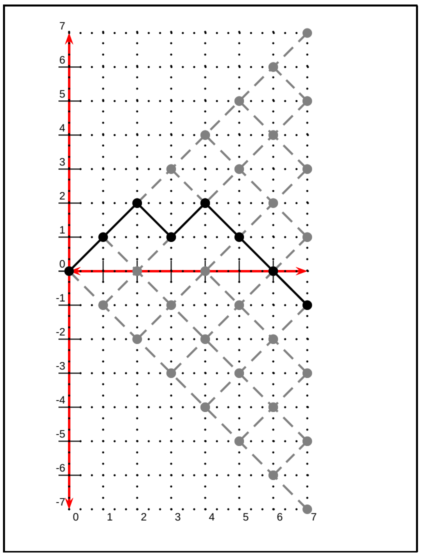


Figura 2.2: Ejemplo: caminata aleatoria.

En el caso particular de las caminatas aleatorias simétricas, su distribución puede reducirse de la siguiente manera (cuando t y k son ambos pares o impares):

$$\mathbb{P}[M(t) = k] = \frac{t!}{(\frac{t+k}{2})!(\frac{t-k}{2})!}\left(\frac{1}{2}\right)^t \quad , \quad -t \leq k \leq t.$$

Además, es importante señalar el hecho de que si se interpola linealmente la caminata aleatoria resulta una función diferenciable para todo tiempo no entero, mientras que para todo tiempo entero no negativo podría no serlo debido a que la pendiente podría cambiar de manera abrupta. Esto puede visualizarse gráficamente en forma de "picos", como puede observarse en la Figura 2.2.

La caminata aleatoria puede tomar valores negativos con probabilidad relativamente alta (.5), y por ello no puede ser usada para modelar directamente la tasa de interés. Sin embargo, lo que es posible utilizar para modelar una tasa de interés es su incremento. Por ejemplo, tomando alguna constante $0 < a < 1$, puede modelarse la tasa de interés para la tasa entre los tiempos $t-1 < s < t$ como:

$$r_s = r_0 \prod_{k=0}^{t-1} \Big(\frac{1}{1 + a\Delta M_k}\Big) = r_0 \prod_{k=0}^{t-1} \Big(\frac{1}{1 + aX_k}\Big).$$

Esta tasa de interés también tendrá una distribución binomial, si se considera u y d como $u = \frac{1}{1-a}$ y $d = \frac{1}{1+a}$ y se toma en cuenta además el hecho de que la probabilidad de que al tiempo $n = r + s$ con $0 < r < s$ la tasa tome un valor de $r_0 \cdot u^r \cdot d^s$ es equivalente a la probabilidad de que la caminata aleatoria tome el valor de $n - r$.

Dejando de lado el modelaje de tasas, el siguiente paso a considerar para aproximarse al movimiento browniano consistirá en "acelerar" el proceso. Para ello, es suficiente considerar más ensayos por unidad de tiempo y reducir el tamaño de los valores que pueden tomar los mismos. Haciendo esto se obtiene lo que se define como caminata aleatoria escalada:

$$M^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} M(nt),$$

donde nt es un entero, y si no lo fuera, se define a $M^{(n)}(t)$ como la interpolación lineal de los puntos más cercanos. Nótese que ahora por cada unidad de tiempo se realizan n ensayos.
Es importante remarcar el hecho de que la caminata escalonada tiene también distribución binomial para t entero no negativo, además de tener incrementos independientes, esperanza cero y -sobre todo- el hecho de que a medida en que se "acelera" la caminata aleatoria, se incrementa el número de ensayos por unidad de tiempo y con ello incrementan también los puntos en los cuales la caminata aleatoria podría dejar de ser diferenciable. Además, su distribución se aproxima a la distribución Normal.
Es posible obtener al movimiento browniano (en distribución) en el límite cuando $n \to \infty$, donde intuitivamente se obtendría que posee propiedades "heredadas" de manera natural de la caminata aleatoria. Sin embargo, como se ha aclarado anteriormente, este proceder ha sido expuesto únicamente para formar una idea intuitiva y su construcción se realizará de diferente manera.

El procedimiento para construir el movimiento browniano en el intervalo $[0, 1]$ es a partir de una idea muy similar al de una caminata aleatoria simétrica pero más compleja. Para ello, se debe estar consciente del hecho que si se tienen dos variables $X(s)$, $X(t)$ de tal forma que $U = X(t) - X(s)$ tiene una distribución $N(0, t-s)$ y si existe otra variable V con distribución $N(0, t-s)$ entonces es posible construir una variable aleatoria $X(\frac{t+s}{2})$ de tal manera que $X(\frac{t+s}{2}) - X(s) = \frac{U+V}{2}$ y $X(t) - X(\frac{t+s}{2}) = \frac{U-V}{2}$ son independientes y tienen la misma distribución $N(0, \frac{t-s}{2})$. En otras palabras, si se tienen un par de variables aleatorias tal que su diferencia tenga una distribución normal, entonces existe una variable aleatoria justo en medio de las dos de tal manera que divide a $X(t) - X(s)$ en dos fragmentos, mismos que tienen idéntica distribución y son independientes. Dicho de otro modo, esto significa que se convierte una sección

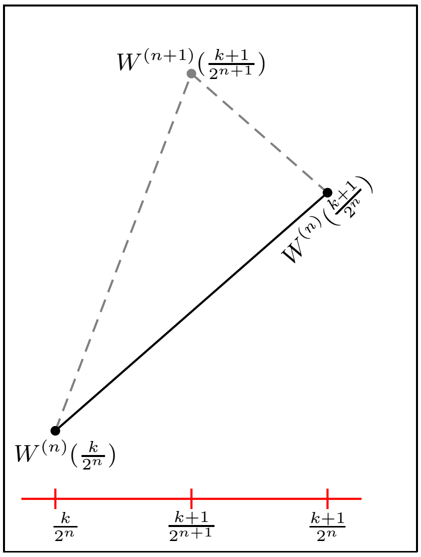


Figura 2.3: Construcción del movimiento browniano: interpolación.

en dos subsecciones que tienen incrementos independientes. Este hecho tiene una importancia significativa para construir el movimiento browniano en el intervalo, pues lo que se procede a hacer es una secuencia de variables aleatorias Normales de la forma $\{V(\frac{k}{2^n}), k = 1, 2, \cdots, 2^n, n \geq 1\}$ donde $V(\frac{i}{2^{n+1}})$ se distribuye $N(0, \frac{1}{2^n})$.

Se define $X(0) = 0, X(1) = V(1)$ y se usa $V(\frac{1}{2})$ para construir $X(\frac{1}{2})$ de tal forma que $X(\frac{1}{2}) - X(0)$ y $X(1) - X(\frac{1}{2})$ son independientes y de idéntica distribución $N(0, \frac{1}{2})$. Ahora, usando inducción, supóngase que se define $X(\frac{k}{2^n})$ y considerando $V(\frac{k}{2^n})$ se construye $X(\frac{k+1}{2^{n+1}})$ con $V(\frac{k+1}{2^{n+1}})$ de tal forma que $X(\frac{2k+1}{2^{n+1}}) - X(\frac{k}{2^n})$ y $X(\frac{k+1}{2^n}) - X(\frac{2k+1}{2^{n+1}})$ son independientes y de idéntica distribución $N(0, \frac{1}{2^{n+1}})$.

Para cada $n = 1, 2, \cdots$, se define el proceso $\{W^{(n)}(t)\}_{t \geq 0}$ como

$$W^{(n)}(t, \omega) = X(t, \omega) \qquad \text{si } t \in \left\{\frac{k}{2^n}, 0 \leq k \leq 2^n, k \in \mathbb{N}\right\},$$

y si t no es de la forma $\frac{k}{2^n}$ se define como la interpolación lineal de los dos puntos más cercanos.

Nótese que $W^{(n+1)}(t)$ tiene definidos los mismos puntos que $W^{(n)}(t)$, pero que además tiene definidos puntos intermedios. En Resnick [?] se demuestra que esta sucesión de funciones continuas es una sucesión de Cauchy que converge uniformemente con probabilidad uno, es decir, que la función a la que converge la sucesión es una función que existe casi seguramente.

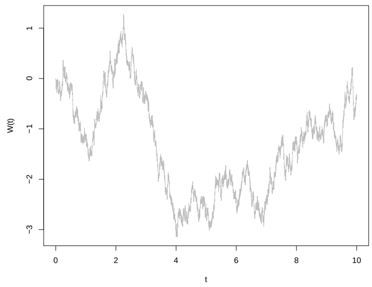


Figura 2.4: Movimiento browniano.

Se define al movimiento browniano como la función a la que converge la sucesión, cuando existe, y en caso de no existir (en un conjunto de probabilidad cero) se define simplemente al movimiento browniano como la constante cero:

$$W(t) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} W^{(n)}(t), & \text{si } \lim_{n\to\infty} W^{(n)}(t) \text{ existe} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Se puede demostrar que, dadas las condiciones de la construcción, el movimiento browniano tiene las características de ser continuo. Para todo $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_m \leq 1$, los incrementos $W(t_1) - W(t_0)$, $W(t_2) - W(t_1)$, $\ldots$, $W(t_m) - W(t_{m-1})$ son independientes y cada incremento se distribuye $N(0, t_k - t_{k-1})$ además de ser no diferenciable en ningún punto con probabilidad uno.

La extensión del concepto a toda la recta real no es muy diferente a la del intervalo $[0, 1]$. Siendo así, la definición precisa de movimiento browniano será la siguiente.

Definición 2.2.1. Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. El proceso estocástico $W = \{W(t), t \geq 0\}$ es un *movimiento browniano* ó proceso de wiener estándar si cumple las siguientes condiciones:

- W tiene incrementos independientes, es decir, si para toda $t_1 < t_2 < t_3$ las variables aleatorias

$$W(t_3) - W(t_2), W(t_2) - W(t_1),$$

  son independientes.
- Para cualesquiera $0 \leq s < t$, la variable aleatoria $W(t) - W(s)$ tiene distribución $N(0, t-s)$.
- Las trayectorias $t \to W_t$ son continuas casi seguramente.
- $W(0) = 0$.

Además de estas características, el movimiento browniano posee algunas otras propiedades que serán de suma importancia considerar al momento de modelar tasas.

2.2.1. Propiedades del movimiento browniano

La primera propiedad que se analizará está estrechamente asociada a "juegos justos", pues refleja la idea de que si se tratara de un juego, en promedio no se gana ni se pierde a largo plazo y la cual es llamada *Martingala*. Sin embargo, para poder hablar de Martingalas es necesario primero conocer lo que es una *filtración*.

Definición 2.2.2. Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Una *filtración* es una colección de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, tales que para toda t se cumple que $\mathcal{F}_t \subseteq \mathscr{F}$, y además si $s \leq t$ entonces $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.

Las filtraciones pueden ser pensadas como conjuntos donde se "guarda" la información disponible hasta el momento y donde no existe fuga alguna, siendo la obtenida hasta ese punto la que contenga toda la información de tiempos pasados.

Definición 2.2.3. Sea X_t una variable aleatoria y $\mathcal{F}_t$ una σ-álgebra .Se dice que X_t es $\mathcal{F}_t$-*medible* si la σ-álgebra que genera X_t está contenida en $\mathcal{F}_t$.

De manera intuitiva la definición anterior significa que la información contenida en $\mathcal{F}_t$ es suficiente para conocer el valor de la variable X_t. Por otra parte, será de utilidad la siguiente definición.

Definición 2.2.4. Sea $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso estocástico y $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq\infty}$ una filtración. Si la σ-álgebra generada por el proceso $\{X_s\}_{s=0}^{t}$ está contenida en $\mathcal{F}_t$, se dice que el proceso $\{X_t\}$ es *adaptado* a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq\infty}$.

La definición anterior propone de manera intuitiva que si un proceso es adaptado a una filtración, significa que la información generada por el proceso está contenida en la filtración, por lo que es posible conocer la trayectoria que ha seguido el proceso. Una vez explicado esto, se puede proceder a definir lo que es una martingala.

Definición 2.2.5. Un proceso $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ es una martingala respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ bajo $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ si cumple las siguientes condiciones

- $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$
- Es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.
- Si $s \leq t$, entonces $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ c.s.

La última propiedad explica que X es martingala con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_i\}_{i\geq 0}$ si dada la información disponible al tiempo s, el valor esperado del proceso al tiempo t, es igual al valor del proceso en s con probabilidad uno.

Teorema 2.2.6. *Sea $\{W(t)_{t\geq 0}\}$ un movimiento browniano y sea $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtración más pequeña que contiene a $W(t)$ para todo t en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Entonces el movimiento browniano es martingala con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.*

Demostración. Para mostrar que el movimiento browniano es una martingala, basta con que se reescriba a $W(t)$ como la suma que toma la variable en dos intervalos disjuntos (y por lo tanto independientes), donde uno pueda ser evaluado con la información que se tiene hasta el momento, y la otra se anula por ser independiente de la información y tener media cero.
Procediendo de esta manera, sea $0 \leq s \leq t$, cualesquiera tiempos, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W(t)|\mathcal{F}(s)] &= \mathbb{E}\Big[\big(W(t) - W(s)\big) + W(s)|\mathcal{F}(s)\Big] \\
&= \mathbb{E}[\big(W(t) - W(s)\big)|\mathcal{F}(s)] + \mathbb{E}[W(s)|\mathcal{F}(s)] \\
&= W(s).
\end{aligned}$$

□

Otro concepto importante es el de *proceso de Markov* que relaciona la información obtenida hasta cierto tiempo s con el proceso al tiempo $t \geq s$.

Definición 2.2.7. Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Sea $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ una filtración y considérese el proceso estocástico $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$. Si para cualesquiera tiempos $0 \leq s \leq t$ y para toda función f no negativa y Borel-medible, existe una función g Borel-medible tal que

$$\mathbb{E}[f\big(Z(t)\big)|\mathcal{F}_s] = g\big(Z(s)\big).$$

entonces, se dice que Z es un *proceso de Markov.*

Este concepto captura en cierto sentido el hecho de que en algunos procesos no importa lo que ha ocurrido antes del tiempo s, sino lo que ocurrió precisamente al tiempo s.

Como se ha mencionado, se modelará el incremento infinitesimal de la tasa corta a través del movimiento browniano, es decir, que se usará a este como integrador.

2.2.2. ¿El movimiento browniano como integrador?

Debido a que se pretende utilizar el movimiento browniano como integrador, es necesario saber si cumple con algunos requisitos para serlo. Inicialmente se mencionaran y posteriormente se analizarán para el respectivo caso.
Uno de los requisitos que debe cumplir un "buen" integrador en la integral de Riemann-Stieljest, es la de tener una *variación* finita. Es decir, para que la integral esté definida para cualquier función continua como integrando, el integrador debe ser de variación finita.

Definición 2.2.8. Sea $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición del intervalo con $0 \leq a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Se define a la *variación* de la función f sobre el intervalo $[a, b]$ como la función:

$$Q^*(f) = \lim_{||\Pi||\to 0} Q^*(f)_\Pi = \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \big|f(t_{j+1}) - f(t_j)\big|,$$

donde $||\Pi|| = \max_k |j_k - j_{k-1}|$ denota el tamaño del subintervalo mas grande.

La idea intuitiva de la utilidad de la variación de una función, es la de medir el tamaño de las oscilaciones que produce ésta, tanto ascendentes como descendentes. Al pedir como requisito que el integrador sea de variación finita, implicaría que al no haber un movimiento "explosivo" en el integrador, la integral existirá para ciertas condiciones en el integrando.

Cuando la integral de Riemann-Stieljest de una función f con respecto a otra g en el intervalo $[a, b]$ existe, se tiene que la integral se denota como

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \lim_{||\Pi_n \to 0||} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})),$$

donde $||\Pi||$ queda definido como anteriormente y $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$. En el caso particular en que $g = f$, y definiendo las sumas por la derecha y por la izquierda de la forma

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(f(t_i) - f(t_{i-1})), \\ L_n &= \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(f(t_i) - f(t_{i-1})). \end{aligned}$$

Si la integral existe, se debe tener que cuando el tamaño del subintervalo más grande tiende a cero estas dos sumas deben ser iguales.
Al analizar la diferencia de estas sumas sin tomar el limite se obtiene

$$R_n - L_n = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2.$$

Esta característica, que normalmente no se analiza debido a que en toda función con variación finita tiene el valor de cero cuando $||\Pi|| \to 0$, tiene el nombre de *variación cuadrática*.

Definición 2.2.9. Sea $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición del intervalo con $0 \leq a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Se define a la *variación cuadrática* Q sobre el intervalo $[a, b]$ como la variable aleatoria

$$Q(f) = \lim_{||\Pi|| \to 0} Q(f)_\Pi = \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \big(f(t_{j+1}) - f(t_j)\big)^2.$$

De igual manera, se denotará indistintamente como $[f, f](t)$ la variación cuadrática generada por f en el intervalo $[0, t]$.

En el caso del movimiento browniano, es posible considerar a la variación cuadrática como una variable aleatoria si no se conoce la trayectoria que sigue en el intervalo en cuestión. Un hecho un poco sorprendente es que, si se considera como una variable aleatoria, el valor que toma la variación cuadrática corresponde "en promedio" al del tamaño del intervalo en el que se esté valuando.
A fin de ilustrar este hecho, se puede mostrar que la variación cuadrática es el

límite de una sucesión de variables aleatorias cuya varianza converge a cero y cuya esperanza es del tamaño del intervalo. El que su varianza sea cero implicaría que existe convergencia en L_2 (media cuadrada). En efecto, si se considera a Y_n una sucesión de variables aleatorias tal que su varianza converja a cero, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} Var[Y_n] = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (Y_n(\omega) - \mu)^2 d\mathbb{P} = 0,$$

con lo que se mostraria que converge a su media en L_2.

Sin pérdida de generalidad, se mostrará este hecho sobre el intervalo $[0, T]$. Considérese en primer lugar la media de Q_Π, para verificar que efectivamente su media es el tamaño del intervalo, y descompóngase de la siguiente forma:

$$\mathbb{E}[Q_\Pi] = \mathbb{E}\Big[\sum_{j=0}^{n-1} \big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big)^2\Big] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}\Big[\big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big)^2\Big].$$

Ahora bien, debe tenerse presente que las variables $W(t_k) - W(t_{k-1})$ son independientes entre sí y se distribuyen $N(0, t_k - t_{k-1})$, de donde se sigue que

$$Var[W(t_k) - W(t_{k-1})] = \mathbb{E}\Big[\big(W(t_k) - W(t_{k-1})\big)^2\Big] = t_k - t_{k-1}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[Q_\Pi] = \sum_{j=0}^{n-1} Var[W(t_k) - W(t_{k-1})] = \sum_{j=0}^{n-1}(t_k - t_{k-1}) = T.$$

Entonces, la media de Q_Π es precisamente el tamaño del intervalo sobre el que se está trabajando y, en particular, lo es también para la variable aleatoria Q. Nótese que este resultado se mantiene no importando qué tan pequeño sea el intervalo.

Una vez mostrado el hecho de que la media de la variable Q es el tamaño del intervalo, considérese la variable $Z_{j+1} = \big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big)$ y la varianza de la variable Z_{j+1}^2 en cada intervalo, la cual queda expresada como

$$\begin{aligned}
Var[\big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big)^2] &= Var[Z_{j+1}^2] \\
&= \mathbb{E}\bigg[\Big(Z_{j+1}^2 - \mathbb{E}[Z_{j+1}^2]\Big)^2\bigg] \\
&= \mathbb{E}\bigg[\Big(Z_{j+1}^2 - (t_{j+1} - t_j)\Big)^2\bigg] \\
&= \mathbb{E}\Big[Z_{j+1}^4\Big] - 2(t_{j+1} - t_j)\mathbb{E}[Z_{j+1}^2] + (t_{j+1} - t_j)^2 \\
&= \mathbb{E}\Big[Z_{j+1}^4\Big] - 2(t_{j+1} - t_j)^2 + (t_{j+1} - t_j)^2 \\
&= \mathbb{E}\Big[Z_{j+1}^4\Big] - (t_{j+1} - t_j)^2.
\end{aligned}$$

Ahora, utilizando el hecho de que $Z_{j+1} = \big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big)$ tiene una distribución normal con media cero, entonces su cuarto momento es tres veces el cuadrado de su varianza, obteniendo así que

$$Var[\big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big)^2] = 2(t_{j+1} - t_j)^2.$$

Cada variable $\big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big)^2$ es independiente de las demás, por lo que la varianza de la suma de estas variables es la suma de las varianzas, y entonces:

$$\begin{aligned} Var[Q_\Pi] &= \sum_{j=0}^{n} Var[\big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big)^2] = \sum_{j=0}^{n} 2(t_{j+1} - t_j)^2 \\ &\leq \sum_{j=0}^{n} 2||\Pi||(t_{j+1} - t_j) = 2||\Pi||T. \end{aligned}$$

De modo que, cuando el tamaño de los intervalos se aproxima a cero, la varianza de la variación cuadrática Q es cero.

Se puede obtener una mejor idea del resultado al considerar a la variable $Z_{j+1} = \frac{W(t_{j+1}) - W(t_j)}{\sqrt{t_{j+1} - t_j}}$ y tomando $t_j = \frac{jT}{n}$. Nótese que las variables aleatorias Z_1, Z_2, $\cdots$, Z_n son independientes e idénticamente distribuidas. Haciendo uso de la Ley de los Grandes Números se tendría que $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{Z_{j+1}^2}{n}$ converge a la media común $\mathbb{E}[Z_{j+1}^2]$ cuando $n \to \infty$. Esta media común es 1 y por lo tanto $\sum_{j=0}^{n-1}(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 = \sum_{j=0}^{n-1} T \cdot \frac{Z_{j+1}^2}{n}$ converge a T. Esta idea expone que cada término puede ser diferente a su media, pero cuando se suman muchos términos, en "promedio" la diferencia es nula.
De manera informal, se dice que cuando el tamaño del intervalo más grande de la partición tiende a cero ($||\Pi|| \to 0$), la variación cuadrática acumulada en un tamaño infinitesimal de tiempo es proporcional al tiempo transcurrido, y se captura este hecho también de manera informal como

$$dW(t)dW(t) = dt.$$

Otros términos de interés son la interacción que se da entre los incrementos del movimiento browniano e incremento de tiempo, y la variación cuadrática del tiempo. En primer lugar se considera la interacción:

$$\begin{aligned} |\sum_{j=1}^{n-1}\big(W(t_j) - W(t_{j-1})\big)(t_j - t_{j-1})| &\leq \sum_{j=1}^{n-1} |W(t_j) - W(t_{j-1})|(t_j - t_{j-1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-1} \max_{1\leq k\leq n-1} |W(t_j) - W(t_{j-1})|(t_j - t_{j-1}) \\ &= \max_{1\leq k\leq n-1} |W(k_j) - W(k_{j-1})| \sum_{j=1}^{n-1}(t_j - t_{j-1}) \\ &= \max_{1\leq k\leq n-1} |W(k_j) - W(k_{j-1})| \cdot T. \end{aligned}$$

Cuando el tamaño del intervalo más grande de la partición tiende a cero ($\Pi \to 0$), el último término de la expresión anterior tiende a cero debido a que el movimiento browniano es continuo.
Por su parte, el tiempo tiene variación cuadrática cero debido a que al ser utilizada como variable independiente, tiene incrementos "suaves" y bien definidos

$$\sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1})^2 \leq \max_{1 \leq k \leq n-1}(t_j - t_{j-1}) \cdot \sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1}) = ||\Pi|| \cdot T.$$

Estas ideas también se capturan de una manera informal respectivamente como

$$dW(t)dt = 0 \qquad , \qquad dtdt = 0.$$

Debido a la importancia de la variación cuadrática, es preciso hacer una síntesis de lo que se ha obtenido hasta el momento, misma que se encuentra en el cuadro (2.1).

	dt	dW
dt	0	0
dW	0	dt

Cuadro 2.1: Tabla de multiplicación.

Una diferencia entre la variación cuadrática y la varianza es que la primera es una variable aleatoria, mientras que la segunda es un promedio ponderado. En efecto, la varianza toma en cuenta todos los posibles caminos, tanto realizados como no realizados, al hacer un promedio ponderado de la posible dispersión del proceso tomando como referencia la media del mismo. Mientras que la variación cuadrática toma en cuenta sólo la trayectoria realizada por el proceso, esto es, cada trayectoria tiene una variación cuadrática no necesariamente igual a la de otra trayectoria.

La variación cuadrática, junto con otras propiedades, contribuyen a que el movimiento browniano sea más fácil de identificar a través de caracterizaciones alternas. Por ejemplo, en Shreve [12] se menciona la caracterización que adquiere a partir de la matriz de varianzas y covarianzas que genera y su función generadora de momentos, mismas que se obtienen usando el hecho de que sus incrementos tienen una distribución Normal. Pero aún más importante, existe una caracterización que hace del movimiento browniano un proceso fácil de identificar utilizando las propiedades que de él mismo derivan: si un proceso $M(t)$ es martingala con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, iniciando en cero ($M(0) = 0$), con trayectorias continuas y con una variación cuadrática proporcional al tiempo transcurrido ($[M, M](t) = t$) se tiene que $M(t)$ es un movimiento browniano. Lo sorprendente de esta caracterización es que no hace referencia al tipo de la distribución que tiene $M(t)$, sino que ésta es una consecuencia.

No solamente el movimiento browniano posee una variación cuadrática distinta de cero, sino que es posible demostrar que su variación es no acotada casi seguramente. La razón es sencilla: esto se debe a que el movimiento browniano es no diferenciable en cualquier punto casi seguramente (es decir, la probabilidad que recorra caminos donde puede ser diferenciable es cero). Al ser no diferenciable pero sí continua, intuitivamente significa que la función en cada intervalo pequeñísimo sube y baja sucesivamente de manera infinita, por lo que calcular su variación sería "desdoblar" la función en una línea recta que sería infinita no importando el tamaño del intervalo $[a, b]$ en el que se calcule.

Debido a que las características que debe cumplir una función que sirva como integrador en la integral de Riemann-Sieljest no las posee el movimiento browniano, es necesario definir otro tipo de integral.

2.3. Integral y Lema de Itô

Una vez determinado el comportamiento del crecimiento infinitesimal del precio del bono bajo el modelo de interés, el problema se reduce a encontrar una función que cumpla con ese crecimiento, tarea por demás nada sencilla. Análogamente, otro problema se presenta también cuando se trata de describir el incremento infinitesimal de alguna función que depende de variables estocásticas. Esta problemática se expondrá brevemente en la presente subsección.

2.3.1. Integral de Itô

A pesar de que la idea de la construcción de esta integral es parecida a las integrales comúnmente conocidas (Riemann o Lebesgue), sus detalles técnicos son un tanto más complicados y requieren de una teoría profunda, por lo su construcción que no será abarcada en el presente trabajo, aunque sí se dará una idea informal de la misma.
Para dar un acercamiento de la complejidad del problema al tratar utilizar al movimiento browniano como integrador, se hará una analogía entre un modelo estocástico y un modelo determinístico. En primer lugar, considérese el caso en que el modelo contiene únicamente incrementos determinados por una variable diferenciable g, entonces la primitiva de f con respecto al incremento de g puede obtenerse de manera general aunque no siempre de manera sencilla a partir de la integral de Riemann-Stieljest o Lebesgue , cuya forma es:

$$\int_{t_o}^{t_n} f(t)dg(t) = \int_{t_o}^{t_n} f(t)g'(t)dt.$$

Sin embargo, la limitante de la igualdad anterior es que sólo tiene sentido si g es una función diferenciable, es decir, si se integra con respecto a una función diferenciable casi en todas partes, característica que carece el movimiento browniano. Debido a esto, la definición anterior de “integral” carece de sentido como tal, pero remontándose a la idea de integral como una suma infinita donde los sumandos están compuestos por la función $f(t)$ que multiplica el incremento infinitesimal de la función $g(t)$, puede hacerse algo parecido con una integral que depende de un movimiento browniano. A este tipo de integral se le llama *integral de Itô*.

Supóngase que se tiene un proceso estocástico $\phi = \{\phi(s)\}_{s\geq 0}$ adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_s\}_{s\geq 0}$, el cual se quiere integrar con respecto a un movimiento browniano. La variante en este tipo de integral es que los sumandos no estarán necesariamente compuestos por el valor que toma el proceso ϕ al inicio del subintervalo de tiempo que multiplica el incremento del movimiento browniano que se obtuvo en el mismo subintervalo. El valor de ϕ será reemplazado por un elemento $\phi^{(n)}$ de una sucesión aproximante al proceso, de tal manera que a medida en que se avanza en esa sucesión, se obtiene una mejor estimación y la integral se obtiene justamente cuando $n \to \infty$. Ésta es en grandes rasgos la idea de la construcción de la integral. La construcción técnica comienza describiendo la integral para procesos que posteriormente servirán para obtener la aproximación deseada.

Definición 2.3.1. Sea $\Pi = \{0 = t_0, t_1, \cdots, t_n = T\}$ una partición del intervalo $[0, T]$. Un proceso estocástico *simple* ϕ es un proceso de la forma

$$\phi(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \phi^{(t_j)} 1_{[t_j, t_{j+1})}(t),$$

donde $\phi^{(0)}, \cdots, \phi^{(t_{n-1})}$ son variables adaptadas a la filtración $\{\mathcal{F}_{t_k}\}_{k=0}^{n-1}$ y que son cuadrado integrables, es decir, $\mathbb{E}[(\phi^{(t_k)})^2] < \infty$ para $k = 1, \ldots, n$.

Es importante recalcar el hecho de que un proceso simple es un proceso estocástico cuyo valor se mantiene constante en intervalos de tiempo.
Estas funciones son importantes en la construcción de la integral, pues son sucesiones de estas funciones las que se tomen como aproximaciones de la función a integrar.
Una vez definidos los procesos simples, es posible definir su integral estocástica como sigue:
.

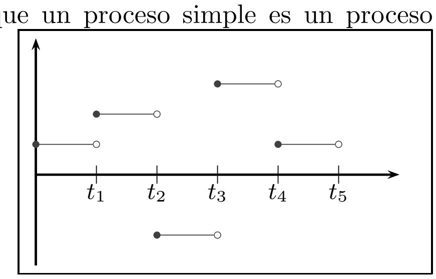


Figura 2.5: Ejemplo: Proceso Simple.

Definición 2.3.2. Sea $\Pi = \{0 = t_0, t_1, \cdots, t_k = T\}$ una partición del intervalo $[0, T]$. La *integral estocástica de Itô del proceso simple* ϕ al tiempo $t_{n-1} \leq t \leq t_n$ respecto al movimiento browniano, denotada como $I^{(k)}(\phi(t))$, se define como la variable aleatoria

$$I^{(k)}(\phi(t)) := \sum_{j=0}^{k-1} \phi(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \phi(t_{n-1})[W(t) - W(t_{n-1})]. \quad (2.5)$$

Mientras que la integral de Riemann-Stieljest no es sensible en el punto en el que se evalúa el integrador, esta integral es muy sensible al punto en el que se evalúa $\phi(s)$. La justificación de utilizar el valor de ϕ al inicio del intervalo es debido a que en finanzas la variable $\phi(t)$ representa el número de títulos que se tiene de cierto activo en el tiempo t y que se retienen entre los tiempos t_t y t_{t+1}. Otra razón importante, es que la integral definida de esta forma es martingala, lo que facilita muchos cálculos.

Teorema 2.3.3. *La integral de Itô de un proceso simple es una martingala*

Demostración. Se demostrará que (2.5) es martingala.
Sea $0 \leq s \leq t \leq T$, tiempos. Sea $\Pi = \{t_0, \cdots, t_n\}$ una partición del intervalo $[0, T]$ y sea t_l de tal manera que $s \in [t_l, t_{l+1})$ y $t \in [t_k, t_{k+1})$; entonces al reescribir $I^k(\phi(t))$ de la forma

$$\begin{aligned} I^{(k)}(\phi(t)) &= \sum_{j=0}^{t_{l-1}} \phi(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \phi(t_l)[W(t_{l+1}) - W(t_l)] \\ &\quad + \sum_{j=l+1}^{t_{k-1}} \phi(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \phi(t_k)[W(t) - W(t_k)]. \end{aligned}$$

Es posible analizar de mejor manera la esperanza condicional de $I^{(k)}(t)$ a partir de cada una de ellas; la esperanza condicional del primer término de la suma es

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{j=0}^{t_{l-1}} \phi(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)]\big|\mathcal{F}_s\Big] = \sum_{j=0}^{t_{l-1}} \phi(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)],$$

debido a que todos los elementos en ella son $\mathcal{F}_s$-medibles. La esperanza del segundo término es:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[\phi(t_l)[W(t_{l+1}) - W(t_l)]\big|\mathcal{F}_s\Big] &= \phi(t_l)\big(\mathbb{E}[W(t_{l+1})|\mathcal{F}_s] - W(t_l)\big) \\ &= \phi(t_l)\big(W(t_s) - W(t_l)\big). \end{aligned}$$

Con estos dos términos se obtiene $I(\phi(s))$, por lo que basta demostrar que el valor de la esperanza condicional de los dos términos restantes es cero. Para obtener la esperanza condicional del tercer miembro, basta con analizar la esperanza condicional de cada uno de los sumandos, entonces para $t_j \in \{l+1, \cdots, t_{k-1}\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\phi(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)]\big|\mathcal{F}_s\big] &= \mathbb{E}\big\{\mathbb{E}[\phi(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)]|\mathcal{F}_{t_j}]\big|\mathcal{F}_s\big\} \\
&= \mathbb{E}\big\{\phi(t_j)\big(\mathbb{E}[W(t_{j+1})|\mathcal{F}_{t_j}] - W(t_j)\big)\big|\mathcal{F}_s\big\} \\
&= \mathbb{E}\big\{\phi(t_j)(W(t_j) - W(t_j))\big|\mathcal{F}_s\big\} = 0,
\end{aligned}$$

por lo que el valor de la esperanza condicional del tercer elemento es cero. El último elemento puede obtenerse exactamente de la misma manera, por lo que su esperanza condicional también tiene valor cero. Con ésto concluye la demostración. $\square$

Dentro de la teoría para la construcción de esta integral, la *isometría* es una de las herramientas fuertes utilizadas para la obtención de ciertos resultados, específicamente cuando existe una sucesión de procesos aproximantes al proceso a integrar. Se enuncia inmediatamente, aunque su demostración será poco formal.

Afirmación 2.3.4. *Para cualquier proceso simple ϕ se cumple*

$$\mathbb{E}[I^2(\phi(t))] = \mathbb{E}\Big[\int_0^t \phi^2(u)du\Big] \tag{2.6}$$

A esta propiedad se le conoce como isometría.

Demostración. Para verificar la igualdad se hace uso del hecho de que el movimiento browniano tiene incrementos independientes, de la variación cuadrática, y que ϕ es un proceso simple.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[I^2(\phi(t))] &= \mathbb{E}\Big[\big(\sum_{j=0}^{k-1} \phi(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)]\big)^2\Big] \\
&= \sum_{j,l=0}^{k-1} \mathbb{E}\Big[\phi(t_j)\phi(t_l)[W(t_{j+1}) - W(t_j)][W(t_{l+1}) - W(t_l)]\Big] \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E}\Big[\phi^2(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)]^2\Big] \\
&\qquad + \sum_{j<l}^{k-1} \mathbb{E}\Big[\phi(t_j)\phi(t_l)[W(t_{j+1}) - W(t_j)][W(t_{l+1}) - W(t_l)]\Big]
\end{aligned}$$

Todos los elementos que componen el lado derecho de la última igualdad son cero como se muestra a continuación. Considerando $j < l$ y denotando como

$D_j = \big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\phi(t_j)\phi(t_l)D_jD_l\Big] &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[\phi(t_j)\phi(t_l)D_jD_l\big|\mathcal{F}_l\Big]\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\phi(t_j)\phi(t_l)D_j\mathbb{E}\Big[D_l\big|\mathcal{F}_l\Big]\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\phi(t_j)\phi(t_l)D_j\mathbb{E}\Big[D_l\Big]\Big] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de que $\phi(t_j)$, $\phi(t_l)$ y D_j son $\mathcal{F}_l$-medibles. Por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[I^2(\phi(t))] &= \sum_{j=0}^{k-1}\mathbb{E}\Big[\phi^2(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)]^2\Big] \\
&= \sum_{j=0}^{k-1}\mathbb{E}\Big[\phi^2(t_j)]\mathbb{E}[W(t_{j+1}) - W(t_j)]^2\Big] \\
&= \sum_{j=0}^{k-1}\mathbb{E}\Big[\phi^2(t_j)\Big](t_{j+1} - t_j) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1}\mathbb{E}\Big[\phi^2(t_j)[t_{j+1} - t_j]\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\int_0^t \phi^2(t_j)dt\Big].
\end{aligned}$$

□

La isometría, como se ha mencionado, tiene un lugar significativo en la construcción de la integral, pues lo que establece la ecuación (2.6) es que ambas variables aleatorias tienen la misma métrica dentro de sus respectivos espacios. Debido a que es posible encontrar para el proceso ϕ una sucesión aproximante $\{\phi^{(k)}\}$, se puede establecer usando la isometría que la sucesión de integrales de Itô de dicha sucesión es de Cauchy, por lo que tiene sentido definir a la integral estocástica de la siguiente manera.

Definición 2.3.5. Sea ϕ un proceso, y sea $\{\phi^{(k)}\}$ una sucesión aproximante a ϕ de procesos simples en L^2, es decir, es de tal manera que

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\int_0^T |\phi^{(n)}(t) - \phi(t)|^2dt = 0.$$

Se define la *integral estocástica de Itô* al tiempo $0 \leq t \leq T$ como la variable aleatoria

$$I(\phi(t)) := \lim_{n\to\infty} I(\phi^{(n)}(t)).$$

La integral de Itô tiene diferentes propiedades por la manera en que se construyó. Para apreciarlas, debe considerarse el hecho que para cada $t > 0$ se tiene una integral, por lo que la integral vista para cada t fija es una variable aleatoria, pero como colección de t genera un proceso estocástico con trayectorias continuas. Además, debido a que los sumandos son $\mathcal{F}_t$-medibles la integral (como variable aleatoria) también lo es.
Al llevar implícito un movimiento browniano, la integral de Itô es martingala debido a que los incrementos del mismo son independientes y de esperanza cero. También es un proceso que tiene una variación cuadrática diferente de cero, la cual puede ser calculada intuitivamente de una manera sencilla como sigue:

$$\begin{aligned} dI(\phi(t)) \cdot dI(\phi(t)) &= \phi(t)dW(t) \cdot \phi(t)dW(t) \\ &= \phi^2(t) \cdot dt. \end{aligned}$$

De donde se deduce que cada incremento infinitesimal de tiempo produce ϕ^2 de variación cuadrática, por lo que su variación cuadrática es

$$[I, I](\phi(t)) = \int_0^t \phi^2(s)ds.$$

De hecho, la integral estocástica de Itô, cumple con las propiedades de la integral para procesos simples y otros más.

Afirmación 2.3.6. . *Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Sea T una constante positiva y $\{\phi(t)\}_{t\geq 0}$ un proceso estocástico adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}$de tal manera que $\mathbb{E}[\int_0^T \phi(t)dt] < \infty$. Entonces $I(t) = \int_0^t \phi(s)dW(s)$ tiene las siguientes propiedades:*

1. ***Continuidad**. Como función del límite de integración superior, las trayectorias de $I(t)$ son continuas.*
2. ***Adaptabilidad**. Para cada t, $I(\phi(t))$ es $\mathcal{F}_t$-medible.*
3. ***Martingala**. $I(\phi(t))$ es martingala.*
4. ***Itô isometría**. $\mathbb{E}[I^2(\phi(t))] = \mathbb{E}[\int_0^t \phi^2(u)du]$.*
5. ***Variación cuadrática**. $[I, I](\phi(t)) = \int_0^t \phi^2(s)ds$.*
6. ***Linealidad**. Si $I(t) = \int_0^t \phi(u)dW(u)$ y $J(t) = \int_0^t \Gamma(u)dW(u)$, a y $b \in \mathbb{R}$ entonces $aI(t) \pm bJ(t) = \int_0^t (a\phi(u) \pm b\Gamma(u))dW(u)$.*

La integral de Itô es una martingala que comienza en cero, por lo que en consecuencia su media es cero, lo que significa que su varianza puede ser reescrita en términos de la isometría de la siguiente manera:

$$Var[I] = \mathbb{E}[I^2] - (\mathbb{E}[I])^2 = \mathbb{E}[I^2].$$

Es por esta razón que la isometría muestra que la varianza y la variación cuadrática no siempre son iguales, pues puede verse claramente que entonces la varianza es el valor esperado de la variación cuadrática.
En particular, en Shreve [12] se muestra que si $\phi(t)$ es una función determinista, se tiene que la integral de Itô tiene una distribución normal $\mathcal{N}(0, \mathbb{E}[\int \phi^2(t)dt])$.

La integral de Itô construida hasta el momento sólo da una referencia sobre cómo hacer una integral sobre el término que contiene la parte estocástica. Sin embargo, el incremento infinitesimal tanto del precio del bono como de la tasa de interés contiene otro incremento que puede alterar la distribución de la integral de Itô.
A pesar de ello, de forma más general estos procesos también tienen estas propiedades, a excepción de ser martingala, y son conocidos como *procesos de Itô*. Estos procesos tienen como componentes una integral de Itô y un "ajuste" originado por la integral de un proceso adaptado, por lo que los procesos de Itô (a diferencia de las integrales de Itô) no necesariamente tienen una distribución normal cuando ϕ es determinístico.
Los procesos de Itô son caracterizados de la siguiente manera

$$X(t) = X(0) + \int_o^t \phi(s)dW(s) + \int_0^t \Theta(s)ds,$$

de donde se obtiene notacionalmente que

$$dX(t) = \phi(t)dW(t) + \Theta(t).$$

Debe aclararse que la igualdad anterior sólo tiene un sentido notacional y no uno literal.
La ecuación (2.2) puede entenderse en el contexto del presente trabajo precisamente como un proceso de Itô.

La tasa corta como proceso de Itô

Como se mencionó anteriormente, la tasa de interés que se modelará como un proceso estocástico será principalmente la tasa corta, cuyo modelo de forma general será:

$$dr = \alpha(r,t)dt + \sigma(r,t)dW. \tag{2.7}$$

Nótese que debido a que el precio del bono es en realidad una función de la tasa de interés, entonces es posible obtener a partir del modelo de la tasa de interés un modelo para el precio del bono. Si se denota por B a la función que describe el precio del bono y una vez establecido el modelo de la tasa corta, ¿cuál es la ecuación que describe el incremento infinitesimal en el precio del bono? Para poder dar respuesta, es preciso utilizar un resultado de suma importancia para funciones con ciertas características que tienen implícito incrementos descritos por variables aleatorias con distribución gaussiana, el cual es el Lema de Itô.

2.3.2. Lema de Itô

El Lema de Itô expresa el crecimiento de cualquier función "suave" que tiene como variable independiente una variable aleatoria. La restricción impuesta por este lema es que los parámetros de dicha variable aleatoria sean adaptados a la filtración.
Si se tiene una función suave f, en el sentido de que tiene segunda derivada definida, que depende tanto de la variable independiente x como del tiempo t, se puede obtener una aproximación de esta función utilizando la aproximación de Taylor:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}dt^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}dxdt + \cdots + \text{Residuo}.$$

Sin embargo, ¿qué ocurre cuando la variable independiente x es en realidad un proceso estocástico? Si se denota por X dicho proceso, cuyo incremento infinitesimal es dX y de variación cuadrática $dXdX$, entonces se tiene que el incremento seguido por la función f es

$$df = \frac{\partial f}{\partial X}dX + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}dX^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}dt^2 + \frac{\partial^2 f}{dt \partial X}dXdt + \cdots + \text{Residuo}.$$

En particular, si X es un proceso de Itô de la forma

$$dX = A(X,t)dW + B(X,t)dt,$$

y haciendo uso del cuadro (2.1) se sabe, por ejemplo, que la variación cuadrática del tiempo es nula así como la interacción entre el incremento infinitesimal del movimiento browniano y el incremento infinitesimal del tiempo. Por lo que la expresión anterior se ve reducida a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial X}\big(A(X,t)dW + B(X,t)dt\big) + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\big(A(X,t)dW + B(X,t)dt\big)^2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial X}\big(A(X,t)dW + B(X,t)dt\big) + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}A^2(X,t)dt. \end{aligned}$$

Esto es lo que propone el Lema de Itô.

Teorema 2.3.7. *Sea $f(t,x)$ una función real cuyas parciales $\frac{\delta f}{\delta t}$, $\frac{\delta f}{\delta x}$ y $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}$ están definidas y son continuas. Sea X un proceso con incremento dX y variación cuadrática $dXdX$, entonces*

$$df = \frac{\delta f}{\delta t}dt + \frac{\delta f}{\delta X}dX + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta X^2}dXdX. \tag{2.8}$$

En particular, si X es un proceso de Itô cuyo incremento es de la forma $dX = A(X,t)dW + B(X,t)dt$, entonces

$$df = A(X,t)\frac{\delta f}{\delta X}dW + \Big(B(X,t)\frac{\delta f}{\delta X} + A^2(X,t)\frac{1}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta X^2} + \frac{\delta f}{\delta t}\Big)dt. \tag{2.9}$$

Ahora bien, la interpretación que se puede dar del lema es que el incremento de la función puede separarse en dos tipos de incremento: uno del tipo determinístico y otro de carácter aleatorio. Esto implica que el incremento global de la función también será aleatorio. Sin embargo, es interesante notar que el incremento de tipo aleatorio de la función es proporcional al incremento aleatorio del proceso, donde el factor de proporción es precisamente el cambio infinitesimal debido a la variable aleatoria.
Siguiendo la idea del precio B del bono en función del incremento de la tasa de interés r como proceso de Itô dada por (2.4), se tiene que el incremento infinitesimal en el precio del bono será

$$dB = \sigma(r,t)\frac{\delta B}{\delta r}dW + \Big(\alpha(r,t)\frac{\delta B}{\delta r} + \sigma^2(r,t)\frac{1}{2}\frac{\delta^2 B}{\delta r^2} + \frac{\delta B}{\delta t}\Big)dt. \tag{2.10}$$

Por lo que una vez establecido el modelo que seguirá la tasa corta, el modelo para el incremento infinitesimal queda establecido. Sin embargo, una tarea mayor se presenta: encontrar una función que cumpla con la ecuación diferencial descrita.

Antes de comenzar con esta importante tarea, primero se dará el sentido económico y la justificación de la existencia de una ecuación de tal forma.

2.4. Modelos de mercado

No cabe duda que dependiendo de la postura de un inversionista frente al riesgo, este daría el precio de lo que está dispuesto a pagar por un instrumento financiero de determinadas características. Es decir, el precio que el inversionista asigne estaría sesgado por su postura frente al riesgo. Sin embargo, una valuación razonable de cualquier activo debería en principio no contener la opinión personal del comprador o vendedor del mismo. De ahí la necesidad de establecer bases sobre las cuales haya estabilidad en el modelo que se ha de ocupar para la estimación de precios.

En esta sección se abarcarán dos tipos de modelos: el modelo de mercado discreto y el mercado continuo. En ambos modelos se darán condiciones que permiten asegurar una consistencia en el mercado mismo, la cual se reduce principalmente a la capacidad de valuación, es decir, a definir cuándo a un activo se le puede asignar un precio como tal y la existencia de precios únicos.
Se comenzará con las bases del modelo discreto, el cual es importante en gran medida debido a que los modelos discretos expuestos en el presente trabajo encuentran su contraparte en modelos continuos. Es decir, éstos pueden tomarse como una aproximación a modelos continuos, aunque es importante mencionar que existen diferencias significativas entre uno y otro como se mostrara posteriormente.

2.4.1. Un mercado discreto y finito

Defínase el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, donde Ω contiene un número finito de elementos, los cuales representarán los posibles estados del mercado

$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_m\}.$$

Asúmase además que $\mathbb{P}[\omega] > 0$ para todo $\omega \in \Omega$.
Como se ha mencionado, dependiendo de la perspectiva del inversionista será la medida probabilidad $\mathbb{P}$; sin embargo, como más adelante se mencionará, esto no representará problema alguno.
Además, asociado al mercado se supondrá que existe un tiempo horizonte específico T que representa el tiempo en que termina toda actividad económica bajo consideración. Por otra parte, se hará el supuesto de la inexistencia de costos de transacción o comisiones y que los activos son perfectamente divisibles, es decir, el número de activos adquirido por el inversionista no es necesariamente un entero.
Para representar la información que se revela a los inversionistas, haremos uso de una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$, donde sin pérdida de generalidad se asume que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, es decir que no existe información al inicio, y $\mathcal{F}_T = \mathscr{F}$ conteniendo toda la información posible de los eventos ocurridos.

Considérese como base del modelo un proceso estocástico $(K+1)$-dimensional $S = \{S_t; t = 0, 1, \cdots, T\}$ con componentes $S^0, S^1, \cdots, S^K$, donde cada S^i es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$. Además, S^i_t representará el precio del i-ésimo activo al tiempo t. De manera especial, S^0 se le dará el calificativo de *cuenta de mercado* y representará, sin pérdida de generalidad, la evolución a través del tiempo de una unidad monetaria invertida en el activo $S^0_n = \prod_{i=1}^{n}(1+r_i)$ donde $(r_i)_{0\leq i\leq T}$ es un proceso predecible (es decir, que el proceso al tiempo k es $\mathcal{F}_{k-1}$-medible) con $r_i > 0\ \forall i$.

Se define una *estrategia* como un proceso vector predecible $\phi = \{\phi_t; t = 1, \cdots, T\}$ con componentes $\phi^0, \phi^1, \cdots, \phi^K$, donde se interpreta a ϕ^i_t como la cantidad del i-ésimo activo retenido por el inversionista entre los tiempos $t-1$ y t. Visto de esta manera, se puede considerar a ϕ_t como la conformación del portafolio del inversionista al tiempo t. Como es de esperarse, el portafolio del inversionista al tiempo t tiene que seleccionarse después de que los precios S_{t-1} han sido observados, además de tener que seleccionarse y conservarse antes del anuncio de los precios S_t.

Si X e Y son dos vectores de procesos estocásticos de dimensión N, se define a X_sY_s como el producto interior $X^1_sY^1_s + X^2_sY^2_s + \cdots + X^N_sY^N_s$, además de denotar como ΔX_t el vector $X_t - X_{t-1}$. Entonces, claramente ϕ_tS_{t-1} representa el valor del portafolio justo después de que los precios se han establecido al tiempo $t-1$, mientras que ϕ_tS_t es el precio del portafolio después de que los precios se han fijado al tiempo t, pero antes de que se realice algún cambio en el portafolio. De esta manera, se obtiene que $\phi_t\Delta S_t$ representa el cambio en el valor del portafolio debido a los precios que ocurren entre los tiempos $t-1$ y t, de tal manera que la ganancia del inversionista hasta el tiempo t debido a la manipulación del portafolio es:

$$G_t(\phi) = \sum_{i=1}^{t} \phi_i \Delta S_i \qquad , \qquad t = 1, \cdots, T. \tag{2.11}$$

Definiendo $G_0 = 0$, entonces $G(\phi)$ es el proceso de ganancias asociado a la estrategia ϕ. Por el momento no se ha hecho ninguna hipótesis sobre el portafolio, es decir, ϕ podría necesitar fondos extra o permitir inclusive retiro de éstos. Sin embargo, se tendrá interés en estrategias *autofinanciables*, las cuales tienen la característica de no haber recibido fondos extras o retiros, lo cual queda expresado como:

$$\phi_t S_t = \phi_{t+1} S_t \qquad t = 1, \cdots, T-1. \tag{2.12}$$

Efectivamente se puede verificar que, usando (2.11), el valor de una estrategia autofinanciable al tiempo t debe ser equivalente al valor inicial del portafolio más las ganancias que se han tenido hasta ese tiempo:

$$\begin{aligned}
\phi_1 S_0 + \underbrace{G_t(\phi)}_{\sum_{i=1}^{t} \phi_i \Delta S_i} &= \phi_1 S_0 + \sum_{i=1}^{t} \phi_i (S_i - S_{i-1}) \\
&= \phi_1 S_0 + \sum_{i=1}^{t} \phi_i S_i - \sum_{i=1}^{t} \phi_i S_{i-1} \\
&= \phi_1 S_0 + \sum_{i=1}^{t} \phi_i S_i - \phi_1 S_0 - \sum_{i=2}^{t} \underbrace{\phi_i S_{i-1}}_{\phi_{i-1} S_{i-1}} \\
&= \sum_{i=1}^{t} \phi_i S_i - \sum_{i=2}^{t} \phi_{i-1} S_{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{t} \phi_i S_i - \sum_{i=1}^{t-1} \phi_i S_i \\
&= \phi_t S_t,
\end{aligned}$$

esto es

$$\phi_t S_t = \phi_1 S_0 + G_t(\phi) \qquad t = 1, \cdots, T. \tag{2.13}$$

Esto significa esencialmente que los cambios del portafolio en una estrategia autofinanciable se deben exclusivamente a las ganancias netas obtenidas de la inversión.

Es natural pensar que el proceso que sigue el *valor de la estrategia* ϕ al tiempo t quede definido como el valor del portafolio utilizando la estrategia seleccionada, cuyo valor es:

$$V_t(\phi) = \begin{cases} \phi_t S_t, & t = 1, \cdots, T \\ \phi_1 S_0, & t = 0 \end{cases} .$$

Hasta este momento no se ha hecho ninguna restricción sobre el valor de ϕ_t^i. De hecho se permitirá que tome valores negativos, en cuyo caso se dirá que se tiene una posición *corta* del activo i al tiempo t. Sin embargo, el inversionista debe ser capaz de cubrir todas sus deudas, por lo que es necesario entonces descartar estrategias que tengan un valor negativo para alguna t. Esto no significa que el inversionista no pueda tener posición corta en alguno de los activos, sino que debe tener la solvencia para pagar sus deudas. Se le dará el calificativo de *admisible* a la estrategia que cumpla que $V(\phi)$ sea un proceso positivo ($V(\phi) \geq 0$). Se denotará como Φ al conjunto de todas las estrategias admisibles y autofinanciables.

Se le referirá como *reclamo contingente* a una variable aleatoria no negativa X que puede pensarse como un contrato que pagará la cantidad de $X(\omega)$ unidades monetarias si el escenario ω se presenta; al conjunto de todos los reclamos contingentes se denotará como $\mathbf{X}$. Se dirá que un reclamo contingente X es *alcanzable* si existe alguna estrategia $\phi \in \Phi$ cuyo valor al tiempo T sea X, es decir, si $V_T(\phi) = X$; en cuyo caso se dirá que ϕ *genera* a X y además $\pi = V_0(\phi)$ es un *precio* asociado a este reclamo contingente.

Esto genera una pregunta: ¿qué sucede si existen dos estrategias ϕ y ϕ' que generen a X y sin embargo $V_0(\phi) \neq V_0(\phi')$?. Sin duda, si esto pasara existiría una incongruencia dentro del modelo pues se podría crear una tercera estrategia a partir de estas dos de tal manera que el valor inicial de la inversión sea cero, y obteniendo una ganancia al final del tiempo T.
A la existencia de incongruencias de este tipo en el modelo, se le refiere como existencia de una *oportunidad de arbitraje*, que se define como alguna $\phi \in \Phi$ tal que $V_0(\phi) = 0$ pero $\mathbb{E}[V_T(\phi) > 0]$ y representa una estrategia sin riesgo con posibilidad de generar ganancias sin haber invertido dinero propio.

Para evitar incongruencias en el modelo, debe definirse apropiadamente la forma de asignar precios. Para empezar, debería tenerse que la única manera de obtener cero unidades monetarias con probabilidad uno en un futuro es invirtiendo cero unidades monetarias, y viceversa. Es decir, la única manera de obtener un beneficio en el futuro es invirtiendo capital. Además, si se tienen dos reclamos contingentes diferentes, X y X', entonces el precio de las combinaciones lineales positivas tiene que ser la combinación lineal positiva de los precios.
Bajo esta idea, se define a un *sistema de precios* como un mapeo $\pi : \mathbf{X} \to [0, \infty)$ que satisface que si $a, b \geq 0$ y $X, X' \in \mathbf{X}$, entonces

- $\pi(X)$=0 si y sólo si $X = 0$.
- $\pi(aX + bX') = a\pi(X) + b\pi(X')$.

Cuando sucede que $\pi(V_T(\phi)) = V_0(\phi)$ para toda $\phi \in \Phi$ se dice que el sistema de precios es *consistente* con el modelo de mercado, es decir, que es consistente cuando el precio al día de hoy de una estrategia seguida es precisamente el valor actual de esa estrategia. Se denotará como Π al conjunto de todos los sistemas de precios consistentes.

Para obtener un sistema de precios consistente se necesitará la siguiente definición.

Definición 2.4.1. Sea Ω un conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Dos medidas de probabilidad $\mathbb{P}$ y $\tilde{\mathbb{P}}$ se dicen equivalentes si concuerdan en los conjuntos de $\mathcal{F}$ que tienen probabilidad cero y se denotará como $\tilde{\mathbb{P}} \approx \mathbb{P}$ a esta relación.

Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de todas las medidas de probabilidad Q equivalentes a $\mathbb{P}$ bajo los cuales los precios descontados de los activos DS es (vector) martingala. Según se muestra en Harrison-Pliska [5] existe una relación uno a uno entre $\mathbb{Q}$ y Π la cual es la siguiente:

- $\pi(X) = \mathbb{E}_Q[D_T X]$,
- $Q(A) = \pi(S_T^0 1_A)$, $A \in \mathcal{F}$.

Esto muestra que si existiera una medida de probabilidad equivalente bajo la cual los precios descontados de los activos sean martingalas, entonces el valor esperado puede usarse como sistema de precios. No sólo eso, sino que es posible mostrar que el sistema de precios que genera no presenta incongruencias.

Teorema 2.4.2. *El modelo de mercado no tiene oportunidades de arbitraje si y sólo si $\mathbb{Q}$ (o equivalentemente Π) es no vacío.*

Demostración. Supóngase que $\mathbb{Q}$ es no vacío, es decir, que existe $\tilde{\mathbb{P}} \approx \mathbb{P}$ de tal forma que $\tilde{\mathbb{E}}[\tilde{V}_n(\phi)] = V_0(\phi)$. Ahora supóngase una estrategia admisible ϕ tal que $V_0(\phi) = 0$ por lo que se tiene que $\tilde{\mathbb{E}}[\tilde{V}_0(\phi)] = 0 = \tilde{\mathbb{E}}[\tilde{V}_n(\phi)]$. Además, debido a que $\tilde{V}(\phi) \geq 0$ por ser admisible, se debe tener que $\tilde{\mathbb{P}}[\tilde{V}_n(\phi) = 0] = 1$, y como $\tilde{\mathbb{P}} \approx \mathbb{P}$ se tiene que $\mathbb{P}[\tilde{V}_n(\phi) = 0] = 1$, es decir, que si el valor inicial de dicha estrategia es cero, debe mantenerse en cero para todo tiempo, por lo que no existen oportunidades de arbitraje. $\square$

El teorema anterior tiene como consecuencia que si se cumple alguno de las tres condiciones, entonces los precios son únicos y satisfacen la ecuación

$$\pi(X) = \mathbb{E}_Q[D_T X] \qquad Q \in \mathbb{Q}, \tag{2.14}$$

en cuyo caso se dice que el modelo es *viable*.

Ahora, si un reclamo contingente es alcanzable, dada la información disponible al tiempo t ¿cuál es el precio que debería asignársele? La siguiente proposición da respuesta a esta pregunta.

Afirmación 2.4.3. *Si $X \in \mathbf{X}$ es alcanzable, entonces*

$$D_t V_t(\phi) = \mathbb{E}_Q[D_T X|\mathcal{F}_t], \qquad t = 0, 1 \cdots, T, \tag{2.15}$$

para cualquier $\phi \in \Phi$ que genere a X y cada $Q \in \mathbb{Q}$

Demostración. Se demostrará primero que el precio descontado $DV(\phi)$ es martingala bajo cada $Q \in \mathbb{Q}$.
En efecto, si $\phi \in \Phi$ y $0 \leq s < t \leq T$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q[D_tV_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_Q\Big[\sum_{i=s+1}^{t}\phi_i(D_iS_i - D_{i-1}S_{i-1})|\mathcal{F}_s\Big] + \mathbb{E}_Q[D_sV_s|\mathcal{F}_s] \\
&= \sum_{i=s+1}^{t}\mathbb{E}_Q\Big[\phi_i(D_iS_i - D_{i-1}S_{i-1})|\mathcal{F}_s\Big] + \mathbb{E}_Q[D_sV_s|\mathcal{F}_s] \\
&= \sum_{i=s+1}^{t}\mathbb{E}_Q\Big\{\mathbb{E}_Q\Big[\phi_i(D_iS_i - D_{i-1}S_{i-1})|\mathcal{F}_{i-1}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big\} + \mathbb{E}_Q[D_sV_s|\mathcal{F}_s] \\
&= \sum_{i=s+1}^{t}\mathbb{E}_Q\Big\{\phi_i\mathbb{E}_Q\Big[(D_iS_i - D_{i-1}S_{i-1})|\mathcal{F}_{i-1}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big\} + \mathbb{E}_Q[D_sV_s|\mathcal{F}_s] \\
&= \sum_{i=s+1}^{t}\mathbb{E}_Q\Big\{\phi_i\Big(\mathbb{E}_Q[D_iS_i|\mathcal{F}_{i-1}] - \mathbb{E}_Q[D_{i-1}S_{i-1}|\mathcal{F}_{i-1}]\Big)\Big|\mathcal{F}_s\Big\} + D_sV_s \\
&= \sum_{i=s+1}^{t}\mathbb{E}_Q\Big\{\phi_i\Big(\mathbb{E}_Q[D_{i-1}S_{i-1}] - \mathbb{E}_Q[D_{i-1}S_{i-1}]\Big)\Big|\mathcal{F}_s\Big\} + D_sV_s \\
&= D_sV_s,
\end{aligned}$$

donde se ha hecho uso del hecho de que ϕ es predecible y que DS es martingala bajo Q.
Ahora, si $\phi \in \Phi$ genera a X, significa que $X = V_T(\phi)$, y sustituyendo esta igualdad en (2.15) se sigue de inmediato el resultado. □

Y entonces surge la duda de cuándo un reclamo contingente es alcanzable. El que un reclamo sea alcanzable significa, bajo términos del modelo, que es posible asignarle un precio. Es por esta razón que se busca que cada reclamo contingente que pueda generarse con los activos $S_0, S_1, \ldots, S_n$ sea alcanzable, y cuando esto sucede se dice que el mercado es *completo*.
El siguiente teorema expone una condición suficiente y necesaria para obtener un mercado completo, sin embargo, no se demostrará.

Teorema 2.4.4. *Un mercado viable es completo si y sólo si existe una única medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ equivalente a $\mathbb{P}$ bajo la cual los precios descontados son martingala.*

En síntesis, lo que se ha obtenido en esta sección es lo siguiente:

- Para que no existan incongruencias en el modelo, no deben existir oportunidades de arbitraje. Una condición suficiente y necesaria para ésto es que exista alguna medida de probabilidad equivalente bajo la cual los precios descontados sean martingala.

- Para que cada reclamo contingente en el modelo se pueda valuar, se requiere que cada uno de ellos sea alcanzable bajo el modelo de mercado, esto es, el modelo de mercado debe ser completo. Para que sea completo debe existir una única medida de probabilidad equivalente bajo la cual los precios descontados sean martingala.

Todo ello apunta a que, en un modelo discreto, basta con mostrar la existencia de una única medida de probabilidad equivalente bajo la cual los precios descontados sean martingala para asegurar que el modelo de mercado sea completo y viable.

2.4.2. El mercado continuo

Esta sección contendrá, en más de un concepto, la contraparte continua de la sección anterior[1]. Nuevamente como en el caso discreto, se denotará como Ω el conjunto que contiene los posibles escenarios del mercado; y se considerará al espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Además, se supondrá que existe un tiempo horizonte específico T que representa el tiempo en que termina toda actividad económica bajo consideración. Se hará uso de la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$, denotando la información que tienen los inversionistas al tiempo t sobre el escenario del mercado y donde $\mathscr{F} = \mathcal{F}_T$. Obviamente, esta filtración tiene que cumplir con la propiedad de la definición 2.1.2, significando con ello que no existe fuga de información.
Nuevamente, se hará el supuesto de la inexistencia de costos de transacción o comisiones y que los activos son perfectamente divisibles.

Se contará con $K+1$ activos adaptados a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$, los cuales se supondrán con un comportamiento de la forma:

$$
\begin{aligned}
S_0(t) &= e^{\int_0^t r(s)ds} \\
S_1(t) &= S_1(0) + \int_0^t \alpha_1(u, S_1)du + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \sigma_{1j}(u, S_1)dW_j(u) \\
\vdots &= \quad \vdots + \vdots + \vdots \\
S_K(t) &= S_K(0) + \int_0^t \alpha_K(u, S_K)du + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \sigma_{Kj}(u, S_K)dW_j(u),
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

donde $r(t) = r_0 + \int_0^t \alpha_0(u, r)du + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{0j}(u, r)dW_j(u)$. Es decir, que el precio de los activos $S_1, \ldots, S_K$ y la tasa r tienen el comportamiento de un proceso de Itô. Estos activos serán base del modelo y generarán un proceso estocástico

[1] En el presente trabajo se trata de un modelo específico y debe mencionarse que la teoría desarrollada para procesos más generales puede ser encontrada en Harrison-Pliska [5].

$K+1$-dimensional $S = \{S(t)\}_{0\le t\le T}$.

El elemento S_0 se le dará el calificativo de "cuenta de mercado" y representará la función de acumulación bajo la cual el mercado recapitaliza una unidad monetaria a la tasa libre de riesgo en el tiempo. Evidentemente, el inverso de S_0, que se denotará como D, será el proceso que describa la función de descuento. El incremento infinitesimal de la función de descuento $D(t) := e^{-\int_0^t r(s)ds}$ es suficientemente suave y no contiene elementos volátiles, esto se puede mostrar usando (2.8) y definiendo $X = \int_0^t r(s)ds$, resultando $dX = r(t)dt$ y $dXdX = 0$; además, $f(x) = e^{-x}$, por lo que $f'(x) = -f(x)$, $f''(x) = f(x)$, de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} dD(t) &= df(X(t)) \\ &= f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))dX(t)dX(t) \\ &= -f(X(t))r(t)dt \\ &= -r(t)D(t)dt. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Esto muestra que la función de descuento, a pesar de la aleatoriedad no tiene cambios bruscos. Como consecuencia, esta función solo actúa sobre el tiempo, es decir, que el cambio del valor del dinero es gradual a medida que transcurre el tiempo y no de forma instantánea. Nótese que la tasa de cambio es proporcional a $r(t)$, por lo que a $r(t)$ se le da el calificativo de *libre de riesgo*. Además, como es posible observar, su variación cuadrática es cero.

Se considerará además el proceso de precios descontados $Z = \{Z(t)\}_{0\le t\le T}$ con componentes $Z_1, Z_2, \cdots, Z_{K+1}$ cuyo componente i-ésimo será de la forma $Z_i = DS_i$.

Definición 2.4.5. Una *estrategia* se define como un proceso $(K+1)$-dimensional $\phi = \{\phi(t)\}_{0\le t\le T}$ adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$. Asociado a cada estrategia se tendrá su *valor* $V(\phi)$ y su *proceso de ganancias* $G(\phi)$, los cuales se definen como:

$$V_t(\phi) = \phi(t)S(t) = \sum_{k=0}^{K} \phi_k(t)S_k(t),$$

$$G_t(\phi) = \int_0^t \phi(u)dS(u) = \sum_{k=0}^{K}\int_0^t \phi_k(u)dS_k(u).$$

respectivamente.

Intuitivamente, el k-ésimo componente ϕ_t^k de la estrategia ϕ_t tendrá la función de representar la cantidad del activo k adquirido y retenido al tiempo t. Además, el proceso $V_t(\phi)$ representa el valor del portafolio ϕ_t y la ganancia total que se ha obtenido hasta el tiempo t habiendo adoptado la estrategia ϕ.

Definición 2.4.6. Una estrategia es *autofinanciable* si cumple con la condición
$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + G_t(\phi) \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Nuevamente, el que una estrategia sea autofinanciable significa que no se han hecho retiros ni se han aportado fondos extra a la inversión, es decir, que cambios en el valor del portafolio se deben exclusivamente a variaciones en los precios de los activos.
Sea $\hat{\Phi}$ el conjunto de todas las estrategias autofinanciables tales que $V(\phi) \geq 0$. Considérense además los procesos de *ganancias descontadas* y *valor descontados* definidos de la forma:

$$\tilde{G}_t(\phi) = \int_0^t \phi dZ(u) = \sum_{k=1}^{K} \int_0^t \phi_k(u) dZ_k(u), \text{ y} \tag{2.18}$$

$$\tilde{V}_t(\phi) = D(t)V_t(\phi) = \phi_0(t) + \sum_{k=1}^{K} \phi_k(t) Z_k(t) \tag{2.19}$$

Nótese que este proceso de ganancias descontadas sólo toma en cuenta los activos diferentes a la cuenta de mercado.
Es posible demostrar que el conjunto de estrategias autofinanciables es el mismo bajo los procesos normales y los procesos descontados.

Afirmación 2.4.7. *Sea ϕ una estrategia, entonces ϕ es autofinanciable si y sólo si $\tilde{V}(\phi) = \tilde{V}_0(\phi) + \tilde{G}(\phi)$. Además $V(\phi) \geq 0$ si y sólo si $\tilde{V}(\phi) \geq 0$.*

Demostración. Supóngase que ϕ es autofinanciable, esto es que $V(\phi) = V_0(\phi) + G(\phi)$. De esto se sigue que $dV(\phi) = \phi dS$.
Además, al tener D variación cuadrática finita, se tiene que $dDdV(\phi) = 0$. Entonces se obtiene que:

$$\begin{aligned} d\tilde{V}(\phi) &= d(DV(\phi)) \\ &= DdV(\phi) + V(\phi)dD \\ &= D\phi dS + \phi S dD \\ &= \phi(\underbrace{DdS + SdD}_{dZ}) \\ &= \phi dZ. \end{aligned}$$

Esto significa que

$$\tilde{V}(\phi) = \tilde{V}_0(\phi) + \int \phi dZ = \tilde{V}_0(\phi) + \tilde{G}(\phi).$$

□

Esto quiere decir que no importa qué procesos se tomen en consideración, siempre se tendrá la seguridad de que las estrategias autofinanciables no perderán la propiedad de serlo.
Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de todas las medidas de probabilidad Q equivalentes a $\mathbb{P}$, bajo las cuales Z (o equivalentemente DS, pues $DS_0 = 1$ que es martingala siempre) es martingala. Este conjunto puede o no ser vacío.
La manera de obtener una medida equivalente en el mercado presentado cuando el conjunto es no vacío se muestra a continuación de manera poco formal.

Cambio de medida

La existencia de medidas de probabilidad que conviertan los precios descontados en martingala, no quiere decir que se cambie el espacio de eventos (Ω). En vez de ello, la técnica a la que se recurre es a la reasignación de probabilidades. La reasignación de probabilidades debe considerarse como una nueva manera de medir eventos. Sin embargo como es de esperarse (y como se ha expuesto), debe haber una equivalencia entre la nueva medida que se construye y la medida original. Para que exista esa equivalencia, la nueva medida debe cumplir con ciertos requisitos, como por ejemplo, que ambas medidas de probabilidad concuerden con los eventos casi seguros, esto conllevaría directamente a que concuerden con los eventos posibles y seguros. Además, debe cumplir también con las propiedades naturales de probabilidad como medida.
Ya que se requiere que la nueva medida sea diferente para algunos eventos que la medida original, se puede pensar en multiplicar la medida de probabilidad original por un factor que dependa de cada evento ocurrente, esto claramente propone que dicho factor sea una variable aleatoria la cual se denotará por Z. Pero ¿qué condiciones debe cumplir dicha variable aleatoria? Pues bien, es evidente que ésta no puede tomar valores negativos más que en un conjunto de probabilidad cero, de esta manera se garantiza que la nueva medida de probabilidad conservará la propiedad de ser no negativa bajo cualquier evento. Por otra parte, al ser la variable aleatoria Z positiva con probabilidad uno, se asegura que, si se tienen dos eventos de tal manera que uno está contenido en otro, al conjunto de mayor tamaño siempre le corresponderá una probabilidad mayor o igual que al de menor tamaño, por lo que para asegurar que la nueva medida de probabilidad también esté entre cero y uno basta con asegurar que el conjunto de mayor tamaño de todos tenga probabilidad uno, esto es, que

$$1 = \tilde{\mathbb{P}}[\Omega] = \int_{\Omega} Z(w)d\mathbb{P}.$$

Esta última igualdad sugiere que la variable aleatoria Z tenga valor esperado de uno. Aunque parezca increíble, estas son las únicas dos condiciones que debe de cumplir la variable aleatoria Z para crear un nuevo espacio de probabilidad. Esta variable aleatoria describe la relación existente entre las dos medidas de probabilidad, pues a todo conjunto A se le reasigna una nueva probabilidad definida como:

$$\tilde{\mathbb{P}}[A] = \int_{A} Zd\mathbb{P}. \tag{2.20}$$

Por otra parte, el cambio de medida tiene repercusiones en otro tipo de relaciones como, por ejemplo, el valor esperado condicional de una variable aleatoria. La equivalencia entre el valor esperado condicional bajo las dos medidas de probabilidad se puede obtener contemplando el significado del mismo.
El valor esperado condicional es, al igual que el valor esperado, un promedio ponderado, pero a diferencia de este último el valor esperado condicionado "reduce" el espacio de probabilidad al restringir el espacio de estados que puede tomar la variable aleatoria, es decir, restringe el conjunto de valores posibles que puede tomar la variable aleatoria y toma un promedio ponderado de esta restricción. Es necesario aclarar que si la restricción impuesta en la variable aleatoria es aleatoria el valor esperado condicional produce una variable aleatoria.
Bajo este criterio, el valor esperado condicional de una variable aleatoria X (respecto a una σ-álgebra ó variable aleatoria) debe cumplir con la siguiente condición no importando la medida de probabilidad en la que se encuentre:

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}(s)]d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} \qquad \forall A \in \mathcal{F}(s).$$

Lo que sería equivalente en el nuevo espacio de probabilidad a

$$\int_A \tilde{\mathbb{E}}[X|\mathcal{F}(s)]d\tilde{\mathbb{P}} = \int_A X d\tilde{\mathbb{P}} \qquad \forall A \in \mathcal{F}(s),$$

donde $\tilde{\mathbb{P}}$ y $\tilde{\mathbb{E}}$ representan la nueva medida de probabilidad y la esperanza bajo la nueva medida respectivamente. Y ya que eso debe pasar para cualquier variable aleatoria X y bajo cualquier tipo de medida de probabilidad, entonces también se debe cumplir con la variable aleatoria YZ, de donde se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{Z(s)}{Z(s)}\mathbb{E}[YZ|\mathcal{F}(s)]d\mathbb{P} &= \int_A YZd\mathbb{P} \quad \forall A \in \mathcal{F}(s),\\
\int_A \frac{Z(s)}{Z(s)}\mathbb{E}[YZ|\mathcal{F}(s)]d\mathbb{P} &= \int_A Yd\tilde{\mathbb{P}} \quad \forall A \in \mathcal{F}(s),\\
\int_A \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}[YZ|\mathcal{F}(s)]d\tilde{\mathbb{P}} &= \int_A Yd\tilde{\mathbb{P}} = \int_A \tilde{\mathbb{E}}[Y|\mathcal{F}(s)]d\tilde{\mathbb{P}} \quad \forall A \in \mathcal{F}(s).
\end{aligned}$$

De donde se puede obtener de manera intuitiva la relación intrínseca que existe entre el valor esperado condicional bajo la nueva medida y el valor esperado condicional bajo la antigua medida; la relación que existe es

$$\tilde{\mathbb{E}}[Y|\mathcal{F}(s)] = \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}[YZ|\mathcal{F}(s)]. \tag{2.21}$$

Debe recordarse que si dos integrales tienen el mismo valor, en general no es de esperarse que el integrando sea el mismo; entonces ¿por qué se puede concluir lo anterior? La razón es que, si difieren, entonces deben hacerlo en un conjunto de medida cero. En efecto, si en $A \in \mathcal{F}$ se tiene que $\tilde{\mathbb{E}}[Y|\mathcal{F}(s)] \neq \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}[YZ|\mathcal{F}(s)]$ entonces debido a que

$$\int_A \tilde{\mathbb{E}}[Y|\mathcal{F}(s)]d\tilde{\mathbb{P}} = \int_A Yd\tilde{\mathbb{P}} = \int_A \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}[YZ|\mathcal{F}(s)]d\tilde{\mathbb{P}},$$

se tendría
$$\int_A \big(\tilde{\mathbb{E}}[Y|\mathcal{F}(s)] - \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}[YZ|\mathcal{F}(s)]\big)d\tilde{\mathbb{P}} = 0,$$
por lo que se concluye que A tiene medida cero y por lo tanto se puede hacer la afirmación de que son equivalentes en general, sin alterar futuros cálculos.

De manera especial, la nueva medida de probabilidad generada con la variable
$$Z(t) = \exp\big\{ - \int_0^t \Theta(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta^2(u)du\big\},$$
donde Θ es un proceso adaptado, será de gran interés. Nótese que la variable $Z(t)$ cumple con las condiciones antes impuestas, ya que la función exponencial es positiva, además utilizando
$$X(t) = -\int_0^t \Theta(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_o^t \Theta^2(u)du,$$
y usando el lema de Itô se obtiene que el incremento para este proceso es
$$\begin{aligned} dZ(t) &= e^{X(t)}\Big(- \Theta(t)dW(t)\Big) - e^{X(t)}\Big(- \frac{1}{2}\Theta^2(t) + \frac{1}{2}\Theta^2(t)\Big)dt \\ &= -\Theta(t)Z(t)dW(t). \end{aligned}$$
Integrando en ambos lados se obtiene que
$$Z(t) = Z(0) - \int_0^t \Theta Z(s)dW(s),$$
por lo que se tiene que el proceso $Z = \{Z(t)\}_{t\geq 0}$ es martingala, pues las integrales de Itô lo son, y de manera especial se obtiene además que el valor esperado de esta integral es el que obtiene al tiempo cero, el cual es uno. De aquí se concluye que considerando la variable aleatoria $Z(T)$ se puede producir una medida de probabilidad definida por (2.20). Es de suma importancia remarcar el hecho de que Θ es lo único que caracteriza esta nueva medida de probabilidad; esto indudablemente puede ser usado para tratar de inferir si existe una medida de probabilidad equivalente.

Primero, considérese el caso en el cual el modelo contiene sólo un movimiento browniano. Esto quiere decir que el incremento infinitesimal en el precio de todo activo es de la forma
$$dS_i(t) = \alpha_i(t, S_i)dt + \sigma_i(t, S_i)dW(t).$$
Utilizando la ecuación anterior y (2.17), resulta evidente que el precio descontado de este activo no es martingala, pues el incremento del precio descontado es
$$\begin{aligned} d(D(t)S_i(t)) &= D(t)dS_i(t) + S_i(t)dD(t) + \underbrace{dD(t)dS_i(t)}_{0} \\ &= D(t)\big(\alpha_i(t, S_i)dt + \sigma_i(t, S_i)dW(t)\big) - r(t)D(t)S_i(t)dt \\ &= D(t)\big(\alpha_i(t, S_i) - r(t)D(t)S_i(t)\big)dt + \sigma_i(t, S_i)dW(t). \end{aligned}$$

Para que la ecuación anterior pudiera ser martingala, debería depender únicamente del incremento de un movimiento browniano. Debido al interés de conseguir un espacio de probabilidad bajo el cual el valor descontado de los activos sea martingala, sería agradable reescribir la última ecuación como un movimiento browniano bajo una nueva medida de probabilidad, medida a la cual le será dado el calificativo de "neutral al riesgo' (el motivo de darle este calificativo será explicado más adelante). El siguiente teorema permite definir la medida de probabilidad deseada.

Teorema 2.4.8. ***(Girsanov unidimensional).***
Sea $W(t)$ un movimiento browniano en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y sea $\mathcal{F}(t)$ la filtración para este movimiento browniano. Sea $\Theta(t)$ un proceso adaptado y defínase

$$Z(t) = \exp\big\{ - \int_0^t \Theta(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta^2(u)du \big\}. \tag{2.22}$$

. Supóngase que se cumple la condición

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T \Theta^2(u)Z^2(u)du \Big] < \infty. \tag{2.23}$$

Sea Z=Z(T). Entonces bajo la probabilidad neutral al riesgo $\tilde{\mathbb{P}}$ dada por (2.20) el proceso

$$\tilde{W}(t) = \int_0^t dW(s) + \int_0^t \Theta(s)ds, \tag{2.24}$$

es un movimiento browniano.

Demostración. Es inmediato verificar que $\tilde{W}(0) = 0$. Además, al calcular su variación cuadrática se puede ver que corresponde al de un movimiento browniano:

$$d\tilde{W}(t)d\tilde{W}(t) = (dW(t) + \Theta(t)dt)(dW + \Theta(t)dt) = dW(t)dW(t) = dt$$

Por último, basta con comprobar que es martingala bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, para ello es necesario mostrar que el proceso $\tilde{W}Z$ es martingala bajo $\mathbb{P}$, lo cual puede hacerse de la siguiente manera usando el lema de Itô:

$$\begin{aligned}
d(\tilde{W}(t)Z(t)) &= \tilde{W}(t)dZ(t) + d\tilde{W}(t)Z(t) + d\tilde{W}(t)dZ(t) \\
&= -\tilde{W}(t)\Theta(t)Z(t)dW(t) + Z(t)dW(t) \\
&\quad +Z(t)\Theta(t)dt + \Big(dW(t) + \Theta(t)dt\Big)\Big(- \Theta(t)Z(t)dW(t)\Big) \\
&= \Big(- \tilde{W}(t)\Theta(t) + 1\Big)Z(t)dW(t).
\end{aligned}$$

Debido a que la última expresión carece de un término con dt, el proceso $\tilde{W}Z$ es martingala. Ahora, utilizando la relación que existe entre el valor esperado condicional de ambas medidas de probabilidad (2.21), se obtiene:

$$\tilde{\mathbb{E}}[\tilde{W}(t)|\mathcal{F}(s)] = \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}[\tilde{W}(t)Z(t)|\mathcal{F}(s)] = \frac{1}{Z(s)}\tilde{W}(s)Z(s) = \tilde{W}(s),$$

por lo que $\tilde{W}$ es movimiento browniano bajo la nueva medida de probabilidad. □

Con todo esto es posible, al cambiar la medida de probabilidad, obtener como martingala al precio descontado del activo puesto que todos los elementos que lo componen son adaptados a la filtración $\mathcal{F}(t)$

$$\begin{aligned} d(D(t)S(t)) &= D(t)\Big((\alpha(t,S) - r(t)S(t))dt + \sigma(t,S)dW(t)\Big) \\ &= D(t)\sigma\Big(\underbrace{\frac{(\alpha(t,S) - r(t)S(t)}{\sigma(t,S)}}_{\Theta^*(t)}dt + dW(t)\Big) \\ &= D(t)\sigma(t,S)\big(\Theta^*(t)dt + dW(t)\big) \\ &= D(t)\sigma(t,S)d\tilde{W}(t), \end{aligned}$$

donde $\Theta^* = \frac{(\alpha(t,S)-r(t)S(t))}{\sigma(t,S)}$.

Otro detalle interesante es el que ocurre con el precio del activo; su incremento infinitesimal está dado por

$$\begin{aligned} dS(t) &= \alpha(t,S)dt + \sigma(t,S)dW \\ &= \alpha(t,S)dt + (r(t)S(t) - r(t)S(t))dt + +\sigma(t,S)dW \\ &= \alpha(t,S)dt - r(t)S(t)dt + \sigma(t,S)dW + r(t)S(t)dt \\ &= \sigma(t,S)(\frac{(\alpha(t,S) - r(t)S(t))}{\sigma(t,S)}dt + dW(t)) + r(t)S(t)dt \\ &= \sigma(t,S)(\Theta^*(t)dt + dW(t)) + r(t)S(t)dt \\ &= \sigma(t,S)d\tilde{W}(t) + r(t)S(t)dt. \end{aligned}$$

Es decir, que bajo la nueva medida de probabilidad, cualquier activo tiene como tasa de retorno instantánea a la tasa de interés $r(t)$. Reescribiendo esta última ecuación como

$$dS(t) - r(t)S(t)dt = \sigma(t,S)d\tilde{W}(t),$$

se puede observar que el lado izquierdo representa la diferencia entre cambios instantáneos en el precio del activo y la ganancia que se obtendría del activo si la tasa fuera libre de riesgo. El lado derecho contiene un elemento del movimiento browniano, es claro que no se trata de un elemento libre de riesgo, por lo que el término Θ^* puede ser interpretado como el exceso por aceptar cierto nivel de riesgo. Por ello a la variable aleatoria Θ^* se le llama *prima de riesgo*.

Es posible extender este teorema a más dimensiones, como se enunciará a continuación; sin embargo, no se expondrá su demostración.

Teorema 2.4.9. ***(Girsanov multidimensional).***
Sea $W(t) = (W_1(t), W_2(t), \cdots, W_d(t))$ *un movimiento browniano d-dimensional en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *y sea* $\mathcal{F}(t)$ *la filtración para este movimiento browniano. Sea* $\Theta(t) = (\Theta_1(t), \Theta_2(t), \cdots, \Theta_d(t))$ *un proceso adaptado. Defínase además el proceso*

$$Z(t) = \exp\big\{ -\int_0^t \Theta(u) \cdot dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t ||\Theta||^2(u)du\big\}. \tag{2.25}$$

Supóngase que

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T ||\Theta(u)||^2 Z^2(u)du\Big] < \infty, \tag{2.26}$$

y defínase $Z = Z(T)$. *Entonces, bajo la nueva medida de probabilidad definida como*

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega)d\mathbb{P}(\omega) \quad \textit{para toda } A \in \mathcal{F},$$

el proceso

$$\tilde{W}(t) = \int_0^t dW(s) + \int_0^t \Theta(s)ds$$

es un movimiento browniano d-dimensional.

Este teorema es muy importante para el modelo expuesto al principio de la sección, donde el incremento infinitesimal seguido por el precio descontado de los activos es de la forma

$$d(D(t)S_i(t)) = D((\alpha_i(t, S_i) - r(t)S(t))dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t, S_i)dW_j(t)). \tag{2.27}$$

Para hacer que los precios descontado sean martingalas, entonces sería agradable poder expresarlos de la forma

$$d(D(t)S_i(t)) = D\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t, S_i)(\Theta_j(t)dt + dW_j(t)). \tag{2.28}$$

Si es posible encontrar tal proceso Θ, entonces podemos hacer uso del teorema de Girsanov para construir una medida de probabilidad equivalente bajo la cual $\tilde{W}$ sea un movimiento browniano d-dimensional. Esto permitiría reescribir a (2.28) de la forma

$$d(D(t)S_i(t)) = D\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t, S_i)d\tilde{W}_j(t),$$

por lo que $D(t)S_i(t)$ sería martingala bajo $\tilde{\mathbb{P}}$. Esto conlleva a formular el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\alpha_i(t, S_i) - r(t)S_i(t) = \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t, S_i)\Theta_j(t). \tag{2.29}$$

A las $K+1$ ecuaciones con d incógnitas $\Theta_1(t), \cdots, \Theta_K(t)$ de este sistema se les conoce como *ecuaciones de riesgo.*

Entonces, efectivamente el conjunto $\mathbb{Q}$ es no vacío cuando el sistema de ecuaciones (2.29) tiene solución y Θ cumple las condiciones impuestas en el teorema de Girsanov, pues puede construirse una nueva medida de probabilidad bajo la cual el proceso de precios descontados Z es martingala. No sólo eso, sino que si ρ es un proceso adaptado a la filtración, entonces la integral de la forma $\int \rho dZ = \sum_{k=1}^{K+1}\sum_{j=1}^{d}\int \rho_k D(t)(\sigma_{kj}d\tilde{W}_j)$ es una suma de integrales de Itô. Sin embargo, esto no garantiza que cada integral sea finita, por lo que no puede garantizarse que la suma sea martingala. Esto conduce a que el conjunto de estrategias no es aún el apropiado.

Defínase como $\mathscr{L}(Z)$ al conjunto de todas aquellos procesos $H = (H^1, \ldots, H^K)$ tal que el proceso cumple que

$$\left(\int_0^t (H_s^k)^2 dZ_s dZ_s\right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.30}$$

donde $\{H_c ds^k\}_{s\geq 0}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_s\}_{s\geq 0}$; este conjunto servirá como base para seleccionar las estrategias apropiadas.

Definición 2.4.10. Una estrategia $\phi = (\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^K)$ es *admisible* si $(\phi^1, \ldots, \phi^K) \in \mathscr{L}(Z)$, cumple con ser autofinanciable, $\tilde{V}_t(\phi) \geq 0$ y $\tilde{V}_t(\phi)$ es martingala bajo cada $Q \in \mathbb{Q}$

Sea Φ el conjunto de todas las estrategias admisibles.

Nuevamente, un *reclamo contingente* se define como una variable aleatoria positiva X, la cual puede ser vista como un contrato que se compromete a pagar $X(\omega)$ unidades monetarias si el escenario ω se presenta. Se dice que este reclamo contingente que es *alcanzable* si existe $\phi \in \Phi$ de tal forma que $\tilde{V}_T(\phi) = D_T X$, en cuyo caso se dice que ϕ *genera* a X y $\pi = (\tilde{V}_0(\phi))$ es el *precio asociado* a X. Si $\phi \in \Phi$ genera a X, por la forma en que se ha definido ϕ, esto significa que entonces se cumple la relación:

$$\mathbb{E}[D_T X] = \mathbb{E}[\tilde{V}_T(\phi)] = \tilde{V}_0(\phi) = \pi.$$

El precio definido de esta manera debe ser único, pues el valor de la esperanza es única.

Afirmación 2.4.11. *El único precio π asociado a un reclamo contingente alcanzable X es $\pi = \mathbb{E}_Q[D_T X]$*

Una vez que se ha definido un precio único, ahora es necesario definir las condiciones necesarias bajo las cuales un reclamo contingente es alcanzable. Como ya se ha mencionado anteriormente, que sea alcanzable significa, en términos del modelo, que es posible asignarle un precio.

Afirmación 2.4.12. *Sea X un reclamo contingente integrable y sea $\tilde{V}$ la modificación continua de*

$$\tilde{V}_t = \mathbb{E}_Q[D_T X|\mathcal{F}_t]. \tag{2.31}$$

Entonces, X es alcanzable si y sólo si $\tilde{V}$ puede ser representado en la forma $\tilde{V} = \tilde{V}_0 + \int HdZ$ para alguna $H \in \mathscr{L}(Z)$, en cuyo caso $\tilde{V}(\phi) = \tilde{V}$ para alguna $\phi \in \tilde{\Phi}$ que genera X.

Demostración. Supóngase primero que X es alcanzable y generado por alguna $\phi \in \Phi$. Entonces, definiendo $H_k = \phi_k$ para $k = 1, \cdots, K$ de tal forma que $\int HdZ = \tilde{G}(\phi)$. Además, como ϕ genera a X, entonces $D_T X = \tilde{V}_T(\phi)$ y debido a que $\tilde{V}(\phi)$ es martingala, se tiene que

$$\tilde{V}_t = \mathbb{E}_Q[D_T X|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_Q[\tilde{V}_T(\phi)|\mathcal{F}_t] = \tilde{V}_t(\phi),$$

pero $\tilde{V}_t(\phi) = \tilde{V}_0(\phi) + \tilde{G}_t(\phi) = \tilde{V}_0(\phi) + \int_0^t HdZ$, de donde se obtiene la representación deseada.
Por otro lado, sea X un reclamo contingente integrable, y sea $\tilde{V}$ como se ha estipulado y supóngase que $\tilde{V} = \tilde{V}_0 + \int HdZ$ para alguna $H \in \mathscr{L}(Z)$. Defínase $\phi^1 = H^1, \ldots, \phi^K = H^K$. Para definir a ϕ^0 se hará uso de las relaciones (2.18), (2.19) y de la afirmación (2.4.7).

$$\underbrace{\phi^0 + \sum_{k=1}^{K} \phi^k Z^k = \tilde{V}(\phi)}_{\text{ecuación (2.19)}} \underbrace{= \tilde{V}_0 + \tilde{G}(\phi)}_{\text{Afirmación 2.4.7}} = \underbrace{\tilde{V}_0 + \sum_{k=1}^{K} \int \phi^k dZ^k}_{\text{ecuación (2.18)}},$$

de donde tomando en cuenta los extremos de las equivalencias y despejando ϕ^0, se obtiene

$$\phi^0 = \tilde{V}_0 + \sum_{k=1}^{K} \int \phi^k dZ^k - \sum_{k=1}^{K} \phi^k Z^k.$$

Definiendo a ϕ^0 de esta forma se produce una estrategia ϕ con valor descontado, según (2.19), dado por

$$\tilde{V}(\phi) = \phi^0 + \sum_{k=1}^{K} \phi^k(t) Z^k(t) = \tilde{V}_0 + \tilde{G}(\phi) = \tilde{V}_0 + \int HdZ = \tilde{V}.$$

De su definición, $\tilde{V}$ es una martingala, por lo que ϕ es una estrategia admisible con $V_T(\phi) = D_T X$; como consecuencia, se obtiene que X es alcanzable y generado por ϕ. $\square$

El teorema anterior señala que un reclamo contingente integrable es alcanzable cuando es posible expresarlo en términos de un proceso que cumpla con la característica de ser adaptado y con la condición (2.30). La primera característica es necesaria para que la integral de este proceso con respecto al movimiento browniano sea adaptada mientras que la segunda tiene la función de asegurar que la integral sea finita a través de la Isometría, y por lo tanto, obtener una martingala.

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de todas las martingalas y sea $\mathcal{M}(Z)$ el conjunto de las $M \in \mathcal{M}$ que pueden representarse de la forma:

$$M = M_0 + \int H dZ \qquad \text{para alguna } H \in \mathscr{L}(Z).$$

Es claro que $\mathcal{M}(Z) \subset \mathcal{M}$; sin embargo, la contención opuesta no siempre es cierta y cuando ocurre entonces ocurre que el mercado es completo.

Teorema 2.4.13. *El modelo de mercado es completo si y sólo si* $\mathcal{M} = \mathcal{M}(Z)$

Este teorema muestra que el mercado es completo cuando toda martingala puede ser expresada, informalmente hablando, como una combinación de los activos disponibles en el mercado, es decir, que en cierto sentido los activos del mercado generan cualquier reclamo contingente integrable. Sin embargo, no da referencia cuando las martingalas tienen dicha representación, para ello se hará uso de manera indirecta del siguiente teorema, cuya demostración no se expondrá.

Teorema 2.4.14. ***Representación de Martingalas multidimensional*** *Sea T un tiempo fijo positivo, y asúmase que $\mathcal{F}(t)$ $0 \leq t \leq T$ es la filtración generada por el movimiento browniano d-dimensional $W(t)$ con $0 \leq t \leq T$. Sea $M(t)$ una martingala con respecto a esta filtración bajo $\mathbb{P}$. Entonces existe un proceso adaptado d-dimensional $\Gamma(u) = (\Gamma_1(u), \cdots, \Gamma_d(u))$ con $0 \leq u \leq T$, tal que*

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \Gamma(u) \cdot dW(u), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.32}$$

Si además se asume la notación e hipótesis del Teorema 2.4.7, y si $\tilde{M}(t)$ con $0 \leq t \leq T$ es una martingala bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, entonces existe un proceso adaptado d-dimensional $\tilde{\Gamma}(u) = (\tilde{\Gamma}_1(u), \cdots, \tilde{\Gamma}_d(u))$ con $0 \leq u \leq T$, tal que

$$\tilde{M}(t) = \tilde{M}(0) + \int_0^t \tilde{\Gamma}(u) \cdot d\tilde{W}(u), \quad 0 \leq u \leq T. \tag{2.33}$$

El teorema de representación es muy importante, pues asegura que toda martingala bajo la medida neutral al riesgo puede ser expresada en términos de una integral estocástica con respecto a un movimiento browniano en ese espacio de probabilidad. Es decir, si X es una reclamación alcanzable y por tanto su precio una martingala bajo la medida neutral al riesgo, entonces el precio descontado debe poder representarse de la siguiente forma

$$D(t)V(t) = V(0) + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \tilde{\Gamma}_j(u) d\tilde{W}_j(u).$$

Sin embargo, el verdadero interés es escribir a cualquier martingala como se requiere en la Afirmación 2.4.12 en términos del proceso de descuento Z, lo que indica que, para que el reclamo sea alcanzable, se debe obtener una estrategia ϕ que lo genere. Dicha estrategia, en caso de existir, debe cumplir la relación

$$\begin{aligned} d(D(t)V(t)) &= \sum_{j=1}^{K} \phi_j(t) \underbrace{d(D(t)S_j(t))}_{dZ} \\ &= \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{K} \phi_j(t) D(t) \sigma_{kj}(t) d\tilde{W}_j(t). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Si ϕ satisface esta equivalencia para todo tiempo, se obtendría que el reclamo es alcanzable. Haciendo uso de las dos últimas ecuaciones anteriores, la existencia de una estrategia que genere el reclamo contingente se reduce al hecho de que se debe satisfacer el sistema de ecuaciones determinado por:

$$\frac{\tilde{\Gamma}_j(t)}{D(t)} = \sum_{k=1}^{K} \phi_k(t) S_k(t) \sigma_{kj}(t). \tag{2.35}$$

Esto genera un sistema de d de ecuaciones con K incógnitas $\phi_1(t), \cdots, \phi_K(t)$. Cuando este sistema tiene solución sucede entonces que el mercado es completo.

De forma intuitiva puede pensarse que debe existir alguna relación entre (2.29) y (2.35), pues para que el mercado sea completo debe existir por lo menos alguna medida neutral al riesgo. Esta relación se muestra en Shreve [12] en el bosquejo de demostración del siguiente teorema, el cual no se demostrará en el presente trabajo.

Teorema 2.4.15. *El mercado es completo si y sólo si la medida neutral al riesgo es única.*

Si la medida neutral al riesgo es única, significa que es única la solución del sistema (2.29).
A continuación se enlistan los resultados esenciales obtenidos en esta subsección:

- No existen oportunidades de arbitraje en el modelo continuo cuando el sistema de ecuaciones (2.29) tiene solución

- El modelo es completo si y sólo si existe una única medida de probabilidad equivalente a $\mathbb{P}$, bajo la cual el precio descontado es martingala, o equivalentemente, si existe una única solución al sistema (2.29).

En el presente trabajo se tendrá especial interés en el caso en que el mercado sólo tiene una fuente de incertidumbre, es decir, sólo hay un movimiento browniano presente.

2.4.3. La ecuación para el precio del bono

Si el mercado estuviera compuesto solamente por la cuenta de banco, ¿cuál sería el precio de un bono cupón cero y de plazo T? En la sección anterior se muestra que la asignación de precios es posible a través de estrategias que están constituidas por los activos disponibles en el mercado. Si el único activo en el mercado fuera la cuenta de banco y la tasa corta fuera un proceso de Itô, según se muestra en (2.10), el precio del bono sería también un proceso de Itô teniendo como consecuencia que el mercado sea incompleto. Esto puede traducirse (según la sección anterior) como la ausencia de estrategias autofinanciables de tal forma que generen el pago de una unidad monetaria al final del tiempo T. La idea de fondo de este hecho es que la tasa de interés no es un activo que se pueda comprar en el mercado de forma "natural" y por lo tanto, no es posible crear una estrategia que asegure la tasa de interés que el bono garantiza al momento de su compra, conllevando inmediatamente a la obtención de un mercado incompleto pues existiría (por lo menos) un reclamo contingente no alcanzable.

Para subsanar este hecho de incompletez, se toma en consideración como activo disponible en el mercado un bono al que se le llamará "benchmark" o de *referencia*, obteniendo de esta forma un mercado completo. Por otra parte, es evidente que deben existir relaciones internas entre los precios de bonos de diferentes plazos para evitar posibilidades de arbitraje, por lo que una vez tomado el bono de referencia el precio de los demás bonos quedará determinado en términos del precio de éste y de la tasa corta.
Si se considera al bono como un reclamo contingente, cuyo valor al tiempo T es una unidad monetaria, entonces el precio del bono al tiempo t está constituido por la siguiente relación

$$P(t,T) = \tilde{\mathbb{E}}[e^{\int_t^T r(t)dt} \cdot 1|\mathcal{F}_t]. \tag{2.36}$$

Sin embargo, esta ecuación no brinda una especificación clara sobre el comportamiento del precio del bono. Para la asignación de precios se hará uso de otra perspectiva, la cual tendrá por objetivo encontrar la ecuación diferencial del precio del bono a partir de un argumento de ausencia de arbitraje.

Debido a que, como se ha mencionado, el bono no es una inversión que contenga un activo subyacente que pueda ser cubierto de manera directa (pues su activo subyacente es una tasa de interés), se propone buscar una estrategia para obtener la tasa libre de riesgo a través de un portafolio compuesto de dos bonos

de diferente madurez. Entonces el portafolio queda constituido de la siguiente manera
$$\Pi = B_1 - \Delta B_2,$$
cuyo incremento infinitesimal está dado por
$$d\Pi = \frac{\delta B_1}{\delta t}dt + \frac{\delta B_1}{\delta r}dr + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\delta^2 B_1}{\delta r^2}dt - \Delta\Big(\frac{\delta B_2}{\delta t}dt + \frac{\delta B_2}{\delta r}dr + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\delta^2 B_2}{\delta r^2}dt\Big).$$
Los elementos aleatorios en la ecuación anterior son aquellos que tienen coeficientes de la forma $\frac{\delta B}{\delta r}$, debido a que el incremento correspondiente a la tasa de interés es aleatorio. Escogiendo a Δ como
$$\Delta = \frac{\frac{\delta B_1}{\delta r}}{\frac{\delta B_2}{\delta r}},$$
se elimina el término aleatorio quedando por tanto un portafolio libre de riesgo cuyo incremento debe aumentar según la tasa libre de riesgo, es decir
$$\begin{aligned} d\Pi &= \left(\frac{\delta B_1}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\delta^2 B_1}{\delta r^2} - \left(\frac{\frac{\delta B_1}{\delta r}}{\frac{\delta B_2}{\delta r}}\right)\Big(\frac{\delta B_2}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\delta^2 B_2}{\delta r^2}\Big)\right)dt \\ &= r\Pi dt \\ &= r\Big(B_1 - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\delta^2 B_1}{\delta r^2}B_2\Big)dt. \end{aligned}$$
Ahora, reacomodando los términos en la primera y última igualdad de tal manera que de un lado se tengan los elementos que contengan únicamente a B_1 y del otro lado los que contengan a B_2, se obtiene
$$\frac{\frac{\delta B_1}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\delta^2 B_1}{\delta r^2} - rB_1}{\frac{\delta B_1}{\delta r}} = \frac{\frac{\delta B_2}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\delta^2 B_2}{\delta r^2} - rB_2}{\frac{\delta B_2}{\delta r}}.$$
Aparentemente, se podría pensar que encontrar una única solución a la ecuación anterior presentaría problemas puesto que es una función de dos incógnitas. Sin embargo, ambos lados contienen sólo elementos asociados a un único plazo, pero la igualdad se mantiene para todo tiempo que sea menor al plazo, de donde se concluye que ambos lados deben ser independientes del plazo del bono del que se trate y por tanto sólo deben depender de la tasa de interés y el tiempo:
$$\frac{\frac{\delta B}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\delta^2 B}{\delta r^2} - rB}{\frac{\delta B}{\delta r}} = a(r,t).$$
Por otra parte es posible reescribir, para λ diferente de cero y α, a $a(r,t)$ de tal forma que
$$a(r,t) = \sigma(r,t)\lambda(r,t) - \alpha(r,t),$$
por lo que la ecuación se puede reescribir como
$$\frac{\delta B}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\delta^2 B}{\delta r^2} + (\alpha - \lambda\sigma)\frac{\delta B}{\delta r} - rB = 0.$$

Esta ecuación describe el comportamiento del precio del bono a partir de un argumento que impide arbitraje y será muy importante posteriormente.

Afirmación 2.4.16. *El precio del bono satisface la* ecuación de la estructura de plazos *dada por*

$$\frac{\delta B}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\delta^2 B}{\delta r^2} + (\alpha - \lambda\sigma)\frac{\delta B}{\delta r} - rB = 0. \tag{2.37}$$

Es evidente que no es necesario que el rendimiento del bono tenga que ser igual al que hubiera tenido de invertirse bajo la cuenta de mercado que es libre de riesgo. La diferencia entre ambas inversiones, como se ha mencionado se conoce como *prima de riesgo* y sugiere la existencia de un pago extra por aceptar un riesgo implícito. Para dar una expresión a esta prima, recuérdese que la función que describe el comportamiento del precio del bono es

$$dB = \sigma(r,t)\frac{\delta B}{\delta r}dW + \Big(\alpha(r,t)\frac{\delta B}{\delta r} + \sigma^2(r,t)\frac{1}{2}\frac{\delta^2 B}{\delta r^2} + \frac{\delta B}{\delta t}\Big)dt.$$

Sustituyendo (2.37) se obtiene que el incremento infinitesimal en el precio el bono es

$$dB = \sigma\frac{\delta B}{\delta r}dW + \Big(\sigma\lambda\frac{\delta B}{\delta r} + rB\Big)dt,$$

de donde

$$dB - rBdt = \sigma\frac{\delta B}{\delta r}\Big(dW + \lambda dt\Big). \tag{2.38}$$

Analizando la expresión anterior, es notable el hecho de que la diferencia está dada por un término estocástico (riesgo) y uno de tipo determinístico. Es a este último al que se le refiere como prima de riesgo. La prima de riesgo es importante debido a que determina la nueva medida de probabilidad neutral al riesgo, como se mostrará posteriormente.

La valuación de bonos debe hacerse, según los modelos de mercado, bajo una medida de probabilidad neutral al riesgo $\mathbb{Q}$. El cambio de medida tiene repercusión en la dinámica de la tasa de interés, es decir, en el comportamiento de su incremento infinitesimal, lo cual se expone en la siguiente afirmación.

Afirmación 2.4.17. *La dinámica de la tasa corta bajo la nueva medida de probabilidad será de la forma*

$$dr_t = (\mu(r,t) - \lambda(t)\sigma(r,t))dt + \sigma(r,t)d\tilde{W}_t, \tag{2.39}$$

que en algunas ocasiones se denotará, sin pérdida de generalidad, como

$$dr_t = \mu^{\mathbb{Q}}(r,t)dt + \sigma(r,t)d\tilde{W}_t, \tag{2.40}$$

donde $\mu^{\mathbb{Q}}(r,t) := \mu(r,t) - \lambda(t)\sigma(r,t)$.

Demostración. Debido a que bajo la probabilidad neutral al riesgo $\mathbb{Q}$ los precios descontados deben ser martingalas, se procederá a buscar el nuevo proceso que es movimiento bronwniano bajo $\mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned}
d(D(t)B(t,T)) &= B(t,T)dD(t) + D(t)dB(t,T) + \underbrace{dD(t)dB(t,T)}_{0} \\
&= B(t,T)(-r(t)D(t)dt) \\
&\qquad +D(t)\bigg(\sigma\frac{\delta B}{\delta r}dW + \Big(\alpha\frac{\delta B}{\delta r} + \sigma^2\frac{1}{2}\frac{\delta^2 B}{\delta r^2} + \frac{\delta B}{\delta t}\Big)dt\bigg) \\
&= D(t)\sigma\frac{\delta B}{\delta r}\Bigg(dW + \underbrace{\frac{\alpha}{\sigma} + \frac{-r(t)B(t,T) + \sigma^2\frac{1}{2}\frac{\delta^2 B}{\delta r^2} + \frac{\delta B}{\delta t}}{\sigma\frac{dB}{dr}}}_{\frac{a(r,t)}{\sigma(r,t)}}dt\Bigg) \\
&= D(t)\sigma\frac{\delta B}{\delta r}\bigg(dW + \lambda dt\bigg).
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Girsanov, se obtiene que el proceso $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda(s,r)ds$ debe ser movimiento browniano bajo la nueva medida de probabilidad, por lo que el incremento infinitesimal del precio descontado del bono puede ser expresada bajo $\mathbb{Q}$ como

$$d(D(t)B(t,T)) = D(t)\sigma\frac{\delta B}{\delta r}d\tilde{W}.$$

De esta forma, es posible encontrar la dinámica de la tasa spot bajo la nueva medida de probabilidad de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
dr_t &= \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dW \\
&= \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)(dW + (\lambda - \lambda)dt) \\
&= \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)(dW + \lambda dt) - \lambda\sigma dt \\
&= (\mu(r,t) - \lambda\sigma)dt + \sigma(r,t)d\tilde{W} \\
&= \mu^{\mathbb{Q}}(r,t)dt + \sigma(r,t)d\tilde{W},
\end{aligned}$$

de donde se obtiene la afirmación. □

Es en esta afirmación donde resulta evidente el hecho de que λ, la prima de riesgo, es la que determina por completo la nueva medida de probabilidad $\mathbb{Q}$. De la sección de modelos de mercado, se obtuvo la interpretación del cambio de medida, la cual resulta necesaria debido a que existe una correspondencia entre el mundo real y el neutro al riesgo, y donde la variable que establece la equivalencia entre ambos mundos es una variable aleatoria que se encuentra enteramente determinada por la prima de riesgo. Sin embargo, no ofreció una alternativa tan clara en cuanto al cálculo se refiere y es ahí donde se complementa con la argumentación de esta sección.

La perspectiva del uso de ecuaciones diferenciales en esta sección ofrece en (2.37) un panorama un tanto más claro en la manera en que puede obtenerse una expresión para la asignación de precios de bono, pues dicha expresión no contiene elementos estocásticos y describe una ecuación diferencial parcial, misma que será utilizada en algunos modelos para obtener la ecuación explícita del precio del bono.

Capítulo 3

Tasa corta estocástica e inmunización

El material del presente capítulo puede ser consultado principalmente en Björk [1], Ho-Lee [6] y Hull-White [7].
En el presente capítulo se tendrá especial interés en la valuación de bonos, ya sea asignando una forma específica al precio de éste que dependa de la tasa corta, o mediante el desarrollo de una metodología que lo permita.
Para el primer caso, se hará uso de que, bajo el supuesto de que la tasa corta tiene el comportamiento de un proceso de Itô, por lo que el precio del bono cumple con la ecuación diferencial parcial (2.37). Esta ecuación será de importancia debido a que, para formas específicas de la tasa corta, la expresión para el precio del bono puede obtenerse con relativa sencillez.
Para el segundo, se hará uso en parte de la teoría desarrollada para el modelo de mercado discreto, donde la metodología para la valuación se enfocará también en la evolución de la tasa de interés.

Aunque por lo general los modelos suelen presentarse comenzando por los discretos, en el presente trabajo se partirá de manera inversa, pues los modelos discretos serán vistos como una aproximación a algún modelo contínuo y serán éstos los que se utilicen para la inmunización de portafolios de bonos.

3.1. Algunos modelos estocásticos de tasa spot

Antes de comenzar con algún modelo estocástico de tasa spot, con una finalidad ilustrativa considérese el siguiente comportamiento en la misma:

$$dr = \big(a - rb\big)dt,$$

donde $a, b > 0$. El comportamiento intuitivo de este modelo sugiere que si r se encuentra al tiempo t y es tal que $\frac{a}{b} > r$, entonces el incremento dr a ese tiempo en particular será positivo, por lo que la tasa de interés tenderá a subir.

El punto hasta el cual podrá subir será hasta que a lo "permita", que es en el momento en que $a - rb$ sea cero, evento que ocurre en el momento en que $r = \frac{a}{b}$ y en cuyo caso la tasa de interés se "estabilizará" pues ya no existirán incrementos en la misma (ya que $dr = 0$). En caso contrario, la tasa de interés tenderá a bajar pues su incremento será negativo. Sin embargo, el punto en el que se estabilizará será exactamente el mismo que en el caso anterior. Análogamente, se puede obtener una idea intuitiva para los diferentes casos de signo de a y b.
Nótese que no importando en qué situación se encuentre a y b, siempre que no sean cero, la tasa de interés aumentará o disminuirá hacia un punto en común, a saber, $\frac{a}{b}$.

Ahora considérese el caso en que se incluye un incremento estocástico de la siguiente forma

$$dr = \big(a - rb\big)dt + \sigma dW.$$

¿Qué le ocurre intuitivamente al modelo anterior? Nuevamente considérese el caso $a, b > 0$, donde los demás casos serán análogos. Si la tasa de interés r es de tal manera que $\frac{a}{b} > r$, entonces el primer término del lado derecho tratará de "hacer" positivo el incremento mientras que el segundo término le otorgará una oscilación errática. Sin embargo, debido a que el movimiento browniano es martingala, es de esperarse que en promedio el incremento se vuelva positivo. Si la tasa de interés es tal que $\frac{a}{b} < r$ ocurrirá exactamente lo contrario: el primer término tratará de hacer negativo el incremento y el segundo le dará nuevamente una oscilación errática, pero es de esperarse que en promedio la tasa tienda a disminuir.
En este caso no existe un punto de equilibrio, es decir, no existe un punto en el cual la tasa permanezca debido al incremento errático del movimiento browniano, pero es de esperarse que cuando la tasa de interés toque el punto $\frac{a}{b}$, ya no se aleje demasiado del mismo por el argumento anterior. Los demás casos, como se ha mencionado, son análogos a éste.

Ahora, ¿qué sucedería si se deja ser a a, b funciones de tiempo? Para enfatizar que son funciones de tiempo se denotarán por $\theta(t)$ y $k(t)$, en cuyo caso el modelo quedará descrito como:

$$dr = \big(\theta(t) - rk(t)\big)dt + \sigma dW.$$

En realidad, este tipo de comportamiento no difiere de los anteriores, aunque su idea es un poco más generalizada, en cuyo caso al momento t el componente determinístico del incremento de la tasa de interés "tratará" de hacer que la tasa de interés se aproxime al punto $\frac{\theta(t)}{k(t)}$.

Particularidades de este tipo de comportamientos describen a una serie de tasas de interés, de hecho los más comunes y sencillos, por lo que a continuación se hará el supuesto de que la tasa tiene un comportamiento bajo la medida neutral al riesgo como

$$dr = (\alpha(r,t) - \lambda(r,t)\sigma(r,t))dt + \sigma(r,t)dW. \tag{3.1}$$

Entonces sus componentes se comportarán de la siguiente manera:

$$\alpha(r,t) - \lambda(r,t)\sigma(r,t) = \beta(t) + \eta(t)r, \tag{3.2}$$

$$\sigma(r,t) = \sqrt{\big(\gamma(t)r + \rho(t)\big)}. \tag{3.3}$$

Por lo que entonces el comportamiento de la tasa de interés será parecido a los referidos anteriormente, en cuyo caso el incremento infinitesimal será

$$dr = \big(\beta(t) + \eta(t)r\big)dt + \sqrt{\big(\gamma(t)r + \rho(t)\big)}dW. \tag{3.4}$$

Como se había observado anteriormente, si $\eta(t)$ y $\gamma(t)$ son constantes, entonces las tasas de interés con este tipo de comportamiento tienden hacia un valor en específico. A este comportamiento por lo general se le da una explicación de tipo económico.
Según algunos autores, la tasa spot de interés tiende a un valor en específico, pero ¿cuál es el motivo de este comportamiento?. Ellos suponen que la oferta y demanda en el mercado tienen implicaciones muy fuertes en este efecto: cuando las tasas de interés son elevadas, la demanda de créditos disminuye, puesto que los usuarios del mercado ven poco factible el financiarse con un costo tan elevado. Al suceder esto, la tasa de interés baja, ya que el sector que oferta los créditos deberá hacerlos más "atractivos"; esto sucede hasta que la oferta y la demanda encuentren un equilibrio. De manera contraria, si las tasas de interés son muy bajas, los usuarios del mercado verán grandes oportunidades de financiarse a cambio de un costo muy bajo, por lo que la demanda aumentará de tal manera que existirá una oferta muy pequeña y por ello, la tasa de interés comenzará a subir hasta el punto en que exista un equilibrio. Este tipo de comportamiento en la tasa de interés es generalmente referido como *reversibilidad a la media*.

Es por esto que los modelos con reversibilidad a la media tienen precisamente ese efecto: que en promedio se espera que, a largo plazo, la tasa de interés no se aleje demasiado de este límite. Por lo que, de utilizarse este tipo de modelos, se recomienda considerar esta interpretación. Uno de los métodos que se pueden utilizar para obtener indicios de si la tasa spot converge hacia algún punto en específico puede encontrarse en el artículo de Siegel-Nelson (Long-Term Behavior of Yield Curves).

Aunque en muchas ocasiones la interpretación económica es la principal razón de utilizar una dinámica para la tasa spot de la forma (3.4), es también de gran utilidad -como se mostará más adelante- que estos modelos formen parte de los llamados *modelos afines*.

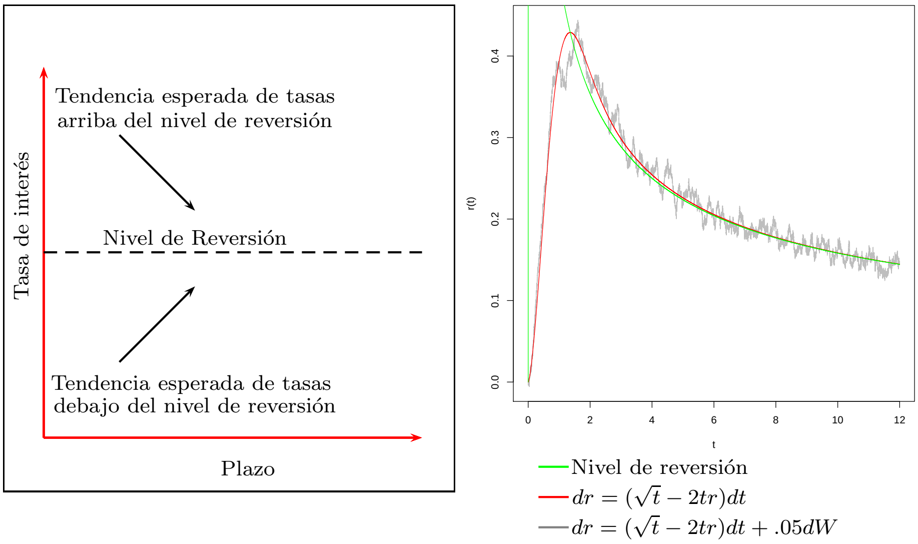


Figura 3.1: Reversibilidad. En la figura de la izquierda se muestra el comportamiento de las tasas con reversibilidad a la media. En la derecha se muestra un ejemplo.

Definición 3.1.1. *Estructura de plazos afín*
Si la estructura de plazos $\{B(t,T); 0 \leq t \leq T, T > 0\}$ es de la forma

$$B(t,T) = \exp(A(t,T) - C(t,T)r(t)). \tag{3.5}$$

Con $A(t,T), C(t,T)$ funciones determinísticas, entonces se dice que el modelo tiene una *estructura de plazos afín.*
Además, al modelo de $r(t)$ se le dará el calificativo de *modelo afín.*

El hecho de que la estructura de plazos sea afín tiene grandes ventajas puesto que para conocer el precio del bono de algún plazo en específico en algún tiempo t únicamente es necesario encontrar expresiones de las funciones A, C y conocer la tasa al tiempo t (r_t).
Sin embargo, como es de esperarse, no todos los modelos de tasas spot derivan en un comportamiento afín en la estructura de plazos, es por ello que sería útil deducir alguna forma que deben tener μ y σ bajo $\mathbb{Q}$, denotado el primero como $\mu^{\mathbb{Q}}$, de tal manera que se obtenga una estructura de plazos afín.

Una manera de hacerlo es suponer que el modelo de la estructura de plazos que deriva del modelo de tasa de interés bajo $\mathbb{Q}$ es afín, esto es, suponer que (2.40) es afín. De ser así, entonces el precio del bono tiene la forma

(3.5) por lo que considerando al precio del bono como una función $B(t,T) = \exp(A(t,T) - C(t,T)r(t))$, y encontrando las parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta B}{\delta t} &= (\frac{\delta A}{\delta t} - r\frac{\delta C}{\delta t})B, \\
\frac{\delta B}{\delta r} &= -CB, \\
\frac{\delta^2 B}{\delta r^2} &= C^2 B.
\end{aligned}$$

Donde se usará como notación

$$\frac{\delta A}{\delta t} = A_t \quad , \quad \frac{\delta C}{\delta t} = C_t,$$

y sustituyendo en la ecuación de la estructura de plazos, esta última resulta ser de la forma

$$\mu^{\mathbb{Q}}(-CB) + (A_t - rC_t)B + \frac{1}{2}\sigma^2 C^2 B^2 - rB = 0.$$

Todos los elementos contienen a C, por lo que dividiendo entre C y reacomodando algunos términos de manera adecuada se llega a

$$-\mu^Q C + A_t - (1 + C_t)r + \frac{1}{2}\sigma^2 C^2 = 0. \tag{3.6}$$

Además, que el precio del bono al tiempo de su maduración sea de una unidad monetaria implica

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A(T,T) & = & 0 \\ C(T,T) & = & 0 \end{array} \right. .$$

La ecuación (3.6) describe la relación que debe existir entre A, C, $\mu^{\mathbb{Q}}$ y σ para que el modelo sea afín. Dependiendo de la forma de $\mu^{\mathbb{Q}}$ y σ, existirán funciones A y C que cumplan con la relación (3.6). Lo que se pretende, como se ha expuesto, es encontrar condiciones sobre $\mu^{\mathbb{Q}}$ y σ para que el modelo sea afín.
Una forma de obtener una expresión cuya solución sea relativamente fácil de obtener es definiendo a $\mu^{\mathbb{Q}}$ y σ de tal manera que la ecuación (3.6) se vuelva una ecuación diferencial separable. Esto es, si $\mu^{\mathbb{Q}}$ y σ se escogen de la forma (3.2) y (3.3) entonces (3.6) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
& A_t(t,T) - \beta(t)C(t,T) + \frac{1}{2}\rho(t)C^2(t,T) \\
& -\left\{1 + C_t(t,T) + \eta(t)C(t,T) - \frac{1}{2}\gamma(t)C^2(t,T)\right\}r = 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Esta ecuación debe cumplirse para cualquier selección de t, T y r, por lo que considerando t y T fijos se obtiene una recta de la forma $\beta_1 + \beta_2 r = 0$, donde esta relación debe cumplirse para todo valor de r, lo que implica que los coeficientes

β_1 y β_2 deben ser cero. De aquí se concluye que la ecuación puede ser reescrita como el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccc} C_t(t,T) + \eta(t)C(t,T) - \frac{1}{2}\gamma(t)C^2(t,T) & = & -1 \\ \beta(t)C(t,T) - \frac{1}{2}\rho(t)C^2(t,T) & = & A_t(t,T) \end{array} \right. .$$

Es menester hacer evidente el hecho de que todo modelo de tasa spot que cumple con el sistema deriva en un estructura de plazos afín. Sin embargo, ésta es una condición suficiente más no necesaria, lo cual queda plasmado en la siguiente afirmación.

Afirmación 3.1.2. *Supóngase que $\mu^{\mathbb{Q}}$ y σ son de la forma*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mu^{\mathbb{Q}}(t,r) & = & \eta(t)r + \beta(t) \\ \sigma(t,r) & = & \sqrt{\gamma(t)r + \rho(t)} \end{array} \right. .$$

Entonces el modelo admite una estructura de plazos afín, donde A y C satisfacen los sistemas.

$$\begin{cases} C_t(t,T) + \eta(t)C(t,T) - \dfrac{1}{2}\gamma(t)C^2(t,T) = & -1 \\ \\ C(T,T) = & 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} \beta(t)C(t,T) - \dfrac{1}{2}\rho(t)C^2(t,T) = & A_t(t,T) \\ \\ A(T,T) = & 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Existen varios modelos que suponen este tipo de comportamientos bajo la medida neutra al riesgo, en cuyo caso sólo es cuestión de sustituir sus parámetros en los sistemas (3.8) y (3.9) y resolver para encontrar el precio del bono. A continuación se presentarán tres de los modelos más comunes y se analizarán algunas de sus características, para mostrar las posibles complicaciones, desventajas o ventajas que pueden presentar frente a otros modelos.

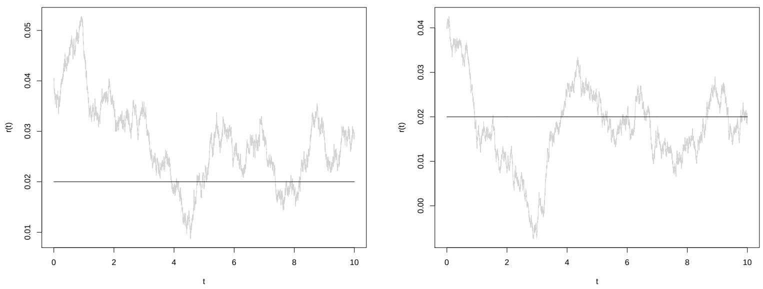
3.1.1. Vasicek

El modelo de Vasicek, cuya expresión es

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dW \qquad \text{con } a, b, \sigma > 0, \tag{3.10}$$

se comporta de una forma que ya se ha analizado anteriormente, el cual es reversible a un nivel constante, por lo que si se hace el supuesto que la tasa de interés spot tiende a un límite, este comportamiento es razonable. El término a del modelo determina qué tan rápido se alcanza el nivel de reversión y se le conoce como *factor de aceleración*.

El modelo de Vasicek presenta algunos inconvenientes, ya que no es posible obtener una curva satisfactoria de la tasa spot compuesta contínuamente pues sólo es posible obtener curvas con forma jorobada, monótona creciente o decreciente, por lo que este modelo no puede modelar curvas con forma de "S". Además de ser pobre la apariencia que puede tomar la tasa bajo este modelo, existe un inconveniente extra en el mismo: las tasas de interés pueden llegar a ser negativas, lo que se ejemplifica en la figura (3.1.1). Sin embargo, para poder mostrar este hecho es conveniente dar una solución explícita a la ecuación (3.10).



dr = .5(.02-r)dt + .01dW
r_0=.04
—Nivel de reversión

dr = .5(.02 - r)dt + .01dW
r_0=.04
—Nivel de reversión

Figura 3.2: Modelo Vasicek

Para resolver la ecuación supóngase que al inicio la tasa toma el valor r_0; entonces, la solución al tiempo $s < t$ puede obtenerse al encontrar la dinámica del proceso $Y_u = (r_u - abu)e^{au}$, es decir, al obtener la expresión dY_u. En primer lugar, Y_u puede pensarse como el producto del proceso de Itô $X(u) = (r_u - abu)$ con un proceso de variación finita dado por $D(u) = e^{au}$, donde el incremento de cada uno es

$$
\begin{aligned}
dX(u) &= d(r_u - abu) = dr_u - abdu, \\
dD(u) &= ae^{au}du.
\end{aligned}
$$

Es posible verificar que $dX(u)dD(u) = 0$ usando el cuadro (2.1) , de esto se sigue que la dinámica de Y_u es

$$
\begin{aligned}
dY_u &= d(X(u)D(u)) = D(u)dX(u) + X(u)dD(u) + \underbrace{dX(u)dD(u)}_{0} \\
&= e^{au}(dr_u - abdu) + (r_u - abu)ae^{au}du \\
&= e^{au}\Big(a(b - r_u)du + \sigma dW_u - abdu + (r_u - abu)adu\Big),
\end{aligned}
$$

de donde resulta:

$$\begin{aligned} dY_u &= e^{au}\Big(\sigma dW - a^2 budu\Big) \\ &= \sigma e^{au} dW_u - a^2 bue^{au} du. \end{aligned}$$

Integrando de s a t ambas partes de la ecuación anterior y retomando $Y_t = (r_t - abt)e^{at}$, se obtienen la siguiente serie de relaciones

$$\begin{aligned} \underbrace{Y_t}_{(r_t-abt)e^{at}} - \underbrace{Y_s}_{(r_s-abs)e^{as}} &= \int_s^t \sigma e^{au} dW_u - a^2 b \underbrace{\int_s^t ue^{au} du}_{\left(\frac{u}{a}e^{au} - \frac{1}{a^2}e^{au}\right)\Big|_{u=s}^{t}} \\ \Rightarrow (r_t - abt)e^{at} - (r_s - abs)e^{as} &= -a^2 b\Big(\frac{t}{a}e^{at} - \frac{1}{a^2}e^{at} - \frac{s}{a}e^{as} + \frac{1}{a^2}e^{as}\Big) \\ &\quad + \int_s^t \sigma e^{au} dW_u \\ \Rightarrow (r_t - abt)e^{at} - (r_s - abs)e^{as} &= -abte^{at} + be^{at} + abse^{as} - be^{as} \\ &\quad + \int_s^t \sigma e^{au} dW_u \\ \Rightarrow r_t e^{at} - r_s e^{as} &= be^{at} - be^{as} + \int_s^t \sigma e^{au} dW_u \\ \Rightarrow r_t e^{at} &= r_s e^{as} + be^{at} - be^{as} + \int_s^t \sigma e^{au} dW_u. \end{aligned}$$

De la última ecuación se deduce que es posible expresar el valor de la tasa al tiempo t en términos del valor de la misma al tiempo s (con $t > s$) como

$$r_t = r_s e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)}) + \int_s^t \sigma e^{-a(t-u)} dW_u. \tag{3.11}$$

Nótese que, dada la información disponible al tiempo s (condicionando sobre $\mathcal{F}_s$), todos los elementos que componen r_t son determinísticos a excepción de la integral de Itô, la cual tiene la característica de ser una integral con respecto a una función determinista[1], por lo que la distribución de la integral será $N(0, \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)}))$. Esto tiene como consecuencia que la distribución de r_t condicionado a $\mathcal{F}_s$ sea la de una normal con media y varianza dadas por:

$$\mathbb{E}[r_t|\mathcal{F}_s] = r_s e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)}), \tag{3.12}$$
$$Var[r_t|\mathcal{F}_s] = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)}).$$

En la figura (3.1.1) se han graficado 1000 trayectorias del modelo de Vasicek con parámetros $a = 1.5$, $b = .04$, $\sigma = .015$,$r_0 = .04$. Nótese que el grueso de las trayectorias se centra en las bandas $(\mathbb{E}[r_t] - \sqrt{Var[r_t]}, \mathbb{E}[r_t] + \sqrt{Var[r_t]})$.

[1]En Shreve [12] se muestra que una integral $\int_s^t \phi(u)dW$ con ϕ variable determinística tiene distribución $N(0, \int_s^t \phi^2(u)du)$

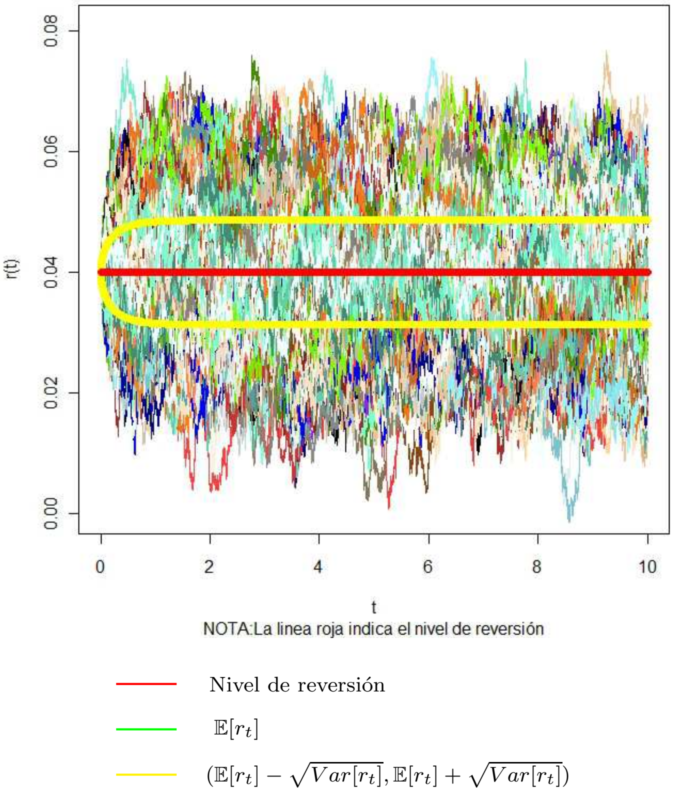


Figura 3.3: Trayectorias Vasicek. En la figura se muestran 1000 simulaciones de trayectorias según el modelo de Vasicek

El que la distribución de r_t sea el de una normal implica que la tasa pueda tomar valores negativos con probabilidad positiva y, como es de esperarse la probabilidad de que esto suceda depende fuertemente en los parámetros seleccionados. Que la tasa sea negativa es, sin lugar a dudas, la más grande desventaja del modelo.

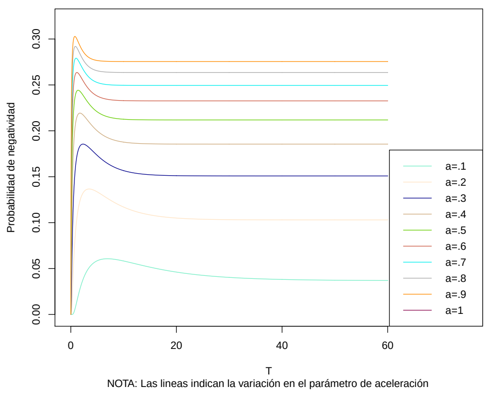
La probabilidad de que r_t tome algún valor negativo, para r_s conocida puede encontrarse al considerar la variable aleatoria:

$$Z = \frac{r_t - \mathbb{E}[r_t|\mathcal{F}_s]}{\sqrt{Var[r_t|\mathcal{F}_s]}} = \frac{r_t - r_s e^{-a(t-s)} - b(1 - e^{-a(t-s)})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)})}} \sim \mathscr{N}(0, 1).$$

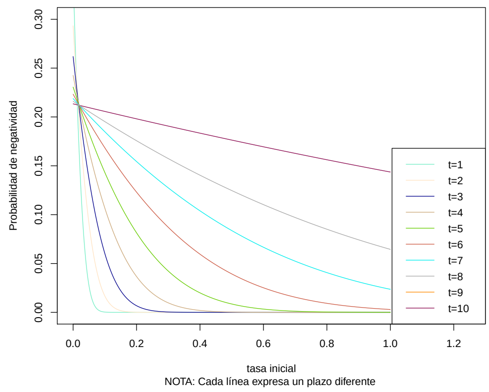
De donde

$$\mathbb{P}[r_t < 0] = \Phi\left(\frac{-r_s e^{-a(t-s)} - b(1 - e^{-a(t-s)})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)})}}\right). \tag{3.13}$$

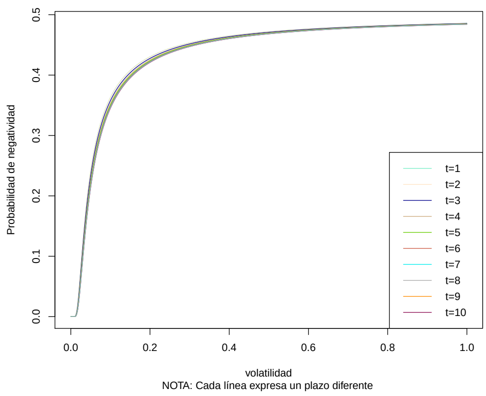
Como se ha mencionado, la probabilidad de que la tasa tome valores negativos depende de la tasa inicial, la volatilidad, y el parámetro de aceleración. En la figura 3.1.1 se ha graficado la probabilidad de que la tasa $dr_t = .5(.02 - r_t)dt + .05dW$ con $r_0 = .01$ sea negativa y se han perturbado algunos parámetros para observar el comportamiento de la posibilidad en la obtención de tasas negativas.



a)



b)



c)

Figura 3.4: Probabilidad de negatividad. En a) se muestra la probabilidad de que la tasa sea negativa con diferentes valores en el parámetro de aceleración. En b) se muestra la probabilidad de que la tasa sea negativa en diferentes plazos. En c) se muestra la probabilidad de que la tasa sea negativa con diferente volatilidad.

- En a) puede observarse que la probabilidad de que la tasa sea negativa decrece si incrementa el parámetro de aceleración (el parámetro de aceleración va de .1 a 1).
- En b) (cada línea expresa un tiempo t diferente con $s = 0$, $t \in \{1, \ldots, 10\}$) puede observarse que la probabilidad de que la tasa sea negativa es al inicio más alta para t pequeños. Sin embargo, esta probabilidad decae más rápido debido a que mientras más lejos se inicie en cero y menor sea el tiempo que se observa la tasa, será menor la probabilidad de que ésta decaiga.
- En c) (cada línea expresa un tiempo t diferente con $s = 0$, $t \in \{1, \ldots, 10\}$) puede observarse que la probabilidad de que la tasa sea negativa incrementa si incrementa la volatilidad. Esta probabilidad es muy parecida para todo plazo, lo que indica que la volatilidad es un elemento que tiene mucha importancia en la posibilidad de obtener una tasa negativa.

El modelo de Vasicek: un modelo afín

El modelo de Vasicek induce una estructura de plazos afín. Para mostrarlo, basta con hacer concordar los parámetros del modelo de Vasicek con los parámetros definidos en (3.2) y (3.3), de donde se obtienen las igualdades

$$\eta(t) = -a \quad , \quad \beta(t) = ab \quad , \quad \rho(t) = \sigma^2 \quad , \quad \gamma(t) = 0.$$

Sustituyendo estos valores en los sistemas (3.8) y (3.9) obtenidos anteriormente, se obtienen los nuevos sistemas

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\delta C(t,T)}{\delta t} - aC(t,T) & = & -1 \\ C(T,T) & = & 0 \end{array} \right. ,$$

y

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\delta A(t,T)}{\delta t} & = & abC(t,T) - \dfrac{1}{2}\sigma^2 C^2(t,T) \\ A(T,T) & = & 0 \end{array} \right. .$$

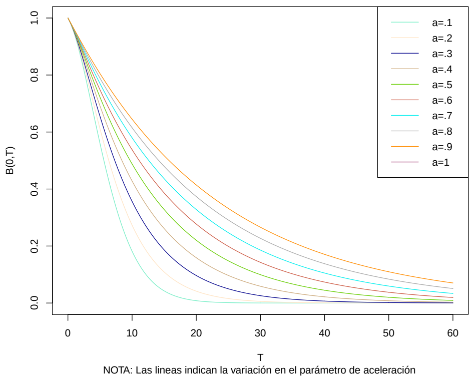
La ecuación de C es muy parecida a la de una exponencial (en efecto, si el lado derecho fuera cero, se tendría claramente la ecuación diferencial que describe el comportamiento de una exponencial). Sin embargo, en el caso aquí presentado la solución explícita es:

$$C(t,T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)}), \tag{3.14}$$

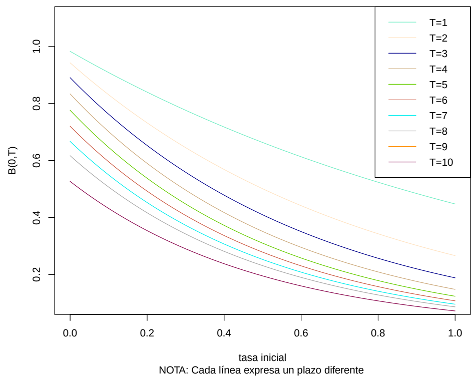
y sustituyendo este valor de C en la ecuación diferencial que describe a A, se obtiene su solución explícita, que resulta ser

$$A(t,T) = \frac{1}{a^2}\big(C(t,T) - T + t\big)\big(a^2 b - \frac{\sigma^2}{2}\big) - \frac{(\sigma C(t,T))^2}{4a}. \tag{3.15}$$

Una vez fijadas t, T y conocidas a, b, σ y r_t es posible entonces asignarles precio a los bonos.
En la figura (3.1.1) se ha graficado los precios de los bonos con el modelo de Vasicek dado por $dr_t = .5(.04 - r_t)dt + .015dW$ con $r_0 = .04$ y se han perturbado algunos parámetros para observar el comportamiento del mismo.



a)



b)

Figura 3.5: Sensibilidad en el precio del bono a partir de cambios en los parámetros.

- En a) puede observarse que el precio del bono $(B(0,T))$ decrece si incrementa el parámetro de aceleración.
- En b) puede observarse que el precio del bono decae, como es de esperarse, si incrementa la tasa inicial; además, mientras más grande sea el plazo, más rápida es la decaida del precio.

3.1.2. Cox-Ingersoll-Ross

Este modelo generalmente es referido como CIR y propone la dinámica de la tasa de interés como

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad , \quad a, b, \sigma > 0$$

Este modelo también induce una estructura afín y tiene como característica que la volatilidad es proporcional a la tasa, teniendo como consecuencia que, si la tasa incrementa, su volatilidad también y viceversa. A partir de esto, se infiere que seleccionando los parámetros de la forma, cuando la tasa de interés alcance el valor cero, entonces el factor estocástico desaparece y ya que el término determinístico es positivo, entonces la tasa crece evitando de esta forma valores negativos.

La expresión para la tasa al tiempo t en términos de la tasa al tiempo s es

$$r_t = r_s + a\int_s^t (b - r_s)ds + \int_s^t \sigma\sqrt{r_u}dW_u,$$

por lo que la esperanza condicional de ésta es

$$\mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s] = r(s) + a\int_s^t (b - \mathbb{E}[r(u)|\mathcal{F}_s])du,$$

de donde, derivando con respecto a t se obtiene

$$\frac{d\mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s]}{dt} = +a(b - \mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s]),$$

y considerando la derivada de la función $e^{at}\mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s]$

$$\frac{de^{at}\mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s]}{dt} = e^{at}\left(a\mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s] + \frac{d\mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s]}{dt}\right) = e^{at}ab.$$

Al integrar de s a t se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned} e^{at}\mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s] - e^{as}\underbrace{\mathbb{E}[r(s)|\mathcal{F}_s]}_{=:r(s)} &= ab\underbrace{\int_s^t e^{au}du}_{\frac{e^{at}-e^{as}}{a}} \\ \Rightarrow \mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= e^{-a(t-s)}r(s) + b(1 - e^{-a(t-s)}). \end{aligned}$$

Según [2], la varianza está determinada por

$$Var[r(t)|\mathcal{F}_s] = r_s\frac{\sigma^2}{a}(e^{-a(t-s)} - e^{-2a(t-s)}) + b\frac{\sigma^2}{2a}\big(1 - e^{-a(t-s)}\big)^2, \qquad (3.16)$$

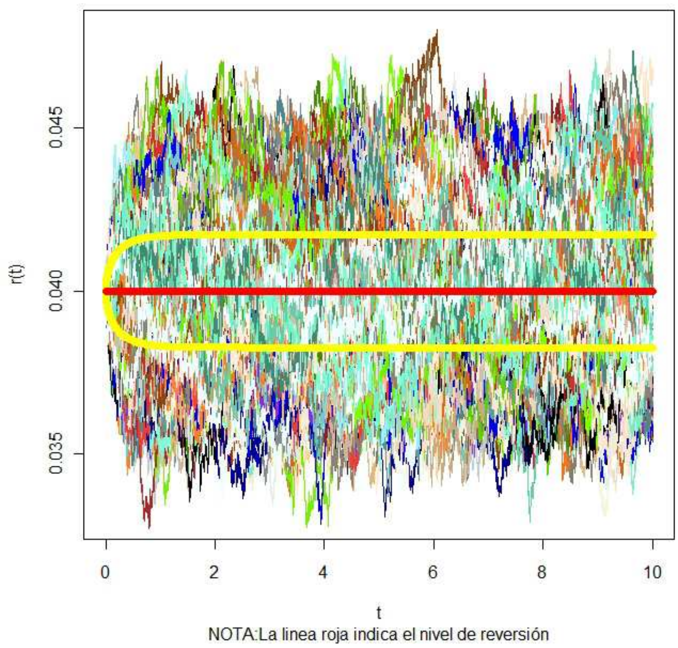
y la distribución de esta tasa es una chi cuadrada no central[2].
En la figura (3.1.2) se han graficado 1000 trayectorias del modelo de Vasicek con parámetros $a = 1.5$, $b = .04$, $\sigma = .015$, $r_0 = .05$, nótese que el grueso de las trayectorias se centra en las bandas $(\mathbb{E}[r_t] - \sqrt{Var[r_t]}, \mathbb{E}[r_t] + \sqrt{Var[r_t]})$.

[2] La función de densidad de esta tasa está dada por

$$f_{r(t)}(x) = c_t f_{\chi^2(\nu,\lambda_t)}(c_t x)$$

donde $f_{\chi^2(\nu,\lambda_t)}(c_t x)$ es la función de densidad de una chi cuadrada no central, con ν grados de libertad y parámetro de no centralidad λ, donde los parámetros son

$$\begin{aligned} c_t &= \frac{4a}{\sigma^2(1 - e^{-at})} \\ \nu &= \frac{4ab}{\sigma^2} \\ \lambda_t &= c_t r_0 e^{-at} \end{aligned}$$



Nivel de reversión

$\mathbb{E}[r_t]$

$(\mathbb{E}[r_t] - \sqrt{Var[r_t]}, \mathbb{E}[r_t] + \sqrt{Var[r_t]})$

Figura 3.6: Trayectorias CIR. En la figura se muestran 1000 simulaciones de trayectorias según el modelo CIR.

El modelo CIR: un modelo afín.

El modelo CIR también induce una estructura afín. De igual manera, nótese que bajo este modelo los parámetros de las ecuaciones (3.2) y (3.3) son

$$\eta(t) = -a \quad , \quad \beta(t) = ab \quad , \quad \rho(t) = 0 \quad , \quad \gamma(t) = \sigma^2,$$

obteniendo de esta forma la ecuación

$$\frac{\delta C}{\delta t} - aC - \frac{1}{2}\sigma^2 C^2 = -1, \tag{3.17}$$

o equivalentemente

$$\frac{\delta C}{\delta t} = \frac{\sigma^2}{2}\Big(C^2 + \frac{2aC}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma^2}\Big).$$

Esta es una ecuación que puede reexpresarse al separar variables como

$$\frac{dC}{(C-x_1)(C-x_2)} = \frac{\sigma^2}{2}dt,$$

donde

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2} \qquad x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}. \tag{3.18}$$

Es decir, que la expresión (3.17) puede reinterpretarse como

$$\int_{C(T,T)=0}^{C(t,T)} \frac{du}{(u - x_1)(u + x_2)} = \int_T^t \frac{\sigma^2}{2} du,$$

donde cada lado de la igualdad puede ser encontrada como

$$\begin{aligned}
\int_{C(T,T)=0}^{C(t,T)} \frac{du}{(u - x_1)(u + x_2)} &= \frac{1}{x_1 + x_2} \ln \left(\frac{1 - \frac{C(t,T)}{x_1}}{1 + \frac{C(t,T)}{x_2}} \right) \\
\int_T^t \frac{\sigma^2}{2} du &= -\frac{\sigma^2}{2}(T - t),
\end{aligned}$$

respectivamente. Al igualar el lado derecho de ambas ecuaciones y despejar a $C(t,T)$ se obtiene que

$$C(t,T) = \frac{2(e^{\psi(T-t)} - 1)}{(a + \psi)((e^{\psi(T-t)} - 1)) + 2\psi} \quad , \qquad \psi = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}. \tag{3.19}$$

Por otra parte, para obtener A se hace uso de la ecuación

$$\frac{\delta A}{\delta t} = abC,$$

esto es,

$$A(t,T) - \underbrace{A(T-T)}_{0} = \int_T^t \frac{2(e^{\psi(T-s)} - 1)}{(a + \psi)(e^{\psi(T-s)} - 1) + 2\psi} ds.$$

Es posible obtener la solución para A si se hace el cambio de variable $u(s) = (e^{\psi(T-s)} - 1)$ con $du(s) = -\psi e^{\psi(T-s)} ds$, obteniendo así la nueva relación

$$\begin{aligned}
A(t,T) &= 2ab \int_0^{u(t)} \frac{u}{u(a + \psi) + 2\psi} \frac{du}{-\psi \underbrace{e^{\psi(T-s)}}_{(u+1)}} \\
&= -\frac{2ab}{\psi(a + \psi)} \int_0^{u(t)} \frac{u}{\left(u + \frac{2\psi}{(a+\psi)}\right)\left(u + 1\right)} du.
\end{aligned}$$

Para trabajar de una manera más cómoda, denotemos como $\xi = \frac{2\psi}{(a+\psi)}$, entonces la ecuación anterior es

$$\begin{aligned}
A(t,T) &= -\frac{\xi}{\psi^2}\int_0^{u(t)} \frac{u}{\left(u+\frac{2\psi}{(a+\psi)}\right)\left(u+1\right)}du \\
&= -\frac{ab\xi}{\psi^2}\int_0^{u(t)} \left(\frac{\xi}{\xi-1}\frac{1}{u+\xi} - \frac{1}{\xi-1}\frac{1}{u+1}\right)du \\
&= -\frac{ab\xi}{\psi^2(\xi-1)}\Big[\xi\ln(u+\xi) - \ln(u+1)\Big]\Big|_0^{u(t)} \\
&= -\frac{ab\xi}{\psi^2(\xi-1)}\left[\xi\ln\left(\frac{u(t)+\xi}{\xi}\right) - \ln(u(t)+1)\right] \\
&= -\frac{ab\xi}{\psi^2(\xi-1)}\left[\ln\left(\frac{u(t)+\xi}{\xi}\right)^{\xi} - \ln(u(t)+1)\right] \\
&= -\frac{ab\xi}{\psi^2(\xi-1)}\left[\ln\left(\frac{\left(\frac{u(t)+\xi}{\xi}\right)^{\xi}}{u(t)+1}\right)\right] \\
&= \left[\ln\left(\frac{(u(t)+1)^{\frac{ab\xi}{\psi^2(\xi-1)}}}{\left(\frac{u(t)+\xi}{\xi}\right)^{\frac{ab\xi^2}{\psi^2(\xi-1)}}}\right)\right].
\end{aligned}$$

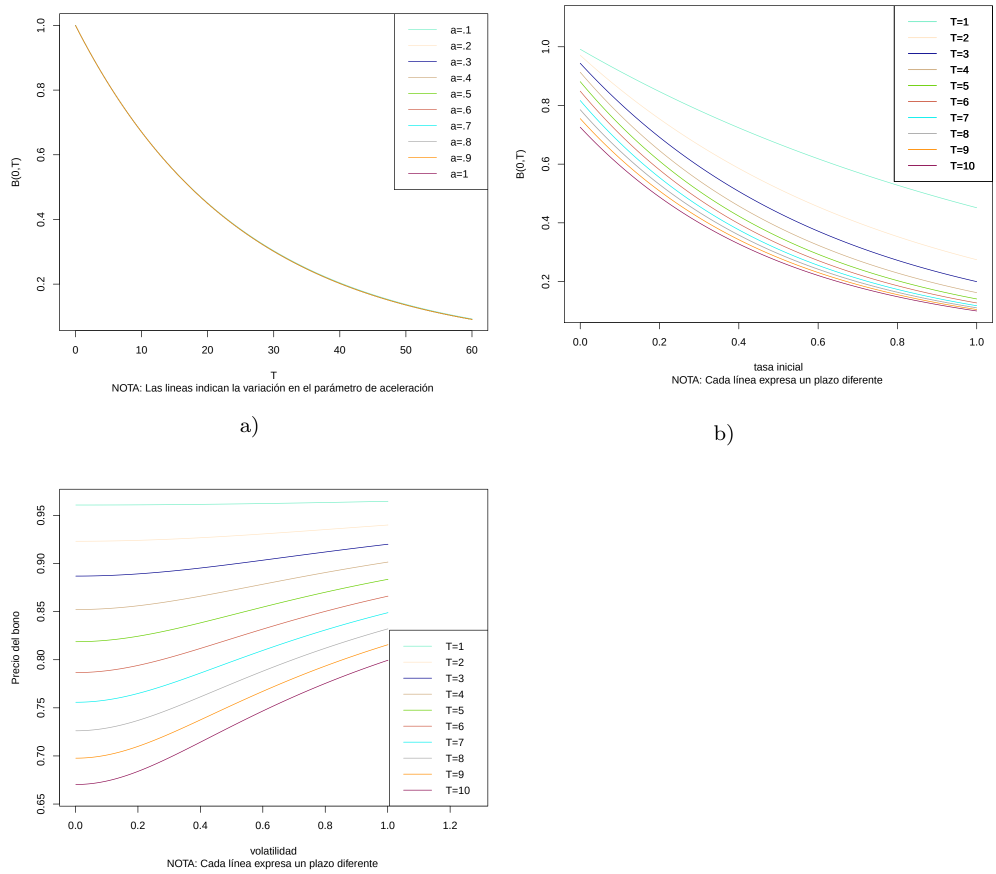
Desarrollando cada término por separado se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{u(t)+\xi}{\xi} &= \frac{e^{\psi(T-t)} - 1 + \frac{2\psi}{a+\psi}}{\frac{2\psi}{a+\psi}} = \frac{(a+\psi)(e^{\psi}-1)+2\psi}{2\psi}, \\
u(t)+1 &= e^{\psi(T-t)}, \\
\frac{ab}{\psi^2}\frac{\xi}{(\xi-1)} &= \frac{ab}{\psi^2}\frac{2\psi}{\psi-a} = \frac{ab}{\psi}\frac{2}{\psi-a} = \frac{2ab}{\psi(\psi-a)}, \\
\frac{ab}{\psi^2}\frac{\xi^2}{(\xi-1)} &= \frac{2ab}{\psi(\psi-a)}\frac{2\psi}{a+\psi} = \frac{4ab}{\psi^2-a^2} = \frac{4ab}{2\sigma^2} = \frac{2ab}{\sigma^2},
\end{aligned}$$

por lo que el valor de la función $A(t,T)$ es

$$\begin{aligned}
A(t,T) &= \ln\left(\frac{\left(e^{\psi(T-t)}\right)^{\frac{2ab}{\psi(\psi-a)}}}{\left(\frac{(a+\psi)(e^{\psi(T-t)}-1)+2\psi}{2\psi}\right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\left(e^{(T-t)\frac{2ab}{(\psi-a)}}\right)(2\psi)^{\frac{2ab}{\sigma^2}}}{((a+\psi)(e^{\psi(T-t)}-1)+2\psi)^{\frac{2ab}{\sigma^2}}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\left(e^{(\psi+a)(T-t)\frac{ab}{\sigma^2}}\right)(2\psi)^{\frac{2ab}{\sigma^2}}}{((a+\psi)(e^{\psi(T-t)}-1)+2\psi)^{\frac{2ab}{\sigma^2}}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{2\psi\left(e^{\frac{(T-t)}{2}(\psi+a)}\right)}{((a+\psi)(e^{\psi(T-t)}-1)+2\psi)}\right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}}.
\end{aligned}$$

Nuevamente, para obtener el precio del bono simplemente se sustituye el valor de los parámetros en las funciones A y C. A manera de ejercicio se ha graficado en (3.1.2) la interacción del precio del bono con algunos de los parámetros. La dinámica utilizada para tal fin es $dr_t = .5(.04 - r_t)dt + .015dW$ con $r_0 = .04$.



a) b) c)

Figura 3.7: Sensibilidad en el precio del bono a partir del cambio en los parámetros.

- En a) puede observarse que el precio del bono se ve poco influenciado con respecto al parámetro de aceleración.
- En b) puede observarse que el precio del bono es decreciente con respecto a la tasa inicial, como es de esperarse.
- En c) es posible notar que el precio del bono aumenta lentamente si el factor de proporción de la volatilidad σ aumenta, esto sin duda debido a

la proporcionalidad entre la volatilidad y la tasa.

3.1.3. Ho-Lee

El modelo de Ho-Lee se obtiene cuando

$$\eta(t) = 0 \quad , \quad \gamma(t) = 0 \quad , \quad \rho(t) = \sigma^2$$

Sin embargo, se deja que $\beta(t)$ sea función del tiempo, obteniendo de esta manera la dinámica de la tasa de interés

$$dr = \beta(t)dt + \sigma dW. \tag{3.20}$$

El modelo de Ho-Lee también induce una estructura afín, con las funciones:

$$C(t,T) = T - t \qquad \text{y} \qquad A(t,T) = -\int_t^T \beta(s)(T-s)ds + \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3.$$

Ho-Lee propusieron el primer modelo "libre de arbitraje empírico", ya que seleccionan a $\beta(t)$ de tal manera que, el precio teórico del bono en cuestión y el precio real del mercado sean el mismo al tiempo $t = 0$. A los modelos que presentan la característica de tener un parámetro dependiente del tiempo que se escoge de tal manera que el modelo concuerde con las tasas obtenidas a partir de información empírica, se les da el calificativo de *endógenos*.

Para obtener una relación entre la información empírica y la función de tiempo $\beta(t)$, retómese la ecuación (1.22) que expresa el precio de un bono en términos de la tasa forward. Denótese además como $B^*(t,T)$ el precio del bono empírico, y $f^*(t,T)$ la tasa forward empírica, entonces los precios empíricos y teóricos cumplen la siguiente relación al tiempo $t = 0$:

$$e^{-\int_0^T f^*(0,s)ds} = B^*(0,T) = B(0,T) = e^{A-Cr},$$

de donde se obtiene, tomando logaritmos y sustituyendo la forma que toman A y C

$$-\int_0^T f^*(0,s)ds = \underbrace{-T\int_0^T \beta(s)ds + \int_0^T \beta(s)sds + \frac{1}{6}\sigma^2 T^3}_{A} - r\underbrace{(T)}_{C},$$

obteniendo así las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} -f(0,T) &= -T\beta(T) - \int_0^T \beta(s)ds + T\beta(T) + \frac{1}{2}\sigma^2T^2 - r \\ &= -\int_0^T \beta(s)ds + \frac{1}{2}\sigma^2T^2 - r. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\frac{\delta f(0,T)}{\delta T} = \beta(T) - T\sigma^2,$$

lo cual debe cumplirse para toda $T > 0$, obteniendo así la igualdad

$$\beta(t) = \frac{\delta f(0,t)}{\delta t} + t\sigma^2.$$

Esto es, que el modelo (3.20) puede ser reexpresado de la forma

$$dr_t = \Big(\frac{\delta f(0,t)}{\delta t} + t\sigma^2\Big)dt + \sigma dW_t. \tag{3.21}$$

De aquí se concluye que entonces la tasa tiene como solución

$$r_t = r_0 + f(0,t) + \frac{1}{2}t^2\sigma^2 + \sigma W_t. \tag{3.22}$$

Para obtener la curva inicial de las tasas forward puede ser utilizado, por ejemplo, el método de Nelson-Siegel expuesto en el primer capítulo del presente trabajo. Según se observa en (3.22), la distribución de la tasa spot es normal con esperanza y varianza dadas por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[r_t|\mathcal{F}_s] &= r_0 + f(0,t) + \frac{1}{2}t^2\sigma^2 + \sigma W_s \\ Var[r_t|\mathcal{F}_s] &= \sigma^2(t-s) \end{aligned}$$

por lo que este modelo también puede tomar valores negativos con probabilidad positiva.

Además de los llamados modelos afines, existen diversos modelos discretos de tasas de interés utilizados para valuar bonos que en su gran mayoría son la aproximación discreta de algún modelo continuo, a continuación se hará mención de algunos de ellos.

3.2. Árboles binomiales

De entre los diferentes métodos que existen para valuar bonos, están los llamados *árboles binomiales*, que tienen como función primaria el permitir obtener una aproximación del precio de los bonos de una manera parsimoniosa, es decir, que son capaces de establecer de una manera relativamente sencilla el precio del bono. Esto se logra a partir de crear escenarios donde el activo subyacente, que en este caso es la tasa de interés, aumenta de valor o disminuye con cierta probabilidad. Esto permite ver a los árboles binomiales como una alternativa ante los modelos continuos, al permitir recrear escenarios de la tasa de interés en plazos específicos deseados.

En primer lugar, se hará una revisión del trabajo llevado a cabo por Ho-Lee [6] a manera de introducción a los modelos binomiales, para posteriormente presentarlos de forma más general. Por último, se dará un algoritmo que permitirá crear estructuras de tasas de interés para algunos modelos expuestos a

manera de *árboles trinomiales*.
Este tipo de modelado conlleva el nombre de "árbol", debido a que la información que genera organizada en un diagrama tiene la apariencia de ramas, donde el nombre "binomial" se debe al hecho de que la probabilidad de encontrarse en algún estado del árbol en específico, tiene una distribución binomial. De hecho, es posible ver a este tipo de modelos como una caminata aleatoria.
Los árboles no constituyen un método exclusivo para valuar bonos, sino que sirven para valuar diferentes instrumentos que tengan una relación directa con el movimiento en la tasa de interés.

Por otra parte, se les denomina como modelos AR (Arbitrage-free Rate movements) a aquellos que hacen uso de una manera consistente de la información sobre la estructura de tasas empírica existente hasta el momento. Es entonces que los modelos AR, utilizando la estructura de tasas empírica, crean un escenario de movimientos factibles en los subsecuentes períodos de tal manera que los mismos no permitan oportunidades de arbitraje en el mercado empírico.
Dentro de los modelos AR más importantes se encuentra el modelo de Ho-Lee [6] debido a su relativa sencillez de implementación.

3.2.1. Modelo Ho-Lee

En la mayoría de los modelos de tasas de interés y de muchos otros modelos en finanzas se hacen supuestos importantes. Un supuesto importante del modelo de árboles binomiales es que el mercado de bonos es completo en el sentido de que existe un bono cupón cero para cada plazo. A pesar de que este supuesto es muy difícil de cumplir, ya se han analizado algunas de las técnicas más utilizadas y conocidas para obtener tasas spot o forward implicadas y con ello el precio de bonos.
Además, el modelo supone que para cada plazo existe solamente un espacio finito de estados de la tasa de interés, esto es, que la cantidad posible de valores que puede tomar la tasa de interés es finito y, por lo tanto, también lo será el espacio de estados del precio del bono.

La forma de denotar el precio de un bono en esta subsección será de $B_i^{(n)}(\cdot)$, donde "n" denota el periodo en el que se valúa, "i" el estado (escenario) de la tasa de interés y "$\cdot$" denota de manera general cualquier plazo. Dejando a un lado por el momento el estado i, anteriormente el precio del bono con estas características se ha venido representando como $B(n, n+\cdot)$. De esta forma, el precio del bono debe entenderse como una función que depende del estado del periodo de la valuación, de la tasa de interés y del plazo del mismo, por lo cual debe cumplir ciertas condiciones: la primera es que no importando en qué estado se encuentre la tasa de interés, el precio del bono con un plazo cero debe tomar el valor de uno:

$$B_i^{(n)}(0) = 1 \qquad \forall i, n.$$

Además, el precio de un bono cupón cero con un plazo en un futuro muy lejano debe tener un valor insignificante:

$$\lim_{T \to \infty} B_i^{(n)}(T) = 0 \qquad \forall i, n.$$

No importando el plazo del bono cupón cero, el precio actual (que se denotará por el tiempo cero) debe ser único, de otra forma el mercado tendría grandes inconsistencias. Dicho precio se denotará como

$$B(\cdot) = B_0^{(0)}(\cdot).$$

Construcción del árbol binomial

Para crear una serie de posibilidades y "movimientos" de las posiciones en la tasa de interés, el modelo plantea que, dado cualquier, estado observado, el futuro inmediato del precio del bono se situará en dos posibles posiciones. De esta manera se crea una variedad de posibles comportamientos del actual precio del bono. De manera específica, si el bono se encuentra en el estado $B_i^{(n)}(\cdot)$, al siguiente periodo su precio sólo puede aumentar de precio al pasar al estado $B_{i+1}^{(n+1)}(\cdot)$ (también referido como *upstate*) o puede disminuir su valor hacia $B_i^{(n+1)}(\cdot)$ (también referido como *downstate*).

$$\begin{tikzcd}
 & B_{i+1}^{(n+1)}(\cdot) \\
B_i^{(n)}(\cdot) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & B_i^{(n+1)}(\cdot)
\end{tikzcd}$$

Se debe tomar en cuenta que si el bono se encuentra en el estado $B_i^{(n)}(\cdot)$ significa que, de los n periodos que han transcurrido, i veces el precio ha incrementado y por lo tanto $n-i$ veces ha disminuído. Esto sin lugar a dudas conllevaría a un gran número de posibilidades si el precio del bono fuera *dependiente del camino*, es decir, si el bono dependiera de la ruta que ha recorrido para llegar al estado. Por lo tanto, el modelo impone restricciones sobre este hecho al suponer, que la función de descuento sólo depende del número de periodos en los cuales el precio del bono ha aumentado y no en la secuencia en la que estos aumentos han ocurrido. Esta restricción no solamente reduce el número de posibilidades, sino que ayuda a establecer ciertas relaciones como se expondrá más adelante.

Factores de perturbación

Si no existieran cambios en la tasa de interés es claro que el precio no variaría, por lo que en el valor del bono en el siguiente periodo, no importando el estado al que avance, el valor del bono en estos estados tendría que ser por consecuencia el mismo. Es decir, que si un bono de plazo T se encuentra en el estado i al momento n, si no existiera riesgo en la tasa de interés, se debe cumplir

$$B_i^{(n+1)}(T) = B_{i+1}^{(n+1)}(T),$$

y esto debe ocurrir para cualquier plazo. Sin embargo, al estar interesados en modelar el comportamiento del rendimiento en un mundo de incertidumbre, los autores proponen crear *funciones de perturbación*, denotadas por $h(\cdot)$ y $h^*(\cdot)$, cuya función será la de alterar la actual estructura de tasas, con el fin de crear diferentes escenarios en el futuro precio del bono a considerar. Además, estas funciones de perturbación determinan totalmente qué tanto aumenta o disminuye el valor del bono en el siguiente periodo.
La función $h(T)$ se relaciona con el aumento de precio del bono de manera explícita de la siguiente forma:

$$B_{(i+1)}^{(n+1)}(T) = \frac{B_{(i)}^{(n)}(T+1)}{B_{(i)}^{(n)}(1)} h(T),$$

y de igual manera, la función $h(T)^*$ con el decremento en el precio,

$$B_{(i)}^{(n+1)}(T) = \frac{B_{(i)}^{(n)}(T+1)}{B_{(i)}^{(n)}(1)} h^*(T).$$

Dichas funciones de perturbación deben cumplir también con ciertas características: la primera de ellas es que deben ser positivas para que las relaciones descritas anteriormente tengan sentido, de lo contrario, el precio sería negativo. La segunda consiste en que, debido al hecho de que el precio de un bono muy próximo a su vencimiento debe ser casi uno, entonces las funciones de perturbación también deben ser uno, es decir

$$h(0) = 1 \qquad , \qquad h^*(0) = 1.$$

La condición anterior hace pensar que las funciones de perturbación dependen del plazo del bono que se esté valuando, por lo que para construir un árbol binomial de la estructura de tasas, es necesario definir las funciones de perturbación $h(T)$ y $h^*(T)$ además de la estructura actual de todos los periodos para los que se quiera construir el árbol.

Probabilidad implicada π

Otras restricciones surgen para las funciones de perturbación por considerar que, si para algún periodo es posible construir un portafolio de bonos en el cual se tenga la certeza del valor de la tasa de interés en el siguiente periodo, entonces dicha tasa corresponderá a la tasa de interés de un bono cupón cero con plazo de un periodo, esto con el fin de evitar oportunidades de arbitraje.

Esta condición impone restricciones en las funciones de perturbación en cada nodo (n, i) (periodo n, estado i) debido a que el argumento anterior puede ser utilizado indistintamente para cualquier periodo, por lo que denotando el precio del bono como $B(\cdot)$, sin denotar a qué estado y tiempo pertenecen por el argumento anterior y para fines prácticos, entonces el valor de un portafolio V constituido por un bono de plazo T y ξ bonos de plazo t es $V = B(T) + \xi B(t)$, en el *upstate* y *downstate* es

$$V = \frac{B(T)h(T-1) + \xi B(t)h(t-1)}{B(1)} \quad , \quad V = \frac{B(T)h^*(T-1) + \xi B(t)h^*(t-1)}{B(1)},$$

respectivamente. Si ambos valores fueran iguales, se obtendría que es posible construir un portafolio que no tenga incertidumbre en la tasa de interés, por lo que igualando ambas ecuaciones y despejando a ξ se obtiene el número de bonos de plazo t que se debe tener en el portafolio por cada bono de plazo T. El valor de ξ es

$$\xi = \frac{B(T)[h(T-1) - h^*(T-1)]}{B(t)[h^*(t-1) - h(t-1)]}.$$

Supóngase que dicho portafolio es obtenido. Al obtener un rendimiento que no depende de los futuros posibles estados, sucede entonces que para evitar oportunidades de arbitraje el portafolio debe producir de rendimiento en el periodo lo equivalente a lo que produce un bono de plazo de un periodo, es decir, $\frac{1}{P(1)}$. Entonces, se debe obtener que el valor del portafolio al siguiente periodo es (sin pérdida de generalidad se ha considerado la notación del *downstate*)

$$\frac{B(T)h^*(T-1) + \xi B(t)h^*(t-1)}{B(1)} = \frac{B(T) + \xi B(t)}{B(1)},$$

y haciendo sustitución del valor de ξ se obtiene que

$$\frac{1 - h^*(T-1)}{h(T-1) - h^*(T-1)} = \frac{1 - h^*(t-1)}{h(t-1) - h^*(t-1)}.$$

Debido a que se tomaron valores arbitrarios de T y de t, esta igualdad debe preservarse para cualquier valor de éstos y por lo tanto debe existir una constante π que sea independiente del plazo del bono, de tal manera que cumpla la siguiente relación

$$\frac{1 - h^*(T-1)}{h(T-1) - h^*(T-1)} = \pi.$$

Para cualquier T arbitraria, dicha expresión se puede reescribir como

$$\pi h(T) + (1-\pi)h^*(T) = 1. \tag{3.23}$$

A esta constante π se le llama *probabilidad binomial implicada*. Además, debido a la forma como se ha obtenido esta probabilidad, resulta ser única y por lo tanto, el modelo es completo en términos de modelo de mercado.

Esta probabilidad tiene la propiedad de establecer la relación existente entre el precio de un bono con plazo T en términos de los posibles precios a futuro del mismo en el próximo periodo. Sustituyendo en la ecuación anterior el valor de $h(T)$ y de $h^*(T)$ se tiene

$$\pi \cdot \frac{B_{i+1}^{(n+1)}(T-1) \cdot B_i^{(n)}(1)}{B_i^{(n)}(T)} + (1-\pi) \cdot \frac{B_i^{(n+1)}(T-1) \cdot B_i^{(n)}(1)}{B_i^{(n)}(T)} = 1.$$

Tras algunos despejes se obtiene que

$$B_i^{(n)}(T) = [\pi B_{i+1}^{(n+1)}(T-1) + (1-\pi) B_i^{(n+1)}(T-1)] B_i^{(n)}(1), \tag{3.24}$$

lo que muestra que el precio de un bono con plazo T debe corresponder al valor descontado del promedio ponderado de los dos posibles valores que alcanza al final del mismo, cuyo factor de descuento es precisamente el valor de bono con plazo de un periodo. Esto quiere decir que si se toma a π como probabilidad, el precio del bono de plazo T al tiempo n es el valor descontado del valor esperado de un bono al final del periodo n condicionado a la información al tiempo n.

$$B_i^{(n)}(T) = \tilde{\mathbb{E}}[P^{(n+1)}(T-1)|\mathcal{F}_n] B_i^{(n)}(1) = \tilde{\mathbb{E}}[P^{(n)}(1) P^{(n+1)}(T-1)|\mathcal{F}_n].$$

Se puede calcular esta probabilidad π al despejar su valor de la ecuación (3.24), dicha relación queda de la siguiente manera:

$$\pi \cdot \frac{B_{i+1}^{(n+1)}(T-1)}{B_i^{(n)}(T)} + (1-\pi) \cdot \frac{B_i^{(n+1)}(T-1)}{B_i^{(n)}(T)} = \frac{1}{B_i^{(n)}(1)}.$$

Denotando como u la primera fracción factor, d la segunda, y r el término del lado derecho de la igualdad se obtiene

$$\pi u + (1-\pi) d = r$$

y, por último, despejando a π de la igualdad

$$\pi = \frac{r-d}{u-d},$$

los valores de u, d y se pueden interpretar como la proporción de cambio entre el antiguo precio del bono y el nuevo, es decir, la ganancia y pérdida respectivamente existente debido al cambio de la tasa de interés y a r como la ganancia que se esperaría si no hubiera cambios en la tasa de interés. De esto se concluye que π refleja la proporción del desvío entre el *downstate* y la tasa del desvío total. Además, si π es muy cercana a uno, significaría que el *upstate* es muy parecido a la tasa esperada r y esto en consecuencia revela que el mayor desvío se debe principalmente a un decremento en el precio. De manera similar, si es prácticamente cero, significaría que el *downstate* es muy parecido a la tasa esperada r y por lo tanto el desvío en el precio se debe principalmente a un incremento en el precio principalmente.

Camino independiente

Como se ha mencionado anteriormente, para hacer el modelo un poco más sencillo se forzará a que el precio del bono dependa exclusivamente del número de periodos en los que éste ha aumentado y no en la secuencia en la que estos aumentos suceden. Esta restricción crea fuertes vínculos entre las funciones de perturbación y la probabilidad implícita π.
Para analizar dicha dependencia, considérese el valor de un bono de plazo $T+2$ al tiempo n que se encuentra en el estado i. Supóngase que el precio del bono sube en el siguiente periodo :

$$B_{i+1}^{(n+1)}(T+1) = \frac{B_i^{(n)}(T+2)}{B_i^{(n)}(1)} h^*(T).$$

Si el precio desciende en el próximo periodo a éste, el valor del bono entonces será:

$$B_{i+1}^{(n+2)}(T) = \frac{B_{i+1}^{(n+1)}(T+1)}{B_{i+1}^{(n+1)}(1)} h^*(T) = \frac{B_i^{(n)}(T+2)}{B_i^{(n)}(2)} \frac{h(T+1)h^*(T)}{h(1)}.$$

Ahora bien, esta última ecuación se obtiene cuando el bono sufre un alza en el precio y después una baja, si se invierten los papeles de igual manera se obtiene que el precio sería

$$B_{i+1}^{(n+2)}(T) = \frac{B_{i+1}^{(n+1)}(T+1)}{B_{i+1}^{(n+1)}(1)} h(T) = \frac{B_i^{(n)}(T+2)}{B_i^{(n)}(2)} \frac{h^*(T+1)h(T)}{h^*(1)}.$$

Ambos indudablemente tienen que ser iguales cuando se hace el supuesto de la independencia del camino recorrido, por lo que igualando ambas ecuaciones se obtiene

$$h(T+1)h^*(T)h^*(1) = h^*(T+1)h(T)h(1).$$

Sin embargo, ya se había establecido una relación entre los factores de perturbación y la probabilidad implícita, por lo que sustituyendo a h^* la ecuación anterior puede ser reescrita como

$$h(T+1)[1-\pi h(T)][1-\pi h(1)] = (1-\pi)h(1)h(T)[1-\pi h(T+1)].$$

Se puede observar claramente que, al tener factores de perturbación que dependen del tiempo $T+1$ así como de T, la ecuación anterior puede ser reexpresada para concretar una forma iterativa de los factores de perturbación. Reescribiendo la ecuación anterior al despejar y dejar tan sólo el término que depende de $T+1$:

$$h(T+1) = \frac{(1-\pi)h(1)h(T)}{1+\pi h(T)\big(h(1)-1\big)-\pi h(1)}.$$

Debido a que $h(\cdot)$ es una función positiva, se puede obtener su inverso multiplicativo que es

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h(T+1)} &= \frac{1+\pi h(T)\big(h(1)-1\big)-\pi h(1)}{(1-\pi)h(1)h(T)} \\
&= \frac{1-\pi h(1)}{(1-\pi)h(1)h(T)} + \frac{\big(h(1)-1\big)\pi}{(1-\pi)h(1)} \\
&= \frac{1}{h(T)}\frac{\frac{1}{h(1)}-\pi}{(1-\pi)} + \frac{\pi\big(h(1)-1\big)}{(1-\pi)h(1)} \\
&= \frac{\delta}{h(T)} + \gamma,
\end{aligned}$$

donde δ y γ se han definido como

$$\delta = \frac{\frac{1}{h(1)}-\pi}{(1-\pi)} \quad , \quad \gamma = \frac{\pi\big(h(1)-1\big)}{(1-\pi)h(1)}.$$

Esta expresión brinda muchas ventajas para fines de cómputo, pues a partir de aquí se puede reducir la expresión para $h(\cdot)$. Primero obsérvese que debido a la forma en que se ha definido δ, se debe cumplir la siguiente relación

$$h(1) = \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta}.$$

De lo anterior se puede simplificar aún más el cálculo de $h(\cdot)$. Para ello, es preciso observar que $\delta < 1$, pues si no fuera de esta manera entonces se tendría una contradicción. En efecto, si sucediera que $\delta > 1$ se tendría que

$$\frac{1}{h(1)} = \pi + (1-\pi)\delta > \pi + (1-\pi) = 1.$$

Esto no es posible ya que $h(1)$ es un factor de perturbación mayor a uno, por lo que su inverso multiplicativo debe ser menor a uno, conllevando a una contradicción.

Utilizando recurrencia sobre el valor de $\frac{1}{h(T)}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h(T)} &= \frac{\delta}{h(T-1)} + \gamma \\
&= \delta\big(\frac{\delta}{h(T-2)} + \gamma\big) + \gamma \\
&= \delta^2\big(\frac{\delta}{h(T-3)} + \gamma\big) + \delta\gamma + \gamma \\
&= \dots \\
&= \frac{\delta^T}{h(0)} + \gamma\sum_{k=0}^{T-1}\delta^k,
\end{aligned}$$

donde usando que $0 < \delta < 1$ y que $h(0) = 1$ se concluye

$$\frac{1}{h(T)} = \delta^T + \gamma \frac{1-\delta^T}{1-\delta}.$$

Además, cuando $T = 1$ se tiene que

$$\frac{1}{h(1)} = \frac{\delta}{h(0)} + \gamma = \delta + \gamma,$$

donde utilizando de manera conjunta esta relación junto con

$$\delta + \gamma = \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta}$$

y por lo tanto

$$\gamma = (1-\delta)\pi.$$

Sustituyendo el valor de γ

$$\frac{1}{h(T)} = \delta^T + \pi(1-\delta)\frac{1-\delta^T}{1-\delta} = \pi + (1-\pi)\delta^T.$$

Se concluye entonces que

$$h(T) = \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^T}$$

y, por tanto,

$$h^*(T) = \frac{\delta^T}{\pi + (1-\pi)\delta^T}.$$

De estas dos ecuaciones se puede concluir que

$$h^*(T) = \delta^T h(T).$$

Una vez definidos los términos necesarios para el modelo, es necesario analizar las propiedades inherentes al mismo.

Características del modelo

Una característica muy importante de este modelo es la forma parsimoniosa, no solo del argumento de construcción, sino de su estructura misma, pues todo el modelo queda caracterizado simplemente por las constantes π y δ. La idea intuitiva de π se ha expuesto antes como una probabilidad intrínseca del modelo. Sin embargo, la idea intuitiva acerca de δ no es menos importante pues, por la forma de las funciones de perturbación con respecto a δ, sugiere que esta constante es la que determina qué tan "separadas" estarán las funciones de perturbación y, por lo tanto, esta variable afecta la volatilidad en el precio del bono. Es preciso hacer especial énfasis en el hecho de que, a mayor separación de estas dos funciones, se tendrá una mayor variabilidad; además, las funciones de perturbación claramente dependen del tiempo. La función de perturbación $h(\cdot)$ incrementa monoticamente hacia el valor de $\frac{1}{\pi}$, mientras que $h^*(\cdot)$ decrece hacia cero.

Ahora bien, una vez establecidas las constantes que caracterizan el modelo, es posible obtener de las relaciones establecidas anteriormente el precio de los bonos, el cual queda entonces caracterizado como

$$B_i^{(n)}(T) = \frac{P(T+n)}{P(n)} \frac{h^*(T+n-1)h^*(T+n-2)\cdots h^*(T+i)h(T+i-1)\cdots h(T)}{h^*(n-1)h^*(n-2)\cdots h^*(i)h(i-1)\cdots h(1)}.$$

Usando el hecho de que $h^*(t) = \delta^t h(t)$, la expresión anterior se puede simplificar a

$$B_i^{(n)}(T) = \frac{P(T+n)}{P(n)} \frac{h(T+n-1)h(T+n-2)\cdots h(T)\delta^{T(n-i)}}{h(n-1)h(n-2)\cdots h(1)}.$$

Aunque esta ecuación describe en su totalidad el precio de un bono en el estado i al momento n, es preciso describir asimismo la estructura de tasas spot de un periodo para entender la estructura que impera en ella, en cuyo caso el precio de un bono con plazo de un periodo es:

$$B_i^{(n)}(1) = \frac{P(n+1)\delta^{n-i}}{P(n)(\pi + (1-\pi)\delta^n)}. \tag{3.25}$$

Por lo que la tasa de interés spot compuesta contínuamente de plazo de un periodo es

$$\begin{aligned} R_i^{(n)}(1) &= -\ln B_i^{(n)}(1) \\ &= \underbrace{\ln \frac{P(n)}{P(n+1)} + \ln(\pi\delta^{-n} + (1-\pi))}_{a_n} + i\ln\delta \\ &= a_n + i\ln\delta, \end{aligned} \tag{3.26}$$

donde $a_n = \ln \frac{P(n)}{P(n+1)} + \ln(\pi\delta^{-n} + (1-\pi))$.
Nótese en la expresión anterior a (3.26) que el valor de la tasa spot a un periodo corresponde a una tasa forward con plazo de un periodo, más un par de constantes que dependen de la variable de incertidumbre δ. Es posible observar que estas constantes desaparecen cuando el valor de δ es uno, correspondiente al caso en que se espera que el factor de acumulación sea exactamente el factor de acumulación de la tasa forward compuesta de un periodo.

Además, considerando la discrepancia entre nodos consecutivos en un periodo fijo se obtiene

$$\begin{aligned} R_{(i+1)}^{(n)}(1) - R_i^{(n)}(1) &= a_n + (i+1)\ln\delta - (a_n + i\ln\delta). \\ &= \ln\delta \end{aligned}$$

Esto quiere decir que para n fija, la discrepancia entre nodos consecutivos está dada por $\ln\delta$; esta cantidad es negativa puesto que, si el precio del bono incrementa, significa que la tasa spot disminuye, sin embargo, por convención en futuras referencias se denotará como en el caso de los bonos y el valor de la tasa en el nodo $i+1$ será mayor que el valor de la tasa en el nodo i dentro del mismo periodo. Siguiendo esta convención, la discrepancia quedaría caracterizada de la siguiente manera:

$$R^{(n)}_{(i+1)}(1) - R^{(n)}_{i}(1) = -\ln\delta.$$

De aquí se concluye que $\ln\delta$ representa qué tan separadas están las tasas dentro de los posibles escenarios, hecho que refuerza la idea intuitiva que esta está relacionado directamente con la volatilidad.

Hasta el momento, se ha trabajado con la probabilidad implicada, es decir la probabilidad neutral al riesgo, por lo que la probabilidad de que la tasa de interés se encuentre en algún nodo en particular i en el periodo fijo n se distribuye de forma binomial, mientras que para n fijo e i fijo la tasa spot tiene distribución bernoulli, cuya probabilidad de aumentar es π y de disminuir $(1-\pi)$. A partir de este hecho, junto con la relación (3.26) se obtiene que la varianza de la tasa para n e i fijas es

$$\sigma^2 := Var[R^{(n)}_{(i)}(1)] = \pi(1-\pi)(\ln\delta)^2. \tag{3.27}$$

Esto ocurre para todo n e i, lo que indica que la varianza no es dependiente del tiempo ni del estado, sino constante, y como consecuencia δ toma la forma

$$\delta = \exp\left[-\frac{\sigma}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}\right]. \tag{3.28}$$

La varianza de la tasa spot puede ser calculada de forma empírica, sin embargo, δ depende también de la probabilidad neutral al riesgo cuya selección debe ser llevada a cabo de forma cautelosa para no obtener tasas negativas. Para evitar esto, se debe cumplir que ningún escenario creado el precio del bono sobrepase el valor de una unidad monetaria, según (3.25) esto es que

$$B^{(k)}_{(k)}(1) = \frac{B(k+1)}{B(k)}\underbrace{\left(\frac{1}{(\pi+(1-\pi)\delta^k)}\right)}_{h(k)} \leq 1 \quad \forall k \in \{1,2,3,\ldots,T-1\}.$$

Esta condición puede simplificarse si $(\frac{B(k+1)}{B(k)})$ (o equivalentemente, las tasas forward compuestas de un periodo) es no decreciente, si este fuera el caso, el que la función $h(k)$ sea estrictamente creciente implicaría que la condición anterior puede reexpresarse como

$$B^{(T-1)}_{(T-1)}(1) = \frac{B(T)}{B(T-1)(\pi+(1-\pi)\delta^T)} \leq 1.$$

De aquí se obtiene que

$$\frac{B(T)}{B(T-1)} \leq \pi + (1-\pi)\delta^T. \tag{3.29}$$

Se puede encontrar la π mas pequeña de tal forma que cumpla la igualdad mediante algún método numérico.

Ejemplo

Para ejemplificar el modelo Ho-Lee, supóngase que el precio de los bonos están dados según el cuadro 3.2.1 y que la volatilidad es $\sigma = .01$. Con esta volatilidad, la probabilidad π más pequeña que garantiza tasas no negativas es menor a .007, por lo que suponiendo una probabilidad neutral al riesgo de .5 se garantiza también la no negatividad.

	Plazo (T)						
	1	2	3	4	5	6	7
P(T)	0.92876	0.85306	0.77623	0.70042	0.61642	0.54872	0.48623
R(T)	0.07390	0.07945	0.08443	0.08901	0.09676	0.10002	0.10300

Cuadro 3.1: Precios de bonos cupón cero con plazo T.

El árbol obtenido según el modelo Ho-Lee es el que se muestra en el cuadro (3.2.1) y se ha hecho a partir de (3.26) utilizando como δ el expresado en (3.28), que resulta ser 0.9801987.
Una vez obtenido el árbol para los precios de bonos cupón cero con plazo de un periodo, es posible obtener el árbol para la tasa spot compuestamente continua (o el de cualquier otro tipo de tasa spot). Un ejemplo de ello se encuentra en el cuadro (3.2.1).

i╲ n	0	1	2	3	4	5	6
6							0.93922
5						0.93464	0.92063
4					0.91525	0.91613	0.90240
3				0.92939	0.89713	0.89799	0.88453
2			0.92813	0.91099	0.87937	0.88021	0.86701
1		0.92768	0.90975	0.89295	0.861959	0.86278	0.84985
0	0.92876	0.90931	0.89173	0.87527	0.844891	0.84570	0.83302

Cuadro 3.2: Precios de bonos cupón cero con plazo de un periodo.

i╲ n	0	1	2	3	4	5	6
6							0.18269
5						0.16758	0.16269
4					0.16854	0.14758	0.14269
3				0.13322	0.14854	0.12758	0.12269
2			0.114583	0.11322	0.12854	0.10758	0.10269
1		0.09506	0.09458	0.09322	0.10854	0.08758	0.08269
0	0.07390	0.07506	0.07458	0.07322	0.08854	0.06758	0.06269

Cuadro 3.3: Árbol para las tasas spot compuestas continuamente de plazo de un año.

3.2.2. Árboles binomiales

El modelo de Ho-Lee está basado originalmente en la perturbación de los precios de bonos para después obtener la perturbación de la tasa spot continuamente compuesta. Es evidente que a partir de esta tasa es posible obtener otro tipo de tasa spot. Sin embargo, existe otro enfoque que parte de la idea de perturbar en principio la tasa de interés spot compuesta vigente en un solo periodo, para después obtener el precio de otros activos contingentes que dependan de la misma.

Según el modelo de mercado discreto, para que el modelo tenga ausencia de oportunidad de arbitraje debe existir una probabilidad neutral al riesgo, de tal forma que los precios descontados de los activos sean martingalas; en el mercado aquí presentado los activos son bonos y el factor de descuento es un proceso estocástico pues las tasas lo son. Supóngase que en el periodo de tiempo (k-1,k] la tasa vigente es $r_{\text{disc}}^{(k-1)}$, positiva y conocida al tiempo $k-1$, y que además la recapitalización se lleva a cabo al final del periodo. Esto conduce a que el verdadero factor de acumulación del tiempo 0 al tiempo $n+1$ debe ser de la forma $\prod_{k=1}^{n}(1+r_{\text{disc}}^{(k-1)})$, o lo que es equivalente, el factor de descuento es de la forma

$$D(n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+r_{\text{disc}}^{(k-1)})}. \tag{3.30}$$

Que al tiempo $k-1$ se sepa cual es la tasa de interés $r_{\text{disc}}^{(i-1)}$ aplicable significa que el proceso $\{r_{\text{disc}}^{(k-1)}\}_{k=1}^{T+1}$ es predecible, es decir, que el proceso $\{r_{\text{disc}}^{(n)}\}_{n=1}^{T}$ es medible con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_i\}_{n=1}^{T}$, implicando así que el proceso $D(k)$ es también $\mathcal{F}_k$-medible; además la condición $r_{\text{disc}}^{(k)} > 0$ implica que el factor de descuento es decreciente con respecto al plazo T.

Si existe una medida martingala $\tilde{\mathbb{P}}$ implicaría que el precio descontado del bono es martingala, es decir, se cumple

$$D(s)B(s,T) = \tilde{\mathbb{E}}[D(t)B(t,T)|\mathcal{F}_s], \tag{3.31}$$

y debido a que $D(s)$ es $\mathcal{F}_s$-medible, sustituyendo (3.30) y haciendo $t = T$ ($B(T,T) = 1$) se obtiene

$$B(s,T) = \tilde{\mathbb{E}}\Big[\prod_{k=s+1}^{T} \frac{1}{(1 + r_{\text{disc}}^{(k-1)})} \big| \mathcal{F}_s\Big]. \tag{3.32}$$

Esta es la contraparte discreta de (2.36), y al ser $r_{(k-1)}^{\text{disc}} > 0$ significa que el precio del bono es decreciente. Considerando $T = s + 1$ y que $r_{\text{disc}}^{(s)}$ es $\mathcal{F}_s$-medible, y acomodando de forma apropiada se obtiene la relación

$$r_{\text{disc}}^{(s)} = \frac{1}{B(s, s+1)} - 1. \tag{3.33}$$

El lado derecho es precisamente como se ha definido $Y(s, s+1)$ en (1.11). Esto tiene mucho sentido, pues en el capítulo 1 se ha expuesto que la tasa de interés spot compuesta $Y(t, T)$ representaba la tasa de interés compuesta bajo la cual invirtiendo como capital el precio del bono de plazo t se producía a final del plazo una unidad monetaria. De esta forma, la tasa $Y(t, t+1)$ es la tasa que predomina en el mercado en el intervalo de tiempo $(t, t+1]$ y se le denomina a veces como *tasa corta discreta*, además para $s < t$ esta tasa es desconocida. De la ecuación anterior se tiene la relación

$$r_{\text{disc}}^{(s)} = Y(s, s+1). \tag{3.34}$$

Dadas las condiciones (3.31), (3.32) y $r_{\text{disc}}^{(k)} > 0$, es posible obtener un sistema de precios consistentes para los bonos, primero definiendo el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \tilde{\mathbb{P}})$ donde $\tilde{\mathbb{P}}$ es la probabilidad neutral al riesgo, después asignando el comportamiento de r bajo $\tilde{\mathbb{P}}$ y por último al hacer uso de (3.31) para realizar la asignación de precios. Todo ello sin importar cuál es el comportamiento probabilístico de la tasa y de los precios bajo la medida observada.

El comportamiento de la tasa de interés de los árboles binomiales tiene la característica que el número de escenarios subsecuentes posibles (dado que se encuentra en uno en particular) son solamente dos. La notación de los posibles escenarios es idéntica a la estructuración de nodo i y tiempo n en el modelo Ho-Lee.
En el caso aquí presentado, igual que en el modelo Ho-Lee, los nodos son "recombinantes" o de camino independiente; a esta estructura de árboles binomiales se les denomina comúnmente como *látices* y, bajo ésta, la valuación del precio se lleva a cabo de una forma muy parecida a la hecha en (3.24). Sin pérdida de generalidad, supóngase por ejemplo que la evolución de la tasa $r^{(k)}$ es según la tabla (3.2.2) y se desea la evolución de los precios $B(s, 4)$ con $s = \{0, 1, 2, 3\}$. Además, supóngase que la filtración $\mathcal{F}_m$ está dada por la σ-álgebra que produce el proceso aleatorio $\{X_k\}_{k=1}^m$ ($\mathcal{F}_m = \sigma(X_1, \ldots, X_m)$), donde la variable aleatoria X_n se define como

$$X_n = i \quad , \quad i = \text{ Número de nodo en que se encuentra la tasa } r^{(n)}.$$

i$\diagdown$ n	0	1	2	3
3				$r_3^{(3)}$
2			$r_2^{(2)}$	$r_2^{(3)}$
1		$r_1^{(1)}$	$r_1^{(2)}$	$r_1^{(3)}$
0	$r_0^{(0)}$	$r_0^{(1)}$	$r_0^{(2)}$	$r_0^{(3)}$

Cuadro 3.4: Árbol para las tasas corta discreta

Supóngase que se satisface

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{P}}[X_n = i+1|X_{n-1} = i] = \pi \quad &, \quad \tilde{\mathbb{P}}[X_n = i|X_{n-1} = i] = 1-\pi,\\ \tilde{\mathbb{P}}[X_n = i|X_{n-1} = j, X_{n-2} = l, \dots, X_0 = 0] \quad &= \quad \tilde{\mathbb{P}}[X_n = i|X_{n-1} = j].\end{aligned}$$

esto significa que la distribución bajo la probabilidad neutral al riesgo, la distribución de la posición de la tasa será binomial y su posición solamente depende de su posición anterior (es un *proceso de Markov*). Si el escenario (i,n) se presenta, significa que la tasa que se aplica en el periodo $(n, n+1]$ es $r_i^{(n)}$ por lo que ésta es la tasa que debe utilizarse para obtener la función de descuento. De (3.31) se obtiene que

$$B(3,4) = \tilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{B(4,4)}{1+r^{(3)}}|\mathcal{F}_3\Big] = \tilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{1}{1+r^{(3)}}|X_3, X_2, X_1\Big] = \frac{1}{1+r^{(3)}_{X_3}}. \qquad (3.35)$$

Esto implica que, si la tasa se encuentra en el estado i, el valor del bono en ese estado está dado por

$$B_i(3,4) = \frac{1}{1+r_i^{(3)}},$$

pues al tiempo $k=3$ el escenario i en que se encuentra la tasa $r^{(3)}$ es conocida.

De igual manera, según (3.31), bajo la medida neutral al riesgo $B(2,4)$ se puede obtener como $B(2,4) = \tilde{\mathbb{E}}\big[\frac{B(3,4)}{1+r^{(2)}}|\mathcal{F}_2\big]$. Nuevamente, $r^{(2)}$ es medible con respecto a $\mathcal{F}_2$, lo que significa que la información contenida en $\mathcal{F}_2$ es suficiente para saber en qué estado se encuentra $r^{(2)}$. Esto es

$$B(2,4) = \tilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{B(3,4)}{1+r^{(2)}}|\mathcal{F}_2\Big] = \tilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{B(3,4)}{1+r^{(2)}}|X_2\Big] = \frac{1}{1+r^{(2)}_{X_2}}\tilde{\mathbb{E}}\Big[B(3,4)|X_2\Big].$$

Supóngase que al tiempo 2 la tasa se encuentra en el estado j; abusando de la notación y usando (3.35) se obtiene

$$B_j(2,4) = \frac{1}{1+r_j^{(2)}}\tilde{\mathbb{E}}\Big[B(3,4)|X_2 = j\Big] = \frac{1}{1+r_j^{(2)}}\tilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{1}{1+r^{(3)}}|X_2 = j\Big].$$

Ahora, dado que se sabe que al tiempo $n=1$ la tasa se encuentra en el estado j, debido a las características del modelo, sucede entonces que al próximo periodo la tasa sólo puede encontrarse ya sea en el estado i con probabilidad $1-\pi$, o en el estado $i+1$ con probabilidad π. Esto conduce a que

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{1}{1+r^{(3)}}|X_2=j\Big] &= \pi\frac{1}{1+r^{(3)}_{j+1}}+(1-\pi)\frac{1}{1+r^{(3)}_j}\\ &= =\pi B_{j+1}(3,4)+(1-\pi)B_j(3,4),\end{aligned}$$

obteniendo así la relación

$$B_j(2,4)=\frac{1}{1+r^{(2)}_j}\big(\pi B_{j+1}(3,4)+(1-\pi)B_j(3,4)\big).$$

Procediendo de la misma forma se obtiene

$$B(1,4)=\tilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{B(2,4)}{1+r^{(1)}}|\mathcal{F}_1\Big]=\tilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{B(2,4)}{1+r^{(1)}}|X_1\Big]=\frac{1}{1+r^{(1)}_{X_1}}\tilde{\mathbb{E}}\Big[B(2,4)|X_1\Big],$$

y suponiendo que al tiempo 1 la tasa se encuentra en el estado j, entonces el precio del bono en dicho escenario es

$$B_j(1,4)=\frac{1}{1+r^{(1)}_j}\big(\pi B_{j+1}(2,4)+(1-\pi)B_j(2,4)\big).$$

Esta forma de proceder podría sin duda puede extenderse a árboles de más periodos, obteniendo la ecuación general

$$B_j(t-1,T)=\frac{1}{1+r^t_j}\big[\pi B_{j+1}(t,T)+(1-\pi)B_j(t,T)\big], \tag{3.36}$$

o lo que es lo mismo

$$B_j(t-1,T)=B_j(t-1,t)\big[\pi B_{j+1}(t,T)+(1-\pi)B_j(t,T)\big].$$

La cual es una forma similar a (3.24) presentado en el modelo Ho-Lee.
Para llevar a cabo una valuación con más periodos, el procedimiento es exactamente el mismo que el aquí presentado, comenzando primero con los nodos del plazo deseado y procediendo hacia atrás en el látice utilizando (3.36).
Al expresar los movimientos en la tasa de interés, es posible determinar de manera más general no sólo el precio de bonos, sino también un mecanismo que permita valuar reclamos contingentes para los cuales dependen de manera explícita la tasa de interés. De este mecanismo, de forma particular, es posible el valor del precio de bonos si éstos son considerados como reclamos contingentes[3].

Una vez que se obtiene la estructura que ha de seguir la tasa corta discreta, es posible obtener los posibles escenarios que tendrá el precio del bono. La forma de obtener la estructura para la tasa puede ser a partir de algún modelo o método en específico. A manera de ejemplo, se presentará a continuación el modelo de Ho-Lee para la tasa corta discreta.

[3]Esta metodología puede ser encontrada en Ho-Lee [6]; en Luenberger [8] se encuentran algunos ejemplos.

Ejemplo: El modelo Ho-Lee para la tasa corta discreta

La idea del modelo originalmente presentado por Ho-Lee puede extenderse a la tasa corta discreta, obteniendo el modelo (Luenberger [8])

$$r_i^{(n)} = a_n + b_n \cdot i, \tag{3.37}$$

donde b_k es llamado *parámetro de volatilidad* y representa qué tan separados estarán los nodos al tiempo k. Una vez seleccionado los b_k, los parámetros a_k se escogen de tal forma que coincidan la estructura de tasas teórica al tiempo 0, es decir $Y(0,n)$, y la estructura creada $\tilde{Y}(0,n)$.
En el modelo estándar Ho-Lee el parámetro b_k es constante, obteniendo el modelo

$$r_i^{(n)} = a_n + b \cdot i. \tag{3.38}$$

Esta ecuación es parecida a (3.26), obtenida para la tasa spot compuesta continuamente. Según Luenberger [8], la forma de obtener el árbol una vez obtenido el parámetro de volatilidad consiste en calcular los *precios elementales*[4] del primer periodo y ajustar el parámetro a_1, de tal forma que el precio del bono de plazo de un periodo a través de (3.49) y el precio empírico coincidan. Procediendo hacia adelante, se debe ajustar a_2 al usar (3.48) para encontrar los precios elementales, de tal manera que al hacer uso de (3.49) el precio del bono con plazo de dos periodos y el precio empírico coincidan. De esta manera, al haber obtenido los parámetros a_i con $i \in \{1 \ldots, n\}$ se puede recrear el árbol para la tasa corta.

En la tabla 2.6 se ejemplifica este método usando $b = 0.0001$.

i╲ n	0	1	2	3	4	5	6
6							0.14609
5						0.13838	0.14109
4					0.14866	0.13338	0.13609
3				0.11795	0.14366	0.12838	0.13109
2			0.10586	0.11295	0.13866	0.12338	0.12609
1		0.09247	0.10086	0.10795	0.13366	0.11838	0.12109
0	0.0767	0.08747	0.09586	0.10295	0.12866	0.11338	0.11609
a	0.0767	0.08748	0.09586	0.10295	0.12866	0.11339	0.11609
$Y(0,n+1)$	0.0767	0.0827	0.0881	0.0931	0.1016	0.1052	0.1085
$\tilde{Y}(0,n+1)$	0.0767	0.08269	0.08809	0.09309	0.10159	0.10519	0.10849

Cuadro 3.5: Árbol para las tasas corta discreta

[4] La forma de calcular los precios elementales se encuentra en el Apéndice A

3.3. Construcción de árboles trinomiales

Los árboles binomiales ofrecen una forma sencilla de valuación de bonos. Sin embargo, es precisamente por esta sencillez que podrían no representar de manera fidedigna los escenarios posibles de la estructura real de la tasa spot. Existe un método presentado por Hull-White [7] que permite construir árboles más generales llamados “árboles trinomiales”, la cual proporciona una aproximación discreta más precisa de algún modelo de tasa que sigue algún proceso de difusión.
El método para construir árboles consiste principalmente en dos fases: en la primera, se crea un árbol de un nuevo proceso que depende de la tasa de interés, el cual difiere de una manera ingeniosa de la tasa a construir; en la segunda fase, se convierte el árbol del nuevo proceso en uno del proceso deseado al ajustar apropiadamente la diferencia creada entre ambos modelos.

3.3.1. Primera fase

Supóngase que el modelo que describe alguna función conocida de la tasa de interés es la siguiente:

$$df(r) = [\theta(t) - a(t)f(r)]dt + \sigma(t)dW(t),$$

donde la función $\theta(t)$ es de tal forma que el modelo concuerda con la estructura inicial. Supóngase que los parámetros $a(t)$, $\sigma(t)$ y $f(r)$ han sido seleccionados, y defínase la función g de tal forma que

$$dg = [-\theta(t) - a(t)g(t)]dt.$$

Defínase además la variable y como

$$y(r,t) = f(r) - g(t).$$

Encontrando la dinámica de y se obtiene

$$dy(t) = -a(t)y(t)dt + \sigma(t)dW(t).$$

El valor inicial $g(0)$ de g se escoge de tal forma que $y(0)$ es cero. Obsérvese que y es un proceso con nivel de reversión igual a cero.

El árbol que se generará, será una aproximación discreta de este modelo continuo, es por ello que se deben seleccionar tiempos específicos donde habrá nodos. Estos tiempos, denotados como $t_0 = 0 < t_1 < \ldots, t_n = T$, se escogen de tal forma que exista un bono de plazo t_i.

El método al tiempo t_i genera los nodos $-m_i, \cdots, -1, 0, -1, 2, \cdots, m_i$ con valores $-m_i\Delta y_i, \cdots, -1\Delta y_i, 0, 1\Delta y_i, 2\Delta y_i, \cdots, m_i\Delta y_i$ respectivamente, que serán los posibles candidatos a ser parte del árbol, donde m_i será el índice del nodo mayor y $-m_i$ el del nodo menor; la forma de obtener tanto a $-m_i$ como a m_i

se explicará más adelante. Nótese que dada t_i, el valor de los nodos es equiespaciado.
Los nodos que conformarán el árbol se seleccionan de tal forma que reflejen de manera precisa la dispersión esperada seguida por el proceso de difusión, lo cual conduce a que la condición que se debe imponer sobre Δy_i es que el espaciamiento entre nodos sea capaz de representar la volatilidad del proceso y en ese tiempo. Según Hull-White [7], esto se consigue si

$$\Delta y_i = \sigma(t_{i-1})\sqrt{3(t_i - t_{i-1})}. \tag{3.39}$$

Lo siguiente es definir cuáles serán, de entre los candidatos, los nodos que se utilizarán para el árbol y la forma de interconectarse. Debido a que la idea es imitar lo mejor posible el proceso de difusión, se deben seleccionar los nodos de tal forma que el cambio esperado y la varianza sean tal que concuerden con los que predice el modelo de difusión.

Supóngase que al tiempo i-ésimo (t_i) el proceso se encuentra en el nodo j, esto significa que el valor del proceso es aproximado a $j\Delta y_i$; lo que es de interés es saber qué nodos $k-1$,k,$k+1$ serán los apropiados para el siguiente tiempo, es decir, cuáles son los valores $(k-1)\Delta y_{i+1}$, $k\Delta y_{i+1}$, $(k+1)\Delta y_{i+1}$ que serán los más parecidos al valor que se espera tome el proceso de difusión al tiempo $(i+1)$.
El proceso y tiene como valor esperado en su cambio en el siguiente intervalo de tiempo a $\mathbb{E}[y(t_{i+1}) - y(t_i)] = M(t_i)$, y como segundo momento a $\mathbb{E}[(y(t_{i+1}) - y(t_i))^2] = V(t_i) + M^2(t_i)$[5]. De esto se sigue que el valor esperado de $y(t_{i+1})$ dado que el proceso al tiempo t_i se encuentra en el nodo j es

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[y(t_{i+1})|y(t_i) = j\Delta y_i] &= \mathbb{E}[(y(t_{i+1}) - y(t_i)) + y(t_i)|y(t_i) = j\Delta y_i] \\
&= j\Delta y_i + \mathbb{E}[y(t_{i+1}) - y(t_i)] \\
&= j\Delta y_i + M,
\end{aligned}$$

mientras que la varianza es

$$\begin{aligned}
Var[y(t_{i+1})|y(t_i) = j\Delta y_i] &= \mathbb{E}[(y(t_{i+1}))^2|y(t_i) = j\Delta y_i] - \mathbb{E}^2[y(t_{i+1})|y(t_i) = j\Delta y_i] \\
&= \mathbb{E}[(y(t_{i+1}))^2|y(t_i) = j\Delta y_i] - (j\Delta y_i + M(t_i))^2.
\end{aligned}$$

Por otra parte, se obtiene la relación

$$\begin{aligned}
Var[y(t_{i+1})|y(t_i) = j\Delta y_i] &= Var[(y(t_{i+1}) - y(t_i)) + y(t_i)|y(t_i) = j\Delta y_i] \\
&= Var[(y(t_{i+1}) - y(t_i))|y(t_i) = j\Delta y_i] + Var[y(t_i)|y(t_i) = j\Delta y_i] \\
&= Var[(y(t_{i+1}) - y(t_i))] \\
&= V(t_i).
\end{aligned}$$

De estas dos últimas series de relaciones, se obtiene

$$\mathbb{E}[(y(t_{i+1}) - y(t_i))^2] = V(t_i) + (j\Delta y_i + M)^2.$$

[5]En Hull-White [7] se hace referencia a que una buena aproximación es $M(t_i) = -y(t_i)a(t_i)(t_{i+1} - t_i) = j\Delta y_i a(t_i)(t_{i+1} - t_i)$ y $V(t_i) = \sigma^2(t_i)(t_{i+1} - t_i)$.

Supóngase por un momento que los nodos $k-1$, k y $k+1$ han sido determinados y defínase como p_d, p_m, p_u las probabilidades de que la tasa tome el valor de dichos nodos dado que el proceso se encuentra en el nodo j respectivamente. Al hacer coincidir el valor esperado condicional y la varianza condicional, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\underbrace{j\Delta y_i + M(t_i)}_{\mathbb{E}[y(t_{i+1})|y(t_i)=j\Delta y_i]} &= k\Delta y_{i+1} + (p_u - p_d)\Delta y_{i+1}, \\
\underbrace{V(t_i) + (j\Delta y_i + M(t_i))^2}_{\mathbb{E}[(y(t_{i+1})-y(t_i))^2]} &= k^2\Delta y_{i+1}^2 + 2k(p_u - p_d)\Delta y_{i+1}^2 + (p_u + p_d)\Delta y_{i+1}^2, \\
p_d + p_m + p_u &= 1.
\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se llega a las soluciones

$$\begin{aligned}
p_u &= \frac{V(t_i)}{2\Delta y_{i+1}^2} + \frac{\alpha^2 + \alpha}{2}, \\
p_m &= \frac{V(t_i)}{2\Delta y_{i+1}^2} + \frac{\alpha^2 - \alpha}{2}, \\
p_d &= 1 - \frac{V(t_i)}{\Delta y_{i+1}^2} - \alpha^2, \qquad (3.40)
\end{aligned}$$

donde

$$\alpha(t_i) = \frac{j\Delta y_i + M(t_i) - k\Delta y_{i+1}}{\Delta y_{i+1}} = \frac{j\Delta y_i + M(t_i)}{\Delta y_{i+1}} - k$$

representa la distancia entre el valor esperado y el próximo nodo central. Si $V^2 = \sigma^2(t_i)(t_{i+1} - t_i)$ y $\Delta y_{i+1} = \sigma(t_i)\sqrt{3(t_{i+1} - t_i)}$ puede demostrarse que las probabilidades cumplen ser estrictamente positivas si $-\sqrt{\frac{2}{3}} < \alpha(t_i) < \sqrt{\frac{2}{3}}$. Esto quiere decir que si el árbol se encuentra en el nodo j, entonces el próximo nodo central debe escogerse en un radio de $\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta y_{i+1}$ del nodo j. Escogiendo k como el entero más cercano a $\frac{j\Delta y_i + M(t_i)}{\Delta y_{i+1}}$ se asegura que el nodo estará en un radio de $\frac{\Delta y_{i+1}}{2}$ del valor esperado y, por lo tanto, que las probabilidades sean positivas.

Este procedimiento describe la selección de los nodos de forma progresiva partiendo del tiempo $t_0 = 0$ hacia nodos posteriores, es decir, una vez fijos el tiempo y nodo, señala cuáles deben ser los posibles escenarios (nodos) subsecuentes y la probabilidad de que los mismos se presenten. Además, es posible obtener el nodo máximo m_{i+1} en el tiempo $i+1$-ésimo (t_{i+1}) a partir del nodo máximo m_i en el tiempo i-ésimo; de la misma forma, es posible obtener el nodo mínimo a través del nodo mínimo anterior .

Una vez seleccionados los nodos, se ha obtenido un árbol para y, por lo que éste se deberá ajustar de tal manera que se obtenga uno para $f(r)$. Esto se logra agregando el valor de la función $g(t)$ al valor de y en cada nodo. Debido a que la función g es función que depende de θ y éste se escoge de tal forma que los precios teóricos y los empíricos de los bonos coincidan, entonces se procede a ajustar los nodos de tal forma que empaten los precios teóricos y empíricos comenzando por el nodo que se encuentra en $t_0 = 0$.

Se denotará como (i, j) al nodo en el árbol al tiempo t_i para el cual $y(t_i) \approx j\Delta y_i$ con $0 \leq i \leq n$ y $-m_i \leq j \leq m_i$ y defínanse:

- g_i: $g(t_i)$.
- y_{ij}: valor de y en el nodo (i, j).
- f_{ij}: valor de $f(r)$ en el nodo (i, j), es decir, $y_{ij} + g_i$.
- r_{ij}: el valor de la tasa en el nodo (i, j), es decir, $f^{-1}(x_{ij} + g_i)$.
- $\mathcal{Q}(i, j|h, k)$: el valor en el nodo (h, k) de un activo que paga una unidad monetaria únicamente en el nodo (i, j).
- $P(i, j|h, k)$: la probabilidad de transición del nodo (h, k) al nodo (i,j).
- $\mathcal{Q}_{i,j}$: $\mathcal{Q}(i, j|0, 0)$.

Nótese además que se cumplen las relaciones [6]

$$\mathcal{Q}(i, j|i-1, k) = P(i, j|i-1, k) \exp[-r_{i-1,k}(t_i - t_{i-1})],$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{ij} &= \sum_k \mathcal{Q}(i, j|i-1, k)\mathcal{Q}_{i-1,k} \\ &= \sum_k P(i, j|i-1, k) \exp(-r_{i-1,k}(t_i - t_{i-1}))\mathcal{Q}_{i-1,k}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Ahora considérese un bono que paga una unidad monetaria al final del periodo $i + 1$, esto quiere decir que entonces paga una unidad no importando el escenario que se presente, por lo que el pago que hace en cada uno de los nodos de ese tiempo debe ser una unidad monetaria también. Denótese como $B(i + 1)$ el precio de dicho bono al tiempo cero (es decir, $B(i + 1) := B(0, t_{i+1})$) y sea V_{ij} el valor de dicho bono en el nodo (i, j), es decir, $V_{ij} := B_j(t_i, t_{i+1})$.

La forma de determinar el ajuste g_i en el periodo i se hará de forma iterada como se hizo en el modelo de Ho-Lee con el parámetro a_i. En primer lugar, obsérvese que se cumple la relación

$$\begin{aligned} V_{ij} &= \exp -[r_{ij}(t_{i+1} - t_i)] \\ &= \exp[-f^{-1}(x_{ij} + g_i)(t_{i+1} - t_i)]. \end{aligned}$$

[6]En el apéndice A se hace referencia a este hecho.

El valor del bono está entonces determinado, según (3.49), por

$$\begin{aligned} B(i+1) &= \sum_j \mathcal{Q}_{ij} V_{ij} \\ &= \sum_j \mathcal{Q}_{ij} \exp[-f^{-1}(y_{ij}+g_i)(t_{i+1}-t_i)]. \end{aligned} \tag{3.42}$$

El valor de g_i se ajusta hasta que el valor de la ecuación (3.42) coincide con el precio del bono. Para ello, nótese que el precio de un bono en el tiempo 0 es de una unidad monetaria, esto es $\mathcal{Q}_{00} = 1$. Basado en este valor, se puede usar (3.42) para obtener g_0 al hacer concordar los precios teórico y empírico del bono que tiene madurez en t_1. Esto permite utilizar la ecuación (3.41) para obtener $\mathcal{Q}_{1j}$ para cada nodo j, y de esta manera volver a utilizar la ecuación (3.42) para obtener g_1, obteniendo así una forma recursiva para calcular g_i.

Ejemplo

Supóngase que se ha determinado que la dinámica que se deriva de la función logaritmo resulta ser

$$d(ln(r_t)) = [\theta(t) - ln(r_t)]dt + .05dW_t, \tag{3.43}$$

obteniendo los parámetros

$$a(t) = 1 \quad , \quad \sigma(t) = .05 \quad \forall t,$$

y que la estructura de plazo es la siguiente:

	Plazo (T)			
	1	1.2	2.6	2.8
P(T)	0.92876	0.914147	0.77623	0.7579405
R(T)	0.07390492	0.07480324	0.09742554	0.09898228

Cuadro 3.6: Precios de bonos cupón cero con plazo T.

En primer lugar se calcula el incremento del proceso $y(t)$ que tiene un incremento según (3.39) de $\Delta y_i = .05\sqrt{3(t_i - t_{i-1})}$, obteniendo $\Delta y_1 = 0.086602$, $\Delta y_2 = 0.0387292$, $\Delta y_3 = 0.102469$, $\Delta y_4 = 0.038729$.
Comenzando en el nodo inicial, es decir, $t_0 = 0$ y $y(0) = 0$, se calcula el valor esperado de $y(t_1)$ en el siguiente tiempo que es $y(0) + M(0) = 0 - 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$ y $V = .05^2 \cdot 1 = .0025$, el nodo más cercano a este valor esperado es el nodo 0 en el tiempo 1. Siendo 0 el nodo más cercano y por lo tanto el nodo central en el tiempo $t_1 = 1$, se obtiene $\alpha = 0$, donde utilizando el sistema de ecuaciones (3.40), se obtiene $p_d = .1666667$,$p_m = .6666667$ y $p_u = .1666667$.
El nodo central en el tiempo $t_1 = 1.5$ es el nodo 0, por lo que los nodos en ese tiempo son $\{-1, 0, 1\}$, donde cada nodo tendrá un nodo central subsecuente. Tomando por ejemplo el nodo 1 al tiempo $t_1 = 1$ y procediendo

de la misma forma, se obtiene que en ese nodo $y(t_1) = 1 \cdot \Delta y_1 = 0.086602$, $M(t_1) = -1 \cdot \Delta y_1 \cdot (t_2 - t_1) = -0.086602 \cdot .2 = -0.01732051$ y $y(t_1) + M(t_1) = 0.086602 - 0.01732051 = 0.06928203$, $V^2(t_1) = .05^2 \cdot .2 = .0005$, $\frac{y(t_1)+M(t_1)}{\Delta y_2} = 1.788854$ y por tanto, su nodo central será subsecuente será el nodo número 2, además $\alpha(t_i) = 1.788854 - 2 = -0.2111456$. Procediendo de esta forma se obtienen los resultados presentados en la tabla 2.8.

Para la segunda fase, se debe agregar el valor de $g(t)$ al proceso $y(t)$, puesto que g(t) es una función de $\theta(t)$, y ésta es seleccionada de tal forma que los precios empíricos y teóricos concuerdan.
En primer lugar se tiene que $B(0) = 1 = \mathcal{Q}_{00}$, haciendo uso de (3.41), se obtiene

$$\begin{aligned} B(1) &= \mathcal{Q}_{00} \exp\left[-f^{-1}(y_{00} + g_0)(t_1 - t_0)\right] \\ &= \exp\left[-\exp(0 + g_0)(1)\right], \end{aligned}$$

obteniendo $g_0 = -2.604845$ y $r_{00} = f^{-1}(y_{00} + g_0) = 0.07391527$. Esta tasa es utilizada para calcular

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{1,1} &= \mathcal{Q}_{0,0} p_u \exp\left(-r_{00} \cdot 1\right) = 0.1547917, \\ \mathcal{Q}_{1,0} &= \mathcal{Q}_{0,0} p_m \exp\left(-r_{00} \cdot 1\right) = 0.6191669, \\ \mathcal{Q}_{1,-1} &= \mathcal{Q}_{0,0} p_d \exp\left(-r_{00} \cdot 1\right) = 0.1547917, \end{aligned}$$

donde p_u, p_m, p_d son las probabilidades de transición del nodo inicial a los 3 nodos subsecuentes seleccionados al tiempo t_1. Con estos valores se hace uso de la ecuación (3.41) para calcular el valor de g_1, y así sucesivamente. Los cálculos restantes se encuentran en la tabla 2.9, mientras que el árbol obtenido se encuentra en la figura 2.13 .

t	y	M	V	k	α	p_u	p_m	p_d
0	0	0	0.0025	0	0	0.1667	0.6667	0.1667
1	0.0866	-0.0173	5e-04	2	-0.2111	0.0834	0.6221	0.2945
1	0	0	5e-04	0	0	0.1667	0.6667	0.1667
1	-0.0866	0.0173	5e-04	-2	0.2111	0.2945	0.6221	0.0834
1.2	0.1162	-0.1627	0.0035	0	-0.4536	0.0427	0.461	0.4963
1.2	0.0775	-0.1084	0.0035	0	-0.3024	0.0612	0.5752	0.3636
1.2	0.0387	-0.0542	0.0035	0	-0.1512	0.1025	0.6438	0.2537
1.2	0	0	0.0035	0	0	0.1667	0.6667	0.1667
1.2	-0.0387	0.0542	0.0035	0	0.1512	0.2537	0.6438	0.1025
1.2	-0.0775	0.1084	0.0035	0	0.3024	0.3636	0.5752	0.0612
1.2	-0.1162	0.1627	0.0035	0	0.4536	0.4963	0.461	0.0427

Cuadro 3.7: Cálculos del árbol generado

Ajuste del árbol trinomial							
$r_{ij}(\%)$				Q_{ij}			
		13.11				0.0253	
		12.612				0.1892	
	8.636	12.133	13.182		0.3095	0.1911	0.1428
7.392	7.92	11.672	11.898	1	1.2383	0.8125	0.4975
	7.263	11.228	10.739		0.1547	0.2480	0.1464
		10.802				0.1898	
		10.392				0.0127	

V_{ij}				g_i			
		0.8323		-2.604	-2.535	-2.147	-2.128
		0.8381					
	0.9828	0.8437	0.9739				
0.9287	0.9842	0.8492	0.9764				
	0.9855	0.8545	0.9787				
		0.8596					
		0.8646					

Cuadro 3.8: Valores obtenidos en el ajuste del árbol.

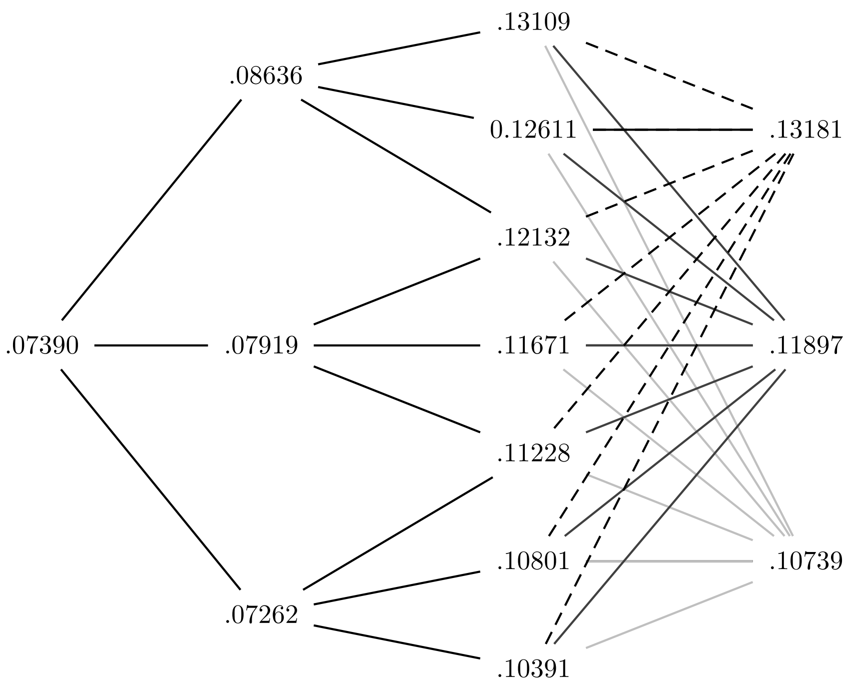


Figura 3.8: Árbol trinomial obtenido.

3.3.2. Inmunización de deuda: una aplicación al modelo de mercado

Como se ha mencionado, los modelos de mercado hacen el supuesto de que no hay costos de transacción. Bajo este supuesto es posible hacer uso de algún modelo de tasas que se crea conveniente (que cumpla con las hipótesis de modelos de mercado) para inmunizar una deuda a la tasa imperante en el momento de la contracción, a partir de tantos bonos de diferente plazo como escenarios posibles que plantee el modelo en el periodo subsecuente, la razón de que sea así tendrá sentido un poco más adelante.

Para aclarar ideas y procediendo de forma similar a Luenberger [8], denótese por O la obligación que debe enfrentarse en un plazo τ y denótense por $B_1, B_2, \ldots, B_n$ con plazos $T_1 < T_2 < \cdots < T_n$ respectivamente, bonos cuponados o cupón cero, con $\tau \leq T_1$. Se supondrá que B_1 es un bono cuponado en el caso en que $\tau = T_1$ (pues si existiera un bono cupón cero con plazo igual al de la obligación, entonces es trivial la inmunización). La información con la que se cuenta son los diferentes escenarios que el modelo plantea como posibles en los periodos para la tasa de interés. Además de que el modelo puede ser usado para conocer el capital inicial O_0 con el que se debe contar al tiempo 0 para enfrentar la obligación. Este capital inicial es calculado como el valor de O bonos que pagan una unidad monetaria al final del tiempo τ, pues de no ser así existirían oportunidades de arbitraje.

Una vez calculado el capital inicial necesario O_0, se obtiene la primera ecuación que consiste en encontrar un portafolio conformado por n diferentes tipos de bono, donde hay N_i bonos del tipo i, de tal forma que el valor inicial de dicho portafolio sea de 0_0 unidades monetarias. Esto queda expresado como

$$N_1 B_1 + N_2 B_2 + \cdots + N_n B_n = O_0. \tag{3.44}$$

Esta no es la única ecuación que debe considerarse. Para poder inmunizar la deuda, el deudor debe poder enfrentar cualquiera de los escenarios que pudieran presentarse (según el modelo) en los subsecuentes periodos; para ello se ofrecerá una estrategia que se puede usar de forma recursiva. Considerando el periodo subsecuente se tiene que, para poder enfrentar el posible escenario, debe cumplirse entonces que el valor de la deuda en cada uno de los posibles escenarios debe ser igual al valor del portafolio en cada uno de ellos, lo que conllevaría directamente a tener una ecuación por cada escenario. Entonces, si el número de posibles escenarios generados al tiempo 1 es de n_1, considerando la ecuación (3.44) se tendrían $n_1 + 1$ ecuaciones. Sin embargo, es posible desechar una ecuación de alguno de los escenarios puesto que si el valor de la obligación coincide en $n_1 - 1$ de los n_1 posibles escenarios con el valor del portafolio, entonces se concluye directamente que también debe coincidir en el escenario restante, pues en caso contrario existiría oportunidad de arbitraje.

De esta manera, se hace presente el hecho de que teniendo n_1 posibles escenarios, se requieren entonces n_1 bonos diferentes en el mercado. Además, una vez concluido el primer periodo y una vez conocido el nuevo escenario que se presenta, se tiene que rebalancear el portafolio de forma apropiada, es decir, se debe redistribuir el capital de tal manera que, no importando nuevamente qué escenario se presente, se pueda ser capaz de enfrentar la obligación. Para, ello nótese que el valor que se necesita en este nuevo escenario es precisamente el valor del portafolio, por lo que el portafolio a construir debe tener el mismo valor (autofinanciable). Esto genera una ecuación, y se obtienen nuevamente $n_2 - 1$ ecuaciones más de considerar $n_2 - 1$ escenarios que deben coincidir con los escenarios del portafolio, con lo que se obtiene n_2 ecuaciones con n_2 incógnitas. Procediendo sucesivamente de esta manera, es posible inmunizar la deuda a la tasa imperante en el mercado.

Ejemplo

Supóngase que la estructura de tasas spot y los posibles escenarios son los que se encuentran en el cuadro 2.6 con, $\pi = 1 - \pi = \frac{1}{2}$. Supóngase además, que se debe hacer frente a una obligación de 1000000 en un plazo de 2 años y que el mercado cuenta con dos bonos como instrumentos financieros: un bono cuponado con plazo de 3 años con cupones pagaderos anualmente con un valor del 10 % del valor nominal y referido como "Bono 1", y un bono cupón cero con plazo de 4 años referido como "Bono 2". Haciendo uso del látice se obtienen tanto los precios de los bonos, como el valor presente de la obligación.

En primer lugar, obsérvese que el valor presente de la deuda puede ser pensada como el valor de 100000 de bonos cupón cero de plazo a 2 años, pues éstos tendrán un valor de 1000000 al final del segundo año. Para calcular el valor inicial del Bono 1, recuérdese que según (1.1), éste puede reexpresarse en términos de precios de bonos cupón cero. De esta forma, se obtienen los precios

$$\begin{aligned}
\text{Bono 1} &= .1 \cdot B(0,1) + .1 \cdot B(0,2) + 1.1 \cdot B(0,3) = 1.023918, \\
\text{Bono 2} &= B(0,4) = 0.69708, \\
\text{Obligación} &= B(0,2) \cdot 100000 = 852100.
\end{aligned}$$

Aunque no existan estos bonos cupón cero en el mercado, es posible calcular el precio que deberían tener haciendo uso del árbol de tasas, el árbol para estos bonos se encuentran en las tablas 2.13, 2.14 y 2.15.

Después del primer periodo, tanto el valor de la obligación como el valor de los bonos puede tomar dos valores, correspondientes a los posibles escenarios que pueden presentarse en ese periodo. Transcurrido el primer año, el dueño del bono cuponado recibe el primer cupón, mientras que el bono cuponado con plazo de 3 años se convierte en un bono cuponado que expirará 2 años después. El valor de este nuevo bono dependerá del escenario en el que se encuentre la tasa de interés. Por ello, el valor al final del primer año del capital que representa el invertir en el Bono 1 dependerá también del escenario en el que se encuentre la tasa de interés, a saber

$$\text{Bono 1} = .1 + .1 \cdot B(1,2) + 1.1 \cdot B(1,3).$$

El valor anterior es aleatorio, pues tanto $B(1,2)$ como $B(1,3)$ lo son al tiempo 0. Además, el bono cupón cero con un plazo de 4 años se convierte en un bono cupón cero con un plazo de expiración de 3 años, y este valor también depende del escenario en el que se encuentre la tasa de interés, los cuales son

$$\text{Bono 2} = B(1,4).$$

Por otra parte, el valor de la obligación también dependerá del escenario en el que se encuentre la tasa, mientras que el plazo en el que debe hacerse frente se reduce en un año. El valor de la obligación es

$$\text{Obligación} = B(1,2) \cdot 100000.$$

Los dos posibles escenarios, tanto en el valor de los bonos como de la obligación, se presentan en la tabla 2.10

Nodo	Bono 1	Bono 2	Obligación
1	1.104107	0.74543	915360
0	1.112899	0.75566	919570

Cuadro 3.9: Posibles valores al final del primer año.

Esto conduce a que, para poder inmunizar la deuda al final del primer año, se deben comprar tantos bonos del tipo 1 como del tipo 2 sean necesarios para cubrir el valor de la deuda y esta combinación debe ser capaz de coincidir en los posibles valores que tome en los posibles escenarios subsecuentes. Denotando como x_1 y x_2 la cantidad de bonos de tipo 1 y 2 que se deben comprar respectivamente, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 1.023918x_1 + 0.69708x_2 &= 852100, \\ 1.112899x_1 + 0.75566x_2 &= 919570. \end{aligned}$$

En el sistema anterior se ha ignorado la ecuación $1.104107x_1 + 0.74543x_2 = 915360$ correspondiente al nodo 1, puesto que si este portafolio coincide con el valor presente y con la ecuación correspondiente al nodo 0, entonces por ausencia de arbitraje debe coincidir con el sistema antes mencionado.
Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtiene que la cantidad a comprar de bonos tipo 1 y tipo 2 deben ser

$$x_1 = -1409761 \quad , \quad x_2 = 3293136.$$

Supóngase que el escenario que se presenta al final del primer periodo es el nodo 0. Una vez conocido el escenario, los instrumentos con los que se cuenta en el mercado en el segundo periodo son un bono cuponado que expirará dos años más adelante y un bono cupón cero que expirará 3 años después, denotados como “Bono 3” y “Bono 4” respectivamente, con valor al inicio del segundo año de

$$\begin{aligned}
\text{Bono 3} &= .1 \cdot B_0(1,2) + 1.1 \cdot B_0(1,3) = 1.012899,\\
\text{Bono 4} &= B_0(1,4) = 0.75566,\\
\text{Obligación} &= B_0(1,2) \cdot 100000 = 919570.
\end{aligned}$$

Al final del segundo año, el dueño del bono cuponado recibe el pago del cupón, mientras que el bono cuponado se convierte en un bono cupón cero con valor nominal de 1.1 unidades monetarias. El valor de este nuevo bono dependerá del escenario en el que se encuentre la tasa de interés. Esto implica que el valor al final del segundo año del capital que representa el invertir en el Bono 3 también dependerá de la tasa de interés, el cual es

$$\text{Bono 3} = .1 + 1.1B(2,3).$$

Mientras tanto, el Bono 2 expirará dos años más adelante, convirtiéndose de esta forma en un bono cupón cero con valor

$$\text{Bono 4} = B(2,3).$$

Por último, la obligación debe hacerse frente con un valor de

$$\text{Obligación} = 1000000.$$

Los dos posibles escenarios en el precio de los bonos como el valor de la obligación se presentan en la tabla 2.11.

Nodo	Bono 3	Bono 4	Obligación
1	1.099218	0.81803	1000000
0	1.103783	0.82548	1000000

Cuadro 3.10: Posibles valores al final del segundo año.

Similarmente, para poder inmunizar la deuda al final del segundo año se deben comprar tantos bonos del tipo 3 como del tipo 4 como sea necesario para cubrir la deuda, y esta combinación debe ser capaz de coincidir al valor que toma la deuda al final del segundo año. Denotando como x_3 y x_4 la cantidad de bonos de tipo 3 y 4 que se deben comprar respectivamente, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
1.012899x_3 + 0.75566x_4 &= 919570,\\
1.099218x_3 + 0.81803x_4 &= 1000000.
\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene que la cantidad a comprar de bonos tipo 3 y de tipo 4 debe ser

$$x_3 = 1667630 \quad , \quad x_4 = -1018409.$$

i\ n	0	1
1		0.91536
0	0.8521	0.91957

Cuadro 3.11: Árbol del precio de un bono cupón cero de plazo a 2 años.

De esta forma se ha fijado la tasa de interés en la deuda.

i\ n	0	1	2
2			0.90427
1		0.82961	0.90838
0	0.77405	0.83722	0.91253

Cuadro 3.12: Árbol del precio de un bono cupón cero de plazo a 3 años.

i\ n	0	1	2	3
3				0.89449
2			0.81068	0.89851
1		0.74543	0.81803	0.90257
0	0.69708	0.75566	0.82548	0.90666

Cuadro 3.13: Árbol del precio de un bono cupón cero de plazo a 4 años.

Conclusiones

En el presente trabajo se expusieron, de manera introductoria, conceptos básicos sustentados teóricamente en el ámbito no formal. A lo largo de éste se desglosó, principalmente, la importante relación existente entre el precio de un bono y las diferentes tasas de interés y, debido a esta relación, se ahondó en el estudio de tasas de interés.

En el primer capítulo se mostró que, aunque conceptos como duración y convexidad son útiles para describir la proporción de cambio en el precio de un bono y que ciertas características de éstos son deseables, estos conceptos difícilmente pueden ser usados para inmunizar un portafolio ante cambios en la tasa de interés. Para este fin se obtuvo que, haciendo uso del teorema de inmunización de portafolios de bonos, es posible obtener cierta protección ante cambios en la estructura de tasas de interés durante un periodo deseado, mostrando así que existen herramientas deterministas muy útiles a considerar para dicho propósito.

En el segundo capítulo, se exploró el punto de vista estocástico bajo el cual se tuvo especial interés en la tasa corta y su relación con el precio del bono. Para dar cierto sustento informal a las ecuaciones expuestas, se vincularon a éstas con un sentido económico a través de modelos de mercado. Sin embargo, una de las principales desventajas de los modelos de mercado expuestos es, indiscutiblemente, la hipótesis falsa de que la compra de activos no incurre en un gasto por parte del inversionista, pues en el mundo real la compra/venta de activos se hace a través de agentes que obtienen ingresos por medio de comisiones.

Posteriormente, en el tercer capítulo se expusieron los modelos de tasas afines más comunes, así como la aproximación discreta de algunos modelos. Los modelos continuos aquí presentados encuentran su utilidad al momento de valuar bonos con relativa sencillez, pues al tratarse de modelos afines es posible obtener el precio de un bono a un tiempo específico, con sólo conocer la tasa corta imperante en ese momento. Además, la distribución de las tasas en los modelos aquí expuestos es completamente conocida. La aproximación discreta tiene la principal ventaja de enfocarse en periodos de específico interés, permitiendo además una valuación más sencilla de los posibles escenarios del precio del bono y, en caso de ser necesario, una implementación más económica desde el punto de vista computacional para un posible proceso de simulación y encontró una gran utilidad en el proceso de inmunización al proveer los escenarios factibles para la tasa de interés. Por otro lado, la aproximación discreta facilita la valuación de otros instrumentos que tienen implícita la tasa de interés y donde ésta también juega un papel importante, como lo es, por ejemplo, el caso de los swaps.

Aunque considero que el presente trabajo sirve como un primer acercamiento a la inmunización y valuación de portafolios de bonos, es evidente que al tener carácter introductorio carece de un fuerte sustento teórico así como de material, por lo que a continuación se enumeran posibles extensiones del tema:

- Capital perdido por errores intrínsecos de los modelos.
- Calibración de los modelos expuestos, es decir, exponer de forma precisa métodos para la obtención de los parámetros en los modelos presentados.
- Metodología para la selección del modelo adecuado.
- Presentación del marco teórico de Heath-Jarrow-Morton y su aplicación en la inmunización.
- Mercados con Consumo, en los cuales existe fricción, es decir, donde la compra de activos incurre en un gasto por parte del inversionista.

Apéndice A

3.4. La ecuación forward

La forma de obtener el precio del bono en los árboles binomiales fue siguiendo una *recursión hacia atrás*, es decir, comenzando primero con los nodos del plazo deseado y procediendo haca atrás en el latiz haciendo uso de (3.36). Otra alternativa es hacer uso de la *recursión hacia adelante*, que es particularmente útil cuando se precisa determinar la estructura de plazos a través de latices de tasa corta.

La recursión hacia adelante, hace uso de los llamados *precios elementales*. El precio elemental $\mathcal{Q}_{i,j}$ representa el valor al tiempo 0 que tiene un instrumento financiero que paga una unidad monetaria en el periodo i únicamente si el escenario j se presenta, nótese que un precio elemental solo tiene valor en un nodo. Es evidente que es posible obtener un precio elemental partiendo del método de recursión hacia atrás, pero también es posible obtener el precio procediendo hacia adelante. Supóngase que se tiene un instrumento que paga una unidad monetaria al tiempo $i+1$ solamente si el escenario j se presenta. El pago de este activo puede expresarse como $1 \cdot \mathbb{1}_{[X_{i+1}=j]}$, el cual es muy parecido al pago que produce un bono y según el modelo de mercado, el precio descontado de este instrumento debe ser martingala bajo la medida neutral al riesgo, en cuyo caso debe cumplir una relación análoga a (3.31) sustituyendo el numerador en la ecuación (3.32) por $1 \cdot \mathbb{1}_{[X_{i+1}=j]}$; denótese como $\mathcal{Q}(i+1, j|h, \cdot)$ el valor de este instrumento al tiempo h, este valor puede expresarse como:

$$\mathcal{Q}(i+1, j|h, \cdot) = \tilde{\mathbb{E}}\left[\prod_{k=s+1}^{T} \frac{1 \cdot \mathbb{1}_{[X_{i+1}=j]}}{(1 + r_{\text{disc}}^{(k-1)})} \Big| \mathcal{F}_h \right].$$

Nuevamente, supóngase que la filtración $\mathcal{F}_m$ está dada por la σ-álgebra que produce el proceso aleatorio $\{X_k\}_{k=1}^{m}$ ($\mathcal{F}_m = \sigma(X_1, \ldots, X_m)$). Donde la variable aleatoria X_n se define como

$$X_n = i \quad , \quad i = \text{ Número de nodo en que se encuentra la tasa } r^{(n)}.$$

Supóngase además que bajo la probabilidad neutral al riesgo se satisface

$$\tilde{\mathbb{P}}[X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, \cdots X_0 = x_0] = \tilde{\mathbb{P}}[X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n], \quad (3.45)$$

y denótese como

$$\tilde{\mathbb{P}}[X_{n+1} = j | X_n = i] = p(j|i).$$

El supuesto (3.45) se conoce como *Propiedad de Markov* y conduce a la siguiente relación

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{\mathbb{1}_{[X_{i+1}=i]}}{1+r^{(i)}_{X_i}}\middle| X_i = k, \cdots, X_0 = x_0\right] &= \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{\mathbb{1}_{[X_{i+1}=i]}}{1+r^{(i)}_{k}}\middle| X_i = k, \cdots, X_0 = x_0\right] \\
&= \frac{\tilde{\mathbb{E}}[\mathbb{1}_{[X_{i+1}=i]} | X_n = k, \cdots, X_0 = x_0]}{1+r^{(i)}_k} \\
&= \frac{\tilde{\mathbb{P}}[X_{i+1} = i | X_i = k, \cdots, X_0 = x_0]}{1+r^{(i)}_k} \\
&= \frac{\tilde{\mathbb{P}}[X_{i+1} = i | X_i = k]}{1+r^{(i)}_k} \\
&= \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{\mathbb{1}_{[X_{i+1}=i]}}{1+r^{(i)}_{k}}\middle| X_i = k\right] \\
&= \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{\mathbb{1}_{[X_{i+1}=i]}}{1+r^{(i)}_{X_i}}\middle| X_i = k\right].
\end{aligned}$$

Lo que muestra que el valor de este instrumento dada toda la trayectoria recorrida es el mismo que si se toma en cuenta únicamente la información proporcionada un tiempo anterior. El precio de un activo que al tiempo $i+1$ paga una unidad monetaria si el escenario j se presenta al tiempo i bajo el escenario k se denotará como $\mathcal{Q}(i+1, j|i, k)$ y según las ecuaciones anteriores satisface

$$\mathcal{Q}(i+1, j|i, k) := \frac{\tilde{\mathbb{E}}[\mathbb{1}_{[X_{i+1}=j]} | X_i = k]}{1+r^{(i)}_k} = \frac{p(j|k)}{1+r^{(i)}_k}. \tag{3.46}$$

Según lo anterior, el precio elemental de una unidad monetaria pagada al tiempo n si el escenario k se presenta es de $\mathcal{Q}_{n,k}$, de esta forma, el valor al tiempo cero de $\mathcal{Q}(n+1, j|n, k)$ unidades monetarias debe ser $\mathcal{Q}_{n,k} \cdot \mathcal{Q}(n+1, j|n, k)$, esto significa que intuitivamente se cumple la relación

$$\mathcal{Q}_{ij} := \mathcal{Q}(i, j|0, 0) = \tilde{\mathbb{E}}\left[\prod_{l=1}^{i} \frac{1 \cdot \mathbb{1}_{[X_i=j]}}{(1+r^{(l-1)}_{X_{l-1}})}\right] = \sum_k \mathcal{Q}(i, j|i-1, k)\mathcal{Q}_{i-1,k}. \tag{3.47}$$

Para mostrar esta relación recuérdese que el precio elemental es

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{ij} &= \tilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{1\!\!1_{[X_i=j]}}{\prod_{l=1}^{i}(1+r^{(l-1)}_{X_{l-1}})}\Big] \\
&= \tilde{\mathbb{E}}\Big[\tilde{\mathbb{E}}\Big[\prod_{l=1}^{i}\frac{1\!\!1_{[X_i=j]}}{(1+r^{(l-1)}_{X_{l-1}})}\Big|X_{i-1},X_{i-2},\ldots,X_0\Big]\Big] \\
&= \sum_{(k,x_{i-2},\ldots,x_0)}\tilde{\mathbb{E}}\Big[\prod_{l=1}^{i}\frac{1\!\!1_{[X_i=j]}}{(1+r^{(l-1)}_{X_{l-1}})}\Big|X_{i-1}=k,X_{i-2}=x_{i-2},\ldots,X_0=x_0\Big] \\
&\quad \tilde{\mathbb{P}}[X_{i-1}=k,X_{i-2}=x_{i-2},\ldots,X_0=x_0] \\
&= \sum_k\sum_{x_{i-2}}\cdots\sum_{x_0}\tilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{1\!\!1_{[X_i=j]}}{(1+r^{(i-1)}_{X_{i-1}})}\Big|X_{i-1}=k,X_{i-2}=x_{i-2},\ldots,X_0=x_0\Big] \\
&\quad \prod_{l=1}^{i-1}\frac{1}{(1+r^{(l-1)}_{x_{l-1}})}\cdot\tilde{\mathbb{P}}[X_{i-1}=k,X_{i-2}=x_{i-2},\ldots,X_0=x_0] \\
&= \sum_k\sum_{x_{i-2}}\cdots\sum_{x_0}\frac{\tilde{\mathbb{E}}\Big[1\!\!1_{[X_i=j]}\Big|X_{i-1}=k,X_{i-2}=x_{i-2},\ldots,X_0=x_0\Big]}{(1+r^{(i-1)}_{k})} \\
&\quad \prod_{l=1}^{i-1}\frac{1}{(1+r^{(l-1)}_{x_{l-1}})}\cdot\tilde{\mathbb{P}}[X_{i-1}=k,X_{i-2}=x_{i-2},\ldots,X_0=x_0] \\
&= \sum_k\sum_{x_{i-2}}\cdots\sum_{x_0}\mathcal{Q}(i,j|i-1,k)\cdot \\
&\quad \prod_{l=1}^{i-1}\frac{1}{(1+r^{(l-1)}_{x_{l-1}})}\cdot\tilde{\mathbb{P}}[X_{i-1}=k,X_{i-2}=x_{i-2},\ldots,X_0=x_0] \\
&= \sum_k\mathcal{Q}(i,j|i-1,k)\cdot \\
&\quad \sum_{x_{i-2}}\cdots\sum_{x_0}\prod_{l=1}^{i-1}\frac{1}{(1+r^{(l-1)}_{x_{l-1}})}\cdot\tilde{\mathbb{P}}[X_{i-1}=k,X_{i-2}=x_{i-2},\ldots,X_0=x_0] \\
&= \sum_k\mathcal{Q}(i,j|i-1,k)\cdot \\
&\quad \sum_{x_{i-2}}\cdots\sum_{x_0}\prod_{l=1}^{i-1}\frac{1}{(1+r^{(l-1)}_{x_{l-1}})}\cdot\tilde{\mathbb{P}}[X_{i-1}=k|X_{i-2}=x_{i-2},\ldots,X_0=x_0] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdot\tilde{\mathbb{P}}[X_{i-2}=x_{i-2},\ldots,X_0=x_0] \\
&= \sum_k\mathcal{Q}(i,j|i-1,k)\cdot \\
&\quad \sum_{(x_{i-2},\ldots,x_0)}\prod_{l=1}^{i-1}\frac{1}{(1+r^{(l-1)}_{x_{l-1}})}\cdot\tilde{\mathbb{P}}[X_{i-1}=k|X_{i-2}=x_{i-2},\ldots,X_0=x_0] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdot\tilde{\mathbb{P}}[X_{i-2}=x_{i-2},\ldots,X_0=x_0]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_k \mathcal{Q}(i,j|i-1,k)\cdot \\
&\quad \sum_{(x_{i-2},\ldots,x_0)} \prod_{l=1}^{i-1} \frac{1}{(1+r^{(l-1)}_{x_{l-1}})} \cdot \tilde{\mathbb{E}}[\mathbb{1}_{[X_{i-1}=k]}|X_{i-2}=x_{i-2},\ldots,X_0=x_0] \\
&\qquad \cdot\tilde{\mathbb{P}}[X_{i-2}=x_{i-2},\ldots,X_0=x_0] \\
&= \sum_k \mathcal{Q}(i,j|i-1,k)\cdot \\
&\quad \sum_{(x_{i-2},\ldots,x_0)} \tilde{\mathbb{E}}[\prod_{l=1}^{i-1} \frac{\mathbb{1}_{[X_{i-1}=k]}}{(1+r^{(l-1)}_{x_{l-1}})}|X_{i-2}=x_{i-2},\ldots,X_0=x_0] \\
&\qquad \cdot\tilde{\mathbb{P}}[X_{i-2}=x_{i-2},\ldots,X_0=x_0] \\
&= \sum_k \mathcal{Q}(i,j|i-1,k)\cdot \\
&\quad \sum_{(x_{i-2},\ldots,x_0)} \tilde{\mathbb{E}}[\prod_{l=1}^{i-1} \frac{\mathbb{1}_{[X_{i-1}=k]}}{(1+r^{(l-1)}_{X_{l-1}})}|X_{i-2}=x_{i-2},\ldots,X_0=x_0] \\
&\qquad \cdot\tilde{\mathbb{P}}[X_{i-2}=x_{i-2},\ldots,X_0=x_0] \\
&= \sum_k \mathcal{Q}(i,j|i-1,k)\cdot \sum_{(x_{i-2},\ldots,x_0)} \tilde{\mathbb{E}}\left[\tilde{\mathbb{E}}\left[\prod_{l=1}^{i-1} \frac{\mathbb{1}_{[X_i=j]}}{(1+r^{(l-1)}_{X_{l-1}})}\middle|X_{i-2},\ldots,X_0\right]\right] \\
&= \sum_k \mathcal{Q}(i,j|i-1,k)\cdot \sum_{(x_{i-2},\ldots,x_0)} \tilde{\mathbb{E}}\left[\prod_{l=1}^{i-1} \frac{\mathbb{1}_{[X_i=j]}}{(1+r^{(l-1)}_{X_{l-1}})}\right] \\
&= \sum_k \mathcal{Q}(i,j|i-1,k)\cdot \mathcal{Q}_{i-1,k}.
\end{aligned}
$$

En el caso en que el árbol es binomial, donde la única forma de acceder al nodo j con $0<j<n$ al tiempo $i+1$ es a partir del tiempo i através de los escenarios $j-1$ y $j+1$, haciendo uso de (3.46) la relación anterior queda reexpresada como

$$
\mathcal{Q}_{n+1,j} = \frac{\pi}{1+r^{(n)}_{j-1}}\mathcal{Q}_{n,j-1} + \frac{1-\pi}{1+r^{(n)}_{j+1}}\mathcal{Q}_{n,j+1}. \tag{3.48}
$$

En caso de que $j=0$ o $j=n$, sucede que solamente existe un predecesor, y la ecuación (3.48) se reduce a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{n,0} &= \frac{1-\pi}{1+r^{(n)}_0}\mathcal{Q}_{n,0} \quad , \quad j=0, \\
\mathcal{Q}_{n,n} &= \frac{\pi}{1+r^{(n)}_n}\mathcal{Q}_{n,n} \quad , \quad j=n.
\end{aligned}
$$

La ecuación (3.46) puede generalizarse, considérese por ejemplo el caso más general, cuando la probabilidad es dependiente del tiempo pero cumple con la propiedad de Markov plasmada en la ecuación (3.45). Para estos procesos conocidos como Cadenas de Markov no homogéneas es posible mostrar que si $d_h^{(i)}$ representa la función de descuento en un periodo a utilizarse si al tiempo i el escenario h se presenta, entonces el valor en cada predecesor h corresponde a $p(i+1,j|i,h) \cdot d_h^{(i)}$, donde $p(i+1,j|i,h)$ representa la probabilidad de que el estado j se presente al tiempo $i+1$ cuando el escenario al tiempo i es h, obteniendo así la relación

$$\mathcal{Q}_{ij} = \sum_k \mathcal{Q}(i,j|i-1,k)\mathcal{Q}_{i-1,k} = \sum_k p(i,j|i-1,k) \cdot d_k^{(i)} \cdot \mathcal{Q}_{i-1,k}.$$

Nótese que es posible obtener el precio de cualquier activo que dependa de la tasa de interés al multiplicar el pago obtenido en el nodo (k,s) por el precio elemental $\mathcal{Q}_{k,s}$ y sumar el resultado sobre todo los nodos que tienen algún pago. De forma particular y debido a que en un bono el pago al tiempo n es de una unidad monetaria no importando el escenario que se presente, el valor al tiempo $n-1$ en el escenario j es de $d_j^{(n-1)}$, por lo que el precio del bono puede ser calculado como

$$B(0,n) = \sum_k \mathcal{Q}_{n-1,k} d_k^{(n-1)}. \tag{3.49}$$

Bibliografía

[1] Björk Tomas. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford Finance.

[2] Brigo Damiano, Mercurio Fabio. *Interest Rate Models-Theory and Practice*. Springer Finance.

[3] de La Grandville Olivier. *Bond Pricing and Portfolio Analysis*. The MIT Press.

[4] Fisher Mark, Nychka Douglas, Zervos David (1994) *Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines*.

[5] Harrison Michael J., Pliska Stanley R. (1981) *Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading*.

[6] Ho Thomas S. Y., Lee Sang-Bin (1986). *Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims*. Journal of Finance. pp 1011-1029.

[7] Hull John, White Alan (2000). *The General Hull-White Model and Super Calibration*.

[8] Luenberger David G. *Investment Science*. Oxford University Press.

[9] Márquez Diez-Canedo Javier, Nogués Novón Carlos E., Vélez Grajale Viviana (2003). *Un método eficiente para la simulación de curvas de tasas de interés*. Banco de México.

[10] Nelson Charles, Siegel Andrew(1987). *Parsimonious Modeling of Yield Curves*. The Journal of Business pp 473-489.

[11] Proter Philip, Jacod Jean; *Probability Essentials*.Springer.

[12] Shreve Steven E. *Stochastic calculus for finance II*. Springer-Verlag.

[13] Sidney Resnick; *Adventures in stochastic processes*. Birkhäuser.