



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

VALUACION DE OPCIONES EN MERCADOS  
INCOMPLETOS

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

**M A T E M Á T I C O**

P R E S E N T A

**GUSTAVO EDUARDO PESCADOR JIMENEZ**



DIRECTOR DE TESIS:  
DR. MOGENS BLADT PETERSEN

2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Pescador  
Jiménez  
Gustavo  
Eduardo  
56890746  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
303623090

2. Datos del tutor

Tutor  
Dr.  
Mogens  
Bladt  
Petersen

3. Datos de sinodal 1

Dr.  
Ramsés Humberto  
Mena  
Chávez

4. Datos de sinodal 2

Dr.  
Pablo  
Padilla  
Longoria

5. Datos de sinodal 3

Dra.  
María del Rocío Raquel  
Elizondo  
Camejo

6. Datos de sinodal 4

M. en C. Fernando  
Baltazar  
Larios

*A mi familia por su apoyo, en especial a mi mamá y hermana.*

*A mis amigos como Elena, Anrdea, Sebas, Mario entre otros por sus consejos.*

*A Velvet por su respaldo y cariño.*



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1. El Modelo de Black-Scholes</b>	<b>1</b>
1.1. Preliminares . . . . .	1
1.2. Modelo de Black-Scholes . . . . .	3
1.2.1. Fórmulas de Black-Scholes para Opciones <i>Call</i> y <i>Put</i> Europeas . . . . .	4
1.2.2. Completez . . . . .	7
1.2.3. Derivación Alterna . . . . .	12
1.3. Capital Asset Pricing Model (CAPM) . . . . .	16
1.3.1. Black (1972) . . . . .	17
1.4. Modelo de Merton . . . . .	18
1.4.1. Dinámica del Precio de la Acción y de la Opción . . . . .	19
1.4.2. Fórmula para la Valuación de Opciones con Salto . . . . .	24
<b>2. Modelos con Saltos</b>	<b>27</b>
2.1. Modelo de Samuelson . . . . .	27
2.2. Algunas Opciones para la Elección de la Medida de Riesgo Neutral . . . . .	29
2.3. Transformada de Esscher . . . . .	30
2.3.1. Logaritmo del Precio de una Acción con Distribución Normal . . . . .	33

2.3.2. Logaritmo del Precio de una Acción Como un Proceso Poisson Desfazado . . . . .	34
2.3.3. Logaritmo del Precio de una Acción Como un Proceso Gamma Desfazado . . . . .	35
2.3.4. Logaritmo del Precio de una Acción Como un Proceso Desfazado con Distribución Gaussiana Inversa . . . . .	37
2.3.5. Distribución Hiperbólica . . . . .	39
2.3.6. Logaritmo del Precio de una Acción Como una Normal Gaussiana Inversa . . . . .	42
<b>3. Ejemplos Numéricos</b>	<b>47</b>
3.1. Dinámica con Incrementos Normal para la Fórmula de Samuelson . . . . .	47
3.2. Dinámica de Difusión de Saltos para la Fórmula de Samuelson . . . . .	48
3.3. Dinámica con Incrementos Poisson para la Fórmula de Samuelson . . . . .	50
3.4. Dinámica con Incrementos Gamma para la Fórmula de Samuelson . . . . .	50
3.5. Dinámica con Incrementos Gaussiana Inversa para la Fórmula de Samuelson	52
3.6. Dinámica con Incrementos Normal Inversa Gaussiana para la Fórmula de Samuelson . . . . .	52
3.7. Ejemplo de un Movimiento Browniano . . . . .	54
3.8. Ejemplo de un Proceso Poisson Desfazado . . . . .	55
3.9. Ejemplo de un Proceso Gamma Desfazado . . . . .	56
3.10. Ejemplo de un Proceso Gamma Desfazado . . . . .	56
3.11. Ejemplo de un Proceso con Distribución Normal Gaussiana Inversa . . . . .	57
<b>4. Resultados</b>	<b>61</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>71</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>72</b>

# Introducción

En los últimos 25 años los derivados se han vuelto muy importantes en el sector de las finanzas. Futuros y opciones se comercializan en muchas bolsas alrededor del mundo. Diferentes tipos de swaps, opciones y otros derivados se comercializan por instituciones financieras, gestores de fondos y casas de bolsa en el mercado de venta *over-the-counter market* (“en el mercado extrabursátil”). Este tipo de mercado es una importante alternativa de intercambio y, si se toma en cuenta la cantidad de volumen intercambiada, este se ha vuelto mas grande que el *exchange-traded market* (“mercado de cambio-negocio”), mercado en el cual las personas comercian contratos estandarizados que se han definido mediante el intercambio. Este tipo de mercado tiene mucho tiempo y se creo para granjeros y comerciantes. El mercado de venta es una red informática y telefónica de corredores de bolsa que no se conocen directamente. Estos intercambios por lo general son entre dos instituciones financieras o una institucion financiera y uno de sus clientes. Las instituciones financieras siempre están preparadas para ofertar un precio al que estén dispuestos a pagar y un precio al que estén dispuestos a vender. Los participantes del mercado son libres de negociar cualquier acuerdo mutuamente atractivo. Una desventaja, es que suele haber un riesgo de crédito, un pequeño riesgo el cual puede no ser bueno, pero el intercambio se ha organizado para eliminar prácticamente todo el riesgo de crédito.

Un derivado puede ser definido como un instrumento financiero cuyo valor depende de los valores de otros, más básicos, las variables subyacentes. Muy a menudo las variables de los activos subyacentes son los precios de los activos negociados.

Las opciones se intercambian tanto en el *exchange* como en el *over-the-counter market*. Hay dos tipos de opciones, la opción *Call* u opción de compra y la opción *Put* u opción de venta. Este tipo de opciones se definirán mas adelante. La diferencia entre las opciones, los forwards y futuros es que el poseedor está obligado a comprar o vender el activo subyacente. Mientras que no cuesta entrar a un contrato forward o a un futuro, si hay un costo al obtener una opción.



---

Los tipos de participantes en los mercados de opciones son: compradores de Calls, vendedores de Calls, compradores de Puts y vendedores de Puts. Se dice que los compradores tienen la posición larga, mientras que los vendedores tienen la posición corta.

Los tipos de operadores en un mercado son: aseguradores, especuladores y “arbitrajistas”. Los aseguradores se encargan de minimizar el riesgo al que se puedan enfrentar por posibles movimientos en el futuro en una variable de mercado. Los especuladores apuestan sobre la dirección futura de una variable de mercado y los “arbitrajistas” toman posiciones de retribución en dos o más instrumentos para asegurar la ganancia.

En 1969 Black y Scholes ya habían concebido la hoy famosa ecuación para determinar el precio justo (de no arbitraje) que un inversionista debe pagar por el derecho a comprar o vender un activo financiero en un tiempo pactado anteriormente. El artículo fue rechazado en dos revistas importantes: *Journal of Political Economy*, *JPE* y *Review of Economics*. Fue hasta 1973, después de hacer unos arreglos sugeridos por Merton Miller y Eugene Fama, que fue publicado en *JPE*.

Una de las hipótesis formulada por Fama a los mercados eficientes es que ningún especulador podría ganar más que el mercado, i.e., que este tipo de mercados son impredecibles. Si se acepta la hipótesis de Fama entonces también se debe aceptar a las caminatas aleatorias (en tiempo discreto) y al movimiento Browniano (en tiempo continuo) como los “mejores” modelos para explicar el comportamiento de las variables financieras. Para el año de 1900 Bachelier [1] fue el primero en incorporar el movimiento Browniano o proceso de Gauss-Wiener estándar para la explicación de dichas variables, éste hecho falló pues este proceso estocástico permitía valores negativos para los activos financieros. Tiempo después Black, Scholes y Merton propusieron como modelo al movimiento Browniano geométrico que eliminaba tal desventaja.

Considérese un mercado financiero donde los precios de las acciones están dados por el proceso estocástico  $S = \{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$  en un espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$ . Si el mercado es completo entonces cualquier instrumento contingente, visto como una variable aleatoria en  $(\Omega, F, P)$ , puede ser generado por una estrategia de replicado en base al proceso de la acción  $S$ . Ésta es la visión económica detrás de la fórmula de Black-Scholes.

En la ausencia de oportunidad de arbitraje, existe una medida de probabilidad  $P^*$  equivalente a  $P$ , tal que  $S$  es martingala bajo  $P^*$ , de aquí que  $S$  es una semimartingala bajo  $P$ . De forma matemática, completez es que cualquier instrumento contingente  $H$  puede ser representado como una integral estocástica de la semimartingala  $S$ .

En el caso de mercados incompletos, un instrumento en general no es, necesariamente, una integral estocástica de  $S$ . Desde un punto de vista económico esto significa que dicho instrumento tendrá un riesgo intrínseco. Lo que se espera realizar a partir de

esto es minimizar tal riesgo y el problema se sigue en encontrar estrategias tales que hagan esto.

Los mercados incompletos dan pie a que haya muchas medidas martingalas, las cuales dan un precio en el que puede haber arbitraje. Se han realizado varios estudios para escoger una medida que minimice el riesgo. Entre ellos está la medida martingala minimal de Föllmer y Schweizer (1990), la medida martingala de mínima entropía por Miyahara (2001) y Fritelli (2002), la medida minimal de Bellini y Fritelli (2002), la medida martingala de mínima distancia por Goll y Rüschembrock (2001) y la transformada de Esscher por Gerber y Shiu (1994).

Las hipótesis que siguen Black y Scholes en su análisis son los siguientes: (a) el comportamiento de precio del activo subyacente corresponde a un modelo log-normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma$  constante, (b) no hay costos de transacción, (c) el activo subyacente no paga dividendos durante la vida de la opción, (d) no hay oportunidad de arbitraje, (e) los precios se forman continuamente, (f) los inversionistas pueden prestar o pedir prestado a la misma tasa de interés libre de riesgo y (g) la tasa de interés libre de riesgo,  $r$ , es constante. Así es como se empezara en este trabajo, con el modelo de Black-Scholes y se presentarán las famosas fórmulas para la valuación de opciones de compra y venta, Call y Put options, respectivamente. Se introducirá la definición de mercados completos con una breve demostración mencionando y utilizando teoremas como el de Girsanov y el de Representación Martingala. Seguido de esto se demostrará que, si se debilitan las hipótesis y tomando en cuenta una tasa de interés estocástica se llegua al mismo resultado dando así una explicación de la generalización de este modelo al caso de activos que tienen una dinámica con saltos, el llamado modelo de Merton no sin antes haber mencionando al Capital Asset Pricing Model (CAPM) cuya importancia radica en dar el rendimiento de un activo contra un portafolio y el rendimiento del mercado. Este modelo tiene gran relevancia ya que lo necesitaron para poder derivar la ecuación del precio de una opción.

En el segundo capítulo, se verá la fórmula de Samuelson para la valuación de un derivado en general y así como se dá la definición de mercados completos tambien se dará la de mercados incompletos. Para este tipo de mercados se debe seleccionar con cuidado una medida de riesgo neutral ya que una de las características de estos es que no poseen una única medida de riesgo neutral, así como los mercados completos. Para esto se mencionarán dos formas de escoger dicha medida, la medida martingala minimal y la transformada de Esscher. En esta última se profundizara más, ya que es una herramienta utilizada por los acuarios, desde 1932, como por ejemplo en aseguradoras. Éste trabajo se enfocará a la valuación de derivados si el logaritmo del valor de los precios están regidos por un proceso estocástico con incrementos estacionarios e independientes. Se verán familias de procesos como el Movimiento Browniano, el proceso Poisson, el proceso Gamma, entre otros. Como un caso particular de la transformada de Esscher se llegará a la fórmula de

---

Black-Scholes.

Por último en el tercer capítulo se verán algunos ejemplos numéricos para la valoración de derivados en mercados incompletos con dinámicas como la log-normal, log-poisson, log-gamma y log-hiperbólica utilizando la fórmula de Samuelson y la Transformada de Esscher y en el cuarto capítulo se compararán las formas de valoración entre mercados completos e incompletos con datos reales.

# Capítulo 1

## El Modelo de Black-Scholes

Se construirá el modelo de Black-Scholes para un derivado en general y se dará como un caso particular el precio de una opción Call y Put. Se demostrará que el modelo es completo dando las bases necesarias, tales como el teorema de Girsanov y el teorema de Representación Martingala. Se debilitaran las hipótesis de Black-Scholes y se demostrará que bajo éstas se llega al mismo resultado. A partir de esto se quiere extender el modelo para llegar al Modelo de Samuelson, tomando en cuenta una tasa de interés estocástica.

### 1.1. Preliminares

**Definición 1.1.** Sean el precio del subyacente (acción o activo) al tiempo  $t$  como  $S_t$  y  $S(0)$  ó  $S_0$  el valor inicial de la acción, el precio de entrega ó término (strike) como  $K$  y la fecha de maduración como  $T$ .

**Definición 1.2** (Movimiento Browniano). Un proceso estocástico  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  es un Movimiento Browniano si y solo si

1.  $W_t$  es continua y  $W_0 = 0$ .
2.  $W_t \sim N(0, t)$ .
3. El incremento  $W_{s+t} - W_s \sim N(0, t)$  y es independiente de  $\zeta_s$ , la  $\sigma$ -álgebra generada por  $W_j$ ,  $j \leq s$ .

Propiedades del Movimiento Browniano

- Aunque las trayectorias de  $W_t$  son continuas (c.s.), éstas no son diferenciables.

## 1.1. PRELIMINARES

---

- $W_t$  tomará cualquier valor real (c.s.).
- Una vez que  $W_t$  tome un valor, lo volverá a tomar infinitamente seguido.
- Las trayectorias de  $W_t$  lucen igual, es un fractal.

Como se mencionó anteriormente,  $W_t$  no es diferenciable, entonces si se considera una expansión de Taylor de  $f(W_t)$  para  $f$  suficientemente suave, se tiene

$$df(W_t) = f'(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)(dW_t)^2 + \frac{1}{3!}f'''(W_t)(dW_t)^3 + \dots \quad (1.1)$$

**Lema 1.1** (*Itô 1*).

$X$  es un proceso estocástico que satisface  $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$  y  $f$  es una función  $C^2$ , entonces  $Y_t := f(X_t)$  es un proceso estocástico que satisface,

$$dY_t = (\mu_t f'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 f''(X_t))dt + (\sigma_t f'(X_t))dW_t. \quad (1.2)$$

Ahora bien, si  $f$  depende de dos variables, i.e.,  $f = f(t, W_t)$ , se realiza una expansión de Taylor en dos variables y se obtiene

$$df(t, W_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, W_t)dt + \frac{\partial f}{\partial W}(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}(t, W_t)dt \quad (1.3)$$

de aquí, el siguiente resultado.

**Lema 1.2** (*Itô 2*).

$X$  un proceso estocástico tal que  $dX_t = h(X_t, t)dt + g(X_t, t)dW_t$ , entonces  $Y := f(X_t, t)$  es un proceso que satisface

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dX_t dX_t \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial t} + h\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}g^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + g\frac{\partial f}{\partial x}dW_t. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Enseguida se verá la justificación de porqué  $dW_t^2 = dt$ . Véase la siguiente tabla de multiplicación:

*	$dt$	$dW_t$
$dt$	$0$	$0$
$dW_t$	$0$	$dt$

Luego  $dW_t = W_{t+dt} - W_t \sim N(0, dt)$ , entonces

$$\mathbb{E}(dW_t^2) = \text{Var}(dW_t) = dt$$

y

$$\begin{aligned} \text{Var}(dW_t^2) &= \mathbb{E}(dW_t^4) - \mathbb{E}(dW_t^2)^2 \\ &= o(dt) - dt^2 \\ &= o(dt) - 0 = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto  $dW_t^2 = dt$ .

## 1.2. Modelo de Black-Scholes

El inicio de la teoría moderna de valuación de opciones comenzó en 1900 en la Sorbona con la tesis de Louis Bachelier [1]. La fórmula de Black-Scholes fue publicada en la primavera de 1973 en el “Journal of Political Economy (JPE)”. En abril del mismo año, “The Chicago Board Options Exchange (CBOE)” comenzó la compra-venta de opciones Call en 12 empresas, en cambio las opciones Put salieron a la compra-venta hasta 1977. Para el 2000, ambas opciones ya estaban en el mercado.

Fischer Black y Myron Scholes empezaron a trabajar en el problema de valuación de opciones en 1969 cuando Black era un consultor independiente y Scholes un asistente de profesor en MIT. Tuvieron muchas pláticas con Robert Merton, quien también trabajaba en valuación de opciones. El primer artículo tuvo fecha de 1970, pero JPE lo rechazó y, como consecuencia, otras revistas conocidas también. En 1972, Eugene Fama y Merton Miller reconocieron la importancia del trabajo de Black y Scholes e intervinieron con JPE para que éste se publicara. Posteriormente, Robert Merton publicó un importante y amplio artículo de seguimiento que, además de otras aportaciones, estableció la restricción de no arbitraje en los precios de las opciones, la generalización de la fórmula de Black-Scholes y la derivación del modelo.

En 1997, Robert Merton y Myron Scholes recibieron el Premio Nobel de Economía por su aportación en la valuación de opciones. Fischer Black no recibió el premio pues falleció en 1995.

Antes que nada, ¿Qué es arbitraje? Se entiende por arbitraje el asegurar una ganancia sin riesgo al realizar transacciones simultáneas en dos o más mercados

Este modelo se compone de dos activos con dinámicas dadas por:

$$dB_t = rB_t dt \tag{1.5}$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{1.6}$$

donde  $r$ ,  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes determinísticas y  $B_t$  es un proceso libre de riesgo, caja de

## 1.2. MODELO DE BLACK-SCHOLES

---

ahorros o cuenta corriente, llamado bono y está dado por  $B_t = e^{rt}$  y  $S_t$  es el precio del subyacente al tiempo  $t$ .

Utilizando *Itô* en (1.6) se obtiene

$$d(\log(S_t)) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t, \quad (1.7)$$

donde  $\log(S_t) = \log(S_0)(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t$ , entonces

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\}, \quad (1.8)$$

donde  $W_t \sim N(0,t)$ .

Supongase la existencia de  $r$ ,  $\mu$  y  $\sigma$  tales que los respectivos precios pueden ser representados como

$$S_t = S_0 \exp\{\mu t + \sigma W_t\} \quad (1.9)$$

$$B_t = e^{rt} \quad (1.10)$$

entonces todos los reclamos contingentes  $g(S_t)$  conocidos en algún horizonte temporal  $T$ , tienen estrategias de replicado asociadas  $(\alpha_t; b_t)$ . Aún más, el precio de no-arbitraje del contingente  $g(S_t)$  al tiempo  $t \leq T$  está dado por

$$B_t \mathbb{E}_Q[B_T^{-1}g(S_t)|\zeta_t] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_Q[g(S_t)|\zeta_t] \quad (1.11)$$

y tomando a  $S_t$  como en (1.8) se tiene,

$$p(g) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[g(S_0 \exp\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T\})]. \quad (1.12)$$

Esta última es la fórmula de Black & Scholes para un derivado  $g$  general. A partir de ésta se obtienen las famosas fórmulas de valuación para las *Call* y *Put*-europeas.

### 1.2.1. Fórmulas de Black-Scholes para Opciones *Call* y *Put* Europeas

**Definición 1.3** (Opción *Call* (*Put*)). *Es un contrato entre dos partes, el comprador y vendedor de la opción. Una opción Call (Put), también llamadas como opción de compra (venta), con precio de ejercicio  $K$  y tiempo de maduración (vencimiento)  $T$  le da a su poseedor el derecho, mas no la obligación de comprar (vender) el subyacente al tiempo  $T$  a precio  $K$ .*

La diferencia entre opción americana y europea es que la americana puede ser ejercida en cualquier momento hasta  $T$  y la europea solo en  $T$ .

A continuación se mencionará algunas herramientas para verificar tales fórmulas.

**Lema 1.3.** Supongase que  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Entonces para  $a$  y  $b$  números reales cualesquiera,

$$\mathbb{E}[e^{aX} | X \geq b] = \exp \left\{ a\mu + \frac{1}{2a^2\sigma^2} \right\} N(d);$$

con  $d = \frac{-b + \mu + a\sigma^2}{\sigma}$ .

**Paridad Put-Call 1.1.** La siguiente relación entre el precio de una Call y un Put se cumple.

$$C[S(0), T, K] - P[S(0), T, K] = S(0) - Ke^{-rT}.$$

Se tiene que

$$C[S(0), T, K] = S(0)N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \quad (1.13)$$

$$P[S(0), T, K] = Ke^{-rT}N(-d_2) - S(0)N(d_1), \quad (1.14)$$

donde

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[ \log \left( \frac{S(0)}{K} \right) + \left( r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right].$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[ \log \left( \frac{S(0)}{K} \right) + \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right] = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Usando el lema anterior con el payoff para una Call europea  $e^{-rT}(S(0)e^x - K)_+$  se obtiene  $C[S(0), T, K]$ , donde  $x_+ = x$  si  $x > 0$  y  $x_+ = 0$  si  $x \leq 0$ . De ahí, utilizando la paridad Put-Call se tiene  $P[S(0), T, K]$ .

A continuación se demostrarán tales resultados.

$$C[S(0), T, K] = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} (S(0)e^x - K)_+ \frac{1}{\sigma\sqrt{2T\pi}} \exp \left\{ \frac{-\left(x - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)^2}{2T\sigma^2} \right\} dx. \quad (1.15)$$

La integral tiene sentido cuando el integrando es diferente de cero, i.e.,  $S(0)e^x - K > 0 \Rightarrow x > \log \left( \frac{K}{S(0)} \right)$ . Sea  $b = \log \left( \frac{K}{S(0)} \right)$ , luego, la integral queda



$$e^{-rT} \int_b^\infty (S(0)e^x - K) \frac{1}{\sigma\sqrt{2T\pi}} \exp\left\{-\frac{\left(x - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)^2}{2T\sigma^2}\right\} dx; \quad (1.16)$$

y separandola para utilizar en lema 1.3 con  $a = 1$  y  $a = 0$  respectivamente se tiene

$$e^{-rT} \int_b^\infty S(0)e^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2T\pi}} \exp\left\{-\frac{\left(x - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)^2}{2T\sigma^2}\right\} dx = S(0)N(d_1)$$

$$e^{-rT} \int_b^\infty K \frac{1}{\sigma\sqrt{2T\pi}} \exp\left\{-\frac{\left(x - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)^2}{2T\sigma^2}\right\} dx = Ke^{-rT}N(d_2).$$

De donde se obtiene el resultado deseado. Ahora utilizando la paridad Put-Call se verificará el precio para una Put.

$$\begin{aligned} P[S(0), T, K] &= C[S(0), T, K] - (S(0) - Ke^{-rT}) \\ &= S(0)N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) - (S(0) - Ke^{-rT}) \\ &= Ke^{-rT}(1 - N(d_2)) - S(0)(1 - N(d_1)) \\ &= Ke^{-rT}N(-d_2) - S(0)N(-d_1). \end{aligned}$$

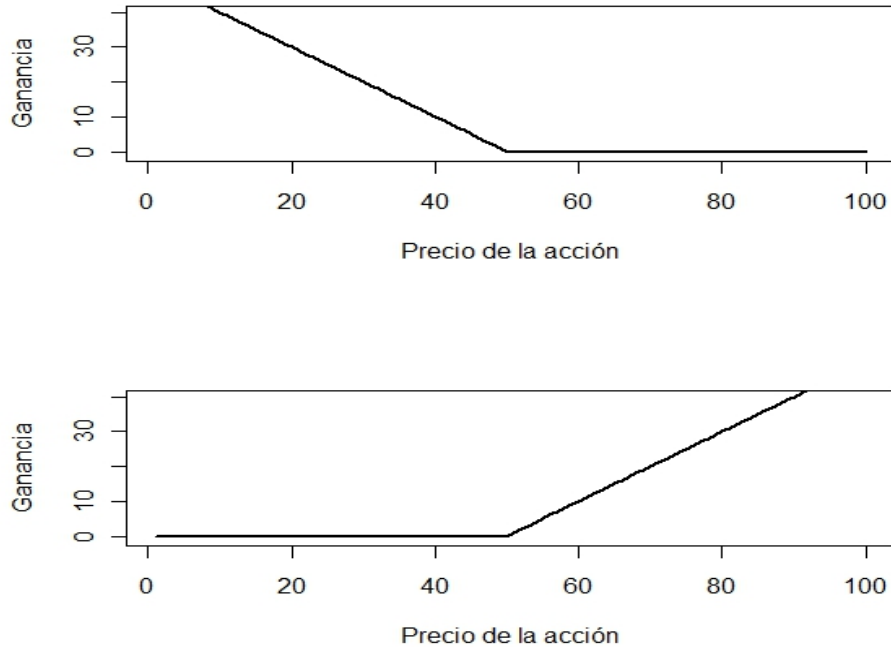


Figura 1.1: Gráfica de una *Put* y *Call* respectivamente con precio de ejercicio  $K=50$

### 1.2.2. Completez

Se dice que el modelo de Black & Scholes es completo si para cada contingente existe un portafolio que es auto-financiado y replica.

A continuación algunas definiciones para aclarar conceptos.

Primero se dará la definición de lo que es un portafolio.

**Definición 1.4** (Portafolio  $(\alpha, b)$ ). *Un portafolio es un par de procesos  $\{\alpha\}, \{b\}$  los cuales describen el número de unidades de activo y de bono que se debe mantener al tiempo  $t$ . Estos pueden tomar valores positivos y negativos. El componente del activo del portafolio  $\alpha$  debe ser dependiente sólo de la información hasta el tiempo  $t$ .*

**Definición 1.5** (Propiedad de auto-financiado). *Si  $(\alpha_t, b_t)$  es un portafolio con precio de la acción  $S_t$  y precio del bono  $B_t$ , entonces  $(\alpha_t, b_t)$  es autofinanciado si*

$$dV_t = \alpha_t dS_t + b_t dB_t.$$

**Definición 1.6** (Estrategia de replicado). *Supongase que un mercado consta de un bono  $B$  sin riesgo, un activo riesgoso  $S$  con volatilidad  $\sigma_t$  y un contingente  $X = g(S_t)$  (payoff) en eventos hasta el tiempo  $T$ . Entonces una estrategia de replicado para  $X$  es un portafolio auto-financiado  $(\alpha, b)$  tal que*

$$\int_0^T \sigma_t^2 \alpha_t^2 dt < \infty$$

$y$

$$V_T = \alpha_T S_T + b_T B_T = X = g(S_T).$$

**Definición 1.7** (Equivalencia entre medidas). *Si  $A$  cualquier evento en un espacio muestral, entonces  $P(A) > 0 \Leftrightarrow Q(A) > 0$ , i.e., si  $A$  es posible bajo  $P$ , entonces es posible bajo  $Q$ .*

**Definición 1.8** (Martingala). *Un proceso estocástico  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  es una martingala si*

- $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty \forall t$ .
- $\mathbb{E}[M_t | M_r; 0 \leq r \leq s] = M_s$  para  $s \leq t$ .

**Definición 1.9** (Proceso previsible). *Un proceso estocástico  $\{\zeta_t\}_{t \geq 0}$  es previsible si al tiempo  $t$  está completamente determinado por la información dada al tiempo  $t-1$ .*

A continuación algunos teoremas que ayudarán para la prueba de completez de Black & Scholes.

**Teorema 1.1** (Girsanov). *Si  $W_t$  es un Movimiento Browniano y  $\gamma_t$  es un proceso  $\zeta$ -previsible que satisface  $\mathbb{E}_P[\frac{1}{2} \exp\{\int_0^T \gamma_t^2 dt\}] < \infty$ , entonces existe una medida  $Q$  tal que*

1.  $Q$  es equivalente a  $P$ .
2.  $\frac{dQ}{dP} = \exp\{-\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt\}$ .
3.  $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$  es un Movimiento Browniano con respecto a  $Q$ , i.e.,  $\tilde{W}_t$  es Movimiento Browniano con tendencia  $\gamma_t$  al tiempo  $t$ .

**Teorema 1.2** (Representación Martingala). *Sean  $\{M_t\}$  una martingala cuya volatilidad  $\sigma_t$  es distinta de cero (c.s) y  $\{N_t\}$  otra martingala, entonces existe un proceso  $\zeta$ -previsible  $\alpha$  tal que*

$$\int_0^T \alpha_t^2 \sigma_t^2 dt < \infty \text{ c.s}$$

*y  $N$  puede ser escrita como*

$$N_t = N_0 + \int_0^t \alpha_s dM_s.$$

*Más aún,  $\alpha$  es único.*

Si se desea ver la demostración de estos teoremas véase, por ejemplo, [22].

Dadas las definiciones se puede dar una prueba intuitiva de la completez de Black & Scholes. Se dividirá la prueba en dos casos: tasa de interés nula y tasa de interés no nula.

Caso I. Se quiere encontrar una medida  $Q$  bajo la cual  $\{S_t\}$  sea una martingala. Se tiene que

$$S_t = \exp\{\mu t + \sigma W_t\}. \quad (1.17)$$

Si se hace  $Y_t = \log(S_t) \Rightarrow S_t = \exp\{Y_t\}$  y

$$Y_t = \mu t + \sigma W_t, \quad (1.18)$$

entonces

$$dY_t = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (1.19)$$

Utilizando *Itô* para  $S_t$  se obtiene su EDE

$$dS_t = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (1.20)$$

Ahora se quiere que  $S_t$  sea una martingala, i.e., que  $S_t$  no tenga tendencia ( $\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 = 0$ ). Sea  $\gamma_t = \frac{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$ , entonces por Girsanov existe  $Q$  tal que  $\tilde{W}_t = W_t + \gamma_t$  es Movimiento Browniano bajo  $Q$ . Luego

$$dS_t = \sigma S_t d\tilde{W}_t, \quad (1.21)$$

de aquí que  $S_t$  es una martingala bajo  $Q$  pues se sostiene la condición del criterio para martingalas exponenciales ya que  $\sigma$  es constante. Dada  $Q$ , se construye un proceso a partir de  $X = g((S_t))$ ,

$$N_t = \mathbb{E}_Q[X|\zeta_t] \quad (1.22)$$

que es una martingala.

Por el teorema de la representación martingala se sabe que existe un proceso previsible  $\{\alpha_t\}$  tal que

$$N_t = \mathbb{E}_Q[X|\zeta_t] = N_0 + \int_0^t \alpha_s dS_s \quad (1.23)$$

entonces, dada  $Q$  que hace que  $S_t$  sea una martingala con volatilidad positiva, se tiene que

$$dN_t = \alpha_t dS_t \quad (1.24)$$

para alguna  $\alpha_t$ .

El valor del portafolio es

$$\begin{aligned} V_t &= \alpha_t S_t + b_t B_t \\ &= \alpha_t S_t + N_t - \alpha_t S_t \end{aligned}$$

pues se quiere tener  $b_t = N_t - \alpha_t S_t$  en la cuenta de efectivo y por nuestra suposición  $B_t = 1$ . Entonces

$$V_t = N_t, \quad (1.25)$$

esto nos dice que se obtiene una estrategia de replicado.

También hay que checar que esta estrategia es autofinanciada. Se sabe que  $dV_t = \alpha_t dS_t + b_t dB_t$ , entonces por (1.25)

$$\begin{aligned} dV_t &= dN_t = \alpha_t dS_t \text{ por (1.24)} \\ &= \alpha_t dS_t + b_t * 0 \\ &= \alpha_t dS_t + b_t dB_t. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Por lo tanto hay un precio de no-arbitraje para  $X = g((S_t))$  en cualquier tiempo.  $\square$

Caso II. En el caso para tasa de interés no nula es un poco más complicado pues aquí se tiene que tomar en cuenta el crecimiento del efectivo. Para que éste no nos moleste, se descontará, así que tómesese a  $B_t^{-1}$  el proceso de descuento y sean  $Z_t = B_t^{-1} S_t = (e^{-rt})(S_0 \exp\{\mu t + \sigma W_t\})$  una acción descontada y  $B_T^{-1} X$  un payoff descontado.

Luego, tomando a  $Y_t = (\mu - r)t + \sigma W_t$  y utilizando  $It\hat{o}$  en  $Z_t = S_0 e^{Y_t}$  se tiene

$$dZ_t = Z_t \left( (\mu - r + \frac{1}{2} \sigma^2) dt + \sigma dW_t \right), \quad (1.27)$$

por Girsanov existe  $Q$  tal que  $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$  es Movimiento Browniano bajo  $Q$ , donde  $\gamma = \frac{\mu-r+\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$ , tal que

$$dZ_t = \sigma Z_t + d\tilde{W}_t \quad (1.28)$$

es martingala bajo  $Q$ .

Se requiere un proceso que al tiempo  $T$  valga lo mismo que el payoff descontado y que también sea martingala, entonces se toma

$$N_t = \mathbb{E}_Q[B_T^{-1}X|\zeta_t] \quad (1.29)$$

que ya es martingala por construcción bajo  $Q$ .

Por el teorema de la representación martingala, existe  $\{\alpha_t\}$  un proceso previsible tal que  $N_t = N_0 + \int_0^t \alpha_s dZ_s$ , entonces

$$dN_t = \alpha_t dZ_t. \quad (1.30)$$

El valor del portafolio es

$$\begin{aligned} V_t &= \alpha_t S_t + b_t B_t \\ &= \alpha_t S_t + (N_t - \alpha_t Z_t) B_t \\ &= N_t B_t. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Hay que comprobar que  $V_T = X$  sea una estrategia de replicado.

$$V_T = N_T B_T = B_T \mathbb{E}_Q[B_T^{-1}X|\zeta_t]$$

pero  $B_T^{-1}$  es  $\zeta_t$  medible, entonces

$$V_T = X. \quad (1.32)$$

Para ver que es autofinanciado, se dará un resultado antes.

**Paridad Put-Call 1.2.** Si  $\{B_t\}$  es un proceso de volatilidad cero y  $\{X_t\}$  cualquier otro proceso, entonces

$$d(B_t X_t) = B_t dX_t + X_t dB_t. \quad (1.33)$$

Se tiene que  $V_t = N_t B_t$ , entonces

$$\begin{aligned} dV_t &= d(N_t B_t) \\ &= N_t dB_t + B_t dN_t \end{aligned} \tag{1.34}$$

pues  $B_t$  no tiene volatilidad.

$$\begin{aligned} &= N_t dB_t + B_t \alpha_t dZ_t \text{ por (ntatzt)} \\ &= (b_t + \alpha_t Z_t) dB_t + B_t \alpha_t dZ_t \\ &= \alpha_t (d(B_t Z_t)) + b_t dB_t \\ &= \alpha_t dS_t + b_t dB_t. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Por lo tanto la estrategia es autofinanciada.  $\square$

### 1.2.3. Derivación Alterna

Ahora se verá otra forma para la derivación de Black & Scholes bajo hipótesis más débiles y considerando la posibilidad de interés estocástico.

Las hipótesis a considerar son las siguientes:

- No hay costos de transacción.
- La acción sigue la siguiente dinámica:

$$dS_t = \alpha dt + \sigma dz, \tag{1.36}$$

donde  $\alpha, \sigma, dz$  son la media, varianza de la acción y Movimiento Browniano Estándar respectivamente.

- El precio del bono sigue la siguiente dinámica:

$$dB_t = \mu(T)dt + \delta(T)dq(t;T), \tag{1.37}$$

donde  $\mu, \delta^2$  y  $dq$  son la media, varianza y Movimiento Browniano Estándar del bono-cupón cero con fecha de maduración  $T$ . Además

$$dq(t; \tau)dq(t; T) = \rho_{\tau T} dt \quad \tau \neq T$$

$$B(0) = 1 \quad y \quad \delta(0) = 0.$$

Supóngase que  $\delta$  no es estocástico e independiente del nivel de B. En el caso en que la tasa de interés no se estocástica y constante en el tiempo,  $\delta \equiv 0$ ,  $\mu = r$  y  $B(T) = \exp\{-rT\}$ .

Si H es la función del precio de la opción y ésta depende del precio de la acción, del bono sin riesgo y el tiempo de expiración entonces dadas las distribuciones de S y B, se tiene, por  $It\hat{o}$

$$dH = H_1dS + H_2dB - H_3dt + \frac{1}{2} [H_{11}(\sigma S)^2dt + 2H_{12}\rho\sigma\delta SBdt + H_{22}(\delta B)^2dt], \quad (1.38)$$

donde los subíndices denotan derivadas parciales. Ahora, retomando a (1.36) y (1.37) y agrupando elementos se puede escribir a (1.38) como

$$dH = \beta Hdt + \gamma Hdz + \eta Hdq, \quad (1.39)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\frac{1}{2}(\sigma S)^2 H_{11} + \rho\sigma\delta SBH_{12} + \frac{1}{2}(\delta B)^2 H_{22} + \alpha SH_1 + \mu BH_2 - H_3}{H}, \\ \gamma &= \frac{\sigma SH_1}{H}, \\ \eta &= \frac{\delta BH_2}{H}. \end{aligned}$$

Se formará un portafolio Y que contenga la misma acción, la opción y el bono sin riesgo con fecha de maduración igual que la opción, tal que la inversión agregada del portafolio sea cero. Sea  $W_1$  la cantidad de dolares que se invirtieron en la acción,  $W_2$  la cantidad de dolares invertidos en la opción y  $W_3$  la cantidad de dolares invertidos en bonos. Entonces la condición de inversión agregada puede ser escrita como

$$W_1 + W_2 + W_3 = 0$$

Si  $dY$  es el rendimiento del dolar en el portafolio

$$dY = [W_1(\alpha - \mu) + W_2(\beta - \mu)]dt + (W_1\sigma + W_2\gamma)dz + [W_2\eta - (W_1 + W_2)\delta]dq, \quad (1.40)$$

donde  $W_3 = -(W_1 + W_2)$ .



## 1.2. MODELO DE BLACK-SCHOLES

---

Supóngase que para una estrategia  $W_j^*$  los coeficientes de  $dz$  y  $dq$  son cero esto implicaría que  $dY^*$  no sería estocástico, además se formó el portafolio de tal manera que su inversión fuera cero, entonces el rendimiento esperado del portafolio con esta estrategia es cero. Dado esto se puede escribir como un sistema de ecuaciones lineales de 3x2.

$$\begin{aligned}(\alpha - \mu)W_1^* + (\beta - \mu)W_2^* &= 0 \\ \sigma W_1^* + \gamma W_2^* &= 0 \\ -\delta W_1^* + (\eta - \delta)W_2^* &= 0.\end{aligned}\tag{1.41}$$

Una solución no trivial para (1.41) con  $W_1^*$  y  $W_2^*$  distintas de cero, existe sii

$$\frac{\beta - \mu}{\alpha - \mu} = \frac{\gamma}{\sigma} = \frac{\delta - \eta}{\delta}.\tag{1.42}$$

Si se cumple (1.42), entonces  $\frac{\gamma}{\sigma} = 1 - \frac{\eta}{\delta}$  y sustituyendo  $\gamma$  y  $\eta$  de (1.39) se tiene

$$H = SH_1 + BH_2.\tag{1.43}$$

Tomando la segunda condición de (1.42) y sustituyendo los valores de  $\beta$  y  $\gamma$  de (1.39) se obtiene

$$\frac{1}{2}(\sigma S)^2 H_{11} + \rho\sigma\delta SBH_{12} + \frac{1}{2}(\delta B)^2 H_{22} + \mu SH_1 + \mu BH_2 - H_3 - \mu H = 0\tag{1.44}$$

y sustituyendo H de (1.43) se puede reescribir a (1.44) como

$$\frac{1}{2}[(\sigma S)^2 H_{11} + 2\rho\sigma\delta SBH_{12} + (\delta B)^2 H_{22}] - H_3 = 0.\tag{1.45}$$

Si H es el precio de una opción Europea entonces debe cumplir (1.45) sujeto a las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned}H(0, B, T; K) &= 0, \\ H(S, 1, 0; K) &= \max(0, S - K).\end{aligned}$$

Sea  $x = \frac{S}{KB(T)}$  el precio por acción en unidades del precio de ejercicio en dolares pagada a una fecha fija en el futuro. Recordando (1.36), (1.37) y utilizando *Itô* se sigue que la dinámica de x está dada por

$$dx_t = (\alpha - \mu + \delta^2 - \rho\sigma\delta)dt + \sigma dz - \delta dq. \quad (1.46)$$

De aquí que el rendimiento esperado de  $x$  es una función de  $S$  y  $B$  a través de  $\alpha$  y  $\mu$  y la varianza es  $V^2(T) = \sigma^2 + \delta^2 - 2\rho\sigma\delta$  y solo depende de  $T$ .

Para ver que  $H$  es homogénea se hará un cambio de variable. Sea  $h(x, T; K) = H(S, B, T; K)/KP$  donde  $h$  es independiente de  $B$  y es el valor del precio de la opción en las mismas unidades que  $x$ . Sustituyendo  $h$  en (1.45) y en las condiciones de frontera, lo cual resulta

$$\frac{1}{2}V^2x^2h_{11} - h_2 = 0. \quad (1.47)$$

Como  $h$  no depende de  $K$  esto implica que  $H$  si es homogénea de grado 1 en  $[S; KB(T)]$ .

Considérese una nueva variable de tiempo  $\tau = \int_0^T V^2(s)ds$ . Si se define a  $y(x, \tau) = h(x, T)$  y sustituyendo en (1.47), entonces  $y$  satisface

$$\frac{1}{2}x^2y_{11} - y_2 = 0 \quad (1.48)$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} y(0, \tau) &= 0, \\ y(x, 0) &= \max(0, x - 1) \end{aligned}$$

Escribiendo el precio de la opción en su forma completa  $H(S, B, T; K, \sigma^2, \delta^2, \rho)$ , entonces  $y = H(x, 1, \tau; 1, 1, 0, 0)$  que es el precio de la opción con fecha de maduración  $\tau$  (en años) y precio de ejercicio de un dolar en un acción con unidad de varianza, cuando la tasa de interés de mercado es cero durante la vida del contrato.

El precio de cualquier opción Europea está dado por

$$H(S, B, T; K) = KB(T)y \left[ \frac{S}{KB(T)}, \int_0^T V^2(s)ds \right]. \quad (1.49)$$

Para poder resolver (1.49) se necesita pasar a su forma estándar haciendo el cambio de variable  $Z = \log x + \frac{\tau}{2}$  y  $\phi(Z, \tau) = y(x, \tau)/x$ , sustituyendo se obtiene

$$\frac{1}{2}\phi_{11} - \phi_2 = 0 \quad (1.50)$$

### 1.3. CAPITAL ASSET PRICING MODEL (CAPM)

---

sujeto a las condiciones de frontera  $|\phi(Z, \tau)| \leq 1$  y  $\phi(Z, 0) = \max[0, 1 - \exp\{-Z\}]$ . (1.50) se puede resolver por variables separables o bien por Transformada de Fourier. Su solución es

$$y(x, \tau) = x\phi(Z, \tau) = \frac{x\operatorname{erfc}(h_1) - \operatorname{erfc}(h_2)}{2}, \quad (1.51)$$

donde  $h_1 = \frac{-(\log x + \frac{1}{2}\tau)}{(2\tau)^{\frac{1}{2}}}$  y  $h_2 = \frac{-(\log x - \frac{1}{2}\tau)}{(2\tau)^{\frac{1}{2}}}$  y la relación entre la función  $\operatorname{erfc}$  y  $\phi$  está dada por

$$\phi(x) = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(x/2^{\frac{1}{2}}).$$

**Observación:** La ecuación (1.51) es igual a (1.13) con  $r = 0, \sigma^2 = 1$  y  $K = 1$ , esto implica que (1.49) es idéntica a (1.13) en el caso particular de una tasa de interés no estocástica y constante (i.e.  $\delta = 0, \mu = r, B = \exp\{-rT\}$  y  $\tau = \sigma^2 T$ )

A continuación se darán dos teoremas que se citaran en la siguiente sección:

**Teorema 1.3.** *Dado el precio de un acción, la opción es una función no creciente de  $B(T)$  y por lo tanto una función no decreciente de la tasa de interés a  $T$ -años.*

**Teorema 1.4.** *El precio de la opción es una función no decreciente del rendimiento de la varianza del precio de la acción.*

### 1.3. Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Sharpe (1959) y Lintner (1965) contribuyeron al trabajo de Markowitz (1959) para el desarrollo de las implicaciones en la economía. La derivación de Sharpe y Lintner del CAPM asume la existencia de préstamo a una tasa de interés libre de riesgo.

Antes de su descubrimiento no había modelos de valuación de activos construidos a partir de principios básicos sobre la naturaleza de los gustos y las oportunidades de inversión y con claras predicciones comparables sobre riesgo e inversión. Se generó originalmente como un modelo del equilibrio de valuación y no como un modelo de riesgo *per se*. Su función es dar el rendimiento esperado de un activo “individual” contra un portafolio de mercado y el rendimiento excesivo esperado del mercado. Propone que el mercado de los precios de activos sean de tal manera que sus rendimientos esperados sean proporcionales a su riesgo medido por su beta, la cual mide la sensibilidad del rendimiento individual de un activo con rendimiento del mercado.

**Definición 1.10.** *Se entiende por portafolio de mercado a un portafolio que contiene todas las inversiones disponibles y las mantiene en proporción a sus valores de mercado.*

El CAPM basa sus conclusiones en el concepto de equilibrio de mercado, el cual implica, en particular, que no hay gastos y todos los inversionistas son “uniformes” en el sentido que tienen la misma capacidad de predicción en los movimientos de los precios, el mismo horizonte de ejercicio y todas sus decisiones se basan en la media y covarianza de los precios. También se asume que todos los activos son *infinitamente divisibles* y existe una tasa libre de riesgo para los valores medios.

Black y Scholes usaron el equilibrio del CAPM para derivar la ecuación del precio de una opción y tuvieron la visión de poder asumir, para propósitos de valuación, que el rendimiento de la opción sea igual a la tasa libre de riesgo.

**Definición 1.11.** *Se dice que una variable aleatoria  $X$  y su distribución son infinitamente divisibles si para toda  $n \geq 1$ , existen variables aleatorias  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  iid tal que  $X \stackrel{d}{=} X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ,*

donde  $\stackrel{d}{=}$  denota convergencia en distribución:

Estas y solo estas distribuciones pueden ser los límites de las distribuciones de las sumas de variables en forma de serie.

Algunos ejemplos de distribuciones que son infinitamente divisibles son: Poisson, Gamma, Binomial negativa, t de Student, etc; y algunos ejemplos de distribuciones no infinitamente divisibles son: Binomial y Uniforme.

### 1.3.1. Black (1972)

En la ausencia de un activo libre de riesgo, Black (1972) creó una versión más general del CAPM. El rendimiento esperado de un activo  $i$  en exceso del rendimiento del portafolio cero-beta está linealmente relacionado con su beta. Las hipótesis para la derivación de

$$\mathbb{E}(R_i) = R_f + \beta_i[\mathbb{E}(R_m) - R_f], \quad (1.52)$$

donde  $R_i$  es el rendimiento del activo  $i$  en el período,  $R_m$  es el rendimiento del portafolio de mercado de todos los activos,  $R_f$  es el rendimiento de un activo sin riesgo en el período y  $\beta_i$  es la *sensibilidad del mercado* del activo  $i$  y es igual a la pendiente de la regresión lineal relacionando  $R_i$  y  $R_m$ , de forma matemática

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_m)}{\text{var}(R_m)},$$

son

- Todos los inversionistas tienen la misma opinión acerca de la posibilidad de diversos valores al fin del período para todos los activos. Tienen la misma distribución de probabilidad conjunta para los rendimientos de los posibles activos.
- La distribución de probabilidad conjunta es normal o estable con un solo exponente característico.
- Los inversionistas escogen portafolios que maximicen su utilidad esperada al final del período y todos los inversionistas son adversos al riesgo.
- Un inversionista puede tomar una posición larga o corta de cualquier tamaño en cualquier activo, incluyendo los activos sin riesgo. Cualquier inversionista puede pedir o dar un préstamo de cualquier cantidad que quiera a la tasa de interés libre de riesgo.

**Definición 1.12** (portafolio cero-beta). *Es aquel portafolio que tiene la menor varianza de todos los correlacionados con el portafolio de mercado. Cualquier otro portafolio no correlacionado tiene el mismo rendimiento pero mayor varianza.*

La longitud del período para el cual el modelo se aplica no se especifica, sin embargo, las hipótesis se cumplen solo si el período es infinitesimal. Para cualquier período finito, la distribución de los posibles rendimientos de un activo son muy parecidos a la distribución log-normal que a la normal. En particular, si la distribución de los rendimientos es normal, entonces habrá una probabilidad finita que hace que el precio del activo sea negativa al final.

Black trabaja bajo dos hipótesis, las cuales son más restrictivas que las hipótesis trabajadas en la derivación del CAPM, éstas son: no hay activo sin riesgo y que no es permitido el pedir o dar un préstamo sin riesgo. En este artículo Black concluye que el rendimiento esperado en cualquier activo riesgoso es una función lineal de su beta, esto se sostiene aunque no haya restricciones. Por esto a la ecuación (1.52) se le conoce como la línea de CAPM. Si existe un activo sin riesgo, entonces la pendiente que relaciona la beta con el rendimiento de su activo riesgoso tiene que ser más chica que cuando no hay restricciones.

#### 1.4. Modelo de Merton

La validez de la fórmula de valuación de opciones de Black & Scholes depende de la capacidad de los inversionistas de seguir una estrategia para la dinámica del portafolio de la acción que replique el payoff de la acción. La hipótesis para que tal estrategia sea

posible es que la dinámica del o de los rendimientos de la acción puedan ser descritos por un proceso estocástico con trayectoria continua. En ésta sección la fórmula para la valuación de una opción se deriva de un caso más general, cuando los rendimientos del stock son generados tanto por un proceso continuo como uno de salto.

La primera aplicación de procesos de salto en la valuación de opciones fue introducida por Robert Merton (1976). Merton consideró el modelo de salto de difusión

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left( \left( \alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \right) t + \sigma W_t \right) \right\} \gamma(n),$$

donde  $W_t$  es un movimiento Browniano estándar,  $\alpha$  es el rendimiento esperado de la acción y

$$\begin{aligned} \gamma(n) &= 1, \text{ si } n = 0 \\ &= \prod_{j=1}^n Y_j, \text{ } n \geq 1, \end{aligned}$$

donde  $n$  es un proceso Poisson con intensidad  $\lambda$  independiente de  $W$  y las  $Y_j$  son variables iid. Obsérvese que si  $n = 0$ , i.e., no hay saltos (claramente  $\lambda = 0$ ), entonces se tiene el modelo de Black-Scholes.

#### 1.4.1. Dinámica del Precio de la Acción y de la Opción

El cambio en el precio del stock se compone por dos tipos de cambios:

- El primero es el cambio normal en el precio debido a un desequilibrio temporal entre oferta y demanda, cambios en la economía o cualquier otra información que cause cambios marginales en el valor del stock. Este componente se modela por un movimiento Browniano geométrico con una varianza constante por unidad de tiempo y tiene una trayectoria continua.
- El segundo es el cambio “anormal” en el precio debido a la llegada de nueva e importante información acerca de la acción que tiene más de un efecto en el cambio marginal en el valor de la acción. Este tipo de información tiene llegada de forma discreta y tal componente se modela con un proceso Poisson que refleja el impacto en el cambio de la acción.

**Definición 1.13.** Una familia de variables aleatorias  $(N_t)$  es un proceso de contar si:

#### 1.4. MODELO DE MERTON

---

- $N_0 = 0$
- $N_{t_1} \leq N_{t_2}$  parat todo  $t_1 \leq t_2$
- $N_t$  toma valores en  $\mathbf{N} \cup \{0\}$

**Definición 1.14** (Proceso Poisson). *Una familia de variables aleatorias  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso Poisson si:*

- *es un proceso de contar*
- *tiene incrementos independientes y estacionarios*
- $P[N_h = 1] = \lambda h + o(h)$ , donde  $h$  es el tamaño del intervalo y se puede hacer tan chico como se quiere, i.e., que el evento ocurra una vez en el intervalo  $(t, t + h)$
- $P[N_h \geq 2] = o(h)$

donde  $o(h)$  es tal que,

$$\lim_{h \rightarrow 0} [o(h)/h] = 0.$$

Dado que el evento ocurre (i.e., llego información importante de la acción), hay un “dibujo” de una distribución que determina el impacto de tal información en el precio de la acción. Si  $S_t$  es el precio de la acción a tiempo  $t$  y  $Y$  es la variable aleatoria que describe tales “dibujos” entonces, dejando por ahora a un lado la parte continua, el precio de la acción a tiempo  $(t + h, S(t + h))$  es la variable aleatoria  $S(t + h) = S(t)Y$ , dado que tal arribo si se dio en el intervalo  $(t, t + h)$ . El soporte de  $Y$  es compacto y  $Y \geq 0$ . Más aún, la variable aleatoria  $\{Y\}$  de sucesión de dibujos son independientes e idénticamente distribuidas (iid).

Como se había mencionado el rendimiento del precio de la acción es una “mezcla” de los dos tipos de cambios antes mencionados. Formalmente lo que se expondrá como una ecuación diferencial estocástica.

$$dS_t = (\alpha - \lambda k)dt + \sigma dW + dN, \tag{1.53}$$

donde  $\alpha$  es el rendimiento instantáneo esperado de la acción,  $\sigma^2$  es la varianza del rendimiento, condicionada a que no hubo arribos de información, i.e., no ocurrieron eventos del proceso Poisson,  $dW$  es el Browniano estándar y  $N$  es el proceso Poisson descrito en la definición,  $dN$  y  $dW$  son independientes,  $\lambda$  es el número de arribos por unidad de tiempo,  $k = \mu_Y(Y - 1)$  donde  $Y - 1$  es el cambio porcentual de la variable aleatoria en el cambio del precio de la acción si el evento Poisson ocurre y  $\mu_Y$  es la esperanza de  $Y$ .

La ecuación (1.53) puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} dS_t &= (\alpha - \lambda k)dt + \sigma dW, \quad \text{Si el evento Poisson no ocurre.} \\ &= (\alpha - \lambda k)dt + \sigma dW + (Y - 1), \quad \text{Si el evento Poisson ocurre.} \end{aligned}$$

La trayectoria resultante de  $S_t$  será continua casi todo el tiempo con saltos finitos de distintos signos y amplitudes que ocurren en tiempo discreto.

Supóngase que el precio de la opción V puede ser escrito como dos funciones diferenciables continuas del precio de la acción y tiempo,  $V(t) = F(S, t)$ . Si el precio de la acción sigue la dinámica descrita en la ecuación anterior, entonces la dinámica del rendimiento de la opción puede ser escrita como

$$dV_t = (\alpha_V - \lambda k_V)dt + \sigma_V dW + dN_V, \quad (1.54)$$

donde  $\alpha_V$  es el rendimiento esperado de la opción y  $\sigma^2$  es la varianza del rendimiento, condicionada al evento Poisson de que no ocurra,  $N_V$  es un proceso Poisson independiente con parámetro  $\lambda$ ,  $k_V = \mu_{Y_V}(Y_V - 1)$  donde  $Y_V - 1$  es el cambio porcentual de la variable aleatoria en el cambio del precio de la opción si el evento Poisson ocurre y  $\mu_{Y_V}$  es la esperanza de  $Y_V$ .

Antes de continuar se citará un lema análogo a *Itô*.

**Lema 1.4.** Sean  $F(P_1, \dots, P_n, t)$  una función de clase  $C^2$  definida en  $R^n \times [0, \infty)$  y la integral estocástica

$$P_i(t) = P_i(0) + \int_0^t f_i(P, s)ds + \int_0^t g_i(P, s)dz_i \quad i = 1, \dots, n$$

entonces la variable aleatoria dependiente del tiempo  $Y \equiv F$  es una integral estocástica y su diferencial estocástica es

$$dY = \sum_1^n \frac{\partial F}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sum_1^n \sum_1^n \frac{\partial^2 F}{\partial P_i \partial P_j} dP_i dP_j.$$

Donde los productos de las diferenciales  $dP_i dP_j$  están definidos por

$$\begin{aligned} dZ_i dZ_j &= \rho_{ij} dt \quad i, j = 1, \dots, n \\ dZ_j dt &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$



#### 1.4. MODELO DE MERTON

---

donde  $\rho_{ij}$  es el coeficiente de correlación entre los movimientos Brownianos  $dZ_i$  y  $dZ_j$ .

Usando *Itô* para la parte continua y el lema anterior para la parte con salto se siguen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_V &\equiv \frac{\frac{1}{2}(\sigma S)^2 F_{SS}(S, t) + (\alpha - \lambda k) S F_S(S, t) + F_t + \lambda \mu (F(ST, t) - F(SS, t))}{F(S, t)} \\ \sigma_V &\equiv \frac{F_S(S, t) \sigma S}{F(S, t)},\end{aligned}\tag{1.55}$$

donde los subíndices de  $F(S, t)$  denotan derivadas parciales.

**Observación:** El evento dado por el proceso Poisson del precio de la opción ocurre sii el evento dado por el proceso Poisson del precio de la acción ocurre. Más aún, si ocurre el evento Poisson para la acción y la variable aleatoria  $Y$  toma el valor  $y$ , i.e.  $Y = y$ , entonces el evento para la opción también ocurre y la variable aleatoria  $Y_V = \frac{F(SY, t)}{F(S, t)}$ .

Considérese una estrategia de mercado que contenga la acción, la opción y el activo sin riesgo (con rendimiento  $r$  por unidad de tiempo) en proporciones  $w_1, w_2$  y  $w_3$  donde  $\sum_{j=1}^3 w_j = 1$ . Si  $P$  es el valor del portafolio, entonces la dinámica del rendimiento es

$$dP = (\alpha_P - \lambda k_P) dt + \sigma_P dW + dN_P,\tag{1.56}$$

donde  $\alpha_P$  es el rendimiento esperado de la opción y  $\sigma_P^2$  es la varianza del rendimiento, condicionada al evento Poisson de que no ocurra,  $N_P$  es un proceso Poisson independiente con parámetro  $\lambda$ ,  $k_P = \mu_{Y_P}(Y_P - 1)$  donde  $Y_P - 1$  es el cambio porcentual de la variable aleatoria en el cambio del precio de la opción si el evento Poisson ocurre y  $\mu_{Y_P}$  es la esperanza de  $Y_P$ .

De (1.53) y (1.54) se tiene

$$\begin{aligned}\alpha_P &\equiv w_1(\alpha - r) + w_2(\alpha_w - r) + r \\ \sigma_P &\equiv w_1\sigma + w_2\sigma_w \\ Y_P - 1 &\equiv w_1(Y - 1) + \frac{w_2[F(SY, t) - F(S, t)]}{F(S, t)},\end{aligned}\tag{1.57}$$

donde  $w_3 = 1 - w_1 - w_2$ .

En el análisis de Black & Scholes con  $\lambda = 0$  el rendimiento del portafolio puede hacerse libre de riesgo escogiendo  $w_1 = w_1^*$  y  $w_2 = w_2^*$  de tal manera que  $w_1^*\sigma + w_2^*\sigma_V = 0$ . Dado esto se debe evitar arbitraje en el rendimiento esperado del portafolio con peso  $w_1^*$  y

$w_2^*$  igual a la tasa libre de riesgo  $r$ . Usando la primeras ecuaciones de (1.57) ésta condición implica

$$\frac{\sigma_V}{\sigma} = \frac{\alpha_V - r}{\alpha - r}.$$

Tomando la definición de  $\alpha_V$ , con  $\lambda = 0$ , de  $\sigma_V$  de (1.55) y tomando la conclusión de arriba se llega a la famosa ecuación para la valuación de opciones

$$\frac{1}{2}(\sigma S)^2 F_{SS} + rSF_S - rF + F_t = 0. \quad (1.58)$$

Se puede verificar que la solución de la ecuación anterior viene dada por

$$F(S, t) = S\Phi(f_-(S, t)) - e^{-rT}K\Phi(f_+(S, t)),$$

donde

$$f_+ = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left( \log \frac{S}{K} + \left( r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) \right)$$

$$f_- = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left( \log \frac{S}{K} + \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) \right)$$

y para el caso en el que  $t = 0$  se obtienen las ecuaciones (1.13) y (1.14).

Nótese que con la presencia del proceso de salto  $dq$ , el rendimiento del portafolio con pesos  $w_1^*$  y  $w_2^*$  no será libre de riesgo. Más aún la tercera ecuación de (1.57) nos dice que no se puede eliminar el término de “salto”, i.e., hacer  $Y_P = 1$ . Esto sucede pues la composición del portafolio es lineal y el precio de la opción es una función no lineal del precio de la acción. Por lo tanto si  $Y$  tiene una dispersión positiva, (en el caso en que  $\sigma^2 = 0$  y  $Y$  un proceso Poisson puro, entonces se puede crear una cobertura libre de riesgo) entonces para cualquier  $w_1$  y  $w_2$ ,  $Y_P - 1$  tomará valores distintos de cero para algunos valores de  $Y$ .

De la cobertura de Black & Scholes se sigue que uno puede trabajar las características del rendimiento del portafolio. Sea  $P^*$  el valor del portafolio, entonces por (1.56) se tiene

$$dP^* = (\alpha_P^* - \lambda k_P^*)dt + dN_P^*. \quad (1.59)$$

Nótese que el rendimiento del portafolio es un proceso de salto puro pues la parte continua de la acción y precio fueron cubiertas, además se puede observar que el rendimiento del portafolio será predecible y su rendimiento será  $\alpha_P^* - \lambda k_P^*$ .

De (1.55) y (1.57) se sigue que

$$Y_P^* - 1 = \frac{w_2^*[F(SY, t) - F(S, t) - F_S(S, t)(SY - S)]}{F(S, t)}$$

Por la convexidad del precio de la opción en el precio de la acción  $F(SY, t) - F(S, t) - F_S(S, t)(SY - S)$  es positivo para cualquier valor  $Y$ . Luego, si  $w_2^*$  es positivo, entonces  $Y_P^* - 1$  también será positivo y el rendimiento inesperado de la cobertura del portafolio será siempre positiva. De manera análoga si  $w_2^*$  es negativo. Más aún el signo de  $k_P^*$  será el mismo que el de  $w_2^*$ .

### 1.4.2. Fórmula para la Valuación de Opciones con Salto

En la sección pasada se vio que no hay manera de construir un portafolio libre de riesgo de la acción y la opción, entonces no se puede usar la técnica de Black & Scholes de no arbitraje. Sea  $g(S, T)$  el equilibrio instantáneo de la tasa esperada del rendimiento de la opción cuando el precio de la acción es  $S$  y la fecha de maduración es  $T$ . Luego de (1.55),  $F$  escrita como función dependiente del tiempo de expiración satisface

$$\frac{1}{2}(\sigma S)^2 F_{SS} + (\alpha - \lambda k) S F_S - F_t - g(S, T) F + \lambda \mu [F(SY, T) - F(S, T)] = 0 \quad (1.60)$$

sujeta a las condiciones

$$\begin{aligned} F(0, T) &= 0 \\ F(S, 0) &= \max(0, S - K), \end{aligned}$$

donde  $K$  es el precio de ejercicio de la opción.

Una segunda aproximación del problema de valuación se sigue de la derivación original de Black & Scholes la cual asume que el CAPM es una descripción válida de equilibrio en los rendimientos de los valores. En la sección pasada se vio que la dinámica del precio del stock está descrita por dos componentes: la parte continua que representa la llegada de nueva información y la parte de salto que representa la llegada de nueva información importante. Si ésta última información es específica de una empresa o industria, entonces puede tener un leve impacto en el mercado. Si los saltos son provenientes de tal información, entonces la parte de salto del rendimiento del stock representará un riesgo no previsible, i.e., la componente del salto no será correlacionada con el mercado.

Retomando  $P^*$  de la sección pasada en la ecuación (1.59) se muestra que la única parte incierta es la componente de salto de la acción. Pero por hipótesis tales componentes representan un riesgo no previsible, por lo tanto la “beta” de éste portafolio es cero. Si el CAPM se cumple, entonces el rendimiento esperado en todos los valores cero-beta deben ser iguales a la tasa libre de riesgo. Por lo tanto,  $\alpha_P^* = r$ . Pero de (1.57) esto implica que

$$w_1^*(\alpha - r) + w_2^*(\alpha_W - r) = 0$$

o bien

$$\frac{\sigma_W}{\sigma} = \frac{\alpha_W - r}{\alpha - r}. \quad (1.61)$$

Combinando (1.61) con (1.55) implica que F debe cumplir

$$\frac{1}{2}(\sigma S)^2 F_{SS} + (r - \lambda k) S F_S - F_T - rF + \lambda \mu [F(SY, T) - F(S, T)] = 0 \quad (1.62)$$

sujeta a las mismas condiciones que (1.60). Nótese que la ecuación dada sólo depende de la tasa de interés  $r$  y no de  $\alpha$  y  $g(S, T)$  como en el caso estándar de Black & Scholes. Más aún (1.62) es igual a (1.58) con  $\lambda = 0$ , i.e., no hay saltos.

Sea  $G^{BS}(S, T; K, \sigma^2, r)$  la fórmula para la valuación de opciones de Black & Scholes para el caso en donde no hay saltos, entonces  $G^{BS}$  satisface (1.58) bajo las mismas condiciones de frontera. De la sección 1.2 se puede escribir a  $G^{BS}$  como (1.13) para el caso de una call-europea.

Sean  $X_n$  una variable aleatoria que tenga la misma distribución del producto de  $n$  variables aleatorias iid cada una idénticamente distribuidas a  $Y$  definida en (1.53) donde se denota a  $X_0 \equiv 1$ ,  $\mu_{X_n}$  es la esperanza de  $X_n$ .

La solución de (1.62) con  $S$  el precio de la acción puede ser escrita como

$$F(S, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp\{-\lambda T\} (\lambda T)^n}{n!} \mu_{X_n} [G^{BS}(S X_n \exp\{-\lambda k T\}, T; K, \sigma^2, r)]. \quad (1.63)$$

Hay dos casos en los que (1.63) puede ser simplificada:

Caso I: Descrito por Samuelson (1972b) donde menciona que hay una probabilidad positiva de ruina inmediata, i.e., si ocurre el evento Poisson, entonces el precio de la acción se va a cero. En nuestra notación esto es  $Y \equiv 0$  con probabilidad uno, por lo tanto  $X_n = 0$  para  $n \neq 0$  y  $k = -1$ . Entonces (1.63) se convierte en

$$\begin{aligned} F(S, T) &= \exp\{-\lambda T\} G^{BS}[S \exp\{\lambda T\}, T; K, \sigma^2, r] \\ &= G^{BS}(S, T; K, \sigma^2, r + \lambda). \end{aligned}$$

Ésta ecuación es igual a la fórmula estándar de Black & Scholes pero con una tasa de interés mayor, como se mencionó en la sección 1.2.2; el precio de la opción es una función creciente de la tasa de interés.

#### 1.4. MODELO DE MERTON

---

Caso II: La variable aleatoria  $Y$  se distribuye log-normal. Sean  $\delta^2$  la varianza de  $\log(Y)$  y  $\gamma = \log(1 + k)$ . En este caso,  $X_n$  se distribuirá log-normal con la varianza del  $\log(X_n) = \delta^2 n$  y  $\mu_{X_n} = \exp\{n\gamma\}$  y  $f_n(S, T) = G^{BS}(S, T; K, \nu_n^2, r_n)$ , donde  $\nu_n^2 = \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{T}$  y  $r_n = r - \lambda k + \frac{n\gamma}{T}$ . Entonces (1.62) se convierte en

$$F(S, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp\{-\lambda'T\}(\lambda'T)^n}{n!} f_n(S, T),$$

donde  $\lambda' = \lambda(1+k)$ .  $f_n(S, T)$  es el valor de la opción condicionado a saber que exactamente  $n$  saltos Poisson ocurrirán durante la vida de la opción.

## Capítulo 2

# Modelos con Saltos

En este capítulo se verá la generalización del modelo de Black & Scholes y uno de tantos modelos que presentan saltos, que es el caso de la Transformada de Esscher. Se dará una explicación de porque este tipo de modelos son incompletos y la fórmula para la valuación de opciones con este modelo en particular.

### 2.1. Modelo de Samuelson

Como se mencionó anteriormente, el inicio de la teoría moderna para la valuación de opciones comenzó con el trabajo de Bachelier (1900) [1] con su modelo lineal

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t.$$

Apesar del avance en la aplicación de conceptos probabilísticos en el análisis de mercados financieros, éste modelo tenía sus deficiencias, la más notable es que los precios subyacentes  $S_t$  podían tomar valores negativos.

Aproximadamente después de 10 años, inspirado por el trabajo de Bachelier, fue publicado el trabajo de Samuelson (1965). En este modelo no se toma en cuenta la devaluación del tiempo (tasa de interés). Se considera una acción  $S_t$  con tasa  $r$  libre de riesgo y derivado  $g$  tipo europeo con fecha de maduración  $T$ . Samuelson supuso que los log-rendimientos podían ser modelados de forma lineal como lo había propuesto Bachelier, esto es

$$\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}t\right) + \sigma W_t.$$

Utilizando Itô,

$$dS_t = S_t\mu dt + S_t\sigma dW_t.$$

Aunque la fórmula de Samuelson (1965) no proponía ninguna distribución en específico, lo que propuso es que el precio de una opción de compra se podía ver como el valor presente por el valor esperado del derivado, i.e.

$$e^{-\rho T} \mathbb{E}[(S_T - K)_+],$$

donde  $\rho$  es el rendimiento de la opción.

En el precio de una acción está incluido su rendimiento esperado y su riesgo, dado por

$$\frac{\mathbb{E}[S_T]}{S_0}$$

a tiempo T. Se normaliza  $S_T$  al día de hoy como  $S_T S_0 / \mathbb{E}(S_T)$ . Este es el valor “presente” riesgoso y es aleatorio. Al llevar tal valor a tiempo T se tiene

$$e^{rT} S_T S_0 / \mathbb{E}[S_T], \tag{2.1}$$

ejerciendo y trayendolo a valor presente

$$e^{-rT} g(e^{rT} S_T S_0 / \mathbb{E}[S_T]), \tag{2.2}$$

entonces una prima justa para el derivado es

$$p(g) = e^{-rT} \mathbb{E} \left( g \left( e^{rT} S_0 \frac{S_T}{\mathbb{E}(S_T)} \right) \right). \tag{2.3}$$

Los mercados incompletos se caracterizan por falta de información, no existe una cobertura perfecta, existe una infinidad de medidas de riesgo neutral y una infinidad de precios que son llamados admisibles.

**Definición 2.1.** Una medida  $Q$  es de riesgo neutral si:

- $Q$  es equivalente a  $P$  ( $Q \approx P$ ), donde  $P$  es la medida original.
- El proceso de precio descontado es martingala bajo  $Q$ .

## 2.2. Algunas Opciones para la Elección de la Medida de Riesgo Neutral

Existen diversas formas para la elección de una medida de riesgo neutral. Una de ellas es la Medida Martingala Minimal.

En el caso de un mercado incompleto, como se mencionó, la medida equivalente a  $P$  deja de ser única. Por lo tanto se debe de tener cuidado en la elección de la medida martingala  $\hat{P}$  para determinar la estrategia óptima en términos de ésta misma. Föllmer y Schweizer (1990) proponen la medida martingala minimal  $\hat{P}$  la cual hace que  $S$  sea martingala.

En el caso de mercado incompleto, un contingente tendrá un riesgo intrínseco y se busca construir y caracterizar cierto tipo de estrategias tal que minimizen el riesgo. Para el caso de martingalas, el concepto de minimizar el riesgo de la estrategia se introdujo por Föllmer y Sondermann (1986). Schweizer (1988), definió la minimización de riesgo de forma local, y la construcción de tales estrategias se redujo a una ecuación de optimalidad estocástica.

Föllmer y Schweizer (1990) consideraron el caso general en el que el precio de la acción,  $S$ , no es martingala sino una semimartingala bajo  $P$ , la medida original.

**Definición 2.2.** Una medida  $\hat{P} \approx P$  es minimal si

- $\hat{P} = P$  en  $\zeta_0$ ,  $\sigma$ -álgebra a tiempo 0.
- Para cualquier martingala cuadrado-integrable que es ortogonal a  $M$ , otra martingala cuadrado-integrable, entonces esta es martingala bajo  $\hat{P}$ , i.e.,

$$L \in M^2 \text{ y } \langle L, M \rangle = 0 \Rightarrow L \text{ es martingala bajo } \hat{P}.$$

En la clase de todas las medidas martingalas equivalentes, esta mínima modificación en la medida original,  $P$ , también puede ser representada en terminos de la entropía relativa  $H(\cdot|P)$ .

$$H(Q|P) = \begin{cases} \mathbb{E} \left[ \frac{dQ}{dP} \log \frac{dQ}{dP} \right] & \text{si } Q < P \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Algunas propiedades de ésta es que es no-negativa y  $H(Q|P) = 0$  si y solo si  $Q = P$ .

Otra forma para la elección de medida de riesgo neutral es la Transformada de Esscher.



### 2.3. TRANSFORMADA DE ESSCHER

---

En el libro *Stochastic Finance, An introduction in Discrete Time* de Föllmer y Schied en el capítulo 3 proponen que la maximización de una función de utilidad de la ganancia neta descontada, a lo que se le conoce como payoff, es equivalente a la minimización de la función generadora de momentos,  $Z(\lambda) = \mathbb{E}[e^{\lambda Y}]$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 2.1.** *Sea  $m_0 = m(P_{\lambda_0})$  para algún  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ . Entonces para cualquier medida  $Q$  tal que  $E_Q[Y] = m_0$ ,*

$$H(Q|P) \geq H(P_{\lambda_0}|P) = \lambda_0 m_0 - \log Z(\lambda_0),$$

*y la igualdad se da si  $Q = P_{\lambda_0}$ .*

Donde  $m(\lambda) = \frac{1}{Z(\lambda)} \mathbb{E}[Y e^{\lambda Y}]$  y  $P_\lambda$  es un elemento de  $\{P_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$ , conjunto de la familia de medidas exponenciales de  $P$  respecto a  $Y$ , definida como

$$\frac{dP_\lambda}{dP} = \frac{e^{\lambda Y}}{Z(\lambda)}.$$

En este teorema si se toma a  $m_0 = 0$ , entonces se da una medida equivalente de riesgo neutral llamada medida de riesgo neutral minimizadora de entropía, también se le conoce como la transformada de Esscher de  $P$ .

En la siguiente sección se profundizara más en ésta última.

### 2.3. Transformada de Esscher

Este método es también una herramienta eficiente para la valuación de derivados si el logaritmo del valor de los precios están regidos por un proceso estocástico con incrementos estacionarios e independientes. Esta familia de procesos incluye el Movimiento Browniano, el proceso Poisson, el proceso Gamma y proceso Gaussiano inverso.

Este modelo es utilizado para la construcción de una medida de riesgo neutral asignando mayor peso a eventos adversos y menor peso a eventos benéficos. La Transformada de Esscher es conocida desde 1932 [9].

Una aplicación de ésta, además de la valuación de derivados es en las aseguradoras.

Las compañías de seguros se basan en sus cálculos de seguro de vida no en la distribución de la esperanza de vida (tablas de mortalidad de segundo tipo, la tabla de mortalidad de cohorte, se basa en las tasas de mortalidad experimentadas por una cohorte relacionada con el nacimiento), si no, en otra distribución (tablas de mortalidad de primer tipo, se basa en la experiencia sobre un período corto de tiempo, por ejemplo, un año, tres años o

un período inter censal, en el cual la mortalidad ha permanecido mas o menos igual) que tiene la propiedad de intercambiar el balance entre eventos benéficos y adversos.

Para una función de densidad  $f(x)$ , sea  $h$  un real tal que  $M(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{hx} f(x) dx$  existe como una función en  $x$ ,

$$f(x; h) = \frac{e^{hx} f(x)}{M(h)} \quad (2.4)$$

es una densidad y se le llama *Transformada de Esscher* (con parámetro  $h$ ) de la distribución original.

Sea  $S_t$  como antes, el precio de una acción que no paga dividendos a tiempo  $t$  y  $S_t = S_0 e^{X(t)}$  donde  $X(t)$  es un proceso estocástico con incrementos estacionarios e independientes que se puede ver como - continuously compounded rate of return - (tasa de rendimiento continua). Sea  $M(z, t) = \mathbb{E}[e^{zX(t)}]$  la función generadora de momentos. Asumiendo que  $M(z, t)$  es continua en  $t=0$  entonces

$$M(z, t) = [M(z, 1)]^t. \quad (2.5)$$

Supóngase que  $X(t)$  tiene densidad

$$f(x, t) = \frac{d}{dx} F(x, t), t > 0; \quad (2.6)$$

entonces

$$M(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} f(x, t) dx. \quad (2.7)$$

Sea  $h$  un real tal que  $M(h, t)$  existe y por lo anterior si  $M(h, t)$  existe para un real positivo entonces existe para todo real positivo. Ahora se introducirá la *Transformada de Esscher* con parámetro  $h$  del proceso  $X(t)$ . Donde este vuelve a ser un proceso con incrementos independientes y estacionarios.

Definiendo a la función de densidad de  $X(t)$  como

$$f(x, t; h) = \frac{e^{hx} f(x, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} f(y, t) dy} = \frac{e^{hx} f(x, t)}{M(h, t)}. \quad (2.8)$$

Esto es, la distribución modificada de  $X(t)$  es la *Transformada de Esscher* de la función original. La generadora de momentos correspondiente es

$$\begin{aligned} M(z, t; h) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} f(x, t; h) dx \\ &= \frac{M(z + h, t)}{M(h, t)}; \end{aligned} \quad (2.9)$$

y por (2.5)

$$M(z, t; h) = [M(z, 1; h)]^t. \quad (2.10)$$

En el artículo de *Gerber y Shiu* se encuentra  $h=h^*$  tal que  $\{e^{rt}S_t\}_{t \geq 0}$  es martingala con respecto a la medida de probabilidad correspondiente con  $h^*$ , donde  $h^*$  es la solución a la ecuación  $e^{rt} = M(1, t; h^*)$  y es de tal forma que  $r = \log[M(1, 1; h^*)]$ . A la *Transformada de Esscher* de parámetro  $h^*$  se le llama *Transformada de Esscher de riesgo neutral* y a la correspondiente medida de martingala equivalente la *medida de Esscher de riesgo neutral*, que es única.

Considérese una opción call-europea con precio de ejercicio  $K$  y fecha de ejercicio  $T$ ,  $T \geq 0$ . El valor al tiempo cero es de

$$\mathbb{E}^*[e^{rT}(S(T) - K)_+]. \quad (2.11)$$

Recordando la definición de  $x_+$ , tomando a  $b = \log[K/S_0]$  y utilizando la definición de esperanza, (2.11) es

$$e^{-rT} \int_b^{\infty} [S_0 e^x - K] f(x, T; h^*) dx = e^{-rT} S_0 \int_b^{\infty} e^x f(x, T; h^*) dx - e^{-rT} K [1 - F(b, T; h^*)]. \quad (2.12)$$

Tomando en cuenta (2.8), (2.9) y  $e^{rT} = M(1, T; h^*)$  se tiene que

$$e^x f(x, T; h^*) = e^{rT} f(x, T; h^* + 1),$$

sustituyendolo en (2.12) se sigue el precio de una call-europea con precio de ejercicio  $K$  y fecha de ejercicio  $T$ .

$$S_0 [1 - F(b, T; h^* + 1)] - e^{-rT} K [1 - F(b, T; h^*)]. \quad (2.13)$$

Donde (2.13) contiene, entre otras, la fórmula de Black-Scholes.

### 2.3.1. Logaritmo del Precio de una Acción con Distribución Normal

Como hipótesis clásica se supondrá que el precio de la acción tiene una distribución log-normal y sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento Browniano con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Entonces

$$f(x, t) = N(x; \mu t, \sigma^2 t)$$

y

$$M(z, t) = \exp \left\{ \left( \mu z + \frac{1}{2} \sigma^2 z^2 \right) t \right\}.$$

Donde  $N(x; \mu, \sigma^2)$  denota la función de distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Por (2.9) se sigue

$$M(z, t; h) = \exp \left\{ \left( (\mu + h\sigma^2)z + \frac{1}{2} \sigma^2 z^2 \right) t \right\}.$$

Entonces la *Transformada de Esscher* (con parámetro  $h$ ) de la Normal vuelve a ser una Normal, pero con media modificada  $(\mu + h\sigma^2)$  y misma varianza, de donde

$$f(x, t; h) = N(x; (\mu + h\sigma^2)t, \sigma^2 t) \quad (2.14)$$

y por  $r = \log[M(1, 1; h^*)]$  se tiene

$$r = (\mu + h^* \sigma^2) + \frac{1}{2} \sigma^2.$$

Por consiguiente, el 'proceso' transformado tiene media

$$\mu^* = \mu + h^* \sigma^2 = r - (\sigma^2/2). \quad (2.15)$$

De (2.13) se sigue que el precio de una call-europea es

$$\begin{aligned} & S_0 [1 - N(b; (\mu^* + \sigma^2)T, \sigma^2 T)] - e^{-rT} K [1 - N(b; \mu^* T, \sigma^2 T)] \\ &= S_0 \left[ 1 - N \left( b; \left( r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T, \sigma^2 T \right) \right] - e^{-rT} K \left[ 1 - N \left( b; \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ahora, utilizando la distribución normal estándar  $\Phi$ , (2.16) resulta

$$S_0 \Phi \left( \frac{-b + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - e^{-rT} K \Phi \left( \frac{-b + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right), \quad (2.17)$$

donde (2.17) es la clásica fórmula de Black & Scholes.

### 2.3.2. Logaritmo del Precio de una Acción Como un Proceso Poisson Defazado

La valuación de opciones con este tipo de movimientos lo estudiaron Cox y Ross (1976) en su artículo “The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes”, sin embargo, no obtuvieron ninguna fórmula. Ésta apareció años después en el artículo “Option Pricing: A Simplificated Approach” de Cox, Ross y Rubinstein (1979), se creó a partir de un caso límite de la fórmula del modelo binomial para la valuación de opciones.

Sea  $X_t = kN(t) - ct$ , donde  $\{N(t)\}$  es el proceso Poisson con parámetro  $\lambda$ ,  $k$  y  $c$  son constantes positivas y  $X_t = \log(\frac{S_t}{S_0})$ . Sea

$$\Lambda(x, \lambda) = \sum_{0 \leq j \leq x} \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!},$$

la distribución Poisson con parámetro  $\lambda$ . Entonces la distribución de  $X_t$  resulta

$$f(x, t) = \Lambda\left(\frac{x + ct}{k}, \lambda t\right). \quad (2.18)$$

Como la generadora de momentos de una Poisson es

$$\mathbb{E}[e^{zN(t)}] = \exp\{\lambda t(e^z - 1)\},$$

entonces

$$M(z, t) = e^{[\lambda(e^{zk} - 1) - cz]t}, \quad (2.19)$$

de donde se obtiene

$$M(z, t; h) = e^{[\lambda e^{hk}(e^{zk} - 1) - cz]t}. \quad (2.20)$$

Luego, la *Transformada de Esscher* (con parámetro  $h$ ) de un proceso Poisson defazado vuelve a ser un proceso Poisson defazado con parámetro modificado,  $\lambda e^{hk}$ .

Por  $r = \log[M(1, 1; h^*)]$  se tiene la condición

$$r = \lambda e^{h^*k}(e^k - 1) - c,$$

por lo tanto un derivado es valuado de acuerdo al parámetro modificado  $\lambda^*$ , donde

$$\lambda^* = \lambda e^{hk} = \frac{r + c}{e^k - 1}.$$

De (2.13) y (2.18), el precio para una call-europea resulta

$$S_0[1 - \Lambda((b + cT)/k; \lambda^* e^{kT})] - Ke^{-rT}[1 - \Lambda((b + cT)/k; \lambda^* T)]. \quad (2.21)$$

### 2.3.3. Logaritmo del Precio de una Acción Como un Proceso Gamma Desfazado

**Definición 2.3.** *Un proceso  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Lévy si:*

- $X_0 = 0$ .
- $X_t$  tiene trayectorias continuas por la derecha con límite a la izquierda (cadlag).
- Tiene incrementos independientes y homogéneos, i.e., si  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , entonces  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$  son variables aleatorias independientes y  $X_t - X_s \sim X_{t-s}$ .

**Definición 2.4.** *Un proceso Gamma es un proceso de Lévy con incrementos independientes que se distribuyen Gamma.*

El proceso Gamma es estrictamente creciente y no tiene un componente de difusión, es un proceso de salto puro. Dado que la distribución Gamma sólo tiene saltos positivos, sólo puede haber saltos numerables, y el proceso Gamma tiene que ser continuo en casi todas partes. Como muestra la Figura 2.1 se ve, que para  $\lambda$  pequeña, la densidad se concentra cerca de cero. Por lo tanto, el proceso Gamma es como un proceso Poisson, incluyendo saltos pequeños. Esto podría ser una descripción útil de los precios de las acciones, que tienen pequeños saltos en la escala de tiempo de transacción y accidentes poco frecuentes en una escala de tiempo mayor. Nótese que durante largos períodos, los incrementos gamma son aproximadamente normales. Por lo tanto, este proceso se asemeja a un movimiento Browniano que es discontinuo infinitesimalmente. La media y la varianza de esta distribución son iguales a los grados de libertad. Al igual que el movimiento

### 2.3. TRANSFORMADA DE ESSCHER

---

Browniano y el proceso de Poisson, el proceso Gamma tiene incrementos independientes, con una variación constante por unidad de tiempo.

Para mayor información sobre el proceso Gamma véase [16].

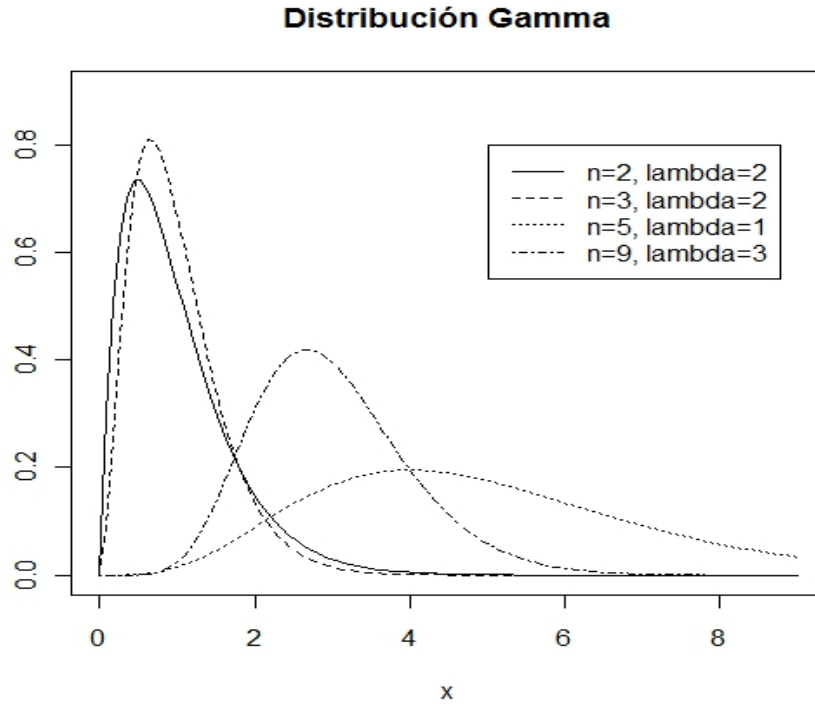


Figura 2.1: Gráfica de una densidad Gamma

Supóngase que  $X_t = Y(t) - ct$ , donde  $Y(t)$  es un proceso Gamma con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , y  $c$  es un tercer parámetro constante y positivo. Se denotará como  $g(x; \alpha, \beta)$  a la distribución Gamma, donde

$$g(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-\beta y} dy, \quad x \geq 0.$$

Entonces

$$f(x, t) = g(x + ct; \alpha t, \beta) \tag{2.22}$$

y

$$M(z, t) = \left( \frac{\beta}{\beta - z} \right)^{\alpha t} e^{-ctz}, \quad z < \beta. \quad (2.23)$$

Por lo tanto,

$$M(z, t; h) = \left( \frac{\beta - h}{\beta - h - z} \right)^{\alpha t} e^{-ctz}, \quad z < \beta - h, \quad (2.24)$$

que bajo la *Transformada de Esscher* vuelve a ser el mismo proceso con  $\beta - h$  en lugar de  $\beta$ . Recordando  $r = \log[M(1, 1; h^*)]$  se tiene que

$$e^r = \left( \frac{\beta - h^*}{\beta - h^* - 1} \right)^{\alpha} e^{-c}.$$

Defínase  $\beta^* = \beta - h^*$ , entonces por lo anterior se obtiene

$$\beta^* = \frac{1}{1 - e^{-(c+r)/\alpha}}. \quad (2.25)$$

En este caso el precio de una call-europea queda como

$$S_0[1 - g(b + cT; \alpha T, \beta^* - 1)] - Ke^{-rT}[1 - g(b + cT; \alpha T, \beta^*)]. \quad (2.26)$$

### 2.3.4. Logaritmo del Precio de una Acción Como un Proceso Desfazado con Distribución Gaussiana Inversa

Supóngase a  $X_t$  como antes, i.e.,  $X_t = Y_t - ct$  donde  $Y_t$  es un proceso Gaussiano Inverso.

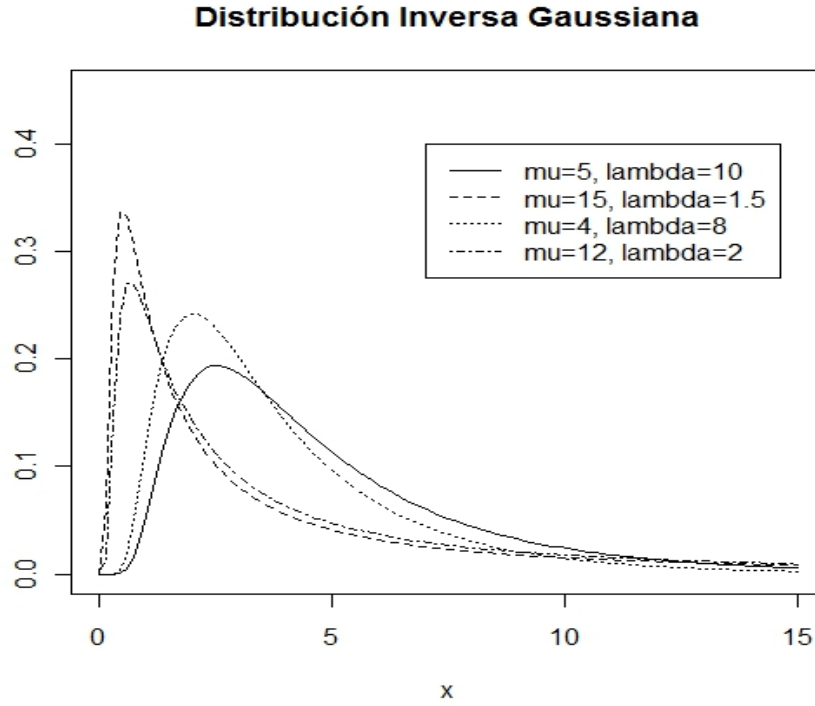
La función de densidad de una distribución Gaussiana Inversa se define como

$$f(x; \alpha, \beta) = \left( \frac{\beta}{2\pi x^3} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\beta}{2\alpha^2 x} (x - \alpha)^2 \right\}$$

y su función de distribución está dada por

$$F(x; \alpha, \beta) = \Phi\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{2x}} + \sqrt{2\beta x}\right) + e^{2\alpha\sqrt{\beta}} \Phi\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{2x}} - \sqrt{2\beta x}\right), \quad x > 0.$$





Entonces se tiene  $F(x+ct;\alpha,t,\beta)$  y dado que la función generadora de momentos de una Gaussiana Inversa es de la forma

$$\exp \left\{ \alpha(\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta - z}) \right\},$$

entonces

$$M(z, t) = \exp \left\{ \alpha t(\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta - z}) - ctz \right\}, \quad (2.27)$$

luego

$$M(z, t, h) = \exp \left\{ \alpha t(\sqrt{\beta - h} - \sqrt{\beta - h - z}) - ctz \right\}.$$

Recordando la ecuación  $r = \log(M(1,1;h^*))$  para obtener la Transformada de Esscher se tiene

$$r = \alpha(\sqrt{\beta - h^*} - \sqrt{\beta - h^* - 1}) - c.$$

Tomando a  $\beta^* = \beta - h^*$  se sigue que

$$\sqrt{\beta^*} - \sqrt{\beta^* - 1} = \frac{c + r}{\alpha}.$$

Con un poco de álgebra se obtiene que

$$\beta^* = \left[ \frac{c^2 + 2cr + r^2 + \alpha^2}{2c^2 + 4cr + 2r^2} \right]^2.$$

Por lo tanto por (2.13) se tiene que el precio para una call-europea es

$$S_0 [1 - F(b + cT; \alpha T, \beta^* - 1)] - Ke^{-rT} [1 - F(b + cT; \alpha T, \beta^*)] \quad (2.28)$$

### 2.3.5. Distribución Hiperbólica

Eberlein y Keller (1995) hicieron una investigación para determinar qué distribución era la más correcta para los rendimientos. Entre los muchos modelos que han sido investigados, además de la distribución normal, se pueden mencionar la distribución Pareto, la *t* de Student, entre otras, pero Eberlein y Keller (1995) encontraron que es la clase de distribuciones hiperbólicas la que mejor se ajusta y da un modelo más realista. Éste tipo de distribuciones se han utilizado en diferentes áreas, una de ellas es el modelado de la distribución del tamaño de una partícula de depósitos de arena eólica, otras áreas son el modelado de turbulencia y el uso de distribuciones hiperbólicas en física estadística.

Eberlein y Keller (1995) demostraron que la mejor distribución es la hiperbólica tomando datos reales. En nuestro caso se hará lo mismo, tomando uno de los casos de la distribución hiperbólica, la normal inversa gaussiana (NIG) cuyo caso se verá en la siguiente subsección, y con la ayuda de la Transformada de Esscher se obtendrá una fórmula para la valuación de derivados con distribución hiperbólica.

Como antes se mencionó, la distribución hiperbólica es infinitamente divisible; esto se demostró por Brandorff-Nielsen y Halgreen (1977) probando que la distribución Gaussiana-Inversa generalizada, que es usada en la representación de la distribución hiperbólica como una mezcla de normales, es infinitamente divisible.

Una característica de esta distribución es que su log-densidad es una hipérbola. La parametrización de la densidad hiperbólica está dada por

$$\text{hyp}(x) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \exp \left\{ -\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu^2)} + \beta(x - \mu) \right\}, \quad (2.29)$$

### 2.3. TRANSFORMADA DE ESSCHER

---

donde  $K_1$  es la función de Bessel modificada de tercer tipo con índice 1.  $\alpha$  y  $\beta$  con  $0 \leq |\beta| < \alpha$ , determinan la forma de la distribución, mientras que  $\delta$  y  $\mu$  son los parámetros de escala y localización. Con  $\xi = (1 + \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})^{-1/2}$  y  $\chi = \xi\beta/\alpha$  se obtiene una parametrización diferente,  $\text{hyp}(x; \chi, \xi, \delta, \mu)$  donde  $0 \leq |\chi| < \xi$ , que tiene la ventaja de que  $\xi$  y  $\chi$  son invariantes bajo transformaciones de escala y localización.

Téngase en cuenta los casos límites y que es lo que se obtiene si:  $\xi \rightarrow 0$  se tiene la distribución normal, si  $\xi \rightarrow 1$  se tiene la distribución de Laplace simétrica y asimétrica, para  $\chi \rightarrow \pm\xi$  es la distribución Gaussiana Inversa Generalizada (aquí si se toma a  $\lambda = -\frac{1}{2}$ , resulta la distribución Normal Inversa Gaussiana) y por último  $|\chi| \rightarrow 1$  se tiene una distribución exponencial.

En la tercera sección del artículo de Eberlein y Keller (1995) concluyen que hay que limitarse al caso simétrico, i.e.,  $\beta = \mu = 0$ . Usando  $\zeta = \xi^{-2} - 1$ . La ecuación (2.29) se convierte en

$$\text{hyp}_{\zeta, \delta}(x) = \frac{1}{2\delta K_1(\zeta)} \exp \left\{ -\zeta \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\delta}\right)^2} \right\}. \quad (2.30)$$

Sea  $(Z_t^{\zeta, \delta})_{t \geq 0}$  el proceso de Lévy con densidad  $\text{hyp}_{\zeta, \delta}$ , tal que  $Z_0^{\zeta, \delta} = 0$  y  $L(Z_1^{\zeta, \delta})$  tiene densidad  $\text{hyp}_{\zeta, \delta}$ . A  $(Z_t^{\zeta, \delta})_{t \geq 0}$  se le llamará movimiento hiperbólico de Lévy.

La dinámica que plantean Eberlein y Keller (1995) para una acción con rendimientos hiperbólicos en intervalos de tamaño 1 esta dada por

$$S_t = S_0 \exp\{Z_t^{\zeta, \delta}\}. \quad (2.31)$$

Este modelo no es completo, es aquí donde se recurre a la Transformada de Esscher.

Antes de continuar se verificará cuál es la función característica de la distribución hiperbólica y la función de densidad de  $L(Z_t^{\zeta, \delta})$  dadas, respectivamente, por

$$\phi(u; \zeta, \delta) = \frac{\zeta K_1(\sqrt{\zeta^2 + \delta^2 u^2})}{K_1(\zeta) \sqrt{\zeta^2 + \delta^2 u^2}}$$

y

$$f_t^{\zeta, \delta}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(ux) \phi_t(u; \zeta, \delta) du.$$

Si se supone que  $f_t^{\zeta, \delta}$  es la función de densidad de  $L(Z_t^{\zeta, \delta})$ , entonces utilizando la

Transformada de Esscher y por (2.8) se tiene

$$f_t^{\zeta, \delta}(x; h) = \frac{e^{hx} f_t^{\zeta, \delta}(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} f_t^{\zeta, \delta}(y) dy}. \quad (2.32)$$

Se procederá a encontrar  $h = h^*$ , al igual que se hizo el cálculo al principio de ésta sección, tal que el proceso descontado  $(e^{rt} S_t)_{t \geq 0}$  sea martingala. En particular,

$$\begin{aligned} S_0 &= \mathbb{E}^*[e^{-rt} S_t] \\ &= e^{-rt} \mathbb{E}^*[S_t] \\ &= e^{-rt} S_0 \mathbb{E}^*[e^{Z_t^{\zeta, \delta}}] \quad \text{por (2.30)} \\ 1 &= e^{-rt} \mathbb{E}^*[e^{Z_t^{\zeta, \delta}}]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Por otro lado, si  $M^{\zeta, \delta}(u, t) = \mathbb{E}[\exp\{u Z_t^{\zeta, \delta}\}]$  es la generadora de momentos del movimiento hiperbólico de Lévy y  $M^{\zeta, \delta}(u, t; h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} f_t^{\zeta, \delta}(x; h) dx$ , entonces por (2.10) se tiene

$$M^{\zeta, \delta}(u, t; h) = M^{\zeta, \delta}(u, 1; h)^t.$$

Dado esto, se sigue de (2.33) que

$$\begin{aligned} e^r &= M^{\zeta, \delta}(1, 1; h) \\ &= \frac{M^{\zeta, \delta}(h+1, 1)}{M^{\zeta, \delta}(h, 1)}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Donde  $M^{\zeta, \delta}(u, 1)$  es fácil de obtener:

$$M^{\zeta, \delta}(u, 1) = \frac{\zeta K_1 \sqrt{\zeta^2 - \delta^2 u^2}}{K_1(\zeta) \sqrt{\zeta^2 - \delta^2 u^2}}, \quad |u| < \frac{\zeta}{\delta}.$$

Sustituyendo en (2.34) y resolviendo la ecuación, se obtiene el valor de  $h^*$ .

$$r = \log \frac{K_1 \sqrt{\zeta^2 - \delta^2 (h+1)^2}}{K_1 \sqrt{\zeta^2 - \delta^2 h^2}} - \frac{1}{2} \log \frac{\zeta^2 - \delta^2 (h+1)^2}{\zeta^2 - \delta^2 h^2}. \quad (2.35)$$

Como en casos anteriores, se calculará el precio para una call-europea

$$S_0 \int_b^\infty f_T^{\zeta, \delta}(x; h^* + 1) dx - e^{-rT} K \int_b^\infty f_T^{\zeta, \delta}(x; h^*) dx,$$

donde  $b = \log(K/S_0)$ .

El precio para la call-europea con dinámica hiperbólica se calculó numéricamente dando los resultado en la tabla (3.11) de la siguiente sección. Para calcular el precio de dicha opción se estimó a  $\sigma$  y  $\zeta$  como lo hicieron Eberlein y Keller (1995).

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\delta^2 K_2(\zeta)}{\zeta K_1(\zeta)} \\ \delta &= \left( \zeta \frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

### 2.3.6. Logaritmo del Precio de una Acción Como una Normal Gaussiana Inversa

Como antes se mencionó, un caso límite de la distribución hiperbólica es la distribución normal inversa gaussiana.

A este tipo de distribución también se le conoce como un proceso de Lévy. Éste proceso es relativamente nuevo y fue introducido en el artículo de Barndoff-Nielsen (1995), consideró mezclas de varianzas y medias de normales y definió la distribución Normal Inversa Gaussiana (NIG) como el caso cuando la mezcla de las distribuciones son Gaussianas Inversas.

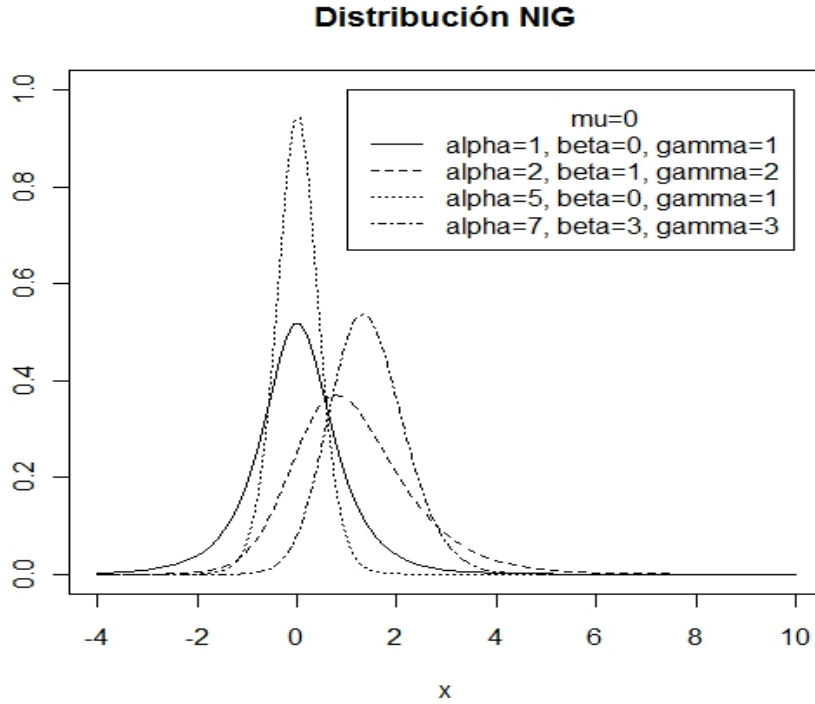
En éste mismo artículo se vio que cuando se utiliza este proceso para la valuación de opciones, el parámetro de lugar ( $\mu$ ) no tenía ningún efecto en el valor de la opción y por conveniencia se toma a  $\mu = 0$ . Este tipo de proceso por ser un caso límite de la hiperbólica, también es infinitamente divisible. Empieza en 0, tiene incrementos estacionarios e independientes  $\sim \text{NIG}(\alpha, \beta, \delta)$ .

La distribución de dicho proceso es,

$$g(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\alpha \delta K_1 \left( \alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right)}{\pi \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} \exp\{\delta \gamma + \beta(x - \mu)\}, \quad (2.36)$$

donde  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ .

Luego, suponiendo que  $X_t = Y_t - ct$ , donde Y sigue una distribución NIG y c es una constante positiva. Recurriendo a la Transformada de Esscher, se tiene que



$$M(z, t) = \exp\{t\delta(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + z)^2}) + \mu tz\} \quad (2.37)$$

entonces,

$$M(z, t, h) = \exp\{\delta t(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + h)^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + z + h)^2}) + \mu tz\}. \quad (2.38)$$

Que vuelve a ser una NIG pero con parámetro  $\beta = \beta + h$ . Retomando la ecuación  $r = \log(M(1, 1, h^*))$ , se tiene la condición

$$r = \delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + h)^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1 + h)^2}).$$

Tomando  $\beta^* = h^* + \beta$  se sigue que,

$$\beta^* = -\frac{\delta^4 + \delta^2 r^2 + r\sqrt{-\delta^2(\delta^2 + r^2)(\delta^2 + r^2 - 4\delta^2\alpha^2)}}{2\delta^2(\delta^2 + r^2)}. \quad (2.39)$$

Luego por (2.13) y (2.38) se tiene que el precio para una call-europea es

$$S_0[1 - g(b, \alpha, \beta^* - 1, \delta t)] - Ke^{-rT}[1 - g(b, \alpha, \beta^*, \delta t)]. \quad (2.40)$$

Como se vió, la Transformada de Esscher de alguna distribución solo cambia un parámetro, como en el caso de la Normal, cambia la media, i.e., desplaza la gráfica. En el caso de la Gamma y la NIG, además de recorrerlas las “aplata”. En seguida se muestran unas gráficas para entender que es lo que pasa con algunas distribuciones con la Transformada de Esscher.

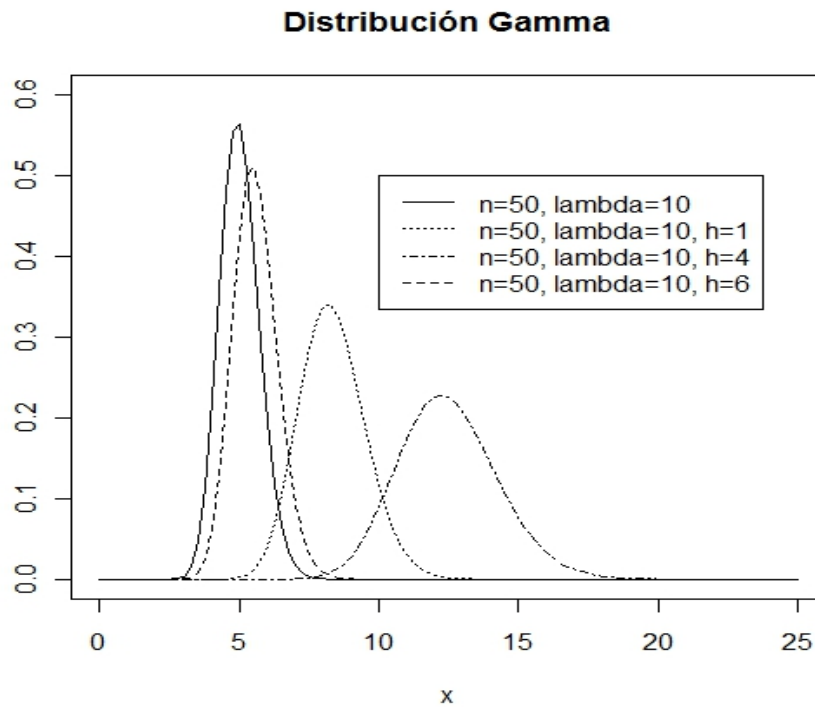


Figura 2.2: Transformada de Esscher para la distribución Gamma

La distribución Normal Inversa Gaussiana y los procesos estocásticos asociados fueron presentados por Barndorff-Nielsen (1997 y 1998). El nombre viene de su representación como la distribución del movimiento browniano con el cambio de la deriva (tendencia) por el proceso inverso gaussiano inverso de Lévy. Dado que la distribución es infinitamente divisible, da lugar a un correspondiente proceso de Lévy, que se ha demostrado que es capaz de modelar con precisión el rendimiento de una serie de activos en las bolsas alemanas, danesas, y los EE.UU..

El proceso NIG de Lévy es en muchos aspectos similar al proceso gamma varianza debido a Madan y Seneta. Ambos pertenecen a la familia de los procesos de Lévy

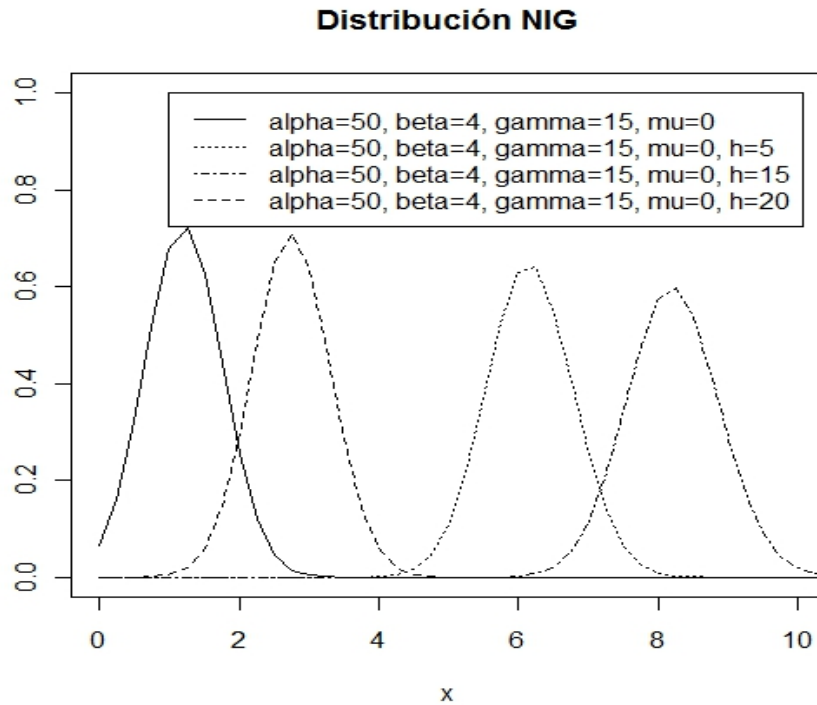


Figura 2.3: Transformada de Esscher para la distribución NIG

del tipo hiperbólica generalizada, sin embargo, tienen propiedades únicas que los hacen particularmente manejables y convenientes para la valuación de opciones. En particular, estos son los únicos en la familia hiperbólica que tienen la propiedad de ser cerrada bajo convolución (es decir, la suma de variables independientes e idénticamente distribuidas de la distribución dada tiene la misma distribución). Ambos procesos se pueden representar como un cambio en el tiempo de un movimiento browniano con deriva un proceso de Lévy, con incrementos cada vez mayor. En el caso del proceso gamma varianza el cambio en el tiempo es un proceso gamma, en el caso de un proceso NIG es un proceso gamma inverso. Ambos procesos son procesos de salto puro de Lévy, pero difieren en la naturaleza de saltos: el proceso gamma varianza tiene saltos de variación finita, mientras que la variación del proceso NIG es infinito.





## Capítulo 3

# Ejemplos Numéricos

En esta sección se darán tanto ejemplos de la Transformada de Esscher como la fórmula de Samuelson y la comparación entre los modelos que se han mencionado: Black-Scholes, Samuelson y la Transformada de Esscher. Se verán 5 procesos en particular: el log-normal, log-poisson, log-gamma, log-IG y log-NIG.

A continuación se desarrollará la dinámica de dichos procesos utilizando la fórmula de Samuelson visto en el capítulo 2 para así, encontrar el precio para un derivado en general ( $p(g)$ ) con sus respectivas dinámicas. Es evidente que para la dinámica log-normal se llegará al modelo de Black-Scholes.

### 3.1. Dinámica con Incrementos Normal para la Fórmula de Samuelson

Supóngase una dinámica log-normal, i.e.,  $S_T = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T}$ . A continuación se realizará a detalle el cálculo.

Se tiene por (2.3)

$$p(g) = e^{-rT} \mathbb{E} \left[ g \left( e^{rT} S_0 \frac{S_T}{\mathbb{E}[S_T]} \right) \right], \quad (3.1)$$

donde

### 3.2. DINÁMICA DE DIFUSIÓN DE SALTOS PARA LA FÓRMULA DE SAMUELSON

---

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[S_T] &= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \\
 &= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{x^2 - 2T(\sigma x)}{2T}} dx \\
 &= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(x - \sigma T)^2}{2T}} e^{\frac{(\sigma T)^2}{2T}} dx \\
 &= S_0 e^{\mu T},
 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 e^{-rT} \mathbb{E} \left[ g \left( e^{rT} S_0 \frac{S_T}{\mathbb{E}[S_T]} \right) \right] &= e^{-rT} \mathbb{E} \left[ g \left( e^{rT} S_0 \frac{S_0 \exp\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T\}}{S_0 e^{\mu T}} \right) \right] \\
 &= e^{-rT} \mathbb{E} \left[ g \left( S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T} \right) \right]. \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$p(g) = e^{-rT} \mathbb{E} \left[ g \left( S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T} \right) \right].$$

Como ya se sabía es la fórmula de Black-Scholes para un derivado  $g(\cdot)$  en general, ver (1.12).

### 3.2. Dinámica de Difusión de Saltos para la Fórmula de Samuelson

En el capítulo 1 sección 1.4 se vio que el modelo de Merton para un proceso de difusión de salto está dado por  $S_T = S_0 \exp \left\{ \left( \alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \right) T + \sigma W_T \right\} \gamma(n)$ . Para utilizar Samuelson se necesita saber  $\mathbb{E}[S_T]$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[S_T] &= S_0 \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \left( \alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \right) T + \sigma W_T \right\} \gamma(n) \right] \\
 &= S_0 \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \left( \alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \right) T + \sigma W_T \right\} \right] \mathbb{E}[\gamma(n)]. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

La primera esperanza,  $S_0 \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \left( \alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \right) T + \sigma W_T \right\} \right]$ , se calcula como sigue;

$$\begin{aligned}
 &= S_0 \exp\left\{\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k\right)T\right\} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-x^2/2T} dx \\
 &= S_0 \exp\left\{\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k\right)T\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-(x-\sigma T)^2/2T} e^{(\sigma T)^2/2T} dx \\
 &= S_0 e^{(\alpha-\lambda k)T}.
 \end{aligned}$$

La parte faltante de  $\mathbb{E}[S_T]$  se puede ver como sigue. Claramente haremos el caso en el que  $n \geq 1$ , además supóngase que las  $Y_j$  son log-normales con varianza  $y \sim \text{Poisson}(\epsilon)$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\mathbb{E}[\gamma(n)|N_T = n]] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{N_t} Y_j | N_T = n\right]\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n Y_j | N_T = n\right]\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n \mathbb{E}[Y_j]\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n \epsilon\right] \\
 &= \mathbb{E}[\epsilon^n] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
 &= e^{-\lambda t} e^{\lambda t \epsilon} \\
 &= e^{\lambda t(\epsilon-1)},
 \end{aligned}$$

luego de (3.3) se tiene

$$\mathbb{E}[S_T] = S_0 e^{\lambda T(\epsilon - (k+1)) + \alpha T}, \quad (3.4)$$

y sustituyendo en (2.3)

$$p(g) = e^{-rT} \mathbb{E}\left[g\left(e^{rT} S_0 \frac{\exp\{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2} T\} \gamma(n)}{\exp\{\lambda T(\epsilon - 1)\}}\right)\right]. \quad (3.5)$$

### 3.3. Dinámica con Incrementos Poisson para la Fórmula de Samuelson

Se considerará la dinámica, propuesta por la Transformada de Esscher, de un proceso Poisson desfazado dada por  $S_t = S_0 \exp\{kN_t - ct\}$ . Considerando la fórmula de Samuelson para un derivado en general, se prosigue a calcular el precio para la dinámica propuesta.

Como ya es usual primero se checará  $\mathbb{E}[S_t]$  y tomando en cuenta que  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t|N_t = n]] = \mathbb{E}[S_t]$  se sigue,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t|N_t = n]] = \mathbb{E}[S_0 \exp\{kn - ct\}],$$

luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_0 \exp\{kn - ct\}] &= S_0 \sum_{n=0}^{\infty} \exp\{kn - ct\} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= S_0 e^{-ct} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda e^k)^n}{n!} \\ &= S_0 \exp\{\lambda e^k - ct\}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.3) se sigue que el precio para un derivado en general con dinámica log-poisson es

$$p(g) = e^{-rT} \mathbb{E}[g(e^{rT} S_0 \exp\{Y_t - \lambda e^k\})]. \quad (3.6)$$

### 3.4. Dinámica con Incrementos Gamma para la Fórmula de Samuelson

Steven L. Heston (1993) introdujo un nuevo modelo de valuación de opciones basado en la distribución log-gamma. En ésta fórmula el precio de la opción no depende de la escala del rendimiento del subyacente pero si de la media del rendimiento del mismo. En su artículo extiende la fórmula log-gamma a tiempo continuo definiendo el proceso gamma. Que a diferencia del proceso Poisson éste puede saltar instantaneamente a un conjunto de valores continuo, por lo tanto no tiene cobertura. Si el proceso gamma tiene un salto

hacia “arriba”, entonces el rendimiento de la acción tiene un sesgo positivo y si tiene un salto hacia “abajo”, entonces el rendimiento de la acción tiene un sesgo negativo.

Heston observó que la fórmula no puede ser aplicada para opciones con diferentes tiempos de maduración. Para lograr esto, el precio del stock debe tener una distribución log-gamma en multiples fechas.

Ahora bien, dado un proceso gamma  $x_t$  y suponiendo que  $S_t$  sigue un proceso log-gamma se tiene

$$\log(S_t) = \log(S_0) + v(t) + \sigma x_t,$$

donde  $x_t \sim \text{Gamma}(\delta, 1)$  y  $v(t) = -\log(P(t))\mathbf{1}_{\{-1,1\}}(y)\sigma^*\delta^{1/2}$ , con  $\mathbf{1}_{\{-1,1\}}(y)$  la función indicadora que con propabilidad p vale 1 y con probabilidad 1-p vale -1, entonces

$$\begin{aligned} \log(S_t) &= \log(S_0) + v(t) + \sigma x_t \\ &= \log(S_0) - \log(P(t))\mathbf{1}_{\{-1,1\}}(y)\sigma^*\delta^{1/2} + \sigma x_t \\ &= \log\left(\frac{S_0}{P(t)}\right)\mathbf{1}_{\{-1,1\}}(y)\sigma^*\delta^{1/2} + \sigma x_t \quad \sigma = \sigma^*\delta^{-1/2} \\ &= \log\left(\frac{S_0}{P(t)}\right)\mathbf{1}_{\{-1,1\}}(y)\sigma^*(\delta^{1/2} + \delta^{-1/2}x_t), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$S_t = \frac{S_0}{P(t)} \exp\left\{\mathbf{1}_{\{-1,1\}}(y)\sigma^*(\delta^{1/2} + \delta^{-1/2}x_t)\right\}. \quad (3.7)$$

Calculando la esperanza de  $S_t$  para utilizar Samuelson se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_t] &= \mathbb{E}\left[\frac{S_0}{P(t)} \exp\left\{\mathbf{1}_{\{-1,1\}}(y)\sigma^*(\delta^{1/2} + \delta^{-1/2}x_t)\right\}\right] \\ &= \frac{S_0}{P(t)} e^{\mathbf{1}(y)\sigma^*\delta^{1/2}} \mathbb{E}\left[e^{\mathbf{1}(y)\sigma^*\delta^{-1/2}x_t}\right] \\ &= \frac{S_0}{P(t)} e^{\mathbf{1}(y)\sigma^*\delta^{1/2}} \int_0^\infty e^{\mathbf{1}(y)\sigma^*\delta^{-1/2}x_t} \frac{1}{\Gamma(\delta)} x^{\delta-1} e^{-x} dx \\ &= \frac{S_0}{P(t)} e^{\mathbf{1}(y)\sigma^*\delta^{1/2}} \left(1 - \mathbf{1}(y)\sigma^*\delta^{-1/2}\right)^{-\delta} \int_0^\infty \frac{(1 - \mathbf{1}(y)\sigma^*\delta^{-1/2})^\delta}{\Gamma(\delta)} x^{\delta-1} e^{-x_t(1 - \mathbf{1}(y)\sigma^*\delta^{-1/2})} dx \\ &= \frac{S_0}{P(t)} e^{\mathbf{1}(y)\sigma^*\delta^{1/2}} \left(1 - \mathbf{1}(y)\sigma^*\delta^{-1/2}\right)^{-\delta} \end{aligned}$$

### 3.5. DINÁMICA CON INCREMENTOS GAUSSIANA INVERSA PARA LA FÓRMULA DE SAMUELSON

---

sustituyendo en (2.3) y simple álgebra se obtiene

$$p(g) = e^{-rT} \mathbb{E} \left[ g \left( e^{rT} S_0 \exp \left\{ \mathbf{1}(y) \sigma \delta^{-1/2} x_t \right\} \left( 1 - \mathbf{1}(y) \sigma \delta^{-1/2} \right)^\delta \right) \right]. \quad (3.8)$$

### 3.5. Dinámica con Incrementos Gaussiana Inversa para la Fórmula de Samuelson

Para comparar entre los modelos antes mencionados y como era de esperarse, también se tomará la dinámica de una distribución Gaussiana Inversa, considerando a  $S_t$  como antes mencionado.

Como ya es costumbre revisaremos primero como es  $\mathbb{E}[S_t]$  para después obtener el valor de un derivado en general para el caso de una distribución Gaussiana Inversa.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_T] &= \mathbb{E}[S_0 \exp\{Y_T - cT\}] \\ &= S_0 e^{-cT} \mathbb{E}[e^{Y_T}] \quad \text{generadora de } Y_T \text{ con } z = 1 \\ &= S_0 e^{-cT} \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2\mu^2}{\lambda}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la fórmula de Samuelson

$$p(g) = e^{-rT} \mathbb{E} \left[ g \left( e^{rT} S_0 \exp \left\{ Y_T - \frac{\lambda}{\mu} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2\mu^2}{\lambda}} \right) \right\} \right) \right]. \quad (3.9)$$

### 3.6. Dinámica con Incrementos Normal Inversa Gaussiana para la Fórmula de Samuelson

Como se vio antes, la ecuación (2.36) define a la distribución de una NIG con parámetros  $(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ . Lo que sigue es el cálculo ya tan conocido que se ha hecho hasta ahora para obtener el precio de un derivado utilizando la fórmula de Samuelson.

Recordando la generadora de momentos de la sección 2.3.6 y que se tomó a  $\mu=0$  se sigue

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[S_T] &= \mathbb{E}[S_0 \exp\{Y_T - cT\}] \quad Y_T \sim NIG \\
 &= S_0 e^{-cT} \mathbb{E}[e^{Y_T}] \\
 &= S_0 e^{-cT} \exp\{\delta(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2})\},
 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{S_T}{\mathbb{E}[S_T]} &= \frac{S_0 \exp\{Y_T - cT\}}{S_0 e^{-cT} \exp\{\delta(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2})\}} \\
 &= \exp\{Y_T - \delta(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2})\}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el precio para un derivado en general con incrementos que se distribuyen NIG es

$$p(g) = e^{-rT} \mathbb{E}[g(e^{rt} S_0 \exp\{Y_T - \delta(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2})\})].$$

En la siguiente gráfica se muestran diferentes tipos de dinámicas de algunos subyacentes calculados anteriormente con la Fórmula de Samuelson.



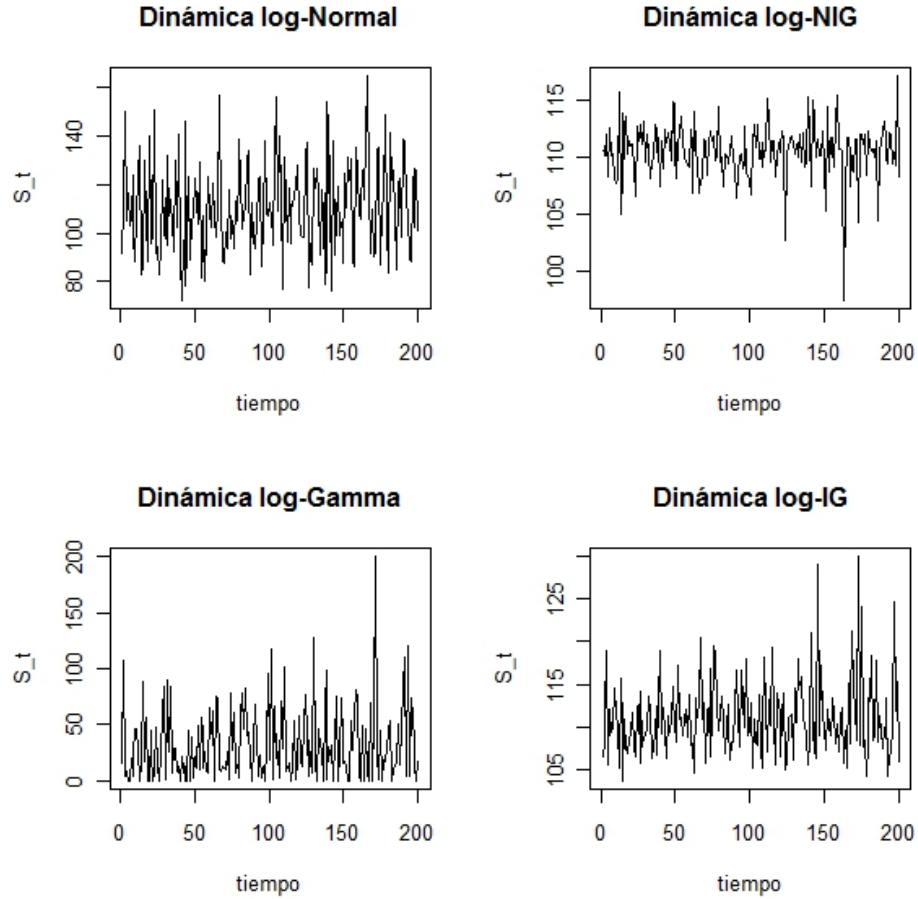


Figura 3.1: Dinámica log-Normal, NIG, Gamma e IG de los subyacentes respectivamente

### 3.7. Ejemplo de un Movimiento Browniano

Supóngase que para una cierta acción,  $\sigma = 0.2$  y  $S_0 = 100$ . Considérese una call-europea con precio de ejercicio  $K = 90$  a seis meses a partir de hoy ( $T = 0.5$ ). Con una tasa de interes constante libre de riesgo de  $r = 0.1$ , entonces el valor de la opción de acuerdo a (2.17) es

$$100\Phi(1.1693) - 90e^{-0.05}\Phi(1.0279) = 15.29.$$

Si el logaritmo del precio de la acción no sigue una distribución simétrica, entonces la suposición del movimiento Browniano no es la apropiada.

Supóngase que el proceso  $\{X_t\}$  tiene media  $\mu$ , varianza  $\sigma^2$  y tercer momento  $\theta^3$ . Sea  $\gamma = \frac{\theta^3}{\sigma^3}$  el coeficiente de asimetría de  $X_1$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 \log[\mathbb{E}[e^{zX_t}]] &= \log[M(z, t)] \\
 &= t \log[M(z, 1)] \\
 &= t[\mu z + \sigma^2 z^2/2 + \theta^3 z^3/3! + \dots] \\
 &= t[\mu z + \sigma^2 z^2/2 + \gamma \sigma^3 z^3/3! + \dots]
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

### 3.8. Ejemplo de un Proceso Poisson Desfazado

Se supondrá, como en el ejemplo pasado que  $\sigma = 0.2$ ,  $S_0 = 100$  y  $r = 0.1$ . En este caso también se tendrá  $\mu = 0.1$  y  $\gamma = 1$ .

Por (3.10) y (2.19), igualando los tres primeros momentos del modelo del proceso Poisson desfazado se tiene las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \lambda k - c &= \mu \\
 \lambda k^2 &= \sigma^2 \\
 \lambda k^3 &= \gamma \sigma^3,
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned}
 k = \gamma \sigma &= 0.2 \\
 \lambda = \gamma^{-2} &= 1 \\
 c = \frac{\sigma}{\gamma} - \mu &= 0.1
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

El valor de  $\lambda$  realmente no se necesita pues los cálculos se realizan para  $\lambda^*$ . Entonces el valor de la opción de acuerdo a (2.21) suponiendo que  $K = 90$  y  $T = 0.5$  es

$$100[1 - \Lambda(-0.2768; 0.5516)] - 90e^{-0.05}[1 - \Lambda(-0.2768; 0.4516)] = 14.39.$$

### 3.9. Ejemplo de un Proceso Gamma Desfazado

Por (3.10) y (2.23) igualando los tres primeros momentos en el modelo del proceso Gamma desfazado se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\frac{\alpha}{\beta} - c = \mu \quad (3.13)$$

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = \sigma^2 \quad (3.14)$$

$$2\frac{\alpha}{\beta^3} = \theta^3 = \gamma\sigma^3, \quad (3.15)$$

de donde se sigue

$$\alpha = \frac{4}{\gamma^2} = 4$$

$$\beta = \frac{2}{\sigma\gamma} = 10$$

$$c = \frac{2\sigma}{\gamma} - \mu = 0.3 \quad (3.16)$$

El haber realizado el cálculo para  $\beta$  fue insignificante pues el valor que realmente se necesita es  $\beta^*$ . Entonces el valor de la opción con respecto a (2.26) suponiendo  $K = 90$ ,  $S_0 = 100$ ,  $T = 0.5$ ,  $r = 0.1$  es

$$100[1 - g(0.0446, 2, 9.5083)] - 90e^{-\frac{1}{20}}[1 - g(0.0446, 2, 10.5083)] = 14.50$$

### 3.10. Ejemplo de un Proceso Gamma Desfazado

Siguiendo con la misma temática, por (3.10) y (2.27) e igualando los tres primeros momentos se tienen las siguientes ecuaciones

$$\frac{\alpha\beta^{-\frac{1}{2}}}{2} - c = \mu$$

$$\frac{\alpha\beta^{-\frac{3}{2}}}{4} = \sigma^2$$

$$\frac{3\alpha\beta^{-\frac{5}{2}}}{8} = \theta^3 = \gamma\sigma^3$$

que resulta

$$\begin{aligned}\alpha &= 3\sqrt{1.2} \\ \beta &= 7.5 \\ c &= 0.5\end{aligned}$$

Retomando los resultados obtenidos en 2.3.4

$$\begin{aligned}\sqrt{\beta^*} - \sqrt{\beta^* - 1} &= \frac{c + r}{\alpha} \\ &= \frac{0.2}{\sqrt{1.2}},\end{aligned}$$

de donde  $\beta^*$  resulta ser

$$\beta^* = 1.0174796$$

### 3.11. Ejemplo de un Proceso con Distribución Normal Gaussiana Inversa

Al igual que en las secciones pasadas por (3.10) y (2.37) igualando los tres primeros momentos se tiene la siguiente ecuacione

$$t(\delta(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + z)^2}) + mz) = t(z\mu + \frac{\sigma^2 z^2}{2} + \frac{\gamma\sigma^3 z^3}{3!}) \quad (3.17)$$

y como se puede observar no es fácil resolverla.

En seguida se muestran unas tablas con los valores para una call-europea con distintos strikes (K) y tiempos de maduración (T) de un movimiento Browniano, un proceso Poisson desfazado, un proceso Gamma desfazado respectivamente y un movimiento hiperbólico de Lévy a modo de ejemplo.

3.11. EJEMPLO DE UN PROCESO CON DISTRIBUCIÓN NORMAL GAUSSIANA INVERSA

---

K	T = 0.25	T = 0.5	T = 0.75	T = 1
80	21.99	24.03	26.04	27.99
85	17.21	19.52	21.74	23.86
90	12.65	15.29	17.72	19.99
95	8.58	11.50	14.07	16.44
100	5.30	8.28	10.88	13.27
105	2.95	5.69	8.18	10.52
110	1.47	3.74	5.99	8.18
115	0.66	2.35	4.28	6.26

Cuadro 3.1: Valor de una call-europea para el modelo de Black-Scholes

K	T = 0.25	T = 0.5	T = 0.75	T = 1
80	21.98	23.90	25.78	27.61
85	17.10	19.15	21.14	23.09
90	12.22	14.39	16.50	18.56
95	7.35	9.63	12.91	15.70
100	4.39	7.83	10.63	13.01
105	3.40	6.10	8.35	10.31
110	2.42	4.37	6.06	7.62
115	1.43	2.64	4.32	6.42

Cuadro 3.2: Valor de una call-europea para un proceso Poisson desfazado

K	T = 0.25	T = 0.5	T = 0.75	T = 1
80	21.98	23.90	25.78	27.62
85	17.10	19.15	21.18	23.24
90	12.22	14.50	16.89	19.17
95	7.60	10.59	13.20	15.59
100	4.66	7.61	10.18	12.55
105	2.93	5.45	7.80	10.03
110	1.88	3.91	5.96	7.99
115	1.23	2.82	4.55	6.35

Cuadro 3.3: Valor de una call-europea para un proceso Gamma desfazado

CAPÍTULO 3. EJEMPLOS NUMÉRICOS

---

K	T = 0.25	T = 0.5	T = 0.75	T = 1
80	21.98	23.90	25.78	27.64
85	17.10	19.15	21.22	23.27
90	12.22	14.56	16.95	19.21
95	7.70	10.63	13.23	15.61
100	4.67	7.61	10.18	12.54
105	2.88	5.41	7.77	10.01
110	1.83	3.86	5.91	7.95
115	1.20	2.77	4.50	6.31

Cuadro 3.4: Valor de una call-europea para un proceso con distribución Gaussiana Inversa

K	T = 0.25	T = 0.5	T = 0.75	T = 1
80	22.02	23.79	25.22	26.37
85	17.26	19.17	20.70	21.91
90	12.72	14.86	16.51	17.82
95	8.64	11.02	12.80	14.20
100	5.35	7.83	9.65	11.08
105	3.02	5.32	7.08	8.49
110	1.58	3.49	5.07	6.40
115	0.78	2.21	3.56	4.75

Cuadro 3.5: Valor de una call-europea para un proceso con distribución Normal Gaussiana Inversa desfazado



## Capítulo 4

# Resultados

Para ejemplificar los modelos vistos en los capítulos anteriores se tomarán valores reales obtenidos de la bolsa de Nueva York (NYSE por sus siglas en inglés) y se compararán con los mismos. Se estimarán unos parámetros vía máxima verosimilitud y, dado que otros no resultan tan fácil de calcular, se estimarán numéricamente; como es el caso de la Gamma y la NIG.

Lo que se observará enseguida es qué tanto se ajustan los datos tomados de la bolsa de Nueva York utilizando el método estadístico qqplot. Lo que hace este método es que un punto  $(x, y)$  en la gráfica corresponde a uno de los cuantiles de la segunda distribución (coordenada  $y$ ) en función del mismo cuantil de la primera distribución (coordenada  $x$ ), i.e. compara los cuantiles de una distribución dada contra la distribución de los datos. Si las dos distribuciones que se comparan son parecidas, los puntos en la gráfica se encuentran aproximadamente en la recta  $y = x$ . Si las distribuciones están relacionadas linealmente, los puntos en la gráfica se encuentran aproximadamente en una recta, pero no necesariamente en la recta  $y = x$ .

A continuación se mostrarán las tablas de los histogramas, así como los estimadores para los diferentes activos obtenidos de la NYSE, además del análisis estadístico antes mencionado y de la tabla con los precios para cada uno de los modelos desarrollados en este trabajo. Cada una de las siguientes imágenes y cuadros se realizaron con el programa estadístico R.



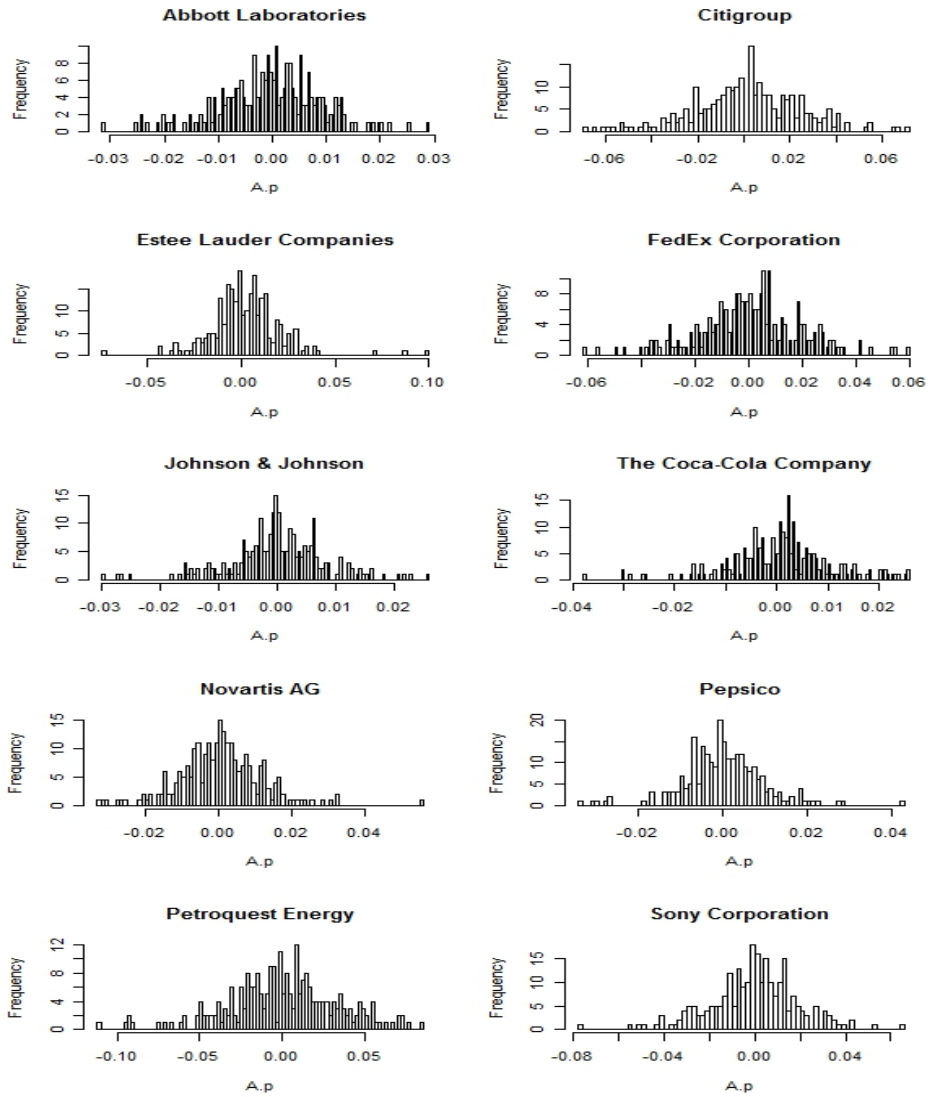


Figura 4.1: Acciones de la Bolsa de Nueva York

	<i>Normal Inversa Gaussiana</i>			
<i>Símbolo</i>	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\mu}$
ABT	175.0027	-24.9484	0.0139	1.0016
C	78.0154	-2.0937	0.0447	1.0028
EL	51.7504	7.5574	0.0159	0.9998
FDX	66.5160	2.7133	0.0233	0.9996
JNJ	106.1023	-5.6070	0.0071	1.0003
KO	81.0347	-2.3728	0.0081	1.0009
NVS	98.6541	8.6055	0.01246	0.9995
PEP	95.7659	6.2305	0.0084	0.9998
PQ	62.1406	-2.8489	0.0675	1.0041
SNE	65.1476	-6.5481	0.0233	1.0018

Cuadro 4.1: Estimación de parámetros de la NIG utilizando el algoritmo de Karlis D.(2002) [20]

	<i>Inversa Gaussiana</i>		<i>Gamma</i>	
<i>Símbolo</i>	$\hat{\mu}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{r}$	$\hat{\lambda}$
ABT	0.999	12250.84	50.0076	1.0088
C	1.001	1754.38	4.4767	1.1169
EL	1.000	3035.80	62.6119	1.0011
FDX	1.003	2893.38	85.2029	1.0036
JNJ	0.999	15345.91	60.9318	1.0075
KO	1.000	10425	55.56	1.0058
NVS	1.005	7853.30	50.9622	1.0072
PEP	1.001	11265.55	63.3845	1.0072
PQ	1.003	915.44	6.7630	1.0715
SNE	.997	2770.57	33.0033	1.0104

Cuadro 4.2: Estimación de parámetros de una Inversa Gaussiana y Gamma

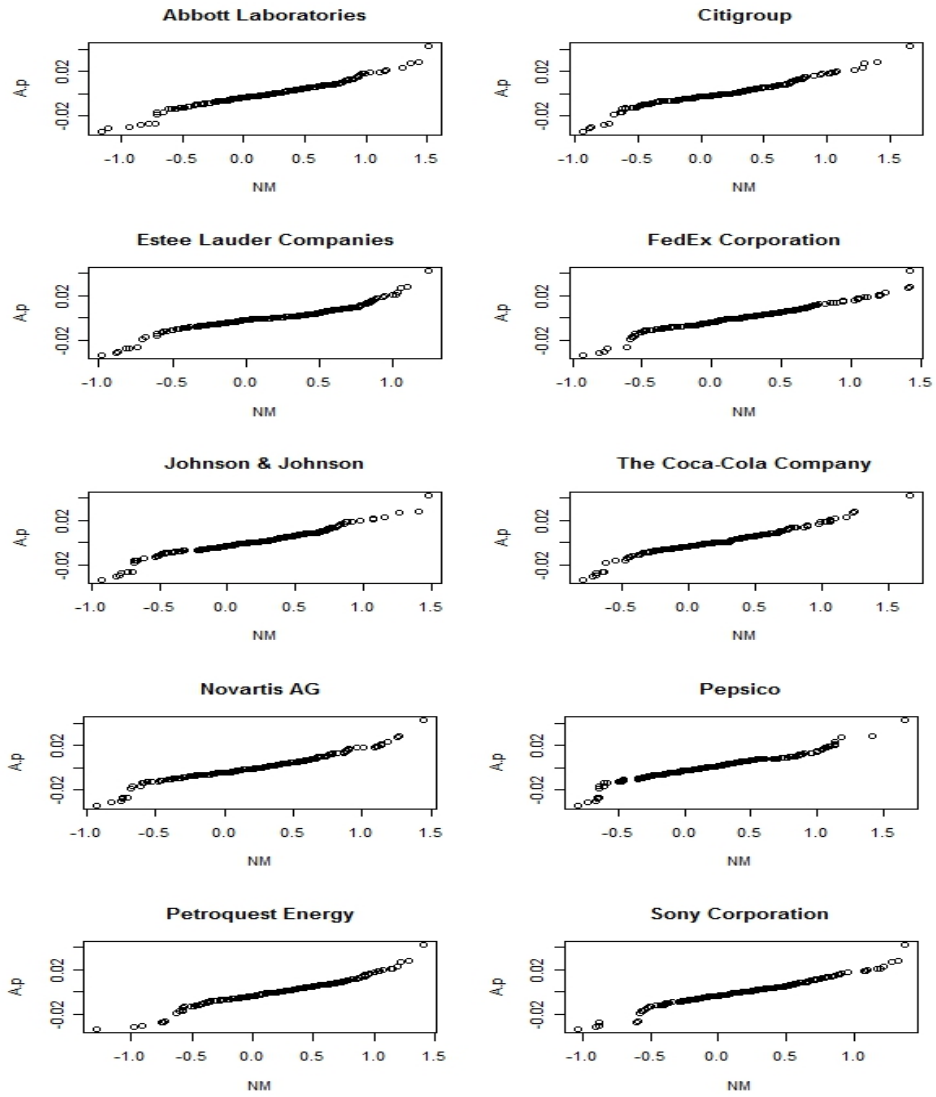


Figura 4.2: Cuantiles de una Normal contra los log-rendimientos de ciertos activos

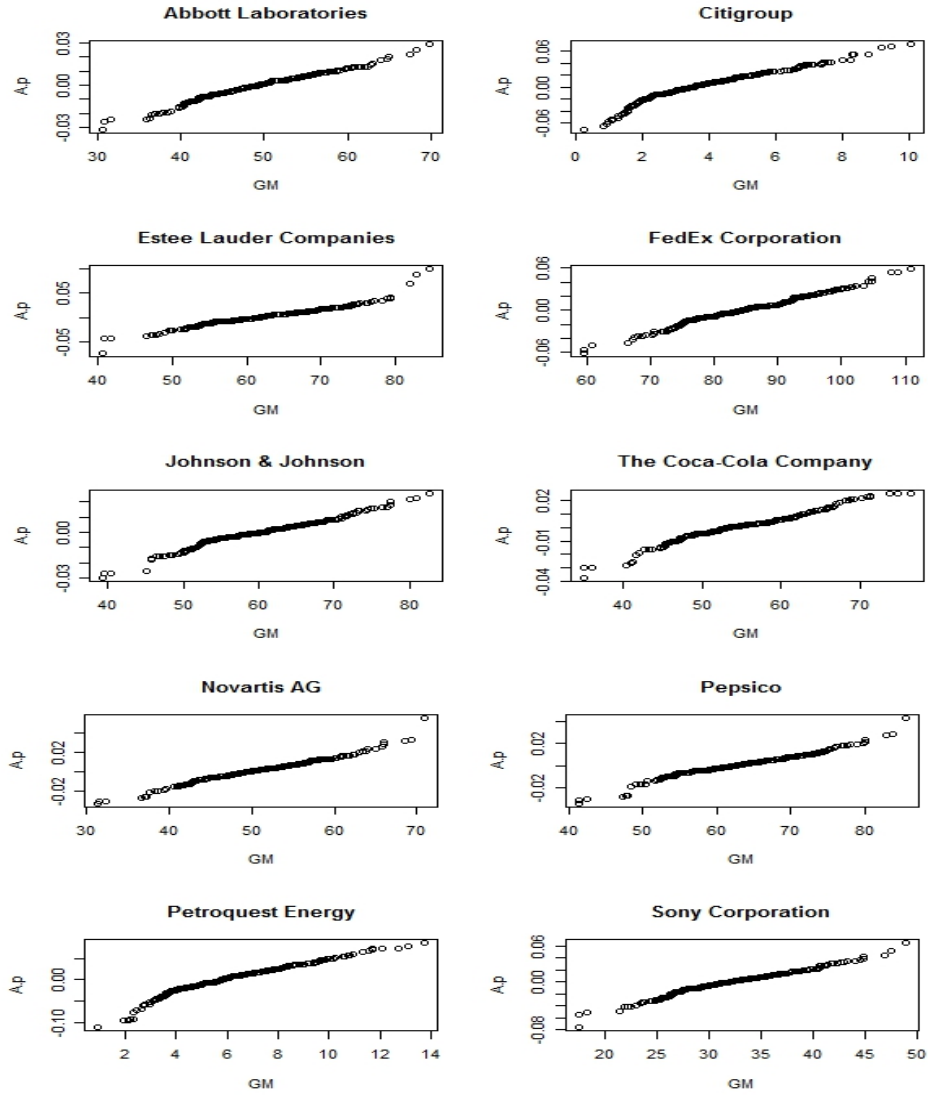


Figura 4.3: Cuantiles de una Gamma contra los log-rendimientos de ciertos activos

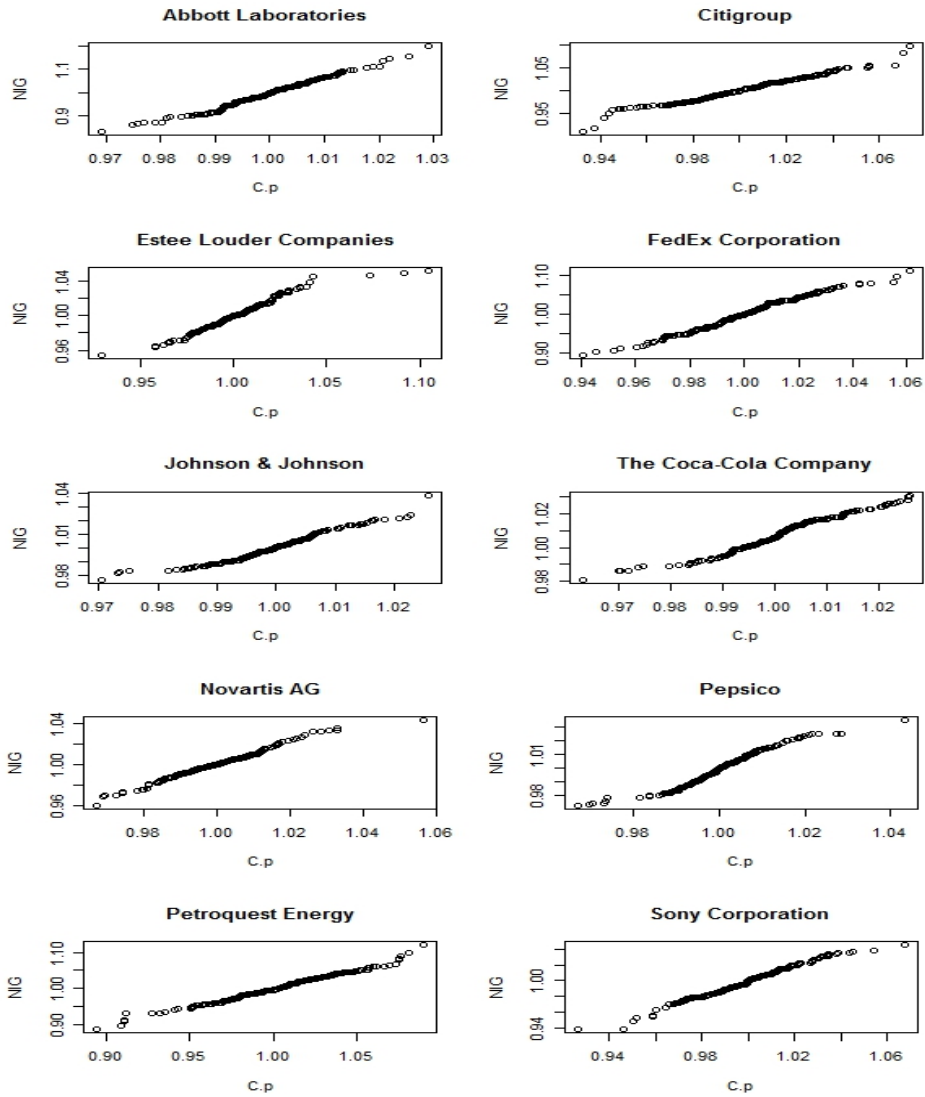


Figura 4.4: Cuantiles de una NIG contra los rendimientos de ciertos activos

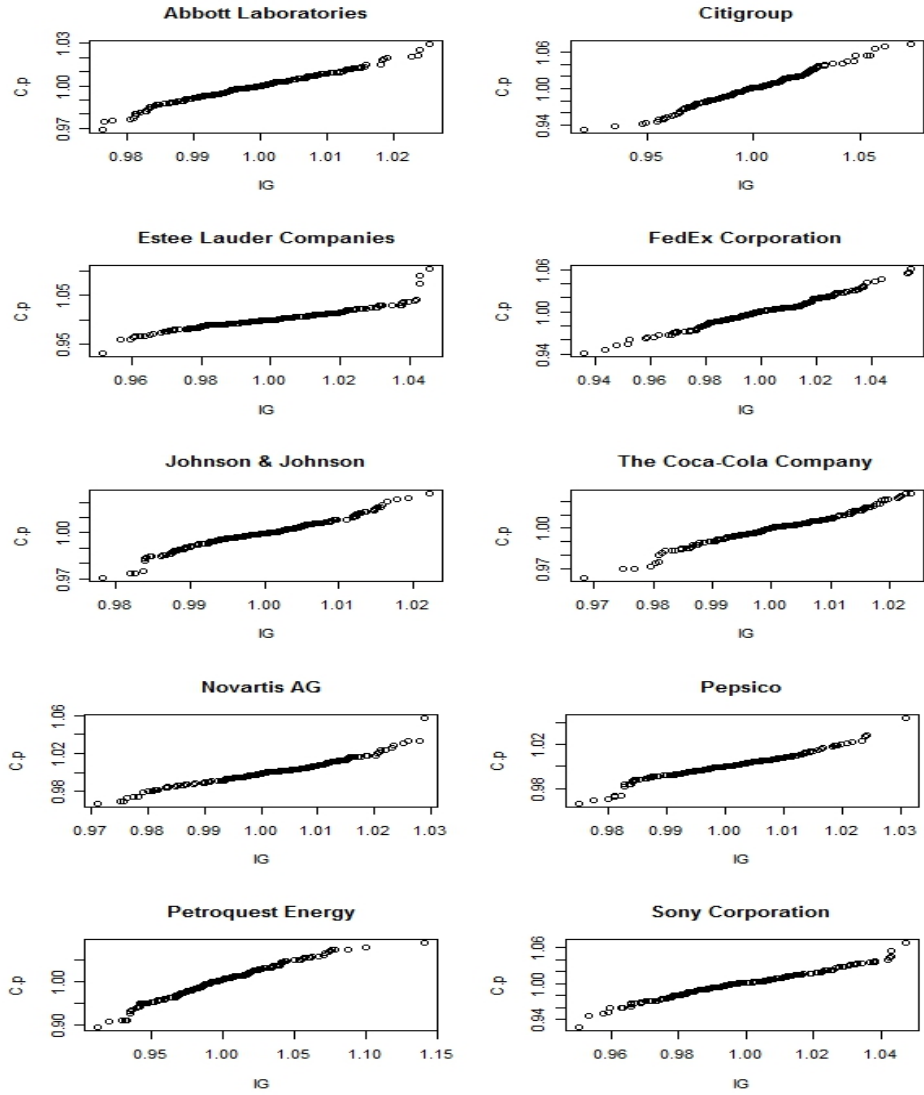


Figura 4.5: Cuantiles de una Inversa Gaussiana contra los rendimientos de ciertos activos

<i>Símbolo</i>	<i>Normal Inversa Gaussiana</i>		<i>Gamma</i>		<i>Inversa Gaussiana</i>		B-S
	<i>Esscher</i>	<i>Samuelson</i>	<i>Esscher</i>	<i>Samuelson</i>	<i>Esscher</i>	<i>Samuelson</i>	
ABT	8.2447	7.0595	6.9581	7.3183	6.9585	6.9565	8.3236
C	0.7045	0.9483	0.6854	0.6855	0.6855	0.6854	0.7261
EL	5.2937	8.0694	2.8200	4.1586	3.3591	2.8166	5.3024
FDX	18.4742	18.3281	18.3281	18.5480	18.3271	18.3281	18.5423
JNJ	16.8780	16.6781	16.6781	18.7053	16.6785	16.6781	16.9298
KO	10.4700	9.6584	9.6581	11.7962	9.6583	9.6581	10.5324
NVS	5.6709	7.7289	3.3981	4.5489	3.3977	3.3972	5.6836
PEP	14.1110	13.7581	13.7581	15.5660	13.7590	13.7581	14.1894
PQ	2.0889	2.0858	2.0858	2.0858	2.0856	2.0858	2.0975
SNE	3.9645	4.6964	2.8750	3.1077	2.8752	2.8746	3.9934

Cuadro 4.3: Diferentes valores para una opción *Call*

Para el análisis de las figuras 4.2 a 4.5 se tuvo que hacer el uso de los estimadores para cada activo mostrados en los Cuadros 4.1 y 4.2. Como se mencionó, el cálculo para los estimadores de la NIG no fueron sencillos y por eso se usó el método propuesto por Karlis D.(2002) [20].

En las figuras se observa que todas se encuentran en una recta, que claramente no es la  $y = x$  y por lo tanto, como se había mencionado anteriormente, las distribuciones están relacionadas linealmente. Era de esperarse que las distribuciones Normal, NIG e IG debían de estar relacionadas pues son funciones con las que ya se ha venido trabajando en la modelación de activos financieros y aunque con la IG no sea el caso, ésta resulta ser un caso de la NIG. Lo que resultó interesante en el análisis fue la distribución Gamma, a pesar de que ésta y la IG comparten la propiedad de tener un posible sesgo a la derecha. Si se escogen los parámetros correctamente, entonces éstas dos distribuciones pueden ser muy parecidas. La distribución Gamma como lo propone Heston (1993) [16] si resulta una buena distribución para la modelación de activos. Habiendo establecido lo anterior, se prosiguió a calcular los precios de cada activo (Cuadro 4.3), puesto que cada uno presenta una relación con las funciones de distribución antes establecidas, con cada modelo propuesto y así hacer la comparación de estos.

En el artículo de Bibby & Sorensen [2] se menciona que la distribución hiperbólica es mejor que la normal. En este trabajo para la distribución hiperbólica se toma su caso límite, la NIG. Como se puede observar en el Cuadro 4.3, los precios, bajo la fórmula de Samuelson con la NIG, en algunas acciones están por debajo del valor marcado por Black

& Scholes; con la Gamma, están por encima en algunas otras y con la IG siempre están por debajo. Dado esto, se puede concluir que tanto la NIG como la Gamma son buenas distribuciones para modelar activos. Por otro lado, en la Transformada de Esscher la NIG es la que mejor se aproxima al modelo de Black & Scholes, mientras que la Gamma queda muy por debajo de éste. De aquí que la Transformada de Esscher sea un buen modelo para la valuación en mercados incompletos.





# Conclusiones

El cálculo a mano para la fórmula de Samuelson puede resultar un tanto complicado y tedioso, mientras que para la Transformada de Esscher no lo es tanto y sólo consiste en sustituir valores puesto que ya se conocen las funciones generadoras de momentos.

Sin embargo, el verdadero problema con la Transformada de Esscher es el encontrar la medida de riesgo neutral, que se denotó como  $h^*$ . Mientras que para las demás distribuciones el cálculo para encontrar  $h^*$  fue simple álgebra, en el caso particular de la NIG el cálculo fue un tanto complicado, pero se obtuvo el resultado gracias a la ayuda de métodos numéricos. Ahora bien, si se recurre a los métodos numéricos, la fórmula de Samuelson resulta mucho más fácil de operar pues solo se tiene que hacer un cierto número de simulaciones para calcular el precio del activo deseado (esto no es posible con la Transformada de Esscher).

Estos modelos podrían ser de gran utilidad ya que resultados de recientes artículos publicados han demostrado que la función de distribución normal no es un buen modelador de activos financieros.

Por lo tanto, he concluído que este trabajo puede servir de base para futuros trabajos de investigación en cuanto a la eficiencia en modelos para la valuación de opciones.



# Bibliografía

- [1] Bachelier, L. (1900) *Théorie de la spéculation*. Ann. Sci. École Norm. Sup. III-17, 21-86.
- [2] Bibby, B.M. and Sorensen, M. (1997) *A Hyperbolic Diffusion Model for Stock Prices*, Finance Stochast Vol.1, 25-41.
- [3] Black, F. (1972) *Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing*, Journal of Business, 45(July): 444-455.
- [4] Barndorff-Nielsen, O.E. (1995), *Normal Inverse Gaussian Processes and the Modelling of Stock Returns*, Research Report 300, Departement of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.
- [5] Barndorff-Nielsen, O.E. and Halgreen, O. (1977) *Infinite divisibility of the hyperbolic and generalized inverse Gaussian distributions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb., 38, 309-12.
- [6] Belini, F., Frittelli, M.(2002) *On the existence of minimax martingale measures*, Mathematical Finance 12, 1-21.
- [7] Del Castillo, H. *Notas de Clase para el Curso de Productos Financieros Derivados*
- [8] Eberlein, E. and Keller, U. (1995) *Hyperbolic distributions in finance*, Bernoulli Vol.1 no.3, 281-99.
- [9] Esscher, F. *On the probability function the collective theory of risk*, Skandinavisk Aktuarietidskrift 15 (1932): 175-95.
- [10] Qian, E.E., Hua, R.H. and Sorensen, E.H. *Quantitative Equity Portfolio Management, Modern Techniques and Applications*, Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [11] Föllmer, H. and Schied, A. *Stochastic Finance, An Introduction in Discrete Time*, Walter de Gruyter.
- [12] Föllmer, H. and Schweizer, M. (1990) *Hedging of contingent claims under incomplete information*, Applied stochastic analysis, London, Stochastic Monogr.5, 389-414.
- [13] Frittelli M.(2002) *The minimal entropy martingale measure and the valuation problem in incomplete markets*, Mathematical Finance 10. 39–52
- [14] Hans U. Gerber and Elias S.W. Shiu (1994), *Option pricing by Esscher transforms*, Transactions of the Society of Actuaries Vol. 46, 99-191.
- [15] Goll, T., Rüschendorf, L.(2001) *Minimax and minimal distance martingale measures and their relationship to portfolio optimization*, Finance and Stochastics 5, 557–581.
- [16] Heston, S. L. *Invisible Parameters in Option Prices*, The Journal of Finance, Vol. 48, No. 3, Papers and Proceedings of the Fifty-Third Annual Meeting of the American Finance Association: Anaheim, California January 5-7, 1993 (Jul.,1993), pp. 933-947, Blackwell Publishing for the American Finance Association.
- [17] Hull, J.C. *Fundamentals of Futures and Options Markets*, Pearson Education, Prentice Hall.
- [18] Hull, J.C. *Options, Futures and Other Derivates*, Pearson, Prentice Hall.
- [19] John Y. Campbell, Andrew W. Lo and A. Craig MacKinlay, *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.
- [20] Karlis D.(2002) *An EM Type Algorithm for Maximum Likelihood Estimation for The Normal Inverse Gaussian Distribution*, Statistics and Probability Letters 57: 43-52.
- [21] Kloeden, P. E., Platen, E. and Schurz, H. (2003). *Numerical Solution of SDEs Through Computer Experiments*, Universitext, Springer. Third corrected printing, (first edition (1994)).
- [22] Kuo, H.-H (2006). *Introduction to Stochastic Integration*, Universitext, Springer.
- [23] Merton, R.C. *Continuous-Time Finance*, Blackwell.
- [24] Miyahara, Y. (2001) *[Geometric Levy Process and MEMM] Pricing Model and Related Estimation Problems*, Asia-Pacific Financial Markets 8, 45–60.
- [25] Samuelson, P.A. (1972a), in R.C. Merton, ed. *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, Vol. III, Cambridge, MA: MIT Press.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [26] Samuelson, P.A. (1972b), *Mathematics of Speculative Price*, in R.H. Day and S.M. Robinson, eds, *Mathematical Topics in Economic Theory and Computation*, Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics. Reprinted in *SIAM Review*, 15 (January 1973): 1-42.
- [27] M. Schweizer (1988), *Hedging of Options in a General Semimartingale Model*, Diss. ETHZ no.8615, Zürich.
- [28] Shiryaev, A.N. (Vol 3.) *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*, World Scientific.