



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
FACULTAD DE CIENCIAS

EL CRECIMIENTO DE UN ÁLGEBRA DE  
CONGLOMERADOS DE TIPO TUBULAR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:  
GUSTAVO JASSO AHUJA

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. MICHAEL BAROT SCHLATTER



México, D.F.

Agosto, 2011



*A mis maestros:  
Octavio, quien me introdujo al álgebra;  
Christof, cuyo consejo determinó mi futuro;  
y Michael, quien me enseñó a ser matemático.*



# Índice general

<b>1. Álgebras de conglomerados</b>	<b>1</b>
1. Definiciones y conceptos básicos . . . . .	1
1.1. El álgebra de conglomerados asociada a un carcaj . . . . .	5
2. Crecimiento exponencial . . . . .	6
2.1. Mutaciones de ternas de Farey . . . . .	6
2.2. El álgebra de conglomerados de tipo $D_4^{(1,1)}$ . . . . .	8
<b>2. Rectas proyectivas con pesos</b>	<b>11</b>
1. Gavillas coherentes sobre rectas proyectivas . . . . .	12
1.1. Definiciones básicas . . . . .	12
1.2. Raíces de Schur . . . . .	14
2. La categoría de conglomerados . . . . .	16
2.1. Construcción . . . . .	16
2.2. El caso tubular . . . . .	19
3. Mutaciones de Hübner . . . . .	21
<b>3. El teorema de crecimiento</b>	<b>27</b>
1. Esquema de la demostración . . . . .	27
2. El caso $\mathbf{p} = (3, 3, 3)$ . . . . .	28
3. Los casos $\mathbf{p} = (4, 4, 2)$ y $\mathbf{p} = (6, 3, 2)$ . . . . .	35



# Introducción

Las álgebras de conglomerados<sup>1</sup> fueron introducidas por S. Fomin y A. Zelevinsky en [4]. A *grosso modo*, las álgebras de conglomerados son anillos conmutativos definidos de manera constructiva en término de generadores y relaciones que se obtienen de manera constructiva. Cada álgebra de conglomerados está equipada con un conjunto distinguido de generadores (*variables de conglomerado*) agrupados en conjuntos traslapados (*conglomerados*) de la misma cardinalidad finita (el *rango* del álgebra de conglomerados en cuestión). Además, un álgebra de conglomerados está equipada con un *patrón de intercambio*. El patrón de intercambio es el corazón combinatorio del álgebra de conglomerados, es el algoritmo que utilizamos para propagar información a lo largo de ésta. Entre los ejemplos mas conocidos de álgebras de conglomerados se encuentran los anillos de coordenadas de Grassmannianos y variedades de Schubert [12].

La teoría de álgebras de conglomerados ha encontrado diversas aplicaciones en otras áreas de las matemáticas. Es utilizada en el estudio de las bases semicanónicas duales del dual del álgebra envolvente universal de la parte positiva de un álgebra de Lie simple de dimensión finita, cf. [7]. También se utiliza, como ya mencionamos, en el estudio de los anillos de coordenadas de diversas variedades algebraicas y en el estudio de grupos algebraicos y sus subgrupos de Borel, cf. [3].

A un álgebra de conglomerados  $\mathcal{A}$  se le asocia una gráfica  $E(\mathcal{A})$  a la que se le llama *gráfica de intercambio*. Esta gráfica codifica la propagación de los

---

<sup>1</sup>En inglés, estas álgebras son llamadas *cluster algebras*, nombre que se suele traducir al español como *álgebras de conglomerado*. Esta traducción no describe de manera precisa la estructura de las álgebras de conglomerados, pues la propiedad de éstas que resulta de interés es la estructura combinatoria inducida por las mutaciones, en el que están involucrados *todos* los conglomerados, cf. Definición 1.9.

conglomerados a lo largo del álgebra. En particular, permite saber cuando  $\mathcal{A}$  es de tipo finito o tiene crecimiento exponencial según si  $E(\mathcal{A})$  es finita o tiene crecimiento exponencial como gráfica, por ejemplo. Nuestro objetivo es demostrar que toda álgebra de conglomerados de tipo tubular tiene crecimiento exponencial, hecho conocido sólo en el caso en que el álgebra es de tipo  $D_4^{(1,1)}$ . En ese caso, el resultado se puede obtener en a partir del crecimiento exponencial del *mapping class group* de una esfera con cuatro ponchaduras; ya las variables de conglomerados del álgebra de conglomerados de tipo  $D_4^{(1,1)}$  pueden ser parametrizadas utilizando arcos decorados sobre dicha superficie, cf. [2, 5.11].

Esta tesis muestra como se puede utilizar la teoría de representaciones de álgebras para obtener resultados combinatorios sobre álgebras de conglomerado.

En el Capítulo 1 se presentan los conceptos básicos para comprender el resultado de este trabajo. En la Sección 1 se presenta la definición de álgebra de conglomerados. En la Sección 2 se definen las mutaciones de las ternas de Farey y se construye el álgebra de conglomerados de tipo  $D_4^{(1,1)}$ , el ejemplo básico de álgebra de conglomerados de tipo tubular.

W. Geigle y H. Lenzing introdujeron en [6] una clase de curvas no conmutativas a las que llamaron *rectas proyectivas con pesos* con el objetivo de dar un tratamiento geométrico a la teoría de representaciones de las llamadas *álgebras canónicas*. En el Capítulo 2 se presentan las definiciones y conceptos básicos relativos a a la teoría de dichas curvas, en particular, en la Sección 1 se construye la categoría  $\text{coh}(\mathbb{X})$  de gavillas coherentes asociada a una recta proyectiva con pesos  $\mathbb{X}$ . En la Sección 2 se construye la categoría de conglomerados asociada a una recta proyectiva con pesos, que es el modelo categórico que nos permite utilizar técnicas homológicas y de teoría de representaciones para demostrar el Teorema 3.1. En esta sección también se describe brevemente la relación entre la categoría de conglomerados y las álgebras de conglomerados en el caso tubular. Para concluir el capítulo, en la Sección 3 se bosqueja la teoría de mutaciones de Hübner, el análogo categorico de la mutación de conglomerados en la categoría  $\text{coh}(\mathbb{X})$ , donde  $\mathbb{X}$  es una recta proyectiva con pesos de tipo tubular.

En el Capítulo 3 presentamos el resultado de este trabajo, a saber, que toda álgebra de conglomerados de tipo tubular tiene crecimiento exponencial. Para ello, demostramos que el crecimiento de la gráfica de intercambio de un álgebra de conglomerados de tipo tubular está acotado inferiormente por el



crecimiento de la gráfica de intercambio de las ternas de Farey, el árbol 3-regular, cf. Teorema 3.1 y Proposición 1.16. Este trabajo es el resultado de un proyecto de investigación que se realizó de manera conjunta con los profesores M. Barot y Ch. Geiß durante el semestre 2010-1.

# Capítulo 1

## Álgebras de conglomerados

En este capítulo se presentan las definiciones y construcciones básicas que se necesitan para comprender el resultado fundamental de esta tesis, cf. Teorema 3.1. En la Sección 2 se construye el álgebra de conglomerados asociada a las ternas de Farey, que es la columna vertebral de la demostración del Teorema 3.1. También definimos el álgebra de conglomerados de tipo  $D_4^{(1,1)}$ , que es el ejemplo básico de álgebra de conglomerados de tipo tubular. El lector interesado en la motivación de la definición de las álgebras de conglomerado puede consultar [4] o la excelente exposición de [3].

### 1. Definiciones y conceptos básicos

Las álgebras de conglomerados pertenecen a una clase particular de anillos conmutativos con unidad. A *grosso modo*, un álgebra de conglomerados es una subálgebra de  $\mathbb{Q}P(x_1, \dots, x_l)$ , el campo de funciones racionales en las variables  $x_1, \dots, x_l$  con coeficientes en el anillo de grupo de un semicampo  $P$ , que posee una rica estructura combinatoria. Esta estructura se puede codificar con una matriz antisimétrica y ciertas transformaciones a las que llamamos *mutaciones*.

**Definición 1.1** (Mutación de matrices). Sea  $B \in \mathbb{Z}^{l \times l}$  una matriz signo antisimétrica. Para cada  $k \in \{1, \dots, l\}$  definimos una función  $B \mapsto \mu_k(B) = B'$



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

por

$$B'_{ij} = \begin{cases} -B_{ij} & \text{si } i = k \text{ o } j = k, \\ B_{ij} + \frac{|B_{ik}|B_{kj} + B_{ik}|B_{kj}|}{2} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si  $B' = \mu_k(B)$  decimos que  $B'$  se obtiene de  $B$  por *mutación en dirección  $k$* .

**Observación 1.2.** La mutación de matrices es involutiva, i.e.  $\mu_k(\mu_k(B)) = B$ .

**Definición 1.3.** Un *semicampo* es un cuádruple  $(P, \oplus, \cdot, 1)$  donde  $P$  es un conjunto y  $\oplus, \cdot$  son operaciones binarias tales que  $(P, \oplus)$  es un semigrupo conmutativo,  $(P, \cdot, 1)$  es un grupo abeliano, y tal que estas operaciones son compatibles en el siguiente sentido:

$$a(b \oplus c) = ab \oplus ac \text{ para todo } a, b, c \in P.$$

**Observación 1.4.** Cuando no exista riesgo de confusión, identificaremos al semicampo  $(P, \oplus, \cdot, 1)$  con el conjunto  $P$ .

Sea  $P$  un semicampo y sea  $\mathbb{Q}P$  el anillo de grupo de  $P$  con coeficientes en  $\mathbb{Q}$ . Elegimos como *campo ambiente*  $\mathcal{F}$  a un representante de la clase de isomorfismo de  $\mathbb{Q}P(x_1, \dots, x_l)$ , el campo de funciones racionales en las variables  $x_1, \dots, x_l$  con coeficientes en  $\mathbb{Q}P$ . La siguiente definición es, en cierto sentido, el ingrediente combinatorio del álgebra de conglomerado.

**Definición 1.5.** Una *semilla etiquetada* en  $\mathcal{F}$  es un triple  $(B, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  donde:

- (i)  $B \in \mathbb{Z}^{l \times l}$  es una matriz signo anti-simétrica a la que llamamos *matriz de intercambio*,
- (ii)  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_l)$  es un  $l$ -tuplo de elementos de  $\mathcal{F}$  linealmente independientes sobre  $\mathbb{Q}P$  tales que  $\mathcal{F} = \mathbb{Q}P(x_1, \dots, x_l)$  a los que llamamos *variables de conglomerado*,
- (iii)  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_l)$  es un  $l$ -tuplo de elementos de  $P$  a los que llamamos *coeficientes*.

El conjunto  $\mathbf{x}$  es el *conglomerado* de la semilla  $(B, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Sea  $\sigma \in S_l$  una permutación. Sea  $(\sigma(B), \sigma(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{y}))$  la semilla dada por  $\sigma(B) = (B_{\sigma(i)\sigma(j)})$ ,  $\sigma(\mathbf{x}) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(l)})$  y  $\sigma(\mathbf{y}) = (y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(l)})$ . Decimos que dos semillas  $(B, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  y  $(B', \mathbf{x}', \mathbf{y}')$  son equivalentes si existe una

permutación  $\sigma \in S_l$  tal que  $(B', \mathbf{x}', \mathbf{y}') = (\sigma(B), \sigma(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{y}))$ . Es claro que ésta es una relación de equivalencia. Dos semillas etiquetadas equivalentes son esencialmente iguales, por lo que restringiremos nuestra atención a las clases de equivalencia inducidas por esta relación.

**Definición 1.6.** Una *semilla* es una clase de equivalencia de semillas etiquetadas.

La mutación de matrices, cf. Definición 1.1, se extiende a una mutación en las semillas. Esta mutación nos permite construir el conjunto de generadores del álgebra de conglomerado determinada por una semilla.

**Definición 1.7** (Mutación de semillas). Sea  $(B, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  una semilla. Para cada  $k \in \{1, \dots, l\}$  definimos una función  $(B, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mu_k(B, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  dada por  $\mu_k(B, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mu_k(B), \mu_k(\mathbf{x}), \mu_k(\mathbf{y}))$  donde  $\mathbf{x} \mapsto \mu_k(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{y} \mapsto \mu_k(\mathbf{y})$  están definidas como sigue:

Si  $\mu_k(\mathbf{x}) = (x'_1, \dots, x'_l)$ , entonces

$$x'_j = \begin{cases} x_j & \text{si } j \neq k, \\ \frac{y_k \prod x_i^{[B_{ik}]_+} + \prod x_i^{[-B_{ik}]_+}}{(y_k \oplus 1)^{B_{kj}}} x_k & \text{si } j = k. \end{cases}$$

Si  $\mu_k(\mathbf{y}) = (y'_1, \dots, y'_l)$ , entonces

$$y'_j = \begin{cases} y_k^{-1} & \text{si } j = k, \\ \frac{y_j y_k^{[B_{kj}]_+}}{(y_k \oplus 1)^{B_{kj}}} & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Donde  $[x]_+ = \max\{x, 0\}$ . Si  $(B', \mathbf{x}', \mathbf{y}') = \mu_k(B, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  decimos que  $(B', \mathbf{x}', \mathbf{y}')$  se obtiene de  $(B, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  por *mutación en dirección  $k$* .

**Observación 1.8.** De manera análoga a la mutación de matrices, la mutación de semillas es involutiva.

Sea  $(B, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  una semilla en  $\mathcal{F}$ . Llamos al conjunto

$$\mathcal{X} = \{x \in \mu_{k_r} \dots \mu_{k_1}(\mathbf{x}) : k_1, \dots, k_r \in \{1, \dots, l\}, r \geq 0\}$$

el *conjunto de variables de conglomerado*. Al conjunto

$$\{\mu_{k_r} \dots \mu_{k_1}(\mathbf{x}) : k_1, \dots, k_r \in \{1, \dots, l\}, r \geq 0\}$$

lo llamamos el *conjunto de conglomerados*.

**Definición 1.9** (Álgebra de conglomerados). La  $\mathbb{Q}P$ -subálgebra de  $\mathcal{F}$  generada por  $\mathcal{X}$  es el *álgebra de conglomerados* determinada por la semilla  $(B, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  y la denotamos por  $\mathcal{A}(B) = \mathcal{A}(B, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Si  $B \in \mathbb{Z}^{l \times l}$  decimos que  $\mathcal{A}$  es un álgebra de conglomerados de *rango*  $l$ .

La definición de álgebra de conglomerados se simplifica considerablemente si elegimos un semicampo adecuado e  $\mathbf{y} = (1, \dots, 1)$ . Esta elección no resulta en una pérdida considerable de información, cf. Observación 1.11.

**Definición 1.10** (Semicampo tropical<sup>1</sup>). Sea  $(P, \cdot, 1)$  un grupo abeliano libre de rango finito con un conjunto de generadores  $\{p_i : i \in I\}$ . Definimos la operación binaria  $\oplus$  como

$$\prod_{i \in I} p_i^{a_i} \oplus \prod_{i \in I} p_i^{b_i} := \prod_{i \in I} p_i^{\min(a_i, b_i)}.$$

El *semicampo tropical* sobre  $I$  es el semicampo  $(P, \oplus, \cdot, 1)$  y lo denotamos por  $\text{Trop}(p_i : i \in I)$ .

Decimos que un álgebra de conglomerados  $\mathcal{A}(B, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  es de *tipo geométrico* si  $P$  es un semicampo tropical. Decimos que  $\mathcal{A}(B, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  tiene *coeficientes principales* si  $P = \text{Trop}(y_1, \dots, y_l)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_l)$ .

**Observación 1.11.** Dada un álgebra de conglomerados  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(B, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  es posible calcular las variables de conglomerado de  $\mathcal{A}$  a partir de las variables de conglomerado del álgebra de conglomerados con coeficientes principales con matriz de intercambio  $B$ , cf. [5, Theorem 3.7].

**Nota 1.12.** De ahora en adelante, todas las álgebras de conglomerados que consideramos tienen coeficientes triviales, i.e.  $\mathbf{y} = (1, \dots, 1)$ .

Podemos codificar la relación bajo mutación entre los distintos conglomerados utilizando una gráfica. El objetivo de esta tesis es analizar el crecimiento de esta gráfica.

**Definición 1.13.** Sea  $\mathcal{A}$  un álgebra de conglomerado. La *gráfica de intercambio*,  $E(\mathcal{A})$ , es la gráfica cuyos vértices están dados por el conjunto de conglomerados y hay una arista  $\mathbf{x} \xrightarrow[k]{} \mathbf{x}'$  si existe  $k \in \{1, \dots, l\}$  tal que  $\mu_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$ .

---

<sup>1</sup>El adjetivo tropical se utiliza en honor al matemático brasileño Imre Simon, pionero de la geometría tropical, teoría en la que apareció originalmente este semicampo.

**Observación 1.14.** La gráfica  $E(\mathcal{A})$  es  $k$ -regular.

**Definición 1.15.** Sean  $G$  una gráfica,  $V(G)$  su conjunto de vértices y  $\mathbb{T}_r$  un árbol  $r$ -regular (con  $r \geq 3$ ). Definimos  $N(G, v, k)$  cómo el número de vértices de  $G$  que están a distancia  $k \geq 1$  de  $v \in G_0$ . Decimos que  $G$  tiene *crecimiento exponencial* si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(G, v, k)}{p(k)} = \infty$$

para cualquier polinomio  $p \in \mathbb{Z}[k]$ .

**Proposición 1.16.** Sean  $r \geq 3$  y  $\mathbb{T}_r$  un árbol  $r$ -regular. Entonces  $\mathbb{T}_r$  tiene *crecimiento exponencial*.

*Demostración.* Una sencilla inducción muestra que

$$N(\mathbb{T}_r, \mathcal{S}(T), k) = r(r-1)^{k-1} = 3e^{(k-1)\log(r-1)}.$$

para cada  $T \in G_0$  y cada  $k \geq 1$ . □

Decimos que el algebra de conglomerados  $\mathcal{A}$  es de *tipo finito* si  $\mathcal{A}$  tiene un número finito de variables de conglomerado, i.e. si la gráfica de intercambio  $E(\mathcal{A})$  es finita. Decimos que  $\mathcal{A}$  tiene *crecimiento exponencial* si la gráfica  $E(\mathcal{A})$  tiene crecimiento exponencial.

## 1.1. El álgebra de conglomerados asociada a un carcaj

Dada una matriz antisimétrica  $B \in \mathbb{Z}^{l \times l}$  le asociamos un carcaj  $Q_B$  con  $l$  vértices y con  $b_{ij}$  flechas de  $i$  a  $j$  para cada  $i, j \in \{1, \dots, l\}$  si  $b_{ij} > 0$ . Recíprocamente, dado un carcaj  $Q$  sin lazos ni 2-ciclos. Asociamos a  $Q$  una matriz antisimétrica  $B(Q) = (B_{ij})$  dada por

$$B_{ij} = \# \text{ de flechas de } i \text{ a } j - \# \text{ de flechas de } j \text{ a } i.$$

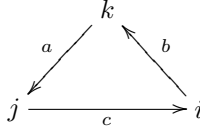
Esta definición nos permite construir fácilmente ejemplos de álgebras de conglomerados motivados por ejemplos conocidos de álgebras de caminos.

**Definición 1.17.** El *álgebra de conglomerados asociada a  $Q$*  es el álgebra de conglomerados (con coeficientes principales)  $\mathcal{A}(B_Q)$ , cf. Definición 1.9.

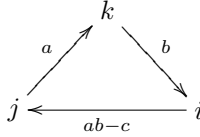
Existe una noción de mutación para carcajes (sin lazos ni 2-ciclos) que resulta compatible con la mutación de matrices, cf. Observación 1.20.

**Definición 1.18** (Mutación de carcajes). Sea  $Q$  un carcaj sin lazos ni 2-ciclos. Sea  $k \in \{1, \dots, l\}$  donde  $l$  es el número de vértices de  $Q$ . Definimos un nuevo carcaj  $\mu_k(Q)$  por:

- (i)  $\mu_k(Q)$  tiene los mismos vértices que  $Q$ .
- (ii) Las flechas que inciden en  $k$  cambian de dirección.
- (iii) Si  $a, b \geq 0$ ,  $c \in \mathbb{Z}$  y el siguiente carcaj está contenido en  $Q$



entonces, en  $\mu_k(Q)$ , el carcaj anterior cambia por el siguiente carcaj:



Donde  $j \xrightarrow{1} i = j \xleftarrow{-1} i$ . A un carcaj como los anteriores los llamamos *ganchos que pasan por k*.

- (iv) Las demás flechas no cambian.

Si  $Q' = \mu_k(Q)$ , entonces decimos que  $Q'$  se obtiene de  $Q$  por *mutación en dirección k*.

**Observación 1.19.** De nuevo, la mutación de carcajes es involutiva.

**Observación 1.20.** La definición de mutación de carcajes resulta compatible con la mutación de matrices, i.e.  $\mu_k(Q_B) = Q_{\mu_k(B)}$ .

## 2. Crecimiento exponencial

### 2.1. Mutaciones de ternas de Farey

M. Barot y Ch. Geiß mostraron, cf. [1], que existe una interesante relación entre las variables de conglomerado del algebra de conglomerados de tipo



$D_4^{(1,1)}$ , cf. Definición 1.17 y las fracciones de Farey, ciertas parejas de fracciones que fueron estudiadas en el siglo XIX en el contexto de la teoría de los números. Aquí definimos las mutaciones de las ternas de Farey. Resulta que la gráfica de intercambio inducida por estas mutaciones es el árbol 3-regular. Esta gráfica tiene un papel protagónico en la demostración del Teorema 3.1.

Sea  $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  el conjunto de los números racionales extendidos. Entonces  $\mathbb{Q}_\infty$  es un conjunto totalmente ordenado con el orden natural (i.e.  $q < \infty$  para todo  $q \in \mathbb{Q}$ ). Además, para cada  $q \in \mathbb{Q}$  existen dos únicos  $d(q), r(q) \in \mathbb{Z}$  tales que

$$q = \frac{d(q)}{r(q)}$$

con  $r(q) > 0$  y  $\text{mcd}(d(q), r(q)) = 1$ . Además, definimos  $d(\infty) = 1$  y  $r(\infty) = 0$ .

**Definición 1.21.** Sean  $q, q' \in \mathbb{Q}_\infty$ . Definimos la *suma de Farey* de  $q$  y  $q'$  por

$$q \oplus q' = \frac{d(q) + d(q')}{r(q) + r(q')}.$$

Análogamente definimos la *resta de Farey* de  $q$  y  $q'$  por

$$q \ominus q' = \frac{d(q) - d(q')}{r(q) - r(q')}.$$

**Definición 1.22.** Sean  $q, q' \in \mathbb{Q}_\infty$ . Definimos

$$\Delta(q, q') = |d(q)r(q') - d(q')r(q)| = \left| \det \begin{pmatrix} d(q) & d(q') \\ r(q) & r(q') \end{pmatrix} \right|.$$

Si  $\Delta(q, q') = 1$  decimos que  $q$  y  $q'$  son *vecinos de Farey*. Por ejemplo,  $\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}\}$  es una terna de Farey.

**Observación 1.23.** Si  $q$  y  $q'$  son vecinos de Farey entonces

$$\text{mcd}(d(q) + d(q'), r(q) + r(q')) = \text{mcd}(d(q) - d(q'), r(q) - r(q')) = 1.$$

Es claro que ambas operaciones son conmutativas. Decimos que un conjunto  $\{q_1, q_2, q_3\} \in \mathbb{Q}_\infty^3$  es una *terna de Farey* si se tiene que  $\Delta(q_i, q_j) = 1$  para cada par  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  con  $i \neq j$ . Es fácil ver que dada una terna de Farey  $\{q_1, q_2, q_3\}$  se tiene que  $q_s = q_r \oplus q_t$  donde  $q_r < q_s < q_t$ . Por simplicidad, siempre etiquetaremos los elementos de una terna de Farey de manera que  $q_1 < q_2 < q_3$ .

**Definición 1.24** (Mutaciones de ternas de Farey). Sea  $\{q_1, q_2, q_3\}$  una terna de Farey. Para cada  $k \in \{1, 2, 3\}$  definimos una función  $\{q_1, q_2, q_3\} \mapsto \mu_k(\{q_1, q_2, q_3\})$  como sigue:

$$\begin{aligned}\mu_1(\{q_1, q_2, q_3\}) &\mapsto \{q_2 \oplus q_3, q_2, q_3\}, \\ \mu_2(\{q_1, q_2, q_3\}) &\mapsto \{q_1, q_1 \ominus q_3, q_3\}, \\ \mu_3(\{q_1, q_2, q_3\}) &\mapsto \{q_1, q_2, q_1 \oplus q_2\}.\end{aligned}$$

Si  $\{q'_1, q'_2, q'_3\} = \mu_k(\{q_1, q_2, q_3\})$  decimos que  $\{q'_1, q'_2, q'_3\}$  se obtiene de  $\{q_1, q_2, q_3\}$  por *mutación en dirección k*.

**Observación 1.25.** Un cálculo sencillo demuestra que  $\mu_k(\{q_1, q_2, q_3\})$  es de nuevo una terna de Farey. Como antes, las mutaciones de ternas de Farey son involuciones.

**Definición 1.26.** Sea  $(q_1, q_2, q_3)$  una terna de Farey. Definimos la *complejidad* de la terna como

$$c(q_1, q_2, q_3) = |d(q_s)| + r(q_s)$$

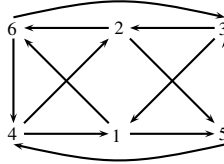
donde  $q_r < q_s < q_t$ .

**Observación 1.27.** Utilizando la complejidad, se puede demostrar que la gráfica de intercambio de las ternas de Farey es un árbol 3-regular, cf. [1, Section 4]. En particular, el álgebra de conglomerados determinada por las ternas de Farey tiene crecimiento exponencial.

## 2.2. El álgebra de conglomerados de tipo $D_4^{(1,1)}$

En esta sección presentamos el álgebra de conglomerados de tipo  $D_4^{(1,1)}$ , el ejemplo básico de un álgebra de conglomerados de tipo tubular, cf. Teorema 2.45.

**Definición 1.28.** Consideremos el carcaj  $Q$  de la siguiente figura:



El álgebra de conglomerados de tipo  $D_4^{(1,1)}$  es el álgebra de conglomerados  $\mathcal{A}(B_Q)$ .

**Observación 1.29.** La clase de equivalencia bajo mutación de  $Q$  solo tiene cuatro elementos, el carcaj  $Q$  y los siguientes carcajes:

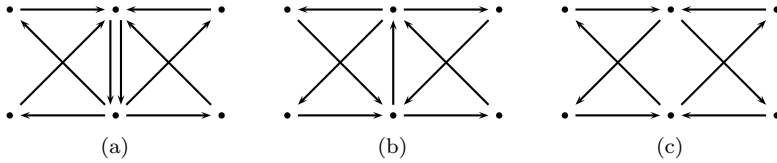


Figura 1.1: Clase de mutación de  $Q$ .

El lector puede comprobar este hecho utilizando, por ejemplo, el “Mutation Applet” de B. Keller, cf. [9].

**Observación 1.30.** La gráfica inducida por el carcaj (a) de la Figura 1.1 es el diagrama asociado al sistema de raíces elíptico de tipo  $D_4^{(1,1)}$ , cf. [1, Section 1].

Definimos  $\tilde{\mu}_{-1} = \mu_2\mu_1$ ,  $\tilde{\mu}_0 = \mu_3\mu_4$  y  $\tilde{\mu}_\infty = \mu_6\mu_5$ . Al identificar estas mutaciones con las mutaciones de las ternas de Farey, es posible demostrar que el crecimiento de la gráfica de intercambio del álgebra de conglomerados de tipo  $D_4^{(1,1)}$  está acotado inferiormente por el crecimiento de la gráfica intercambio de las ternas de Farey. Por lo tanto, el álgebra de conglomerados de tipo  $D_4^{(1,1)}$  tiene crecimiento exponencial, cf. [1, Section 4].

## Capítulo 2

# Rectas proyectivas con pesos

Para demostrar el Teorema 3.1 asociamos a un álgebra de conglomerados de tipo tubular, cf. Teorema 2.45, una categoría  $\mathcal{C}_{\mathbb{X}}$  a la que llamamos *categoría de conglomerados*, y estudiamos el crecimiento con ella. Esta categoría está relacionada con la categoría derivada acotada de la categoría  $\text{coh}(\mathbb{X})$  de gavillas coherentes sobre una recta proyectiva con pesos, cf. Definición 2.5. En este capítulo presentamos las definiciones y resultados (sin demostración) acerca de las rectas proyectivas con pesos y la teoría de mutaciones de Hübner, el análogo a las mutaciones de conglomerados en  $\text{coh}(\mathbb{X})$ . Estas mutaciones nos permiten controlar ciertos invariantes discretos relacionados con el grupo de Grothendieck de  $\text{coh}(\mathbb{X})$ . Para un tratamiento detallado de la teoría de rectas proyectivas con pesos en el contexto de la teoría de representaciones de álgebras, referimos al lector a [6]. Un tratamiento completo de la teoría de mutaciones de Hübner, se puede encontrar en [8].

# 1. Gavillas coherentes sobre rectas proyectivas con pesos

## 1.1. Definiciones básicas

Sea  $k$  un campo algebraicamente cerrado. Decimos que  $\lambda, \lambda' \in k^2$  son equivalentes si existe  $a \in k \setminus \{0\}$  tal que  $a\lambda = \lambda'$ . La *recta proyectiva sobre  $k$* , que denotamos  $\mathbb{P}_k^1$ , es el conjunto de clases de equivalencia de  $k^2 \setminus \{\bar{0}\}$  inducidas por esta relación de equivalencia.

**Definición 2.1.** Sea  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$  un  $t$ -tuplo de puntos de  $\mathbb{P}_k^1$  distintos dos a dos y sea  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_t)$  un  $t$ -tuplo de enteros no negativos tales que  $p_i \geq 2$  para cada  $i \in \{1, \dots, t\}$ . Llamamos al triple  $\mathbb{X} = (\mathbb{P}_k^1, \lambda, \mathbf{p})$  una *recta proyectiva con pesos*.

**Notación 2.2.** Sea  $p_\lambda : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{Z}^+$  la función dada por

$$\mu \mapsto \begin{cases} p_i & \text{si } \mu \in \lambda, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Notación 2.3.** Definimos  $p := \text{mcm}(p_1, \dots, p_t)$ .

Sea  $L(\mathbf{p})$  el grupo aditivo de rango 1 con la siguiente presentación por generadores y relaciones:

$$L(\mathbf{p}) := \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_t : p_1 \vec{x}_1 = \dots = p_t \vec{x}_t := \vec{c} \rangle$$

.

**Observación 2.4.** Sea  $\vec{y} \in L(\mathbf{p})$ . Entonces  $\vec{y}$  se puede escribir de *forma normal* de manera única como

$$\eta \vec{c} + \sum_{i=1}^t \eta_i \vec{x}_i$$

donde  $\eta, \eta_1, \dots, \eta_t \in \mathbb{Z}$  y  $-p_i \leq \eta_i \leq p_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, t\}$ . Decimos que  $0 \leq \vec{y}$  si y sólo si  $\eta, \eta_1, \dots, \eta_t \geq 0$ .

Sea  $\lambda_i = [\lambda'_i : \lambda''_i] \in \mathbb{P}_k^1$  para cada  $i \in \{1, \dots, t\}$ . Definimos  $S(\mathbf{p}, \lambda)$  como el álgebra conmutativa  $L(\mathbf{p})$ -graduada

$$S(\mathbf{p}, \lambda) = k[u, v, x_1, \dots, x_t] / (x_i^{p_i} - \lambda'_i u - \lambda''_i v : 1 \leq i \leq t),$$

donde la graduación está dada por  $\deg x_i = \vec{x}_i$ .

**Definición 2.5.** La categoría  $\text{coh}(\mathbb{X})$ , de gavillas coherentes sobre  $\mathbb{X}$ , es la categoría cociente de la categoría de  $S(\mathbf{p}, \lambda)$ -módulos (a derecha)  $L(\mathbf{p})$ -graduados finitamente generados por la subcategoría de Serre de módulos de longitud finita.

**Observación 2.6.** Se sabe que  $\text{coh}(\mathbb{X})$  es una categoría abeliana y hereditaria tal que los espacios  $\text{Hom}$  y  $\text{Ext}$  son de dimensión finita, cf. [6, 1.8].

**Observación 2.7.** Podemos “desplazar” la graduación por cualquier  $\vec{x} \in L(\mathbf{p})$  al definir  $E(\vec{x})_{\vec{y}} := E_{\vec{x}+\vec{y}}$ . Esto permite definir módulos desplazados  $E(\vec{x})$  para cada  $E \in \text{coh}(\mathbb{X})$  y cada  $\vec{x} \in L(\mathbf{p})$ .

**Observación 2.8.** El  $S(\mathbf{p}, \lambda)$ -módulo libre induce una gavilla de estructura  $\mathcal{O} \in \text{coh}(\mathbb{X})$ .

La categoría  $\text{coh}(\mathbb{X})$  es el primer paso en la categorificación de las álgebras de conglomerados de tipo tubular. Esta categoría tiene una rica estructura: por ejemplo, satisface la siguiente versión de la dualidad de Serre:

**Teorema 2.9** (Dualidad de Serre). [6, 2.2] Sean  $E, F \in \text{coh}(\mathbb{X})$  y  $\vec{\omega} := \sum_{i=1}^t (\vec{c} - \vec{x}_i) - 2\vec{c}$ . Entonces

$$D \text{Ext}_{\text{coh}(\mathbb{X})}^1(E, F) \simeq \text{Hom}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(F, E(\vec{\omega})).$$

A  $\vec{\omega}$  se le conoce como el elemento dualizante.

**Observación 2.10.** Una consecuencia de la dualidad de Serre es que  $\text{coh}(\mathbb{X})$  tiene sucesiones de Auslander-Reiten, cf. [6, 2.3], donde la traslación de Auslander-Reiten está dada por  $\tau(E) := E(\vec{\omega})$ .

Sea  $\text{coh}_0(\mathbb{X})$  la subcategoría plena de  $\text{coh}(\mathbb{X})$  cuyos objetos son las gavillas de longitud finita. La existencia de sucesiones de Auslander-Reiten permite utilizar los métodos clásicos de la teoría de representaciones para estudiar la estructura de  $\text{coh}_0(\mathbb{X})$ , como se puede observar en la siguiente proposición:

**Proposición 2.11.** [1, Proposition 2.1] La categoría  $\text{coh}_0(\mathbb{X})$  es una categoría abeliana, exacta y uniserial, la cual es estable bajo la traslación de Auslander-Reiten. Además, las componentes del carcaj de Auslander-Reiten de  $\text{coh}_0(\mathbb{X})$  forma una familia de tubos  $\text{Hom}$  y  $\text{Ext}$ -ortogonales dos a dos  $(\mathcal{T}_\mu)_{\mu \in \mathbb{P}_k^1}$  con  $\text{rk } \mathcal{T}_\mu = p_\lambda(\mu)$ , cf. [11].

**Observación 2.12.** Una categoría es *uniserial* si las clases de isomorfismo de subobjetos de un objeto indescomponible dado forman un conjunto linealmente parcialmente ordenado. La última afirmación significa que, para cada gavilla  $E \in \text{coh}_0(\mathbb{X})$ , existe un único  $\mu \in P_k^1$  tal que  $E \in \mathcal{T}_\mu$ , y para cada  $E \in \mathcal{T}_\mu$  se tiene que  $\tau^{p_\lambda(\mu)}(E) = E$ .

## 1.2. Raíces de Schur

En esta sección traducimos cierta información de la categoría  $\text{coh}(\mathbb{X})$  en términos de elementos del grupo de Grothendieck, cf. Definición 2.13, llamados raíces de Schur. Esta traducción nos permite contar con invariantes discretos asociados a ciertas gavillas que son de fundamental importancia en la demostración del Teorema 3.1.

Sea  $F$  el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo de objetos de  $\text{coh}(\mathbb{X})$ , y sea

$$R = \langle [A] + [C] - [B] : \text{existe una sucesión exacta } 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 \rangle.$$

**Definición 2.13.** El grupo  $K_0(\mathbb{X}) := F/R$  es el *grupo de Grothendieck* de  $\text{coh}(\mathbb{X})$ .

**Proposición 2.14.** [1, 2.2]

(i) *La forma homológica*

$$\langle E, F \rangle = \dim \text{Hom}_{\mathbb{X}}(E, F) - \dim \text{Hom}_{\text{coh}(\mathbb{X})}^1(E, F)$$

*induce una forma bilineal entera en  $K_0(\mathbb{X})$ .*

(ii) *La traslación de Auslander-Reiten induce una transformación lineal  $\tau$  en  $K_0(\mathbb{X})$  tal que  $[E(\vec{\omega})] = \tau[E]$  para cada  $E \in \text{coh}(\mathbb{X})$ .*

(iii)  *$\langle \tau \mathbf{e}, \tau \mathbf{f} \rangle = \langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle = -\langle \mathbf{f}, \tau \mathbf{e} \rangle$  para todo  $\mathbf{e}, \mathbf{f} \in K_0(\mathbb{X})$ . En particular, si  $\tau \mathbf{e} = \mathbf{e}$  entonces  $\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = 0$ .*

**Observación 2.15.** Existe un elemento  $\mathbf{h}_\infty \in K_0(\mathbb{X})$  tal que  $\mathbf{h}_\infty = [S_\mu]$  para todo  $\mu \in \mathbb{P}_k^1$  con  $p_\lambda(\mu) = 1$ , cf. [1, 2.2].

Los siguientes invariantes nos permiten distinguir entre las clases de isomorfismo de gavillas inclinantes, cf. Definición 2.26, cierta clase de gavillas que corresponden a los conglomerados y que tienen una importancia central en nuestro estudio del crecimiento de las álgebras de conglomerados de tipo tubular.

**Definición 2.16.** Sea  $E \in \text{coh}(\mathbb{X})$ . Definimos el *rango de E* como

$$\text{rk } E := \langle [E], \mathbf{h}_\infty \rangle.$$

**Observación 2.17.** Se tiene que  $\text{rk } \mathcal{O}(\vec{x}) = 1$ , cf. Observación 2.8, y  $\text{rk } S = 0$  para toda gavilla simple  $S \in \text{coh}_0(\mathbb{X})$ , cf. [1, 2.2].

**Definición 2.18.** Sea  $\mathbf{h}_0 := \sum_{k=0}^{p-1} [\mathcal{O}(k\vec{\omega})]$ . Definimos el *grado* de una gavilla  $E \in \text{coh}(\mathbb{X})$  como

$$\text{deg } E := \langle \mathbf{h}_0, [E] \rangle - (\text{rk } E) \langle \mathbf{h}_0, \mathcal{O} \rangle.$$

**Definición 2.19.** Sea  $\mathbf{e} \in K_0(\mathbb{X})$ . Entonces,

$$0 \prec \mathbf{e} \text{ si y sólo si } \text{rk } \mathbf{e} > 0 \text{ o } (\text{rk } \mathbf{e} = 0 \text{ y } \text{deg } \mathbf{e} > 0).$$

Decimos que  $\mathbf{e} \in K_0(\mathbb{X})$  es *positivo* si  $0 \prec \mathbf{e}$ .

**Observación 2.20.** Dado que el rango y el grado son funcionales lineales en  $K_0(\mathbb{X})$ , la definición anterior hace de  $K_0(\mathbb{X})$  un grupo ordenado.

**Observación 2.21.** Para cada  $E \in \text{coh}(\mathbb{X})$  se tiene que  $0 \prec [E]$ .

La siguiente clase de elementos distinguidos del grupo de Grothendieck nos permite relacionar los invariantes anteriores con las gavillas rígidas, cf. Definición 2.23, que serán el análogo de las variables de conglomerado en el caso tubular.

**Definición 2.22.** Sean  $\mathbb{X}$  una recta proyectiva con pesos y  $\mathbf{e} \in K_0(\mathbb{X})$ . Decimos que  $\mathbf{e}$  es una *raíz positiva* si existe una gavilla *inescindible*  $E \in \text{coh}(\mathbb{X})$  tal que  $[E] = \mathbf{e}$ . Una raíz positiva  $\mathbf{e}$  es una *raíz de Schur* si  $E$  se puede elegir tal que  $\text{Hom}_{\mathbb{X}}(E, E) \simeq k$ , decimos que es *real* si  $\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = 1$  y que es *isotrópica* si  $\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = 0$ .

**Definición 2.23.** Sea  $E \in \text{coh}(\mathbb{X})$ . Decimos que  $E$  es una gavilla *rígida* si  $\text{Ext}_{\text{coh}(\mathbb{X})}^1(E, E) = \{0\}$ .

**Proposición 2.24.** [10, Proposition 4.4.1] La función  $E \mapsto [E]$  induce una biyección entre las clases de isomorfismo de gavillas rígidas inescindibles y las raíces reales positivas de Schur.



**Definición 2.25.** Para cada  $\mathbf{e} \in K_0(\mathbb{X})$  positivo, definimos la *pendiente de  $\mathbf{e}$*  como

$$\text{slope}(\mathbf{e}) := \frac{\deg \mathbf{e}}{\text{rk } \mathbf{e}} \in \mathbb{Q}_\infty.$$

Si  $E \in \text{coh}(\mathbb{X})$ , definimos  $\text{slope } E := \text{slope}[E]$ .

La siguiente clase de gavillas corresponde de cierta manera a los conglomerados, y serán de utilidad en la demostración del Teorema 3.1.

**Definición 2.26.** Sea  $E \in \text{coh}(\mathbb{X})$  una gavilla rígida. Decimos que  $E$  es una gavilla *inclinante* si es maximal entre las gavillas rígidas en el siguiente sentido: Para cualquier gavilla rígida  $F \in \text{coh}(\mathbb{X})$ , tal que  $E \oplus F$  es rígida, se tiene que  $F \in \text{add } E$ ; i.e  $F$  es una suma directa finita de sumandos directos indescomponibles de  $E$ .

**Observación 2.27.** El número de sumandos inescindibles (no isomorfos dos a dos) de cualquier gavilla inclinante coincide con el rango del grupo de Grothendieck,  $\text{rk}(K_0(\mathbb{X})) = 2 + \sum_{i=1}^t (p_i - 1)$ , cf. Definición 2.13.

## 2. La categoría de conglomerados

La categoría de conglomerados es el modelo que nos permite estudiar el crecimiento de un álgebra de conglomerados mediante un enfoque categórico. Además, trabajar en la categoría de conglomerados nos permite utilizar la teoría geométrica de las gavillas coherentes sobre  $\mathbb{X}$  y las raíces de Schur para estudiar el crecimiento de las álgebras de conglomerado de tipo tubular.

### 2.1. Construcción

La construcción de la categoría de conglomerados es bastante técnica. Primero, recordamos algunas definiciones de álgebra homológica.

**Definición 2.28.** Un *complejo de cadenas* de  $\text{coh}(\mathbb{X})$  es una sucesión

$$\cdots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow E_n \rightarrow E_{n+1} \rightarrow \cdots$$

de morfismos en  $\text{coh}(\mathbb{X})$  tal que  $d_n d_{n-1} = 0$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , o de manera equivalente, tal que  $\text{im } d_{n-1} \subset \ker d_n$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ . Definimos

$$H_n(E_\bullet) := \ker d_n / \text{im } d_{n-1}.$$

A este módulo se le llama el  *$n$ -ésimo grupo de homología de  $E_\bullet$* .

**Definición 2.29.** Sean  $E_\bullet$  y  $F_\bullet$  dos complejos de cadenas de  $\text{coh}(\mathbb{X})$ . Un *morfismo de cadenas* es un conjunto de morfismos  $f = \{f_n : E_n \rightarrow F_n\}$  tal que

$$f_{n+1}d_n^E = d_n^F f_n \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Esto es, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & E_n & \xrightarrow{d_n^E} & E_{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & F_n & \xrightarrow{d_n^F} & F_{n+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

para cada  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Observación 2.30.** Esta condición implica que  $f$  induce un morfismo

$$f_* : H_n(E_\bullet) \rightarrow H_n(F_\bullet)$$

entre los grupos de homología para cada  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Notación 2.31.** Denotamos por  $\text{ch}(\text{coh}(\mathbb{X}))$  a la categoría cuyos objetos son los complejos de cadenas de  $\text{coh}(\mathbb{X})$  con morfismos dados por los morfismos de cadenas.

**Definición 2.32.** Un morfismo de cadenas es un *quasi-isomorfismo* si los morfismos inducidos en los grupos de homología son todos isomorfismos.

**Definición 2.33.** Un morfismo de cadenas  $f : E_\bullet \rightarrow F_\bullet$  es *homotópico a 0* si existe una familia de morfismos  $\{h_n : E_n \rightarrow F_{n-1}\}$  tal que

$$f_n = d_{n-1}^F h_n + h_{n+1} d_n^E \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

La situación anterior se ilustra en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \longrightarrow & E_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}^E} & E_n & \xrightarrow{d_n^E} & E_{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \swarrow h_{n-1} & \downarrow f_{n-1} & \swarrow h_n & \downarrow f_n & \swarrow h_{n+1} & \downarrow f_{n+1} & \\ \cdots & \longrightarrow & F_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}^F} & F_n & \xrightarrow{d_n^F} & F_{n+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

**Observación 2.34.** El conjunto de morfismos homotópicos a 0,  $Null(E_\bullet, F_\bullet)$ , es un subgrupo de  $\text{Hom}_{\text{ch}(\text{coh}(\mathbb{X}))}(E_\bullet, F_\bullet)$ .

La categoría homotópica  $\mathcal{K}(\text{coh}(\mathbb{X}))$ , y la categoría derivada acotada  $\mathcal{D}^b(\text{coh}(\mathbb{X}))$ , son las categorías intermedias entre  $\text{coh}(\mathbb{X})$  y la categoría de conglomerados.

**Definición 2.35.** La *categoría homotópica* de  $\text{coh}(\mathbb{X})$ , a la que denotamos  $\mathcal{K}(\text{coh}(\mathbb{X}))$ , es la categoría cuyos objetos son los complejos de cadenas de  $\text{coh}(\mathbb{X})$ , y cuyos morfismos están dados por

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}(\text{coh}(\mathbb{X}))}(E_\bullet, F_\bullet) := \frac{\text{Hom}_{\text{ch}(\text{coh}(\mathbb{X}))}(E_\bullet, F_\bullet)}{Null(E_\bullet, F_\bullet)}.$$

**Definición 2.36.** La *categoría derivada acotada* de  $\text{coh}(\mathbb{X})$ , que denotamos  $\mathcal{D}^b(\text{coh}(\mathbb{X}))$ , es la categoría cuyos objetos son los complejos de cadenas de  $\text{coh}(\mathbb{X})$  tales que  $E_n = 0$  si  $n \ll 0$  y  $H_n(E_\bullet) = \{0\}$  si  $n \gg 0$  y cuyos conjuntos de morfismos están dados por los morfismos en  $\mathcal{K}(\text{coh}(\mathbb{X}))$  localizados respecto a los quasi-isomorfismos.

**Definición 2.37.** Para cada  $m \in \mathbb{Z}$ , definimos un funtor

$$[m] : \mathcal{D}^b(\text{coh}(\mathbb{X})) \rightarrow \mathcal{D}^b(\text{coh}(\mathbb{X}))$$

por  $[m]E_n := E_{n-m}$ ,  $d_n^{[m]E} = (-1)^m d_{n-m}^E$  y  $[m]f_n := f_{n-m}$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ . Es claro que  $[m]$  es un automorfismo de  $\mathcal{D}^b(\text{coh}(\mathbb{X}))$  con inverso  $[-m]$ .

Con todo esto, podemos definir la categoría de conglomerados asociada a  $\text{coh}(\mathbb{X})$ . La relación entre estas categorías se explica en la Observación 2.39 y el Teorema 2.45.

**Definición 2.38.** La *categoría de conglomerados* de  $\text{coh}(\mathbb{X})$ , que denotamos  $\mathcal{C}_{\mathbb{X}}$ , es la categoría cuyos objetos son los objetos de  $\mathcal{D}^b(\text{coh}(\mathbb{X}))$ , y cuyos morfismos están dados por

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_{\mathbb{X}}}(E_\bullet, F_\bullet) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\text{coh}(\mathbb{X}))}((\tau^{-1}[1])^i E_\bullet, F_\bullet),$$

donde  $\tau^{-1}$  es el inverso de la traslación de Auslander-Reiten.

**Observación 2.39.** La composición de funtores canónicos

$$\text{coh}(\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathcal{D}^b(\text{coh}(\mathbb{X})) \twoheadrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{X}}$$

nos permite pensar a  $\text{coh}(\mathbb{X})$  como una subcategoría no plena de  $\mathcal{C}_{\mathbb{X}}$  que tiene las mismas clases de isomorfismo de objetos indescomponibles y las mismas clases de objetos rígidos, cf. [2, Proposition 2.3]. De aquí se sigue que hay una correspondencia biyectiva entre las gavillas inclinantes de  $\text{coh}(\mathbb{X})$ , cf. Definición 2.26, y los *objetos inclinantes de conglomerados* de  $\mathcal{C}_{\mathbb{X}}$ , i.e. los objetos rígidos maximales de  $\mathcal{C}_{\mathbb{X}}$ .

## 2.2. El caso tubular

Sea  $\mathbb{X}$  una recta proyectiva con pesos. Definimos el *género virtual de  $\mathbb{X}$*  como

$$g_{\mathbb{X}} := 1 + \frac{1}{2} \left( (t-2)p - \sum_{i=1}^t \frac{p}{p_i} \right).$$

Si  $g_{\mathbb{X}} \leq 1$  se sabe que la categoría  $\text{coh}(\mathbb{X})$  es derivadamente equivalente a la categoría de módulos sobre un álgebra hereditaria mansa  $A$ , i.e.  $\mathcal{D}^b(\text{coh}(\mathbb{X})) \simeq \mathcal{D}^b(\text{mód}A)$ ; y si  $g_{\mathbb{X}} > 1$  se sabe que el problema de clasificación de los inescindibles en  $\text{coh}(\mathbb{X})$  es salvaje. Un cálculo elemental muestra que  $g_{\mathbb{X}} = 1$  si y sólo si

$$\mathbf{p} \in \{(6, 3, 2), (4, 4, 2), (3, 3, 3), (2, 2, 2, 2)\}.$$

En este caso, decimos que  $\mathbb{X}$  es *de tipo tubular*.

La siguiente proposición muestra, que en el caso tubular, el cálculo de los invariantes  $\text{deg}$  y  $\text{slope}$  se simplifica.

**Proposición 2.40.** [1, 2.4] *Sean  $\mathbb{X}$  una recta proyectiva con pesos de tipo tubular y  $p = \text{mcm}(p_1, \dots, p_t)$ . Entonces,  $p\vec{\omega} = 0$  y  $\langle \mathbf{h}_0, [\mathcal{O}] \rangle = 0$ .*

**Observación 2.41.** En este caso, el grado se simplifica a  $\text{deg } \mathbf{e} = \langle \mathbf{h}_0, \mathbf{e} \rangle$ .

Recordamos que para cada  $q \in \mathbb{Q}_{\infty}$  existen dos únicos números enteros primos relativos,  $d(q)$ ,  $r(q)$ , tales que  $q = \frac{d(q)}{r(q)}$  con  $d(q) \in \mathbb{Z}$  y  $r(q) \geq 0$ . Para cada  $q \in \mathbb{Q}_{\infty}$ , definimos

$$\mathbf{h}_q := r(q)\mathbf{h}_0 + d(q)\mathbf{h}_{\infty}.$$

Observamos que  $\text{slope}(\mathbf{h}_q) = q$ , cf. Definición 2.16 y Observación 2.41.

**Proposición 2.42.** [1, Proposition 2.9] *Sea  $\mathbb{X}$  una recta proyectiva con pesos de tipo tubular. Entonces, las raíces positivas isotrópicas de Schur de  $K_0(\mathbb{X})$  son de la forma  $\mathbf{h}_q$  con  $q \in \mathbb{Q}_{\infty}$ .*

**Definición 2.43.** Las álgebras de conglomerados asociadas a los carcajes  $\Lambda(3, 3, 3)$ ,  $\Lambda(4, 4, 2)$  y  $\Lambda(6, 3, 2)$  (en los que interpretamos las relaciones como flechas en la dirección contraria) que se ilustran en la figura anterior son llamadas de tipo  $E_6^{(1,1)}$ ,  $E_7^{(1,1)}$  y  $E_8^{(1,1)}$  respectivamente, cf. Teorema 2.45. En lo que sigue, cuando nos referimos a un álgebra de conglomerados de tipo tubular (que no sea de tipo  $D_4^{(1,1)}$ ) pensaremos en las álgebras definidas por estos carcajes.

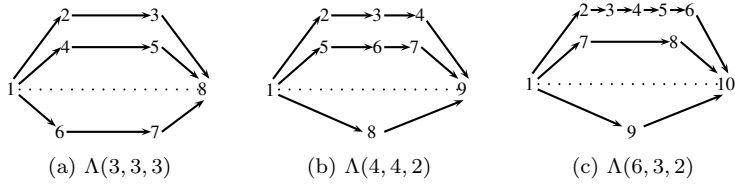


Figura 2.1: Carcajes asociados a las álgebras canónicas.

**Observación 2.44.** Sean  $\mathbb{X}$  una recta proyectiva con pesos de tipo tubular, y sea  $T_{\text{can}} \in \text{coh}(\mathbb{X})$  la gavilla

$$T_{\text{can}} = \bigoplus_{0 \leq \vec{y} \leq \vec{c}} \mathcal{O}(\vec{y}).$$

Entonces, el carcaj con relaciones de  $\text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T_{\text{can}})$  es el carcaj de la Figura 2.1 con los pesos correspondientes, cf [6, Proposition 2.8, Lemma 4.2]. Además  $\text{rk}(\mathcal{O}(\vec{y})) = 1$  y  $\text{deg}(\mathcal{O}(a\vec{x}_i)) = a \frac{p}{p_i}$  para todo  $a \in \mathbb{Z}$ , cf. Observación 2.15 y [6, Proposition 2.8, Lemma 4.2]. Por lo tanto, las pendientes de  $T_{\text{can}}$  son las siguientes en cada caso:

$$\begin{aligned} \Lambda(3, 3, 3) &: \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1} \right), \\ \Lambda(4, 4, 2) &: \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{2}{1}, \frac{4}{1} \right), \\ \Lambda(6, 3, 2) &: \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{2}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{1} \right). \end{aligned}$$

El siguiente teorema explica la utilidad de la categoría de conglomerados de una recta proyectiva con pesos en el estudio de las álgebras de conglomerados de tipo tubular.

**Teorema 2.45.** [1, Theorem 1.1] *Cada álgebra de conglomerados  $\mathcal{A}$  de tipo  $D_4^{(1,1)}$ ,  $E_6^{(1,1)}$ ,  $E_7^{(1,1)}$  o  $E_8^{(1,1)}$  puede ser categorificada por  $C_{\mathbb{X}}$ , donde  $\mathbb{X}$  es una recta proyectiva con pesos  $\mathbf{p} = (2, 2, 2, 2)$ ,  $(3, 3, 3)$ ,  $(4, 4, 2)$  y  $(6, 3, 2)$  respectivamente. Mas precisamente, existe una biyección entre el conjunto de (clases de isomorfismo de) objetos rígidos inescindibles de  $C_{\mathbb{X}}$  y las variables de conglomerado de  $\mathcal{A}$ , y una biyección entre las (clases de isomorfismo de) objetos de tilteo de conglomerados de  $C_{\mathbb{X}}$  y los conglomerados de  $\mathcal{A}$ .*

### 3. Mutaciones de Hübner

En esta sección introducimos la mutación de gavillas inclinantes, cf. Definición 2.50. Esta mutación es compatible con las mutaciones introducidas en el Capítulo 1, cf. Observación 2.60. Para un tratamiento completo de la teoría de mutaciones de Hübner, referimos al lector a [8]. A lo largo de esta sección,  $\mathbb{X}$  es una recta proyectiva con pesos de tipo tubular.

**Definición 2.46.** Un morfismo  $h \in \text{Hom}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(E, F)$  es *irreducible* si no es un isomorfismo; y si para cada par de morfismos  $f \in \text{Hom}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(E, H)$  y  $g \in \text{Hom}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(H, F)$  tales que  $gf = h$ , se tiene que  $f$  es una sección o bien que  $g$  es una retracción.

**Definición 2.47.** Sean  $E, F \in \text{coh}(\mathbb{X})$ . Definimos  $\text{irr}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(E, F)$  como el espacio vectorial de morfismos irreducibles.

**Proposición 2.48.** [8, Proposition 2.6, Proposition 2.8] *Sean  $T \in \text{coh}(\mathbb{X})$  una gavilla inclinante y  $T_k$  un summando indescomponible de  $T$ . Entonces*

(i) *El morfismo*

$$\sigma = (\sigma_{\beta})_{\beta:h \rightarrow k} : \bigoplus_{\beta:h \rightarrow k} T_h \rightarrow T_k$$

*es un monomorfismo ó un epimorfismo.*

(ii) *El morfismo*

$$\rho = (\rho_{\alpha})_{\alpha:k \rightarrow j} : T_k \rightarrow \bigoplus_{\alpha:k \rightarrow j} T_j$$

*es un monomorfismo ó un epimorfismo.*

Aquí,  $\{\sigma_\beta : (\beta : h \rightarrow k)\}$  es una base de  $\text{irr}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T_h, T_k)$  y  $\{\rho_\alpha : (\alpha : k \rightarrow j)\}$  es una base de  $\text{irr}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T_k, T_j)$ . Además,  $\sigma$  es un monomorfismo (resp. epimorfismo), si y sólo si,  $\rho$  es un monomorfismo (resp. epimorfismo).

**Definición 2.49.** [8, Definición 2.9] Sean  $T \in \text{coh}(\mathbb{X})$  una gavilla inclinante,  $T_k$  un sumando indescomponible de  $T$  y  $\sigma$  y  $\rho$  los morfismos de la Proposición 2.48. Si  $\sigma$  es un epimorfismo, decimos que  $T_k$  es un *pozo de Hübner*. Si  $\rho$  es un monomorfismo, decimos que  $T_k$  es una *fente de Hübner*.

Las gavillas inclinantes en  $\text{coh}(\mathbb{X})$  corresponden, de cierta manera, a los conglomerados. Existe una noción de mutaciones, debida a T. Hübner, cf. [8], para estas gavillas que resulta ser compatible con las mutaciones definidas por S. Fomin y A. Zelevinsky en [4].

**Definición 2.50** (Mutación de gavillas inclinantes). [8, Definition 2.9] Sean  $T \in \text{coh}(\mathbb{X})$  una gavilla inclinante,  $T_k$  un sumando indescomponible de  $T$  y  $\sigma$  y  $\rho$  los morfismos de la Proposición 2.48. Definimos una nueva gavilla inclinante  $\mu_k(T)$  como sigue:

- (i) Si  $T_k$  es un pozo de Hübner, definimos  $T_k^* := \ker(\sigma)$  y

$$\mu_k(T) := T_k^* \oplus \bigoplus_{j \neq k} T_j.$$

- (ii) Si  $T_k$  es un fuente de Hübner, definimos  $T_k^* := \text{coker}(\rho)$  y

$$\mu_k(T) := T_k^* \oplus \bigoplus_{j \neq k} T_j.$$

Si  $T' = \mu_k(T)$ , decimos que  $T'$  se obtiene de  $T$  por *mutación en dirección  $k$* .

**Observación 2.51.** Cada fuente (resp. pozo), en el sentido de la teoría de gráficas, es una fuente de Hübner (pozo de Hübner).

**Observación 2.52.** Sean  $T \in \text{coh}(\mathbb{X})$  una gavilla inclinante y  $T_k$  un sumando indescomponible de  $T$ . Si  $T_k$  es un pozo de Hübner (resp. fuente de Hübner) entonces  $T_k^*$  es una fuente de Hübner (resp. pozo de Hübner).

Las siguientes fórmulas nos permiten calcular el rango y el grado, y por lo tanto la pendiente, después de mutar una gavilla inclinante.

**Fórmulas 2.53.** Sean  $T \in \text{coh}(\mathbb{X})$  una gavilla inclinante y  $T_k$  un sumando indescomponible de  $T$ .

(i) Si  $T_k$  es un pozo de Hübner, entonces

$$\begin{aligned}\text{rk}(T_k^*) &= -\text{rk}(T_k) + \sum_{\beta:h \rightarrow k} \text{rk}(T_h), \\ \text{deg}(T_k^*) &= -\text{deg}(T_k) + \sum_{\beta:h \rightarrow k} \text{deg}(T_h).\end{aligned}$$

(ii) Si  $T_k$  es una fuente de Hübner, entonces

$$\begin{aligned}\text{rk}(T_k^*) &= -\text{rk}(T_k) + \sum_{\alpha:k \rightarrow j} \text{rk}(T_j), \\ \text{deg}(T_k^*) &= -\text{deg}(T_k) + \sum_{\alpha:k \rightarrow j} \text{deg}(T_j).\end{aligned}$$

**Observación 2.54.** Dada una gavilla inclinante  $T \in \text{coh}(\mathbb{X})$  y  $T_k$  un sumando indescomponible de  $T$ , puede suceder que  $\text{rk}(T_k^*) < 0$ . Esto significa que  $T_k^* \in \mathcal{D}^b(\text{coh}(\mathbb{X}))$ , pero no es una gavilla coherente, cf. Observación 2.21. Aún así, en vista de la Observación 2.39, podemos identificar a  $T_k^*$  con alguna gavilla inclinante en  $\text{coh}(\mathbb{X})$ .

La siguientes proposiciones incluyen criterios para distinguir entre pozos y fuentes de Hübner.

**Proposición 2.55.** [8, Proposition 3.2, Bemerkung 3.3] Sean  $T \in \text{coh}(\mathbb{X})$  una gavilla inclinante y  $T_k$  un sumando indescomponible de  $T$ . Entonces,  $T_k$  es una fuente de Hübner si y sólo si  $\text{rk}(S_k) > 0$  ó  $\text{rk}(S_k) = 0$  y  $\text{deg}(S_k) > 0$ , donde  $S_k$  es el  $\text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}$ -módulo simple correspondiente al módulo  $\text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T)$ -módulo proyectivo  $T_k$ .

**Proposición 2.56.** [8, Theorem 4.6] Sean  $T \in \text{coh}(\mathbb{X})$  una gavilla inclinante y  $T_k$  un sumando indescomponible de  $T$ . Entonces

$$\begin{aligned}2 \text{rk}(T_k) &= \sum_{h \rightarrow k} \text{rk}(T_h) + \sum_{k \rightarrow j} \text{rk}(T_h) - \sum_{h \cdots k} \text{rk}(T_j) - \sum_{k \cdots j} \text{rk}(T_j), \\ 2 \text{deg}(T_k) &= \sum_{h \rightarrow k} \text{deg}(T_h) + \sum_{k \rightarrow j} \text{deg}(T_h) - \sum_{h \cdots k} \text{deg}(T_j) - \sum_{k \cdots j} \text{deg}(T_j).\end{aligned}$$



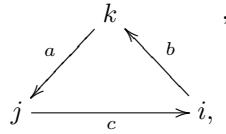
**Proposición 2.57.** [8, Korollar 3.5] Sean  $T \in \text{coh}(\mathbb{X})$  una gavilla inclinante y  $T_k$  un sumando indescomponible de  $T$ . Si  $T_k$  es sucesor (resp. predecesor) de un pozo de Hübner (resp. fuente de Hübner), entonces  $T_k$  es un pozo de Hübner (resp. fuente de Hübner). Además, en el carcaj de  $\text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T)$  sólo hay relaciones de fuentes de Hübner hacia pozos de Hübner.

Sean  $T \in \text{coh}(\mathbb{X})$  una gavilla inclinante. La siguiente proposición describe como cambia el álgebra  $\text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T)$  después de una mutación.

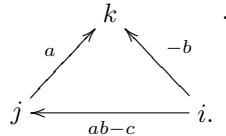
**Definición 2.58.** [8, Korollar 4.16] Sean  $T \in \text{coh}(\mathbb{X})$  una gavilla inclinante y  $T_k$  un sumando indescomponible de  $T$ . Definimos la mutación de  $A := \text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T)$  a través de  $Q_A$ , el carcaj con relaciones asociado a  $A$ . Para simplificar la descripción de la mutación, llamaremos *flechas positivas* a las flechas y *flechas negativas* a las relaciones.

(F) Si  $T_k$  es una fuente de Hübner, entonces  $\mu_k$  actúa en  $A$  como se describe a continuación:

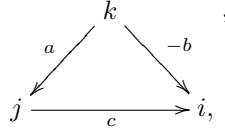
- (i)  $\mu_k(Q_A)$  tiene los mismos vértices que  $Q_A$ .
- (ii) Las flechas positivas que salen de  $k$  cambian de dirección.
- (iii) Cada flecha positiva  $j \rightarrow k$  cambia por una flecha negativa  $j \rightarrow k$ .
- (iv) Cada flecha negativa  $k \rightarrow l$  cambia por una flecha positiva  $k \rightarrow l$ .
- (v) Si  $a, b > 0$  y el siguiente carcaj está contenido en  $Q_A$



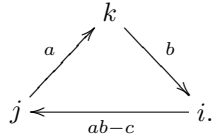
entonces, en  $\mu_k(Q_A)$ , el carcaj anterior cambia por el siguiente carcaj:



(vi) Si  $a, b > 0$  y el siguiente carcaj está contenido en  $Q_A$



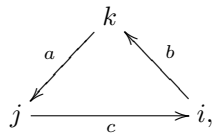
entonces, en  $\mu_k(Q_A)$ , el carcaj anterior cambia por el siguiente carcaj:



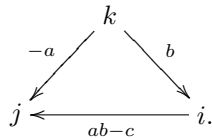
(vii) Las demás flechas no cambian.

(P) Si  $T_k$  es un pozo de Hübner, entonces  $\mu_k$  actúa en  $A$  de manera dual:

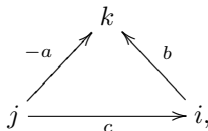
- (i)  $\mu_k(A)$  tiene los mismos vértices que  $Q_A$ .
- (ii\*) Las flechas positivas que entran a  $k$  cambian de dirección.
- (iii\*) Cada flecha positiva  $j \leftarrow k$  cambia por una flecha negativa  $j \leftarrow k$ .
- (iv\*) Cada flecha negativa  $k \leftarrow l$  cambia por una flecha positiva  $k \leftarrow l$ .
- (v\*) Si  $a, b > 0$  y el siguiente carcaj está contenido en  $Q_A$



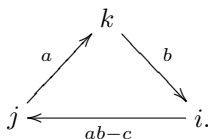
entonces, en  $\mu_k(A)$ , el carcaj anterior cambia por el siguiente carcaj:



(vi\*) Si  $a, b > 0$  y el siguiente carcaj está contenido en  $\mu_k(A)$



entonces, en  $Q_B$ , el carcaj anterior cambia por el siguiente carcaj:



(vii) Las demás flechas no cambian.

La siguiente proposición muestra que la mutación definida en la Definición 2.58 es compatible con la mutación de gavillas de la Definición 2.50.

**Proposición 2.59.** [8, Korollar 4.16] Sean  $T \in \text{coh}(\mathbb{X})$  una gavilla inclinante y  $T_k$  un sumando indescomponible de  $T$ . Si  $B := \text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(\mu_k(T))$ , entonces  $Q_B = \mu_k(Q_A)$ .

**Observación 2.60.** Si cambiamos cada flecha negativa por una flecha positiva en dirección contraria, entonces la mutación inducida por la mutación de gavillas es exactamente la mutación de carcajes de la Definición 1.18. Lo sorprendente es que las mutaciones de Hübner preceden a las mutaciones de álgebras del contexto de las álgebras conglomerados por cinco años, cf. [8] y [4]. La ventaja de las mutaciones de Hübner, con respecto a la mutación de carcajes, es que toma en cuenta las relaciones, que es indispensable en nuestra situación, cf. Teorema 3.1. En particular, preserva información sobre el álgebra  $\text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T)$  que se pierde con la mutación de carcajes; sin embargo, la definición de las mutaciones de Hübner requiere saber si un vértice dado es un pozo o una fuente de Hübner. Como veremos en la demostración del Teorema 3.1, esta información es difícil de mantener a lo largo de una sucesión de mutaciones.

# Capítulo 3

## El teorema de crecimiento exponencial

En este capítulo demostramos el Teorema 3.1, el resultado del proyecto de investigación realizado con los profesores M. Barot y Ch. Geiß durante el semestre 2010-1.

### 1. Esquema de la demostración

Recordamos que un álgebra conglomerados de tipo tubular es aquella que puede ser categorificada por una recta proyectiva con pesos de tipo tubular, cf. Teorema 2.45.

**Teorema 3.1.** *Sea  $\mathcal{A}$  un álgebra de conglomerados de tipo tubular de tipo  $D_4^{(1,1)}$ ,  $E_6^{(1,1)}$ ,  $E_7^{(1,1)}$  o  $E_8^{(1,1)}$ . Entonces  $\mathcal{A}$  tiene crecimiento exponencial.*

Del Teorema 2.45 sabemos que existe una biyección entre las variables de conglomerados de un álgebra de conglomerados de tipo tubular y los objetos inclinantes de conglomerados de  $\mathcal{C}_{\mathbb{X}}$ . Además, en vista de la observación 2.39, sabemos que los objetos rígidos (resp. indescomponibles) de  $\mathcal{C}_{\mathbb{X}}$  están en correspondencia con los objetos rígidos (resp. indescomponibles) de  $\text{coh}(\mathbb{X})$ . Esto nos permite identificar la gráfica de intercambio  $E(\mathcal{A})$  con la gráfica de intercambio de las gavillas inclinantes de  $\text{coh}(\mathbb{X})$  a la que denotamos  $E(\mathbb{X})$ . Así, basta demostrar el crecimiento exponencial de  $E(\mathbb{X})$  para obtener el resultado.

Para ello, procederemos de manera análoga a lo hecho para  $D_4^{(1,1)}$ , mostraremos que el crecimiento de  $E(\mathbb{X})$  está acotado inferiormente por el crecimiento de la gráfica de intercambio de las ternas de Farey, el árbol 3-regular, cf. Proposición 1.16. En la Sección 2 realizamos explícitamente los cálculos necesarios para demostrar el Teorema 3.1. En la Sección 3 sólo indicamos los pasos esenciales, pues los resultados se obtienen utilizando los mismos argumentos. A lo largo de la demostración, conviene tener en mente la Observación 2.54.

## 2. El caso $\mathbf{p} = (3, 3, 3)$

**Lema 3.2.** *Sean  $\mathbb{X}$  una recta proyectiva con pesos de tipo  $(3, 3, 3)$  y  $T \in \text{coh}(\mathbb{X})$  una gavilla inclinante. Sea  $A := \text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T)$  y supongamos que  $Q_A$  es isomorfo a uno de los carcajes de la Figura 3.1. Definimos  $q_v := \text{slope}(T_v)$  para cada vértice  $v \in (Q_A)_0$ . Entonces  $q_{f_i} = q_{f_j}$ ,  $q_{t_i} = q_{t_j}$  para  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  y  $q_{c_1} = q_{c_2}$ . Además,  $\mathcal{S}(T) = \{q_t, q_f, q_c\}$  es una terna de Farey.*

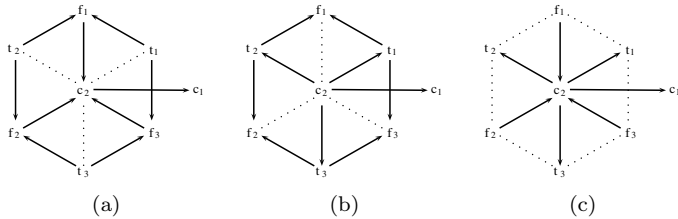


Figura 3.1: Álgebras de endomorfismos de gavillas inclinantes.

*Demostración.* Sólo probamos el caso en que el carcaj con relaciones de  $\text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T)$  es el carcaj de la Figura 3.1(a), pues los argumentos necesarios son muy similares en los otros caso. Utilizando la Proposición 2.56, para calcular  $\text{rk}(T_v)$

para cada vértice, se obtienen las siguientes identidades

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{rk}(T_{c_1}) &= \operatorname{rk}(T_{c_2}), \\ 2 \operatorname{rk}(T_{f_i}) &= \operatorname{rk}(T_{c_2}) + \operatorname{rk}(T_{t_i}) + \operatorname{rk}(T_{t_{i+1}}), \\ 2 \operatorname{rk}(T_{t_i}) &= -\operatorname{rk}(T_{c_2}) + \operatorname{rk}(T_{f_i}) + \operatorname{rk}(T_{f_{i-1}}), \\ 2 \operatorname{rk}(T_{c_2}) &= \sum_{i=1}^3 (\operatorname{rk}(T_{f_i}) - \operatorname{rk}(T_{t_i})) + \operatorname{rk}(T_{c_1}). \end{aligned}$$

Combinandolas, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \operatorname{rk}(T_{c_2}) &= 2 \operatorname{rk}(T_{c_1}), \\ \operatorname{rk}(T_{f_1}) &= \operatorname{rk}(T_{f_2}) = \operatorname{rk}(T_{f_3}), \\ \operatorname{rk}(T_{t_1}) &= \operatorname{rk}(T_{t_2}) = \operatorname{rk}(T_{t_3}). \end{aligned}$$

(Las mismas identidades se verifican para  $\deg(T_v)$ ). Por la Proposición 2.56, se tiene entonces que

$$2 \operatorname{rk}(T_{c_2}) = 3 \operatorname{rk}(T_{f_i}) - 3 \operatorname{rk}(T_{t_i}) + \operatorname{rk}(T_{c_1}).$$

Sustituyendo las identidades anteriores obtenemos que

$$\operatorname{rk}(T_{f_i}) = \operatorname{rk}(T_{t_i}) + \operatorname{rk}(T_{c_1}).$$

Esto significa que  $\mathcal{S}(T)$  es una terna de Farey. □

**Lema 3.3.** *Sean  $\mathbb{X}$  una recta proyectiva con pesos de tipo  $(3, 3, 3)$  y  $T \in \operatorname{coh}(\mathbb{X})$  una gavilla inclinante tal que  $\operatorname{End}_{\operatorname{coh}(\mathbb{X})}(T)$  es isomorfa al álgebra asociada a uno de los carcajes de la Figura 3.1. Entonces existen tres sucesiones finitas de mutaciones  $\mu_f, \mu_c, \mu_t$  tales que  $\mathcal{S}(\mu_\varepsilon(T))$  es la mutación correspondiente de  $\mathcal{S}(T)$  como terna de Farey ordenada, cf. Definion 1.24, para  $\varepsilon \in \{f, c, t\}$ .*

**Observación 3.4.** Ya que la gráfica de intercambio de las ternas de Farey es un árbol 3-regular, dada una pareja de vecinos de Farey  $p, q \in \mathbb{Q}_\infty$  existen exactamente dos números racionales extendidos  $r, r' \in \mathbb{Q}_\infty$  tales que  $\{p, q, r\}$  y  $\{p, q, r'\}$  son ternas de Farey. Por lo tanto, en vista del Lema 3.2, basta probar dos cosas: Si  $w$  es una palabra en  $\mu_f, \mu_c, \mu_t$ , entonces el carcaj con relaciones de  $\operatorname{End}_{\operatorname{coh}(\mathbb{X})}(w(T))$  es alguno de los carcajes de la Figura 3.1. Y finalmente, dado que  $\mathcal{S}(\mu_\varepsilon(T))$  debe ser una terna de Farey, basta probar que  $\#\mathcal{S}(T) \cap \mathcal{S}(\mu_\varepsilon(T)) = 2$  para  $\varepsilon \in \{f, c, t\}$  (pues la otra pendiente debe de corresponder a la mutación de la terna de Farey  $\mathcal{S}(T)$  en la dirección correspondiente).

*Demostración.* Sean  $\mathbf{p} = (3, 3, 3)$  y  $T \in \text{coh}(\mathbb{X})$  una gavilla inclinante tal que el carcaj con relaciones de  $A := \text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T)$  es alguno de los carcajes de la Figura 3.1. Observamos que no se puede determinar si los vértices por los que pasa un gancho de flechas positivas es un pozo o una fuente de Hübner (se pueden construir ejemplos para cada caso); pero dada la dualidad de la mutación respecto a pozos y fuentes de Hübner basta analizar sólo un caso. Aquí suponemos que el carcaj con relaciones de  $A$  es el carcaj de la Figura 3.1(a) y tal que los vértices por los que pasa un gancho de flechas positivas son pozos de Hübner. El otro caso es dual.

Definimos las mutaciones  $\mu_f, \mu_c, \mu_t$  como sigue:

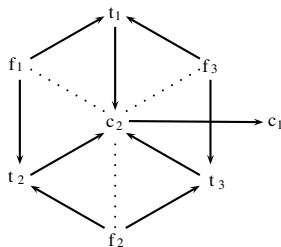
$$\begin{aligned}\mu_f &:= \mu_{f_3} \mu_{f_2} \mu_{f_1}, \\ \mu_c &:= \mu_{t_{i+2}} \mu_{c_2} \mu_{c_1} \mu_{t_{i+1}} \mu_{f_i} \mu_{t_i} \mu_{c_2}, \\ \mu_t &:= \mu_{t_3} \mu_{t_2} \mu_{t_1}.\end{aligned}$$

Donde podemos elegir cualquier  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Notamos que las mutaciones estan definidas según la posición de los vértices en el carcaj inducido por  $A$  (interpretando las relaciones como flechas en la dirección contraria). Dado que las mutaciones  $\mu_f$  y  $\mu_t$  son simétricas basta analizar una de ellas, por lo que nosotros sólo analizaremos la acción de  $\mu_f$  y  $\mu_c$  en  $T$ . Definimos  $q_0 := \text{slope}(T_{f_i})$ ,  $q_1 := \text{slope}(T_{c_1})$  y  $q_\infty := \text{slope}(T_{t_i})$  para  $i \in \{1, 2, 3\}$  y observamos que  $\mathcal{S}(T) = (q_0, q_1, q_\infty)$  es un terna de Farey ordenada.

Comenzamos con la acción de  $\mu_f$  en  $T$ . Dado que las tres mutaciones que componen a  $\mu_f$  conmutan entre sí, podemos calcular  $\mathcal{S}(\mu_f(T))$  después de aplicar todas las mutaciones. Los tres sumandos  $T_{f_i}$  con  $i \in \{1, 2, 3\}$  son pozos de Hübner. Entonces, en vista de la Fórmula 2.53(i), se tiene que

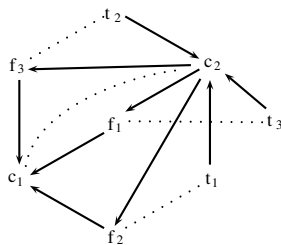
$$\begin{aligned}\text{rk}(T_{f_i}^*) &= -\text{rk}(T_{f_i}) + \text{rk}(T_{t_i}) + \text{rk}(T_{t_j}) \\ &= 2r(q_1) - r(q_0) \\ &= r(q_1) - r(q_\infty).\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mathcal{S}(\mu_f(T)) = \mu_2 \mathcal{S}(T)$ . Utilizando la Definición 2.58, se puede verificar que el carcaj con relaciones de  $\text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(\mu_f(T))$  es el siguiente:



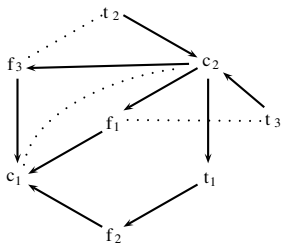
Ahora analizamos la acción de  $\mu_c$  en  $T$  (tomaremos  $i = 1$ ). Las mutaciones que componen a  $\mu_c$  no conmutan entre si, por lo que debemos analizar el cambio de las pendientes (y el carcaj de  $A$ ) paso a paso. Observamos que, en vista de la Observación 3.4, basta probar que el carcaj de  $\text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(\mu_c(T))$  es alguno de los carcajes de la Figura 3.1, pues  $\text{slope}(T_{f_2})$  y  $\text{slope}(T_{t_3})$  no cambian durante la mutación (como veremos mas adelante, la última mutación en dirección  $f_2$  sólo cambia la dirección de una flecha). Para simplificar la notación, si  $w$  es una palabra en  $\mu_f, \mu_c, \mu_t$ , definimos  $w(A) := \text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(w(T))$ .

Como una relación termina en  $T_{c_2}$ , éste es un pozo de Hübner, cf. Proposición 2.57. Según la Definición 2.58, el carcaj con relaciones de  $\mu_{c_2}(A)$  es el siguiente:

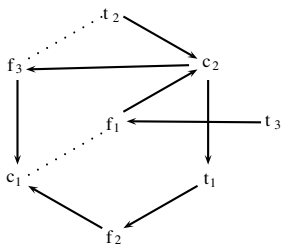


Una relación comienza en  $T_{t_1}$ , por lo tanto es una fuente de Hübner, cf. Proposición 2.57. Según la Definición 2.58, el carcaj con relaciones de  $\mu_{t_1}\mu_{c_2}(A)$  es el siguiente:





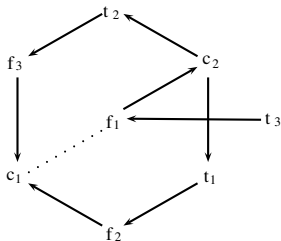
Como una relación termina en  $T_{f_1}$ , éste es un pozo de Hübner, cf. Proposición 2.57. Según la Definición 2.58, el carcaj con relaciones de  $\mu_{f_1}\mu_{t_1}\mu_{c_2}(A)$  es el siguiente:



Además, según la Fórmula 2.53(i), se tiene que

$$\text{rk}(T_{f_1}^*) = -\text{rk}(T_{f_1}) + \text{rk}(T_{c_2}^*). \quad (3.1)$$

Una relación comienza en  $T_{t_2}$ , por lo tanto es una fuente de Hübner, cf. Proposición 2.57. Según la Definición 2.58, el carcaj con relaciones de  $\mu_{t_2}\mu_{f_1}\mu_{t_1}\mu_{c_2}(A)$  es el siguiente:



No podemos utilizar la Proposición 2.57 para determinar si  $T_{c_2}^*$  es un pozo o una fuente de Hübner, por lo que es necesario calcular el rango del  $\mu_{t_2}\mu_{f_1}\mu_{t_1}\mu_{c_2}(A)$ -módulo derecho  $S_{c_2}$ , cf. Proposición 2.55. Para ello, utilizamos una resolución proyectiva de  $S_{c_2}$ :

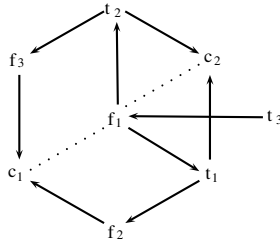
$$0 \rightarrow T_{f_1}^* \rightarrow T_{c_2}^* \rightarrow S_{c_2} \rightarrow 0.$$

Dado que el rango es aditivo en sucesiones exactas (está definido en el grupo de Grothendieck), se tiene que

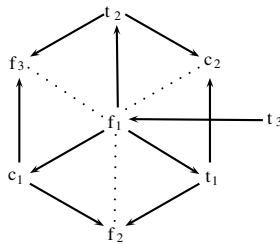
$$\text{rk}(S_{c_2}) = \text{rk}(T_{c_2}^*) - \text{rk}(T_{f_1}^*).$$

Al sustituir (3.1) en la igualdad anterior, se tiene que  $\text{rk}(S_{c_2}) = \text{rk}(T_{f_1}) \geq 0$ , cf. Observación 2.21.

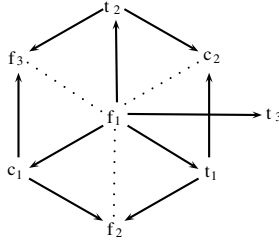
Esto muestra que  $T_{c_2}^*$  es una fuente de Hübner, cf. Proposición 2.55. Según la Definición 2.58, el carcaj con relaciones de  $\mu_{c_2}\mu_{t_2}\mu_{f_1}\mu_{t_1}\mu_{c_2}(A)$  es el siguiente:



Como una relación termina en  $T_{c_1}$ , éste es un pozo de Hübner, cf. Proposición 2.57. Según la Definición 2.58, el carcaj con relaciones de  $\mu_{c_2}\mu_{t_2}\mu_{f_1}\mu_{t_1}\mu_{c_2}(A)$  es el siguiente:



Como  $T_{t_3}$  es una fuente (en el sentido de la teoría de gráficas), éste es una fuente de Hübner, cf. Proposición 2.57. Según la Definición 2.58, el carcaj con relaciones de  $\mu_{t_3}\mu_{c_2}\mu_{t_2}\mu_{f_1}\mu_{t_1}\mu_{c_2}(A)$  es el siguiente:

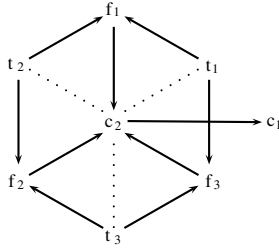


Esto muestra que  $\mathcal{S}(\mu_c(T)) = \mu_3(\mathcal{S}(T))$ . □

La siguiente proposición muestra que, en efecto, existe una gavilla la cual verifica las hipótesis del Lema 3.3.

**Lema 3.5.** *Sea  $\mathbb{X}$  una recta proyectiva con pesos de tipo tubular. Entonces  $\text{coh}(\mathbb{X})$  admite una gavilla inclinante  $T$  tal que el carcaj con relaciones de  $\text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T)$  es alguno de los carcajes de la Figura 3.1, y tal que las pendientes de sus sumandos indescomponibles forman una terna de Farey, a la que denotamos  $\mathcal{S}(T)$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathbb{X}$  una recta proyectiva con pesos de tipo  $(3, 3, 3)$ . Sea  $T := \mu_{681472642}(T_{\text{can}})$ , cf. Observación 2.44. Se sigue de la Definición 2.58, que el carcaj con relaciones de  $\text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T)$  es el siguiente, cf. Figura 2.1(a):



El lector puede verificar éste hecho utilizando el “Mutation Applet”, cf. [9]. En este caso

$$\begin{aligned} \text{slope}(T_{t_1}) &= \frac{1}{1}, \quad \text{slope}(T_{t_2}) = \frac{1}{1}, \quad \text{slope}(T_{t_3}) = \frac{1}{1}, \\ \text{slope}(T_{f_1}) &= \frac{2}{1}, \quad \text{slope}(T_{f_2}) = \frac{2}{1}, \quad \text{slope}(T_{f_3}) = \frac{2}{1}, \end{aligned}$$

$$\text{slope}(T_{c_1}) = \frac{1}{0}, \quad \text{slope}(T_{c_2}) = \frac{1}{0}.$$

Lo anterior se puede comprobar utilizando los métodos empleados en la demostración del Lema 3.3 y la Observación 2.44. Definimos  $q_0 := \text{slope}(T_{f_i})$ ,  $q_1 := \text{slope}(T_{c_i})$ , y  $q_\infty := \text{slope}(T_{t_i})$ . Por lo tanto,  $\mathcal{S}(T) = (q_0, q_1, q_\infty)$  es una terna de Farey ordenada.  $\square$

**Definición 3.6.** Sean  $\mathbb{X}$  una recta proyectiva con pesos de tipo tubular y  $T_0 \in \text{coh}(\mathbb{X})$  la gavilla inclinante del Lema 3.5. Sea  $w = \mu_{\varepsilon_r} \cdots \mu_{\varepsilon_1}$  una palabra en  $\mu_f, \mu_c, \mu_t$ . Decimos que  $w$  es *admisibile* (respecto a  $T_0$ ) si  $\mathcal{S}(\mu_{\varepsilon_{i+1}} \cdots \mu_{\varepsilon_1}(T_0)) \neq \mathcal{S}(\mu_{\varepsilon_{i-1}} \cdots \mu_{\varepsilon_1}(T_0))$  para cada  $i \in \{2, \dots, r-1\}$ . Denotamos por  $W = W_{T_0}$  al conjunto de palabras admisibles respecto a  $T_0$ .

Sea  $G$  la gráfica con vértices  $\{w(T_0) : w \in W\}$ , cf. Definición 3.6 y con aristas  $T \xrightarrow{\varepsilon} T'$  si existe  $\varepsilon \in \{f, c, t\}$  tal que  $T' = \mu_\varepsilon(T)$ . Se sigue del Lema 3.3 que  $G$  es isomorfa a la gráfica de intercambio de las ternas de Farey, el árbol 3-regular. Finalmente, cómo la longitud las mutaciones  $\mu_f, \mu_c, \mu_t$  es fija (en términos de las mutaciones que las componen), se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(G, T_0, k)}{p(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(\mathbb{T}_3, \mathcal{S}(T_0), k)}{p(k)} = \infty$$

para cualquier polinomio  $p \in \mathbb{Z}[k]$ , cf. Proposición 1.16. Esto concluye la prueba en el caso  $\mathbf{p} = (3, 3, 3)$ , cf. 1.15.

### 3. Los casos $\mathbf{p} = (4, 4, 2)$ y $\mathbf{p} = (6, 3, 2)$

En estos casos sólo indicamos las mutaciones  $\mu_f, \mu_c$  y  $\mu_t$ , cf. Lema 3.3, y la gavilla inclinante correspondiente al Lema 3.5. Los argumentos para concluir la prueba son los mismos que los utilizados en el caso  $\mathbf{p} = (3, 3, 3)$ .

**Lema 3.7.** Sean  $\mathbb{X}$  una recta proyectiva con pesos de tipo  $(4, 4, 2)$  y  $T \in \text{coh}(\mathbb{X})$  una gavilla inclinante tal que  $\text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T)$  es isomorfa al álgebra asociada al carcaj de la Figura 3.2. Entonces existen tres sucesiones finitas de mutaciones  $\mu_f, \mu_c, \mu_t$  tales que  $\mathcal{S}(\mu_\varepsilon(T))$  es la mutación correspondiente de  $\mathcal{S}(T)$  como terna de Farey ordenada, cf. Definición 1.24, para  $\varepsilon \in \{f, c, t\}$ .

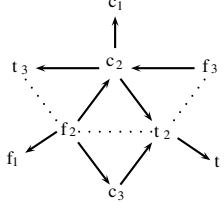


Figura 3.2: Álgebras de endomorfismos de gavillas inclinantes.

*Demostración.* Definimos las mutaciones  $\mu_f, \mu_c, \mu_t$  por

$$\begin{aligned}\mu_f &:= \mu_{c_1} \mu_{t_3} \mu_{f_3} \mu_{f_1} \mu_{t_2} \mu_{f_2} \mu_{t_2} \mu_{c_2} \mu_{t_2} \mu_{f_3}, \\ \mu_c &:= \mu_{t_1} \mu_{f_3} \mu_{c_3} \mu_{c_1} \mu_{f_2} \mu_{c_2} \mu_{f_2} \mu_{t_2} \mu_{f_2} \mu_{c_3}, \\ \mu_t &:= \mu_{f_1} \mu_{c_3} \mu_{t_3} \mu_{t_1} \mu_{c_2} \mu_{t_2} \mu_{c_2} \mu_{f_2} \mu_{c_2} \mu_{t_3}.\end{aligned}$$

En este caso, si  $T \in \text{coh}(\mathbb{X})$  es una gavilla inclinante tal que el carcaj con relaciones de  $\text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T)$  e el carcaj de la Figura 3.2 y  $w$  es una palabra en  $\mu_f, \mu_c, \mu_t$ ; entonces  $\text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(w(T)) \cong \text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T)$ .  $\square$

**Lema 3.8.** *Sea  $\mathbf{p} = (4, 4, 2)$ . Entonces,  $\text{coh}(\mathbb{X})$  admite una gavilla inclinante  $T$  tal que el carcaj con relaciones de  $\text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T)$  es alguno de los carcajes de la Figura 3.1 y tal que las pendientes de sus sumandos indescomponibles forman una terna de Farey, a la que denotamos  $\mathcal{S}(T)$ .*

*Demostración.* Consideremos  $T := \mu_{895276518348}(T_{\text{can}})$ , cf. Observación 2.44. Según la Definición 2.58, el carcaj con relaciones de  $\text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T)$  es el carcaj de la Figura 3.2, cf. Figura 2.1(b). En éste caso

$$\begin{aligned}\text{slope}(T_{f_1}) &= \frac{2}{1}, \quad \text{slope}(T_{f_2}) = \frac{4}{2}, \quad \text{slope}(T_{f_3}) = \frac{2}{1}, \\ \text{slope}(T_{c_1}) &= \frac{3}{1}, \quad \text{slope}(T_{c_2}) = \frac{6}{2}, \quad \text{slope}(T_{c_3}) = \frac{3}{1}, \\ \text{slope}(T_{t_1}) &= \frac{1}{0}, \quad \text{slope}(T_{t_2}) = \frac{2}{0}, \quad \text{slope}(T_{t_3}) = \frac{1}{0}.\end{aligned}$$

Definimos  $q_0 := \text{slope}(T_{f_i})$ ,  $q_1 := \text{slope}(T_{c_i})$ , y  $q_\infty := \text{slope}(T_{t_i})$ . Por lo tanto  $\mathcal{S}(T) = (q_0, q_1, q_\infty)$  es una terna de Farey ordenada.  $\square$

**Lema 3.9.** Sean  $\mathbb{X}$  una recta proyectiva con pesos de tipo  $(6, 3, 2)$  y  $T \in \text{coh}(\mathbb{X})$  una gavilla inclinante tal que  $\text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T)$  es isomorfa al álgebra asociada a uno de los carcajes de la Figura 3.3. Entonces existen tres sucesiones finitas de mutaciones  $\mu_f, \mu_c, \mu_t$  tales que  $\mathcal{S}(\mu_\varepsilon(T))$  es la mutación correspondiente de  $\mathcal{S}(T)$  como terna de Farey ordenada, cf. Definición 1.24, para  $\varepsilon \in \{f, c, t\}$ .

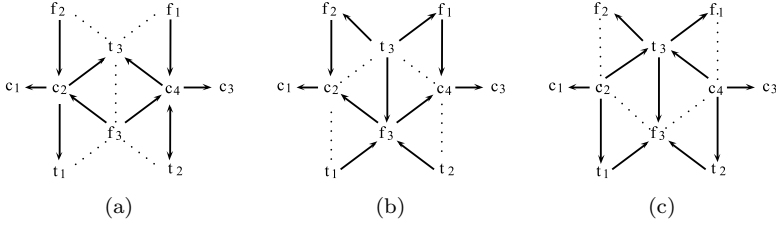


Figura 3.3: Álgebras de endomorfismos de gavillas inclinantes.

*Demostración.* Definimos las mutaciones  $\mu_f, \mu_c, \mu_t$  por

$$\begin{aligned}\mu_f &:= \mu_{f_3} \mu_{f_2} \mu_{f_1}, \\ \mu_c &:= \mu_{c_3} \mu_{c_1} \mu_{f_3} \mu_{c_4} \mu_{t_2} \mu_{c_3} \mu_{c_4} \mu_{c_2} \mu_{t_1} \mu_{c_1} \mu_{c_2}, \\ \mu_t &:= \mu_{t_3} \mu_{t_2} \mu_{t_1}.\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba.  $\square$

**Lema 3.10.** Sea  $\mathbf{p} = (6, 3, 2)$ . Entonces,  $\text{coh}(\mathbb{X})$  admite una gavilla inclinante  $T$  tal que el carcaj con relaciones de  $\text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T)$  es alguno de los carcajes de la Figura 3.3 y tal que las pendientes de sus sumandos indescomponibles forman una terna de Farey, a la que denotamos  $\mathcal{S}(T)$ .

*Demostración.* Sea  $T := \mu_{856214241 \cdot 10 \cdot 576}(T_{\text{can}})$ , cf. Observación 2.44. El carcaj con relaciones de  $\text{End}_{\text{coh}(\mathbb{X})}(T)$  es el carcaj de la Figura 3.3(a), cf. Figura 2.1(c) y Definición 2.58.

En este caso

$$\begin{aligned}\text{slope}(T_{f_1}) &= \frac{2}{1}, \quad \text{slope}(T_{f_2}) = \frac{2}{1}, \quad \text{slope}(T_{f_3}) = \frac{4}{2}, \\ \text{slope}(T_{c_1}) &= \frac{3}{1}, \quad \text{slope}(T_{c_2}) = \frac{6}{2}, \quad \text{slope}(T_{c_3}) = \frac{3}{1}, \quad \text{slope}(T_{c_4}) = \frac{6}{2},\end{aligned}$$

$$\text{slope}(T_{t_1}) = \frac{1}{0}, \text{slope}(T_{t_2}) = \frac{1}{0}, \text{slope}(T_{t_3}) = \frac{2}{0}.$$

Definimos  $q_0 := \text{slope}(T_{f_i})$ ,  $q_1 := \text{slope}(T_{c_i})$ , y  $q_\infty := \text{slope}(T_{t_i})$ . Por lo tanto,  $\mathcal{S}(T) = (q_0, q_1, q_\infty)$  es una terna de Farey ordenada.  $\square$

# Bibliografía

- [1] M. Barot and Ch. Geiß. *Tubular cluster algebras i: categorification*. arXiv, math.RT, Jan 2009. 6, 8, 9, 13, 14, 15, 19, 21
- [2] M. Barot, D. Kussin, and H. Lenzing. *The cluster category of a canonical algebra*. arXiv, math.RT, Jan 2008. VIII, 19
- [3] R. Carter. *Cluster algebras*, volume 37. 2006. VII, 1
- [4] S. Fomin and A. Zelevinsky. *Cluster Algebras I: Foundations*. arXiv, math.RT, Jan 2001. VII, 1, 22, 26
- [5] S. Fomin and A. Zelevinsky. *Cluster algebras IV: Coefficients*. arXiv, math.RA, Jan 2006. 4
- [6] W. Geigle and H. Lenzing. *A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite dimensional algebras*. Singularities, Representation of Algebras, and Vector Bundles, pages 265–297, 1987. VIII, 11, 13, 20
- [7] Ch. Geiß B. Leclerc, J. Schröer. *Cluster algebra structures and semicanonical bases for unipotent groups*. VII
- [8] T. Hübner. *Exzeptionelle vektorbündel und reflektionen an kipparben über projektiven gewichteten kurven*. Universität-Gesamthochschule Paderborn, pages 1–100, 1996. 11, 21, 22, 23, 24, 26
- [9] B. Keller. *Java Mutation Applet*. <http://www.math.jussieu.fr/~keller/quivermutation/>. 9, 34



- [10] H. Meltzer. *Exceptional vector bundles, tilting sheaves and tilting complexes for weighted projective lines*. Mem. Amer. Math. Soc., 171(808):viii+139, 2004. 15
- [11] C. M. Ringel. *Tame algebras and integral quadratic forms*. Springer-Verlag. Lecture Notes in Mathematics, 1099:xiii+376, 1984. 13
- [12] A. Zelevinsky. *What is a cluster algebra?* Notices of the AMS, Dec 2007. VII