UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

MEDIDAS ALEATORIAS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A:

ARRIGO COEN CORIA

DIRECTOR DE LA TESINA: DR. RAMSÉS HUMBERTO MENA CHÁVEZ

MÉXICO, D.F. MAYO, 2011

Resumen

En este trabajo se reúnen los conceptos fundamentales de las medidas aleatorias. De los resultados que se presentan demostraremos sólo los que consideremos pertinentes o cuyas demostraciones son ilustrativas. En la primera parte del trabajo daremos las definiciones principales y haremos un estudio del espacio de las medidas desde un punto de vista topológico. En la segunda parte nos enfocaremos en las medidas completamente aleatorias, las cuales tienen la propiedad de otorgar medidas independientes en conjuntos disjuntos. En esta última parte se utilizará el exponente característico para demostrar un teorema de descomposición y uno de caracterización de la distribución para este tipo de medidas.

Introducción

El estudio de las medidas aleatorias (m.a.) surge de manera natural al ser una generalización del concepto de proceso puntual, además es un tema que conjunta la teoría de probabilidad y de medida.

Las m.a. son útiles para modelar distintos fenómenos, ejemplos de ellos pueden consultarse en: *Brix(1999)*[5] aplicado a la reforestación; *Kratz M. & Picco P.(2004)*[18] en vidrios de *spin*; y en *Griffin & Walker(2009)*[11] aplicado a datos de distribución estelar y acidez. Estos y otros trabajos muestran la cantidad de aplicaciones recientes que tiene el tema a la par que exhiben su demanda actual.

En el libro de *Kallenberg(1983)*[14] se da un buen compendio del tema y trabajos como los de *Kingman(1967)*[16] y *Jagers(1974)*[12] plantean el panorama básico de las medidas aleatorias. También se puede consultar el libro de *Kingman(1993)*[17] donde se expone de manera clara y breve el caso particular del proceso Poisson. Para enfoques más recientes son recomendables *Daley & Vere-Jones(2008)*[8] y *Cont & Tankov(2004)*[7], este último cuenta con diversas aplicaciones en el área de finanzas.

Este trabajo se divide en dos partes:

- En la primera plantearemos una topología para el conjunto de las medidas utilizando la métrica de Lévy para definir los conjuntos abiertos, nos basamos en las ideas de *Grandell(1977)*[10]. Utilizaremos ampliamente resultados de convergencia en distribución de variables aleatorias los cuales pueden ser consultados en *Billingsley(1968)*[3] y *Chung(2001)*[6]. En esta parte plantearemos las bases necesarias para definir las m.a.
- En la segunda parte nos enfocaremos en las medidas completamente aleatorias (m.c.a.), las cuales toman valores independientes en conjuntos disjuntos. Demostraremos dos resultados que expone *Kingman(1967)*[16].

El primero nos dará una descomposición de una m.c.a. en una con átomos fijos más otra sin ellos. Con el segundo resultado obtendremos una caracterización distribucional de las m.c.a. sin átomos fijos.

La motivación para seleccionar el tema de medidas aleatorias fue dada por los cursos de Probabilidad, Procesos Estocásticos y Análisis Real. En estos cursos se aborda este tema de manera tangencial, lo cual animó mi interés en conocer más sobre él.

Agradezco al Posgrado en Ciencias Matemáticas por permitirme cursar la Maestría en Ciencias, en particular expreso mi reconocimiento a los profesores que la componen.

Parte I: El espacio de las medidas

1.1. Definiciones principales

El concepto de medida aleatoria se utiliza para describir fenómenos cuyas observaciones puedan interpretarse como los resultados de una medición, lo cual nos lleva a la siguiente definición:

Definición 1 (Medida aleatoria).
Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y un espacio medible* $(S, \mathcal{A})$ *se tiene que el proceso estocástico* $\phi = \{\phi(A)\}_{A\in\mathcal{A}} = \{\phi(A, \omega) : A \in \mathcal{A}, \omega \in \Omega\}$ *es una medida aleatoria (m.a.) si cumple:*

i) La función $\phi(\cdot, \omega)$ *es una medida en* $(S, \mathcal{A})$ *para toda* $\omega \in \Omega$.

ii) La función $\phi(A, \cdot)$ *es una variable aleatoria (v.a.) en* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *para toda* $A \in \mathcal{A}$.

En caso de cumplir también

iii) Para conjuntos ajenos $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{A}$ *las variables aleatorias* $\{\phi(A_i)\}_{i\in I}$ *son independientes, donde* I *es un conjunto de índices cualquiera.*

se le llamará medida completamente aleatoria (m.c.a.).

Como ejemplos de la definición anterior tenemos:

Ejemplo 1 (Medida aleatoria).
Sea $(S, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *y* Θ *una v.a. no negativa. Definimos entonces*

$$\phi(A) = \Theta\lambda(A) \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

donde λ *es la medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}$. *Es inmediato que* ϕ *cumple con los supuestos de ser una medida aleatoria.*

Ejemplo 2 (Medida completamente aleatoria).
Sea $(S, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *y sea* $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ *un proceso cadlag no decreciente con incrementos independientes. Definimos*

$$\phi(a, b] = X_b - X_a \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b.$$

Una demostración de que ϕ *se extiende a una m.c.a en* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *se puede consultar en Dudley(2004)[9] capítulo 3, y la independencia* ϕ *en conjuntos disjuntos se obtiene de la independecia de los incrementos.*

Nosotros nos enfocaremos al estudio de m.a. bajo el espacio medible $(S, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$. La motivación, para trabajar en este espacio, es que dada una función de distribución F de una v.a. no negativa, podemos definir la función

$$\mu(a, b] = F(a) - F(b) \qquad \forall a < b, a, b \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

la cual se puede extender de manera única a una medida en $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$. Lo anterior se utiliza para investigar las posibles medidas de probabilidad que se le pueden asociar a fenómenos aleatorios.

1.2. La convergencia débil

Para poder plantear una topología en el conjunto de las medidas utilizaremos algunos resultados de convergencia de débil. Al trabajar con este tipo de convergencia debemos ser cuidadosos ya que pueden ocurrir ciertos fenómenos como muestran los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3.
Sea $X_n = c_n$ *con* $c_n \in \mathbb{R}$ *tal que* $c_n \to 0$ *con* $c_{2n} > 0$ *y* $c_{2n+1} < 0$. *Entonces* $X_n \to 0$ *puntualmente pero el comportamiento de las medidas de probabilidad asociadas* $\mu_n(\cdot) = \mathbb{P}[X \in \cdot]$ *tienen ciertos inconvenientes. Sea* I *un intervalo:*

- *Si* $0 \notin \overline{I}$, *donde* $\overline{I}$ *es la cerradura de* I, *entonces*

$$\lim_n \mu_n(I) = 0 = \mu(I).$$

- *Si* $0 \in I^\circ$, *donde* I° *es el interior de* I, *entonces*

$$\lim_n \mu_n(I) = 1 = \mu(I).$$

- *Si* $I = (a, 0)$ *o* $I = (0, b)$ *entonces* $\lim \mu_n(I)$ *no existe ya que* $\mu_n(I)$ *va alternando los valores* 0 *y* 1*; pero* $\mu(I) = 0$.

- *Si* $I=(a,0]$ *o* $I=[0,b)$ *entonces* $\lim \mu_n(I)$ *no existe ya que* $\mu_n(I)$ *va alternando los valores* 0 *y* 1*; pero* $\mu(I)=1$.

Ejemplo 4.

Sea $X_n = c_n$ *con* $c_n \in \mathbb{R}$ *tales que* $c_n \to \infty$*. Entonces tenemos que* $X_n \to \infty$ *puntualmente. Aún cuando* $X=\infty$ *es una v.a. se tiene el problema de que para todo intervalo finito* $(a,b)\subset \mathbb{R}$ $\lim_n \mu_n(a,b)=0$.

Para remediar este tipo de problemas utilizamos las siguientes definiciones, en las cuales siempre pedimos que la función a la que se converge sea también una función de distribución. Otra manera de solucionar este tipo de problemas es definiendo las medidas de subprobabilidad lo cual se puede consultar en *Chung(2001)*[6] página 85.

Definición 2 (Convergencia débil)**.**

Dadas las funciones de distribución $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* F *en* $\mathbb{R}^k$ *se dice que* F_n *convergen débilmente a* F*, en notación* $F_n \to F$ *si para todo punto* $x\in\mathbb{R}^k$ *donde* F *es continua se tiene que* $\lim_n F_n(x)=F(x)$*. Se dice que las medidas de probabilidad* μ_n *generadas por las distribuciones* F_n *convegen a la medida de probabilidad* μ *generada por* F *si* $F_n\to F$ *lo cual se denotará por* $\mu_n \to \mu$.

Un conjunto medible se dice que es de μ-continuidad si $\mu(\partial A)=0$, donde ∂A es la frontera de A. Notemos que el conjunto ∂A es medible ya que es la intersección de dos límites de conjuntos medibles y por lo tanto es medible.

Tenemos el siguiente resultado cuya demostración se puede consultar en *Billingsley(1995)*[4] teorema 29.1 y *Chung(2001)*[6] teoremas 4.3.1 y 4.3.2.

Teorema 1.

Si $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* μ *son medidas de probabilidad en* $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *entonces se tienen las siguientes equivalencias:*

i) $\mu_n \to \mu$.

ii) $\lim_n \int f d\mu_n = \int f d\mu$ *para toda función continua y acotada* f.

iii) $\limsup_n \mu_n(C) \leq \mu(C)$ *para todo conjunto cerrado* C.

iv) $\liminf_n \mu_n(G) \geq \mu(G)$ *para todo conjunto abierto* G.

v) $\lim_n \mu_n(A) \leq \mu(A)$ *para todo conjunto* μ*-continuo* A.

vi) Para cada intervalo finito (a,b) *y* $\varepsilon>0$ *existe un* $N\in\mathbb{N}$ *tal que para todo* $n\geq N$

$$\mu(a+\varepsilon,b-\varepsilon)-\varepsilon \leq \mu_n(a,b) \leq \mu(a-\varepsilon,b+\varepsilon)+\varepsilon.$$

vii) Para cada intervalo de continuidad (a, b) de μ se tiene que $\mu(a, b] \to \mu(a, b]$.

viii) Para cada $\delta, \varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces para cada intervalo (a, b) con $a, b \in \overline{R}$ se tiene que

$$\mu(a + \delta, b - \delta) - \varepsilon \leq \mu_n(a, b) \leq \mu(a - \delta, b + \delta) + \varepsilon.$$

Del teorema anterior los puntos que utilizaremos serán *ii)* e *vi)*, este último en especial definirá la métrica de Lévy. Como nos enfocaremos en medidas sobre $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ usaremos la notación $\mu(x) = \mu[0, x)$ para $x \in \mathbb{R}_+$ ya que los valores de $\mu[0, x)$ determinan los valores de μ en todo $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

Denotaremos por $\mathcal{M}$ al conjunto de las medidas sobre $\mathbb{R}_+$ tales que $\mu(0) = 0$ y $\mu(x) < \infty$ para toda $x \in \mathbb{R}_+$. Para poder exhibir la topología de $\mathcal{M}$ definiremos topologías en los conjuntos

$$\mathcal{M}^n = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(x) = \mu(n), x \geq n\}$$

donde $n \in \mathbb{N}$. Se observa entonces que las medidas de $\mathcal{M}^n$ tienen la particularidad de que su masa esta concentrada en el intervalo $[0, n]$. Definamos la siguiente métrica en $\mathcal{M}^n$.

Definición 3 (Métrica de Lèvy)**.**
Se define la métrica de Lévy de $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}^n$ como

$$d^n(\mu_1, \mu_2) = \inf_{x \geq 0} \{h \geq 0 : \mu_1(x - h) - h \leq \mu_2(x) \leq \mu_1(x + h) + h\}.$$

Demostremos que d^n en la definición anterior efectivamente es una métrica.

Proposición 1.
d^n es una métrica en $\mathcal{M}^n$.

Demostración.
Sean $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathcal{M}^n$. Es inmediato que $d^n(\mu_1, \mu_2) = 0$ si y sólo si $\mu_1(x) = \mu_2(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}_+$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
d^n(\mu_1, \mu_2) =& \inf_{x \geq 0} \{h \geq 0 : \mu_1(x - h) - h \leq \mu_2(x) \leq \mu_1(x + h) + h\} \\
=& \inf_{x \geq 0} \{h \geq 0 : \mu_1(x - h) - h \leq \mu_2(x)\} \wedge \inf_{x \geq 0} \{h \geq 0 : \mu_2(x) \leq \mu_1(x + h) + h\} \\
=& \inf_{y \geq 0} \{h \geq 0 : \mu_1(y) \leq \mu_2(y + h) + h\} \wedge \inf_{y \geq 0} \{h \geq 0 : \mu_2(y - h) - h \leq \mu_1(y)\} \\
=& \inf_{y \geq 0} \{h \geq 0 : \mu_2(y - h) - h \leq \mu_1(y) \leq \mu_2(y + h) + h\} \\
=& d^n(\mu_2, \mu_1).
\end{aligned}$$

Ahora demostraremos la desigualdad del triangulo para d^n. Sean $h_{12}, h_{23} \in \mathbb{R}_+$ tales que $h_{12} > d^n(\mu_1\mu_2)$ $h_{23} > d^n(\mu_2\mu_3)$, entonces para $x \in \mathbb{R}_+$ tenemos

$$\mu_1(x) \leq \mu_2(x + h_{12} + h_{12} \leq \mu_3(x + h_{12} + h_{23}) + h_{12} + h_{23}$$

$$\mu_1(x) \geq \mu_2(x - h_{12} - h_{12} \geq \mu_3(x - h_{12} - h_{23}) - h_{12} - h_{23}$$

lo cual implica que

$$d^n(\mu_1, \mu_3) \leq h_{12} + h_{23}$$

con lo cual se demuestra que $d^n(\mu_1, \mu_3) \leq d^n(\mu_1, \mu_2) + d^n(\mu_2, \mu_3)$. □

A continuación definiremos el espacio métrico $(\mathcal{M}, d)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos las funciones no negativas $f_n : \mathbb{R}_+ \mapsto [0, 1]$ dadas por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, n-1) \\ n - x & \text{si } x \in [n-1, n) \\ 0 & \text{si } x \in [n, \infty) \end{cases}, \tag{1.2}$$

y con ellas definimos para cada $\mu \in \mathcal{M}$ las medidas[1]

$$\mu^{(n)}(t) = \int_0^t f_n(x) d\mu.$$

Dado que existe una relación uno a uno entre la medida μ y la sucesión de medidas $\{\mu^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ utilizando que $\mu(t) = \mu^{(n)}(t)$ si $t \leq n - 1$, utilizaremos a las $\{\mu^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ para definir la métrica en $(\mathcal{M}, d)$.

La equivalencia anterior nos es necesaria ya que si uno definiera $\mu^{(n)}(t) = \mu(n \wedge t)$ ocurriría que $\mu_k \to \mu$ no implicaría $\mu_k^n \to \mu^{(n)}$. Por ejemplo si $\mu(x) = \mathbb{I}_{\{x \geq 1\}}$ entonces tendríamos que $\mu^1(x) = \mathbb{I}_{\{x \wedge 1 \geq 1\}} = \mathbb{I}_{\{x=1\}}$ que no define una medida.

Con lo antes mencionado definimos la siguiente función cuya comprobación de ser métrica en $\mathcal{M}$ se puede consultar en *Dudley(2004)*[9] proposición 2.4.4.

Definición 4.

Definimos la métrica $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \mapsto [0, 1)$ *para* $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}$ *como*

$$d(\mu_1, \mu_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n(\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)})}{2^n(1 + d^n(\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}))}$$

[1] Ver *Bartle(1966)*[2] lema 4.3(b).

Como primer resultado de la definición anterior tenemos:

Teorema 2.
Sean $\mu, \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{M}$ *entonces* $d(\mu_k, \mu) \to 0$ *si y sólo si* $\mu_k \to \mu$.

Demostración.
Utilizando el lema 3 de *Grandell(1977)*[10] tenemos que $d(\mu_k, \mu) \to 0$ si y sólo si para toda $n \in \mathbb{N}$ $\mu_k^{(n)} \to \mu^{(n)}$.

Supongamos $\mu_k \to \mu$. Las funciones f_n que definimos en (1.2) pertenecen al conjunto $\mathcal{C}_b(S)$ de todas las funciones reales continuas acotadas con dominio en S. Para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que el producto $f \times f_n \in \mathcal{C}_b(S)$ para toda $f \in \mathcal{C}_b(S)$, con lo cual se demuestra que $d(\mu_k, \mu) \to 0$ entonces $n \in \mathbb{N}$ $\mu_k^{(n)} \to \mu^{(n)}$.

Supongamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ $\mu_k^{(n)} \to \mu^{(n)}$. Sea $f \in \mathcal{C}_b(S)$ entonces como f tiene soporte compacto en particular tiene soporte finito; sea $n^* \in \mathbb{N}$ tal que para toda $x \geq 0$ se tenga que $f(x)f_n(x) = f(x)$ donde las funciones f_n son como en (1.2). Obtenemos

$$\int f d\mu_k = \int f f_{n^*} d\mu_k = \int f d\mu_k^{(n^*)} \to \int f d\mu^{(n^*)} = \int f d\mu,$$

donde la última igualdad se sigue del hecho de que el soporte de f esta contenido en $[0, n]$. Con lo cual hemos demostrado si para toda $n \in \mathbb{N}$ $\mu_k^{(n)} \to \mu^{(n)}$ entonces $d(\mu_k, \mu) \to 0$. □

Denotaremos por $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ a la σ-álgebra de borel generada por el conjunto de abiertos respecto al espacio métrico $(\mathcal{M}, d)$; con lo cual hemos logrado obtener una topología en el espacio de las medidas.

Utilizando la topología en el espacio de las medidas podemos definir de manera equivalente a las medidas aleatorias como transformaciones medibles de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ a $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathcal{M}))$ lo cual puede ser consultado en *Grandell(1977)*[10].

Parte II: Medidas completamente aleatorias

En esta parte del trabajo demostraremos dos resultados expuestos en *Kingman(1967)*[16]. El primero nos dará una descomposición de una m.c.a. en una con átomos fijos más otra sin ellos. Con segundo resultado obtendremos una caracterización distribucional de las m.c.a. sin átomos fijos.

2.1. Distribución de una m.c.a.

En general al estudiar una m.a. ϕ nos es necesario tener las distribuciones conjuntas de $\{\phi(B_i)\}_{i=1}^n$ con $B_i \in \mathcal{A}$ y $n \in \mathbb{N}$, lo cual implicaría tener conocimiento de una cantidad enorme de distribuciones. Este problema es una de las razones por las cuales trabajar con m.c.a. es mucho más sencillo que trabajar con m.a., ya que sólo es necesario el conocimiento de las distribuciones de $\phi(A)$ para toda $A \in \mathcal{A}$ para definir las distribuciones conjuntas de $\{\phi(B_i)\}_{i=1}^n$. La justificación es la siguiente:

Supongamos que queremos conocer la distribución de $\{\phi(B_i)\}_{i=1}^n$ para todas $\{B_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$ y $n \in \mathbb{N}$. Si para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ definimos

$$\mathbb{B}_j := \left\{ B_1^* \cap \ldots \cap B_{j-1}^* \cap B_j \cap B_{j+1}^* \cap \ldots \cap B_n^* : B_i^* = B_i \text{ o bien } , B_i^* = B_i^c \right\},$$

tenemos que los elementos de $\mathbb{B}_j$ son disjuntos y que $B_j = \bigcup \mathbb{B}_j$, entonces

$$\phi(B_j) = \sum_{b_j \in \mathbb{B}_\jmath} \phi(b_j),$$

y con ello podemos expresar a la distribución conjunta de $\{B_i\}_{i=1}^n$ en términos de los productos de las distribuciones de $\{b_i : b_i \in \mathbb{B}_i, i = 1, \ldots, n\}$ ya que estos conjuntos son disjuntos y por lo tanto sus medidas son independientes.

2.2. Exponente característico

La siguiente familia de funciones nos permitirá trabajar de manera más sencilla con las m.c.a.

Definición 5 (Exponente característico de ϕ)**.**
Sea ϕ una medida completamente aleatoria, para cada $t > 0$ y $A \in \mathcal{A}$ definimos el exponente característico $\lambda_t(A) : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ asociado a ϕ por

$$\lambda_t(A) := -\log \mathbb{E}\left[e^{-t\phi(A)}\right]$$

donde utilizaremos que $\log 0 = -\infty$.

Por cómo fue definida λ_t tenemos que para todas $t \in \mathbb{R}_+$ y $A \in \mathcal{A}$:

i) $0 \leq \lambda_t(A) \leq \infty$.

ii) $\lambda_t(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(A) \overset{c.s.}{=} 0.$

El conjunto $\{\lambda_t\}_{t>0}$ es un conjunto de medidas absolutamente continuas entre si.

iii) $\lambda_t(A) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \phi(A) \overset{c.s.}{=} \infty.$

Junto con *ii)* obtenemos que el conjunto $\{\lambda_t\}_{t>0}$ toma valores finitos (o infinitos) de manera conjunta.

El resultado i) es inmediato de la definición de λ_t. Tanto ii) como iii) se siguen de que $\phi(A) \geq 0$ para toda $A \in \mathcal{A}$ y del hecho de que la función exponencial cumple que $e^x \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, $e^x = 1$ si y sólo si $x = 0$ y del hecho de que $e^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$. Entonces tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.
Sea λ_t el exponente característico asociado a una m.c.a. ϕ. Entonces para cada $t \geq 0$ $\lambda_t(\cdot)$ es una medida en $(S, \mathcal{A})$.

Demostración.
Es inmediato que

$$\lambda_t(\emptyset) = -\log \mathbb{E}\left[e^{-t\phi(\emptyset)}\right] = -\log \mathbb{E}\left[e^{-t0}\right] = 0.$$

Por otro lado si los conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ son disjuntos con $A = \cup_n A_n$ utilizando que $\{\phi(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ son independientes y no negativas tenemos que

$$\lambda_t(A) = -\log \mathbb{E}\left[e^{-t\phi(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)}\right] = -\log \mathbb{E}\left[e^{-t\sum_{n=1}^{\infty}\phi(A_n)}\right] = -\log \mathbb{E}\left[\prod_{n=1}^{\infty} e^{-t\phi(A_n)}\right]$$

$$= -\log \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{-t\phi(A_n)}\right] = -\sum_{n=1}^{\infty} \log \mathbb{E}\left[e^{-t\phi(A_n)}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_t(A_n)$$

En la primera igualdad de la segunda línea utilizamos el teorema de convergencia dominada y en la última igualdad utilizamos que los sumandos son positivos por lo cual podemos hacer el intercambio en el orden de la suma.

$\square$

El siguiente conjunto lo utilizaremos principalmente cuando estudiemos la representación de Lévy-Kinchin de las medidas completamente aleatorias.

Definición 6 (Conjunto ideal).
Para $t \geq 0$ definimos al conjunto ideal como

$$\Theta := \{A \in \mathcal{A} : \lambda_t(A) < \infty\}$$

Utilizando lo antes mencionado tenemos que Θ esta bien definido y no depende de t. Además como

$$\lambda_t(A) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}\left[e^{-t\phi(A)}\right] \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\left[\phi(A) < \infty\right] > 0$$

tenemos que otra manera de expresar al conjunto ideal es

$$\Theta = \{A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}\left[\phi(A) < \infty\right] > 0\}$$

con lo cual vemos que

$$A \in \Theta \quad \Leftrightarrow \quad \phi(A) \stackrel{c.s.}{\neq} \infty.$$

Para poder exhibir más propiedades de los exponentes característicos pediremos que cada uno sea σ-finito, lo cual es equivalente a la siguiente condición.

Definición 7 (Condición C).
C*: Existe $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ partición*[2] *de S tal que $\mathbb{P}\left[\phi(C_n) < \infty\right] > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

En lo que resta de este trabajo supondremos que C es cierta.

2.3. Descomposición de una m.c.a.

A partir de ahora supondremos que si $x \in S$ entonces $\{x\} \in \mathcal{A}$. En esta sección consideraremos las medidas atómicas, para lo cual requerimos las siguientes definiciones:

[2]No es necesario abordar el caso de que los conjuntos no sean disjuntos ya que a partir de ellos podemos hacer una sucesión disjunta de conjuntos al utilizar una idea similar a la del segundo párrafo de la sección 2.1

Definición 8 (Medidas no-atómicas).
Sea $(S, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Se dice que el conjunto $A \in \mathcal{A}$ es un átomo de μ si $0 < \mu(A) < \infty$ y para cada $C \subset A$ con $C \in \mathcal{A}$ se tiene que $\mu(C) = 0$ o bien $\mu(C) = \mu(A)$. Se dice que una medida μ es no-atómica si no tiene ningún átomo.

Utilizando el teorema 1.4 de *Johnson(1970)*[13] y la observación hecha después de la definición de exponente característico tenemos que el conjunto $\{\lambda_t\}_{t>0}$ tiene los mismos átomos. Por lo anterior podemos definir de manera adecuada el conjunto de átomos de $\{\lambda_t\}_{t>0}$ como

$$\mathbb{A} := \{x \in S : \lambda_t(\{x\}) > 0\}$$

y entonces utilizando otra vez la observación antes referida tenemos que

$$x \in \mathbb{A} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\left[\phi(\{x\}) > 0\right] > 0.$$

A los elementos del conjunto $\mathbb{A}$ se les llama átomos fijos de ϕ ya que estos siempre tienen masa con probabilidad positiva; lo cual nos da una noción de no ser aleatorios en particular en el caso de medidas puntuales simples.

Observemos que al suponer que se cumple C cada $\{\lambda_t\}_{t>0}$ es σ-finito entonces tendremos que a lo más $\mathbb{A}$ es numerable, ya que de lo contrario tendríamos que existe algún C_n con medida infinita utilizando el siguiente resultado:

Lema 1.
Sea $(S, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\{x\} \in \mathcal{A}$ para todo $x \in S$ y sea $C \in \mathcal{A}$ un conjunto no numerable tal que $\mu(\{x\}) > 0$ para toda $x \in C$, entonces $\mu(C) = \infty$.

Demostración.
Definimos $A_n = \{x \in C : \mu(\{x\}) > 1/n\}$ se tiene que $C = \bigcup_n A_n$. Dado lo anterior se tendrá que algún A_{n_0} será un conjunto no numerable, de lo contrario se habría logrado hacer una enumeración de C, entonces si tomamos un subconjunto numerable $\mathcal{Q} \subset A_{n_0}$ obtenemos que

$$\mu(C) \geq \mu(A_{n_0}) \geq \sum_{x \in \mathcal{Q}} \mu(\{x\}) \geq \sum_{x \in \mathcal{Q}} \frac{1}{n_0} = \infty.$$

□

Tenemos entonces el siguiente resultado.

Teorema 3.

Sea ϕ una m.c.a. que satisface la condición $\mathtt{C}$. Entonces ϕ se puede descomponer en

$$\phi = \phi_f + \phi_1,$$

donde ϕ_f y ϕ_1 cumplen:

i) ϕ_f y ϕ_1 son m.c.a. independientes.

ii) ϕ_f tiene la forma

$$\phi_f(A) = \sum_{x\in\mathbb{A}} \varphi(x)\mathbb{I}_{\{x\in A\}} \qquad \forall A \in \mathcal{A},$$

donde $\{\varphi(x)\}_{x\in\mathbb{A}}$ son v.a. independientes.

iii) ϕ_1 no tiene átomos fijos; es decir

$$\phi_1(\{x\}) \overset{c.s.}{=} 0.$$

Demostración.

Como $\mathbb{A}$ es numerable y $\{x\} \in \mathcal{A}$ para toda $x \in S$, tenemos que $\mathbb{A} \in \mathcal{A}$. Ahora utilizaremos al conjunto $\mathbb{A}$ para descomponer a nuestra medida aleatoria. Para cada punto fijo $x \in \mathbb{A}$ definimos

$$\varphi(x) := \phi(\{x\}).$$

Entonces la variable aleatoria $\varphi(x)$ es independiente de los valores que toma ϕ en los subconjuntos medibles de $S - \{x\}$. En particular las variables aleatorias $\{\varphi(x)\}_{x\in\mathbb{A}}$ son independientes. Definimos las medidas [3]

$$\phi_f(A) = \phi(A \cap \mathbb{A}) \qquad \phi_1(A) = \phi(A \cap \mathbb{A}^c),$$

estas son m.c.a. al ser la restricción de una m.c.a. sobre los conjuntos medibles $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}^c$, también satisfacen $\mathtt{C}$ y cumplen

$$\phi = \phi_f + \phi_1.$$

Como los conjuntos $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}^c$ son disjuntos tenemos que las m.c.a ϕ_f y ϕ_1 son independientes. Además por cómo fue definido ϕ_f se cumple

$$\phi_f(A) = \phi(A \cap \mathbb{A}) = \sum_{x\in\mathbb{A}} \phi(A \cap \{x\}) = \sum_{x\in\mathbb{A}} \varphi(x)\mathbb{I}_{\{x\in A\}}.$$

□

En la siguiente sección nos enfocaremos en m.c.a. las cuales no tengan átomos fijos; es decir, aquellas que cumplen que para cada $x \in S$ se tenga que $\mathbb{P}[\phi(\{x\}) > 0] = 1$.

[3]Con respecto a este tipo de descomposiciones se puede consultar los resultados que exhiben *Dudley(2004)*[9] en la página 110 y en *Johnson(1970)*[13] teorema 2.1

2.4. Representación de medidas completamente aleatorias

A continuación mostraremos dos formas de representar a las medidas completamente aleatorias; la primera como procesos infinitamente divisibles y la segunda a través de su representación de Lévy-Kinchin.

2.4.1. Representación en procesos infinitamente divisibles

Sea ϕ una m.c.a. que cumple la condición $\mathtt{C}$ y que no tiene átomos fijos. Tenemos entonces que los exponentes característicos $\{\lambda_t\}_{t>0}$ asociados a ϕ son no atómicos. Utilizando el resultado exhibido en *Armstrong & Prikry(1981)*[1] tenemos el siguiente lema.

Lema 2.
Si $(S, \mathcal{A}, \lambda_t)$ *es un espacio de medida no atómico y* $A \in \mathcal{A}$ *con* $\lambda_t(A) = a < \infty$ *entonces para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existe una partición* $\{A_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ *de* A *tal que*

$$\lambda_t(A_i^{(n)}) = \frac{a}{n} \qquad \forall i \in \{i, \ldots, n\}.$$

Demostración.
En el articulo *Armstrong & Prikry(1981)*[1] se demuestra que para toda $b \in (0, a)$ existe un $E \subset A$ medible tal que

$$\lambda_t(E) = b.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ fija, entonces definimos el conjunto medible $A_1^{(n)} \subset A$ como aquel que cumple con

$$\lambda_t(A_1^{(n)}) = \frac{a}{n}$$

y de manera recursiva definimos $A_i^{(n)}$ dados $A_1^{(1)}, \ldots, A_{i-1}^{(n)}$ como el conjunto medible $A_i^{(n)} \subset A \setminus \cup_{j=1}^{i-1} A_j^{(n)}$ tal que cumple $\lambda_t(A_i^{(n)}) = \frac{a}{n}$, donde utilizamos el hecho de que el conjunto $A \setminus \cup_{j=1}^{i-1} A_j^{(n)}$ es medible y que

$$\lambda(A \setminus \cup_{j=1}^{i-1} A_j^{(n)}) = \frac{a(i-1)}{n},$$

con lo cual se obtiene el resultado. $\square$

Como consecuencia de este lema tenemos que

$$\mathbb{E}\left[e^{-\phi(A_i^{(n)})}\right] = e^{-a/n},$$

y utilizando la desigualdad de Markov se obtiene que para todo $c > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\phi(A_i^{(n)}) \geq c\right] =& \mathbb{P}\left[1 - e^{\phi(A_i^{(n)})} \geq 1 - e^c\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[1 - e^{\phi(A_i^{(n)})}\right]}{1 - e^{-c}} \\ =& \frac{1 - e^{-a/n}}{1 - e^{-c}}.\end{aligned}$$

Esta última cota nos da como resultado la propiedad

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq j\leq n} \mathbb{P}\left[\phi(A_i^{(n)}) \geq c\right] = 0,$$

entonces se dice que los conjuntos $\{A_i^{(n)}\}_{i,n\in\mathbb{N}}$ son uniformemente asintóticamente nulos[4]. La propiedad anterior junto con el hecho de que

$$\phi(A) = \sum_{i=1}^{n} \phi(A_i^{(n)})$$

implican que las variables aleatorias $\{\phi(A)\}_{A\in\Theta}$ son infinitamente divisibles[5]; la demostración puede ser consultada en la proposición 3.4.1 de *Matthes, Kerstan & Mecke(1978)*[20] o de manera más extensa en el capítulo VI sección 23 de *Loève(1977)*[19].

2.4.2. Representación de Lévy-Khinchin

En *Kendall(1963)*[15] se exhibe la representación de Lévy-Khinchin para una v.a. no negativa; utilizando este resultado tenemos que para toda $t > 0$ y para toda $A \in \mathcal{A}$

$$\mathbb{E}\left[e^{-t\phi(A)}\right] = \exp\left\{-\int_0^\infty k(t,z)\Gamma(A,dz)\right\}, \tag{2.3}$$

donde $\Gamma(A,\cdot)$ es una medida finita en $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ y

$$k(t,z) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-tz}}{1-e^{-z}} & \text{si} \quad z>0, t>0 \\ t = \lim_{z\to 0} \dfrac{1-e^{-tz}}{1-e^{-z}} & \text{si} \quad z=0, t>0 \end{cases} \tag{2.4}$$

[4]Esta es una traducción del término uniformly asymptotically negligible. También se le puede encontrar como uniformemente casi nulo (uniformly almost negligible) y como descomponible (decomposable).

[5]Para mayores referencias sobre el tema de v.a. infinitamente divisibles se pueden consultar los libros de *Matthes, Kerstan & Mecke(1978)*[20], *Steutel & Harn(2004)*[22] y *Sato(1999)*[21].

Utilizamos la notación $\Gamma(A, \cdot)$ para hacer énfasis en la dependencia de la medida Γ con respecto al conjunto $A \in \mathcal{A}$. Existen entonces dos aspectos a analizar:

- El tipo de dependencia de la medida $\Gamma(A, \cdot)$ con respecto a $A \in \mathcal{A}$.
- Utilizando la expresión (2.3) tenemos que

$$\lambda_t(A) = \int_0^\infty k(t, z)\Gamma(A, dz); \qquad \forall t > 0, \forall A \in \Theta, \tag{2.5}$$

  entonces nos interesa como extender esta expresión para toda $A \in \mathcal{A}$.

Con respecto a estos puntos tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.
Sea ϕ una m.c.a. que satisface la condición $\mathtt{C}$ *y sin átomos fijos, entonces existe una única función* $\Gamma : \mathcal{A} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ *tal que*

i) $\Gamma(A, \cdot)$ *es una medida en* $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ *para toda* $A \in \mathcal{A}$.

ii) $\Gamma(\cdot, E)$ *es una medida en* $(S, \mathcal{A})$ *para toda* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

iii)
$$\lambda_t(A) = \int_0^\infty k(t, z)\Gamma(A, dz); \qquad \forall t > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \tag{2.6}$$
donde $k(\cdot, \cdot)$ *esta definida con la ecuación (2.4).*

Demostración.
Definimos a $\Gamma(A, \cdot)$ como la medida finita en $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ asociada a la representación (2.3), con lo cual quedan demostrados i) e iii). Para demostrar ii) primero demostraremos la σ-aditividad de $\Gamma(\cdot, B)$ en Θ para toda $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Sea $A_n \in \Theta$ tales que $\cup_{n=1}^\infty A_n = A \in \Theta$, entonces para toda $t > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty k(t, z)\Gamma(A, dz) =& \lambda_t(A) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_t(A_n) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty k(t, z)\Gamma(An, dz) \\ =& \int_0^\infty k(t, z)\Gamma'(An, dz)\end{aligned}$$

donde defimos a Γ' con la relación

$$\Gamma'(A, \cdot) = \sum_{n=1}^\infty \Gamma(A_n, \cdot).$$

Veamos entonces que $\Gamma' = \Gamma$. Al hacer $t = 1$ y utilizando que $k(1, z) = 1$ obtenemos

$$\Gamma(A, \mathbb{R}_+) = \int_0^\infty \Gamma(A, dz) = \int_0^\infty \Gamma'(A, dz) = \Gamma'(A, dz),$$

entonces $\Gamma'(A, \cdot)$ es finita.

Como estamos suponiendo que $A \in \Theta$ tenemos que

$$\int_0^\infty k(t, z)\Gamma'(A, dz) = \lambda_t(A) < \infty,$$

lo cual nos permite demostrar que Γ y Γ' tienen la misma transformada de Laplace ya que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-tz}\Gamma(A, dz) &= \int_0^\infty [k(t+1, z) - k(t, z)]\Gamma(A, dz) \\
&= \int_0^\infty [k(t+1, z) - k(t, z)]\Gamma'(A, dz) \\
&= \int_0^\infty e^{-tz}\Gamma'(A, dz),
\end{aligned}$$

por lo tanto $\Gamma = \Gamma'$. Entonces

$$\Gamma(A, \cdot) = \sum_{n=1}^\infty \Gamma(A_n, \cdot).$$

para toda $A_n \in \Theta$, $A = \cup_{n=1}^\infty A_n \in \Theta$, con lo cual hemos demostrado la σ-aditividad para conjuntos de Θ, ahora extenderemos esta propiedad a conjuntos de $\mathcal{A}$. Sea $A \in \mathcal{A}$ y definimos la función $\Gamma^* : \mathcal{A} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ como

$$\Gamma^*(A, \cdot) = \sum_{n=1}^\infty \Gamma(A \cap C_n, \cdot) \tag{2.7}$$

donde $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ es la particion de S que nos hace cumplir la condición C. Veamos primero que Γ^* esta bien definida; como $C_n \in \Theta$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $C_n \in \Theta$ para toda $n \in \mathbb{N}$ con lo cual es válida la operación $\Gamma(A \cap C_n, \cdot)$, por otro lado si tenemos otra partición $\{D_m\}_{m=1}^\infty$ de S que hace cumplir la condición C entonces utilizando que $\Gamma(\cdot, B)$ es una medida para toda $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^\infty \Gamma(A \cap D_m, \cdot) &= \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \Gamma(A \cap C_n \cap D_m, \cdot) = \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty \Gamma(A \cap C_n \cap D_m, \cdot) \\
&= \sum_{n=1}^\infty \Gamma(A \cap C_n, \cdot).
\end{aligned}$$

lo cual demuestra que Γ^* esta bien definida. Por otro lado podemos observar que para $A \in \Theta$

$$\Gamma^*(A,\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A \cap C_n, \cdot) = \Gamma(A,\cdot);$$

es decir, Γ^* es una extensión de Γ para conjuntos en $\mathcal{A}$.

Veamos que Γ^* es σ-aditiva. Sea $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ y $A = \cup_{m=1}^{\infty} A_m$ entonces

$$\begin{aligned}\Gamma^*(A,\cdot) = &\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A \cap C_n,\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(\cup_{m=1}^{\infty} A_m \cap C_n,\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \Gamma(A_m \cap C_n,\cdot) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_m \cap C_n,\cdot) = \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma^*(A_m,\cdot).\end{aligned}$$

Entonces sólo nos falta demostrar que Γ^* cumple con la ecuación (2.6). Sea $t > 0$ y $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}\lambda_t(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \cap C_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} k(t,z)\Gamma(A \cap C_n, dz) \\ &= \int_0^{\infty} k(t,z) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A \cap C_n, dz)\right] \\ &= \int_0^{\infty} k(t,z)\Gamma^*(A, dz).\end{aligned}$$

Con lo cual hemos logrado las propiedades deseadas para la función Γ^*.
$\square$

Debido al teorema anterior existe una relación unívoca entre la distribución de ϕ y la función Γ:

- Si se conoce la función Γ entonces se conoce $\mathbb{E}\left[e^{-\phi(A)}\right]$, la cual determina las distribuciones finito dimensionales de ϕ.
- La distribución de ϕ determina de manera única Γ por medio de la relación (2.3); esta unicidad es λ-casi en todos lados, donde λ es la medida de Lebesgue.

Conclusiones

Aparte del interés intrínseco del estudio de las m.a. existen diversos fenómenos, en áreas como la física, biología y finanzas, los cuales pueden ser modelados por m.a.; por lo cual su estudio es de gran importancia.

Utilizando la topología que definimos en el espacio de las medidas podemos representar a las medidas aleatorias como transformaciones medibles de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ a $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathcal{M}))$.

De manera equivalente una m.a. se puede interpretar como una función $\phi : \mathcal{A} \times \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+$, donde $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad y $(S, \mathcal{A})$ un espacio medible, con la característica de que $\phi(\cdot, A)$ es una variable aleatoria para toda $A \in \mathcal{A}$ y $\phi(\omega, \cdot)$ es una medida con respecto al espacio $(S, \mathcal{A})$ para toda $\omega \in \Omega$.

Con el supuesto de independencia en la definición de m.c.a. se obtienen diversas propiedades que nos permiten cierta soltura en nuestros planteamientos. Por ejemplo, si ϕ es una m.c.a. entonces la distribución conjunta de $\{\phi(A_i)\}_{i \in I}$ para $A_i \in \mathcal{A}$ queda determinada al conocer la distribución de $\phi(A)$ para toda $A \in \mathcal{A}$. Otra propiedad útil es que si ϕ es una m.c.a. entonces las variables aleatorias $\{\phi(A)\}_{A \in \Theta}$ son infinitamente divisibles.

Al existir una relación uno a uno entre la medida Γ del teorema 4 y la distribución de ϕ podemos estudiar que tipo de medidas Γ se ajustan al fenómeno que estamos estudiando en lugar de tener que trabajar directamente con las m.c.a. las cuales pueden ser más dificiles de ajustar. Este tipo de idea es utilizada en el articulo de Brix(1999)[5], utilizando que Γ pertenece a la familia de las *G-medidas*.

El estudio de las medidas aleatorias me ha parecido de gran importancia y con amplio campo de aplicación, por lo cual me ha motivado a realizar mis estudios de doctorado en este tema.

Bibliografía

[1] Armstrong T.E. & Prikry K. (1981), *Liapounoff's Theorem for Nonatomic, Finitely-Additive, Bounded, Finite-Dimensional, Vector-Valued Measures*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 266, No. 2 (Aug., 1981), pp. 499-514.

[2] Bartle R., (1966), *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, ed. John Wiley & Sons.

[3] Billingsley P. (1968), *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & sons, New York.

[4] Billingsley P. (1995), *Probability and Measure*, John Wiley & sons, New York.

[5] Brix A.(1999), *Generalized Gamma measures and shot-noise Cox processes*, Advances in Applied Probability, Vol. 31, pp. 929–953.

[6] Chung K.L. (2001), *A course in probability theory 3th edition*, Academic Press.

[7] Cont R. & Tankov P.(2004),*Financial Modelling with jump processes*, Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, London.

[8] Daley D. & Vere-Jones D.(2008), *An Introduction to the Theory of Point Processes, Vol II: General Theory and Structure* second ed., New York.

[9] Dudely R.(2004) *Real analysis and probability*, Cambridge, United Kingdom

[10] Grandell J.(1977), *Point processses and random measures*, Advances in Applied Probability, Vol. 9, No. 3 pp. 502-526

[11] Griffin J. & Walker S.(2009), *Posterior Simulation of Normalized Random Measure Mixtures*, Journal of Computational and Graphical Statistics, Vol. 20, No. 1, pp. 241-259.

[12] Jagers P.(1974), *Aspects of random measures and point processes, Advances in Probability and Related Topics vol. III*, ed. Ney P. & Dekker M. New York, páginas pp. 179-239.

[13] Johnson R.A. (1970), *Atomic and nonatomic measures*, Proceedings of the American Mathematical Society, pp. 650–655.

[14] Kallenberg O.(1983), *Random Measures*, Akademie-Verlag Berlin and Academic Press London.

[15] Kendall D. G.(1963),*Extreme-point methods in stochastic analysis*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 1, pp. 295-300.

[16] Kingman J.(1967), *Completely random measures*, Pacific J. Math. 21, pp. 59–78.

[17] Kingman J.(1993), *Poissson Processes*, Oxford University Press, New York.

[18] Kratz M. & Picco P.(2004), *A representation of Gibbs measure for the random energy model*, The Annals of Applied Probability Vol. 14, No. 2, pp. 651–677.

[19] Loève M., (1977), *Probability Theory I, 4th edition*, Springer-Verlag Inc..

[20] Matthes K., Kerstan J. & Mecke Joseph (1978), *Infinitely Divisible Point Processes*, ed. John Wiley & Sons.

[21] Sato K. (1999),*Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Cambrige university press.

[22] Steutel F. W. & Harn K. V. (2004), *Infinite divisibility of probability distributions on the real line*, ed. Marcel Dekker, Inc..