



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE INGENIERÍA

DISEÑO DE CONTROLADORES LINEALES  
Y NO LINEALES PARA UN SISTEMA  
DE SUSPENSIÓN MAGNÉTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

INGENIERO MECATRÓNICO

P R E S E N T A:

LEONARDO NAVA GUERRA

DIRECTOR

DR. LUIS AGUSTÍN ÁLVAREZ-ICAZA LONGORIA

CODIRECTOR

M.I. ROLANDO ALBERTO CARRERA MÉNDEZ



MÉXICO, D.F. 2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes de los sistemas de suspensión magnética . . . . .	2
1.2. Estado del arte del control en sistemas de suspensión magnética . . . . .	3
1.3. Objetivo . . . . .	4
1.4. Organización . . . . .	5
<b>2. Análisis del sistema</b>	<b>7</b>
2.1. Descripción de la planta . . . . .	7
2.2. Sensor de posición . . . . .	8
2.3. Modelado del subsistema mecánico . . . . .	9
2.4. Modelado del subsistema eléctrico . . . . .	11
2.5. Parámetros . . . . .	13
2.6. Linealización del sistema no lineal . . . . .	14
2.6.1. Puntos de equilibrio . . . . .	15
2.7. Modelo Hamiltoniano . . . . .	19
<b>3. Control</b>	<b>21</b>
3.1. Controlabilidad y observabilidad . . . . .	21
3.1.1. Análisis de controlabilidad . . . . .	21
3.1.2. Análisis de observabilidad . . . . .	22
3.2. Diseño del control por asignación de polos . . . . .	22
3.2.1. Estabilidad . . . . .	23
3.2.2. Desempeño . . . . .	24
3.2.3. Regulación . . . . .	27
3.2.4. Seguimiento . . . . .	28
3.3. Diseño del observador lineal . . . . .	30
3.4. Diseño del control LQR con acción integral . . . . .	32
3.5. Linealización por retroalimentación . . . . .	36
3.6. Control basado en pasividad . . . . .	39
3.7. Implementación . . . . .	41

<b>4. Simulación numérica</b>	<b>45</b>
4.1. Asignación de polos . . . . .	45
4.1.1. Observador lineal . . . . .	46
4.2. LQR con acción integral . . . . .	47
4.3. Linealización entrada-estado . . . . .	48
4.4. Control basado en pasividad . . . . .	50
<b>5. Resultados experimentales</b>	<b>53</b>
5.1. Asignación de polos . . . . .	53
5.1.1. Observador lineal . . . . .	55
5.2. LQR con acción integral . . . . .	56
<b>6. Conclusiones</b>	<b>61</b>
6.1. Trabajo futuro . . . . .	62

# Índice de figuras

2.1.	Principio básico de suspensión magnética. . . . .	7
2.2.	Sensor de posición LVDT. . . . .	8
2.3.	Características Fuerza-Distancia. . . . .	10
2.4.	Diagrama de cuerpo libre del péndulo. . . . .	11
2.5.	Diagrama eléctrico del actuador. . . . .	11
2.6.	Respuesta del actuador a una entrada escalón unitaria. . . . .	13
2.7.	Relación entre la corriente en la bobina y la distancia del péndulo. . . . .	16
3.1.	Polos dominantes vs. Polos seleccionados. . . . .	26
3.2.	Diagrama de bloques del esquema de control . . . . .	26
3.3.	Esquema de control con precompensador. . . . .	28
3.4.	Esquema de control con acción integral. . . . .	28
3.5.	Respuesta del sistema de control con acción integral. . . . .	30
3.6.	Esquema de control con precompensador y observador. . . . .	32
3.7.	Diagrama de bloques del sistema. . . . .	39
3.8.	Desarrollo del algoritmo de control. . . . .	43
4.1.	Posición del péndulo. Asignación de polos. . . . .	45
4.2.	Entrada de control. Asignación de polos. . . . .	46
4.3.	Desempeño del observador. . . . .	47
4.4.	Posición del péndulo. LQR. . . . .	48
4.5.	Entrada de control. LQR. . . . .	48
4.6.	Posición del péndulo. Linealización entrada-estado. . . . .	49
4.7.	Entrada de control. Linealización entrada-estado. . . . .	50
4.8.	Posición del péndulo. IDA-PBC. . . . .	51
4.9.	Entrada de control. IDA-PBC. . . . .	51
5.1.	Posición del péndulo. Asignación de polos. . . . .	53
5.2.	Entrada de control. Asignación de polos. . . . .	54
5.3.	Posición del péndulo. Perturbación 50%. . . . .	55
5.4.	Entrada de control. Perturbación 50%. . . . .	55
5.5.	Error de observación. . . . .	56
5.6.	Posición del péndulo. LQR. . . . .	57
5.7.	Entrada de control. LQR. . . . .	57
5.8.	Posición del péndulo. Seguimiento. . . . .	58

5.9. Entrada de control. Seguimiento. . . . .	58
5.10. Posición del péndulo. Perturbación 119%. . . . .	59
5.11. Entrada de control. Perturbación 119%. . . . .	59

# Capítulo 1

## Introducción

La suspensión o levitación se define como el estado de equilibrio de un cuerpo que no se encuentra en contacto con la tierra. Dicho equilibrio se puede lograr de diferentes maneras, ya sea utilizando fluidos o mediante fuerzas magnéticas. El interés de este trabajo se concentra en la suspensión magnética, es decir, en la utilización de fuerzas magnéticas capaces de compensar las fuerzas gravitacionales que actúan sobre un cuerpo.

Los sistemas de suspensión magnética están compuestos por dos subsistemas principalmente, el primero se encarga de generar flujo magnético y, el segundo, se encarga de atrapar dicho flujo.

Existen tres tipos de tecnologías de suspensión magnética que son principalmente utilizadas:

- Imanes permanentes
- Electromagnética
- Electrodinámica

El sistema de suspensión magnética mediante imanes permanentes está compuesto por un par de imanes permanentes con diferentes polaridades, creando el efecto de repulsión entre ambos.

La suspensión mediante electroimanes, o electromagnética, funciona haciendo circular una corriente eléctrica a través de una bobina, produciendo un campo magnético primario, el cual recae sobre el objeto de material ferromagnético que se desea suspender. Este tipo de tecnología requiere del sensado de la posición del objeto, para posteriormente llevar a cabo una realimentación.

Una suspensión electrodinámica puede aprovechar algunas de las propiedades de los materiales superconductores, tales y como, la resistencia nula al paso de la corriente, permitiendo la generación de campos magnéticos grandes; y el rechazo de las líneas de flujo magnético para bajos campos magnéticos(Moon 2004).

Una de las principales desventajas de los materiales superconductores es que requieren de temperaturas cercanas al cero absoluto para presentar las propiedades mencionadas anteriormente. En los últimos años se han desarrollado nuevos materiales superconductores

conocidos como de altas temperaturas, los cuales poseen temperaturas críticas mayores al cero absoluto, sin embargo, éstas continúan siendo extremadamente bajas.

Debido al problema de obtener y mantener temperaturas tan bajas, los sistemas de levitación electrodinámica han comenzado a ser sustituidos por los sistemas electromagnéticos y han sido cada vez más utilizados en diversas aplicaciones.

## 1.1. Antecedentes de los sistemas de suspensión magnética

Los sistemas de transporte basados en suspensión magnética (Mag-Lev) son, probablemente, la aplicación más conocida de este tipo de tecnología. Esta idea surge alrededor de 1970, a partir de la necesidad de crear medios de transporte terrestres más veloces. Esta tecnología ha sido desarrollada principalmente en países como Alemania, Japón, Inglaterra y Estados Unidos; siendo los primeros dos, los que cuentan con las compañías de mayor importancia en la actualidad. Sistemas de transporte de este tipo se encuentran ya en operación, utilizando tanto la suspensión electrodinámica como la electromagnética.

Otra de las aplicaciones de los sistemas de levitación magnética, son los rodamientos magnéticos. Los rodamientos son piezas fundamentales en el funcionamiento de la mayoría de las máquinas, ya que permiten el movimiento relativo entre dos cuerpos. Los rodamientos mecánicos son los más utilizados, sin embargo, poseen características como el desgaste, el ruido, la generación de vibraciones y la exigencia de lubricación; que han creado la necesidad de buscar nuevas tecnologías para este tipo de dispositivos. Una de ellas es la suspensión magnética, la cual cuenta con un gran número de ventajas, entre las cuales destacan la capacidad de carga de ejes de gran peso, menores pérdidas de energía, amplio rango de temperatura de operación, así como la posibilidad de girar a velocidades extremadamente altas. Aprovechando esta última propiedad, estos elementos han sido utilizados en máquinas de herramientas, compresores, bombas, turbinas, motores y generadores (Rodríguez, Siguerdidjane, y Ortega 2000).

Por otro lado se encuentran los volantes de inercia, los cuales han sido utilizados desde la antigüedad para almacenar energía cinética, sin embargo, la eficiencia de dichos elementos ha sido limitada por pérdidas debidas a fricción en los rodamientos. Es por esto que la suspensión magnética ofrece una posibilidad de almacenamiento de energía mayor. Los volantes de inercia levitados magnéticamente han recibido especial interés en los últimos años, debido a que tienen un mayor tiempo de vida y la cantidad de energía almacenada por unidad de masa es también mayor en comparación con las baterías y los capacitores (Ahrens, Kucera, y Larssonneur 1996). Los volantes de inercia levitados magnéticamente están siendo investigados por la NASA y se planea incorporarlos en misiones espaciales como fuente de energía.

En la industria de la manufactura de semiconductores y en procesos de producción que requieren de gran precisión, también es utilizada la levitación magnética para crear sistemas de aislamiento de vibraciones. Estos sistemas ayudan a crear un ambiente limpio y libre de partículas generadas por la fricción entre los componentes de las máquinas, permitiendo obtener precisiones micrométricas (Nagaya y Ishikawa 1995).



## 1.2. Estado del arte del control en sistemas de suspensión magnética

En un sistema de suspensión magnética es necesario diseñar sistemas de control retroalimentado que permitan la estabilización y el control del mismo, ya que, como se mostrará más adelante, es una planta altamente no lineal, inestable y además se encuentra subactuada.

El problema del control de sistemas de levitación magnética se ha tratado de solucionar utilizando diferentes modelos del sistema, así como diferentes técnicas de control, que van desde técnicas lineales sencillas, hasta técnicas no lineales de gran complejidad.

En (Yu, Yang, Rigas, y Jayawant 2002) y (Estrada 2007) se presenta el diseño de controladores PID. Este tipo de controladores conjuntan las virtudes del control proporcional-derivativo (PD) y del proporcional-integral (PI), logrando modificar el estado transitorio del sistema y llevar el error en estado estable a cero. En ambos casos se obtuvo la función de transferencia del sistema a partir de una linealización, para posteriormente realizar la sintonización de las ganancias del controlador. En (Yu, Yang, Rigas, y Jayawant 2002) se lleva a cabo el modelado del sistema por el método de Euler-Lagrange. El autor asume que se tiene acceso a la posición y corriente del sistema, por lo que propone un PID continuo para el control de posición y un control proporcional (P), también continuo, para la corriente.

En (Estrada 2007) se presentan dos enfoques distintos para realizar el ajuste del controladores PID discretos. En el primero se realiza el ajuste del controlador mediante la técnica del control óptimo, en donde el índice de desempeño que se desea minimizar es el error cuadrático entre la posición deseada y la real. El segundo enfoque utilizado está relacionado con la respuesta en frecuencia, en el cual, se utiliza una red de atraso-adelanto para obtener nuevos valores de las ganancias del controlador. Finalmente se realiza una comparación experimental entre el desempeño de ambos controladores.

En (Lee, Su, y Yu 2007), (Barie y Chiasson 1996) y (Ahmad y Javaid 2010) se emplea otra técnica lineal conocida como control mediante la retroalimentación del estado, basada en una aproximación lineal del modelo. Para llevarla a cabo, se requiere tener mediciones del estado completo, o, en su defecto, una aproximación del mismo. En (Lee, Su, y Yu 2007) se presentan 2 modelos diferentes para realizar la estimación del estado; un observador lineal y un filtro  $\alpha - \beta - \gamma$ , siendo este último un estimador similar al filtro propuesto por Kalman en 1960. El filtro  $\alpha - \beta - \gamma$  es un algoritmo que proporciona estimaciones de los estados sin necesidad de tener un modelo preciso del sistema. Ambos estimadores son agregados al control y, posteriormente, se compara el desempeño de ambos mediante resultados experimentales. El sistema utilizado en (Barie y Chiasson 1996) cuenta con sensor de posición y de corriente, por lo que el autor propone el diseño de un observador no lineal de orden reducido para la estimación del estado faltante.

En (Barie y Chiasson 1996) y (Ahmad y Javaid 2010) se presenta un control por linealización exacta, la cual es una técnica de control no lineal que consiste en realizar una transformación del modelo original del sistema a la forma canónica controlable, para poder fácilmente elegir las ganancias de retroalimentación que ubiquen los polos de lazo cerrado en la posición deseada. Los controladores diseñados son capaces de seguir una referencia senoidal, cumpliendo con el objetivo de seguimiento.

En (Namerikawa y Kawano 2006) y (Rodriguez, Siguerdidjane, y Ortega 2000) se utiliza

el control basado en pasividad, el cual aprovecha las propiedades de almacenamiento y disipación de energía del sistema. El objetivo de este tipo de controladores no lineales, es hacer que el sistema tienda a un punto mínimo de energía en el menor tiempo posible mediante la inyección de amortiguamiento. En (Namerikawa y Kawano 2006) los autores optan por descomponer el sistema de suspensión magnética en una parte eléctrica, para la cual diseña un control pasivo; y una parte mecánica, en donde utiliza un controlador PID para obtener la fuerza electromagnética deseada que hace que la posición tienda a la deseada. En (Rodríguez, Siguerdidjane, y Ortega 2000) se propone una metodología de control basado en pasividad conocido como asignación de interconexión y amortiguamiento, o IDA-PBC por sus siglas en inglés, el cual ha sido utilizado en sistemas electromecánicos subactuados como es el caso de la suspensión magnética. Esta metodología además de moldear la función de energía potencial del sistema como el control pasivo tradicional, moldea la función de energía cinética del sistema mediante la introducción de las matrices de interconexión y de amortiguamiento. El autor propone la utilización de un observador lineal para la estimación del flujo magnético y de un integrador fuera del lazo de control para hacer que el error en estado estable tienda a cero.

Un controlador predictivo basado en un modelo difuso es presentado en (Lepetic, Skrjanc, Chiacchiarini, y Matko 2003). En el control predictivo, las salidas futuras del sistema se predicen en cada instante de tiempo  $k$ , dependiendo de los valores de las entradas y salidas anteriores. Esta predicción se lleva a cabo con base en un modelo difuso propuesto por Takagi y Sugeno en 1985. Las señales de control futuras del sistema se calculan a partir de una función de optimización que busca minimizar el error entre la predicción de la salida del sistema y la señal de referencia. El controlador es implementado físicamente y se compara su desempeño con un controlador PID discreto.

En (Cho, Kato, y Spilman 1993) se emplea un control por modos deslizantes y se prueba su funcionamiento experimentalmente para entradas constantes y variables. El modelo utilizado para el diseño del controlador es de orden 2, en donde las variables de estado son la posición y la velocidad. Este tipo de controladores requieren del conocimiento completo del estado, por lo que el autor propone un derivador para obtener la velocidad del objeto levitado a partir de las mediciones de la posición.

### 1.3. Objetivo

El presente trabajo busca cumplir con los siguientes objetivos principales:

- Diseño de esquemas de control lineal y no lineal para un sistema de suspensión magnética.
- Implementación por simulación o física de los esquemas propuestos.
- Comparación del desempeño de los controladores diseñados.

## 1.4. Organización

En el primer capítulo se presenta la introducción a los sistemas de suspensión magnética, los tipos de tecnologías más utilizadas, las principales aplicaciones de este tipo de tecnología, el estado del arte de los sistemas de control utilizados y el objetivo.

El segundo capítulo contiene la descripción general de la planta, el modelado de los subsistemas mecánico y eléctrico, la descripción del sensor de posición con el que cuenta el sistema, los valores de los parámetros, el cálculo del punto de equilibrio, la linealización del sistema no lineal y la descripción Hamiltoniana del modelo.

En el tercer capítulo se realiza un análisis de controlabilidad y observabilidad del sistema de suspensión magnética, se presenta el diseño de un controlador por retroalimentación de estados estimados a partir de un observador lineal, se diseña un control LQR con acción integral, se diseña un controlador mediante la técnica no lineal conocida como linealización entrada-estado y finalmente se describe el proceso de diseño de un control basado en pasividad mediante la técnica de asignación de interconexión y amortiguamiento.

En el cuarto capítulo se muestran las simulaciones numéricas de las diferentes técnicas de control utilizadas. Las simulaciones se llevan a cabo utilizando la herramienta Simulink del software Matlab.

El quinto capítulo contiene resultados experimentales del desempeño de los controladores lineales diseñados. Las pruebas se realizaron en el sistema de suspensión magnética Amira MA400.

Las conclusiones y el trabajo futuro se presentan en el capítulo seis.

## Capítulo 2

# Análisis del sistema

En este capítulo se presenta un análisis de los principales componentes que conforman el sistema de suspensión magnética. Se presenta el modelado, para lo cual se lleva a cabo una descomposición del sistema en una parte eléctrica y una parte mecánica. Se utilizaron conceptos fundamentales como la segunda ley de Newton para modelar la parte mecánica del sistema, y las leyes de circuitos eléctricos de Kirchoff, para llevar a cabo el modelado de la parte eléctrica. Se muestra la manera en la que se obtienen los parámetros de la planta y finalmente se lleva a cabo la linealización del modelo no lineal alrededor de un punto de interés.

### 2.1. Descripción de la planta

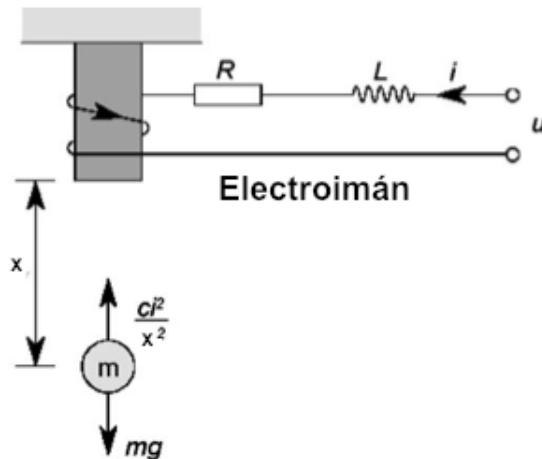


Figura 2.1: Principio básico de suspensión magnética.

El sistema de suspensión magnética consta de un electroimán, un péndulo y un sensor de posición. El principio básico se muestra en la figura 2.1, en donde  $u$  es el voltaje entre las terminales del electroimán,  $i$  es la corriente que circula por el electroimán,  $R$  y  $L$  son la

resistencia y la inductancia respectivamente del electroimán,  $m$  es la masa del péndulo,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $x$  es la distancia que existe entre el electroimán y el péndulo; y  $c$  es una constante relacionada con la fuerza magnética (Lepetic, Skrjanc, Chiacchiarini, y Matko 2003).

## 2.2. Sensor de posición

El sensor utilizado para la medición de la posición es un LVDT (Linear Variable Differential Transformer), el cual es capaz de convertir el movimiento lineal de un objeto en una señal eléctrica.

El LVDT está compuesto por un núcleo de material ferromagnético el cual es libre de desplazarse y se encuentra ensamblado al péndulo, una bobina primaria y dos bobinas secundarias como se muestra en la figura 2.2.

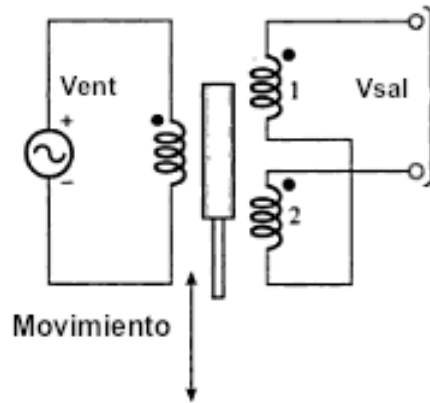


Figura 2.2: Sensor de posición LVDT.

El principio de funcionamiento del sensor se basa en la variación de la inductancia mutua entre la bobina primaria y cada una de las secundarias al desplazarse en su interior el núcleo de material ferromagnético. Al energizar la bobina primaria con un voltaje de corriente alterna y con el núcleo ferromagnético en la posición central, los voltajes inducidos en las bobinas secundarias son iguales y el voltaje de salida es cero. Esto se debe a que el voltaje de las bobinas secundarias tiene la misma magnitud y la salida es la diferencia de los voltajes de ambas (Nyce 2004). Cuando el núcleo ferromagnético se desplaza, los voltajes inducidos en las bobinas secundarias son diferentes, obteniendo como salida la resta de ambos. La señal de salida es procesada por un circuito y convertida a una señal de corriente directa, la cual es proporcional al desplazamiento del núcleo ferromagnético. La relación entre la señal de salida y la posición se muestra a continuación

$$u_1 = kx \quad (2.1)$$

donde  $u_1$  es la salida de voltaje,  $x$  es la posición del péndulo y  $k$  es una constante de

proporcionalidad, cuyo valor se obtuvo de (Amira 1993).

$$k = \frac{u_1}{x} = 4000 \frac{V}{m}$$

El rango de medición del LVDT es de  $\pm 2,5$  mm, brindando una medición de -10 V cuando el núcleo ferromagnético se encuentra a 5 mm del electroimán y de +10 V cuando se encuentra a 0 mm del mismo.

Entre las principales ventajas de utilizar un transductor de este tipo se encuentran las siguientes: resolución infinita, alta linealidad, precisión, repetibilidad en las mediciones, operación sin fricción y resistencia ante perturbaciones eléctricas.

### 2.3. Modelado del subsistema mecánico

Para el modelado de la parte mecánica es necesario considerar las fuerzas que actúan sobre el péndulo, para posteriormente realizar un diagrama de cuerpo libre.

Al desplazarse el péndulo se genera una fuerza de inercia que actúa en sentido contrario al movimiento del objeto. De acuerdo a la segunda ley de Newton, la cantidad de movimiento  $P$  está linealmente relacionada con la velocidad del objeto  $v$ .

$$P = mv \tag{2.2}$$

en donde  $m$  es la masa del objeto.

La fuerza de inercia es la tasa de variación de la cantidad de movimiento con respecto al tiempo.

$$F_i = \frac{dP}{dt} \tag{2.3}$$

Sustituyendo la ecuación (2.3) en (2.2) se obtiene

$$F_i = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \tag{2.4}$$

La fuerza magnética producida por el electroimán sobre el péndulo, es siempre de atracción de acuerdo a (Amira 1993). Esto se debe a que el imán permanente con el que cuenta el péndulo está polarizado de tal manera que es el polo opuesto al campo magnético producido por el electroimán.

Del manual se obtuvo la figura 2.3, en donde se puede apreciar que para diferentes valores de corriente  $i$  que depende de la posición  $x$ , se tienen curvas parabólicas para la fuerza magnética  $F_m$ .

La fuerza producida por el electroimán depende cuadráticamente de la corriente y de la distancia entre el péndulo y el electroimán de acuerdo a la siguiente ecuación.

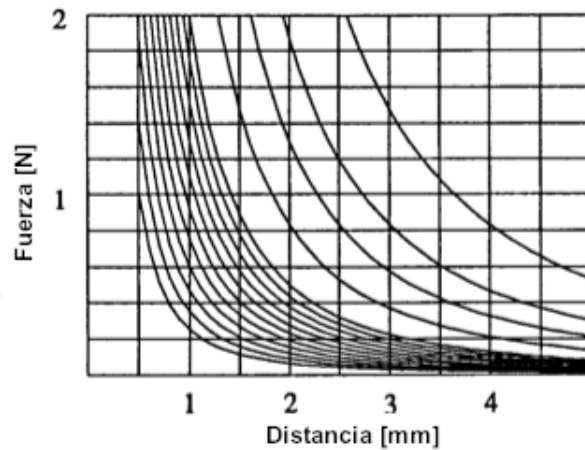


Figura 2.3: Características Fuerza-Distancia.

$$F_m = c \left( \frac{i}{x} \right)^2 \quad (2.5)$$

en donde  $c$  es una constante que depende del material magnético y del medio.

Finalmente se considera la fuerza de atracción que ejerce la tierra sobre el péndulo, esta fuerza se obtiene de la siguiente manera.

$$F_w = -mg \quad (2.6)$$

en donde  $g$  es la aceleración de la gravedad.

En la figura 2.4 se muestra el diagrama de cuerpo libre del péndulo resultante. Se puede observar que se considera desplazamiento positivo al movimiento hacia abajo del péndulo.

Haciendo una sumatoria de las fuerzas que actúan sobre el péndulo e igualando con la ecuación (2.3) se obtiene la siguiente expresión.

$$F_i = F_w + F_m \quad (2.7)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.6) en (2.7) se obtiene

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg + c \left( \frac{i}{x} \right)^2 \quad (2.8)$$

De la ecuación (2.8) se puede apreciar que el modelo es válido únicamente para posiciones del péndulo diferentes de cero.

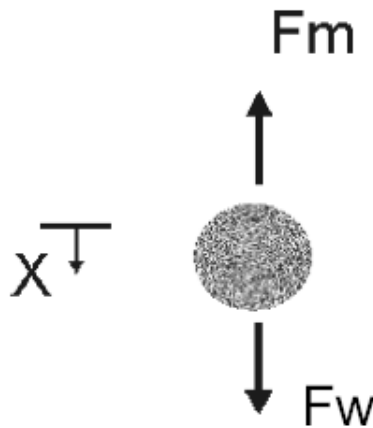


Figura 2.4: Diagrama de cuerpo libre del péndulo.

## 2.4. Modelado del subsistema eléctrico

Para modelar la parte eléctrica, es necesario considerar los voltajes de los elementos que integran el circuito, así como conocer la manera en la que están conectados.

Despreciando el efecto del desplazamiento del péndulo, el actuador se puede modelar como un circuito  $RL$ . El diagrama se muestra en la figura 2.5.

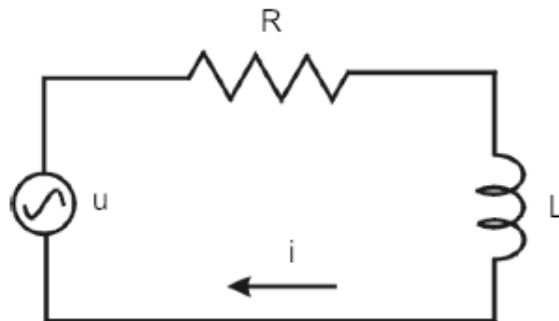


Figura 2.5: Diagrama eléctrico del actuador.

De acuerdo a la Ley de Ohm, el voltaje en la resistencia  $V_R$  está dado por la siguiente ecuación

$$V_R = Ri_R \quad (2.9)$$

en donde  $R$  es la resistencia eléctrica del material e  $i_R$  es la corriente que fluye a través de la resistencia

El flujo magnético  $\lambda$  generado por un inductor se puede obtener mediante la siguiente



expresión

$$\lambda = Li_L \quad (2.10)$$

donde  $L$  es la inductancia e  $i_L$  es la corriente que fluye a través del inductor.

De acuerdo a la Ley de Faraday, el voltaje entre las terminales de un inductor  $V_L$  es la tasa de variación del flujo magnético con respecto al tiempo

$$V_L = \frac{d\lambda}{dt} \quad (2.11)$$

Sustituyendo la ecuación (2.11) en (2.10) se llega a

$$V_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (2.12)$$

Aplicando la ley de voltajes de Kirchoff alrededor de la malla se obtiene la ecuación (2.13).

$$u = V_R + V_L \quad (2.13)$$

en donde  $u$  es el voltaje suministrado al sistema.

Sustituyendo (2.12) y (2.9) en (2.13) se obtiene

$$u = Ri_R + L \frac{di_L}{dt} \quad (2.14)$$

De la figura 2.5 se puede ver que la resistencia y el inductor están conectados en serie, por lo que  $i_R = i_L = i$ . Por lo tanto la ecuación (2.14) queda finalmente

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (2.15)$$

Una vez obtenidas las expresiones, tanto de la parte mecánica como de la parte eléctrica, se tiene el modelo no lineal que representa la dinámica del sistema.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg + c \left( \frac{i}{x} \right)^2 \quad (2.16)$$

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (2.17)$$

## 2.5. Parámetros

Los parámetros de la planta se obtuvieron con la ayuda del manual (Amira 1993), donde, a pesar de no proporcionar todos los datos explícitamente, se presentan gráficas y datos que permiten su cálculo de manera sencilla.

Para el cálculo de la resistencia y la inductancia de la bobina, se utilizó la figura 2.6, la cual representa la respuesta al escalón para una entrada de voltaje unitario a  $95 \text{ mA}$ .

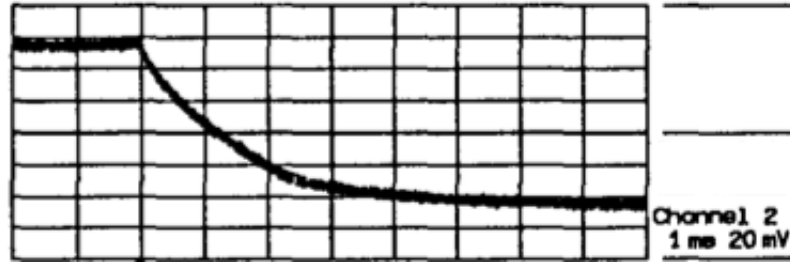


Figura 2.6: Respuesta del actuador a una entrada escalón unitaria.

De la figura se puede apreciar que las divisiones relacionadas con el tiempo, equivalen a  $1 \text{ ms}$ , por lo tanto se puede decir que el actuador tiene una constante de tiempo  $\tau = 1.5 \text{ ms}$  aproximadamente.

De la ecuación diferencial del circuito  $RL$ , se obtiene la función de transferencia considerando como entrada el voltaje aplicado a la bobina y como salida la corriente que circula a través de ella.

$$G(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{L}}{s + \frac{R}{L}} = \frac{\frac{1}{L}}{s + \frac{1}{\tau}} \quad (2.18)$$

Aplicando el teorema del valor final, y tomando en consideración los valores de  $1 \text{ V}$  y  $95 \text{ mA}$ , se puede obtener el valor de la inductancia

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{L}}{\frac{R}{L}} = \frac{1}{\tau} \quad (2.19)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.19) los valores de corriente, voltaje y de la constante de tiempo se puede obtener el valor de la inductancia.

$$L = \frac{\tau u}{i} = \frac{1,5 \times 10^{-3} * 1}{95 \times 10^{-3}} = 0,0157 \text{ H} \quad (2.20)$$

Una vez obtenido el valor de la inductancia, la resistencia de la bobina se obtiene de la siguiente manera.

$$\frac{R}{L} = \frac{1}{\tau} \rightarrow R = \frac{L}{\tau} = \frac{0,0157}{1,5 \times 10^{-3}} = 10,52\Omega \quad (2.21)$$

El valor de la masa del péndulo se proporciona en (Amira 1993)  $m = 0,0844kg$  y se utilizó un valor de aceleración de la gravedad  $g=9.78 \frac{m}{s^2}$ .

El parámetro relacionado con la fuerza magnética  $c$ , se obtiene más adelante ya que depende del punto de equilibrio.

## 2.6. Linealización del sistema no lineal

Sea el modelo de un sistema no lineal representado por la siguiente expresión

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.22)$$

la cual es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de dimensión  $n$ . La ecuación es conocida como la ecuación de estados, donde la variable  $x$  es conocida como el estado y la variable  $u$  como la entrada.

Otra ecuación de gran importancia en los sistemas dinámicos es presentada a continuación

$$y = g(x, u) \quad (2.23)$$

la cual define un vector de salida de dimensión  $q$  y está compuesta por variables de interés en el análisis del sistema, tales como, variables que pueden ser medidas o variables que son requeridas para lograr un desempeño deseado (Khalil 1996). Ambas ecuaciones, en conjunto, son conocidas como el modelo en el espacio de estados.

Para obtener el modelo del sistema de suspensión magnética en el espacio de estados, se seleccionan como variables de estado  $(x_1, x_2, x_3)^T = (x, \dot{x}, i)^T$  la posición del péndulo, la velocidad del péndulo y la corriente que fluye a través de la bobina respectivamente. Se sustituyen dichas variables en (2.16) y (2.17) obteniendo la siguiente representación:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.24)$$

$$\dot{x}_2 = -g + \frac{c}{m} \frac{x_3^2}{x_1^2} \quad (2.25)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{L}u - \frac{R}{L}x_3 \quad (2.26)$$

El comportamiento de un sistema no lineal alrededor de un punto de operación, se puede determinar por medio de una linealización en la vecindad de un punto de interés y analizando la respuesta del sistema lineal resultante (Vidyasagar 1993).

Si se supone que un sistema no lineal se encuentra en operación cerca de un punto  $[x_* u_*, f(x_*, u_*)]$ , pequeños cambios en la entrada se relacionan con pequeños cambios en

la salida alrededor del punto de operación por medio de la pendiente de la curva en dicho punto. Si se tienen pequeños cambios del estado,  $\delta x$ , y de la entrada,  $\delta u$ , los cambios en el sistema,  $\delta f(x, u)$ , se encuentran relacionados como se muestra a continuación:

$$f(x, u) - f(x_*, u_*) \approx m(x - x_*) + n(u - u_*) \quad (2.27)$$

en donde  $m$  y  $n$  son las pendientes de la curva en el punto de operación.

Este análisis se puede formalizar mediante una expansión en serie de Taylor, la cual es utilizada para expresar el valor de una función en términos de la función evaluada en un punto particular, de los cambios alrededor del punto y de las derivadas de la función evaluadas en el mismo punto (Nise 2005). A continuación se presenta la serie de Taylor.

$$f(x, u) = f(x_*, u_*) + \left. \frac{\partial^n f(x, u)}{\partial x^n} \right|_{x_*, u_*} \frac{(x - x_*)^n}{n!} + \left. \frac{\partial^n f}{\partial u^n} \right|_{x_*, u_*} \frac{(u - u_*)^n}{n!}$$

Para pequeños cambios del estado,  $\delta x$ , y de la entrada,  $\delta u$ , con respecto al punto de operación, se pueden despreciar los términos de orden superior de la expansión en serie de Taylor. Obteniendo finalmente la representación lineal del sistema no lineal.

$$f(x, u) = f(x_*, u_*) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{x_*, u_*} \frac{(x - x_*)}{1!} + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{x_*, u_*} \frac{(u - u_*)}{1!} \quad (2.28)$$

Si se establecen las siguientes relaciones

$$\delta f(x, u) = f(x, u) - f(x_*, u_*)$$

$$\delta x = x - x_*$$

$$\delta u = u - u_*$$

y se sustituyen en (2.28) se obtiene la representación final del sistema linealizado.

$$\delta f(x, u) = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{x_*, u_*} \delta x + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{x_*, u_*} \delta u \quad (2.29)$$

### 2.6.1. Puntos de equilibrio

Un concepto importante que se presenta al utilizar la representación en el espacio de estados es el concepto de punto de equilibrio. Se dice que un punto  $(x_0, u_0)$  en el espacio de estados es un punto de equilibrio, si el sistema al iniciar en  $(x_0, u_0)$ , permanece en dicho punto para todo tiempo futuro.

Los puntos de equilibrio de un sistema no lineal se pueden determinar al resolver la siguiente ecuación.

$$f(x_0, u_0) = 0 \quad (2.30)$$

Para encontrar los puntos de equilibrio del sistema de suspensión magnética, se retoma el modelo en el espacio de estados, descrito por las ecuaciones (2.24), (2.25) y (2.26), se igualan a cero y se resuelve el sistema algebraico resultante.

$$0 = x_{20} \quad (2.31)$$

$$0 = -g + \frac{c}{m} \frac{x_{30}^2}{x_{10}^2} \quad (2.32)$$

$$0 = \frac{1}{L} u_0 - \frac{R}{L} x_{30} \quad (2.33)$$

De (2.31) se obtiene el primer punto de equilibrio,  $x_2 = 0$ . Para encontrar los demás puntos de equilibrio se utilizó la figura 2.7 obtenida de (Amira 1993), en la cual se muestra la dependencia que existe entre la posición del péndulo y la corriente en la bobina necesaria para compensar el peso del péndulo.

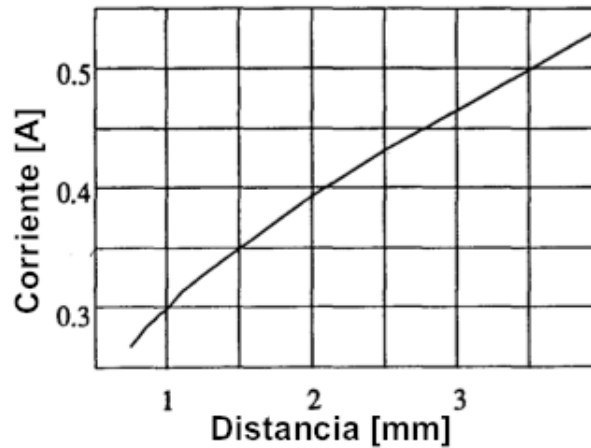


Figura 2.7: Relación entre la corriente en la bobina y la distancia del péndulo.

Se selecciona una posición arbitrariamente de  $2,5\text{mm}$  y se observa en la gráfica que la corriente necesaria que debe circular por la bobina para que el péndulo se encuentre suspendido a dicha altura, debe ser de  $430\text{mA}$  aproximadamente.

Una vez establecidos estos puntos, es posible calcular la constante relacionada con la fuerza magnética  $c$  en el punto de equilibrio, al despejarla de la ecuación (2.32).

$$c = \frac{x_{10}^2 mg}{2x_{30}^2} = \frac{0,0025^2 * 0,0844 * 9,78}{2 * 0,430^2} = 2,7901 \times 10^{-5} \frac{\text{Nm}^2}{\text{A}^2} \quad (2.34)$$

Finalmente se encuentra el valor del voltaje aplicado en las terminales de la bobina en el punto de equilibrio utilizando la ecuación (2.33).

$$u_0 = R x_{30} = 10,52 * 0,430 = 4,5263V \quad (2.35)$$

Una vez obtenido el punto de equilibrio se procede a realizar la linealización del sistema alrededor de ese punto, mediante la linealización por Taylor. A partir del modelo del sistema, se definen las siguientes funciones:

$$f_1 = x_2 \quad (2.36)$$

$$f_2 = -g + \frac{c}{m} \frac{x_3^2}{x_1^2} \quad (2.37)$$

$$f_3 = \frac{1}{L} u - \frac{R}{L} x_3 \quad (2.38)$$

El sistema linealizado se obtiene a partir de la ecuación (2.29)

$$\begin{bmatrix} \delta f_1 \\ \delta f_2 \\ \delta f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \Big|_{x_*, u_*} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{x_*, u_*} \delta u \quad (2.39)$$

De donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 0 & ; & & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= 1 & ; & & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= -\frac{2c}{m} \frac{x_3^2}{x_1^3} & ; & & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= 0 & ; & & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= \frac{2c}{m} \frac{x_3}{x_1^2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} &= 0 & ; & & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} &= 0 & ; & & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} &= -\frac{R}{L} \end{aligned}$$

Se desean considerar los desplazamientos hacia arriba como positivos, por lo tanto, se lleva a cabo un cambio de signo del elemento  $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ .

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 & ; & \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0 & ; & \frac{\partial f_3}{\partial u} = \frac{1}{L}$$

Después de evaluar las derivadas en el punto de equilibrio, se obtiene la representación lineal del sistema no lineal.

$$\begin{bmatrix} \delta f_1 \\ \delta f_2 \\ \delta f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2c}{m} \frac{x_{30}^2}{x_{10}^3} & 0 & \frac{2c}{m} \frac{x_{30}}{x_{10}^2} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \delta u$$

La señal medida del sistema es la posición del péndulo, la cual es un estado del sistema. Por lo tanto se tiene la siguiente ecuación de salida.

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{bmatrix}$$

Si se llevan a cabo los siguientes cambios de variable:

$$\delta f = \dot{x}$$

$$\delta x = x$$

$$\delta u = u$$

ahora el sistema toma la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.40)$$

$$y = Cx \quad (2.41)$$

El siguiente paso es conocer la naturaleza del punto de equilibrio seleccionado. Para esto se utiliza el método propuesto por el matemático ruso Aleksandr Lyapunov, el cual permite obtener información acerca de la estabilidad local del punto de equilibrio de un sistema no lineal, a partir de su aproximación lineal. Se dice que el punto de equilibrio del sistema no lineal original es asintóticamente estable, si y solo si, todos los valores característicos de la matriz  $A$  se encuentran ubicados del lado izquierdo del eje imaginario del plano complejo. Por el contrario, el punto de equilibrio del sistema no lineal original se dice que es inestable, si y solo si, al menos un valor característico de la matriz  $A$  del sistema linealizado se encuentra ubicado del lado derecho del eje imaginario del plano complejo. Finalmente, si el sistema linealizado cuenta con algún polo ubicado sobre el eje imaginario del plano complejo, entonces el método no proporciona información sobre la estabilidad del punto de equilibrio.

El primer paso es encontrar el polinomio característico de la matriz  $A$

$$|sI - A| = 0 \quad (2.42)$$

obteniendo

$$s^3 + \frac{R}{L}s^2 - \frac{2c x_{30}^2}{m x_{10}^3}s - \frac{2Rc x_{30}^2}{Lm x_{10}^3} = 0 \quad (2.43)$$

resolviendo la ecuación (2.43) se obtienen los valores característicos

$$s_1 = -\frac{R}{L}$$

$$s_2 = -\sqrt{\frac{2g}{x_{10}}}$$

$$s_3 = \sqrt{\frac{2g}{x_{10}}}$$

Como se puede observar, existe un polo de la matriz  $A$  ubicado del lado derecho del eje imaginario del plano complejo, por lo tanto, de acuerdo al método indirecto de Lyapunov, se puede concluir que el punto de equilibrio del sistema de suspensión magnética es inestable.

## 2.7. Modelo Hamiltoniano

En (Rodriguez, Siguerdidjane, y Ortega 2000) se presenta una variante del modelo presentado anteriormente, ya que se considera que la inductancia es función de la posición del péndulo como se muestra a continuación

$$L(x) = \frac{c}{d-x} \quad (2.44)$$

en donde  $c$  es la constante relacionada a la fuerza magnética,  $d$  es el espacio de separación máximo entre el electroimán y el péndulo ( $d = 5mm$ ) y  $x$  es la posición del péndulo.

Utilizando las ecuaciones de Newton y las leyes de circuitos de Kirchoff se obtuvo el siguiente modelo

$$m\ddot{x} = -mg + F_m \quad (2.45)$$

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} \quad (2.46)$$

donde la fuerza magnética  $F_m$  se obtiene a partir de

$$F_m = \frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x} i^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{(d-x)^2} i^2 \quad (2.47)$$

Sustituyendo la ecuación (2.47) en (2.45) y la ecuación (2.44) en (2.46); y retomando las expresiones (2.2) y (2.10), la dinámica del sistema se puede expresar en términos del flujo magnético  $\lambda$ , la cantidad de movimiento  $P$  y la posición  $x$ .

$$m\dot{P} = -mg + \frac{1}{2c}\lambda^2 \quad (2.48)$$

$$u = \dot{\lambda} + \frac{R}{c}(d-x)\lambda \quad (2.49)$$

Un modelo Hamiltoniano Controlado por Puerto (PCH), resulta de modelar una red de sistemas de parámetros concentrados que almacenan energía con elementos de almacenamiento independientes. Este tipo de modelos, además de representar las características del balance de energía de los sistemas físicos, proporcionan una clasificación de las variables y las ecuaciones, en aquellas asociadas a propiedades fenomenológicas y aquellas que definen



la estructura de interconexión relacionada con los intercambios de energía (Ortega, van der Schaft, Maschke, y G. 2002).

Para obtener el modelo (PCH), se selecciona el vector de estados  $(x_1, x_2, x_3)^T = (\lambda, x, P)^T$  y se encuentra la función Hamiltoniana  $H(x)$ , la cual describe la energía total almacenada por el sistema.

$$H(x) = \frac{1}{2c}(d - x_2)x_1^2 + \frac{1}{2m}x_3^2 + mgx_2 \quad (2.50)$$

El modelo del Sistema Hamiltoniano Controlado por Puerto (PCHS) se obtiene a partir de:

$$\dot{x} = (J - R)\frac{\partial H(x)}{\partial x} + gu \quad (2.51)$$

donde  $x$  es el estado,  $J$  y  $R$  son las matrices de interconexión y amortiguamiento naturales, respectivamente, y  $u$  es la entrada de control del sistema.

Se obtienen las derivadas parciales de (2.50) respecto a cada una de las variables de estado.

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{1}{c}(d - x_2)x_1 \longrightarrow \frac{\partial H}{\partial x_2} = mg - \frac{x_1^2}{2c} \longrightarrow \frac{\partial H}{\partial x_3} = \frac{1}{m}x_3$$

Los valores de las matrices  $J$ ,  $R$  y  $g$  se presentan a continuación.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g = [1 \quad 0 \quad 0]^T$$

Obteniendo finalmente una nueva representación del sistema en variables de estado:

$$\dot{x}_1 = u - \frac{R}{c}(d - x_2)x_1 \quad (2.52)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}x_3 \quad (2.53)$$

$$\dot{x}_3 = -mg + \frac{1}{2c}x_1^2 \quad (2.54)$$

## Capítulo 3

# Control

Para el control del sistema de suspensión magnética se tiene como variable de entrada el voltaje aplicado en las terminales de la bobina. Como se ha mencionado anteriormente, la variable de salida es la posición del péndulo, la cual es también la variable a controlar.

Se presentan dos técnicas de diseño de controladores lineales por retroalimentación de estados. La primera es conocida como asignación de polos y la segunda se basa en el concepto de optimización.

Por otro lado se diseña un controlador utilizando la técnica no lineal conocida como linealización entrada-estado y finalmente se describe el proceso de diseño de un controlador basado en pasividad encontrado en la literatura.

### 3.1. Controlabilidad y observabilidad

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad fueron introducidos por Kalman y juegan un papel muy importante en el diseño de sistemas de control en el espacio de estados.

Un sistema es controlable en un tiempo  $t$  si es posible cambiar desde un estado inicial cualquiera  $x(0)$  a cualquier otro estado  $x(t)$ , mediante un vector de control en un tiempo finito.

Un sistema es observable en un tiempo  $t$  si es posible determinar el estado  $x(t)$  a partir de la observación de la salida y de la entrada durante un intervalo de tiempo finito (Ogata 1997).

#### 3.1.1. Análisis de controlabilidad

Se dice que un sistema es de estado completamente controlable si el número de vectores columna de la matriz de controlabilidad  $C$ , definida por la ecuación (3.1), linealmente independientes, es igual al orden del sistema.

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (3.1)$$

en donde  $n$  es el orden del sistema.

Se obtiene la matriz de controlabilidad del sistema de suspensión magnética

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2c}{Lm} \frac{x_{30}}{x_{10}^2} \\ 0 & \frac{2c}{Lm} \frac{x_{30}}{x_{10}^2} & -\frac{2Rc}{L^2 m} \frac{x_{30}}{x_{10}^2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L^2} & \frac{R^2}{L^3} \end{bmatrix}$$

Se puede observar que el número de vectores columna linealmente independientes de la matriz de controlabilidad  $C$ , es igual al orden del sistema  $n$ . Por lo tanto, se puede decir que es de estado completamente controlable.

### 3.1.2. Análisis de observabilidad

Se dice que un sistema es completamente observable si el número de vectores renglón de la matriz de observabilidad  $O$ , definida por la ecuación (3.2), linealmente independientes, es igual al orden del sistema.

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Se obtiene la matriz de observabilidad del sistema de suspensión magnética

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2c}{m} \frac{x_{30}^2}{x_{10}^2} & 0 & \frac{2c}{m} \frac{x_{30}}{x_{10}^2} \end{bmatrix}$$

Se puede apreciar que el número de vectores renglón linealmente independientes de la matriz de observabilidad  $O$ , es igual al orden del sistema  $n = 3$ . Por lo tanto se asegura que el sistema es completamente observable.

## 3.2. Diseño del control por asignación de polos

Con el diseño del controlador mediante el método de asignación o ubicación de polos, es posible situar todos los polos del sistema en lazo cerrado en un lugar determinado. Para aplicar este método es necesario comprobar que el sistema es de estado completamente controlable, ya que de otra forma, los polos no pueden ser ubicados arbitrariamente. Otra de las restricciones de la implementación del método de asignación de polos es que el sistema debe contar con sensores que brinden buenas mediciones del estado completo o, en su defecto, con un observador que estime las variables a las que no se tiene acceso.

Se escoge como ley de control con retroalimentación una combinación lineal de los estados, es decir

$$u = -kx = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Esto implica que para un sistema de orden  $n$ -ésimo, se tienen  $n$  constantes de retroalimentación, con las cuales es posible ubicar los polos del sistema en cualquier posición arbitraria. Los grados de libertad ofrecidos por el método de retroalimentación de estados hace que destaque entre otras técnicas de diseño como los del lugar geométrico de las raíces y las técnicas basadas en la respuesta en frecuencia (Franklin, Powell, y Emami-Naeini 2002).

Sustituyendo la ley de control en la planta se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x} = Ax + B(-kx) = (A - Bk)x \quad (3.4)$$

La solución de la ecuación (3.4) está dada por la siguiente expresión:

$$x = e^{(A-Bk)t} x_0 \quad (3.5)$$

en donde  $x_0$  son las condiciones iniciales de la planta.

La estabilidad y las características de la respuesta transitoria del sistema están determinadas por los valores característicos de la matriz  $A - Bk$ , los cuales pueden ser seleccionados arbitrariamente de acuerdo a un desempeño deseado.

### 3.2.1. Estabilidad

Como primer paso se quiere conocer el rango de valores que puede tomar la matriz de ganancias  $k$  para lograr que el sistema tienda al punto de equilibrio cuando el tiempo tienda a infinito. Para esto se emplea el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz, mediante el cual se obtiene el número de polos del sistema en lazo cerrado ubicados en el semiplano derecho del plano complejo, sin necesidad de encontrar las raíces de la ecuación característica.

Para encontrar la ecuación característica es necesario calcular el siguiente determinante:

$$|sI - A + Bk| = 0 \quad (3.6)$$

para el sistema de suspensión magnética queda

$$s^3 + \left( \frac{R}{L} + \frac{k_3}{L} \right) s^2 + \left( \frac{2c}{m} \left( \frac{k_2 x_{30}}{L x_{10}^2} - \frac{x_{30}^2}{x_{10}^3} \right) \right) s + \frac{2c}{m} \left[ \frac{k_1 x_{30}}{L x_{10}^2} - \frac{x_{30}^2}{x_{10}^3} \left( \frac{R}{L} + \frac{k_3}{L} \right) \right] = 0$$

Posteriormente se crea un arreglo con los coeficientes del polinomio como se muestra a continuación.

Cuadro 3.1: Arreglo de Routh.

$s^3$	1	$\frac{2c}{m} \left( \frac{k_2 x_{30}}{L x_{10}^2} - \frac{x_{30}^2}{x_{10}^3} \right)$
$s^2$	$\frac{R}{L} + \frac{k_3}{L}$	$\frac{2c}{m} \left[ \frac{k_1 x_{30}}{L x_{10}^2} - \frac{x_{30}^2}{x_{10}^3} \left( \frac{R}{L} + \frac{k_3}{L} \right) \right]$
$s^1$	$\frac{\frac{2c}{m} \left( \frac{R}{L} + \frac{k_3}{L} \right) \left( \frac{k_2 x_{30}}{L x_{10}^2} - \frac{x_{30}^2}{x_{10}^3} \right) - \frac{2c}{m} \left[ \frac{k_1 x_{30}}{L x_{10}^2} - \frac{x_{30}^2}{x_{10}^3} \left( \frac{R}{L} + \frac{k_3}{L} \right) \right]}{\frac{R}{L} + \frac{k_3}{L}}$	0
$s^0$	$\frac{2c}{m} \left[ \frac{k_1 x_{30}}{L x_{10}^2} - \frac{x_{30}^2}{x_{10}^3} \left( \frac{R}{L} + \frac{k_3}{L} \right) \right]$	

El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz establece que el número de cambios de signo de los coeficientes en la segunda columna del cuadro 3.1, es igual al número de polos ubicados en el semiplano derecho del plano complejo. Tomando esto en consideración, se proponen las siguientes desigualdades que permiten encontrar el rango de valores que puede tomar cada ganancia de la matriz  $k$  para que el sistema sea estable.

$$\frac{R}{L} + \frac{k_3}{L} > 0$$

$$\frac{\frac{2c}{m} \left( \frac{R}{L} + \frac{k_3}{L} \right) \left( \frac{k_2 x_{30}}{L x_{10}^2} - \frac{x_{30}^2}{x_{10}^3} \right) - \frac{2c}{m} \left[ \frac{k_1 x_{30}}{L x_{10}^2} - \frac{x_{30}^2}{x_{10}^3} \left( \frac{R}{L} + \frac{k_3}{L} \right) \right]}{\frac{R}{L} + \frac{k_3}{L}} > 0$$

$$\frac{2c}{m} \left[ \frac{k_1 x_{30}}{L x_{10}^2} - \frac{x_{30}^2}{x_{10}^3} \left( \frac{R}{L} + \frac{k_3}{L} \right) \right] > 0$$

Después de resolver las desigualdades para cada ganancia se obtienen los siguientes valores.

$$k_1 > \frac{x_{30}}{x_{10}} (R + k_3)$$

$$k_2 > \frac{L k_1}{R + k_3}$$

$$k_3 > -R$$

Se puede observar que  $k_1$  depende solamente del valor de  $k_3$ , mientras que  $k_2$  depende tanto de  $k_1$  como de  $k_3$ .

### 3.2.2. Desempeño

Como se ha explicado anteriormente, el método de asignación de polos permite la ubicación de los polos en lazo cerrado en cualquier lugar del plano complejo. Las características de la respuesta del sistema están dadas por la ubicación de los polos dominantes en lazo cerrado como se muestra en el cuadro 3.2.

En el diseño de controladores, la elección de los polos en lazo cerrado generalmente se lleva a cabo de acuerdo a un índice de desempeño deseado, por ejemplo, el tiempo de

Cuadro 3.2: Clasificación de la respuesta del sistema.

Características de los polos	Tipo de respuesta
Reales positivos diferentes	Inestable
Complejos con parte real positiva	Inestable negativamente amortiguada
Complejos puros	No amortiguada
Complejos con parte real negativa	Subamortiguada
Reales negativos diferentes	Sobreamortiguada
Reales negativos iguales	Críticamente amortiguada

asentamiento, tiempo de levantamiento, porcentaje de sobrepaso, tiempo pico, etc.

En el caso de la suspensión magnética, se busca tener una respuesta sobreamortiguada, lo cual implica que los polos deseados deben ser reales negativos y distintos. Una vez conocida la ubicación de los polos, el siguiente paso es proponer un índice de desempeño y con base en él, se lleva a cabo el diseño del controlador.

Se propone un tiempo de asentamiento  $t_s = 0,02s$  y tomando en cuenta las ecuaciones (3.7) y (3.8), se puede obtener el valor del polo dominante.

$$t_s = 5\tau \rightarrow \tau = \frac{0,02}{5} \rightarrow \tau = 0,004 \quad (3.7)$$

$$\tau = \frac{1}{|Polo|} \rightarrow |Polo| = \frac{1}{0,004} \rightarrow |Polo| = 250 \quad (3.8)$$

El sistema de suspensión magnética es de orden 3, lo cual implica que faltan 2 polos por ubicar. Para esto se emplea el concepto de polos dominantes, el cual establece que la respuesta transitoria de un sistema no se ve afectada por polos cuya parte real sea de 2 a 10 veces más grande en comparación con la parte real del polo dominante (Kuo y Golnaraghi 2010). Se sitúan los polos 2 veces más alejados en comparación con el polo dominante, es decir:

$$P_{dom} = (s + 250)(s + 500)(s + 501)$$

Después de igualar el polinomio deseado a la ecuación característica del sistema, se obtiene la siguiente matriz de ganancias:

$$k = [24992,79 \quad 175,5308 \quad 9,1144]$$

El agregar polos tan alejados del eje imaginario del plano complejo puede resultar en demandas de entrada de control extremadamente altas. En (Amira 1993) se establece que la señal de control debe estar dentro del rango de  $\pm 10V$ , por lo que se recurre a la simulación del sistema para elegir la ubicación de los polos que permita cumplir con dichos valores.

La figura 3.1 presenta una comparación tanto de la respuesta del sistema, como de la entrada de control demandada, entre la ubicación de los polos seleccionados y la ubicación

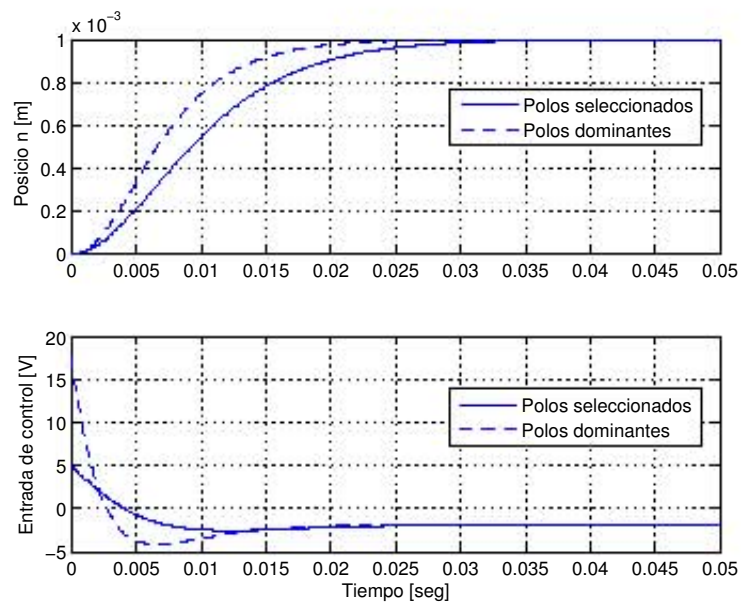


Figura 3.1: Polos dominantes vs. Polos seleccionados.

resultante del criterio de polos dominantes.

$$P_d = (s + 250)(s + 251)(s + 260)$$

Obteniendo finalmente la matriz de ganancias del controlador  $k$ .

$$k = [7686,014 \quad 69,3165 \quad 1,4214]$$

El diagrama de bloques del sistema de control propuesto se presenta en la figura 3.2.

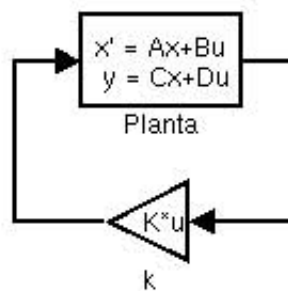


Figura 3.2: Diagrama de bloques del esquema de control

### 3.2.3. Regulación

Hasta el momento se ha considerado como ley de control  $u = -kx$ , logrando con ésta la estabilización del sistema en el punto de equilibrio. Sin embargo, si se desea diseñar un controlador capaz de cumplir con el objetivo de regulación, la entrada de referencia debe ser introducida en la ley de control. La manera de hacerlo se presenta a continuación:

$$u = -kx + w \quad (3.9)$$

Con esta ley de control, el sistema presenta un error en estado estable diferente de cero, por lo cual es necesario calcular la constante  $k_0$  que haga que la salida en estado permanente sea igual a la referencia. Para la obtención de dicha constante (Franklin, Powell, y Emami-Naeini 2002) propone un análisis del error en estado permanente de la función de transferencia del sistema en lazo cerrado.

Sea la función de transferencia

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = C(sI - A + Bk)^{-1}B \quad (3.10)$$

Tomando en cuenta que cuando el tiempo tiende a infinito  $s \rightarrow 0$ , la ecuación (3.10) se convierte en

$$T(0) = \frac{Y(0)}{R(0)} = C(-A + Bk)^{-1}B \quad (3.11)$$

Al sustituir la matriz de ganancias  $k$  obtenida anteriormente, y las matrices del sistema linealizado en la ecuación (3.11) se obtiene

$$Y(0) = \frac{1}{5,457 \times 10^3} R(0)$$

En donde se puede apreciar que la salida en estado estable  $Y(0)$ , es diferente a la entrada en estado estable  $R(0)$ . Es por esto que se diseña el precompensador  $k_0$  que haga que se cumpla la siguiente expresión.

$$k_0 \frac{Y(0)}{R(0)} = 1 \quad (3.12)$$

de donde se obtiene  $k_0 = 5,457 \times 10^3$ .

De este desarrollo se puede desprender que la ley de control que cumple, tanto con la estabilización del sistema como con la regulación es la siguiente.

$$u = -kx + k_0w \quad (3.13)$$



donde  $w$  es la nueva señal de referencia.

En la figura 3.3 se muestra el diagrama de bloques del control resultante después de la adición del precompensador.

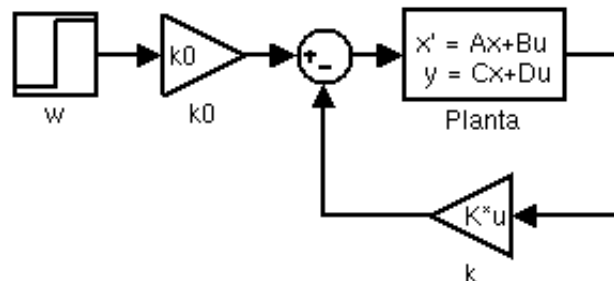


Figura 3.3: Esquema de control con precompensador.

### 3.2.4. Seguimiento

La ecuación de estado que describe la dinámica de la planta y que es utilizada en el proceso de diseño, es conocida como ecuación nominal. Sin embargo, se pueden presentar variaciones en los parámetros de la planta debido al paso del tiempo, condiciones ambientales, etc. En este caso, el precompensador  $k_0$  calculado para la planta nominal, es probable que no brinde un error en estado estable nulo para cualquier entrada escalón, por lo tanto se dice que el esquema de control no es robusto (Chen 1999).

Se busca diseñar un sistema en el cual la salida siga de manera asintótica a cualquier entrada de referencia escalón, aun y cuando existan perturbaciones y cambios en los parámetros del sistema. Para cumplir con esto, se agrega un integrador a la retroalimentación del estado y se introduce una realimentación unitaria como se puede ver en la figura 3.4.

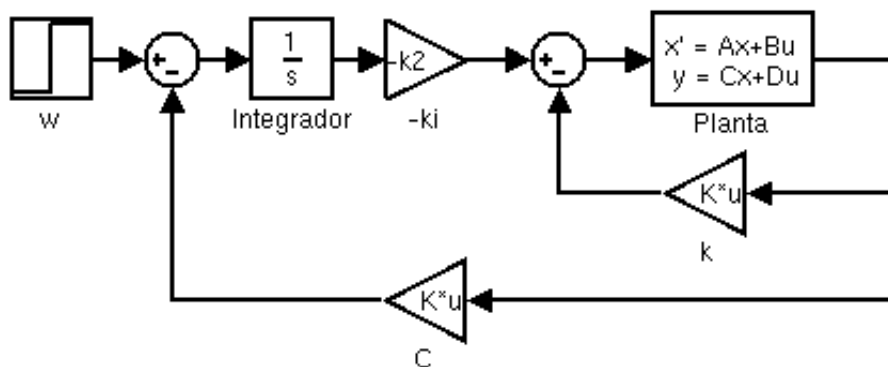


Figura 3.4: Esquema de control con acción integral.

La adición del integrador provoca un aumento en el orden del sistema, agregando una variable de estado  $x_i$ , la cual se define de la siguiente manera

$$\dot{x}_i = w - Cx \quad (3.14)$$

Escribiendo las ecuaciones del sistema aumentado se llega a

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.15)$$

$$\dot{x}_i = w - Cx \quad (3.16)$$

$$y = Cx \quad (3.17)$$

Escribiendo las ecuaciones (3.15), (3.16) y (3.17) en forma de matrices y vectores

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} w \quad (3.18)$$

$$y = [C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

La entrada de control  $u$  está dada por

$$u = -kx + k_i x_i = -[k \ -k_i] \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Si se sustituye la ecuación (3.20) en (3.18) se obtiene finalmente

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - Bk & Bk_i \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} w \quad (3.21)$$

$$y = [C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Se puede apreciar que el orden del sistema aumentó, sin embargo el diseño de las ganancias  $k$  y  $k_i$  se lleva a cabo mediante la ecuación característica asociada a (3.21). Nótese que es necesario asignar un polo adicional, el cual es ubicado cerca de los polos seleccionados anteriormente para no demandar entradas de control muy elevadas.

$$P_d = (s + 250)(s + 251)(s + 260)(s + 261)$$

En la figura 3.5 se muestra la respuesta del sistema una vez que se ha agregado la acción integral. Se puede apreciar que a pesar de que el polo fue ubicado cercano a los seleccionados en el diseño del controlador, la entrada de control demandada por el sistema aumenta hasta un valor de 25V aproximadamente. La entrada supera los límites establecidos

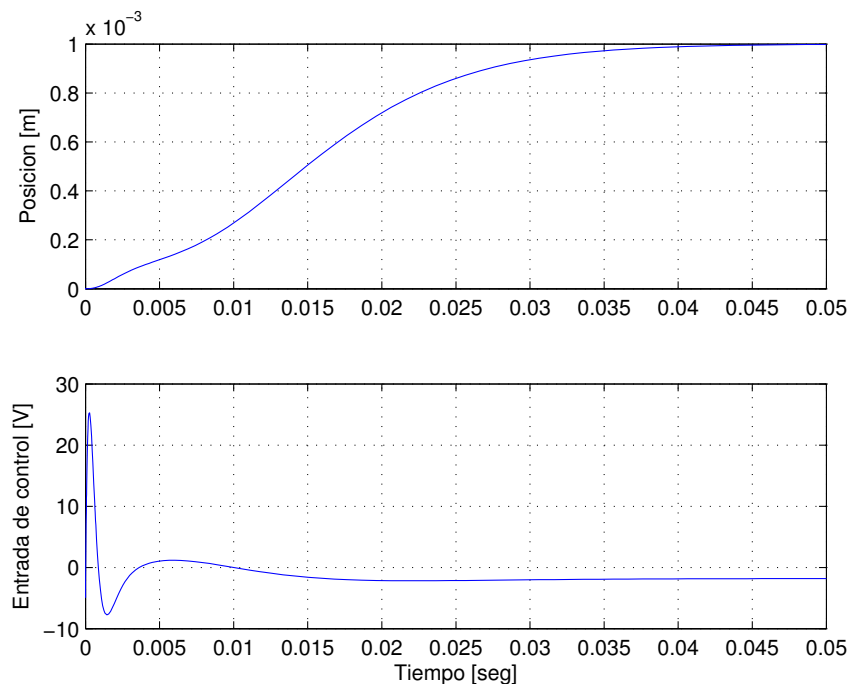


Figura 3.5: Respuesta del sistema de control con acción integral.

en (Amira 1993) de  $\pm 10V$ , por lo tanto no es posible la implementación física del control por retroalimentación de estados con acción integral, para esta asignación de polos.

### 3.3. Diseño del observador lineal

El diseño del controlador por retroalimentación de estados asume que se tiene acceso al estado completo, sin embargo, como se ha mencionado anteriormente, la única medición disponible de los estados del sistema es la posición del péndulo. Esto genera la necesidad de diseñar un observador de estados, el cual proporciona una estimación de las variables de estado basándose en las variables a las que se tiene acceso, como son la variable de salida y la variable de control.

Para el diseño del observador es necesario retomar la representación en variables de estado de la planta

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.23)$$

$$y = Cx \quad (3.24)$$

Se propone un observador tipo Luenberger, el cual posee una dinámica similar a la de la planta

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + L(y - \tilde{y}) \quad (3.25)$$

$$\tilde{y} = C\tilde{x} \quad (3.26)$$

donde  $\tilde{y}$  es la salida estimada y  $\tilde{x}$  es el estado estimado.

Al restar la ecuación (3.25) a (3.23), se obtiene lo siguiente

$$(\dot{x} - \dot{\tilde{x}}) = A(x - \tilde{x}) - L(Cx - C\tilde{x}) \quad (3.27)$$

Si se define el error de estimación de la siguiente manera

$$e = x - \tilde{x} \quad (3.28)$$

y se sustituye en la ecuación (3.27) se llega a

$$\dot{e} = (A - LC)e \quad (3.29)$$

La solución de la ecuación diferencial (3.29) está dada por

$$e = e^{(A-LC)t} e_0 \quad (3.30)$$

en donde  $e_0$  es el error inicial entre el estado real y el estado estimado.

Se puede apreciar que el comportamiento dinámico del error de estimación está determinado por los valores característicos de la matriz  $A - LC$ . Para asegurar que el error de estimación tienda a cero, es necesario que las raíces de la ecuación característica del error tengan parte real negativa. Para encontrar la ecuación característica es necesario calcular el siguiente determinante:

$$|sI - A + LC| = 0 \quad (3.31)$$

Para el sistema de suspensión magnética queda

$$s^3 + \left(\frac{R}{L} + L_1\right) s^2 + \left(L_2 + \frac{R}{L} L_1 - \frac{2c x_{30}^2}{m x_{10}^3}\right) s + \frac{R}{L} L_2 + \frac{2c x_{30}}{m x_{10}^2} \left(L_3 - \frac{R x_{30}}{L x_{10}}\right) = 0$$

De manera similar al diseño del controlador, se asignan polos de acuerdo al comportamiento deseado del error de estimación. En la literatura (Ogata 1997) sugiere que los polos del observador sean de dos a cinco veces más rápidos que los polos del controlador, por otro lado, (Nise 2005) sugiere que los polos sean 10 veces más rápidos en comparación con los polos del controlador. Esto implica que el error de estimación tendrá una respuesta de dos

a diez veces más rápida en comparación con la respuesta del vector de estados  $x$ . Los polos del controlador, al ser más lentos, serán los que dominen la respuesta del sistema.

En el caso de la suspensión magnética, se ubicaron 10 veces más alejados del eje imaginario del plano complejo en comparación con los polos del controlador, ya que, al ser un sistema que evoluciona muy rápido, se requiere de una rápida estimación de los estados para conseguir controlarlo de la manera adecuada.

$$P_d = (s + 2500)(s + 2510)(s + 2600)$$

Después de igualar el polinomio deseado a la ecuación característica del sistema, se obtiene finalmente la matriz de ganancias del observador  $L$ .

$$L = \begin{bmatrix} 6859,53 \\ 14308943,574 \\ 136839293,389 \end{bmatrix}$$

Como se puede ver, el diseño del controlador y del observador se realizaron de manera separada para finalmente combinarlos y formar un sistema de control mediante la realimentación del estado observado. En (Ogata 1997) se demuestra que el diseño mediante realimentación de estados es independiente del diseño del observador.

En la figura 3.6 se presenta el diagrama de bloques del control, una vez que se ha integrado el observador.

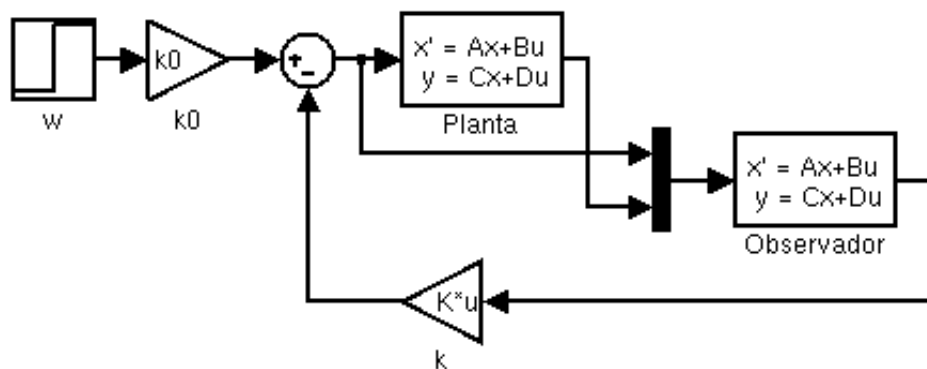


Figura 3.6: Esquema de control con precompensador y observador.

### 3.4. Diseño del control LQR con acción integral

Se propone también el diseño de un controlador utilizando la teoría del control óptimo, la cual ayuda a determinar la señal de control que permite que un proceso satisfaga las restricciones físicas del sistema, mientras se minimiza o maximiza un parámetro determinado (Kirk 2004).

Para llevar a cabo un controlador óptimo se requiere principalmente:

1. Modelo matemático del sistema a controlar.

2. Establecimiento de restricciones físicas del sistema.
3. Especificación de un criterio de desempeño.

En la sección anterior se encontró el modelo lineal del sistema de suspensión magnética, por lo que el siguiente paso es definir las restricciones tanto de las variables de estado, como de la entrada de control.

Para el sistema de suspensión magnética, se tienen las siguientes restricciones físicas.

$$-2,5mm \leq x_1(t) \leq 2,5mm$$

$$-1A \leq x_3(t) \leq 1A$$

$$-10V \leq u(t) \leq 10V$$

Una vez que se encontraron las restricciones del sistema, se establecen las siguientes definiciones:

- Sea el conjunto de trayectorias de control admisibles  $U$ . Se dice que una trayectoria de control  $u \in U$  es admisible, si satisface las restricciones del control en el intervalo de tiempo  $[t_0, t_f]$ .
- Sea el conjunto de trayectorias del estado  $X$ . Se dice que una trayectoria del estado  $x \in X$  es admisible, si satisface las restricciones del estado en un intervalo de tiempo  $[t_0, t_f]$ .

El concepto de admisibilidad es de suma importancia en el control óptimo, ya que reduce las trayectorias a considerar en el proceso de selección, de acuerdo a un criterio de desempeño. Para seleccionar el criterio de desempeño, se debe definir una expresión matemática, la cual al ser minimizada indique que el sistema se comporta de la manera deseada.

Si se desea llevar el vector de estados de una condición inicial  $x(t_0) = x_0$  a una cierta condición final  $x(t_f) = x_f$  con la menor demanda de entrada de control posible, se puede seleccionar como medida de desempeño la siguiente expresión

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^T(t) R u(t) dt \quad (3.32)$$

en donde la matriz  $R$  es una matriz de pesos de  $m \times m$ , la cual es real, simétrica y positiva definida, es decir,  $R = R^T > 0$ .

Si se desea mantener el estado  $x(t)$  cercano a un estado deseado  $x_d(t)$  dentro del intervalo de tiempo  $[t_0, t_f]$ , se puede seleccionar la expresión (3.33) como medida de desempeño.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x(t) - x_d(t)]^T Q [x(t) - x_d(t)] dt \quad (3.33)$$

en donde la matriz  $Q$  es una matriz de  $n \times n$ , simétrica y positiva semidefinida, es decir,  $Q = Q^T \geq 0$ .

La matriz  $Q$  es también una matriz de pesos, cuyos elementos se seleccionan de acuerdo a la importancia de cada uno de los elementos del vector de estados.

Si se desea contar con entradas de control restringidas, así como con errores entre  $x$  y  $x_d$  pequeños, se pueden combinar las ecuaciones (3.32) y (3.33) para obtener finalmente la función de costo:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} ([x(t) - x_d(t)]^T Q [x(t) - x_d(t)] + u^T(t) R u(t)) dt \quad (3.34)$$

Una vez seleccionada la función de costo, la siguiente tarea es determinar la entrada de control óptima  $u^*(t)$  que minimice dicha función. La entrada de control es una función lineal del estado, por lo que

$$u^*(t) = -kx(t) = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

esto implica que para un sistema de orden  $n$  se tienen  $n$  constantes de retroalimentación.

Para encontrar  $u^*(t)$  que haga que el sistema  $\dot{x} = Ax + Bu$  siga una trayectoria admisible  $x^*(t)$ , es necesario definir la ecuación de Riccati descrita por:

$$-\dot{P} = PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q \quad (3.36)$$

Si la matriz  $P$  es constante, la ecuación (3.36) se convierte en

$$0 = PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q \quad (3.37)$$

Las matrices  $A, B$  se obtienen del modelo linealizado del sistema y las matrices  $Q, R$  son propuestas de acuerdo a lo establecido anteriormente. Por lo tanto es fácil obtener la matriz  $P$ , la cual es una matriz de  $n \times n$ , simétrica y positiva definida, es decir,  $P = P^T > 0$ .

Ya que se ha obtenido  $P$ , es posible obtener la entrada de control óptima  $u^*(t)$  mediante la siguiente ecuación

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P x(t) \quad (3.38)$$

Si se igualan las ecuaciones (3.35) y (3.38) se obtiene la matriz de ganancias  $k$ .

$$k = R^{-1}B^T P \quad (3.39)$$

Para el caso del sistema de suspensión magnética, se propone un esquema como el descrito en la sección 3.2.4. Debido a la adición de la acción integral al sistema, la matriz de pesos  $Q$  debe ser una matriz de  $4 \times 4$  como se muestra a continuación:

$$Q = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

La matriz  $Q$  debe cumplir con  $Q = Q^T \geq 0$ . De la ecuación (3.40) se puede apreciar que  $Q$  es simétrica. Para asegurar que  $Q$  sea una matriz semidefinida positiva, basta con asignar valores positivos o nulos a las constantes  $\mu$ ,  $\eta$ ,  $\sigma$  y  $\gamma$ .

Se propone la matriz de pesos  $R$ , la cual es un escalar debido a que el sistema tan solo cuenta con una entrada.

$$R = \xi \quad (3.41)$$

La matriz  $R$  debe cumplir con  $R = R^T > 0$ . De la ecuación (3.41) es fácil observar que  $R$  es simétrica. Para que la matriz sea positiva definida, es necesario asignar valores de  $\xi$  mayores a cero.

Se define la matriz  $P$  como una matriz simétrica positiva definida, es decir,  $P = P^T > 0$ .

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} & P_{34} \\ P_{14} & P_{24} & P_{34} & P_{44} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Sustituyendo las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $P$  en la ecuación (3.37), se obtiene un sistema de ecuaciones simultáneas, el cual debe ser resuelto para encontrar los valores de la matriz  $P$ . Una vez obtenida, se sustituye en la ecuación (3.39), obteniendo la matriz de realimentación óptima  $k$ .

Se propone la siguiente matriz de pesos relacionada al vector de estados aumentado

$$Q = \begin{bmatrix} 100000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20000000000 \end{bmatrix}$$

de donde se puede apreciar que las desviaciones en la posición y la velocidad son igualmente penalizadas. Las desviaciones en la corriente no se consideran de gran importancia, sin



embargo, las desviaciones en el error son altamente penalizadas.

La matriz de peso relacionada a la entrada se propone

$$R = 1000$$

El software Matlab resuelve la ecuación de Riccati obteniendo la matriz  $P$ , y automáticamente calcula la matriz de realimentación óptima  $k$ .

$$k = [6583,4 \quad 119,06 \quad 6,2330 \quad -44721,35]$$

La implementación del control LQR requiere del estado completo, por lo que se utilizó el observador lineal diseñado en la sección 3.3.

### 3.5. Linealización por retroalimentación

La linealización por retroalimentación o linealización entrada-estado, es una manera de transformar algebraicamente la dinámica de un modelo no lineal, en una completamente o parcialmente lineal, para posteriormente aplicar técnicas de control lineales. El propósito de la linealización entrada-estado es cancelar las no linealidades e imponer un desempeño deseado (Sira-Ramírez, Márquez, Rivas-Echeverría, y Llanes-Santiago 2005). Para diseñar una ley de control linealizante, es necesario que el sistema esté representado en la forma canónica controlable, es decir, debe cumplir con lo siguiente:

- El sistema debe presentar la estructura de una cadena de integración pura sin intervenciones de la variable de control.
- Las no linealidades deben aparecer en la última ecuación diferencial, además de la variable de control.

Un sistema no lineal de la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

puede no estar representado en la forma canónica controlable, sin embargo, puede ser transformado en uno, si existe una función escalar diferenciable  $h(x)$ , tal que cumpla con las siguientes condiciones:

1. Existencia de la transformación inversa:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x)}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial h^{n-1}(x)}{\partial x} \end{bmatrix} = n \quad (3.43)$$

2. Las  $(n - 1)$  derivadas de la función  $h(x)$  no dependen del control:

$$\frac{\partial h(x)}{\partial u} = \frac{\partial \dot{h}(x)}{\partial u} = \dots = \frac{\partial h^{n-1}(x)}{\partial u} = 0 \quad (3.44)$$

3. La derivada  $n$ -ésima depende explícitamente del control:

$$\frac{\partial h^{(n)}(x, u)}{\partial u} \neq 0 \quad (3.45)$$

Retomando el modelo de la planta en variables de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g + \frac{c}{m} \frac{x_3^2}{x_1^2} \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R}{L} x_3 + \frac{1}{L} u \end{aligned}$$

se puede observar que no está representado en la forma canónica controlable, por lo tanto se propone la función  $h(x) = x_1$ . La transformación de coordenadas sería la siguiente:

$$z_1 = h(x) = x_1 \quad (3.46)$$

$$z_2 = \dot{h}(x) = x_2 \quad (3.47)$$

$$z_3 = \ddot{h}(x) = -g + \frac{c}{m} \frac{x_3^2}{x_1^2} \quad (3.48)$$

El primer paso es comprobar que se cumpla la condición (3.43)

$$\frac{\partial(z_1, z_2, z_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2c}{m} \frac{x_3^2}{x_1^3} & 0 & \frac{2c}{m} \frac{x_3}{x_1^2} \end{bmatrix}$$

el determinante  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2c}{m} \frac{x_3}{x_1^2}$ , por lo tanto, la transformación es invertible en todo el espacio de estados, excepto para cuando  $x_3 = 0$ .

De las ecuaciones (3.46), (3.47) y (3.48) se puede ver que las  $(n - 1)$  derivadas de  $h(x)$  no dependen de la entrada de control, cumpliendo la condición establecida en (3.44).

La tercera derivada de  $h(x)$  está dada por:

$$h^{(3)}(x, u) = \frac{\partial h^3(x, u)}{\partial x^3} = \frac{2c}{m} \left( -\frac{R}{L} \frac{x_3^2}{x_1^2} - \frac{x_2 x_3^2}{x_1^3} + \frac{1}{L} \frac{x_3}{x_1^2} u \right)$$

de donde se puede obtener

$$\frac{\partial h^3(x, u)}{\partial u} = \frac{2c}{Lm} \frac{x_3}{x_1^2}$$

se puede ver que la condición (3.45) se cumple, si y solo si  $x_3 \neq 0$ .

La transformación inversa  $x = h^{-1}(z)$  es válida localmente y se puede obtener a partir de la expresiones (3.46), (3.47) y (3.48) como se muestra a continuación:

$$x_1 = z_1 \quad (3.49)$$

$$x_2 = z_2 \quad (3.50)$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{m}{c}(z_3 + g)z_1^2} \quad (3.51)$$

Las ecuaciones diferenciales, que describen localmente el sistema de suspensión magnética, transformado a nuevas coordenadas, se presentan a continuación:

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (3.52)$$

$$\dot{z}_2 = z_3 \quad (3.53)$$

$$\dot{z}_3 = -2(z_3 + g) \left[ \frac{R}{L} + \frac{z_2}{z_1} \right] + \frac{2c\sqrt{\frac{m}{c}(z_3 + g)}}{mLz_1} u \quad (3.54)$$

el cual se encuentra en la forma canónica controlable.

Si definimos la variable auxiliar  $v$  de la siguiente manera:

$$v = -2(z_3 + g) \left[ \frac{R}{L} + \frac{z_2}{z_1} \right] + \frac{2c\sqrt{\frac{m}{c}(z_3 + g)}}{mLz_1} u \quad (3.55)$$

el sistema representado por (3.52), (3.53) y (3.54) se convierte en:

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (3.56)$$

$$\dot{z}_2 = z_3 \quad (3.57)$$

$$\dot{z}_3 = v \quad (3.58)$$

el cual es un sistema lineal, por lo que es posible aplicar técnicas de control lineal como la asignación de polos.

Si se propone el siguiente polinomio deseado

$$P_d = (s + a_1)(s + a_2)(s + a_3)$$

la ley de control  $v$  para el sistema, es una realimentación lineal de las variables de estado.

$$v = -(a_1 a_2 a_3)z_1 - (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_1 a_3)z_2 - (a_1 + a_2 + a_3)z_3 \quad (3.59)$$

Sustituyendo (3.59) en (3.55) y despejando la ley de control  $u$  se obtiene

$$u = \left[ -k_1(z_1 - z_{1\delta}) - k_2 z_2 - k_3 z_3 + 2(z_3 + g) \left( \frac{R}{L} + \frac{z_2}{z_1} \right) \right] \frac{mLz_1}{2c\sqrt{\frac{m}{c}(z_3 + g)}} \quad (3.60)$$

donde  $z_{1\delta}$  es la posición de equilibrio en el nuevo sistema de coordenadas,  $k_1 = a_1 a_2 a_3$ ,  $k_2 = (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_1 a_3)$  y  $k_3 = (a_1 + a_2 + a_3)$ .

Sustituyendo las ecuaciones (3.46), (3.47) y (3.48) en (3.60) se obtiene la ley de control no lineal para el sistema original.

$$u = \left[ -k_1(x_1 - x_{1\delta}) - k_2 x_2 + k_3 g + \frac{c}{m} \frac{x_3^2}{x_1^2} \left( \frac{2R}{L} + \frac{2x_2}{x_1} - k_3 \right) \right] \frac{mLx_1^2}{2cx_3} \quad (3.61)$$

Se utiliza el observador lineal diseñado en la sección 3.3, para la estimación de las variables no medibles. En la figura 3.7 se muestra el diagrama de bloques del sistema.

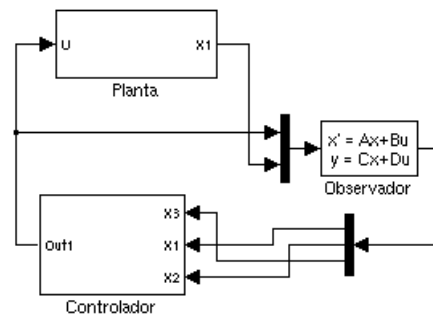


Figura 3.7: Diagrama de bloques del sistema.

### 3.6. Control basado en pasividad

El concepto de un sistema pasivo se relaciona con el intercambio de energía entre el sistema y el ambiente. Se dice que un sistema es pasivo, si la energía almacenada es menor o igual a la energía suministrada.

El Control Basado en Pasividad (PBC), define una metodología cuyo objetivo es brindar una estructura pasiva al sistema en lazo cerrado (Ortega, Loría, Nicklasson, y Sira-Ramírez 1998). El diseño de controladores basados en pasividad consta de las siguientes etapas principales:

- Moldeo de energía: Se modifica la energía potencial del sistema, de tal manera que la función de energía modificada tenga un mínimo en un punto de equilibrio deseado.
- Inyección de amortiguamiento: Se modifica la función de disipación para asegurar estabilidad asintótica.

Esta técnica ha sido utilizada de manera satisfactoria en sistemas mecánicos simples, los cuales son estabilizados mediante el moldeo únicamente de la energía potencial. Existe una nueva metodología del PBC, conocida como asignación de interconexión y amortiguamiento o IDA-PBC, la cual se puede extender a una clase de sistemas más amplia como los Sistemas Hamiltonianos Controlados por Puerto (PCHS).

La principal diferencia entre estas dos metodologías, es que en el PBC se selecciona primero una función de almacenamiento y posteriormente se diseña el controlador que logra que la función de almacenamiento sea no creciente. Por el otro lado, en el IDA-PBC la función de energía en lazo cerrado se obtiene como resultado de la selección de subsistemas de interconexión y amortiguamiento deseados (Ortega, van der Schaft, Maschke, y G. 2002).

En (Rodríguez, Siguerdidjane, y Ortega 2000) se presenta el diseño de un controlador utilizando la metodología IDA-PBC, utilizando el modelo PCH presentado en la sección 2.7.

$$\dot{x}_1 = u - \frac{R}{c}(d - x_2)x_1 \quad (3.62)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}x_3 \quad (3.63)$$

$$\dot{x}_3 = -mg + \frac{1}{2c}x_1^2 \quad (3.64)$$

Dada una posición deseada  $x_{2*}$ , se busca que el sistema se estabilice asintóticamente en el punto de equilibrio  $x_* = [\sqrt{2cmg}, x_{2*}, 0]$ .

Como primer paso se definen las matrices de interconexión y amortiguamiento deseadas, de la siguiente manera:

$$J_d(x) = J(x) + J_a(x) = -J_d^T(x) \quad (3.65)$$

$$R_d(x) = R(x) + R_a(x) = R_d^T(x) \geq 0 \quad (3.66)$$

Sustituyendo la matriz de interconexión natural del sistema  $J(x)$  y la matriz de interconexión asignada  $J_a(x)$  en (3.65) se obtiene:

$$J_d(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

la constante  $\alpha$  de la matriz  $J_a(x)$ , se propone para lograr un acoplamiento entre el flujo magnético  $x_1$  y la cantidad de movimiento  $x_3$ .

Por otro lado, el amortiguamiento asignado es nulo, esto quiere decir que:

$$R_d(x) = R(x) = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una vez hecho esto, se obtiene la ecuación diferencial parcial (3.67). La cual está parametrizada por las matrices seleccionadas y cuya familia de soluciones caracterizan todas las funciones de energía que pueden ser asignadas.

$$[J_d(x) - R_d(x)]K(x) = -[J_a(x) - R_a(x)]\frac{\partial H(x)}{\partial x} + g(x)\beta(x) \quad (3.67)$$

donde

$$K(x) = \frac{\partial H_a(x)}{\partial x}$$

Finalmente se selecciona la función de energía y la ley de control  $\beta(x)$  que mantengan la estructura PCH deseada:

$$\dot{x} = [J_d(x) - R_d(x)] \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} \quad (3.68)$$

en donde  $H_d(x) = H(x) + H_a(x)$  es la función de energía en lazo cerrado.

La ley de control que logra estabilizar asintóticamente en el punto de equilibrio  $x_*$  es la siguiente:

$$u = \frac{R}{c}(d - x_2)x_1 - K_p \left( \frac{1}{\alpha} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \right) - \frac{\alpha}{m} x_3 - \frac{R}{\alpha} \left( \frac{1}{2c} x_1^2 - mg \right) \quad (3.69)$$

para toda  $\alpha$  y  $K_p > 0$ ; y con  $\tilde{x}_i = x_i - x_{i*}$ .

Se puede apreciar que la ley de control  $u$  depende de los estados, por lo que los autores proponen la utilización de un observador lineal para la estimación de los mismos.

### 3.7. Implementación

La implementación de los controladores se llevó a cabo en el sistema de suspensión magnética MA400, fabricado por la compañía alemana Amira. En este sistema se tiene acceso a la posición del péndulo, enviada por el sensor, y por otro lado, permite la introducción de señales de control externas, las cuales pasan por una etapa de amplificación.

Si se desea utilizar una computadora para implementar un sistema de control, como es nuestro caso, es necesario contar con una tarjeta de adquisición de datos (DAQ) que permita realizar mediciones de variables físicas y, por otro lado, enviar señales de salida. Las DAQ's hacen una digitalización de la señal medida, para que la computadora pueda llevar a cabo el procesamiento de la información, y posteriormente realizan una conversión de la señal digital generada por la computadora a una señal analógica. En este caso, se utilizó un tiempo de muestreo de 0,1 ms.

Se utilizó la tarjeta de adquisición de datos Humusoft MF624, la cual es compatible con Simulink, la herramienta de modelado de sistemas dinámicos con que cuenta el software Matlab. Entre las características de la DAQ utilizada, destacan las siguientes:

- 8 convertidores A/D de 14 bits
- 8 convertidores D/A de 14 bits
- Entradas analógicas de  $\pm 10V$
- Salidas analógicas de  $\pm 10V$

- Tiempo de conversión de A/D de hasta  $1.6 \mu s$
- Compatibilidad con la herramienta Real Time Workshop de Simulink

Real Time Workshop (RTW), es una herramienta capaz de generar código fuente a partir de modelos creados en Simulink y automáticamente construir programas que pueden ser utilizados en distintas aplicaciones, tal y como el control en tiempo real, procesamiento de señales en tiempo real, entre otras (The Mathworks 1999).

El desarrollo del algoritmo de control en tiempo real consiste principalmente en:

1. Diseño y simulación del modelo en Simulink.
2. Generación del código fuente en lenguaje C a partir de RTW.
3. Compilación, enlace y descarga del programa ejecutable al Target.
4. Conexión con el Target utilizando Simulink en modo externo.
5. Iteración para encontrar los parámetros adecuados.
6. Implementación del modelo final.

La figura 3.8 muestra de manera más clara, el procedimiento seguido para la implementación del controlador en tiempo real.

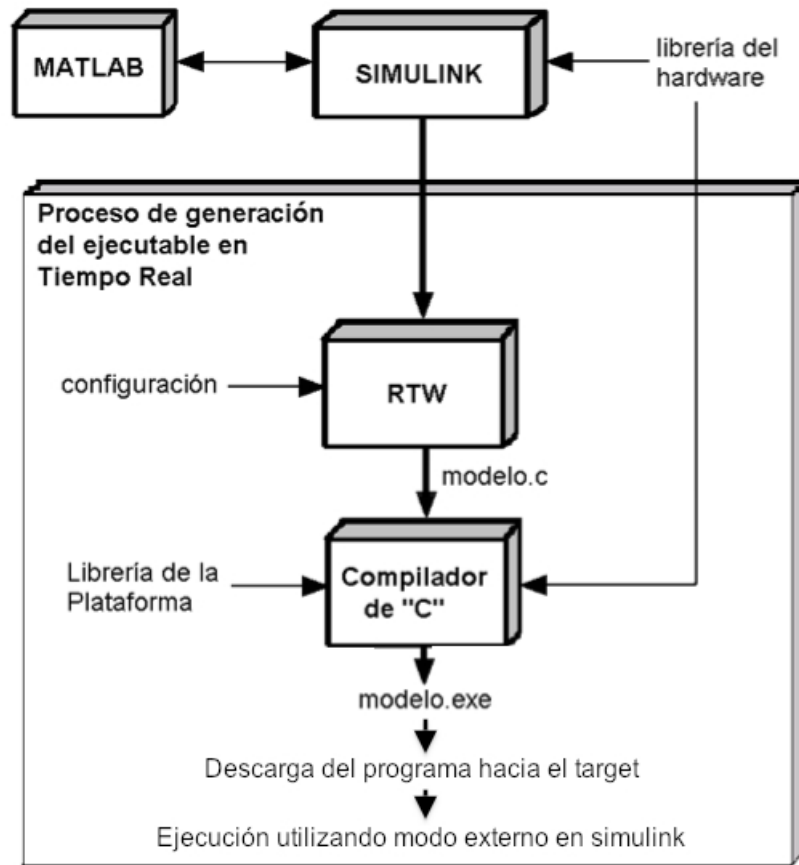


Figura 3.8: Desarrollo del algoritmo de control.



## Capítulo 4

# Simulación numérica

En este capítulo se muestran las simulaciones realizadas para observar el desempeño de los controladores presentados en el capítulo anterior. De igual manera, se evalúa el desempeño del observador lineal, utilizado para la estimación de las variables de estado a las que no se tiene acceso.

### 4.1. Asignación de polos

En la sección 3.2 se diseña un controlador mediante la ubicación de los polos de lazo cerrado. Se propone una respuesta sobreamortiguada con un tiempo de asentamiento  $t_s = 0,02\text{seg}$ . Atendiendo a esta especificación los polos deben ser reales negativos y diferentes, siendo el polo dominante  $P_{dom} = -250$ . La ubicación de los polos no dominantes se determinó de acuerdo a las restricciones en la entrada de control.

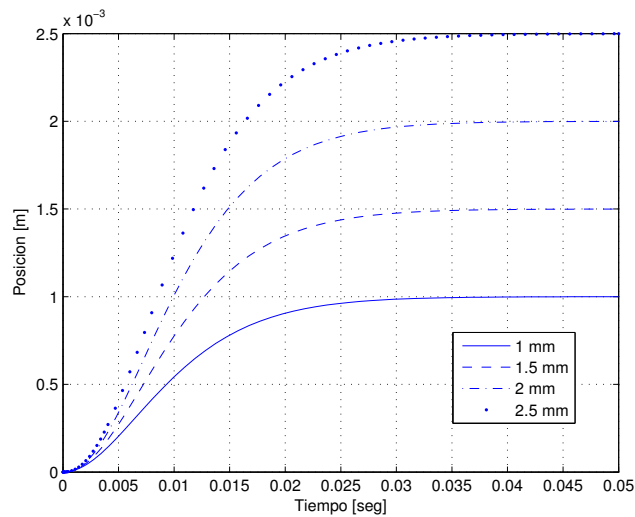


Figura 4.1: Posición del péndulo. Asignación de polos.

El polinomio característico deseado es:

$$P_d = (s + 250)(s + 251)(s + 260)$$

En la figura 4.1 se presenta el comportamiento de la posición del péndulo para diferentes valores deseados. Se considera que el sistema parte del equilibrio, es decir,  $x(0) = (0 \ 0 \ 0)^T$ .

Se puede apreciar que el tiempo de asentamiento es mayor a los 0.02 *seg* deseados, esto debido a que los polos no dominantes del sistema en lazo cerrado se ubicaron muy cerca del polo dominante. Sin embargo, se cumple con el objetivo de regulación para diferentes entradas de referencia.

En la figura 4.2 se muestra el comportamiento de la señal de control demandada por el sistema para las diferentes señales de referencia. Se puede ver que para posiciones deseadas menores a 2 *mm*, la entrada de control se encuentra dentro de los  $\pm 10$  *V* establecidos en (Amira 1993). Sin embargo, para posiciones superiores a los 2 *mm* la señal de control sale de dicho rango.

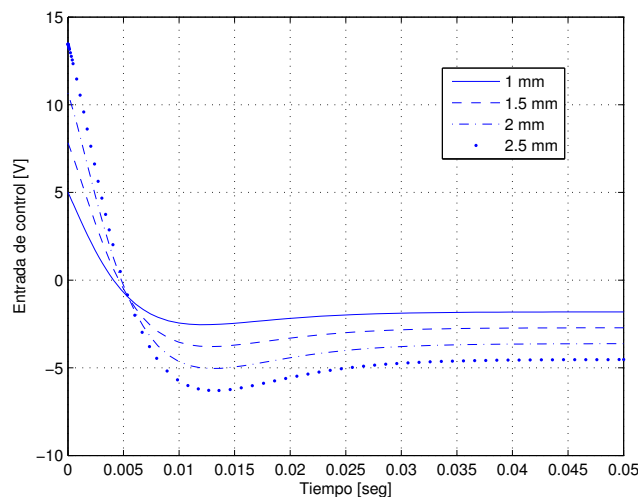


Figura 4.2: Entrada de control. Asignación de polos.

#### 4.1.1. Observador lineal

En esta sección se evalúa el desempeño del observador lineal diseñado para la estimación de los estados no medibles. Para la ubicación de los polos del observador se tomó en cuenta la ubicación de los polos del controlador, colocándolos 10 veces más alejados del eje imaginario del plano complejo. Esto implica que el observador tiene una respuesta 10 veces más rápida que el controlador, por lo que el polinomio característico para el observador es:

$$P_d = (s + 2500)(s + 2510)(s + 2600)$$

En la parte superior de la figura 4.3 se presenta el desempeño del observador, mediante el error de observación, definido como la diferencia entre el valor del estado real y el valor

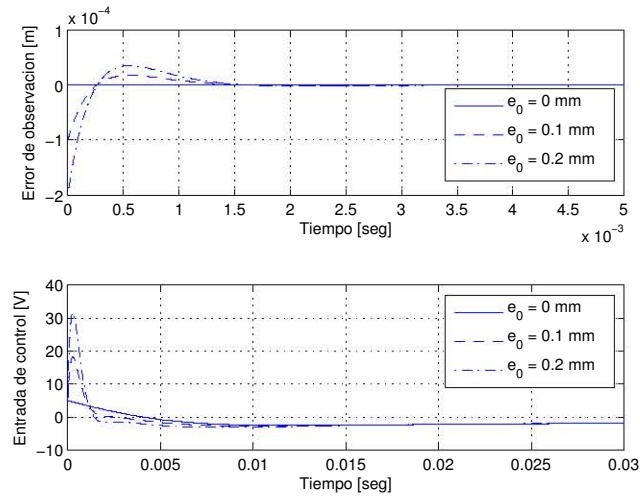


Figura 4.3: Desempeño del observador.

del estado estimado. Se puede observar que la posición estimada tiende a la posición real en un tiempo menor a los  $0.002 \text{ seg}$ , el cual es 10 veces menor al tiempo de estabilización del controlador.

En la parte inferior de la figura 4.3 se muestra la entrada de control demandada para diferentes errores de observación iniciales. Se puede apreciar que la entrada de control aumenta considerablemente, a medida que el error de observación inicial aumenta. Por lo que se debe procurar que las condiciones iniciales de la planta sean prácticamente iguales a las condiciones iniciales del observador.

## 4.2. LQR con acción integral

En esta sección se presentan simulaciones del control LQR diseñado para el sistema aumentado debido a la adición de la acción integral. La figura 4.4 presenta el desempeño del controlador diseñado para diferentes valores de la matriz de pesos asociada a la entrada de control  $R$ .

El sistema parte de la posición de equilibrio y se introduce una señal de referencia de  $1 \text{ mm}$ . Se puede ver que el tiempo de asentamiento del sistema aumenta a medida que el valor de  $R$  aumenta.

El valor en estado permanente de la entrada de control es el mismo para los distintos valores de  $R$ , la diferencia se presenta en la entrada inicial demandada por el sistema. En la figura 4.5 se presenta el comportamiento de la entrada de control cuando el sistema ha comenzado a evolucionar, en donde se puede apreciar que el aumento de  $R$  se traduce en entradas de control iniciales menores. Para  $R = 10$  y  $R = 100$ , la entrada de control excede los  $10V$ , por el contrario, para  $R = 1000$  la señal de control está dentro del rango permitido.

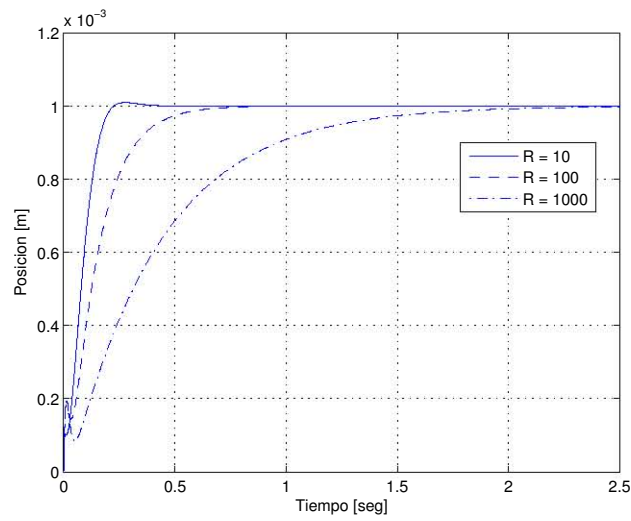


Figura 4.4: Posición del péndulo. LQR.

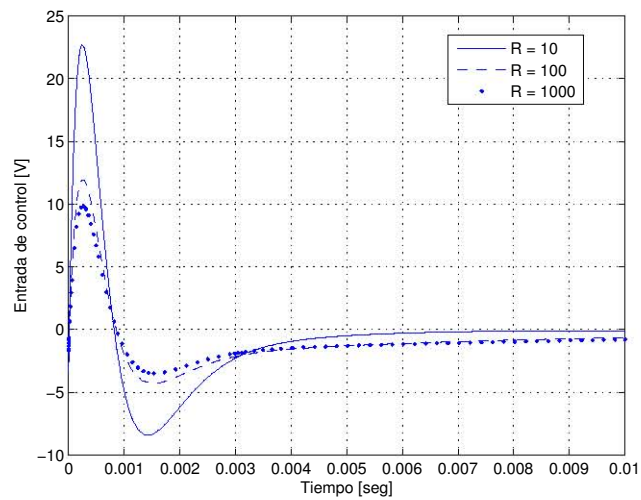


Figura 4.5: Entrada de control. LQR.

### 4.3. Linealización entrada-estado

Para la simulación del controlador se debe de proponer un polinomio deseado, basado en un desempeño deseado. En este caso se elige el mismo polinomio propuesto en el diseño del controlador lineal, esto es

$$P_d = (s + 250)(s + 251)(s + 260)$$

La ley de control no lineal obtenida en la sección 3.5 se presenta a continuación:

$$u = \left[ -k_1(x_1 - x_{1\delta}) - k_2x_2 + k_3g + \frac{c}{m} \frac{x_3^2}{x_1^2} \left( \frac{2R}{L} + \frac{2x_2}{x_1} - k_3 \right) \right] \frac{mLx_1^2}{2cx_3} \quad (4.1)$$

donde

$$k_1 = a_1a_2a_3 = 16315000 \quad (4.2)$$

$$k_2 = (a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3) = 193010 \quad (4.3)$$

$$k_3 = (a_1 + a_2 + a_3) = 761 \quad (4.4)$$

Sustituyendo los valores de las constantes y la posición en el punto de equilibrio  $x_{1\delta} = 2,5mm$  en (4.1) se obtiene la siguiente ley de control:

$$u = \left[ -16315000(x_1 - 0,0025) - 193010x_2 + 761g + \frac{c}{m} \frac{x_3^2}{x_1^2} \left( \frac{2R}{L} + \frac{2x_2}{x_1} - 761 \right) \right] \frac{mLx_1^2}{2cx_3} \quad (4.5)$$

El control entrada-estado es aplicado sobre la planta no lineal, esto implica que se consideran positivas las posiciones por debajo del punto de equilibrio y negativas las posiciones por encima del punto de equilibrio.

La figura 4.6 muestra el desempeño de la ley de control para diferentes posiciones iniciales por encima del punto de equilibrio.

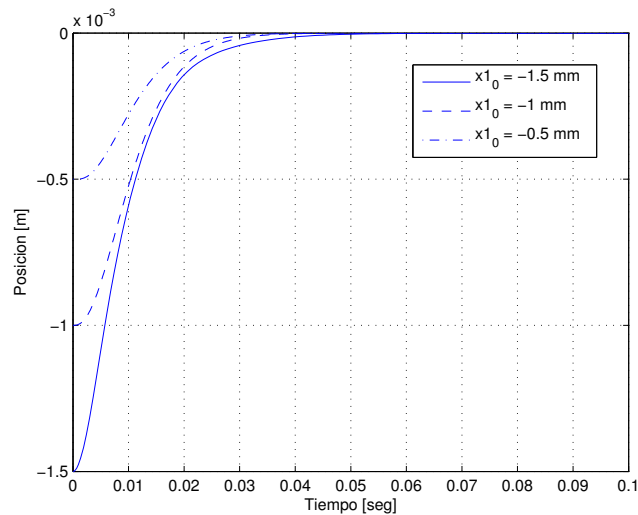


Figura 4.6: Posición del péndulo. Linealización entrada-estado.

La ley de control diseñada solamente cumple con el objetivo de estabilizar al sistema en el punto de equilibrio. Se puede ver que se logra la estabilización asintótica después de  $0.05$  seg, para las diferentes condiciones iniciales, y que el desempeño es muy similar al conseguido

con el controlador lineal diseñado por asignación de polos.

En la figura 4.7 se presenta la entrada de control demandada por el sistema para llevar a cabo la estabilización, dadas diferentes condiciones iniciales. Se puede observar que la señal de control presenta picos para condiciones iniciales alejadas del punto de equilibrio, y a medida que éstas se aproximan al punto de equilibrio, la señal se suaviza.

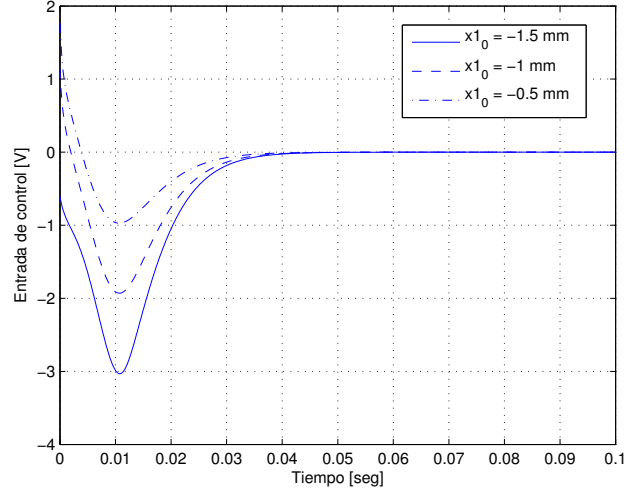


Figura 4.7: Entrada de control. Linealización entrada-estado.

#### 4.4. Control basado en pasividad

Finalmente se muestran simulaciones del desempeño del IDA-PBC propuesto en (Rodríguez, Siguerdidjane, y Ortega 2000). La ley de control obtenida se presenta a continuación:

$$u = \frac{R}{c}(d - x_2)x_1 - K_p \left( \frac{1}{\alpha} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \right) - \frac{\alpha}{m} x_3 - \frac{R}{\alpha} \left( \frac{1}{2c} x_1^2 - mg \right) \quad (4.6)$$

se considera  $K_p = 200,7$  y  $\alpha = 33,4$ .

De igual manera que en el control entrada-estado, la ley de control actúa sobre la planta no lineal, por lo que se consideran posiciones positivas aquellas que se encuentran por debajo del punto de equilibrio y posiciones negativas las que están por encima del punto de equilibrio.

La figura 4.8 muestra el comportamiento de la posición del péndulo para diferentes condiciones iniciales. Se puede apreciar que la ley de control logra estabilizar al sistema en el punto de equilibrio después de 1 *seg*, para las diferentes posiciones iniciales.

La figura 4.9 muestra el comportamiento de la entrada de control demandada por el sistema para llevar a cabo la estabilización. Se puede ver que la entrada de control es mayor para condiciones iniciales alejadas del punto de equilibrio, sin embargo, en todos los casos son menores a los 10 V.

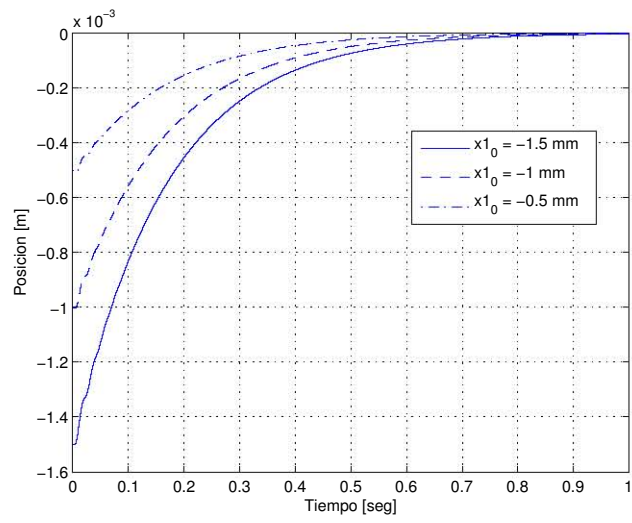


Figura 4.8: Posición del péndulo. IDA-PBC.

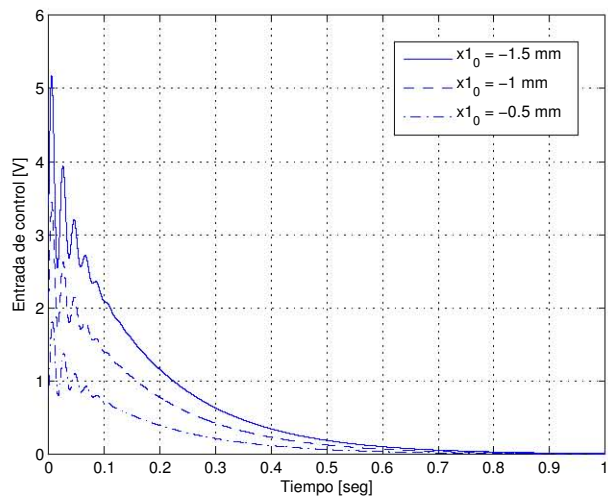


Figura 4.9: Entrada de control. IDA-PBC.

## Capítulo 5

# Resultados experimentales

En este capítulo se presentan los resultados experimentales obtenidos a partir de la implementación de los controladores lineales, en el sistema de suspensión magnética Amira MA400. Se evalúa el desempeño de los controladores para entradas de referencia constantes y posteriormente se prueba la robustez de los mismos ante variaciones en la masa del péndulo. También se exhibe la señal de control demandada en las diferentes pruebas realizadas.

### 5.1. Asignación de polos

En esta sección se presenta el desempeño del controlador lineal diseñado a partir de la ubicación de los polos en lazo cerrado, así como la entrada de control.

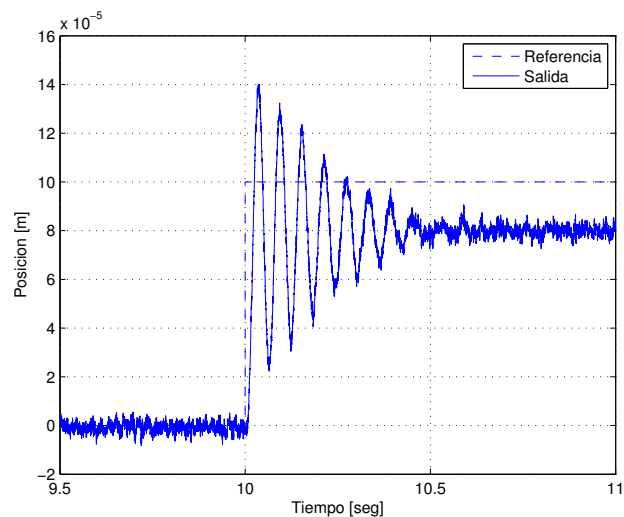


Figura 5.1: Posición del péndulo. Asignación de polos.

El controlador estabiliza al sistema cerca de la posición de equilibrio, por lo que es necesario ajustar manualmente la corriente para alcanzar dicha posición. Una vez que el



sistema se encuentra en el punto de equilibrio, se introduce una señal de referencia. Se intentó introducir las entradas de referencia probadas en simulación, sin embargo, se observó que el sistema perdía estabilidad con referencias superiores a los  $0,2 \text{ mm}$ . En la figura 5.1 se presenta el comportamiento de la posición del péndulo para una entrada de referencia de  $0,1 \text{ mm}$ .

El diseño del controlador se llevó a cabo de acuerdo a un tiempo de asentamiento deseado  $t_s = 0,02 \text{ seg}$ , sin embargo en la gráfica se puede ver que el sistema se estabiliza en aproximadamente  $0,5 \text{ seg}$ , esto es, 25 veces más que el deseado. Por otro lado, se propuso una respuesta sobreamortiguada, asignando polos reales negativos y diferentes, sin embargo en la gráfica se puede ver que la respuesta obtenida es del tipo subamortiguada, correspondiente a una selección de polos complejos conjugados con parte real negativa.

También se puede apreciar que, a pesar de la adición del precompensador, el sistema presenta un error en estado estacionario del 20% aproximadamente. Por lo tanto se puede decir que el controlador no cumple de manera adecuada con el objetivo de regulación.

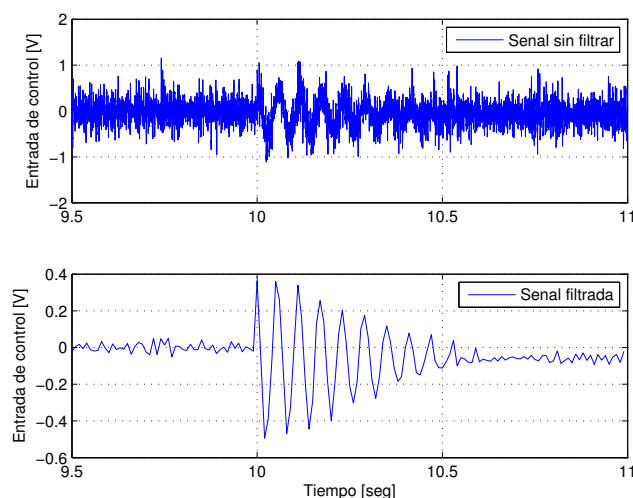


Figura 5.2: Entrada de control. Asignación de polos.

En la figura 5.2 se muestra la señal de voltaje demandada por el sistema, para alcanzar la referencia de  $0,1 \text{ mm}$ , antes y después de ser filtrada. De la parte inferior de la figura, se puede apreciar que el voltaje se incrementa hasta aproximadamente  $0,4 \text{ V}$  y oscila hasta que se estabiliza en un valor de  $-0,07 \text{ V}$ .

Una vez hecho esto, se procedió a probar la robustez del controlador, agregando una masa de  $42 \text{ g}$ , la cual representa un aumento del 50% en la masa del péndulo. En la figura 5.3 se presenta la respuesta del sistema, se puede ver que el sistema parte del equilibrio y después de transcurridos  $10 \text{ seg}$  se introduce la perturbación.

Se puede apreciar que el sistema continúa siendo estable ante la presencia de la perturbación, sin embargo, el controlador no es capaz de regresar al sistema a la posición de equilibrio. Por lo tanto se puede decir que el controlador no es robusto ante perturbaciones.

La figura 5.4 muestra la señal de control requerida por el sistema, para soportar el aumen-

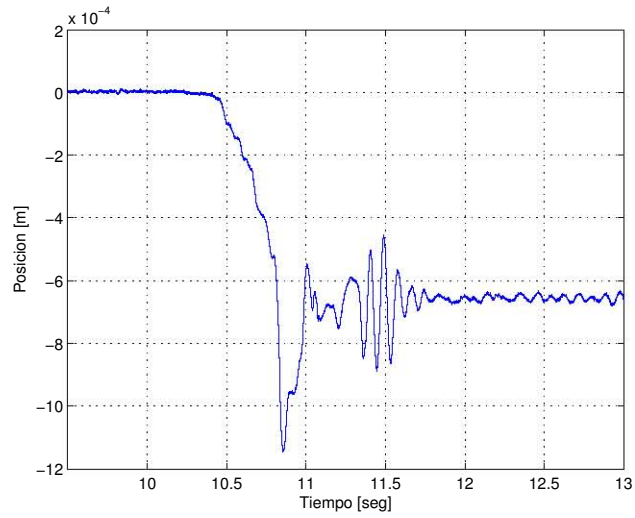


Figura 5.3: Posición del péndulo. Perturbación 50 %.

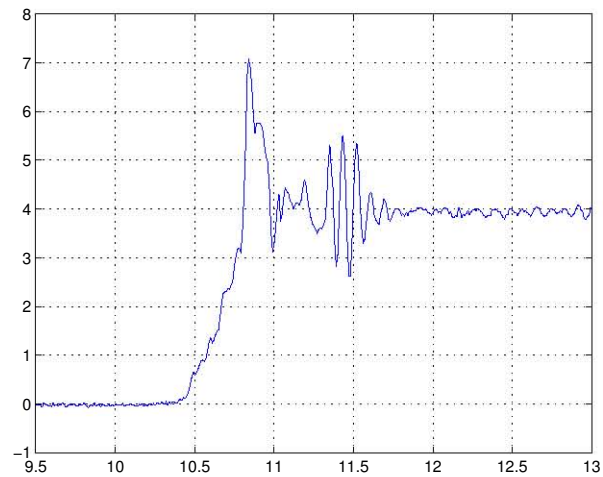


Figura 5.4: Entrada de control. Perturbación 50 %.

to del 50 % en la masa del péndulo. Se puede ver que la señal tiene un incremento máximo de 7 V, sin embargo, se estabiliza en un valor de 4 V.

### 5.1.1. Observador lineal

En esta sección se presenta el desempeño del observador, mediante el error de observación, el cual es obtenido al restar la posición estimada por el observador al valor de la posición arrojado por el sensor de posición LVDT.

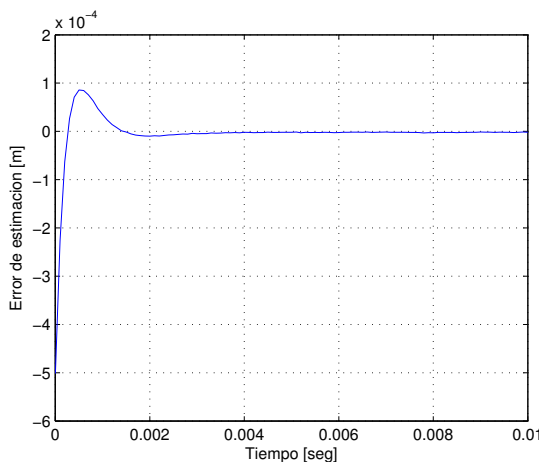


Figura 5.5: Error de observación.

De la figura 5.5, se puede ver que el error de observación inicial es diferente de cero, lo que implica que el observador y la planta arrancan con condiciones iniciales diferentes. Sin embargo, después de aproximadamente 0.002 *seg*, el error de observación tiende al valor de cero, por lo que se puede decir que la posición medida es igual a la posición estimada.

El desempeño del observador es bastante similar a lo deseado, por lo que se tiene una rápida estimación del estado, para posteriormente llevar a cabo su retroalimentación.

## 5.2. LQR con acción integral

En esta sección se presenta el desempeño del control LQR diseñado para el sistema aumentado debido a la adición de la acción integral.

Se realizaron pruebas para los valores de las matrices propuestas en la sección 3.4, sin embargo, no se obtuvieron resultados satisfactorios. Se observó que la matriz de pesos relacionada a la entrada propuesta,  $R = 1000$ , restringía demasiado al control, por lo que se realizó un cambio en dicho valor. A continuación se presentan los resultados obtenidos con la nueva matriz de pesos  $R = 10$ .

En la figura 5.6 se presenta la respuesta del sistema para diferentes entradas de referencia constantes. Se puede ver que el sistema tiene un tiempo de asentamiento de 0,4 *seg* aproximadamente y que el error en estado estacionario tiende a cero en todos los casos, sin embargo, a medida que el péndulo se acerca al electroimán, la señal de posición presenta mayores oscilaciones. De esta gráfica se desprende que el controlador cumple con el objetivo de regulación.

En la figura 5.7, se pueden ver las señales de control filtradas, requeridas por el sistema para alcanzar las diferentes referencias. Se observa que a medida que el péndulo se acerca al electroimán, el voltaje demandado decrece, sin embargo, la señal presenta mayores oscilaciones.

En la figura 5.8 se muestra el comportamiento del sistema para una entrada de referencia

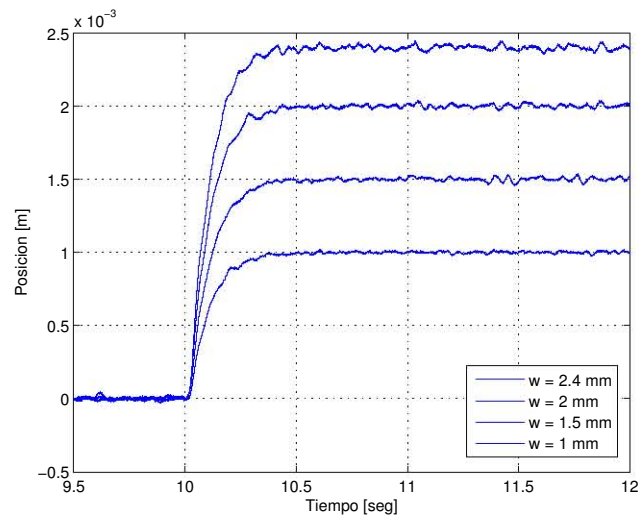


Figura 5.6: Posición del péndulo. LQR.

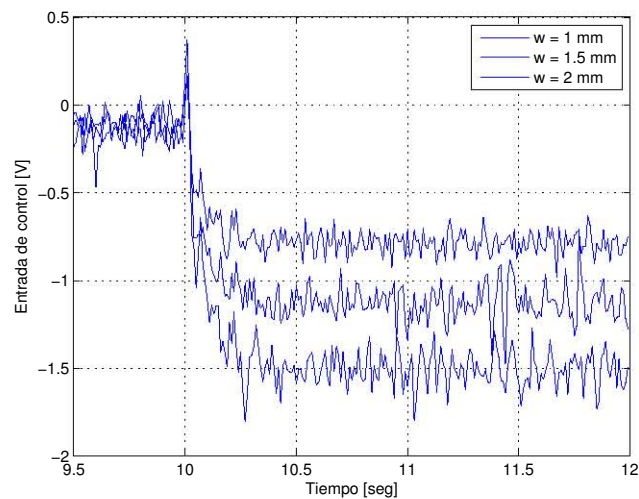


Figura 5.7: Entrada de control. LQR.

que cambia con el tiempo. Se puede ver que dicha referencia toma valores por encima del punto de equilibrio, así como valores por debajo del mismo. La salida sigue asintóticamente a la referencia, por lo que se dice que el controlador cumple con el objetivo de seguimiento.

La figura 5.9 presenta el voltaje demandado por el sistema para llevar a cabo el seguimiento de la referencia variable. Se observa que la señal tiene un decremento máximo de  $1,5$  V, para la entrada de referencia de  $2$  mm y un incremento máximo de aproximadamente  $1,2$  V, para la entrada de referencia de  $-2$  mm.

Finalmente se prueba la robustez del controlador diseñado, agregando una masa de 100

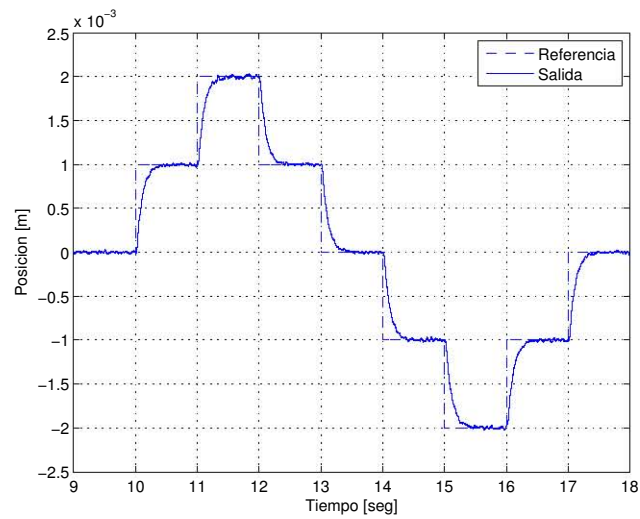


Figura 5.8: Posición del péndulo. Seguimiento.

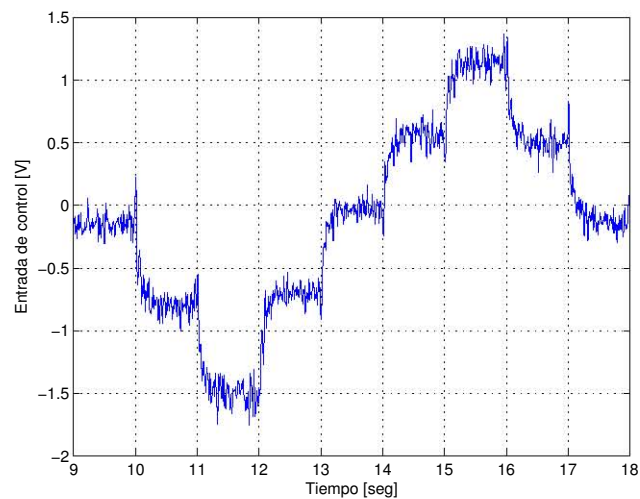


Figura 5.9: Entrada de control. Seguimiento.

$g$ , la cual representa un incremento superior al 100% en la masa del péndulo.

De la figura 5.10, se aprecia que el sistema parte del equilibrio y después de transcurridos 10 *seg*, se introduce la perturbación. El controlador es capaz de estabilizar al sistema en el punto de equilibrio en un tiempo menor a 1 *seg*, permitiendo un desplazamiento máximo del péndulo de 0,3 *mm*. Esto implica que el controlador es robusto ante variaciones en los parámetros de la planta.

En la figura 5.11 se observa la señal de control que demanda el sistema, para compensar el aumento en la masa del péndulo. Se requiere un incremento de aproximadamente 3,6 *V*

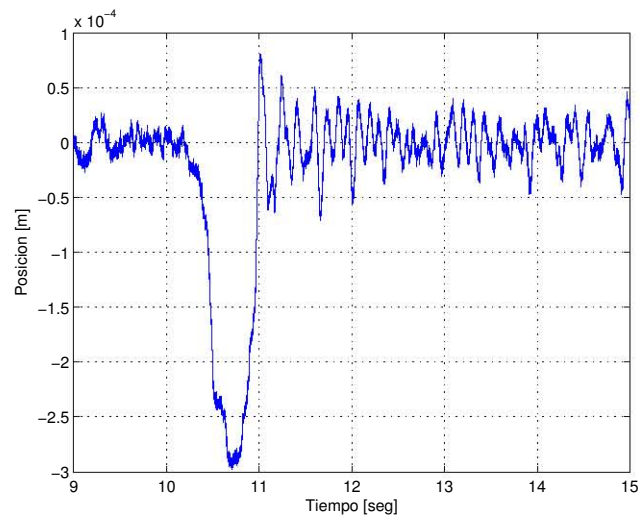


Figura 5.10: Posición del péndulo. Perturbación 119%.

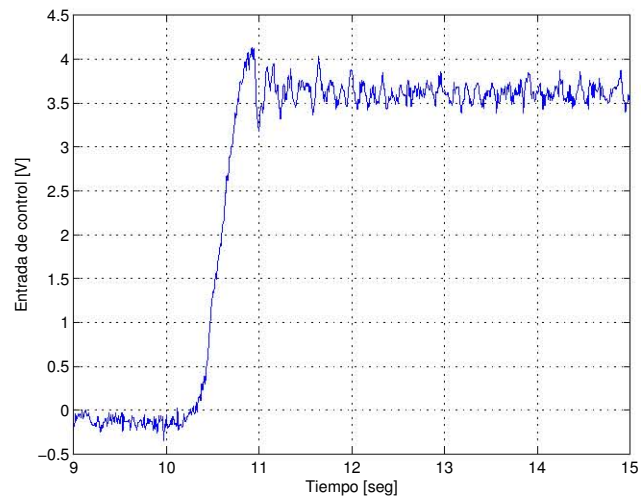


Figura 5.11: Entrada de control. Perturbación 119%.

en la entrada de control, para regresar al sistema al punto de equilibrio.

## Capítulo 6

# Conclusiones

Los sistemas de suspensión magnética permiten el desarrollo de diferentes técnicas de control. En este trabajo, se diseñaron dos controladores lineales, uno por el método de asignación de polos y otro por el método de optimización. Por otro lado, se diseñó un controlador no lineal por el método de linealización exacta y se describe el proceso de diseño de un controlador IDA-PBC. Los primeros tres controladores, se diseñaron con base en un modelo simplificado, en el cual se considera la inductancia constante, en cambio, el controlador basado en pasividad se diseña con base en un modelo, en el cual, la inductancia es función de la posición del péndulo.

Se realizaron simulaciones numéricas para observar el desempeño de las distintas técnicas de control presentadas, obteniendo resultados satisfactorios en cada una de ellas. La utilización de este tipo de herramientas, permite tener una idea del comportamiento del sistema, sin embargo, los resultados experimentales pueden ser muy diferentes a los esperados.

Se evaluó experimentalmente el desempeño de los controladores lineales para los diferentes objetivos de control: estabilización, regulación, seguimiento y rechazo de perturbaciones. El controlador con precompensador diseñado por el método de asignación de polos, estabiliza al sistema, sin embargo, no lo hace en el punto de equilibrio, por lo tanto no cumple de manera adecuada con el objetivo de estabilización. El esquema propuesto no cumple con el objetivo de regulación, ya que se tiene un error en estado permanente diferente de cero. El controlador tiene una región de operación muy pequeña,  $\pm 0,2 \text{ mm}$ , con respecto al punto de equilibrio; no es capaz de seguir una referencia variable y no es robusto ante perturbaciones. Se puede decir que el esquema de control propuesto, es muy sensible ante variaciones en los parámetros.

El controlador LQR diseñado para el sistema de orden aumentado, logra estabilizar al sistema en el punto de equilibrio, cumple con el objetivo de regulación al alcanzar asintóticamente diferentes referencias constantes, tiene un rango de operación bastante amplio,  $\pm 2,4 \text{ mm}$  con respecto al punto de equilibrio. El controlador también cumple con el objetivo de seguimiento de una referencia variable y es robusto ante perturbaciones, ya que es capaz de soportar un incremento en la masa del péndulo superior al 100%. El desempeño del esquema de control es satisfactorio, debido a que se combinan las ventajas ofrecidas por la optimización y la adición de un integrador fuera del lazo al sistema. El grado de libertad ofrecido por el control LQR, mediante la selección de las matrices R y Q, hace que destaque

sobre el método de asignación de polos.

A pesar de no haber implementado físicamente los controladores no lineales, se pueden apreciar algunas características importantes de los mismos. El control por linealización exacta, requiere de un modelo preciso de la planta, así como del conocimiento de los parámetros de la misma, para llevar a cabo la cancelación de los términos no lineales y poder imponer el comportamiento deseado. Por otro lado, el control basado en pasividad, estabiliza al sistema en el punto de equilibrio, siempre y cuando dicho punto sea un mínimo de la función de almacenamiento, por lo que no depende de manera importante de los parámetros del sistema. Después de analizar los resultados obtenidos en simulación de los controladores no lineales, se puede observar que el control basado en pasividad tarda más en estabilizar al sistema, además de que presenta cambios mayores en la entrada de control, en comparación con la linealización entrada-estado.

## 6.1. Trabajo futuro

La selección de los polos en lazo cerrado se llevó a cabo de acuerdo a cierto desempeño deseado, por lo tanto, se puede proponer uno nuevo y obtener una ubicación de polos diferente. También, es posible realizar una nueva propuesta de polos en lazo cerrado, para el sistema de orden aumentado debido a la adición del integrador y hacer una comparación experimental con los resultados obtenidos con el control LQR.

Como se ha mencionado anteriormente, los controladores lineales se diseñaron con base en el modelo simplificado. Queda pendiente el diseño de los controladores basándose en el modelo Hamiltoniano y comparar experimentalmente el desempeño de los mismos, con los desarrollados en este trabajo.

Finalmente, se puede realizar la implementación física de los controladores no lineales presentados, en el sistema de suspensión magnética Amira MA400, para observar las ventajas que ofrecen los controladores no lineales sobre los lineales.



# Referencias

- Ahmad, I. y M. A. Javaid (2010). Nonlinear model and controller design for magnetic levitation system. en *Proceedings of the Conference on Recent Advances in Signal Processing, Robotics and Automation*, pp. 324–328.
- Ahrens, M., L. Kucera, y R. Larsonneur (1996). Performance of a magnetically suspended flywheel energy storage device. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 4, 494–502.
- Amira (1993). MA400: Laboratory Setup Magnetic Suspension.
- Barie, W. y J. Chiasson (1996). *Linear and nonlinear state-space controllers for magnetic levitation*. International Journal of Systems Science 27, 1153–1163.
- Chen, C. T. (1999). *Linear system theory and design*, 3 ed.. New York, USA, Oxford University Press.
- Cho, D., Y. Kato, y D. Spilman (1993). Sliding mode and classical controllers in magnetic levitation systems. *Control Systems* 13, 42–48.
- Estrada, J. A. (2007). Ajuste de controladores PID discretos para una suspension magnetica. *Universidad Nacional Autónoma de Mexico*.
- Franklin, G. F., J. D. Powell, y A. Emami-Naeini (2002). *Feedback control of dynamic systems*, 4 ed.. New Jersey, USA, Prentice Hall.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear systems*, 2 ed.. New Jersey, USA, Prentice-Hall.
- Kirk, D. E. (2004). *Optimal control theory: an introduction*. New York, USA, Dover.
- Kuo, B. C. y F. Golnaraghi (2010). *Automatic control systems*, 9 ed.. New Jersey, USA, John Wiley and Sons.
- Lee, T. E., J. P. Su, y K. W. Yu (2007). *Implementation of the state feedback control scheme for a magnetic levitation system*. en *Proceedings of the Second Conference on Industrial Electronics and Applications, Harbin, China*, pp. 548–553.
- Lepetic, M., I. Skrjanc, H. G. Chiacchiarini, y D. Matko (2003). *Predictive functional control based on fuzzy model: Magnetic suspension system case study*. Engineering Applications of Artificial Intelligence 16, 425–430.
- Moon, F. C. (2004). *Superconducting levitation*, 2 ed.. Germany, WILEY-VCH.
- Nagaya, K. y M. Ishikawa (1995). A noncontact permanent magnet levitation table with electromagnetic control and its vibration isolation method using direct disturbance

- cancellation combining optimal regulators. *IEEE Transactions on Magnetics* 31, 885–896.
- Namerikawa, T. y H. Kawano (2006). *A Passivity-Based approach to wide area stabilization of magnetic suspension system*. en *Proceedings of the 2006 American Control Conference, Minneapolis, Minnesota, USA*, pp. 4576–4581.
- Nise, N. S. (2005). *Sistemas de control para ingeniería*. México, Continental.
- Nyce, D. S. (2004). *Linear position sensors: theory and applications*. New Jersey, USA, John Wiley and Sons.
- Ogata, K. (1997). *Modern control engineering, 3 ed.*. New Jersey, USA, Prentice Hall.
- Ortega, R., A. Loría, P. J. Nicklasson, y H. Sira-Ramírez (1998). *Passivity based-control of Euler-Lagrange systems*. London, UK, Springer.
- Ortega, R., A. van der Schaft, B. Maschke, y E. G. (2002). *Interconnection and damping assignment Passivity-Based Control of Port-Controlled Hamiltonian Systems*. *Automatica* 38, 585–596.
- Rodriguez, H., H. Siguerdidjane, y R. Ortega (2000). *Experimental comparison of linear and nonlinear controllers for a magnetic suspension*. en *Proceedings of the International Conference on Control Applications*, Anchorage, Alaska, USA, pp. 416–421.
- Sira-Ramírez, H., R. Márquez, F. Rivas-Echeverría, y O. Llanes-Santiago (2005). *Control de sistemas no lineales*. Madrid, España, Pearson.
- The Mathworks, I. (1999). *Real Time Workshop*.
- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear systems analysis, 2 ed.*. New Jersey, USA, Prentice-Hall.
- Yu, H., T. C. Yang, D. Rigas, y B. V. Jayawant (2002). *Modelling and control of magnetic suspension systems*. en *Proceedings of the International Conference on Control Applications*, Glasgow, Scotland, UK, pp. 416–421.