



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MEXICO**

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

CONTROL DE SISTEMAS MULTIAGENTES LAGRANGIANOS

T E S I S

QUE PARA OBTAR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERIA

INGENIERIA ELECTRICA - CONTROL

P R E S E N T A

SOFÍA MAGDALENA ÁVILA BECERRIL

DIRIGIDA POR

DR. GERARDO ESPINOSA PÉREZ

CIUDAD UNIVERSITARIA
2011



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Yu Tang Xu
Secretario: Dr. Alejandro Rodríguez Angeles
Vocal: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez
1er. Suplente: Dr. Emmanuel Nuño Ortega
2do. Suplente: Dr. Héctor Benítez Pérez

CIUDAD UNIVERSITARIA
MÉXICO, DISTRITO FEDERAL

TUTOR DE TESIS:

Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

FIRMA

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional Autónoma de México, nuestra máxima casa de estudios, por todas las oportunidades que me ha brindado.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (**CONACYT**), por el apoyo entregado para la realización de mis estudios de maestría mediante la beca nacional para estudios de posgrado (agosto de 2009 a julio de 2011).

A mi director de tesis, el Dr. Gerardo Espinosa, por su dedicación, su conocimiento y su gran apoyo para desarrollar este trabajo.

Agradezco a los miembros del jurado por su tiempo y su interés para revisar mi tesis, así como por sus valiosas observaciones.

Quiero agradecer especialmente a la Dra. Elena Panteley por sus amables comentarios en la realización de este trabajo.

Le dedico esta tesis a

Mi familia,

a **mis papás** por su apoyo siempre incondicional, por su esfuerzo y su ejemplo de trabajo, amor y dignidad.

a **Anita**, mi hermana, por su gran cariño y sentido de humanidad, por nuestra confianza y sus consejos.

a **Gerardo**, a quien reconozco y admiro también como persona. Porque es increíble poder compartir contigo y aprender de ti.

a mis compañeros y amigos **Ale, Marco y Giles**, por la confianza personal y académica, por habernos aprendido en los sentidos que valen la pena. Por caminar juntos y saber apoyarnos, gracias.

a mis amigas **Erika e Ivonne**, por todo lo que me enseñan y porque después de tantos años seguimos trabajando para estar juntas.

Resumen

El problema de consenso en redes compuestas por sistemas Lagrangianos totalmente-actuados han recibido bastante atención por parte de la comunidad de control. Desafortunadamente, el caso de redes compuestas por sistemas subactuados del mismo tipo no han sido estudiadas de manera tan profunda y la literatura relacionada es muy reducida. El objetivo de esta tesis es contribuir en el establecimiento de un esquema de control para esta clase de redes al resolver el caso particular de consenso en una red compuesta por agentes definidos por robots de uniones flexibles. El esquema propuesto considera la presencia de retardos desconocidos en los canales de comunicación. Mientras que la utilidad del controlador es validada por medio de simulaciones numéricas.

Abstract

Consensus of networks composed by fully-actuated Lagrangian systems has received a lot of attention from the control theory community. Unfortunately, the case of networks composed by under-actuated systems of the same kind has not been deeply studied and the related literature is very reduced. The aim of this thesis is to contribute towards the establishment of a control scheme for this class of networks by solving the particular case of consensus on a network composed by agents defined by Flexible-joint robots. The proposed schemes consider the presence of unknown delays in the communication channels. The usefulness of the controllers is validated through numerical simulations.

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Estado del Arte	5
1.2. Formulación del Problema	9
1.3. Alcances de la Tesis	9
1.4. Organización de la Tesis	10
2. Preliminares	12
2.1. Notaciones	13
2.2. Teoría de Grafos	13
2.2.1. Representación Matricial	15
2.3. Consenso	18
2.4. Robots de Uniones Flexibles	19
2.4.1. Esquema Basado en Pasividad	20

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	2
3. Control Multiagente	23
3.1. Modelo Multiagente	23
3.2. Objetivo de Control	25
3.3. Control: Caso Sin Retardos	25
3.3.1. Discusión	33
3.3.2. Simulaciones	34
3.4. Control: Caso Con Retardos	40
3.4.1. Discusión	49
3.4.2. Simulaciones	51
4. Controladores	56
4.1. Control Basado en Desacoplamiento	56
4.1.1. Análisis de Estabilidad	59
4.1.2. Discusión	62
4.1.3. Simulaciones	63
4.2. Control Basado en Pasividad	66
5. Conclusiones y trabajo futuro	70
6. Apéndice	73
6.1. Álgebra Matricial	73

Capítulo 1

Introducción

En el mundo contemporáneo, la energía, las telecomunicaciones, los sistemas de transporte militares, comerciales, así como los sistemas financieros, no solo obedecen a entidades que individualmente se han vuelto más complejas, sino además, a estructuras cada vez más interconectadas, cuyo impacto ha logrado perfilar el desarrollo y la calidad de vida de la sociedad. Sin embargo, esta interconexión e intercomunicación conlleva a su vez retos industriales y académicos, de seguridad, confiabilidad y operación eficiente. Con fines de análisis, cada una de estas infraestructuras, interactuando entre ellas son por sí mismas complejas, geográficamente dispersas y descritas por modelos no-lineales. Estas interacciones forman redes, donde cada nodo interactúa sólo con un número pequeño de compañeros seleccionados, cuya presencia y efectos pueden ser sentidos a muchos nodos de distancia.

No es sorprendente entonces, que desde hace más de una década el estudio de sistemas interconectados y sus aplicaciones hayan recibido bastante atención por parte de la comunidad de control. En este sentido, la revista Control Systems Magazine, editada por la IEEE, ha dedicado varios números al Control de Redes Complejas [31, 32, 33, 34]. Aquí, se reconocen sistemas de

control, donde uno o más lazos se interconectan vía redes dinámicas, activas e inteligentes, con el fin de resolver problemas de sistemas compuestos por sensores distribuidos, grupos de satélites y problemas de control de formación de multivehículos terrestres, aéreos o marinos. Se distingue inclusive, el argumento de que la metodología matemática convencional que sustenta los modelos, las simulaciones y los paradigmas de control, es incapaz de manejar esta complejidad e interconexión. En todos estos artículos se encuentra la preocupación por diseñar controladores robustos para sistemas interdependientes donde la dinámica individual afecta el comportamiento global y colectivo del sistema interconectado.

Así pues, el análisis de los Sistemas Multiagente (MA) se refiere al estudio de ciertas estructuras compuestas por elementos con dinámica propia, interactuando localmente y equipados con dispositivos de sensado y comunicación. En este contexto, el fenómeno de *sincronización controlada* se refiere al caso donde por medio de un estímulo externo parte de la dinámica de dos o más sistemas es forzada a coincidir. Este tipo de sincronización puede dividirse en *mutua*, donde los comportamientos se ajustan sin tener conocimiento *a priori* de alguna dinámica, y maestro-esclavo, donde el maestro realiza un movimiento libre que el esclavo debe seguir [29]. Bajo esta perspectiva, el *consenso* es un problema de sincronización mutua que surge para dar solución al problema donde es necesario que un grupo de agentes lleguen a un acuerdo respecto a ciertas cantidades de interés. Es decir, el problema de consenso, en un grupo de agentes de sistemas dinámicos interconectados al menos débilmente, consiste en establecer condiciones bajo las cuales las diferencias entre cualesquiera dos estados, que caracterizan la dinámica de los agentes, se desvanezcan asintóticamente.

1.1. Estado del Arte

En la literatura, una de las formas más usuales en la que se aborda el problema de sincronización y consenso de sistemas multiagentes, es considerando que los agentes se pueden describir como sistemas con dinámicas simples como cadenas de integradores [8, 10, 21, 13] o masas puntuales. En [8] se realiza un análisis desde un marco de referencia donde la dinámica multiagente es una cadena de integradores y la solución propuesta para el problema es un protocolo de consenso lineal. Aquí, se aborda el problema del consenso bajo diferentes suposiciones: topología fija o conmutada con la presencia o ausencia de retardos en la comunicación. El problema del consenso se resuelve, de manera global y asintótica, para el caso sin retardos, con la suposición de un grafo dirigido, fuertemente conectado y un protocolo de consenso lineal. Y si además, se supone un grafo balanceado, entonces se resuelve el problema del consenso promedio, es decir, el caso donde el subespacio de consenso es un promedio de las condiciones iniciales. Así mismo, cuando se toma en cuenta la presencia de retardos en los canales de comunicación, el análisis se reduce al de una matriz de transferencia, donde si la red de comunicación se asume no dirigida y con un retardo máximo tolerado por la red inversamente proporcional al valor propio más grande del grafo, el algoritmo soluciona el problema del consenso promedio.

En [13], se hace una extensión al trabajo de [10]; en este caso, el modelado de la red de agentes se realiza en el contexto de ecuaciones en diferencias parciales (PdEs por sus siglas en inglés) en redes no dirigidas y se dan condiciones suficientes para la existencia del consenso promedio. Mientras que en [21] se considera el modelo acoplado a retardos que varían con el tiempo y se resuelve el problema de consenso con la suposición de que los pesos en el grado de entrada de los vértices de la gráfica son los mismos.

Por otro lado, el estudio de Sistemas Multiagente (MA) con dinámicas in-

dividuales no-lineales también se ha hecho desde diferentes enfoques. Una técnica que ha producido resultados muy atractivos está relacionada con las nociones de pasividad [6, 15, 20, 16], donde se explotan las ventajas que esta técnica ofrece para estudiar sistemas interconectados. En este contexto y motivados por la gran cantidad de sistemas físicos que pueden ser descritos por ecuaciones Euler-Lagrange, el problema de la sincronización de redes ha sido ampliamente estudiada desde esta perspectiva. Así, recientemente se han reportado numerosos trabajos donde se considera a la dinámica individual de los agentes como Sistemas Lagrangianos [11, 23] o bien, como sistemas no-lineales afines al control y entrada/salida pasivos [15, 14, 16]. En ambos casos se explotan las propiedades de pasividad y se proponen técnicas desde el punto de vista de los esquemas de control basados en pasividad (PBC por sus siglas en inglés).

En este mismo marco, la clase de sistemas *Lagrangianos totalmente* actuados ha recibido bastante atención. De hecho, después de enunciar varios resultados para sistemas no-lineales pasivos y afines, en [15, 14] se aborda el problema particular de sistemas mecánicos para dar solución al problema de coordinación multi-robot. En [15], se estudia la sincronización a la salida de agentes con dinámica pasiva y utilizando tanto un acoplamiento lineal en un grafo de comunicación balanceado como una estrategia de control pasiva y un intercambio de información bidireccional entre los agentes, se da solución al problema de sincronización a la salida. En ambos casos, se utiliza como candidata a función de Lyapunov del sistema multiagente la suma de las funciones de almacenamiento de los N -agentes. En el mismo sentido, en [14] se consideran sistemas no lineales pasivos acoplados con un esquema de control pasivo, en un grafo de comunicación bidireccional, conectado y con retardos en la comunicación, donde esta vez los agentes transmiten ciertas variables de “dispersión” en lugar de las salidas de sus vecinos para concluir estabilidad global del sistema.

Por otro lado, en [22] se aborda el problema de consenso y coordinación desde el contexto de los *Sistemas Hamiltonianos Controlados por Puerto* (PCH por sus siglas en inglés). Aquí se muestra que los espacios *Vértices* y *Bordes* forman una *Estructura de Dirac*. En particular, se muestra que el algoritmo de consenso propuesto en [8] define una dinámica que está explícitamente dada por un sistema PCH respecto a la estructura de Dirac *Vértice-Borde*. Así mismo, se plantea la coordinación de N sistemas con dinámica individual Hamiltoniana considerando que están acoplados por una estructura de Dirac, concluyendo que el sistema interconectado resultante también puede definirse por un sistema PCH.

Recientemente, Nuño et al. [23] han reportado un resultado unificado para dos escenarios, el problema de sincronización cuando está definida explícitamente una trayectoria deseada y la de consenso, que evita el problema de “consenso en cero” de [19] cuando no existe referencia deseada. En este artículo se consideran sistemas dinámicos no lineales, no idénticos y *totalmente actuados* descritos por ecuaciones Euler Lagrange, con parámetros desconocidos y bajo la suposición de que todo el estado está disponible para su medición. Se analiza, además, el caso donde el canal de comunicación entre los agentes está sujeto a retardos. El protocolo de consenso resultante es una ley de acoplamiento no-lineal sin restricciones en los mapeos no-lineales, este controlador adaptable da solución al problema de sincronización y de consenso, donde la única suposición sobre el grafo dirigido es que está conectado, resultado que, para el caso sin retardos, se logra con el concepto de “matriz Laplaciana reducida” y los resultados de [20] sobre la misma. Mientras que para el caso con retardos, la suposición usual de grafo balanceado se relaja con el uso de funcionales de Lyapunov-Krasovskii tal como lo hacen en [15].

Desafortunadamente, el problema de redes formadas por sistemas *subactuados* no ha sido estudiado de manera tan exhaustiva. El caso de la sincronización de robots de uniones flexibles, como un caso particular de sis-

temas Lagrangianos subactuados, se aborda en [11], sin embargo, el esquema de interconexión es del tipo esclavo-maestro, en este trabajo el objetivo es que los dos robots trabajen de manera sincronizada midiendo la posición del eslabón y estimando la velocidad por medio de un observador no lineal. En este caso, se propone una ley de control que linealiza al sistema y lo desacopla, de manera que, asumiendo que las ganancias matriciales son múltiplos positivos de la matriz unitaria se asegura la sincronización de ambos robots. Sin embargo, y hasta donde el autor sabe, las publicaciones relacionadas con la sincronización de Sistemas Multiagentes Subactuados se reducen a [17] donde se aplica la técnica de estabilización de sistemas mecánicos utilizando Lagrangianos Controlados y se resuelve el problema de sincronización *sin* considerar retardos en la comunicación.

El objetivo de esta tesis es el de contribuir con la solución del problema de control para redes compuestas por *Sistemas Lagrangianos Subactuados*, al extender el resultado presentado en [23], donde se logran de manera simultánea los objetivos de sincronización (seguimiento) y consenso. No obstante, en esta tesis se analiza el problema particular del consenso desde el escenario donde los agentes son *Robots de Uniones Flexibles* no idénticos, el grafo está conectado y los canales de comunicación están sujetos a retardos no conocidos.

Como es usual, la solución propuesta para el problema mencionado, está compuesta de dos elementos, una primer parte, referida a la ley de control que estabiliza la dinámica individual de los agentes y una segunda, concerniente al protocolo de comunicación. Así, mientras que esta última describe la manera en que se intercambia la información entre cada agente y sus vecinos para la dinámica propia de cada robot de uniones flexibles se emplearán los esquemas propuestos en [13] y [5] para un solo robot. Un estudio de diferentes esquemas de control para un solo robot de uniones flexibles puede encontrarse en [3] donde se realiza un análisis comparativo de tres técnicas aplicadas al problema de seguimiento global, con el objetivo de establecer relaciones y

comparar sus propiedades de robustez y desempeño. Los tres esquemas de control que se estudian aquí son: el Control Basado en Desacoplamiento, que utiliza resultados de la conexión en cascada de sistemas estables, el Control por Backstepping y el Control Basado en Pasividad, que se deriva de la aplicación de las técnicas basadas en pasividad para sistemas subactuados. En el último caso, se estudia primero la técnica propuesta por Lozano y Brogliato (1992) y luego se muestra que eligiendo una energía potencial deseada diferente puede obtenerse una ley de control más simple desarrollado en [5] por Ortega et al.

1.2. Formulación del Problema

Considere una red compuesta por múltiples robots de uniones flexibles, como un caso particular de sistemas Lagrangianos Subactuados, donde cada elemento se comunica con un grupo particular de robots y este intercambio de información está sujeto a un retardo $T_{ir} \geq 0$. Encontrar una ley de control local que incida en el comportamiento global y colectivo del sistema, en el sentido de que logre que el conjunto de todas las coordenadas no-actuadas de los robots alcancen un consenso, es decir, que converjan de manera asintótica a la misma posición.

1.3. Alcances de la Tesis

Aún cuando el estudio de Sistemas Multiagentes compuestos por Sistemas con dinámica Lagrangiana totalmente actuada ha sido estudiado de manera amplia y desde diferentes perspectivas, el problema de sincronización de Sistemas Lagrangianos Subactuados, hasta donde el autor sabe, es un problema abierto y de gran importancia para la comunidad de control. En esta tesis se

presenta una propuesta de solución al problema para el caso particular donde los agentes son robots de uniones flexibles como un primer acercamiento al estudio de dinámicas subactuadas más generales.

Así mismo, los resultados obtenidos pueden utilizarse para extender el resultado al caso donde se considere incertidumbre paramétrica o bien donde se necesiten solo mediciones parciales de los estados. Además, se pueden considerar los casos particulares de consenso donde existe una dinámica líder con interacción local con sus seguidores, o bien, el caso donde se desea que el valor consensado obedezca a una distancia entre los agentes, abarcando así, otro tipo de aplicaciones.

1.4. Organización de la Tesis

El contenido se divide en tres capítulos principales. El Capítulo 2, se relaciona con los preeliminares y comprende algunas notaciones y definiciones a las cuales se hará constante referencia a lo largo de la tesis. Específicamente, se presenta la teoría de grafos como una forma de representar el protocolo de comunicación entre los agentes. Así mismo, se presenta el modelo matemático de un solo robot de uniones flexibles, algunas de sus propiedades intrínsecas, así como un controlador basado en pasividad reportado en [3], como antecedentes al modelo multiagente.

En el Capítulo 3, se presenta el modelo multiagente y en este sentido, se plantean los objetivos de control para dar solución al problema de consenso. La propuesta de solución está dividida en dos secciones, en la primera se aborda el problema sin considerar retardos en la comunicación, mientras que en la segunda sección se aborda el problema considerando que existen estos retardos. Ambos resultados son discutidos y validados numéricamente.

Mientras que, en el Capítulo 4, se encuentran dos propuestas adicionales de solución al problema de consenso cuando se considera que no existen retardos en la comunicación. El primer controlador está basado en un esquema de desacoplamiento, donde, con la ley de control propuesta, se tiene la interconexión en cascada de dos subsistemas; este controlador es validado numéricamente y su desventaja también es discutida. El segundo es un controlador que al igual que el presentado en el Capítulo 3, está basado en pasividad, sin embargo, la prueba de su convergencia se plantea como trabajo futuro. En el capítulo 4 se presentan las conclusiones de este trabajo de tesis y por último, en el Apéndice A, algunas herramientas de álgebra matricial.

Capítulo 2

Preeliminarios

Este capítulo está dedicado a la revisión de ciertas herramientas necesarias para el análisis de la red multiagente. En particular, se introduce la notación utilizada durante el resto de la tesis, así como algunos antecedentes de teoría de grafos. Se presenta además, el controlador reportado en [3] para un robot de uniones flexibles que será utilizado en el capítulo referente al controlador multiagente.

2.1. Notaciones

\otimes	Producto Kronecker
$diag(a_1, \dots, a_p)$	Matriz diagonal con entradas a_1 hasta a_p
$diag(A_1, \dots, A_p)$	Matriz diagonal a bloques con bloques A_1 hasta A_p
I_m	Matriz Identidad de $m \times m$
$\mathbf{1}_p$	Vector columna de unos de $p \times 1$
$0_{m \times n}$	Matriz cero de $m \times n$
\mathcal{G}	Grafo
\mathcal{V}	Conjunto de nodos de un Grafo
\mathcal{E}	Conjunto de bordes de un Grafo
A	Matriz de adyacencia
\mathcal{L}	Matriz Laplaciana no-simétrica
\mathcal{N}_i	Conjunto de vecinos del agente i

2.2. Teoría de Grafos

La Teoría de Grafos provee las herramientas comunes para representar los protocolos de comunicación entre los agentes. Es por ello, que resulta pertinente hacer una recopilación de varias definiciones, tomadas de [24], a las que se recurrirá a lo largo de la tesis por formar parte importante en los resultados de la misma.

Así pues, supóngase un grupo de agentes interactuando entre sí por medio de una red de comunicación, una manera usual de modelar dicha interacción es por medio de grafos dirigidos o no dirigidos. Supóngase que el grupo está formado por p agentes. Un *grafo dirigido* de orden p es un par $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, donde $\mathcal{V} \triangleq \{1, \dots, p\}$ es un conjunto finito y no vacío de *nodos*, mientras que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ es un conjunto formado por pares ordenados llamados *aristas* o *bordes*. Se define entonces $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. El borde (i, j) en el conjunto \mathcal{E}

de un grafo dirigido denota que el agente j puede obtener información del agente i , pero no necesariamente viceversa; en este caso al nodo i se le conoce como el *nodo padre* y al j como el *nodo hijo*. En este trabajo los auto-bordes (i, i) no son permitidos. Además si un borde $(i, j) \in \mathcal{E}$, entonces se dice que el nodo i es *vecino* del nodo j . Al conjunto de vecinos de un nodo i se le denota como \mathcal{N}_i . En contraste con un grafo dirigido, en un *grafo no-dirigido* las parejas de nodos no están ordenados, en este caso, el borde (i, j) denota que los agentes pueden obtener información uno del otro. Así mismo, un *grafo ponderado* asocia un peso a cada borde en el grafo.

Una *trayectoria dirigida* es una secuencia de bordes en un grafo dirigido de la forma $(i_1, i_2), (i_2, i_3) \dots$. Así mismo, una *trayectoria no-dirigida* en un grafo no-dirigido se define de manera análoga. Un grafo dirigido está *fuertemente conectado* si existe una trayectoria dirigida desde cada nodo a todos los demás nodos. Un *árbol dirigido* es un grafo dirigido en el que cada nodo tiene exactamente un padre excepto por un nodo, llamado *raíz*, el cual no tiene padre y tiene trayectorias dirigidas a todos los demás nodos.

Un *subgrafo* $(\mathcal{V}^s, \mathcal{E}^s)$ de $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, es un grafo tal que $\mathcal{V}^s \subseteq \mathcal{V}$ y $\mathcal{E}^s \subseteq \mathcal{E} \cap (\mathcal{V}^s \times \mathcal{V}^s)$. Un *árbol de expansión dirigido* $(\mathcal{V}^s, \mathcal{E}^s)$ de un grafo dirigido $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ es un subgrafo de $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tal que $(\mathcal{V}^s, \mathcal{E}^s)$ es un árbol dirigido y $\mathcal{V}^s = \mathcal{V}$. Note que un grafo dirigido $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tiene un árbol de expansión dirigido si y solo si $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tiene al menos un nodo con trayectorias dirigidas a todos los demás nodos. En grafos no dirigidos, la existencia de un árbol de expansión es equivalente a que el grafo esté conectado, sin embargo, en grafos dirigidos la existencia de un árbol de expansión es una condición más débil que la de estar fuertemente conectado. Tómese por ejemplo la Figura 2.1 la cual muestra un grafo dirigido que contiene dos árboles de expansión, con nodos 1 y 2 como raíces, pero no está fuertemente conectado porque los nodos 3, 4, 5 y 6 no tienen trayectorias dirigidas a todos los demás nodos.

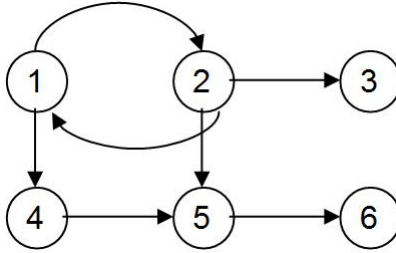


Figura 2.1: Grafo dirigido entre seis agentes. Una flecha del nodo i al nodo j indica que el agente j puede obtener información del agente i .

Los grafos se pueden representar de diferentes formas, por ejemplo, listando todos los bordes, utilizando listas de adyacencia donde se especifica qué nodos son adyacentes, o bien utilizando matrices.

2.2.1. Representación Matricial

Una forma de representar matemáticamente a los grafos es por medio de matrices con propiedades específicas que modelen el comportamiento lineal de las interconexiones. En este contexto, para caracterizar las interconexiones entre los agentes se utilizarán los conceptos de matriz de adyacencia y matriz Laplaciana.

Matriz de adyacencia

La *Matriz de adyacencia* $\mathcal{A} \triangleq [a_{ij}] \in R^{p \times p}$ de un grafo dirigido $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ se define tal que a_{ij} es un peso positivo si el borde $(j, i) \in \mathcal{E}$, y $a_{ij} = 0$ si $(j, i) \notin \mathcal{E}$. Para grafos no-dirigidos, la matriz de adyacencia se define de manera análoga excepto que $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i \neq j$. Es decir, los coeficientes de esta matriz determinan la adyacencia de un nodo padre al nodo hijo.

Un problema usual en teoría de grafos es el de encontrar el camino más corto (liviano) entre dos nodos dados; sin embargo, si el peso no es relevante, entonces a_{ij} es igual a uno si $(j, i) \in \mathcal{E}$. Además, cada i -ésimo renglón de esta matriz contiene información de los bordes entrantes, así como cada j -ésima columna contiene información de los bordes salientes. Así pues, el *grado de entrada* y el *grado de salida* de un nodo se define, respectivamente, como $\sum_{j=1}^p a_{ij}$ y $\sum_{j=1}^p a_{ji}$. Y se dice que un nodo i está *balanceado* si el grado de entrada de ese nodo es igual al grado de salida del mismo, es decir, si $\sum_{j=1}^p a_{ij} = \sum_{j=1}^p a_{ji}$. En este mismo sentido se dice que un *grafo* está balanceado si todos sus nodos están balanceados, es decir, que se cumple que $\sum_{j=1}^p a_{ij} = \sum_{j=1}^p a_{ji}$ para todo i , lo cual implica que la suma de todos los elementos en el renglón correspondiente es igual a la suma de todos los elementos en la columna correspondiente. Se observa que la matriz de adyacencia \mathcal{A} de todo grafo no-dirigido es simétrica.

Matriz Laplaciana

Se define a la *Matriz Laplaciana* $\mathcal{L} \triangleq [l_{ij}] \in R^{p \times p}$ de un grafo como:

$$l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^p a_{ij}, \quad l_{ij} = -a_{ij}, \quad i \neq j \quad (2.1)$$

Nótese que si $(j, i) \notin \mathcal{E}$ entonces $l_{ij} = -a_{ij} = 0$. La matriz \mathcal{L} satisface

$$l_{ij} \leq 0, \quad i \neq j, \quad \sum_{j=1}^p l_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.2)$$

En el caso de grafos no dirigidos \mathcal{L} es una matriz simétrica; sin embargo, esto no necesariamente sucede para grafos dirigidos, en donde a la matriz también se le conoce como *matriz Laplaciana no-simétrica* [24].

Obsérvese que \mathcal{L} en (2.1) puede ser definida equivalentemente como $\mathcal{L} \triangleq D - \mathcal{A}$, donde $D \triangleq [d_{ij}] \in \mathbb{R}^{p \times p}$ es la *matriz de grados de entrada* dada por $d_{ij} = 0$, $i \neq j$ y $d_{ii} = \sum_{j=1}^p a_{ij}$, $i = 1, \dots, p$. Luego, como la suma de los elementos de los renglones de \mathcal{L} es cero, 0 es un valor propio de \mathcal{L} asociado al vector propio $\mathbf{1}_p$. Nótese que \mathcal{L} es diagonalmente dominante y tiene entradas diagonales no negativas, y de acuerdo con el teorema del disco de Gershgorin (ver Teorema 2 de [10]), para grafos no dirigidos, todos los valores propios diferentes de cero son positivos (en otras palabras \mathcal{L} es simétrica positiva semidefinida), mientras que para grafos dirigidos, todos los valores propios diferentes de cero de \mathcal{L} tienen parte real positiva.

Lema 1 [24] *Sea \mathcal{L} la matriz Laplaciana asociada al grafo dirigido \mathcal{G} de orden p . Entonces para el grafo dirigido \mathcal{G} , \mathcal{L} tiene al menos un valor propio cero y todos sus valores propios diferentes de cero tienen parte real positiva. Más aún, \mathcal{L} tiene un valor propio simple en cero y todos los demás valores propios tienen parte real positiva si y solo si \mathcal{G} tiene un árbol de expansión dirigido (que el grafo no dirigido esté conectado). Adicionalmente, $\mathcal{L}\mathbf{1}_p = \mathbf{0}_p$ y existe un vector no negativo (vector propio izquierdo asociado al valor propio cero de \mathcal{L}) $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^p$ que satisface $\mathbf{p}^T \mathcal{L} = \mathbf{0}_{1 \times p}$ y $\mathbf{p}^T \mathbf{1}_p = 1$. Y si \mathcal{G} tiene un árbol de expansión dirigido, entonces \mathbf{p} es único.*

Lema 2 [24] *Suponga que $z \triangleq [z_1^T, \dots, z_p^T]^T$ con $z_i \in \mathbb{R}^m$, y sean $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ y $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ las matrices Adyacente y Laplaciana, respectivamente, entonces las siguientes cinco condiciones son equivalentes:*

1. \mathcal{L} tiene un valor propio simple cero, con un vector propio asociado $\mathbf{1}_p$ y el resto de los valores propios tienen parte real positiva;
2. $(\mathcal{L} \otimes I_m)z = 0$ si y solo si $z_1 = \dots = z_p$;
3. Para el sistema en lazo cerrado $\dot{z} = -(\mathcal{L} \otimes I_m)z$ o equivalentemente $\dot{z}_i = -\sum_{j=1}^n a_{ij}(z_i - z_j)$, donde a_{ij} es la (i, j) -ava entrada de \mathcal{A} ,

para todo $z_i(0)$ y todo $i, j = 1, \dots, p$, se logra que $\|z_i(t) - z_j(t)\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$;

4. El grafo dirigido \mathcal{G} tiene un árbol de expansión dirigido.
5. El rango de \mathcal{L} es $p-1$.

2.3. Consenso

El problema del consenso surge para dar solución al problema donde es necesario que un grupo de agentes llegue a un acuerdo respecto a ciertas cantidades de interés. Así, si se considera a $x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_n^T] \in \mathbb{R}^{Nn}$, con $x_i \in \mathbb{R}^{Nn}$, la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^{Nn} \quad (2.3)$$

se dice que los nodos de la red han alcanzado un consenso si y solo si $x_i(t) = x_j(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$, para todo $i, j \in \mathcal{V}$, con $i \neq j$. Casos de consenso que se encuentran comunmente en la literatura son los llamados *consenso promedio* ($Ave(x) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i$), *consenso máximo* ($Max(x) = \max\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$) y *consenso mínimo* ($Min(x) = \min\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$).

La idea principal tras este concepto es el establecimiento de condiciones bajo las cuales los agentes lleguen de manera asintótica a un acuerdo en el sentido de que el estado de cada agente sea llevado al estado de sus vecinos. Es importante notar que estas condiciones de comportamiento *colectivo* deseado están determinadas tanto por la dinámica individual de cada agente, como por la estructura propia de la red de comunicación.

2.4. Robots de Uniones Flexibles

Es común encontrar robots manipuladores que presentan uniones flexibles. Esta flexibilidad es causada por ciertos elementos de transmisión, bandas elásticas o bien motores con flechas muy largas. El fenómeno producido debido a la flexibilidad afecta de manera considerable el desempeño de los robots manipuladores produciendo comportamientos oscilatorios no deseados. Una forma usual de mejorar este desempeño es tomando en cuenta la flexibilidad, tanto en el modelo como en la ley de control, modelándola como el efecto de resortes rotacionales lineales [5], aún cuando, bajo estas consideraciones, el orden del modelo de un robot de uniones flexibles se vuelve el doble que el orden del modelo de un robot de uniones rígidas y el sistema se convierte en uno sub-actuado, volviendo el Análisis dinámico más complejo.

Así pues, los robots de uniones flexibles son sistemas *Euler Lagrange Subactuados*, con coordenadas generalizadas $q \triangleq [q_1^T, q_2^T]^T$, donde $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^n$ son los ángulos del eslabón y de la flecha del motor, respectivamente. El hecho de que sean sistemas subactuados significa que no existe entrada de control que actúe directamente sobre las variables flexibles, es decir, las variables de control están sólo en los pares mecánicos de las flechas.

La ecuación dinámica simplificada para un robot de uniones flexibles puede encontrarse en [5] y está dada por

$$\begin{aligned} \bar{D}(q_1)\ddot{q}_1 + \bar{C}(q_1, \dot{q}_1)\dot{q}_1 + \bar{g}(q_1) + \bar{K}(q_1 - q_2) &= 0 \\ \bar{J}\ddot{q}_2 - \bar{K}(q_1 - q_2) &= u \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde la matriz $\bar{D}(q_1) = \bar{D}^T(q_1) > 0$ es la matriz de inercia, de $n \times n$, para los eslabones rígidos, $\bar{J} \in R^{n \times n}$ es una matriz diagonal de inercias del actuador, $\bar{K} > 0$ es una matriz diagonal que contiene los coeficientes de rigidez, $\bar{C}(q_1, \dot{q}_1)$ es la matriz de Coriolis y $\bar{g}(q_1)$ el vector de fuerzas gravitacionales. En la ecuación (2.4) puede observarse que la dinámica de los

eslabones y la dinámica del motor están acopladas linealmente por medio de la matriz de elasticidad. Así mismo, si las uniones se consideran rígidas, en el sentido de que el coeficiente de elasticidad $\bar{K} \rightarrow \infty$, entonces (2.4) se reduce al bien conocido modelo para robots de uniones rígidas.

2.4.1. Esquema Basado en Pasividad

El problema de controlar un robot de uniones flexibles con matriz de inercia diagonal a bloques se ha abordado desde diferentes perspectivas. En [3] se hace un estudio comparativo de diferentes esquemas de control, como los basados en desacoplamiento, backstepping y pasividad, que estabilizan globalmente al sistema no-lineal con leyes de control internamente estables¹. En el mismo sentido, en [5] se presenta un Controlador Basado en Pasividad (PBC por sus siglas en inglés) como una retroalimentación estática del estado, con dinámica en lazo cerrado exponencialmente estable y que admite implementación adaptable.

Uno de los controladores presentados en [3], y al que se aludirá constantemente a lo largo de la tesis, es el de Lozano y Brogliato (1992) obtenido de la aplicación de técnicas basadas en pasividad. El uso de esta técnica también es bien conocida en el caso de robots de uniones rígidas, donde una de las motivaciones en su empleo es la robustez que presentan sus resultados frente a las técnicas donde es necesaria la linealización. Antes de mostrar este controlador, para simplificar la notación, resulta conveniente reescribir a (2.4) en su forma compacta como

$$\bar{D}(q_1)\ddot{q} + \bar{C}(q_1, \dot{q}_1)\dot{q} + \bar{G}(q_1) + \bar{K}q = Mu \quad (2.5)$$

con las matrices

¹Para un análisis comparativo de estas técnicas ver [5]

$$\bar{\mathcal{D}}(q_1) = \begin{bmatrix} \bar{D}(\bar{q}_1) & 0 \\ 0 & \bar{J} \end{bmatrix}; \bar{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \bar{C}(\bar{q}_1, \dot{\bar{q}}_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \bar{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} \bar{K} & -\bar{K} \\ -\bar{K} & \bar{K} \end{bmatrix}$$

Este sistema tiene diferentes propiedades (Lema 3 de [3]), entre ellas, que define un *operador pasivo* $\Sigma : u \rightarrow \dot{q}_2$, es decir, existe una $\beta \in R$ tal que $\langle u | \dot{q}_2 \rangle \geq \beta$, para todo $u \in \mathcal{L}_{2e}$. Más aún, para toda $q_1, \dot{q}_1 \in \mathcal{L}_{2e}$, el sistema $\bar{\mathcal{D}}\dot{s} + (\bar{\mathcal{C}} + \bar{B})s + \bar{\mathcal{K}} \int_0^t s(\tau) d\tau = \psi$, con $\bar{B} = \bar{B}^T > 0$ y la señal de error $s = \dot{\tilde{q}} + \bar{\Lambda}\tilde{q}$ con $\bar{\Lambda} = \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2)$, $\Lambda_1, \Lambda_2 > 0$ y diagonales, define un operador estrictamente pasivo a la salida, es decir, existen $\beta \in R$ y $\alpha > 0$ tal que $\langle \psi | s \rangle \geq \alpha \|s\|_2^2 + \beta$. Consecuentemente, si $\psi \equiv 0$, entonces $s \in \mathcal{L}_2$.

La idea general en el diseño de este controlador es definir q_{2d} para asegurar el moldeo de energía, es decir, proponer q_{2d} de tal forma que el sistema en lazo cerrado tenga una energía total igual a la energía deseada. En este caso, para definir la función de energía deseada se debe tomar en cuenta la presencia de energía potencial debida al término $q^T \bar{\mathcal{K}} q$ imposible de eliminar. Por supuesto, se pueden obtener diferentes controladores con elecciones distintas de energía potencial.

Aquí, eligiendo la energía total deseada del sistema en lazo cerrado como $H_d = \frac{1}{2} s^T \bar{\mathcal{D}} s + \frac{1}{2} \left[\int_0^t s^T(\tau) d\tau \right]^T \bar{\mathcal{K}} \left[\int_0^t s(\tau) d\tau \right]$, puede reescribirse a (2.5) en términos de la señal de error

$$\bar{\mathcal{D}}\dot{s} + (\bar{\mathcal{C}} + \bar{B})s + \bar{\mathcal{K}} \int_0^t s(\tau) d\tau = \psi \quad (2.6)$$

con $\psi = u - (\bar{\mathcal{D}}\ddot{q}_r + \bar{\mathcal{C}}\dot{q}_r + \bar{\mathcal{K}}q_r + \bar{g}) + \bar{B}s - \bar{\mathcal{K}}\tilde{q}(0)$, donde $q_r = q_d - \bar{\Lambda} \int_0^t \tilde{q}(\tau) d\tau$ y la señal de error $s = \dot{\tilde{q}} + \bar{\Lambda}\tilde{q}$. Así, la solución de $\psi = 0$ define una ley de

control global por retroalimentación de estados de la forma

$$\begin{aligned}
 u &= -\bar{B}_2 s_2 + \bar{J} \ddot{q}_{2r} - \bar{K} (q_{1r} - q_{2r}) \\
 q_{2d} &= \frac{p}{pI + \Lambda_2} \left[K^{-1} u_R + q_{1d} + K (\tilde{q}_1(0) - \tilde{q}_2(0)) - \int_0^t (\Lambda_1 \tilde{q}_1 - \Lambda_2 q_2) d\tau \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

donde u_R es la señal de control usual para robots de uniones rígidas, esto es $u_R = \bar{D} \ddot{q}_{1r} + \bar{C} \dot{q}_{1r} + \bar{g} - \bar{B}_1 s_1$, mientras que $p = \frac{d}{dt}$. Después de algunos cálculos y reemplazando la ley de control (2.7) en el modelo (2.5) conlleva a la ecuación en lazo cerrado (2.6) con $\psi = 0$, la cual tiene las propiedades antes enunciadas².

²Para detalles de la prueba de estabilidad ver [3]

Capítulo 3

Control Multiagente

En este capítulo se enuncia el problema de consenso en una red multiagente compuesta por N -robots de uniones flexibles, cada uno como los presentados en el capítulo anterior. Así mismo, se propone una solución al problema de consenso la cual está dividida en dos secciones principales: en la primera se estudia el caso donde no hay retardos en la comunicación entre los agentes y, la segunda, donde se considera que existen retardos en la comunicación. Ambas propuestas tienen como inspiración los resultados reportados en [3] para la estabilización de la dinámica individual y los reportados en [23] donde se considera el caso de robots totalmente actuados. En cada subsección los resultados son validados por simulación.

3.1. Modelo Multiagente

En lo que resta de esta tesis, los vectores estarán asociados a tres subíndices i, j, k . El primer subíndice denota el número del robot flexible que compone a la red; es decir, $i \in \bar{N} = \{1, \dots, N\}$, donde N es el número total de robots

en la red. El subíndice j señala si la coordenada es *no-actuada* o *actuada*. Así, $j = 1$ se refiere a la coordenada no-actuada mientras que $j = 2$ hace referencia a la actuada. Finalmente, el subíndice k está relacionado con la k -ésima coordenada actuada o no actuada de un robot dado. En este contexto, $k \in \bar{n} = \{1, \dots, n\}$, puesto que se asumirá que cada robot tiene $2n$ grados de libertad. Por ejemplo, $q_{111} \in \mathbb{R}$ denota la primer coordenada no-actuada del primer robot¹.

Bajo estas notaciones, defínase a $\bar{\mathbf{q}}_{i1} := \text{col}(q_{i11}, \dots, q_{i1n}) \in \mathbb{R}^n$ y $\bar{\mathbf{q}}_{i2} := \text{col}(q_{i21}, \dots, q_{i2n}) \in \mathbb{R}^n$ como el conjunto de las n coordenadas *no-actuadas* y el conjunto de las n coordenadas *actuadas* del i -ésimo robot, respectivamente. Así, se define también al vector de coordenadas generalizadas $\bar{\mathbf{q}}_i := \text{col}(\bar{\mathbf{q}}_{i1}, \bar{\mathbf{q}}_{i2}) \in \mathbb{R}^{2n}$. De esta manera se puede escribir el modelo para el i -ésimo robot de uniones flexibles como

$$\bar{D}_i(\bar{\mathbf{q}}_{i1})\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_i + \bar{C}_i(\bar{\mathbf{q}}_{i1}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{i1})\dot{\bar{\mathbf{q}}}_i + \bar{G}(\bar{\mathbf{q}}_{i1}) + \bar{K}_i\bar{\mathbf{q}}_i = \bar{M}_i\bar{\mathbf{u}}_i \quad (3.1)$$

con las matrices

$$\bar{D}_i = \begin{bmatrix} \bar{D}_i(\bar{\mathbf{q}}_{i1}) & 0 \\ 0 & \bar{J}_i \end{bmatrix}; \bar{C}_i = \begin{bmatrix} \bar{C}_i(\bar{\mathbf{q}}_{i1}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{i1}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \bar{K}_i = \begin{bmatrix} \bar{K}_i & -\bar{K}_i \\ -\bar{K}_i & \bar{K}_i \end{bmatrix}$$

y $\bar{M}_i = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix}^T$, donde I_n es la matriz identidad de orden n y \bar{D}_i , \bar{C}_i y $\bar{K}_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ denotan las matrices de inercia, Coriolis y de elasticidad, respectivamente. Mientras que $\bar{G}(\bar{\mathbf{q}}_{i1}) = \begin{bmatrix} \bar{G}_i(\bar{\mathbf{q}}_{i1}) & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2n}$ es el vector de fuerzas gravitacionales.

Puede observarse que el modelo (3.1) para el i -ésimo robot satisface varias propiedades estructurales presentadas en [28]. En particular, que $\bar{D}_i(\bar{\mathbf{q}}_{i1}) = \bar{D}_i(\bar{\mathbf{q}}_{i1})^T > 0$, mientras que la matriz de Coriolis $\bar{C}_i(\bar{\mathbf{q}}_{i1}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{i1})$ satisface que

¹Si sólo aparecen dos subíndices, representados por i, j , se siguen las mismas consideraciones, es decir, se debe interpretar como el número de robot y las coordenadas actuadas o no-actuadas.

$\dot{D}_i(\bar{\mathbf{q}}_{i1}) = \bar{C}_i(\bar{\mathbf{q}}_{i1}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{i1}) + \bar{C}_i^T(\bar{\mathbf{q}}_{i1}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{i1})$, equivalente a la propiedad de antisimetría $\mathbf{z}^T \left[\dot{D}_i(\bar{\mathbf{q}}_{i1}) - 2\bar{C}_i(\bar{\mathbf{q}}_{i1}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{i1}) \right] \mathbf{z} = 0$; $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n}$. Así mismo, este modelo cumple con las propiedades de pasividad enunciadas en el capítulo anterior.

3.2. Objetivo de Control

Considérese una red compuesta por N robots de uniones flexibles como los del modelo (3.1), interconectada por medio de un protocolo de comunicación caracterizado por la matriz Laplaciana \mathcal{L} , donde el intercambio de información entre el i -ésimo y el r -ésimo agente está sujeto a un retardo desconocido $T_{ir} \geq 0$. Encuentre una ley de control $\bar{\mathbf{u}}_i$ tal que las coordenadas *no-actuadas* $\bar{\mathbf{q}}_{i1}$ de todos los robots de la red alcancen un *consenso*. Es decir, que para toda $i \in \bar{N}$, el $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{q}}_{i1} = \mathbf{q}_c$, para algún vector constante $\mathbf{q}_c \in \mathbb{R}^n$, satisfaciendo que $\lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{\bar{\mathbf{q}}}_{i1}| = 0$ y garantizando estabilidad interna.

3.3. Control: Caso Sin Retardos

En esta sección se asumirá $T_{ir} = 0$, es decir, que el intercambio de información entre un agente y otro no está sujeto a retardos. La idea general tras el diseño del controlador multiagente es generar un protocolo de comunicación que por un lado interconecte a los robots de uniones flexibles, y por el otro, incida en la dinámica individual de cada agente, en el sentido de lograr que cada robot tenga un comportamiento igual al deseado. Es decir, que el protocolo de control garantice que las coordenadas *actuadas* converjan a sus deseadas, esto es que el $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{q}}_{i2} \rightarrow \bar{\mathbf{q}}_{i2d}$, y con el acoplamiento lineal con las coordenadas no-actuadas, se logre demostrar que en el límite, el conjunto de las coordenadas generalizadas *no actuadas* llegan a un consenso, es decir, que $\mathbf{q}_1 \rightarrow \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{q}_c$.

Para esto, resulta conveniente escribir al modelo (3.1) en su forma equivalente para N robots. Así pues, considerando a los vectores $\mathbf{q}_1 := \text{col}(\bar{\mathbf{q}}_{11}, \dots, \bar{\mathbf{q}}_{N1}) \in \mathbb{R}^{Nn}$ y $\mathbf{q}_2 := \text{col}(\bar{\mathbf{q}}_{12}, \dots, \bar{\mathbf{q}}_{N2}) \in \mathbb{R}^{Nn}$ como el conjunto de las n componentes *no-actuadas* y las n componentes *actuadas* de los N robots, respectivamente, se puede reescribir al modelo multiagente como

$$\begin{aligned} D(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_1 + C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}}_1 + G(\mathbf{q}_1) + K(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) &= 0 \\ J\ddot{\mathbf{q}}_2 - K(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) &= \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.2)$$

con las matrices $D = \text{diag}\{\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_N\} \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$, $C = \text{diag}\{\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_N\} \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$, $K = \text{diag}\{\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_N\} \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$, $J = \text{diag}\{\bar{J}_1, \dots, \bar{J}_N\} \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$, $G = \text{col}(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_N) \in \mathbb{R}^{Nn}$ y $\mathbf{u} = \text{col}(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N) \in \mathbb{R}^{Nn}$. El modelo (3.2) también admite una representación en su forma compacta definiendo al vector $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2Nn}$, tal que

$$\mathcal{D}(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}} + \mathcal{G}(\mathbf{q}_1) + \mathcal{K}\mathbf{q} = M\mathbf{u} \quad (3.3)$$

donde

$$\mathcal{D}(\mathbf{q}_1) = \begin{bmatrix} D(\mathbf{q}_1) & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}; \mathcal{C} = \begin{bmatrix} C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathcal{K} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}$$

Puede observarse que con las definiciones² de \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 y \mathbf{q} , en (3.2) y (3.3) se recupera la estructura de un robot de uniones flexibles. Así, con esta representación en coordenadas, es posible introducir el error de consenso para las coordenadas no actuadas como

$$\mathbf{e}_1 = (\mathcal{L} \otimes I_n)\mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^{Nn} \quad (3.4)$$

con \otimes el producto de Kronecker estándar, de tal forma que dadas las propiedades de la matriz Laplaciana para grafos con un árbol de expansión, el error de

²Con la idea de evitar dificultades con la notación, en lo subsecuente se señalarán las dimensiones de los vectores y matrices sólo cuando sea necesario.

consenso es cero si y solo si las entradas del vector que agrupa a todas las coordenadas no actuadas \mathbf{q}_1 son iguales. Se definen también dos variables auxiliares

$$\epsilon_1 = \dot{\mathbf{q}}_1 + \lambda_1 \mathbf{e}_1 \quad ; \quad \epsilon_2 = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 + \Lambda_2 \tilde{\mathbf{q}}_2 \quad (3.5)$$

donde a $\tilde{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_{2d} \in \mathbb{R}^{Nn}$ se le ha llamado, con riesgo de abusar del lenguaje, *error de seguimiento* y representa el error entre la señal deseada para las coordenadas actuadas, dada por el controlador, y las coordenadas reales. Mientras que $\Lambda_2 = \text{diag}\{\Lambda_{12}, \Lambda_{22}, \dots, \Lambda_{N2}\} \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$ es una matriz de ganancias. Aquí, la variable auxiliar de error para las coordenadas actuadas ϵ_2 se presenta con la idea de seguir exactamente la técnica ampliamente utilizada del controlador para seguimiento de trayectorias de Slotine y Li para robots de uniones rígidas [28, 3, 5]. Mientras que, la variable auxiliar ϵ_1 está inspirada en la anterior, pero toma en cuenta para su definición el error de consenso. Así, estas variables de error pueden agruparse en el vector $\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1^T & \epsilon_2^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2Nn}$, de tal forma que puede escribirse como

$$\epsilon = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \mathbf{E}$$

con los errores $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1^T & (\dot{\mathbf{q}}_2 - \dot{\mathbf{q}}_{2d})^T \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T & \tilde{\mathbf{q}}_2^T \end{bmatrix}^T$ y la matriz de ganancias $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1 I_{Nn}, \Lambda_2\} \in \mathbb{R}^{2Nn}$.

De esta manera, si se evalúa la dinámica del error (3.5) en el modelo (3.3), se tiene que

$$\mathcal{D}(\mathbf{q}_1) \left(\dot{\epsilon} - \Lambda \dot{\mathbf{E}} + \dot{\xi} \right) + \mathcal{C}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \left(\epsilon - \Lambda \mathbf{E} + \xi \right) + \mathcal{G}(\mathbf{q}_1) + \mathcal{K} \mathbf{q} = M \mathbf{u} \quad (3.6)$$

con el vector $\xi = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \mathbf{q}_{2d}^T \end{bmatrix}^T$.

Obsérvese que de (3.5) las coordenadas también pueden escribirse como

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^t (\epsilon_1(\tau) - \lambda_1 \mathbf{e}_1(\tau)) d\tau + \mathbf{q}_1(0) \\ \int_0^t (\epsilon_2(\tau) - \Lambda_2 \tilde{\mathbf{q}}_2(\tau)) d\tau + \mathbf{q}_{2d} + \mathbf{q}_2(0) \end{bmatrix}$$

es decir, que el conjunto de coordenadas generalizadas se puede expresar como el vector $\mathbf{q} = \int_0^t \epsilon(\tau) - \Lambda \mathbf{E}(\tau) d\tau + \xi + \mathbf{q}_0$, con $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(0)$ las condiciones iniciales. Lo anterior implica que se puede reescribir el modelo evaluado en la dinámica del error (3.6) en términos del estado ϵ y de su integral,

$$\mathcal{D}(\mathbf{q}_1) \dot{\epsilon} + \mathcal{C}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \epsilon + \mathcal{K} \int_0^t \epsilon(\tau) d\tau = \Phi \quad (3.7)$$

con la variable Φ dada por

$$\Phi = M \mathbf{u} - \left\{ -\mathcal{D}(\mathbf{q}_1) \Lambda \dot{\mathbf{E}} + \mathcal{D}(\mathbf{q}_1) \ddot{\xi} - \mathcal{C}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \Lambda \mathbf{E} + \mathcal{C}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \dot{\xi} + \mathcal{G}(\mathbf{q}_1) - \mathcal{K} \int_0^t \Lambda \mathbf{E}(\tau) d\tau + \mathcal{K} \xi + \mathcal{K} \mathbf{q}_0 \right\} \quad (3.8)$$

De modo que, haciendo la dinámica del error $\Phi = K_d \epsilon$ en (3.8) y (3.7) con la matriz de ganancias $K_d = \text{diag}(K_{d1}, K_{d2}) > 0$ se tienen las siguientes dos igualdades

$$\begin{aligned} -D \lambda_1 \dot{\epsilon}_1 - C \lambda_1 \mathbf{e}_1 + G - K \int_0^t (\lambda_1 \mathbf{e}_1 - \Lambda_2 \tilde{\mathbf{q}}_2) d\tau - K \mathbf{q}_{2d} \\ + K(\mathbf{q}_{10} - \mathbf{q}_{20}) - K_{d1} \epsilon_1 = 0 \\ -J \Lambda_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 + J \ddot{\mathbf{q}}_{2d} + K \int_0^t (\lambda_1 \mathbf{e}_1 - \Lambda_2 \tilde{\mathbf{q}}_2) d\tau + K \mathbf{q}_{2d} \\ - K(\mathbf{q}_{10} - \mathbf{q}_{20}) - K_{d2} \epsilon_2 = \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde puede verse que la primer parte de (3.9) se refiere a la dinámica no actuada, mientras que la segunda tiene en cuenta aquella donde actúa directamente la señal de control. Luego, definiendo la variable \mathbf{u}_r como $\mathbf{u}_r = -D \lambda_1 \dot{\epsilon}_1 - C \lambda_1 \mathbf{e}_1 + G - K_{d1} \epsilon_1$, que es la ley de control reportada en [23]

para robots con uniones rígidas, la parte no actuada de (3.9) toma la forma

$$\mathbf{u}_r - K \int_0^t (\lambda_1 \mathbf{e}_1 - \Lambda_2 \mathbf{q}_2) d\tau + K(\mathbf{q}_{10} - \mathbf{q}_{20}) = K \mathbf{q}_{2d} + K \int_0^t \Lambda_2 \mathbf{q}_{2d} d\tau$$

por lo que, derivando ambos lados de la ecuación anterior se tiene,

$$\begin{aligned} p \left(K^{-1} \left\{ \mathbf{u}_r - K \int_0^t (\lambda_1 \mathbf{e}_1 - \Lambda_2 \mathbf{q}_2) d\tau + K(\mathbf{q}_{10} - \mathbf{q}_{20}) \right\} \right) &= p \mathbf{q}_{2d} + \Lambda_2 \mathbf{q}_{2d} \\ (p + \Lambda_2) \mathbf{q}_{2d} &= p K^{-1} \left\{ \mathbf{u}_r - K \int_0^t (\lambda_1 \mathbf{e}_1 - \Lambda_2 \mathbf{q}_2) d\tau + K(\mathbf{q}_{10} - \mathbf{q}_{20}) \right\} \end{aligned}$$

con $p = \frac{d}{dt}$, de tal manera que la expresión para \mathbf{q}_{2d} , que asegura que el comportamiento sea el adecuado es

$$\mathbf{q}_{2d} = \frac{p}{(p + \Lambda_2)} \left(K^{-1} \left\{ \mathbf{u}_r - K \int_0^t (\lambda_1 \mathbf{e}_1 - \Lambda_2 \mathbf{q}_2) d\tau + K(\mathbf{q}_{10} - \mathbf{q}_{20}) \right\} \right) \quad (3.10)$$

mientras que la ley de control puede obtenerse de la segunda parte de la ecuación (3.9), esto es

$$\mathbf{u} = -K_{d2} \epsilon_2 + J (\ddot{\mathbf{q}}_{2d} - \Lambda_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2) + K \left(\int_0^t (\lambda_1 \mathbf{e}_1 - \Lambda_2 \tilde{\mathbf{q}}_2) d\tau + \mathbf{q}_{2d} \right) - K(\mathbf{q}_{10} - \mathbf{q}_{20}) \quad (3.11)$$

La ley de control propuesta es una ley de control no lineal por retroalimentación del estado, es decir, necesita de la medición de \mathbf{q}_1 , $\dot{\mathbf{q}}_1$, \mathbf{q}_2 , y $\dot{\mathbf{q}}_2$. Estas mediciones permiten que sea razonable que la ley de control dependa del conocimiento de las condiciones iniciales \mathbf{q}_{10} y \mathbf{q}_{20} . Sin embargo, en la sección de discusión se enunciarán algunas propiedades de robustez respecto a la incertidumbre en dichas condiciones.

Sustituyendo la ley de control dada por (3.10) y (3.11) en el modelo (3.3), que corresponde a hacer $\Phi = K_d \epsilon$ en la ecuación diferencial (3.7), se tiene la expresión para el sistema en lazo cerrado en términos de la variable auxiliar

de error ϵ y de su integral,

$$\mathcal{D}(\mathbf{q}_1)\dot{\epsilon} + (\mathcal{C}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) + K_d)\epsilon + \mathcal{K} \int_0^t \epsilon(\tau) d\tau = 0 \quad (3.12)$$

Como una primer parte, para probar que la variable ϵ está acotada, se propone la funcional cuadrática en esta variable y en su integral como $V = \frac{1}{2}\epsilon^T \mathcal{D}\epsilon + \frac{1}{2} \left[\int_0^t \epsilon^T(\tau) d\tau \right] \mathcal{K} \left[\int_0^t \epsilon(\tau) d\tau \right]$. Luego, evaluando la derivada temporal de V a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado, y haciendo uso de la propiedad de antisimetría de la matriz $(\dot{\mathcal{D}} - 2\mathcal{C})$, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \epsilon^T \mathcal{D}\dot{\epsilon} + \frac{1}{2}\epsilon^T \dot{\mathcal{D}}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon^T \mathcal{K} \left[\int_0^t \epsilon(\tau) d\tau \right] + \frac{1}{2} \left[\int_0^t \epsilon^T(\tau) d\tau \right] \mathcal{K}\epsilon \\ &= \epsilon^T \left[(-\mathcal{C} - K_d)\epsilon - \mathcal{K} \int_0^t \epsilon(\tau) d\tau \right] + \frac{1}{2}\epsilon^T \dot{\mathcal{D}}\epsilon + \epsilon^T \mathcal{K} \int_0^t \epsilon(\tau) d\tau \\ &= -\epsilon^T K_d \epsilon + \epsilon^T (\dot{\mathcal{D}} - 2\mathcal{C}) \epsilon - \epsilon^T \mathcal{K} \left[\int_0^t \epsilon(\tau) d\tau \right] + \epsilon^T \mathcal{K} \left[\int_0^t \epsilon(\tau) d\tau \right] \end{aligned}$$

por lo que

$$\dot{V} = -\epsilon^T K_d \epsilon \leq 0$$

Para mostrar que ϵ está acotado, en el sentido de que pertenece al espacio L_∞ , hay que notar que V es la suma de términos no negativos, esto significa que está acotada por abajo y como $\dot{V} \leq 0$, es decir, V es no-creciente y su valor no puede ser mayor que su valor en $t = 0$, implica que V también está acotada por arriba, lo cual lleva a la conclusión de que el argumento ϵ también está acotado, es decir, que $\epsilon \in L_\infty$.

Por otro lado, recordando que una función cuadrática positiva definida se puede acotar por sus valores propios máximos y mínimos, es decir, que $\epsilon^T K_d \epsilon$ satisface $\lambda_{\min}(K_d) \epsilon^T \epsilon \leq \epsilon^T K_d \epsilon \leq \lambda_{\max}(K_d) \epsilon^T \epsilon$, que resulta equivalente a $-\lambda_{\max}(K_d) \epsilon^T \epsilon \leq -\epsilon^T K_d \epsilon \leq -\lambda_{\min}(K_d) \epsilon^T \epsilon$. Entonces, puede acotarse a la derivada temporal de V e integrar ambos lados de la desigualdad,

$$\dot{V} = -\epsilon^T K_d \epsilon \leq -\lambda_{\min}(K_d) \epsilon^T \epsilon \leq 0$$

tal que

$$V(T) - V(0) \leq -\lambda_{\min}(K_d) \int_0^T (\epsilon^T \epsilon) dt \leq 0$$

lo cual implica que la variable ϵ pertenece al espacio L_2 puesto que se cumple

$$\int_0^T (\epsilon^T \epsilon) dt \leq \frac{V_o(0)}{\lambda_{\min}(K_d)} < \infty$$

Más aún, de (3.12) puede verse que también $\dot{\epsilon} \in L_\infty$, lo anterior es suficiente para afirmar que ϵ es uniformemente continua. Utilizando entonces el Lema de Barbalat, se puede concluir que $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon \rightarrow 0$.

La segunda parte de la prueba consiste en demostrar que el vector de coordenadas no-actuadas alcanza un consenso, para esto nótese que sustituyendo el error de consenso (4.2) en (3.5), se tiene una ecuación diferencial para el vector de coordenadas no-actuadas dada por

$$\dot{\mathbf{q}}_1 = -\lambda_1(\mathcal{L} \otimes I_n)\mathbf{q}_1 + \epsilon_1 \quad (3.13)$$

el cual es un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI por sus siglas en inglés) con entrada $\epsilon_1 \in L_2 \cap L_\infty$. Sin embargo, la matriz $\mathcal{L} \otimes I_n$ no es Hurwitz, por lo que para el análisis de este sistema LTI se utilizará la salida propuesta en [20]

$$\mathbf{y}_1 = (Q \otimes I_n)\mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^{(N-1)n} \quad (3.14)$$

en donde la matriz $Q \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N}$ tiene las siguientes propiedades:

1. $QQ^T = I_{N-1}$,
2. $Q^T Q = I_N - \frac{1}{N}\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^T$,
3. $Q\mathbf{1}_N = 0$,

$$4. (Q \otimes I_n)\mathbf{q}_1 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{q}_1 = (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{q}_c) \text{ para algún } \mathbf{q}_c \in \mathbb{R}^n$$

Obteniendo ahora la derivada temporal de (3.14) a lo largo de (3.13), y usando las propiedades del producto de Kronecker, en particular el hecho de que $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$, se tiene la siguiente dinámica para \mathbf{y}_1

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_1 &= (Q \otimes I_n)\dot{\mathbf{q}}_1 \\ &= (Q \otimes I_n)(-\lambda_1(\mathcal{L} \otimes I_n)\mathbf{q}_1 + \epsilon_1) \\ &= -\lambda_1(Q \otimes I_n)(\mathcal{L} \otimes I_n)\mathbf{q}_1 + (Q \otimes I_n)\epsilon_1 \\ &= -\lambda_1(Q\mathcal{L} \otimes I_n)\mathbf{q}_1 + (Q \otimes I_n)\epsilon_1 \end{aligned}$$

aprovechando además que el producto $\mathcal{L}\mathbf{1}_N$ es cero, sin modificar la igualdad, se puede escribir que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_1 &= -\lambda_1 \left[(Q\mathcal{L}I_N - \frac{1}{N}Q\mathcal{L}\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^T) \otimes I_n \right] \mathbf{q}_1 + (Q \otimes I_n)\epsilon_1 \\ &= -\lambda_1 \left[Q\mathcal{L} \left(I_N - \frac{1}{N}\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^T \right) \otimes I_n \right] \mathbf{q}_1 + (Q \otimes I_n)\epsilon_1 \end{aligned}$$

Así, agrupando a las matrices de manera adecuada se puede utilizar la Propiedad 2 de la matriz Q , referente al producto matricial Q^TQ , tal que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_1 &= -\lambda_1 [Q\mathcal{L}Q^TQ \otimes I_n] \mathbf{q}_1 + (Q \otimes I_n)\epsilon_1 \\ &= -\lambda_1 [Q\mathcal{L}Q^T \otimes I_n] (Q \otimes I_n) \mathbf{q}_1 + (Q \otimes I_n)\epsilon_1 \end{aligned}$$

Entonces, la dinámica de \mathbf{y}_1 puede escribirse como el siguiente sistema LTI

$$\dot{\mathbf{y}}_1 = -\lambda_1 [Q\mathcal{L}Q^T \otimes I_n] \mathbf{y}_1 + (Q \otimes I_n)\epsilon_1 \quad (3.15)$$

Concerniente al sistema (3.15), se ha reportado en [23] que la matriz $-Q\mathcal{L}Q^T$ es **Hurwitz** para un grafo *conectado*, por lo que la matriz $Q\mathcal{L}Q^T \otimes I_n$ también es Hurwitz. La aseveración anterior significa que (3.15) es un sistema lineal

invariante en el tiempo *Asintóticamente Estable* con entrada $\epsilon_1 \in L_2 \cap L_\infty$ con esto se puede concluir entonces que $|\mathbf{y}_1| \rightarrow 0$. Además, si $|\mathbf{y}_1| \rightarrow 0$, por la definición en (3.14), también el producto $(Q \otimes I_n)\mathbf{q}_1 \rightarrow 0$. Sin embargo, por la propiedad 4 sobre la matriz Q , el producto $(Q \otimes I_n)\mathbf{q}_1 = 0$ si y solo si el vector $\mathbf{q}_1 = (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{q}_c)$, esto implica que $\mathbf{q}_1 \rightarrow (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{q}_c)$ para algún vector $\mathbf{q}_c \in \mathbb{R}^n$.

Más aún, como las coordenadas $\mathbf{q}_1 \rightarrow (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{q}_c)$ entonces, el error de consenso puede expresarse como $\mathbf{e}_1 = (\mathcal{L} \otimes I_n)(\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{q}_c)$, que por propiedades del producto de Kronecker también puede escribirse como $\mathbf{e}_1 = (\mathcal{L}\mathbf{1}_N \otimes I_n\mathbf{q}_c)$. Sin embargo, dado que 0 es un valor propio de \mathcal{L} asociado al vector propio $\mathbf{1}_N$ entonces $\mathcal{L}\mathbf{1}_N = \mathbf{0}_N$ y también el error de consenso $|\mathbf{e}_1| \rightarrow 0$. De este resultado y de la convergencia de la variable ϵ a cero, se demuestra de (3.5) que también $|\dot{\mathbf{q}}_1| \rightarrow 0$ y $|\tilde{\mathbf{q}}_2| \rightarrow 0$, con lo cual se cumplen los objetivos.

3.3.1. Discusión

Una de las propiedades de este controlador, heredada de la ley de control expuesta en [23] para robots de uniones rígidas, es que se alcanza un consenso en las coordenadas no-actuadas considerando que el grafo dirigido sólo está conectado. Por otro lado, observando el controlador propuesto para robots de uniones flexibles, es evidente que necesita del conocimiento de las condiciones iniciales. Sin embargo, aún cuando este requisito puede justificarse, puesto que se está suponiendo que se tiene acceso a la medición de todo el estado, es interesante notar que el controlador exhibe algunas propiedades de robustez respecto a incertidumbres en las condiciones iniciales.

Para esto, si en lugar de utilizar los valores reales en el controlador (3.11) y (3.10), se emplea algún estimado, entonces, la dinámica en lazo cerrado toma la forma

$$\mathcal{D}(\mathbf{q}_1)\dot{\epsilon} + (\mathcal{C}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) + K_d)\epsilon + \mathcal{K} \int_0^t \epsilon(\tau) d\tau = \mathcal{K}\tilde{\mathbf{q}}_0 \quad (3.16)$$

donde $\tilde{\mathbf{q}}_0$ denota el error en las condiciones iniciales. Puede observarse que (3.16) está formada por un sistema nominal y una perturbación que no desvanece, por lo que para el análisis del sistema completo se usará la funcional empleada en el sistema nominal y se concluirá estabilidad práctica para ϵ . Así, considerando $V = \frac{1}{2}\epsilon^T \mathcal{D}\epsilon + \frac{1}{2} \left[\int_0^t \epsilon^T(\tau) d\tau \right] \mathcal{K} \left[\int_0^t \epsilon(\tau) d\tau \right]$ y evaluando su derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado (3.16), se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\epsilon^T K_d \epsilon + \epsilon^T \mathcal{K} \tilde{\mathbf{q}}_0 \\ &= -(1 - \theta) \epsilon^T K_d \epsilon - \theta \epsilon^T K_d \epsilon + \epsilon^T \mathcal{K} \tilde{\mathbf{q}}_0; \text{ con } 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

Lo anterior significa que

$$\dot{V} \leq -(1 - \theta) \epsilon^T K_d \epsilon; \text{ para cualquier } \|\epsilon\| \geq \frac{\|\mathcal{K}\| \|\tilde{\mathbf{q}}_0\|}{\theta \lambda_{\min}\{K_d\}}$$

Entonces, es posible mostrar que $\epsilon \in L_2 \cap L_\infty$ cuando se satisfaga la condición anterior sobre la norma de ϵ respecto a la bola centrada en el origen cuyo radio está definido por las condiciones iniciales. Bajo este escenario, la entrada del sistema LTI (3.15) sigue garantizando que $|\mathbf{y}_1| \rightarrow 0$ alcanzando entonces el objetivo de consenso. Esta propiedad de robustez frente a incertidumbres en las condiciones iniciales se ilustrará con una evaluación numérica en la siguiente sección.

3.3.2. Simulaciones

En esta subsección se valida numéricamente al controlador propuesto. Para esto, se considera una red de diez robots de uniones flexibles no idénticos, cada uno de un grado de libertad, esto es, cada robot tiene dos coordenadas generalizadas. La topología de comunicación está caracterizada por la matriz

Laplaciana \mathcal{L} dada por

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz puede verificarse que $\mathcal{L}\mathbf{1}_N = 0$. Esta matriz \mathcal{L} representa a un grafo dirigido con un árbol de expansión dirigido, es decir, su rango es $n - 1 = 9$.

Los parámetros y las condiciones iniciales para los robots son los que se presentan en la Tabla 3.1 y fueron tomados de [27]. Así mismo, en todas las simulaciones se consideró que el controlador desconoce las condiciones iniciales, las cuales se establecieron en cero con el ánimo de reflejar el caso de mayor incertidumbre.

Estas simulaciones están divididas en dos grupos, en el primero se considera a la red multiagente sin perturbaciones externas. Mientras que en el segundo grupo, con la idea de mostrar la robustez del controlador frente a perturbaciones, se introduce en el tercer segundo, una señal escalón con magnitud de 0,2 Nm y duración de 2 seg al décimo robot. Por otro lado, las ganancias del controlador son $\lambda_1 = 1,5$, $\Lambda_2 = \text{diag}(3, 3, 1,5, 3, 3, 1,5, 7, 10, 10, 1,5)$, $K_{di1} = 0,25$ y $K_{di2} = 0,5$

Robots (1, 2, 3, 10)	Robots (4, 5, 6)	Robots (7, 8, 9)
$\bar{D} = 0,031$	$\bar{D} = 0,062$	$\bar{D} = 0,124$
$\bar{J} = 0,004$	$\bar{J} = 0,008$	$\bar{J} = 0,016$
$Mgl = 0,8$	$Mgl = 1,6$	$Mgl = 3,2$
$\bar{K} = 31$	$\bar{K} = 62$	$\bar{K} = 124$
$\bar{B} = 0,007$	$\bar{B} = 0,014$	$\bar{B} = 0,028$
$q_{10} = 25^\circ$	$q_{40} = 65^\circ$	$q_{70} = 10^\circ$
$q_{20} = 15^\circ$	$q_{50} = 45^\circ$	$q_{80} = 55^\circ$
$q_{30} = 5^\circ$	$q_{10} = 20^\circ$	$q_{90} = 35^\circ$
$q_{100} = 80^\circ$		

Cuadro 3.1: Parámetros y condiciones iniciales de los diez robots

Las Figuras 3.1 y 3.3 muestran la posición de las diez coordenadas actuadas y los errores de consenso y seguimiento, respectivamente. Puede verse que después del segundo seis, todas las posiciones que inician cada una en un ángulo diferente, exhiben un comportamiento colectivo deseado, en el sentido de que alcanzan la misma posición y, aunque con los resultados propuestos no se sabe *a priori* el valor de la posición consensada, en este caso es un promedio de las condiciones iniciales. Mientras que en la Figura 3.2 puede verse que las velocidades de las coordenadas no actuadas $\dot{\mathbf{q}}_1$ llegan a cero, lográndose así el segundo objetivo de control.

Además, es importante notar que, aún cuando se considera incertidumbre en las condiciones iniciales, tanto los errores de consenso \mathbf{e}_1 como los de seguimiento $\tilde{\mathbf{q}}_2$ convergen a cero. Es decir, el protocolo de comunicación logra que las coordenadas actuadas converjan a sus deseadas y, ayudados del acoplamiento lineal que exhibe el modelo, lo anterior conlleva a que las coordenadas no actuadas alcancen un consenso.

Las señales de control para cada robot son las que se muestran en la Figura 3.4, las cuales están siempre acotadas y son menores a ± 4 Nm. En esta misma figura, se presentan también las coordenadas actuadas, las cuales puede verse

que, como consecuencia de la propia dinámica del sistema y el acoplamiento antes mencionado, también alcanzan un consenso.

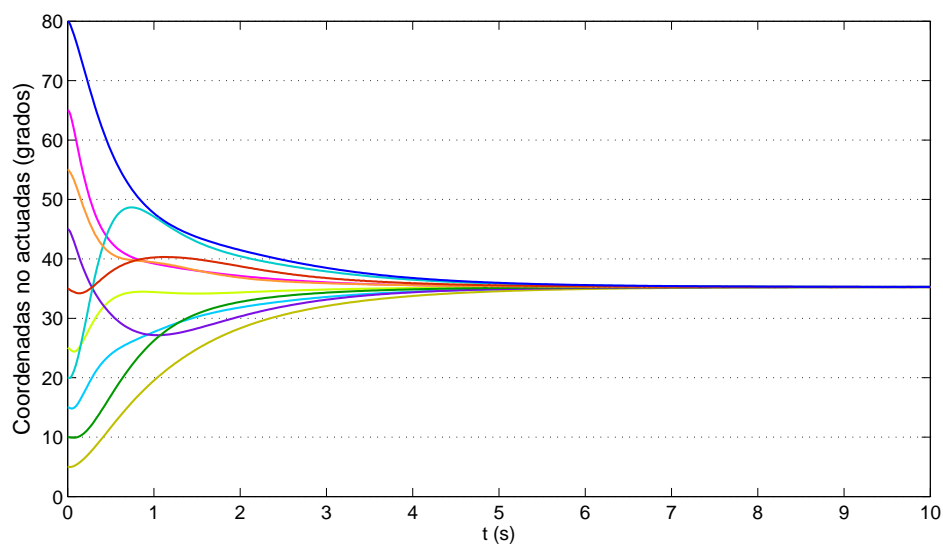


Figura 3.1: Coordenadas no actuadas q_1

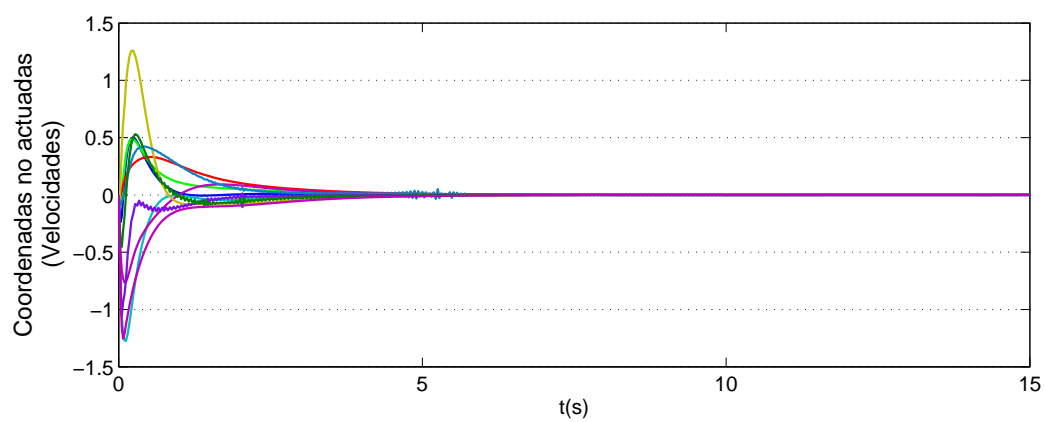


Figura 3.2: Velocidades en las coordenadas no actuadas \dot{q}_1

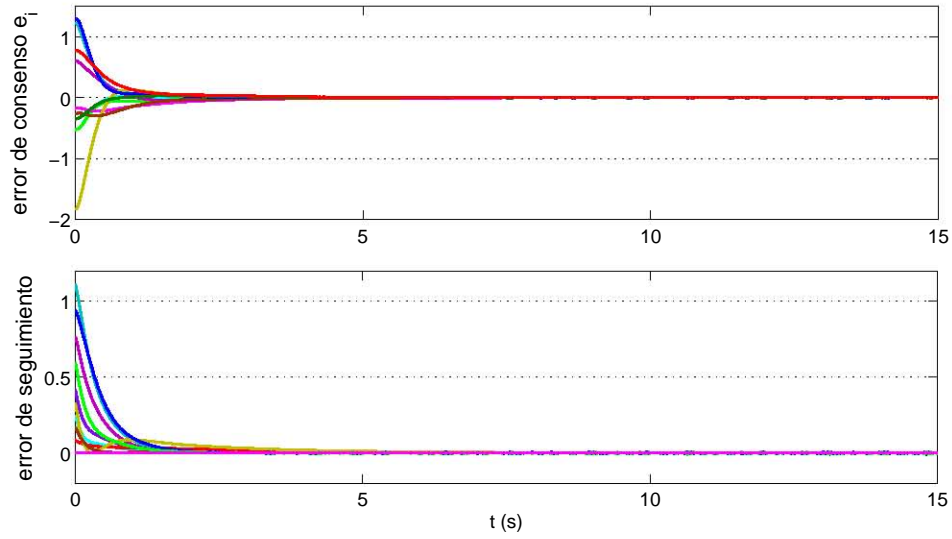


Figura 3.3: Error de consenso e_1 y de seguimiento \tilde{q}_2

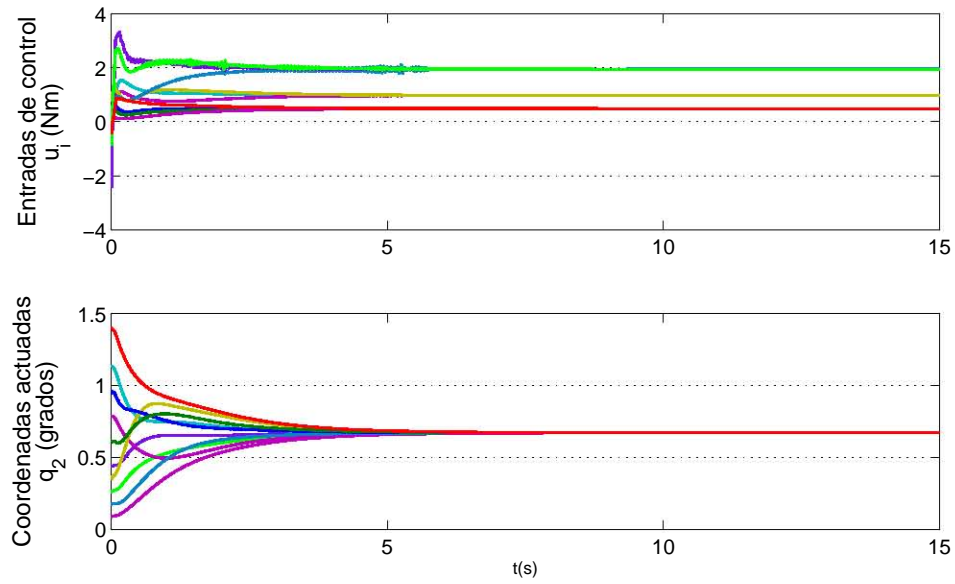


Figura 3.4: Señales de control y coordenadas actuadas q_2

El segundo grupo de simulaciones, tiene por objeto visualizar la robustez del controlador cuando uno de los robots, en este caso se eligió el décimo, es sometido a una perturbación externa aditiva a la entrada, entendiéndose por ésta un par de 2 Nm durante dos segundos, que modifica la trayectoria del robot.

La Figura 3.5 muestra las coordenadas no actuadas de los diez robots, aquí puede verse que cuando aparece la perturbación, la posición de consenso cambia ligeramente, sin embargo, para el segundo diez todos los robots convergen a la misma posición. En la Figura 3.6 puede verse también el error de consenso y de seguimiento, respectivamente, con lo cual se ilustra numéricamente la robustez del controlador propuesto frente a perturbaciones en la entrada.

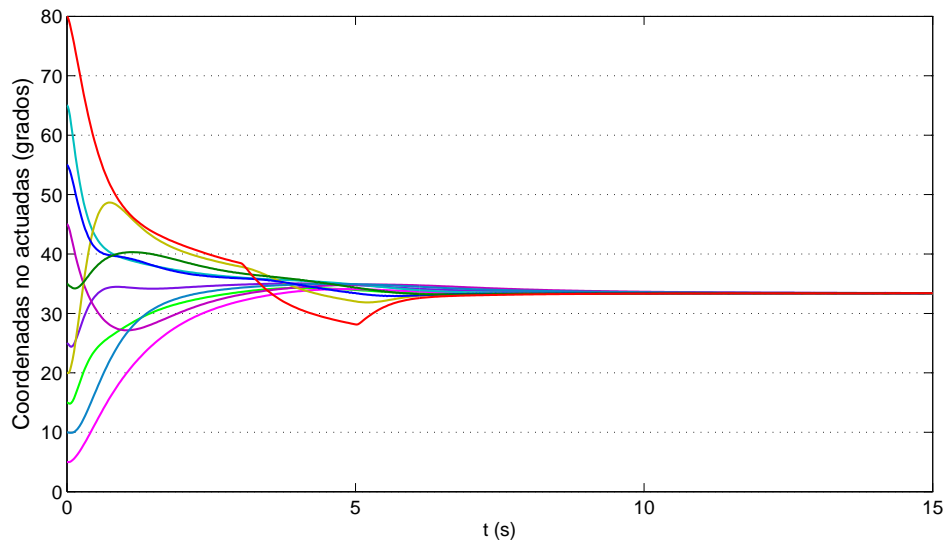


Figura 3.5: Coordenadas no actuadas q_1 . Décimo agente perturbado en $t = 3s$

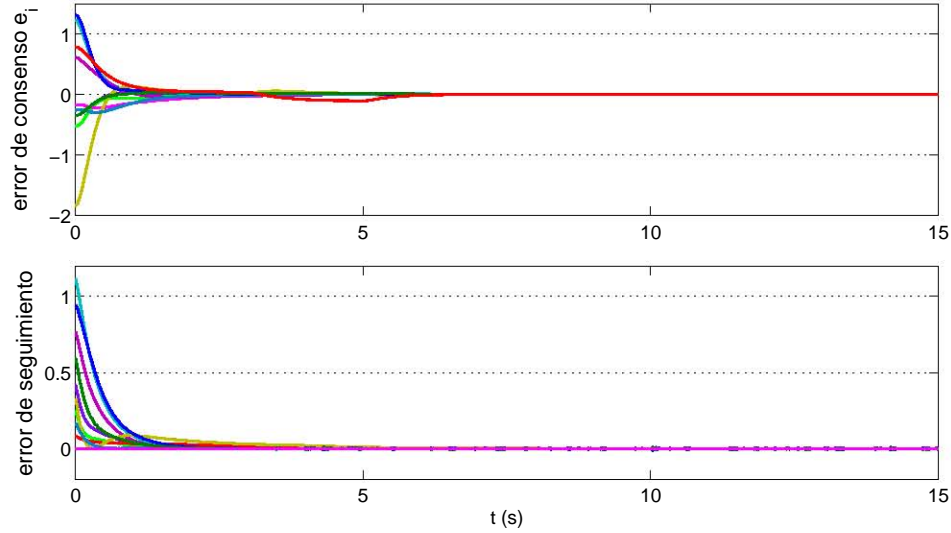


Figura 3.6: Error de consenso e_1 y de seguimiento \tilde{q}_2 . Décimo agente perturbado en $t = 3$ s

3.4. Control: Caso Con Retardos

En el algoritmo de consenso de la sección anterior, se asume que cada agente puede acceder al estado de sus vecinos instantáneamente es decir, sin tiempo de retardo. Esta suposición parece poco práctica puesto que el uso de redes de comunicación inevitablemente introduce retardos en el proceso de control. Este retardo aparece sobre todo si los agentes están localizados remotamente, de tal forma que la transmisión de señales se da en un tiempo que no es despreciable, por ejemplo en la comunicación por ondas acústicas en vehículos submarinos, o si la comunicación se da en un medio no completamente fiable, como Internet. Por lo anterior, resulta importante analizar los efectos de los retardos, acoplados a la topología de flujo de información, en el comportamiento del grupo.

En la literatura se encuentran reportados dos tipos de retardos, los *retardos en la comunicación* y los *retardos en la entrada*. En esta tesis se considerará el caso donde existen retardos en la comunicación, esto es, que el intercambio de información entre el i -ésimo y el r -ésimo agente está sujeto a un retardo desconocido denotado por $T_{ir} \geq 0$.

Si se toma en cuenta este retardo, se puede expresar ahora al error de consenso para el i -ésimo agente como

$$\bar{\mathbf{e}}_{i1} = \sum_{r \in \mathcal{N}_i} [\bar{\mathbf{q}}_{i1} - \bar{\mathbf{q}}_{r1}(t - T_{ir})] \in \mathbb{R}^n \quad (3.17)$$

y las dos variables de error auxiliares para el i -ésimo robot tal como se definieron anteriormente,

$$\epsilon_{i1} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{i1} + \lambda_1 \bar{\mathbf{e}}_{i1} \quad \text{y} \quad \epsilon_{i2} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{i2} + \Lambda_{i2} \tilde{\mathbf{q}}_{i2} \quad (3.18)$$

donde $\tilde{\mathbf{q}}_{i2} = \bar{\mathbf{q}}_{i2} - \bar{\mathbf{q}}_{i2d} \in \mathbb{R}^n$ y de manera similar a la sección anterior, se define la variable $\epsilon_i = \begin{bmatrix} \epsilon_{i1}^T & \epsilon_{i2}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2n}$, también con $\epsilon_i = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \mathbf{E}_i$ con $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{i1}^T & (\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{i2} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{i2d})^T \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_{i1}^T & \tilde{\mathbf{q}}_{i2}^T \end{bmatrix}^T$ y $\Lambda_i = \text{diag} \{ \lambda_1 I_n, \Lambda_{i2} \} \in \mathbb{R}^{2n}$

La presencia de retardos en los canales de comunicación dificulta el uso de la representación compacta (3.13), así como el uso de las propiedades de la matriz $Q\mathcal{L}Q^T$, por lo que, siguiendo el estudio de [23] en este caso para las coordenadas no actuadas, se hace un análisis para una ecuación diferencial retardada basado en el teorema del valor final. Dicho análisis está restringido para sistemas con una raíz simple en el origen. Sin embargo, como el producto $\mathcal{L} \otimes I_n$ tiene N raíces en el origen, es necesario reescribir las ecuaciones agrupando los elementos de cada coordenada generalizada no actuada en vectores de dimensión N y escribirles n ecuaciones diferenciales retardadas.

Así pues, considérese la k -ésima coordenada generalizada del i -ésimo agente

$q_{ijk} \in \mathbb{R}$, con $k \in \bar{n} = \{1, \dots, n\}$. Y defínase el vector que agrupa a la k -ésima coordenada no-actuada de los N robots de uniones flexibles como $\mathbf{q}_1^k := \text{col}(q_{11k}, q_{21k}, \dots, q_{N1k}) \in \mathbb{R}^N$. Con esta nomenclatura y de manera similar a [23], se pueden escribir (3.17) y (3.18) como

$$\mathbf{e}_1^k = \mathcal{L}\mathbf{q}_1^k \quad (3.19)$$

$$\dot{\epsilon}_1^k = \dot{\mathbf{q}}_1^k + \lambda_1 \mathbf{e}_1^k \quad (3.20)$$

Sin embargo, para tener una representación adecuada de la dinámica retardada de \mathbf{q}_1^k se define a $m := \sum_{i=1}^N \text{card } \mathcal{N}_i$, donde $\text{card } \mathcal{N}_i$ se refiere a la cardinalidad (o número de elementos) del conjunto \mathcal{N}_i y defínase $T_k := T_{i,r}$, donde $k \in \bar{m} := \{1, \dots, m\}$.

Por otro lado, la matriz Laplaciana definida en (2.1) se puede descomponer como

$$\mathcal{L} = A_0 - \sum_{r=1}^m A_r \quad (3.21)$$

con $A_0 := \text{diag}\{l_{ii}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y las matrices $A_r \in \mathbb{R}^{N \times N}$ que tienen todos sus elementos iguales a cero, excepto un elemento a_{ir} fuera de la diagonal tal que (3.21) se cumple. Con esta descomposición para la matriz Laplaciana, el error retardado puede escribirse como

$$\mathbf{e}_1^k = A_0 \mathbf{q}_1^k - \sum_{r=1}^m A_r \mathbf{q}_1^k(t - T_r) \quad (3.22)$$

Así, reemplazando (3.22) en (3.20) y despejando $\dot{\mathbf{q}}_1^k$, en (3.23) se tienen las siguientes n ecuaciones diferenciales retardadas,

$$\dot{\mathbf{q}}_1^k = -\lambda_1 A_0 \mathbf{q}_1^k + \lambda_1 \sum_{r=1}^m A_r \mathbf{q}_1^k(t - T_r) + \epsilon_1^k \quad (3.23)$$

El análisis para este caso es un tanto diferente de aquel donde no se consi-

deran retardos, puesto que las propiedades que se han demostrado para ϵ_1 no son suficientes para concluir el análisis sobre (3.23) utilizando el controlador para el caso sin retardos. Es necesario entonces añadir en la ley de control un término en $\dot{\mathbf{e}}_1$ que inyecte amortiguamiento de los agentes vecinos. De tal forma que, ahora la ley de control está definida por (3.17), (3.18) y las siguientes dos expresiones

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_i = & -K_{id2}\epsilon_{i2} + \bar{J}_i(\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{i2d} - \Lambda_{i2}\dot{\bar{\mathbf{q}}}_{i2}) + K_i \left[\int_0^t (\lambda_1 \bar{\mathbf{e}}_{i1} - \Lambda_{i2} \tilde{\mathbf{q}}_{i2}) d\tau + \bar{\mathbf{q}}_{i2d} \right] - \\ & - K_i(\bar{\mathbf{q}}_{i10} - \bar{\mathbf{q}}_{i20}) - b_{i2}\dot{\bar{\mathbf{q}}}_{i2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_{i2d} = \frac{p}{(p + \lambda)} \left(K_i^{-1} \left\{ \bar{\mathbf{u}}_{ir} - K_i \int_0^t (\lambda_1 \bar{\mathbf{e}}_{i1} - \Lambda_{i2} \mathbf{q}_{i2}) d\tau + K_i(\bar{\mathbf{q}}_{i10} - \bar{\mathbf{q}}_{i20}) \right\} \right) \quad (3.25)$$

donde $p = \frac{d}{dt}$, las matrices de ganancias $K_{id} = \text{diag}\{K_{id1}, K_{id2}\} > 0$, $B_i = \text{diag}\{b_{i1}, b_{i2}\} > 0$ y $\bar{\mathbf{u}}_{ir}$ la señal de control para el caso de robots con uniones rígidas dada por

$$\bar{\mathbf{u}}_{ir} = -D_i \lambda_1 \dot{\bar{\mathbf{e}}}_{i1} - C_i \lambda_1 \bar{\mathbf{e}}_{i1} + \bar{G}_i - K_{id1} \epsilon_{i1} - b_{i1} \dot{\bar{\mathbf{e}}}_{i1}$$

La idea general tras la prueba de este controlador es similar a la de la sección donde no se consideran retardos en la comunicación, es decir, primero con el funcional adecuado y la dinámica en lazo cerrado se probará que la señal auxiliar ϵ_{i1} tiende a cero. Posteriormente, ayudados de la dinámica para \mathbf{q}_1^k dada por (3.23) y el teorema del valor final se probará que las velocidades para las coordenadas no actuadas convergen a cero y que estas coordenadas alcanzan un consenso.

Reemplazando el control (3.24) y (3.25) en el modelo multiagente (3.1) y con la definición de los *i-ésimos* errores se obtiene el sistema en lazo cerrado

como

$$\bar{\mathcal{D}}_i(\bar{\mathbf{q}}_{i1})\dot{\epsilon}_i + (\bar{\mathcal{C}}_i(\bar{\mathbf{q}}_{i1}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{i1}) + K_{di})\epsilon_i + \mathcal{K}_i \int_0^t \epsilon_i(\tau) d\tau + B_i \dot{\mathbf{E}}_i = 0 \quad (3.26)$$

donde el único término diferente al sistema en lazo cerrado de la sección anterior es el vector $\dot{\mathbf{E}}_i$, el cual contiene a las variables a las que se les inyecta amortiguamiento. Luego, siguiendo la misma metodología que en la sección anterior y con la idea de probar que el vector auxiliar de error ϵ_i está acotado, se considera a la funcional

$$W_i(\epsilon_i, \mathbf{E}_i) = \frac{1}{2} \epsilon_i^T \bar{\mathcal{D}}_i \epsilon_i + \frac{1}{2} \left[\int_0^t \epsilon_i^T(\tau) d\tau \right] \mathcal{K}_i \left[\int_0^t \epsilon_i(\tau) d\tau \right] + \frac{1}{2} \Lambda_i \mathbf{E}_i^T B_i \mathbf{E}_i + \\ + \frac{b_{i1}}{2} \sum_{r \in \mathcal{N}_{i_t - T_{i,r}}} \int_0^t |\dot{\mathbf{q}}_{r1}(\sigma)|^2 d\sigma$$

con $|\dot{\mathbf{q}}_{r1}|$ la norma del vector $\dot{\mathbf{q}}_{r1}$. Así, la derivada temporal de $W_i(\epsilon_i, \mathbf{E}_i)$ está dada por

$$\dot{W}_i = \frac{1}{2} \epsilon_i^T \bar{\mathcal{D}}_i \dot{\epsilon}_i + \frac{1}{2} \epsilon_i^T \dot{\bar{\mathcal{D}}}_i \epsilon_i + \epsilon_i^T \mathcal{K}_i \left[\int_0^t \epsilon_i(\tau) d\tau \right] + \Lambda_i \mathbf{E}_i^T B_i \dot{\mathbf{E}}_i + \\ + \frac{b_{i1}}{2} \sum_{r \in \mathcal{N}_i} \left[|\dot{\mathbf{q}}_{r1}(t)|^2 - |\dot{\mathbf{q}}_{r1}(t - T_{ir})|^2 \right]$$

Evaluando esta derivada a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (3.26) y usando la propiedad de antisimetría de la matriz $(\dot{\bar{\mathcal{D}}}_i - 2\mathcal{C}_i)$ se tiene que

$$\dot{W}_i = -\epsilon_i^T K_{di} \epsilon_i - \epsilon_i^T B_i \dot{\mathbf{E}}_i + \Lambda_i \mathbf{E}_i^T B_i \dot{\mathbf{E}}_i + \frac{b_{i1}}{2} \sum_{r \in \mathcal{N}_i} \left[|\dot{\mathbf{q}}_{r1}(t)|^2 - |\dot{\mathbf{q}}_{r1}(t - T_{ir})|^2 \right]$$

de donde utilizando la definición de la variable auxiliar de error ϵ_i puede escribirse que

$$\dot{W}_i = -\epsilon_i^T K_{di} \epsilon_i - \dot{\bar{\mathbf{q}}}_i^T B_i \dot{\mathbf{E}}_i + \frac{b_{i1}}{2} \sum_{r \in \mathcal{N}_i} \left[|\dot{\mathbf{q}}_{r1}(t)|^2 - |\dot{\mathbf{q}}_{r1}(t - T_{ir})|^2 \right]$$

donde para los vectores $\dot{\mathbf{q}}_i$, $\dot{\mathbf{E}}_i$ y la matriz de amortiguamiento B_i se tiene

$$\begin{aligned} \dot{W}_i &= -\epsilon_i^T K_{di} \epsilon_i - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{i1}^T & \dot{\mathbf{q}}_{i2}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{i1} & 0 \\ 0 & b_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_{i1} \\ \dot{\mathbf{q}}_{i2} \end{bmatrix} + \frac{b_{i1}}{2} \sum_{r \in \mathcal{N}_i} \left[|\dot{\mathbf{q}}_{r1}(t)|^2 - \right. \\ &\quad \left. - |\dot{\mathbf{q}}_{r1}(t - T_{ir})|^2 \right] \\ &= -\epsilon_i^T K_{di} \epsilon_i - b_{i2} |\dot{\mathbf{q}}_{i2}|^2 - b_{i1} \dot{\mathbf{q}}_{i1}^T \dot{\mathbf{e}}_{i1} + \frac{b_{i1}}{2} \sum_{r \in \mathcal{N}_i} \left[|\dot{\mathbf{q}}_{r1}(t)|^2 - |\dot{\mathbf{q}}_{r1}(t - T_{ir})|^2 \right] \end{aligned}$$

Aquí, sustituyendo la dinámica del error de consenso retardado (3.17) dada por $\dot{\mathbf{e}}_{i1} = \sum_{r \in \mathcal{N}_i} [\dot{q}_{i1} - \dot{q}_{r1}(t - T_{ir})]$, puede expresarse a \dot{W}_i como

$$\begin{aligned} \dot{W}_i &= -\epsilon_i^T K_{di} \epsilon_i - b_{i2} |\dot{\mathbf{q}}_{i2}|^2 - \frac{b_{i1}}{2} \left[2\dot{\mathbf{q}}_{i1}^T \sum_{r \in \mathcal{N}_i} [\dot{\mathbf{q}}_{i1} - \dot{\mathbf{q}}_{r1}(t - T_{ir})] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r \in \mathcal{N}_i} \left[|\dot{\mathbf{q}}_{r1}(t)|^2 - |\dot{\mathbf{q}}_{r1}(t - T_{ir})|^2 \right] \right] \end{aligned}$$

que también es

$$\begin{aligned} &= -\epsilon_i^T K_{di} \epsilon_i - b_{i2} |\dot{\mathbf{q}}_{i2}|^2 - \frac{b_{i1}}{2} \left[\sum_{r \in \mathcal{N}_i} 2\dot{\mathbf{q}}_{i1}^T [\dot{\mathbf{q}}_{i1} - \dot{\mathbf{q}}_{r1}(t - T_{ir})] + \right. \\ &\quad \left. + |\dot{\mathbf{q}}_{r1}(t - T_{ir})|^2 - |\dot{\mathbf{q}}_{r1}(t)|^2 \right] \end{aligned}$$

completando el cuadrado se puede escribir,

$$\dot{W}_i = -\epsilon_i^T K_{di} \epsilon_i - b_{i2} |\dot{\mathbf{q}}_{i2}|^2 - \frac{b_{i1}}{2} \left[\sum_{r \in \mathcal{N}_i} |\dot{\mathbf{q}}_{i1} - \dot{\mathbf{q}}_{r1}(t - T_{ir})|^2 + |\dot{\mathbf{q}}_{i1}|^2 - |\dot{\mathbf{q}}_{r1}|^2 \right]$$

De esta última igualdad, puede verse que el tercer término no tiene signo definido, por lo que es necesario considerar a W como la suma de las i -ésimas funcionales, de manera similar a lo planteado en [14], tal que

$$W = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i W_i$$

Entonces, en términos de esta variable se puede escribir la siguiente dinámica

$$\begin{aligned} \dot{W} = & \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i b_{i1} \left[-\frac{1}{b_{i1}} \epsilon_i^T K_{di} \epsilon_i - \frac{b_{i2}}{b_{i1}} |\dot{\mathbf{q}}_{i2}|^2 - \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathcal{N}_i} |\dot{\mathbf{q}}_{i1} - \dot{\mathbf{q}}_{r1}(t - T_{ir})|^2 \right] - \\ & - \mathbf{p}_i \frac{b_{i1}}{2} \sum_{r \in \mathcal{N}_i} \left[|\dot{\mathbf{q}}_{i1}|^2 - |\dot{\mathbf{q}}_{r1}|^2 \right] \end{aligned}$$

La ecuación diferencial anterior puede acotarse por el valor mínimo de la variable $\underline{b}_1 := \min\{b_{i1}\}$, esto es,

$$\dot{W} \leq -\underline{b}_1 \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \left[\frac{1}{\underline{b}_1} \epsilon_i^T K_{di} \epsilon_i + \frac{b_{i2}}{\underline{b}_1} |\dot{\mathbf{q}}_{i2}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathcal{N}_i} |\dot{\mathbf{q}}_{i1} - \dot{\mathbf{q}}_{r1}(t - T_{ir})|^2 \right] + \underline{b}_1 \mathbf{p}^T \mathcal{L} \mathbf{F}_1$$

con el vector $\mathbf{F} := \text{col}(|\dot{\mathbf{q}}_{11}|^2, \dots, |\dot{\mathbf{q}}_{N1}|^2) \in \mathbb{R}^N$ y la matriz Laplaciana \mathcal{L} .

Aquí, asumiendo que el grafo tiene un árbol de expansión dirigido, se asegura que existe un vector no negativo $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N$ definido como $\mathbf{p} := \text{col}(p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^N$ que satisface que $\mathbf{p}^T \mathcal{L} = 0_{1 \times p}$. Este hecho asegura que el último término del lado derecho de la desigualdad anterior se desvanece y por lo tanto W decrece a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado, es decir, $\dot{W} \leq 0$. De esta última desigualdad se puede concluir que los argumentos de W están acotados, es decir, que $\epsilon_i, \mathbf{E}_i \in L_\infty$, por lo que también las entradas del vector \mathbf{E}_i están acotadas, esto es $\bar{\epsilon}_{i1}, \tilde{q}_{i2} \in L_\infty$. Además, haciendo un análisis similar al de la sección anterior, puesto que la expresión cuadrática en ϵ_i puede acotarse por sus valores propios mínimo y máximo respectivamente, puede concluirse que el vector $\epsilon_i \in L_2 \cap L_\infty$. Lo anterior por (3.18) implica que también $\dot{\mathbf{q}}_{i1}, \ddot{\mathbf{q}}_{i2} \in L_\infty$ así que, observando la dinámica para $\bar{\epsilon}_{i1}$ dada por la derivada temporal de (3.17), la derivada temporal del error de consenso está acotada, es decir, $\dot{\epsilon}_{i1} \in L_\infty$ y por ende también el vector $\dot{\mathbf{E}}_i \in L_\infty$. Finalmente, utilizando (3.26) se puede concluir que $\dot{\epsilon}_i \in L_\infty$ y más aún, por el Lema de Barbalat $|\epsilon_i| \rightarrow 0$.

Ahora, para demostrar que las coordenadas no actuadas alcanzan un con-

senso y que $|\dot{\mathbf{q}}_1^k| \rightarrow 0$, es necesario hacer un análisis para las n ecuaciones diferenciales retardadas. Para esto, se obtiene la transformada de Laplace de (3.23) dada por

$$s\mathbf{q}_1^k(s) = -\lambda_1 A_0 \mathbf{q}_1^k(s) + \lambda_1 \sum_{r=1}^m A_r \mathbf{q}_1^k(s) e^{-T_{ir}s} + \epsilon_1^k(s)$$

que también puede escribirse como

$$s\mathbf{q}_1^k(s) + \lambda_1 A_0 \mathbf{q}_1^k(s) - \lambda_1 \sum_{r=1}^m A_r \mathbf{q}_1^k(s) e^{-T_{ir}s} = \epsilon_1^k(s)$$

$$\left(sI_N + \lambda_1 A_0 - \lambda_1 \sum_{r=1}^m A_r e^{-T_{ir}s} \right) \mathbf{q}_1^k(s) = \epsilon_1^k(s)$$

y entonces se tiene una expresión para las k -ésimas coordenadas no actuadas dada por

$$\mathbf{q}_1^k(s) = \Psi_1(s) \epsilon_1^k(s) \quad (3.27)$$

$$\text{con } \Psi_1(s) = \left(sI_N + \lambda_1 A_0 - \lambda_1 \sum_{r=1}^m A_r e^{-T_{ir}s} \right)^{-1}$$

Por otro lado, como se mencionó anteriormente, se hará uso del teorema del valor final, el cual establece que si $F(s)$ tiene cuando más una raíz en el origen, entonces, el $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$. La afirmación de que para (3.27) existe una sola raíz en el origen puede verse en el hecho de que $\Psi_1^{-1}(0) = \left(\lambda_1 A_0 - \lambda_1 \sum_{r=1}^m A_r \right) = \lambda_1 \mathcal{L}$. Se puede utilizar entonces esta herramienta y se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}_1^k(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \mathbf{q}_1^k(s)$$

sustituyendo (3.27) en la igualdad anterior, se tiene

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 \mathbf{q}_1^k(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \Psi_1(s) \cdot \epsilon_1^k(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Psi_1(s) \cdot \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \epsilon_1^k(s) \quad (3.28)$$

en donde ambos límites existen. Utilizando el hecho de que $|\epsilon_1| \rightarrow 0$, también

como aplicación del teorema del valor final, implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon_1(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \epsilon_1(s) = 0$$

y con esto, el segundo límite en (3.28) se desvanece. Sin embargo, para asegurar que el primer límite también está definido, se puede escribir a $\Psi_1(s)$ como la adjunta de su argumento entre su determinante, es decir, $\Psi_1(s) = \frac{1}{p(s)} [sI_N - \mathcal{A}(s)]^A$, con $\mathcal{A}(s) := -\lambda_1 A_0 + \lambda_1 \sum_{r=1}^m A_r e^{-T_{ir}s}$, el determinante $p(s) := \det [sI_N - \mathcal{A}(s)]$ y $[\cdot]^A$ denotando la matriz adjunta.

Además, puede demostrarse que la matriz adjunta puede descomponerse como la suma de matrices polinomiales B_j ,

$$[sI_N - \mathcal{A}(s)] = s^{N-1}I_N + s^{N-2}B_{N-2}(s) + \dots + sB_1(s) + B_0(s)$$

con $B_0(0)$ bien definida debido a la existencia de una única raíz en $s = 0$. Entonces

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \Psi_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{p(s)} \lim_{s \rightarrow 0} [sI_N - \mathcal{A}(s)]^A = B_0(0) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{p(s)} \quad (3.29)$$

el determinante $p(s)$ se puede factorizar como $p(s) = s \prod_{j=1}^{N-1} \lambda(s - z_j(s))$, con $z_j(s)$ las raíces de $p(s)$, por lo que el límite (3.29) se indetermina y es necesario aplicar la regla de L'Hopital. Así, derivando el numerador y el denominador, (3.29) se convierte en

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{p(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{p'(s)} = \frac{1}{\prod_{j=1}^{N-1} \lambda(-z_j(0))}$$

cuyo denominador es diferente de cero. Por último, sustituyendo este resultado en (3.29) se tiene que

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \Psi_1(s) = B_0(0) \frac{1}{\prod_{j=1}^{N-1} \lambda(-z_j(0))}$$

que está bien definido. Con esto, se puede concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}_1^k(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \mathbf{q}_1^k(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Psi_1(s) \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \epsilon_1^k(s) = 0$$

Lo anterior implica que $|\dot{\bar{\mathbf{q}}}_{i1}| \rightarrow 0$, utilizando entonces (3.18) y el hecho de que $|\epsilon_{i1}| \rightarrow 0$, se puede concluir que también el error de consenso para el i -ésimo robot converge a cero, esto es que $|\bar{\mathbf{e}}_{i1}| \rightarrow 0$.

Finalmente, para mostrar que las coordenadas no actuadas alcanzan un consenso, es preciso observar que (3.22) puede ser escrita como

$$\mathbf{e}_1^k = A_0 \mathbf{q}_1^k - \sum_{r=1}^m A_r \mathbf{q}_1^k + \sum_{r=1}^m A_r \mathbf{q}_1^k - \sum_{r=1}^m A_r \mathbf{q}_1^k(t - T_r)$$

que se puede poner en términos de la matriz Laplaciana como

$$\mathbf{e}_1^k = \mathcal{L} \mathbf{q}_1^k + \sum_{r=1}^m A_r \int_{t-\tau_r}^t \dot{\mathbf{q}}_1^k(\sigma) d\sigma$$

Sin embargo, en el análisis anterior se concluyó que tanto $\dot{\mathbf{q}}_1^k$ como \mathbf{e}_1^k convergen a cero, entonces el término $\mathcal{L} \mathbf{q}_1^k$ también converge a cero. Por último, al asumir que el grafo tiene un árbol de expansión dirigido entonces, el vector $\mathbf{1}_N$ es el vector propio derecho de \mathcal{L} , es decir, $\mathbf{1}_N$ es el único vector en el kernel de \mathcal{L} , por lo que se puede concluir que $\mathbf{q}_1^k \rightarrow q_{ck} \mathbf{1}_N$ para algún $q_{ck} \in \mathbb{R}$ y entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{q}}_{i1} = \mathbf{q}_c$, para algún vector constante $\mathbf{q}_c \in \mathbb{R}^n$, satisfaciendo también que $\lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{\bar{\mathbf{q}}}_{i1}| = 0$, con lo cual se cumplen los objetivos de control.

3.4.1. Discusión

Los resultados presentados en esta sección consideran la existencia de retardos $T_{ir} > 0$ en el flujo de información entre los agentes, sin que se haga alguna

suposición sobre la cota superior o el conocimiento explícito de los mismos. La motivación está en que la caracterización de los retardos depende de la implementación física de la red de comunicación. Así, mientras que para algunas formas de comunicación, como la telemetría acústica o la radio frecuencia, pueden predecirse los retardos [30], en el caso de la comunicación por Internet, los retardos no pueden acotarse *a priori*.

Por otro lado, en el contexto de la red de comunicación, la única suposición que se hace sobre la conectividad del grafo es que exista un árbol de expansión dirigido, lo anterior es una ventaja sobre los resultados usuales encontrados en la literatura en los que es necesario que el grafo esté fuertemente conectado. Sin embargo, este esquema de control propuesto, salvo por el elemento que es necesario añadir para inyectar amortiguamiento en el error de consenso, es igual a la ley de control presentada para el caso sin retardos visto en la sección anterior, por lo que además de suponer que todo el estado está disponible para su medición, es claro que el controlador tiene la misma limitación que el esquema anterior en donde es necesario el conocimiento de las condiciones iniciales.

En la sección pasada, para mostrar la robustez del controlador frente a incertidumbres en las condiciones iniciales se utilizaron herramientas de estabilidad práctica que permitieron concluir que aún cuando no se conocen las condiciones iniciales, el vector auxiliar de error ϵ sigue perteneciendo al espacio $L_2 \cap L_\infty$ y con esto se pudo seguir concluyendo sobre la entrada al sistema lineal invariante en el tiempo (3.15). En este caso donde sí se consideran retardos, se puede hacer un análisis similar para el sistema en lazo cerrado perturbado de la forma

$$\bar{\mathcal{D}}_i(\bar{\mathbf{q}}_{i1})\dot{\epsilon}_i + (\bar{\mathcal{C}}_i(\bar{\mathbf{q}}_{i1}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{i1}) + K_{di})\epsilon_i + \mathcal{K}_i \int_0^t \epsilon_i(\tau) d\tau + B_i \dot{\mathbf{E}}_i = \mathcal{K}_i \tilde{\mathbf{q}}_i(0) \quad (3.30)$$

Así, utilizando el funcional para el sistema nominal $W_i(\epsilon_i, \mathbf{E}_i)$ y obteniendo

su derivada temporal evaluada ahora a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado perturbado (3.30), se puede concluir que

$$\dot{W} \leq -\underline{b}_1 \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \left[\frac{1}{\underline{b}_1} (1 - \theta) \epsilon_i^T K_{di} \epsilon_i + \frac{b_{i2}}{\underline{b}_1} |\dot{\mathbf{q}}_{i2}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathcal{N}_i} |\dot{\mathbf{q}}_{i1} - \dot{\mathbf{q}}_{r1}(t - T_{ir})|^2 \right] \leq 0$$

para cualquier $\|\epsilon_i\| \geq \frac{\|\mathcal{K}_i\| \|\tilde{\mathbf{q}}_{i0}\|}{\theta \lambda_{\min}\{K_{id}\}}$

Lo anterior significa que la señal auxiliar de error ϵ sigue en $L_2 \cap L_\infty$. Sin embargo, en el análisis de la ecuación (3.27) al utilizar el teorema del valor final, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}_1^k(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Psi_1(s) \cdot \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \epsilon_1^k(s)$$

donde el primer límite está bien definido y el segundo converge a una bola cuyo radio está dado por las condiciones iniciales. Con lo anterior ya no es posible concluir que $|\dot{\mathbf{q}}_{i1}|$ y el error $|\bar{\mathbf{e}}_{i1}|$ tiendan a cero y por lo tanto en el análisis de las k -ésimas coordenadas no actuadas, el vector $\mathcal{L}\mathbf{q}_1^k$ no es cero y ya no se puede hablar del kernel de la matriz Laplaciana, el cual permitía concluir el consenso de las coordenadas no actuadas. Sin embargo, aún cuando esta robustez del controlador frente a incertidumbres en las condiciones iniciales no puede constatararse de esta manera, se evidenciará en la subsección de simulaciones.

3.4.2. Simulaciones

En esta sección se valida por simulación la ley de control obtenida para el caso donde se consideran retardos en la comunicación. Es importante notar también que en todas las simulaciones las condiciones iniciales para el controlador fueron puestas en cero, esto, con el objetivo de mostrar la robustez del controlador frente a incertidumbres en las condiciones iniciales. Los parámetros de los robots son los mismos que los presentados en la evaluación de la

sección anterior.

Aquí, con la idea de observar el comportamiento de la red bajo diferentes retardos en la comunicación entre el i -ésimo y el r -ésimo agente, se consideran valores de retardos de $T_{ir} = 0,01s$, $T_{ir} = 0,5s$ y $T_{ir} = 1,5s$.

Bajo este escenario, las Figuras 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10 muestran el comportamiento de las coordenadas no-actuadas y sus velocidades, así como los errores de consenso y de seguimiento, respectivamente. En la primer figura, se observa cómo el conjunto de coordenadas no actuadas converge a la misma posición aún en presencia de retardos en la comunicación. Este retardo provoca que la posición consensada cambie, sin embargo, para el primer retardo, el tiempo en el que se llega a un consenso es similar al del caso donde no se consideran retardos.

También en esta figura puede verse que introduciendo un retardo entre cada uno de los agentes de magnitud considerablemente más grande, esto es 1.5s, las posiciones de todos los robots llegan a una en común, donde la cantidad de interés, en esta ocasión, no es un promedio de las condiciones iniciales, pero sí es función de ellas. Cabe mencionar que, aunque no se reporta en esta validación, introduciendo retardos más grandes que el ejemplificado, la estabilidad del sistema no se ve afectada, sin embargo, el tiempo en el que se llega al consenso también crece más allá de los veinte segundos.

En la Figura 3.8 se presentan las velocidades para las coordenadas no actuadas, con el fin de verificar que convergen a cero, satisfaciéndose así el segundo objetivo de control. Por último, las Figuras 3.9 y 3.10 se presentan para comprobar que los errores de control también se desvanecen.

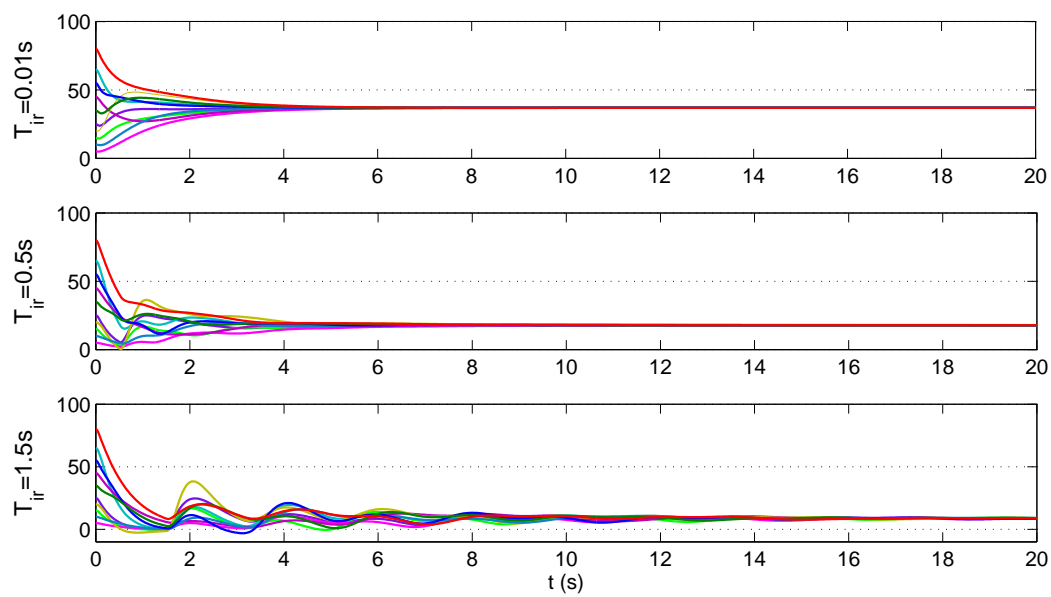


Figura 3.7: Coordenadas no actuadas \bar{q}_{i1} bajo diferentes retardos en la red: $T_{ir} = 0,01s$, $T_{ir} = 0,5s$ y $T_{ir} = 1,5s$

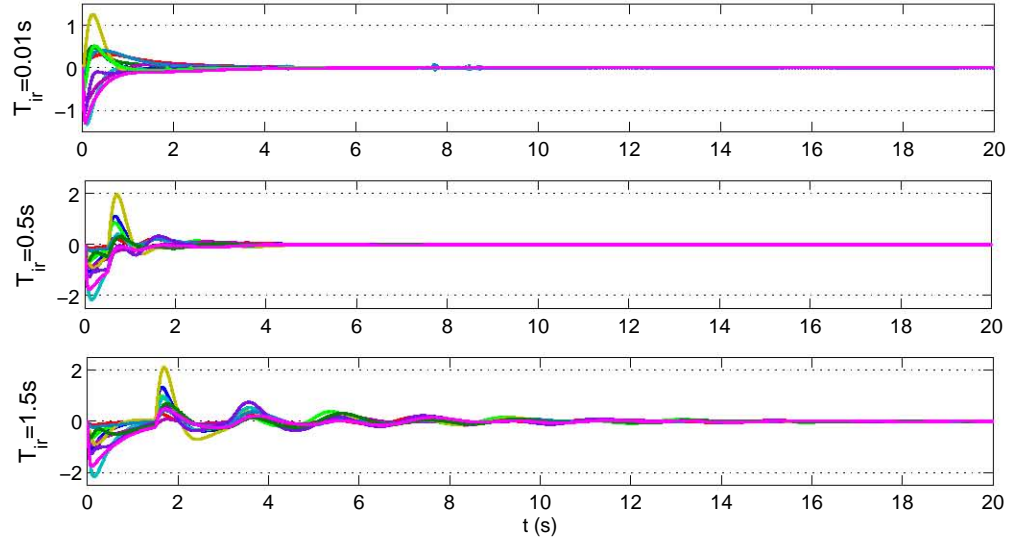


Figura 3.8: Velocidades \dot{q}_{i1} en las coordenadas no actuadas, bajo diferentes retardos en la red: $T_{ir} = 0,01s$, $T_{ir} = 0,5s$ y $T_{ir} = 1,5s$

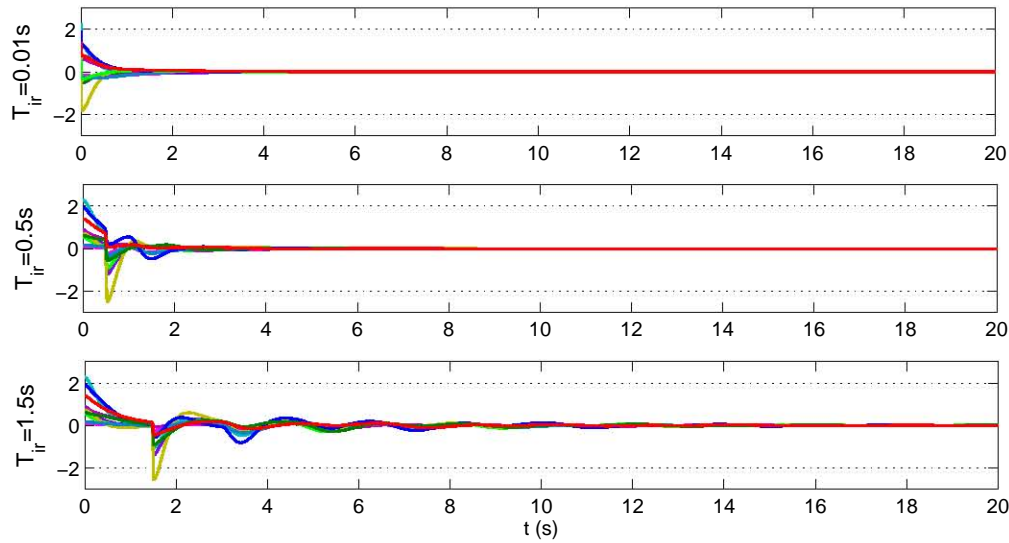


Figura 3.9: Error de consenso \bar{e}_{i1} bajo los retardos: $T_{ir} = 0,01s$, $T_{ir} = 0,5s$ y $T_{ir} = 1,5s$

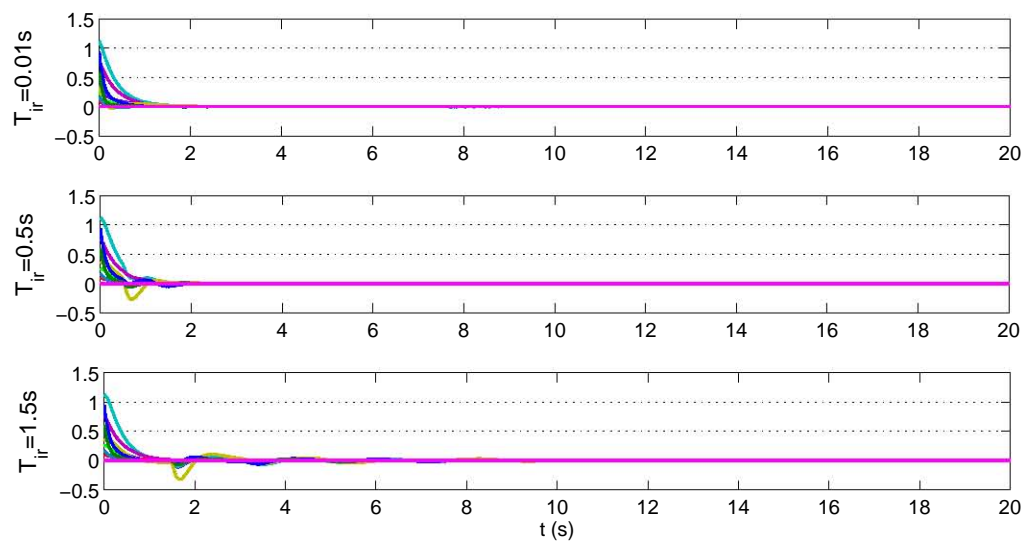


Figura 3.10: Error de seguimiento \bar{q}_{i2d} para $T_{ir} = 0,01s$, $T_{ir} = 0,5s$ y $T_{ir} = 1,5s$

Capítulo 4

Controladores

En este capítulo se presentan dos controladores, para el caso donde no se consideran retardos en la comunicación. En ambos, el objetivo es demostrar que la variable auxiliar de error ϵ_1 pertenece al espacio $L_2 \cap L_\infty$ y una vez demostrado esto, puede usarse la misma metodología ocupada en el capítulo anterior, para concluir consenso sobre las coordenadas no actuadas.

4.1. Control Basado en Desacoplamiento

Este enfoque tiene como propósito explotar la forma del modelo y utilizar la ley de control para obtener dos subsistemas desacoplados. En lazo cerrado se tendrá entonces un primer sistema, caracterizado por la dinámica de las coordenadas actuadas y cuya dinámica no forzada se estabilizará con un controlador proporcional derivativo. Mientras que, la salida de este sistema maestro, será conectada como entrada a un segundo sistema que representa la dinámica de las coordenadas no-actuadas. Finalmente, el análisis de estabilidad del sistema desacoplado se hará con herramientas de sistemas en cascada.

En el diseño de este controlador se considera el modelo para N agentes en su forma separada dada por

$$\begin{aligned} D(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_1 + C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}}_1 + G(\mathbf{q}_1) + K(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) &= 0 \\ J\ddot{\mathbf{q}}_2 - K(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) &= \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.1)$$

con $\mathbf{q}_1 := \text{col}(\bar{\mathbf{q}}_{11}, \dots, \bar{\mathbf{q}}_{N1}) \in \mathbb{R}^{Nn}$, $\mathbf{q}_2 := \text{col}(\bar{\mathbf{q}}_{12}, \dots, \bar{\mathbf{q}}_{N2}) \in \mathbb{R}^{Nn}$ el conjunto de las n componentes *no-actuadas* y las n componentes *actuadas* de los N robots, respectivamente, así como las matrices definidas en el capítulo anterior. De esta manera, con el objetivo de obtener la dinámica no lineal del subsistema esclavo, que tiene como estado a la variable auxiliar de error ϵ_1 y como entrada a la señal de error $\tilde{\mathbf{q}}_2$, es necesario definir al error de consenso y de seguimiento como se hizo anteriormente, es decir, para las coordenadas no-actuadas se tiene

$$\mathbf{e}_1 = (\mathcal{L} \otimes I_n)\mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^{Nn} \quad \text{y} \quad \epsilon_1 = \dot{\mathbf{q}}_1 + \lambda_1 \mathbf{e}_1 \quad (4.2)$$

mientras que, para las coordenadas actuadas el error de seguimiento es

$$\tilde{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_{2d} \in \mathbb{R}^{Nn} \quad (4.3)$$

De la variable auxiliar de error en (4.2) se puede entonces obtener la dinámica para las coordenadas \mathbf{q}_1 como $\ddot{\mathbf{q}}_1 = \dot{\epsilon}_1 - \lambda_1 \dot{\mathbf{e}}_1$. Evaluando esta última ecuación diferencial en el modelo se tiene,

$$D(\mathbf{q}_1)(\dot{\epsilon}_1 - \lambda_1 \dot{\mathbf{e}}_1) + C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)(\epsilon_1 - \lambda_1 \mathbf{e}_1) + G(\mathbf{q}_1) = K(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1)$$

Y, expresando al vector de coordenadas actuadas \mathbf{q}_2 como la suma del error de seguimiento y las coordenadas deseadas $\mathbf{q}_2 = \tilde{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{q}_{2d}$, puede escribirse al modelo como

$$D(\mathbf{q}_1)(\dot{\epsilon}_1 - \lambda_1 \dot{\mathbf{e}}_1) + C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)(\epsilon_1 - \lambda_1 \mathbf{e}_1) + G(\mathbf{q}_1) = K\tilde{\mathbf{q}}_2 + K\mathbf{q}_{2d} - K\mathbf{q}_1$$

Así, dejando del lado izquierdo a la dinámica de ϵ_1 y a $\tilde{\mathbf{q}}_2$ se cumple que

$$\begin{aligned} & D(\mathbf{q}_1)\dot{\epsilon}_1 + C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\epsilon_1 - K\tilde{\mathbf{q}}_2 = \\ & - \{-\lambda_1 D(\mathbf{q}_1)\dot{\epsilon}_1 - \lambda_1 C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\mathbf{e}_1 + G(\mathbf{q}_1)\} + K\mathbf{q}_{2d} - K\mathbf{q}_1 \end{aligned}$$

entonces

$$D(\mathbf{q}_1)\dot{\epsilon}_1 + (C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) + K_{d1})\epsilon_1 - K\tilde{\mathbf{q}}_2 = \psi_1 \quad (4.4)$$

Esta última igualdad representa a la dinámica del error de control y se satisface si y solo si $\psi_1 = K\mathbf{q}_{2d} - K\mathbf{q}_1 - u_R$ con la señal de control para robots de uniones rígidas \mathbf{u}_R dada por

$$\mathbf{u}_R = -\lambda_1 D(\mathbf{q}_1)\dot{\epsilon}_1 - \lambda_1 C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\mathbf{e}_1 + G(\mathbf{q}_1) - K_{d1}\epsilon_1 \quad (4.5)$$

Por lo tanto, haciendo la dinámica $\psi_1 = 0$, se obtiene la expresión para las coordenadas actuadas deseadas

$$\mathbf{q}_{2d} = K^{-1}(K\mathbf{q}_1 + u_R) \quad (4.6)$$

y, consecuentemente, la dinámica en lazo cerrado puede expresarse como

$$D(\mathbf{q}_1)\dot{\epsilon}_1 + (C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) + K_{d1})\epsilon_1 = K\tilde{\mathbf{q}}_2 \quad (4.7)$$

Esta última ecuación diferencial, que tiene como entrada a la señal de error $\tilde{\mathbf{q}}_2$, representa al subsistema esclavo.

Por otro lado, la segunda parte del controlador, deberá garantizar que si la entrada al subsistema esclavo es cero, entonces el sistema en cascada completo será Global y Asintóticamente Estable (GAS).

Así pues, utilizando la segunda parte de (4.1), la cual representa a la dinámica del motor, y expresándola en términos de la dinámica del error de seguimiento

en las coordenadas actuadas, tal que $\ddot{\mathbf{q}}_2 = \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 + \ddot{\mathbf{q}}_{2d}$, se tiene que

$$J(\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 + \ddot{\mathbf{q}}_{2d}) - K(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) = \mathbf{u}$$

que también puede escribirse como

$$J\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 + K_{d2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 + K_{p2}\tilde{\mathbf{q}}_2 = \psi_2$$

con la variable $\psi_2 = \mathbf{u} + K(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - J\ddot{\mathbf{q}}_{2d} + K_{d2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 + K_{p2}\tilde{\mathbf{q}}_2$, para que la igualdad se satisfaga y las ganancias de control $K_{d2}, K_{p2} > 0$. Así, haciendo la dinámica del error de control $\psi_2 = 0$, se tiene la señal de control

$$\mathbf{u} = K(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) + J\ddot{\mathbf{q}}_{2d} - K_{d2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 - K_{p2}\tilde{\mathbf{q}}_2 \quad (4.8)$$

Esta ley de control garantiza que el sistema maestro tenga una dinámica en lazo cerrado lineal dada por

$$J\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 + K_{d2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 + K_{p2}\tilde{\mathbf{q}}_2 = 0 \quad (4.9)$$

Es decir, con la ley de control provista por (4.8), (4.6) y (4.5) el sistema en lazo cerrado puede expresarse como un sistema en cascada de la forma:

$$\boxed{J\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 + K_{d2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 + K_{p2}\tilde{\mathbf{q}}_2 = 0} \rightarrow \boxed{K\tilde{\mathbf{q}}_2 = D(\mathbf{q}_1)(\dot{\epsilon}_1) + (C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) + K_{d1})(\epsilon_1)}$$

Sistema Maestro Sistema Esclavo

4.1.1. Análisis de Estabilidad

Para concluir sobre la estabilidad del sistema completo, es necesario primero un análisis individual del sistema esclavo y del sistema maestro. En [26] y la teoría general sobre la estabilidad global de la cascada, se encuentra que

para un sistema de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} &= (A - BK)\xi\end{aligned}\tag{4.10}$$

el origen del sistema $(\eta, \xi) = (0, 0)$ es Asintóticamente Estable (Localmente) si el origen $\eta = 0$ del sistema $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ es local y Asintóticamente Estable. Así mismo, el origen del sistema en cascada es Global y Asintóticamente Estable (GAS), si además el sistema $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$ es Entrada-Estados Estable (ISS por sus siglas en inglés).

Siguiendo lo anterior, la estabilidad del sistema maestro se hará con la candidata a función de Lyapunov $V = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}_2^T K_{p2}\tilde{\mathbf{q}}_2 + \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2^T J\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2$. Así, evaluando su derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema maestro en lazo cerrado, se tiene

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2^T (-K_{d2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 - K_{p2}\tilde{\mathbf{q}}_2) + \tilde{\mathbf{q}}_2^T K_{p2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 = \\ &= -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2^T K_{d2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 \leq 0\end{aligned}$$

y utilizando el teorema de La Salle se observa que $\dot{V} \equiv 0$ implica que $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 = \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 = 0$, evaluando lo anterior en (4.9) se tiene que $\tilde{\mathbf{q}}_2 = 0$. De donde puede concluirse que el equilibrio del sistema maestro es Asintóticamente Estable.

Por otro lado, el estudio de la estabilidad global del sistema esclavo no forzado $\dot{\epsilon}_1 = f_0(\epsilon_1, 0)$ también puede verse de manera transparente con la candidata a función de Lyapunov $V = \frac{1}{2}\epsilon_1^T D\epsilon_1$, puesto que su derivada temporal a lo largo de (4.7), con $\tilde{\mathbf{q}}_2$ cero, está dada por

$$\dot{V} = \epsilon_1^T (-C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\epsilon_1 - K_{d1}\epsilon_1) + \frac{1}{2}\epsilon_1^T \dot{D}\epsilon_1$$

y aprovechando la propiedad de antisimetría de la matriz $\dot{D} - 2C$, la derivada de la candidata a función de Lyapunov es

$$\dot{V} = -\epsilon_1^T K_{d1} \epsilon_1 < 0$$

que es estrictamente menor que cero, por lo que puede asegurarse que el equilibrio del sistema esclavo no forzado es GAS.

Finalmente, para poder concluir sobre la estabilidad global de la cascada, es necesario asegurar que el sistema esclavo sea además ISS. Aquí se recurre nuevamente a la literatura general para sistemas entrada estados estables¹. Así pues, considerando a la función positiva definida y continuamente diferenciable

$$V = \frac{1}{2} \epsilon_1^T D \epsilon_1$$

la cual, al ser una forma cuadrática en ϵ_1 , puede ser acotada por funciones clase K_∞ de la norma de ϵ_1 como

$$\lambda_{\min}(D) \|\epsilon_1\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(D) \|\epsilon_1\|^2$$

y cuya derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema también puede acotarse por una función positiva definida del estado ϵ_1 , esto es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \epsilon_1^T (K \tilde{\mathbf{q}}_2 - C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \epsilon_1 - K_{d1} \epsilon_1) + \frac{1}{2} \epsilon_1^T \dot{D} \epsilon_1 \\ &= -\epsilon_1^T K_{d1} \epsilon_1 + \epsilon_1^T K \tilde{\mathbf{q}}_2 \\ &= -(1 - \theta) \epsilon_1^T K_{d1} \epsilon_1 - \theta \epsilon_1^T K_{d1} \epsilon_1 + \epsilon_1^T K \tilde{\mathbf{q}}_2 \end{aligned}$$

de donde

$$\dot{V} \leq -(1 - \theta) \epsilon_1^T K_{d1} \epsilon_1$$

para $0 < \theta < 1$ y cualquier $\|\epsilon_1\| \geq \frac{\|K\| \|\tilde{\mathbf{q}}_2\|}{\theta \lambda_{\min}(K_{d1})}$

Cumpléndose entonces que

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \epsilon_1} f(t, \epsilon_1, \tilde{\mathbf{q}}_2) \leq -W_3(\epsilon_1)$$

¹Ver Teorema 4.19 de [26]

con W_3 positiva definida para cualquier $\|\epsilon_1\| \geq \rho(\|\tilde{\mathbf{q}}_2\|)$ con lo que puede asegurarse que el sistema (4.7) es entrada estados estable. Y, más aún, con esta conclusión, aunada al conocimiento de la estabilidad del sistema maestro y del sistema esclavo no-forzado, puede afirmarse que el origen del sistema en cascada es GAS.

Esta última aseveración asegura también que $\epsilon_1 \in L_2 \cap L_\infty$ y se pueden utilizar entonces las herramientas precisadas en el capítulo anterior para determinar que con esto, las coordenadas no actuadas \mathbf{q}_1 alcanzan un consenso ².

4.1.2. Discusión

Este control por desacoplamiento es un esquema alternativo a aquel propuesto en el capítulo anterior. La ley de control especificada en (4.8) también es implementable puesto que se está suponiendo la medición completa del estado.

Por otro lado, de la ley de control (4.8), (4.6) y (4.5) puede verse que el controlador es mucho más simple que aquel en (3.11), sin embargo, este controlador tiene una gran desventaja frente al anterior. Obsérvese que en la expresión (4.6) para \mathbf{q}_{2d} , a diferencia del controlador en (3.10), depende directamente de la variable \mathbf{q}_1 y por lo tanto de su segunda derivada en la ley de control. Lo anterior implica que o bien se necesite de un medidor de aceleración, lo cual no es físicamente deseable, o bien se utilice el modelo (4.1) para obtenerla, con la desventaja de que, en este caso, el controlador por desacoplamiento depende fuertemente del conocimiento de los parámetros de los robots.

²Para un análisis más detallado refiérase al capítulo 3 y su estudio sobre el caso sin retardos.

4.1.3. Simulaciones

El objetivo de esta subsección es la validación por simulación de la ley de control correspondiente al controlador basado en desacoplamiento cuando se considera que no existen retardos en la comunicación. En el siguiente grupo de simulaciones se consideró que los parámetros se conocen completamente, estos parámetros y el grafo de comunicación, son los mismos que los presentados en el controlador del capítulo anterior. Los valores de las ganancias del controlador son $\lambda_1 = 1,5$, $K_{di1} = 0,5$, $\Lambda_2 = \text{diag}(3, 3, 1,5, 3, 3, 1,5, 7, 10, 10, 1,5)$, $K_{di2} = 0,5$ y $K_{pi2} = 50$

Bajo este marco, las Figuras 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4 retratan el comportamiento de las coordenadas no actuadas y sus velocidades, así como los errores de consenso, seguimiento y el valor de las entradas de control, respectivamente. La primer figura muestra la posición de las diez coordenadas no-actuadas, donde puede verse, que después de seis segundos (cada una iniciando en un valor inicial diferente) exhiben el mismo valor en estado estable, donde este valor consensado depende de las condiciones iniciales de los robots.

La Figura 4.2 se presenta para mostrar que el segundo objetivo de control también se satisface, en el sentido de que las velocidades de las coordenadas no actuadas de los diez robots se hacen cero. Por otro parte, la Figura 4.3 muestra los errores de consenso y de seguimiento, respectivamente para asegurar que éstos se desvanecen, es decir, que las coordenadas actuadas alcanzan a sus deseadas y que con esto, las coordenadas no-actuadas llegan a un consenso.

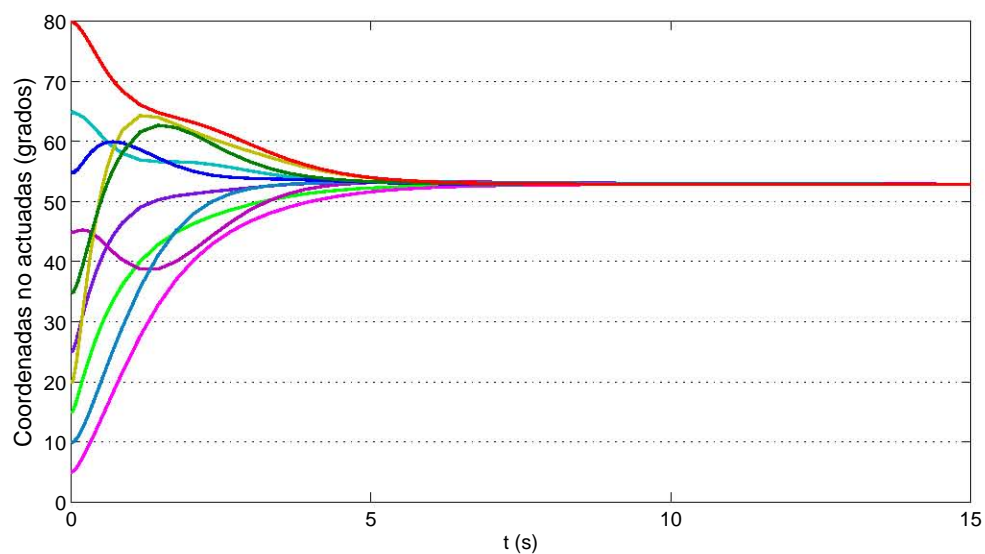


Figura 4.1: Posición de las coordenadas no actuadas q_1 (en grados) en la red de diez robots de uniones flexibles

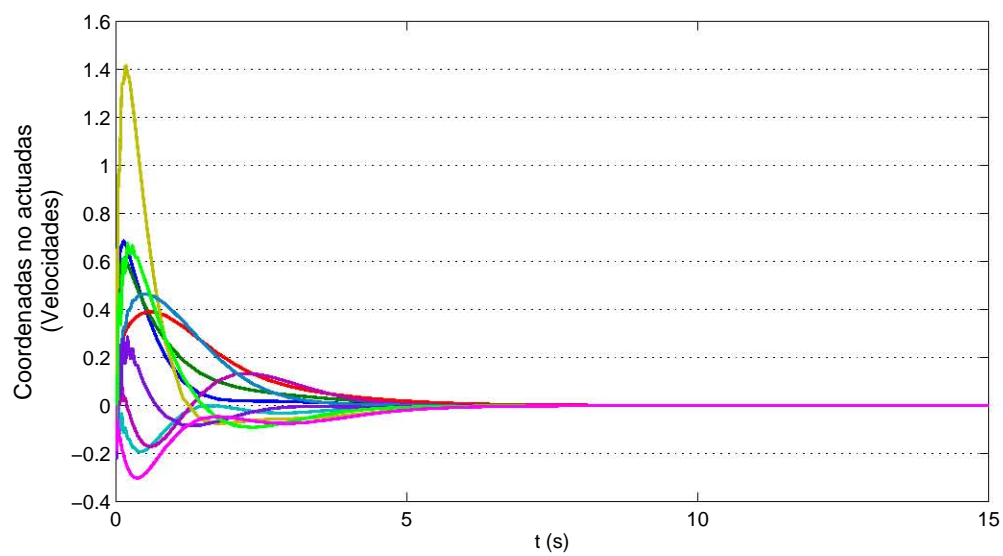


Figura 4.2: Velocidades en las coordenadas no actuadas \dot{q}_1

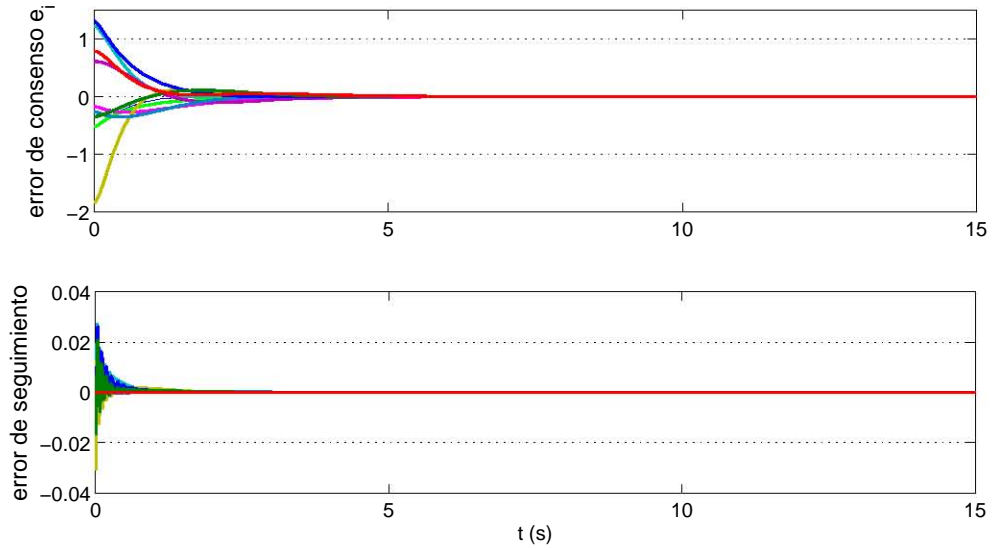


Figura 4.3: Error de consenso \mathbf{e}_1 y de seguimiento $\tilde{\mathbf{q}}_2$

Por último, en la Figura 4.4 se observa la magnitud de las señales de control, las cuales se mantienen todas acotadas y menores a 3 Nm. Mientras que en la parte inferior de esta misma figura pueden verse las coordenadas actuadas, las cuales debido al acoplamiento lineal que exhiben con las no-actuadas, también alcanzan un consenso.

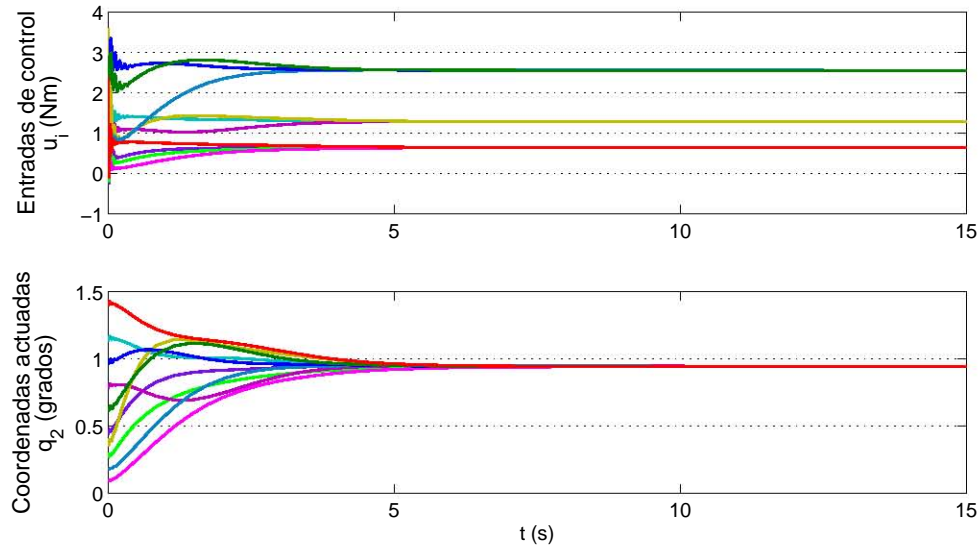


Figura 4.4: Señales de control y posición de las coordenadas actuadas \mathbf{q}_2

4.2. Control Basado en Pasividad

El siguiente es un controlador que al igual que el abordado en el Capítulo 3 está basado en pasividad pero deriva de proponer una función de energía deseada diferente. En principio, la ley de control que surge con este esquema es mucho más simple que aquella encontrada en el Capítulo 3. La idea general de este controlador sigue los lineamientos propuestos anteriormente, en donde se requiere probar primero que la señal auxiliar de error ϵ_1 se desvanece y demostrar con esto que las coordenadas no-actuadas llegan a un consenso. Sin embargo, hasta el momento no se tiene una prueba de convergencia de dicha variable auxiliar de error.

Para el diseño del controlador se considerará al modelo para N -robots de

uniones flexibles en su forma compacta como

$$\mathcal{D}(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}} + \mathcal{G}(\mathbf{q}_1) + \mathcal{K}\mathbf{q} = M\mathbf{u}$$

con $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N_n}$, y las matrices especificadas en el capítulo anterior. En este enfoque, siguiendo el esquema de control publicado en [5] para un solo robot, se desea asignar una función de energía deseada de la forma $V = \frac{1}{2}\epsilon^T \mathcal{D}\epsilon + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^T \mathcal{K}\tilde{\mathbf{q}}$. Así pues, retomando la definición de los errores de seguimiento y consenso dados por

$$\mathbf{e}_1 = (\mathcal{L} \otimes I_n)\mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^{N_n}$$

y las dos variables auxiliares

$$\epsilon_1 = \dot{\mathbf{q}}_1 + \lambda_1 \mathbf{e}_1 \quad ; \quad \epsilon_2 = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 + \Lambda_2 \tilde{\mathbf{q}}_2$$

Se puede escribir a la dinámica del error deseada como

$$\mathcal{D}(\mathbf{q}_1)\dot{\epsilon} + (\mathcal{C}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) + K_d)\epsilon + \mathcal{K} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \tilde{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} = \varphi$$

donde K_d es una matriz diagonal positiva definida que inyecta amortiguamiento, y el término

$$\varphi = M\mathbf{u} - \left\{ \mathcal{D}(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathcal{C}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathcal{G}(\mathbf{q}_1) + \mathcal{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{q}_{2d} \end{bmatrix} \right\}$$

con el vector $\ddot{\mathbf{q}}_r = \begin{bmatrix} -\lambda_1 \dot{\mathbf{e}}_1^T & (\ddot{\mathbf{q}}_{2d} - \Lambda_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2)^T \end{bmatrix}^T$. La ley de control y la expresión para \mathbf{q}_{2d} , se obtiene de asegurar que el término $\varphi \equiv 0$. Lo anterior

significa satisfacer la igualdad

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} D(\mathbf{q}_1) & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{1r} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{2r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{1r} \\ \dot{\mathbf{q}}_{2r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(\mathbf{q}_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{q}_{2d} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{d1} & 0 \\ 0 & K_{d2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de donde la expresión para la señal de control queda dada por

$$\mathbf{u} = J (\ddot{\mathbf{q}}_{2d} - \Lambda_2 \dot{\mathbf{q}}_2) - K_{d2} \epsilon_2 + K \mathbf{q}_{2d} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{q}_{2d} = K^{-1} \mathbf{u}_r \quad (4.12)$$

con la ley de control reportada en [23] para consenso en robots de uniones rígidas dada por

$$\mathbf{u}_r = -\lambda_1 D \dot{\epsilon}_1 - \lambda_1 C \mathbf{e}_1 + G(\mathbf{q}_1) - K_{d1} \epsilon_1 \quad (4.13)$$

Utilizando la ley de control dada por (4.11), (4.12) y (4.13) la dinámica en lazo cerrado queda definida por

$$\mathcal{D}(\mathbf{q}_1) \dot{\epsilon} + (\mathcal{C}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) + K_d) \epsilon + \mathcal{K} \tilde{\mathbf{q}} = 0 \quad (4.14)$$

con el vector $\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_1^T & \tilde{\mathbf{q}}_2^T \end{bmatrix}^T$. La idea es ahora utilizar como candidata a función de Lyapunov la función de energía deseada, obteniendo entonces la derivada temporal de V a lo largo de las trayectorias del sistema (4.14) se tiene

$$\dot{V} = \epsilon^T \mathcal{D} \dot{\epsilon} + \frac{1}{2} \epsilon^T \dot{\mathcal{D}} \epsilon + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \mathcal{K} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

$$\dot{V} = \epsilon^T (-\mathcal{C}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \epsilon - K_d \epsilon - \mathcal{K} \tilde{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} \epsilon^T \dot{\mathcal{D}} \epsilon + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathcal{K} (\epsilon - \Lambda \tilde{\mathbf{q}})$$

$$\dot{V} = -\epsilon^T K_d \epsilon - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathcal{K} \Lambda \tilde{\mathbf{q}}$$

con el vector $\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T & \tilde{\mathbf{q}}_2^T \end{bmatrix}^T$ y la matriz $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1 \mathcal{L}, \lambda_2 I_N\}$. Puede observarse que en la igualdad para \dot{V} , el primer elemento es cuadrático en ϵ , por la positividad de la matriz K_d , sin embargo, el segundo elemento tiene involucrado el producto de la matriz de elasticidad, positiva semidefinida, con la matriz Laplaciana, la cual tiene todos sus valores propios, excepto uno en cero, con parte real positiva. El producto entre estas dos matrices no conmuta, por lo que no se puede saber si la matriz $\mathcal{K}\Lambda$ es positiva semidefinida, con esto V no es función de Lyapunov y habrá que utilizar otras herramientas para determinar la estabilidad interna del sistema.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

En esta tesis se propusieron un par de soluciones para el problema de consenso en una red conectada y compuesta por sistemas Lagrangianos subactuados. Se abordó el problema para el caso particular en que los agentes son robots de uniones flexibles y se consideró la existencia de retardos desconocidos en los canales de comunicación. El resultado presentado es una extensión al artículo previamente publicado en [23] para el caso de sistemas Lagrangianos totalmente actuados, de donde se heredan las suposiciones débiles que se hacen sobre el grafo de comunicación.

Así pues, en este trabajo, se presentaron dos esquemas de control que solucionan el problema de consenso. El primer esquema está basado en pasividad y toma como inspiración la función de energía deseada propuesta en [3] para un solo robot de uniones flexibles. Este controlador también puede adaptarse para el caso donde se consideran retardos en la comunicación. En ambos casos, su principal desventaja es que necesita del conocimiento de las condiciones iniciales; sin embargo, para el caso sin retardos se demostró la robustez del controlador frente a incertidumbres en estas condiciones. En este sentido,

el desempeño alcanzado por este controlador, considerando y no retardos en la comunicación, es destacable.

Así mismo, se presentó un segundo esquema de control basado en desacoplamiento que también da solución al problema de consenso. La ley de control asociada es más simple comparada con aquella que necesita del conocimiento de las condiciones iniciales; sin embargo, la gran desventaja de este esquema es la fuerte dependencia del conocimiento de los parámetros. Finalmente, se presentó un tercer esquema de control, basado en pasividad, cuya convergencia hasta el momento, no se ha podido demostrar, aún cuando por las simulaciones obtenidas para este controlador, pareciera que el único punto de equilibrio al que las coordenadas no actuadas convergen es a cero.

Desde la particularidad de esta tesis, los controladores necesitan de la medición de todo el estado y suponen conocidos los parámetros de los robots, así que, como trabajo futuro, se pueden incorporar estos aspectos en el diseño de la ley de control. Se pueden considerar, además, los escenarios específicos de consenso donde existe una dinámica líder o bien, el caso donde se desea que el valor consensado obedezca a una distancia entre los agentes, abarcando así, otro tipo de aplicaciones.

En el desarrollo de la tesis se encontraron varias cuestiones que también se plantean como trabajo futuro. Entre ellas, utilizar la ley de control para sincronizar las coordenadas actuadas de los robots y, aprovechando el acoplamiento lineal que existe con las coordenadas no-actuadas, dejar que éstas también alcancen un consenso. Esta perspectiva tiene la gran ventaja de que la dinámica actuada de los robots de uniones flexibles bien puede escribirse como una cadena de dobles integradores para los cuales, existe una amplia literatura que reporta su sincronización. En otro marco, los resultados obtenidos están en términos de coordenadas articulares, pero el consenso en estas coordenadas no asegura el consenso en coordenadas cartesianas, por lo que es necesario analizar el problema desde este contexto.

Por último, se presentó la tesis con la intención de contribuir en el acotamiento del problema de sincronización de Sistemas Lagrangianos Subactuados. Así pues, con este trabajo, además de la experiencia obtenida, se busca seguir en la investigación con el objetivo de ampliar la clase de Sistemas Subactuados que se pueden sincronizar bajo el mismo enfoque de control.

Capítulo 6

Apéndice

6.1. Álgebra Matricial

A menudo se encontrarán matrices cuyos elementos son por sí mismo matrices, algunas herramientas y definiciones para matrices definidas a bloques pueden encontrarse en [25], entre ellas las siguientes:

1. Si A y B son matrices cuadradas,

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} = \det A \det B$$

2. Si A es no singular, entonces

$$\det \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} = \det A \det [B - CA^{-1}D] \text{ y,}$$

$$\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + E\Delta^{-1}F & -E\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}F & \Delta^{-1} \end{bmatrix}, \text{ donde } \Delta \text{ es el } \textit{complemento de Schur} \text{ de } A \text{ y está definido como } \Delta = B - CA^{-1}D, E = A^{-1}D, \text{ y } F = CA^{-1}.$$

Dentro del álgebra matricial, una de las herramientas ampliamente utilizadas a lo largo de la tesis es el producto de Kronecker, este producto es una operación entre dos matrices de tamaño arbitrario que da como resultado una matriz bloque. Así, sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$, entonces el producto de Kronecker o producto tensorial de A y B está definido como la matriz $A \otimes B \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$, tal que

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Además, suponga que $U \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $V \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $X \in \mathbb{R}^{p \times p}$ y $Y \in \mathbb{R}^{q \times q}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $(U + X) \otimes V = U \otimes V + X \otimes V$
2. $(U \otimes V)(X \otimes Y) = UX \otimes VY$
3. $(U \otimes V)^T = U^T \otimes V^T$
4. Suponga que U y V son invertibles, entonces $(U \otimes V)^{-1} = U^{-1} \otimes V^{-1}$
5. Si U y V son simétricas positivas definidas (respectivamente, positivas semidefinidas), también lo es $U \otimes V$

Bibliografía

- [1] P. Moylan and D. Hill. Stability Criteria for Large-Scale Systems. *IEEE Trans on Automatic Control*, Vol. 23, No. 2, pp. 143-149, 1978.
- [2] I. Blekhman. Synchronization in Science and Technology. *ASME Press*, New York, 1988.
- [3] B. Brogliato, R. Ortega and R. Lozano. Global Tracking Controllers for Flexible-joint Manipulators: a Comparative Study. *Automatica*, Vol. 31, No. 7, pp. 941-956, 1995.
- [4] N. Lynch. Distributed Algorithms. Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1997.
- [5] R. Ortega, A. Loria, P. Nicklasson, and H. Sira-Ramirez. Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications. *Springer*, 1st edition, 1998.
- [6] A. Pogromsky. Passivity Based Design of Synchronizing Systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 8, No. 2, pp. 295-319, 1998.
- [7] J. Fax and R. Murray. Graph laplacians and stabilization of vehicle formations. *Proceedings of 15th IFAC Conference*, pp. 2353, Barcelona, 2002.

- [8] R. Olfati-Saber and R. Murray. Consensus Protocols for Networks of Dynamic Agents. *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 951-956, Denver, 2003.
- [9] J. Fax and R. Murray. Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Trans on Automatic Control*, Vol. 49, No 9, pp. 1465-1476, 2004.
- [10] R. Olfati-Saber and R. Murray. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Trans on Automatic Control*, Vol. 49, No. 9, pp. 1520-1533, 2004.
- [11] A. Rodriguez-Angeles and H. Nijmeijer. Synchronizing tracking control for Flexible Joint Robots via estimated state feedback. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, Vol. 12, No. 6, pp. 162-172, 2004.
- [12] L. Moreau. Stability of Multiagent Systems With Time-Dependent Communication Links. *IEEE Trans on Automatic Control*, Vol. 50, No. 2, pp. 169-182, 2005.
- [13] P. Bliman and G. Ferrari-Trecate. Average consensus problems in networks of agents with delayed communications. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference*, pp. 7066 - 7071, Sevilla, 2005.
- [14] N. Chopra and M. Spong. Passivity-Based Control of Multi-Agent Systems. *International Symposium on Advanced Robotics and Machine Intelligence*. Beijing, 2006.
- [15] N. Chopra and M. Spong. Output Synchronization of Nonlinear Systems with Time Delay in Communication. *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4986-4982, 2006.

- [16] M. Arcak. Passivity as a design tool for group coordination. *IEEE Trans on Automatic Control*, Vol. 52, No.8, pp. 1380-1389, 2007.
- [17] S. Nair and N. Leonard. Stable Synchronization of Mechanical System Networks. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 47, No. 2, pp. 661-683, 2008.
- [18] W. Ren. Distributed leaderless consensus algorithms for networked Euler-Lagrange Systems. *International Journal of Control*, Vol. 82, No. 11, pp. 2137-2149, 2009.
- [19] Chung and J. Slotine. Cooperative Robot Control and Concurrent Synchronization of Lagrangian Systems. *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 25, No.3, pp. 686-700, 2009.
- [20] L. Scardovi, M. Arcak and E. Sontag. Synchronization of interconnected systems with applications to biochemical networks: An input-output approach. *IEEE Trans on Automatic Control*, Vol. 55, No 6, pp. 1367-1379, 2010.
- [21] X. Liu, W. Lu and T. Chen. Consensus of multi-agent systems with unbounded time-varying delays. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 55, No. 10, pp. 2396-2401, 2010.
- [22] A. Van der Schaft and B. Maschke. Port-Hamiltonian Dynamics on Graphs: Consensus and Coordination Control Algorithms. *Proceedings of the 2nd IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems*, France, 2010.
- [23] E. Nuño, R. Ortega, L. Basañes and D. Hill. Synchronization of networks of nonidentical Euler-Lagrange systems with uncertain parameters and communication delays. *IEEE Trans on Automatic Control*. Vol. 56, No. 4, pp. 935 - 941, 2011.

- [24] W. Ren and Y. Cao. Distributed Coordination of Multi-agent Networks, Communications and Control Engineering. *Springer*, 2011.
- [25] T. Kailath. Linear Systems. *Prentice-Hall*, 1980.
- [26] H. Khalil. Non Linear Systems. *Prentice Hall*, 2002.
- [27] F. Ghorbel, J. Hung, and M. Spong. Adaptive Control of Flexible-Joint Manipulators. *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 9, No. 7 , pp. 9-13, 1989.
- [28] M. Spong, S. Hutchinson and M. Vidyasagar. Robot Modeling and Control. *John Wiley and Sons*, 2006.
- [29] A. Pikovsky, M. Rosenblum and J. Kurths. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge Nonlinear Science Series, 2003.
- [30] A. Bemporad. Predictive Control of Teleoperated Constrained Systems with Unbounded Communication Delays. *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Florida, USA, 1998
- [31] Networks and Control. *Control Systems, IEEE*, Vol. 21, No. 1, 2001
- [32] Control of Complex Networks. *Control Systems, IEEE*, Vol. 21, No. 6, 2001
- [33] Complex Networks. *Control Systems, IEEE*, Vol.22, No. 1, 2002
- [34] Complex Networked. *Control Systems, IEEE*, Vol. 27, No. 4, 2007