MADEMS
Maestría en Docencia
para la Educación Media Superior

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRIA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

Propuesta para la comprensión y aplicación del concepto de límite de una función en la materia Matemáticas V del Colegio de Bachilleres del Estado de México

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR, EN MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

Lic. Mat. Lázaro Villa Valdín

Tutor: M.I. Víctor José Palencia Gómez

Noviembre de 2011

RESUMEN:

La operatividad tradicional algorítmica algebraica del límite no lleva a los alumnos a la conformación del concepto en el Colegio debido a la dificultad de los signos, sin embargo al trabajar con la visualización de las gráficas de las funciones se crea una alternativa de aprendizaje, ya que el registro gráfico es una ayuda en la construcción del concepto.

ABSTRACT:

The traditional work algoritmic-algebraic of the boundary doesn´t carry the students to conform the concept in the College because there is a difficult of the signs, however in the work with the vision of the graphic function it gives another way of learning, because the graphic sign involve a helping in the construction of the concept.

DEDICATORIAS:

A mi esposa *Elma Georgina Barón Ruíz,* por su gran apoyo y amor.
A mis padres y hermanos *Lazaro, Tomasa, Efrain* y *Celia,* a quienes quiero mucho.
A mi hermana *Celia*, cuñado y mis sobrinos, por su apoyo durante la Licenciatura.
A mi hija *Susan* y a mis sobrinos *Bryan, Damian, Johana* y *Mina*, porque son la alegría de la familia.

A mis sinodales, por su sabiduría y apoyo:
Mtro. *Víctor José Palencia Gómez*
Mtro. *Juan B. Recio Zubieta*.
Dr. *Sergio Contreras Cruz*.
Dr. *Mauricio Pilatowsky Braverman*.
Dr. *Alejandro Bravo Mójica*

A mis Maestros, compañeros y amigos de la Licenciatura:
Dr. *Ignacio Garnica Dovala*
Mtro. *Héctor Chávez*
Lic. *Valentín Cruz Pérez*
Dr. *Daniel Gómez Gómez*
Dr. *Alejandro López Yanez*
Dr. *Guillermo Fernández del Busto*
Dra. *Magalí Folks Gaballè*
Dra. *Alexandra Chávez Ross*
Dra. *Mika Olsen Nielsen.*
Mtro. *Francisco López López*
Ing. *Gabriela Mendoza Nieves*.
Ing. *Norma Monrroy Carrasco*
Lic. *Alma Luz Alcantara González*
Lic. *Luz Elizabeth Guerrero Ramirez*.
Dr. *Ernesto Arturo Bosquez Molina*
Mtro. *José Carlos Mendoza*
Ing. *Lina López López*
A mis compañeros de la Maestría.
Ing. *Olivia Alexandra Scholz Marbán*
Ing. *Carlos Alberto Álvarez García*
Ing. *Milipsa Flores Martínez.*
Ing. *Ana Ivett Martínez Carmona.*

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.

El aprendizaje del concepto de *límite* en las aulas es un proceso que no es sencillo, es un tratamiento natural del desarrollo conceptual del Cálculo, que debido a la diversidad de contenidos crea una problemática de asimilación de ideas en los alumnos.

El Álgebra, la Geometría Plana, la Geometría Analítica, Funciones y el Cálculo Diferencial e Integral, son los ejes de estudio medulares en Matemáticas en el *Colegio de Bachilleres del Estado de México, Plantel 09, Huixquilucan*, en ellas existe un proceso de desarrollo de ideas hacia una estructura matemática.

La problemática de aprendizaje del *límite* que se imparte en el curso de Matemáticas V de Cálculo Diferencial del Colegio, consiste en la poca o nula generación y desarrollo de esquemas de ideas matemáticas y se debe a la dificultad de operación basada en un lenguaje algorítmico algebraico propio del Cálculo.

Los alumnos en el proceso de aprendizaje se confrontan con una situación poco alentadora debido a que una característica básica de las matemáticas es su abstracción. Las primeras abstracciones se realizan a partir del mundo material, y mediante una reconstrucción conceptual se produce un modelo de ella.

Al permitir el análisis y percibir las generalidades de las manifestaciones propias de una realidad, la abstracción abre el camino hacia un conocimiento más profundo y permite un mayor logro de estructuración y desarrollo de modelos matemáticos.

Las relaciones de los procesos del pensamiento que los alumnos llevan a cabo en una perspectiva epistemológica del concepto de *límite*, no se construyen de manera inmediata debido a las dificultades de asimilación de los contenidos.

Para los alumnos no constituye una estructura de interpretación y conocimiento, porque no logran operar bajo un lenguaje algebraico correctamente.

Las concepciones matemáticas se formaron como resultado de un complejo y prolongado proceso social e intelectual.

Es decir, en la producción de ideas matemáticas se da una secuencia gradual de niveles de abstracción.

Los alumnos no logran relacionar un alto grado de correspondencia entre sus operaciones y la realidad de la estructura algebraica que se modela en el estudio del *límite.*

Las acciones se organizan en esquemas. Los alumnos no realizan una reflexión sobre la producción de un conocimiento que ya no se refiere a un conocimiento de objetos materiales, sino a operaciones en un conocimiento de objetos matemáticos. Lo que hace que los alumnos tengan poca alternativa de operación debido a que las acciones de las estructuras algebraicas se relacionan con estructuras más abstractas y llevan a un nivel profundo de conceptualización.

Para verificar si un modelo y su teoría reflejan la realidad hay que confrontarlo con ella. Al considerar las acciones como procesos de operatividad en el proceso de construcción del conocimiento, desde el punto de vista *ontogenético* la acción precede al conocimiento. Para conocer la realidad hay que operar sobre ella. Las reflexiones sobre las acciones producen un conocimiento "*lógico matemático*". Este proceso de reflexión se conoce como abstracción reflexiva. Con un tratamiento *filogenético* se aprecia esta interiorización de las acciones mediante una reflexión consciente de ellas.

La parte de las matemáticas dedicada al estudio de las funciones es el análisis. El eje de estudio en Cálculo Diferencial es el tema de funciones. El tratamiento de los contenidos del concepto de función constituye una actividad principal de estudio que los alumnos deben conectar y explorar como parte importante en la fundamentación del proceso de asimilación y acomodación en el aprendizaje del concepto de *límite.*

La situación actual sobre la enseñanza de *límite* en el curso, se centra en el modelo tradicional de transmisión de conocimientos consistentes en abordar los temas bajo un esquema de un análisis de vecindades, lo que conduce a una trasmisión de ideas muy rígidas y esto ocasiona un conflicto cognoscitivo al operar en términos de conjuntos abiertos.

El programa oficial que rige la trasmisión de conocimientos en el Colegio para el curso de Cálculo Diferencial, en el apartado de *Límites*, establecido por el programa oficial de Bachillerato de la *SEP* es el siguiente:

Tema1: Límite de Funciones Constantes.
Tema2: Límite de Funciones Racionales.
Tema3: Límites Laterales.
Tema4: Estudio de la no existencia del límite.

En ella y como parte de la planeación de los contenidos se dispuso de *3* semanas para cubrir estos temas de *límites,* distribuidos en *8* sesiones de *50* minutos, en *3* sesiones por semana.

La filosofía del Colegio apunta en la transmisión de conocimientos y como parte de la formación de los alumnos, donde se logren identificar como Institución, con valores apoyados en el aprovechamiento y exigencias de los recursos que la Escuela les brinda para elevar la calidad de su Educación; sin embargo, consciente sobre el espíritu de los contenidos matemáticos, esto no es suficiente porque no se ha logrado que los alumnos desarrollen un aprendizaje significativo, lo que ha sido motivo de inquietud y en parte es la problemática que se aborda con el desarrollo de actividades.

Las dificultades de aprendizaje observadas en las aulas se deben en parte en que se presenta en tan sólo tres semanas de clases, según lo marca el calendario oficial de la

SEP, lo cual resulta ser insuficiente debido al tratamiento algorítmico algebraico que se le da.

El desarrollo de una clase tradicional está basado en la Planeación del Avance Programático que emite la Secretaría de Gobernación y es el siguiente:

PLAN CLASE. ASIGNATURA: CÁLCULO DIFERENCIAL

TEMA: *LÍMITE* DE FUNCIONES RACIONALES.	**Sesión 8** **27/08/2010**
OBJETIVO DEL TEMA: El alumno estudiará el *límite* de funciones racionales.	
OBJETIVO DEL SUBTEMA: El alumno calculará el *límite* de expresiones algebraicas de funciones racionales.	
APRENDIZAJES A LOGRAR: Calcular *el límite* de funciones racionales cuando *x* tiende a cero, a infinito y cuando tiende a un valor numérico establecido.	**CONOCIMIENTOS PREVIOS**: Propiedades de campo de los números reales, sucesiones, trigonometría, funciones, ecuaciones.

A C T I V I D A D E S

Fase de apertura

Socialización de Objetivos TIEMPO 5/5 1.- Los alumnos discutirán los contenidos sobre las estructuras del cálculo del *límite.*	*TÉCNICA:* Verbal y simbólica. *MATERIAL:* Marcador y pizarrón. *RECOMENDACIONES:* Inducir a la creatividad y pensamiento crítico.

1. ***Explicación de lìmite de funciones racionales*** ***Propósito de la actividad:*** Describir un esquema general de los contenidos matemáticos de *límites* de funciones racionales.	TIEMPO 5/10	*TÉCNICA:* Verbal y simbólica. *MATERIAL:* Marcador y pizarrón. *RECOMENDACIONES:* Hacer dibujos sobre los conceptos de *límite.*

Fase de desarrollo

2. Presentación y Estudio de los ***límites*** **de funciones racionales en forma matemática.** ***Propósito de la actividad:*** Presentación de los contenidos matemáticos de los *límites* de funciones racionales.	TIEMPO 10/20	*TÉCNICA:* Verbal y simbólica. *MATERIAL:* Pizarrón y marcadores. *RECOMENDACIONES:* Explicar las operaciones algebraicas.
3. Ejercicios por parte del profesor ***Propósito de la actividad:*** Desarrollar ejercicios típicos en el cálculo de *límites* de funciones racionales.	TIEMPO 10/30	*TÉCNICA:* Verbal, y simbólica. *MATERIAL:* Cuaderno y marcador. *RECOMENDACIONES:* Los alumnos identifican las soluciones de un ejercicio.

4. Ejercicios por parte de los alumnos. TIEMPO 5/35 ***Propósito de la actividad:*** Los alumnos calculan los *límites* de funciones racionales que se les solicita como un proceso de construcción de contenidos y conceptos.	*TÉCNICA:* Simbólica. *MATERIAL:* Papel y lápiz. *RECOMENDACIONES* Hacer la transferencia simbólica de los contenidos matemáticos.
5. Monitorear la solución de los alumnos TIEMPO 5/40 ***Propósito de la actividad:*** Verificar y ayudar al alumno para aclarar dudas en la solución que ellos generan.	*TÉCNICA:* Simbólica. *MATERIAL:* Cuaderno y lápiz. *RECOMENDACIONES:* Atender a los alumnos en su lugar para observar el avance de sus soluciones.

Fase de cierre

6. Análisis de resultados TIEMPO 5/45 ***Propósito de la actividad:*** Presentar la solución de todos los ejercicios y presentar como fase final de la clase una síntesis y retroalimentación de los contenidos matemáticos de *límite* en las	*TÉCNICA:* Simbólica y mapa conceptual. *MATERIAL:* Cuaderno y lápiz. *RECOMENDACIONES:* Elaborar una lista de los contenidos

funciones racionales.	matemáticos más relevantes en estudio.
7. Tarea TIEMPO 5/50 ***Propósito de la actividad:*** Dejar ejercicios para realizarlos en casa.	*TÉCNICA:* Simbólica y simbólica *MATERIAL:* Cuaderno y lápiz. *RECOMENDACIONES:* Proponer ejercicios semejantes.

En el desarrollo de una clase típica de *límite* en el Colegio, el profesor hace la siguiente presentación simbólica algorítmica algebraica:

DEFINICIÓN: El *límite* de *f(x)* cuando *x* tiende a x_0 es *L*, y se escribe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

sí para todo $\varepsilon > o$ $\ni \delta > o$ *tal que sí* $/ f(x) - L / < \varepsilon \rightarrow 0 < / x - x_0 / < \delta.$

Este tratamiento propio de un lenguaje especializado de contenidos de vecindades del *Cálculo Diferencial* no es común para el alumno y en consecuencia el operar bajo este medio simbólico resulta difícil la inferencia del concepto de *límite.*

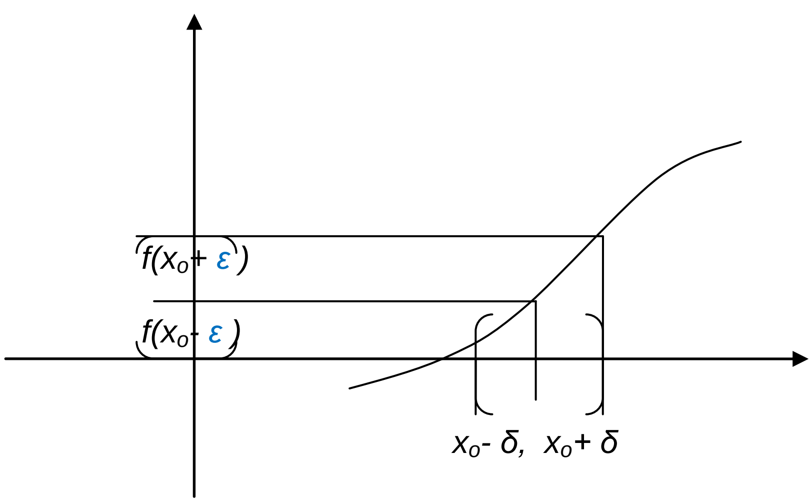


Fig.1

El trabajar en términos de vecindades tiene un esquema de desarrollo de ideas en conjuntos abiertos, conceptos fundamentales, pero esto el alumno no lo entiende.

Bajo este modelo de enseñanza se hace una presentación de los contenidos en forma terminada lo que ocasiona una dificultad de aprendizaje y con ello los alumnos esperan a recibir información y no se propician actividades previas hacia la construcción de ideas que lleven a desarrollar el pensamiento lateral como parte del proceso para entender el concepto de *límite.*

Por esta vía tradicional, el alumno sólo espera que el profesor sea el conductor de los saberes, pero al alumno no se le da la alternativa de ser un constructor del conocimiento.

Los alumnos entran en dificultades por desconocer y tener una nula operación con este lenguaje simbólico propio del análisis de vecindades. Además el operar en forma algorítmica no despierta un aprendizaje significativo.

La problemática del aprendizaje de los alumnos está relacionada con el modelo de enseñanza tradicional que se imparte en las clases de Cálculo Diferencial del Colegio, en estas circunstancias a llevado a los alumnos, en la mayoría de los casos a operar mecánicamente y esta problemática es relacionada con la difícil operatividad de los signos y símbolos propios del lenguaje en términos de vecindades, en esta transmisión de conocimientos el problema cognoscitivo que se observó en alumnos presenta dos situaciones que son relevantes. Una es la falta de asimilación de los conceptos y la otra como proceso de aprendizaje, la generación, acomodación e inferencia de ideas matemáticas, no dan una fluidez óptima en la transmisión de conocimientos.

Los contenidos matemáticos desde la perspectiva del profesor son buenos, este tratamiento por lo general es una presentación terminada del conocimiento, pero es importante hacer una reflexión sobre todos los proceso que articulan la construcción de las ideas que están en juego y por lo general no se entienden. No permiten un desarrollo de ideas desde una perspectiva sintética.

El trabajo que se operó en forma axiomática, creó una dificultad en el proceso de aprendizaje. Debido a que en este proceso de construcción del concepto del *límite,* se observó, que no todos los alumnos asimilan, interpretan, representan y entienden de la misma manera, en esta perspectiva de operar con los símbolos algebraicos existe una dificultad simbólica para el aprendizaje, debido al desarrollo de operaciones con símbolos y signos en la generación de conceptos.

Como parte del proceso de enseñanza tradicional la atención se centra en la presentación de los contenidos de definiciones, teoremas y solución de ejercicios algorítmicos algebraicos, y con esto se propicia una poca o nula generación de ideas, reflexiones y generaciones del concepto de *límite.*

Lo que dificulta el proceso de adquisición, comprensión y tratamiento de los contenidos, se observa una fuerte complicación cognoscitiva en la incorporación de los elementos hacia la estructura del concepto del *límite.*

El proceso de aprendizaje en los *8* últimos años consistió en una sustitución numérica en el mejor de los casos, pero se observó muy frecuente que los alumnos no lograban entender el concepto formal de *límite.*

El tratamiento numérico por sustituciones, no propicia la inferencia de descubrir el comportamiento tendencial y no los llevó a establecer patrones de comportamiento en las imágenes del *límite* de una función, esta situación que se esperaría que se desprendiera de las actividades que se realizan al operar con sucesiones, con este análisis, no se logra la idea intuitiva del concepto de *límite*.

Estas actividades se ejecutan a nivel de memoria a corto plazo y no desarrollan esquemas de ideas, es decir, no se relacionan estas operaciones con ideas del comportamiento tendencial en desarrollo de ideas que permiten incorporar hacia una estructura e inferir el concepto del *límite*, en estas circunstancias resultó complicado calcular un *límite* para los alumnos.

Estas circunstancias se observaron porque los profesores sólo crean un ambiente repetitivo de contenidos, pero no se crea un ambiente reflexivo, donde el profesor ponga en juego aquellos elementos que son significativos y permitan hacer referencia al concepto de *límite.*

No se resuelven problemas de *límites,* solo ejercicios. En esta situación, los alumnos solo tienen una repetición mecánica de contenidos y consisten en resolver ejercicios similares a los que el profesor ejercita, lo que no genera un aprendizaje óptimo. El operar con algoritmos no propicia el entendimiento de las estructuras matemáticas.

Los alumnos obtienen en el cálculo de *límites* resultados como:

$$0/0,\ 1/0,\ 1/\infty.$$

Y generalizan el valor de *1, 0* e ∞ para estos casos.

La presentación axiomática genera un bloqueo en la generación y desarrollo de ideas matemáticas y se debe también que los profesores han seguido el mismo tratamiento formal en cursos anteriores de Álgebra, Geometría Plana y Trigonometría, Geometría Analítica y Funciones; al desarrollar las clases en forma analítica, da como resultado un contenido de conocimientos reducidos a operar de manera algorítmica con signos.

En este sentido, el aprendizaje se olvidó, porque no se logró incorporar a una estructura significativa.

En lo que respecta a estos cursos en el Colegio, en pocas ocasiones se hacen o emplean relaciones figúrales de los contenidos estudiados con la estructura algebraica como parte de la solución y al pasar al tema de *límites,* con la notación simbólica, los alumnos no logran relacionar los contenidos estudiados, se enfrentan a una situación que rompe con su paradigma de estudio tradicional.

El desconocimiento de estructuras genera una dificultad en el aprendizaje, pero la parte fundamental de estudio consistió en hacer notar que mientras se sigan repitiendo las operaciones mecánicas, en hacer ejercicios similares que el profesor ha resuelto esto no propiciará un desequilibrio en el aprendizaje del alumno y no se logrará un aprendizaje significativo, pues al no poder hacer variaciones sobre la identificación de aquellas estructuras que permanecen invariantes no se logra un avance representativo.

El aprendizaje es significativo en la medida que el alumno se le crea la capacidad de enfrentar y resolver problemas de *límites,* estas actitudes constituyen en el ejercicio de la labor docente el procrear el desarrollo de habilidades y valores para el estudio. En el Colegio no se resuelven problemas de *límites* solo operaran sobre la repetición de ejercicios.

Lo que es relevante mencionar según lo observado al final de la primera semana es que los alumnos no podían dar una respuesta a ejercicios solicitados. En esta medida es la preocupación sobre el desarrollo del concepto de *límite*. Hasta antes de los tres últimos cursos, no se hacía uso del recurso de la computadora en la solución de problemas como un refuerzo en la búsqueda y elaboración de contenidos.

Se observó que la nula operatividad del lenguaje algebraico sobre los conceptos causa a los alumnos una dificultad de aprendizaje debido a una falta de comprensión de los contenidos, i. e, no se logra un nivel propio de significación.

En este sentido, el interés del estudio consistió en proponer una alternativa para observar cómo el operar bajo el respaldo de un medio visual como proceso de apoyo ante un problema de aprendizaje de *límite*, el alumno logra un grado de confiabilidad y progreso en sus cálculos y que esto permite generar confianza en su análisis de las funciones, debido a que cuando se trabaja por la vía tradicional a lápiz y papel no se tiene una vía de solución más que la operatividad con el lenguaje simbólico algebraico y esto es un obstáculo en su aprendizaje.

El trabajo consistió en desarrollar un estudio mediante la visualización del *límite,* interpretando gráficas ejecutadas por una computadora en el programa *Derive* con actividades basadas en las clases que marca el avance programático que se imparte en la *Unidad II* de *Cálculo Diferencial* del *Colegio de Bachilleres del Estado de México, Plantel 09 Huixquilucan Sur*, del Sistema de Enseñanza del Bachillerato Federalizado.

Ante estas circunstancias se desarrolló una perspectiva apoyada en un respaldo visual para mejorar su aprendizaje y en los momentos de confrontación la parte algorítmica algebraica al ser respaldada con una gráfica crea un refuerzo que une la relación con la inferencia del cálculo del *límite;* esta generación de actos de reflexión consisten en conectar con un grado de significación mejor para su entendimiento y no solo poner:

0/0=0,

1/0=0,

1/∞=∞.

En el problema cognoscitivo de generación de ideas, el alumno al tener un respaldo gráfico es un medio alterno que vincula el proceso de aprendizaje en el orden de generación de ideas matemáticas. Sus actividades, sobre un registro gráfico las conectan unas a otras. La misma confrontación y desequilibrio logró respaldar lo que antes sólo se trabajó con un medio algorítmico algebraico.

De aquí surgió la inquietud de la propuesta al estar convencidos que el alumno al tener y trabajar sus actividades con un recurso figural es de gran apoyo como parte importante del proceso de estudio y en la medida que avanza se crea una seguridad en la generación y respaldo de construcción de ideas matemáticas, debido a que se crea y modifica una conducta en sus operaciones mentales, esta generación de conductas son acciones para crear también hábitos de estudio diferentes que representan un avance en el estudio del concepto del *límite.*

Las gráficas de funciones permiten para su tratamiento el manejo de contenidos de dominio, contradominio, asíntotas y comportamiento tendencial de imágenes patrones de la función, con ello se buscó generar un proceso de integración como recurso didáctico en el proceso de aprendizaje.

Al recurrir a un medio figural y gráfico permitió integrar las unidades significativas de la gráfica de la función, además se tuvo una potencialidad en la solución, ya que las actividades al ser asistidas en todo momento por la computadora, el recurso figural permite integrar y pasar del registro gráfico al simbólico algebraico y en este sentido aporta significación del concepto.

La introducción y asistencia del alumno por gráficas generadas por una computadora es importante porque es una herramienta de trabajo que agiliza, integra, ayuda y aporta una potencia en la generación y tratamiento de ideas visuales.

El tratamiento de la información obtenida de una gráfica constituye la parte importante en la solución de un problema, el mismo Polya (1992) menciona que un problema debe dividirse en partes para analizar parte a parte.

Vygotski (2003) dice que los signos son herramientas que sirven como mediación para generar acciones que nos lleven a la construcción del conocimiento y se desarrollan a través del medio sociocultural como parte fundamental del proceso de generación y construcción del conocimiento.

Según Duval (1990), sobre el tratamiento de las representaciones, el recurso figural en la solución de un problema es parte fundamental. El estudio tiene como fundamento en observar y mostrar como los alumnos generan ideas matemáticas a través de un apoyo gráfico como parte de la seguridad en la generación de una idea en el pensamiento y al mismo tiempo es una motivación para despertar una conducta de confianza como refuerzo fundamental y se logre un interés en el desarrollo de sus actividades.

El estudio contempla el tratamiento de gráficas de funciones que son relevantes vinculadas con el cálculo de *límites*, dado que los contenidos permiten para su mejor comprensión un acercamiento hacia las ideas, símbolos, signos y conceptos y como parte importante se espera un mejor acercamiento en el entendimiento de los difíciles objetos matemáticos, proponiendo:

La visualización como una alternativa en el estudio de los objetos matemáticos en contraste con la presentación de los mismos que se imparten en forma algorítmica algebraica, ya que en el salón de clases sólo se resuelven ejercicios y no propicia la resolución de problemas donde se crea el aprendizaje significativo en los alumnos.

Esta propuesta didáctica nace del interés de hacer una mejora en la enseñanza del *límite,* primero se trabaja con el registro gráfico y luego se articula con el registro algebraico.

La Tesis de trabajo es: Sí los alumnos realizan actividades para el estudio de *límites* asistidos por un recurso gráfico entonces las unidades significativas de la misma ayudarán a entender la inferencia intuitiva del concepto en el curso de Matemáticas V del Bachillerato del Estado de México.

Los objetivos que justifican el trabajo son:

1.-Que los alumnos logren el aprendizaje del concepto de *límite.*

2.-Que los alumnos logren entender el concepto de l*ímite* mediante un tratamiento primero visual y posteriormente analítico algebraico.

3.-Desarrollar un esquema de ideas matemáticas que permitan al alumno transitar en un ambiente de seguridad en sus cálculos mediante el respaldo visual.

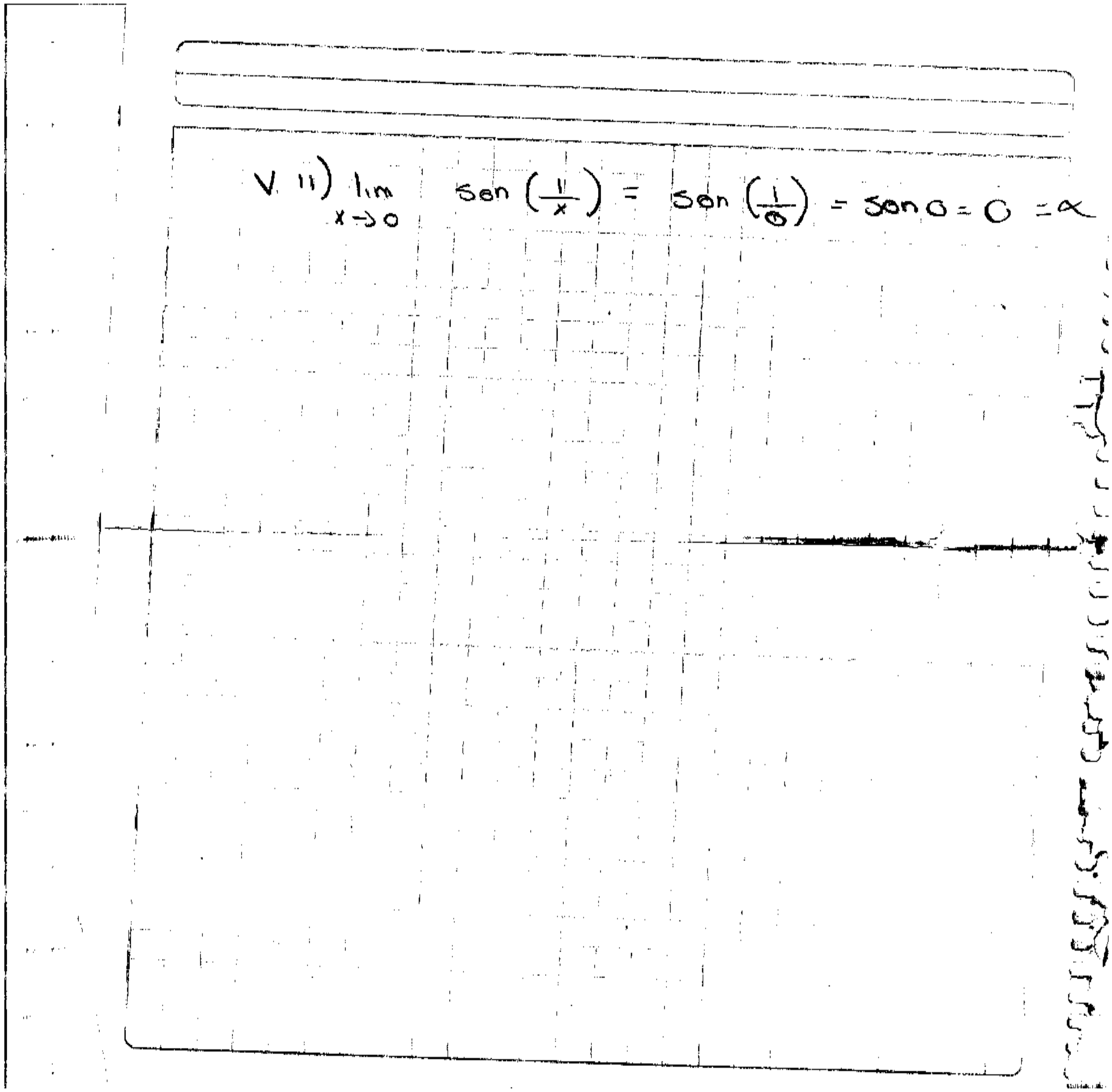
Un alumno demuestra haber aprendido el concepto de *límite* en la medida que opera correctamente sus cálculos.

Como justificación de lo anterior, y en parte ubica el objetivo, al solicitar a los alumnos calcular el

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$$

en sus operaciones escribieron lo siguiente:

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$$



V. 11) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{0}\right) = \operatorname{sen} 0 = 0 = \alpha$

Fig. 2

Se observó una operación mecánica de los valores con desarrollo de estructuras matemáticas incorrectas.

Dentro de sus operaciones para encontrar el *límite* sólo hacen operaciones sobre una sustitución del valor cero cuyas estructuras y operaciones son erróneas.

También se observó en primera instancia que existe una dificultad para obtener la solución, primero el cuestionamiento de *1/0* al no estar definido, no logran relacionar el sen(1/x) con el *sen(x)*. Ya que el problema se observó en el argumento de la función. No se sabía por dónde estaba el valor a calcular, lo que se encontró que el cálculo del *límite* solicitado no es inmediato. Se obtuvieron valores como cero igual a infinito.

Estas circunstancias austeras permitieron recurrir al recurso figural para apoyar el desarrollo de estas ideas matemáticas con la asistencia de una gráfica, como parte fundamental del aprendizaje del concepto de *límite.*

Al estar asistidos por una computadora, se obtuvo la gráfica de la función:

f(x)=sen(1/x)

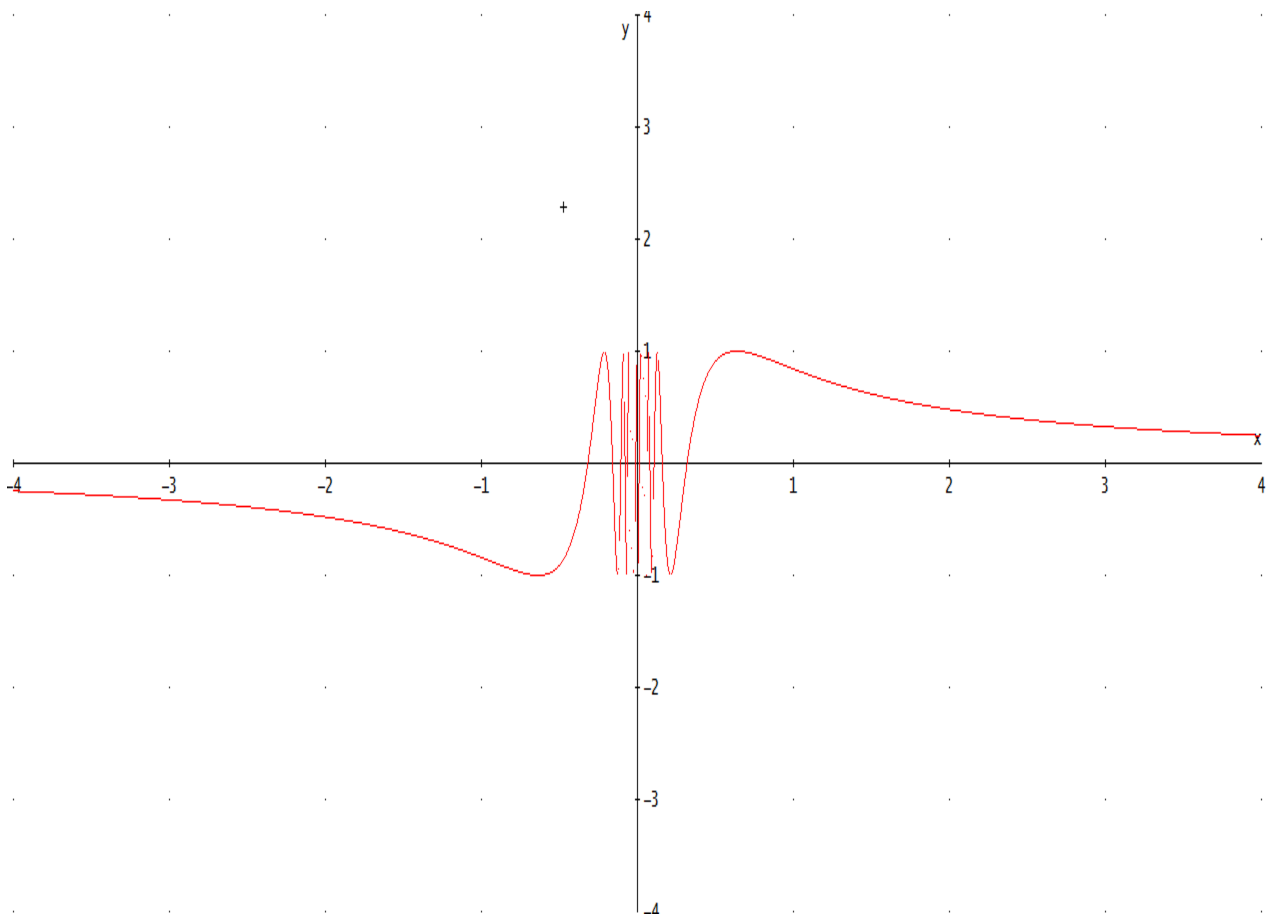


Fig.3

El alumno hace diferentes acercamientos y alejamientos locales:

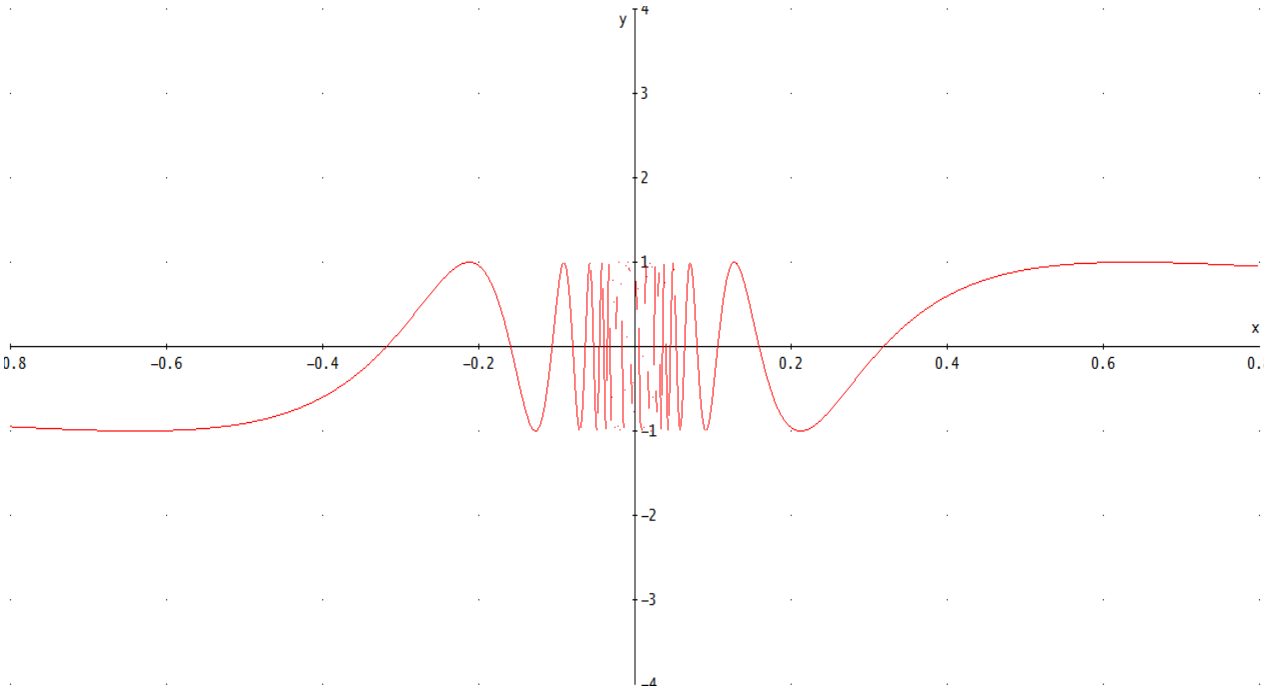


Fig.4

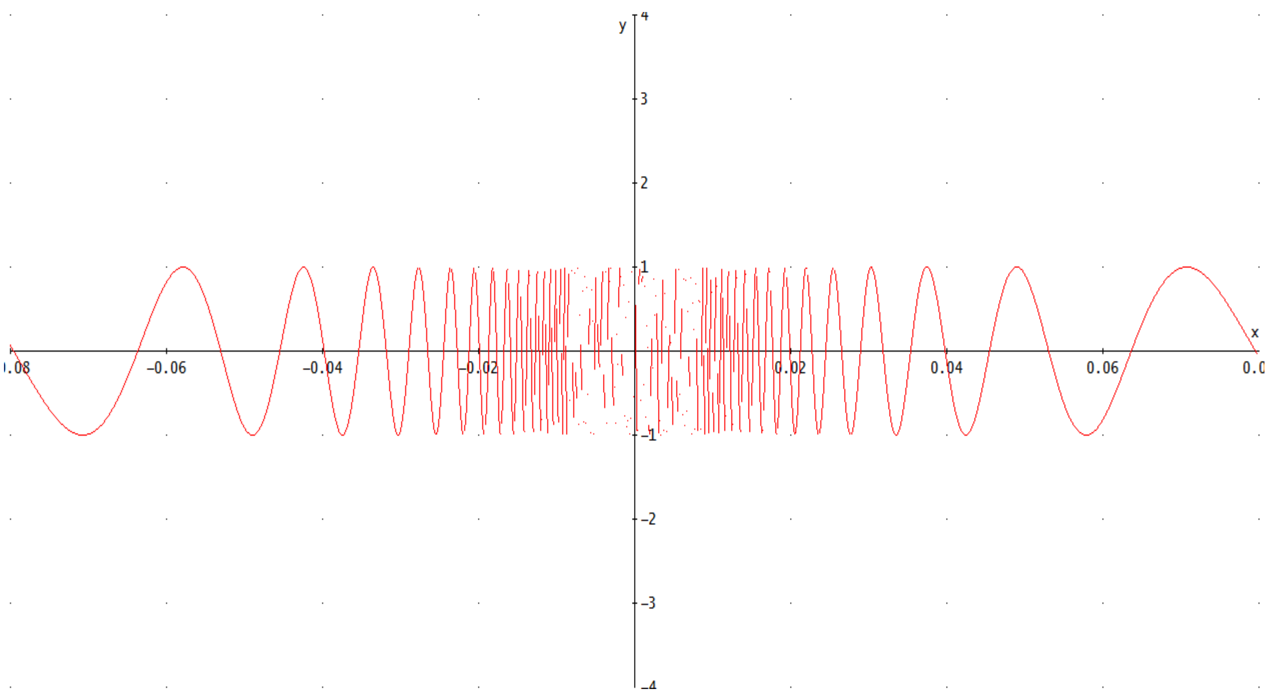


Fig.5

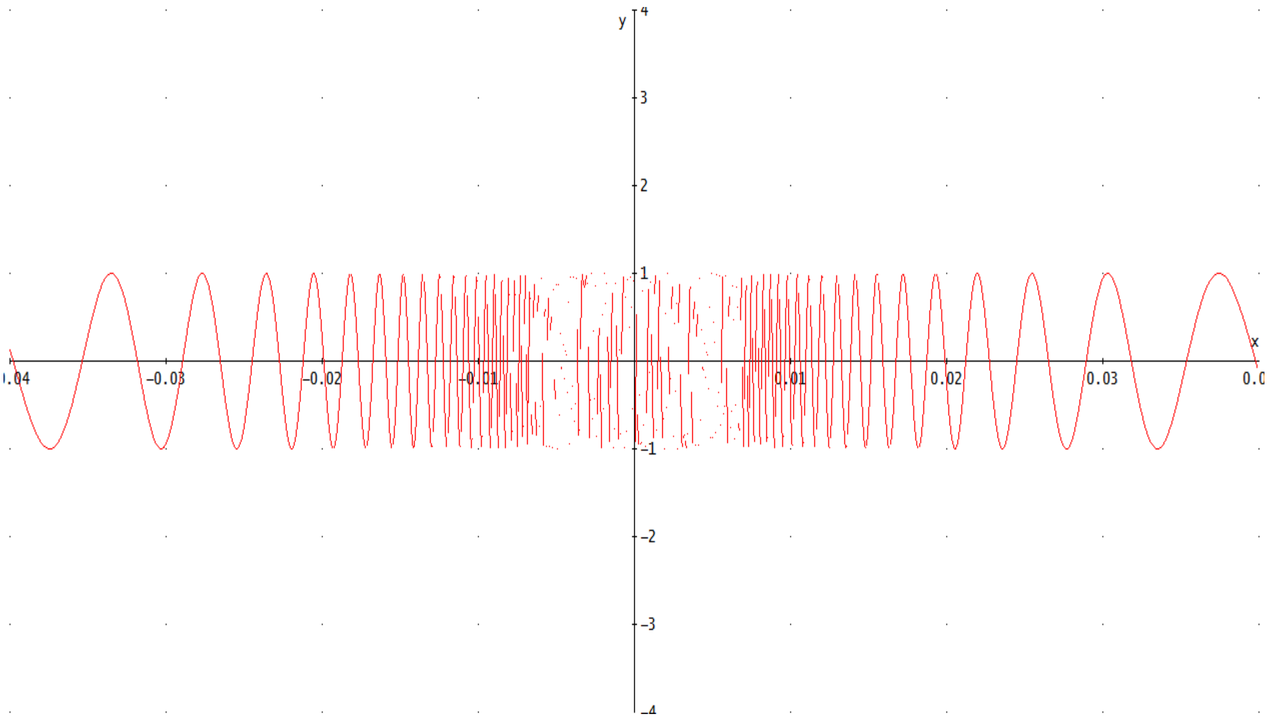

y
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
x
-0.03
-0.02
-0.01
0.01
0.02
0.03

Fig. 6

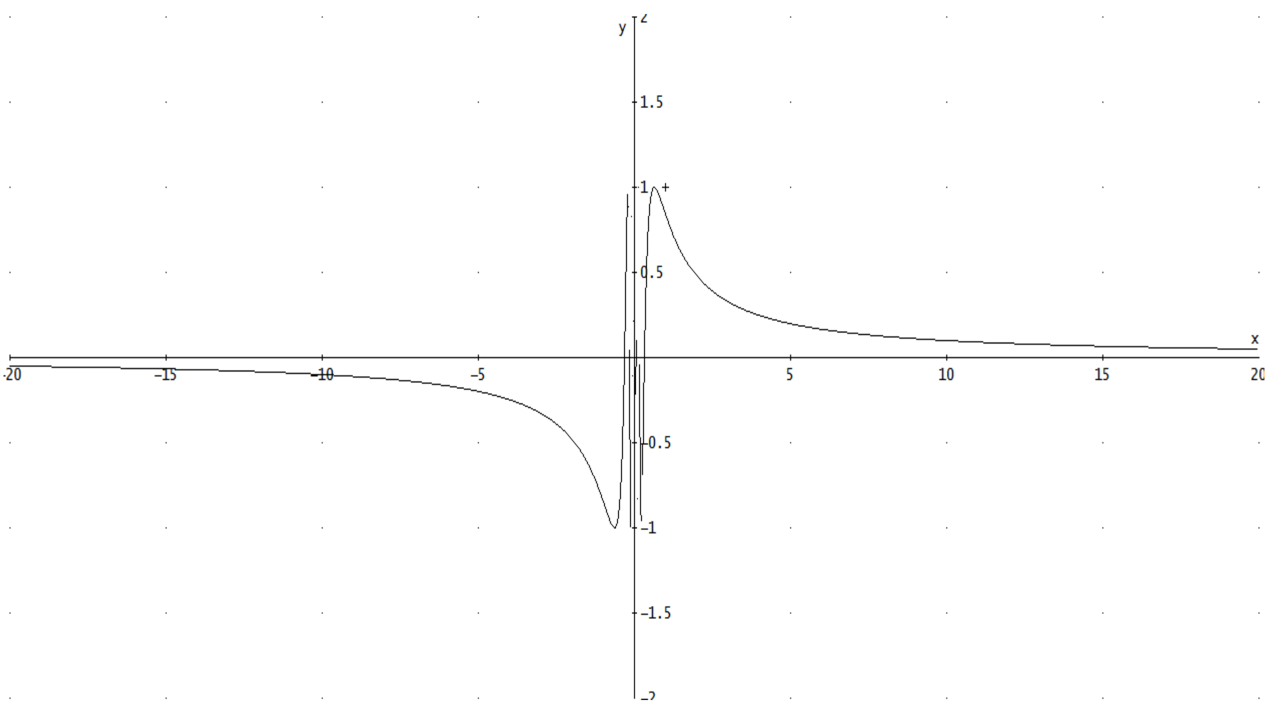

y
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
x
-15
-10
-5
5
10
15

Fig.7

Se observó, que al obtener las gráficas se generó un respaldo de seguridad para los alumnos, descubrieron los elementos constitutivos de una gráfica, la numeración, la imagen, los ejes de coordenadas y se obtiene un proceso de integración.

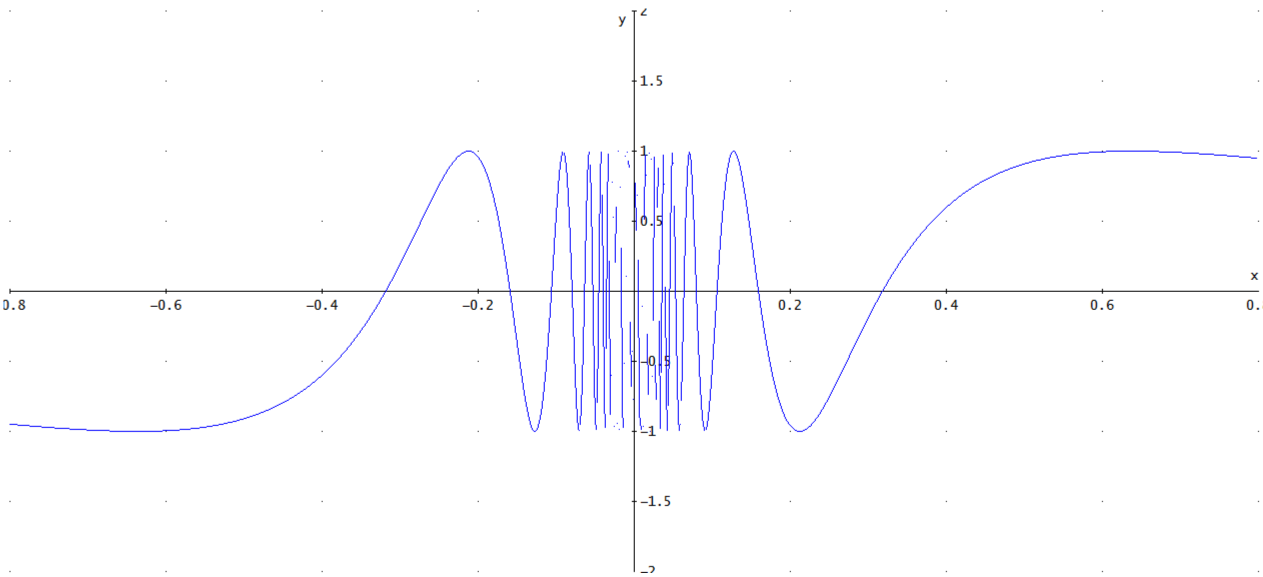


Fig. 8

Con la visualización de la gráfica los alumnos pueden establecer sus acciones y operaciones en base a desarrollar ideas visuales a partir de lo que observan, el grado de significación es alto ya que de la gráfica, los alumnos pudieron relacionar los valores que se tienen en una vecindad cerca del cero, con el siguiente análisis.

Dan valores a la función cerca del cero y evalúan:

Para x=1/2 se tiene sen(1/1/2)=sen(2)=0.90.
Para x=1/3 se tiene sen(1/1/3)=sen(3)=0.14.
Para x=1/4 se tiene sen(1/1/4)=sen(4)= -0.75.
Para x=1/5 se tiene sen(1/1/5)=sen(5)= -0.95.
Para x=1/6 se tiene sen(1/1/6)=sen(6)= -0.27.
Para x=1/7 se tiene sen(1/1/7)=sen(7)= 0.65.

…

Para x=1/10 se tiene sen(1/1/10)=sen(10)= -0.54.
Para x=1/100 se tiene sen(1/1/100)=sen(100)= -0.50.

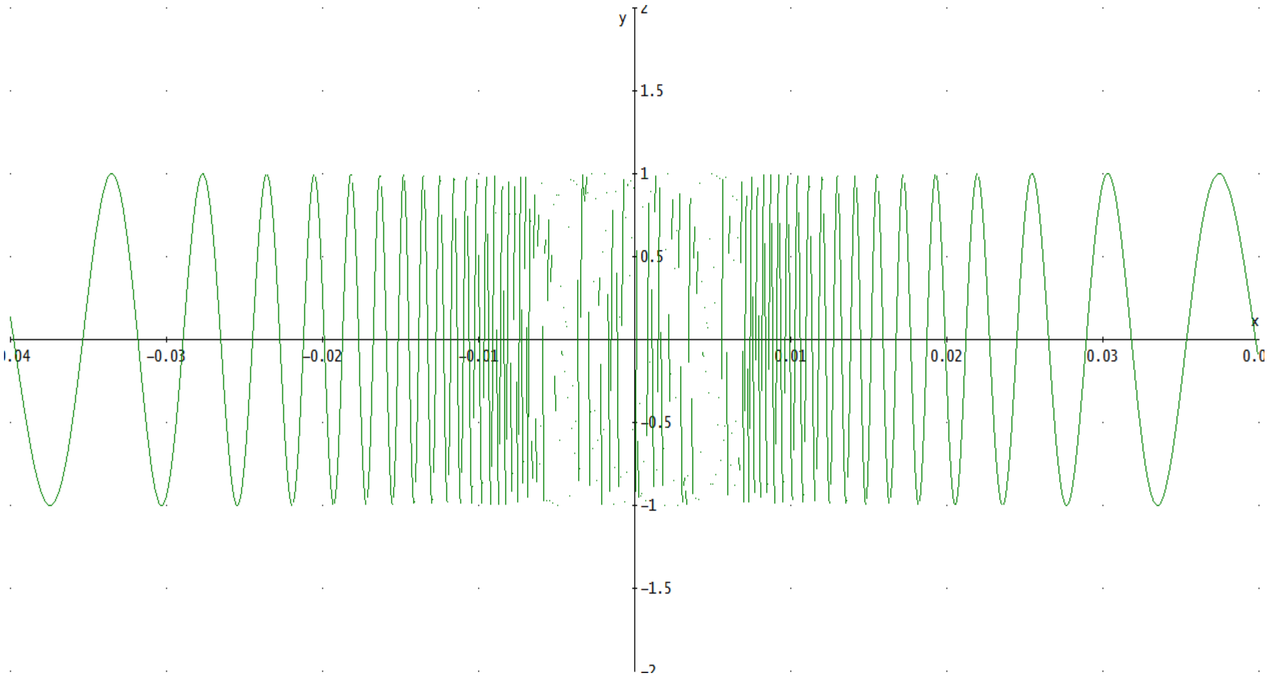


Fig. 9

Este comportamiento tendencial permitió a los alumnos dar un grado de significatividad a los contenidos. Con el analisis de los valores anteriores, los alumnos pudieron establecer la relación siguiente: a medida que toma valores muy cercanos al cero en la función *sen(1/x),* por ser el reciproco del argumento, para estos valores cercanos, toma los valores del *sen(x)* en los valores hacia el infinito y como la función *sen x* toma valores positivos y negativos , los alumnos finalmente conjeturan con una significación sobre la estrucutura de la función cerca del cero; los valores empiezan a oscilar y entonces, se estableció el grado de significación mejor debido a que el *límite* de la función oscila; con ello pudieron conjeturar que al tener valores diferentes el *límite* de la función no existe.

El desarrollo de ideas visuales permitió en el contexto del alumno, establecer una conexión de los aspectos más relevantes de los valores de la función *sen(x).* Pero esto se observó y se logró a medida que visualizan la gráfica y permitió recordar la función *sen(x).* Por otro lado se observó que al operar unicamente en la forma tradicional simbolica no existe la posibildad de establecer una significatividad de los contenidos y no se estableció una argumentación de las estructuras conceptuales del aprendizaje del *límite.*

Para el cálculo del *límite* es relevante mencionar lo primero que observaron es la oscilación de la función en cero, este hecho reforzó la potencialidad de emplear la visualización en el cálculo de *límites.*

Los alumnos llegaron a concluir que debido al fenómeno presentado, la función toma una cantidad infinita de valores en una vecindad cerca del cero y más aún en el cero se forman rayas asintóticas, lo que permitió inferir que el *límite* de una función es único concluyeron que el *límite* no existe en cero.

Con el aprendizaje apoyado en un medio visual se proporcionó una línea de apoyo didáctico tanto en metodología como en el diseño de estrategias y actividades que permiten un mejor acercamiento a la construcción del concepto de *límite* de una función. Por otro lado, en la manera tradicional no se agiliza el concepto de *límite* ni en la medida que lo realizan y construyen.

La necesidad de un argumento es parte fundamental en el proceso del aprendizaje.

Con la generación de ideas matemáticas a partir de usar las unidades significativas de una gráfica propició una reflexión sintética, en contraste con en el tratamiento de los contenidos que a lápiz y papel se desarrollan con una operación basada en un lenguaje algorítmico algebraico donde no se propicia el aprendizaje.

La ayuda visual en la gráfica permite no solo hacer cálculos numéricos sino que estos mismos forman parte fundamental en el desarrollo de ideas matemáticas en la construcción del concepto del *límite.*

Sin embargo, el trabajar mediante un respaldo visual ayudó a los alumnos a operar y a construir su propio aprendizaje en el cálculo de *límites* de funciones mediante la exploración y manejo de información en una gráfica.

La importancia en la construcción del concepto del *límite* relacionado con el proceso del aprendizaje, consiste en saber si un alumno finalmente entiende el concepto y esto se observó en la medida que operó correctamente en la solución de ejercicios y problemas, mediante una evaluación de sus procesos y resultados, con solo lápiz y papel se restringen las posibilidades de la comprensión del concepto. Piaget (1990).

El estudio contempla el tratamiento de gráficas de funciones que son relevantes vinculadas con el cálculo de *límites*, dado que los contenidos permiten para su mejor comprensión un acercamiento hacia las ideas, símbolos, signos y conceptos y como parte importante se espera un mejor acercamiento en el entendimiento de los difíciles objetos matemáticos, proponiendo:

La visualización como una alternativa en el estudio de los objetos matemáticos en contraste con la presentación de los mismos que se imparten en forma algorítmica algebraica, ya que en el salón de clases sólo se resuelven ejercicios y no propicia la resolución de problemas donde se crea el aprendizaje significativo en los alumnos.

Esta propuesta didáctica nace del interés de hacer una mejora en la enseñanza del *límite,* primero se trabaja con el registro gráfico y luego se articula con el registro algebraico.

En el *Capítulo I*, se hace un análisis del marco teórico sobre la importancia de la situación actual del Colegio vinculada con los escasos o nulos procesos de asimilación y acomodación en la generación de ideas matemáticas en el curso de Matemáticas V donde se estudia el *límite* en el Colegio de Bachilleres del Estado de México.

En el *Capítulo II* se estudia la problemática existente en la poca operación y al no contar con un respaldo más que el algorítmico algebraico para el estudio del *límite*.

En el *Capítulo III* al desarrollar una serie de actividades asistidas por un medio visual para el estudio, llevarán a los alumnos a estar en mejores posibilidades de desarrollar ideas intuitivas del *límite* y contrastar con la enseñanza tradicional.

Por último se anotarán las conclusiones, resultados y las argumentaciones a favor con el análisis de los resultados obtenidos en la posibilidad de tener una situación idónea en el estudio para los alumnos en el concepto del *límite,* un Anexo I de las actividades con la forma tradicional y la bibliografía.

CAPITULO I
MARCO DE REFERENCIA Y MARCO TEÓRICO

1.1.- MARCO DE REFERENCIA

De manera natural, una de las formas en el proceso de construcción del conocimiento matemático es iniciar por la percepción de las cosas; para formar una idea, en principio, se hace una liga con las formas que existen en la realidad, las cosas son inteligibles, ya que tienen esencia a través de la fenomenología del pensamiento matemático. En la fenomenología del conocimiento se parte de manera lógica al hacer una descripción y enumeración de los conceptos y generar juicios en una función mental e intelectual. Los procesos intelectuales están basados en un procesamiento de información, apoyados en representaciones mentales que constituyen la base del conocimiento.

El desarrollo de la propuesta de la tesis es analizar como las imágenes visuales constituyen un potencial en la construcción de ideas matemáticas, en el desarrollo y tratamiento de conceptos en funciones que son relevantes y que permitirá introducir el concepto de *límite.*

Estas formas de intuición, operaron como mediación bajo un registro de copias de imágenes visuales, y consistió en desarrollar un proceso de inteligencia en un registro de memoria, i. e, el proceso de construcción del concepto de *límite* mediante la abducción e inferencia de las unidades significativas que están presentes en una gráfica.

El estudio se realizó en el *Semestre V 2010-B* en el *Colegio de Bachilleres del Estado de México. Plantel 09, Huixquilucán Estado de México*, del Sistema Federalizado.

La población de estudiantes actualmente en Quinto Semestre contamos con el *75%* de mujeres y el *25%* de hombres debido a que este filtro se va sesgando hacia las mujeres a medida que transcurren los semestres.

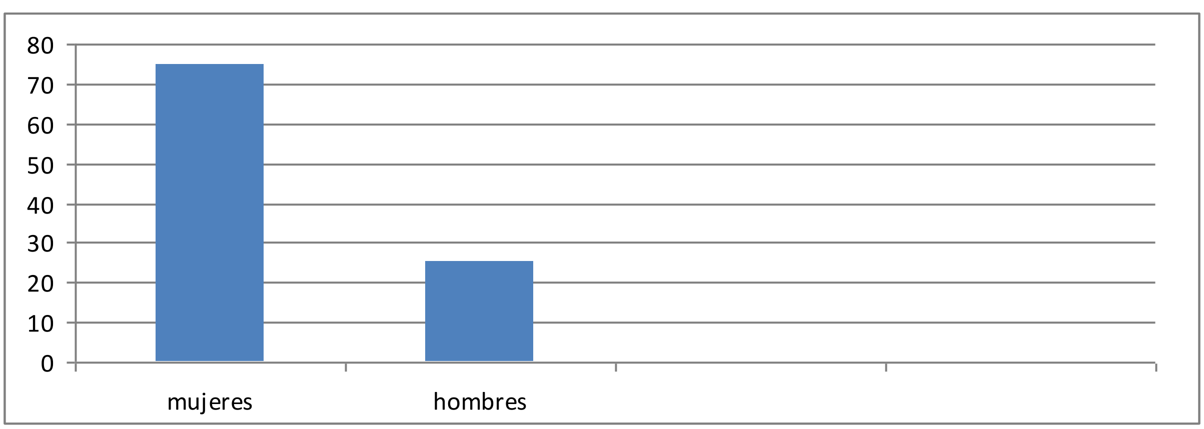


Fig.10

Población de estudiantes en Quinto Semestre *2010-B* del Colegio.

Las edades en promedio son el *90 %* entre *17* años, el *9%* entre *18* años y el *1%* más de *18* años.

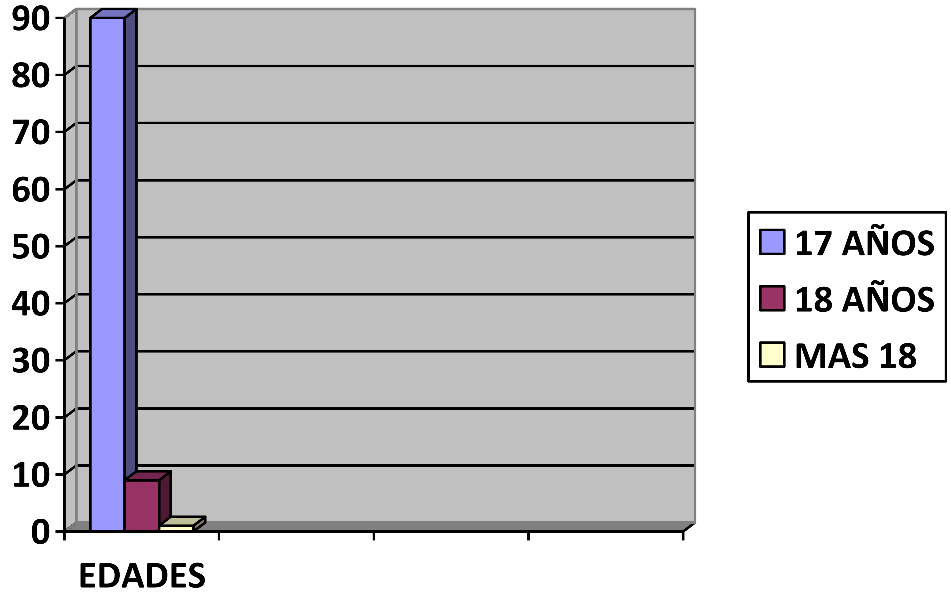


Fig.11

El nivel socioeconómico de los alumnos en términos medios es:

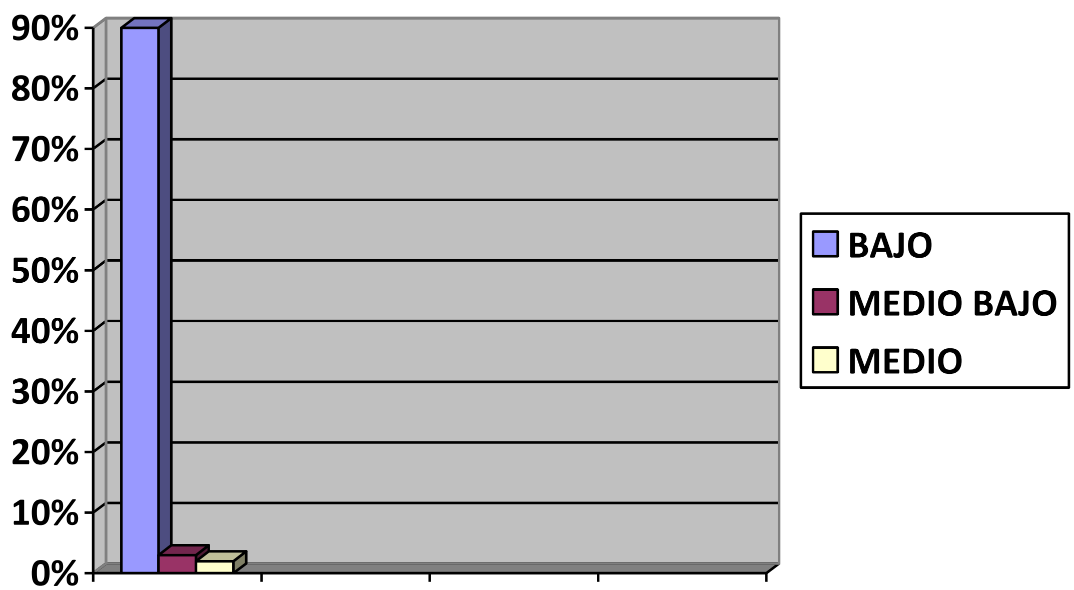


Fig. 12

correspondientes a la zona Sur, Poniente y Norte de Huixquilucan y Poniente de Naucalpan.

Los promedios de calificaciones registrados siguiendo el modelo de aprendizaje tradicional, para los años *2003, 2004, 2005, 2006* y *2007* del Primer Examen Parcial donde se preguntan números reales, continuidad y *límites* fueron, para los grupos *505, 506* y *507.*

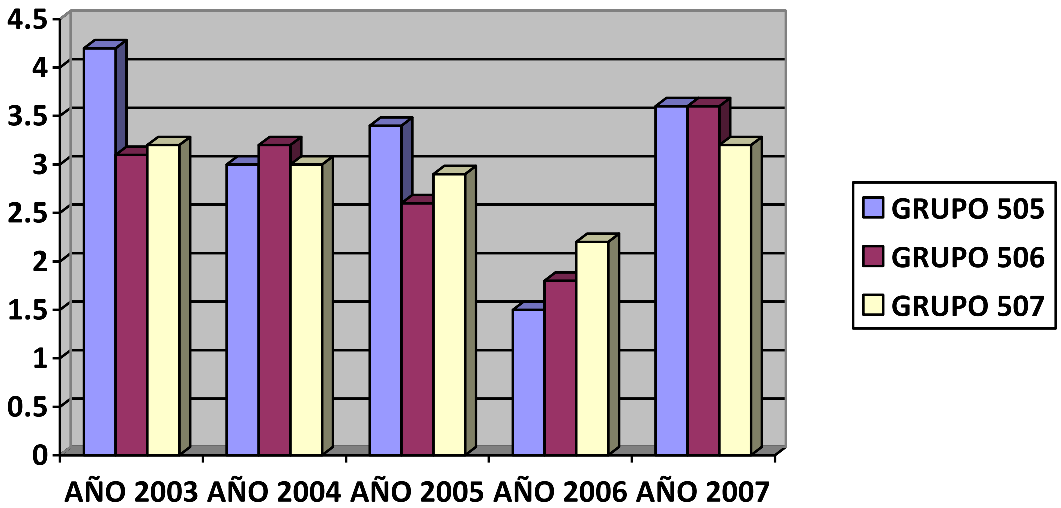


Fig.13

Según la prueba Enlace que realiza el Gobierno Federal se ocupa uno de los últimos lugares de aprovechamiento del concepto de *límite* según la media nacional.

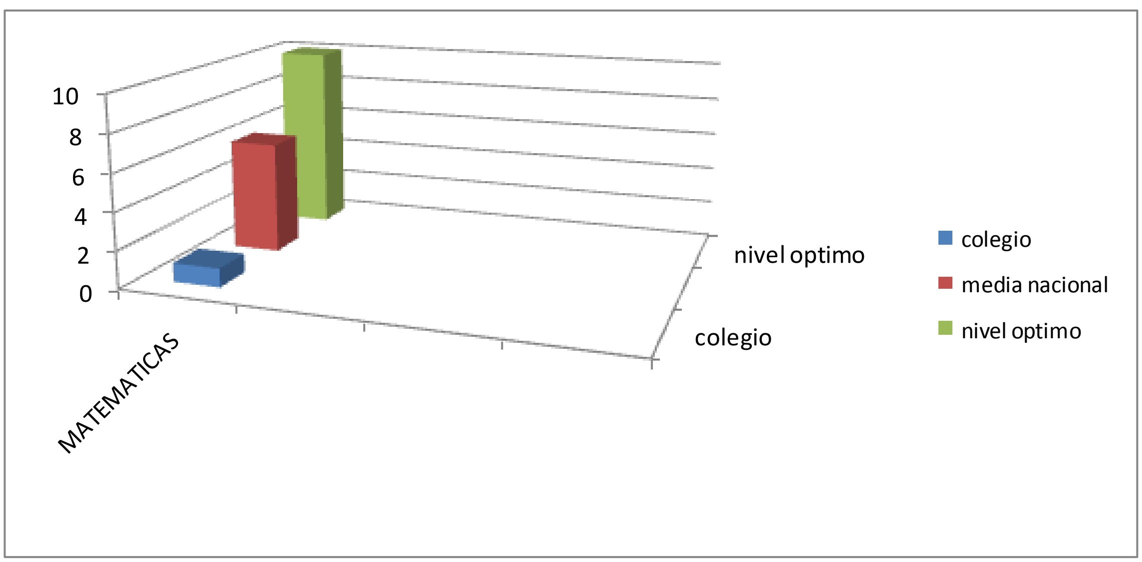


Fig. 14

Nivel de aprovechamiento en *Matemáticas V* en el *Colegio de Bachilleres. Plantel 09 Huixquilucan, Estado de México*. *Prueba Enlace S.E.P.* Mayo, *2008*.

1.2 ANÁLISIS DEL APRENDIZAJE BAJO EL CONSTRUCTIVISMO.

1.2.1.- PIAGET. ASIMILACIÓN Y ACOMODACIÓN.

Según Piaget (1990), existen diferentes maneras de construir el conocimiento. En lo que él nos heredó dice: Para observar como el alumno genera un aprendizaje, consiste en observar sus acciones y operaciones a medida que manipula los objetos. En este sentido, las herramientas que utiliza como funciones mediadoras son que los signos que constituyen procesos de representaciones y son la base en la generación de esquemas de ideas matemáticas, las imágenes visuales son una alternativa que sustenta uno de los procesos de construcción de conceptos matemáticos.

Primero está por discutir si las operaciones mentales que el alumno hace son intuitivas o son estructuralmente adquiridas y si son adquiridas como las adquiere.

Según Piaget (1990), establece que las Acciones -Operaciones constituyen en el proceso cognoscitivo, el proceso de la construcción del conocimiento, i. e, para que un individuo aprenda sobre los conceptos matemáticos es necesario que los opere y manipule y de esta forma llegue a entender los objetos matemáticos. Es relevante el proceso de las operaciones mentales, bajo el siguiente esquema:

OPERACIONES = ACTO COGNOSCITIVO

OPERACIONES MENTALES

ACCIONES $\longrightarrow$ ***CONOCIMIENTO***

Signos
Símbolos
Definiciones
Objetos matemáticos

Fig. 15

La representación del concepto de *límite* en la forma tradicional se hace con un lenguaje rígido y en un plano discursivo simbólico propio de las matemáticas y el proceso cognoscitivo resulta complicado.

La importancia de estudiar los procesos cognoscitivos que se escinden a la luz de las operaciones mentales que el alumno empieza a desarrollar fueron basadas en acciones que corresponden a las primeras ideas de relacionar símbolos con imágenes mentales con los conceptos de estudio.

En un principio, sobre el análisis de las operaciones y acciones, no se sabe de los procesos mentales, como son al ser interiorizados, qué o cómo ocurren en el interior del pensamiento, solo se sabe que son interiorizados bajo esquemas de signos como una herramienta del proceso del conocimiento; en lo que respecta al *límite*, se justifica que el alumno ya tiene un aprendizaje significativo cuando puede operar y calcular de manera correcta un *límite*, si lo hace bien entonces diremos que se ha logrado un proceso significativo. Ausubel (1991).

Los procesos de significación del *límite* de una función están fundamentados en:

LA EQUILIBRACIÓN Y EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DE LAS ESTRUCTURAS MENTALES:

ASIMILACIÓN → ***DESEQUILIBRIO*** → ***ACOMODACIÓN***

↑

Copias-visualización
Operaciones

Nuevos datos ← ***EQUILIBRIO***

↓

Conflicto cognoscitivo

Fig.16

La *Semiosis* es un proceso de inferencia a partir las operaciones de símbolos y signos y forma parte esencial en el proceso del conocimiento. Pierce (1996). La inferencia es analítica de los signos de las ideas que tenemos de las cosas. La inferencia es inductiva de los signos de las cosas según el término medio que ocupen en las figuras.

El *límite* es un signo visto como una operación.

PROCESO

VISUALIZACIÓN – OPERACIONES:

PERCEPCIÓN → ***ABSTRACCIÓN*** → ***CONCEPCIÓN***

Fig. 17

El alumno al operar sus procesos mentales al inicio del aprendizaje de un *límite,* si la memoria se realiza a lápiz y papel, su campo de operación es pobre, pero si interactúa con un respaldo figural genera un medio en la asimilación y acomodación de ideas y esquemas en el cálculo de *límites.*

La asimilación y acomodación sobre las acciones y operaciones en sus contenidos del *límite* permiten para su comprensión un mejor desarrollo.

El aprendizaje del *límite* es un campo de estudio amplio y en el Colegio en las actividades que nos ocupan consistieron en observar, que en el cálculo del *límite* no se logra la inferencia del mismo; es en esta parte, la problemática de aprendizaje en los procesos de cognición que los alumnos presentan.

Al inicio, como parte del proceso de la construcción del conocimiento, al calcular un *límite,* existe una gran dificultad por la diversidad de contenidos matemáticos que involucra este concepto, en este proceso de tratamiento el alumno entra en un desequilibrio, pero al recibir ayuda visual de las representaciones gráficas de las funciones que corresponden a los *límites,* el alumno tiene una ampliación hacia el conocimiento del *límite*, porque a base de exploraciones e incorporaciones de elementos que visualiza, estas mediaciones nuevas constituye un proceso de enriquece su contexto y le permite referir elementos a su conocimiento.

A través de los argumentos de las gráficas se comprende lo que las funciones representan. Estos argumentos se enlazan con imágenes visuales que constituyen la comprensión del objeto de estudio del *límite.*

Así la visualización es una función mediadora de la realidad existencial une un proceso de acomodación, es decir el alumno incorpora un nuevo conocimiento el cual reside en la abducción de la visualización, deducción o inferencia que asimila y acomoda en un proceso natural de retroalimentación, como proceso natural del conocimiento del estudiante y en base a estas acciones le permite deslindar y avanzar hacia un camino o método alterno de solución, dando paso posteriormente en parte a un método lógico formal. Une signos en el proceso de la construcción del conocimiento, es una herramienta mediadora del conocimiento que relaciona acciones–operaciones y con ello el alumno puede incorporarlos hacia una estructura matemática. Vygotski (2003).

Los aspectos del *límite* los introducimos en este estudio para observar primeramente cuales fueron las reacciones que los estudiantes manifestaron respecto a los contenidos de las clases.

En el Colegio sobre la enseñanza del *límite*, hace falta enfrentar a los alumnos a identificar puntos del dominio y contradominio para que transfieran las propiedades de los números reales en forma sintética y tener un tratamiento del concepto de función con que los alumnos más o menos están familiarizados.

Los alumnos resolvieron los *límites,* en los cuales estuvo presente la problemática del cálculo del *límite* y al presentar los contenidos en forma tradicional, los alumnos no buscan o no tienen los medios para generar ideas, porque no operan bajo un aprendizaje significativo, solo operan algorítmicamente y la primera problemática encontrada es que estos ejercicios de problemas de *límites* tienen que ver con las propiedades de los números reales, la tarea fue llevarlos a que los realicen, e inducirlos a hacer cálculos a partir de lo que ya saben, a que generen sus propios cálculos, teniendo en cuenta que en un problema por alguna parte se debe empezar. Es importante dentro de las actividades que se desarrollaron la justificación de sus respuestas, siendo parte importante en el desarrollo de generación de esquema de ideas, para lograr un aprendizaje significativo por una parte y complementando con el reforzamiento de las propiedades de los números y su linealidad con las estructuras de los *límites* poniendo especial cuidado en el tratamiento de los contenidos matemáticos en estudio, analizar y justificar el papel que juegan el entendimiento de las propiedades de los números reales en el desarrollo del cálculo de *límites*. Esto no lo hacen.

El contexto que los alumnos tienen, de las propiedades de números reales aprendidas en su formación académica no las utilizan y debido a ello no pueden calcular un *límite*, son importantes estas propiedades porque justamente aquí es en este proceso operacional donde el *límite* opera como parte del proceso de la construcción del concepto. Pero las propiedades de los números no las saben o no las aplican correctamente.

1.2.2. DUVAL. TEORÍA DE REGISTROS.

Las representaciones constituyen un medio por el cual se conoce y es parte del proceso del aprendizaje, es una acción consciente y objetiva y lleva una intención; en las gráficas se encuentra un significante a través de una aprehensión y percepción en la medida que la significación es aprehendida, constituye un acto de consciencia, lo que desencadena una posibilidad de reproducir y hacer un aprendizaje.

En las gráficas el tratamiento de los contenidos permitió un acercamiento gráfico, numérico y posteriormente algebraico, en este sentido, es una forma de operar con el concepto de *límite* así se realizó bajo esta intención. En una asociación de registros.

Las representaciones desprenden actividades cognoscitivas porque constituyen elementos relevantes; para el caso de las gráficas, contienen caracteres que se quieren mostrar para enseñar, pues la formación con signos son códigos icónicos propios del comienzo de la estructura semiótica del aprendizaje del cálculo y constituyen unidades fundamentales que implica la selección de caracteres para su descripción, en el proceso de estudio del *límite.*

Para la construcción del concepto de *límite*, por un lado, están las operaciones con Piaget (1990) y los contenidos en representaciones que conforman los objetivos de las operaciones mentales. Estas se organizan, operan y se desarrollan bajo el siguiente esquema:

ACCIONES – OPERACIONES - VISUALIZACIÓN DE GRÁFICAS

↓

DESARROLLO

↓

ESQUEMA DE IDEAS VISUALES- IDEAS Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

Fig. 18

El tratamiento consiste en transformar una representación inicial con una final. La operación semiótica es una imagen mental por la cual permite entender y expresar a base de símbolos y signos. En este sentido se integran y desarrollan actividades de manera lógica y ordenada del conocimiento, desde la codificación de los contenidos de la gráfica en una conversión, transposición, interpretación de la figura, representación y su significado y significante.

Las representaciones semióticas cumplen la función de comunicación y son un soporte de las representaciones mentales.

En este estudio se hace referencia a las representaciones que constituyen un elemento importante en todo proceso de comunicación de ideas matemáticas.

Los registros de representación semiótica, son el medio por el cual se forma una imagen mental para exteriorizar el conocimiento y debido a que hay una diversidad de registros de representación semiótica, se empieza con la generación de ideas en esquemas; i. e., organizar un conjunto de ideas sobre el entendimiento de objetos matemáticos; para este tratamiento, es natural que el proceso pase primero por un registro figural, algebraico, geométrico; porque las actividades que los alumnos realizan permite conectar las estructuras del álgebra y su congruencia con la geometría que relaciona con lugares geométricos del plano cartesiano. De aquí se tiene que es importante también para este tratamiento las partes que ayudan a plantear un problema y que el proceso nace por una necesidad de los alumnos de resolver problemas de aprendizaje, es un medio donde la heurística, el lenguaje natural y el especializado de las matemáticas conectan las propiedades figúrales con los axiomas básicos y propiedades de números para conformar los conceptos matemáticos.

El lenguaje tiene que hacer uso de representaciones consistentes en figuras, símbolos, signos-conceptos Wittgestein (2007); se observó que pasar del registro algebraico al geométrico es el tratamiento más económico, sin embargo el paso inverso es complicado porque se tienen que relacionar unidades figurales significativas que lleven a descubrir patrones en una ecuación, sin embargo este tratamiento es el que aporta más riqueza en la comprensión de conocimientos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Este tratamiento es el que se debería enseñar en el bachillerato, pero es muy poco lo que se ve en la solución de problemas porque se enfoca más a resolver ejercicios que problemas. El empleo del lenguaje por ser un medio para la construcción del conocimiento juega un papel muy importante en el aprendizaje del estudiante, el lenguaje es un mediador que sirve para expresar su entendimiento sobre los procesos y los conceptos, poco a poco el estudiante va incursionando al difícil lenguaje simbólico especializado o formal del lenguaje matemático que está formado desde una serie axiomática hasta objetos matemáticos donde entra el razonamiento lógico deductivo y las leyes de la lógica matemática. Trata de enumerar o describir las características y propiedades que rigen las leyes del pensamiento matemático.

Como una aplicación de lo anterior, siguiendo la perspectiva de las representaciones, según Piaget (1990), el desarrollo del conocimiento se realiza de forma gradual, pasando por los estadios preoperacional, concreto y finalmente el formal, a base de acciones y manipulaciones de objetos concretos e inferencias, pero para Duval (1990) el operar desde el uso de gráficas y abstraer de ella lo que le es significativo ayuda a resolver un problema, esta es la relevancia en el proyecto de tesis.

Las representaciones son figuras que reproducen una leyenda y la abducción constituye una aprensión operatoria y de esta manera, el alumno construye su conocimiento a partir de operar con la figura y no con símbolos como comúnmente lo hace; para ello, consiste en capturar y descomponer en subfiguras para hacer de la figura aquello que sirve para responder a las unidades significantes, que deben utilizar como una congruencia entre el registro figural, el simbólico y posteriormente el axiomático o formal propio del lenguaje matemático; donde para llegar a este lenguaje está de por medio el lenguaje discursivo que contiene las unidades significativas figurales a las que conectan propiedades basadas en definiciones, axiomas y postulados relacionadas con teoremas que constituyen los objetos matemáticos de un discurso figural.

Para la comunicación en matemáticas, utilizamos las representaciones semióticas, es decir, gráficos, figuras geométricas, símbolos y enunciados en lenguaje natural.

Es relevante en la enseñanza de los contenidos de cálculo, el usar y operar en un medio visual como proceso cognoscitivo y las acciones-operaciones sobre una gráfica son condiciones de signos y símbolos que finalmente ayuda a construir un conocimiento matemático ya que proporciona un panorama general de los contenidos que están en juego y que en la mayoría de veces sólo se opera algebraicamente.

Según Duval (1990), un alumno va a aprender más siempre que se puedan tener más gráficas de representaciones y registros y cuando se integran y facilitan la construcción de un concepto.

El proceso ciclo aprendizaje se realiza bajo el siguiente esquema:

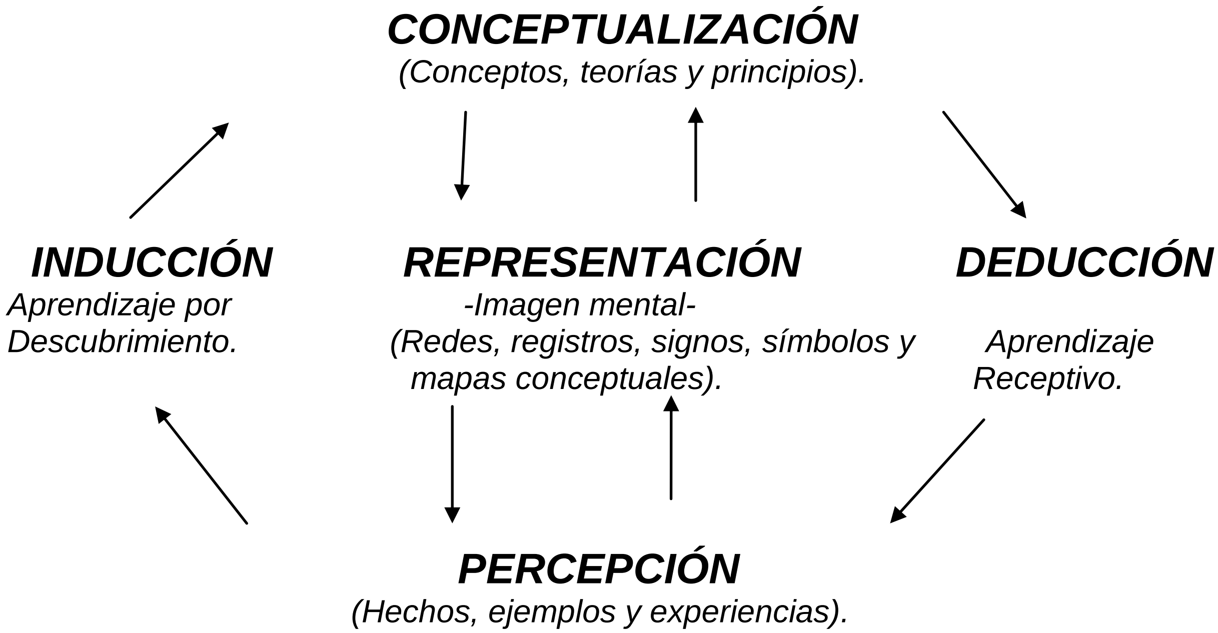


Fig.19

Puede haber un mejor entendimiento entre el paso de un registro gráfico y un algebraico sí estos registros son más congruentes.

En el proceso de construcción del conocimiento, en el Tratado de la Razón, se justifica uno de los procesos de la construcción de un concepto y se refiere a la parte significativa, que según Kant (1979), es la categoría que le da sentido la significación; en este caso, se emplea como las unidades significativas que le da sentido de pasar del registro grafico al simbólico algebraico y esta idea la relacionamos con una cantidad representada en la gráfica y que el mismo alumno descubre por comprensión y las utiliza. Ausubel (1991).

Se dice que un alumno comprende el concepto de *límite* cuando le encuentra sentido a sus operaciones y entiende el significado, cuando aprende a operar sobre los contenidos por comprensión. Ausubel (1991).

1.2.3 LA IMPORTANCIA DE LA VISUALIZACIÓN.

Según Bishop (1993), por más de cien años, una de las preocupaciones de los educadores en matemáticas ha sido desarrollar representaciones visuales de ideas matemáticas en el estudio de los educandos y en el proceso de enseñanza.

Esta ayuda visual se contempla en el conocimiento, es una manera de introducirse en la difícil matemática abstracta.

El nombre de visualización se define primero como sustantivo dirigido al objeto, al por qué de la visualización, a la imagen visual, en seguida analizamos que al darle acción, operación, se tiene el de visualizar, crear y desarrollar imágenes, un proceso de visualización.

Ambos aspectos están relacionados con un tercero en la manera de educar la visualización, el proceso de aprendizaje, las instalaciones del salón de clases y el medio ambiente.

La visualización se da de manera personal, existe un rango amplio de imágenes visuales como parte del proceso de aprendizaje de las estructuras matemáticas.

La importancia del uso de la tecnología en el aprendizaje consiste en un medio asistido por graficadoras y tienen la estrategia de integrar los tres registros de estudio: el registro gráfico, el numérico y el algebraico.

En esta alternativa se propuso emplear la *VISUALIZACIÓN* como una estrategia para descubrir los elementos que están en juego para identificar y descubrir el comportamiento de las imágenes de las gráficas.

La computadora es una herramienta inmediata en la producción de imágenes visuales:

Dreyfus y Eisemberg (1987), Zehavi, Gonen, Omer y Taizi (1987) y Noonon (1987) dan una caracterización de que hay una facilidad y beneficio general de las imágenes visuales generadas por la computadora en el desarrollo y entendimiento de ideas algebraicas.

Se utiliza el sustantivo de visualización como lo utilizan Zimmerman y Cunninghan (1991) visualización es lo que describe los procesos de producción de representaciones gráficas o geométricas de conceptos, principios o problemas matemáticos, siempre que sean trazados a papel y lápiz o generados por una computadora. Zimmerman (1991) ha desarrollado trabajos sobre la importancia de usar las representaciones gráficas en la solución de problemas en la Universidad de Jena, Alemania.

Para el caso de Cunnighan y Souwarzono en la Universidad de Tel Aviv, Israel.

Aquí en nuestro país, la importancia de realizar el aprendizaje mediado por la asistencia de contenidos que se estudian en una representación gráfica apoyados por la visualización se encuentran los trabajos de la Dra. Elfriede Wenzelburger (1992), en nuestra Universidad y los trabajos hasta hace *10* años del Dr. Fernando Hitt (1992) en el *CINVESTAV,* entre otros. Existe la Tesis de Licenciatura en la Facultad de Ciencias de la *UNAM* y en la Maestría en *CINVESTAV* bajo el nombre: La visualización de la Serie de Fourier. Bósquez (1998).

Presmeg (1986) en su estudio menciona cinco clases diferentes de imágenes visuales, que en la mente de los alumnos se construyen en el proceso de aprendizaje:

1. *Imágenes Concretas*. Son imágenes ilustradas (dibujos en la mente). Como antecedente se necesita el medio ambiente y lo que se logra captar con la imagen.

2. *Imágenes de esquemas (relaciones entre retratos y esquemas visuales espaciales).* Son símbolos y signos de un lenguaje. Imágenes patrones.

3. *Memoria de imágenes de fórmulas*. Son imágenes que ya se encuentran en un registro de una estructura matemática lista para poder usarse.

4. *Imágenes Kinoestésicas*. Son imágenes de movimiento.

5. *Imágenes Dinámicas*. La mente del individuo se encarga de generar copias para crear en el pensamiento un movimiento.

Al momento de operar el alumno genera un aprendizaje. La construcción del conocimiento, por la experiencia, se debe a la cantidad de operaciones y tratamiento de los contenidos que el alumno logra desarrollar, la problemática del aprendizaje en gran parte se debe a que no se obliga a generar hábitos de estudio y no se forma una disciplina de estudio, entonces, sí desarrolla más actividades se genera más aprendizaje. Al desarrollar un tratamiento visual, como parte del proceso del aprendizaje del *límite* se logró desarrollar y generar un aprendizaje en el proceso de enseñanza de estas ideas. La noción total de “ayudas visuales” está basada en el conocimiento, tal que:

1.-Las representaciones visuales ofrecen una introducción poderosa para las abstracciones complejas de las ideas matemáticas.

2.-Las *“manipulaciones”, “incorporaciones concretas” y “artificios de intuición”*, son parte de los recursos utilizados por el maestro.

En principio, se reconoce una distinción importante entre el “*sustantivo*” visualización, el cual llevó la atención al producto, a la actividad, a la destreza, el cómo de la visualización, el principal punto de interés es que las visualizaciones constituyen un tema individual, pues hay un amplio rango de imágenes visuales usado por los individuos, incluso cuando se les restringe a la actividad en matemáticas.

Otras investigaciones, al igual que Presmeg (1986), concluyen que los que aprenden tienen poca dificultad para generar imágenes visuales, lo cual sin duda es una conclusión fuerte por sí misma para la práctica educativa.

Usualmente las visualizaciones son útiles y de hecho con frecuencia los son. Sin embargo, se suelen presentar otros aspectos de las visualizaciones refiriéndose a un marco de obstáculos que pueden crear.

El término *visualización* es un proceso que va dirigido a un objeto gráfico y a partir de ahí crear imágenes visuales para posteriormente construir conceptos dentro del contexto de *límite.*

Las visualizaciones son procesos complejos, es necesario que los educadores comprendan para dar mayor importancia a la naturaleza individual de este proceso y recientemente se ha desarrollado un fuerte interés por hacer investigación con alumnos que sobresalen en ello. Quienes realizan representaciones mentales, aquellos que al resolver problemas prefieren utilizar bien, el proceso visual, se han convertido ahora en un grupo bien estudiado. Y quienes se han evocado a esta área de investigación afirman que la visualización es una herramienta muy útil en el aprendizaje de ideas matemáticas, se crea una manera de visualización:

1.- El *"tipo geométrico"* de Krutetskii (1976), sentía una necesidad de interpretar visualmente una expresión de alguna relación matemática abstracta y demostraba una gran ingenuidad a este respecto.

2.- La medida de Moses (1979) del "grado de visualización" está basada en el número de procesos visuales de solución (es decir, cuadros, gráficas, listas, tablas) presentes en las soluciones escritas.

3.- La medida de visualización de Suowarzono (1982) era alta "si se obtenía la respuesta correcta y el razonamiento estaba basado en un diagrama" (dibujado por el estudiante).

La memoria está basada en imágenes y es parte del conocimiento y para esto se definen tres tipos de memoria:

1.-*Memoria a corto plazo*.- Es aquella imagen que es instantánea y luego por alguna razón se olvida.

2.-*Memoria a mediano plazo*.-Es aquella en que está entre la variación de imágenes pero es retenida.

3.-Memoria a largo plazo.- Es aquella que es invariante ante la variación y permanece siempre en la estructura del conocimiento.

Es importante tener en cuenta los siguientes aspectos respecto al paquete *Derive* y la computadora como herramientas en la producción de representaciones gráficas:

*1.-*Crea un ambiente dinámico para el alumno, el interactuar con un medio tecnológico, ya que despertó el interés y a la vez constituye un sistema innovador.

2.-Se organiza la información como un sistema integrador ya que el derive proporcionó los tres medios de trabajo: el gráfico al proporcionar las gráficas, el algebraico, al manipular la sintaxis algebraica se obtienen las diferentes gráficas y el numérico que funciona también como un respaldo en los cálculos numéricos de aproximación.

3.-El uso de colores en las imágenes crea contrastes para facilitar la localización de elementos y unidades significativas en una gráfica de estudio.

1.3 LA METODOLOGÍA.

En parte, debido a la problemática observada, existió la necesidad de desarrollar la metodología de estudio en el cálculo del *límite* asistido por las gráficas de la funciones que proporciona el *Derive* y emplear la visualización; se propusieron seis aspectos en el tratamiento figural para establecer y desarrollar ideas visuales que llevaron a establecer un esquema más elaborado en la construcción y cálculo de *límites* basados en:

1.- Desarrollar las actividades asistidas por las gráficas de la función.

2.-Visualizar las gráficas de la función.

3.-Transferir las unidades significativas del registro gráfico al algebraico.

4.- Estar en mejores posibilidades de realizar el análisis de las propiedades de los números reales en el cálculo de un *límite.*

5.-Observar como los alumnos aprenden el concepto del *límite* al observar cómo operaron en la solución de los problemas al desarrollar sus actividades.

6.- Poder contrastar los resultados y obtener las conclusiones.

Los materiales de trabajo son el diseño de un cuestionario en donde se desarrollaron las preguntas relevantes que constituyen el tratamiento de las ideas básicas sobre el estudio del dominio, rango, continuidad, asíntotas verticales y horizontales, acercamientos, alejamientos tanto locales como tendenciales de una gráfica de funciones, el empleo de colores y estas actividades constituyen el proceso de aprendizaje del concepto de *límite.*

El Software que se usó es el *Derive* y como parte integradora de este proceso los alumnos desarrollaron sus destrezas y habilidades en el tratamiento de la información al hacer acercamientos, alejamientos y en general una exploración de contenidos que enriquece y agiliza el proceso de asimilación y acomodación del concepto.

Desde el año 2003 se trabajó bajo el modelo tradicional y en los tres últimos años se implementó el modelo figural.

El primer estudio mediado por la visualización se realizó con Alumnos del *5to* Semestre del Año 2008, el segundo estudio se realizó con Alumnos del 5to Semestre del Año *2009* y el reciente estudio se realizó con Alumnos del 5to Semestre del Año 2010 y los resultados se presentan en este trabajo. En el Colegio solo existen 3 grupos de *Cálculo Diferencial*.

Se estudiaron dos grupos, el *505* con *30* alumnos, el *506* con *32* alumnos a los cuales se aplicaron las actividades sin el respaldo gráfico y al grupo piloto el *507* de *33* alumnos en el cual se trabajaron las actividades asistidas en todo momento por la visualización. El estudio se desarrolló en *3* semanas en *8* sesiones de *50* minutos cada una, de *3* por semana.

Las actividades desarrolladas son una de las formas de trabajar el aprendizaje del *límite* y de manera natural, no está terminado; se formaron *6* equipos, 5 de *6* personas y un equipo de personas restantes, donde los equipos se formaron sin ninguna clasificación ni preferencia de ninguna naturaleza, con el firme objeto de no alterar el escenario de estudio, i.e., se pudo observar el estudio del *límite* en conjunto, la interacción con los demás compañeros como una forma de integración y la convivencia con otros compañeros es de gran utilidad en el proceso de aprendizaje, las circunstancias de conducta que se manifiestan al integrarse con un grupo de compañeros modifica la estructura cognoscitiva del alumno. Según Vygotski(2003), los alumnos operan sobre signos, estos signos y símbolos modifican las operaciones y se genera un aprendizaje, como resultado de una integración de los conocimientos desarrollados basados en un esquema social y cultural de aprendizaje. Para este estudio, el proceso es rico en observar como los alumnos desarrollaron su aprendizaje en conjunto, ya que existe un beneficio individual en la generación de ideas.

1.4 TEORÍA DE LÍMITES.

Los axiomas y teoremas en el estudio disciplinario de la Teoría de *Límites* que se presentan en las clases del Bachillerato del Colegio desde una perspectiva formal, son el eje de estudio de manera tradicional que marca el Avance Programático de la asignatura. El desarrollo conceptual del *Cálculo* comprende los siguientes tratamientos. Leithod (1967).

DEFINICIÓN DE LÍMITE: Sea $f(x)$ una función definida en todo número de algún intervalo abierto que contenga a x_0 excepto, posiblemente, en el número x_0 mismo. El *límite* de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es L, y se escribe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

sí para todo $\varepsilon > o$ $\exists\ \delta > o$ *tal que sí* $/ f(x) - L / < \varepsilon \rightarrow 0 < / x - x_0 / < \delta.$

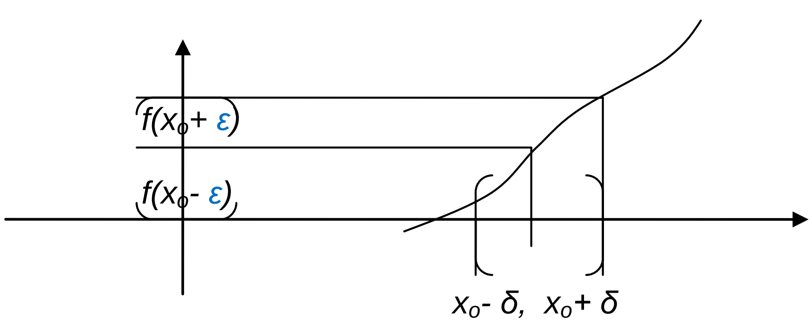


Fig 20

La definición establece que los valores *f(x)* tienden a un *límite L* conforme *x* tiende a un número x_0 si el valor absoluto de la diferencia entre *f(x)* y *L* se puede hacer tan pequeño como se quiera, tomando *x* suficientemente cercano a x_0, pero no igual a x_0.

El límite sí existe es único, i.e., para lograr esto se propone otro y se llega a que es también igual.

Límite de una suma y diferencia de funciones. La suma de dos funciones convergentes es una función que converge a la suma de los *límites* de estas funciones.

Límite del producto de dos funciones. El producto de dos funciones convergentes es una función convergente y su *límite* es igual al producto de los *límites* de las funciones dadas.

Límite del cociente de dos funciones. El cociente de dos funciones convergentes tiene un *límite* igual al cociente de sus *límites*, bajo la condición que todos los términos y el *límite* mismo de la función denominador, sean diferentes de cero.

Los límites cumplen la linealidad:

$$\lim_{x\to x_0} (A+B) = \lim_{x\to x_0} A + \lim_{x\to x_0} B$$

$$\lim_{x\to x_0} cA = c \lim_{x\to x_0} A$$

DEFINICIÓN EN TÉRMINOS DE VECINDADES ABIERTAS:

LÌMITE DE UNA FUNCIÓN. El número *L* recibe el nombre de *límite de una sucesión* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L ,$$

sí para toda $\varepsilon > 0$ existe un número $N=N(\varepsilon)$ tal que

$$|x_n-L| < \varepsilon \quad \text{para toda } n > N$$

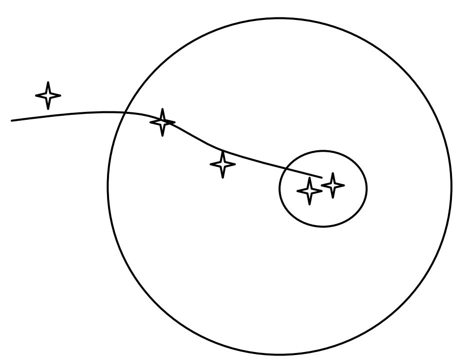


Fig.21

Para la definición y la existencia del *límite* se procede con la idea siguiente: Dada una vecindad abierta para cada punto de la sucesión existe un abierto tal que el *límite* de la sucesión si existe, debido a que existen un número finito de términos que quedan posiblemente fuera de la vecindad, pero a partir de un número grande de la sucesión existe una infinidad de términos que ya quedan enteramente contenidos en la vecindad a lo más de radio $\varepsilon > 0$ y en este sentido queda bien definido el concepto de *límite.*

En estas explicaciones que se desarrollan en la clase en nuestro Colegio solo es cumplir con los contenidos que el programa de estudios ordena, pero ninguna de estas ideas se logra desarrollar con facilidad debido a que son definiciones con una simbología propia del tratamiento de *límites* de funciones en vecindades abiertas. Y los alumnos las retienen en memoria de corto plazo y posteriormente se olvidan. Si las operaciones que realizan en ejercicios sobre el cálculo de *límites* son erróneas, el operar bajo esta simbología no se tiene ninguna certeza de entender los procesos del *límite* en términos de vecindades.

CAPITULO II

LA PROBLEMÁTICA EN EL APRENDIZAJE DEL *LÍMITE* EN EL COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE MÉXICO.

2.1.- ENFOQUE TRADICIONAL: MECÁNICO ALGORÍTMICO EN EL COLEGIO. TRATAMIENTO DE CASOS.

La problemática que se estudia consiste en que el alumno al seguir operando mecanicamente los ejercicios de *límites* bajo un sistema de enseñanza tradicional no se logra una mejora en su aprendizaje.

El estudio del concepto de *límite* en el curso de Matemáticas V del Bachillerato no es fácil, debido a que se centra en un tratamiento de contenidos sintéticos que corresponde propiamente a estructuras matemáticas, pero el alumno no ha estado familiarizado y le cuesta trabajo interpretar la simbología que el profesor escribe, las vecindades de las funciones no le es claro, lo que ocasiona un medio difícil y oscuro en el proceso de conformar una integración y construcción del conocimiento.

Lo anterior no se logra porque no pueden transferir la significación del límite más allá de operar en un medio algorítmico algebraico por el desconocimiento de las estructuras matemáticas. La desventaja observada es que el profesor en la mayoría de las veces sólo resuelve ejercicios y esto lleva a que no existe la capacidad por parte de los alumnos una preocupación por entender e interpretar el concepto de *límite* como parte de su proceso de aprendizaje.

Las clases en el Colegio, se han impartido siguiendo el modelo tradicional que consiste en un estudio analítico muy rígido de contenidos; bajo esta hipótesis, es importante que el profesor en su proceso de enseñanza del concepto de *límite* tenga desde una perspectiva sintética, recurra a caminos alternos como un proceso de integración de contenidos y en las clases se propicie una reflexión más detallada sobre el entendimiento del concepto en términos de vecindades ya que en la transmisión de conocimientos esto permite mejorar sus explicaciones para ser lo más claro posible, debido a que las ideas que giran alrededor del concepto de conjunto abierto juegan un papel importante como proceso de la construcción en el concepto de *límite.* Porque el concepto de *límite* no se adquiere de manera rápida. El conocimiento del profesor, en forma rígida tradicional explica la idea del *límite* de la siguiente manera: siempre que existe un abierto, existe una vecindad abierta lo suficiente pequeña enteramente contenida en el conjunto donde un número finito de términos quedan posiblemente fuera de la vecindad pero a partir de un $N>No$ el número infinito de términos en el proceso infinito ya quedan enteramente contenidos en la vecindad abierta de radio a lo más épsilon y como épsilon es suficiente pequeño, esto garantiza la introducción del paso a la frontera del conjunto, quedando así la definición formal de *límite,* lo que resulta para el entendimiento del alumno difícil y oscuro.

Es importante el tratamiento de ideas en la formación del profesor ya que esto lleva a transferir con mayor certeza el análisis del cálculo de funciones.

Como parte del proceso de la construcción del concepto de *límite,* partiendo de la experiencia que se ha tenido con los alumnos, se logró identificar la problemática en base a las situaciones que presentamos en los siguientes ejercicios; primero las ideas de interiorización no se logran, debido que al operar algebraicamente, y con valores aritméticos, no se llegan a darle la significación de estructura matemática.

En el desarrollo de las clases de Cálculo Diferencial y para el tratamiento del los temas de *límite*, se hace la presentación de los contenidos en forma rígida tradicional.

Se dispone de tres semanas para explicar los temas de *límites* de funciones polinomiales, racionales, trigonométricos y exponenciales. La no existencia de *límites* se estudia lo menos posible, por los tiempos de encuadre del avance programático. Partiendo de estas circunstancias, la dosificación de los tiempos ha llevado a desarrollar el modelo de enseñanza tradicional y los aspectos más sobresalientes se describen a continuación.

Se escribe y se explica en forma algorítmica algebraica, las definiciones y las gráficas en términos de vecindades, que el alumno no entiende.

En la parte operacional el profesor anota la definición de *límite* de una función y esto se ha repetido todo el curso.

DEFINICIÓN DE LÍMITE: Sea *f(x)* una función definida en todo número de algún intervalo abierto que contenga a x_0 excepto, posiblemente, en el número x_0 mismo. El *límite* de *f(x)* cuando *x* tiende a x_0 es *L*, y se escribe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

sí para todo $\varepsilon > o$ $\exists\, \delta > o$ *tal que sí* $/ f(x) - L / < \varepsilon \rightarrow 0 < / x - x_0 / < \delta.$

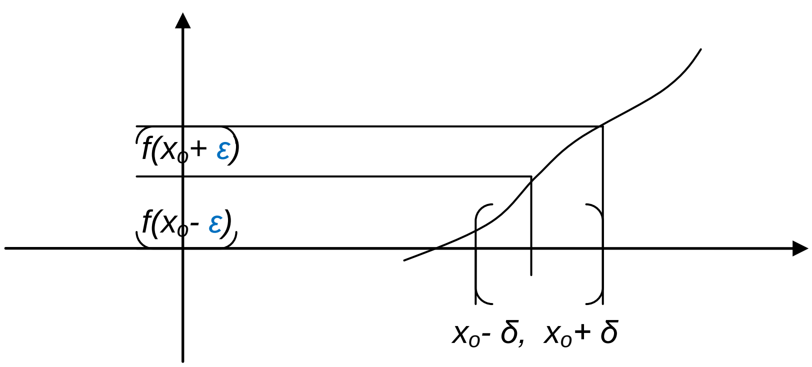


Fig 22

Hace la gráfica para hacer referencia a la explicación de las vecindades que se analizan en el proceso del *límite.*

El profesor opera con contenidos difíciles de vecindades tanto en el dominio como en el contradominio, es claro que el profesor explica y explica bien, pero no se logra una buena transposición didáctica.

Las operaciones simbólicas resultaron difíciles de entender, debido a que las estructuras matemáticas no se aprenden. Bajo este modelo de aprendizaje se hace una presentación de los contenidos en forma rígida algebraica y simbólica. Primero por los símbolos, luego cuesta trabajo asimilar los contenidos.

Los aspectos más relevantes que se presentaron al estudiar el *límite*, se realizaron con el siguiente tratamiento, desarrollado en todo momento bajo un esquema de ideas rígidas tradicional, algorítmico algebraico.

En los tres últimos años se contrastó el curso formal tradicional con la introducción de la visualización. El trabajo que se presenta corresponde al estudio que se realizó en el Semestre *2010-B.*

Un cuestionario diagnostico de *7* ejercicios sirvió para identificar las operaciones y desarrollo de ideas matemáticas que los alumnos generan, estas actividades se aplicaron al grupo *505* y *506* de *30* y *32* alumnos respectivamente, divididas en *8* sesiones de *50* minutos, en tres semanas.

Este cuestionario didáctico es parte importante del tratamiento de los contenidos de las funciones, ya que las preguntas que se les plantearon a los alumnos ayudan a relacionar conceptos e ideas con el concepto de *límite,* el desarrollar estas actividades forma parte del mismo proceso de enseñanza, pero al alumno le cuesta trabajo operar de manera analítica, lo que dificulta su aprendizaje, por el desconocimiento y mala operación de las propiedades de los números reales y sus estructuras matemáticas. La descripción de las actividades en la forma tradicional se incluye en el Anexo *I.*

CAPITULO III

LA IMPORTANCIA DEL ESTUDIO DEL CONCEPTO DE *LÍMITE* MEDIADO POR LA VISUALIZACIÓN.

3.1 LA VISUALIZACIÓN DEL *LÍMITE.* TRATAMIENTO DE CASOS.

Como se ha tenido la problemática sobre el entendimiento del *límite* de funciones, el interés bajo estas circunstancias llevó a plantear hacer una mejora en el aprendizaje de los alumnos.

No había un respaldo para realizar un análisis, solo los enfrenta en forma simbólica en el tratamiento de estructuras matemáticas.

La visualización juega un papel muy importante, pero esto no lo realizaban.

Las representaciones graficas refieren los contenidos del *límite* de una función.

La visualización como fundamento de los procesos mentales constituye, la asimilación y acomodación de imágenes mentales como parte de la interiorización de ideas.

En este orden de ideas, como parte previa al uso del paquete *Derive* en una sesión previa como parte importante de la visualización, el grupo *507* hizo una exploración de gráficas como la parte de adaptación al uso del paquete *Derive*, hicieron acercamientos y alejamientos de las gráficas, el uso de colores y acercamientos locales, este proceso es previo y es parte de la familiarización del paquete. Las gráficas más comunes que elaboraron son rectas, parábolas, polinomios, racionales y trigonométricas.

Una actividad previa al resolver los cuestionarios, fue la familiarización del paquete *Derive*, para tener de manera accesible las gráficas. Las gráficas se desplegaron en colores y esto a los alumnos los motivó ya que el impacto que se causa constituye una fuente de interés para resolver sus actividades.

Es natural que se propicie el desarrollo del conocimiento basado en la cantidad de operaciones y acciones que el alumno logró desarrollar

La importancia de mencionar la visualización del *límite*, según Tall (1980), dice que la falta de interacción se puede dar en casos donde un individuo puede tener una definición muy general de un concepto y una imagen conceptual desligada de la primera.

El estudio principal consiste en diseñar actividades asistidas por la visualización cuyos contenidos reflejen la construcción y aprendizaje del concepto de *límite* de una función.

Para observar cómo se da el aprendizaje del concepto de *límite,* en la escuela por medio de la visualización se han diseñado actividades estructuradas en un formato consistente en identificar los elementos que permitan deslindar los tratamientos del dominio, imagen, asíntotas verticales y horizontales, cuya idea básica de exploración de las graficas permitió a los alumnos desarrollar un esquema de ideas matemáticas alrededor del concepto de *límite* de una función. La propuesta se centra en elaborar problemas y actividades donde el alumno debe estar consciente que todo el trabajo de aprendizaje lo tiene que resolver él, la atención se centra en el alumno, dejando por un lado lo tradicional donde el profesor sólo resolvía ejercicios numéricos, se consideró que de seguir así no se lograría lo ideal; en base a lo anterior se han diseñado las actividades, desde problemas relevantes, ejercicios, cuestionarios, materiales y recursos gráficos que al interactuar en un proceso de integración nos llevarán a aprender el concepto del *límite* en condiciones más ideales y de beneficio que por la vía tradicional no se han logrado.

El estudio consistió en dar seguimiento a las actividades que se trabajaron en el capitulo anterior con los mismos grupos; el cuestionario y el desarrollo de las actividades haciendo el contraste por un lado, el estudio de las funciones aplicando sólo la parte operacional algorítmica algebraica, i. e., el alumno se tiene que desarrollar en un lenguaje propiamente algebraico lo que permitió ver mediante sus cálculos como es que se presentan las dificultades del aprendizaje de concepto que se estudio y contrastarlo con el tratamiento de las mismas actividades, desde un respaldo visual, i. e., empleando el uso de las graficas de las funciones.

Empleando la visualización, los alumnos proceden bajo el siguiente esquema de actividades y al mismo tiempo se pueden observar el avance en la generación de ideas visuales y matemáticas.

Se trabajaron las mismas preguntas con la visualización con el grupo *507* de *33* alumnos. Se diseñó la siguiente actividad.

DESARROLLO DE ACTIVIDADES EMPLEANDO LA VISUALIZACIÓN

A manera otra vez de esquema general de los contenidos a estudiar, son de manera natural, los que comúnmente se trabajan en el estudio de una gráfica de una función.

1.-¿Cuál es el dominio?.
2.-¿Cuál es la imagen?.
3.-¿Cuáles son las asíntotas verticales?.
4.-¿Cuáles son las asíntotas horizontales?.
5.-¿Cuál es el *límite* en *x=0?. ¿* En infinito?. ¿En menos infinito?.

ACTIVIDAD No. 1

Sea la función

$$f(x)= \frac{1}{x^2+1}$$

Empleando el cuestionario y la visualización, los alumnos procedieron bajo el siguiente esquema de actividades:

ACTIVIDAD No 1 .- *Calcular* $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1}$
1.-El valor de la imagen en cero es:
2.-La función es continua o discontinua. ¿Por qué?.
3.-El denominador x^2+1, ¿Qué valores toma?.
4.-Para $x=10$. ¿Qué valor toma la imagen?.
5.-Para los valores positivos, ¿Se crea una función creciente o decreciente?, ¿Por qué?.
6.-¿Cuál es el valor de la imagen para valores de *x* suficiente grandes?.
7.-De la pregunta anterior, ¿Toma el valor cero?, ¿ Por qué?.
8.-¿Cuál es el *límite* cuando *x* tiende a infinito?.

Para resolver el cuestionario, los alumnos se apoyaron en el respaldo visual, en el siguiente orden, como parte del proceso de construcción del concepto:

a) Los alumnos obtienen la gráfica.

El primer paso de la actividad, al estar asistidos por una computadora, se obtuvo la gráfica de la función.

$$f(x)= \frac{1}{x^2+1}$$

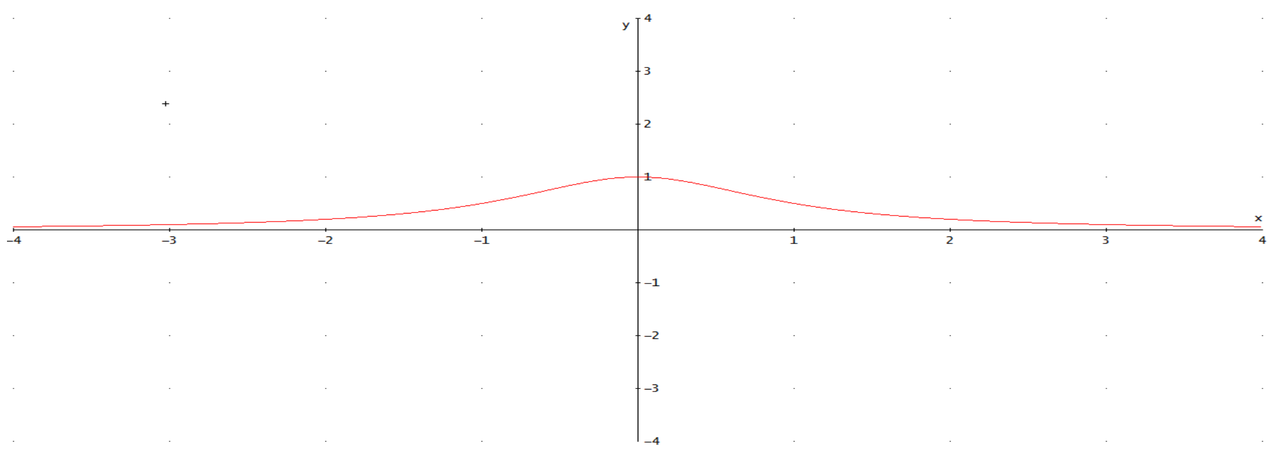


Fig.23

Los alumnos hicieron diferentes acercamientos y alejamientos locales.

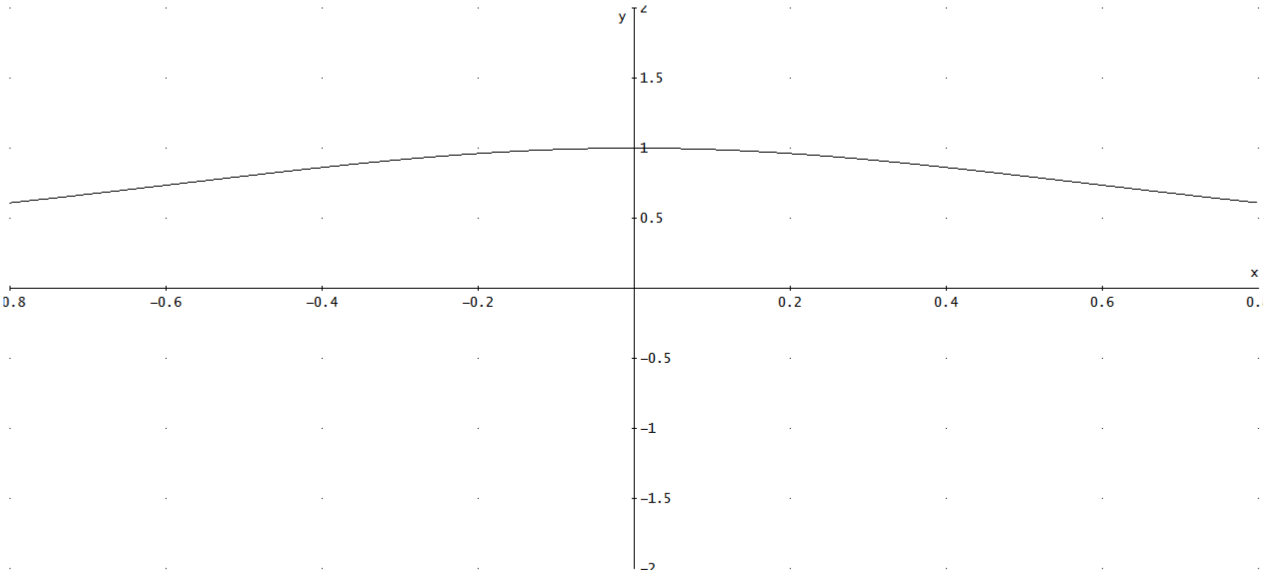


Fig. 24

Se observó, que se pueden obtener las graficas con mayor velocidad y en colores, lo que generó un respaldo de seguridad para los alumnos, descubren los elementos constitutivos de una gráfica, la numeración, la imagen y los ejes de coordenadas.

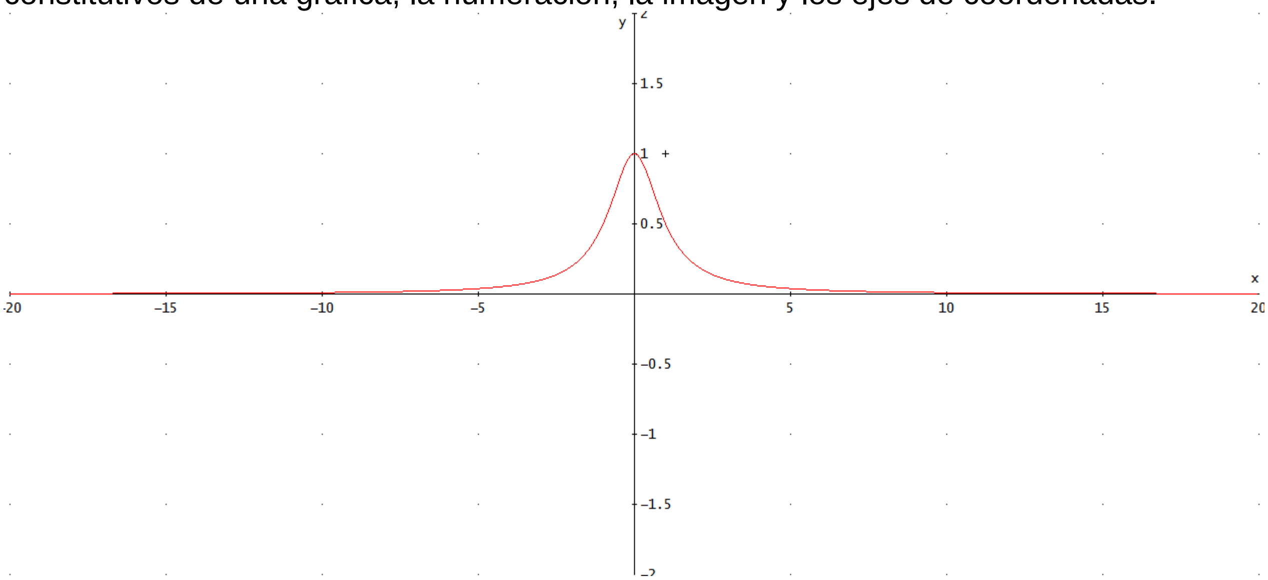


Fig. 25

b) Los alumnos exploran la gráfica.

Es importante señalar que los alumnos al comenzar el estudio del *límite* de una función se centran en la exploración de los elementos que se despliegan al construir una gráfica por un medio visual, lo que representa el desarrollo de ideas matematicas, comienzan desde ideas simples pero profundas. Operando con este medio se define como las acciones-operaciones de visualización que el alumno conlleva en su campo cognoscitivo para realizar un esquema de ideas de *límite* y se vincula con el trabajo que realiza bajo la argumentación de las gráficas.

Lo primero que se analizó es la forma de la figura: la imagen de la función para los alumnos tiene el siguiente significado que ellos contextualizan según sus interpretaciones.

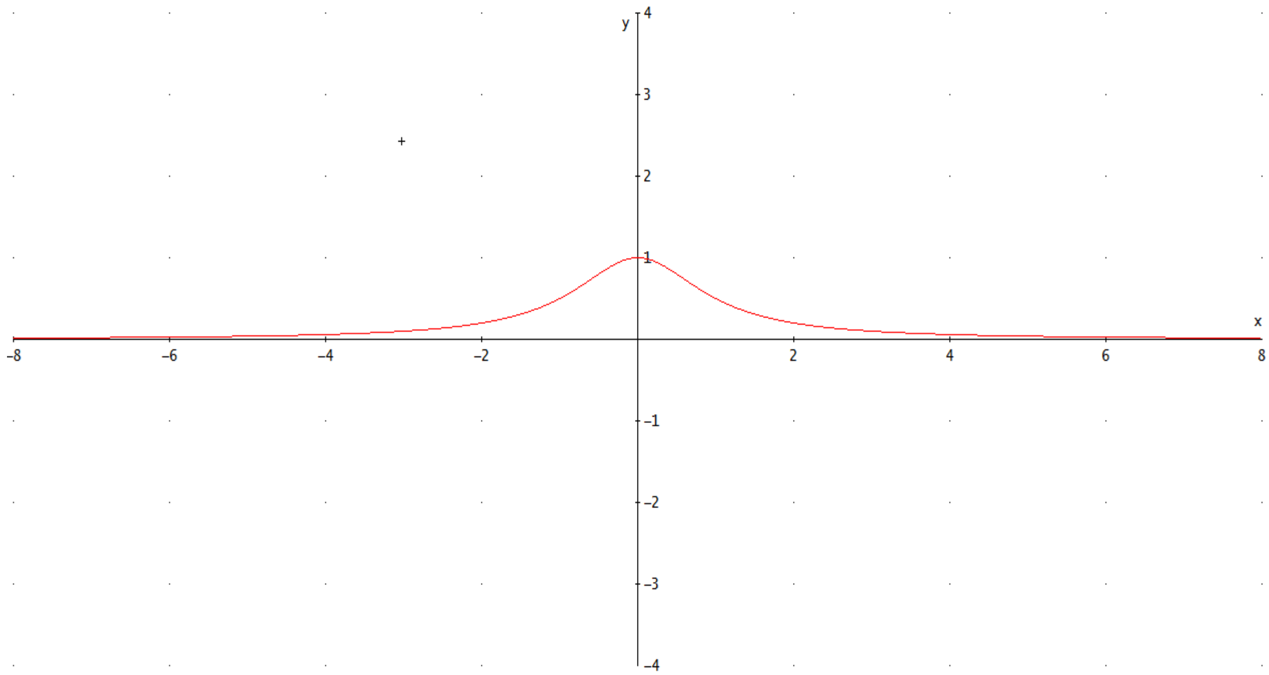


Fig.26

Los alumnos lograron la inferencia de la estructura algebraica en

$$f(x)= \frac{1}{x^2+1}$$

que la función es continua y siempre positiva. Los alumnos observaron que la imagen no se rompe y transfiere estas ideas, al mover el cursor cerca del cero por la derecha y por la izquierda, por los positivos y los negativos; ademas el cursos tiene una ayuda porque en la imagen se despliegan los valores de las respectivas evaluaciones, con una $x>0$ se observó que la función decrece. Lo mismo por la izquierda lo que lo llevó a relacionar con la estructura matemática del cuadrado de un número.

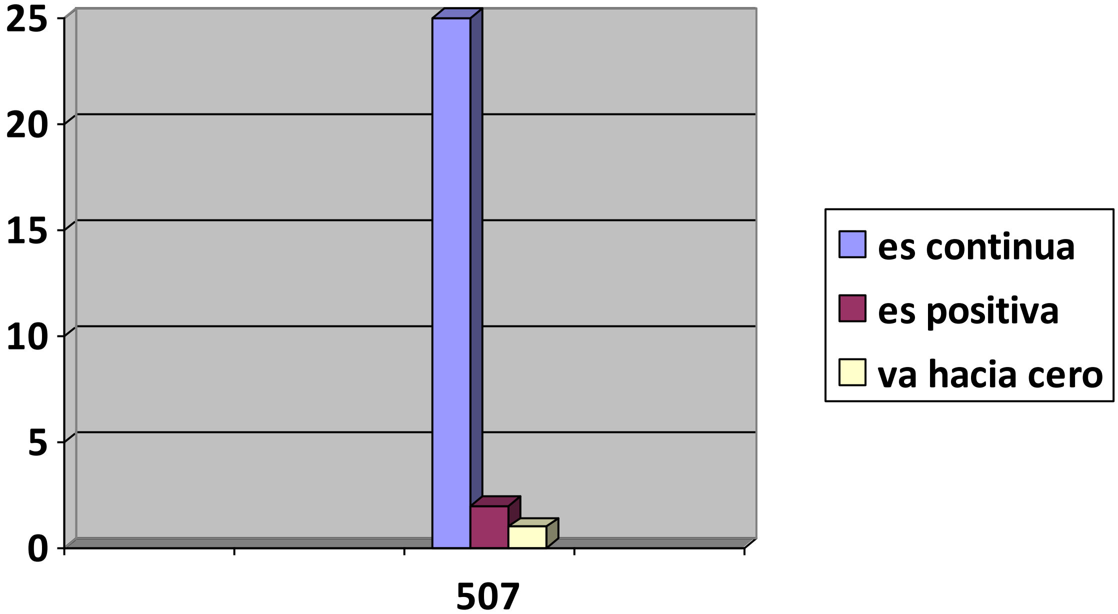


Fig. 27

La exploración de la gráfica permitió el estudio de argumentos para tener un respaldo de integración de los elementos vistos como un proceso de solución; las actividades al ser asistidas por un medio visual se trabajaron con recurso figural como una alternativa.

Como parte importante se observó, que el alumno le da una relevancia a las unidades significativas de la gráfica y los transfiere a un análisis reflexivo en el cálculo del *límite* y puede operar con estas ideas visuales al registro algebraico como parte del proceso de la solución del problema.

De la gráfica:

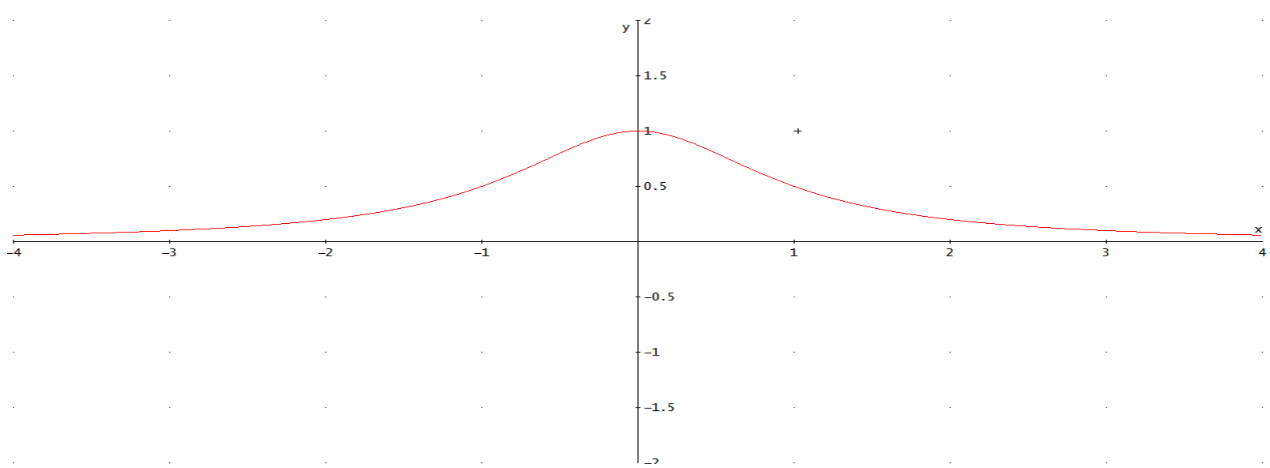


Fig. 28

Su trabajo consistió en hacer evaluaciones en su cuaderno y se pide realizar las siguientes evaluaciones para verificar los valores observados con los numéricos obtenidos, de esta manera evalua en:

$$f(x)= \frac{1}{x^2+1}$$

x=1, 1/2
x=2, 1/5
x=3 1/10

…

x=10 1/101

Estas operaciones constituyen acciones que permitieron desarrollar un esquema de ideas cognoscitivas en el *límite,* ya que la actividad generó un trabajo de construcción y permitió identificar un registro gráfico, ligarlo y verificarlo con un registro algebraico.

Sí *x=10*, de lo anterior si *x* tiende a ser grande, es decir *x>0* entonces con los cálculos numéricos se infiere que el cociente $1 / x^2+1$ es pequeño , pero si x es tan grande que tienda a infinito esto nos permite entender que $1 / x^2+1$ tiende a ser muy pequeño cada vez más y si continúan de esta manera, llegaría un momento en que esta cantidad se parece al cero pero no es, pero precisamente es en este momento en que se logró introducir la idea del *límite* cero; lo que llevó a relacionar, representar y reproducir esta idea a partir de la visualización de la grafica; como parte de uno de los tantos medios y herramientas para construir un concepto de *límite.*

c) Los alumnos desarrollan la visualización de las unidades significativas.

La parte central del desarrollo de las actividades, la visualización de la gráfica, permitió, en un proceso de abducción, con los símbolos y signos desarrollaron ideas cognoscitivas, fue un proceso de significación ya que al integrar y articular en una función el dominio, el contra dominio y las asíntotas, establecieron patrones de unidades significativas en el tratamiento del cálculo de un *límite.*

Se visualizó la gráfica y con el descubrimiento de las unidades patrones cuya tarea primordial es en estas actividades, permitieron al alumno encontrar una significación y se logró cuando transfiere desde sus representaciones mentales, lo que visualiza, es relevante con un valor numérico, dando como paso importante en estas actividades didácticas transferir el concepto de *límite.* Las más importantes que trabajaron son las siguientes gráficas de la función.

$$f(x)= \frac{1}{x^2+1}$$

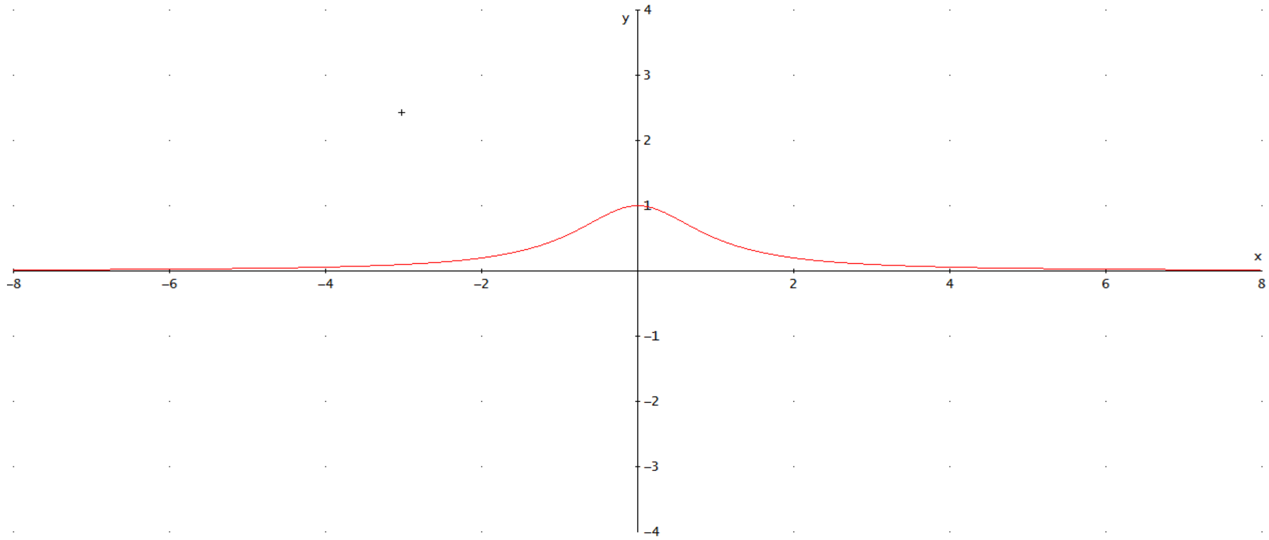


Fig. 29

Para *x=1*, se identificó con la imagen *y = ½.*

Para x=2, se identificó con la imagen *y=1/5.*

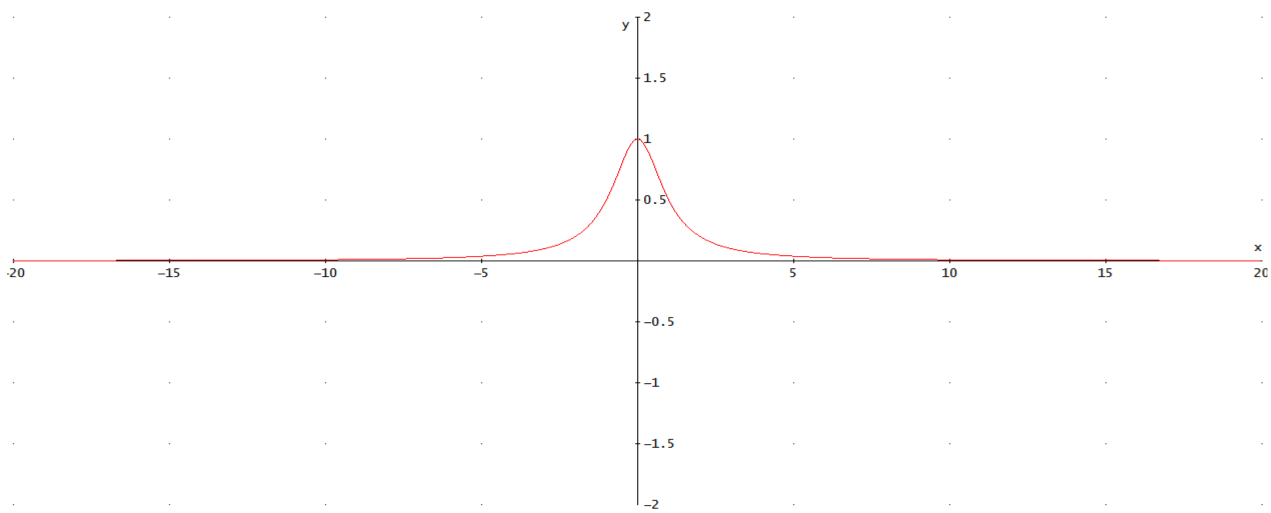


Fig.30

Para *x=10,* obtiene *y= 1/101.*

Con estas operaciones, se logró la identificación y asignación al establecer la unidad significativa, corresponde a un valor muy pequeño a medida que *x t*iende a ser muy grande es decir, se ogra un mejor acercamiento en la estructura:

Si $x>0$ y muy grande entonces $1 / x^2+1$ es muy pequeño.

Estos tratamientos en el análisis de las unidades significativas permitieron al alumno transferir del comportamiento gráfico visual al numérico y así desarrollaron una plataforma de ideas más solidas en un proceso de retroalimentación en la adquisición y construcción de ideas matemáticas, como parte del proceso de aprendizaje de los alumnos. Se observó desde el punto de vista de las operaciones en un proceso de construcción del conocimiento del *límite* lo siguiente: antes de pasar al aspecto formal del cálculo de *límites,* los alumnos desarrollaron las habilidades o acciones previas en sus ideas kinoestésicas que son fundamentales en los procesos cognoscitivos.

Los resultados observados para la función, cuando la x tiende a ser grande, encontramos los siguientes valores.

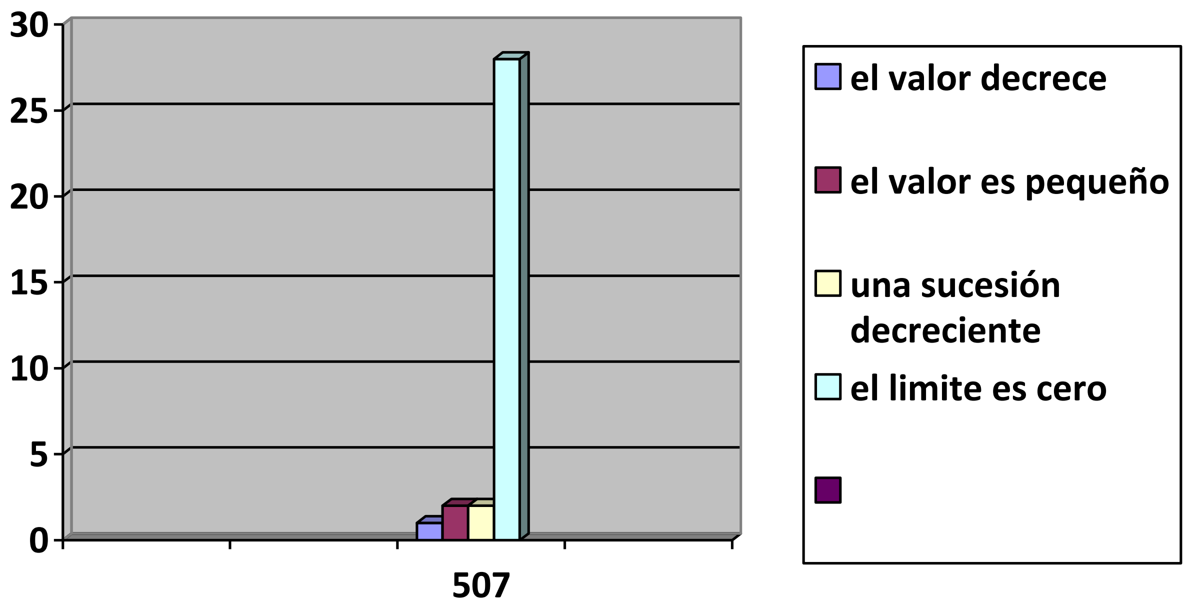


Fig.31

Las operaciones que se realizaron en la trasferencia de contenidos, permitieron observar cómo este tratamiento de contenidos llevó a establecer como un proceso de aprendizaje del *límite* desde esta alternativa de la visualización, los aspectos didácticos observados y de siendo de relevancia la transferencia y el tratamiento de las unidades significativas fueron:

De la gráfica fue decisivo para la construcción de una idea kinoestésica en la construcción de una sucesión decreciente.

Sí se toman $n, m>0$ en ese orden entonces $1/n < 1/m$ y, esto se aplicó a la estructura $1 / x^2+1.$

Se creó al inicio del estudio un desequilibrio para *1/n,* pero a medida que operó las con gráficas se obtuvo una acomodación cuando asocia en la función

$$f(x)= \frac{1}{x^2+1}$$

x=1,
x=2,
x=3,
x=4, …

con los valores del dominio y se obtuvieron los valores en la imagen de la función y se pudo medir de manera visual al señalar en la gráfica.

Estas ideas son relevantes en un proceso de significación, porque además permitió mediante estas ideas, desarrollar el concepto de *límite* a medida que pudo por este proceso conjeturar para inferir el valor del *límite* y establecer que un *límite* no se encuentra en una función si no que como su nombre lo indica esta en la frontera de la función y este paso de buscar en la función crea dificultades en los alumnos, por este motivo la visualización es importante en el tratamiento del concepto de *límite.*

Por medio de la visualización de un alejamiento de la función y por el tratamiento numérico el analisis visual es importante en la mediad que se tiene la necesiada de establecer un patron general para el proceso infinito y acomdar la idea formal del *límite.*

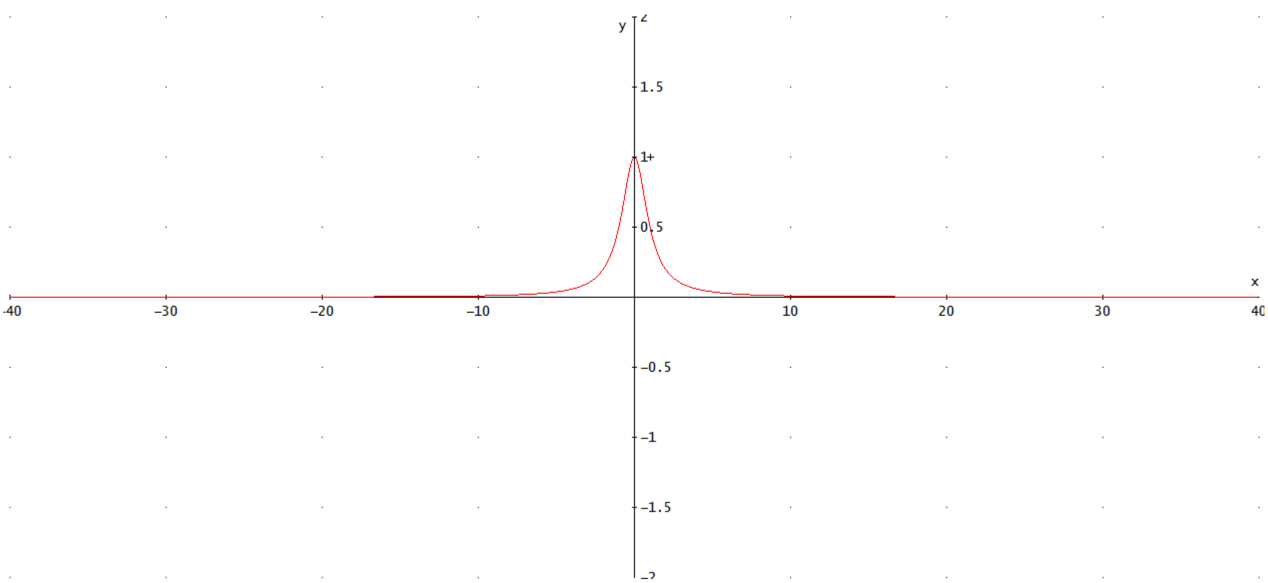


Fig. 32

Los alumnos identifican que al tomar *n>m* en el dominio de la función, a medida que alejan las respectivas imágenes siempre van a ser más pequeñas y pueden inferir de la imagen de la gráfica de la función en este valor cuando tiende a infinito el *límite* es cero.

Se pudo verificar la propiedad:

Sí $n>m$, entonces
$1/n < 1/m$

Con las operaciones anteriores se logró acomodar un aprendizaje formal: sí *n>m* con *n y m* tendiendo a infinito entonces sus respectivos inversos tienden a ser muy pequeños y en un proceso infinito tiende a ser cero por lo que el *límite* de la función $1 / x^2+1$ es cero cuando la *x* tiende a infinito.

Lo que se comparó que el estudio asistido por el programa *Derive* en el diseño de actividades encaminó a comprender mejor el concepto de *límite*, debido a que en el inicio se observaron las siguientes situaciones cognoscitivas de los alumnos:

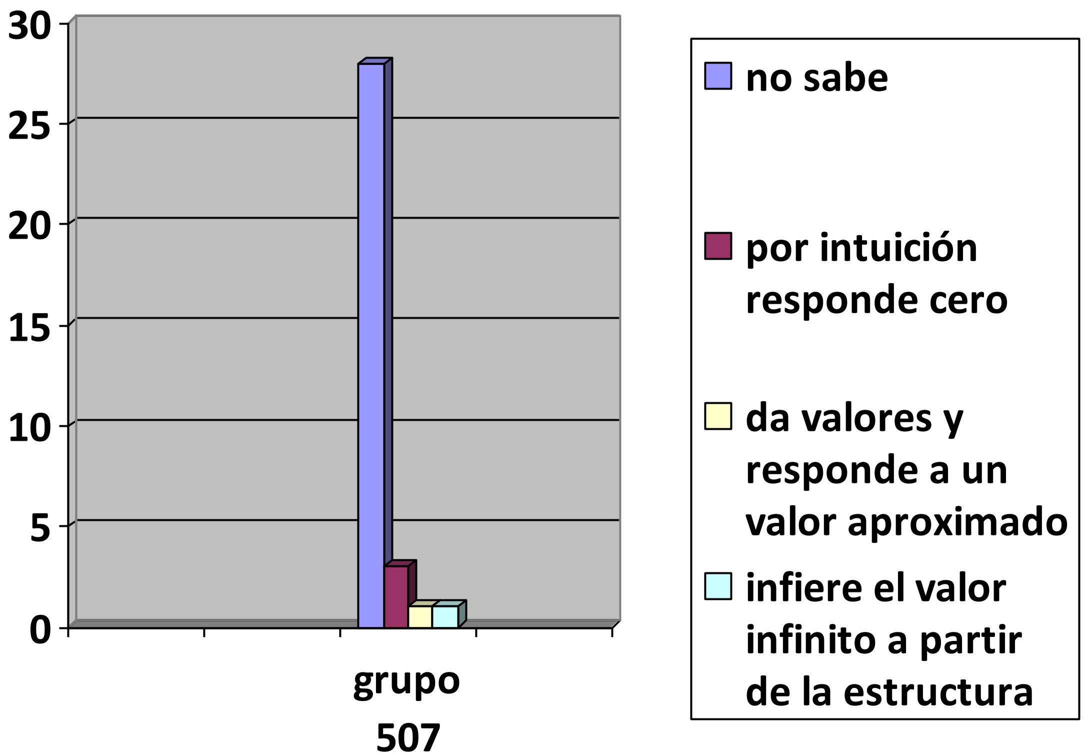


Fig.33

Después de reflexionar sobre los contenidos y mediados por la visualización como parte del proceso de construcción y estudio del *límite* mediado por las gráficas se observaron los siguientes avances:

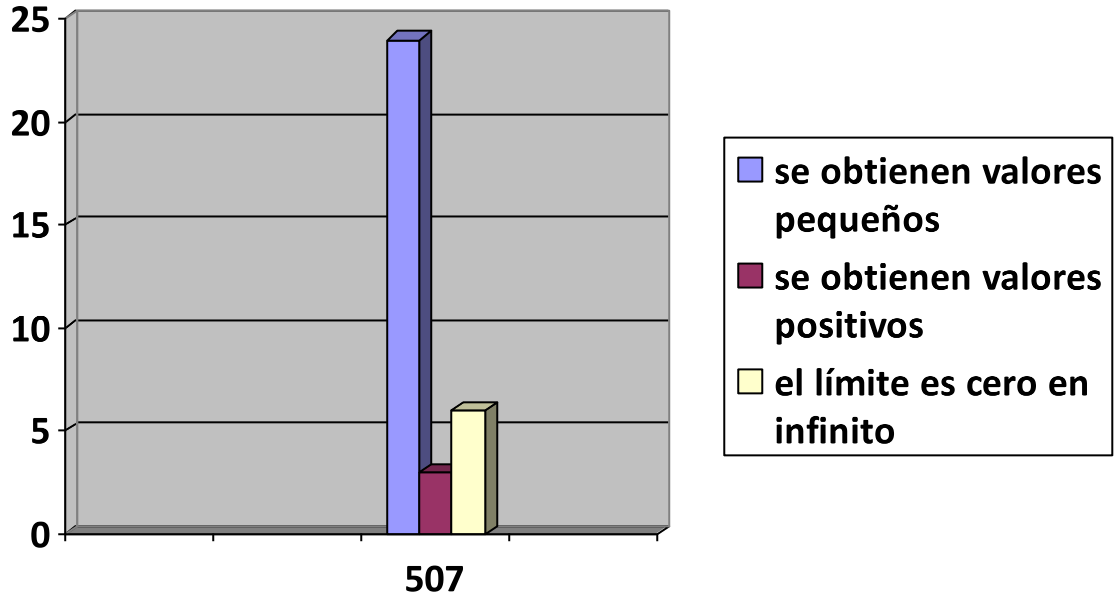


Fig. 34

Lo que fue significativo para el proceso de conocimiento del concepto de *límite* del alumno.

De lo anterior como reforzamiento en el tratamiento de los contenidos para esta función se logra entender de manera formal que en

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Una primera observación que se hizo es que siempre se obtenían valores positivos.

También se detectó que estos valores estaban comprendidos entre el cero y uno, ya que el valor más grande es uno cuando $x=0$.

Con el análisis anterior de las actividades el cuestionario quedó elaborado de la siguiente manera:

ACTIVIDAD No *1* .- Calcular $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2+1}$
1.-El valor de la imagen en cero es: R.-*1: 33*.

2.-La función es continua o discontinua. ¿Por qué? R.- Claramente es continúa, porque así se observa: *33*.
3.-El denominador x^2+1, ¿Qué valores toma?. R.- Toma valores positivos y negativos: *33*
4.-Para $x=10$.¿Qué valor toma la imagen?. R.- Un valor pequeño: *22.* Un valor menor que uno: *11.*
5.-Para los valores positivos. ¿Se crea una función creciente o decreciente?, ¿Por qué?. R.- Decreciente, porque se observa una imagen que va de bajada: *33*.
6.-¿Cuáles el valor de la imagen para valores de *x* suficiente grandes?. R.- Pequeño, muy grande: *3*. Tiende a cero: *30.*
7.-De la pregunta anterior. ¿Toma el valor cero?, ¿Por qué?. R.- No lo toca, porque siempre es pequeño: *30.*
8.-¿Cuál es el *límite* cuando *x* tiende a infinito?. R.- Es cero: *33.*

Se observaron, las inferencias del concepto del *límite* estudiado:

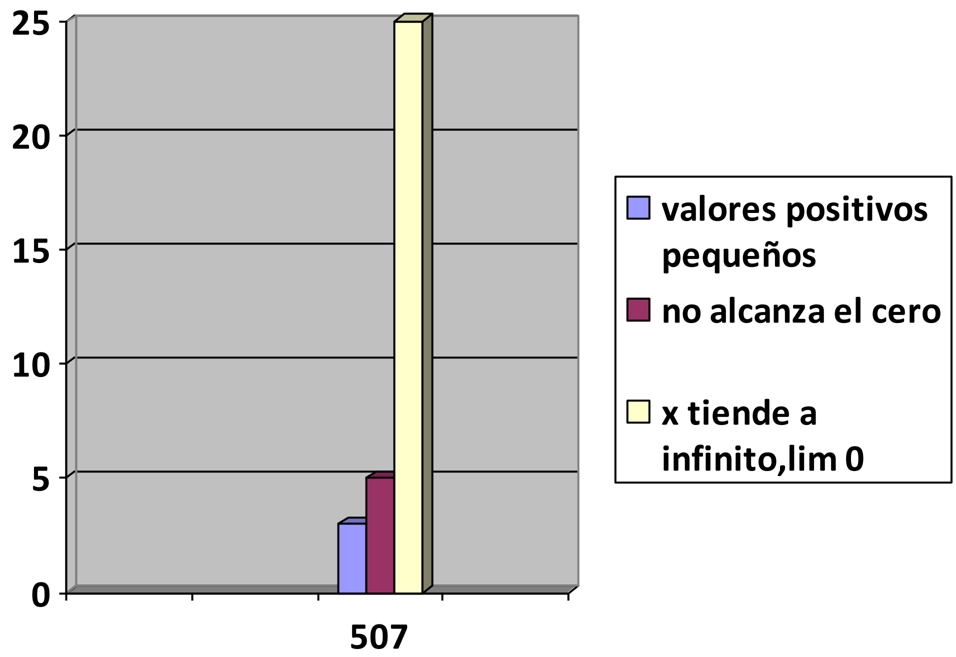


Fig. 35

Lo que garantiza que existe un mejor aprendizaje del *límite.*

ACTIVIDAD No. 2

Sea la función

$$f(x)= \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$$

Las actividades consistieron en resolver en una sesión el siguiente cuestionario y operan en un esquema de desarrollo de ideas en todo momento asistidos por la visualización:

ACTIVIDAD No. *2* Calcular el *lím* $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$
1.-¿Cuál es el dominio?.
2.-¿Cuál es el patrón de la gráfica?.
3.-¿Cuál es la imagen de la función?.
4.-¿Dónde es continua la función?.
5.-¿Cuál es el *límite* de la función en $x=0$?. ¿Por qué?.
6.-¿Cuál es el *límite* de la función en $x=\infty$?. ¿Por qué?.

El estudio de *límite,* mediante la visualización, es una alternativa donde la gran potencialidad de contenidos de las gráficas ayuda a formar el concepto del *límite* de una función que por la vía algorítmica algebraica es muy oscura, y, en estas condiciones el desarrollar un pensamiento lateral llevó a los alumnos a tener una alternativa en el tratamiento de la información de un problema como parte del proceso de la solución.

Se resaltó que en la medida que el alumno interactuó más con la visualización de gráficas, en este sentido, se desarrolló cada vez una secuencia gradual de actividades que en conjunto es una virtud en su formación de estudiante porque desarrolló una motivación de trabajo y tiene una aportación de las partes significativas de los contenidos de estudio y los hace propios, en la medida que trabaja con ayuda de la visualización de gráficas como una herramienta de mediación y también como forma de disciplina y trabajo.

En base a lo expuesto anteriormente los alumnos exploraron y trabajaron con la asistencia de la gráfica, donde la comunicación entre ellos amplia las formas de tratamiento de la información, en este sentido los patrones y contenidos que interpretan desde las gráficas, las variaciones poco a poco las van asimilando y se llegó a una interpretación y acomodación de unidades significativas, debido a que las variaciones son parte de la transferencia visual en el desarrollo de ideas matemáticas. Debido a la diversidad de conocimientos previos de los alumnos este desarrollo no es gradual, pero fue importante observar como los alumnos pudieron obtener las unidades significativas invariantes y los incorporaron hacia un análisis, ya que con la ayuda visual se pudieron interpretar mejor las estructuras algebraicas y formaron parte de su aprendizaje basadas en las mismas actividades desarrolladas con la asistencia de la visualización; además la interacción en grupo nos permitió observar una forma rica en los alumnos en intercambio de ideas, construcción, descubrimiento, complemento y sobre el análisis, que se logró desarrollar, sobre los contenidos que se solicitaron en el cuestionario como proceso de construcción de los conceptos y lo que constituye el proceso de aprendizaje del *límite.*

Los alumnos exploraron la gráfica de la función:

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$$

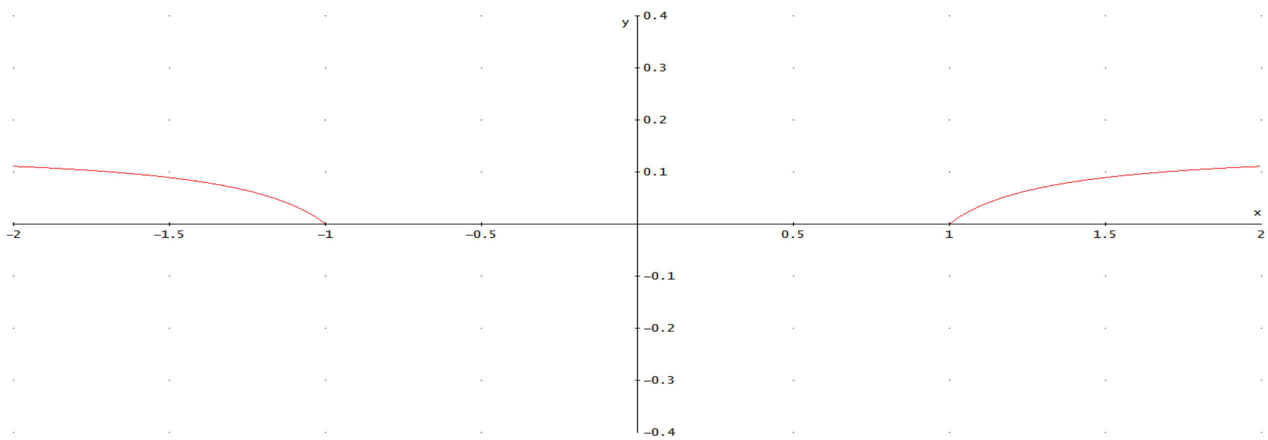


Fig. 36

Los acercamientos, alejamientos y análisis locales que los alumnos realizaron fueron:

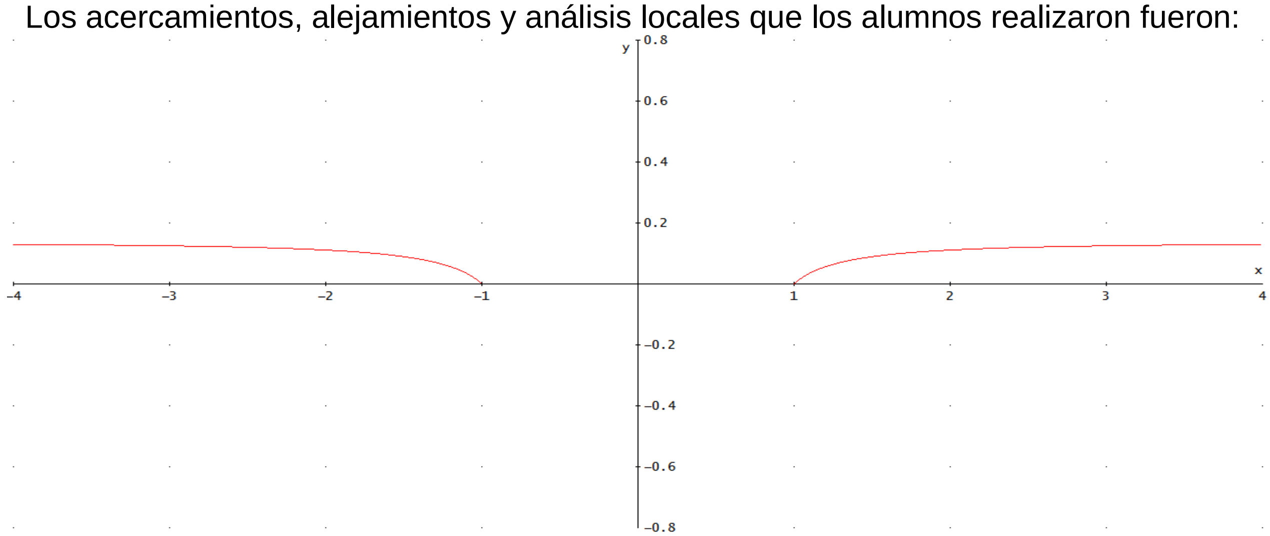


Fig.37

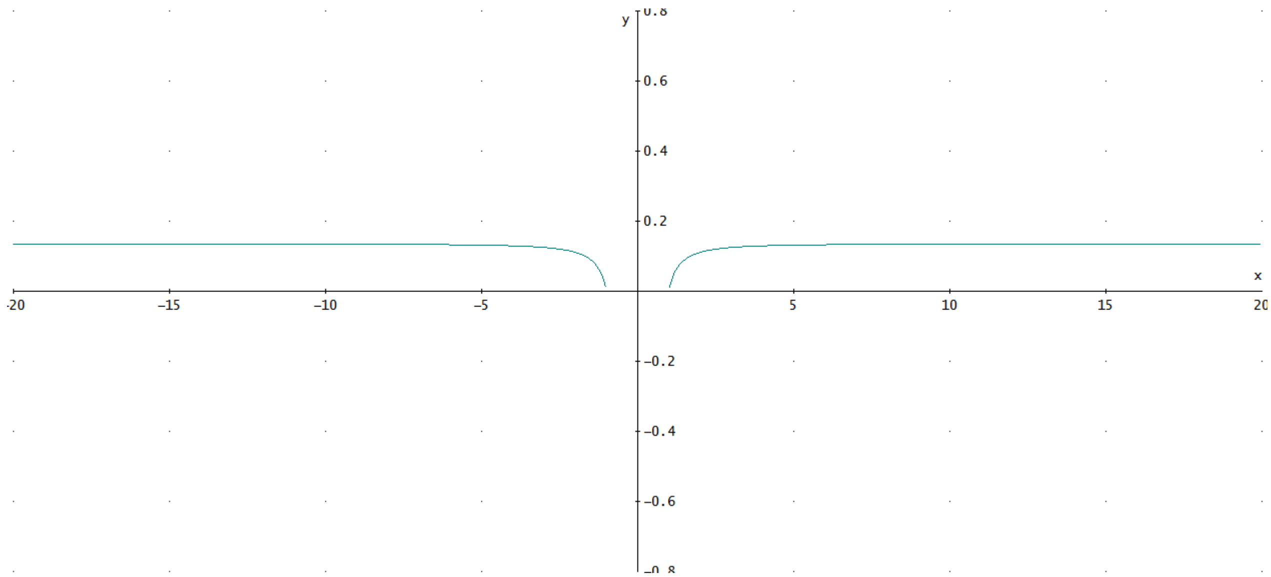


Fig.38

Con esta ayuda visual los alumnos transfirieron las unidades significativas de la gráfica de la función y se observó el intercambio de ideas, este constituyó una asimilación de ideas matemáticas en grupo. Las ideas y operaciones que conformaron al contestar sus cuestionarios fueron las siguientes:

ACTIVIDAD No. *2* Calcular el *lím* $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$
1.-¿Cuál es el dominio?. R.- De *0* a infinito: *30,3.*
2.-¿Cuál es el patrón de la gráfica?. R.- Una exponencial, en ambos lados: *28, 5.*
3.-¿Cuál es la imagen de la función?. R.- De *0* a *1: 21.* Positiva y pequeña: *12.*
4.-¿Dónde es continua la función?. R.- De *0* a infinit0: *30, 3.*
5.-¿Cuál es el *límite* de la función en $x=0$?. ¿Por qué? R.- *1: 33.* Porque en $x^0 = 1$.
6.-¿Cuál es el *límite* de la función en $x=\infty$?. ¿Por qué? R.- Es positivo: *26,7.*

En especial cuidado los alumnos tuvieron la preocupación y necesidad de aclarar el cálculo del *límite* cuando *x* tiende a infinito ya que de la visualización, la gráfica de la función tiende a ser pequeña pero positiva, por lo que los alumnos tienen que manipular la información de la estructura algebraica para calcular correctamente y obtener el valor del *límite* ya que una primera aproximación y con la ayuda de la grafica se observó que el *límite* es una cantidad pequeña pero positiva.

Con la ayuda del profesor porque este cálculo requiere de mayor grado de dificultad se procedió a calcular el límite de la función.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right)^{x+1/-2}\right)^{-2x/1+x} = e^{\lim_{x\to\infty} -2x/x+1} = e^{-2}$$

Los resultados que se obtuvieron en los alumnos al calcular el

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$$

mostraron una mejoría dando como resultado un mejor aprendizaje en la asimilación y acomodación de estructuras algebraicas como parte del proceso.

Los alumnos del grupo *507* obtuvieron los siguientes resultados:

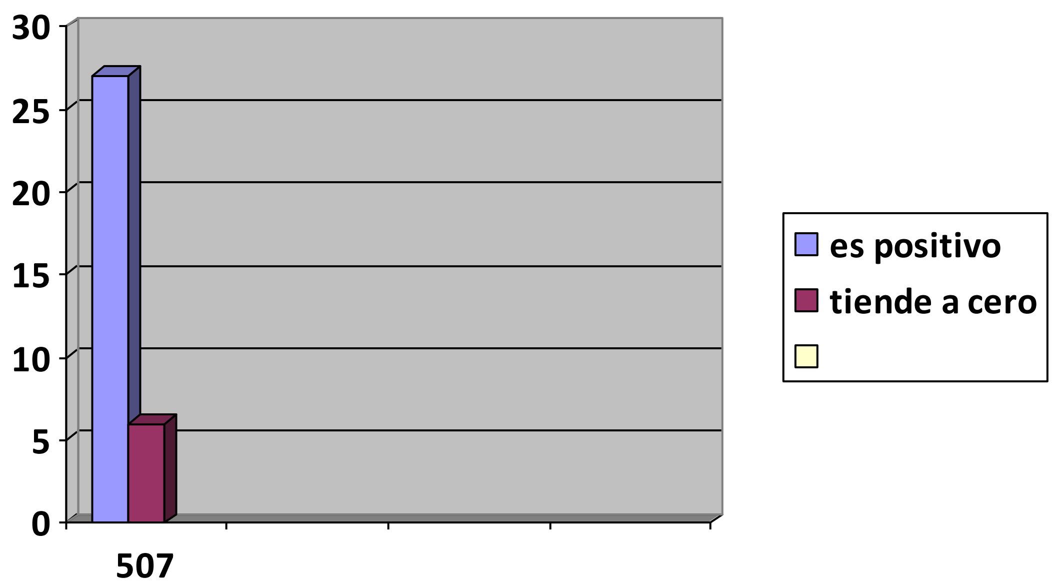


Fig.39

ACTIVIDAD No 3.

Sea la función:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$$

Se procedió a trabajar con el cuestionario bajo un esquema de ayuda visual como parte del proceso del cálculo aprendizaje del concepto del *límite,* para esta función.

ACTIVIDAD No *3:* Calcular $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$
1.-¿Cuál es el domino de la función?.
2.-¿Cuánto vale la función en *x=1?.*
3.-¿Cuál es la imagen?.
4.-¿Cuál es el grado de la función?.
5.-¿Cómo es la gráfica?.
6.- Calcular $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

Con el uso de las graficas se logró una potente información, lo primero que hicieron es desplegar gráficas de la función.

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$$

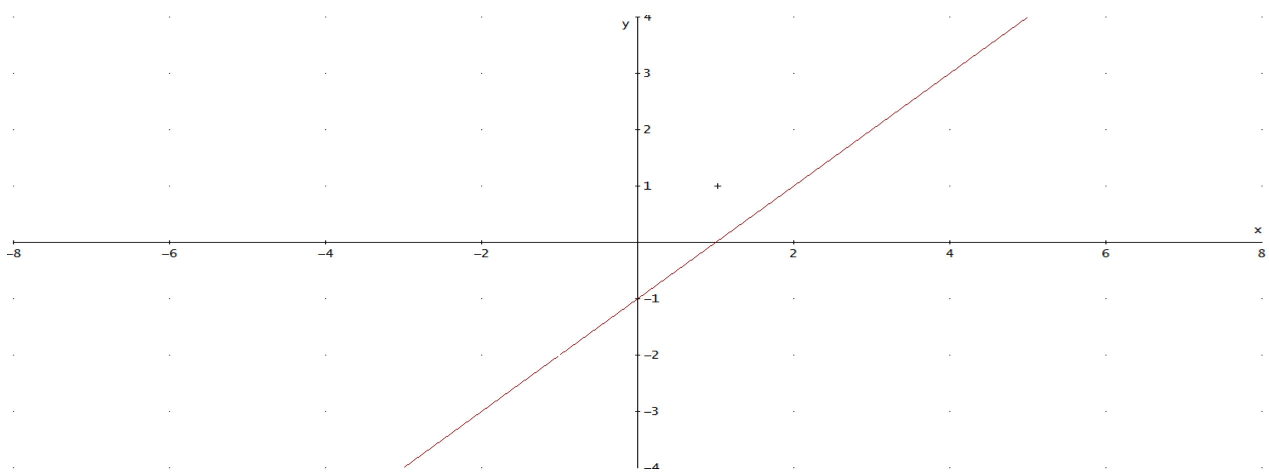


Fig. 40

Con acercamientos y alejamientos

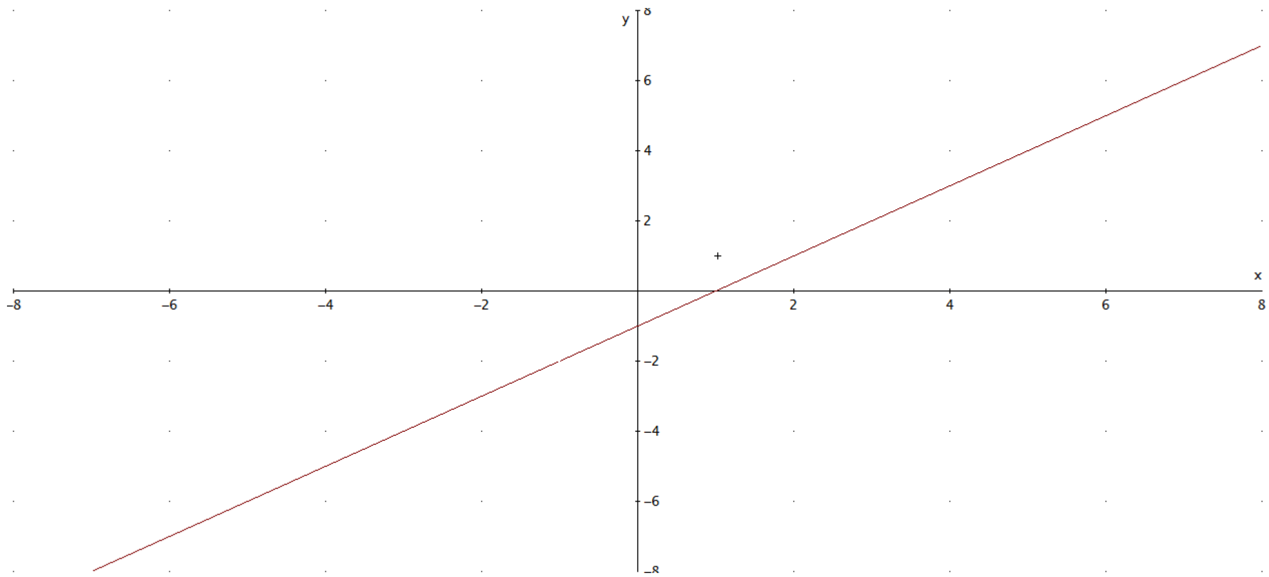


Fig.41

El recurso figural como proceso de integración permitió a los alumnos responder el cuestionario como un respaldo en el desarrollo de ideas matemáticas.

1.-¿Cuál es el domino de la función?.
R.- $x \neq 1$.

2.-¿Cuánto vale la función en $x=1$?.
R.- No está definida.

3.-¿Cuál es la imagen?.
R.- Todos los valores, excepto -2.

4.-¿Cuál es el grado de la función?.
R.- Es un patrón impar.

5.-¿Cómo es la gráfica?.
R.- Una recta con un punto de discontinuidad.

6.- Calcular

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$$

R.-

x	*y*
-2	*-3*
-1.5	*-2.5*
-1.4	*-2.4*
-1.1	*-2.1*
-1.01	*-2.01*
-1.001	*-2.001*

-1.001	*-2.001*
-0.999	*-1.999*
-0.99	*-1.99*
-0.9	*-1.9*
-0.5	*-1.5*

De acuerdo con la pregunta *6* y apoyándose en las ideas de la pregunta 1, sobre el dominio de la función, se logró relacionar la operatividad sobre una vecindad, se estudió que en este punto el dominio no existe, i.e., los valores que se aproximan al valor *-1* por la derecha, la imagen toma los valores en una función decreciente siguiente:

$$f(-0.9)= -1.9$$
$$f(-0.99)= -1.99$$
$$f(-0.999)= -1.999$$
$$\ldots$$
$$f(-0.99999999) = -1.99999999$$

Con esta idea, se pudo inferir que el *límite* existe pero el valor no forma parte de conjunto es decir, el valor al que se quiere llegar está en la frontera. Se infiere que no está definida en *-1*, pero al tomar una vecindad, están los valores acercándose a *-2.* Solo falta pegarle el *-2*

La importancia de la visualización tiene un potencial didáctico en la construcción del *límite*, ya que la gráfica permitió observar que la función es discontinua en la imagen del *-1*, con este ejercicio relevante se intrroduce el concepto de *límite* como el punto que esta en la frontera, ya que nunca lo alcanza, por esta razón en la didáctica, de la gráfica se cierra. Los alumnos desarrollan el pensamiento lateral al formar una idea en movimiento en su pensamiento, forman una imagen al cerrar intuitivamente una vecinadad tan cerca para puntos proximos a la discontinuidad; i.e., desarrollan una imagen kinoestésica y lograron cerrar el proceso al concluir que el *límite* es *-2* . Se visualizó que el *límite* tiene que ser *-2.* Como parte de la integración de contenidos.

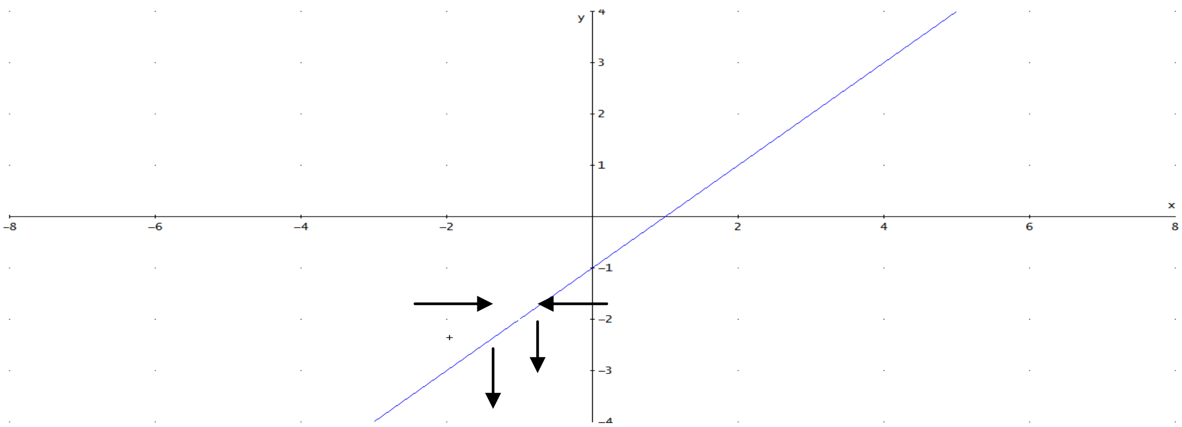


Fig. 42

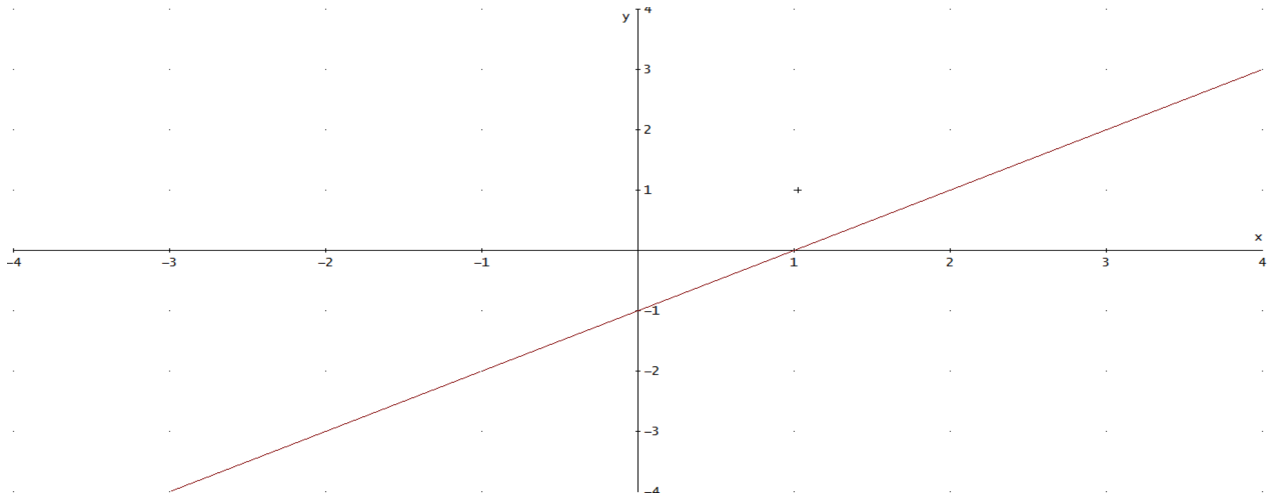


Fig. 43.

A través del uso de las unidades significativas de la gráfica los alumnos pudieron calcular el *límite.*

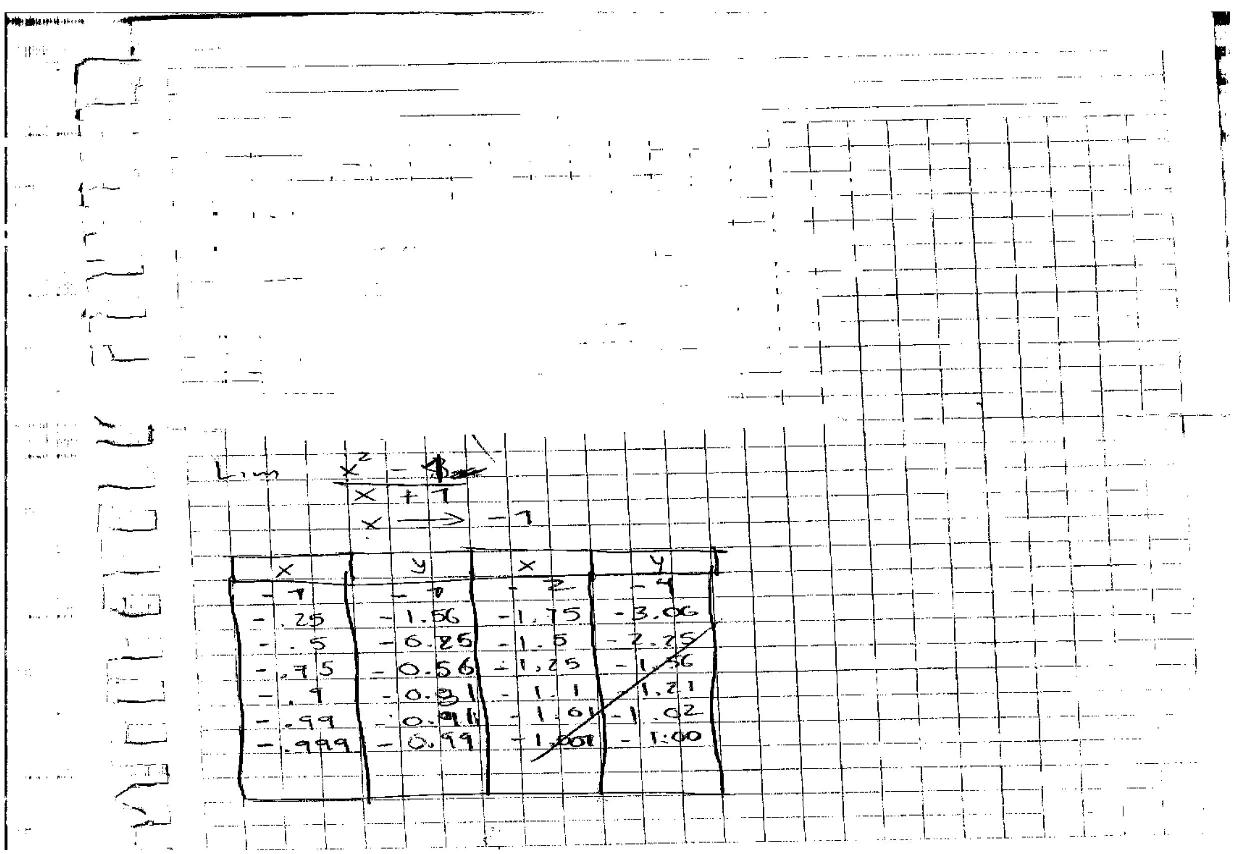


Fig. 44.

Los resultados que observamos en el cálculo de

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$$

los muestra la gráfica.

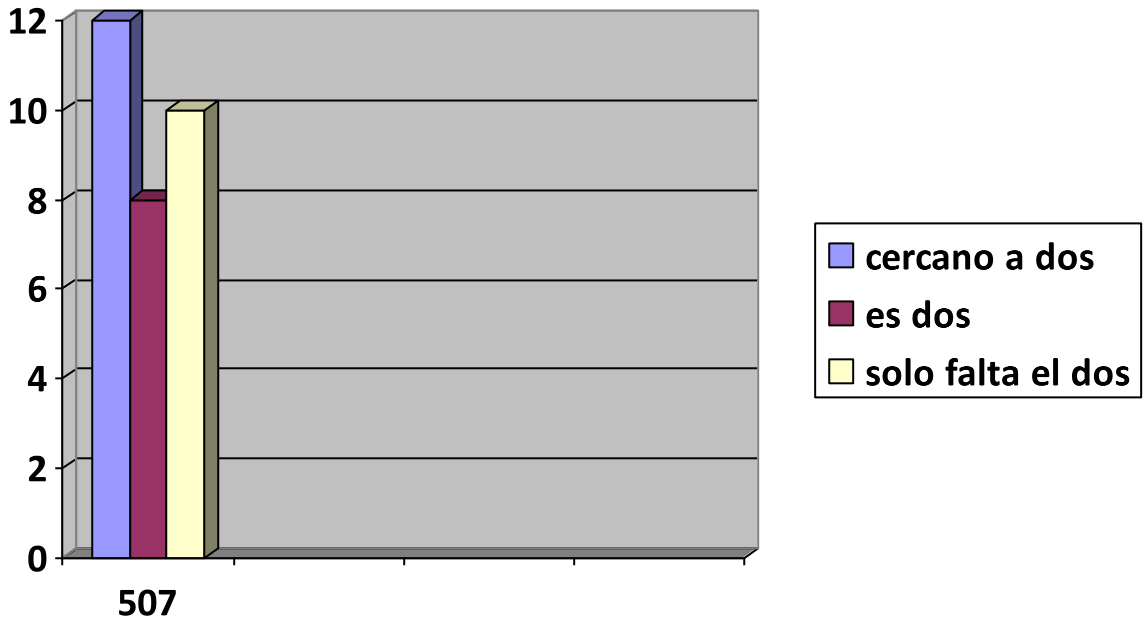


Fig. 45

Antes del *límite* hay un proceso, que el respaldo gráfico permitió el desarrollo de ideas, tiene un papel significante debido a que integra en el proceso, las unidades significativas, el grado, el dominio, los valores y el análisis del comportamiento tendencial de la imagen de valores permitió al alumno introducir el concepto de *límite.*

Según *Piaget* para darnos cuenta sobre el aprendizaje de los alumnos como entienden el concepto del *límite,* es necesario observar cómo operan en sus cálculos, lo que constituye el desarrollo de sus ideas y en la medida que calculen bien, estarán en una mejora de aprender el concepto del *límite.*

ACTIVIDAD No.4.

Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

En esta actividad se presentó a los alumnos resolver las siguientes actividades en el cuestionario como parte del proceso de construcción del *límite.*

ACTIVIDAD No.*4* Calcular. $$\lim_{x \to 1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$
1.-¿Cuál es el dominio?.
2.-¿Cuál es el grado de la función?.
3.-¿Cuáles son las asíntotas verticales?.
4.-¿Cuáles son las asíntotas horizontales?.
5.-¿Cuál es el $$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$, y $$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \ ?.$$
6.-¿Cuál es el $$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} ?.$$ ¿Por qué?.

Los alumnos desplegaron las gráficas con los alejamientos y acercamientos necesarios.

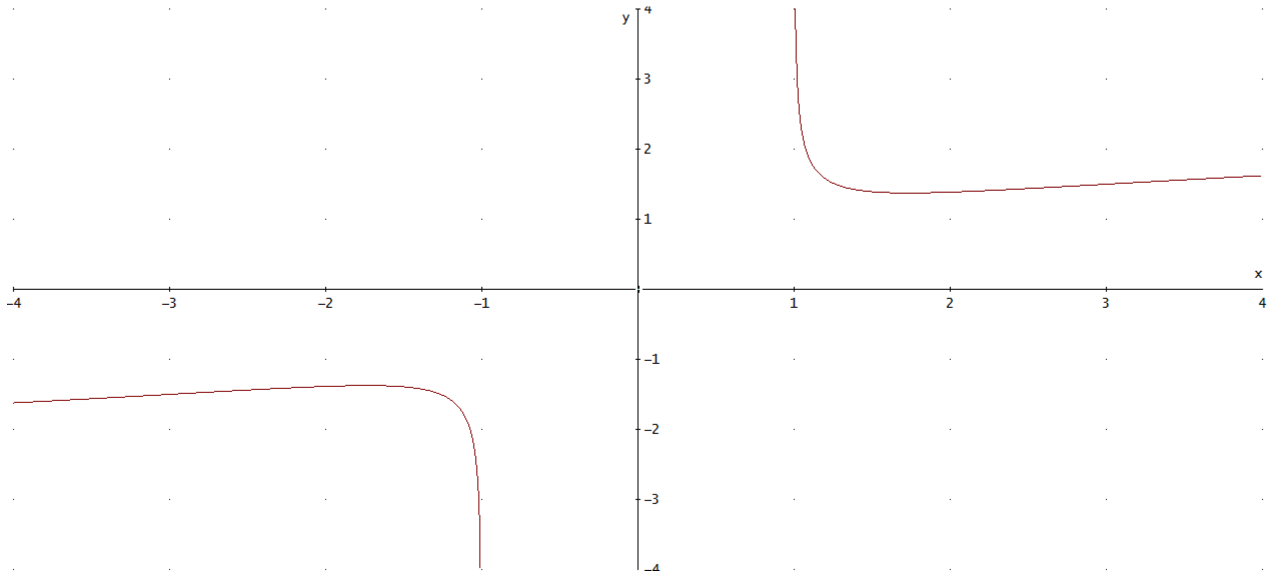


Fig.46

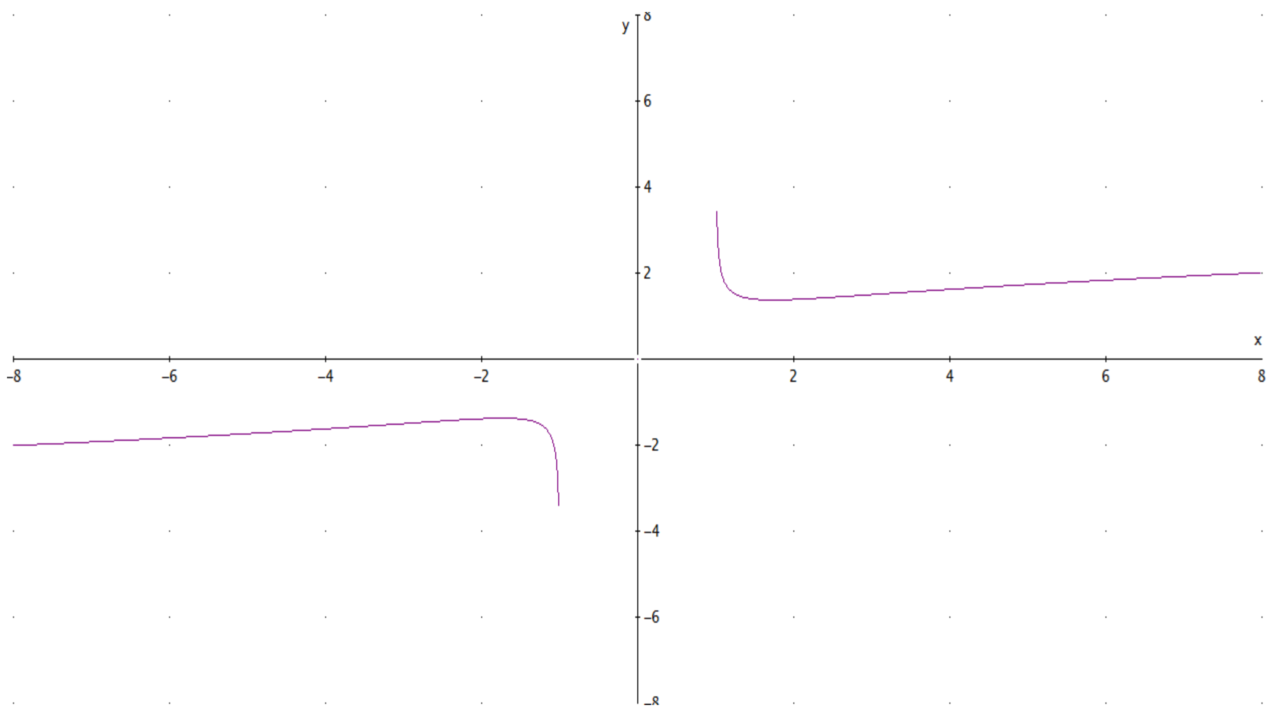


Fig.47

El cuestionario se resolvió con la ayuda visual y las respuestas encontradas a continuación se presentan.

ACTIVIDAD No.*4* Calcular $$\lim_{x\to 1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$
1.-¿Cuál es el dominio?. R.- Todos los valores, quitando $x^2-1=0$: *33.*
2.-¿Cuál es el grado de la función?. R.- Lineal*: 26.* R.- Impar: *7.*
3.-¿Cuáles son las asíntotas verticales?. R.- $x=-1$ y $x=1$: *33.*
4.-¿Cuáles son las asíntotas horizontales?. R.- Infinito y menos infinito: *33.*
5.-¿Cuál es el $$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} ?,$$ R.- Infinito: *33* y $$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$ R.-Menos infinito: *33.*
6.-¿Cuál es el $$\lim_{x\to 1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} ?.$$ ¿Por qué?. R.- No existe: *30.* Porque se obtienen dos valores diferentes. *1: 1.* *-1: 2.*

De las preguntas anteriores se pidió desplegar la función y se visualizaron los contenidos que son relevantes y sirvió para hacer la justificación de las unidades simbólicas significativas, i. e., se validó por medio de la asistencia de la gráfica lo siguiente: que el dominio es $x^2 - 1 > 0$, que al resolver la ecuación se tienen que quitar los puntos solución, lo anterior con la ayuda de la gráfica se agilizan los cálculos y se tiene un respaldo de seguridad y generó confianza en los cálculos al interactuar con gráfica - alumno y no como se trabaja, sólo símbolos y maestro.

El cálculo del *límite* se logró la inferencia del concepto importante cuando no existe en *x=1,* ya que en base a los *límites* laterales se logró visualizar que:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \infty \quad \text{, y}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = -\infty$$

De donde se infirió que al obtener dos valores diferentes no puede existir el *límite* en ese punto.

Luego de la estructura de la gráfica se visualizó que tiene un comportamiento tendencial de función impar, es decir empieza por abajo imagina que lo cruza y sale por arriba y establece una retroalimentación de la construcción de la gráfica de la función.

$$f(x) = \frac{x \quad \textit{grado impar}}{\sqrt[3]{x^2 - 1} \quad \textit{grado par}}$$

Se relacionó el grado con la operación de los exponentes y se estableció una función patrón o comportamiento tendencial.

Con la ayuda visual del dominio de la función se logró establecer la asíntota vertical y se conectó con la siguiente propiedad de números con el cálculo del *límite.*

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

No existe para el punto en uno porque el denominador se hace cero y la justificación es que para valores cerca del uno por la derecha el numerador es mayor que uno y se divide entre un número cada vez más pequeño tendiendo a cero; de aquí la importancia de pasar del registro gráfico con las unidades significativas en el cálculo del *límite* y del concepto de *límite.*

Una vez establecida esta idea, se procedió a partir de la visualización el comportamiento tendencial para la construcción de las asíntotas horizontales que permitieron calcular el *límite* en el infinito.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} =$$

Se infirió que el numerador tiende a infinito con mayor cantidad, mientras el denominador lo hace en forma menor y por lo tanto se puede inferir que el cociente se dispara a infinito.

Los resultados observados para el cálculo de este *límite* se muestran en la siguiente gráfica:

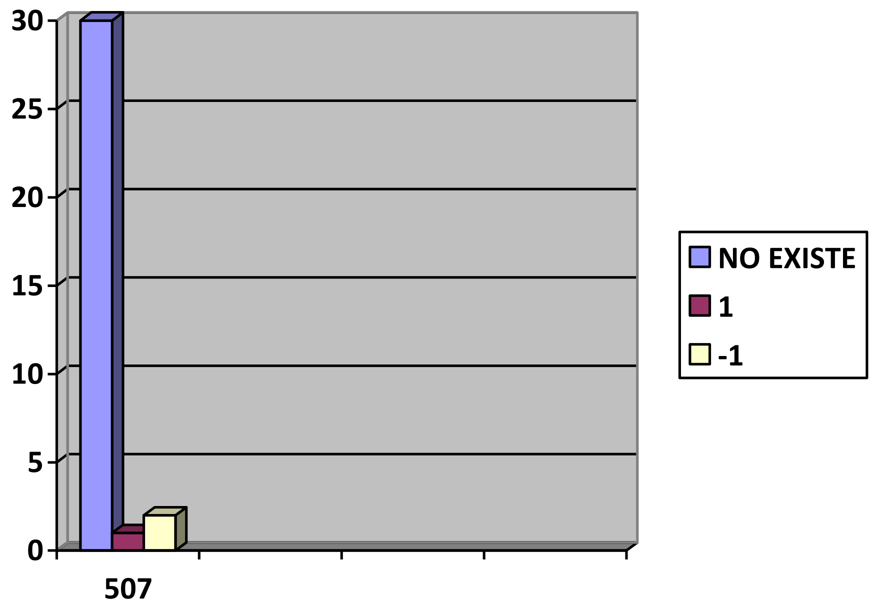


Fig.48

ACTIVIDAD No 5.

Las actividades consistieron en contestar mediante la asistencia de la visualización de la gráfica de la función, i. e., los alumnos interactúan en todo momento con la gráfica de la función.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{|\ x-2\ |}$$

Los alumnos obtuvieron la gráfica e hicieron los siguientes alejamientos y gráficas de colores.

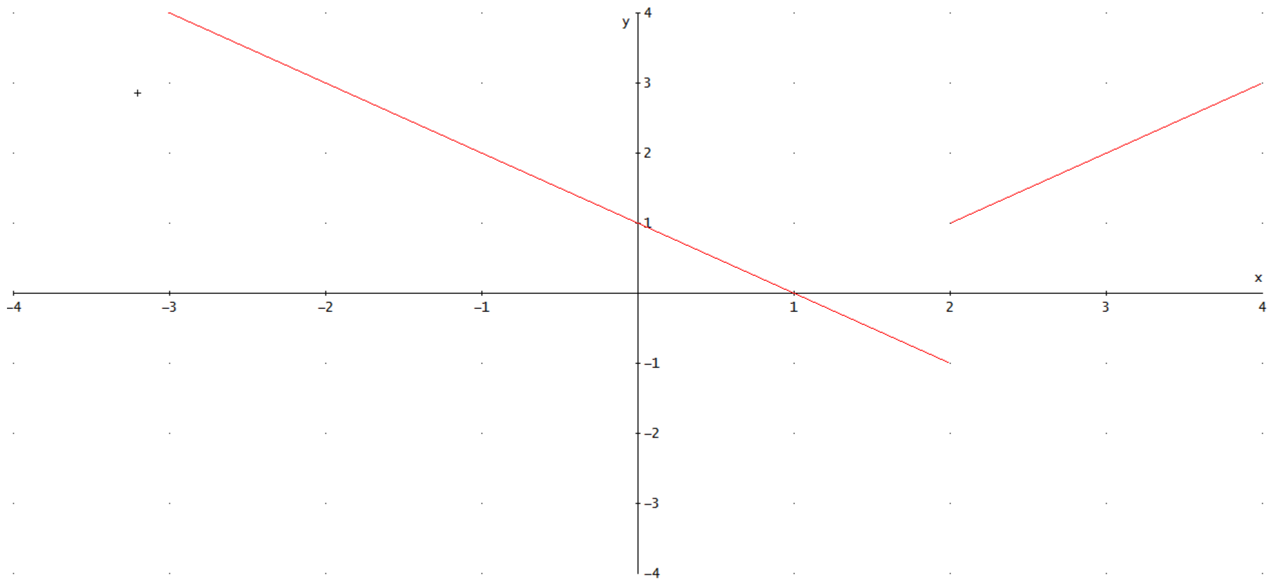


Fig. 49

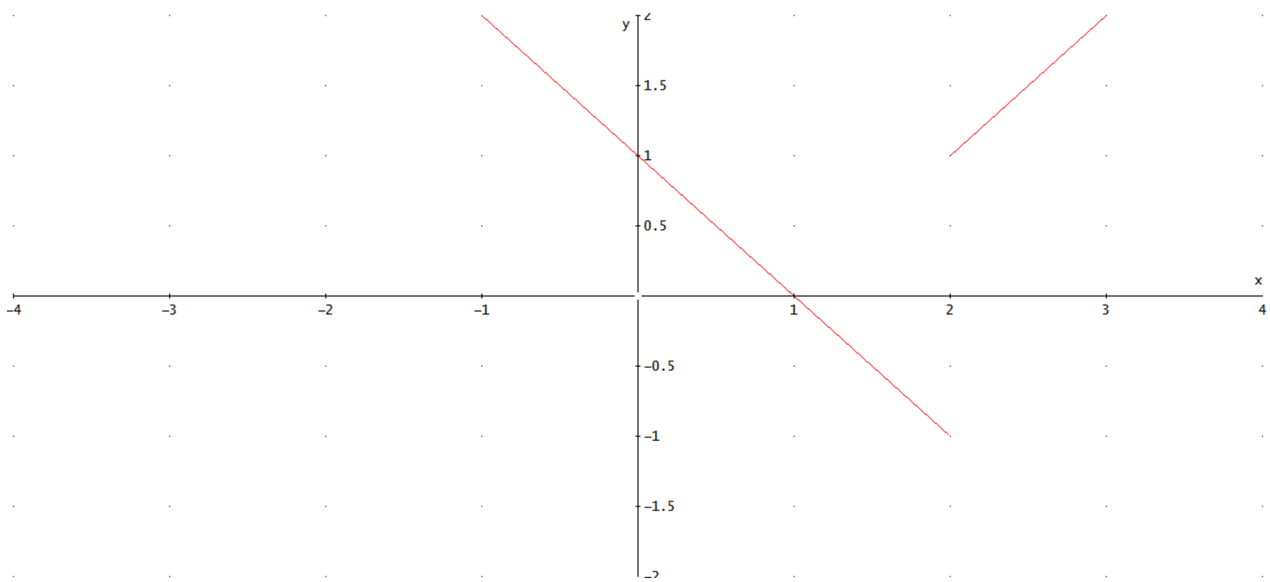


Fig. 50

Lo que fue relevante en este proceso, los alumnos identificaron las unidades y elementos significativos de la gráfica como parte del proceso de la construcción del concepto del *límite*. Procedieron a contestar las siguientes preguntas:

ACTIVIDAD No *5* Calcular $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{\lvert x-2 \rvert}$$
1.-¿Cuál es el dominio de la función?.

2.-¿Cuál es el grado de la función?.
3.-¿Cómo es el patrón de la gráfica de la función?.
4.-¿Cuál es la imagen de la función?.
5.-¿Es la función continua en $x=2$?.
6.-¿Qué importancia tiene el valor absoluto en el comportamiento de la función?.
7.-¿Por qué la imagen de la función es reflejada?.
8.-¿Por qué son importantes los *límites* laterales?.
9.-¿Por qué es importante la factorización en la gráfica de la función?.
10.-¿Cuál es el $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{\mid x-2 \mid}$?

Con la asistencia de la visualización de la gráfica de la función, los alumnos tuvieron un camino de ayuda hacia la construcción de objetos matemáticos, que por sí solos no lo construyen, o no lo hacen.

Siguiendo con el desarrollo de las actividades los alumnos desplegaron las gráficas de la función.

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{\mid x-2 \mid}$$

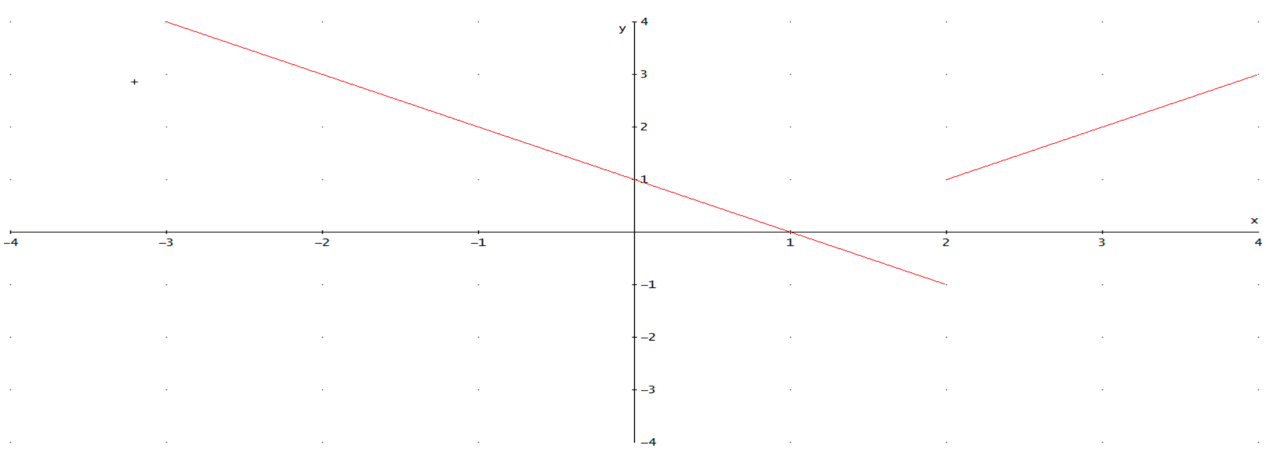


Fig. 51

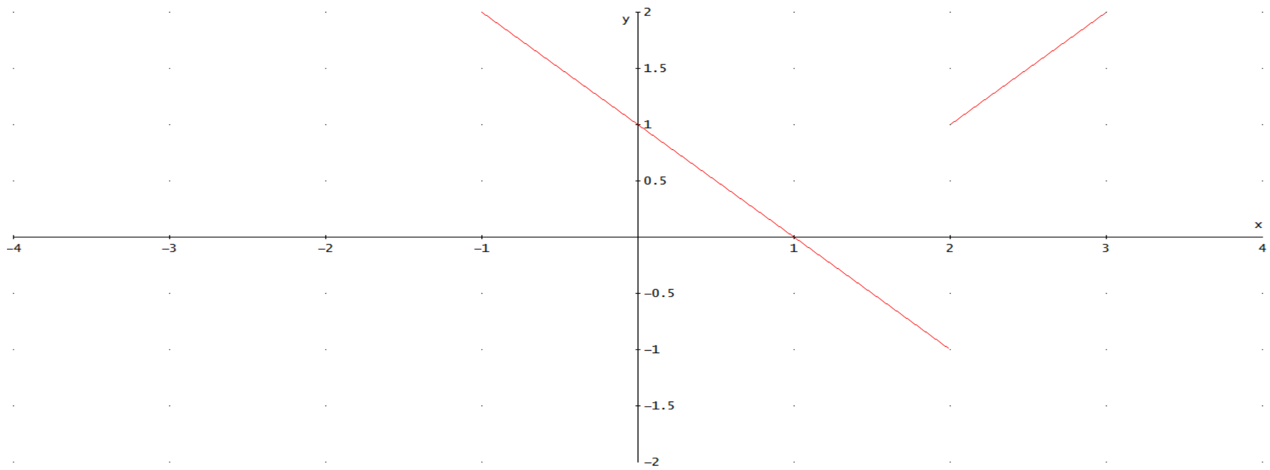


Fig.52

Se logró la articulación del registro gráfico al registro algebraico, como en ejercicios anteriores, existe una gran potencialidad en el aprovechamiento de la información que la gráfica despliega, en este proceso el alumno primero observa el dominio, la imagen de la función y tiene una primera interpretación del comportamiento de la función, con los respectivos acercamientos y alejamientos tiene un panorama de acción y operación mayor y mediante esquemas desarrolla ideas para establecer una estructura más clara y completa de la función.

Los aspectos más relevantes que desarrollaron los alumnos en sus acciones como parte de sus operaciones y proceso de aprendizaje mediante las actividades asistidas por la visualización se generó un aprovechamiento, análisis y transferencia de las unidades significativas de la gráfica. En un primer paso, que es de relevancia, los alumnos observaron que la gráfica de la función tiene un cambio de pendiente, en este hecho los alumnos lograron conectar de las unidades significativas de la gráfica, como el cambio de pendiente obedece necesariamente con la estructura algebraica del valor absoluto, es decir se logró establecer esa relación.

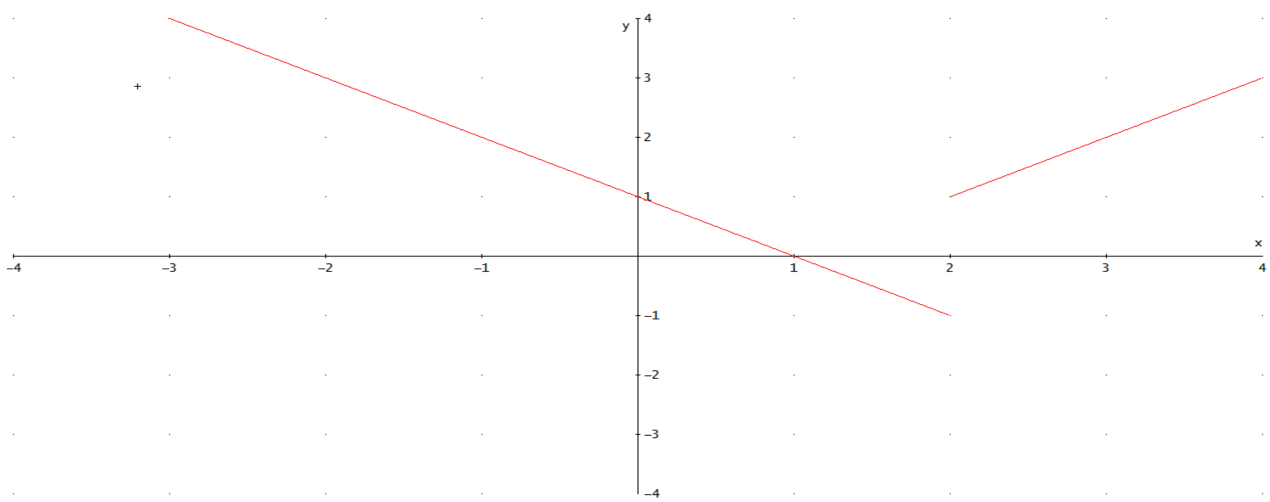


Fig. 53

En este mismo hecho se analizó que el rompimiento de la función tiene una relación sobre la restricción del dominio de la función, debido a que en el valor del denominador de la función, en *x=2* no está definido. El resolver el cuestionario significa una parte importante del proceso de estudio del concepto de *límite*, pues es una forma natural, en un proceso inicial de estudio del problema del concepto del *límite;* a manera de ejemplo de disciplina que sustentan el proceso de estudio, el maestro de las matemáticas Euler (1994) en su gran mayoría de estudios se observa que a través de una gran cantidad de ejercicios y de manipular los elementos que constituyen un problema llega a encontrar patrones de explicación; quedando ciego los últimos años de su vida.

Con la ayuda de la visualización, los alumnos aprendieron a resolver los contenidos del cuestionario. Lo que fue relevante en el cambio de pendiente en la gráfica, los alumnos les nace la preocupación de relacionar este cambio con la definición de la función de valor absoluto y en el análisis de la gráfica.

Al observar el cambio de pendiente, se sintieron obligados a hacer un análisis más detallado; en este desequilibrio surgió de manera natural en el proceso de aprendizaje el reacomodo y desarrollo de ideas y fue una necesidad de aclarar porque hasta antes del punto menor que *2* la gráfica es descendiente, i. e, la imagen de la función con pendiente descendiente tiene que ver con el registro gráfico descendiente. Piaget(1990). Duval (1990).

Con la inquietud los obligó a entender sobre el análisis de la definición y sobre la pregunta *7.* Es decir, se relacionó un análisis sobre la definición de la función del valor absoluto.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, \text{ si } x>0. \\ 0, \text{ si } x=0. \\ -x, \text{ si } x<0. \end{cases}$$

Con el análisis del comportamiento de la segunda parte de la gráfica, la pendiente ascendente se relacionó con la gráfica.

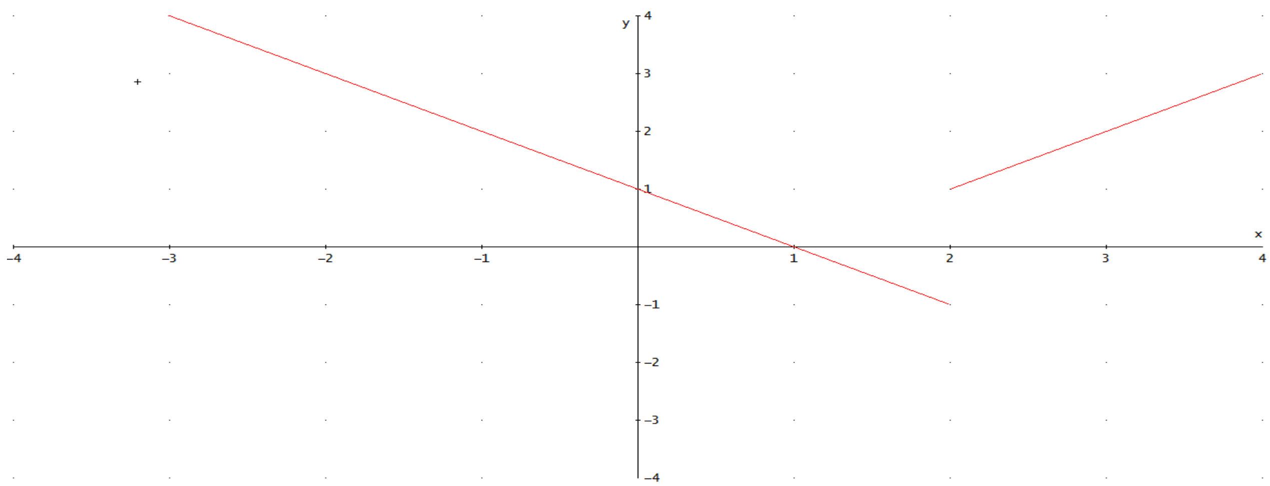


Fig.54

El hecho anterior sirvió de enlace para responder de manera consciente el cuestionario. Debido al análisis y estudio de la grafica permitió a los alumnos, como parte importante del estudio, tener una vía de solución segura en el proceso de construcción de conceptos a base de una ayuda de exploración.

De la visualización de la gráfica las respuestas más comunes que se encontraron el grupo *507* son las siguientes:

ACTIVIDAD No *5* Calcular $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{\lvert x-2 \rvert}$$
1.-¿Cuál es el dominio de la función?. R.- De menos infinito a dos y de dos a infinito. Todos menos el dos: *33.*
2.-¿Cuál es el grado de la función?. R.- No es claro: *30.* *1: 3.*
3.-¿Cómo es el patrón de la gráfica de la función?. R.- Son rectas: *20.* Es lineal: *13.*
4.-¿Cuál es la imagen de la función?. R.- Una recta positiva y otra negativa que se cortan: *33.*
5.-¿Es la función continua en $x=2$?. R.- No es continua: *33.*
6.-¿Qué importancia tiene el valor absoluto en el comportamiento de la función?. R.-“ Lo rompe y lo refleja”: *33.*
7.-¿Por qué la imagen función es reflejada?. R.- “Por el valor absoluto”.
8.-¿Por qué son importantes los *límites* laterales?. R.- Por los rompimientos: *21.* Porque no es continua: *11.*
9.-¿Por qué es importante la factorización en la gráfica de la función?. R.- Para poder cancelar: *11.* Para formar un cociente igual: 21.
10.-¿Cuál es el $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{\lvert x-2 \rvert}$? R.- No existe: *30.* *1* y *-1: 2.* *1: 1.*

En la pregunta *8,9* y *10* se registraron las siguientes observaciones, el hecho de tener una gráfica y preguntas que articulan una estructura matemática; en las actividades por medio de la exploración de contenidos los alumnos enfrentaron un proceso cognoscitivo al tener una necesidad de relacionar el comportamiento del cambio de pendiente de la gráfica y su justificación con la estructura algebraica, este hecho es importante como un proceso de asimilación, acomodación y generación de un esquema de desarrollo de ideas matemáticas a través de aclarar mediante una motivación, necesidad y la preocupación, en un proceso de transferencia de las unidades significativas de la gráfica, como proceso de construcción del concepto de *límite* y como consecuencia hacia el difícil entendimiento de los objetos matemáticos, ya que en el caso del *límite* no es inmediato.

La justificación la realizaron de la siguiente manera:

La parte de la gráfica con pendiente descendiente.

Del análisis del denominador y teniendo presente la definición del valor absoluto, con la condición, sí

$$x-2<0$$
$$x<2.$$

Esta propiedad de números debe llevar a la factorización siguiente.

$$\frac{x^2-3x+2}{-(x-2)} = \frac{(x-2)(x-1)}{-(x-2)} = -(x-1) = -x+1.$$

Para la parte de la gráfica con pendiente descendiente.

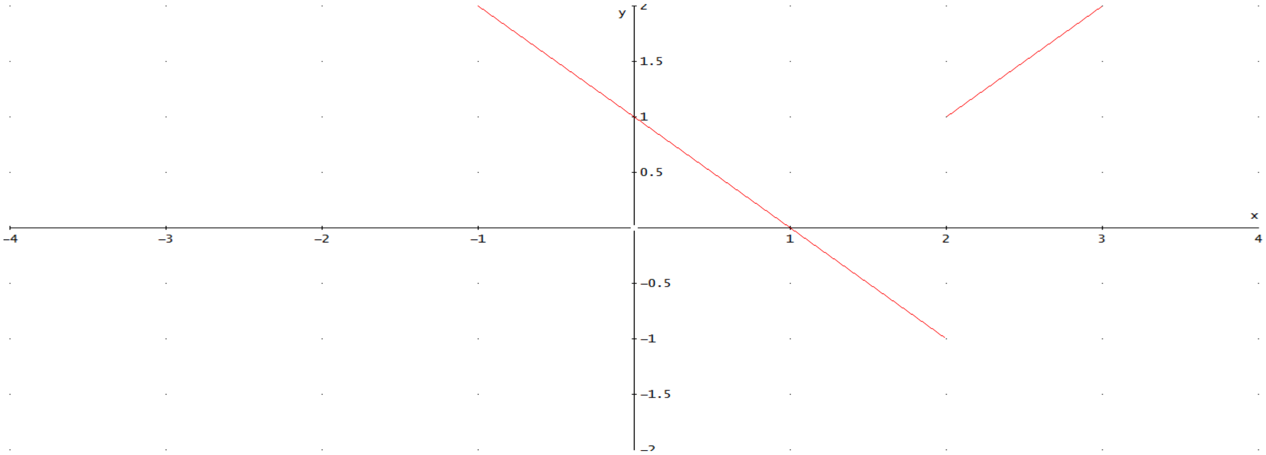


Fig. 55

Se tiene lo siguiente:

sí $x-2>0$
$x>2$

Con esta condición debido a la definición de valor absoluto se hace la siguiente factorización de la estructura algebraica de la función.

$$\frac{x^2-3x+2}{(x-2)} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)} = (x-1) = x-1.$$

Al conjuntar las dos situaciones anteriores se visualiza que la función

$$f(x)= \frac{x^2-3x+2}{|\ x-2\ |}$$

tiene cambio de pendiente.

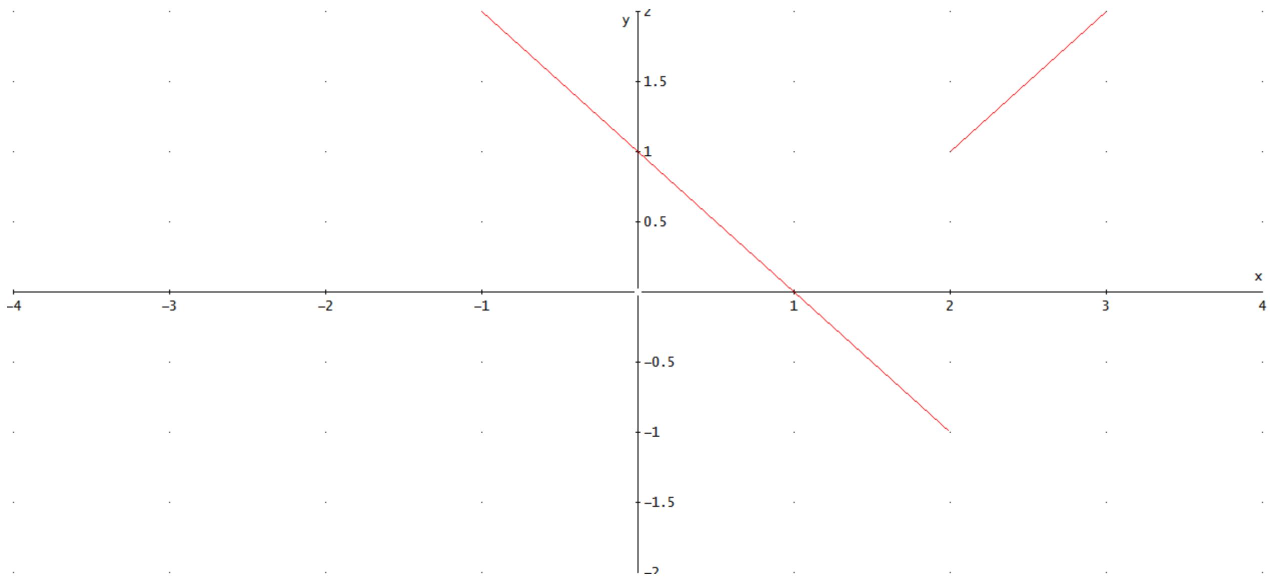


Fig. 56

De manera natural, al conjuntar los dos resultados anteriores se obtienen los dos *límites* laterales. El análisis por la izquierda fue:

$$i).- \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-3x+2}{|\ x-2\ |} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x-1)}{-(x-2)} = \lim_{x\to 2^-} -(x-1) = -2+1 = -1$$

Los alumnos concluyeron que en este caso el *límite* lateral por la izquierda se alcanza en menos uno aunque no pertenece a la imagen de la función porque en un principio la función no se encuentra definida en ese punto, este punto está en la frontera.

El análisis por la derecha fue:

ii).- $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-3x+2}{|x-2|} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x-1)}{-(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} x-1 = 2-1 = 1$

Este *límite* se alcanza en *1*, ahora se tiene un valor positivo, pero como está en la frontera del conjunto de puntos donde este valor no pertenece a la función inicial estudiada. Con estas ideas, los alumnos del grupo *507* presentaron los siguientes resultados.

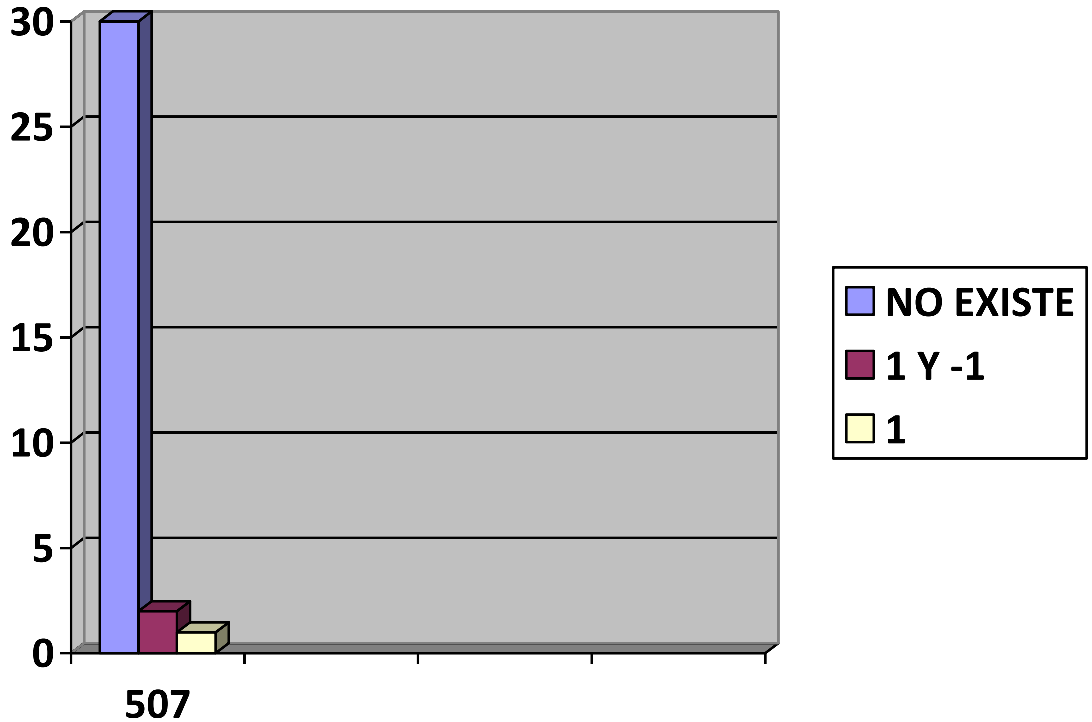


Fig. 57

Como parte de la intervención del profesor como parte del proceso de la construcción de significados el profesor interviene y ayuda al alumno a concluir que debido a que existen dos *límites* laterales distintos, según la definición sobre la existencia del l*ímite* este debe ser único y por lo tanto se concluye que el *límite* no existe.

ACTIVIDAD No 6.

Sea la función $f(x)=(-1)^X$

Calcular el $\lim_{x \to \infty} (-1)^X$

El cuestionario que se trabajó para estudiar los contenidos sobre este *límite,* mediados por la visualización es el siguiente:

ACTIVIDAD No *6* Calcular $$\lim_{x\to\infty} (-1)^x$$
1.-¿Cuál es el valor para un número par y este sea *20*?.
2.-¿Cuándo x es muy grande que sea *501*, es impar?.
3.-¿Cuándo x es muy grande?.
4.-¿Tiene sentido hacer la sustitución en infinito?. ¿Qué opinas?.
5.-¿Se puede calcular el *límite* en infinito?.
6.- ¿En este caso, el *límite* existe?. ¿Por qué?.
7.-¿Es continua la función?.

Se procedió a obtener la gráfica de la función

$$f(x)= (-1)^x$$

con un acercamiento y un alejamiento.

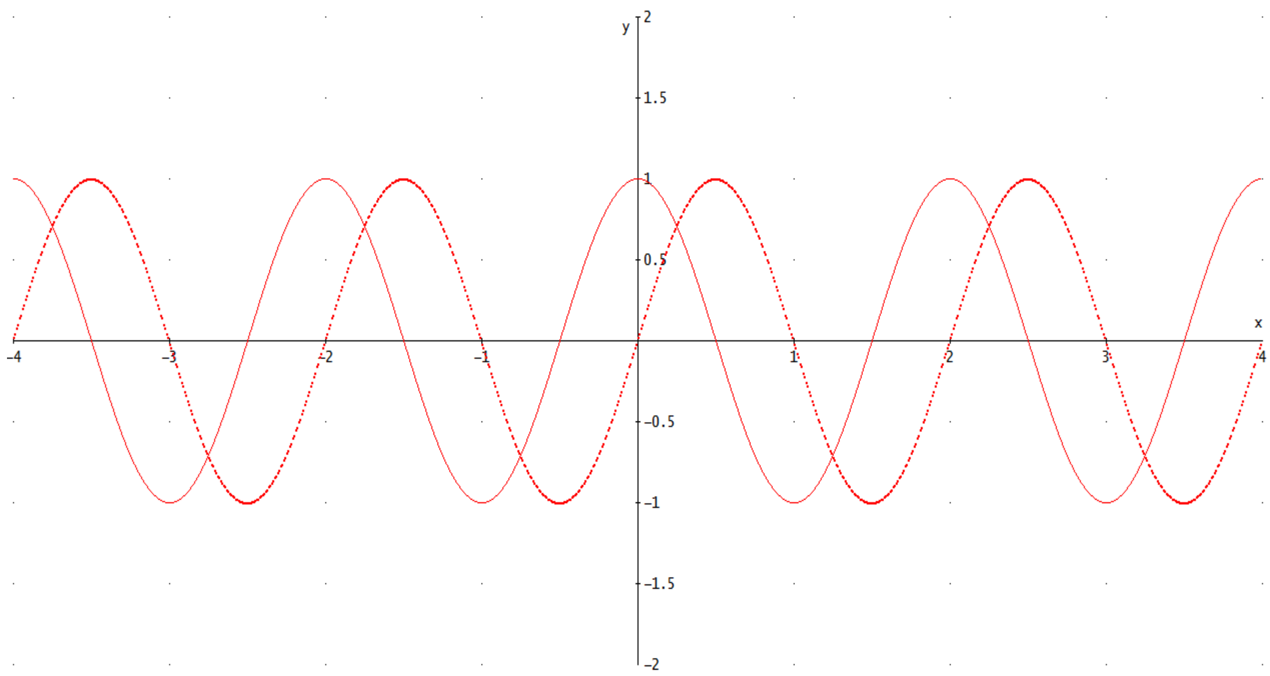


Fig.58

$f(x) = (-1)^x$

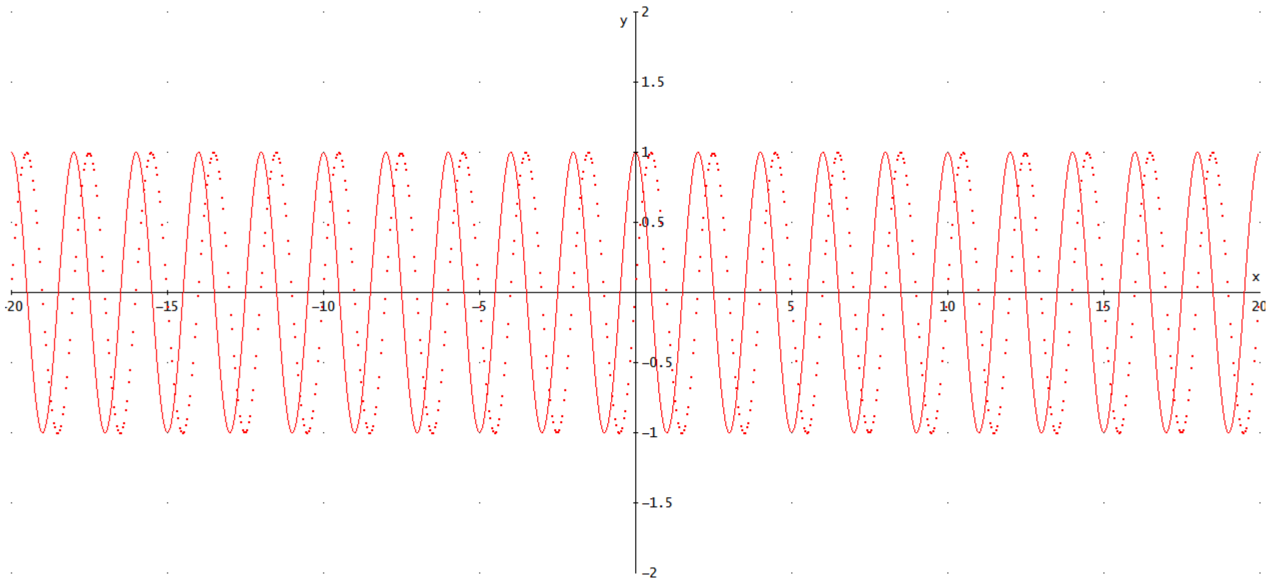


Fig.59

Se observó que la función toma valores positivos y negativos, para las evaluaciones pares se obtienen siempre el valor positivo uno que lo relacionan con la potencia par y para la potencia impar el valor es negativo.

Se encontró que las sustituciones de conectar las imágenes de la gráfica, con la visualización, se logró descubrir el comportamiento tendencial y con el tratamiento de la generación de ideas matemáticas, esta ayuda visual logró construir la idea hacia el paso del concepto del *límite*, pues al observar la oscilación en la gráfica, están en posibilidades de argumentar los resultados observados.

Se logró darle significación a los valores de la tabla mediante las siguientes operaciones de valores. Se encontró que las preguntas sobre la operatividad numérica las relacionaron con un descubrimiento del comportamiento tendencial de lo que pueden observar de la gráfica.

Al resolver el cuestionario de preguntas los alumnos relacionaron los valores de la imagen aplicando la definición de potencia par e impar para el *-1,* obteniendo las siguientes interpretaciones y respuestas:

ACTIVIDAD No 6 *Calcular* $\lim_{x \to \infty} (-1)^x$
1.-¿Cuál es el valor para un número par y este sea *20?.* R.- *1: 33.*
2.-¿Cuándo x es muy grande que sea *501,* es impar?.

R.- *-1: 33.*
3.-¿Cuándo x es muy grande?. R.- *1: 33.*
4.-¿Tiene sentido hacer la sustitución en infinito?, ¿Qué opinas?. R.- Estamos en el caso anterior.
5.-¿Se puede calcular el *límite* en infinito?. R.- Se obtienen valores *1* y *-1,* porque son pares e impares: *33.*
6.- ¿En este caso, el *límite* existe?, ¿Por qué?. R.- No existe, porque hay dos valores diferentes: *33.*
7.-¿Es continua la función?. R.- La función no es continua: *30.* Solo es de puntos: *33.*

Con la visualización se adquieren elementos con significación relevante, porque a simple vista de la estructura algebraica no se visualizan en el pensamiento, pero al obtener la gráfica de la función, la gran cantidad de contenidos que muestra una gráfica son un potencial en el proceso de aprendizaje de los alumnos. En estos momentos los alumnos se motivan y desarrollan habilidades en el mismo trabajo de las actividades.

Los alumnos sobre la significación de estos valores infirieron los siguientes resultados sobre la existencia del *límite*.

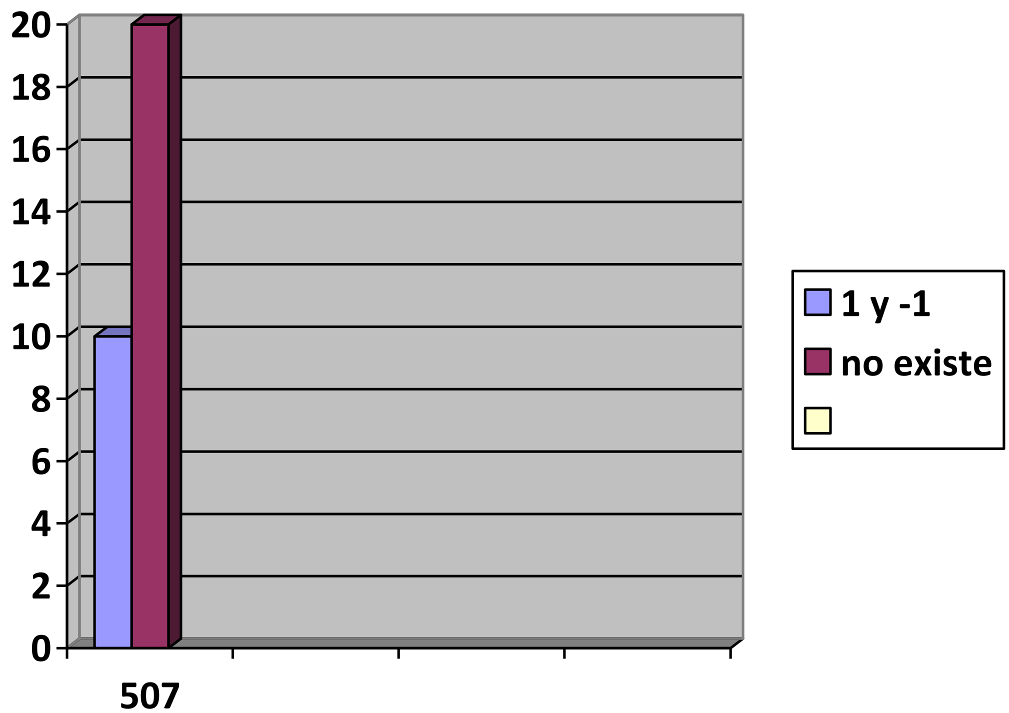


Fig. 60

El desarrollo de actividades llevó a los alumnos al aprendizaje del *límite* de una función. Es decir, el desarrollo de actividades asistidas por la visualización constituye un proceso de aprendizaje del *límite.* En esta actividad se solicitó a los alumnos del grupo *507* que calcularán el *límite*, considerando que en la última semana del estudio de *límite,* con las actividades previas que se habían desarrollado, se observó que se había ya tenido una evolución en la generación de estructuras de ideas de *límites.* Con estos antecedentes los alumnos estaban en posibilidades de tener una mejora en el cálculo de *límites* asistidos mediante la visualización de gráficas.

Finalmente, en parte como un proceso validación del proyecto para observar que la generación de ideas matemáticas en los alumnos, primero tienen variaciones de asimilación, representación, interpretación y finalmente diferentes acomodaciones, porque al ser alumnos con características individuales, i.e, se observó que no todos procesan la información de la misma manera, pero lo que resultó importante es que en este proceso de interacción los alumnos al intervenir en equipo, la misma comunicación y el lenguaje que utilizan para comunicar sus ideas los llevó a una incorporación a una estructura matemática que es lo que se esperaba como proceso de su aprendizaje de *límite,* ya que la interacción, la comunicación forman parte de sus operaciones y acciones y es parte del proceso.

ACTIVIDAD No 7

Siguiendo con la operatividad del *límite*, el cuestionario estudia los contenidos que están en juego sobre el tratamiento de la estructura matemática cuando se presenta la oscilación de valores en una vecindad.

Sea la función

$$f(x)= sen(1/x)$$

Calcular

$$\lim_{x \to 0} sen(1/x)=$$

Se trabajó el cuestionario empleando la visualización:

ACTIVIDAD No *7* Calcular $\lim_{x \to 0} sen(1/x)=$
1.-El valor de la imagen en cero es:
2.-La función es continua o discontinua. ¿Por qué?.
3.-El argumento en cero. ¿Qué valores toma?.

4.-Para *x=1*.¿Que valor toma la imagen?.
5.-Para los valore positivos. ¿Se crea una función creciente ó decreciente?.
6.-¿Cuál es el valor de la imagen para valores de x suficiente pequeños?.
7.-De la pregunta anterior. ¿Toma el valor cero?. ¿Toma el valor *1* ó *-1*?. ¿Siempre?. ¿Por qué?.
8¿Cuál es el *límite* cuando x tiende a cero?. ¿El *límite* existe cuando *x* tiende a cero?.

Los alumnos procedieron bajo el esquema siguiente de ideas:

a)Los alumnos obtienen la gráfica.

El primer paso de la actividad, al estar asistidos por una computadora, se obtuvo la gráfica de la función

f(x)=sen(1/x)

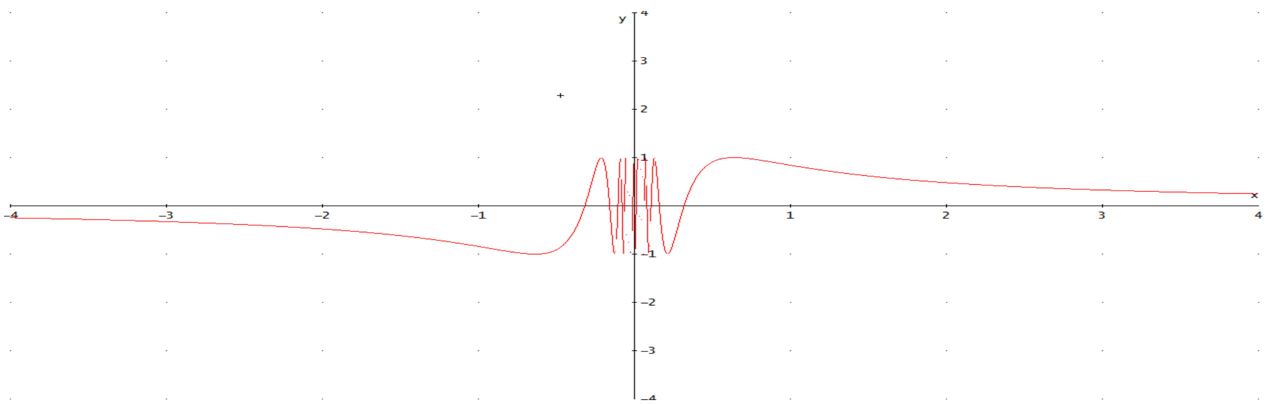


Fig. 61

Los alumnos trabajaron diferentes acercamientos y alejamientos locales para tener un análisis más elaborado y detallado de la función.

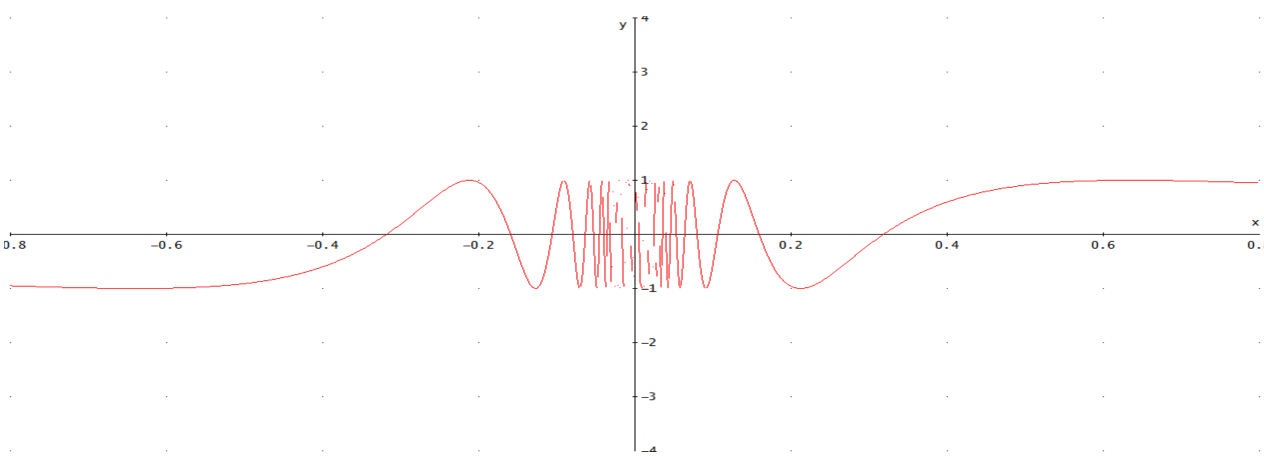


Fig. 62

Se observó, que pueden obtener las graficas con mayor velocidad, la construcción en colores es total y esto genera un respaldo de seguridad para los alumnos al construir las gráficas, descubrieron los elementos constitutivos y relevantes del comportamiento de la función, la numeración, la imagen, los ejes de coordenadas.

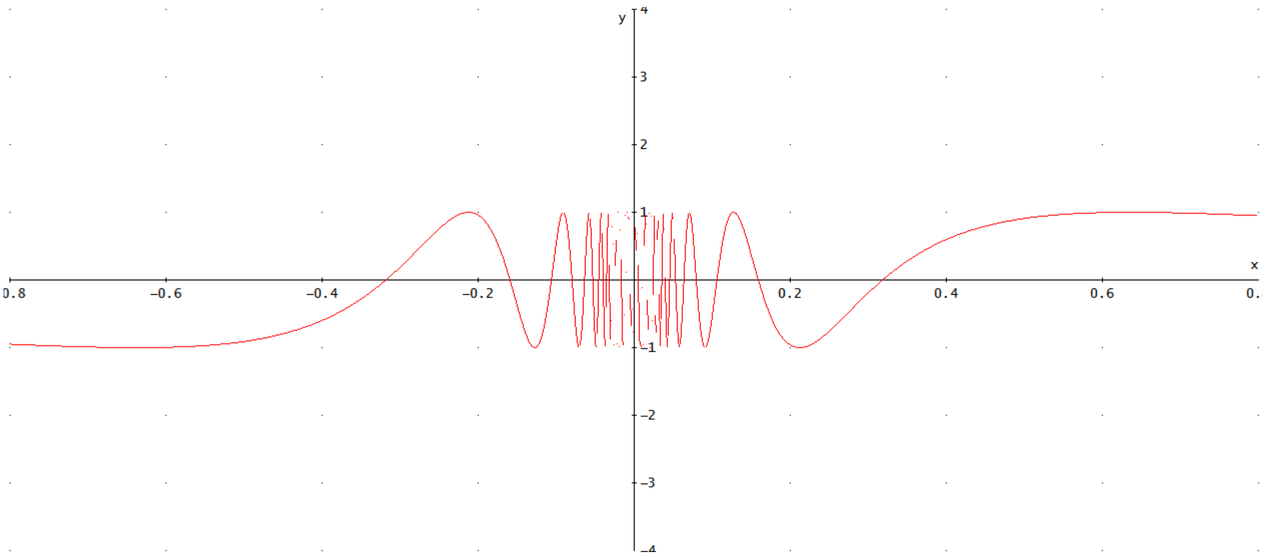


Fig. 63

Lo primero que observaron para su sorpresa ,es la oscilación de la función cerca del cero, este hecho refuerza de la potencialidad de emplear la visualización en el cálculo de *límites.*

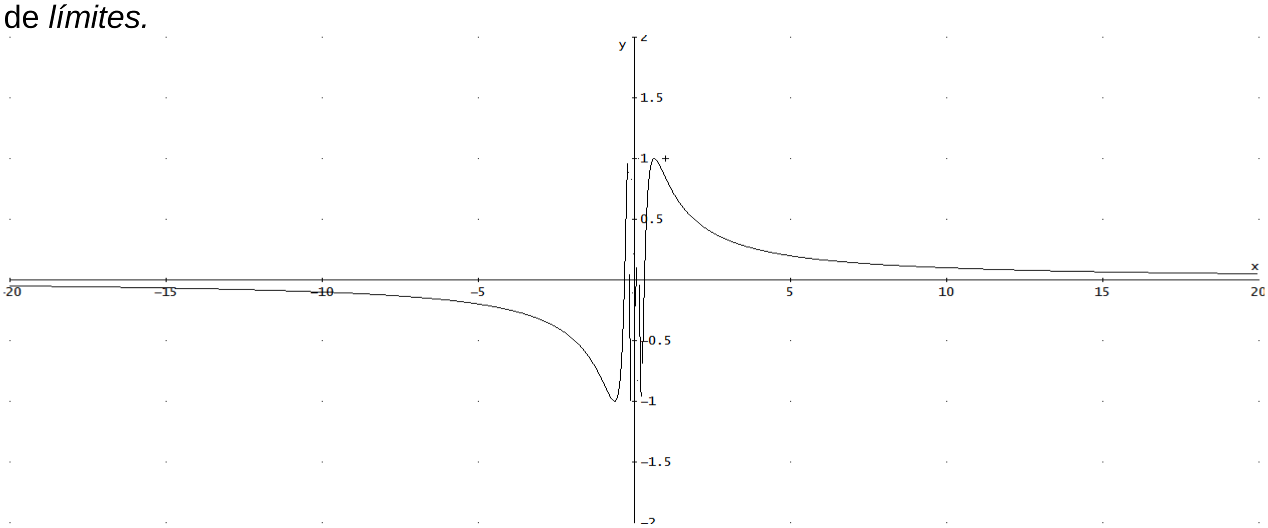


Fig. 64

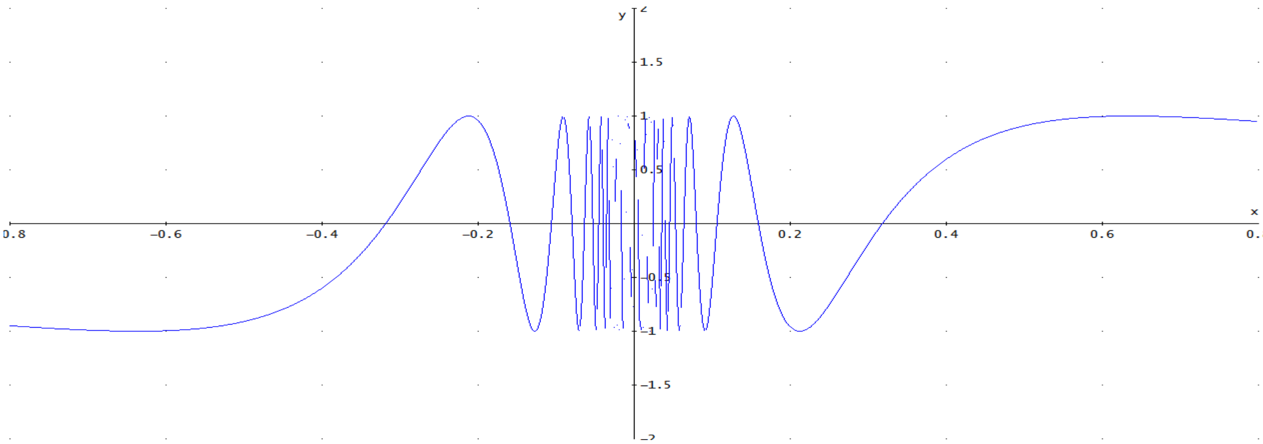


Fig. 65

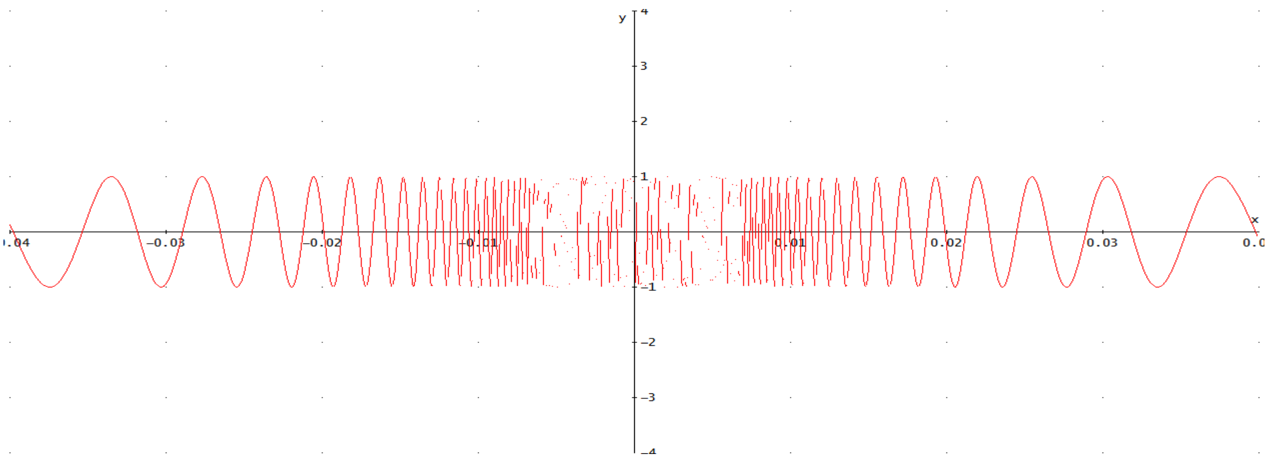


Fig.66

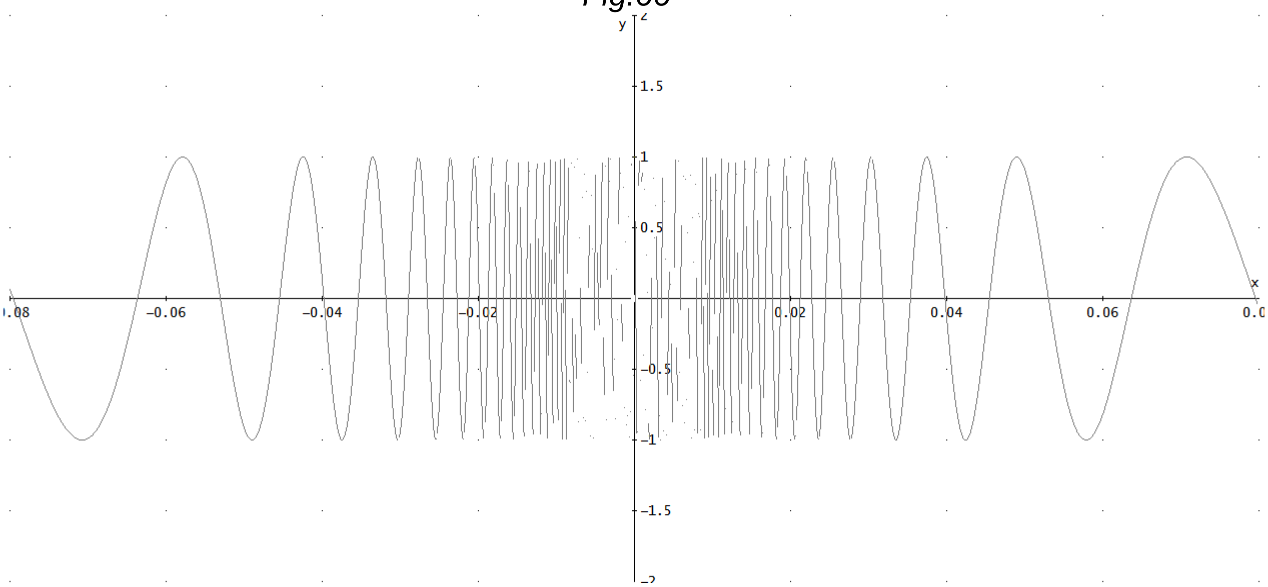


Fig. 67

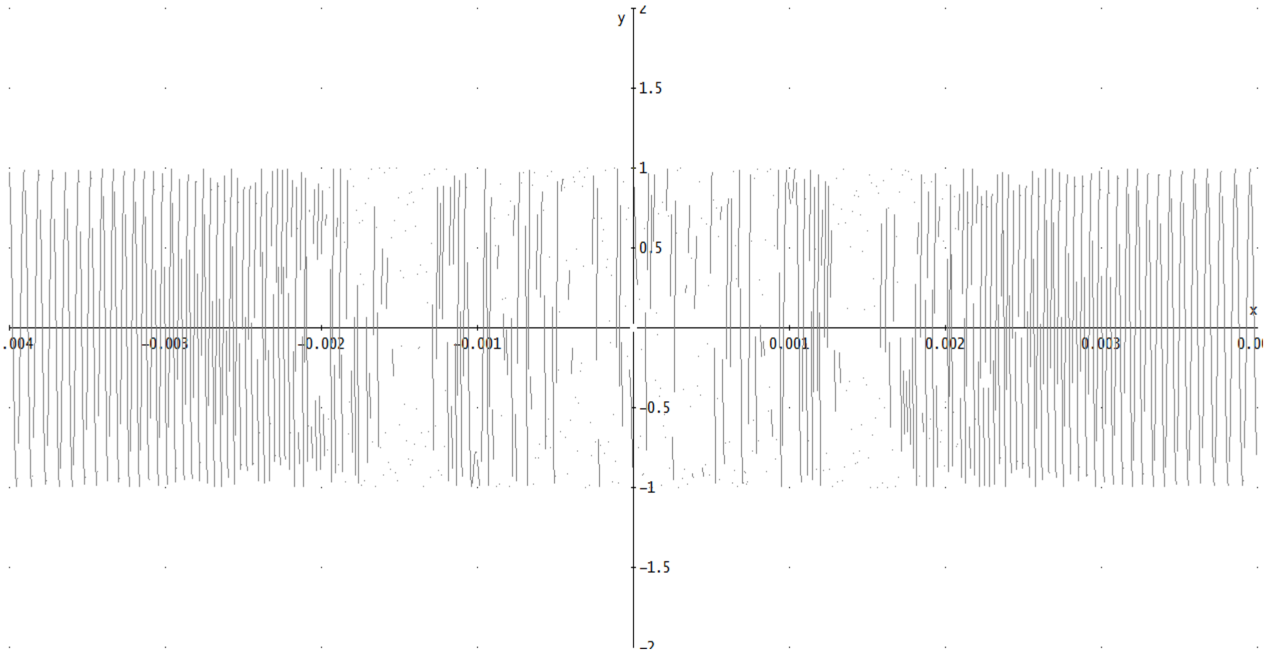


Fig.68

De la gráfica anterior, en el analisis que se tuvo, se logró transferir las unidades significativas del registro gráfico al registro analítico simbólico, los alumnos llegaron a concluir que debido al fenomeno presentado de que la función toma una cantidad infinita de valores en una vecindad cerca del cero y más aún en el cero se forman rayas asintoticas, permitió inferir que el *límite* de una función es ùnica y concluyen que el *límite* no existe en cero.

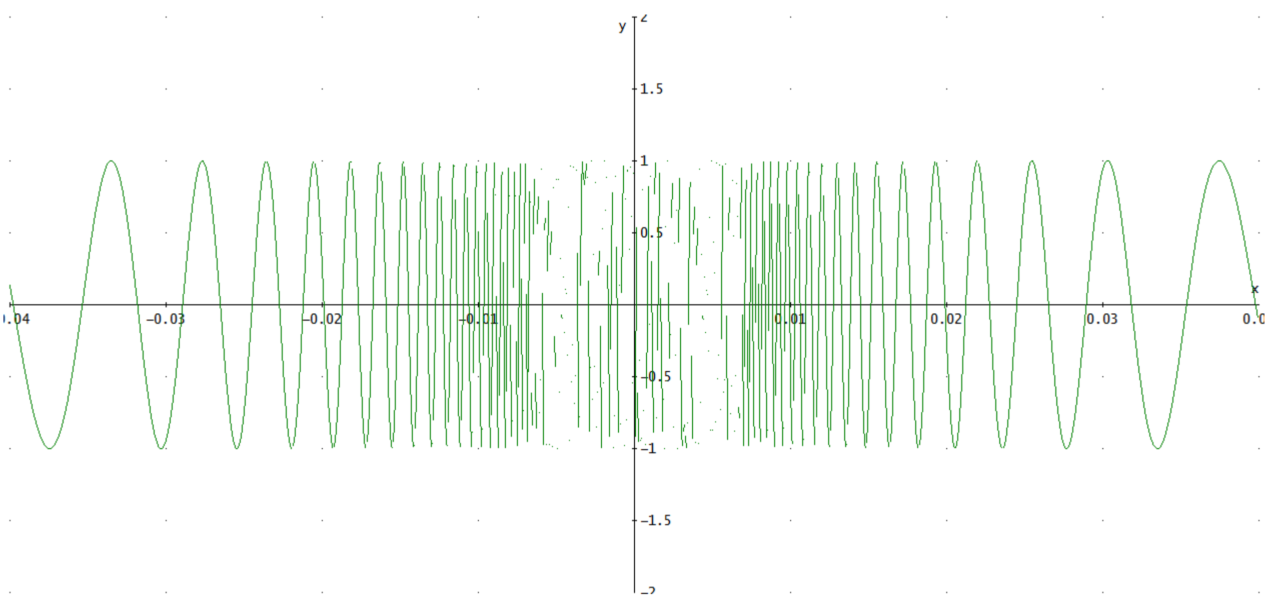


Fig. 69.

Los resultados como parte del proceso del aprendizaje de los alumnos constituyen sus operaciones y acciones que se lograron observados en el cuestionario como parte de su trabajo de aprendizaje del concepto del *límite* y son los siguientes:

ACTIVIDAD No *7.* Calcular $$\lim_{x \to 0} \; sen(1/x)$$
1.-El valor de la imagen en cero es: R.- Oscilante: *12* *1* y *-1 : 21*
2.-La función es continua o discontinua. ¿Por qué?. R.- Continua, porque no se rompe: *33*
3.-El argumento en cero. ¿Qué valores toma? R.- *1* y *-1: 33*
4.-Para *x=1*. ¿Qué valor toma la imagen? R.- Un valor positivo: *25.* Un valor positivo menor que *1: 8*
5.-Para los valore positivos. ¿Se crea una función creciente ó decreciente? R.- Creciente y decreciente: *33.*
6.-¿Cuál es el valor de la imagen para valores de x suficiente pequeños? R.- Siempre toma los valores entre *1* y *-1: 33.*
7.-De la pregunta anterior. ¿Toma el valor cero?. ¿Toma el valor *1* ó *-1?*. ¿Siempre?. ¿Por qué?. R.- Siempre toma los valores entre *1* y *-1: 33.* Por que oscila siempre.
8¿Cuál es el *límite* cuando *x* tiende a cero?. ¿El *límite* existe cuando *x* tiende a cero?. R.- Se observa que el *límite* no va a ningún valor fijo: *33*

La gráfica muestra los resultados obtenidos en el tratamiento de la información sobre el estudio de *límite.*

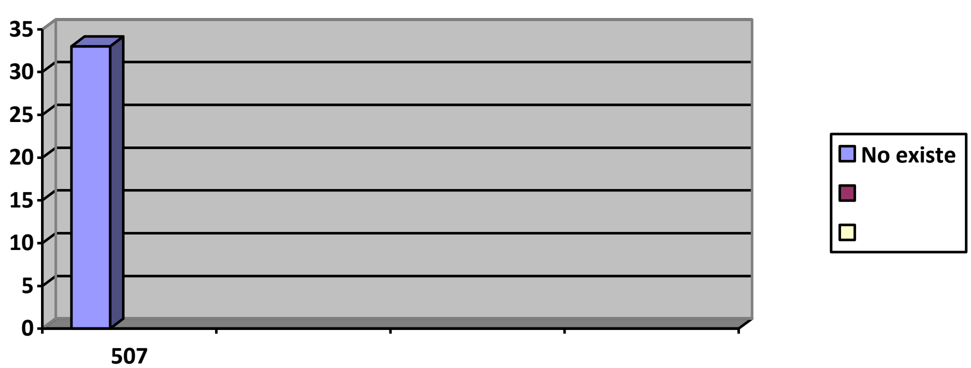


Fig. 70

La visualización es una herramienta en el proceso de aprendizaje de los alumnos que constituyó una mediación en el estudio, para la generación de un esquema de asimilación y comprensión de ideas matemáticas, basadas en signos y símbolos que permitieron al alumno articular los registros gráficos simbólicos al algebraico, conformando un medio alternativo en el difícil estudio del *límite,* ya que cuando se trabajó por la vía mecánica algorítmica sólo se tuvo una sustitución numérica y no se logró la idea intuitiva del concepto de *límite.* Este estudio, sólo es un proceso de tantos, como parte del estudio del *límite* y sus observaciones y mejoras no están terminadas ya que el desarrollo conceptual del cálculo continúa. Entonces, los caminos de aprendizaje son deseables a una mejora.

Por otro lado, como parte de trabajo en el Colegio, existen proyectos para mejorar la educación, uno de ellos es que estas actividades forman parte de un cuadernillo que se tiene en un banco de ejercicios y reactivos sobre un Capítulo *II* del tema de *Límites;* en el Capítulo *I* se diseñó sobre el tema de los Números Reales, junto con estructuras de Álgebra y Aritmética como parte del sustento de este proyecto que se está realizando, con lo que los alumnos pueden tener un respaldo de actividades cuando lo soliciten en el laboratorio para trabajar; como parte de las estrategias y proyectos que el Gobierno del Estado de México tiene en la educación del Bachillerato para aumentar la calidad de la educación.

Es importante señalar que lo que se pretende con este proyecto es que no sólo los alumnos logren desarrollar el conocimiento analítico, i.e; del algebraico a la solución, lo que es común en el Colegio, lo que se espera con este proyecto es el espíritu de Aprendizaje para lograr que los alumnos logren desarrollar una capacidad para conectar, asimilar y reproducir ideas del concepto de *límites* y también que logren interpretar y resolver problemas de *límites* que en el Colegio no se hace y con ello no se toca este tipo de enseñanza y la justificación en parte, en los últimos 8 años sólo 3 alumnos han logrado ingresar a la UNAM e IPN, porque no se les ha dado este desarrollo sobre la solución de problemas. La solución de problemas no es tratada en el Colegio.

CONCLUSIONES.

1.-Con la visualización, como alternativa en el cálculo del *límite*, se integran las unidades significativas del registro gráfico, los alumnos identifican estas unidades y las transfieren a una estructura algebraica, lo que permitió desarrollar ideas sobre la construcción del concepto de *límite* y esto a su vez generó una mayor facilidad calcular el *límite*, ya que los alumnos les permitió hacer los cálculos por aproximaciones y pudieron inferir el valor del *límite* y al mismo tiempo sirvió para construir el concepto del *límite.*

2.-La visualización de gráficas tiene una potencialidad de información ya que permitió relacionar el registro grafico con el algebraico y el numérico lo que abrió un camino en la generación de esquemas de ideas matemáticas de manera segura.

3.-El uso del paquete Derive no sólo es una herramienta que ayuda a agilizar los cálculos numéricos, sino que estos mismos forman parte importante en la generación y construcción de ideas y conceptos matemáticos.

4.- De manera natural en el proceso de aprendizaje los contenidos permiten para su tratamiento la construcción de conceptos, la visualización, esta alternativa sólo es una forma de aprender el concepto de *límite* y el proceso no está acabado y no es único; es parte del proceso del conocimiento, seguirá teniendo sus mejoras. Lo que sí estoy seguro es que ayuda a calcular el *límite.*

ANEXO I

DESARROLLO DE ACTIVIDADES EN EL CÁLCULO DE LÍMITES EN FORMA TRADICIONAL.

En cada *límite,* en una primera parte de actividades se presentan preguntas básicas sobre la función para tener un esquema general de ideas y de manera particular se tiene el cuestionario que sirvió de eje de estudio.

ACTIVIDAD No.1.

Lo primero es observar como los alumnos operan bajo un esquema rígido simbólico:

Sea la función:

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

Los alumnos al calcular el *límite* sólo con operaciones simbólica-algebraicas, en estas circunstancias, los argumentos importantes sobre el tratamiento de los contenidos que llevaron a observar el cálculo del *límite* se apoyaron en el tratamiento de las siguientes actividades que relacionan los elementos relevantes de la función.

Básicamente, a manera de introducción al cálculo de *límite* y en un esquema general en los 7 ejercicios, se tuvieron las siguientes preguntas que son relevantes en el estudio de una gráfica de una función.

1.-¿Cuál es el dominio?.
2.-¿Cuál es la imagen?.
3.-¿Cuáles son las asíntotas verticales?.
4.-¿Cuáles son las asíntotas horizontales?.
5.-¿Cuál es el *límite* en $x=0$?, ¿ En infinito?, ¿En menos infinito?.

En forma particular el diseño de las actividades sin el apoyo gráfico consistió en preguntarles básicamente lo siguiente:

ACTIVIDAD No *1* .- Calcular $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2+1}$
1.-¿El valor de la imagen en cero es?.
2.-¿La función es continua o discontinua?, ¿Por qué?.
3.-El denominador x^2+1, ¿Que valores toma?.

4.-Para $x=10$, ¿Qué valor toma la imagen?.
5.-Para los valores positivos, ¿Se crea una función creciente o decreciente?. ¿Por qué?.
6.-¿Cuál es el valor de la imagen para valores de x suficiente grandes?.
7.-De la pregunta anterior, ¿Toma el valor cero?, ¿Por qué?.
8.-¿Cuál es el *límite* cuando *x* tiende a infinito?.

En el desarrollo de las actividades, para el Grupo 505 y 506 se observaron los siguientes resultados:

ACTIVIDAD No *1* .- Calcular $$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2+1}$$
1.-El valor de la imagen en cero es: R.- *1/0 +1 = 1/1=1: 22, 23.* *1/0 = 1: 4, 6.* *1/0 = 0: 4, 3.*
2.-La función es continua o discontinua. ¿Por qué?. R.- Continua: *10, 12* No saben: *20, 22.*
3.-El denominador x^2+1, ¿Que valores toma?. R.- *1: 24, 28.* Enteros de *1, 2, 3, 4,… , : 2, 1.* No saben: *6, 3.*
4.-Para $x=10$. ¿Qué valor toma la imagen?. R.- *11: 16, 22.* *101: 10, 8.* *1/101: 4, 2.*
5.-Para los valores positivos, ¿Se crea una función creciente o decreciente?. ¿Por qué?. R.- No saben: *28, 29.* Creciente: *1, 2.* Decreciente: *0, 0.* Toma un valor pequeño: *1, 1.*
6.-¿Cuál es el valor de la imagen para valores de x suficiente grandes?. R.- Infinito: *25, 28.* Toma un valor positivo: *2,1.* No saben: *3, 3.*
7.-De la pregunta anterior, ¿Toma el valor cero?, ¿Por qué?. R.- No saben: *30,32.* No explican nada.

8.-¿Cuál es el *límite* cuando *x* tiende a infinito?. R.- Infinito: *20 ,24.* *1: 5,3.* No saben: *5, 5.*

Se observó que los alumnos en este cálculo del

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2+1}$$

No pudieron establecer el patrón regulador de la estructura algebraica, debido a que el operar de manera mecánica sobre una sustitución numérica, no los llevó a encontrar la significación sobre el aprendizaje, el no haber desarrollado hábitos de interés por lograr una comprensión de contenidos. Los alumnos no operaron correctamente sobre el cuadrado del denominador y con la falta de comprensión y entendimiento de los valores resultantes, los alumnos no descubrieron un comportamiento tendencial y no infieren los valores. Esta falta de operatividad obstaculiza el aprendizaje por no tener un dominio de los contenidos, los alumnos al no tener seguridad sobre sus cálculos, trae como consecuencia una falta de interés en el aprendizaje, lo anterior es propiciado por la poca operación efectiva de los cálculos numéricos. Lo que no permite el desarrollo de cálculos efectivos y certeros en el proceso del cálculo del *límite.*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2+1}$$

La falta de comprensión de las propiedades de los números racionales y sobre las estructuras, los alumnos en sus operaciones solo los comprenden en la mayoría de los casos como casos particulares, hasta este momento se observó que los alumnos no pueden establecer los invariantes de las estructuras, lo que hace o dificulta el proceso de aprendizaje.

No se logró el paso para establecer una posible igualdad en la estructura algebraica en el tratamiento de

$$\frac{1}{2^2+1} = 1/5,$$

$$\frac{1}{3^2+1} = 1/10$$

No se pudo establecer un análisis sobre la estructura algebraica, i.e, no es claro que mientras la cantidad x sea mayor, por estar elevado al cuadrado en el numerador, el cociente llevará más rápido a establecer cada vez con mayor velocidad un número cada vez más pequeño y en este orden de ideas los alumnos se les dificulta establecer que este desarrollo de ideas conforman el cálculo del *límite* buscado.

El hecho que se observa es que los alumnos por iniciativa propia no logran desarrollar una capacidad de inferencia. No desarrollan ideas intuitivas a partir de la operatividad algebraica debido a la dificultad de análisis de contenidos en las vecindades.

La dificultad de operar sobre una estructura algebraica y que gran parte del análisis se hace bajo el tratamiento en una vecindad seguir una estructura en términos de *y=f(x)* .

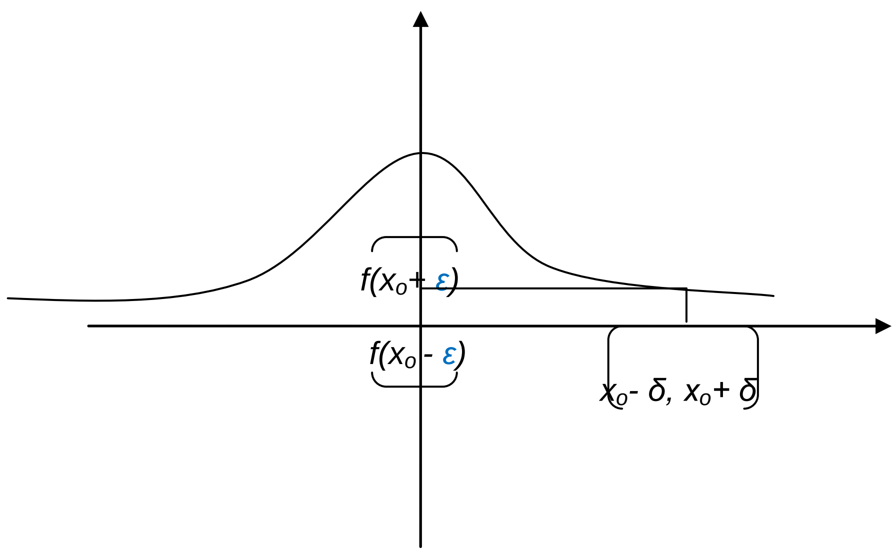


Fig. 1

El establecimiento del patrón mediador argumenta a favor de la estructura del proceso hacia el concepto de *límite.*

En este sentido de aprendizaje se ha observado que el alumno ante estas dificultades requiere de un mayor esfuerzo, sus actividades requieren establecer una relación con sus conocimientos sobre las propiedades de los números reales en un análisis del dominio, rango y continuidad de la función.

Lo que no permitió argumentar a favor del entendimiento del *límite,* debido a que los alumnos no están en posibilidades de desarrollar ideas intuitivas porque la estructura de un punto de acumulación es que a partir de una colección finita de puntos que se quedan fuera de una vecindad y establecer el aprendizaje para argumentar que en la existencia del *límite* de una función el número infinito de términos ya distan en una vecindad del *límite* a lo más de *epsilón* y por lo tanto en este proceso infinito el *límite* existe. Este proceso no es asimilado.

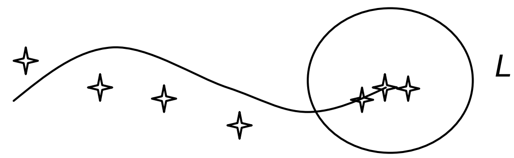


Fig. 2

Los resultados que se observaron en el cálculo del *límite* en los grupos *505* y *506* fueron:

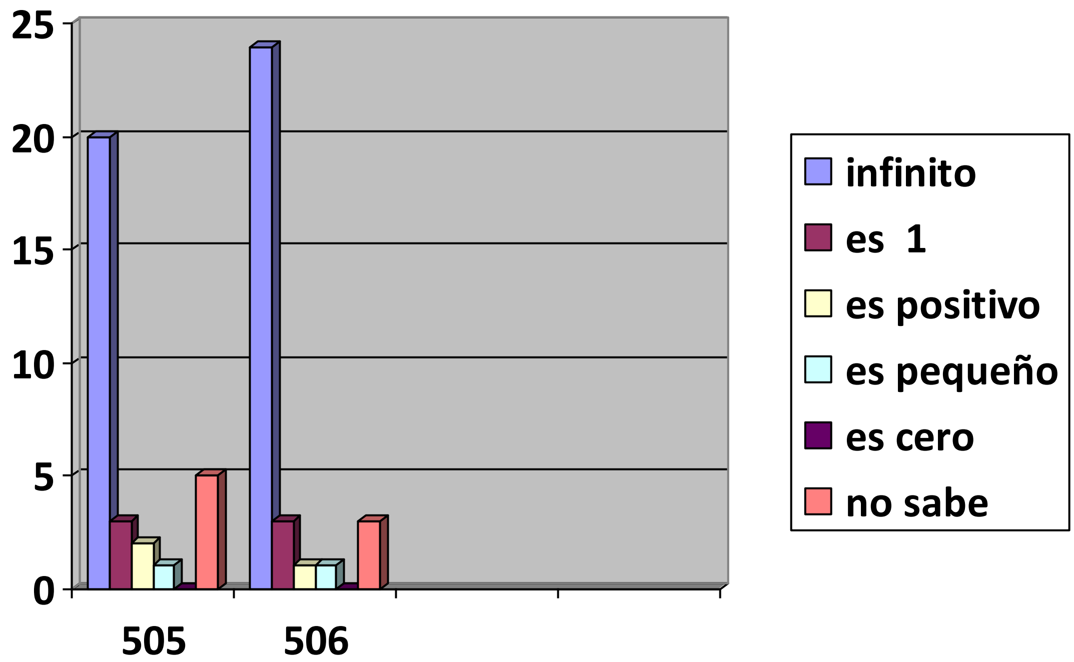


Fig.3

Se observó que no existe un análisis previo, no operaron correctamente sobre las propiedades de los números racionales, no pudieron comparar las cantidades del numerador con las del denominador y más aún en el cálculo de mantener fijo en numerador y variar el denominador se dificultó la observación del comportamiento tendencial, sus cálculos más relevantes fueron observar que es infinito, debido a que en las variaciones y cálculo de las propiedades de los racionales no pueden controlar ambas cantidades y se dificultó la inferencia del comportamiento tendencial.

No se logró pasar del cálculo numérico, a la inferencia del valor del *límite.*

ACTIVIDAD No. 2.

Sea la función

$$f(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$$

El cuestionario trata en la generación de ideas las siguientes preguntas como parte de un esquema básico general del *límite.*

ACTIVIDAD No. *2* Calcular el $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$
1.-¿Cuál es el dominio?.
2.-¿Cuál es el patrón de la gráfica?.
3.-¿Cuál es la imagen de la función?.
4.-¿Dónde es continua la función?.
5.-¿Cuál es el *límite* de la función en $x=0$?. ¿Por qué?.
6.-¿Cuál es el *límite* de la función en $x=\infty$?. ¿Por qué?.

Las siguientes actividades se trabajaron con un medio tradicional y se observaron en los grupos 505 y 506 las siguientes acciones y operaciones:

ACTIVIDAD No. *2* Calcular el $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$
1.-¿Cuál es el dominio?. R.- No saben: *32,33.*
2.-¿Cuál es el patrón de la gráfica?. R.- No contestan nada: *32, 33*.

3.-¿Cuál es la imagen de la función?. *R.-   1, 2, 3, 4, 5, 6: 25, 29.* Todos los números: *7, 4.*
4.-¿Dónde es continua la función?. R.-   Todos los valores: *28, 26.*
5.-¿Cuál es el *límite* de la función en *x=0*?. ¿Por qué?. R.-   *1; 12, 15.* $(-1)^0$ No saben: *20,17*.
6.-¿Cuál es el *límite* de la función en *x*=∞?. ¿Por qué?. R.-   ∞*: 30,31.* Porque $\infty^{\infty}=\infty$. *1: 2, 2*

En la medida que se avanza hacia el cálculo de *límites,* se encontraron con un grado de dificultad que de acuerdo con lo observado, sin la ayuda visual los alumnos no tuvieron una ruta de inicio en la solución del cálculo del *límite,* debido a que no existe una certeza al operar de una manera simbólica algebraica porque con sus escasos antecedentes de funciones, no lograron incorporar las estructuras algebraicas con los conceptos; en este orden de ideas, el proceso de estudio del *límite* de una función es complicado y en algunas veces se requiere mayor trabajo, en esta experiencia, el proceso no es inmediato en la generación y asimilación de ideas para el cálculo, ya que el tratamiento de las estructuras algebraicas requiere de un análisis mayor, este es un proceso natural de estudio, la mayoría de los estudiantes tiene problemas cognitivos en el desarrollo y generación de ideas matemáticas.

La problemática observada en los alumnos para este tipo de *límites* al operar sólo por la vía algorítmica, no pudo inferir, asociar y relacionar el comportamiento de la gráfica porque en sus estructuras cognoscitivas la falta la asimilación y el corto tiempo de estudio de gráfica de funciones todavía no existe la maduración en la asociación de una variedad de gráficas de funciones, sin embargo, lo que hace necesario es una existencia y ampliación como parte del proceso de conocimiento en el estudio de más graficas de funciones, lo que llevará a enriquecer el contexto del alumno. Pero por ahora esto no lo realizan.

Sólo se operó de manera automática, al hacer una simple sustitución de valores, no se logró en la sustitución numérica entender los valores exactos o correctos que corresponden a los valores de la estructura algebraica, este cálculo equivocado no lleva a entender la idea intuitiva del concepto del límite en estudio de la función.

Los resultados encontrados para esta función al operar mecánicamente, fueron:

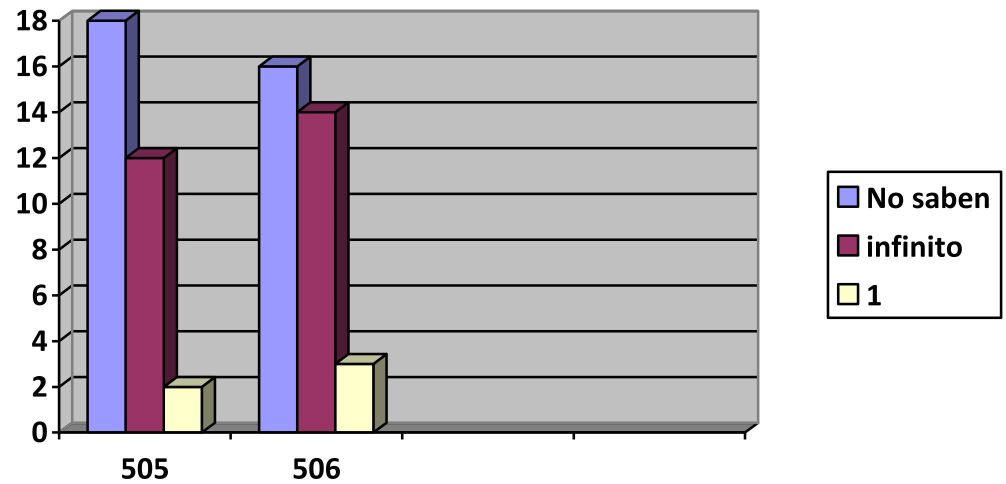


Fig.4

ACTIVIDAD No 3.

Sea la función:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$$

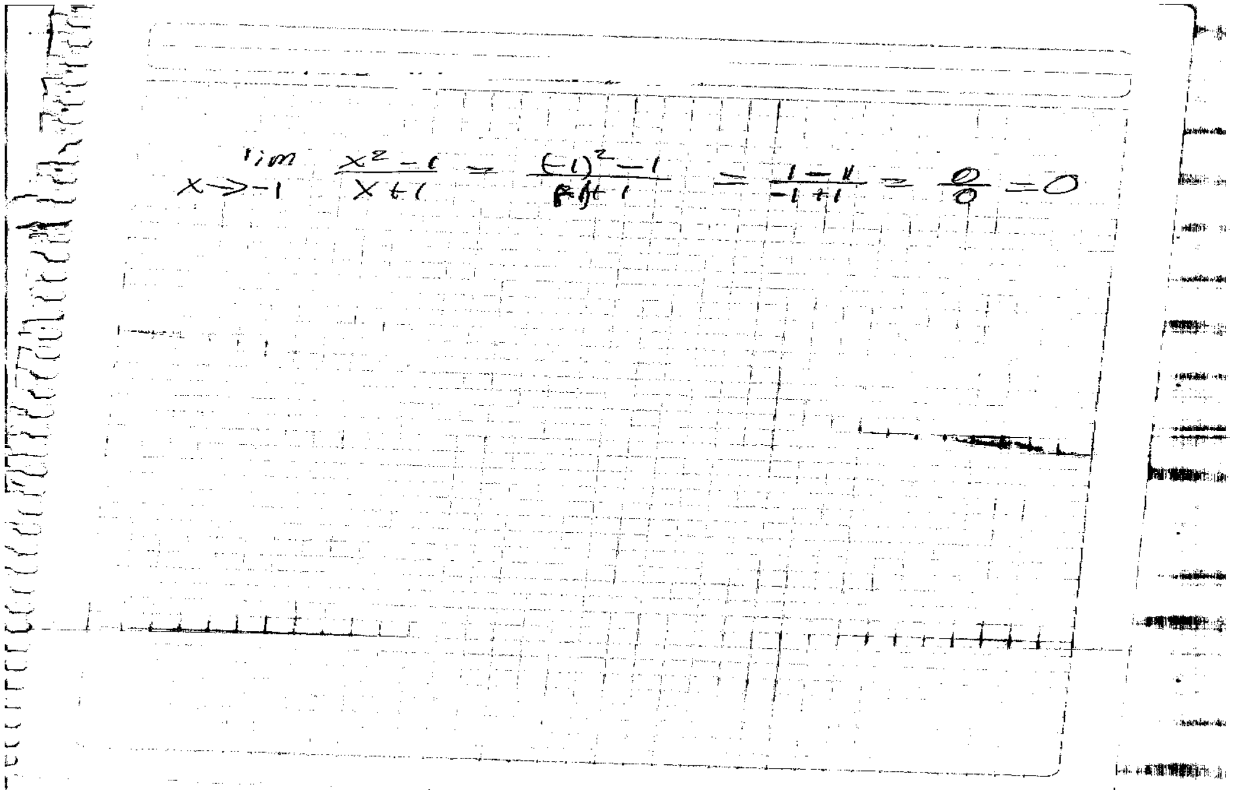
El cuestionario constituye el instrumento de operación en el proceso del cálculo del *límite*. Sirvió para relacionar ideas que son importantes en el aprendizaje del concepto.

ACTIVIDAD No *3:* Calcular $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$$
1.-¿Cuál es el domino de la función?.
2.-¿Cuánto vale la función en $x=1$?.
3.-¿Cuál es la imagen?.
4.-¿Cuál es el grado de la función?.
5.-¿Cómo es la gráfica?.
6.- Calcular $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$$

Para este ejercicio las preguntas se trabajaron con en el tratamiento algorítmico algebraico y se observó lo siguiente.

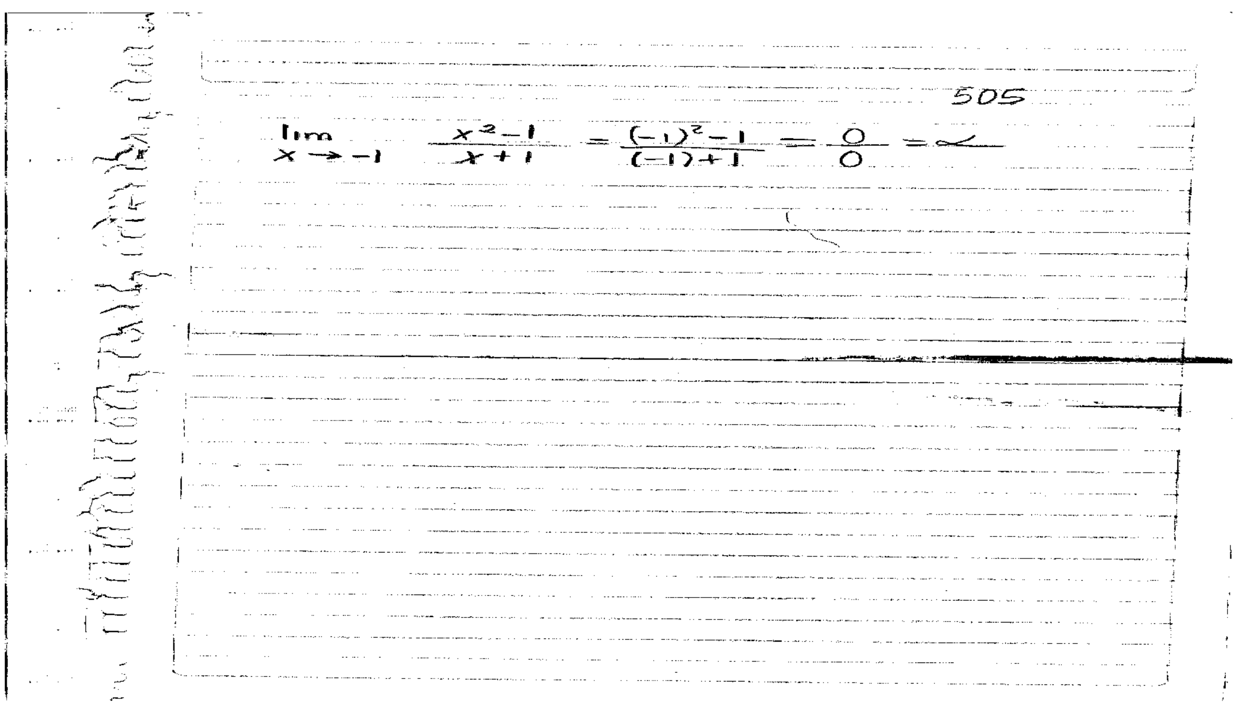
ACTIVIDAD No *3:* Calcular $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$$
1.-¿Cuál es el dominio de la función?. R.- No saben; *20, 23*. *x≠ 1*: *12,10.*
2.-¿Cuánto vale la función en *x= -1*?. R.- *0/0=: 20, 23* *0*: *2,3.* Infinito: *4,2.* No saben: 6, 4.
3.-¿Cuál es la imagen?. R.-No saben: *30, 28.* Todos los valores: *2,4.*
4.-¿Cuál es el grado de la función?. R.-No saben: *32,33.*
5.-¿Cómo es el patrón de la gráfica?. R.-No saben argumentar: *32,33.*
6.- Calcular $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$$ $$\lim_{x \to -1} \frac{(-1)^2-1}{-1+1} = \lim_{x \to -1} \frac{1-1}{-1+1} = 0/0 = 0 : \ 20{,}23.$$ *0*: *2,3.* Infinito: *4,2.* No saben: *6, 4.*

Existe una evidencia notable en las operaciones que los alumnos realizaron al resolver el *límite* analizan sólo la sustitución numérica, esto no propicia un análisis significativo. La siguiente hoja muestra las operaciones aritméticas que desarrollaron y sólo eso. Se observó el desarrollo de estructuras numéricas erróneas.



$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(-1)^2-1}{\cancel{1}+1} = \frac{1-1}{-1+1} = \frac{0}{0} = 0$$

Fig. 5



505

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(-1)^2-1}{(-1)+1} = \frac{0}{0} = \propto$$

Fig.6

El análisis numérico que los alumnos hicieron en este caso muy particular, referente al tipo de estructura algebraica que se estudió, para el *límite* de funciones racionales, se observó la evaluación y sustitución del valor *-1* como parte del proceso del cálculo del *límite,* en estas circunstancias se relacionó un valor numérico incorrecto al cálculo del *límite.*

No se pudo inferir que el *límite* es *-2.*

Bajo estas circunstancias, se desprendió que las actividades realizadas y las afirmaciones que se obtuvieron por escrito son relevantes porque ellas reflejaron que existe una dificultad en el aprendizaje del concepto de *límite.*

Las observaciones en el desarrollo de las actividades mostraron que no se logró operan bajo estructura y que al mismo tiempo la dificultad de inferencia del concepto está relacionada con los procesos de asimilación de ideas.

Del cálculo de

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$$

En el análisis de la estructura algebraica:

$$\frac{x^2-1}{x+1}$$

Los contenidos son estudiados en forma simbólica siguiendo la teoría de *límites*, este lenguaje basado en un tratamiento propio y especializado no ha llevado a la idea intuitiva del *límite.*

En la operatividad de los alumnos se observó al menos una dificultad: no existe un esquema de referencia ó un respaldo para que os alumnos puedan lograr una certeza de apoyo en el inicio de sus cálculos. Ya que al operar en forma simbólica no existe en este proceso una familiarización en el tratamiento de contenidos de una vecindad abierta para que pueda incorporar estas ideas hacia una estructura matemática.

Sobre la asíntota vertical no se conforma la vecindad para tener una idea de frontera.

Existe un hecho que no ocurre, no existe una inferencia del concepto, por el mismo desconocimiento de la estructura se crea una barrera en el proceso. Este grado de no inferencia crea un obstáculo en el aprendizaje del concepto de *límite.*

La operatividad sobre una vecindad en los puntos cerca de la discontinuidad crea una dificultad de entendimiento del *límite.*

Sobre la operatividad simbólica, los alumnos no le encuentran significado al desarrollo de ideas que se estudian en términos de vecindades, aquí se observó que los alumnos no tienen ningún concepto sobre vecindades. Y operar en un lenguaje propio de vecindades no hay aprendizaje, a los alumnos les cuesta trabajo entender la notación del *límite.*

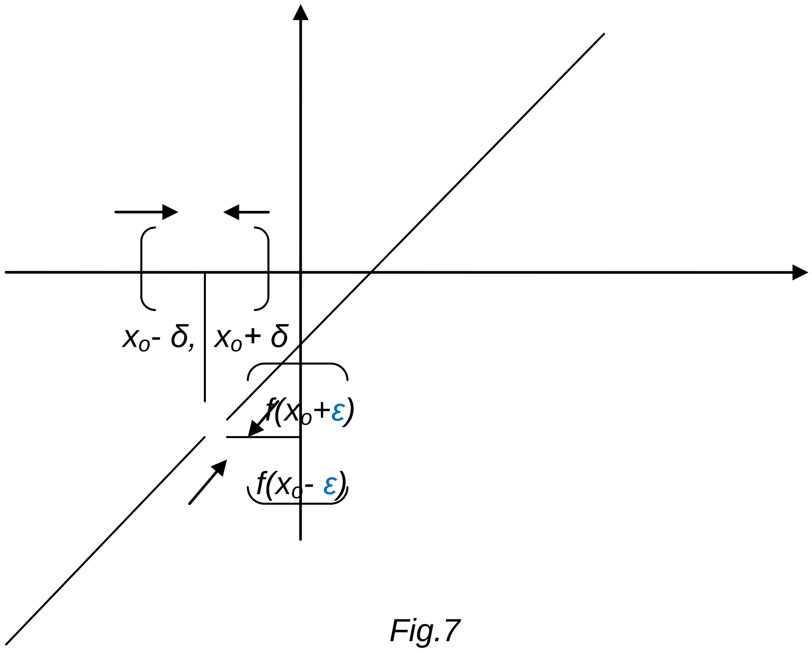


Fig.7

Sobre la operatividad numérica en la solución de ejercicios no se propició una comprensión sobre los contenidos, los alumnos no pudieron intuir el comportamiento tendencial en el proceso del *límite* de las estructuras numéricas y esto se debe a dos situaciones observadas.

La falta de operatividad con una conexión intuitiva de las propiedades de los números reales, lleva a obstaculizar el proceso de aprendizaje porque no existe una comprensión de contenidos.

La falta de memoria sobre los aspectos más relevantes del estudio previo que se hizo de funciones en los semestres anteriores.

Este esquema de ideas es pobre en cuanto a contenidos, ya que las ideas que se relacionan con el dominio, imagen, rango, grado de la función, asíntotas horizontales y verticales son elementos que ayudan a generan un esquema de ideas intuitivas sobre el cálculo de *límites.*

El análisis de las estructuras algebraicas se hizo en la medida que se resolvió el cuestionario y comprende las relaciones de las actividades sobre el análisis de la función en estudio:

$$\frac{x^2-1}{x+1}$$

El desarrollo de actividades comprendió en contestar los reactivos del cuestionario.

Sobre el dominio, algunos alumnos no pudieron identificar que para el punto *x=-1* la función no está definida. No la relacionan con la estructura que no está definida.

$$x/0$$

No está definido.

Sobre el grado de la función no lo asimilan como una factorización. Es decir no pudieron relacionar el cociente de una función.

No relacionan $\dfrac{x^2-1}{x+1} = \dfrac{(x+1)\,(x-1)}{x+1} = x-1$

Sí los alumnos realizaran un análisis de atención más consciente y se centraran en desarrollar un análisis más local, los elementos que conforman estos conceptos finalmente pudieran ser comprendidos.

En lo anterior no existe una comprensión del dominio de la función y de manera consecuente no existe una seguridad sobre los valores del rango de la función. Los alumnos no pudieron generar una idea clara sobre los puntos cercanos a la discontinuidad. Esta falta de generación de ideas sobre los puntos locales en una aproximación hacia el punto de discontinuidad no crea un esquema de ideas sobre la inferencia del concepto de *límite* de la función en el punto *x=-1*. Esta generación de ideas es el punto clave para el análisis de los *límites* de una función y lo cual no se comprendió por la falta de un recurso figural que permitiera estar en mejor posibilidad de lograr la inferencia intuitiva.

La falta de operatividad de las propiedades de los números reales crea una pobre incorporación hacia la estructura algebraica y genera un poca intuición del concepto de *límite.*

El profesor traza la siguiente función.

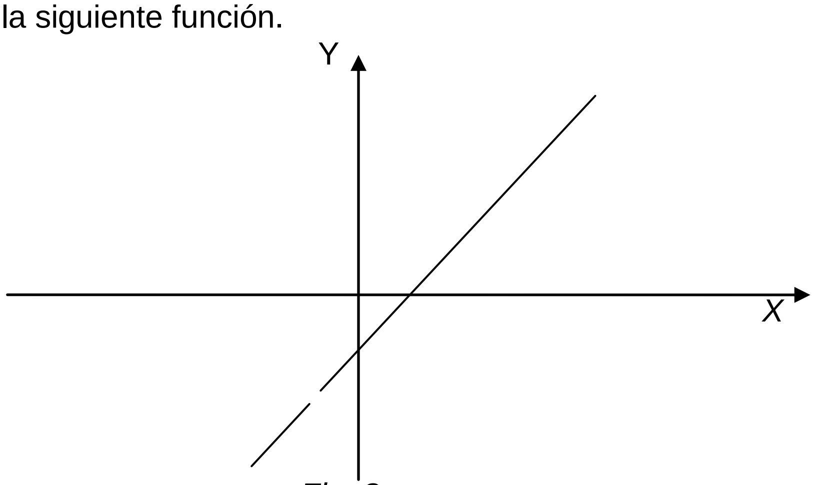


Fig. 8

Hasta el momento sobre los procesos mentales no es claro, pero se observó la falta de operatividad de las estructuras algebraicas, las cuales nos permitirían establecer en el cociente de funciones el grado de la función y así establecer los comportamientos tendenciales de la función.

Estos hechos no permiten retener, formar y desarrollar ideas sobre una estructura conceptual. No se desarrolla un aprendizaje gradual.

La falta de significatividad sobre los signos complica el desarrollo analítico al no poder operar sobre las estructuras algebraicas y su comportamiento tendencial. Esta dificultad reside en no poder desarrollar el análisis sobre los puntos cercanos hacia el punto de discontinuidad. Esta inferencia donde el *límite* si existe pero no forma parte del conjunto. No se logra intuir. No se logra una idea conceptual sobre la existencia del *límite.*

De

$$\frac{x^2-1}{x+1}, \ con\ x \neq -1$$

No se logró inferir que

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \to -1} x-1$$

No se conectó este valor por la discontinuidad. Este aprendizaje es difícil, por el análisis en la generación de ideas sobre la sucesión de puntos cercanos hacia donde el punto no está definido. No existe una asimilación sobre los contenidos en una vecindad del punto $y=-2;$ cuesta trabajo hacer una reflexión sobre una idea conceptual del *límite.*

En este proceso se observó que es difícil el aprendizaje del concepto de *límite* debido a que no se logró conectar los puntos de estudio con las estructuras algebraicas y por lo que es difícil conformar el concepto de *límite.* Cuesta trabajo inferir el concepto de *límite.*

El proceso de solución que los alumnos realizaron se observó su poco nivel de desarrollo de conocimientos sobre el cálculo del *límite*, la falta de operatividad sobre ideas algebraicas es un desconocimiento de las funciones como estructuras de eje de estudio del cálculo, el desarrollo de un esquema de ideas es de mayor dificultad en los alumnos.

En esta situación, el nivel de operatividad no permite inferir el concepto de frontera. La grafica ilustra el porcentaje de alumnos que solo opera a nivel aritmético.

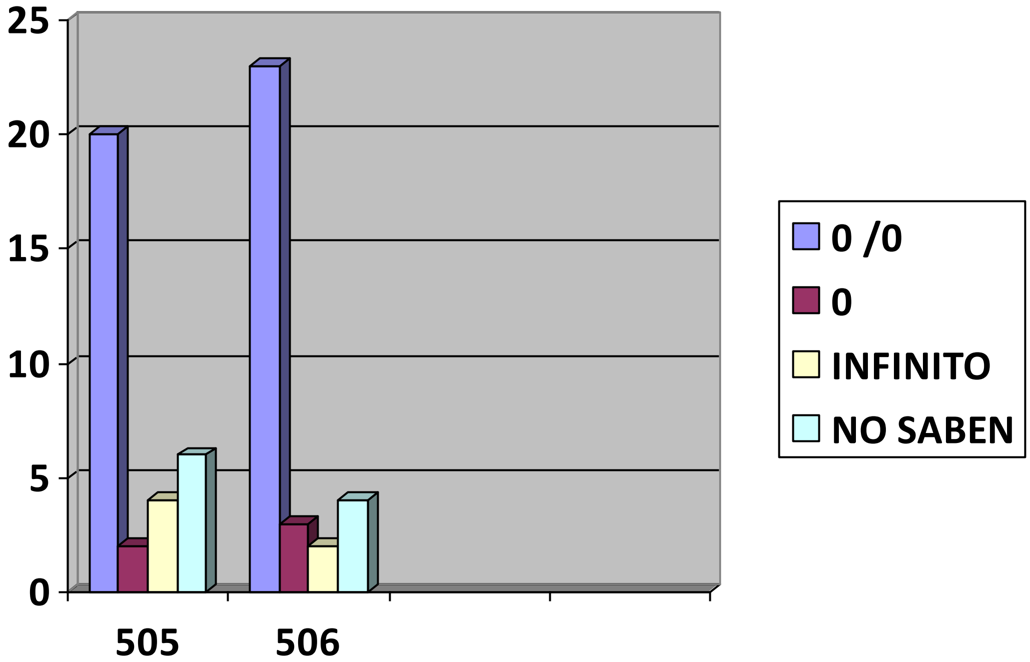


Fig. 9

En estas operaciones se identificó que sólo a nivel aritmético, existe una gran dificultad de operar correctamente las propiedades de los números junto con las algebraicas, lo que obstaculiza el desarrolló hacia un nivel de inferencia de concepto.

ACTIVIDAD No.4.

Sea la función

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

Se presentó una función racional con exponente racional y se notó que los contenidos a estudiar no son inmediatos por el grado de dificultad que se tienen ya que aumenta en forma gradual. Se presentó el cuestionario de contenidos.

ACTIVIDAD No.*4* Calcular $\lim_{x \to 1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$
1.-¿Cuál es el dominio?.
2.-¿Cuál es el grado de la función?.
3.-¿Cuáles son las asíntotas verticales?.

4.-¿Cuáles son las asíntotas horizontales?.
5.-¿Cuál es el $\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$, y $\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$?.
6.-¿Cuál es el $\lim_{x \to 1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$?. ¿Por qué?.

La actividad consistió en resolver los siguientes problemas que nos ayudan a observar cómo operan los alumnos en la solución de los problemas presentados en el siguiente cuadro de actividades sin apoyo gráfico y observamos las siguientes operaciones.

ACTIVIDAD No.4 Calcular $\lim_{x \to 1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$
1.-¿Cuál es el dominio?. R.- *-1* a infinito: *12,19*. No saben: *20,14.*
2.-¿Cuál es el grado de la función?. R.- No saben: *32, 33.*
3.-¿Cuáles son las asíntotas verticales?. R.- No saben: *32, 33.*
4.-¿Cuáles son las asíntotas horizontales?. R.- *0; 6,10.* No saben: *26,23.*
5.-¿Cuál es el $\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$, y

R.- *1/0=0: 23,26.*
1/0=1: 7,5.
No sabe: *2,2.*

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \text{ ?.}$$

R.- *1/0=0: 23,26.*
1/0= -1: 7,5.
No sabe: 2, 2.

6.-¿Cuál es el

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \text{ ?. ¿Por qué?.}$$

R.- *0, 1 y -1: 30,31.*
No saben: 2,2.

La gráfica muestra los resultados siguientes.

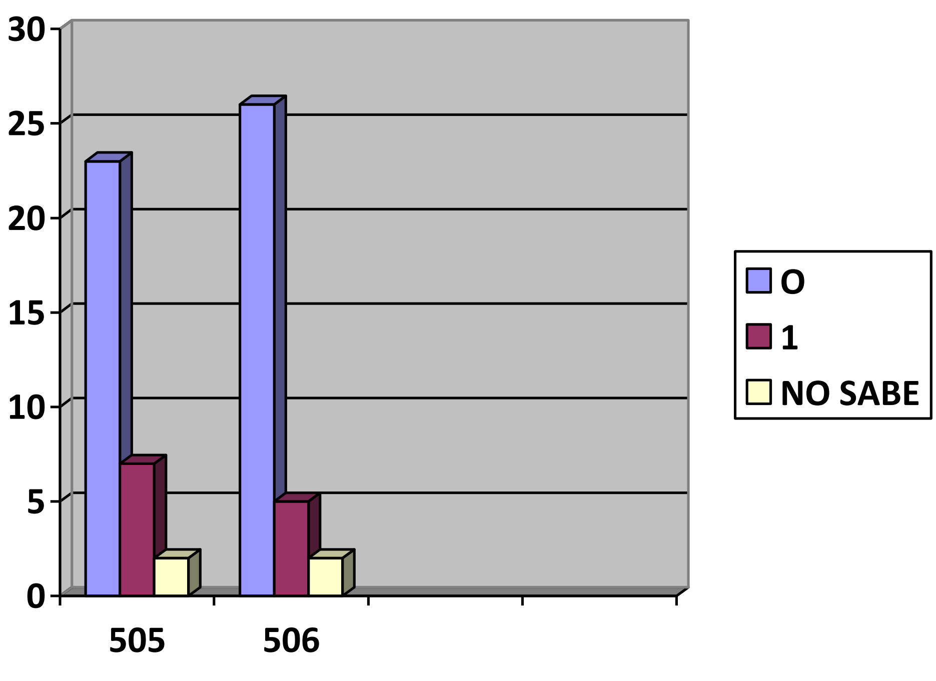


Fig.10

En estas actividades se pudo notar el desconocimiento de las estructuras matemáticas y con ello la poca generación de ideas matemáticas porque no existe un sentido de los contenidos lo que no lleva a una comprensión en un proceso de significación

Lo que se resaltó en esta actividad fue la no operatividad sobre los comportamientos tendenciales en los puntos de discontinuidad, no se relacionó el estudio de los límites laterales; los alumnos no pudieron conectar el *límite* cuando x tiende a uno por la derecha y cuando x tiende a uno por la izquierda, con el punto de discontinuidad.

Debido a que la estructura algebraica del *límite* es complicada, no se logró la operatividad cuando x tiende a infinito y con ello no se logró la inferencia de la no existencia del *límite.*

ACTIVIDAD No 5.

Siguiendo con el trabajo, para la actividad cinco, en una primera sesión se estudió la función:

$$f(x)= \frac{x^2-3x+2}{|x-2|}$$

Con la asistencia del cuestionario como parte del desarrollo de actividades se solicitó contestar las preguntas más relevantes en el estudio de la función, debido a la importancia de tener un acercamiento de estudio de los elementos relevantes como dominio, contra dominio, rango, asíntotas horizontales y verticales, consideramos que esta parte constituye una forma natural de introducir el alumno al estudio del *límite*. Se empezó con el estudio de la función:

$$f(x)= \frac{x^2-3x+2}{|x-2|}$$

El objetivo central de estas actividades consiste en dar una revisión de las propiedades y definiciones más relevantes que son necesarias tales como valor absoluto, factorización; actividades que refuerzan para posteriormente incorporarlos en una estructura matemática.

ACTIVIDAD No *5.* Calcular $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{\lvert x-2\rvert}$$

1.-¿Cuál es el dominio de la función?.
2.-¿Cuál es el grado de la función?.
3.-¿Cómo es el patrón de la gráfica de la función?.
4.-¿Cuál es la imagen de la función?.
5.-¿Es la función continua en *x=2?.*
6.-¿Qué importancia tiene el valor absoluto en el comportamiento de la función?.
7.-¿Por qué la imagen de la función es reflejada?.
8.-¿Por qué son importantes los *límites* laterales?.
9.-¿Por qué es importante la factorización en la gráfica de la función?.
10.-¿Cuál es el $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{\lvert x-2 \rvert}$

El cuestionario se resolvió sólo por la vía algorítmica y se encontraron las siguientes operaciones.

ACTIVIDAD No *5* Calcular $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{\lvert x-2 \rvert}$$
1.-¿Cuál es el dominio de la función?. R.- $x \neq 2$
2.-¿Cuál es el grado de la función?. R.- No saben: *28,30.* 2: 4,3.
3.-¿Cómo es el patrón de la gráfica de la función?. R.- "¿Y el valor absoluto?": *12, 8* "Parece ser dos": *8, 7.* No saben: *12, 18.*
4.-¿Cuál es la imagen de la función?. R.- Una parábola: *30,28.* Una recta: *2,5.*
5.-¿Es la función continua en *x=2*?. R.- No: *32,33.*
6.-¿Qué importancia tiene el valor absoluto en el comportamiento de la función?. R.- No saben: *32, 33.*
7.-¿Por qué la imagen de la función es reflejada?. R.- No saben: *32,33.*
8.-¿Por qué son importantes los *límites* laterales?. R.- "No saben": *22,19.* "No entiendo la pregunta": *10, 14.*

9.-¿Por qué es importante la factorización en la gráfica de la función?. No saben: *32, 33*
10.-¿Cuál es el $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{\mid x-2 \mid}$? R.- *0/0=0: 26,23.* *0/0=: 2, 5.* *0/0=∞: 4,5.*

Como parte del desarrollo de ideas matemáticas, estas actividades relacionan el proceso de aprendizaje que consiste en un primer hecho de tener una serie de preguntas sobre los aspectos relevantes de la función en estudio.

Lo que en un principio hace en su proceso de pensamiento al alumno un desequilibrio, el tener que resolver el cuestionario crea un panorama hacia la incorporación de elementos como parte del proceso de estudio de la función y constituye el proceso de aprendizaje.

Las preguntas analizadas son elementos que el alumno relaciona hacia un conjunto de desarrollo del proceso. Sin embargo el desconocimiento de las estructuras matemáticas relaciona la deficiencia de los alumnos en no poder generar un aprendizaje, en este sentido es un obstáculo para poder generar un esquema de ideas, debido a que su conocimiento es muy pobre y se ha debido a que están acostumbrados a repetir mecánicamente y por sustitución numérica los procedimientos que el profesor hace en los ejercicios que expone, esta vía algorítmica no los ha llevado a generar un aprendizaje significativo, pues en cuanto se enfrentan a una estructura más complicada, sólo sustituyen de manera numérica y operan sobre los coeficientes y exponentes que son visuales en ese momento, sin tener un actos de reflexión para dar una posible respuesta, y no se genera una necesidad de hacer una exploración a detalle de los contenidos. Siempre que se encuentran con una estructura difícil los alumnos no tienen la capacidad de reflexión y tratar de conjeturar los contenidos para generan un avance en el cálculo de un *límite.* El problema del valor absoluto los metió en dificultades de contenidos sobre el análisis de las cantidades y con ello no se procedió a realizar una factorización algebraica. Porque no tienen una seguridad sobre sus razonamientos.

No existió un respaldo de seguridad en sus cálculos y no hay una generación de ideas o una vía de acceso para poder relacionarlas.

Los resultados observados en el cálculo del

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{| x-2 |}$$

son mostrados en la gráfica:

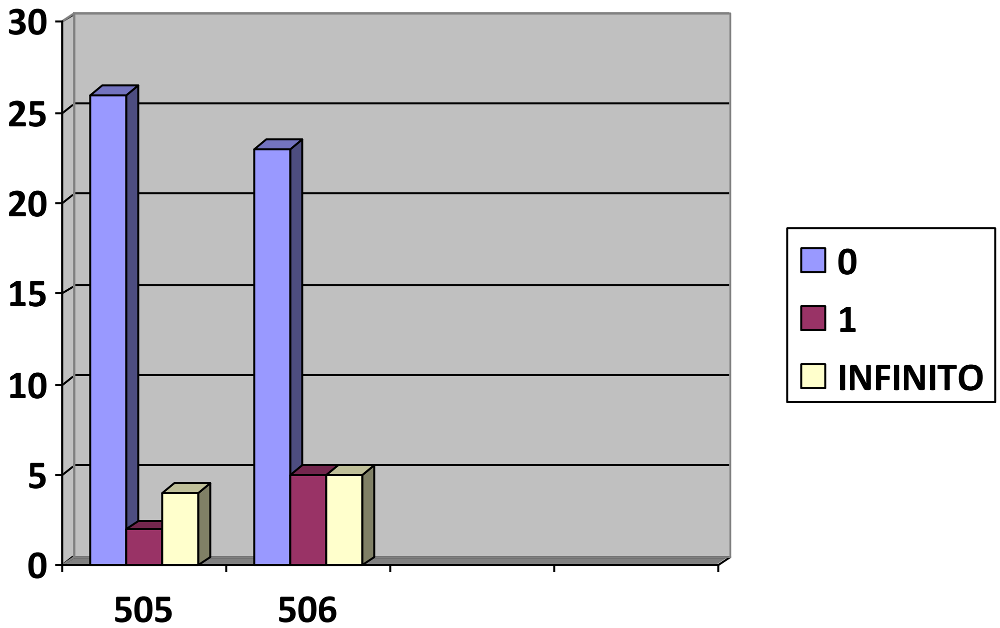


Fig.11

ACTIVIDAD No.6.

Sea la función $f(x)=(-1)^{x}$

Calcular

$$\lim_{x \to \infty} (-1)^{x}$$

Se trabajó el siguiente cuestionario bajo la operación tradicional.

ACTIVIDAD No *6.* Calcular $\lim_{x \to \infty} (-1)^{x}$
1.-¿Cuál es el valor para un número par y este sea *20*?.
2.-¿Cuándo x es muy grande que sea *501*, es impar?.
3.-¿Cuándo x es muy grande?.
4.-¿Tiene sentido hacer la sustitución en infinito?. ¿Qué opinas?.
5.-¿Se puede calcular el *límite* en infinito?.
6.- ¿En este caso, el *límite* existe?. ¿Por qué?.
7.-¿Es continua la función?.

Al resolver el cuestionario de preguntas los alumnos tienen dificultades para operar con el desarrollo de una potencia.

Más de la mitad de alumnos, no pueden operar con certeza sobre un cálculo elemental básico en desarrollar:

$$(-1)^3=(-1)(-1)(-1)$$

Y preguntan si el resultado es -1. Muestran en un principio una falta de seguridad. No pueden avanzar sin preguntar en todo momento por sus resultados con el profesor.

ACTIVIDAD No *6* Calcular $\lim_{x\to\infty} (-1)^x$
1.-¿Cuál es el valor para un número par y este sea *20*?. R.- *1: 25,28.*
2.-¿Cuándo x es muy grande que sea *501*, es impar?. R.- *-1: 30,32.*
3.-¿Cuándo x es muy grande?. R.- *1: 32,32.*
4.-¿Tiene sentido hacer la sustitución en infinito?. ¿Qué opinas?. R.- No: *29,27.* "Es un valor muy grande"*: 3,6.*
5.-¿Se puede calcular el *límite* en infinito?. R.- No: *30,30.*
6.- ¿En este caso, el *límite* existe?. ¿Por qué?. R.- *"*es *1" : 12, 14.* *"*es *-1" : 16, 11.* No saben*: 4,8.*
7.-¿Es continua la función?. R.- No saben: *32,33.*

Con estos valores los alumnos argumentan que se tienen dos valores siempre y cuando se preguntó, ¿Cuál es el *límite?.* No contestaron nada. Esto llevó a observar lo siguiente: Con los resultados de las operaciones aritméticas los alumnos no muestran una capacidad de inferencia del concepto, porque su nivel de operación está vinculado con la sustitución numérica y no sobre un acto de conciencia, no se mostró un acto reflexivo de inferencia.

Al realizar las respectivas actividades, se observó que en el proceso existe una nula ó poca operatividad de construcción de ideas sobre el concepto.

Los alumnos relacionaron los valores de la imagen aplicando la definición de potencia par e impar para el *-1;* sólo se obtuvieron las siguientes interpretaciones de contenidos, pero no de manera correcta ni estructurada. i. e., no se logró pasar hacia la idea intuitiva del *límite.*

Es un nivel de sustitución numérica y no va más allá en la generación de esquemas de ideas matemáticas. La gráfica muestra los resultados obtenidos.

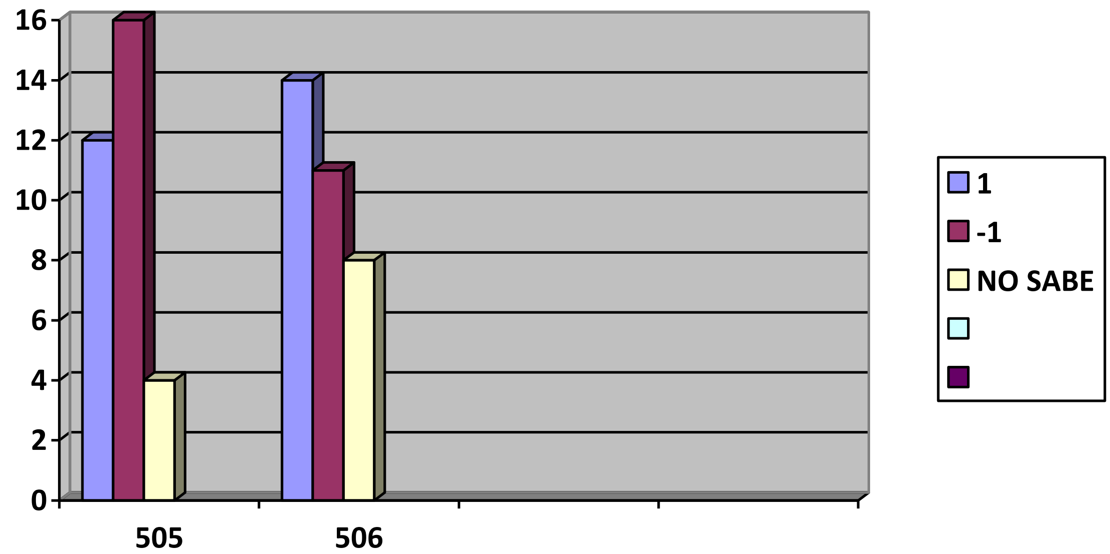


Fig.12

ACTIVIDAD No 7.

Sea la función:

$$f(x)= sen(1/x)$$

Calcular

$$\lim_{x \to 0} sen(1/x)$$

El cuestionario y las actividades se realizaron para observar e identificar las dificultades en el aprendizaje y cálculo del *límite* desde la perspectiva algorítmica, cuando se presenta la oscilación de valores en una vecindad.

Las preguntas relevantes que los alumnos tuvieron que contestar constituyen una integración de contenidos como parte del proceso de aprendizaje sobre el *límite* estudiado.

ACTIVIDAD No 7. *Calcular* $\lim_{x \to 0} sen(1/x)$
1.-El valor de la imagen en cero es:
2.-La función es continua o discontinua. ¿Por qué?.
3.-El argumento en cero. ¿Qué valores toma?.
4.-Para *x=1*.¿Que valor toma la imagen?.
5.-Para los valore positivos. ¿Se crea una función creciente ó decreciente?.
6.-¿Cuál es el valor de la imagen para valores de x suficiente pequeños?.
7.-De la pregunta anterior. ¿Toma el valor cero?.¿Toma el valor *1* ó *-1?.* ¿Siempre?. ¿Por qué?.
8¿Cuál es el *límite* cuando *x* tiende a cero?. ¿El *límite* existe cuando *x* tiende a cero?.

El análisis de los contenidos que se observaron, en las actividades son los siguientes:

ACTIVIDAD No *7* Calcular $\lim_{x \to 0} sen(1/x)$
1.-El valor de la imagen en cero es: R.- *0: 25,20.* *∞: 12,13.*
2.-La función es continua o discontinua. ¿Por qué?. R.- Es continua, porque el seno de x es continua: *12,9.* No está segura: *20, 24.*
3.-El argumento en cero. ¿Qué valores toma?. R.- ∞*: 18,21.* *0: 14,12.*
4.-Para *x=1*.¿Que valor toma la imagen?. R.- 1*: 31,30.* *0: 1, 3.*
5.-Para los valores positivos. ¿Se crea una función creciente ó decreciente?. R.- Creciente: *19, 23.* No sabe: *13, 10.*
6.-¿Cuál es el valor de la imagen para valores de x suficiente pequeños?. R.- Pequeños: *27,29.* *0: 5,4.*
7.-De la pregunta anterior. ¿Toma el valor cero?. ¿Toma el valor *1 ó -1*?. ¿Siempre?. ¿Por qué?. R.- *0*, porque *sen*(*1/0)* es cero: *26,23.* ∞, porque *sen(1/0)* es ∞*: 4 ,7.* No sabe: *2, 3.*

8¿Cuál es el *límite* cuando x tiende a cero?. ¿El *límite* existe cuando *x* a cero?.
R.- *Sen(1/0)* es *0: 28,31.*
No saben: *5, 2.*

Con los resultados obtenidos se observo la existencia sobre la nula operatividad sobre las estructuras algebraicas y el desconocimiento de los contenidos:

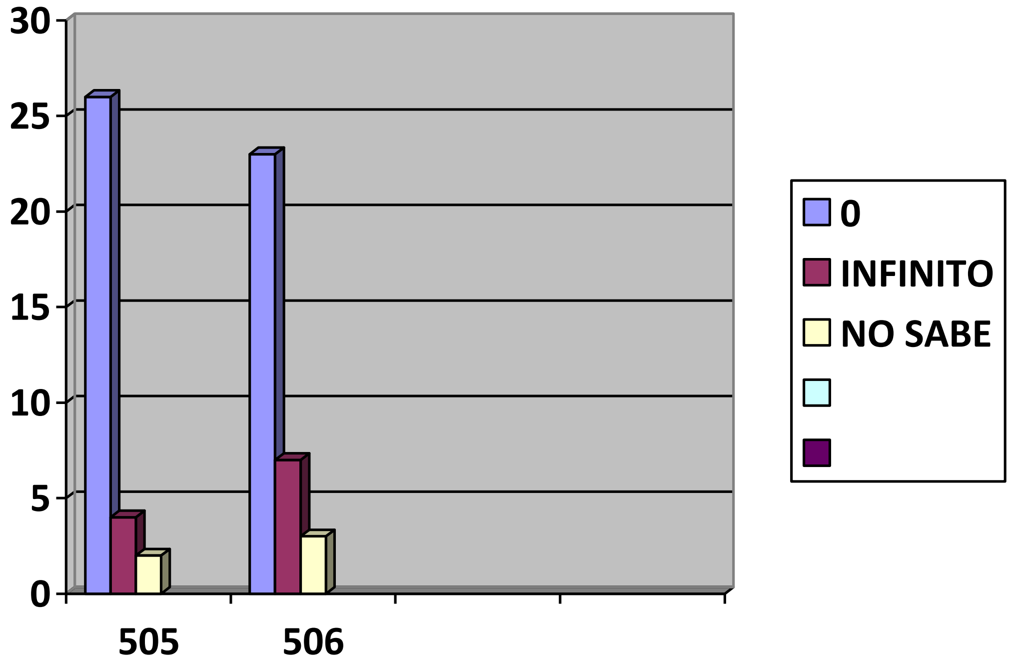


Fig.13

Se observó la existencia de una dificultad en entender los valores que toma el argumento para esta función, ya que los alumnos no pudieron calcular los valores cuando se sustituyen en la función *sen(1/x),* al no tener control sobre estos razonamientos los alumnos concluyeron mediante una generalización que la imagen de la función toma los valores del *sen x* y lo relacionaron con los valores en *0 ,∏* y múltiplos de *∏ ,* pero no llegaron a inferir que el *límite* no existe.

BIBLIOGRAFÍA

Ausubel, D. (1993). Psicología Educativa. México: Trillas.

Bosquez, E. (1998). La visualización de la Serie de Fourier. México: UNAM.

Bishop, A. (1993). Space and Geometry. Acquisition of Mathematics concepts and processes. New York: Academic Press.

Dreyfus, T. Eisemberg, T. (1987). Intuitive Funcional Concepts.

Duval, R. (1990). Semiosis y pensamiento humano. Francia.

Euler, E. (1994). Book I. UNAM: Colección Mathema.

Hitt, F. (1992). Visualizando el concepto de Función y su relación con el uso de la microcomputadora. México: CINVESTAV.

Hoyles, C. (1963). Geometry and the computer environmental. London

Leithod, L. (1968). The Calculus. U. S. A : Harper.

Krutetskii, V. A. (1976). The psychology of mathematical abilities in school-children. USA: University of Chicago.

Morris, Ch. (1985). Fundamentos de la teoría de signos. España: Ediciones Paidos.

Mosses, B. E. (1979). The nature of spatial ability and its relatinship to mathematical problema solving. USA: Indiana University.

Piaget, J. (1990). Seis estudios de Piaget. Entendiendo a Piaget. México: Diana.

Pierce, Ch. (1996). Leer a Pierce hoy. Barcelona, España: Gedisa.

Polya, G. (1992). Como plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Presmeg, N. C. (1986). Visualization in high-school mathematics. For the Learning of Mathematics.

Souwarsono, S. (1982). Visual imaginery in the mathematical thinking of seventh-grade students. Australia: Monash University.

Tall, D. (1980). A graphic approach to the Calculus.

Vygotski, L. (2003). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. España: Crítica.

Wenzelburger, G. (1992). El estudio de funciones trigonométricas mediante graficación por computadora. México: UNAM.

Wittgestein, L. (2007). Tractatus Logico-Philosophicus. México: Facultad de Filosofía, UNAM.

Wittgestein, L. (2007). Sobre la Certeza. México: Facultad de Filosofía, UNAM.

Wittgestein, L. (2007). Zettel. México:Facultad de Filosofía, UNAM.

BIBLIOGRAFÍA PARA EL CURSO DE CÁLCULO.

Banach, S. (1960). Cálculo Diferencial e Integral. México: Utena.

Demitrovich, B. (1993). Problemas y ejercicios de Análisis Matemático. España: Paraninfo.

Dickson, L. (1943). New First Course in the Theory of Equations. U.S.A:Addison-Wesley

Fulks, W. (1984). Cálculo Avanzado. México: Limusa.

Granville, W. (1987). Cálculo Diferencial e Integral. México: Limusa.

Leithod, L. (1968). The Calculus. U. S. A : Harper.

Masani, P. (1967). Cálculo Diferencial e Integral. México: Publicaciones Culturales.

Moreno, L. (1985). Desarrollo conceptual del Cálculo. México. Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas. CINVESTAV.

Protter, M. (1963). Calculus whit Analytic Geometry. U.S.A: Addison-Wesley.

Protter, M. (1963). Cálculo con Geometría Analítica. México: Fondo Educativo.

Newton, S. I. Principia. University of California: Press.