



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES

ARAGÓN

**"Diseño, Construcción e Instrumentación de un
Equipo para Pandeo en Columnas"**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA

P R E S E N T A:

FERNANDO PARIS DELGADO GÓMEZ

ASESOR: Dr. Jacinto Cortés Pérez

MÉXICO

ABRIL 2010





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Para mí Padre.

Hubo alguien que me enseñó en la vida los valores más importantes para poder ser una persona con aspiraciones, entender vida con dureza, responsabilidad, ingenio, pero también con alegría.

Me enseñó que las cosas se logran trabajando duro, que debo sentir cada instante porque los mejores momentos no regresan.

Observe en él a una roca, dura y difícil de romper pero también su fragilidad, vi preocupación oculta en una sonrisa para no inquietarnos, vi sencillez, vi honor, vi respeto, vi sueños truncados por darnos a nosotros la oportunidad de crecer.

Muchas veces platique contigo, pero no pude decirle lo que sentía. Pero cuando partiste, supe que todo lo que me habías enseñado, en cada gesto, en cada palabra, en cada llamada de atención solo fue por una cosa...

Para ser lo que soy ahora...

Gracias Papá porque tú fuiste una inspiración, un poema de lucha del día a día, hasta que tu corazón dejó de latir.

Gracias por enseñarme que uno debe soñar, hasta el final.

Esta tesis y todo logro, llevara tu nombre con dignidad.

Para mí Madre.

Este trabajo también lo quiero dedicar a la persona que me dio la oportunidad de empezar con este sueño hace ya 33 años.

Gracias Mama, por ser esa persona que me ha aguantado tanto tiempo, que siempre veló mi sueño hasta altas horas de la noche, por enseñarme que la esperanza muere al último, por ser de acero ante los problemas y no caer nunca, así estuvieras enferma, o triste.

Gracias por ser como eres, por eso y mil cosas más, te dedico esta tesis en pago a todas las horas de sueño perdido y apoyo incondicional.

Gracias.

Al sherpa, “Uno de mis maestros”.

Tío Ale, gracias por ser el impulsor de muchos sueños que he tenido, de ti aprendí como ver el mundo, de enfrentar a mis miedos, de conocer mis límites, de ser mi mejor amigo y de enseñarme que paso a paso, no importa que tanto se tarde uno en caminar la jornada se llega a conquistar la cima.

Gracias por ser un ejemplo de lucha y rectitud.

A mis hermanos.

Les doy las gracias por ser parte de mi vida, con ustedes he aprendido todas las lecciones de esperanza, sueños y caídas que uno puede aprender de la vida, que aunque somos distintos, en esencia somos parte de uno solo.

Gracias por estar, gracias por luchar, no importando que tan difícil es la batalla, se que nunca caerán, por eso llevamos la misma sangre

Los amo y los admiro.

Al equipo de los "21".

Amigos míos, gracias por dejarme ser parte de este proyecto, que por fin hemos concluido, a ustedes mis gracias y veneraciones.

Porque nos regimos por las 11 leyes que nos dieron la oportunidad de cruzar el infinito del Universo hasta el cinturón de Orión.

La promesa fue cumplida.

A mi Susy Amada.

Amore, no sé como agradecerte el esfuerzo tan grande que has hecho conmigo en todos estos años, has sido el pilar para que se pudiera hacer realidad este sueño, tú, mi apoyo incondicional, la persona que siempre ha creído en mi, que conoce mis defectos y virtudes.

Este trabajo es también para ti, por todos esos días de sufrimiento y lejanía para poder desarrollarlo, por esos consejos que escuche de ti, te doy las gracias por todo el apoyo y sobre todo porque nunca, pero nunca dejaste de estar, aun cuando el cielo se tornó gris.

Con todo mi amor, para ti kyu.

Dr. Gianfranco Bisiacchi Giraldi. (R.I.P.)

Lástima que ya no está para ver terminado este trabajo, pero quiero agradecerle todo el apoyo, la confianza que me deposito en la realización de varios proyectos, por enseñarme a creer en los sueños, por permitirme trabajar a su lado, por dejarme compartir sus experiencias y lo más importante de todo.

Por enseñarme que las estrellas están al alcance de uno, solo tenemos que alzar los brazos para alcanzarlas.

Siempre lo llevaré en mi mente como un gran maestro y por siempre recordare esa frase que usted me dijo un día.

“Todo lo podemos hacer, porque no somos tímidos”

Gracias, por ser un gran ejemplo de disciplina y sencillez.

Dr. Jacinto Cortes Pérez.

No tengo palabras para agradecer tu apoyo para este trabajo, pero al fin he cumplido.

Gracias por este tiempo de aventuras, dolores de cabeza, trabajos a presión, que tanto hemos pasado.

Siempre te he admirado, ya que tu sabiduría es enorme, pero lo mejor que me llevo de ti, es esa disciplina y constancia, al igual que tu paciencia gigantesca que has tenido con cada uno de los que hemos sido tus discípulos.

Ahora tengo una nueva promesa, terminar el doctorado.

Espero sigamos adentrándonos en mas aventuras que nos quiten el sueño, para disfrutar en pocos minutos nuestras platicas de cómo resolver el mundo en la cordialidad de un café.

Eres mi más grande ejemplo de que si se pueden hacer las cosas y gracias por dejarme ser tu discípulo.

Al gran equipo del Centro Tecnológico.

Empezare por Don Julio Sánchez (R.I.P.), por que sin su enorme apoyo nunca hubiéramos construido este equipo y no existiría esta tesis, no tengo palabras para agradecerle todo lo que hizo por nosotros, además de confiar en mí. Gracias por haber sido un gran amigo.

A las secretarias, Berta Arriaga Duran y Tere Villegas Rosas, por ser una gran ayuda en la parte administrativa y unas personas muy queridas, además cómplices del laboratorio para la realización de este proyecto.

Al equipo del Laboratorio.

A Hugo Becerril, Dr. Francisco Sánchez, M en I Antonio Souza, Marco Antonio Cedillo, Oswaldo Abarca, Guillermo Domínguez, Rodrigo Taboada, Felipe Porras, Carlos Resendiz, Arturo Martínez, Ing. Alejandro Ríos, Ing. Arubi García, M en I Néstor García, M en I David Becerril, José Manuel Zarazúa, René Rodrigo Flores, Jesús Montalvo, y a todos aquellos que directa o indirectamente no mencione, pero que me han enriquecido con sus talentos y virtudes, por dejarme ser su amigo, además de todos los momentos de equipo, de chicharrones y refrescos por las tardes, a ustedes les dedico este trabajo, como símbolo de esfuerzo y dedicación.

Un agradecimiento muy especial al M en I Néstor García y al M en I David Becerril, por sus observaciones y valiosas contribuciones a este trabajo.

Y también a mi mejor amigo Armando Vega Serrano, que sin sus conocimientos electrónicos no hubiera sido posible la realización total de este trabajo, por todos los momentos que pasamos poniendo a punto la parte eléctrica y mecánica, por formar el equipo imparable.

Muchas, pero muchas Gracias...

COMECYT.

Un agradecimiento muy especial al Comité de Becas del Consejo Mexiquense de Ciencia y Tecnología "COMECYT", por haberme apoyado con la Beca de Tesis de Licenciatura COMEYT - CONACYT 2008.

SECRETARIA DE EDUCACION PÚBLICA.

También externo mi agradecimiento a la "SEP" por la beca otorgada dentro del programa de becas para licenciatura en el periodo 2008.

Índice



Índice.

Introducción	i
Capítulo 1.- Conceptos Generales de Estructuras.	1
1.1.- Conceptos Mecánicos Estructurales.	2
1.1.1.- Antecedentes Históricos	2
1.1.2.- Clasificación y Aplicación de las Estructuras.	3
1.1.3.- Estructuras a Tensión	3
1.1.4.- Estructuras a Compresión.	4
1.1.5.- Estructuras de Esfuerzo Cortante.	4
1.1.6.- Estructura a Flexión.	4
1.2.- Columnas.	4
1.2.1.- Estabilidad e Inestabilidad.	5
1.2.2.- Carga Crítica.	6
1.2.3.- Teoría de Euler.	6
1.2.4.- Columna con Extremos Articulados	7
1.2.5.- Columna con un Extremo Empotrado y otro Libre.	8
1.2.6.- Columna con un Extremo Empotrado y el otro Articulado.	10
1.2.7.- Columna con Extremos Empotrados.	11
1.2.8.- Límite de Validez.	12
1.2.9.- Columnas con Cargas Laterales.	12
1.3.- Extensometría Eléctrica.	14
1.3.1.- Operación del Extensómetro.	14
1.3.2.- Estructura de Extensómetro.	15
1.3.3.- Puente de Wheatstone.	15
1.3.4.- Celda de Carga.	16



Capítulo 2.- Diseño de Equipo para Medir el Pandeo en Columnas. 18

2.1.-	Requerimiento de Diseño y Planteamiento de Problema.	19
2.2.-	Desarrollo de Equipo de Pandeo en Columnas.	19
2.3.-	Descripción del Equipo para Pruebas de Pandeo.	19
2.3.1.-	Bastidor Principal.	20
2.3.2.-	Marco de Carga.	21
2.3.3.-	Elementos de Pandeo.	22
2.3.4.-	Celda de Carga y Medidor de Carga.	24
2.3.5.-	Aplicador de Carga Lateral y Medición de Deflexión	28
2.4.-	Diseño a detalle.	31
2.4.1.-	Travesaño Soporte de Aplicador de Carga.	31
2.4.2.-	Postes de Aplicador de Carga.	34
2.4.3.-	Celda de Carga.	37
2.4.4.-	Tornillo Eje para Montura de Probeta Doblemente Empotrada.	38
2.4.5.-	Soporte de marco de Carga.	39
2.4.6.-	Aplicador de Carga (tornillo de Potencia).	41
2.4.7.-	Sensor de Desplazamiento,	42

Capítulo 3.- Resultados. 44

3.1.-	Descripción del Prototipo.	45
3.1.1.-	Bastidor Principal.	45
3.1.2.-	Marco de Carga.	46
3.1.3.-	Elementos de Prueba.	47
3.1.4.-	Dispositivos de Medición.	48
3.1.4.1.-	Medidor de Carga	48
3.1.4.2.-	Medidor de Desplazamientos	50
3.2.-	Accesorios.	51
3.3.-	Prácticas Propuestas.	52



3.3.1.- Práctica 1: Comportamiento de Pandeo bajo la Influencia de Diversas Condiciones de Frontera aplicando la Teoría de Euler.	52
3.3.1.1.- Desarrollo de la Práctica.	55
3.3.1.2.- Evaluación del Experimento.	68
3.3.1.3.- Cuestionario.	68
3.3.2.- Práctica 2: Influencia de las Propiedades del Material y de la Geometría en el Pandeo de una Columna.	68
3.3.2.1.- Cuestionario.	69
3.3.3.- Práctica 3.- Columna con Carga Lateral y Diferentes Geometrías.	69
3.3.3.1.- Marco Teórico	69
3.3.3.2.- Desarrollo de la Práctica.	71
3.3.3.3.- Cuestionario.	75
 Conclusiones.	 76
 Apéndice 1 Métodos Comparativos.	
 Apéndice 2 Planos y Explosivos.	
 Referencias Bibliográficas.	 79



Introducción.

La falta de desarrollo tecnológico en nuestro país ha generado una dependencia de los denominados países del primer mundo. Más grave aún resulta el hecho de que en países como México existe una carencia importante de la cultura tecnológica. Una prueba de ello es que aunque en muchos casos, los equipos que se importan contienen componentes que difícilmente pueden ser fabricados en nuestro país, existen muchos otros para los cuales se cuenta con los conocimientos necesarios para producirlos y sin embargo, son comprados en el exterior. Un ejemplo de dispositivos de este tipo son una amplia gama de los llamados equipos didácticos, los cuales son fundamentales para la comprensión de los diversos fenómenos físicos y/o químicos que se abordan en los planes de estudios de las carreras del área físico-matemática. De hecho, se puede asegurar que la falta de dichos equipos influye fuertemente en el nivel de preparación de los futuros profesionistas.

A pesar de que muchos de dichos equipos pueden ser diseñados y construidos en México, generalmente son importados de países como: Estados Unidos, Alemania e Inglaterra. Debido a lo anterior, resultan considerablemente costosos y en consecuencia equipar adecuadamente los laboratorios de las escuelas, especialmente las públicas, toma períodos de tiempo muy largos deteriorando severamente la calidad de la enseñanza de muchas generaciones.

En la Facultad de Estudios Superiores Aragón se vive una situación de este tipo ya que a pesar de que cuenta con una infraestructura importante en cuanto a laboratorios, no es suficiente ya que en algunos casos el equipo disponible se encuentra inhabilitado o bien existen áreas del conocimiento en las que no se cuenta con equipos didácticos que apoyen la enseñanza correspondiente. En respuesta a estas carencias, en el año 2005 se consiguió el apoyo del programa institucional denominado PAPIME, para realizar el proyecto: Diseño y rehabilitación de equipos del laboratorio de mecánica de la FES Aragón con clave PE102505. Uno de los objetivos del proyecto, consiste en diseñar, construir e instrumentar una serie de equipos didácticos para reforzar el aprendizaje de los fenómenos típicos de la mecánica de sólidos con los cuales en ese momento no contaba el laboratorio de mecánica y cuya adquisición resulta muy costosa.

Entre los equipos didácticos citados, se encuentra un equipo que permite a los alumnos estudiar el fenómeno de pandeo en columnas largas el cual se presenta frecuentemente en el diseño de elementos mecánicos tanto en la ingeniería mecánica como en la civil. Dicho equipo fue denominado: equipo para el ensayo de pandeo en columnas y su diseño, construcción e instrumentación es el objetivo del presente trabajo.

El equipo diseñado consiste esencialmente de tres partes:

- a) Una mecánica que permite el montaje de las columnas de prueba, dotada de un sistema de aplicación de cargas de compresión.
 - b) Transductores instrumentados con galgas extensométricas que permiten medir la magnitud de la carga aplicada y el desplazamiento lateral de la columna durante el pandeo
-



- c) Un instrumento electrónico que despliega y registra las variables medidas.

De los sistemas que componen el Equipo para el Ensayo de Pandeo en Columnas (EEPC), los dos primeros fueron desarrollados en el presente trabajo mientras que el tercero fue proporcionado por un equipo de ingenieros electrónicos que colaboraron en el proyecto.

El resultado final del trabajo consiste en un prototipo del EEPC conformado por más del 90% de sus componentes y materiales para su fabricación de origen nacional y con un costo de aproximadamente 1/3 del precio de uno importado.

A continuación se presenta de manera breve, una descripción general del trabajo en la que se muestra la metodología empleada para alcanzar el objetivo trazado.

En el Capítulo 1, se presentan una serie de conceptos básicos necesarios para fundamentar el diseño e instrumentación del equipo, así como una descripción de los fenómenos que se comprobarán experimentalmente en el equipo. En la segunda parte del capítulo se discuten los conceptos fundamentales de la extensometría eléctrica los cuales son de gran interés para el presente trabajo debido a que la medición de carga del equipo se realizó empleando dicha tecnología.

En el Capítulo 2, se plantea el problema de diseñar un equipo didáctico como el EEPC de donde se derivan los requerimientos de diseño. Así mismo, en este capítulo se presenta el diseño conceptual y de detalle del equipo.

En el Capítulo 3, se presenta el prototipo del equipo incluyendo una descripción detallada de sus componentes. Finalmente, en este mismo capítulo se proponen tres prácticas de laboratorio, las cuales permiten comprobar experimentalmente la llamada Teoría de Euler. Las prácticas propuestas incluyen una descripción del montaje y operación del equipo que han sido tomadas como base para elaboración de un manual de operación del equipo.

Finalmente, en el Apéndice 1 se hace referencia a métodos de comparación de la Teoría de Pandeo, así como algunos casos especiales de pandeo. En el Apéndice 2, se incluyen los planos construcción de cada uno de los elementos que conforman el equipo de Pandeo.

Capítulo 1

Conceptos Generales de Estructuras.



1.1.-Conceptos Mecánicos Estructurales.

La ingeniería estructural, como muchas ramas de la ingeniería, es un campo amplio, con un crecimiento que se va desarrollando día a día, y esto se debe entre otras cosas, al auge de nuevas herramientas computacionales. De hecho, se cuenta con acervo informativo sobre el tema.

Se define una estructura como:

“Un cuerpo capaz de resistir cargas aplicadas sin que exista una deformación excesiva de una de sus partes con respecto a otra.” [1]

Esta definición elimina del campo de las estructuras aquellos elementos mecánicos en los que los efectos cinemáticos y dinámicos son importantes.

La función de una estructura es, por lo tanto, transmitir fuerzas de un punto del espacio a otro, resistiendo su aplicación y sin perder su estabilidad.

1.1.1.-Antecedentes Históricos.

El ser humano ha tenido en su haber evolutivo la necesidad de transformar a la naturaleza, y la explicación del comportamiento de ésta al modificarla fue entendida en forma empírica, llevando estos conocimientos a una primera perfección con el desarrollo de culturas como la egipcia, la babilónica, etc.

Pero no fue hasta que los filósofos como Aristóteles (384-322 A.C.) y Arquímedes (287-212 A.C.) formularon las bases de la mecánica estructural dando los principios fundamentales de la estática. Y no es sino hasta la segunda mitad del siglo XVII y principios del siglo XVIII donde la mecánica estructural avanza a pasos agigantados; poniendo de manifiesto este avance el desarrollo de la ley de las reacciones lineales entre fuerzas y deformaciones de los materiales emitido por Robert Hooke (1636-1703).

Al mismo tiempo, se desarrollan conceptos avanzados de matemáticas, al igual que los principios de mecánica, que sirven de base para que Leonhard Euler (1707-1783) desarrolle la teoría del pandeo en columnas.

El desarrollo de la mecánica estructural continuó enormemente en el siglo XIX y hacia la primera mitad del siglo XX, cuando se desarrollan la mayor parte de los métodos clásicos para el análisis de las estructuras.

Finalmente el desarrollo de las computadoras en la década de los 70´ revolucionó el análisis estructural debido, entre otras cosas, a que estos equipos puede resolver grandes sistemas de ecuaciones simultáneas, mismo que se ven reflejados en la obtención de resultados en menor tiempo; mencionando un ejemplo, se tiene que si un análisis el cual llevaba días ó a veces semanas en realizarse, en la era previa a la computadora, hoy día puede realizar en segundos.

Esto hace común realizar análisis estructurales por medio de programas computacionales lo cual permite ver una simulación completa del fenómeno estudiado y obtener nuevos métodos de solución que superan ya en mucho a los clásicos.



1.1.2.-Clasificación y aplicaciones de las estructuras.

Existen varias clasificaciones de las estructuras basadas en el análisis que se va a realizar. A continuación se muestran varias de ellas:

a) Clasificación debido a los elementos componentes [2]

1. Lineales o constituidas por elementos en los que una de sus dimensiones es mucho mayor que las otras dos, entre éstas se encuentran las vigas y las columnas, y para su análisis pueden representarse por su eje.
2. De superficie. Se caracterizan por que dos de sus dimensiones son mucho mayores que la tercera (espesor) y en el análisis pueden representarse por el plano medio. Estas superficies pueden ser planas, por ejemplo las losas, o curvas como en el caso de los cascarones.
3. Volúmenes. Se caracterizan por que las tres dimensiones son del mismo orden de magnitud, y en el análisis se toman en cuenta las tres dimensiones. Es el caso de las presas, losas gruesas que se utilizan en cimentaciones especiales etc.

b) Clasificación debido a la organización de los elementos componentes:

1. Planas. Cuando las cargas y los ejes de todos los elementos están contenidos en un plano.
2. Espaciales. Cuando las cargas y los ejes están contenidos en planos distintos.

c) Clasificación debido al grado de hiperestaticidad (diferencia entre número de ecuaciones independientes y número de reacciones internas en una armadura)

1. Isostáticas. Cuando el grado de hiperestaticidad es igual a cero.
2. Hiperestáticas. Cuando el grado de hiperestaticidad es mayor a cero.

d) Clasificación debido al material que las constituye:

1. Estructuras hechas con materiales que siguen la ley de Hooke.
2. Estructuras hechas con materiales que no siguen la ley de Hooke, es decir que la relación fuerza-desplazamiento no es una relación lineal.

e) Clasificación debido al tipo de esfuerzos primarios que se desarrollan en sus miembros debido a las cargas principales de diseño [4]

1. Estructuras a Tensión
2. Estructuras a Compresión
3. Estructura de Esfuerzo Cortante
4. Estructuras de Flexión

1.1.3.-Estructuras a tensión.

En este tipo de estructuras, sus miembros están sometidos a tensión pura bajo la acción de cargas externas. Debido a que el esfuerzo de tensión se distribuye de manera uniforme sobre las áreas de las secciones transversales de los miembros, el material de una estructura de este tipo se utiliza de manera más eficiente. Con frecuencia, se emplean estructuras de tensión compuestas de cables flexibles de acero para sostener puentes o techos de claros largos.



En virtud de su flexibilidad, los cables tienen una rigidez despreciable a la tensión y sólo pueden desarrollar tensión. De este modo bajo cargas externas, un cable adopta la única forma que le permite soportar la carga sólo por fuerzas de tensión. Es decir, la forma de un cable cambia al variar las cargas que actúan sobre él.

Además de las estructuras de cables, como los puentes colgantes, otros ejemplos de estructuras a tensión incluyen las barras verticales usadas como suspensores, por ejemplo para sostener balcones o tanques, y las estructuras de membrana como los toldos.

1.1.4.-Estructuras a compresión.

Están sometidas principalmente a esfuerzos de compresión bajo la acción de cargas externas. Dos ejemplos son las columnas y los arcos; las columnas son miembros rectos sujetos a cargas axiales de compresión. Cuando un miembro recto se sujeta a cargas laterales o a momentos, o a ambas acciones, se llama viga-columna.

Debido a que las estructuras a compresión son susceptibles de sufrir pandeo o inestabilidad, en sus diseños debe considerarse la posibilidad de una falla de este tipo; si es necesario, debe proporcionarse un arriostramiento adecuado para evitar esas fallas.

1.1.5.-Estructura de esfuerzo cortante.

Las estructuras de esfuerzo cortante, como los muros de esfuerzo cortante de concreto reforzado, se usan en edificios de varios pisos para reducir los movimientos laterales debidos a las cargas del viento y las excitaciones de los temblores de tierra. En las estructuras de esfuerzos cortantes en un plano, con esfuerzos relativamente pequeños de flexión, bajo la acción de cargas externas.

1.1.6.-Estructuras de flexión.

En las estructuras de flexión se desarrollan principalmente esfuerzos normales debido a la acción de fuerzas externas de flexión. En algunas estructuras, los esfuerzos cortantes asociados con los cambios en los momentos flexionantes también pueden ser significativos y deben considerarse en sus diseños. Algunas de las estructuras de uso común como las vigas, los armazones rígidos, las losas y las placas, se pueden clasificar como estructuras de flexión. Una viga es un miembro recto que se carga en sentido perpendicular a su eje longitudinal, en esta el esfuerzo normal varía en forma lineal sobre el ancho de la viga, desde el esfuerzo máximo de compresión en la fibra más alejada del eje neutro en el lado cóncavo de la viga flexionada, hasta el esfuerzo máximo de tensión en la fibra más exterior del lado convexo.

En la práctica se pueden encontrar estas estructuras básicas en forma independiente o, como sucede en la mayoría de los casos, dos o más de ellas formando una sola como en un edificio o puente.

1.2.-Columnas.

Una columna se define como un “miembro estructural largo y esbelto cargado axialmente en compresión”. [3]

Cuando se diseña un miembro es necesario que se satisfagan requisitos específicos de resistencia, deflexión y estabilidad. Suponiendo que éste se encuentra en equilibrio estable puede someterse a cargas de compresión y siendo una columna, provocará que se deflexione lateralmente rompiendo la estabilidad, a este efecto se conoce como **Pandeo**.

Su importancia radica en que puede conducir a un colapso de la estructura ó mecanismo. Para explicar este fenómeno, se considera una estructura idealizada como se muestra en la Figura 1.1.

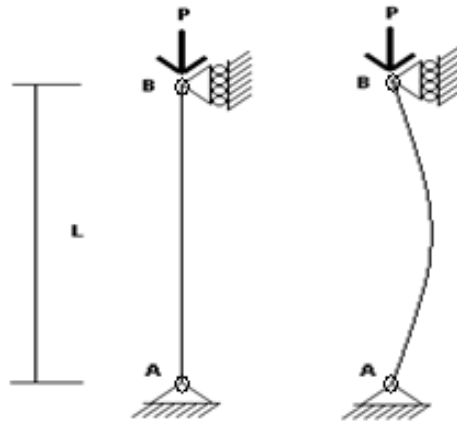


Figura 1.1. Pandeo en columna debido a una carga de compresión P .

1.2.1.-Estabilidad e Inestabilidad.

Para explicar el concepto de estable e inestable, se analiza una barra articulada en su parte inferior y sustentada por un resorte elástico de rigidez γ localizado en la parte superior (La rigidez γ es conocida también como la constante de resorte).

La barra soporta una carga P alineada con el eje centroidal de la barra, por lo que el resorte no ejerce ninguna fuerza inicial. A continuación se aplica una fuerza externa que provoca que la barra gire un pequeño ángulo θ respecto al punto A.

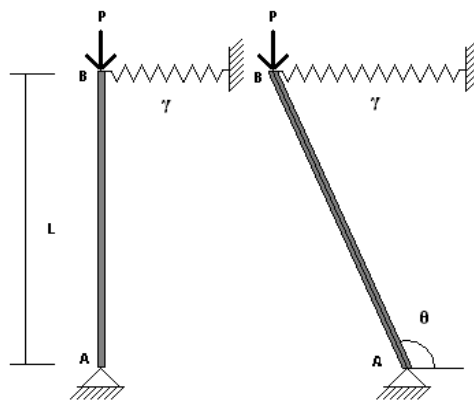


Figura 1.2. Pandeo de una barra rígida soportada por un resorte.

Si P es pequeña, el sistema barra – resorte es estable y regresará a su posición original inicial al retirar la fuerza perturbadora.



Por otro lado, si P es grande, la barra girará continuamente y se colapsará el sistema, por tanto, para una fuerza grande, el sistema es inestable.

Si se analiza el sistema barra – resorte con detalle considerando su equilibrio Fig 1.2. El resorte se elonga a razón de θL donde L es la longitud de la barra y θ es pequeño, entonces la fuerza F será:

$$F = \gamma\theta L \quad (1.1)$$

Esta fuerza origina un momento positivo (en base a la regla de la mano derecha) con respecto a A , de magnitud FL , o sea, $\gamma\theta L^2$ y se le conoce como momento restaurador, el cual tiende a regresar la barra a su posición original.

La fuerza P genera un momento negativo respecto a A , que tiende a sobregirar la barra, entonces $P\theta L$ es el momento de vuelco, el sistema es estable y la barra regresará a la posición vertical inicial, pero, si el momento de vuelco excede al momento restaurador, el sistema es inestable y la barra se colapsará girando en grandes ángulos, esto es:

Si $P\theta L < \gamma\theta L^2$, o sea, $P < \gamma L$ es estable.

Si $P\theta L > \gamma\theta L^2$, o sea, $P > \gamma L$ es inestable. (1.2)

1.2.2.-Carga Crítica.

La **Carga Crítica** se define como la transición de un sistema estable a uno inestable y ocurre cuando $P\theta L = \gamma\theta L^2$, por lo tanto la carga P se expresa como:

$$P = \gamma L \quad (1.3)$$

Habiendo definido la carga crítica podemos entonces decir que si $P < P_{crítica}$ el sistema es estable, e inestable si $P > P_{crítica}$ esto es, la barra está en equilibrio sólo cuando $\theta = 0$ y la carga $P < P_{crítica}$ pero es un equilibrio inestable y no puede conservarse [3].

Cuando se presenta la carga crítica, el momento restaurador y el vuelco son iguales para valores pequeños de θ , entonces la barra está en equilibrio para cualquier valor pequeño de θ y a esto se le conoce como **equilibrio neutro**.

1.2.3.-Teoría de Euler.

Para estudiar el comportamiento en compresión de cuerpos esbeltos, debemos hacer mención de cómo está apoyada la columna y haremos referencia a los cuatro casos estudiados por **Leonard Euler** [3].

- Columnas con extremos articulados.
- Columnas con un extremo empotrado y el otro libre.
- Extremos empotrados.
- Columnas con extremos empotrados y el otro articulado.



1.2.4.-Columnas con extremos articulados.

Consideremos una columna con carga axial, sometida a una carga de pandeo P_e que produce una deflexión y a una distancia x de un extremo, como los extremos son articulados, no existirá momentos en ellos, como se muestra en la Figura 1.3.

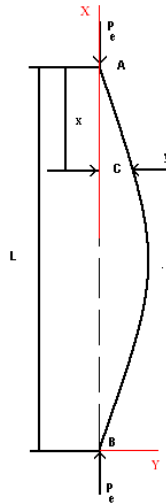


Figura 1.3. Columnas con carga axial y extremo articulado.

Analizando el D.C.L. de la Figura 1.3, se pueden utilizar las ecuaciones en su forma diferencial como la curva de deflexión de una viga [13].

$$C = EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M \quad (1.4)$$

Pero " M ", se define como:

$$M = -P_e y \quad (1.5)$$

Sustituyendo en la ecuación (1.4) la ecuación (1.5) se tiene.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + P_e y = 0$$

Dividiendo toda la expresión (1.6) por EI , y haciendo el arreglo en operadores diferenciales, se obtiene:

$$D = \frac{d}{dx} \quad y \quad k^2 = \frac{P_e}{EI}$$

$$(D^2 + k^2)y = 0 \quad (1.7)$$

Entonces la ecuación característica queda como.

$$m^2 + k = 0$$

Al resolver la ecuación cuadrática se encuentran las raíces m_1 y m_2 las cuales son imaginarias, por lo tanto.

$$y = C_1 e^{\alpha x} \text{Cos}(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \text{Sen}(\beta x)$$



Sustituyendo en la ecuación

$$y = e^{\alpha x} [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \operatorname{Sen}(\beta x)]$$

Como $k=0$

$$y = C_1 \cos(\beta x) + C_2 \operatorname{Sen}(\beta x)$$

Y como $\beta = k = \sqrt{\frac{P_e}{EI}}$

$$y = C_1 \cos(\sqrt{kx}) + C_2 \operatorname{Sen}(\sqrt{kx}) \quad (1.8)$$

Para definir las constantes C_1 y C_2 , se debe tener en cuenta que tipos de condiciones de frontera tendrá cuando sea sometida a carga de compresión.

Para el caso articulado, se toma la ecuación (1.8), y aplicando las condiciones de frontera en $y=0$ y $x=0$.

$$0 = C_1$$

Ahora en $x=L$ y $y=0$;

$$\operatorname{Sen}[\sqrt{kx}] = 0$$

Ahora si $C_2=0$ y $y=0$ todavía no se presenta pandeo, por lo tanto, si $\operatorname{Sen}(0)=0$ es equivalente en radianes a π , entonces:

$$L\sqrt{k} = \pi$$

Esto es una solución particular, sustituyendo el valor de $k = \frac{P_e}{EI}$.

$$\frac{P_e}{EI} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$$

Despejando a P_e obtenemos la **Carga Crítica** de Euler para una columna con extremos articulados.

$$P_e = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI \quad (1.09)$$

1.2.5.-Columnas con un extremo empotrado y otro libre.

Consideremos ahora a las columnas donde el origen se encuentra en el extremo empotrado como se ve en la Figura 1.4.

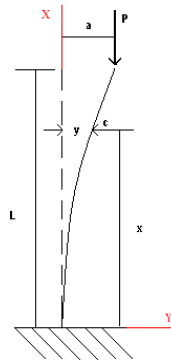


Figura 1.4. Columna con extremo empotrado – libre.

Para este caso, la ecuación diferencial se modifica en base al D. C. L., entonces, la ecuación del momento flector en C queda de la siguiente forma.

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = P(a - y) \quad (1.10)$$

Desarrollando la ecuación (1.10) y dividiendo por EI la misma expresión, se tiene.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI}\right)y = \frac{Pa}{EI}$$

Como en el Caso doblemente articulado, $k^2 = \frac{P}{EI}$, entonces el operador diferencial es.

$$(D^2 + k^2)y = k^2a \quad (1.11)$$

Al resolver la ecuación (1.4), la solución de esta ecuación diferencial se divide en dos partes; para la solución de ecuación no homogénea se debe encontrar la ecuación particular regido por el siguiente modelo matemático:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

Resolviendo la ecuación diferencial no homogénea, obtenemos la siguiente solución.

$$y(x) = C_1 \text{Cos}(\sqrt{kx}) + C_2 \text{Sen}(\sqrt{kx}) + a \quad (1.12)$$

La ecuación (1.12), describe la **Columna con un Extremo Empotrado y otro Libre**, pero se aplican los valores de frontera, el resultado se modifica y si se sustituye $k^2 = \frac{P}{EI}$, la ecuación queda de la siguiente manera

$$\text{Cos}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)L = 0$$



Despejando la función trigonométrica.

$$L \sqrt{\frac{P}{EI}} = 90^\circ \rightarrow \frac{1}{2} \pi$$

Despejando ahora a P tenemos.

$$P_{\text{cr}} = P = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (1.13)$$

Esta es la carga crítica para una columna con extremo empotrado y otro libre.

1.2.6.-Columna con un extremo empotrado y el otro articulado.

En este caso se trata de conservar la articulación sobre el eje de la columna que no presenta cargas, en este caso, es necesario introducir una carga vertical F en la articulación.

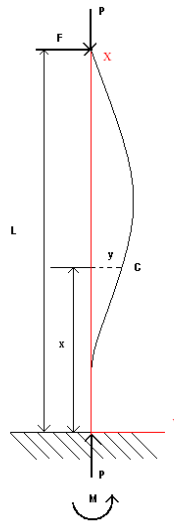


Figura 1.5. Columna con un extremo articulado y el otro empotrado.

El momento flector de F respecto al extremo fijo, equilibra el momento generado en el empotramiento.

La ecuación característica que representa el pandeo para este caso es:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py + F(L - x) \quad (1.14)$$

La ecuación (1.14) muestra una ecuación diferencial no homogénea y al igual que en la ecuación (1.10), se debe encontrar una ecuación particular, entonces, por operadores diferenciales.



$$(D^2 + k^2)y = \frac{F}{EI} (L - x) \quad (1.15)$$

La solución a esta ecuación será:

$$y = A \cos(kx) + B \sin(kx) + \frac{F}{P} (L - x) \quad (1.16)$$

Aplicando los valores de frontera, esto es, cuando $x = L$ y $y = 0$.

$$\tan(kL) = kL$$

Si el valor mínimo de kL (sin considerar el valor de 0) que satisface esta condición fundamental de pandeo es $kL = 4.5$ radianes.

$$L \sqrt{\frac{P}{EI}} = 4.5$$

La expresión de la carga crítica para una columna con un extremo empotrado y el otro articulado.

$$P_c = \frac{2\pi^2 EI}{L^2} \quad (1.17)$$

1.2.7.-Columna con extremos empotrados.

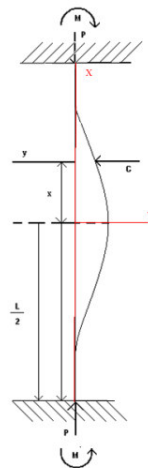


Figura 1.6. Columna con extremos empotrados.

Cuando el origen se muestra en el centro de la columna, la ecuación diferencial se expresa de la siguiente manera.



$$EI \frac{d^2}{dx^2} = M - Py \quad (1.18)$$

Por medio de operadores la expresión (1.18) la representamos de la siguiente forma.

$$(D^2 + k^2)y = \frac{M}{EI} \quad (1.19)$$

Haciendo referencia en los casos anteriores, se tiene una ecuación diferencial no homogénea, por tanto, se realizara el procedimiento antes visto para obtener la ecuación particular y así completar la ecuación solución.

$$y = A \cos(kx) + B \sin(kx) + \frac{M}{EI} \quad (1.20)$$

Aplicando las condiciones de frontera, se encuentra la carga de Euler, despejando a P y haciendo

$$P_e = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (1.21)$$

1.2.8.-Limite de validez.

Resulta interesante, que la teoría de Euler no es segura para proporciones de $\frac{L}{k}$ pequeñas. Entonces, resulta útil calcular el límite de $\frac{L}{k}$ por debajo del cual no debemos aplicar la teoría de Euler y se llama **Limite de validez**.

Este límite es el punto en el cual el esfuerzo σ_y de Euler es igual al esfuerzo de fluencia, σ_0 entonces.

$$P = \sigma_y A \quad (1.22)$$

Y esto conduce a que la carga " P_e " puede expresarse como:

$$P_e = C \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{C\pi^2 EAK^2}{L^2} \quad (1.23)$$

Aquí " C " es constante y depende de las condiciones de los extremos de la columna, entonces:

$$\sigma_y A = C \frac{\pi^2 EAK^2}{L^2} \quad (1.24)$$

Los valores cambian según el tipo de condiciones de frontera.

1.2.9.-Columnas con cargas laterales.

Para explicar este caso, se hace referencia a la existencia de dos maneras de cargar a una columna:

- Carga central concentrada.
- Carga uniformemente distribuida.



Para el diseño del equipo sólo se tomará el concepto de carga central concentrada, pero haciendo una breve mención de la carga distribuida uniformemente.

Con el origen en el centro de la columna como se mostrará en la siguiente figura 1.7, se encontrarán las ecuaciones que expliquen el fenómeno.

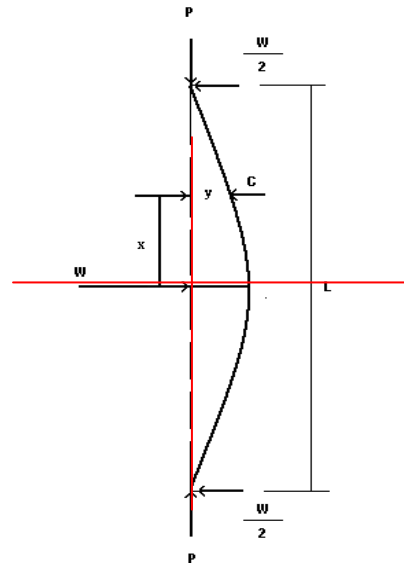


Figura 1.7. Columna con cargas laterales.

Si obtiene el momento flector en el punto C.

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -Py - \frac{W}{2} \left(\frac{L}{2} - x \right) \quad (1.25)$$

La solución de la ecuación diferencial es

$$y = A \cos(kx) + B \sin(kx) - \frac{W}{2P} \left(\frac{L}{2} - x \right) \quad (1.26)$$

Aplicando las condiciones de frontera en la ecuación (52) tenemos.

Cuando $x = 0$ y $\frac{dy}{dx} = 0$

$$B = -\frac{W}{2kP}$$

Cuando $x = \frac{L}{2}$ y $\frac{dy}{dx} = 0$

$$y = \frac{W}{2kP} \left[\tan\left(\frac{WL}{2}\right) \cos(kx) - \sin(kx) - k \left(\frac{L}{2} - x \right) \right]$$

Cuando $x = 0$ la deflexión es

$$y_{max} = \frac{W}{2kP} \left[\tan\left(\frac{kL}{2}\right) - \frac{kL}{2} \right] \quad (1.27)$$



El momento flector que actúa en la columna se encuentra en la misma posición y está dado por

$$M_{max} = -Py - \frac{WL}{2}$$
$$M_{max} = -\frac{W}{2k} \tan\left(\frac{kL}{2}\right) \quad (1.28)$$

1.3.-Extensometría eléctrica.

El Análisis Experimental de Esfuerzos (AEE) es un área del conocimiento que representa una poderosa herramienta para la determinación de esfuerzos en elementos estructurales. En realidad, las técnicas de AEE permiten determinar con mucha precisión las deformaciones asociadas a las cargas aplicadas y a las restricciones de desplazamiento impuestas al elemento. Además, existen técnicas que proporcionan información de campo, como la foto-elasticidad y las mallas de Moire, o bien puntual como es el caso de las galgas extensométricas.

La llamada **Extensometría Eléctrica**, es una técnica experimental que nos permite medir la deformación en un punto con un alto grado de exactitud lo que aunado a su relativa facilidad de instalación y bajo costo, la convierte en una herramienta muy poderosa en el campo de la ingeniería. De hecho para estados de esfuerzos planos, la extensometría eléctrica permite determinar el estado de esfuerzos de un punto en una estructura con gran precisión aunque esta última depende de la forma en que varían los esfuerzos a lo largo de la pieza.

Otra aplicación importante de la extensometría eléctrica es el diseño y construcción de transductores electrónicos capaces de medir variables mecánicas tales como: fuerza, presión, desplazamiento, aceleración, par torsional entre otras. La construcción de un transductor consiste esencialmente en instrumentar con galgas extensométricas un elemento mecánico cuya respuesta a las cargas aplicadas es lineal y conocida.

1.3.1.-Operación del extensómetro.

Los métodos de análisis experimental de esfuerzos se basan en la deformación del elemento sometido a cargas. Existen instrumentos de medición tales como eléctricos, acústicos, ópticos, etc., los cuales aseveran lo dicho anteriormente.

El principio de operación de los extensómetros eléctricos se basan en los cambios de resistencia eléctrica que sufre un conductor debido a cambios en su longitud, este principio es enunciado por Lord William Thomson Kelvin y no fue sino hasta 1938 en que Simmons y Ruge emplearon lo que se considera en la actualidad como extensómetro eléctrico.

La ecuación que rige la operación del extensómetro es la resistividad eléctrica la cual está basada en lo siguiente. La resistencia eléctrica de cualquier conductor depende del material que se trate y de sus dimensiones y se expresa de la siguiente forma:



$$\rho = \frac{RA}{L} \quad (1,29)$$

donde R es la resistencia eléctrica [Ohms], L es la longitud [m], A es el área seccional de del conductor [m^2] y ρ es la resistividad [Ohms * m^2 /m]².

La resistencia eléctrica de un conductor solicitado a un esfuerzo cambia proporcionalmente a la deformación que este sufre lo cual se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{\Delta R}{R} = FE \frac{\Delta L}{L} \quad (1.30)$$

Donde R y L son la resistencia eléctrica y la longitud del conductor antes mencionado y FE es el factor de proporcionalidad (**Gage Factor**). Es posible entonces obtener la deformación unitaria de un elemento estructural ($\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon$).

1.3.2.-Estructura del extensómetro.

El extensómetro se encuentra formado de diferentes materiales tanto en la aleación del filamento como en el encapsulado aparte de encontrarlo en infinidad de formas, llámese uniaxial, roseta a 45°, a 120°, con filamentos soldados, con rejilla expuesta etc...

En este apartado se habla de la estructura física del extensómetro (Ver Figura 1.8). El filamento ésta encapsulado en una poliamida flexible la cual se logra por métodos avanzados de foto proyección el cual da características únicas en el momento de pegado, el filamento se encuentra en múltiples aleaciones tales como constantan o cobre. [16]

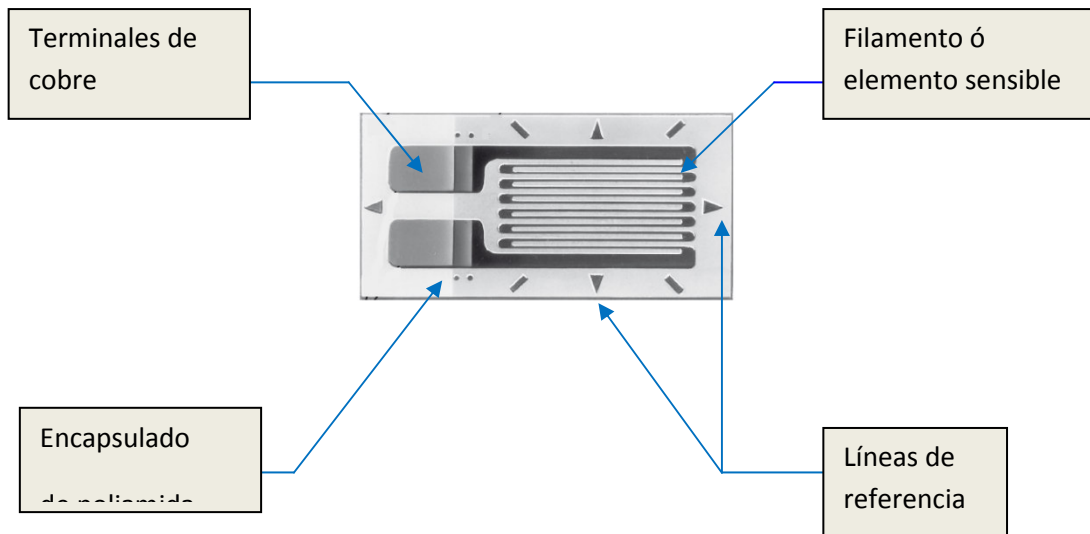


Figura 1.8. Partes de un extensómetro.

1.3.3.-Puente de Wheatstone.

El circuito característico para conectar un extensómetro y poder medir la señal es el Puente de Wheatstone (Figura 1.9), una de sus principales características es dividir el voltaje de entrada V_0 , de la fuente de energía y suministrar una señal de salida V_S , que es función de V_0 y de la resistencia instantánea de sus ramales (R_1, R_2, R_3, R_4). [11]

$$V_s = V_0 \left[\frac{R_1}{R_1+R_4} - \frac{R_2}{R_2+R_3} \right] \quad (1.31)$$

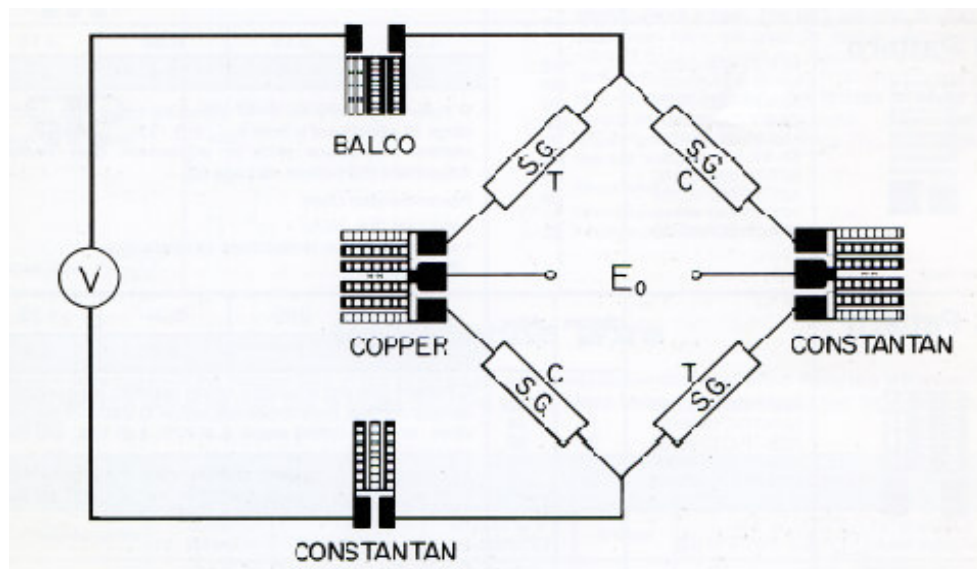


Figura 1.9. Diagrama del Puente de Wheatstone.

Utilizando la Ley de Ohm, V_0 puede ser expresada en términos de la corriente I_0 como:

$$V_0 = I_0 R_b \quad (1.32)$$

En donde R_b es la resistencia del puente entre nodos de alimentación. Por tanto R_b está expresada como:

$$R_b = \frac{(R_1+R_4)(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3+R_4} \quad (1.33)$$

La relación clave para entender el Puente de Wheatstone a través del suministro de corriente, donde la salida puede ser encontrada para cualquier combinación entre las resistencias del puente y la corriente de entrada es:

$$V_0 = I_0 * \frac{(R_1+R_4)(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3+R_4} \quad (1.34)$$

1.3.4.-Celda de Carga.

Para hacer un transductor, específicamente una Celda de compresión, se recurre a hacer un arreglo en puente completo, es decir, se deben colocar en la muestra a comprimir 4 extensómetros conectados entre sí de los cuales dos irán alineados al eje longitudinal de la muestra y los otros dos en el eje transversal de la misma.

Puesto que la muestra se maquina de forma cuadrada en su parte central no requiere compensador de deformaciones. [11]

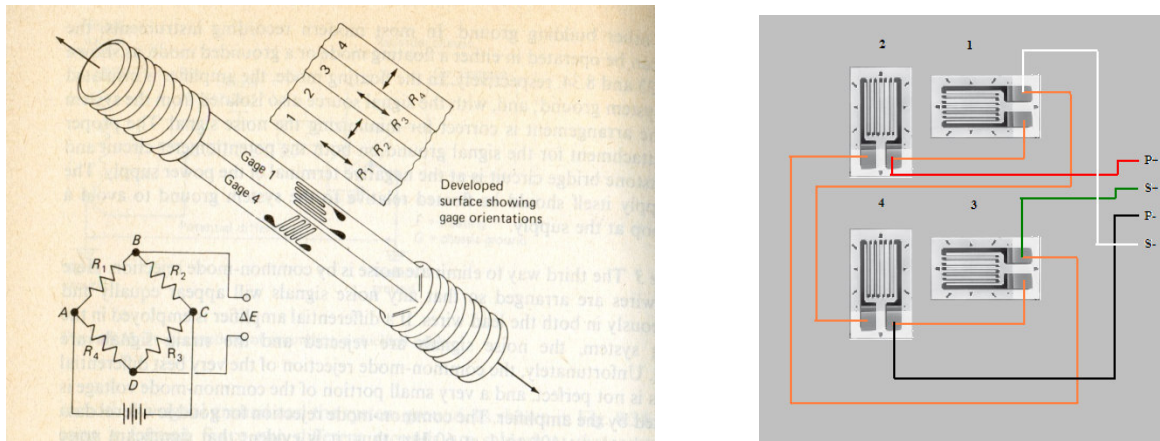


Figura 1.10. Extensómetros montados en una probeta a tensión el cual produce una celda de carga y diagrama de conexión del puente completo.

Las ecuaciones para validar la celda de carga del equipo de pandeo en columnas fueron planteadas de la siguiente forma:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1.35)$$

En esta expresión se sustituye la F por P_e (Carga crítica), de tal forma que la expresión del esfuerzo queda desarrollada de la siguiente forma:

$$\sigma = \frac{\pi^2 E_{Columna} b h^3}{12AL^2} \quad (1.36)$$

Aplicando la Ley de Hooke, se encuentra las deformaciones teóricas que se validarán con las medidas arrojadas por la celda de compresión en el equipo indicador, de aquí la expresión para las deformaciones teóricas queda de la siguiente forma:

$$\varepsilon = \frac{\pi^2 E_{Columna} b h^3}{12AL^2 E_{resida}} \quad (1.37)$$

Capítulo 2.

Diseño de equipo para medir el Pandeo en Columnas.



2.1.-Requerimiento de diseño y planteamiento de problema.

La educación ingenieril en el país vive hoy día la gran necesidad de complementar los planes de estudio con equipos didácticos que permitan reafirmar los conceptos teóricos.

Esto lleva a la dependencia tecnológica con países desarrollados para adquirir estos equipos mencionados.

Un problema al que se enfrentan las dependencias educativas ya sean públicas o privadas, es el alto costo que implica la obtención de estos equipos, así como el soporte técnico y la capacitación operativa del personal. Esto hace que los presupuestos de estas dependencias sean insuficientes.

Particularizando el problema, en la FES Aragón existe un laboratorio de Mecánica, el cual cuenta con equipo didáctico en desuso y en malas condiciones, por ello, y por medio del proyecto PAPIME se propone la rehabilitación de dichos equipos, así como la creación de otros tres más (máquina para medir flexión, máquina para medir pandeo en columnas y probador mecánico portátil), esto con la finalidad de ampliar la gama de equipo ya existente, así como reforzar los planes de estudio en el área de mecánica de sólidos y otras materias afines, impartidas en la misma FES.

Con este programa, se da inicio al desarrollo de tecnología propia para satisfacer las necesidades particulares del plan de estudios impartido en la Facultad, asimismo se busca abaratar el costo de los equipos en comparación con el mercado extranjero.

2.2.-Desarrollo de equipo de pandeo en columnas.

El análisis del diseño de elementos sometidos a tensión ó torsión difiere de forma significativa de elementos sometidos a compresión, por tal motivo, se planteo diseñar una máquina que fuera capaz de pandear columnas de diferentes materiales para observar el comportamiento real y compararlo con el modelo teórico de Euler. En base a esto, se tomaron los siguientes puntos para el diseño:

- Facilidad de montar y desmontar el equipo.
- Recreación de los cuatro casos de pandeo y carga lateral. [Capítulo 1]
- Medición de la carga crítica aplicada a columnas.
- Medición del desplazamiento en cualquier punto de la columna.
- Reducción de costos de fabricación en comparación con los equipos extranjeros.

Y finalmente, disminuir el tiempo de fabricación y entrega.

2.3.-Descripción del equipo para pruebas de pandeo.

Para explicar a detalle el equipo de pandeo, es necesario dividirlo en varios sub componentes, los cuales se enlista a continuación y se muestran en la Figura 2.1.

1. Bastidor principal.
2. Marco de carga.
3. Elementos de pandeo.
4. Celda de compresión y medidor de carga.
5. Aplicador de carga lateral y medición de deflexión.

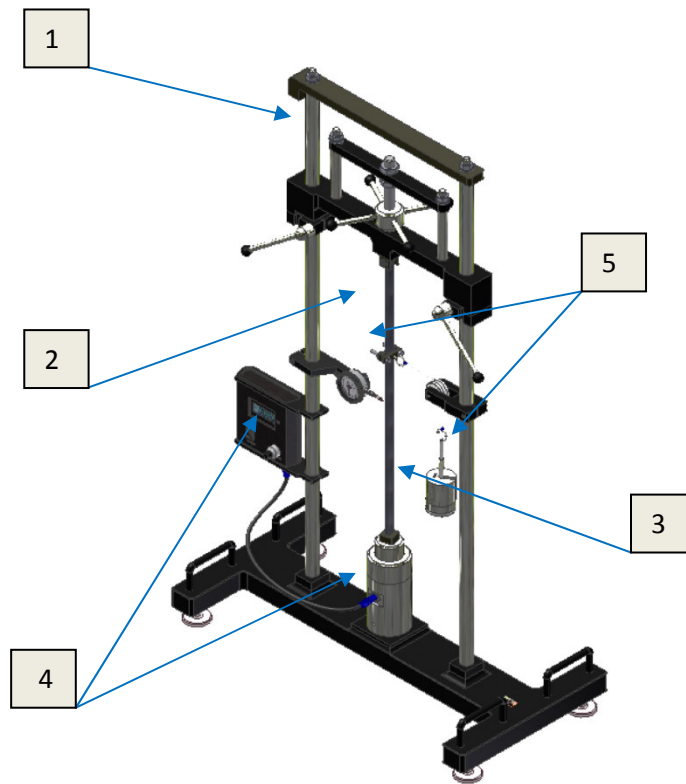


Figura 2.1. Ensamble general para ensayo de pandeo.

A continuación se describe detalladamente cada sub componente, dando un listado de los elementos que lo conforman, así como su funcionamiento dentro del equipo de pandeo.

2.3.1.-Bastidor principal.

Su función principal es dar forma estructural a la máquina y soportar el pandeo de las probetas cuando se le aplica la compresión evitando un desalineamiento causando fuerzas resultantes por el mismo pandeo, así como marco de montaje para todos los componentes auxiliares. Está formado por los siguientes elementos los cuales se enlistan y se muestran en la Figura 2.2.

6. Base.
7. Postes del bastidor.
8. Soporte principal.
9. Soportes de base.
10. Manijas de base.

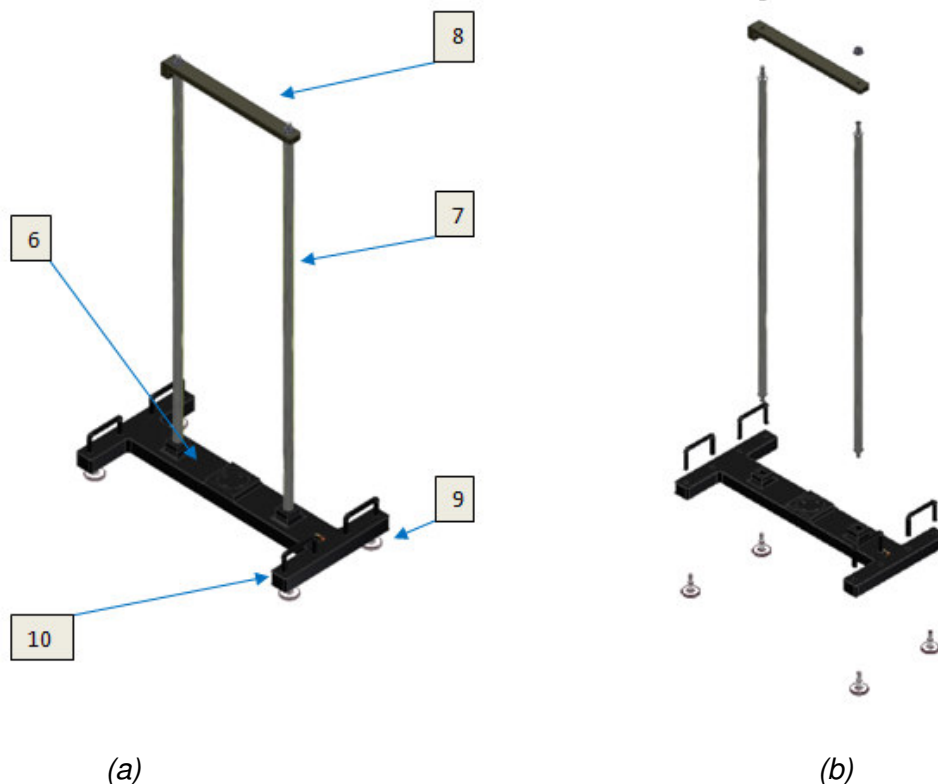


Figura 2.2. Bastidor principal, (a) bastidor ensamblado, (b) explosivo de ensamble.

Cabe destacar, que en la base se coloca la celda de compresión la cual es ajustada de tal forma que no exista movimiento de traslación, soportando las fuerzas que se generen al aplicar las cargas sobre las probetas. Asimismo, este elemento cuenta con partes ajustables para proporcionar una estabilidad horizontal no importando el tipo de superficie donde se coloque el equipo.

2.3.2.-Marco de carga.

El marco de carga es la parte primordial del equipo; ya que en este elemento, quedan instalados el aplicador de carga y los diferentes tipos de dado que simulan los dos tipos de empotramiento, necesarios para reproducir tres de los cuatro casos de pandeo [Capítulo 1].

Cabe destacar, que algunas piezas están diseñadas para soportar esfuerzos y momentos de valor considerable, debido a los diferentes casos que se simulan, es por esto, que se considero una geometría robusta en su diseño.

El aplicador de carga genera una fuerza por medio de un tornillo de potencia, el cual al girarlo por medio de las manijas, produce una fuerza de compresión sobre la probeta; el tornillo esta soportado en una barra horizontal y dos postes de sujeción en los costados como se observa en la Figura 2.3. (a), impiden que existan movimientos traslacionales indeseados sobre el mismo aplicador.

Los dados que simulan los tipos de empotramiento, se colocan en la parte inferior donde ajustan, haciendo contacto con el aplicador de carga; cabe resaltar, que el marco de carga puede ser ajustado con sólo deslizarlo por los postes guía.



La inmovilización está a cargo de dos sujetadores que aplican presión sobre los postes por medio de un diseño de pinza, ayudados por una manija de cada lado para hacer el apriete, esto impide que se deslice el marco de carga cuando se está aplicando una carga en las probetas.

Con base a la Figura 2.3, el marco de carga está conformado por los siguientes elementos:

11. Barra aplicador primario.
12. Soporte de travesaño del aplicador de carga.
13. Poste de aplicador de fuerza.
14. Barra secundaria.
15. Aplicador de carga.
16. Manija de apriete.

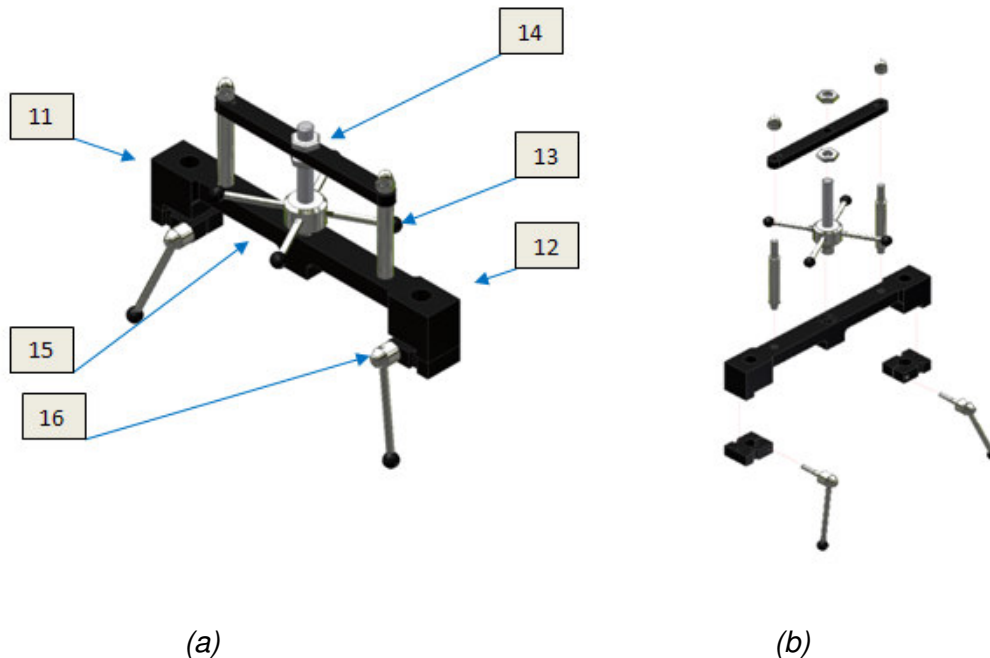


Figura 2.3. Se muestra el marco de carga completo (a) con componentes y (b) en explosivo de ensamble.

2.3.3.-Elementos de pandeo.

Es un conjunto de columnas y dos tipos de dados que simulan condiciones de empotre para reproducir tres de los cuatro casos de pandeo [Capítulo 1]. En el equipo de pandeo se incluyen columnas de diferentes geometrías, así como diferentes materiales

Los elementos de pandeo se conforman de la siguiente manera:

17. Dado para simulación de empotre articulado
18. Dado para simulación de empotre fijo.



- 19. Juego de columnas de diferentes geometrías y materiales.
- 20. Eje de sujeción de columna móvil.
- 21. Mariposa de apriete.

En la Figura 2.4, se muestran las probetas de pandeo, así como una configuración de empotre fijo (superior) y empotre móvil (inferior) para la aplicación de carga.

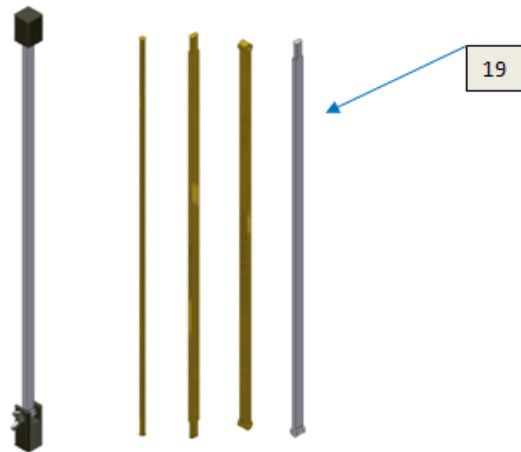


Figura 2.4. Elementos de pandeo.

Para el caso móvil se deberá retirar de su posición el eje donde estará montada la columna móvil, como se ve en la Figura 2.5.

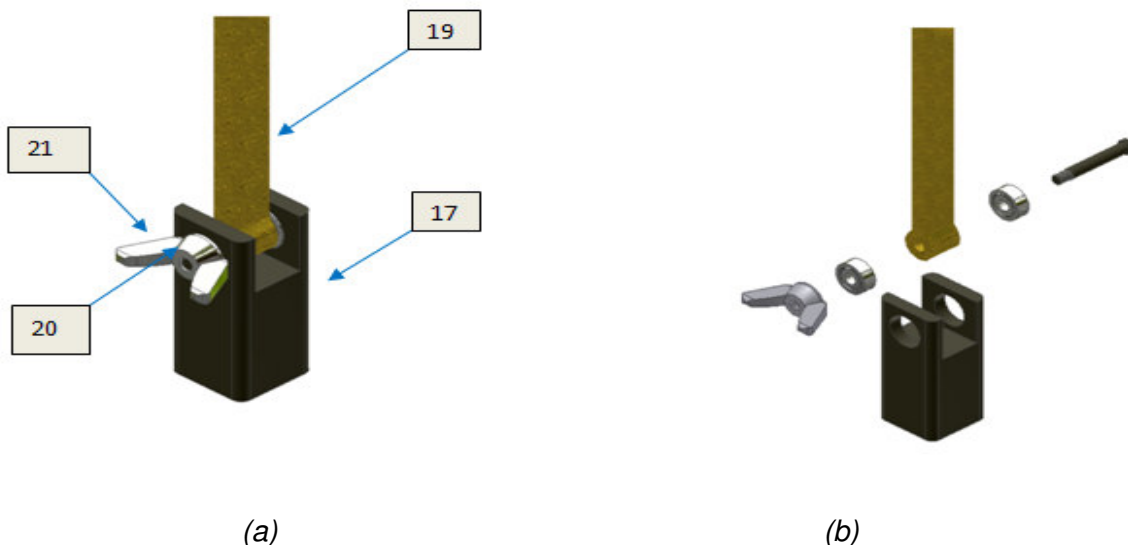


Figura 2.5. Ensamblajes de dado - columna: (a) móvil y (b) explosivo de ensamble.

Para el caso fijo, sólo se inserta uno de los extremos de la columna en el dado como muestra en la Figura 2.6. Los dados embonan perfectamente en el travesaño superior y en el soporte de la celda de compresión en la parte inferior.



Tener en cuenta que también se cuenta con columnas cilíndricas que deben colocarse en la parte circular del dado como se mostrará más adelante.

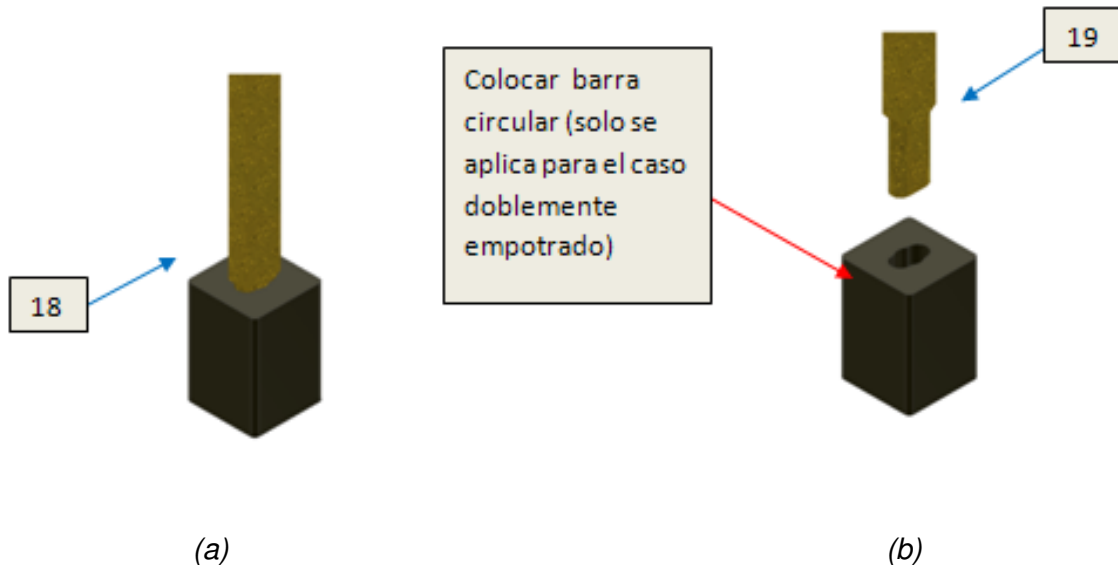


Figura 2.6. Ensamblaje de dado - columna: (a) fijo y (b) explosivo de ensamble.

2.3.4.-Celda de carga y medidor de carga.

Para que el equipo registre datos de la carga aplicada sobre la columna de prueba, era necesario contar con un instrumento que mida esa carga con precisión.

Se evaluaron varios equipos que pudieran funcionar acordes a las necesidades de nuestros equipos, pero el costo de los mismos es muy alto ó la precisión en el mismo no es la adecuada, esto nos llevo a tomar la decisión de diseñar un equipo electrónico que pudiera transformar datos de deformación en valores analógicos con una escala de fuerza, dada en Newtons.

La celda de carga que se ocupo para el diseño del transductor es una barra de aluminio de 0.5pulg. de diámetro por 2,5pulg. de largo y en su parte central se maquino una parte rectangular de .25x.25pulg. respectivamente, lugar donde se pegaron los extensómetros [Capítulo 1].

El equipo indicador cuenta con una pantalla de silicio de 5 dígitos, además de tener una perilla para balanceo y ajuste. Se alimenta con 12V de AC, asimismo es de fácil operación e instalación.

A continuación mostraremos el conjunto de la “celda de compresión – medidor de carga”, Figura 2.7, así como los elementos que lo conforman a detalle.

El conjunto está compuesto por los siguientes elementos enlistados.

22. Botella del transductor de compresión.
23. Tapa del transductor de compresión.
24. Aplicador de carga al transductor.
25. Celda de carga de compresión.



- 26. Cable de transmisión de datos de transductor a equipo medidor.
- 27. Equipo medidor digital CTA 01.
- 28. Soportes del equipo medidor digital.

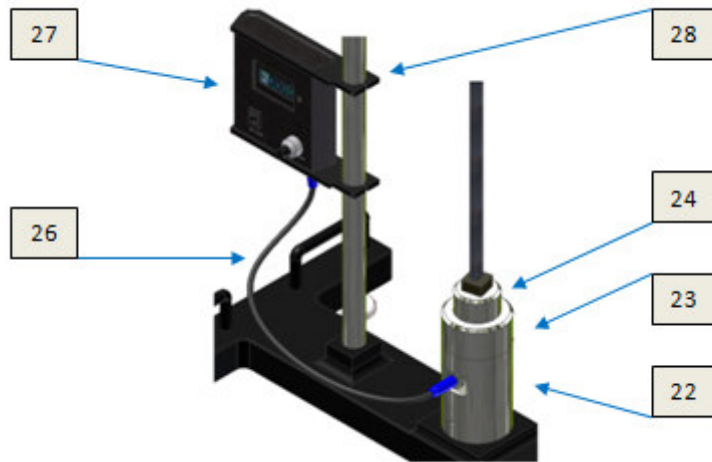
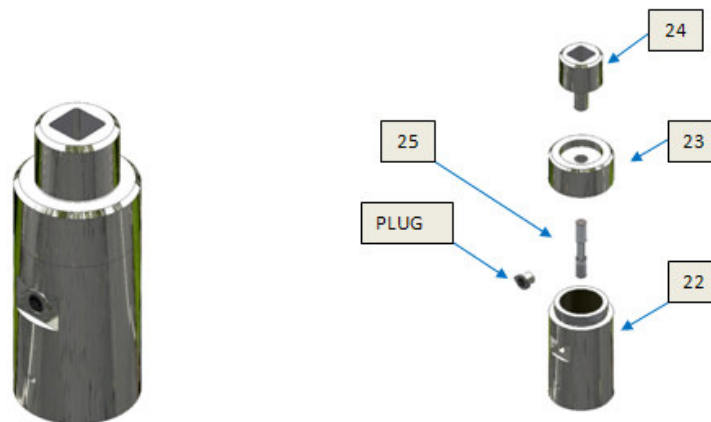


Figura 2.7. Conjunto celda de compresión – indicador digital.

Para una mejor apreciación de la celda de compresión, presentamos un explosivo del transductor, mostrando sus partes esenciales en la Figura 2.8.



(a)

(b)

Figura 2.8. Se muestra, (a) celda de carga de compresión y (b) explosivo de ensamble.



El indicador eléctrico se alimenta por medio de un regulador que cambia el voltaje de 127 V a un voltaje más bajo, cuenta con un interruptor de (on /off) prendido y apagado fácil de ubicar en la parte superior de la caratula del equipo como se muestra en la Figura 2.8, así como una pantalla de silicio liquido de 5 dígitos para observar la medición que se genere en la celda de carga.

En la figura 2.9 se muestra el indicador digital, indicando las partes de conexión, aditamentos y una breve explicación técnica de cada parte.



Figura 2.9. Partes del equipo indicador.



Puesto que el equipo será manipulado por estudiantes, se contemplo un uso de tipo rudo, por lo cual, tanto el conector de la celda, como el enchufe del cable están diseñados para garantizar un óptimo desempeño, pero se deberá tener precaución de conectarse apropiadamente, ya que se puede tener errores en la medición.

En la Figura 2.10, se muestra la manera de cómo se debe conectar el cable con la celda de compresión.

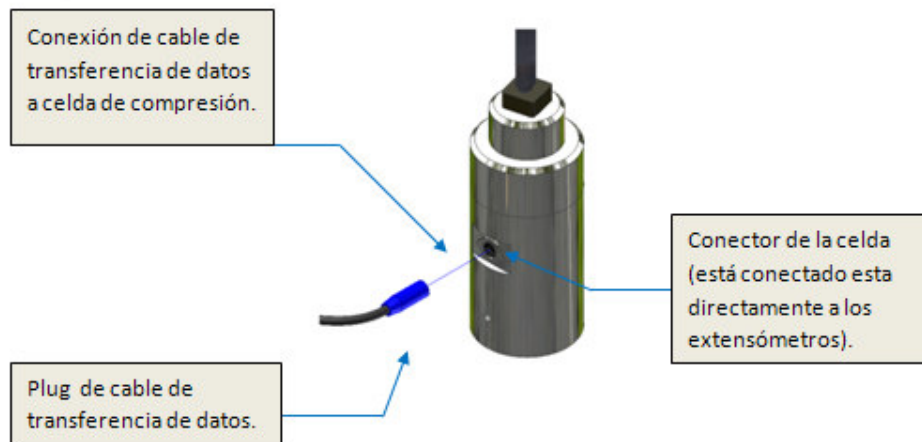


Figura 2.10. Conexión de transductor con cable de transferencia de datos.

En la Figura 2.11, se muestra la conexión al equipo indicador y donde se debe conectar el cable de transferencia de datos.

Cabe destacar que tanto la calibración de la celda de compresión, como el equipo indicador fueron realizados en equipos de alta precisión lo cual garantiza que los datos son fiables y precisos.



Figura 2.11. Conexión del cable de transferencia de datos con el equipo indicador.



2.3.5.-Aplicador de carga lateral y medición de deflexión.

La teoría explica un caso de pandeo con carga lateral [Capítulo 1], por tal motivo se considero en el diseño, una manera de reproducir dicho fenómeno de carga, y se logra por medio de una serie de pesas colocadas en un pedestal con gancho en junto con una polea el cual hace ejercer una carga a la columna. Estas pesas tienen valores de 5N y 20N, pudiendo colocar hasta 50N. Se tiene como instrumento de medición, un micrómetro de desplazamiento que va colocado horizontalmente, sobre una base la cual da la posición correcta para que la punta del vástago de medición toque la cara de la columna y se midan los desplazamientos de la misma cuando se le ha sometido a la carga como se muestra en la Figura 2.12.

Los elementos que conforman este conjunto de aplicación de carga lateral son:

- 29. Sujetador de pesa.
- 30. Cuerda.
- 31. Base de polea y Polea.
- 32. Pedestal con gancho.
- 33. Pesas (5N y 20N).
- 34. Base de micrómetro.
- 35. Micrómetro.

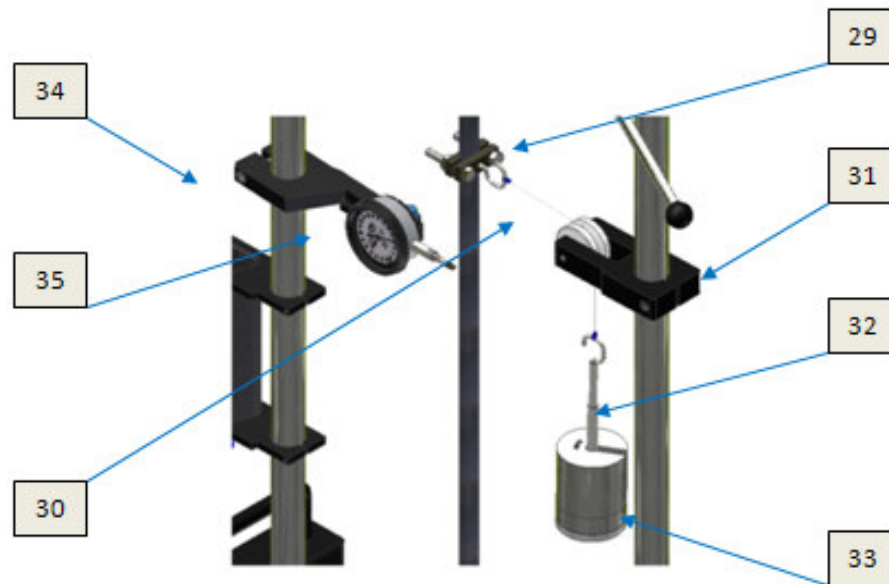


Figura 2.12. Ubicación de los componentes para la aplicación de carga lateral.



Las pesas cuentan con un diseño el cual no permite que se deslicen y caigan por cualquier movimiento, esto se debe a que la parte inferior del poste es de un diámetro más grande y ajusta con el diámetro central de la pesa como se muestra en la Figura 2.13.

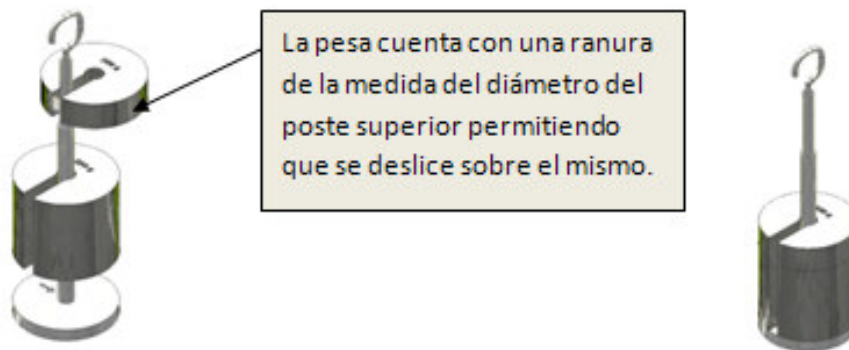


Figura 2.13. Colocación de pesas en el soporte.

El micrómetro se coloca sujeto a un poste principal por medio de una base y ajustado con un tornillo como se muestra en la Figura 2.14. Se debe tener en cuenta la posición del micrómetro para no tener error de paralaje, la punta del vástago de medición debe tocar perfectamente la cara de la columna.



(a)

(b)

Figura 2.14. Colocación del micrómetro, (a) posición con la cara de la columna y (b) acoplamiento con la base por medio de un tornillo de ajuste.



El sujetador de pesas tiene la función de jalar por medio de una cuerda a la columna, debido a la carga generada por las pesas ayudadas por la polea. Esto recrea perfectamente el efecto de carga lateral en una columna en pandeo como dice la teoría [Capítulo 1].

Este sujetador se coloca en la columna por medio de dos piezas, las cuales están unidas por medio de tornillos como se presenta en la figura 2.16 haciendo un aplastamiento y evitando el deslizamiento.

Como se muestra en la Figura 2.15 y Figura 2.16, la cuerda cuenta con dos sujetadores los cuales se colocan en los ganchos, tanto en el sujetador como en el soporte de las pesas.

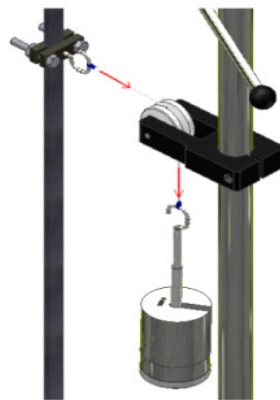


Figura 2.15. Visualización del efecto de la carga en la probeta.

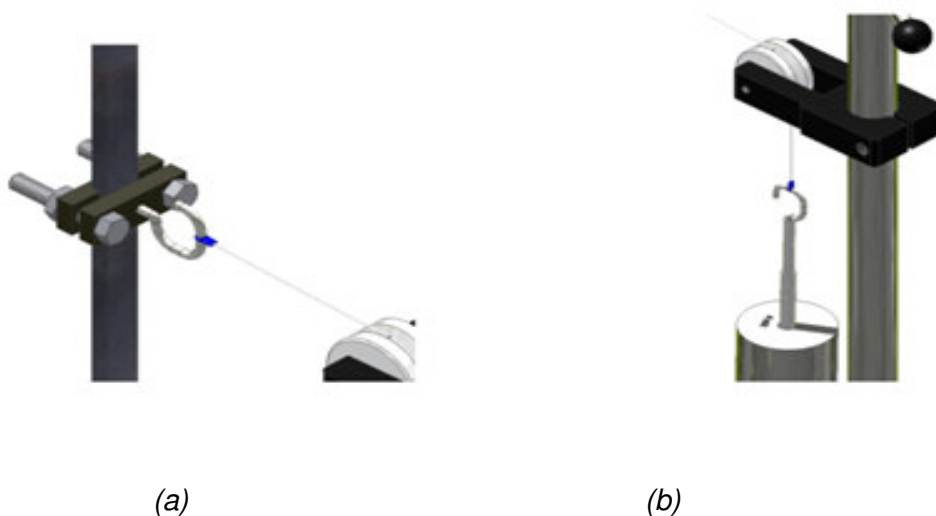


Figura 2.16. La cuerda está colocada en ambos ganchos (a), tanto en el sujetador y (b) en el soporte de las pesas.



2.4.-Diseño a detalle.

En esta sección, se explica la memoria de cálculo para cada elemento crítico del equipo de pandeo, considerando estos elementos que estarán sometidos, ya sea a compresión, flexión o tensión, se debe tener en cuenta que los esfuerzos que se generarán al realizar la carga crítica en la columna, no sobrepasen el esfuerzo de cedencia para evitar fallas.

A continuación se enlistan los elementos críticos para su análisis.

- Travesaño soporte de aplicador de carga.
- Postes de aplicador de carga.
- Aplicador de carga (tornillo de potencia).
- Celda de carga.
- Tornillo eje para montura de probeta doblemente empotrada.
- Soporte de marco de carga.

A sí mismo, se eligió un factor de seguridad de 6, ya que el equipo puede estar manejado por alumnos, lo cual existe el riesgo de que el equipo pueda sufrir una sobrecarga al momento de realizar alguno de los experimentos.

Para el factor de seguridad F_s , se tomo la siguiente relación:

$$F_s = \frac{\sigma_{ult}}{\sigma_{adm}} \quad (2.1)$$

Donde el σ_{adm} queda expresado de la siguiente manera:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{ult}}{F_s} \quad (2.2)$$

Del cual

F_s = Factor de seguridad.

σ_{ult} = Esfuerzo ultimo.

σ_{adm} = Esfuerzo de admisión.

2.4.1.-Travesaño soporte de aplicador de carga.

El travesaño, tiene la función de guiar al tornillo de potencia para que éste, al girar aplique carga sobre la columna. Se encuentra fijo sobre los postes de soporte y ajustado por medio de dos tuercas en ambos extremos, esto hace que se tenga una viga doblemente empotrada con una carga centrada, la cual, es la fuerza normal que ejerce el tornillo de potencia sobre el dado donde se coloca la probeta. Se muestra el diagrama de cuerpo libre en la figura 2.17.

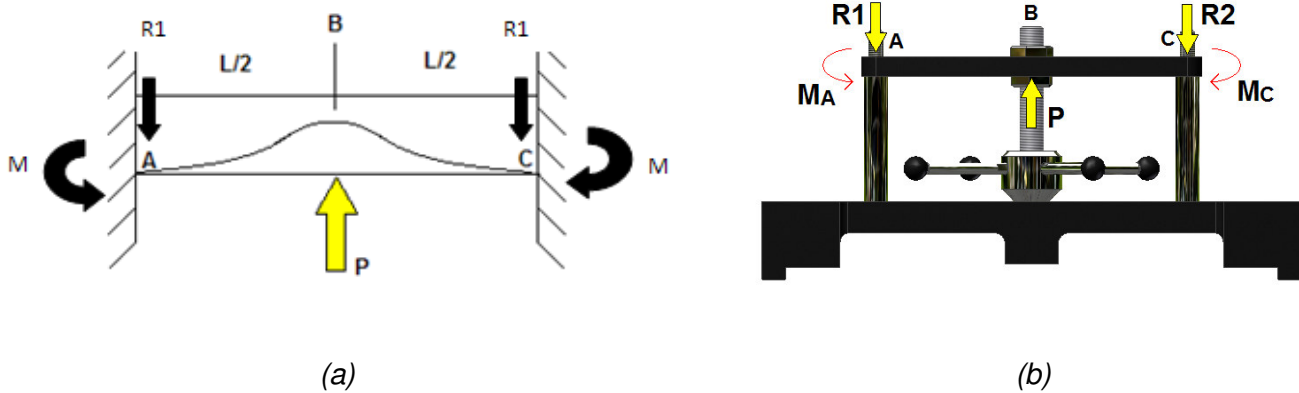


Figura 2.17. Diagrama de cuerpo libre de viga doblemente empotrada (a), teórico y (b) aplicada en el marco de carga.

Para el análisis, se calcula la carga crítica de Euler para el caso **Doblemente Empotrado**, y por medio de la siguiente expresión.

$$P_e = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (1.21)$$

El momento de inercia de la columna esta dado por:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (2.3)$$

Dónde:

$$b = 0.0127m$$

$$h = 0.00635m$$

$$I = \frac{(0.0127m)(0.00635)^3}{12} = 2.70 \times 10^{-10} m^4$$

La columna analizada es de aluminio, por tanto:

$$E = 70 \times 10^9 Pa$$

$$L = 0.553m$$

Con estos datos y el valor del momento de inercia, la carga crítica es de:

$$P_e = \frac{4\pi^2 (70 \times 10^9 Pa) (2.70 \times 10^{-10} m^4)}{(0.553m)^2} = 2439.9N$$

Tomando la Figura 2.18, se calcula el momento M que se genera en los empotres de la viga, tomando en cuenta que:

$$R_1 = \frac{P_e}{2} \quad (2.4)$$

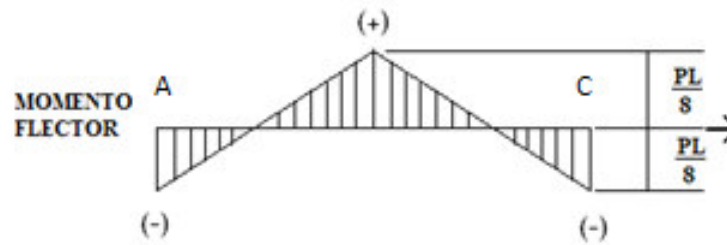


Figura 2.18. Diagrama de momentos de la viga doblemente empotrada.

En base al diagrama de la figura 2.18, el área bajo la curva entre A y C dividida por EI está dada por:

$$\frac{1}{2} (L) \left(\frac{F_{\epsilon} L}{2} \right) + L(-M) + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} \right) \left(-\frac{F_{\epsilon} L}{2} \right) = 0 \quad (2.5)$$

$$M = \frac{F_{\epsilon} L}{8} \quad (2.6)$$

Los datos del travesaño son:

$$L_{\text{travesaño}} = 0.26\text{m}$$

$$b_1 = 0.0254\text{m (Grosor)}$$

$$h_1 = 0.15875\text{m (Espesor)}$$

Sustituyendo los datos correspondientes en la ecuación (2.6), el momento M queda calculado como:

$$M = \frac{(24399\text{N})(0.26\text{m})}{8} = 79.3\text{Nm}$$

El esfuerzo que se genera a efecto de este momento esta expresado por la ecuación.

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad (2.7)$$

Donde:

$$y = \frac{h_1}{2}$$

La expresión final del esfuerzo, luego de factorizar a y con I es:

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} \quad (2.10)$$

Sustituyendo los datos en la ecuación se obtiene:

$$\sigma = \frac{6(79.3\text{Nm})}{(0.025\text{m})(0.015875\text{m})^2} = 74.32 \times 10^6 \text{Pa}$$



El esfuerzo obtenido es mucho menor que el esfuerzo de cedencia del material, el cual es de 200×10^6 Pa, por tanto el material está muy lejos de llegar a la cedencia por el factor de seguridad de 6.

La Figura 2.19, muestra una simulación en elemento finito corroborando los datos obtenidos, las unidades mostradas en la figura están en Psi, el valor equivalente al obtenido en Pascales es de 10779.78Psi, respectivamente.

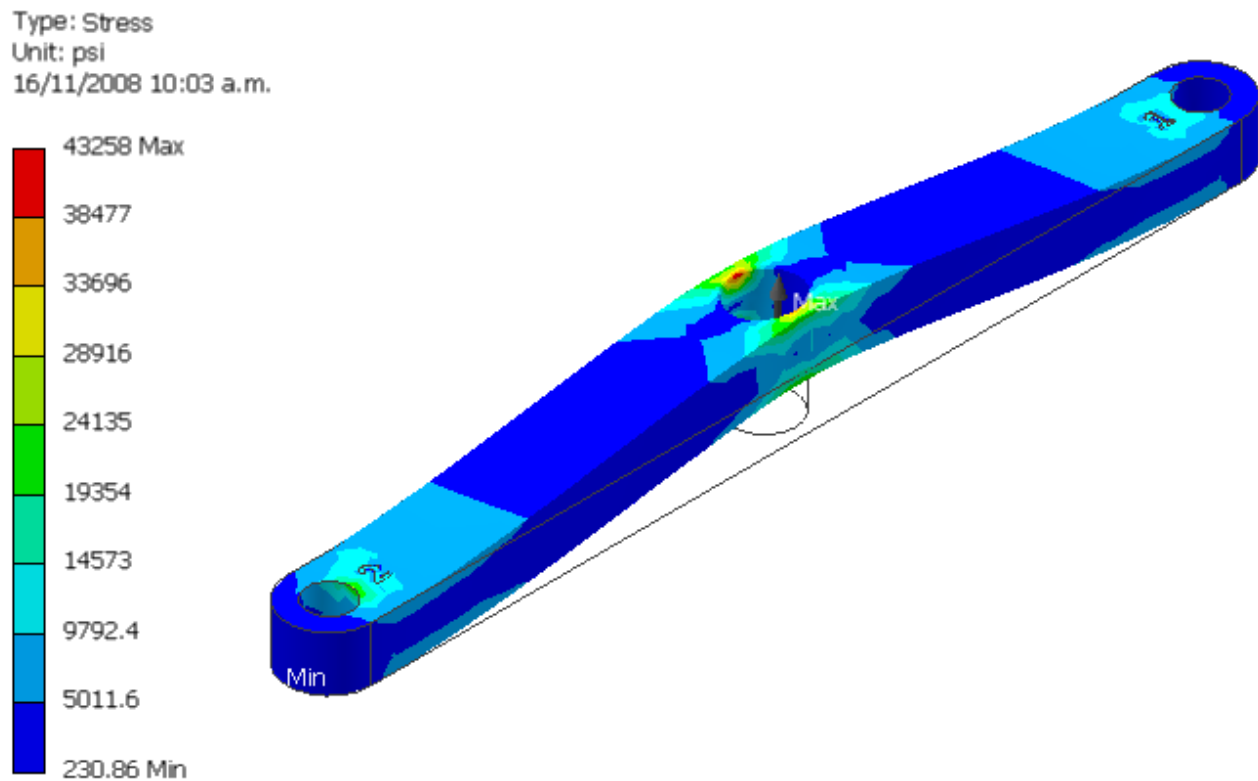


Figura 2.19. Travesaño sometido a carga central doblemente empotrado, analizado en elemento finito.

2.4.2.-Poste aplicador de carga. El poste se analiza como una columna empotrada en la parte inferior y libre en la parte superior con una carga excéntrica [Ver Apéndice 1]. Esta carga excéntrica se obtiene del momento M adquirido en el travesaño de carga, debido a la carga crítica, Figura 2.20.

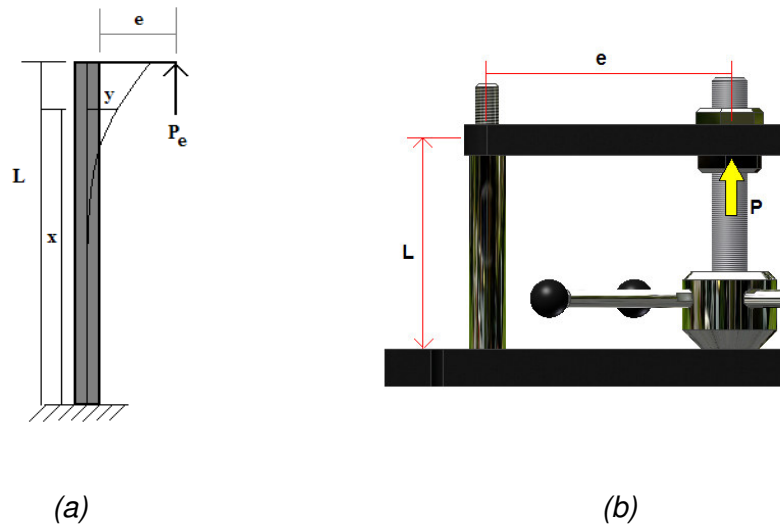


Figura 2.20. Columna empotrada – libre con carga excéntrica.

Con base en la fórmula de Smith-Southwell, [Ecuación (27), Apéndice 1] se obtiene el esfuerzo máximo aplicado en el poste de carga.

Cabe resaltar, que para obtener la solución de la fórmula de Smith-Southwell, se debe obtener el esfuerzo que se ejerce a consecuencia de la fuerza P_e en el área transversal del poste de carga. Al aplicar la ecuación del esfuerzo.

$$\sigma = \frac{P_e}{A_{poste}} \quad (2.11)$$

Donde:

$$P_e = 2439.9\text{N}$$

$$A_{poste} = 285.022 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\sigma = \frac{2439.9\text{N}}{285.022 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 8.5603 \times 10^6 \text{ Pa}$$

El radio de giro k se obtiene de la siguiente expresión:

$$k = \sqrt{\frac{I_{poste}}{A_{poste}}} \quad (2.12)$$

Donde:

$$I_{poste} = \frac{\pi r^4}{4} \quad (2.13)$$

Sustituyendo los datos en la expresión (2.13) se tiene:

$$I_{poste} = \frac{\pi(0.009525\text{m})^4}{4} = 6.4947 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$



Con los valores obtenidos para el radio de giro “ k ”, el momento de inercia del poste “ I_{poste} ” y el esfuerzo “ σ ” se sustituyen en la fórmula de Smith-Southwell [Ecuación (27), Apéndice 1], quedando el esfuerzo máximo de:

$$\sigma_{max} = 8.56 \times 10^6 Pa \left[1 + \left(\frac{(0.009525m)(127m)}{2.2681 \times 10^{-17} m} \right) (84.1686m) \left(\sqrt{\frac{8.5603 \times 10^6 Pa}{(200 \times 10^9 Pa)(22.68 \times 10^{-6} m^2)}} \right) \right]$$

$$\sigma_{max} = 8.5631 \times 10^6 Pa$$

El esfuerzo máximo es mucho menor que el esfuerzo de cedencia del material, en este caso es Acero, por lo tanto no está en cedencia.

$$8.5631 \times 10^6 Pa < 200 \times 10^6 Pa$$

La Figura 2.21 muestra el análisis por elemento finito del poste sometido al momento calculado en la viga doblemente empotrada, corroborando el resultado del esfuerzo máximo calculado teóricamente (El resultado del σ_{max} comparado en el resultado en elemento finito es la equivalencia en Psi correspondiente a 1241.9289Psi).

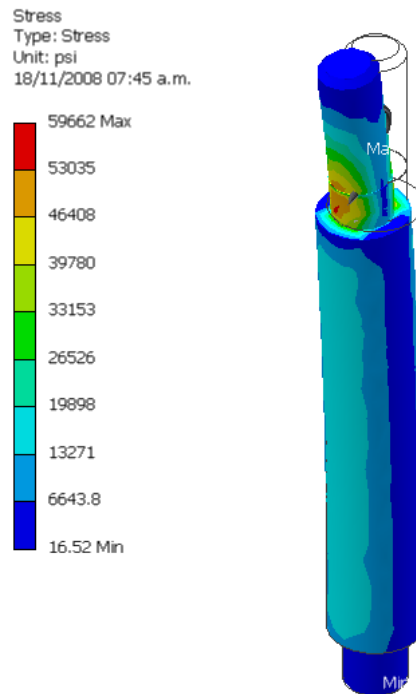


Figura 2.21. Poste de carga analizado en elemento finito.



2.4.3.-Celda de carga.

La celda de carga está diseñada para soportar las cargas críticas que se generan en los diferentes casos de pandeo, para este análisis, se ocupa el caso **doblemente empotrado**.

Puesto que la celda está sometida a compresión, el análisis está referido a la ecuación (2.10), solo que para este caso, el área es la de la sección transversal es el de la celda de carga. Entonces la ecuación será:

$$\sigma_{celda} = \frac{P_e}{A_{celda}} \quad (2.14)$$

Por la ley de Hooke, se obtienen las deformaciones teóricas para después compararlas con las experimentales, entonces:

$$\epsilon = \frac{\sigma_{celda}}{E_{celda}} \quad (2.15)$$

Sustituyendo la ecuación (2.14) en la (2.15) se tiene que:

$$\epsilon = \frac{P_e}{A_{celda} E_{celda}} \quad (2.16)$$

Donde:

$$P_e = 2439.9N$$

$$A_{celda} = 0.0001m^2$$

$$E_{celda} = 70 \times 10^9 Pa$$

$$\epsilon = \frac{2439.9N}{(0.0001m^2)(70 \times 10^9 Pa)} = 348.55 \times 10^{-6}$$

Al aplicar la carga crítica en la columna doblemente empotrada las deformaciones obtenidas son de 325×10^{-6} deformaciones, el valor promedio, lo que verifica el cálculo de la celda.

Se realizó un análisis por elemento finito a la celda de carga sometida a compresión, tomando la carga crítica obtenida en el caso doblemente empotrado como se muestra en la Figura 2.22.

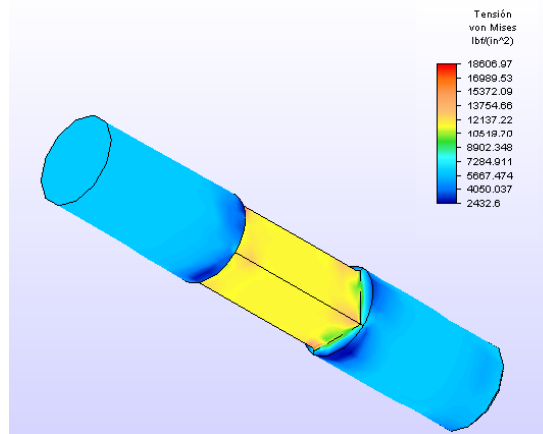


Figura 2.22. Análisis de la celda de carga a compresión, sometida a la carga crítica del caso doblemente empotrado de la columna de Acero.



La máxima deformación y la carga máxima que resistirá la celda se calcula con el valor del esfuerzo de cedencia del Aluminio, es decir.

$$\sigma_y = 230 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$\epsilon = \frac{230 \times 10^6 \text{ Pa}}{70 \times 10^9 \text{ Pa}} = 3285.71 \times 10^{-6} \text{ Def}$$

y

$$P_{max} = \epsilon E A_{celda} \quad (2.17)$$

Sustituyendo los datos respectivos en la ecuación (2.17) se obtiene

$$P_{max} = (3285.71 \times 10^{-6} \text{ Def})(70 \times 10^9 \text{ Pa})(0.0001 \text{ m}^2) = 22995 \text{ N}$$

Esta es la carga máxima que soporta la celda de carga, lo cual nos indica que al realizar los experimentos no cederá el transductor.

2.4.4.-Tornillo eje para montura de probeta doblemente empotrada.

El perno está sometido a una fuerza de corte por parte de la articulación de la columna articulada cuando se le aplica carga de pandeo.

El perno descansa en dos rodamientos colocados a los extremos del dado móvil y la articulación como muestra la Figura 2.23.

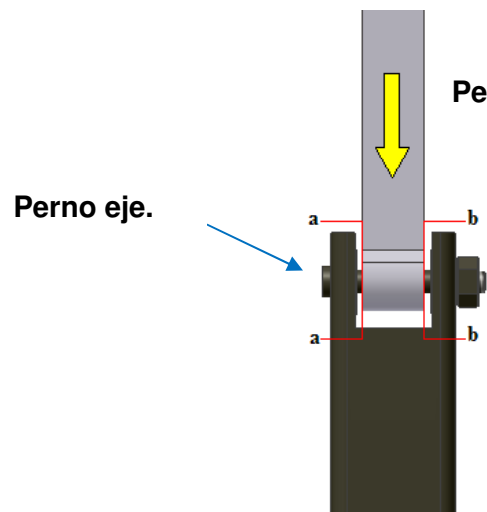


Figura 2.23. Carga aplicada por la articulación de la columna al perno eje.

La ecuación para encontrar el **esfuerzo de corte** es la siguiente:

$$\tau = \frac{F_e}{A_{perno}} \quad (2.18)$$



Para el caso doblemente empotrado, la carga crítica estará dada por:

$$P_{\epsilon} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.19)$$

Donde:

$$L = 0.638\text{m}$$

$$E = 70 \times 10^9 \text{Pa}$$

$$I = 2.709 \times 10^{-10} \text{m}^4$$

Sustituyendo los datos anteriores en la ecuación (2.19).

$$P_{\epsilon} = \frac{\pi^2 (70 \times 10^9 \text{Pa}) (2.709 \times 10^{-10} \text{m}^4)}{(0.638 \text{m})^2} = 459.67 \text{N}$$

Para el área del perno, se toma en cuenta sólo la sección transversal, por tanto:

$$A_{\text{perno}} = \frac{\pi d^2}{4} \quad (2.20)$$

Donde:

$$d = 0.004762 \text{m}^2$$

$$A_{\text{perno}} = \frac{\pi (0.004762 \text{m})^2}{4} = 0.004762 \text{m}^2$$

Sustituyendo los datos anteriores en la ecuación (2.18) se tiene que:

$$\tau = \frac{459.67 \text{N}}{0.004762 \text{m}^2} = 96.5206 \times 10^3 \text{Pa}$$

Este es el esfuerzo de corte que aplica cuando se somete la columna doblemente articulada a una carga de pandeo crítico y el cual el valor esta dentro del parámetro de seguridad.

2.4.5.-Soporte de marco de carga.

Estos elementos tienen la función de impedir que el marco de carga se deslice por los postes principales a causa de su peso, pero además, no permiten que se deslice por el efecto de la fuerza normal que ejerce el aplicador de carga a la probeta de pandeo.

Por tal motivo, se debe calcular la fuerza de apriete que no permita tal movimiento, la cual llamaremos fuerza de apriete " F_p ".

Para obtener a F_p se basa el análisis en un anillo sometido a cargas internas-externas, como se muestra en la Figura 2.24.

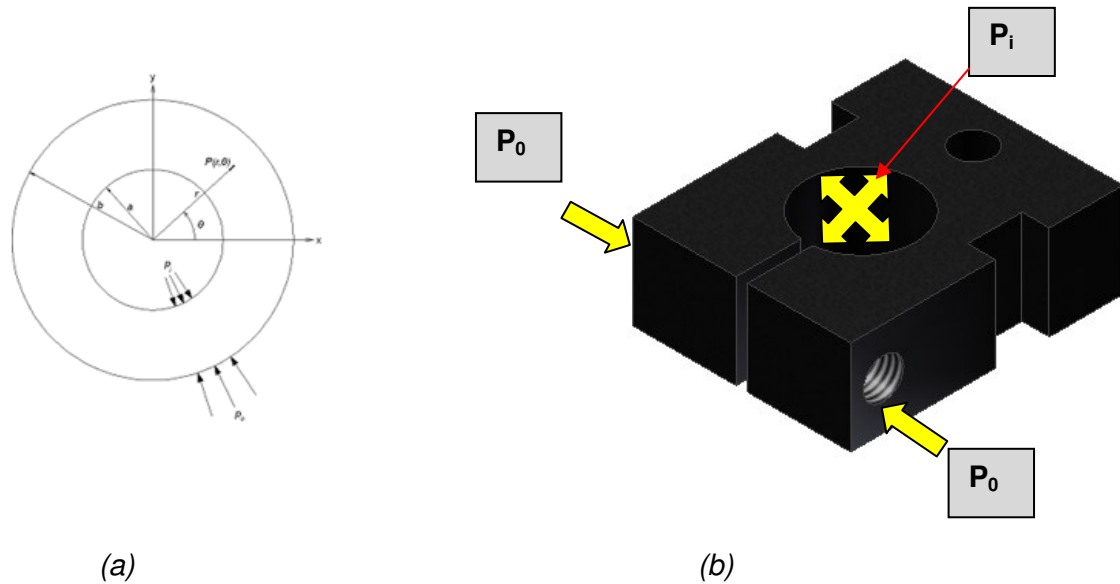


Figura 2.24. (a) Diagrama de cuerpo libre para la abrazadera y (b) las fuerzas que se aplican en la misma.

En base a la figura 2.24 (a), a es el radio interior del anillo, b es el diámetro exterior, P_i es la fuerza interna y P_o es la fuerza exterior al anillo.

La ecuación que describe estas cargas es la siguiente:

$$U_r = \frac{1}{E} \left[-(1 + \nu) \frac{a^2 b^2 (P_o - P_i)}{(b^2 - a^2)r} + (1 - \nu) \frac{a^2 P_i - b^2 P_o}{b^2 - a^2} r \right] \quad (2.21)$$

Donde U_r es la diferencia del diámetro interior con el exterior, puesto que P_i vale cero, la ecuación queda expresada de la siguiente forma:

$$P_o = \frac{U_r E}{\frac{(1 + \nu) a^2 b^2}{(b^2 - a^2)r} - \frac{(1 - \nu) b^2}{(b^2 - a^2)r}} \quad (2.22)$$

Sustituyendo datos en la ecuación (2.22).

$$P_o = \frac{(204 \times 10^9 Pa)(5.9 \times 10^{-4} m)}{\frac{(1 + 0.3)(0.0254 m)^2 (0.03865)^2}{((0.0254 m)^2 - (0.03865)^2)(0.01325 m)} - \frac{(1 - 0.3)(0.03865)^2}{((0.0254 m)^2 - (0.03865)^2)(0.01325 m)}}$$

$$P_o = 1206.54 \times 10^6 Pa$$

La presión de apriete, se sabe que.

$$P = \frac{F}{A} \quad (2.23)$$



Esta ecuación nos indica la presión, por tal, la fuerza F será sustituida por la fuerza de reacción F_c , la cual no permitirá que el marco de carga se deslice y A , será sustituida por el área de contacto A_c sobre el poste principal.

El área de contacto se calcula con la ecuación

$$A_c = 2\pi r h \quad (2.24)$$

Sustituyendo los siguientes datos:

$$r = 0.0127\text{m}$$

$$h = 0.0218\text{m}$$

$$A_c = 2\pi(0.0127\text{m})(0.0218\text{m}) = 3.4791 \times 10^{-3} \text{m}^2$$

Despejando la fuerza de la ecuación (2.23) y sustituyendo los datos tenemos.

$$F_c = (1206.54 \times 10^6 \text{Pa})(3.4791 \times 10^{-3} \text{m}^2) = 4.1976 \times 10^6 \text{N}$$

Para la fuerza de fricción la ecuación es:

$$F_f = F_c \mu \quad (2.25)$$

Donde:

$$\mu = 0.74 \text{ (Para aceros)}$$

Sustituyendo los datos:

$$F_f = (4.1976 \times 10^6 \text{N})(0.74) = 3.1062 \times 10^6 \text{N}$$

El valor de la fuerza de fricción entre la abrazadera y el poste principal es mucho mayor que la carga crítica que se genera en el caso **doblemente empotrado**.

2.4.6.-Aplicador de carga (Tornillo de potencia).

El aplicador de carga es un tornillo de potencia que al hacerlo girar, aplicara la carga para pandear la columna según sea el caso de estudio.

La carga se calcula en el tornillo de Acero 1018 sometido a flexión como se muestra en la Figura 2.24, por medio de la ecuación siguiente

$$W = \frac{2\sigma_y \pi r_m b^2}{3k} \quad (2.26)$$

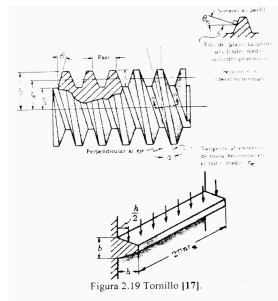


Figura 2.24. Descripción de tornillo de potencia.



Donde:

$$\sigma_y = 280 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$r_m = 0.0167 \text{ m}$$

$$n = 700 \text{ hilos x metro}$$

$$b = 1.6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$h = 1.16 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Sustituyendo los datos en la ecuación (2.26) se tiene:

$$W = \frac{2(280 \times 10^6 \text{ Pa})(0.0167 \text{ m})(700 \text{ hilos x m})(1.6 \times 10^{-3})^2}{3(1.16 \times 10^{-3} \text{ m})} = 722.3613 \times 10^3$$

2.4.7.-Sensor de Desplazamiento.

Este sensor está basado en una viga en cantiléver, compuesta por una lámina muy delgada en la cual se instrumentó un arreglo de puente completo, el material es acero de módulo elástico de 207GPa.

El Medidor de Desplazamiento es una opción de bajo costo para la sustitución del micrómetro, suprimiendo el error de paralaje que tienen los medidores de carátula.

Para poder encontrar cuanto se desplaza la columna en relación al sensor de desplazamiento, se parte de la relación de desplazamiento del eje neutro del sensor y el eje neutro de la columna cuando se pandeo.

$$v_{\text{sensor}} = v_{\text{columna}} \quad (2.27)$$

De la ecuación.

$$\frac{d^2 v_{\text{sensor}}}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (2.28)$$

Integrando la expresión y aplicando las condiciones de frontera la expresión del desplazamiento es.

$$v_{\text{sensor}} = \frac{Fl^3}{3EI} \quad (2.29)$$

De la ecuación del esfuerzo se despeja la fuerza F y aplicando la ley de Hooke, la expresión que nos da el desplazamiento queda en función de las deformaciones, por tanto:

$$v_{\text{columna}} = v_{\text{sensor}} = \frac{2\epsilon l^3}{3h(l-x)} \quad (2-30)$$

Para validar los resultados obtenidos, se aplicó carga en la columna de Acero y sustituyendo los datos del sensor se tiene:

$$h = 0.00038 \text{ m}$$

$$l = 0.07176 \text{ m}$$

$$x = 0.00377 \text{ m}$$



Las deformaciones ϵ obtenidas por medio del equipo de adquisición de datos cuando se llega a la carga crítica la cual desplaza el eje neutro de la columna " $v_{columna}$ ", es de 226×10^{-6} , sustituyendo este dato en la expresión y multiplicando un factor de 1000 se tiene que el desplazamiento del eje neutro de la columna es:

$$v_{columna} = v_{sensor} = \left[\frac{2(226 \times 10^{-6})(0.07176)^3}{3(0.07176 - 0.00377)(0.00038)} \right] * 1000$$

$$v_{columna} = v_{sensor} = 2.1549mm$$

Capítulo 3

Resultados



En el presente capítulo se muestra el prototipo del equipo para ensayo de pandeo en columnas, incluyendo la instrumentación del mismo y una serie de prácticas de laboratorio las cuales se proponen.

3.1.- Descripción del Prototipo.

A continuación se presenta el prototipo del equipo para ensayos de pandeo en columnas con todas sus componentes. Para facilitar la presentación de los elementos, se mostrarán en sub ensambles como se explico en el Capítulo 2. Las dimensiones de cada una de las piezas que conforman cada ensamble así como las especificaciones de los materiales y las partes intercambiables, se detallan en los planos que se muestran en el Apéndice 2.

3.1.1.-Bastidor principal.

Como se mencionó en el Capítulo 2, el bastidor principal, que se muestra en la Figura 3.1, está formado por: la base, dos postes principales y un travesaño. La base, fue manufacturada a partir de una placa rolada en frío de acero 1018 en tres secciones soldadas. El peso de la base confiere al equipo la estabilidad necesaria durante las pruebas. En la base se montan los postes principales, la celda de carga y los soportes de nivelación.

Los postes principales fueron fabricados a partir de barras redondas de acero 1018 y cromados para dar estética al equipo mientras que el resto de los componentes, que también se fabricaron en acero, fueron recubiertos con pintura especial para uso industrial para evitar la corrosión.



Figura 3.1. Bastidor principal, obsérvese que los postes están cromados y la base, al igual que el travesaño traen pintura anticorrosión.

3.1.2.-Marco de carga.

El marco de carga, que se muestra en la Figura 3.2, está formado por ocho elementos: a) una barra de fijación, b) dos postes de apoyo, c) un travesaño, d) un dado aplicador de carga, e) un tornillo de carga y f) dos abrazaderas para fijación del marco de carga en el bastidor.

La barra de fijación del marco de carga fue manufacturada a partir de un macizo de acero 1018 en tres partes soldadas entre sí. Los postes del aplicador de carga, fabricados a partir de barras redondas de acero 1018, al igual que los postes principales fueron cromados para darle estética al equipo. El travesaño, fabricado a partir de una placa de acero rolando en frío, fue recubierto con la misma pintura anticorrosiva.



(a)



(b)

Figura 3.2. Se muestra el marco de carga (a) sin el aplicador de carga y soportes, y (b) marco de carga completo con todos sus aditamentos.

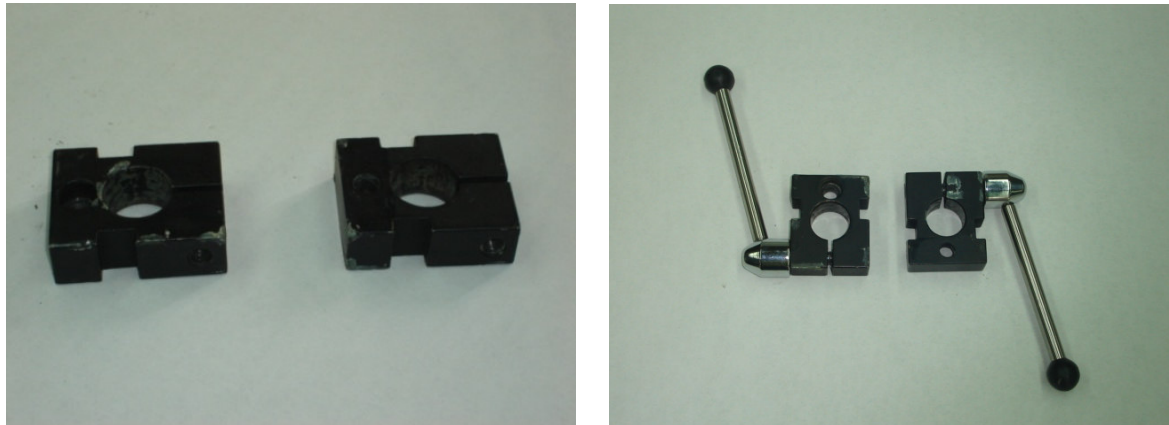
El aplicador de carga, que se muestra en la Figura 3.3, fue fabricado en acero inoxidable 316. Al dado de carga se atornillan cuatro manerales que forman un volante que permite la aplicación de carga de forma manual. El dado aplicador se monta en el tornillo de carga que a su vez es montado en el marco de la Figura 3.2 (a) y fijado a él mediante una tuerca de apriete. El tornillo de carga fue fabricado a partir de una barra redonda de acero a la cual se le maquina una rosca estándar 1/2" x 16 hilos UNF.



Figura 3.3. El aplicador de carga manufacturado en Acero inoxidable con todos sus elementos.

Las abrazaderas para fijación del marco de carga en el bastidor que se muestran en la Figura 3.4, se atornillan a la barra de fijación en sus extremos con el fin de facilitar el montaje del marco de carga. Están fabricadas a partir de barras de acero 1018 y recubiertas mediante anodizado para protección. Dichos elementos trabajan como abrazaderas en los postes principales del bastidor; se fijan a ellos mediante manijas que al ser apretadas inducen una disminución del diámetro del barreno central.

En la Figura 3.2 (b) se aprecia el montaje del marco de carga al bastidor del equipo y se aprecia la forma en que éste se fija a las barras principales.



(a)

(b)

Figura 3.4. Se muestran los soportes (a) piezas solas antes del anodizado y (b) con manijas de apriete.

3.1.3.-Elementos de Prueba.

Los elementos de prueba son esencialmente columnas largas fabricadas con distintos materiales, distintas geometrías en su sección transversal y con diferentes apoyos. En la Figura 3.5 (b) se muestra algunas de los elementos de prueba fabricados en bronce, aluminio y acero. Así mismo, en la Figura 3.5 (a) se aprecian los dos tipos de apoyos: articulado y empotrado. Cabe destacar que un juego de probetas, en un material dado, consiste en: una doblemente articulada, una doblemente empotrada y una mixta.

Para acoplar las probetas al equipo, se requiere de un juego de dados que están recubiertos por un anodizado en color negro, debido a que las piezas estarán en un intercambio continuo, con ello se evitará daños por desgaste, el tornillo pasador esta manufacturado en Acero y cuenta con el mismo recubrimiento que los dados como se muestra en la Figura 3.5 (a).



(a)

(b)

Figura 3.5. Se muestran los elementos de pandeo, (a) los dados que simulan los tipos de empotes y (b) las columnas ó probetas para someterlas a pandeo de diferentes materiales.

3.1.4.-Dispositivos de medición

El equipo cuenta con dos transductores: a) uno de desplazamientos que mide la deflexión lateral de la columna, generada por el pandeo de esta, al alcanzar la carga crítica, y b) uno de carga que permite medir la fuerza aplicada sobre la probeta. Ambos transductores, fueron instrumentados con galgas extensométricas en un circuito tipo puente de Wheatstone completo como el que se muestra en la Figura 1.10. Así mismo, ambos transductores están conectados a un dispositivo electrónico que permite desplegar el valor, ya sea de carga o de desplazamiento, en una pantalla digital. Cabe mencionar que ambos transductores pueden ser conectados a un dispositivo que registra y almacena los datos para después mostrarlos en una gráfica de una computadora.

3.1.4.1.- Medidor de Carga.

El sistema que mide carga está formado por: una celda de carga, un dispositivo que aloja la celda de carga y un dispositivo electrónico que despliega la carga en una pantalla.

La celda de carga consiste esencialmente de un elemento metálico tipo columna, fabricado en duraluminio para lograr mayor resistencia, mayor esfuerzo de cedencia, que la de un aluminio convencional pero conservando su bajo módulo elástico. Dicho elemento fue instrumentado con cuatro galgas extensométricas colocadas en un arreglo de puente de Wheatstone completo y se muestra en la Figura 3.6 (a). Una vez instrumentado el circuito en el elemento metálico, se colocan tres cables para conectar la celda al dispositivo de registro y se protege adecuadamente para evitar daños a la celda como se muestra en la Figura 3.6 (b).



(a)



(b)

Imagen 3.6. Celda de carga (a) Elemento metálico instrumentado con galgas extensométricas en arreglo de puente completo, y (b) Celda de carga cableada y protegida.

El protector externo del transductor es un cilindro metálico con acabado en cromo. Este elemento, permite garantizar que el transductor no sufrirá daño por golpes o descuidos en la operación. Así mismo, el elemento sirve como guía para que la carga aplicada, en la parte superior de la celda, induzca una compresión uniforme sobre el elemento metálico de la celda. En la Figura 3.7(a) se muestra la celda de carga colocada en el interior del elemento alojador mientras que en la Figura 3.7 (b), se muestra el elemento alojador de la celda de carga montado en la base del bastidor.



(a)



(b)

Imagen 3.7. (a) Celda de carga colocada en el interior del elemento que la aloja y (b) Elemento alojador de la celda de carga montado en la base del bastidor.

El dispositivo electrónico de medición fue diseñado para transformar las variaciones de voltaje procedentes de la celda de carga, en una lectura en una pantalla digital.

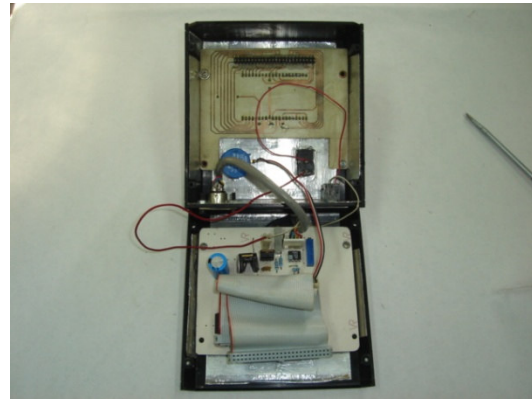
El dispositivo consiste esencialmente en un circuito impreso al que van unidas: a) una segunda tarjeta para acondicionamiento de la señal externa, b) un convertidor analógico-digital cuya salida es la pantalla de lectura y c) los elementos externos tales como las conexiones que provienen de la celda de carga, la conexión a la fuente de alimentación, un potenciómetro para calibración y un interruptor para encendido/apagado general.

Todo el conjunto se aloja en un pequeño gabinete que deja al exterior, la pantalla y los cables de interconexión. El dispositivo es alimentado con 12 Volts de corriente continua

por lo que se requiere de un circuito rectificador apropiado. En la Figura 3.8, se muestran dos fotografías donde se aprecian los componentes internos del dispositivo así como la apariencia externa de la caja que los aloja.



(a)



(b)

Imagen 3.8. El equipo indicador (a) se muestra con el cable de conexión con la celda de carga y (b) el circuito del indicador con todos sus componentes electrónicos.

3.1.3.2.- Medidor de desplazamientos

Este sensor está basado en una lamina en cantiléver de espesor pequeño, esta instrumentado con extensómetros en configuración de puente completo (Ver Figura 1.10) el cual tiene la función de medir el desplazamiento de la columna cuando ésta haya llegado a su carga crítica como se muestra en la Figura 3.9.

Cabe destacar que este sensor viene a sustituir al micrómetro de carátula, el costo de los materiales y la instalación lo hace una opción barata y precisa a diferencia del micrómetro que tiene un valor económico alto, además de aportar tecnología propia al diseño del equipo de pandeo



(a)



(b)

Figura 3.9. Medidor de desplazamientos, (a) montado en el equipo de pandeo y (b) prueba de flexión para caracterización y obtención de propiedades mecánicas.



3.2.-Accesorios.

Los accesorios que el equipo de pandeo utiliza, son para la aplicación de la carga lateral, además de un instrumento que mide los desplazamientos en la columna, está diseñado en base a un arreglo de puente completo con extensómetros. Los accesorios para la carga lateral son: Pesas (De 2 y 5 Newton respectivamente), además del soporte de las pesas y polea de carga con base de montaje.

Se muestran en la Figura 3.10, los accesorios; cabe mencionar que estas piezas tienen un acabado cromado para proteger del uso y la corrosión del medio ambiente.



Figura 3.10. Pesas de 5 y 2 N, además del soporte de las mismas con recubrimiento en cromo.

Para finalizar, se muestra en la Figura 3.11, el equipo ensamblado en su totalidad donde se aprecian todos los elementos descritos anteriormente.



Figura 3.11. Se muestra el equipo de pandeo completamente ensamblado, junto con el equipo indicador conectado a la celda de carga.



Como se muestra en la siguiente sección, el equipo para pruebas de pandeo en columnas permite comprobar experimentalmente la teoría de Euler para el pandeo de columnas, pero además es posible montar en su estructura otros experimentos como un kit para medir vibraciones mecánicas, lo cual da una versatilidad al diseño del bastidor haciendo que éste se vuelva multifuncional. El kit de vibraciones mecánicas se desarrolló en un proyecto computacional quedando como opción para el desarrollo de un proyecto futuro.

3.3.-Prácticas Propuestas.

A continuación se presenta tres propuestas de prácticas que pueden ser realizadas en el equipo desarrollado en el presente trabajo. La primera práctica, consiste en evaluar los tres modos de pandeo que predice la teoría de Euler, para las tres combinaciones de apoyos en las probetas: doblemente articulada, doblemente empotrada y mixta.

En la segunda práctica se ensaya el pandeo de probetas fabricadas en diferentes materiales y con diferentes secciones transversales y finalmente, en la tercera práctica se estudia el pandeo asistido por una carga lateral aplicada a la columna mientras se aplica la carga de compresión.

Cabe mencionar que en la presente sección se presentan las prácticas sugeridas de manera compacta ya que en el capítulo 1 se describió el marco teórico de las prácticas mientras que en el capítulo 2 se dieron todos los detalles sobre la construcción del equipo. Debido a lo anterior dichos puntos se omiten en el desarrollo de las prácticas sin embargo, es importante mencionar que el presente trabajo brindó la información necesaria para generar un manual de operación y mantenimiento del “equipo para pruebas de pandeo en columnas” el cual quedó registrado en el Proyecto PAPIME PE102505 con el nombre de "Diseño y Rehabilitación de Equipo de Laboratorio de Mecánica de la FES Aragón".

3.3.1.- Práctica 1: Comportamiento de pandeo bajo la influencia de diversas condiciones de frontera aplicando la teoría de Euler.

Objetivo: El alumno corroborará la teoría de Euler, por medio de los cuatro casos de pandeo, y experimentará cada uno de ellos aplicando carga en probetas con diferentes apoyos.

Como se describe en el Capítulo 1, el comportamiento de una columna en compresión, depende de cómo está apoyada; es por ello que se hará referencia a tres de los cuatro casos de pandeo estudiados por Leonard Euler.

1. Columnas con extremos articulados.
2. Columnas con extremos empotrados ó fijos.
3. Columnas con un extremo empotrado y el otro articulado.

En la Figura 3.11, se muestran los modos de pandeo asociados a cada uno de los casos anteriores. Así mismo, en la tabla 3.1, se muestran las ecuaciones que deben emplearse para calcular la carga crítica en cada caso citado en la Figura 3.11. Dichas ecuaciones fueron desarrolladas en el capítulo 1 por lo que en la presente sección sólo serán empleadas.



Cabe destacar para esta primera práctica que todas las probetas tiene sección rectangular por lo que el momento de inercia (I) en todos los casos se calcula como:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad 3.1$$

Donde: b es el ancho de la sección y h es el espesor de la misma.
Las dimensiones de las probetas se listan en la Tabla 3.2.

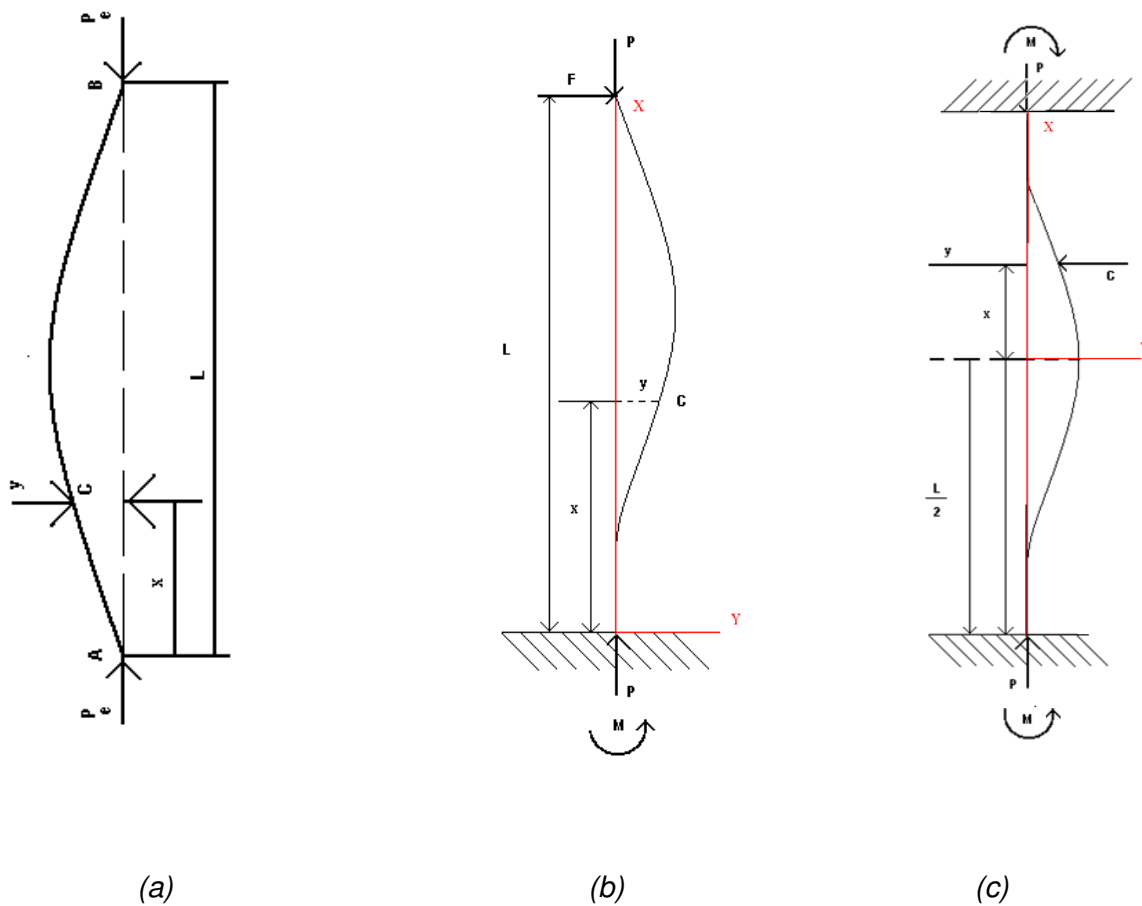


Fig. 3.11 (a) Columna con carga axial y extremos articulados, (b) columna con apoyos mixtos y (c) Columna con extremos empotrados.



Tabla 3.1. Ecuaciones para el cálculo de la carga crítica en los tres casos estudiados.

Condiciones en el extremo.		Articulado – articulado.	Empotrado – articulado.	Empotrado – empotrado.
Carga de Euler. P_e		$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$\frac{2\pi^2 EI}{L^2}$	$\frac{4\pi^2 EI}{L^2}$

Momento de inercia I	$I = \int_a^b y^2 dA$
---------------------------	-----------------------

Tabla 3.2. Dimensiones de las probetas con sección rectangular

Probeta.	Largo. (L) [mm]	Ancho.(b) [mm]	Espesor. (h) [mm]	Modulo Elástico. [GPa]
Probeta. R Aluminio.	555	13.12	6.65	70
Probeta. M Aluminio.	555	13.12	6.65	70
Probeta. Cm Aluminio.	555	13.12	6.65	70
Probeta. R Latón.	555	13.12	6.65	97
Probeta. M Latón.	555	13.12	6.65	97
Probeta. Cm Latón.	555	13.12	6.65	97
Probeta. R Acero.	555	13.12	6.65	200



Probeta. M Acero.	555	13.12	6.65	200
Probeta. Cm Acero.	555	13.12	6.65	200

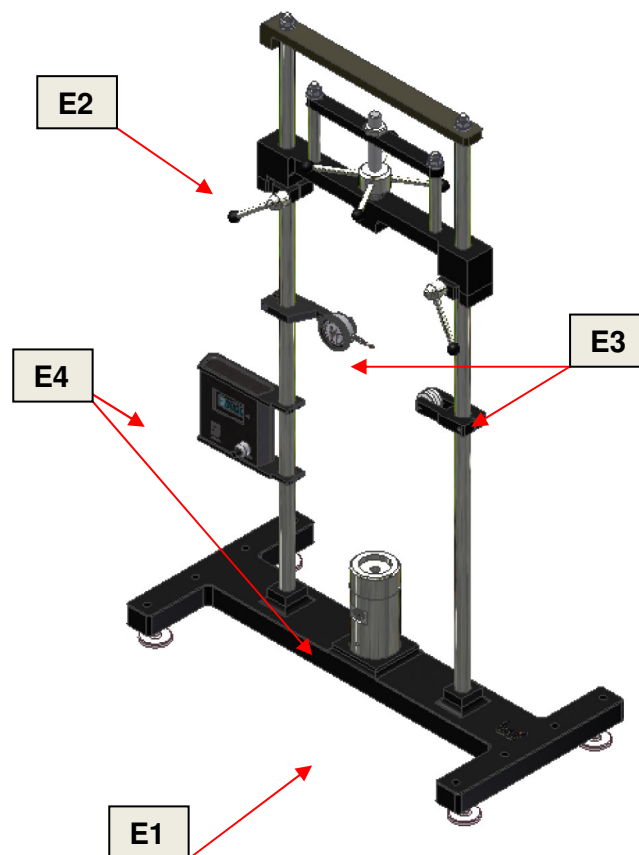
3.3.1.1.- Desarrollo de la práctica.

Pandeo en columnas con extremos articulados.

Consiste en colocar la columna a pandear con la prestación articulada (**Prob. M**) para someterla a carga y poder apreciar la curva de pandeo que se genera a consecuencia de la misma.

Se calcula con la ecuación de la carga de Euler para el caso correspondiente y se mide experimentalmente en el indicador de carga. El desplazamiento se mide con el micrómetro y se compara con los datos teóricos llenando una tabla según la carga a la que se esté sometiendo.

A continuación se muestran indicados los ensambles del equipo de pandeo para mejor manejo del equipo.



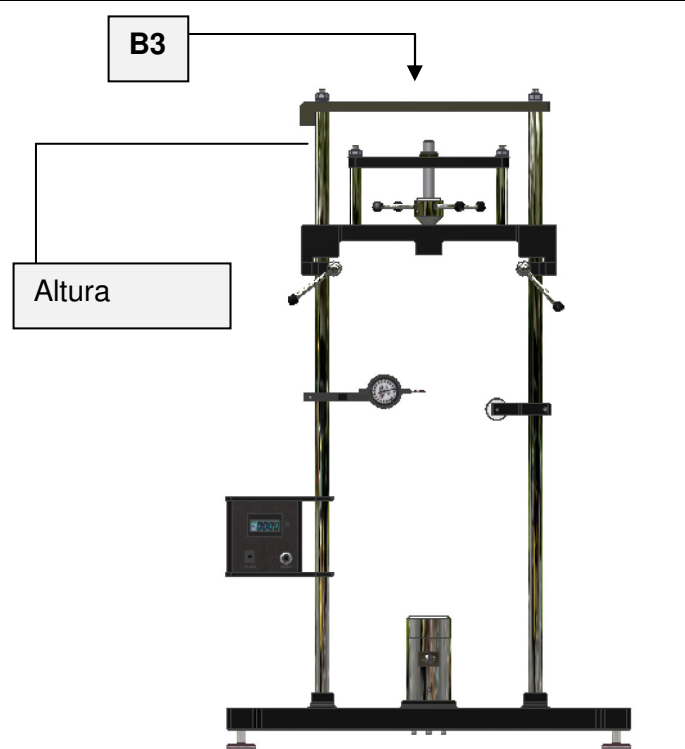
Armado.

Para realizar el experimento, el procedimiento a seguir se explica a continuación:

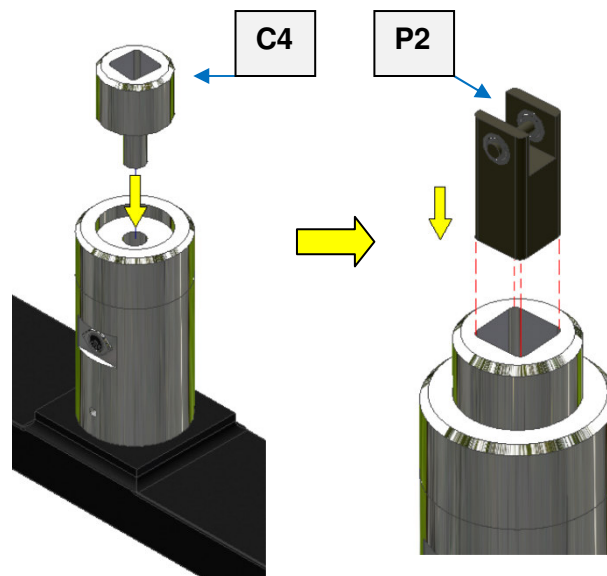
- Coloque el marco de carga (**E2**) en la parte superior del equipo, deslizando por el bastidor principal (**E1**).



Procure no golpear la parte (**B3**), con la parte superior de (**E2**).



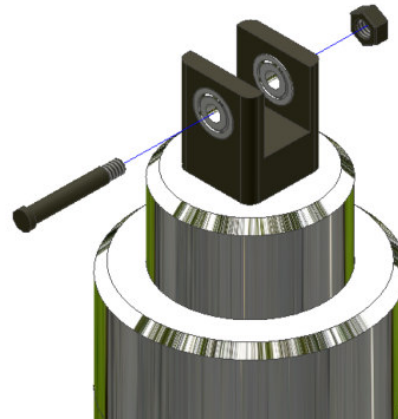
- Coloque en la celda de compresión, el empotre aplicador de fuerza (**C4**), y ajuste el dado empotre móvil (**P2**).



Colocación de la columna.

- Retire el perno del dado haciendo girar la tuerca de seguridad.

Y coloque la parte inferior del ancla de la columna entre los orificios de los rodamientos que están integrados en el empotre móvil (P2).

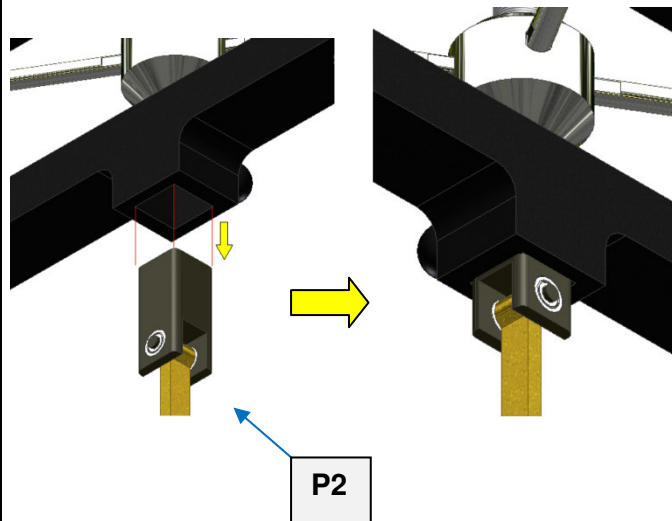


- Realice el procedimiento anterior en el ancla superior de la columna.

Deslice ahora a (E2) hacia abajo y coloque a (P2) dentro del alojamiento de (E2) dejando al ras a (P2) con el alojamiento



Esta posición es importante, ya que la articulación queda libre para flexionar, evitando golpes que afectarían el experimento.



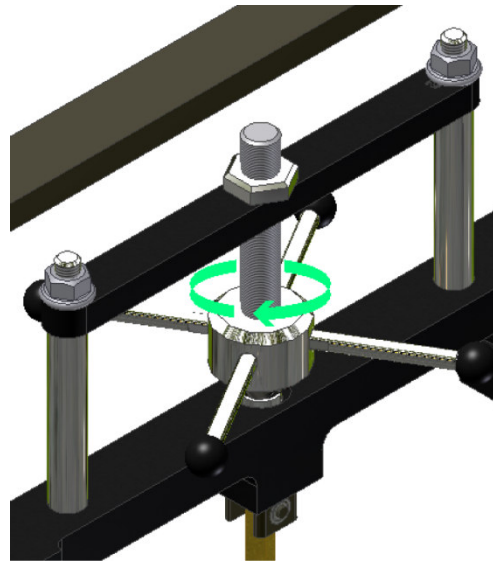


Ajuste del aplicador de carga.

- Ya colocada la pieza (P2), ajuste el aplicador de carga, para ello, haga girar en sentido horario de las manecillas del reloj, hasta que el aplicador se detenga, en ese momento el buje de carga queda perfectamente asentado sobre la superficie del dado (P2).



Gire sólo hasta el tope, no aplique más fuerza ya que puede alterar los resultados.

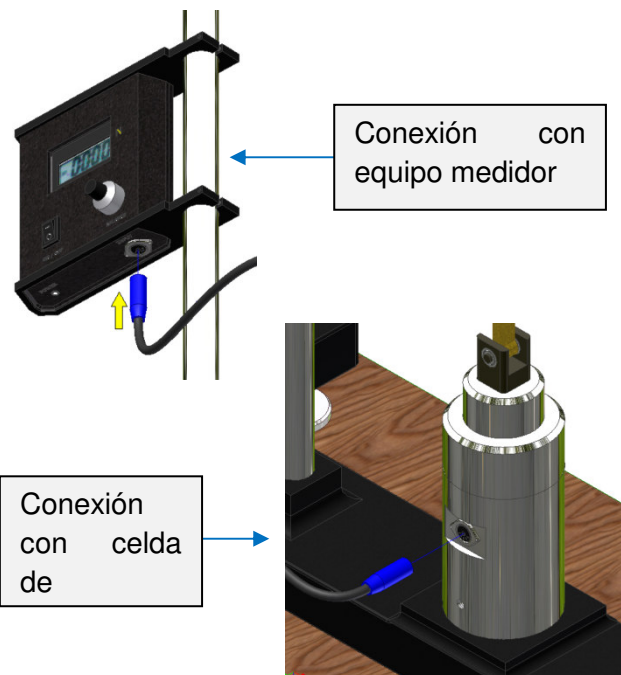


Conexión con la celda de compresión – indicador.

- Conecte la celda de compresión con el indicador (C5), por medio del cable de transferencia de datos (C7):



Tenga precaución de que los pins del conector no sean doblados por una mala conexión y que (C7) no interfiera con alguna parte mecánica.



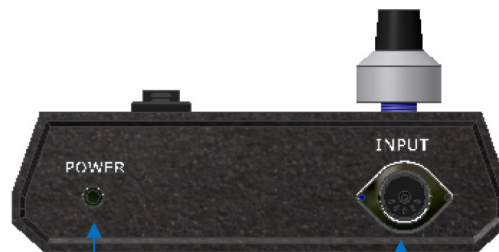
- Conecte el equipo a la toma de corriente y presione el botón de encendido (**ON – OFF**).

Después de encender el equipo, mueva la perilla de balance (**BALANCE**) y coloque la medida a cero como se muestra en la imagen.



La corriente que se tiene que suministrar al equipo es de 12V a 60 Hertz. 10W a la entrada y a la salida es de 12V a 300mA. AC.

Tenga precaución de no conectar con otro voltaje ya que producirá daños irreparables al equipo indicador.



Entrada de corriente

Plug de entrada de señal.



Display. (Valor en N).

Perilla de calibración.

Botón de encendido

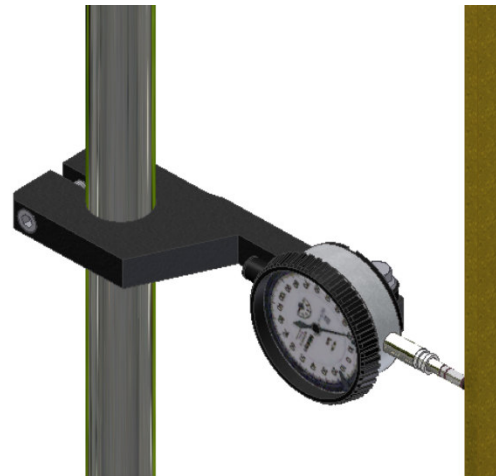
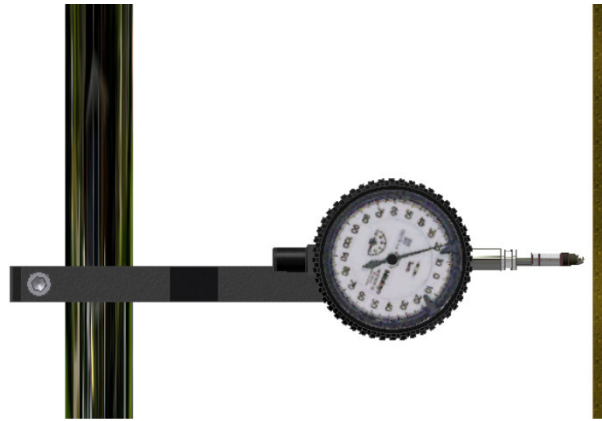
Ajuste de micrómetro.

- Coloque la punta del micrómetro sobre la cara de la columna.

Calibre a cero la caratula del micrómetro para empezar a tomar la lectura.



Tenga en cuenta que las medidas del micrómetro pueden variar por la misma sensibilidad del mecanismo de medición.



Pandeo en columna con extremos fijos.

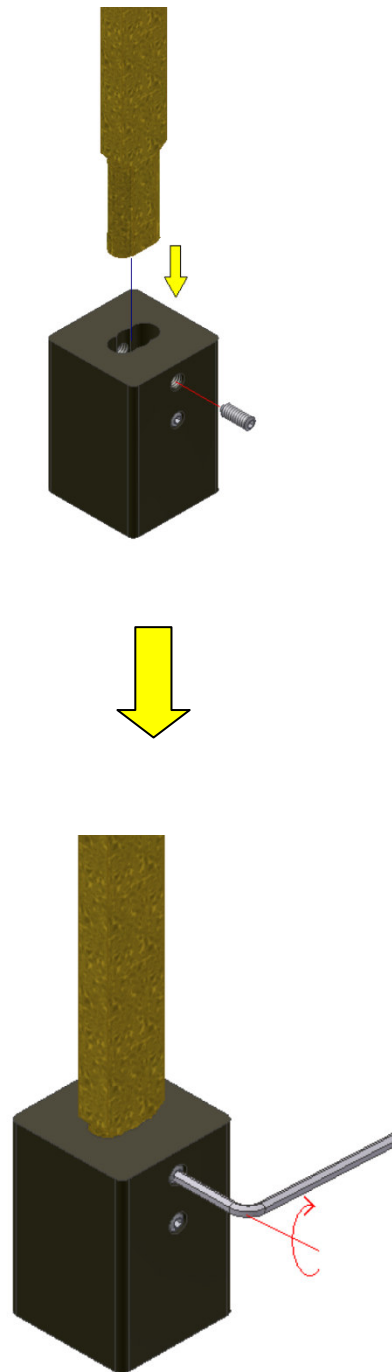
Montaje de columna.

- Coloque en el dado empotre fijo (**P1**), la probeta (**Prob R**)

Ajuste los tornillos Allen de seguridad que se encuentran a un costado de (**P1**).



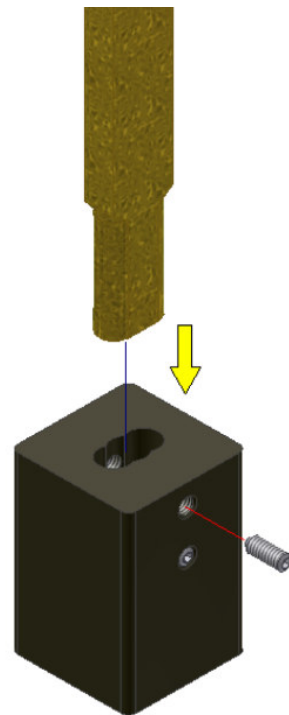
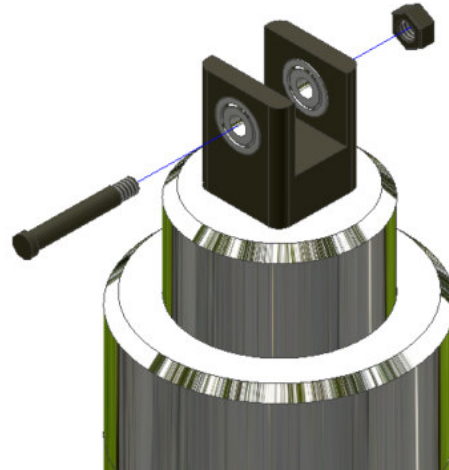
Ajuste bien la llave Allen en el prisionero para evitar daños en el mismo, evitando el apriete excesivo.



Pandeo de columna con extremo empotrado y el otro articulado.

- Como se menciona en el caso anterior, el montaje de la columna para este caso es la combinación tanto del caso doblemente empotrado y el caso doblemente articulado.

Mostraremos cómo se instalan la columna en los empotes.



Obtención de la carga crítica.

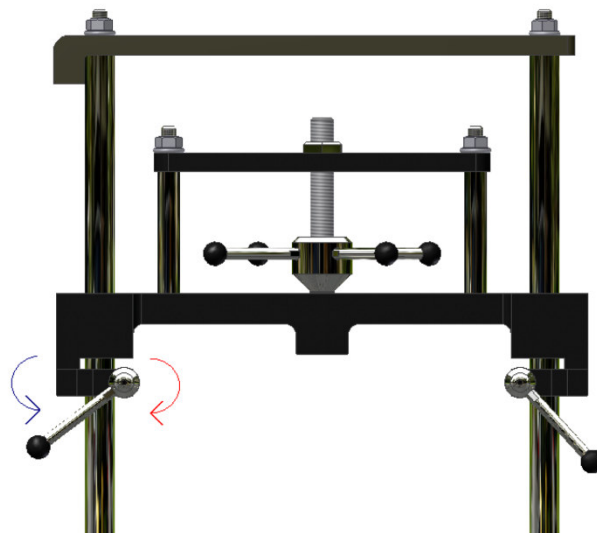
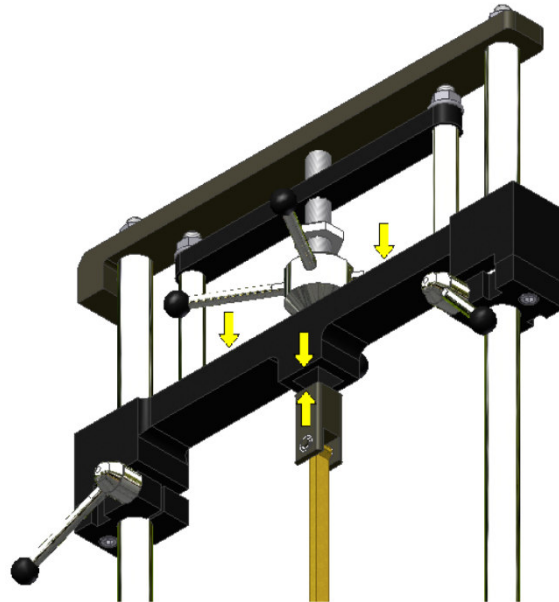
- Una vez colocada la probeta en posición y conectado el equipo indicador a la celda de carga, se procede a hacer los siguientes ajustes para la obtención de la Carga Crítica P_c .

1. Deslice el marco de carga hacia abajo para ajustar el dado en el orificio de empotre.

2. Detenga el deslizamiento cuando el marco de carga llegue a tope con el mismo dado.

3. Ajustado el marco con el dado, apriete perfectamente las manijas para asegurar que el marco de carga no sufra ningún deslizamiento y pueda alterar el experimento.

4. Ahora debe calibrar el equipo indicador a 0 para empezar a tomar la medida cuando la columna se desplace súbitamente.



5. Gire de manera lenta y en sentido horario hasta ajustar el aplicador de carga en la parte superior del dado empotre.

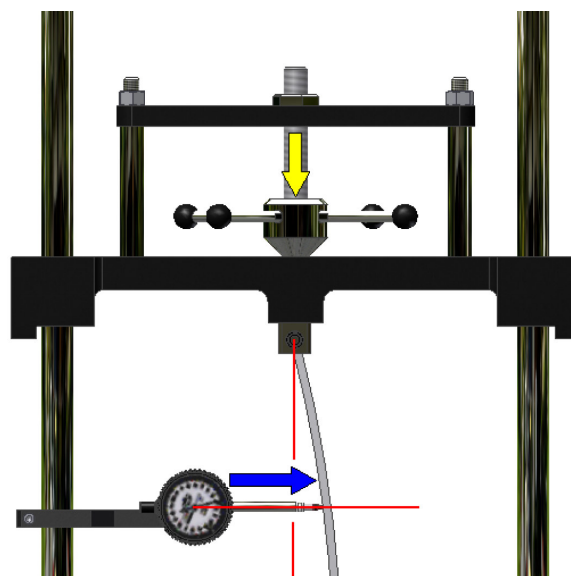
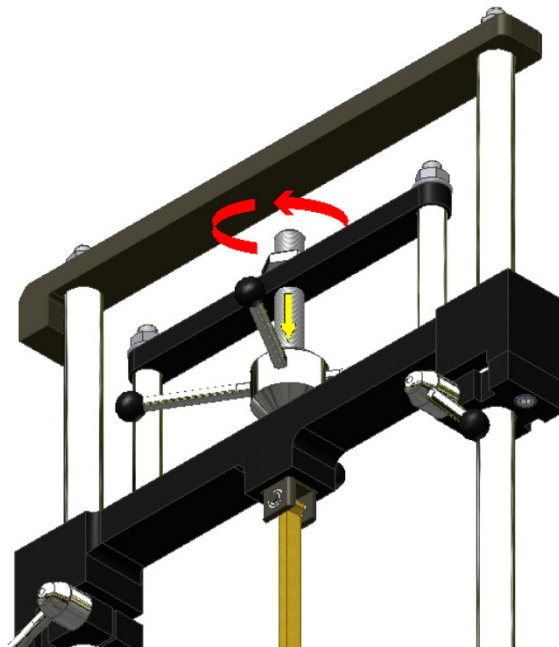
6. Aplique la fuerza girando lentamente.

7. La carga crítica se obtiene cuando la columna se desplaza de manera súbita, esto se puede observar cuando se mueva la aguja de la caratula del micrómetro espontáneamente ó se desplace el medidor de desplazamiento dando una variación de la lectura en el equipo de adquisición de datos.

8. Tome la medida del equipo indicador y compare con la medida teórica.



El desplazamiento de la columna de pandeo puede ser para cualquier lado, ya sea izquierdo o derecho.



Diferentes tipos de pandeo.

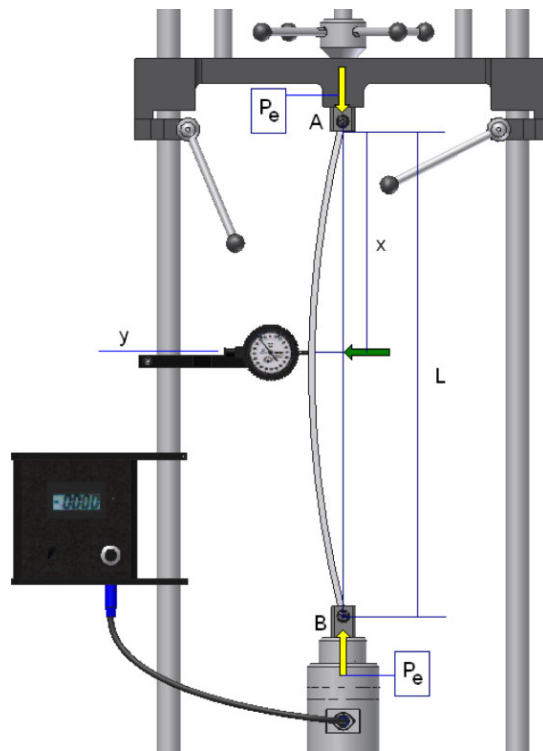
- A continuación, se muestra el pandeo en cada caso a estudiar.

El alumno debe comparar el comportamiento de pandeo ilustrado aquí, con el pandeo real generado por el equipo.

Pandeo con columna doblemente articulada.

- Se muestra el pandeo en una columna con empotres articulados.

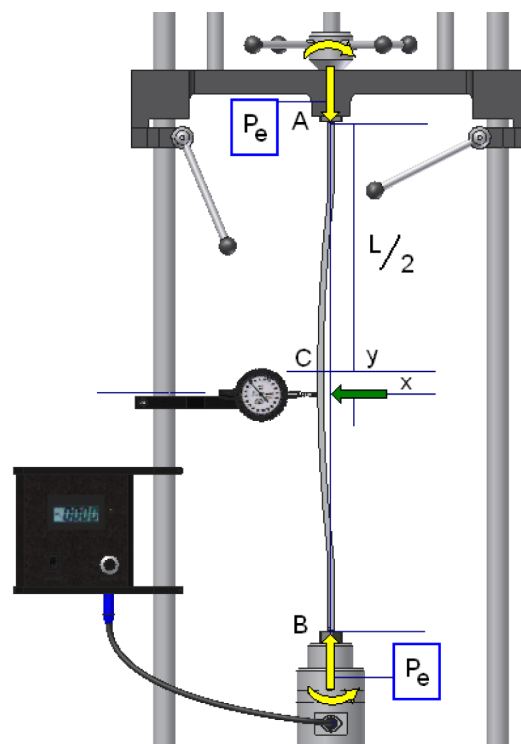
Se aprecia cómo se pandea la columna al aplicar una carga P_e , además de un diagrama de referencia.



Pandeo en columna con empotres fijos.

- Se muestra la curva característica que se tiene en este tipo de columnas.

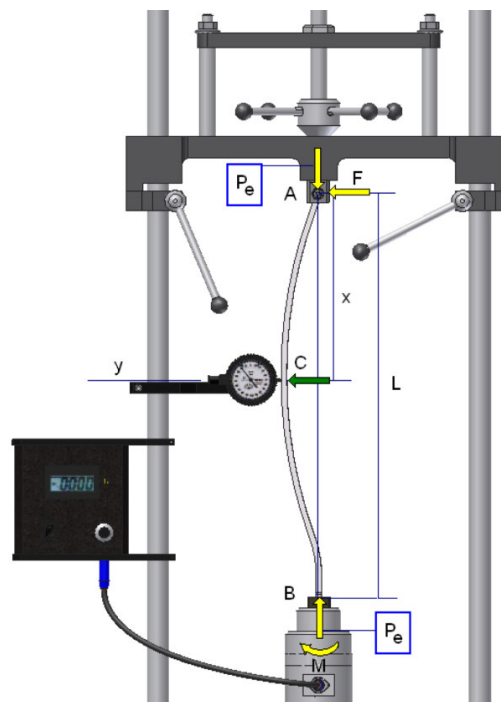
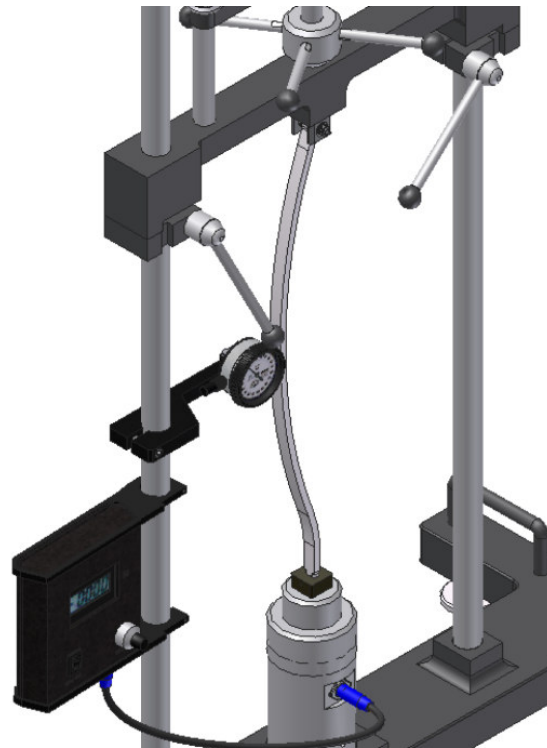
Observe que la senoidal es menor que en la columna anterior, esto es debido al momento que se genera en los empotres por lo cual se restringe el pandeo como se muestra en el diagrama.



Pandeo en columna con empotres mixtos (fijo - articulado).

- Puesto que es un caso combinado, se tendrá una combinación de senoidales tanto para el lado empotrado (parte inferior), como en el lado articulado (parte superior), como se muestra.

- Esto se demuestra con el diagrama correspondiente y como se explico anteriormente, el momento que se genera en el empotre fijo, por tanto, reduce la curva de pandeo, pero en el lado articulado la curva se prolonga.





3.3.1.2.- Evaluación del experimento.

La teoría de Euler enuncia que una columna esbelta y larga, falla por pandeo antes de que el esfuerzo alcance su límite de fluencia a la compresión. El pandeo se presenta debido a una o varias causas que a continuación se enumeran:

1. La columna no puede estar inicialmente perfectamente recta.
2. La carga puede no aplicarse exactamente a lo largo del eje de la columna.
3. Parte del material cede por causa de la falta de uniformidad en toda la columna.

Con valores de carga debajo de la carga de pandeo, la columna se encontrará en equilibrio estable, siempre y cuando, el desplazamiento producido por cualquier perturbación lateral sea totalmente recuperable cuando se elimina dicha perturbación.

En teoría se puede deformar la columna formando una onda ligeramente senoidal, siempre que la amplitud de onda sea pequeña.

También es posible que la columna alcance la condición de equilibrio inestable con cargas que exceden a la carga de pandeo, cualquier ligera perturbación lateral producirá falla por pandeo. El pandeo se presenta inmediatamente después de alcanzar la carga crítica.

3.3.1.3.- Cuestionario.

Instrucciones: El alumno deberá resolver las siguientes preguntas ocupando el equipo de pandeo, además de apoyarse en la teoría vista en clase.

- 1) Empleando las dimensiones de la probetas listadas en la Tabla 3.2, la ecuación 3.1 y demás datos calcule para los tres casos de pandeo:
 - a) La carga Crítica P_e para cada caso.
 - b) Elabore una Tabla en la que compare los valores de carga crítica calculados en el inciso anterior y los valores experimentales que obtuvo en la práctica.
- 2) Compare las curvas de pandeo con las que predice la teoría. ¿Las curvas experimentales corresponden con las que se reportan en la literatura?
- 3) Resuelva la ecuación diferencial para el caso de extremos articulados y encuentre la solución general. De dicha solución, encuentre la fórmula para la carga crítica correspondiente.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -P_e y$$

Para resolver la ecuación, tome las siguientes condiciones de frontera:

Cuando $x=0$; $y=0$.

Cuando $x=L$; $y=0$.

Y donde $L_n = \pi$

3.3.2.- Práctica 2: Influencia de las propiedades del material y de la geometría en el pandeo de una columna.

Objetivo: Que el alumno compruebe experimentalmente la influencia que tienen las propiedades del material y su geometría en la resistencia al pandeo

El desarrollo de esta práctica es esencialmente el mismo que se describió en la Práctica 1 solo que en este caso la pruebas deben realizarse en los siguientes casos.

Caso1.- Someter a pandeo las tres probetas con apoyos articulados de los tres materiales disponibles: acero, aluminio y latón.



Caso 2.- Someter a pandeo una probeta de sección rectangular con apoyos empotrados y una probeta del mismo material pero con sección circular.

El procedimiento de montaje de las probetas es el mismo que se describió en la práctica 1 y las ecuaciones para calcular la carga crítica que deben emplearse, son las mismas que se presentaron en la Tabla 3.1. En el caso de la probeta con sección circular se debe considerar que el momento de inercia será:

$$I_{\text{circular}} = \frac{1}{4} \pi r^4$$

3.3.2.1.- Cuestionario.

Instrucciones: El alumno deberá resolver las siguientes preguntas ocupando el equipo de pandeo, además de apoyarse en la teoría vista en clase.

1.- Empleando las dimensiones de las probetas listadas en la Tabla 3.2, la ecuación 3.1 y demás datos calcule para los tres casos de pandeo:

(c) La carga Crítica P_e para cada caso.

(d) Elabore una Tabla en la que compare los valores de carga crítica calculados en el inciso anterior y los valores experimentales que obtuvo en la práctica.

2.- Elabore una gráfica $P_e - l$ y discuta sobre la congruencia de los resultados experimentales con los que predice la gráfica.

3.- Elabore una gráfica $P_e - E$ y discuta sobre la congruencia de los resultados experimentales con los que predice la gráfica.

4.- Proponga una geometría que eleve al doble la carga crítica para alguno de los casos estudiados en la presente práctica. Por ejemplo puede elegir la columna de sección rectangular fabricada en aluminio.

3.3.3.- Práctica 3: Columna con carga lateral y diferente geometría

Objetivo: El alumno observará el comportamiento de la columna al estar sometida a carga lateral junto con la carga de pandeo; así mismo, analizará la columna con diferente geometría, viendo la curva de pandeo característica de esta y comparará los resultados con las curvas características de las columnas prismáticas rectangulares en sus diferentes casos.

3.3.3.1.- Marco teórico.

Una columna previamente cargada a compresión, se le aplica una carga lateral, con el origen al centro de la columna, como se muestra en la Figura 4.5.

La ecuación que describe el diagrama de cuerpo libre es.

$$C = EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py - \frac{W}{2} \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

Esta ecuación diferencial se puede escribir de la siguiente forma.



$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = -\frac{W}{2EI} \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

Resolviendo la ecuación diferencial, se obtiene.

$$y = A\cos(nx) + B\text{Sen}(nx) - \frac{W}{2P} \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

Aplicando la condición de frontera la ecuación que nos describe el desplazamiento en y es.

$$y = \frac{W}{2nP} \left[\text{Tan} \left(\frac{nL}{2} \right) \cos(nx) - \text{Sen}(nx) - n \left(\frac{L}{2} - x \right) \right]$$

La máxima deflexión es cuando $x=0$, por lo tanto la expresión matemática de reduce a lo siguiente.

$$y_{max} = \frac{W}{2nP} \left[\text{Tan} \left(\frac{nL}{2} - \frac{nL}{2} \right) \right]$$

Otro punto importante que se debe calcular es el momento que actúa en la columna, entonces la expresión es.

$$M_{max} = -Py_{max} - \frac{WL}{2}$$

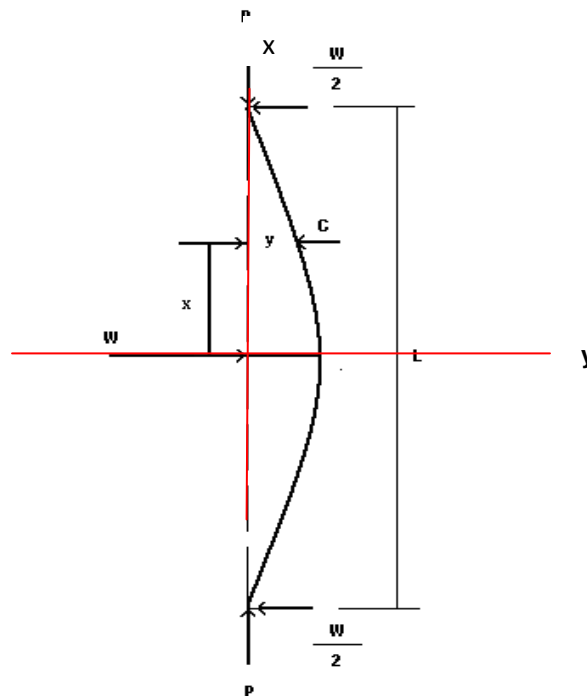


Fig. 4.5. Columna con cargas laterales.



Diferente geometría.

Las columnas que se han sometido a carga de compresión en el equipo son rectangulares, ahora se ocuparan columnas con geometría circular. Las ecuaciones se verán modificadas solo en el momento de inercia, el cual será calculado por el alumno según la geometría de la probeta.

El momento de inercia se obtiene con la siguiente integral.

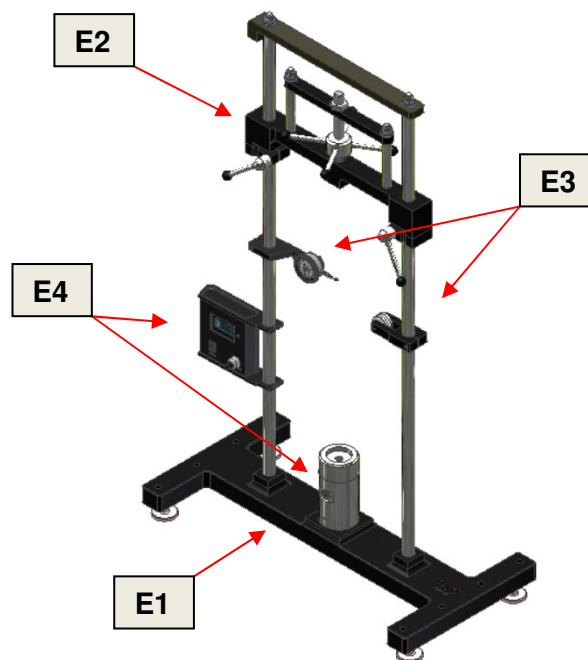
$$I = \int_a^b y^2 dA$$

Para mayor comprensión, se le deja al alumno desarrollar las expresiones modificando el momento de inercia según la geometría.

3.3.3.2.- Desarrollo de la práctica.

Pandeo en columna articulada sometida a carga de pandeo y una carga lateral.

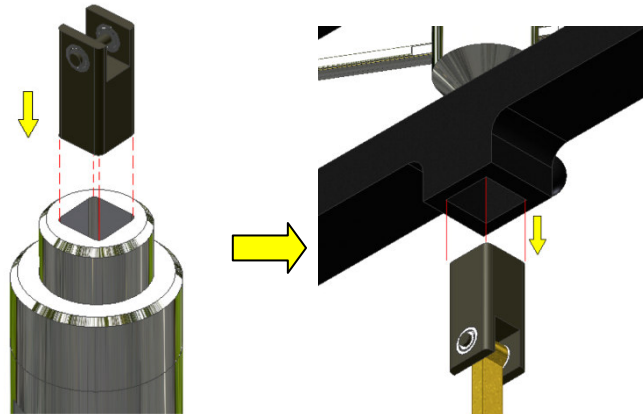
Ahora se somete a carga de pandeo una columna doblemente articulada. La cual se le coloca una carga lateral por medio de pesas (100g y 250g, (L7) respectivamente).



A continuación, se muestra el armado del equipo para la realización del experimento.

Montado de columna.

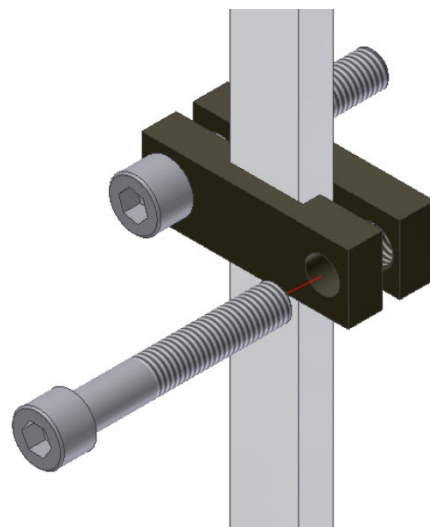
- Como en el ensamblado de la columna articulada mostrada en el **Experimento 1**, llevaremos a cabo las mismas instrucciones de ensamblado.



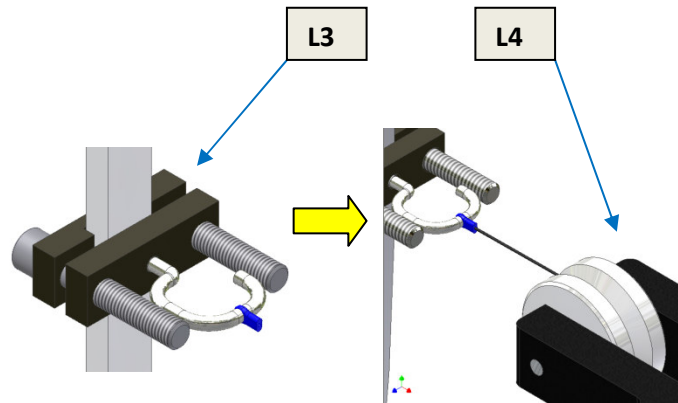
- Con la columna colocada monte el gancho ajustador (**L3**) en la parte intermedia de la misma.



Verifique que (**L3**) no se deslice, cerciórese de colocarlo a la mitad de la columna, de no ser así, podrían existir errores en la medición.



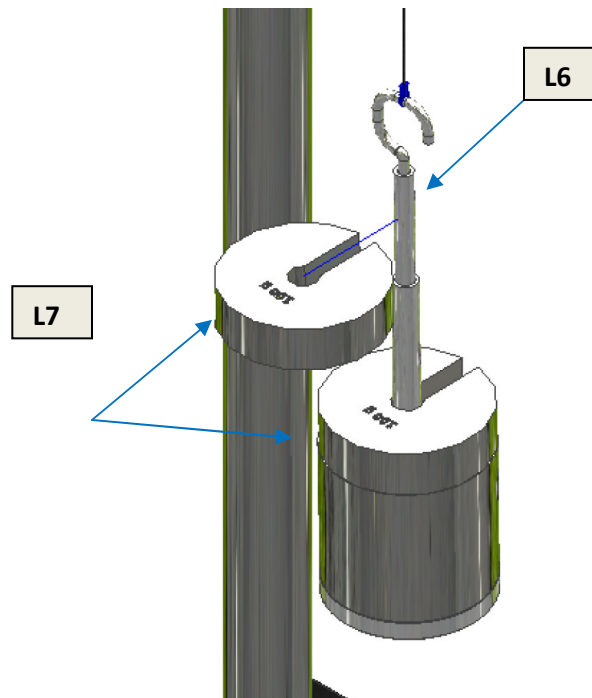
- Ajuste la polea de carga (**L5**) de manera que la cuerda (**L4**) esté perfectamente horizontal.
- Coloque la cuerda (**L4**) ajustando en el gancho de (**L5**).



- Después de haber colocado la cuerda en el gancho (**L3**) monte sobre la polea de carga (**L4**) el soporte (**L6**) al otro extremo de la cuerda.
- Coloque las pesas (**L7**) según la carga que se desea aplicar, deslizándolas por el poste de (**L6**).



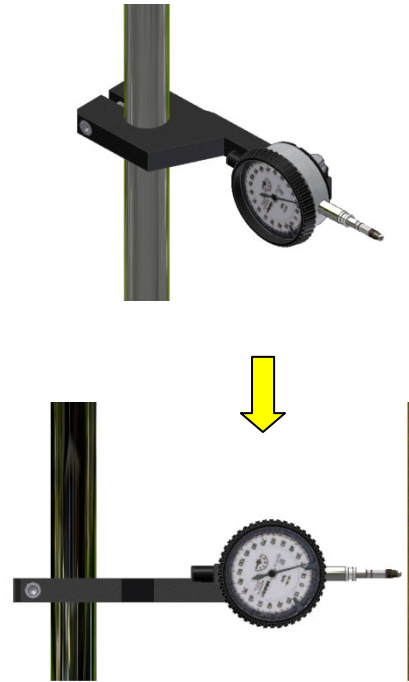
No permita que el gancho de carga se golpee con el poste principal.



- Coloque el micrómetro (L1) en el costado izquierdo de la columna (B2) para medir el desplazamiento.

Tenga en cuenta que el micrómetro (L1) debe quedar en la parte central de (B2)

Tome como referencia el diagrama de cuerpo libre visto en el marco teórico.

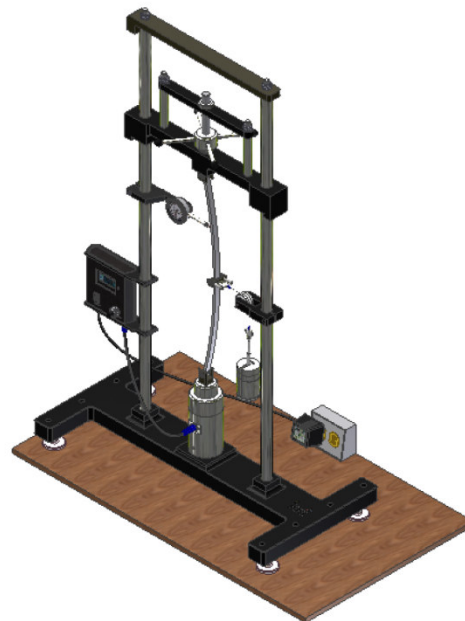


- Ya colocado (L1), se dispone a aplicar la carga de Euler a la columna y colocar a su vez, la carga lateral.

Quedando el pandeo como se muestra.



El pandeo que se muestra en la figura, es mayor al que se obtiene en la realidad.





3.3.3.3.- Cuestionario.

Instrucciones: el alumno deberá resolver las siguientes preguntas ocupando el equipo de pandeo, además de apoyarse en la teoría vista en clase.

- 1) Encuentre el desplazamiento “*y*” aplicando las siguientes cargas laterales:
 - 100g, 250g y 500g.
 - Grafique el desplazamiento teórico y el experimental en función del desplazamiento en “*x*” de.
 - 30mm, 40mm y 50mm, con respecto al centro.
- 2) Obtenga el momento máximo “*M_{max.}*” Con los pesos y distancias en “*x*” antes mencionados.

Tabla 3.3. Formulario.

Condiciones en el extremo.		Articulado articulado.	Empotrado articulado.	Empotrado empotrado.
Esfuerzo de Euler. σ_p		$\frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{\rho}\right)^2}$	$\frac{2\pi^2 E}{\left(\frac{L}{\rho}\right)^2}$	$\frac{4\pi^2 E}{\left(\frac{L}{\rho}\right)^2}$

Momento de inercia I	$I = \int_a^b y^2 dA$
-------------------------------	-----------------------

Conclusiones



Conclusiones.

El trabajo de tesis desarrollado nos permitió llegar a las siguientes conclusiones:

Se diseñó, construyó e instrumentó un equipo que nos permite simular el fenómeno de pandeo en columnas en tres de los cuatro casos de pandeo aplicando una carga vertical, al igual que la simulación de pandeo con una carga lateral.

El equipo fue construido con un 90% de materiales disponibles en el mercado nacional y el 90% fue desarrollado en el Laboratorio de Mecánica Aplicada.

Se generó la información técnica necesaria para la reproducción del dispositivo o bien proponer un nuevo rediseño el cual abarate el costo de fabricación. La calidad lograda en el prototipo iguala a la de equipos desarrollados en Alemania o Estados Unidos.

La información técnica generada así como las habilidades desarrolladas para realizar el EEPC pueden ser de gran utilidad para que otras instituciones de educación superior del país generen sus propios equipos didácticos y sustituyan la importación de estos y otros equipos que pueden ser desarrollados con la misma plataforma tecnológica.

Referencias Bibliográficas.



1. Russell C. HIBBELER, "*Mechanics of Materials*", 1ª ed., William Stenquist, Pág. 657 - 702.
2. RAMIREZ VALVERDE ENRIQUE "*Análisis de Estructuras Hiperestáticas*", 1ª ed., Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Pág. 11 - 20.
3. E. J. HEARN, "*Resistencia de Materiales*", 2ª ed., Interamericana, Pág. 421 - 450.
4. ALSAM KASSIMALI, "*Análisis Estructural*", 2ª ed., Thomson Learning, Pág. 4 - 5.
5. RILEY, STURGES, "*Mecánica de Materiales*", 1ª ed., Limusa, Pág. 554 - 591.
6. EGOR POPOV, "*Introducción a la Mecánica de Sólidos*", 10ª ed., Grupo Noriega Editores, Pág. 593 - 623.
7. S. P. TIMOSHENKO "*Mecánica de Materiales*", 1ª ed., Hispano-Americana, Pág. 339 - 362.
8. PARNES R, "*Solid Mechanics*", 1ª ed., Wiley, Pág. 74 - 108, 496 - 518.
9. CASTILLO HUMBERTO "*Análisis y Diseño de Estructuras, tomo 1*", 1ª ed., Alfaomega, Pág. 289 - 316.
10. F. D. SHEGLEY, "*Mecánica de Materiales*", 1ª ed., Mc. Graw Hill, Pág. 259 - 302.
11. W. DALLY JAMES, F. RILEY WILLIAM, "*Experimental Stress Analysis*", 3ª ed., Mc Graw Hill, Pág. 129 - 130, 134.
12. MICHAEL J.F., "*Design for Engineers*", 2ª ed., Springer - Veriag, Pág. 2 - 12.
13. ZILL DENNIS G, "*Ecuaciones Diferenciales*", 2ª ed., Thomson Learning.
14. STROUD K. A. "*Differential Equations*", 1ª ed., New York Industrial. Pág. 108 - 215.
15. "*Diseño y Construcción de un Equipo Didáctico para el Estudio de Reacciones en Armaduras*", tesis para obtener el título de Ingeniero Mecánico, Presentada por: Fernando Néstor García Castillo, 2004, Pág. 1 - 14, 34 - 56.

Apéndice 1

Métodos comparativos



Métodos comparativos de análisis.

En las relaciones del límite de valides $\frac{L}{k} = 40$ y $\frac{L}{k} = 100$ [Capítulo 1], los resultados obtenidos por la teoría de Euler, ni aquellos del esfuerzo de fluencia se aproximan a valores experimentales, esto es porque cada uno de ellos sugiere una carga crítica que excede de la relación de esbeltez.

Por ello, se han desarrollado ecuaciones con el objeto de aproximar una concordancia entre carga real de falla y el valor teórico en el intervalo particular de la relación de esbeltez.

Estas ecuaciones son:

- *Fórmula de línea recta.*
- *Fórmula parabólica de Jonson.*
- *Fórmula de Rankine-Gordon.*
- *Fórmula de Perry-Robertson.*

Estas dos últimas se explicaran a continuación de manera breve para obtener una visión de métodos alternativos, en donde se toman en cuenta parámetros reales de la misma columna.

Formula de Rankine-Gordon.

Esta fórmula es una combinación de las cargas de Euler y de Fluencia para una columna.

$$\frac{1}{P_R} = \frac{1}{P_e} + \frac{1}{P_c} \quad (\text{A1.1})$$

Para columnas cuya longitud es corta, el valor de P_e de la expresión (22) es muy grande, en su recíproco puede ser insignificante:

$$\text{Y } P_R = P_c$$

Esta fórmula es válida para los valores extremos de $\frac{L}{k}$ y es bastante exacta para los valores intermedios, por tanto, la ecuación en función de esfuerzos será:

$$\frac{1}{\sigma A} = \frac{1}{\sigma_e A} + \frac{1}{\sigma_y A} \quad (\text{A1.2})$$

Para una columna con ambos extremos articulados se tiene la ecuación (1.9), por lo tanto, el esfuerzo se escribe como:



$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{k}\right)^2} \quad (A1.3)$$

Pero $a = \frac{\sigma_y}{\pi^2 E}$

Se obtiene el esfuerzo de Rankine-Gordon.

$$\sigma_R = \frac{\sigma_y}{1 + a \left(\frac{L}{k}\right)^2} \quad (A1.4)$$

“*a*” se determina en forma experimental para diversos materiales, ahora, para la carga de Rankine-Gordon la ecuación es la siguiente:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Entonces la expresión (A1.4) queda expresada como

$$\sigma_R = \frac{P_R}{A} \quad (A1.5)$$

Pero la ecuación (A1.5) queda definida de la siguiente forma.

$$P_R = \frac{\sigma_y A}{1 + a \left(\frac{L}{k}\right)^2} \quad (A1.6)$$

Como nota, los valores de “*a*” no resultan iguales a los valores teóricos, las cargas de Rankine-Gordon para columnas largas no serán iguales a los que se tomaron mediante la teoría de Euler.

Formula de Perry-Robertson.

El modelo matemático se basa en la suposición de que cualquier imperfección en la columna, ya sea, defectos en su fabricación, falla del material ó excentricidad de la carga, se puede aceptar, si la columna es diseñada con una curvatura inicial.

Se supondrá que la curvatura es cosenoidal, pero en realidad la forma real afecta muy poco al resultado.

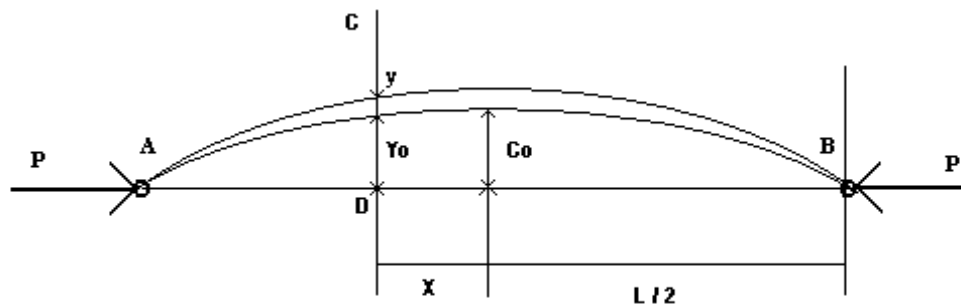


Figura A1-1. Columna con curvatura inicial.

Se considera que la columna está articulada en ambos lados, que tiene una longitud L . La curvatura inicial en cualquier distancia al centro está dada por:

$$y_0 = C_0 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \text{Estado inicial.} \quad (\text{A1.7})$$

Cuando se aplican dos cargas en los extremos, la deflexión se incrementa a $y + y_0$, entonces:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py - PC_0 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Se tenemos como en los otros casos una ecuación diferencial no homogénea dando como resultado la siguiente expresión:

$$y_H = A \sin(\sqrt{k}x) + B \cos(\sqrt{k}x) + \left[\frac{\frac{P}{EI} C_0 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\left(\frac{\pi^2}{L^2}\right) - \left(\frac{P}{EI}\right)} \right] \quad (\text{A1.8})$$

Usando los valores de frontera $x = \pm \frac{L}{2}$ y $y = 0$ en la expresión (A1.8) y se dividen entre A , y aplica la expresión $\sigma = \frac{P}{A}$, por lo tanto, la deflexión máxima ($x = 0$) será:

$$y = \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_e - \sigma} \right) C_0 \quad (\text{A1.9})$$



Para el momento flector máximo se tiene:

$$P \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_e - \sigma} \right) C_0 \quad (A1.10)$$

El esfuerzo máximo debido a la flexión será:

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{P}{I} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_e - \sigma} \right) C_0 h \quad (A1.11)$$

Donde h es la fibra más lejana del eje neutro de la columna, habiendo planteado las expresiones matemáticas del momento máximo y el esfuerzo, el esfuerzo máximo será;

$$\sigma_{\max} = \sigma \left[\frac{C_0 h \sigma_e}{k^2 (\sigma_e - \sigma)} \right] + \frac{P}{A} \quad (A1.12)$$

Donde $\eta = \frac{C_0 h}{k^2}$

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{\eta \sigma_e}{\sigma_e - \sigma} \right) + 1 \quad (A1.13)$$

Si $\sigma_{\max} = \sigma_y$, entonces cuando la ecuación interior se resuelva para σ se obtiene la formula de **Perry-Robertson**.

$$\sigma = \frac{\sigma_y + (\eta + 1)\sigma_e}{2} - \sqrt{\left[\frac{\sigma_y + (\eta + 1)\sigma_e}{2} \right]^2 - \sigma_y \sigma_e} \quad (A1.14)$$

Si el material es frágil, es posible que se presente falla por tensión, entonces el signo entre los dos términos de la raíz será positivo y σ_y será el esfuerzo de fluencia a la tensión.

Columna con curvatura inicial.

De la ecuación de Perry-Robertson se supone que se tolerarían las imperfecciones de la columna, si esta diseñada con una curvatura inicial.

Para una curvatura inicial con flexión central, se tiene:



$$\text{Deflexión máxima} = \left[\frac{\sigma_e}{(\sigma_e - \sigma)} \right] C_0 = \left[\frac{P_e}{(P_e - P)} \right] C_0 \quad (\text{A1.15})$$

$$\text{Momento flector máximo} = P \left[\frac{\sigma_e}{(\sigma_e - \sigma)} \right] C_0 = \left[\frac{PP_e}{(P_e - P)} \right] C_0 \quad (\text{A1.16})$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \pm \left[\frac{P\sigma_e}{(\sigma_e - \sigma)} \right] \frac{hC_0}{I} = \frac{P}{A} \pm \left[\frac{PP_e}{(P_e - P)} \right] \frac{hC_0}{I} \quad (\text{A1.17})$$

Aquí “*h*” es la distancia del eje neutro a la fibra más alejada de la columna.

Columnas con carga excéntrica.

De vez en cuando se tiene el caso que una columna soporta una carga que actúa en el borde o sobre una ménsula al costado.

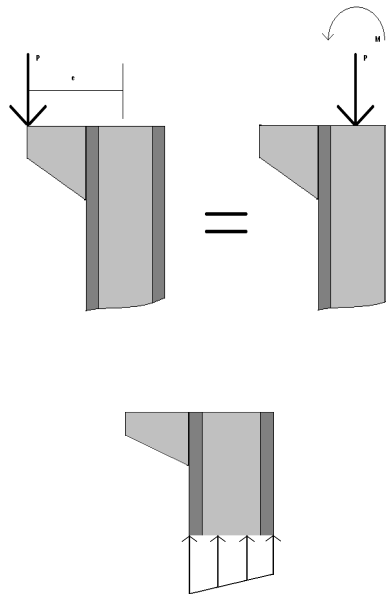


Figura A1-2. Distribución de carga en la columna transmitida por medio de ménsula.

Para la carga excéntrica, **Ayton y Perry** sugieren que la ecuación de Perry-Robertson puede tener modificaciones sustituyendo C_0 por $(C_0 + 1.2e)$ donde “*e*” es la excentricidad.

Y la ecuación queda así:

$$\eta' = \eta + 1.2 \frac{eh}{k^2} \quad (\text{A1.18})$$



Donde η' sustituye a η en la ecuación de Perry-Robertson.

Para desarrollar las ecuaciones se tomaron en cuenta 2 casos.

- Extremos Articulados: Formula de Smith-Southwell.
- Columna con un extremo empotrado y el otro libre.

Extremos Articulados: Formula de Smith-Southwell.

Considérese la columna que se muestra en la figura A1.3. Esta soporta una carga “P” con excentricidad “e” en uno de los ejes principales.

Para este caso, no existirá una carga de “pandeo” como se vio anteriormente, ya que la columna se flexionará inmediatamente al aplicar carga y la flexión ocurrirá sobre el otro eje principal.

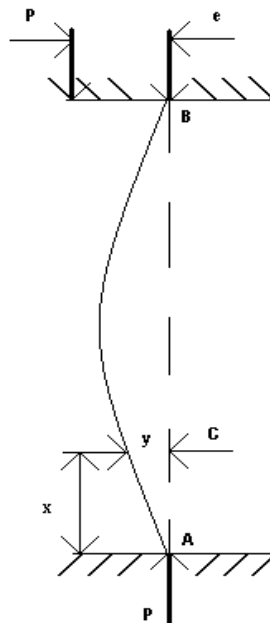


Figura A1-3. Columna con carga excéntrica (extremos articulados).

En base a la figura A1-3., la expresión la ecuación:

$$C = -P(y - e) \quad (A1.19)$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -P(y + e) \quad (A1.20)$$



Resolviendo la ecuación diferencial de segundo orden nos da una solución igual a:

$$y = A\text{Sen}(kx) + B\text{Cos}(kx) - e \quad (\text{A1.21})$$

Aplicando las condiciones de frontera a la solución se tiene que:

Cuando $x = 0$ y $y = 0$

$$B = e$$

Y cuando $x = \frac{L}{2}$ y $\frac{dy}{dx} = 0$

$$y + e = e\text{Tan}\left(\frac{kL}{2}\right)[\text{Sen}(kx)] + e\text{Cos}(kx)$$

Para la deflexión máxima, cuando $x = \frac{L}{2}$ y $y = \delta$

$$\delta + e = e\text{Sec}\left(\frac{kL}{2}\right) \quad (\text{A1.22})$$

Para el Momento Flector Máximo, se multiplica la expresión (A1.22) por la carga "P".

$$P(\delta + e) = P\left(e\text{Sec}\left(\frac{kL}{2}\right)\right)$$

El esfuerzo máximo debido a la flexión es

$$\frac{My}{I} = Pe\text{Sec}\left(\frac{kL}{2}\right) \cdot \frac{h}{I}$$

Donde el esfuerzo se escribe como:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{camp}} + \sigma_{\text{flexión}} \quad (\text{A1.23})$$

Obteniendo la fórmula de Smith-Southwell.

$$\sigma_{\max} = \sigma \left[1 + \frac{eh}{k^2} \text{Sec}\left(\frac{L}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{Ek^2}}\right) \right] \quad (\text{A1.24})$$



Columna con un extremo empotrado y otro libre.

Se considera una columna con carga excéntrica en un lado con la condición de empotre de un lado y el otro libre como se muestra en la figura A1-4.

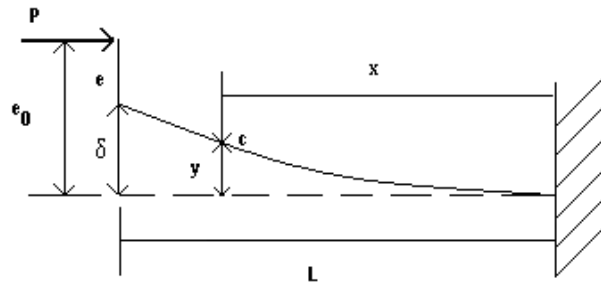


Figura A1-4. Columna con carga excéntrica (un extremo libre y el otro empotrado).

La expresión característica en función del diagrama de Cuerpo Libre es:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P(e_0 - y) \tag{A1.25}$$

Solucionando la ecuación diferencial tenemos que

$$y = A \cos(kx) + B \operatorname{Sen}(kx) + e_0 \tag{A1.26}$$

Como se vio anteriormente, sólo se hará referencia a la obtención de la solución anterior.

Aplicando las condiciones de frontera se tiene:

Cuando $x = 0$ y $y = 0$.

$$A = -e_0$$

Cuando $x = 0$ y $\frac{dy}{dx} = 0$:

$$B = 0$$

$$y = -e_0 \cos(kx) + e_0$$

Cuando $x = L$ y $y = \delta$.



$$\delta + e' = e \operatorname{Sec}(kL)$$

Esta es la misma ecuación que se obtiene para los extremos articulados, sólo que la diferencia radica en que L se substituye por $2L$, en este caso se aplica la fórmula de **Smith-Southwell** siempre que emplee la longitud equivalente de la columna.

Entonces la expresión queda de la siguiente manera:

$$\sigma_{\max} = \sigma \left[1 + \frac{eh}{k^2} \operatorname{Sec} \left(\frac{L}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{Ek^2}} \right) \right] \quad (\text{A1.27})$$

Carga uniformemente distribuida.

Se considera a la columna con carga uniformemente distribuida, donde el origen está en el centro, pero y se mide a partir de la posición de deflexión máxima como muestra la figura A1-5.

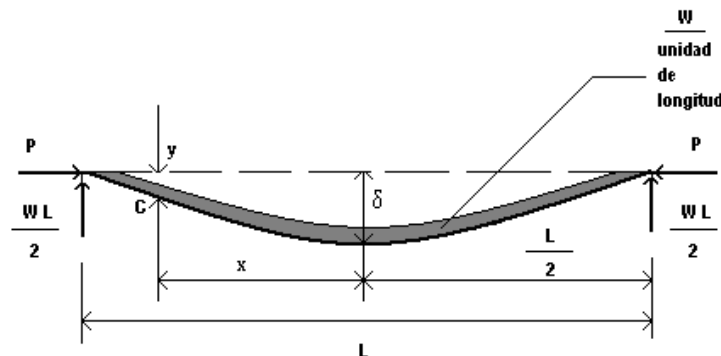


Figura A1-5. Columna con carga uniformemente distribuida.

La ecuación que describe la carga uniformemente distribuida en una columna es:

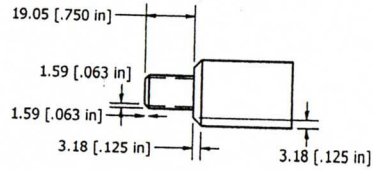
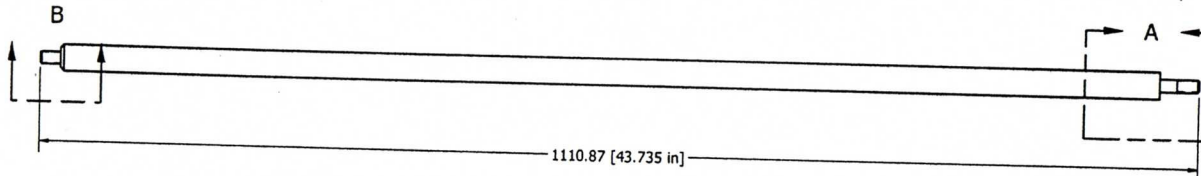
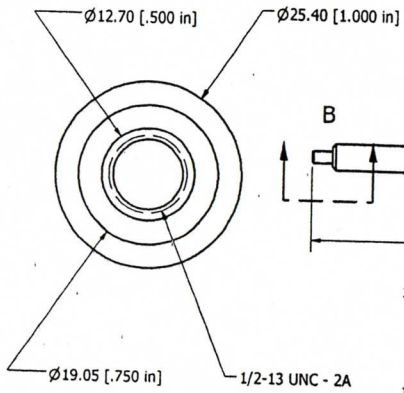
$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = \frac{W}{2EI} \left(\frac{L^2}{4} - x^2 \right) + k^2 \delta \quad (\text{A1.28})$$

Solucionando la ecuación diferencial y aplicando las condiciones de frontera, se obtiene la ecuación del Momento Flector Máximo:

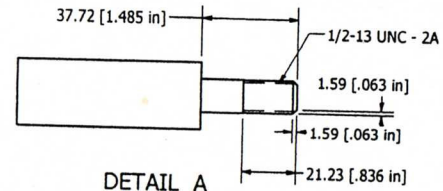
$$M_{\max} = \frac{W}{k^2} \left(\operatorname{Senh} \left(\frac{kL}{2} \right) - 1 \right) \quad (\text{A1.29})$$

Apéndice 2

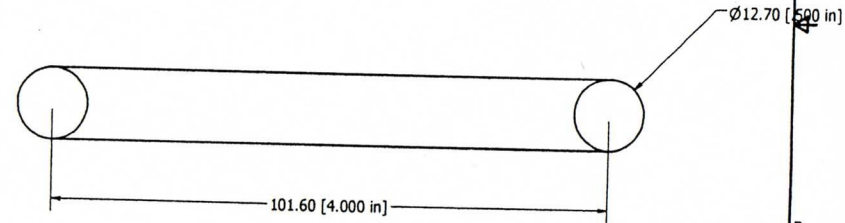
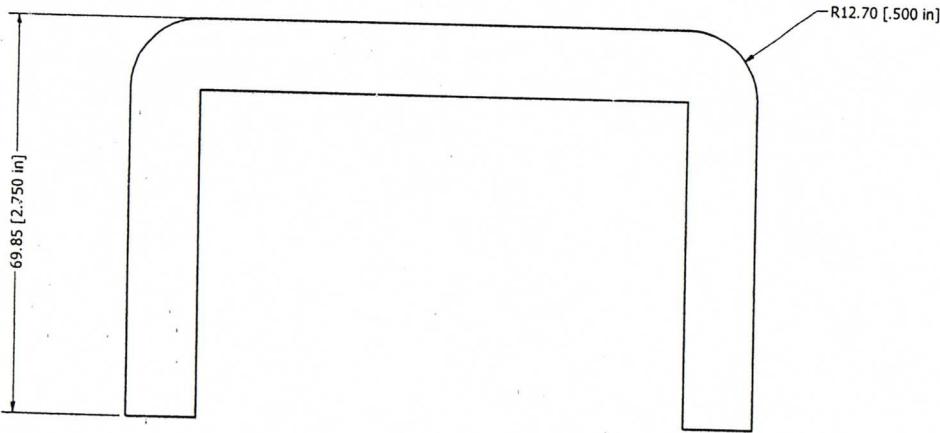
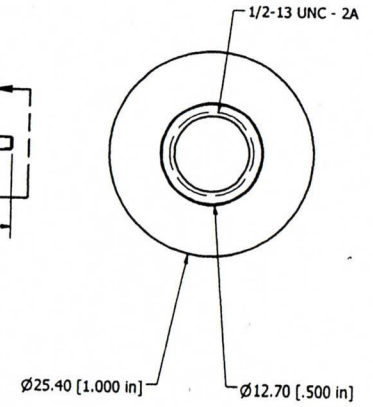
Planos y Explosivos.



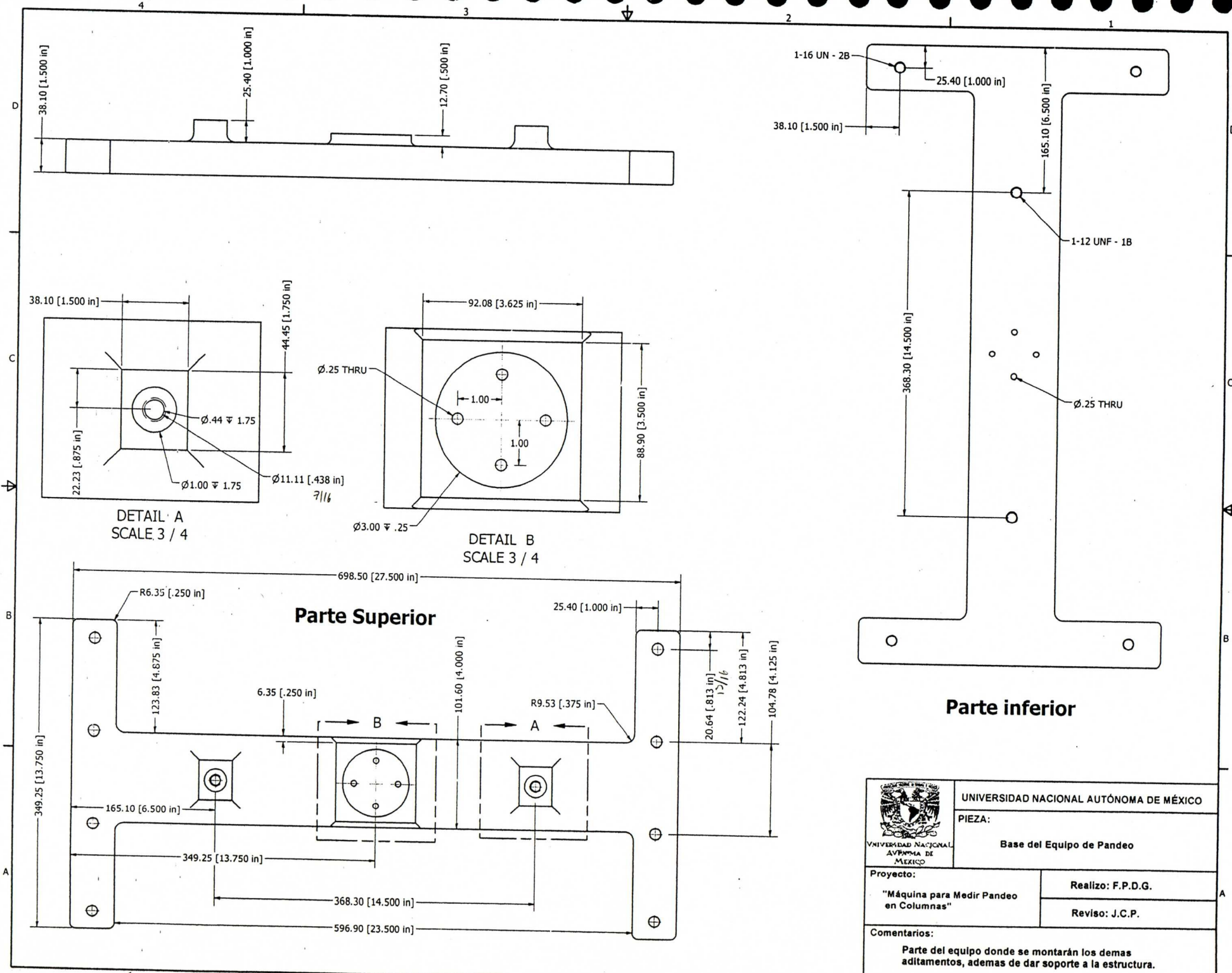
DETAIL B
SCALE 0.70 : 1




DETAIL A
SCALE 0.70 : 1

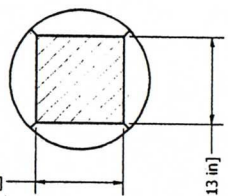


 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
	PIEZA: Poste principal y Manija de Base
Proyecto: "Máquina para Medir Pandeo en Columnas"	Realizo: F.P.D.G.
	Reviso: J.C.P.
Comentarios: El Poste Principal es manufacturado en Acero 1018 con un acabado cromo, la Manija de Base es manufacturada en Acero 1018 con pintado epóxico.	

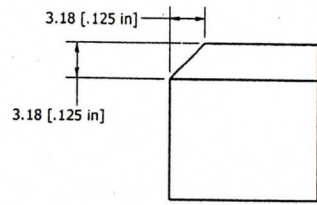


	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO	
	PIEZA:	
		Base del Equipo de Pandeo
Proyecto:	"Máquina para Medir Pandeo en Columnas"	Realizo: F.P.D.G.
		Reviso: J.C.P.
Comentarios:		
Parte del equipo donde se montarán los demás aditamentos, además de dar soporte a la estructura.		

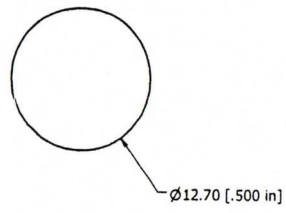
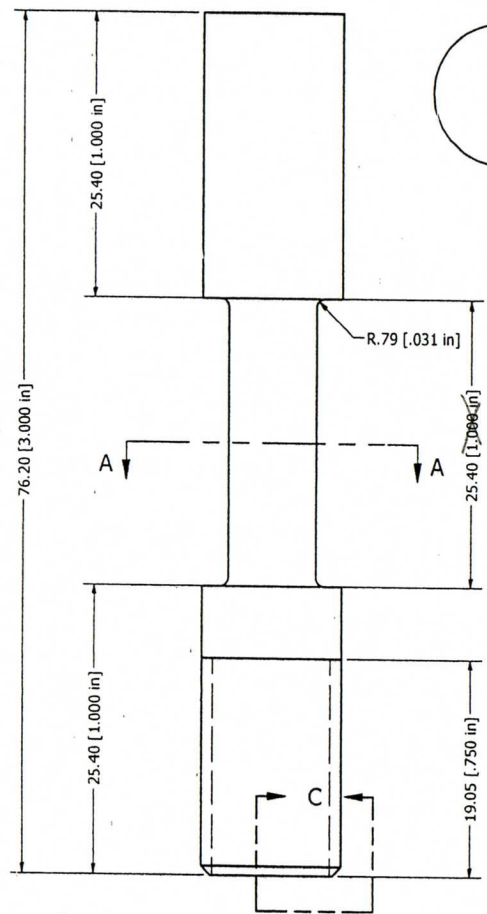
Celda de Carga



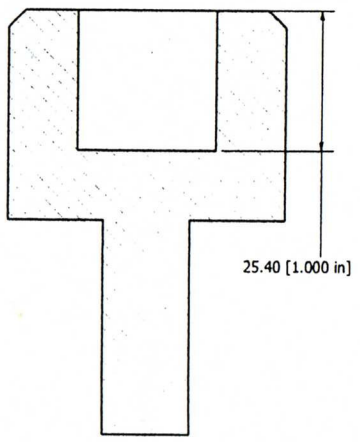
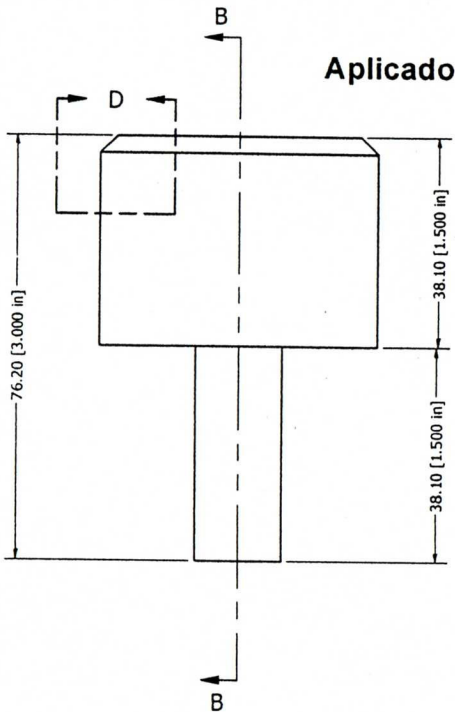
SECTION A-A
SCALE 3: 1



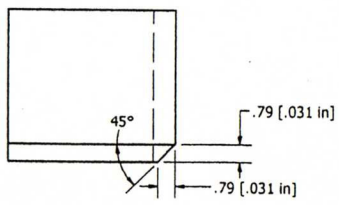
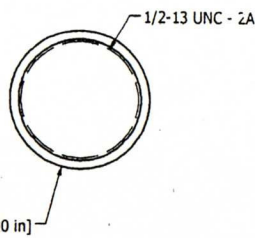
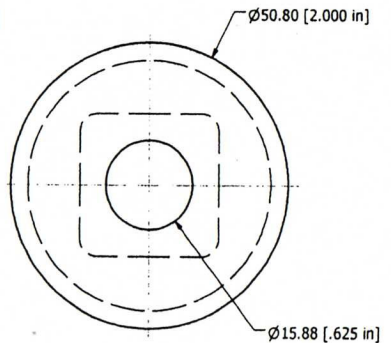
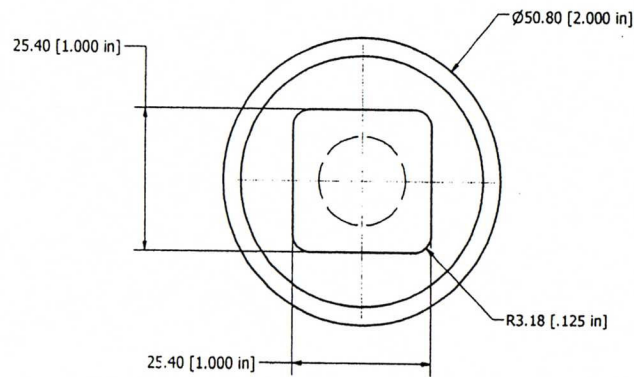
DETAIL D
SCALE 3: 1



Aplicador de fuerza



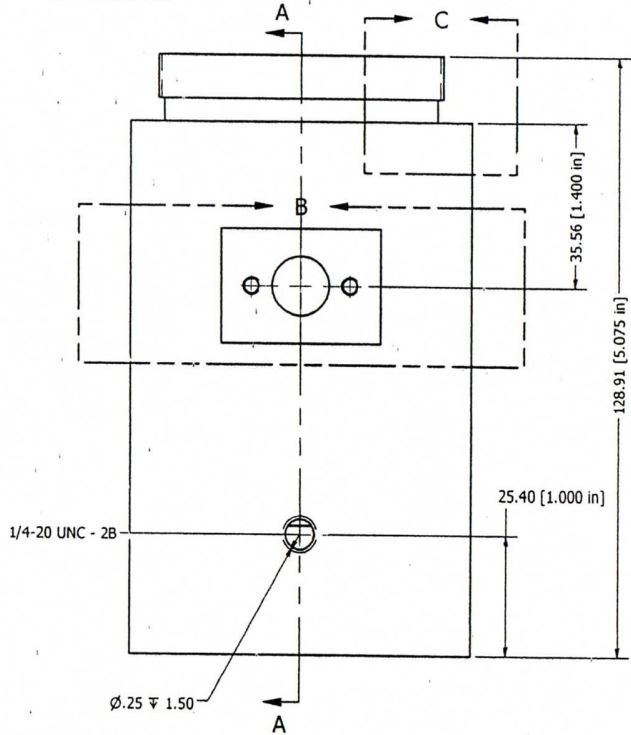
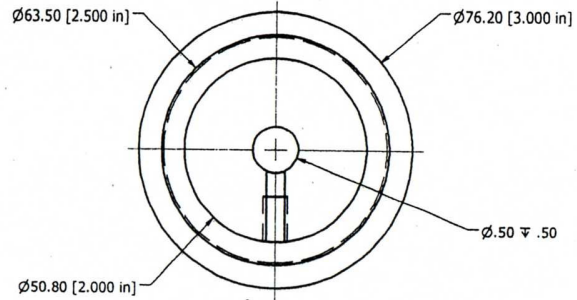
SECTION B-B
SCALE 1.5: 1



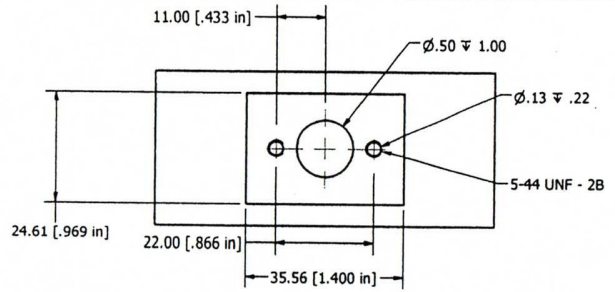
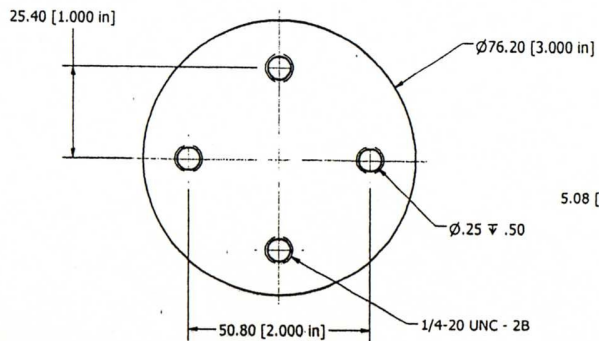
DETAIL C
SCALE 6: 1

	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO	
	PIEZA: Celda de Carga y Aplicador de Fuerza	
Proyecto: "Máquina para Medir Pandeo en Columnas"	Realizo: F.P.D.G. Reviso: J.C.P.	
Comentarios: La Celda de Carga está manufacturada en Duraluminio, el Aplicador de Fuerza está manufacturado en Acero 1018 con un recubrimiento de cromo.		

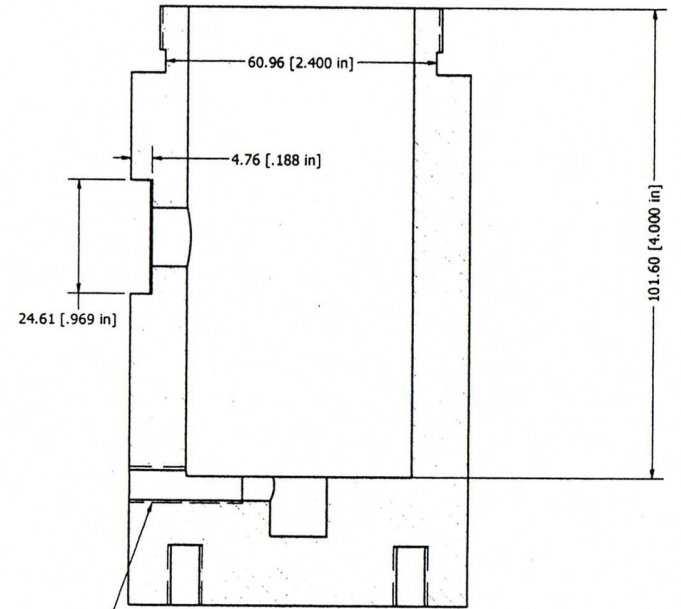
VISTA SUPERIOR



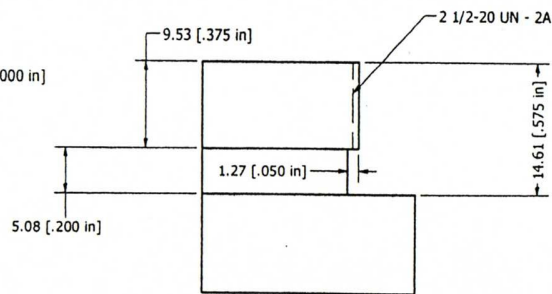
VISTA INFERIOR




DETAIL B
SCALE 1.25 : 1



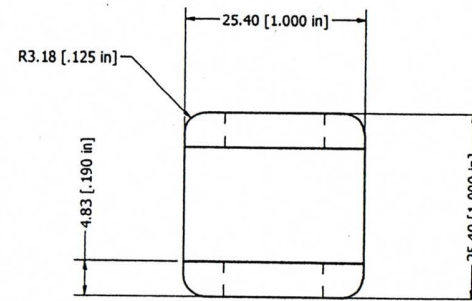
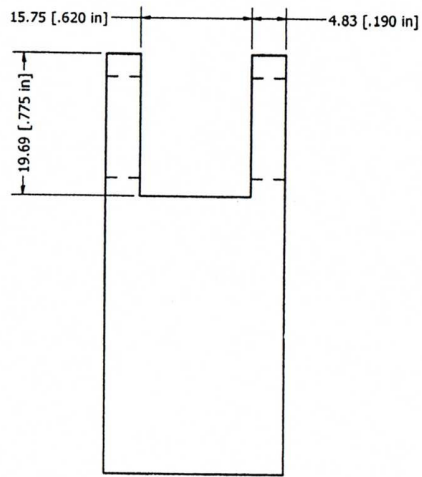
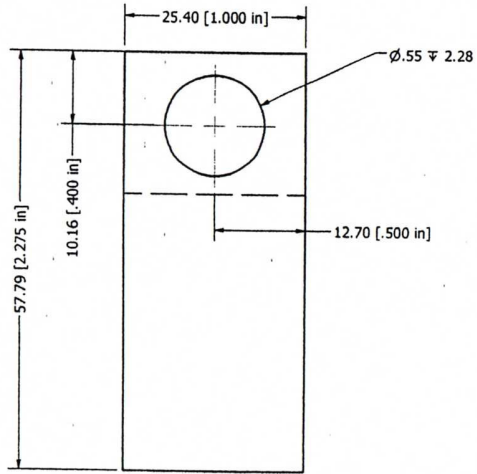
SECTION A-A
SCALE 1.25 : 1



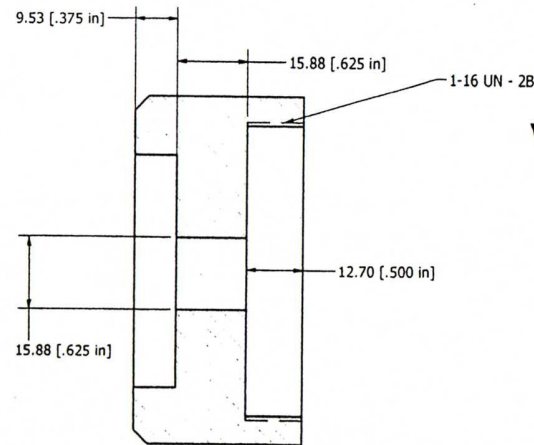
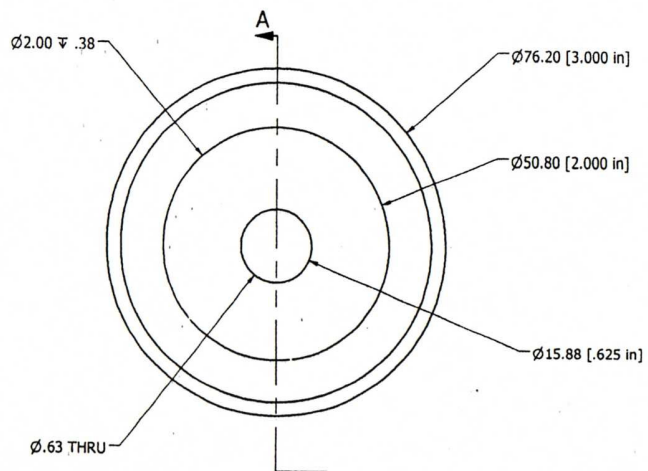
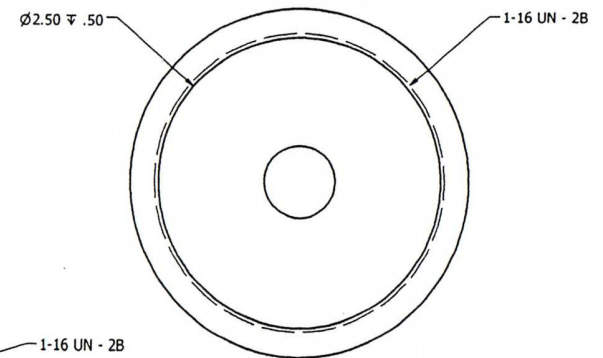
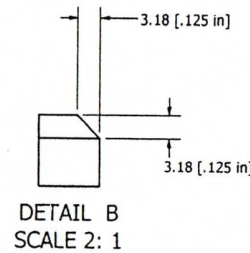
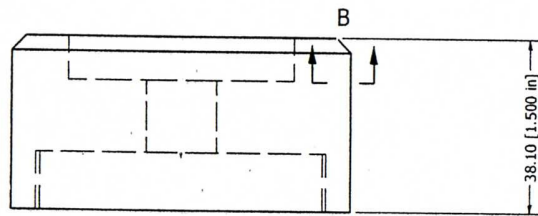
DETAIL C
SCALE 2.50 : 1

 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO	
	PIEZA: Botella de Celda	
Proyecto: "Máquina para Medir Pandeo en Columnas"	Realizo: F.P.D.G. Reviso: J.C.P.	
Comentarios: La Botella está manufacturada en Acero 1018 y recubierta en cromo para evitar la oxidación.		

DADO MOVIL




TAPA DE BOTELLA

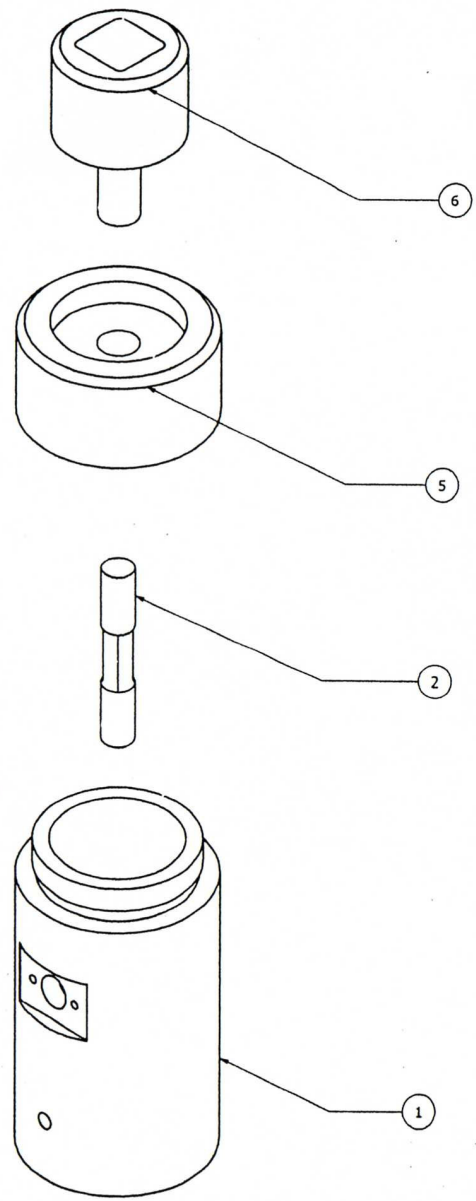
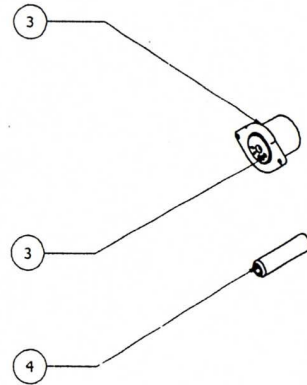
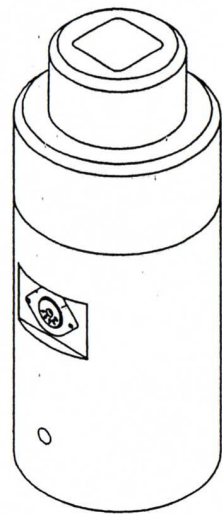


VISTA INFERIOR


VISTA SUPERIOR

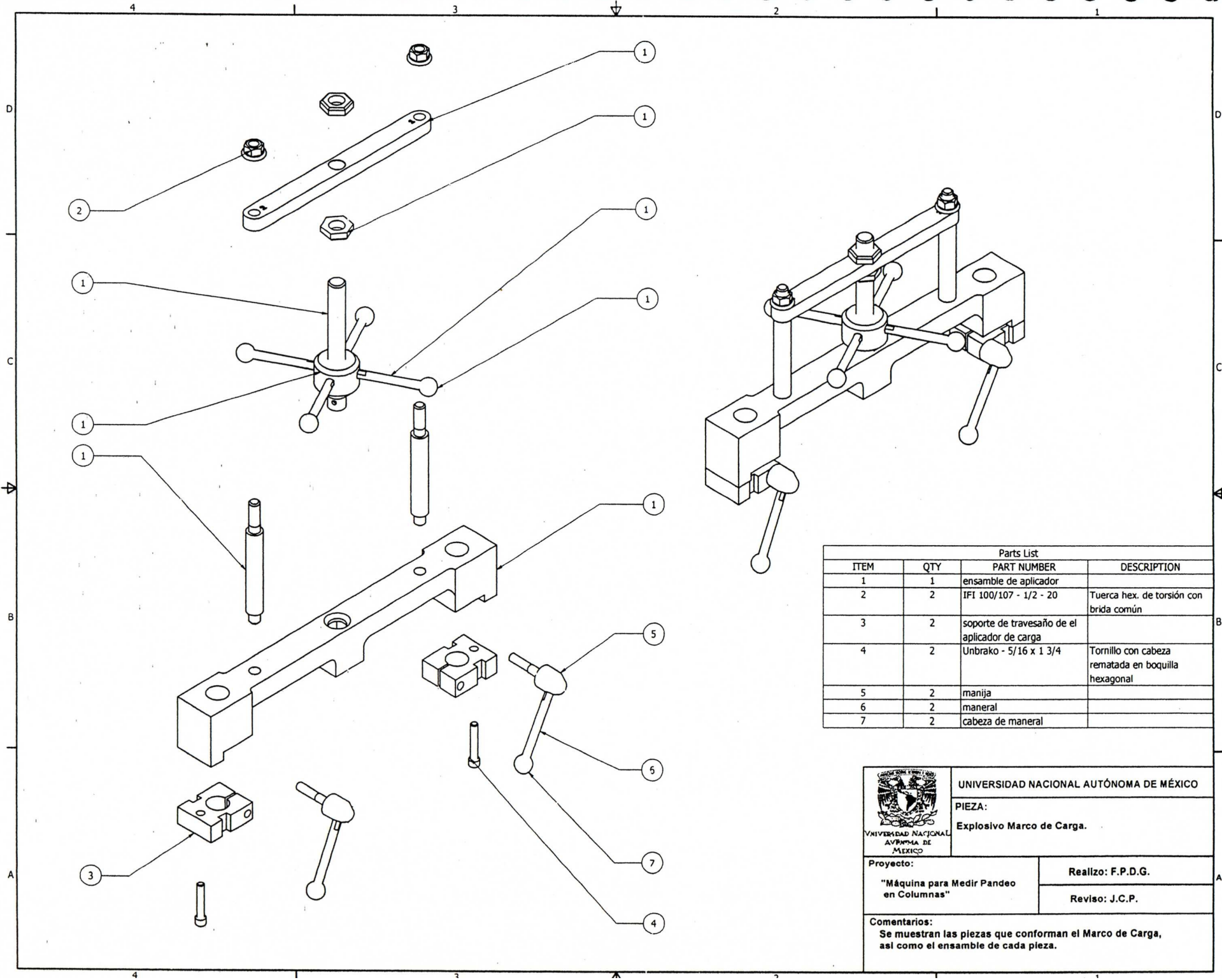
SECTION A-A
SCALE 1.25: 1

 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO	
	PIEZA: Tapa de Botella de Celda y Dado Movil	
Proyecto: "Máquina para Medir Pandeo en Columnas"	Realizo: F.P.D.G.	Reviso: J.C.P.
Comentarios: La Tapa de Botella está manufacturada en Acero 1018 y recubierta con Cromo para evitar la oxidación, el Dado Movil está manufacturado en Acero 1018 y recubierto con un anodizado para evitar el desgaste.		



Parts List			
ITEM	QTY	PART NUMBER	DESCRIPTION
1	1	botella de celda	
2	1	celda de carga	
3	1	Conector PLUG	
4	1	Unbrako - 1/4 x 1	Tornillos de ajuste boquilla hexagonal - Punta plana
5	1	tapa botella celda	
6	1	aplicador de celda	

 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO	
	PIEZA: Columnas Varias	
Proyecto: "Máquina para Medir Pandeo en Columnas"	Realizo: F.P.D.G. Reviso: J.C.P.	
Comentarios: Las columnas estan manufacturadas en varios materiales (Acero, Laton y Aluminio) , al igual que tienen diferentes geometrías, según sea la configuracion de los empotes.		



Parts List

ITEM	QTY	PART NUMBER	DESCRIPTION
1	1	ensamble de aplicador	
2	2	IFI 100/107 - 1/2 - 20	Tuerca hex. de torsión con brida común
3	2	soporte de travesaño de el aplicador de carga	
4	2	Unbrako - 5/16 x 1 3/4	Tornillo con cabeza rematada en boquilla hexagonal
5	2	manija	
6	2	maneral	
7	2	cabeza de maneral	



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

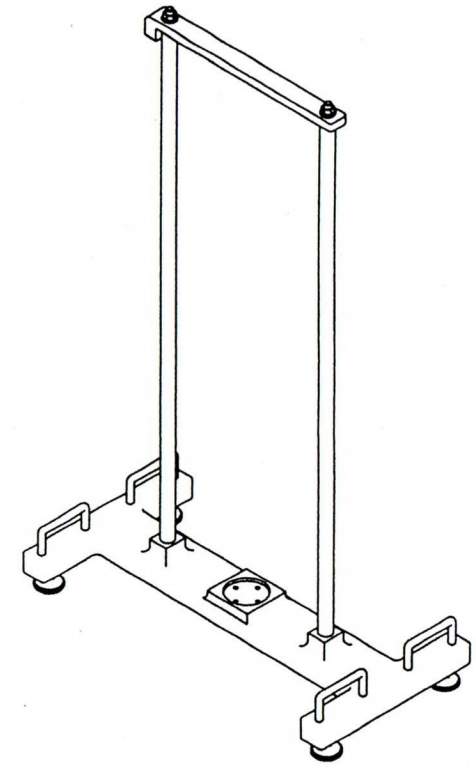
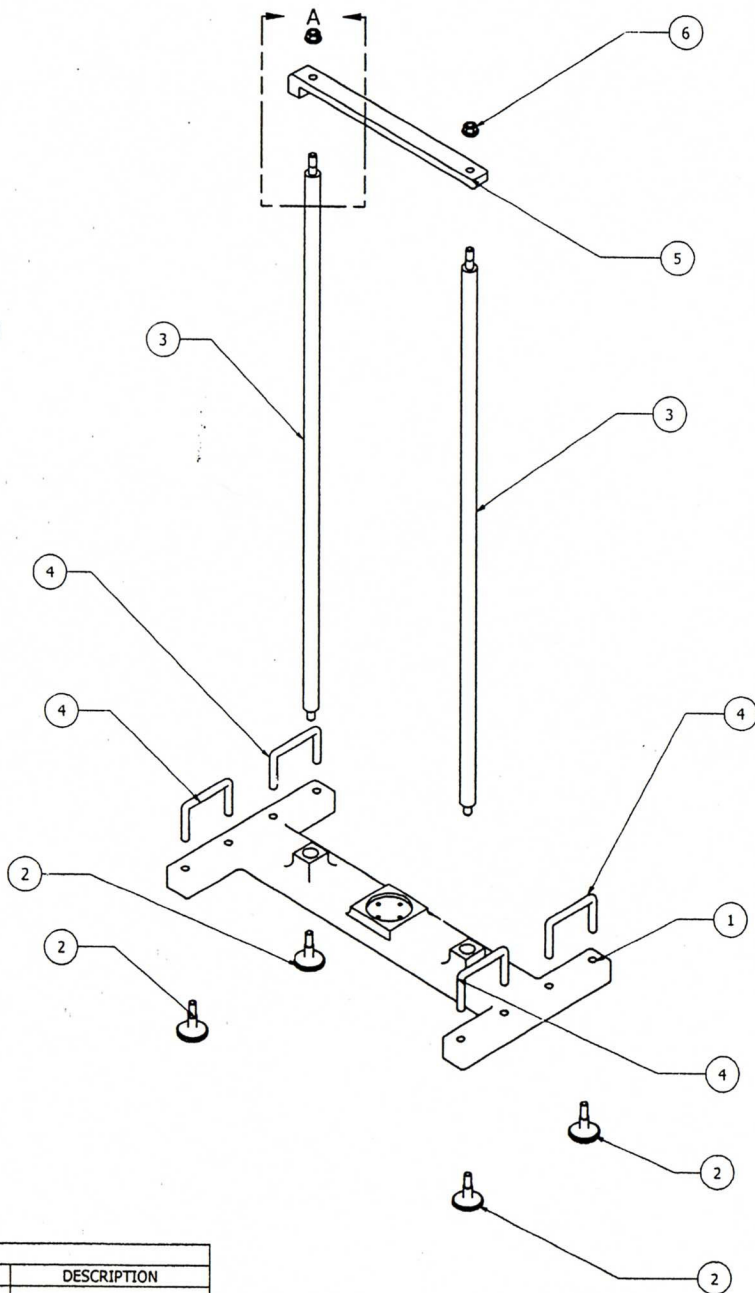
PIEZA:
Explosivo Marco de Carga.

Proyecto:
"Máquina para Medir Pandeo en Columnas"


Realizo: F.P.D.G.
Reviso: J.C.P.

Comentarios:
Se muestran las piezas que conforman el Marco de Carga, así como el ensamble de cada pieza.

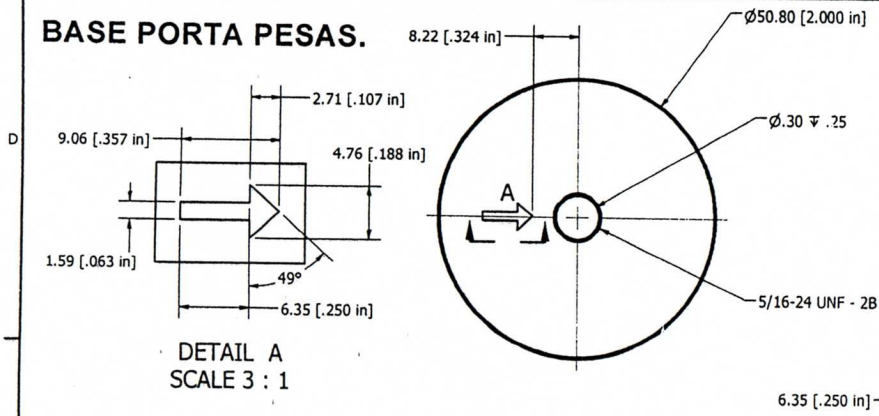
DETAIL A
SCALE 1/3



Parts List			
ITEM	QTY	PART NUMBER	DESCRIPTION
1	1		base
2	4		soporte base
3	2		poste
4	4		manija base
5	1		soporte principal
6	2	IFI 100/107 - 1/2 - 13	Tuerca hex. de torsión con brida común

 UNIVERSIDAD NACIONAL AVENIDA DE MÉXICO	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO	
	PIEZA: Explosivo Bastidor	
Proyecto: "Máquina para Medir Pandeo en Columnas"	Realizo: F.P.D.G. Reviso: J.C.P.	
Comentarios: Partes numeradas y ensamble de sub piezas.		

BASE PORTA PESAS.



DETAIL A
SCALE 3 : 1

POSTE DE SOPORTE.

DETAIL B
SCALE 5 : 1

SECTION G-G
SCALE 1.5: 1

DETAIL F
SCALE 3 : 1

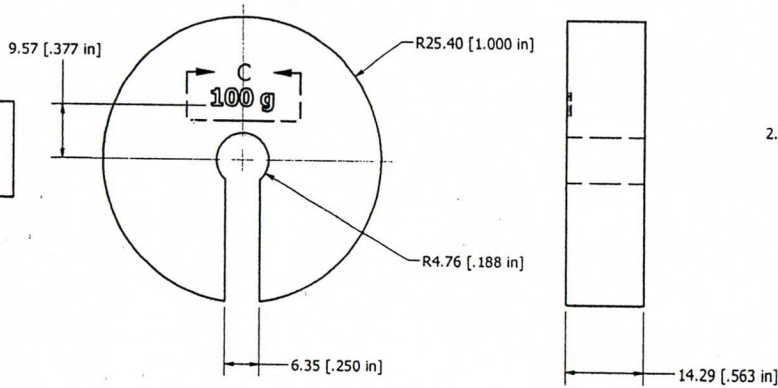
SECTION E-E
SCALE 2: 1

SECTION H-H
SCALE 1.5: 1

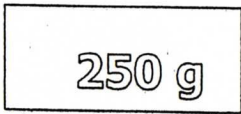
PESA DE 100g.



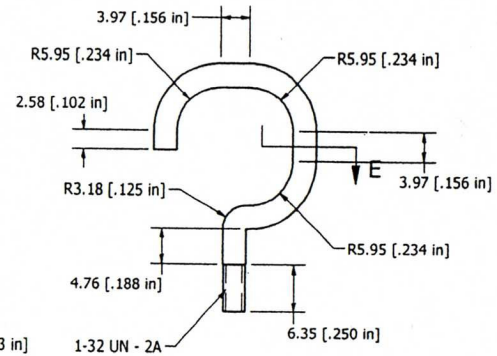
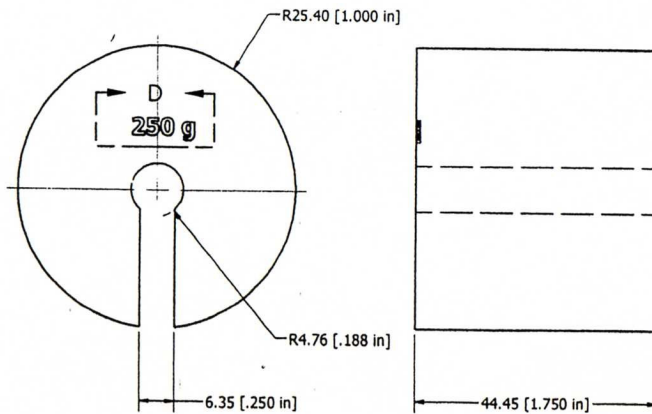
DETAIL C
SCALE 3 : 1



PESA DE 250g.



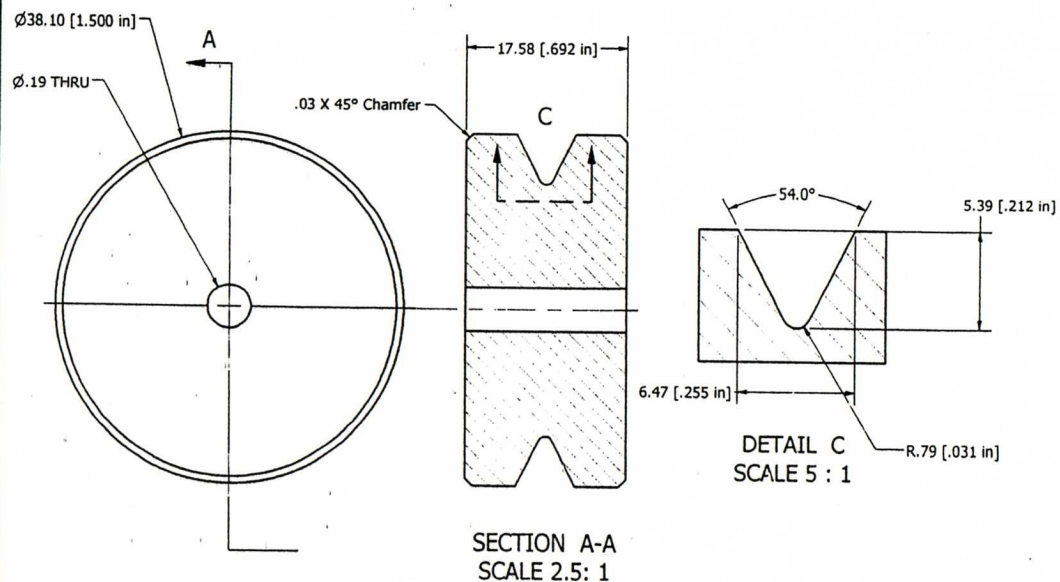
DETAIL D
SCALE 3 : 1



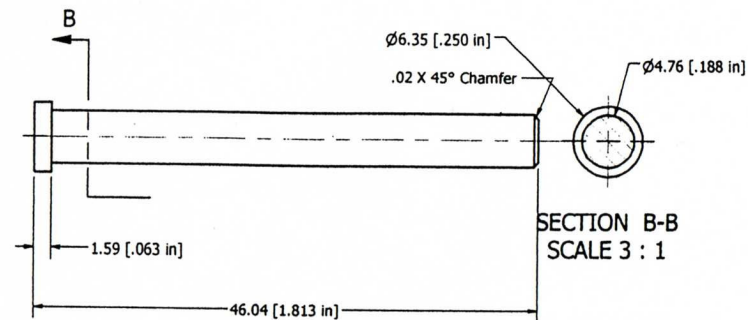
GANCHO.

	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO	
	PIEZA: Base de Porta Pesas, Poste, Gancho, Pesas de 100g y 250g.	
Proyecto: "Máquina para Medir Pandeo en Columnas"	Realizo: F.P.D.G.	A
	Reviso: J.C.P.	
Comentarios: Las pesas, base, poste y gancho, estan manufacturadas en Acero 1018 y recubiertas por cromo para evitar la oxidación y el desgaste		

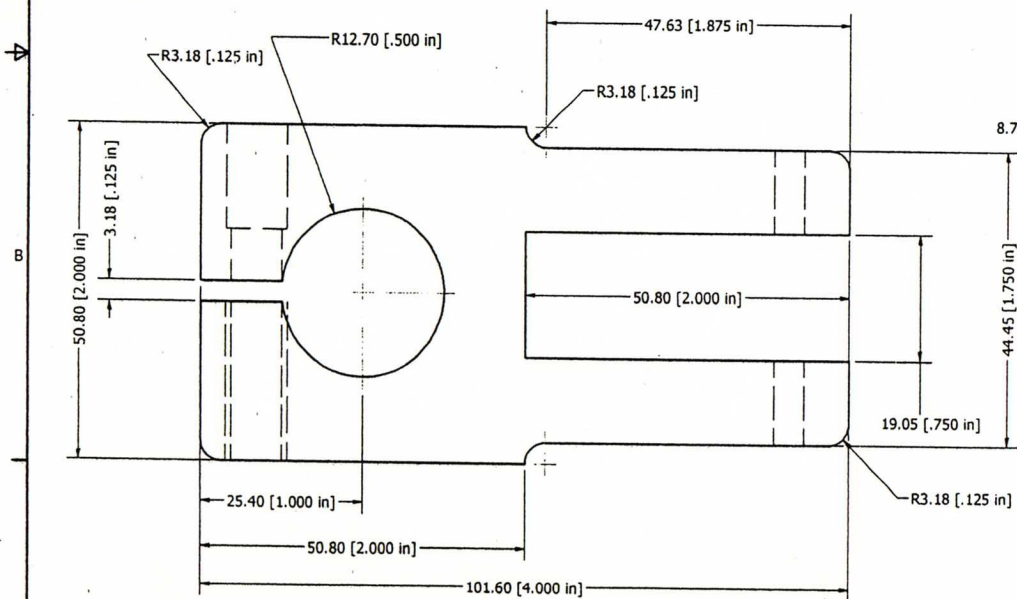
POLEA DE CARGA.



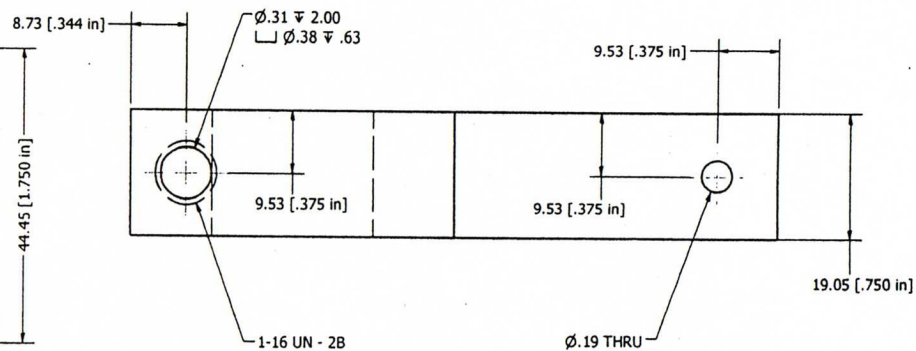
EJE DE POLEA.



SOPORTE DE POLEA.



VISTA LATERAL



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PIEZA:

Polea de Carga, Eje y Soporte de Polea.

Proyecto:

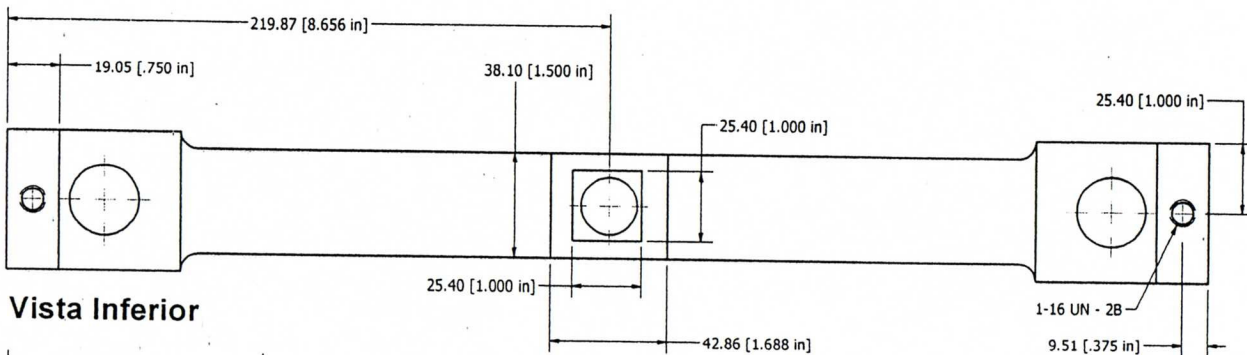
"Máquina para Medir Pandeo en Columnas"

Realizo: F.P.D.G.

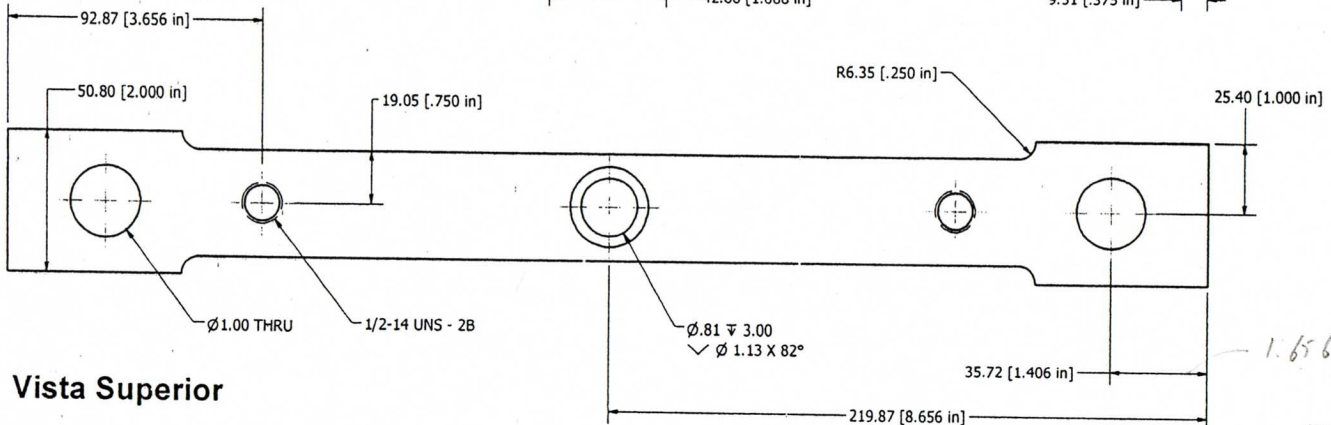
Reviso: J.C.P.

Comentarios:

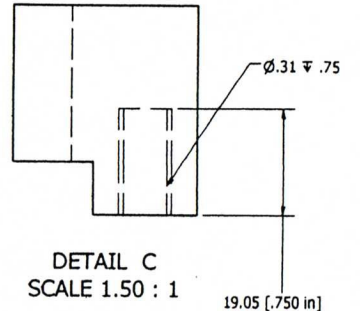
La Polea de Carga está manufacturada en Aluminio 6062, el Eje y el Soporte de Polea están manufacturados en Acero 1018, el Soporte está recubierto por pintura epóxica.



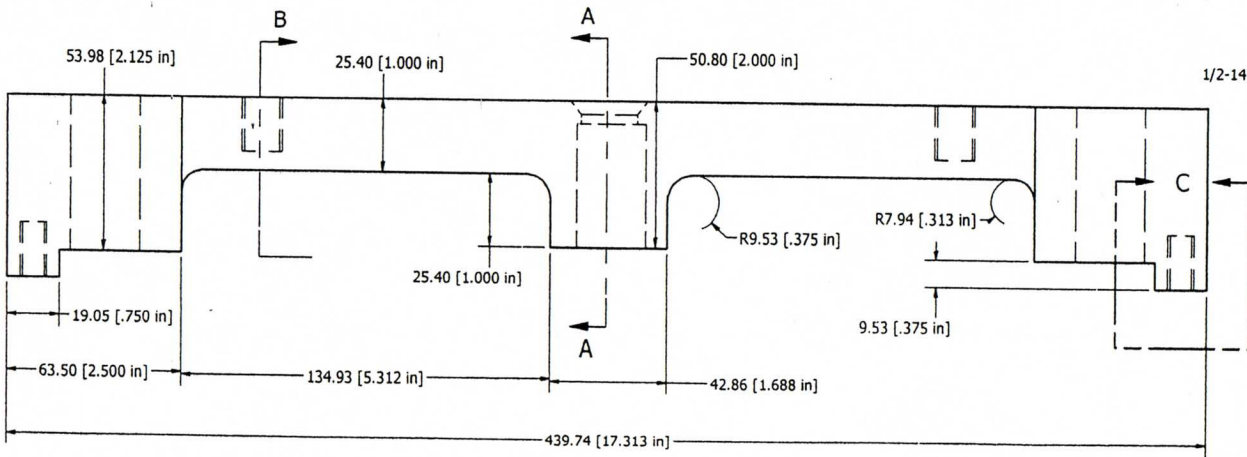
Vista Inferior



Vista Superior

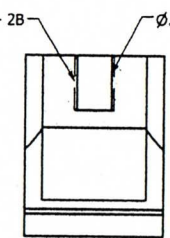


DETAIL C
SCALE 1.50 : 1

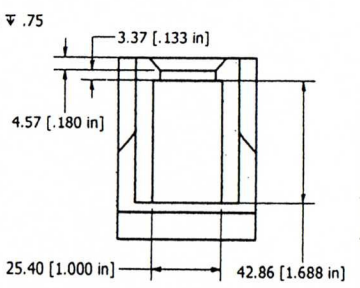


Vista Frontal

SECTION B-B
SCALE .75 : 1



SECTION A-A
SCALE .75 : 1



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PIEZA:

Barra principal de Marco de Carga

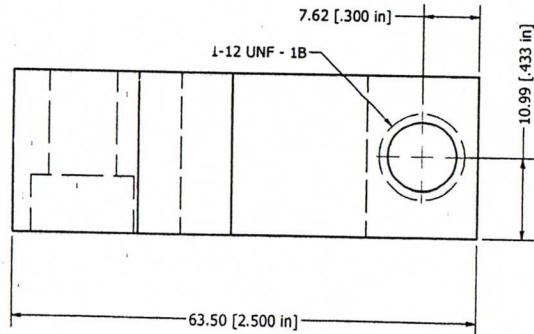
Proyecto:
"Máquina para Medir Pandeo en Columnas"

Realizó: F.P.D.G.

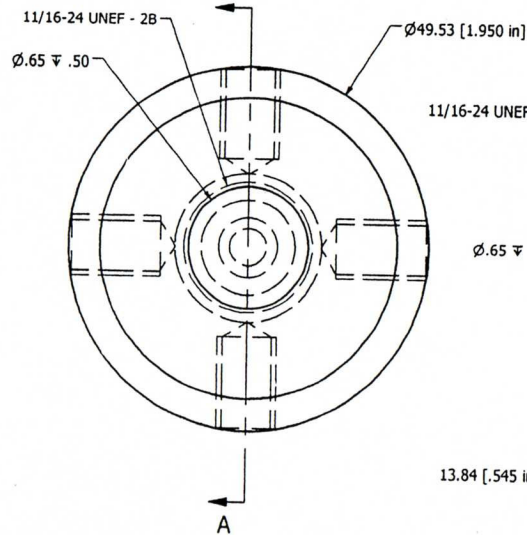
Revisó: J.C.P.

Comentarios:
La barra está manufacturada en Acero 1018 y conformada por tres piezas unidas con soldadura, el acabado es pintura epóxica antioxidante

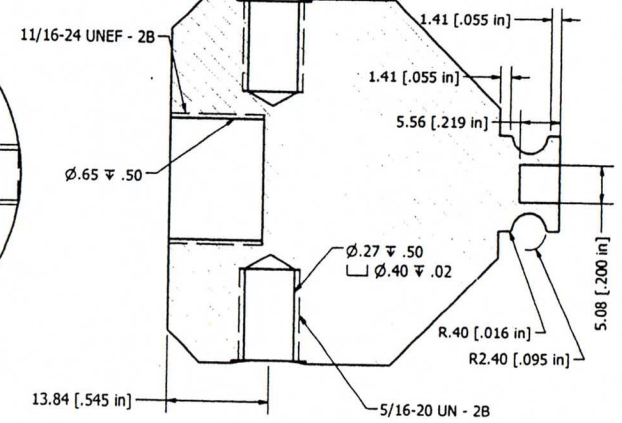
Soporte de Marco de Carga



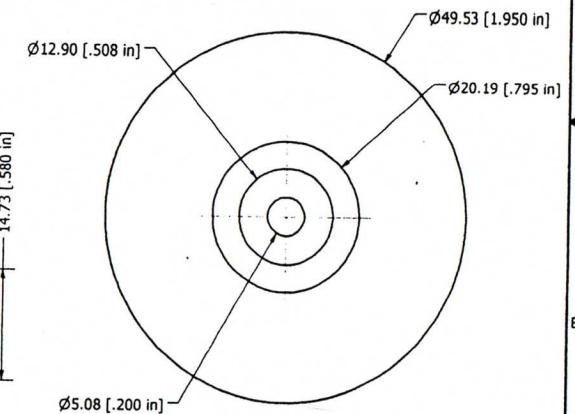
Vista Superior



SECTION A-A SCALE 2: 1

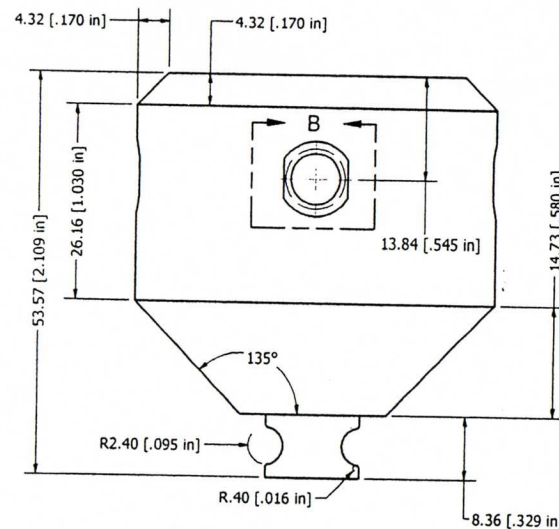


Vista Inferior

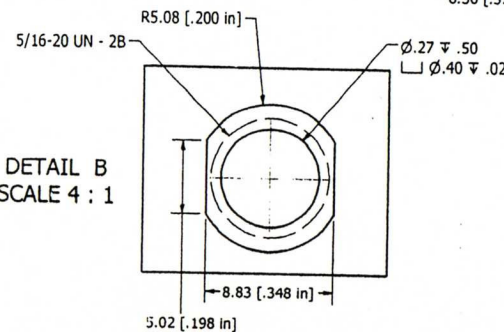


Piezas X1

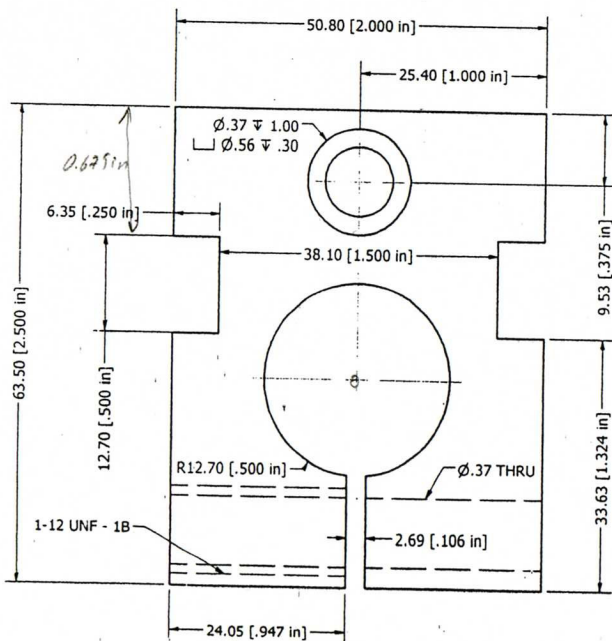
Aplicador de Carga



DETAIL B SCALE 4: 1

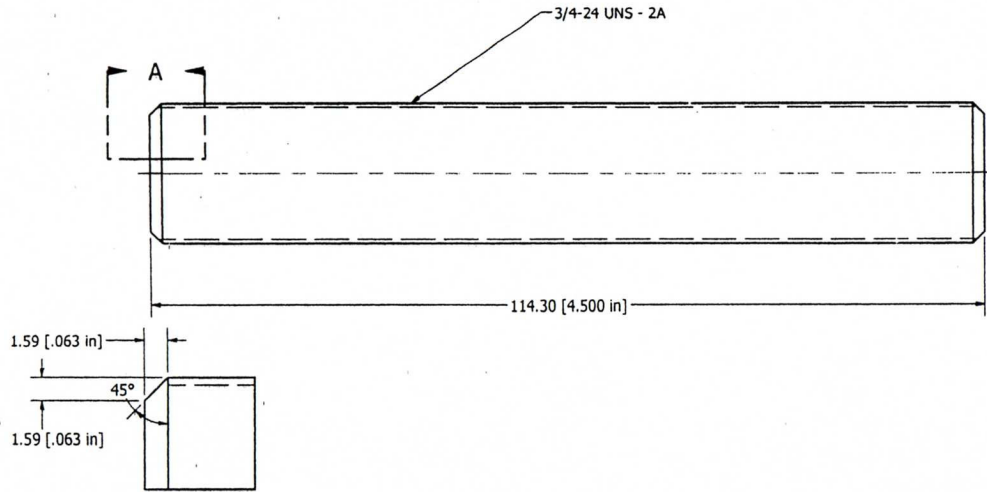


Piezas X2

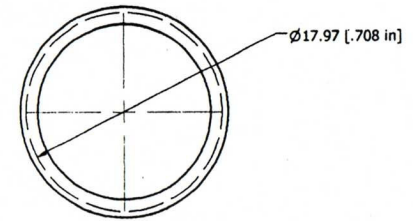


 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO AV. PARRIS DE LA VILLA DE MÉXICO	PIEZA:
	Aplicador de Carga y Soporte de Marco de Carga
Proyecto: "Máquina para Medir Pandeo en Columnas"	Realizo: F.P.D.G. Reviso: J.C.P.
Comentarios: El Soporte del Marco de Carga esta manufacturado en Acero 1018 y acabado en pintura epóxica anticorrosiva, el Aplicador de Carga también se manufactura en Acero 1018 con acabado en cromo	

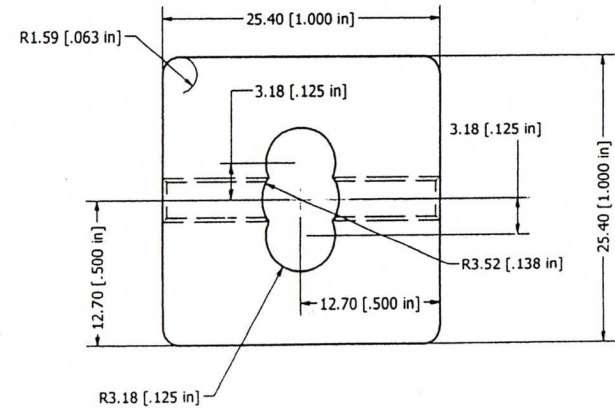
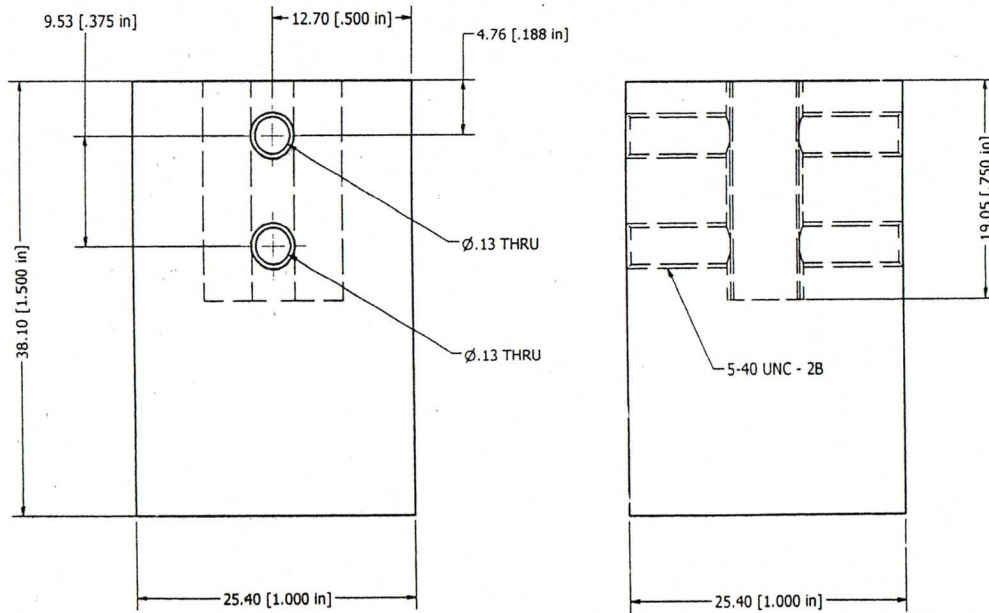
Tornillo de Potencia



DETAIL A
SCALE 4 : 1



Dado de Empotre Fijo



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PIEZA:

Tornillo de Potencia y Dado de Empotre Fijo

Proyecto:

"Máquina para Medir Pandeo en Columnas"

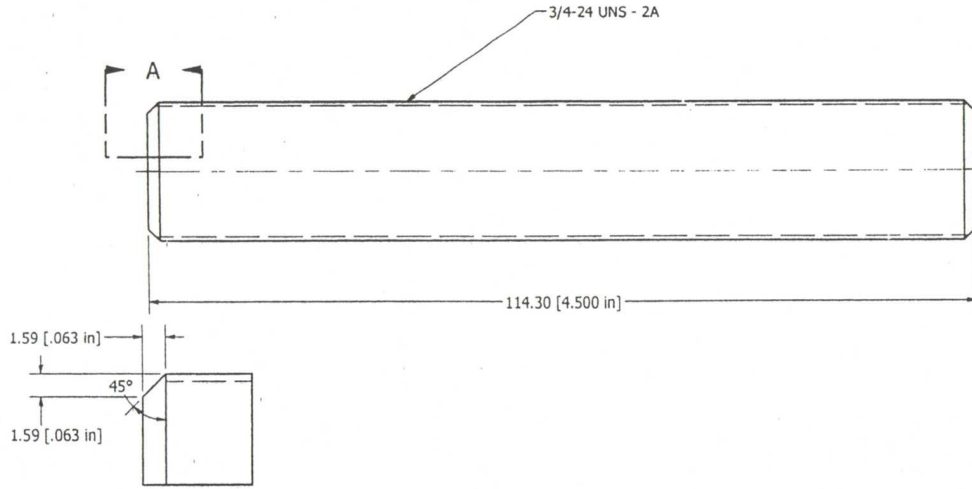
Realizo: F.P.D.G.

Reviso: J.C.P.

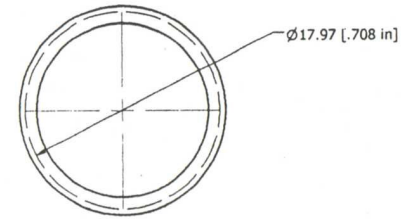
Comentarios:

El tornillo de Potencia tiene una cuerda de 16 hilos x pulg. está manufacturada en Acero, el Dado Fijo esta manufacturado en Acero 1018 y recubierto por un anodizado de protección

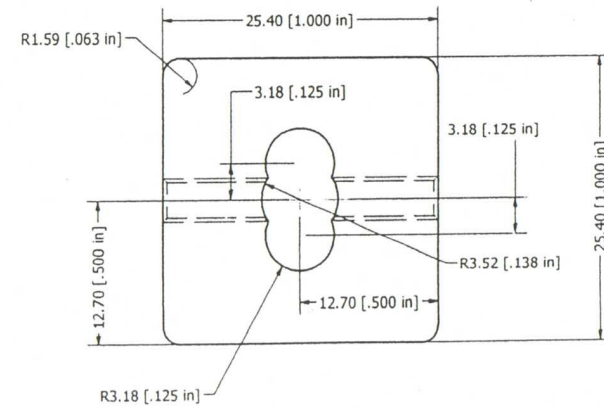
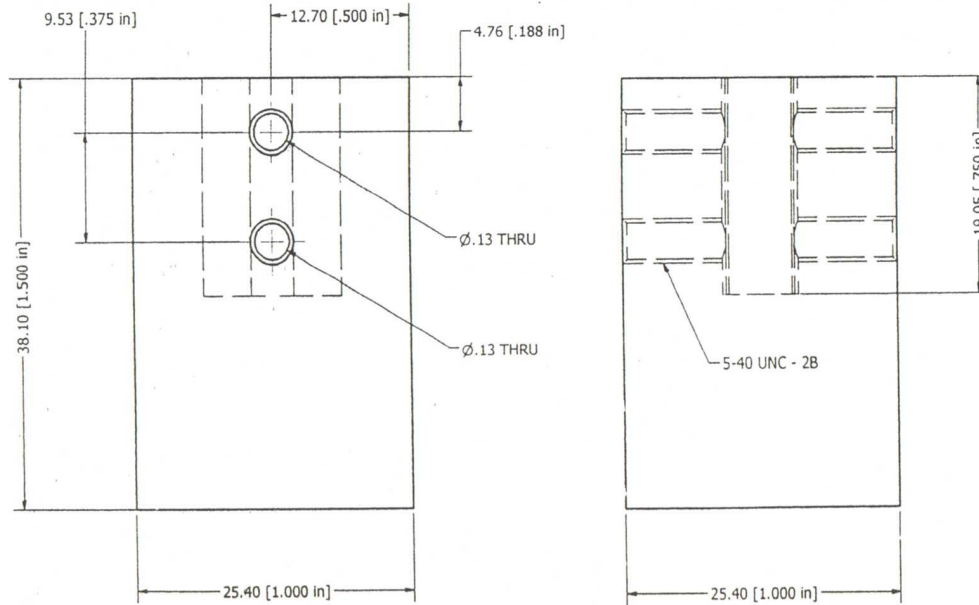
Tornillo de Potencia




DETAIL A
SCALE 4 : 1



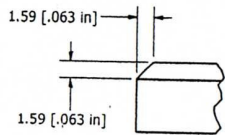
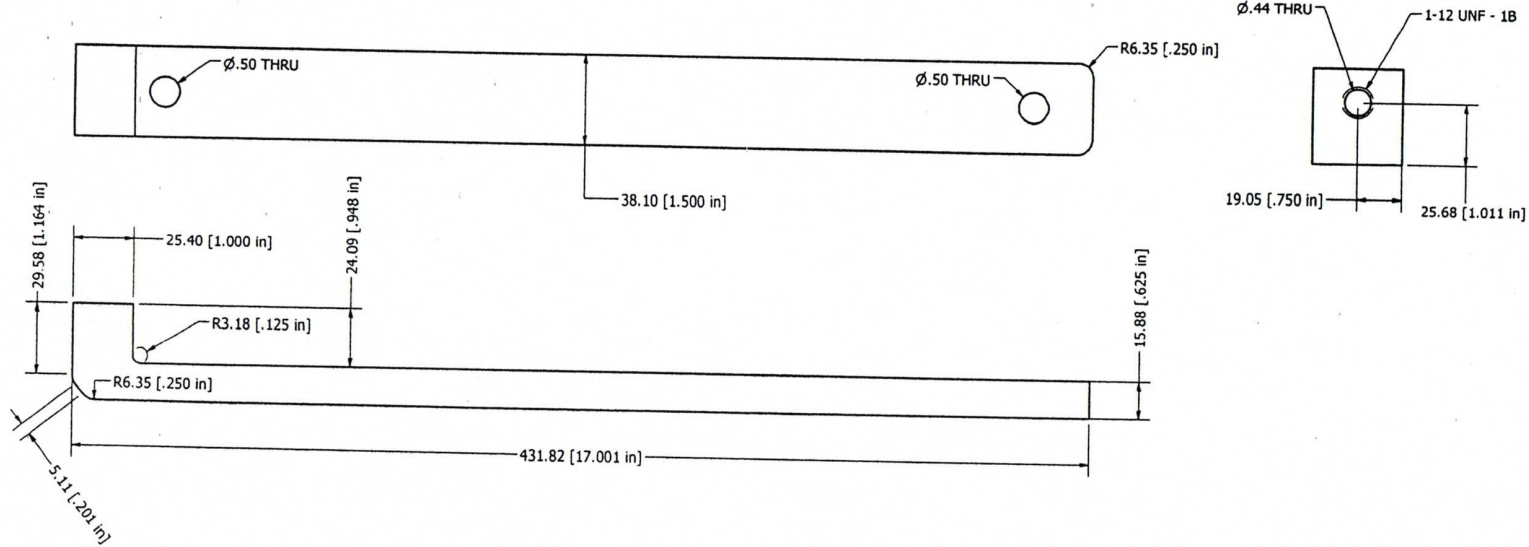
Dado de Empotre Fijo



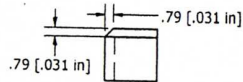
 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO	
	PIEZA: Tornillo de Potencia y Dado de Empotre Fijo	
Proyecto: "Máquina para Medir Pandeo en Columnas"	Realizo: F.P.D.G. Reviso: J.C.P.	
Comentarios: El tornillo de Potencia tiene una cuerda de 16 hilos x pulg. está manufacturada en Acero, el Dado Fijo esta manufacturado en Acero 1018 y recubierto por un anodizado de protección		



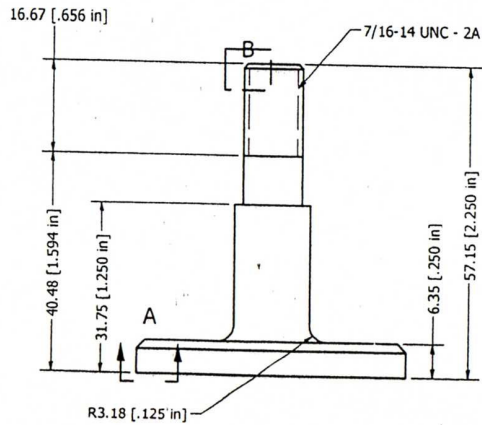
Soporte Principal




DETAIL A
SCALE 3 : 1



DETAIL B
SCALE 3 : 1



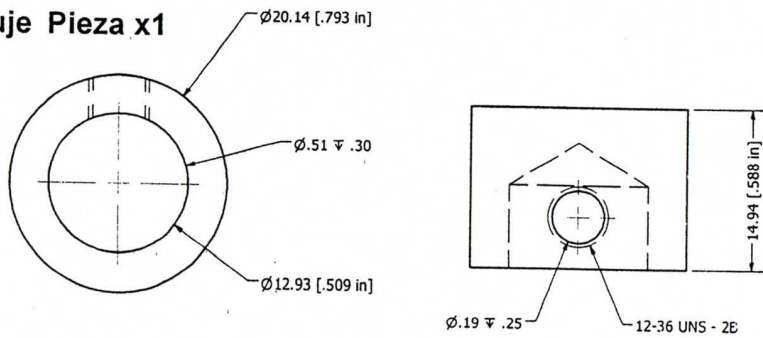
Ajustador de Base

	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO	
	PIEZA: Soporte Principal y Ajustador de Base	
Proyecto: "Máquina para Medir Pandeo en Columnas"	Realizo: F.P.D.G. Reviso: J.C.P.	
Comentarios: El Soporte Principal está manufacturado en Acero 1018 y el Ajustador de Base está manufacturado en Aluminio 6062 ambas piezas pertenecen al ensamble del Bastidor Principal.		

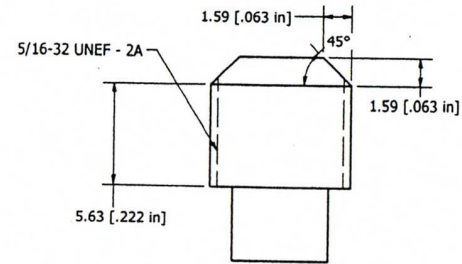
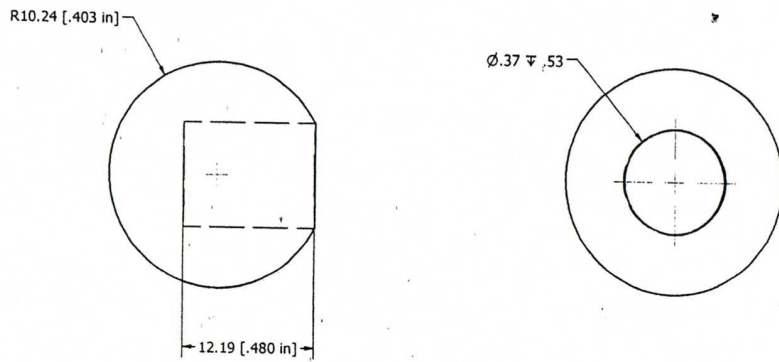
Diseño: construcción e instrumentación de un equipo de pandeo de columnas.



Buje Pieza x1

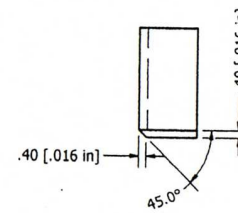


Cabeza de Maneral Pieza x6

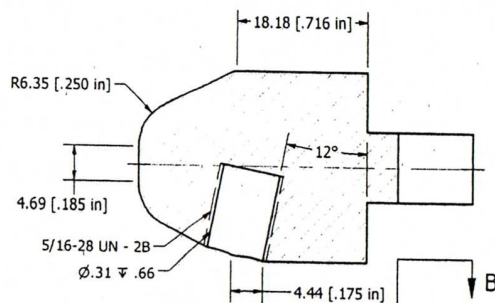
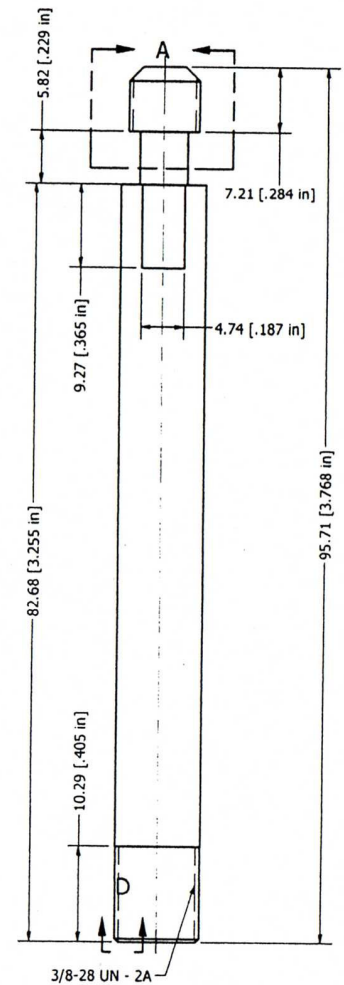


DETAIL A
SCALE 5 : 1

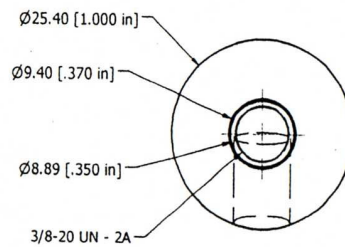
Maneral Pieza x6



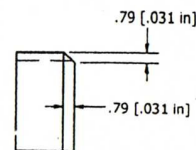
DETAIL D
SCALE 5 : 1




SECTION B-B
SCALE 2 : 1



Manija de Apriete Pieza x2



DETAIL C
SCALE 4 : 1

 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO	
	PIEZA: Buje, Cabeza de Maneral, Manija de Apriete y Maneral	
Proyecto: "Máquina para Medir Pandeo en Columnas"	Realizo: F.P.D.G.	
	Reviso: J.C.P.	
Comentarios: El buje, Maneral y Manija de Apriete, fueron manufacturados en Acero 1018, la Cabeza de Maneral fueron manufacturadas en plastico, los acabados de las tres piezas mencionadas al inicio		