



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

Simetría Permutacional S_3 : Sabor y Ceros de Textura

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

P R E S E N T A :
FÉLIX FRANCISCO GONZÁLEZ CANALES

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ALFONSO MONDRAGÓN BALLESTEROS

COMITÉ TUTORAL:
DRA. ENRIQUETA HERNÁNDEZ SALDAÑA
DRA. MYRIAM MONDRAGÓN CEBALLOS



posgrado en ciencias físicas
u n a m

México, D.F. 2011



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

Dedico esta tesis a mis padres, Margarita Canales Salaices y Claudio González Martínez. A mis hermanos, ya que de una u otra forma coadyuvaron a que finalizara esta etapa de mi vida.

A C. Daniella Ayala García, por todo el amor, apoyo y comprensión brindados durante la parte final del doctorado.

Agradecimientos

Agradezco a mi asesor el Dr. Alfonso Mondragón Ballesteros por haberme propuesto este excelente tema de tesis de doctorado.

A mi comité tutor del doctorado formado por la Dra. Enriqueta Hernández Saldaña, Dra. Myriam Mondragón Ceballos y el Dr. Alfonso Mondragón Ballesteros, por los consejos, recomendaciones y discusiones, los cuales me ayudaron a terminar y enriquecer el trabajo de tesis.

Agradezco a los sinodales que revisaron esta tesis por sus atinados comentarios y correcciones:

Dr. Abdel Pérez Lorenzana (CINVESTAV)
Dr. Alexis Armando Aguilar Arévalo (ICN)
Dr. Alfonso Mondragón Ballesteros (IF)
Dr. Genaro Toledo Sánchez (IF)
Dr. Jens Erlen (IF)
Dra. Myriam Mondragón Ceballos (IF)
Dr. Peter Otto Hess Bechstedt (ICN)

A mi gran amigo Federico Cázarez Bush, por todo la ayuda que me a brindado, tanto en el ámbito personal como académico.

A Olga Félix Beltrán, por todas las valiosas discusiones sobre la física del sabor y en especial por la cuidadosa revisión que hizo al manuscrito de esta tesis.

A Juan Barranco por todo el apoyo y colaboración que me ha brindado desde su estancia en el instituto de física.

A Ezequiel Rodriguez Jauregui por la ayuda que me brindo en la escritura de esta tesis.

A todos mis amigos de la UNAM, en especial a Lorena Caballero, Benjamín Morales, Octavio Castaños, Saul Tapia, Sirio Orozco, Ricardo Mendez y Carlos Vera, por todo el apoyo que siempre me han dado.

A todos mis amigos fuera del ámbito académico, en especial a Dalila Rivas, Erick Perez, Ronell Bologna, Patricia Alvarado, Erick Pasaye, Luis Carlos González y Patricia Oliver.

Al Posgrado en Ciencias Físicas y muy en especial a Yanalté Herrero por su amistad y toda su paciencia durante mis estudios.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico que recibí para la realización de mis estudios de Doctorado con la beca ref:170539 y por el apoyo económico que recibí para la escritura de la Tesis a través de los proyectos; CONACyT 82291, CONACyT 42026-F y CONACyT 51554-F.

A la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM (DGAPA-UNAM) por el apoyo para la realización de esta tesis a través del proyecto No. PAPIIT-IN115207, No. PAPIIT-IN112709 y No. PAPIIT-IN116202.

Al Instituto de Física de la UNAM y en especial al Departamento de Física Teórica y a la Biblioteca Juan de Oryazábal que me brindaran sus instalaciones y servicios para llevar a cabo este trabajo de tesis.

Agradezco a las secretarias de Física Teórica: Maria Luisa Araujo, Lizete Ramirez y Martha Tinoco toda la ayuda que me dieron siempre que la necesité.

Resumen

Las medidas experimentales de los ángulos de mezcla del sabor de los quarks y neutrinos satisfacen las relaciones empíricas, $\theta_{12}^q + \theta_{12}^l \approx \frac{\pi}{4}$ y $\theta_{23}^q + \theta_{23}^l \approx \frac{\pi}{4}$, las cuales son llamadas relaciones de Complementariedad de Quarks y Leptones (QLC por sus siglas en inglés). Estas relaciones sugieren la existencia de una correlación entre las matrices de mezcla CKM y $PMNS$. Por consiguiente, en este trabajo de tesis analizamos la posibilidad de que dicha correlación tenga su origen en la similitud de las jerarquías de masas de los quarks y los leptones cargados, y en el mecanismo del subibaja tipo I, el cual da el valor pequeño a las masas de los neutrinos izquierdos de Majorana.

Propusimos al grupo de simetría permutacional S_3 como una simetría del sabor, lo que conduce a un tratamiento unificado de las masas y mezclas de los quarks y leptones. En este contexto, todas las matrices de masa de los fermiones en la teoría tienen la misma forma genérica, con dos ceros de textura. Así, en dicho tratamiento derivamos expresiones teóricas exactas para los elementos de las matrices de mezcla, las relaciones QLC y las masas efectivas de los neutrinos de Majorana, como funciones de las razones de las masas fermiónicas.

A partir de éstas obtuvimos predicciones precisas de los valores de las mezclas del sabor, todas en buen acuerdo con los valores experimentales más recientes. Además, dimos una explicación para las relaciones QLC y obtuvimos una estimación del orden de magnitud de las masas efectivas de los neutrinos de Majorana. Este último resultado es de gran importancia para los experimentos del decaimiento doble beta sin neutrinos.

Adicionalmente, con ayuda de los seis elementos de la representación real de S_3 como matrices de transformación de las clases de similitud, realizamos una clasificación en términos de clases de equivalencia de las matrices de masa con ceros de textura. Esta clasificación reduce el número de matrices no sigulares, de treinta y tres a solamente once conjuntos de matrices o clases de equivalencia.

Abstract

The experimental measures of flavor mixing angles of quarks and neutrinos satisfy the empiric relations , $\theta_{12}^q + \theta_{12}^l \approx \frac{\pi}{4}$ and $\theta_{23}^q + \theta_{23}^l \approx \frac{\pi}{4}$, which are called Quark-Lepton Complementarity relations (QLC). These relations suggest the existence of a correlation between the CKM and PMNS mixing matrices. Therefore, in this thesis work we analyze the possibility that such correlation is originated by the similarity between the mass hierarchy of quarks and charged leptons, and the seesaw mechanism type I, which gives the left Majorana neutrinos mass its small value.

We proposed the symmetry group S_3 as a flavor symmetry, which in turn leads to a unified treatment of masses and mixings of quarks and leptons. Within this context, all mass matrices of fermions in the theory have the same generic form with two texture zeros. This way, in this treatment we derived exact theoretical expressions for the elements of the mixing matrices, the QLC relations and the effective masses of Majorana neutrinos, as functions of the reasons of the fermionic masses.

From these expressions we obtained precise predictions of the flavor mixing values , all in good agreement with with the most recent experimental values. We also gave an explanation of the QLC relations and obtained an estimation of the order of magnitude of Majorana neutrinos effective masses. This last result is of great importance for the experiments of neutrinoless double beta decay.

In addition, using the six elements of the real representation of S_3 as transformation matrices of similitude classes, we made a classification in terms of equivalence classes of mass matrices with texture zeros. This classification reduces the number of non-singular matrices, from thirty-three to only eleven sets of matrices, or equivalence classes.

Índice general

Introducción	v
1. Modelo Estándar	1
1.1. Contenido de Materia	1
1.2. La Lagrangiana del Modelo Estándar	6
1.3. Rompimiento Espontáneo de la Simetría	8
1.3.1. Mecanismo de Higgs	10
1.3.2. Masas de los Bosones de Norma	11
1.3.3. Masas de los Fermiones y Violación de CP	12
1.4. Lagrangiana de Interacción	15
1.4.1. Lagrangiana del Potencial de Higgs	16
1.4.2. Lagrangiana: Cinética de los Campos Escalares y \mathcal{L}_{FG}	17
1.4.3. Lagrangiano de Yukawa y Matriz de Mezclas	18
1.4.4. Lagrangiana Fermiónica	19
1.4.5. Lagrangiana Cinética de los Campos de Norma	21
1.5. Lagrangiana de Faddeev-Popov	22
1.6. Matriz de Mezclas CKM	23
1.6.1. Triángulos Unitarios	26
1.6.2. Invariante de Jarlskog	29
1.6.3. Parametrización de la Matriz CKM	30
1.6.4. Estado Actual de las Mezclas de los Quarks	39
2. Más Allá del Modelo Estándar	43
2.1. Neutrinos Masivos	43
2.1.1. Masas de Dirac para los Neutrinos	46
2.1.2. Masas de Majorana para los Neutrinos	48
2.2. Mecanismo del Subibaja	49
2.2.1. Mecanismo del Subibaja Tipo I	53
2.3. Matriz de Mezclas $PMNS$	54
2.3.1. Parametrización de la Matriz $PMNS$	55

2.3.2.	Triángulos Unitarios Leptónicos	58
2.4.	Oscilación de Neutrinos	60
2.4.1.	Oscilaciones en el Vacío	61
2.4.2.	Estado Actual de las Mezclas de los Leptones	65
2.5.	Neutrinos de Dirac o de Majorana	67
3.	Problemas del Sabor en Física de Partículas	71
3.1.	Rompecabezas del Sabor	71
3.2.	Complementariedad de Quarks y Leptones	73
4.	Simetría del Sabor para Tres Familias de Fermiones	77
4.1.	Lagrangiana de Yukawa	78
4.2.	El Grupo de Permutaciones S_3	79
4.2.1.	Clases Conjugadas	80
4.2.2.	Operadores de Clase para S_3	80
4.2.3.	Representaciones del grupo S_3	81
4.2.4.	Proyectores	84
4.3.	Simetría S_3 y Matrices de Masa	88
4.3.1.	Representación Tensorial de S_3 y Matrices de Masas	91
5.	Simetría S_3 y Ceros de Textura	99
5.1.	Masas a partir del rompimiento de $S_{3L} \times S_{3R}$	101
5.1.1.	Matriz de Masas con Dos Ceros de Textura	103
5.2.	Clasificación de Ceros de Textura	106
5.3.	Mecanismo del subibaja y fases de los Neutrinos Izquierdos	111
5.4.	Reparametrización de las Matrices de Masas	116
5.5.	Diagonalización de las Matrices de Masas	119
6.	Matrices de Mezcla	123
6.1.	Matrices de Mezcla como Funciones de las Masas	124
6.2.	Ajustes χ^2	128
6.2.1.	El Ajuste χ^2 para la Matriz de Mezclas de los Quarks	129
6.2.2.	El Ajuste χ^2 para la Matriz de Mezclas Leptónica	131
6.3.	Ángulos de Mezcla	134
6.4.	Complementariedad de Quark y Leptones	136
6.5.	Masas Efectivas de Majorana	139
7.	Conclusiones	143
7.1.	Resumen de Resultados	144
A.	Matrices de masas de 3×3	149
A.1.	Matriz Simétrica Singular y No Singular	154

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
B. Factorización de Fases	157
B.1. Reparametrización de las Matrices de Masas	160
C. Artículos Publicados	173

Introducción

La teoría que actualmente mejor describe la física de las partículas fundamentales y sus interacciones es el Modelo Estándar de las partículas elementales, el cual tiene en cuenta que existen dos tipos de partículas básicas: las que se consideran bloques de la materia y los portadores de las interacciones. Las primeras son fermiones de espín $1/2$ y se clasifican como leptones y quarks. Las segundas son bosones de espín uno, los cuales son los intermediarios de las interacciones entre las partículas.

El Modelo Estándar agrupa dos modelos importantes; La Cromodinámica Cuántica (QCD por sus siglas en inglés) y el modelo de *Glashow, Weinberg y Salam* para las interacciones electrodébiles (Modelo Estándar Electrodébil). Este último hasta la fecha ha sido muy exitoso por sus aciertos con respecto a los resultados experimentales y por su gran alcance predictivo. Sin embargo, el Modelo Estándar presenta varias limitaciones, entre las más importantes para este trabajo de tesis está el hecho que el modelo se formuló para neutrinos sin masa. No obstante, la evidencia experimental proporcionada por la colaboración Super-Kamiokande [1], la cual se confirmó en otros experimentos de oscilaciones de neutrinos [2, 3, 4, 5], impuso cotas no nulas para la masa de los neutrinos. Esta propiedad de los neutrinos tiene como consecuencia inmediata que la matriz de mezclas del sabor para los leptones no sea trivial. Otras propiedades del Modelo Estándar que dejan insatisfechos a la mayoría de los físicos son: se introducen campos de Higgs para romper la simetría de norma electrodébil y con ello generar las masas de los fermiones. La simetría de norma y el campo de Higgs garantizan que el modelo sea renormalizable; sin embargo, el bosón de Higgs no ha sido observado aún. Ligado al problema de las masas, se tiene el llamado acertijo de la jerarquía en el espectro de masas; éste surge porque experimentalmente fermiones del mismo tipo, pero de diferente familia, tienen una gran diferencia en el valor numérico de sus masas; esta discrepancia tan grande hace que en primera aproximación se pueda tomar como nula la masa de las dos primeras familias. Otro problema que no está resuelto en el modelo, es el llamado *rompecabezas del sabor*, el cual surge al no poder explicar la replicación de los fermiones, es decir, en el contexto del Modelo Estándar no hay una razón teórica que explique el por qué hay tres familias o sabores en el espectro observado de partículas. Por otro lado, de los experimentos se conoce que las interacciones débiles violan CP, este problema tampoco está explicado en forma completa en el Modelo Estándar.

Los resultados de los experimentos de oscilaciones de neutrinos han demostrado que estas partículas deben tener masa y que se mezclan de manera análoga (aunque significativamente diferente) a como lo hacen los quarks. Este descubrimiento tiene importantes repercusiones teóricas, ya que es la primera evidencia experimental incontrovertible de que el Modelo Estándar necesita extenderse. En términos generales, se puede afirmar que acomodar las masas y mezclas de los neutrinos no es un gran problema. Mas bien, el problema es modificar la teoría mínimamente, para poder explicar los rasgos característicos de las masas y mezclas de los neutrinos de manera coherente y consistente con el resto de la física de partículas y sin aumentar, sino más bien reduciendo el número de parámetros libres. Como ya se mencionó, en el sector de los quarks el problema de las masas y mezclas aún no está resuelto, a pesar de la gran cantidad de datos experimentales medidos con muy buena precisión. Por lo cual podría ocurrir que el problema de las masas esté desacoplado del problema de las mezclas, esto es, que quizás se pudiera modificar la teoría para explicar bien las mezclas sin poder dar todavía una explicación correcta y completa de las masas. El problema de las masas podría ser más fundamental que el problema de las mezclas en el siguiente sentido: los ángulos de mezcla podrían encontrar una explicación expresándolos como funciones de las razones de las masas fermiónicas. Tal es el caso del ángulo de Cabibbo que se puede expresar como una función de las masas de los quarks, sin $\theta_c = \sqrt{m_d/m_s}$, y tal es también el caso de los ángulos de mezcla leptónicos, los cuales se pueden expresar como funciones de las masas de los leptones. Sin embargo, la analogía entre las mezclas de los leptones y los quarks, aquí señalada, no es completa ya que hay importantes diferencias entre ambos sectores.

Entonces, si tan sólo se trata de acomodar las masas y mezclas de los neutrinos en la teoría, se podrían agregar singletes a los multipletes del grupo de norma del Modelo Estándar para representar a los neutrinos derechos ν_R , tal como se hace con los singletes de los quarks derechos en el mismo modelo, y pedir que el número leptónico total L se conserve. Por consiguiente, habría en la teoría una analogía completa entre el sector de los quarks y el sector leptónico, donde se tendrían mezclas del sabor leptónico y los neutrinos serían partículas de Dirac. Sin embargo, a la luz de los datos experimentales, una analogía tan simple y directa, paradójicamente, lleva a una explicación rebuscada y artificial de las masas de los neutrinos, la razón es la siguiente: cada uno de los tipos de quarks (quarks tipo- u y tipo- d) tiene un espectro de masa con una jerarquía muy acusada y por ello la matriz de mezclas de los quarks CKM no difiere en mucho de la matriz unidad. Mientras que en el sector leptónico se observa una jerarquía acusada en las masas de los leptones cargados, pero los datos experimentales muestran que las masas de los neutrinos son al menos seis ordenes de magnitud más pequeña que la masa del electrón, y su espectro de masas no tiene una jerarquía tan acusada. Por lo tanto, la relación entre las masas de los leptones cargados y los neutrinos es muy diferente de la relación entre las masas de los quarks tipo-up y -down, y los experimentos han mostrado que la matriz de mezclas leptónica $PMNS$ esta muy alejada de la unidad. En consecuencia surgen las siguientes preguntas: ¿como modificar la teoría para dar a los neutrinos unas masas tan pequeñas de manera simple y natural? ¿como reproducir y explicar las características especiales de las masas y mezclas de los neutrinos? ¿como evitar la proliferación de parámetros libres en la teoría, y de

ser posible reducir el número de éstos? ¿como asegurarnos de que el excelente acuerdo entre el Modelo Estándar y el experimento no se pierda en el intento?. La búsqueda de la respuesta a estas preguntas y otras semejantes, es el tema de este trabajo de tesis.

En el Modelo Estándar antes de que los fermiones adquieran masa vía el mecanismo de Higgs, los fermiones de una misma carga (fermiones análogos) están igualmente acoplados a los campos de norma. En consecuencia, la invariancia respecto del intercambio de fermiones de la misma familia es una simetría natural exacta del Modelo Estándar sin masas. En el caso de tres familias, el modelo se puede extender imponiendo una simetría horizontal del sabor S_3 . Ahora, como el bosón de Higgs en el contexto del Modelo Estándar es representado por un doblete de $SU(2)$, éste se puede asignar a una representación irreducible de singlete del grupo de sabor S_3 . Además, en la representación de singlete de S_3 se acomoda a las partículas de la tercera generación, ya que son las más pesadas. Así, después del rompimiento espontáneo de la simetría de norma, únicamente las partículas de la tercera generación adquieren masa. Por consiguiente, las matrices de masa de los fermiones son diagonales en la base adaptada a la simetría y en la base de las masas. Por lo tanto, las matrices de mezcla CKM y $PMNS$ son equivalentes a la matriz unidad. En otras palabras, todos los ángulos de mezcla son nulos y no hay relación funcional entre estos y las masas de los fermiones. Lo anterior no puede ser posible, porque de acuerdo con los datos experimentales actuales todos los ángulos de mezcla del sabor son distintos de cero. Entonces para reproducir la fenomenología observada, se tienen dos opciones: romper explícitamente la simetría del sabor [6] o extender el sector de Higgs [7], de tal forma que los bosones de Higgs extras se acoplen a todos los fermiones en el modelo.

En este trabajo de tesis se demuestra que al realizar una extensión del Modelo Estándar, imponiendo una simetría permutacional del sabor $S_{3L} \times S_{3R}$ y con su rompimiento explícito secuencial de $S_{3L} \times S_{3R}$ a $S_{2L} \times S_{2R}$, se obtiene un tratamiento unificado de las matrices de masa de los quarks y leptones, en el cual los neutrinos izquierdos adquieren el valor pequeño de su masa a través del mecanismo del subibaja tipo I. El patrón de rompimiento de la simetría de sabor es caracterizado por el parámetro $Z_i^{1/2} = \frac{(M_i)_{23}}{(M_i)_{22}}$ con $i = u, d, l, \nu_D$, el cual mide la mezcla de las representaciones irreducibles de singlete y doblete de $S_{3L} \times S_{3R}$. En este escenario, todas las matrices de masa de los fermiones de Dirac tienen la misma forma genérica con dos ceros de textura clase I (hermitiana), y una jerarquía normal en el espectro de masa. Por consiguiente, la matriz de masa de los neutrinos izquierdos de Majorana también tiene dos ceros de textura clase I (simétrica). Estas matrices de masa son parametrizadas con sólo dos parámetros libres ϕ_i y δ_i , ya que los valores numéricos para las masas fermionicas se toman de los datos experimentales.

Una vez que se determinaron las matrices de masa de los fermiones del Modelo Estándar extendido, se deducen expresiones teóricas exactas para los elementos de las matrices de mezclas CKM y $PMNS$. La matriz de mezclas de los quarks CKM se parametrizo en términos de cuatro razones de masa de los quarks, una fase de violación de CP ($\phi = \phi_u - \phi_d$) y dos parámetros, δ_u y δ_d , asociados con el patrón de rompimiento de la simetría del sabor:

$$V_{CKM}^{th}(\tilde{m}_u, \tilde{m}_c, \tilde{m}_d, \tilde{m}_s, \phi, \delta_u, \delta_d).$$

Mientras que la matriz de mezclas leptónica $PMNS$ se parametrizó en términos de cuatro razones de masa de los leptones, dos fases de violación de CP ($\Phi_1 = \varphi - \phi_l$ y $\Phi_2 = 2\varphi - \phi_l$) y dos parámetros δ_ν y δ_l asociados con el patrón de rompimiento de la simetría del sabor:

$$U_{PMNS}^{th}(\tilde{m}_{\nu_1}, \tilde{m}_{\nu_2}, \tilde{m}_e, \tilde{m}_\mu, \Phi_1, \Phi_2, \delta_\nu, \delta_l).$$

Usando la igualdad de las magnitudes de los elementos correspondientes en las matrices; V_{CKM}^{th} y V_{CKM}^{PDG} , U_{PMNS}^{th} y U_{PMNS}^{PDG} , se derivaron expresiones teóricas para los ángulos de mezcla como funciones de las razones de masa de los quarks o leptones. Una consecuencia de la relación funcional entre ángulos de mezcla y masas fermiónicas es que la jerarquía de masas de los quarks induce una jerarquía de mezcla en la matriz CKM , pero no sucede lo mismo para los leptones.

Para las relaciones de complementariedad de quarks y leptones (QLC): $\theta_{12}^l + \theta_{12}^q \approx 47.5^\circ \pm 1.5^\circ$ y $\theta_{23}^l + \theta_{23}^q = (44.67_{-3.3}^{+5.1})^\circ$. Se obtienen expresiones teóricas exactas, con la finalidad de tratar de entender si son relaciones numéricas accidentales o relaciones de una simetría más fundamental entre los sectores de los quarks y leptones. Finalmente para las masas efectivas de Majorana $\langle m_{ll} \rangle$ ($l = e, \mu, \tau$), también se derivan expresiones teóricas.

Al realizar los ajustes de χ^2 de las expresiones teóricas a los datos experimentales de las mezclas del sabor disponible actualmente, se obtiene un buen acuerdo entre ambos. Al sustituir el valor numérico de las masas leptónicas el cuadrado de las magnitudes de las masas efectivas de Majorana, tiene valores numéricos que son consistentes con un ángulo de mezcla θ_{13}^l pequeño.

En los últimos diez años importantes avances teóricos se han hecho en la comprensión de los mecanismos para la generación de las masas de los fermiones y las mezclas del sabor. En forma fenomenológica, algunos progresos sorprendentes han sido realizados con la ayuda de los ceros de textura y las simetrías de sabor, a partir de estos dos ingredientes se han especificado relaciones cualitativas entre los ángulos de mezcla y las razones de masa de quarks o leptones con un mínimo de parámetros libres. De hecho, se puede señalar que diferentes matrices de masa con ceros de textura pueden tener exactamente el mismo contenido físico. Por lo tanto surge la pregunta, ¿hay alguna relación entre estas matrices? En este trabajo de tesis se encontró una respuesta a esta pregunta a través de las clases de similitud. Dichas clases permitieron realizar una clasificación de las matrices de masa con ceros de textura.

La tesis está estructurada como sigue: En el capítulo 1, se describe al Modelo Estándar, con especial énfasis en las masas y mezclas de los quarks. En el capítulo 2, se introducen los términos de masa de los neutrinos y la matriz de mezclas leptónica $PMNS$. Se describen las oscilaciones de neutrinos en el vacío. En el capítulo 3, se mencionan varias interrogantes que involucran al sabor de los fermiones. En el capítulo 4, se describe al grupo de simetría permutacional S_3 . En el capítulo 5, se usa la simetría S_3 y su rompimiento explícito para obtener un tratamiento unificado de las masas y mezclas de los quarks y leptones. Además, se hace una clasificación de las matrices de masas con ceros de textura. En el capítulo 6, se deducen las matrices de mezcla del sabor, las relaciones QLC y las masas efectivas de Majorana en términos de las razones de masas de los fermiones, y se realiza el ajuste de χ^2 en cada sector. En el capítulo 7, se dan las conclusiones y un resumen de los resultados obtenidos.

Modelo Estándar

El Modelo Estándar de las partículas elementales, o simplemente Modelo Estándar (ME), proporciona el marco teórico para hacer un tratamiento unificado las interacciones electromagnéticas, débiles y fuertes. Este modelo es en sí una teoría del campo basada en el grupo de simetría de norma [8, 9, 10]:

$$G_{\text{ME}} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y, \quad (1.1)$$

el cual es el producto directo de los grupos de simetría $SU(3)_C$ de las interacciones fuertes y $SU(2)_L \times U(1)_Y$ de las interacciones electrodébiles. El grupo de simetría de las interacciones electromagnéticas, $U(1)_{\text{em}}$, es subgrupo de $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Es en este sentido que las interacciones débiles y electromagnéticas están parcialmente unificadas.

Algunas de las características importantes de las interacciones electromagnéticas y débiles son: las interacciones electromagnéticas tienen un alcance de interacción infinito, mientras que las interacciones débiles son de corto alcance ($\sim 10^{-3}$ fm); esto se debe a que los bosones portadores de la fuerza o interacción débil tienen masas del orden de 80 GeV.

En este capítulo se presenta un panorama general sobre el Modelo Estándar, haciendo especial énfasis en las masas y mezclas de los quarks, así como en las distintas parametrizaciones existentes para la matriz de mezclas CKM y la violación de CP.

1.1. Contenido de Materia

El Modelo Estándar se puede dividir en tres sectores: el bosónico de norma, el fermiónico y el escalar o de Higgs. El primer sector está compuesto por los ocho gluones g_α que son los bosones de norma del grupo de color $SU(3)_C$, los cuatro bosones de norma W^\pm , Z y γ que son las partículas portadoras de las interacciones electrodébiles $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Las principales propiedades físicas de estos bosones de norma son: los gluones g_α no tienen masa, son eléctricamente neutros, pero tienen carga de color. Como consecuencia de esto los gluones no solamente interactúan con los quarks sino también consigo mismos, es decir, son autointeractuantes.

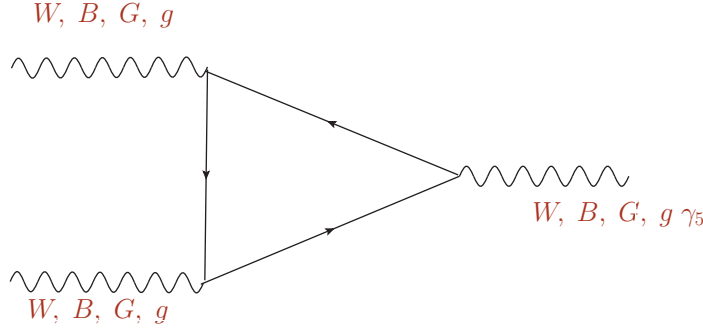


Figura 1.1: Diagramas de triángulo que pueden dar lugar a anomalías. W , B y G son los bosones de norma asociados a los grupos de norma $SU(2)$, $U(1)$ y $SU(3)$, respectivamente; g es el gravitón.

Los bosones W^\pm y Z son partículas masivas y también interactúan entre sí. El bosón Z es eléctricamente neutro, mientras que los bosones W^\pm tienen carga eléctrica de $Q_{\text{em}} = \pm 1$, respectivamente. Finalmente, el fotón γ es eléctricamente neutro, sin masa y no es autointeractuante.

En el sector fermiónico se toma en cuenta que todos los fermiones del Modelo Estándar se acomodan en representaciones irreducibles del grupo de simetría de norma G_{ME} de la ec. (1.1). Hay tres generaciones (sabores o familias) de fermiones materiales, las cuales tienen propiedades idénticas excepto por su masa. De hecho, al considerar tres familias o sabores de fermiones se está introduciendo este dato fenomenológico en la teoría, ya que en el contexto del Modelo Estándar no hay forma de predecir el número de generaciones de fermiones. Sin embargo, se pueden usar argumentos teóricos y experimentales para fijar dicho número. Por ejemplo, para que se cancelen las anomalías, figura 1.1, los fermiones izquierdos deben estar en dobletes de $SU(2)_L$ y se necesitan tres familias de fermiones. Además, de las mediciones más recientes del ancho de decaimiento del bosón Z , se pudo determinar que el número de neutrinos activos ligeros, con masa menor a 45 GeV, es $N_\nu = 2.984 \pm 0.008$ [11]. En el Modelo Estándar los neutrinos tienen masas iguales a cero, por esa razón no tienen una componente de quiralidad derecha. Sin embargo, hace más de una década, se sabe que las masas de los neutrinos son pequeñas pero no nulas [11].

Las generaciones de fermiones se denotan por ψ_i , $i = 1, 2, 3$, donde i es el índice de familia o sabor. Las familias se numeran en orden jerárquico de acuerdo a la magnitud de su masa. Entonces la primera familia está formada por los fermiones más ligeros:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

El Modelo Estándar para una familia es una teoría completamente autocontenida y autoconsistente. Sin embargo, en la naturaleza se observan dos familias más. Las otras dos familias, más pesadas, son:

- segunda familia

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

- tercer familia

$$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Estas tienen propiedades semejantes a las de la primera, y se agregan al modelo sin explicar el origen de este efecto de réplica. Así, se obtiene que el Modelo Estándar para tres familias sigue siendo una teoría autocontenida y autoconsistente.

Cada una de las tres generaciones de fermiones materiales se compone de cinco representaciones diferentes del grupo de norma, con los siguientes números cuánticos [8, 9, 10]:

$$\left(1, 2, -\frac{1}{2}\right), \quad \left(3, 2, \frac{1}{6}\right), \quad (1, 1, -1), \quad \left(3, 1, \frac{2}{3}\right), \quad \left(3, 1, -\frac{1}{3}\right). \quad (1.5)$$

Los términos dentro de los paréntesis indican las propiedades de transformación bajo la acción de los grupos $SU(3)_C$, $SU(2)_L$, y $U(1)_Y$ respectivamente. En esta notación la carga eléctrica está dada por

$$Q_{\text{em}} = T_{L3} + Y, \quad (1.6)$$

donde Y es la hipercarga y T_{L3} es la proyección tres del isoespín.

Los campos fermiónicos ψ se pueden describir por sus componentes de quiralidad derecha ψ_R e izquierda ψ_L ;

$$\psi_{L,R} = P_{L,R}\psi = \left(\frac{1 \pm \gamma_5}{2}\right)\psi, \quad \bar{\psi}_{L,R} = \bar{\psi}P_{L,R} = \bar{\psi}\left(\frac{1 \pm \gamma_5}{2}\right). \quad (1.7)$$

Los fermiones derechos e izquierdos, en el contexto del Modelo Estándar, tienen distintas propiedades de transformación bajo la acción del grupo de norma G_{ME} . Por ejemplo, bajo la acción del grupo $SU(2)_L$ los campos derechos e izquierdos se transforman, respectivamente, como dobletes y singletes del mismo. Los dobletes de $SU(2)_L$ se representan como:

$$Q_{Li} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{Li}, \quad l_{Li} = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_{Li}; \quad (1.8)$$

y los singletes como

$$u_{Ri}, \quad d_{Ri} \quad y \quad l_{Ri}. \quad (1.9)$$

Los subíndices R y L denotan los eigenestados de quiralidad derecha e izquierda respectivamente, e i es el índice de familia o sabor. En esta notación la asignación de números cuánticos en la ec. (1.5) toma la forma:

$$L_{Li}^I (1, 2)_{-\frac{1}{2}}, \quad Q_{Li}^I (3, 2)_{+\frac{1}{6}}, \quad l_{Ri}^I (1, 1)_{-1}, \quad u_{Ri}^I (3, 1)_{+\frac{2}{3}}, \quad d_{Ri}^I (3, 1)_{-\frac{1}{3}}, \quad (1.10)$$

Número cuántico	u_R	u_L	d_R	d_L	ν_L	l_R	l_L
Y	2/3	1/6	-1/3	1/6	-1/2	-1	-1/2
T_{L3}	0	1/2	0	-1/2	1/2	0	-1/2
Q_{em}	2/3	2/3	-1/3	-1/3	0	-1	-1

Cuadro 1.1: *Números cuánticos asociados a las proyecciones izquierda y derechas de las tres generaciones de fermiones materiales del Modelo Estándar.*

Familia	$L_L (1, 2)_{-\frac{1}{2}}$	$Q_L (3, 2)_{+\frac{1}{6}}$	$l_R (1, 1)_{-1}$	$u_R (3, 1)_{+\frac{2}{3}}$	$d_R (3, 1)_{-\frac{1}{3}}$
1	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	e_R	u_R	d_R
2	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$	μ_R	c_R	s_R
3	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$	τ_R	t_R	b_R

Cuadro 1.2: *Contenido de materia del Modelo Estándar.*

donde el superíndice I indica los eigenestados en la representación de interacción (sabor); los términos dentro de los paréntesis indican las propiedades de transformación para cada fermión bajo la acción de los grupos $SU(3)_C$ y $SU(2)_L$, respectivamente. Finalmente, el subíndice del lado derecho del paréntesis denota la hipercarga del fermión correspondiente. Las interacciones del grupo de norma del Modelo Estándar no distinguen entre las diferentes generaciones o familias; la magnitud de la interacción de norma depende de los números cuánticos, pero no del índice de sabor. Los valores de los números cuánticos de los fermiones en el Modelo Estándar se resumen en el Cuadro 1.1.

El contenido de materia en el modelo que se muestra en el Cuadro 1.2, constituye, con los correspondientes campos de norma, la lista completa de los campos requeridos para describir las interacciones observadas en las partículas elementales. De hecho, estas asignaciones de carga han sido probadas al mejor nivel de confianza¹ para los fermiones ligeros [12].

A partir del Cuadro 1.2 se puede observar que los neutrinos son fermiones que no tienen interacciones fuertes ni electromagnéticas (ver ec. (1.6)). En otras palabras, los neutrinos son singletes del grupo $SU(3)_C \times U(1)_{em}$. Además, los llamados neutrinos activos son aquellos que tienen interacciones débiles, por lo tanto residen en los dobletes leptónicos. Los llamados

¹C. L. por sus siglas en inglés

neutrinos estériles son aquellos neutrinos que no tienen interacciones electrodébiles ni fuerte, sino solamente interacciones gravitacionales. Sus cargas o números cuánticos con respecto al grupo de norma del Modelo Estándar G_{ME} son:

$$l_R(1, 1)_0. \quad (1.11)$$

Es otras palabras, los neutrinos estériles son singletes del grupo de norma del Modelo Estándar.

El sector escalar se incluye en el Modelo Estándar a partir del hecho que los bosones del grupo de norma electrodébil son partículas masivas, lo cual indica que el grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ no es una simetría del vacío. Los términos de masa de los bosones de norma y los fermiones,

$$M_W^2 W_a^\mu W_\mu^a \quad \text{y} \quad -\mathcal{L}_m = m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L), \quad (1.12)$$

al ser incluidos de manera directa en el Modelo Estándar, rompen la invariancia de norma del grupo electrodébil y en consecuencia la renormalizabilidad de la teoría. La solución a este problema consiste en incluir un campo escalar ϕ , conocido como campo de Higgs, con los siguientes números cuánticos del grupo G_{ME} :

$$\phi(1, 2)_{\frac{1}{2}}. \quad (1.13)$$

Dicho campo es un singlete de $SU(3)_C$, doblete de $SU(2)_L$, y se acopla a todos los fermiones del modelo. Además, es el responsable de generar la masas de los bosones electrodébiles, W^\pm y Z , así como la de todos los fermiones (excepto los neutrinos, ya que en el contexto del Modelo Estándar son partículas sin masa).

El sector escalar, o sector de Higgs, induce un rompimiento espontáneo de la simetría de norma, es decir,

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow SU(3)_C \times U(1)_{em}. \quad (1.14)$$

Este rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil se realiza a través del llamado mecanismo de Higgs, el cual genera las masas de los bosones de norma electrodébiles y de los fermiones, en acuerdo con los valores experimentales. Pero en consecuencia hay una nueva partícula, el bosón de Higgs, el cual es la única pieza del Modelo Estándar cuya existencia falta por confirmar experimentalmente. Más aun, la búsqueda del bosón de Higgs sigue siendo una de las principales tareas de los actuales experimentos de colisionadores de altas energías, por ejemplo el LHC [13]. Por otra parte, uno de los problemas abiertos en el Modelo Estándar es el de conocer la representación del bosón de Higgs que habrá de manifestarse en los experimentos. Esto se debe a que el mecanismo de Higgs no es único, y existen muchas representaciones del bosón de Higgs que describen correctamente la dinámica del rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil. Sin embargo, la versión mínima, incluida en el Modelo Estándar, consta de un doblete escalar complejo

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

donde ϕ^+ y ϕ^0 son campos escalares complejos, cargado y neutro respectivamente. Como se mencionó anteriormente, este campo ϕ es un singlete $SU(3)_C$, doblete de $SU(2)_L$ y tiene hipercarga $+1/2$.

Por otro lado, una característica importante del Modelo Estándar es que el grupo de simetría de norma G_{ME} , ver ec. (1.1), y el contenido de materia del Cuadro 1.2, presentan una simetría global accidental [8, 9, 10]:

$$G_{ME}^{\text{global}} = U(1)_B \times U(1)_{L_e} \times U(1)_{L_\mu} \times U(1)_{L_\tau}, \quad (1.16)$$

donde $U(1)_B$ es la simetría del número bariónico y $U(1)_{L_e, L_\mu, L_\tau}$ son las tres simetrías del sabor leptónico, con el número leptónico total dado por $L = L_e + L_\mu + L_\tau$. Esta simetría es llamada accidental porque no fue impuesta, es una consecuencia del grupo de simetría de norma G_{ME} y de las representaciones de los estados físicos.

1.2. La Lagrangiana del Modelo Estándar

La Lagrangiana completa del Modelo Estándar, denotada por \mathcal{L}_{ME} , es la Lagrangiana renormalizable más general consistente con el grupo de simetría de norma $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ y con el contenido de materia de las ecuaciones (1.10) y (1.13). Dicha Lagrangiana \mathcal{L}_{ME} se construye como la siguiente suma:

$$\mathcal{L}_{ME} = \mathcal{L}_{\text{kn}} + \mathcal{L}_{\text{kf}} + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_{\text{FG}} + \mathcal{L}_{\text{FP}}, \quad (1.17)$$

donde cada término representa:

- \mathcal{L}_{kn} , energía cinética de los campos de norma.
- \mathcal{L}_{kf} , energía cinética de los fermiones.
- \mathcal{L}_H , energía cinética y potencial del campo de Higgs.
- \mathcal{L}_Y , términos de los acoplamientos de Yukawa.
- \mathcal{L}_{FG} , Lagrangiana que fija la norma.
- \mathcal{L}_{FP} , Lagrangiana de Faddeev-Popov.

Con el fin de mantener la invariancia de norma de los términos cinéticos, bajo la acción del grupo de simetría de norma G_{ME} , la derivada covariante debe tener la forma [8, 9, 10]:

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_s G_a^\mu L_a + ig W_b^\mu T_b + ig' B^\mu Y. \quad (1.18)$$

Aquí, las G_a^μ son los ocho campos de gluones, W_b^μ son los tres bosones intermediarios de las interacciones débiles y B^μ es el bosón de la hipercarga. Las matrices L_a son los generadores del grupo de $SU(3)_C$ de las interacciones fuertes, las cuales se pueden representar a través de

las matrices de Gell-Mann ($\frac{1}{2}\lambda_a$) en el caso de tripletes; los T_b son los generadores del grupo $SU(2)_L$ de las interacciones débiles y se representan a través de las matrices de Pauli ($\frac{1}{2}\tau_b$) para dobles; finalmente, Y es la carga del grupo $U(1)_Y$.

Entonces, con ayuda de la derivada covariante, ec. (1.18), se puede construir la Lagrangiana de los campos del Modelo Estándar:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{ME}} = & \bar{l}_L i\gamma^\mu D_\mu l_L + \bar{e}_R i\gamma^\mu D_\mu e_R + \bar{Q}_L i\gamma^\mu D_\mu Q_L + \bar{u}_R i\gamma^\mu D_\mu u_R + \bar{d}_R i\gamma^\mu D_\mu d_R \\
& + (D^\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \\
& - Y_{ij}^d \bar{Q}_{Li} \phi d_{Rj} - Y_{ij}^u \bar{Q}_{Li} \tilde{\phi} u_{Rj} - Y_{ij}^\ell \bar{l}_{Li} \phi e_{Rj} \\
& - \frac{1}{4} W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{FG}} + \mathcal{L}_{\text{FP}}.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Los términos en el lado derecho del Lagrangiana \mathcal{L}_{ME} , ec. (1.19), corresponden a: primer renglón, es la Lagrangiana cinética de los fermiones, donde las γ^μ son las matrices de Dirac y D^μ es la derivada covariante. El segundo renglón, término de la energía cinética y potencial del campo de Higgs, donde μ^2 y λ son parámetros reales. El tercer renglón, Lagrangiana de los acoples de Yukawa, donde los coeficientes Y_{ij} denotan a las matrices de acoplamiento de Yukawa y $\tilde{\phi} = i\tau_2 \phi^*$. Finalmente, el cuarto renglón, energía cinética de los campos de norma y las Lagrangianas \mathcal{L}_{FG} y Faddeev-Popov².

Los tensores de norma antisimétricos construidos a partir de los campos de norma, son los siguientes:

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon^{ijk} W_\nu^i W_\mu^k, \\
B_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a, \\
G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{ijk} G_\nu^i G_\mu^k.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

En estas expresiones, las $W_{\mu\nu}^a$ son los tensores de norma antisimétricos construidos a partir de los campos de norma $W_\mu^a(X)$ correspondientes a los tres generadores de $SU(2)$; ϵ^{ijk} es la constante de estructura del grupo $SU(2)$ y coincide con el tensor de Levi-Civita; $B_{\mu\nu}$ son los tensores de norma antisimétricos construidos a partir de los campos de norma $B_\mu(X)$ asociados a $U(1)$; $G_{\mu\nu}^a$ son los tensores de norma antisimétricos construidos a partir de los ocho campos $G_\mu^a(X)$ de los gluones, correspondientes a los ocho generadores de $SU(3)$; f^{ijk} son las constantes de estructura del grupo $SU(3)$.

Adicionalmente se pueden hacer los siguientes comentarios, que serán de utilidad durante el desarrollo de esta tesis:

1. La \mathcal{L}_{ME} tiene 18 parámetros libres que se tienen que determinar experimentalmente.

²La forma explícita de las Lagrangianas \mathcal{L}_{FG} y Faddeev-Popov será mostrada más adelante.

2. La Lagrangiana para el campo escalar ϕ debe tener términos hasta de orden ϕ^4 para que la teoría sea renormalizable.
3. El signo relativo de las constantes de acoplamientos del potencial de Higgs μ y λ está determinado por el rompimiento espontáneo de la simetría de norma.
4. Las constantes de Yukawa corresponden a matrices de 3×3 y están relacionadas con las masas y mezclas de los fermiones.
5. El término de masa fermiónico rompe la simetría de norma, es decir, dicho término no es invariante.

Antes de revisar cuidadosamente cada término de la Lagrangiana (1.17), en la siguiente sección se tratará el rompimiento espontáneo de la simetría de norma en forma detallada, esto con el fin de entender mejor el mecanismo de Higgs.

1.3. Rompimiento Espontáneo de la Simetría

En el sector electrodébil del Modelo Estándar se tiene que los bosones intermediarios de las fuerzas son partículas masivas, lo cual tiene como consecuencia inmediata que el estado de vacío no sea invariante bajo el grupo de norma electrodébil $SU(2)_L \times U(1)_Y$. En otras palabras, el hecho que los bosones W^\pm y Z adquieran masa induce un rompimiento de la simetría de norma electrodébil, y así la teoría deja de ser renormalizable. Este problema se soluciona al introducir el sector de Higgs en el Modelo Estándar. La Lagrangiana correspondiente al sector de Higgs induce un rompimiento espontáneo de la simetría de norma electrodébil.

El fenómeno de rompimiento espontáneo de la simetría, en teoría cuántica de campos, se ve a partir del potencial de Higgs, el cual se define como [9]:

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 = \lambda \left[\phi^\dagger \phi + \frac{\mu^2}{2\lambda} \right]^2 + cte. \quad (1.21)$$

donde ϕ_i es un conjunto de campos reales, que se transforman de acuerdo a alguna representación del grupo de simetría de norma G con n generadores, esto es

$$\phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x) + i\varepsilon^a(x) T_{ij}^a \phi_j(x), \quad a = 1, 2, \dots, n. \quad (1.22)$$

En el potencial $V(\phi)$ es necesario pedir $\lambda > 0$ para que el potencial sea acotado por abajo, por consiguiente el potencial tiene un estado fundamental convencionalmente llamado estado de vacío. Para encontrar el estado de vacío es necesario minimizar el potencial $V(\phi)$, pero la posición del mínimo depende del signo del parámetro μ^2 , así que se tienen dos casos: en el primero se supone $\mu^2 > 0$, entonces el vacío corresponde obviamente a $\phi_i = 0$. Por lo tanto, el potencial $V(\phi)$ sigue siendo invariante bajo el grupo de simetría de G , es decir, en este caso no se rompió la simetría de norma G , sin embargo, el valor extremal no es un mínimo sino una máximo local. Por ejemplo, cuando el grupo G coincide con el grupo de norma del Modelo

Estándar Electro débil, el estado de vacío tiene la simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$, Figura 1.2 (a), y en consecuencia no hay rompimiento de la simetría de norma electro débil. Pero esto no es físicamente viable, ya que tener bosones masivos indica que $SU(2)_L \times U(1)_Y$ no es una simetría del vacío. En el segundo caso, $\mu^2 < 0$, el estado de vacío se determina al minimizar el potencial $V(\phi)$, y se tiene el mínimos no trivial.

El mínimo de $V(\phi)$ para el caso no trivial es

$$\delta V(\phi) = \frac{\partial V}{\partial \phi_i} (\delta \phi_i) = \varepsilon^a \frac{\partial V}{\partial \phi_i} T_{ij}^a \phi_j = 0 \quad (1.23)$$

o

$$\delta V(\phi) = 2\lambda \left[\phi^\dagger \phi + \frac{\mu^2}{2\lambda} \right] \phi^\dagger (\delta \phi) + 2\lambda \left[\phi^\dagger \phi + \frac{\mu^2}{2\lambda} \right] (\delta \phi^\dagger) \phi = 0. \quad (1.24)$$

De esta ecuación se obtiene que el valor de expectación del campo ϕ en el vacío es

$$\langle 0 | \phi^\dagger \phi | 0 \rangle = \langle \phi^\dagger \phi \rangle_0 = -\frac{\mu^2}{2\lambda}. \quad (1.25)$$

A partir de la expresión anterior se observa que el estado de vacío es degenerado porque hay muchas formas de satisfacerla, (ver Figura 1.2 (b)). Sin embargo, la teoría cuántica de campos exige que el estado base sea único. Entonces, al escoger uno de estos estados como el estado de vacío, se induce un rompimiento de la simetría. Este mecanismo se conoce en la literatura como rompimiento espontáneo de la simetría de norma. La simetría remanente, o no rota, depende de la elección del estado de vacío.

Al derivar la ecuación (1.24) con respecto al campo ϕ y evaluar en el estado de vacío, se obtiene:

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k^\dagger \partial \phi_i} \right|_{\phi_i = \langle \phi^\dagger \phi \rangle_0} \delta \langle \phi_i \rangle_0 = M_{ki}^2 T_{ij}^a \langle \phi_j \rangle_0 = 0. \quad (1.26)$$

Para que se satisfaga la expresión anterior se consideran dos casos:

1. $T_{ij}^a \langle \phi_j \rangle_0 \neq 0$.

En este caso se dice que el generador T^a es un generador roto y M_{ki}^2 corresponde a la matriz de masas del potencial, la cual debe tener un eigenvalor igual a cero. El enunciado anterior se conoce como *Teorema de Goldstone*, dicho teorema establece que por cada generador roto existe un bosón de masa cero conocido como bosón de Goldstone.

2. $T_{ij}^a \langle \phi_j \rangle_0 = 0$.

En este caso se dice que el generador T^a es un generador intacto o no-roto. El elemento del grupo asociado a T^a deja invariante al estado de vacío, es decir:

$$e^{i\varepsilon \cdot T} \langle \phi \rangle_0 = \langle \phi \rangle_0. \quad (1.27)$$

En otras palabras, el conjunto de generadores intactos o no-rotos forma un subgrupo de simetría que deja invariante al estado de vacío, en consecuencia el grupo de simetría inicial se rompe al subgrupo de simetría que deja invariante al estado de vacío.

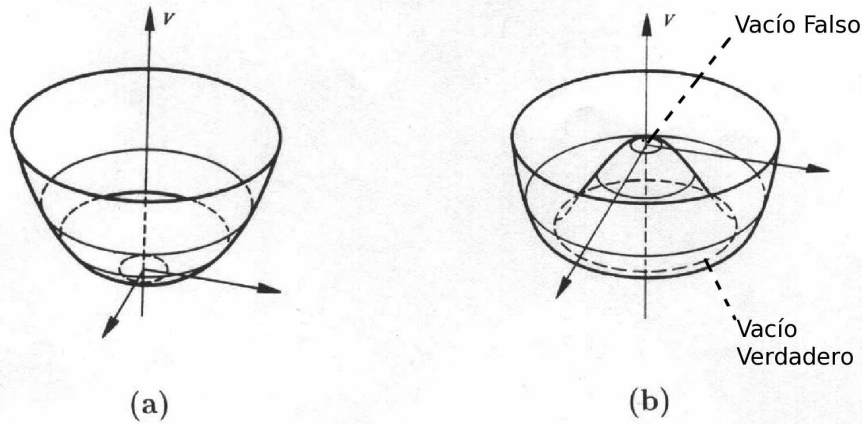


Figura 1.2: El potencial de Higgs con: (a) $\mu^2 > 0$, vacío único y (b) $\mu^2 < 0$, vacíos falso y verdadero.

1.3.1. Mecanismo de Higgs

En el caso del Modelo Estándar Electro débil, el estado de vacío se escoge de tal forma que la simetría remanente coincida con el grupo de norma de la electrodinámica, $U(1)_{em}$. Por lo tanto, el generador intacto o no-roto corresponde a la carga eléctrica Q_{em} .

Para el mecanismo de Higgs, el campo ϕ es asignado a un doblete de $SU(2)_L$ de la forma:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

donde ϕ_i , ($i = 1, \dots, 4$), son campos escalares reales. Así, el potencial de Higgs dado en la ec. (1.21) es invariante bajo la transformación de norma

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}}{2}} \phi(x), \quad (1.29)$$

donde $\vec{\tau}$ está formado por las matrices de Pauli y $\vec{\alpha}$ es una función espacio-temporal. El mínimo del potencial de Higgs, $V(\phi)$ para $\mu^2 < 0$, es:

$$\langle 0 | \phi^\dagger \phi | 0 \rangle = \langle \phi^\dagger \phi \rangle_0 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2}. \quad (1.30)$$

En función de los campos reales el término $\phi^\dagger \phi$ tiene la forma:

$$\phi^\dagger \phi = \frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = \frac{v^2}{2}. \quad (1.31)$$

Como se puede observar existe un número infinito de estados posibles de vacío, los cuales corresponden al número infinito de valores para los campos reales que satisfacen la relación

dada en la ec. (1.30). Cualquiera de estos estados de vacío posee la simetría de norma $U(1)_{em}$, pero no a la simetría de norma electrodébil. Al elegir una dirección particular en el espacio de isoespín, se induce el rompimiento espontáneo de la simetría de norma, según el esquema

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}. \quad (1.32)$$

En forma gráfica, el esquema del rompimiento espontaneo de la simetría de norma, se ilustra en la figura 1.2 (b).

Al elegir la dirección en el espacio de isoespín, $\phi_3 = v$, $\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0$, el valor de expectación en el vacío de ϕ toma la forma:

$$\langle \phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Cuando un generador del grupo de norma electrodébil (T^a, Y) actúa sobre el estado de vacío, este se rompe, es decir,

$$T^a \langle \phi \rangle_0 \neq 0, \quad Y \langle \phi \rangle_0 \neq 0. \quad (1.34)$$

En cambio cuando el generador de $U(1)_{em}$ ($Q_{em} = T_{L3} + Y$) actúa sobre el estado de vacío, éste no se rompe,

$$Q \langle \phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} Q \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = 0. \quad (1.35)$$

Una consecuencia del rompimiento espontáneo de la simetría de norma electrodébil es que los tres campos de norma electrodébil, W^\pm y Z adquieren masa y, en consecuencia, estos campos de norma adquieren grados de libertad longitudinales. Por consiguiente, los tres bosones de Goldstone presentes en la teoría antes del rompimiento espontáneo de la simetría, reaparecen en la teoría como grados de libertad longitudinales de los bosones W^\pm y Z .

1.3.2. Masas de los Bosones de Norma

Los términos de masa para los bosones de norma electrodébil se generan a través del mecanismo de Higgs y del término cinético del campo escalar ϕ . Al considera que el valor de expectación en el vacío de ϕ tiene la forma dada en la ec. (1.33), la acción de la derivada covariante sobre $\langle \phi \rangle_0$ adquiere la forma:

$$D_\mu \langle \phi \rangle_0 = -\frac{iv}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} g\sqrt{2}W_\mu^+ \\ -gW_{3\mu} + g'B_\mu \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

La notación se define como

$$W_\mu^\pm = \frac{(W_{1\mu} \mp W_{2\mu})}{\sqrt{2}}. \quad (1.37)$$

Así, el término de masa para los bosones de norma es

$$\mathcal{L}_{masa} = M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu + 0 A_\mu A^\mu, \quad (1.38)$$

Bosón de Norma	Masa (GeV)
γ	0
W^\pm	80.399 ± 0.023
Z	91.1876 ± 0.0021

Cuadro 1.3: Masas de los bosones de norma electrodébil.

donde

$$M_W = \frac{gv}{2}, \quad M_Z = \frac{gv}{2 \cos \theta_W}, \quad (1.39)$$

y

$$Z_\mu = \cos \theta_W W_{3\mu} - \sin \theta_W B_\mu, \quad (1.40)$$

$$A_\mu = \sin \theta_W W_{3\mu} + \cos \theta_W B_\mu.$$

El ángulo θ_W es llamado ángulo de Weinberg, el cual se relaciona con las constantes de acoplamiento del grupo de norma electrodébil a través de

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g}. \quad (1.41)$$

En resumen, debido al rompimiento espontáneo de la simetría de norma electrodébil, los bosones de norma W^\pm y Z adquieren masa, mientras que el bosón de norma asociado a A_μ , el fotón, queda sin masa. En el Cuadro 1.3 se muestran los valores más recientes para las masas de los bosones de norma electrodébil [11].

1.3.3. Masas de los Fermiones y Violación de CP

Ahora se revisa la parte de la Lagrangiana del Modelo Estándar Electrodébil correspondiente a los acoplos de Yukawa, conocida como Lagrangiana de Yukawa. A esta Lagrangiana la forman los términos que acoplan el campo de Higgs con los campos de los quarks y los leptones. En la representación de interacción, las interacciones de norma son diagonales y universales en el sentido de que son descritas por una constante de acoplamiento de norma por cada factor en G_{ME} : g_s , g y g' . Por definición, los eigenestados de interacción no tienen acoplamientos de norma entre fermiones de diferentes generaciones y las mezclas entre los fermiones de distinto sabor no están permitidas; sin embargo, el acoplamiento del campo de Higgs a fermiones no se sigue del principio de invariancia de norma, en consecuencia las interacciones de Yukawa no son diagonales en esta representación. Por lo tanto, en la representación de interacción los acoplamientos de Yukawa involucran fermiones de diferentes generaciones, consecuentemente, los eigenestados de interacción se mezclan y no tienen masas definidas.

En el caso de tres o más familias, la Lagrangiana de Yukawa puede dar lugar a la violación de CP. Mas aún, toda la violación de CP del Modelo Estándar Electrodébil se origina en este sector. Una explicación de por qué la violación de CP se relaciona con los acoplamientos de

Yukawa complejos, Y_{ij} , se puede ver de la hermiticidad de la Lagrangiana, ya que los diferentes términos para tres familias de fermiones se pueden asociar en pares de la forma³:

$$Y_{ij}\bar{\psi}_{Li}\phi\psi_{Rj} + Y_{ij}^*\bar{\psi}_{Rj}\phi^\dagger\psi_{Li}. \quad (1.42)$$

La acción del operador de CP intercambia los operadores

$$\bar{\psi}_{Li}\phi\psi_{Rj} \leftrightarrow \bar{\psi}_{Rj}\phi^\dagger\psi_{Li}, \quad (1.43)$$

pero deja los coeficientes Y_{ij} y Y_{ij}^* invariantes. Esto significa que CP es una simetría del sector de Yukawa del Modelo Estándar, si y sólo si, $Y_{ij} = Y_{ij}^*$ con $i \neq j$. Entonces se viola CP en el Modelo Estándar, si y sólo si [14, 15]:

$$Y_{ij}^f \neq Y_{ij}^{*f} \quad \text{y} \quad \Im \{ \det [Y^d Y^{d\dagger}, Y^u Y^{u\dagger}] \} \neq 0. \quad (1.44)$$

Es claro que esta explicación es correcta si se separa el mecanismo de violación de CP del mecanismo de Higgs del rompimiento espontáneo de la simetría de norma. Las interacciones de Yukawa son las fuentes de las masas de los fermiones y la única fuente de violación de CP del Modelo Estándar Electrodebil.

Ahora, cuando la simetría de norma G_{ME} se rompe espontáneamente, las interacciones de Yukawa dan origen a los términos de masa de los fermiones. Tomando en cuenta que el valor de expectación en el vacío del campo de Higgs tiene la forma dada en la ec. (1.33), se obtiene que la Lagrangiana de Yukawa adquiere la forma:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{YQ} &= Y_{ij}^d \bar{Q}_{Li}^I \phi d_{Rj}^I + Y_{ij}^u \bar{Q}_{Li}^I \tilde{\phi} u_{Rj}^I + Y_{ij}^\ell \bar{l}_{Li} \phi e_{Rj} + h.c. \\ &= \bar{u}_L^I M_u u_R^I + \bar{d}_L^I M_d d_R^I + \bar{e}_L^I M_l e_R^I, \end{aligned} \quad (1.45)$$

donde M_f ($f = u, d, l$) son las matrices de masas de los quarks y los leptones cargados. Mientras que

$$u = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

Las matrices de masa obtenidas de los acoples de Yukawa, después del rompimiento de la simetría de norma, se definen como:

$$(M_f)_{ij} = Y_{ij}^f \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (1.47)$$

Las Y_{ij}^f son las matrices de los acoplamientos de Yukawa, las cuales para el Modelo Estándar son matrices complejas de 3×3 .

³En esta expresión el índice i o j repetido no implica suma.

Familia	Quark	Masa
1	u	1.7-3.3 MeV
	d	4.1-5.8 MeV
2	c	$1.27^{+0.07}_{-0.09}$ GeV
	s	101^{+29}_{-21} MeV
3	t	$172.0 \pm 0.9 \pm 1.3$ GeV
	b	$4.9^{+0.18}_{-0.06}$ GeV

Cuadro 1.4: Las masas de los u -, d - y s -quark son estimadas de la llamadas “current-quark masses” en un esquema de sustracción independiente de la masa, tales como \overline{MS} a una escala $\mu \approx 2$ GeV. Las masas de los c - y b -quark son las masa corregidas en el esquema \overline{MS} . Estos pueden ser diferentes de las masas constitutivas de los quarks pesados obtenidos en los modelos de potencial [11].

El Modelo Estándar Electro débil no predice los valores de las masas fermiónicas, sino que se ajusta a las mediciones experimentales de las mismas. Los valores más recientes de las masas de los leptones cargados son [11]:

$$\begin{aligned}
 m_e &= 0.510908910 \pm 0.000000013 \text{ MeV}, \\
 m_\mu &= 105.658367 \pm 0.000004 \text{ MeV}, \\
 m_\tau &= 1776.82 \pm 0.16 \text{ MeV}.
 \end{aligned}
 \tag{1.48}$$

En el cuadro 1.4 se muestran los valores más recientes para las masas de los quarks [11].

Por otra parte, el hecho que las matrices de Yukawa sean complejas, tiene como consecuencia la violación de CP en el Modelo Estándar Electro débil. En otras palabras, la matrices M_u y M_d no conmutan y la parte imaginaria de su conmutador no es nula:

$$(M_f)_{ij} \neq (M_f^*)_{ij} \quad \text{y} \quad \Im m \left\{ \det [M_d M_d^\dagger, M_u M_u^\dagger] \right\} \neq 0.
 \tag{1.49}$$

Para matrices de masa complejas, en el caso de matrices de masa hermitianas, CP se viola en el Modelo Estándar Electro débil, si y sólo si [14, 15]

$$\Im m \left\{ \det [M_d, M_u] \right\} \neq 0.
 \tag{1.50}$$

Por el momento únicamente se considera la parte de la Lagrangiana de Yukawa correspondiente al sector de los quarks, el sector leptónico se revisará más adelante. Además, como se permiten las mezclas entre los quarks de diferente generación, las matrices de masa de los mismos no son diagonales en la base de interacciones, por consiguiente los eigenestados de interacción no tiene masas bien definidas, es decir, en la representación de interacción los fermiones, en general, no son eigenestados de masa. Por lo tanto, es necesario diagonalizar las matrices para encontrar los eigenestados de masa, suponiendo que los quarks transforman de la representación de interacción a la representación de las masas, a través de la siguiente transformación:

$$d_{L(R)}^I = V_{L(R)}^\dagger d_{L(R)}, \quad u_{L(R)}^I = U_{L(R)}^\dagger u_{L(R)},
 \tag{1.51}$$

donde d y u se refieren a los eigenestados de masa. En la literatura es común referirse a los campos en la representación de masas como campos físicos, ya que en esta representación los campos tienen una masa bien definida. Al reemplazar los campos transformados (1.51) en el Lagrangiano (1.45) se obtiene:

$$-\mathcal{L}_{masa} = \bar{u}_L M_u^{diag} u_R + \bar{d}_L M_d^{diag} d_R, \quad (1.52)$$

donde las M^{diag} son matrices de masa diagonales dadas por:

$$M_u^{diag} = U_L M_u U_R^\dagger, \quad M_d^{diag} = V_L M_d V_R^\dagger. \quad (1.53)$$

Como, en general, las matrices de masas de los quarks son matrices complejas de 3×3 no Hermitianas, para encontrar a las matrices de transformación $U_{L(R)}$ y $V_{L(R)}$ que las diagonalizan, se usan las formas bilineales MM^\dagger y $M^\dagger M$, obteniendo:

$$\begin{aligned} U_L M_u M_u^\dagger U_L^\dagger &= U_L M_u U_R^\dagger U_R M_u^\dagger U_L^\dagger = (M_u^{diag})^2, \\ U_R M_u^\dagger M_u U_R^\dagger &= U_R M_u^\dagger U_L^\dagger U_L M_u U_R^\dagger = (M_u^{diag})^2, \\ V_L M_d M_d^\dagger V_L^\dagger &= V_L M_d V_R^\dagger V_R M_d^\dagger V_L^\dagger = (M_d^{diag})^2, \\ V_R M_d^\dagger M_d V_R^\dagger &= V_R M_d^\dagger V_L^\dagger V_L M_d V_R^\dagger = (M_d^{diag})^2. \end{aligned} \quad (1.54)$$

En conclusión, si se conoce la matriz de mezcla de los quarks se pueden conocer las matrices de transformación $U_{L(R)}$ y $V_{L(R)}$.

1.4. Lagrangiana de Interacción

Anteriormente se vio como después del rompimiento espontáneo de la simetría los bosones de norma y los fermiones adquieren masa, pero al aplicar el mecanismo de Higgs no sólo se obtienen los términos de masa, sino también los términos de interacción de los campos. Esto se puede ilustrar como:

$$\mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_H \xrightarrow{R.E.S} \mathcal{L}_{masa} + \mathcal{L}^{Int},$$

donde \mathcal{L}_{masa} es la Lagrangiana que contiene los términos de masa y \mathcal{L}^{Int} es la Lagrangiana de los términos de interacción de los campos.

Como las excitaciones del campo se miden a partir del estado de mínima energía, es necesario hacer un desarrollo a partir del estado de vacío, así el campo de Higgs se redefine como:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{h+v+i\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

Si se reemplaza el doblete anterior en el potencial de Higgs se observa directamente que el campo h adquiere una masa igual a $-\mu^2/2$ y los otros campos no tienen masa.

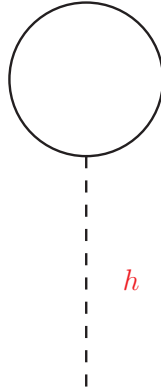


Figura 1.3: Forma típica para el diagrama de Feynman de renacuajo.

1.4.1. Lagrangiana del Potencial de Higgs

A continuación se muestra brevemente como los llamados diagramas de *renacuajo* contribuyen a un cambio en el valor de expectación en el vacío del campo escalar ϕ . Así, el potencial de Higgs definido en ec. (1.21), en términos del doblete de Higgs dado en la ec. (1.55) se escribe como [16]:

$$V(\phi) = \lambda \left[(\phi^- \phi^+)^2 + \frac{(h^2 + \eta^2)^2}{4} + \phi^- \phi^+ (h^2 + \eta^2) + h^2 v^2 + 2vh \left(\phi^- \phi^+ + \frac{h^2 + \eta^2}{2} \right) + (\delta T)^2 + \delta T (2\phi^- \phi^+ + h^2 + \eta^2) + 2\delta T h v \right], \quad (1.56)$$

donde

$$\delta T = \frac{v^2}{2} + \frac{\mu^2}{2\lambda}. \quad (1.57)$$

Debido a que no se han tomado en cuenta las correcciones radiativas (aproximación a nivel árbol) y con $v^2 = \frac{-\mu^2}{\lambda}$, automáticamente se obtiene $\delta T = 0$. Como se puede observar de la expresión en (1.56), el término cuadrático en h , término de masa, cambia de signo debido al rompimiento espontáneo de la simetría de norma. En otras palabras, antes del rompimiento de la simetría se considera $v = 0$ y el término de masa es proporcional a $-\mu^2$, y después del rompimiento el término es proporcional a $-\lambda v^2 = \mu^2$; además, después del rompimiento de la simetría $\delta T = 0$, por lo tanto los campos ϕ y η quedan sin masa.

Si se consideran las correcciones radiativas del término lineal en el campo h , también conocidas como *renacuajo*, ver la figura 1.3, este término se modifica en la forma $-2\lambda (\delta T + \delta T_{\text{lazo}}) h v$, donde δT_{lazo} es la contribución proveniente del lazo. Una forma de eliminar los diagramas de *renacuajo* y que los bosones de Goldstone no adquieran masa, es re-definir a v como

$$v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} - 2\delta T_{\text{lazo}}, \quad (1.58)$$

tal que $\delta T + \delta T_{lazo} = 0$. En este caso, el potencial de Higgs se puede escribir como:

$$V(\phi) = \lambda \left[(\phi^- \phi^+)^2 + \frac{(h^2 + \eta^2)^2}{4} + \phi^- \phi^+ (h^2 + \eta^2) \right] - \frac{\mu^2}{v} h (2\phi^- \phi^+ + h^2 + \eta^2), \quad (1.59)$$

donde v contiene todas las contribuciones de *renacuajo* y estos diagramas pueden ser eliminados de la teoría.

1.4.2. Lagrangiana: Cinética de los Campos Escalares y \mathcal{L}_{FG}

Aquí se determinan los términos de interacción de los campos escalares, para esto se escribe la derivada covariante en términos de los eigenestados de masa:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieQA_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}T^+W_\mu^+ - \frac{ig}{\sqrt{2}}T^-W_\mu^- - \frac{ig}{c}[T_{L3} - xQ]Z_\mu, \quad (1.60)$$

donde

$$e = g \sin \theta_W, \quad c = \cos \theta_W, \quad \text{y} \quad x = \sin^2 \theta_W. \quad (1.61)$$

Tomando la derivada covariante del doblete de Higgs, ec. (1.55), se obtiene:

$$\begin{aligned} D_\mu \phi = & \begin{pmatrix} \frac{\partial_\mu \phi^+}{\frac{\partial_\mu h + i\partial_\mu \eta}{\sqrt{2}}} \\ 0 \end{pmatrix} - ieA_\mu \begin{pmatrix} \phi^+ \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{ig}{c}Z_\mu \begin{pmatrix} (\frac{1}{2} - x)\phi^+ \\ -\frac{(h+v+i\eta)}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ & - \frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \begin{pmatrix} \frac{(h+v+i\eta)}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^- \begin{pmatrix} 0 \\ \phi^+ \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

La Lagrangiana de interacción correspondiente toma la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k\phi}^{Int} = & ieA^\mu (\phi^- \partial_\mu \phi^+ - \phi^+ \partial_\mu \phi^-) + \frac{ig}{2} (\frac{1}{2} - x) Z^\mu (\phi^- \partial_\mu \phi^+ - \phi^+ \partial_\mu \phi^-) \\ & + \frac{ig}{2} W^{\mu-} (h \partial_\mu \phi^+ - \phi^+ \partial_\mu h) + \frac{g}{2} W^{\mu-} (\eta \partial_\mu \phi^+ - \phi^+ \partial_\mu \eta) + \frac{g^2 v}{4c^2} Z_\mu Z^\mu h \\ & + \frac{egv}{2} A_\mu W^{\mu+} \phi^- + \frac{g}{2c} Z^\mu (h \partial_\mu \eta - \eta \partial_\mu h) + \frac{g^2 v}{2} W_\mu^+ W^{\mu-} h + e^2 A_\mu A^\mu \phi^+ \phi^- \\ & - \frac{g^2 vx}{2c} Z_\mu W^{\mu+} \phi^- + \frac{eg}{c} (\frac{1}{2} - x) A_\mu Z^\mu \phi^+ \phi^- + \frac{g^2}{c^2} (\frac{1}{2} - x)^2 Z_\mu Z^\mu \phi^+ \phi^- \\ & + \frac{g^2}{8c^2} Z_\mu Z^\mu (h^2 + \eta^2) + \frac{ge}{2} A_\mu W^{\mu+} \phi^- h + \frac{ige}{2} A_\mu W^{\mu+} \phi^- \eta - \frac{g^2 x}{2c} Z_\mu W^{\mu-} \phi^+ h \\ & + \frac{ig^2 x}{2c} Z_\mu W^{\mu-} \phi^+ \eta + \frac{g^2}{4} W_\mu^+ W^{\mu-} (h^2 + \eta^2) + \frac{g^2}{2} W_\mu^+ W^{\mu-} \phi^+ \phi^- + h.c. \\ & + iM_W \partial_\mu \phi^+ W^{\mu-} - iM_W \partial_\mu \phi^- W^{\mu+} + M_Z \partial_\mu \eta Z^\mu. \end{aligned} \quad (1.63)$$

En la figura 1.4 se muestran los autoacoplamiento del bosón de Higgs y los acoplamiento de este con los bosones de norma.

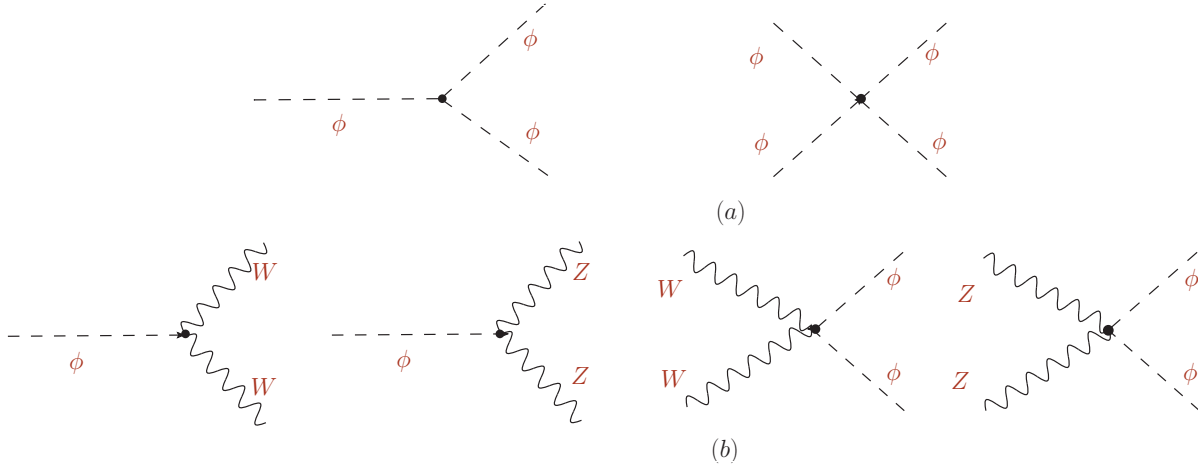


Figura 1.4: (a) Autoacoplamientos del bosón de Higgs. (b) Acoplamientos del Higgs con los bosones de norma.

El último término es cuadrático en los campos, norma-bosón de Goldstone, y por lo tanto debería contribuir al propagador del campo de norma dañando la renormalizabilidad de la teoría. Para teorías de norma con rompimiento espontáneo de la simetría, bosones masivos, 't Hooft y Veltman propusieron fijar la norma de tal forma que el término mencionado anteriormente se cancele. Por consiguiente la teoría de norma es renormalizable. En el caso del Modelo Estándar Electro débil, el término de la Lagrangiana que fija la norma tiene la forma:

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{L}_{GF} = & -\frac{1}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{2} (\partial^\mu Z_\mu)^2 - \frac{1}{2} M_Z^2 \eta^2 - M_W^2 \phi^+ \phi^- - \partial^\mu W_\mu^+ \partial_\nu W^{\nu-} \\
 & + iM_W \partial_\mu \phi^+ W^{\mu-} - iM_W \partial_\mu \phi^- W^{\mu+} + M_Z \partial_\mu \eta Z^\mu,
 \end{aligned} \tag{1.64}$$

donde el último término de la expresión (1.64) cancela el último término de la Lagrangiana en la ec. (1.63).

1.4.3. Lagrangiano de Yukawa y Matriz de Mezclas

En el caso de la Lagrangiana de interacción entre los quarks y los campos escalares, cambiando las matrices de Yukawa $Y^{u(d)}$ por las matrices de masas de los quarks $M_{u(d)}$, \mathcal{L}_{YQ} toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{YQ} = & \bar{u}_L^I M_u u_R^I + \bar{d}_L^I M_d d_R^I + \frac{\sqrt{2}}{v} \left[\bar{u}_L^I M_d d_R^I \phi^+ - \bar{d}_L^I M_u u_R^I \phi^- + \bar{d}_L^I M_d d_R^I \frac{(h+i\eta)}{\sqrt{2}} \right. \\
 & \left. + \bar{u}_L^I M_u u_R^I \frac{(h-i\eta)}{\sqrt{2}} \right] + h.c. .
 \end{aligned} \tag{1.65}$$

Los primeros dos términos del lado derecho de la ecuación anterior corresponden a los términos de masa de los quarks, ver la ec. (1.45), el resto corresponden a las interacciones de los campos.

Al escribir la Lagrangiana de la ec. (1.65) en la base de las masas, dejando fuera a los términos de masa de los quarks, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YQ}^{Int} = & \frac{g}{\sqrt{2}M_W} \left[(\bar{u}_L^I M_d d_R^I - \bar{u}_R^I M_u^\dagger d_L^I) \phi^+ + h.c. \right] \\ & + \frac{g}{\sqrt{2}M_W} \left[\bar{d}_L^I M_d d_R^I \frac{(h+i\eta)}{\sqrt{2}} + \bar{d}_R^I M_d^\dagger d_L^I \frac{(h-i\eta)}{\sqrt{2}} + \bar{u}_L^I M_u u_R^I \frac{(h-i\eta)}{\sqrt{2}} + \bar{u}_R^I M_u^\dagger u_L^I \frac{(h+i\eta)}{\sqrt{2}} \right] \end{aligned} \quad (1.66)$$

Ahora, si se transforman los campos de los quarks de la base de interacción a la base física usando las transformaciones dadas en la ec. (1.51), la Lagrangiana \mathcal{L}_{YQ}^{Int} se re-escribe como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YQ}^{Int} = & \frac{g}{\sqrt{2}M_W} \left[\left(\bar{u}_L U_L V_L^\dagger M_d^{diag} V_R V_R^\dagger d_R - \bar{u}_R U_R U_R^\dagger M_u^{diag\dagger} U_L V_L^\dagger d_L \right) \phi^+ + h.c. \right. \\ & + \bar{d}_L V_L V_L^\dagger M_d^{diag} V_R V_R^\dagger d_R \frac{(h+i\eta)}{\sqrt{2}} + \bar{d}_R V_R V_R^\dagger M_d^{diag\dagger} V_L V_L^\dagger d_L \frac{(h-i\eta)}{\sqrt{2}} \\ & \left. + \bar{u}_L U_L U_L^\dagger M_u^{diag} U_R U_R^\dagger u_R \frac{(h-i\eta)}{\sqrt{2}} + \bar{u}_R U_R U_R^\dagger M_u^{diag\dagger} U_L U_L^\dagger u_L \frac{(h+i\eta)}{\sqrt{2}} \right], \end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YQ}^{Int} = & \frac{g}{\sqrt{2}M_W} \left[\bar{u} \left(M_d^{diag} P_R - M_u^{diag} P_L \right) V_{CKM} d \phi^+ + h.c. \right] \\ & + \frac{g}{2M_W} \left[\bar{d} M_d^{diag} d + \bar{u} M_u^{diag} u \right] \frac{h}{\sqrt{2}} \\ & - \frac{ig}{2M_W} \left[\bar{d} M_d^{diag} \gamma_5 d - \bar{u} M_u^{diag} \gamma_5 u \right] \frac{\eta}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (1.67)$$

donde se definió la matriz

$$V_{CKM} = U_L V_L^\dagger. \quad (1.68)$$

La matriz V_{CKM} se conoce como la matriz de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa, la cual produce la mezcla entre los quarks y permite que haya cambio de sabor en las corrientes cargadas, figura 1.5. Además, como se puede observar de la Lagrangiana anterior, las corrientes neutras (ver figura 1.6) con intercambio de h y η no cambian el sabor de los quarks.

En la formulación del Modelo Estándar la matriz de mezclas de los leptones, análoga a la matriz de mezclas de los quarks V_{CKM} , es la matriz unidad, dado que se formuló para neutrinos no masivos; sin embargo, la evidencia experimental proporcionada por la colaboración de Super-Kamiokande [1], la cual se confirmó posteriormente en otros experimentos de oscilaciones de neutrinos [2, 3, 4, 5], impuso cotas no nulas para la masa de los neutrinos. Esta propiedad de los neutrinos tiene como consecuencia que la matriz de mezclas para los leptones no sea trivial.

1.4.4. Lagrangiana Fermiónica

En el límite de fermiones no masivos, la Lagrangiana de las interacciones débiles tiene una estructura quirial. En este límite sólo los quarks (antiquarks) y los leptones izquierdos (antileptones derechos) se acoplan a los bosones W , portadores de la interacción débil. Al romperse la

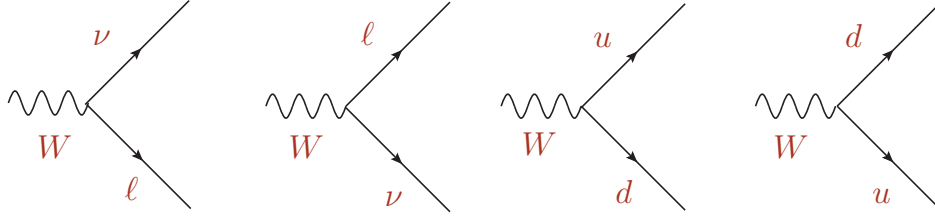


Figura 1.5: *Vértices de interacción de corrientes cargadas, para quarks y leptones.*

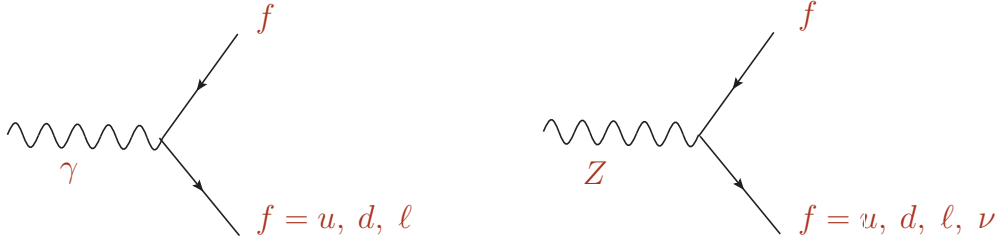


Figura 1.6: *Vértices de interacción de corrientes neutras, para quarks y leptones.*

simetría de norma se generan términos de masa y en consecuencia se rompe la simetría quiral, esto hace que se mezclen las componentes de quiralidad izquierda y derecha de los fermiones. Por consiguiente, hay violación de paridad P y conjugación de carga C en las interacciones débiles.

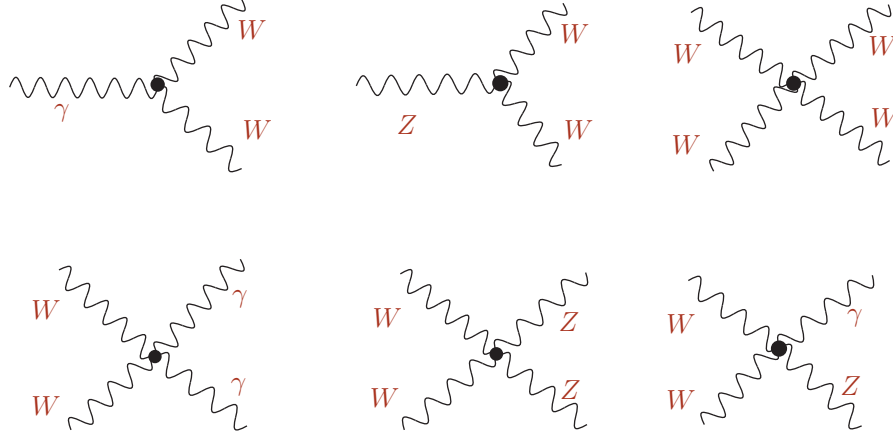
La Lagrangiana fermiónica para los quarks está dada por

$$\mathcal{L}_{fer,Q}^{Int} = \bar{Q}_L^I i\gamma^\mu D_\mu Q_L^I + \bar{u}_R^I i\gamma^\mu D_\mu u_R^I + \bar{d}_R^I i\gamma^\mu D_\mu d_R^I. \quad (1.69)$$

Después de escribir la Lagrangiana en términos de los eigenestados de masa, ésta toma la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fer,Q}^{Int} = & \bar{u}i\gamma^\mu\partial_\mu u + \bar{d}i\gamma^\mu\partial_\mu d + \frac{2}{3}e\bar{u}\gamma^\mu A_\mu u - \frac{1}{3}e\bar{d}\gamma^\mu A_\mu d \\ & + \frac{g}{c}\bar{u}\gamma^\mu Z_\mu \left(\frac{1}{2}P_L - \frac{2}{3}x\right) u + \frac{g}{c}\bar{d}\gamma^\mu Z_\mu \left(-\frac{1}{2}P_L + \frac{1}{3}x\right) d \\ & + \frac{g}{\sqrt{2}}\bar{u}_L\gamma^\mu W^+ V_{CKM} d_L + \frac{g}{\sqrt{2}}\bar{d}_L\gamma^\mu W^- V_{CKM}^\dagger u_L. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Los últimos dos términos de la Lagrangiana $\mathcal{L}_{fer,Q}^{Int}$ corresponden a las corrientes cargadas que cambian el sabor de los quarks, figura 1.5. La unitariedad de las matrices que transforman a los campos de los quarks evita que en las corrientes neutras haya cambio de sabor, figura 1.6, esto se conoce como el mecanismo de GIM (Glashow, Iliopoulos y Maiani) [8, 9, 10].

Figura 1.7: *Vértices de autointeracción de los bosones de norma.*

1.4.5. Lagrangiana Cinética de los Campos de Norma

La Lagrangiana cinética de los campos de norma proporciona los términos de los cuales se obtienen los vértices de autointeracción de los bosones de norma. Al elevar al cuadrado el tensor de curvatura $W_{\mu\nu}$ aparece un factor de la forma $(\partial W)^2$, correspondiente a la Lagrangiana cinética y determina la ecuación de movimiento del campo. Los otros dos términos de la forma $\partial W W W$ y $W W W W$ corresponden a la Lagrangiana de interacción de los campos. Dado que el campo electromagnético tiene una simetría abeliana, el fotón no tiene autointeracciones, como sí ocurre con los campos de norma no-abeliana. Para calcular la Lagrangiana de interacción de los campos de norma, se debe tomar en cuenta el término

$$-\frac{1}{4}W_{\mu\nu}W^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}, \quad (1.71)$$

las definiciones (1.40) y

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon^{ijk}W_\nu^i W_\mu^k, \\ B_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Después se hacen las transformaciones de los campos de norma, se obtiene el término cinético de los campos de norma A_μ , Z_μ , W_μ^\pm y los términos de interacción de tres y cuatro campos, ver figura 1.7:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{kn}^{Int} &= igs [\partial_\mu A_\nu (W^{\mu+}W^{\nu-} - W^{\mu-}W^{\nu+}) + A_\mu (W_\nu^+ \partial^\mu W^{\nu-} - W_\nu^- \partial^\mu W^{\nu+}) \\
&+ A_\nu (W^{\mu-} \partial_\mu W^{\nu+} - W^{\mu+} \partial_\mu W^{\nu-})] + igc [\partial_\mu Z_\nu (W^{\mu+}W^{\nu-} - W^{\mu-}W^{\nu+}) \\
&+ Z_\mu (W^{\nu+} \partial_\mu W^{\nu-} - W^{\nu-} \partial_\mu W^{\nu+}) + Z_\nu (W^{\mu-} \partial_\mu W^{\nu+} - W^{\mu+} \partial_\mu W^{\nu-})] \\
&- \frac{g^2}{2} [W_\mu^+ W^{\mu-} W_\nu^+ W^{\nu-} - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-}] - g^2 W_\mu^+ W_\nu^- (c^2 Z^\mu Z^\nu + cs A^\mu Z^\nu \\
&+ cs A^\nu Z^\mu + s^2 A^\mu A^\nu) - g^2 W_\mu^+ W^{\mu-} (c^2 Z^\nu Z_\nu + 2cs A^\nu Z_\nu + s^2 A^\nu A_\nu).
\end{aligned} \tag{1.73}$$

1.5. Lagrangiana de Faddeev-Popov

Finalmente, para poder compensar las contribuciones no físicas de los campos de norma en \mathcal{L}_{GF} es necesario introducir el campo de fantasmas de Faddeev-Popov. La Lagrangiana de Faddeev-Popov, \mathcal{L}_{FP} , está dada por:

$$\mathcal{L}_{FP} = \bar{C}^a \frac{\delta F^a}{\delta \theta^b} C^b = \bar{C}^a \delta_{BRS} F^a, \tag{1.74}$$

donde F^a es la función que fija la norma del campo a y BRS se refiere a la transformación de Becchi, Route y Stora, la cual consiste en cambiar el parámetro θ de la transformación de norma por el respectivo campo fantasma; además $\delta_{BRS} \bar{C}^a = 0$. Se puede demostrar que la Lagrangiana completa es invariante bajo esta transformación, y como consecuencia de ello aparecen las identidades de Slavnov-Taylor, las cuales corresponden a las identidades de Ward para el caso de una teoría de norma abeliana [16].

En el caso del Modelo Estándar, para determinar la Lagrangiana de Faddeev-Popov, \mathcal{L}_{FP} , los campos fantasmas y los parámetros de la transformación de norma se transforman de manera similar a los campos de norma. Así, los campos de norma bajo la acción de una transformación del tipo BRS son:

$$\begin{aligned}
\delta_{BRS} W_\mu^1 &= g (W_\mu^2 C^3 - W_\mu^3 C^2) + \partial_\mu C^1, \\
\delta_{BRS} W_\mu^2 &= g (W_\mu^3 C^1 - W_\mu^1 C^3) + \partial_\mu C^2, \\
\delta_{BRS} W_\mu^3 &= g (W_\mu^1 C^2 - W_\mu^2 C^1) + \partial_\mu C^3, \\
\delta_{BRS} B_\mu &= \partial_\mu C',
\end{aligned} \tag{1.75}$$

donde los C^i son los fantasmas de los respectivos W_μ^i y C' es el campos fantasma asociado a B_μ . Al suponer que los fantasmas rotan exactamente igual que los campos de norma se tiene:

$$\begin{aligned}
\delta W_\mu^\pm &= \pm ig W_\mu^\pm (cC_Z + sC_\gamma) \mp ig (cZ_\mu + aA_\mu) C^\pm + \partial_\mu C^\pm, \\
\delta Z_\mu &= igc (W_\mu^- C^+ - W_\mu^+ C^-) + \partial_\mu C_Z, \\
\delta A_\mu &= -igs (W_\mu^- C^+ - W_\mu^+ C^-) + \partial_\mu C_\gamma.
\end{aligned} \tag{1.76}$$

El término que fija la norma tiene una dependencia de los campos escalares, por lo tanto, se necesita la variación de *BRS* de estos campos dada como

$$\delta\phi = ig\vec{C} \cdot \vec{T},$$

esto es,

$$\begin{pmatrix} \delta\phi^+ \\ \frac{\delta h + i\delta\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = ig \begin{pmatrix} cZ_\mu + sC_\gamma & \frac{C^+}{\sqrt{2}} \\ \frac{C^-}{\sqrt{2}} & -cZ_\mu - sC_\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{h+v+i\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (1.77)$$

La Lagrangiana de Faddeev-Popov en función de los eigenestados de masa es:

$$\mathcal{L}_{FP} = \bar{C}^+ \delta F_{W^+} + \bar{C}^- \delta F_{W^-} + \bar{C}_Z \delta F_Z + \bar{C}_\gamma \delta F_\gamma, \quad (1.78)$$

donde

$$\begin{aligned} F_{W^\pm} &= \partial^\mu W_\mu^\pm \mp iM_W \phi^\pm, \\ F_Z &= \partial^\mu Z_\mu - M_Z \eta, \\ F_\gamma &= \partial^\mu A_\mu. \end{aligned} \quad (1.79)$$

En una forma más explícita, la Lagrangiana \mathcal{L}_{FP} se escribe como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FP} &= \bar{C}^+ (\square - M_W^2) C^+ + \bar{C}^- (\square - M_W^2) C^- + \bar{C}_Z (\square - M_Z^2) C_Z + \bar{C}_\gamma \square C_\gamma \\ &+ ig\bar{C}^+ \partial^\mu [W_\mu^+ (cZ_\mu + sC_\gamma) - (cZ_\mu + sA_\mu) C^+] - gM_W \bar{C}^+ [(cZ_\mu + sC_\gamma) \phi^+ \\ &+ \frac{1}{2} C^+ (h + i\eta)] + h.c. + igc\bar{C}_Z \partial^\mu [W_\mu^- C^+ - W_\mu^+ C^-] + igs\bar{C}_\gamma \partial^\mu [W_\mu^- C^+ \\ &- W_\mu^+ C^-] - igM_Z \bar{C}_Z (cZ_\mu + sC_\gamma) \eta. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Hasta aquí se revisaron las componentes de la Lagrangiana del Modelo Estándar. A continuación nos enfocamos en las matrices de mezcla, de particular interés para el desarrollo del tema de investigación de esta tesis.

1.6. Matriz de Mezclas CKM

En esta sección se revisan las propiedades de la matriz de mezclas de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa, V_{CKM} , la cual produce la mezcla entre los quarks y permite el cambio de sabor en las corrientes cargadas, como se muestra en la figura 1.8. Antes de entrar de lleno en la discusión de las propiedades de la CKM, es conveniente mencionar cómo obtener el número mínimo de parámetros independientes necesarios para construir una matriz de mezclas. Para esto se considera el caso general de una corriente cargada en la cual n α -quarks son transformados en n k -quarks [10]. En dicha corriente cargada, la matriz de mezclas de las n familias de quarks se

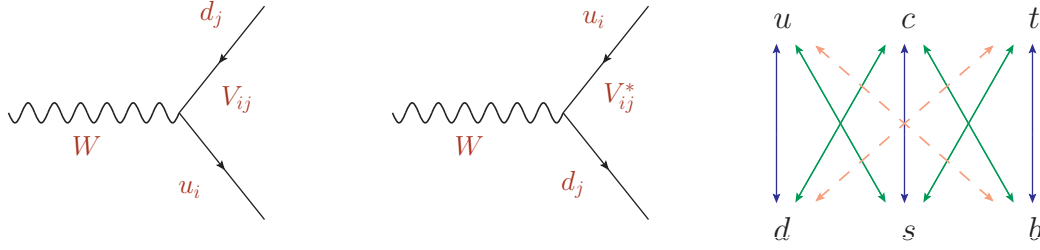


Figura 1.8: Transiciones que cambian el sabor a través de los acoplamientos de corrientes cargadas con los bosones W^\pm

denota por U y es una matriz unitaria de $n \times n$. El número de parámetros reales en U es $2n^2$. La condición de unitariedad $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}$, la cual es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\sum_i^n U_{ij} U_{ik}^* = \delta_{jk} \quad \text{y} \quad \sum_j^n U_{ij} U_{kj}^* = \delta_{ik}, \quad (1.81)$$

reduce el número de parámetros reales de $2n^2$ a tan solo n^2 . De hecho, se tienen n condiciones del tipo $\sum_i^n |U_{ik}|^2 = 1$ sobre la diagonal, así como $\frac{1}{2}n(n-1)$ condiciones del tipo $\sum_i^n \Re\{U_{ij}U_{ik}^*\} = 0$ y $\frac{1}{2}n(n-1)$ condiciones del tipo $\sum_i^n \Im\{U_{ij}U_{ik}^*\} = 0$ fuera de ella.

A los n^2 parámetros reales restantes se les sustraen $2n-1$ fases no físicas, las cuales pueden ser extraídas de la matriz de mezclas U por medio de la redefinición, o “rotación”, de las fases de los n α -quarks y los $(n-1)$ k -quarks. Esta redefinición de los campos de los quarks se lleva a cabo a través de una transformación de refasamiento de los campos de los quarks [14, 15],

$$q_i \rightarrow q'_i = e^{i\chi_i^q} q_i, \quad (1.82)$$

donde las magnitudes de los elementos de la matriz de mezclas $|U_{ij}|$ son invariantes; sin embargo, las fases de los elementos de la matriz de mezclas cambian de acuerdo a

$$U_{ij} \rightarrow U'_{ij} = e^{-i\chi_i^{\alpha\text{-quark}}} U_{ij} e^{i\chi_j^{k\text{-quark}}}. \quad (1.83)$$

El número total de fases no físicas es $2n-1$, y no $2n$, ya que uno de los elementos de U no puede ser rotado. A continuación se ilustra que este elemento “no-rotado”, denotado por X , es la intersección del renglón y la columna que se tomó como “eje de rotación”:

$$U = \begin{pmatrix} \cdots & * & * & X & * & * & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & * & \vdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & * & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (1.84)$$

Por lo tanto, el número mínimo de parámetros independientes, o físicos, necesarios para construir la matriz unitaria U es igual a:

$$n^2 - (2n-1) = (n-1)^2. \quad (1.85)$$

Ahora, de estos $(n-1)^2$ parámetros independientes, se pueden tomar $\frac{1}{2}n(n-1)$ parámetros para definir los ángulos de una matriz ortogonal de $n \times n$ [9, 15]; esta última cantidad de parámetros se deduce fácilmente de ver cuántos ángulos hay en un espacio euclidiano de n -dimensiones. La cantidad de ángulos resulta ser las combinaciones de los n ejes tomados de 2 en 2, es decir,

$$n_{\theta's} = C_2^n = \frac{1}{2}n(n-1). \quad (1.86)$$

Así, el número final de fases físicas en una matriz unitaria U de $n \times n$ es:

$$n_{\phi's} = n^2 - (2n-1) - \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2). \quad (1.87)$$

A continuación se muestran tres ejemplos sencillos donde se encuentran los números de fases y ángulos necesarios para construir la matriz de mezclas U :

Dimensión de U	Número de fases $n_{\phi's}$	Número de ángulos $n_{\theta's}$
2×2	0	1
3×3	1	3
4×4	3	6

Para el caso de tres familias de quarks, la matriz de mezclas U es la matriz V_{CKM} , la cual es una matriz unitaria con elementos complejos, por lo tanto cumple la condición:

$$V_{CKM}V_{CKM}^\dagger = V_{CKM}^\dagger V_{CKM} = \mathbb{I}, \quad (1.88)$$

y puede ser parametrizada con tres ángulos de mezcla y una fase. Esta última es asociada con la violación de CP en el Modelo Estándar Electrodébil.

La definición de la matriz de mezclas no es única:

- Al definir la matriz de mezclas tenemos la libertad de permutar las familias de los quarks de acuerdo con la magnitud de sus masas en orden creciente,

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}. \quad (1.89)$$

- Es costumbre utilizar la definición de la matriz de mezclas de los quarks que acopla campos de quarks tipo d con diferentes sabores en la representación de las masas (d, s, b) mediante

$$\begin{pmatrix} d^I \\ s^I \\ b^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}; \quad (1.90)$$

si se intercambian los quarks tipo-up por los quarks tipo-down y viceversa, la matriz de mezclas conecta los estados (u^I, c^I, t^I) y los correspondientes eigenestados de masa (u, c, t) . Esta propiedad es la libertad que se tiene para elegir los quarks up o down para definir la matriz de mezcla.

- La matriz de masas diagonal $M_{u(d)}^{diag}$ es invariante, bajo una transformación de refasamiento de los campos de los quarks [14, 15],

$$q_i \rightarrow q'_i = e^{i\chi_i^q} q_i. \quad (1.91)$$

Las magnitudes de los elementos de la matriz de mezclas $|V_{ij}|$ son invariantes; sin embargo, las fases de los elementos de la matriz de mezclas cambian como

$$V_{ij} \rightarrow V'_{ij} = e^{-i\chi_i^u} V_{ij} e^{i\chi_j^d}. \quad (1.92)$$

1.6.1. Triángulos Unitarios

La unitariedad de la matriz de mezclas de los quarks, V_{CKM} , evita que en las corrientes neutras exista cambio de sabor, mecanismo GIM. Además, permite dar una descripción gráfica del fenómeno de la mezcla del sabor. Entonces, a partir del sistema de ecuaciones (1.81) con $n = 3$, se obtienen nueve condiciones de unitariedad; tres están compuestas por números reales y tienen la forma:

$$|V_{k1}|^2 + |V_{k2}|^2 + |V_{k3}|^2 = |V_{1k}|^2 + |V_{2k}|^2 + |V_{3k}|^2 = 1, \quad \text{con } k = 1, 2, 3. \quad (1.93)$$

Las condiciones de ortogonalidad restantes, $j \neq k$, con $j, k=1, 2, 3$

$$i) V_{1j}^* V_{1k} + V_{2j}^* V_{2k} + V_{3j}^* V_{3k} = 0, \quad (1.94)$$

$$ii) V_{j1} V_{k1}^* + V_{j2} V_{k2}^* + V_{j3} V_{k3}^* = 0,$$

son seis números complejos, los cuales pueden localizarse fácilmente en la matriz unitaria, tal como se muestra enseguida [15]:

$$\begin{aligned}
 & i) \left(\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\quad} & & \\ \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} & \square & \\ \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} & \square & \\ \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} & \square & \end{array} \right), & \left(\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\quad} & & \\ \begin{bmatrix} \blacksquare & \square & \blacksquare \end{bmatrix} & & \\ \begin{bmatrix} \blacksquare & \square & \blacksquare \end{bmatrix} & & \\ \begin{bmatrix} \blacksquare & \square & \blacksquare \end{bmatrix} & & \end{array} \right), & \left(\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\quad} & & \\ \square & \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} & \\ \square & \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} & \\ \square & \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} & \end{array} \right), \\
 & \quad (a) \quad \quad \quad (b) \quad \quad \quad (c) \\
 & ii) \downarrow \left(\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} & & \\ \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} & & \\ \square & \square & \square \end{array} \right), \downarrow \left(\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} & & \\ \square & \square & \square & & \\ \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} & & \end{array} \right), \downarrow \left(\begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} & & \\ \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} & & \end{array} \right), \\
 & \quad \quad \quad (d) \quad \quad \quad (e) \quad \quad \quad (f)
 \end{aligned} \quad (1.95)$$

donde las flechas indican el orden, horizontal o vertical, en el cual se multiplican dos de los elementos de la matriz, con el segundo elemento tomado complejo conjugado en cada producto, así se obtienen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
 & (a) V_{11} V_{12}^* + V_{21} V_{22}^* + V_{31} V_{32}^* = 0, \quad (d) V_{21} V_{11}^* + V_{22} V_{12}^* + V_{23} V_{13}^* = 0, \\
 & (b) V_{11} V_{13}^* + V_{21} V_{23}^* + V_{31} V_{33}^* = 0, \quad (e) V_{31} V_{11}^* + V_{32} V_{12}^* + V_{33} V_{13}^* = 0, \\
 & (c) V_{12} V_{13}^* + V_{22} V_{23}^* + V_{32} V_{33}^* = 0, \quad (f) V_{31} V_{21}^* + V_{32} V_{22}^* + V_{33} V_{23}^* = 0.
 \end{aligned} \quad (1.96)$$

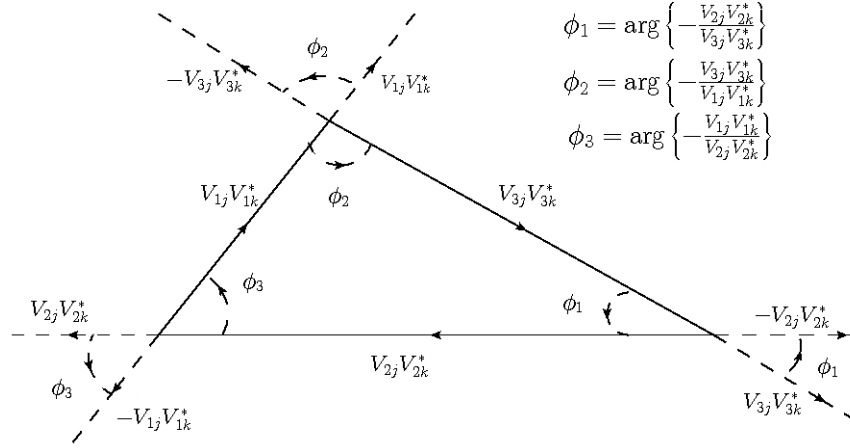


Figura 1.9: Triángulo unitario en el plano complejo y sus ángulos internos escritos en términos de sus lados

Estas seis condiciones de ortogonalidad sobre los elementos de la matriz de mezclas son conocidas como triángulos unitarios, ya que cada una se puede representar gráficamente a través de un triángulo en el plano complejo, tal como se ilustra en la figura 1.9. De los seis triángulos unitarios que se pueden construir, las condiciones de unitariedad permiten eliminar a tres de ellos. Por consiguiente, sólo tres triángulos son independientes entre sí y se pueden obtener a partir de la relación:

$$V_{1j}V_{1k}^* + V_{2j}V_{2k}^* + V_{3j}V_{3k}^* = 0, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad j \neq k \quad (1.97)$$

Si se conocen los tres lados de cada triángulo unitario definido en la ec. (1.97), se pueden conocer los ángulos internos correspondientes, los cuales se definen, en general, como

$$\phi_1 \equiv \arg\left\{-\frac{V_{2j}V_{2k}^*}{V_{3j}V_{3k}^*}\right\}, \quad \phi_2 \equiv \arg\left\{-\frac{V_{3j}V_{3k}^*}{V_{1j}V_{1k}^*}\right\}, \quad \phi_3 \equiv \arg\left\{-\frac{V_{1j}V_{1k}^*}{V_{2j}V_{2k}^*}\right\}. \quad (1.98)$$

La asignación de estos se muestran en la figura 1.9. Así, cada una de las condiciones de unitariedad se puede expresar como una relación de la forma $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \pi$. Si alguno de estos ángulos fuera cero, el correspondiente triángulo unitario se colapsaría a una línea en el plano complejo.

Al tomar la definición de la matriz de mezclas CKM dada en la ec. (1.89), los tres triángulos unitarios independientes que se obtienen de la ec. (1.97) son los siguientes:

- El triángulo formado por la condición de ortogonalidad entre las columnas uno y dos, ec. (1.96 a), tiene la expresión

$$V_{ud}V_{us}^* + V_{cd}V_{cs}^* + V_{td}V_{ts}^* = 0 \quad (1.99)$$

está asociado a la física del mesón K . Por ejemplo, los decaimientos semileptónicos $K^\pm \rightarrow \pi^\pm l^+ l^-$ [17].

- El triángulo formado por la condición de ortogonalidad entre las columnas dos y tres, ec. (1.96 c), tiene la expresión

$$V_{us}V_{ub}^* + V_{cs}V_{cb}^* + V_{ts}V_{tb}^* = 0. \quad (1.100)$$

- El triángulo formado por la condición de ortogonalidad entre las columnas uno y tres ec. (1.96b), tiene la expresión

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0 \quad (1.101)$$

está asociado con las propiedades físicas del mesón B . Por ejemplo, la cadena de decaimiento $B^\pm \rightarrow DK^\pm$, $D \rightarrow K_s^0 \pi^+ \pi^-$ [18].

Por otra parte, los ángulos internos del triángulo unitario asociado al mesón B se pueden medir directamente de varios de sus modos de decaimiento que violan CP. Los ángulos internos son invariantes bajo una redefinición de las fases de los quarks, así que son observables que tienen la propiedad de ser invariantes de fase. Estos ángulos internos se expresan en términos de las entradas de la matriz CKM como [11]:

$$\alpha \equiv \arg \left\{ -\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{ud}V_{ub}^*} \right\}, \quad \beta \equiv \arg \left\{ -\frac{V_{cd}V_{cb}^*}{V_{td}V_{tb}^*} \right\}, \quad \gamma \equiv \arg \left\{ -\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} \right\}. \quad (1.102)$$

Es de utilidad reescalar el triángulo unitario asociado al mesón B , al dividir la ec. (1.101) por $V_{cd}V_{cb}^*$ se obtiene [11]:

$$\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} \equiv \bar{\rho} + i\bar{\eta} = \sqrt{\bar{\rho}^2 + \bar{\eta}^2} e^{i\gamma}, \quad \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} \equiv 1 - \bar{\rho} + i\bar{\eta} = \sqrt{(1 - \bar{\rho})^2 + \bar{\eta}^2} e^{i\beta}, \quad (1.103)$$

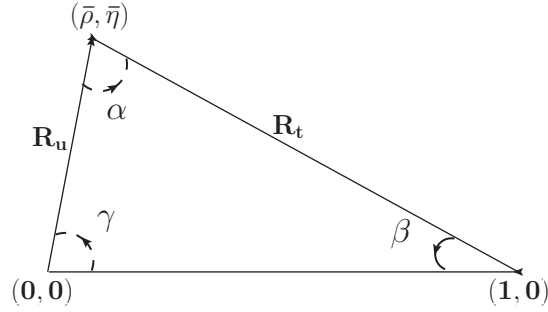
donde resulta el triángulo unitario con un lado de longitud 1 (ver figura 1.10) y los otros dos, R_t y R_u , dados por

$$R_t \equiv \left| \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} \right| = \sqrt{(1 - \bar{\rho})^2 + \bar{\eta}^2}, \quad R_u \equiv \left| \frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} \right| = \sqrt{\bar{\rho}^2 + \bar{\eta}^2}. \quad (1.104)$$

Los ángulos internos del triángulo unitario α y γ siguen expresándose como en la expresión ec.(1.102), pero el ángulo β en términos de los nuevos parámetros queda de la forma:

$$\sin(2\beta) = \frac{2(1 - \bar{\rho})\bar{\eta}}{(1 - \bar{\rho})^2 + \bar{\eta}^2}. \quad (1.105)$$

Si cualquiera de los ángulos internos se anula, no hay violación de CP en Modelo Estándar y el triángulo unitario correspondiente se colapsa a una línea. Así, otra medida de la violación de CP en la naturaleza se obtiene para un valor diferente de cero de estos ángulos y del área de los triángulos unitarios.

Figura 1.10: *Triángulo unitario reescalado.*

1.6.2. Invariante de Jarlskog

El invariante de Jarlskog tiene que ser diferente de cero para que exista la violación de CP en el Modelo Estándar. Además está relacionado con el área de los triángulos unitarios como se verá a enseguida. A cada triángulo unitario obtenido de las condiciones de ortogonalidad dadas en la ec. (1.97) se le asocia una medida del área, denotada por J_{ij} ; la propiedad más importante es que todos los triángulos de la matriz de mezclas de los quarks tienen la misma área,

$$|J| = |J_{ij}| = 2A. \quad (1.106)$$

El área del triángulo unitario se puede determinar a través del producto vectorial de dos cualesquiera de sus lados (ver figura 1.9); así, el área está dada por:

$$2A = |(V_{1j}V_{1k}^*) \times (V_{2j}V_{2k}^*)| = \left| \det \begin{pmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \Re \{V_{1j}V_{1k}^*\} & \Im \{V_{1j}V_{1k}^*\} & 0 \\ \Re \{V_{2j}V_{2k}^*\} & \Im \{V_{2j}V_{2k}^*\} & 0 \end{pmatrix} \right| \quad (1.107)$$

$$= |\Re \{V_{1j}V_{1k}^*\} \Im \{V_{2j}V_{2k}^*\} - \Im \{V_{2j}V_{2k}^*\} \Re \{V_{2j}V_{2k}^*\}|.$$

Al observar el resultado del producto vectorial se concluye que $2A$ no es más que la parte imaginaria del producto $(V_{1j}V_{1k}^*)(V_{2j}V_{2k}^*)$, por consiguiente de la ec. (1.106) se tiene que

$$|J| = 2A = \Im \{V_{1j}V_{1k}^*V_{2j}V_{2k}^*\}. \quad (1.108)$$

En cada triángulo unitario hay tres productos vectoriales similares al producto de la ec. (1.106); $|(V_{1j}V_{1k}^*) \times (V_{2j}V_{2k}^*)|$, $|(V_{1j}V_{1k}^*) \times (V_{3j}V_{3k}^*)|$ y $|(V_{2j}V_{2k}^*) \times (V_{3j}V_{3k}^*)|$, los cuales dan como resultado la misma área. La afirmación anterior se muestra a continuación: se multiplica a la ec. (1.97) por el complejo conjugado del primer sumando, y al tomar la parte imaginaria se obtiene:

$$\Im \{V_{1j}V_{2k}V_{1k}^*V_{2j}^*\} = \Im \{V_{1k}V_{3j}V_{1j}^*V_{3k}^*\}. \quad (1.109)$$

Procediendo en forma análoga, multiplicando a ec. (1.97) por el complejo conjugado del segundo y después por el complejo conjugado del tercer sumando, se obtiene:

$$\Im \{V_{2j}V_{1k}V_{2k}^*V_{1j}^*\} = \Im \{V_{2k}V_{3j}V_{2j}^*V_{3k}^*\} \quad (1.110)$$

y

$$\Im \{V_{3j}V_{1k}V_{3k}^*V_{1j}^*\} = \Im \{V_{3k}V_{2j}V_{3j}^*V_{2k}^*\}, \quad (1.111)$$

respectivamente. Entonces, de las ecs. (1.109)-(1.111) se concluye que:

$$|\Im \{V_{1j}V_{2k}V_{1k}^*V_{2j}^*\}| = |\Im \{V_{1k}V_{3j}V_{1j}^*V_{3k}^*\}| = |\Im \{V_{3k}V_{2j}V_{3j}^*V_{2k}^*\}|, \quad (1.112)$$

con $j \neq k$. Por lo tanto, los seis triángulos unitarios tienen la misma área, como se había anticipado.

En general, el área de los triángulos unitarios se puede expresar como

$$J \sum_{\gamma,l}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{jkl} = 2A \sum_{\gamma,l}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{jkl} = \Im \{V_{\alpha j}V_{\beta k}V_{\alpha k}^*V_{\beta j}^*\}, \quad (1.113)$$

donde J es conocido como el invariante de Jarlskog. Además, se puede deducir que J distinto de cero es una condición suficiente y necesaria para que ocurra la violación de CP en el Modelo Estándar con tres generaciones de quarks. En otras palabras, el invariante de Jarlskog mide la violación de CP y su signo depende de la dirección de los vectores complejos que forman los triángulos unitarios. Una característica importante de los triángulos unitarios es que pueden ser rotados en el plano complejo si se multiplican por un factor de fase, el cual deja invariante su forma, esto tiene como consecuencia que la matriz unitaria es independiente de la parametrización.

1.6.3. Parametrización de la Matriz CKM

La matriz de mezcla del sabor de 3×3 , V_{CKM} , puede ser expresada en términos de cuatro parámetros independientes, los cuales son usualmente tomados como tres ángulos de rotación y una fase asociada a la violación de CP. En la literatura hay diversas parametrizaciones de la matriz de mezclas de los quarks que difieren de la forma original propuesta por Kobayashi y Maskawa [19]. Adoptar una parametrización específica por supuesto es, de alguna manera, algo arbitrario, ya que desde un punto de vista matemático las diferentes parametrizaciones son equivalentes. Sin embargo, es muy probable que la física subyacente responsable de la mezcla de sabor y la violación de CP, sea más transparente en una parametrización particular que en las otras. Por esta razón, las parametrizaciones ángulo-fase propuestas por Kobayashi y Maskawa [19], L-L Chau y W-Y Keung [20] y Fritzsche y Xing [21], así como la parametrización de Wolfenstein son las más usadas en la literatura.

La parametrización de Kobayashi y Maskawa involucra los tres ángulos; θ_1 , θ_2 , θ_3 y la fase δ . La expresión de la matriz de mezcla es como sigue [19]

$$\mathbf{V}^{KM} = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 c_3 & -s_1 s_3 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}, \quad (1.114)$$

en la que $c_i = \cos \theta_i$ y $s_i = \sin \theta_i$ para $i = 1, 2, 3$. En el límite $\theta_2 = \theta_3 = 0$, esta expresión se reduce a la mezcla usual de Cabibbo, con θ_1 identificado como el ángulo de Cabibbo hasta un signo [22].

La parametrización estándar del PDG, propuesta originalmente por L-L Chau y W-Y Keung, utiliza los ángulos θ_{12} , θ_{23} , θ_{13} y una fase δ_{13} , así [20]

$$\mathbf{V}^{\text{PDG}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (1.115)$$

en donde $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ y $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$. Los subíndices $i, j = 1, 2, 3$ representan cada una de las tres generaciones de quarks. En esta matriz los ángulos θ_{12} , θ_{23} y θ_{13} se encuentran ubicados en el primer cuadrante, mientras que la fase δ_{13} puede estar en cualquier cuadrante, pero debe ser diferente de cero para asegurar la violación de CP. La ventaja de esta parametrización es que las generaciones $i, j = 1, 2, 3$ son introducidas, de tal forma, que la mezcla entre dos generaciones se cancela si el correspondiente ángulo de mezcla θ_{ij} es igual a cero. En particular, para $\theta_{23} = \theta_{13} = 0$, la tercera generación se desacopla y la situación se reduce a la matriz de Cabibbo para dos generaciones. La fase δ_{13} está en el rango de $0 \leq \delta_{13} < 2\pi$, con valores diferentes de cero generalmente rompiendo la invariancia CP para las interacciones débiles.

La parametrización propuesta por Fritzsche y Xing esta inspirada por la estructura jerárquica del espectro de masas de los quarks, y es particularmente útil en el contexto de modelos para masas y mezclas de los fermiones. En esta parametrización se utilizan los ángulos θ_u , θ_d , θ y una fase ϕ , y la matriz de mezcla es [21]

$$\mathbf{V}^{\text{FX}} = \begin{pmatrix} s_u s_d c + c_u c_d e^{-i\phi} & s_u c_d c - c_u s_d e^{-i\phi} & s_u s \\ c_u s_d c - s_u c_d e^{-i\phi} & c_u c_d c + s_u s_d e^{-i\phi} & c_u s \\ -s_d s & -c_d s & c \end{pmatrix}. \quad (1.116)$$

En esta parametrización, los tres ángulos θ_u , θ_d y θ tienen un significado físico preciso. El ángulo θ describe la mezcla entre la segunda y la tercera familia, el ángulo θ_u describe la mezcla $u - c$, el ángulo θ_d describe la mezcla $d - s$; la fase ϕ puede tomar valores de $0 - 2\pi$, y es la fase asociada con la violación de CP.

Para dar una clasificación de todas las posibles parametrizaciones ángulo-fase linealmente independientes (tres ángulos y una fase) [23]. Se parte del supuesto que la matriz CKM es real y ortogonal, entonces se puede escribirse como un producto de tres matrices R_{12} , R_{23} y R_{31} , las cuales son simples rotaciones en los planos (1, 2), (2, 3) y (3, 1), respectivamente, esto se ilustra en la figura 1.11. Explícitamente, estas matrices están dadas como sigue:

$$\begin{array}{ccc} R_{12}(\theta_{12}) & R_{23}(\theta_{23}) & R_{31}(\theta_{13}) \\ \hline \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \end{array} \quad (1.117)$$

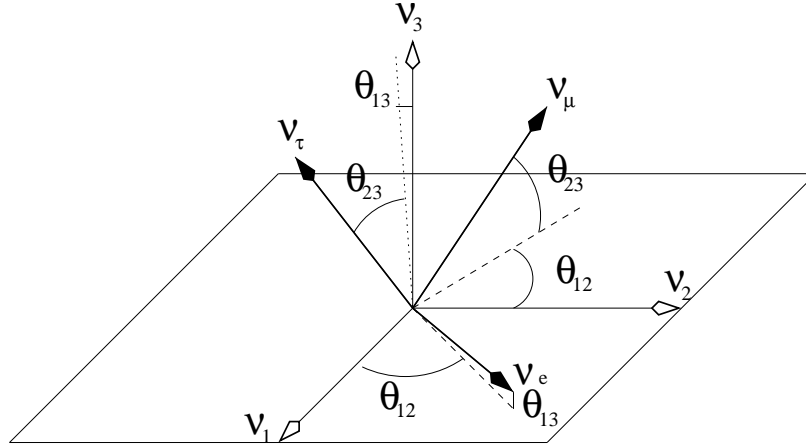


Figura 1.11: Relación entre la base de eigenestados de sabor y la base de eigenestados de masa, en términos de los tres ángulos de rotación θ_{12} , θ_{23} y θ_{13} . Haciendo caso omiso de las fases, estos son sólo los ángulos de Euler representando la rotación de una base ortogonal a otra.

donde $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$.

Después de introducir la fase de violación de CP, ϕ , de los doce productos posibles sólo nueve son estructuralmente diferentes, ya que los otros tres están correlacionados entre sí y conducen esencialmente a la misma forma. Por ejemplo, para construir la parametrización estándar de la ec. (1.115) incluyendo la fase asociada a la violación de CP, las matrices de rotación de la ec. (1.117) se reescriben para expresar \mathbf{V}^{PDG} como $\mathbf{V}^{\text{PDG}} = R_{23}(\theta_{23}) R_{31}(\theta_{13}, \phi) R_{12}(\theta_{12})$, forma explícita se tiene

$$\mathbf{V}^{\text{PDG}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\phi} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\phi} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.118)$$

En general, las formas específicas de las nueve posibles parametrizaciones ángulo-fase, se enumeran en la columna de la izquierda de la tabla 1.5 como $P_1 - P_9$. Las parametrizaciones $P_1 - P_3$ generalmente corresponden a: P_1 a la parametrización estándar, P_2 a la parametrización de Fritzsche-Xing y P_3 a la parametrización de Kobayashi-Maskawa.

Una parametrización derivada de la parametrización estándar es la de Wolfenstein, la cual es una aproximación que pone énfasis en la jerarquía de las magnitudes de los ángulos de mezcla, $s_{12} \gg s_{23} \gg s_{13}$ [24]; en esta parametrización se define $\lambda \equiv s_{12}$, por consiguiente λ es el seno del ángulo de Cabibbo y se escriben los elementos restantes como potencias de λ , omitiendo los

Parametrización	Ángulos de Mezclas
$P_1: V^{P_1} = R_{23}(\theta_{23}) R_{31}(\theta_{13}, \phi) R_{12}(\theta_{12})$ $\begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\phi} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\phi} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\phi} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\phi} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\phi} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$	$\sin\theta_{13} = V_{13} , \quad \sin\theta_{12} = \frac{ V_{12} }{\sqrt{1- V_{13} ^2}}$ $\sin\theta_{23} = \frac{ V_{23} }{\sqrt{1- V_{13} ^2}}$
$P_2: V^{P_2} = R_{12}(\theta_u) R_{23}(\theta, \phi) R_{12}^{-1}(\theta_d)$ $\begin{pmatrix} s_u s_d c + c_u c_d e^{-i\phi} & s_u c_d c - c_u s_d e^{-i\phi} & s_u s \\ c_u s_d c - s_u c_d e^{-i\phi} & c_u c_d c + s_u s_d e^{-i\phi} & c_u s \\ -s_d s & -c_d s & c \end{pmatrix}$	$\cos\theta = V_{33} , \quad \sin\theta_d = \frac{ V_{31} }{\sqrt{1- V_{33} ^2}}$ $\sin\theta_u = \frac{ V_{13} }{\sqrt{1- V_{33} ^2}}$
$P_3: V^{P_3} = R_{23}(\theta_2) R_{23}(\theta_1, \phi) R_{23}^{-1}(\theta_3)$ $\begin{pmatrix} c_1 & -s_1 c_3 & -s_1 s_3 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\phi} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\phi} \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\phi} & c_1 c_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\phi} \end{pmatrix}$	$\cos\theta_1 = V_{11} , \quad \sin\theta_2 = \frac{ V_{31} }{\sqrt{1- V_{11} ^2}}$ $\sin\theta_3 = \frac{ V_{13} }{\sqrt{1- V_{11} ^2}}$
$P_4: V^{P_4} = R_{23}(\theta_d) R_{12}(\theta, \phi) R_{31}^{-1}(\theta_u)$ $\begin{pmatrix} c_\theta c_u & s_\theta & -c_\theta s_u \\ -s_\theta c_d c_u + s_d s_u e^{-i\phi} & c_\theta c_d & s_\theta c_d s_u + s_d c_u e^{-i\phi} \\ s_\theta s_d c_u + c_d s_u e^{-i\phi} & -c_\theta s_d & -s_\theta s_d s_u + c_d c_u e^{-i\phi} \end{pmatrix}$	$\sin\theta = V_{12} , \quad \sin\theta_u = \frac{ V_{13} }{\sqrt{1- V_{12} ^2}}$ $\sin\theta_d = \frac{ V_{32} }{\sqrt{1- V_{12} ^2}}$
$P_5: V^{P_5} = R_{31}(\theta_d) R_{23}(\theta_u, \phi) R_{12}^{-1}(\theta)$ $\begin{pmatrix} -s_\theta s_d s_u + c_\theta c_u e^{-i\phi} & -c_\theta s_d s_u - s_\theta c_u e^{-i\phi} & c_d s_u \\ s_\theta c_d & c_\theta c_d & s_d \\ -s_\theta s_d c_u - c_\theta s_u e^{-i\phi} & -c_\theta s_d c_u + s_\theta s_u e^{-i\phi} & c_d c_u \end{pmatrix}$	$\sin\theta_d = V_{23} , \quad \sin\theta_u = \frac{ V_{13} }{\sqrt{1- V_{23} ^2}}$ $\sin\theta = \frac{ V_{21} }{\sqrt{1- V_{23} ^2}}$
$P_6: V^{P_6} = R_{12}(\theta) R_{31}(\theta_u, \phi) R_{23}^{-1}(\theta_d)$ $\begin{pmatrix} c_\theta c_u & c_\theta s_d s_u + s_\theta c_d e^{-i\phi} & c_\theta c_d s_u - s_\theta s_d e^{-i\phi} \\ -s_\theta c_u & -s_\theta s_d s_u + c_\theta c_d e^{-i\phi} & -s_\theta c_d s_u - c_\theta c_d e^{-i\phi} \\ -s_u & s_d c_u & c_d c_u \end{pmatrix}$	$\sin\theta_u = V_{31} , \quad \sin\theta_d = \frac{ V_{32} }{\sqrt{1- V_{31} ^2}}$ $\sin\theta = \frac{ V_{21} }{\sqrt{1- V_{31} ^2}}$
$P_7: V^{P_7} = R_{31}(\theta_u) R_{12}(\theta, \phi) R_{31}^{-1}(\theta_d)$ $\begin{pmatrix} c_\theta c_u c_d + s_u s_d e^{-i\phi} & s_\theta c_u & -c_\theta c_u s_d + s_u c_d e^{-i\phi} \\ -s_\theta c_d & c_\theta & s_\theta s_d \\ -c_\theta s_u c_d + c_u s_d e^{-i\phi} & -s_\theta s_u & c_\theta s_u s_d + c_u c_d e^{-i\phi} \end{pmatrix}$	$\cos\theta = V_{22} , \quad \sin\theta_d = \frac{ V_{23} }{\sqrt{1- V_{22} ^2}}$ $\sin\theta_u = \frac{ V_{32} }{\sqrt{1- V_{22} ^2}}$
$P_8: V^{P_8} = R_{12}(\theta) R_{23}(\theta_d, \phi) R_{31}(\theta_u)$ $\begin{pmatrix} -s_\theta s_d s_u + c_\theta c_u e^{-i\phi} & s_\theta c_d & s_\theta s_d c_u + c_\theta s_u e^{-i\phi} \\ -c_\theta s_d s_u - s_\theta c_u e^{-i\phi} & c_\theta c_d & c_\theta s_d c_u - s_\theta s_u e^{-i\phi} \\ -c_d s_u & -s_d & c_d c_u \end{pmatrix}$	$\sin\theta_d = V_{32} , \quad \sin\theta = \frac{ V_{12} }{\sqrt{1- V_{32} ^2}}$ $\sin\theta_u = \frac{ V_{31} }{\sqrt{1- V_{32} ^2}}$
$P_9: V^{P_9} = R_{31}(\theta_u) R_{12}(\theta, \phi) R_{23}(\theta_d)$ $\begin{pmatrix} c_\theta c_u & s_\theta c_d c_u - s_d s_u e^{-i\phi} & s_\theta s_d c_u + c_d s_u e^{-i\phi} \\ -s_\theta & c_\theta c_d & c_\theta s_d \\ -c_\theta s_u & -s_\theta c_d s_u - s_d c_u e^{-i\phi} & -s_\theta s_d s_u + c_d c_u e^{-i\phi} \end{pmatrix}$	$\sin\theta = V_{21} , \quad \sin\theta_u = \frac{ V_{31} }{\sqrt{1- V_{21} ^2}}$ $\sin\theta_d = \frac{ V_{23} }{\sqrt{1- V_{21} ^2}}$

Cuadro 1.5: Clasificación de las diferentes parametrizaciones ángulo-fase para la matriz de mezcla de sabor y los ángulos de mezcla de los quarks, en función de las magnitudes de los elementos de la matriz.

términos de orden superior a λ^3 , con lo que se obtiene

$$\mathbf{V}^{\text{LW}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (1.119)$$

La relación entre los parámetros de Wolfenstein y la parametrización estándar está dada por las relaciones

$$\sin \theta_{12} = \lambda, \quad \sin \theta_{23} = A\lambda^2, \quad \sin \theta_{13} e^{-i\delta_{13}} = A\lambda^3(\rho - i\eta). \quad (1.120)$$

Esta transformación determina los términos de la expansión en λ . Así se obtiene que

$$\rho = \frac{\sin \theta_{13}}{\sin \theta_{12} \sin \theta_{23}} \cos \delta_{13}, \quad \eta = \frac{\sin \theta_{13}}{\sin \theta_{12} \sin \theta_{23}} \sin \delta_{13}. \quad (1.121)$$

Aunque la parametrización de Wolfenstein es aproximada es más transparente que la parametrización estándar ya que ofrece, junto con el triángulo unitario, una representación geométrica de la estructura de la matriz de mezclas de los quarks, la cual es fácil de interpretar. Sin embargo, si se requiere un nivel de precisión mucho mayor que los errores experimentales, se deben incluir los términos de orden mayor en λ .

Hasta aquí se revisaron las parametrizaciones de la matriz de mezclas *CKM* más usadas en la literatura. A continuación se mostrara que en las parametrizaciones ángulo-fase existen relaciones muy simples entre los ángulos y los observables físicos.

Ángulos de Mezclas

Las cantidades medibles de la matriz de mezclas del sabor V que son invariantes bajo el refasamiento de los campos de los quarks (ver ec. (1.91)) son las magnitudes de sus elementos, es decir, las cantidades $|V_{ij}|$. En el caso de tres familias, V puede ser parametrizada en términos de tres ángulos de mezclas y una fase asociada a la violación de CP. Así, al determinar la magnitud de cada uno de los elementos de la matriz de mezclas, se pueden expresar los ángulos de mezcla en función de las observables físicas $|V_{ij}|$. En particular, si la matriz V está escrita en la parametrización estándar $P_1 = V^{P_1} = V^{PDG}$, ec. (1.115), las magnitudes de los elementos de la matriz de mezclas son:

$$\begin{aligned} |V_{11}^{PDG}|^2 &= c_{12}^2 c_{13}^2, & |V_{12}^{PDG}|^2 &= s_{12}^2 c_{13}^2, & |V_{13}^{PDG}|^2 &= s_{13}^2, & |V_{23}^{PDG}|^2 &= s_{23}^2 c_{13}^2, \\ |V_{33}^{PDG}|^2 &= c_{23}^2 c_{13}^2, & |V_{21}^{PDG}|^2 &= s_{12}^2 c_{23}^2 + c_{12}^2 s_{23}^2 s_{13}^2 + 2s_{12} c_{23} c_{12} s_{23} s_{13} \cos \delta_{13}, \\ |V_{22}^{PDG}|^2 &= c_{12}^2 c_{23}^2 + s_{12}^2 s_{23}^2 s_{13}^2 - 2c_{12} c_{23} s_{12} s_{23} s_{13} \cos \delta_{13}, & & & & & (1.122) \\ |V_{31}^{PDG}|^2 &= s_{12}^2 s_{23}^2 + c_{12}^2 c_{23}^2 s_{13}^2 - 2s_{12} s_{23} c_{12} c_{23} s_{13} \cos \delta_{13}, \\ |V_{32}^{PDG}|^2 &= c_{12}^2 s_{23}^2 + s_{12}^2 c_{23}^2 s_{13}^2 + 2c_{12} s_{23} s_{12} c_{23} s_{13} \cos \delta_{13}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los ángulos de mezcla θ_{13} , θ_{23} y θ_{12} están relacionados con las magnitudes observables de la matriz V^{PDG} , a través de las ecuaciones:

$$\sin \theta_{13} = |V_{13}^{PDG}|, \quad \sin \theta_{23} = \frac{|V_{23}^{PDG}|}{\sqrt{1 - |V_{13}^{PDG}|^2}}, \quad \sin \theta_{12} = \frac{|V_{12}^{PDG}|}{\sqrt{1 - |V_{13}^{PDG}|^2}}. \quad (1.123)$$

Para las ocho parametrizaciones ángulo-fase restantes, $P_2 - P_9$, en la columna de la derecha del cuadro 1.5 se escriben los ángulos de mezcla en función de las magnitudes de los elementos de la matriz de mezclas.

Equivalencia de Fases entre parametrizaciones

Ahora se encontraran las relaciones funcionales de equivalencia entre distintas parametrizaciones de la matriz de mezclas de los quarks. Desde el punto de vista matemático, dos parametrizaciones diferentes de la matriz unitaria de mezclas de los quarks de 3×3 , las cuales contienen cuatro parámetros independientes convenientemente definidos, son equivalentes si las magnitudes de las entradas correspondientes son iguales. Así en lo subsiguiente, se demostrara que haciendo un refasamiento convenientemente elegido para los campos de los quarks, la matriz de mezclas V^{th} puede cambiar a una forma nueva que se denota como \tilde{V}^{th} tal que todos sus elementos de matriz sean numéricamente iguales a las entradas correspondientes de la parametrización fenomenológica con la que se desea establecer esta equivalencia.

En la base donde las matrices de masas son diagonales, las corrientes cargadas de los quarks toman la forma

$$J_c^\mu = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_{L_i}^u \gamma^\mu V_{ij}^{th} \psi_{L_j}^d. \quad (1.124)$$

Una redefinición de las fases de los campos

$$\psi_i^q \rightarrow \psi_i^{\prime q} = e^{i\chi_i^q} \psi_i^q, \quad (1.125)$$

deja invariante la corriente cargada J_c^μ y las magnitudes $|V_{ij}^{th}|$, pero cambia los argumentos de la matriz de mezclas V_{ij}^{th} . Entonces, bajo la acción de la transformación de la ec. (1.125), las corrientes cargadas de los quarks toman la forma [6]:

$$J_c^\mu = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_{L_i}^u \gamma^\mu \tilde{V}_{ij}^{th} \psi_{L_j}^d, \quad (1.126)$$

donde

$$\tilde{V}_{ij}^c = e^{-i\chi_i^u} V_{ij}^{th} e^{i\chi_j^d}. \quad (1.127)$$

Las fases χ_i^u y χ_j^d pueden ser determinadas a requerir que las correspondientes entradas de \tilde{V}^{th} y V^{P_k} ($k = 1, \dots, 9$) sean iguales, esto es:

$$|V_{ij}^{th}| e^{(w_{ij}^{th} - (\chi_i^u - \chi_j^d))} = |V_{ij}^{P_k}| e^{iw_{ij}^{P_k}}. \quad (1.128)$$

En esta expresión w_{ij}^{th} y $w_{ij}^{P_k}$ son los argumentos de V_{ij}^{th} y $V_{ij}^{P_k}$, respectivamente. Como las magnitudes son iguales, los argumentos de las entradas en ambas parametrizaciones están relacionados por el conjunto de nueve ecuaciones siguiente:

$$w_{ij}^{th} - w_{ij}^{P_k} = \chi_i^u - \chi_j^d, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.129)$$

Este sistema de ecuaciones relaciona las diferencias de fases no observables de los campos de los quarks con las diferencias de los argumentos de las correspondientes entradas en V_{ij}^{th} y $V_{ij}^{P_k}$.

El sistema de ecuaciones de la ec. (1.129) está sobre determinado. En el lado izquierdo hay nueve diferencias de fases no observables formadas a partir de seis fases desconocidas de los campos. Dado que sólo las diferencias de fases pueden ser medidas experimentalmente, las fases mismas se definen únicamente hasta una constante aditiva, la cual se puede fijar definiendo un valor de una de las fases desconocidas. Entonces, en las ecs. (1.129) hay nueve ecuaciones para determinar cinco incógnitas. Esto se puede hacer si se satisface un conjunto de cuatro ecuaciones de consistencia. Las condiciones de consistencia son relaciones no triviales que expresan los argumentos no nulos $w_{ij}^{P_k}$ de $V_{ij}^{P_k}$ en términos únicamente de los argumentos conocidos w_{ij}^{th} de V_{ij}^{th} .

En la parametrización estándar de la matriz de mezclas, $P_1 = V^{P_1} = V^{PDG}$, hay cinco elementos complejos, por lo tanto, en dicha parametrización hay cinco argumentos w_{ij}^{PDG} que no son nulos y tienen la forma:

$$\begin{aligned} w_{13}^{PDG} &\equiv \arg \left\{ V_{13}^{PDG} \right\} = -\delta_{13} \\ w_{21}^{PDG} &\equiv \arg \left\{ V_{21}^{PDG} \right\} = \arctan \left\{ \frac{c_{12}s_{23}s_{13} \sin \delta_{13}}{s_{12}s_{23} + c_{12}s_{23}s_{13} \cos \delta_{13}} \right\}, \\ w_{22}^{PDG} &\equiv \arg \left\{ V_{22}^{PDG} \right\} = \arctan \left\{ \frac{-s_{12}s_{23}s_{13} \sin \delta_{13}}{c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13} \cos \delta_{13}} \right\}, \\ w_{31}^{PDG} &\equiv \arg \left\{ V_{31}^{PDG} \right\} = \arctan \left\{ \frac{-c_{12}c_{23}s_{13} \sin \delta_{13}}{s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13} \cos \delta_{13}} \right\}, \\ w_{32}^{PDG} &\equiv \arg \left\{ V_{32}^{PDG} \right\} = \arctan \left\{ \frac{s_{12}c_{23}s_{13} \sin \delta_{13}}{c_{12}s_{23} + s_{12}c_{23}s_{13} \cos \delta_{13}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.130)$$

El argumento w_{13}^{PDG} se pudo identificar fácilmente, pero los demás argumentos, w_{21}^{PDG} , w_{22}^{PDG} , w_{31}^{PDG} y w_{32}^{PDG} , necesitan una ecuación más para poder ser relacionados con nuestra parametrización teórica. La ec. (1.127) permite relacionar la parametrización estándar con la parametrización teórica, por medio de la relación

$$V^{th} = \chi_u^\dagger V^{PDG} \chi_d, \quad (1.131)$$

donde χ_u y χ_d son matrices diagonales de fases. Entonces, el determinante de la matriz de mezclas V^{th} es:

$$\det \left[V^{th} \right] = \det \left[\chi_u^\dagger V^{PDG} \chi_d \right], \quad (1.132)$$

como el determinante de la matriz de mezclas V^{PDG} es igual a uno, se tiene

$$\det [\chi_u^\dagger V^{PDG} \chi_d] = \det [\chi_u^\dagger \chi_d] = e^{i \sum_i^3 (\chi_i^u - \chi_i^d)}. \quad (1.133)$$

Por otro lado, sin pérdida de generalidad, la matriz de mezclas teórica puede ser escrita como:

$$V^{th} = U_u U_d^\dagger = O_u^T P_u (O_d^T P_d)^\dagger = O_u^T P^{(u-d)} O_d, \quad (1.134)$$

donde $P^{(u-d)} = \text{diag} \{1, e^{i\phi}, e^{i\phi}\}$. El determinante de V^{th} es:

$$\det [V^{th}] = \det [O_u^T P^{(u-d)} O_d], \quad (1.135)$$

y como el determinante de las matrices ortogonales es uno, se obtiene:

$$\det [V^{th}] = \det [P^{(u-d)}] = e^{i2\phi}. \quad (1.136)$$

El determinante de la matriz V^{th} debe ser igual a uno, por lo tanto, el mejor valor posible para la fase es $\phi = \phi^* = \frac{\pi}{2}$,

$$\det [V^{th}] = e^{i2\phi^*} = e^{i\pi}. \quad (1.137)$$

Entonces, de la ec.(1.132) se obtiene:

$$\sum_{i=1}^3 (\chi_i^u - \chi_i^d) = 2\phi^* \quad \text{o} \quad \sum_{i=1}^3 (\chi_i^u - \chi_i^d) = \pi \quad (1.138)$$

Esta relación de fases garantiza la igualdad de los determinantes de las matrices \tilde{V}^{th} y V^{PDG} .

La suma de las fases no observables de los campos que aparecen en el lado izquierdo de la ec. (1.138) se puede calcular a partir de la relación

$$\sum_{i=1}^3 (\chi_i^u - \chi_i^d) = \sum_{i=1}^3 (w_{ii}^{th} - w_{ii}^{PDG}), \quad (1.139)$$

pero como $w_{11}^{PDG} = w_{33}^{PDG} = 0$, la anterior expresión se reduce a:

$$\sum_{i=1}^3 (\chi_i^u - \chi_i^d) = \sum_{i=1}^3 w_{ii}^{th} - w_{22}^{PDG}. \quad (1.140)$$

Ahora, al eliminar las fases no observables de los campos en las ecs. (1.138) y (1.140), se obtiene,

$$2\phi^* = \sum_{i=1}^3 w_{ii}^{th} - w_{22}^{PDG} \quad \text{o} \quad w_{22}^{PDG} = \sum_{i=1}^3 w_{ii}^{th} - 2\phi^*. \quad (1.141)$$

Esta relación demuestra que el argumento w_{22}^{PDG} está determinado de forma única (mod 2π) en términos de los argumentos de las entradas de la matriz V^{th} .

En forma similar se puede derivar un conjunto de condiciones de consistencia para las soluciones de (1.129), en el caso de $P_1 = V^{P_1} = V^{PDG}$, por eliminación de las fases de los quarks. De la ec. (1.129), las diferencias de fases del mismo tipo de quark, por ejemplo $(\chi_j^d - \chi_{j'}^d)$, pueden ser calculadas en al menos tres formas diferentes. Esta redundancia implica la existencia de relaciones no triviales entre los argumentos de las entradas de las dos parametrizaciones. Por ejemplo, de (1.129), la diferencia $(\chi_2^u - \chi_3^d) - (\chi_1^u - \chi_2^d)$ da como resultado

$$(\chi_2^d - \chi_3^d) = w_{23}^{th} - w_{22}^{th} + w_{22}^{PDG}, \quad (1.142)$$

y de la diferencia $(\chi_1^u - \chi_3^d) - (\chi_1^u - \chi_2^d)$ se obtiene

$$(\chi_2^d - \chi_3^d) = w_{13}^{th} - w_{12}^{th} + \delta_{13}. \quad (1.143)$$

Si la diferencia de fases $(\chi_2^d - \chi_3^d)$ se elimina de las ecuaciones (1.142) y (1.143) se tiene que

$$w_{13}^{th} - w_{12}^{th} + \delta_{13} = w_{23}^{th} - w_{22}^{th} + w_{22}^{PDG}. \quad (1.144)$$

Al usar el mismo procedimiento de eliminación para todas las posible combinaciones de las diferencias $(\chi_i^u - \chi_j^d) - (\chi_i^u - \chi_{j'}^d)$ se deriva un conjunto de nueve ecuaciones, de las cuales sólo cuatro son linealmente independientes. Entonces, el conjunto de consistencia de cuatro ecuaciones no triviales (una de estas es la ec. (1.144)) que expresan a los cinco argumentos no nulos w_{ij}^{PDG} de V_{ij}^{PDG} , en términos de los argumentos w_{ij}^{th} de V_{ij}^{th} , adquiere la forma:

$$\begin{aligned} -w_{21}^{PDG} + w_{22}^{PDG} &= w_{11}^{th} - w_{12}^{th} - w_{21}^{th} - w_{22}^{th}, \\ w_{31}^{PDG} - w_{32}^{PDG} &= -w_{11}^{th} + w_{12}^{th} + w_{31}^{th} - w_{32}^{th}, \\ -w_{22}^{PDG} + w_{32}^{PDG} &= -w_{22}^{th} + w_{23}^{th} + w_{32}^{th} - w_{33}^{th}. \end{aligned} \quad (1.145)$$

Pero en virtud de que en la parametrización estándar sólo hay cinco argumentos no nulos, es decir, $w_{13}^{PDG} = -\delta_{13}$, w_{21}^{PDG} , w_{22}^{PDG} , w_{31}^{PDG} y w_{32}^{PDG} , se necesita una ecuación adicional para relacionar los argumentos de las entradas de las dos parametrizaciones. Esta se obtiene de las relaciones de fase entre los determinantes de las matrices V_{ij}^{PDG} y V_{ij}^{th} .

Con ayuda de la ec. (1.141) se resuelven las ecuaciones (1.144) y (1.145) para todos los otros argumentos no nulos de V_{ij}^{PDG} :

$$\begin{aligned} \delta_{13} &= w_{11}^{th} + w_{12}^{th} - w_{13}^{th} + w_{23}^{th} + w_{33}^{th} - 2\phi^* \\ w_{21}^{PDG} &= w_{12}^{th} + w_{21}^{th} + w_{33}^{th} - 2\phi^* \\ w_{32}^{PDG} &= w_{11}^{th} + w_{23}^{th} + w_{32}^{th} - 2\phi^* \\ w_{31}^{PDG} &= w_{12}^{th} + w_{23}^{th} + w_{31}^{th} - 2\phi^* \end{aligned} \quad (1.146)$$

De esta manera, se ha demostrado que los argumentos no nulos w_{ij}^{PDG} de V_{ij}^{PDG} están determinados de forma única (mod 2π) por los argumentos w_{ij}^{th} de V_{ij}^{th} .

Regresando ahora a la cuestión de las fases de los campos de los quarks y la transformación de fases de V_{ij}^{th} a V_{ij}^{PDG} , sustituyendo las ecuaciones (1.141)-(1.146) en las relaciones dadas en la ec. (1.129) se obtienen las diferencias de fases de los campos de los quarks explícitamente en términos de los argumentos conocidos w_{ij}^{th} de V_{ij}^{th} . Las fases de los campos de los quarks están determinadas también sólo hasta una constante aditiva común. Como las fases de los campos de los quarks no son observables, se puede fijar una de ellas, sin pérdida de generalidad, y resolver para las otras. Así, al tomar $\chi_1^d = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned}\chi_1^d &= 0, & \chi_1^u &= w_{11}^{th}, \\ \chi_2^d &= w_{11}^{th} - w_{12}^{th}, & \chi_2^u &= w_{33}^{th} - w_{12}^{th} + 2\phi^*, \\ \chi_3^d &= -w_{23}^{th} - w_{12}^{th} - w_{33}^{th} + 2\phi^*, & \chi_3^u &= -w_{23}^{th} - w_{12}^{th} + 2\phi^*.\end{aligned}\quad (1.147)$$

Entonces, las matrices de fases χ_u y χ_d que se requieren para determinar la matriz de transformación de fases \tilde{V}^{th} son:

$$\chi_d = \text{diag} \left\{ 1, e^{i(w_{11}^{th} - w_{12}^{th})}, e^{i(-w_{23}^{th} - w_{12}^{th} - w_{33}^{th} + 2\phi^*)} \right\} \quad (1.148)$$

y

$$\chi_u = \text{diag} \left\{ e^{iw_{11}^{th}}, e^{i(w_{33}^{th} - w_{12}^{th} + 2\phi^*)}, e^{i(-w_{23}^{th} - w_{12}^{th} + 2\phi^*)} \right\}. \quad (1.149)$$

Con la ayuda de las matrices diagonales de fases anteriores, se puede verificar fácilmente que $\chi_u^\dagger V^{th} \chi_d = V^{PDG}$, se satisface como una identidad, siempre y cuando $|V_{ij}^{th}| = |V_{ij}^{PDG}|$.

En resumen, ahora ya se ha establecido el marco teórico para las mezclas de los quarks, por consiguiente, en la siguiente sección se darán los valores numéricos experimentales más recientes para las mezclas de los quarks.

1.6.4. Estado Actual de las Mezclas de los Quarks

En los experimentos Belle (KEK, Japón) [25] y Babar (SLAC, USA) [26], conocido también como fábrica de mesones B , se determinan los lados y ángulos internos del triángulo unitario. Así se puede comprobar, o no, que efectivamente se forma un triángulo y con ello poder garantizar que el mecanismo propuesto por Cabibbo-Kobayasi-Maskawa es el responsable de la violación de CP en el Modelo Estándar.

Los resultados más recientes para los ángulos internos del triángulo unitario reportados en el PDG son [11]:

$$\alpha = (89.0_{-4.2}^{+4.4})^\circ, \quad \beta = (21.46 \pm 0.71)^\circ, \quad \gamma = (77.0_{-32}^{+30})^\circ. \quad (1.150)$$

En los últimos años, una amplia investigación se ha hecho para la determinación precisa de los valores de los elementos de la matriz de mezclas de los quarks V_{CKM} , se pueden determinar más precisamente por un ajuste global, donde se usan todas las mediciones disponibles y se imponen las constricciones del Modelo Estándar (es decir, tres familias y que la matriz CKM es unitaria). El ajuste también usa las predicciones teóricas para los elementos de la matriz hadrónica, las cuales en algunas ocasiones tienen un grado significativo de incertidumbre. Los resultados del ajuste global para los parámetros de Wolfenstein son [11]:

$$\begin{aligned} \lambda &= 0.2253 \pm 0.0007, & A &= 0.808_{-0.015}^{+0.022}, \\ \bar{\rho} &= 0.132_{-0.014}^{+0.022}, & \bar{\eta} &= 0.341 \pm 0.013. \end{aligned} \quad (1.151)$$

Para las magnitudes de los nueve elementos de la matriz de mezclas V_{CKM}

$$|V_{CKM}| = \begin{pmatrix} 0.97428 \pm 0.00015 & 0.2253 \pm 0.0007 & 0.00347_{-0.00012}^{+0.00016} \\ 0.2252 \pm 0.0007 & 0.97345_{-0.00016}^{+0.00015} & 0.0410_{-0.0007}^{+0.0011} \\ 0.00862_{-0.00020}^{+0.00026} & 0.0403_{-0.0007}^{+0.0011} & 0.999152_{-0.000045}^{+0.000030} \end{pmatrix} \quad (1.152)$$

y para el invariante de Jarlskog

$$J = (2.9_{-0.11}^{+0.19}) \times 10^{-5}. \quad (1.153)$$

Entonces, para los ángulos de mezclas, en la parametrización estándar, se obtienen los siguientes valores numéricos:

$$\sin \theta_{12} = 0.2253 \pm 0.0007, \quad \sin \theta_{23} = 0.0410 \pm 0.0011, \quad \sin \theta_{13} = 0.00347_{-0.00012}^{+0.00016}. \quad (1.154)$$

y de aquí se obtiene:

$$\theta_{12} = 13.02^\circ \pm 0.04^\circ, \quad \theta_{23} = (2.34_{-0.04}^{+0.06})^\circ, \quad \theta_{13} = 0.20^\circ \pm 0.01^\circ. \quad (1.155)$$

En el cuadro 1.6 se muestran los valores de los ángulos de mezclas de los quarks para cada una de las nueve parametrizaciones ángulo-fase linealmente independientes.

Hasta aquí se han revisado algunos aspectos importantes de Modelo Estándar, haciendo especial énfasis en las masas y mezclas de los quarks. En el contexto del Modelo Estándar, casi todas las pruebas experimentales de las fuerzas descritas en el modelo están de acuerdo con sus predicciones. Sin embargo el modelo no explica el porque: hay tres familias de fermiones, el origen y jerarquía en el espectro de las masas y las mezclas del sabor de los quarks. Más aún en el marco teórico del Modelo Estándar, los neutrinos son partículas sin masa por eso la matriz

Parametrización	Ángulos de Mezclas
$P_1 : V^{P_1} = V^{PDG}$	$\sin \theta_{12} = 0.2253 \pm 0.0007$, $\sin \theta_{23} = 0.0410 \pm 0.0011$, $\sin \theta_{13} = 0.00347_{-0.00012}^{+0.00016}$. $\theta_{12} = 13.02^\circ \pm 0.04^\circ$, $\theta_{23} = (2.34_{-0.04}^{+0.06})^\circ$, $\theta_{13} = 0.20^\circ \pm 0.01^\circ$.
$P_2 : V^{P_2} = V^{FX}$	$\cos \theta = 0.999152_{-0.000045}^{+0.000030}$, $\sin \theta_u = 0.08428_{-0.0051}^{+0.0054}$, $\sin \theta_d = 0.20936 \pm 0.010$. $\theta = (2.36_{-0.06}^{+0.04})^\circ$, $\theta_u = (4.84_{-0.25}^{+0.35})^\circ$, $\theta_d = (12.07_{-0.47}^{+0.67})^\circ$.
$P_3 : V^{P_3} = V^{KM}$	$\cos \theta_1 = 0.97428 \pm 0.00015$, $\sin \theta_2 = 0.03825_{-0.0010}^{+0.0013}$, $\sin \theta_3 = 0.01540_{-0.0006}^{+0.0007}$. $\theta_1 = 13.02^\circ \pm 0.04^\circ$, $\theta_2 = (2.19_{-0.06}^{+0.07})^\circ$, $\theta_3 = (0.88_{-0.03}^{+0.04})^\circ$.
$P_4 : V^{P_4}$	$\sin \theta = 0.2253 \pm 0.0007$, $\sin \theta_u = 0.00356_{-0.0001}^{+0.0007}$, $\sin \theta_d = 0.04136_{-0.0007}^{+0.0011}$. $\theta = 13.02^\circ \pm 0.04^\circ$, $\theta_u = 0.20 \pm 0.01$, $\theta_d = (2.37_{-0.04}^{+0.06})^\circ$.
$P_5 : V^{P_5}$	$\sin \theta = 0.22538 \pm 0.0007$, $\sin \theta_u = 0.00347_{-0.0001}^{+0.0002}$, $\sin \theta_d = 0.0410_{-0.0007}^{+0.0011}$. $\theta = 13.02^\circ \pm 0.04^\circ$, $\theta_u = 0.20 \pm 0.01$, $\theta_d = (2.35_{-0.04}^{+0.06})^\circ$.
$P_6 : V^{P_6}$	$\sin \theta = 0.2252 \pm 0.0007$, $\sin \theta_u = 0.00862_{-0.00020}^{+0.00026}$, $\sin \theta_d = 0.0403_{-0.0007}^{+0.0011}$. $\theta = 13.01^\circ \pm 0.04^\circ$, $\theta_u = 0.49 \pm 0.01$, $\theta_d = (2.31_{-0.04}^{+0.06})^\circ$.
$P_7 : V^{P_7}$	$\cos \theta = 0.97345_{-0.00016}^{+0.00015}$, $\sin \theta_u = 0.17912_{-0.0036}^{+0.0053}$, $\sin \theta_d = 0.17606_{-0.0036}^{+0.0053}$. $\theta = 13.23^\circ \pm 0.04^\circ$, $\theta_u = (10.14_{-0.20}^{+0.30})^\circ$, $\theta_d = (10.32_{-0.20}^{+0.30})^\circ$.
$P_8 : V^{P_8}$	$\sin \theta = 0.22548 \pm 0.0007$, $\sin \theta_u = 0.00863_{-0.0002}^{+0.0003}$, $\sin \theta_d = 0.0403_{-0.0007}^{+0.0011}$. $\theta = 13.03^\circ \pm 0.04^\circ$, $\theta_u = 0.49 \pm 0.01$, $\theta_d = (2.31_{-0.04}^{+0.06})^\circ$.
$P_9 : V^{P_9}$	$\sin \theta = 0.2252 \pm 0.0007$, $\sin \theta_u = 0.00885_{-0.0002}^{+0.0003}$, $\sin \theta_d = 0.04208_{-0.0007}^{+0.0011}$. $\theta = 13.01^\circ \pm 0.04^\circ$, $\theta_u = 0.51 \pm 0.01$, $\theta_d = (2.41_{-0.04}^{+0.06})^\circ$.

Cuadro 1.6: Valores de los ángulos de mezcla del sabor de los quarks en cada una de las diferentes parametrizaciones ángulo-fase para la matriz de mezcla CKM.

de mezclas leptónica, análoga a la matriz de mezclas de los quarks, es la matriz unidad, pero la evidencia experimental proporcionada por los experimentos de oscilaciones de neutrinos, ha impuesto cotas no nulas para las masas de los neutrinos. Esta propiedad de los neutrinos tiene como consecuencia que la matriz de mezclas para los leptones no sea trivial. Por consiguiente, en el próximo capítulo se verá como se puede extender el Modelo Estándar para incluir las masas y mezclas de los neutrinos.

Más Allá del Modelo Estándar

Es bien conocido que la masa de una partícula elemental representa su energía inercial cuando existe en reposo. Por lo tanto, una partícula sin masa no tiene manera de existir en reposo, sino que siempre debe moverse a la velocidad de la luz. Un fermión masivo (ya sean leptones o quarks) debe existir en ambos estados de quiralidad, izquierda y derecha, ya que los operadores del campo responsables de la masa no nula de un fermión, tienen que ser productos bilineales de los campos espinoriales que voltean la quiralidad del fermión.

El Modelo Estándar de las interacciones electrodébiles contiene tres neutrinos que son partículas con quiralidad puramente izquierda y sin masa. Tener tres neutrinos no masivos es equivalente a la conservación del número leptónico. Esta conservación de número leptónico es una simetría accidental en lugar de una simetría fundamental del modelo estándar. Por eso muchos físicos creían firmemente que los neutrinos deben ser partículas masivas, incluso mucho antes de acumular pruebas experimentales incontrovertibles de que los neutrinos oscilan de un sabor a otro y por consiguiente deben ser partículas masivas. Una buena razón para esta creencia es que en algunas teorías de gran unificación, tales como la teoría $SO(10)$, es más natural que los neutrinos sean masivos que sin masa [27].

En este capítulo se dan las bases teóricas para introducir los términos de masa de los neutrinos. Primero se construyen por separado los términos de masa de Dirac y de Majorana. Después se construye el término de masa híbrido donde se incluyen ambos tipos de masa, Dirac y Majorana, obtenido así el mecanismo de subibaja y la matriz de mezclas leptónica $PMNS$. Finalmente, se describen en forma detallada las oscilaciones de neutrinos en el vacío para dos y tres sabores, dando el estado actual de los experimentos de oscilaciones.

2.1. Neutrinos Masivos

Para escribir el término de masa de los tres neutrinos conocidos, se requiere ir más allá del Modelo Estándar, es decir, se necesita hacer una extensión del mismo. La extensión mínima del Modelo Estándar se hace mediante la introducción de tres neutrinos derechos, los cuales

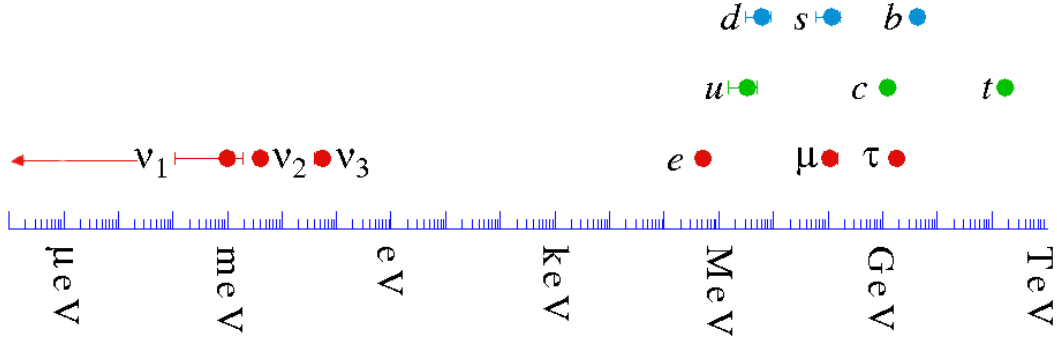


Figura 2.1: *Espectro fermiónico en el Modelo Estándar.*

son singletes bajo el grupo de simetría de norma $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, pero se acoplan a la materia sólo a través de su masa. Estos acoplamientos tienen que ser del tipo Yukawa para poder preservar la simetría de norma, de tal forma que las masas son proporcionales al valor de expectación en el vacío del bosón de Higgs, exactamente igual que para el resto de los fermiones: $Y_{\nu} \bar{l}_L \tilde{\phi} \nu_R + h.c.$ [27]. Entonces, en este marco se tienen en total seis campos de neutrinos de la forma:

$$\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}, \quad \nu_R = \begin{pmatrix} \nu_{eR} \\ \nu_{\mu R} \\ \nu_{\tau R} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

donde solamente los campos izquierdos toman parte en la interacción electrodébiles. Hay dos consecuencias importantes para proceder de esta manera. En primer lugar, hay un nuevo problema de jerarquía de masa: ¿por qué los neutrinos son mucho más ligeros que el resto de los leptones? incluso los de la misma familia, figura 2.1. En segundo lugar, el número de leptónico (L) cuenta el número de leptones menos el de antileptones, y se sigue conservando como una simetría global exacta.

El hecho que los neutrinos sean partículas eléctricamente neutras les da ciertas propiedades que no comparten con otros fermiones del Modelo Estándar. La ausencia de cargas aditivas permite escribir dos tipos de términos de masa, invariantes de Lorentz: las masas de Dirac y las de Majorana. Estos dos tipos de términos de masa se describen a continuación, pero antes es necesario definir el operador de partícula-antipartícula, el cual transforma a un campo fermiónico de acuerdo a la siguiente regla [28]:

$$\hat{C} : \psi \rightarrow \psi^c = C \bar{\psi}^T, \quad C = i\gamma_2 \gamma_0. \quad (2.2)$$

donde $\gamma_2 \gamma_0$ son las matrices de Dirac. Así, a partir de las propiedades de conmutación de las matrices γ , es fácil ver que actuando sobre un campo quiral, \hat{C} le invierte su quiralidad como:

$$\hat{C} : \psi_L \rightarrow (\psi_L)^c = (\psi^c)_R, \quad \psi_R \rightarrow (\psi_R)^c = (\psi^c)_L, \quad (2.3)$$

es decir, la antipartícula de un fermión izquierdo es un fermión derecho.

El operador de partícula-antipartícula, (\widehat{C}) , no debe ser confundido con el operador de conjugación de carga, (C) , el cual, por definición, cambia todos los números cuánticos de carga de un campo (carga eléctrica, número bariónico, número leptónico, etc.), pero deja los otros números cuánticos intactos (ej. quiralidad). En particular, la conjugación de carga de un neutrino izquierdo a un antineutrino izquierdo no existe, esto es una consecuencia de la no invariancia de C en las interacciones débiles. Por otro lado, el operador de conjugación de partícula-antipartícula convierte a un neutrino izquierdo en un antineutrino derecho, el cual existe y es la antipartícula del neutrino izquierdo.

Ahora ya se tienen las bases para discutir los términos de masa de Dirac y de Majorana. Entonces, para un fermión masivo el término de masa en la Lagrangiana tiene la forma general:

$$-\mathcal{L}_m = m\bar{\psi}\psi = m\bar{\psi}_L\psi_R + m\bar{\psi}_R\psi_L. \quad (2.4)$$

Así, el término de masa acopla la componente izquierda y derecha del campo fermiónico, por lo tanto, un campo fermiónico masivo debe tener ambas componentes de quiralidad:

$$\psi = \psi_L + \psi_R. \quad (2.5)$$

De la expresión anterior se puede concluir que existen esencialmente dos formas de relacionar la componente derecha e izquierda de los campos. En el primer caso, la componente derecha de un campo fermiónico masivo es completamente independiente de la componente izquierda; campo de Dirac. Para el otro caso, la componente derecha del campo es el \widehat{C} -conjugado de la componente izquierda;

$$\psi_R = (\psi_L)^c = (\psi^c)_R \quad (2.6)$$

o bien, generalizando

$$\psi = \psi_L + \eta(\psi^c)_R = \psi_L + \eta(\psi_L)^c, \quad (2.7)$$

donde se incluyó el factor de fase $\eta = e^{i\varphi}$, con una fase arbitraria φ . Este caso corresponde a tener un campo de Majorana. A partir de la ec. (2.7), inmediatamente se sigue que el campo \widehat{C} -conjugado coincide con el mismo campo, multiplicado por un factor de fase, esto es:

$$\psi^c = \eta^*\psi. \quad (2.8)$$

Esto significa que las partículas descritas por campos de Majorana deben ser neutras, ya que la partículas coinciden con sus antipartículas.

Para construir un campo masivo de Dirac son necesarios dos campos independientes de Weyl, ψ_L y ψ_R , junto con sus \widehat{C} -conjugados, $(\psi_L)^c = \psi_R^c$ y $(\psi_R)^c = \psi_L^c$. Esto da como resultado cuatro grados de libertad. En contraste con lo anterior, para un campo masivo de Majorana se tienen sólo dos grados de libertad, ψ_L y $(\psi_L)^c = \psi_R^c$.

El operador de conjugación partícula-antipartícula, \widehat{C} , y el operador de conjugación de carga, C , coinciden para fermiones masivos. En el caso de fermiones de Dirac se tiene:

$$\widehat{C} : \quad \psi = \psi_L + \psi_R \rightarrow (\psi_L)^c + (\psi_R)^c = (\psi^c)_R + (\psi^c)_L, \quad (2.9)$$

$$C : \quad \psi = \psi_L + \psi_R \rightarrow \widetilde{\psi} = \widetilde{\psi}_L + \widetilde{\psi}_R \equiv (\psi^c)_L + (\psi^c)_R, \quad (2.10)$$

donde la tilde significa conjugación de carga.

Para neutrinos de Majorana, ambos operadores, \widehat{C} y C , dejan el campo sin cambios porque este no tienen ninguna carga (sin embargo, puede haber alguna diferencia en los factores de fase [29]). Pero hay que recordar, como ya se mencionó, que los operadores \widehat{C} y C no son equivalentes cuando actúan sobre campos quirales.

Al considerar n especies (sabores) de fermiones, el término de masa de Majorana puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_m &= \frac{1}{2} \left[\overline{(\psi_L)^c} M \psi_L + \overline{\psi_L} M^\dagger (\psi_L)^c \right] = \frac{1}{2} \left[\psi_L^T C M \psi_L + \overline{\psi_L} C M^\dagger \overline{\psi_L}^T \right], \\ &= \frac{1}{2} \left[\psi_L^T C M \psi_L + h.c. \right], \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T$ es un vector en el espacio del sabor y M es una matriz compleja de $n \times n$. Con ayuda de la ec. (2.7) y las propiedades de anticonmutación de los campos fermiónicos, es fácil mostrar que la matriz M es simétrica, es decir, se cumple que

$$M_{ij} = M_{ji}. \quad (2.12)$$

Cinemáticamente hablando, las masas de Dirac y de Majorana son indistinguibles una de la otra, ya que ambas conducen a la misma relación entre energía, momento y masa de la partícula. Ambos tipos de masas satisfacen la relación $E = \sqrt{P^2 + m^2}$. Sin embargo, a partir de la Lagrangiana (2.11) se obtiene una diferencia importante entre los términos de masa de Dirac y de Majorana. Los términos de masa de Dirac $\overline{\psi}\psi$ son invariante con respecto de las transformaciones $U(1)$:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi, \quad \overline{\psi} \rightarrow \overline{\psi}e^{-i\alpha}, \quad (2.13)$$

es decir, se conservan las cargas correspondientes (carga eléctrica, número leptónico y bariónico, etc.), mientras que los términos de masa de Majorana rompen todas las cargas que contenga el campo ψ en dos unidades. Esto, en particular, significa que sólo las partículas con carga eléctrica nula pueden tener términos de masa de Majorana, ya que la carga eléctrica se conserva en forma exacta.

A continuación veremos las Lagrangianas de masa para neutrinos de Dirac y Majorana.

2.1.1. Masas de Dirac para los Neutrinos

Un neutrino de Dirac es descrito por un espinor de Dirac de la forma $\nu = \nu_L + \nu_R$, con ν_L la componente izquierda y ν_R la componente derecha. El término masa para el neutrino de Dirac,

en la base de sabor, proviene de las interacciones de Yukawa dadas como [30]

$$-\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\nu}_L^I Y_\nu \tilde{\phi} \nu_R^I + h.c. , \quad (2.14)$$

donde $\tilde{\phi} = i\sigma^2 \phi^*$, con ϕ el doblete de Higgs del Modelo Estándar, y l_L denota el doblete leptónico izquierdo. Después del rompimiento espontáneo de la simetría de norma, se obtiene

$$-\mathcal{L}_{\text{Dirac}}^I = \bar{\nu}_L^I M_{\nu_D} \nu_R^I + h.c. , \quad (2.15)$$

donde $M_{\nu_D} = Y_\nu \langle \phi \rangle$ con $\langle \phi \rangle \approx 174$ GeV es el valor de expectación en el vacío del bosón de Higgs . Suponiendo que los neutrinos transforman de la representación de interacción (sabor) a la representación de las masas, a través de la siguiente transformación:

$$\nu_L^I = V^\dagger \nu_L, \quad \nu_R^I = U^\dagger \nu_R, \quad (2.16)$$

donde los ν^I se refieren a los eigenestados de masa, la Lagrangiana de la ec. (2.15) toma la forma:

$$-\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\nu}_L V M_{\nu_D} U^\dagger \nu_R + h.c. . \quad (2.17)$$

La matriz de masas puede ser diagonalizada por la transformación biunitaria

$$V M_{\nu_D} U^\dagger = M_{\nu_D}^{\text{diag}}, \quad (2.18)$$

donde $M_{\nu_D}^{\text{diag}} = \text{diag} \{m_1, m_2, m_3\}$ con m_i las masas de los neutrinos (para $i = 1, 2, 3$). Así, la Lagrangiana dada en la ec. (2.17) toma la forma:

$$-\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\nu}_L M_{\nu_D}^{\text{diag}} \nu_R + h.c.. \quad (2.19)$$

El espinor de Dirac da como resultado que

$$\nu = \nu_L + \nu_R = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

que satisface automáticamente $P_L \nu = \nu_L$ y $P_R \nu = \nu_R$, y describe los eigenestados de masa de los tres neutrinos de Dirac. Entonces, el término de masa de Dirac de los neutrinos es

$$-\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\nu} M_{\nu_D}^{\text{diag}} \nu = \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_i \nu_i, \quad (2.21)$$

y el término cinético de los neutrinos de Dirac se lee como

$$\mathcal{L}_{k, \nu_D} = i \bar{\nu}_L \gamma_\mu \partial^\mu \nu_L + i \bar{\nu}_R \gamma_\mu \partial^\mu \nu_R = i \bar{\nu} \gamma_\mu \partial^\mu \nu = i \sum_{k=1}^3 \bar{\nu}_k \gamma_\mu \partial^\mu \nu_k, \quad (2.22)$$

donde se han usado $V^\dagger V = V V^\dagger = \mathbb{I}$ y $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{I}$.

Por otra parte, la corriente cargada de interacción débil de los tres neutrinos activos en términos de los eigenestados de masa ν_L , sin pérdida de generalidad, en la base donde los eigenestados de sabor y masa de los tres leptones cargados son idénticos se expresa como sigue:

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} \overline{(e \ \mu \ \tau)}_L \gamma^\mu V \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}_L W_\mu^- + h.c. . \quad (2.23)$$

La matriz unitaria de 3×3 , V , que une a los eigenestados de masa de los neutrinos (ν_1, ν_2, ν_3) con los eigenestados de sabor ($e \ \mu \ \tau$), mide el fenómeno de la mezcla de los neutrinos.

2.1.2. Masas de Majorana para los Neutrinos

El campo de los neutrinos izquierdos ν_L y su contraparte $(\nu_L)^c$, en principio, pueden formar un término de masa, ya que $(\nu_L)^c$ es en realidad derecho. Pero este término de masa de Majorana es prohibido por la simetría de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$ del Modelo Estándar, que contiene solamente un doblete $SU(2)_L$ de Higgs y preserva la conservación del número leptónico [30]. Después se mostrará que al introducir un triplete de Higgs en el Modelo Estándar, se puede acomodar un término de masa con invariancia de norma. Aquí se dejan de lado los detalles de los modelos con tripletes de Higgs y se centrará la atención en el término de masa de los neutrinos de Majorana en sí mismo, dado como

$$-\mathcal{L}_{\text{Majorana}} = \frac{1}{2} \bar{\nu}_L^I M_{\nu_L} (\nu_L^I)^c + h.c. . \quad (2.24)$$

El factor $\frac{1}{2}$ en $\mathcal{L}_{\text{Majorana}}$ permite obtener la ecuación de Dirac de los neutrinos masivos de Majorana. La matriz de masas M_{ν_L} debe ser simétrica, el término de masa es un escalar de Lorentz. Al suponer que los neutrinos transforman de la representación de interacción (sabor) a la representación de las masas a través de la siguiente transformación:

$$\nu_L^I = V^\dagger \nu_L, \quad (\nu_L^I)^c = C \bar{\nu}_L, \quad (2.25)$$

entonces el término de masa de Majorana toma la forma:

$$-\mathcal{L}_{\text{Majorana}} = \frac{1}{2} \bar{\nu}_L V M_{\nu_L} V^T (\nu_L)^c + h.c. . \quad (2.26)$$

La matriz simétrica M_{ν_L} puede ser diagonalizada por una matriz unitaria a través de la transformación

$$V M_{\nu_L} V^T = M_{\nu_L}^{\text{diag}}, \quad (2.27)$$

donde $M_{\nu_L}^{\text{diag}} = \text{diag} \{m_1, m_2, m_3\}$, con m_i la masa de los neutrinos (para $i = 1, 2, 3$). Así, $\mathcal{L}_{\text{Majorana}}$ toma la forma

$$-\mathcal{L}_{\text{Majorana}} = \frac{1}{2} \bar{\nu}_L M_{\nu_L}^{\text{diag}} (\nu_L)^c + h.c. , \quad (2.28)$$

y el campo de Majorana es

$$\nu = \nu_L + (\nu_L)^c = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

el cual satisface la condición de Majorana $(\nu)^c = \nu$, describe los eigenestados de masa de los tres neutrinos de Majorana. Así, se tiene que

$$-\mathcal{L}_{\text{Majorana}} = \frac{1}{2} \bar{\nu} M_{\nu_L}^{\text{diag}} \nu + h.c. = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_i \nu_i, \quad (2.30)$$

y el término cinético de los neutrinos de Majorana se lee como

$$\mathcal{L}_{k,\nu_L} = i \bar{\nu}_L^I \gamma_\mu \partial^\mu \nu_L^I = i \bar{\nu}_L \gamma_\mu \partial^\mu \nu_L = \frac{i}{2} \bar{\nu} \gamma_\mu \partial^\mu \nu = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^3 \bar{\nu}_k \gamma_\mu \partial^\mu \nu_k. \quad (2.31)$$

La corriente cargada de interacciones débiles de los tres neutrinos ahora puede ser escrita en términos de sus eigenestados de masa $\nu_L^I = V^\dagger \nu_L$. Se elige la base donde los eigenestados de sabor y masa de los leptones cargados son idénticos. Vemos que la expresión de la $\mathcal{L}_{C.C.}$ para los neutrinos de Majorana es la misma que la dada para los neutrinos de Dirac, mientras que la matriz unitaria V de 3×3 es la matriz de mezclas de los neutrinos de Majorana, la cual contiene dos fases más que la matriz de mezclas de los neutrinos de Dirac.

Hasta la fecha no se ha podido determinar si los neutrinos son partículas de Dirac o Majorana, por eso la Lagrangiana de masa más general para los neutrinos es aquella que incluya tanto términos de Dirac como de Majorana. A continuación se construye el término de masa híbrido, a partir del cual se obtiene el mecanismo del subibaja, el cual genera las masas pequeñas para los neutrinos.

2.2. Mecanismo del Subibaja

El campo de neutrinos derecho ν_R y su contraparte $(\nu_R)^c$ también pueden formar un término de masa de Majorana. Por lo tanto, es posible escribir la siguiente Lagrangiana de masa híbrida para neutrino en términos de los campos ν_L , ν_R , $(\nu_L)^c$ y $(\nu_R)^c$, que es el término de masa más general del neutrino, para n sabores de neutrinos izquierdos y derechos. En dicho término no sólo se incluye la masa del neutrino de Dirac, M_{ν_D} , y la masa del neutrino de Majorana de los neutrinos derechos, M_{ν_R} , sino también la masa de Majorana para los neutrinos izquierdos M_{ν_L} . Este término de masa híbrido del neutrino, puede ser escrito como:

$$-\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} \nu_L^T C M_{\nu_L} \nu_L + \bar{\nu}_L M_{\nu_D}^* \nu_R + \frac{1}{2} \nu_R^T C M_{\nu_R}^* \nu_R + h.c., \quad (2.32)$$

donde M_{ν_L} y M_{ν_R} son matrices simétricas complejas de $n \times n$, mientras que M_{ν_D} es una matriz compleja de $n \times n^1$. El término de masa dado en la ec. (2.32) puede ser escrito en la forma

$$-\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} n_L^T C \mathcal{M} n_L, \quad (2.33)$$

donde $n_L = (\nu_L (\nu_R)^c)^T = (\nu_L, \nu_L^c)^T$ es el vector de $2n$ campos izquierdos y \mathcal{M} es una matriz de $2n \times 2n$, la cual tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_{\nu_L} & M_{\nu_D} \\ M_{\nu_D}^T & M_{\nu_R} \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

En el caso límite de no tener masas de Majorana para los neutrinos ($M_{\nu_L} = M_{\nu_R} = 0$) se recupera el caso de tener solamente masas de Dirac, y por consiguiente, la matriz de masas (2.34) toma la forma

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & M_{\nu_D} \\ M_{\nu_D}^T & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Esta matriz corresponde a la conservación del número leptónico, $L_{\nu_L} + L_{\nu_R}$, el cual puede ser identificado con el número leptónico total L . En otras palabras, requerir $M_{\nu_L} = M_{\nu_R} = 0$ es equivalente a imponer sobre el modelo una simetría global $U(1)$, dicha simetría tiene como consecuencia inmediata la conservación del número leptónico total L . Sin embargo, añadir al Modelo Estándar un término de masa puramente de Dirac es teóricamente desfavorecido, porque al introducir los neutrinos derechos, ν_R , en el Modelo Estándar (masas de Majorana igual a cero) se puede generar una masa de Dirac al neutrino, a través de un acoplamiento con el campo de Higgs de la forma:

$$\lambda_{\nu_D} \langle \phi \rangle \bar{\nu}_L \nu_R \equiv M_{\nu_D} \bar{\nu}_L \nu_R \quad (2.36)$$

donde $\langle \phi \rangle \approx 174$ GeV es el valor de expectación en el vacío del campo de Higgs y Y_{ν_D} es el acoplamiento de Yukawa del neutrino. Entonces, para una masa física del neutrino de Dirac $M_{\nu_D} \approx 0.2$ eV, el acoplamiento de Yukawa toma el valor $\lambda_{\nu_D} \approx 10^{-12}$. Así surge la siguiente pregunta, ¿porqué los acoplamientos de Yukawa de los neutrinos son mucho más pequeños que los acoplamientos de los leptones cargados? Esta cuestión no puede encontrar respuesta natural en extensiones mínimas invariantes del Modelo Estándar. Por otro lado, una posibilidad para tener masas de Dirac pequeñas viene de la idea de dimensiones extras, motivada por los intentos teóricos de extender el Modelo Estándar al incluir la gravedad [30].

Al observar la matriz de masas de la ec. (2.34) se puede concluir que, en general, dicha matriz es simétrica compleja, por lo que se diagonaliza a través de la transformación:

$$U^T \mathcal{M} U = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2 \}, \quad (2.37)$$

¹Las matrices de masas de los neutrinos de Dirac y derechos de Majorana se introducen a través de sus complejos conjugados para mayor simplicidad de la notación. Lo anterior se hace con ayuda de las relaciones $(\nu_R^T C M^* \nu_R)^\dagger = (\nu^c)_L^T C M (\nu^c)_L$ y $\bar{\nu}_R M \nu_L = (\nu^c)_L^T C M \nu_L = \nu_L^T C M^T (\nu^c)_L$.

donde U es una matriz unitaria de $2n \times 2n$ y $\lambda_{1,2}$ son matrices de $n \times n$, correspondientes a los eigenvalores de la matriz \mathcal{M} . Con ayuda de la matriz dada en la ec. (2.37) se busca diagonalizar por bloques a la matriz \mathcal{M} , esto con el fin de desacoplar los grados de libertad de los neutrinos ligeros y los pesados.

Los eigenvalores de la matriz (2.34) son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (M_{\nu_R} + M_{\nu_L}) \mp \frac{1}{2} M_{\nu_R} \sqrt{\left(\mathbb{I} - M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_L}\right)^2 + 4M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T}. \quad (2.38)$$

La matriz unitaria U que diagonaliza a la matriz compleja \mathcal{M} se construye como:

$$U = (|1\rangle, |2\rangle). \quad (2.39)$$

En forma explícita, U está dada como

$$U = \begin{pmatrix} N_1^{-1} & -N_2^{-1} (\lambda_1 - M_{\nu_L})^\dagger (M_{\nu_D}^{-1})^\dagger \\ N_1^{-1} M_{\nu_D}^{-1} (\lambda_1 - M_{\nu_L}) & N_2^{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

donde

$$N_1^2 = \mathbb{I} + (\lambda_1 - M_{\nu_L})^\dagger (M_{\nu_D}^{-1})^\dagger M_{\nu_D}^{-1} (\lambda_1 - M_{\nu_L}) \quad (2.41)$$

y

$$N_2^2 = \mathbb{I} + M_{\nu_D}^{-1} (\lambda_1 - M_{\nu_L}) (\lambda_1 - M_{\nu_L})^\dagger (M_{\nu_D}^{-1})^\dagger. \quad (2.42)$$

El término de masa híbrido del neutrino, ec. (2.32), proporciona los ingredientes necesarios de un mecanismo dinámico para interpretar por qué los tres neutrinos conocidos tienen masas distintas de cero, pero pequeña. El punto clave es que las escalas de masa de M_{ν_L} , M_{ν_D} y M_{ν_R} puede tener una jerarquía muy pronunciada. Primero, $M_{\nu_D} \sim \langle \phi \rangle \approx 174$ GeV, es naturalmente caracterizados por la escala de rompimiento de la simetría electrodébil. En segundo lugar, $M_{\nu_L} \ll \langle \phi \rangle$ satisface el criterio de naturalidad de 't Hooft, ya que este término de masa de Majorana viola la conservación del número leptónico. En tercer lugar, $M_{\nu_R} \gg \langle \phi \rangle$ es natural de esperarse ya que los neutrinos derecho son singletes de $SU(2)_L$ y así sus términos de masas no están sujetos a la escala de rompimiento de la simetría electrodébil. La jerarquía

$$M_{\nu_R} \gg M_{\nu_D} \gg M_{\nu_L} \quad (2.43)$$

permiten hacer aproximaciones confiables en la obtención de la matriz de masas efectiva para los tres neutrinos activos (ν_e , ν_μ , ν_τ). Este caso límite en la literatura es conocido como el **Mecanismo del subibaja**, el cual proporciona una explicación simple y atractiva para la masa pequeña de los neutrinos. El mecanismo del subibaja relaciona el valor pequeño de la masa de los neutrinos activos con la existencia de una escala de masa muy grande. Aunque el mecanismo del subibaja es más natural en el contexto de teorías de gran unificación GUT's o modelos de simetrías izquierda-derecha, este opera muy bien en la extensión mínima del Modelo Estándar

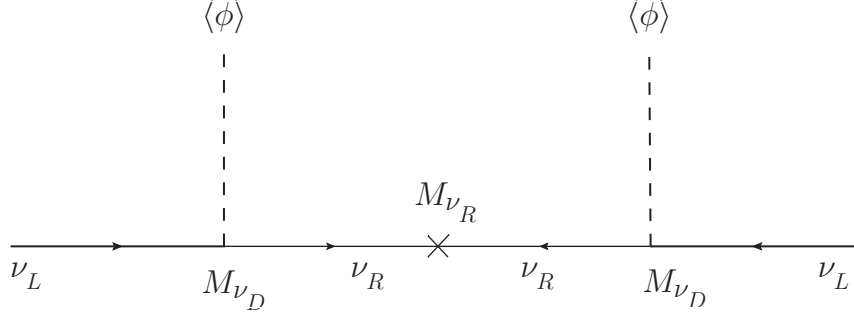


Figura 2.2: Mecanismo del subibaja de la generación de \widetilde{M}_{ν_L} .

donde se introducen los neutrinos derechos (neutrinos estériles) ν_R . Los neutrinos derechos son singletes electrodébiles, por consiguiente su masa no está protegida por la simetría electrodébil. Así, se puede esperar que M_{ν_R} sea muy grande.

Ahora, cada uno de los eigenvalores de la ec. (2.38), toman la forma:

$$\widetilde{M}_{\nu_L} \equiv \lambda_1 \approx M_{\nu_L} - M_{\nu_D} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T, \quad (2.44)$$

$$\lambda_2 \approx M_{\nu_R} + M_{\nu_D} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T \approx M_{\nu_R}, \quad (2.45)$$

y la matriz unitaria U es

$$U = \begin{pmatrix} \mathbb{I} - \frac{1}{2} M_{\nu_D}^* M_{\nu_R}^{*-1} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T & M_{\nu_D}^* M_{\nu_R}^{*-1} \\ -M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T & \mathbb{I} - \frac{1}{2} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T M_{\nu_D}^* M_{\nu_R}^{*-1} \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Finalmente, la transformación de la ec. (2.37) se reescribe como:

$$U^T \mathcal{M} U \approx \text{diag} \left\{ \widetilde{M}_{\nu_L}, M_{\nu_R} \right\}. \quad (2.47)$$

La diagonalización de la matriz de masas efectiva \widetilde{M}_{ν_L} da como resultado n neutrinos de Majorana ligeros, los cuales son predominantemente compuestos de los usuales neutrinos ν_L (activos) y de la mezcla pequeña de los neutrinos derechos y los neutrinos de Dirac; al diagonalizar la matriz M_{ν_R} se producen n neutrinos de Majorana pesados, los cuales son compuestos principalmente de los neutrinos derechos ν_R . La generación de la masa efectiva de los neutrinos de Majorana ligeros es diagramáticamente ilustrada en la figura 2.2.

En resumen, el resultado de la ec. (2.44) es conocido como mecanismo del subibaja tipo (I+II) que es la matriz de masas efectiva de los neutrinos activos. La escala pequeña masa de \widetilde{M}_{ν_L} se atribuye a la escala pequeña de la masa de M_{ν_L} y la escala de masas grandes de la M_{ν_R} . Hay dos límites muy interesante:

- Si M_{ν_R} está ausente de la ec. (2.44), uno se queda con el mecanismo del subibaja canónico o tipo-I: $\widetilde{M}_{\nu_L} \approx -M_{\nu_D} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T$.
- Si M_{ν_L} está presente en la ec. (2.44), uno se queda con el mecanismo del subibaja tipo-II: $\widetilde{M}_{\nu_L} \approx M_{\nu_L} - M_{\nu_D} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T$.

Como en la extensión del Modelo Estándar que se trabaja en esta tesis no se extiende el sector de Higgs, es decir, se considera que el bosón de Higgs esta representado por un doblete de $SU(2)_L$. El mecanismo del subibaja tipo II no se puede implementar, ya que dicho mecanismo requiere que el bosón de Higgs sea representado por tripletes. Por consiguiente, aquí solamente se describirá en forma detallada al mecanismo del subibaja tipo I.

2.2.1. Mecanismo del Subibaja Tipo I

El mecanismo de Higgs, al menos en su forma más simple, prohíbe las masas de Majorana del tipo $\nu_L^c M_{\nu_L} \nu_L$, donde se involucran al neutrino izquierdo ν_L y su \widehat{C} -conjugado ν_L^c , pero permite los términos de masa donde sólo se involucren los neutrinos derechos y su \widehat{C} -conjugado ν_R^c [31]. De hecho, al igual que M_{ν_L} debe ser cero en el Modelo Estándar, M_{ν_R} puede ser arbitrariamente grande. La razón es esencialmente que los neutrinos izquierdos ν_L toman parte en las interacciones débiles con los bosones de norma W^\pm y Z , y si fueran muy pesados perturbaría la teoría. Pero como los neutrinos derechos ν_R son singletes del grupo de simetría electrodébil, estos no toman parte en las interacciones débiles, por consiguiente la masa M_{ν_R} puede ser arbitrariamente grande.

Entonces, en virtud de lo anterior, se considera que $M_{\nu_L} = 0$ y en la aproximación $M_{\nu_R} \gg M_{\nu_D}$, la matriz de masas efectiva para los neutrinos activos toma la forma del mecanismo de subibaja tipo-I:

$$\widetilde{M}_{\nu_L} = M_{\nu_D} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T. \quad (2.48)$$

A partir de la ec. (2.48) podemos observar que la matriz de masas efectiva de los neutrinos izquierdos \widetilde{M}_{ν_L} , es naturalmente suprimida por la escala pesada de la matriz de masas de los neutrinos derechos, M_{ν_R} ; esto se muestra en forma pictórica en la figura 2.3. Un ejemplo muy familiar, con el cual podemos ilustrar lo anteriormente expuesto, es si tomamos $M_{\nu_D} = M_W = 80$ GeV, y de las oscilaciones de los neutrinos solares se considera que los valores más probables para la masa de los neutrinos izquierdos son del orden $\widetilde{M}_{\nu_L} \propto 10^{-3}$ eV, se obtiene que, al invertir el mecanismo del subibaja, la masa de los neutrinos derechos de Majorana es del orden de la escala de Gran Unificación, $M_{\nu_R} \propto M_{GUT} \propto 10^{16}$ GeV. Las masas de los neutrinos atmosféricos requieren una masa para los neutrinos derechos por debajo de la escala GUT [30].

El hecho que los neutrinos sean partículas masivas tiene como consecuencia que la matriz de mezclas del sabor para los leptones no sea trivial. Por esta razón en la siguiente sección se realiza una revisión detallada de la matriz de mezclas leptónica.

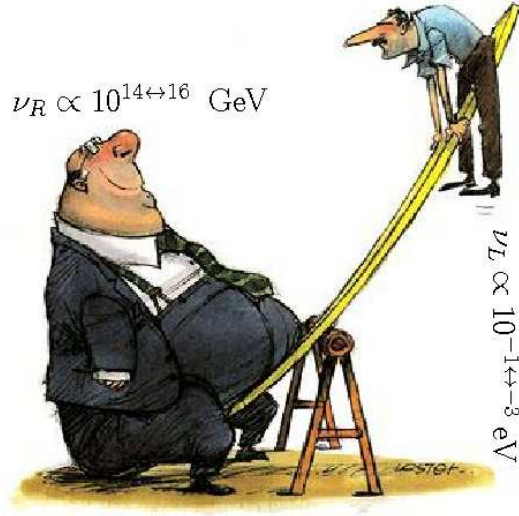


Figura 2.3: Mecanismo del subibaja tipo I [32].

2.3. Matriz de Mezclas $PMNS$

Si los neutrinos tienen masas no degeneradas, en general es imposible encontrar una base de estados en la que coincidan los eigenestados de sabor y de masa, tanto para leptones cargados como para los neutrinos. En otras palabras, es muy natural esperar que se manifieste el fenómeno de la mezcla del sabor entre los tres leptones cargados y los tres neutrinos, en completa analogía al fenómeno de la mezcla de sabor de los quarks. Si existen fases complejas inamovibles en las interacciones de Yukawa, es de esperarse que aparezca la violación de CP.

Independientemente del origen dinámico de la masa pequeña de los neutrinos, se puede hablar de la mezcla de sabor leptónico, teniendo en cuenta a los términos de masa de los leptones cargados y los neutrinos de Majorana a bajas energías, a través de la Lagrangiana [33]:

$$\mathcal{L}_{\text{Lepton}}^I = -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{l}_L^I \gamma^\mu \nu_L^I W_\mu - \frac{1}{2} \bar{\nu}_R^c{}^I M_{\nu_L} \nu_L^I - \bar{l}_R^I M_l l_L^I. \quad (2.49)$$

El fenómeno de la mezcla de sabor leptónico surge de un desajuste entre las diagonalizaciones de M_l y M_{ν_L} en una base arbitraria. Cuando las matrices de masas de los neutrino y los leptones cargados se diagonalizan a través de las transformaciones:

$$M_{\nu_L} = U_\nu^* M_{\nu_L}^{\text{diag}} U_\nu^\dagger, \quad M_l = V_l M_l^{\text{diag}} U_l^\dagger, \quad (2.50)$$

donde $M_{\nu_L}^{\text{diag}} = \text{diag}\{m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, m_{\nu_3}\}$; $M_l^{\text{diag}} = \text{diag}\{m_e, m_\mu, m_\tau\}$ con m_{ν_i} y m_j ($i = 1, 2, 3$ y $j = e, \mu, \tau$) la masa de los neutrinos izquierdos de Majorana y la masa de los leptones cargados, respectivamente. Además, V_l , U_l y U_ν son matrices unitarias de 3×3 .

Si se supone que los leptones cargados y los neutrinos izquierdos de Majorana pasan de la representación de interacción a la representación de las masas, a través de las siguientes transformaciones:

$$l_L^I = U_l l_L, \quad l_R^I = V_l l_R, \quad \nu_L^I = U_\nu \nu_L, \quad (2.51)$$

entonces, al sustituir las ecuaciones (2.50) y (2.51) en la Lagrangiana $\mathcal{L}_{\text{Lepton}}$ se obtiene:

$$\mathcal{L}_{\text{Lepton}} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{l}_L \gamma^\mu U_{PMNS} \nu_L W_\mu - \frac{1}{2} \nu_R^c M_{\nu_L}^{\text{diag}} \nu_L - \bar{l}_R M_l^{\text{diag}} l_L, \quad (2.52)$$

donde de definió la matriz unitaria

$$U_{PMNS} \equiv U_l^\dagger U_\nu. \quad (2.53)$$

La matriz U_{PMNS} es la matriz de mezclas leptónica en las interacciones débiles. Aunque, a menudo en la fenomenología de neutrinos se elige la base donde $M_l = \text{diag} \{m_e, m_\mu, m_\tau\}$ con $U_l = \mathbb{I}$ y $U_{PMNS} = U_\nu$, hay que tener en cuenta que tanto el sector de los leptones cargados como el de neutrinos pueden, en general, contribuir a la mezcla de sabores de los leptones. En otras palabras, U_l y U_ν por separado no son totalmente físicas, y sólo su producto $U_{PMNS} = U_l^\dagger U_\nu$ es una descripción física de la mezcla del sabor leptónico y la violación de CP a bajas energías.

Al igual que la matriz CKM , la matriz de mezclas leptónica $PMNS$ puede ser parametrizada en términos de ángulos de rotación y fases asociadas a la violación de CP. Sin embargo, el número de fases no factorizables presentes en la matriz $PMNS$ depende de si los neutrinos son de Dirac o Majorana. A continuación se hace una revisión detallada de las parametrizaciones ángulo-fase para la matriz $PMNS$.

2.3.1. Parametrización de la Matriz $PMNS$

La mezcla de sabor entre n familias de leptones distintas puede ser descrita por una matriz unitaria U de $n \times n$, cuyo número de parámetros independientes se basa en la naturaleza de los neutrinos. Si los neutrinos son partículas de Dirac, se puede hacer uso de $\frac{n(n-1)}{2}$ ángulos de rotación y $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ fases para parametrizar U , al igual que a los quarks. En el caso que los neutrinos sean partículas de Majorana, no hay campos derechos del neutrino independientes. Por lo tanto el número de redefiniciones de los campos es el número de parámetros de los elementos en $U(n) \times U(n)$ (que son $n^2 - 1$ reales y $n^2 - n$ imaginarios). Sin embargo, una parametrización completa de U necesita $\frac{n(n-1)}{2}$ ángulos de rotación y $\frac{n(n-1)}{2}$ fases.

La mezcla de sabor entre los leptones cargados y los neutrinos de Dirac es completamente análoga a la de los quarks, para los que una serie de parametrizaciones diferentes se han propuesto y se clasifican en la literatura (además ver la sección 1.6.3). Aquí se da una clasificación de todas las parametrizaciones posible para la mezcla del sabor entre los leptones cargados y los neutrinos de Majorana con $n = 3$. Independientemente de la libertad de reasignaciones de fases, se encuentra que hay nueve parametrizaciones estructuralmente diferentes para la matriz

de mezcla leptónica U de 3×3 .

La matriz de mezcla leptónica U de 3×3 , que a menudo se llama matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata ($PMNS$), se puede expresar como el producto de tres matrices unitarias O_1 , O_2 y O_3 , las cuales corresponden a rotaciones simples en los planos complejos $(1, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, 1)$, respectivamente. Explícitamente las expresiones son las siguientes

$$\begin{array}{ccc} O_1 & O_2 & O_3 \\ \hline \left(\begin{array}{ccc} c_1 e^{i\alpha_1} & s_1 e^{-i\beta_1} & 0 \\ -s_1 e^{i\beta_1} & c_1 e^{-i\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma_1} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} e^{i\gamma_2} & 0 & 0 \\ 0 & c_2 e^{i\alpha_2} & s_2 e^{-i\beta_2} \\ 0 & -s_2 e^{i\beta_2} & c_2 e^{-i\alpha_2} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} c_3 e^{i\alpha_3} & 0 & s_3 e^{-i\beta_3} \\ 0 & e^{i\gamma_3} & 0 \\ -s_3 e^{i\beta_3} & 0 & c_3 e^{-i\alpha_3} \end{array} \right), \end{array} \quad (2.54)$$

donde $s_i \equiv \sin \theta_i$ y $c_i \equiv \cos \theta_i$ (para $i = 1, 2, 3$). Obviamente se tiene $O_i O_i^\dagger = O_i^\dagger O_i = \mathbb{I}$ y que las matrices de rotación no conmutan entre sí. Así, se encuentran doce formas diferentes de organizar el producto de O_1 , O_2 y O_3 , que pueden cubrir la totalidad del espacio 3×3 y proporcionar una descripción completa de la matriz U . Explícitamente, seis de las doce combinaciones diferentes de O_i pertenecen al tipo:

$$U = O_i(\theta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \otimes O_j(\theta_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j) \otimes O_k(\theta_k, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) \quad (2.55)$$

con $i \neq j$, donde la matriz de rotación compleja O_i ocurre dos veces los otros seis pertenecen al tipo:

$$U = O_i(\theta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \otimes O_j(\theta_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j) \otimes O_k(\theta_k, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k) \quad (2.56)$$

con $i \neq j \neq k$, en el que las rotaciones tienen lugar en tres planos complejos diferentes. Los productos $O_i O_j O_i$ y $O_i O_k O_i$ (para $i \neq k$) en la ec. (2.56) se correlacionan entre sí, si se quitan los parámetros de la fase correspondientes. Por lo tanto, sólo nueve de las doce parametrizaciones, tres de la ec. (2.55) y seis ec. (2.56), son estructuralmente diferentes.

En cada parametrización de U , aparentemente existen nueve parámetros de fase. Algunos de ellos o sus combinaciones pueden ser absorbidos por la redefinición de las fases pertinentes de los campos de los leptones cargados y los neutrinos. Si los neutrinos son partículas de Dirac, U contiene sólo una única fase inamovible δ , asociada con la violación de CP. Sin embargo, si los neutrinos son partículas de Majorana no hay libertad para ordenar las fases relativas de los tres campos de neutrinos de Majorana. Por lo tanto U , en general, contiene tres fases inamovibles en el caso Majorana (δ y dos fases de Majorana). Ambos efectos de violación de CP y T en las oscilaciones de neutrinos dependen solamente de la fase de tipo Dirac δ .

Parametrizaciones diferentes de U son matemáticamente equivalentes, por lo que la adopción de cualquiera de ellas no se refiere directamente al punto de significado físico. No obstante, es muy probable que una parametrización particular, sea más útil y transparente que las otras en el estudio de la fenomenología de neutrinos y (o) el estudio de la dinámica subyacente responsable de la generación de masa de los leptones y la violación de CP. Dos parametrizaciones particulares de la matriz U_{PMNS} se describen a continuación.

La primera es la llamada parametrización estándar de la matriz $PMNS$ adoptada por el PDG, la cual puede ser factorizada como el producto de cuatro matrices

$$U = U_{23}U_{13}U_{12}D \equiv VD \quad (2.57)$$

con

$$U_{23} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_{13} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix}, \quad U_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

donde $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ y $D = \text{diag} \{1, e^{-i\beta_1}, e^{-i\beta_2}\}$. Sin pérdida de generalidad, los tres ángulos de mezcla ($\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$) se pueden arreglar para estar en el primer cuadrante. Las tres fases de violación de CP (δ, β_1, β_2) pueden tomar valores arbitrarios entre 0 y 2π . Un mérito notable de esta parametrización es que sus tres ángulos de mezcla son aproximadamente equivalentes a los ángulos de mezcla de los experimentos de oscilación de neutrinos solar (θ_{12}), atmosférica (θ_{23}) y reactor CHOOZ (θ_{13}) [11].

Otra parametrización útil es la de Fritzsche-Xing (FX), propuesta originalmente para la mezcla de los quarks y más tarde para la mezcla de leptones:

$$U = U_l U_\theta U_\nu D \equiv VD \quad (2.59)$$

con

$$U_l = \begin{pmatrix} c_l & s_l & 0 \\ -s_l & c_l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_\theta = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix}, \quad U_\nu = \begin{pmatrix} c_\nu & s_\nu & 0 \\ -s_\nu & c_\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

donde $c_{l,\nu} \equiv \cos \theta_{l,\nu}$, $s_{l,\nu} \equiv \sin \theta_{l,\nu}$, $c \equiv \cos \theta$, $s \equiv \sin \theta$ y D es una matriz diagonal de fases que contiene dos fases de violación de CP no triviales. Aunque la forma de U en la ec. (2.59) es aparentemente diferente de la dada en la ec. (2.57), sus correspondientes ángulos de mezcla de sabor ($\theta_l, \theta_\nu, \theta$) y ($\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$) tienen un significado muy similar en la interpretación de los datos experimentales sobre las oscilaciones de neutrinos. En el límite $\theta_l = \theta_{13} = 0$, fácilmente se llega a $\theta_\nu = \theta_{12}$ y $\theta = \theta_{23}$. Como una consecuencia natural de θ_l muy pequeño los tres ángulos de mezcla de la parametrización de FX también pueden estar relacionados con los experimentos de oscilación de neutrinos solares (θ_ν), atmosféricos (θ) y reactor CHOOZ ($\theta_l \sin \theta$), en la aproximación de orden dominante [23].

Las formas específicas de las nueve posibles parametrizaciones ángulo-fase para la matriz V que se surgen en las ecuaciones (2.57) y (2.59) se enumeran en la columna de la izquierda de la tabla 1.5 como $P_1 - P_9$.

En completa analogía con los quarks, en el sector leptónico se las condiciones de unitariedad de la matriz de mezclas $PMNS$ se pueden representar como triángulos en el plano complejo, tal como se muestra a continuación.

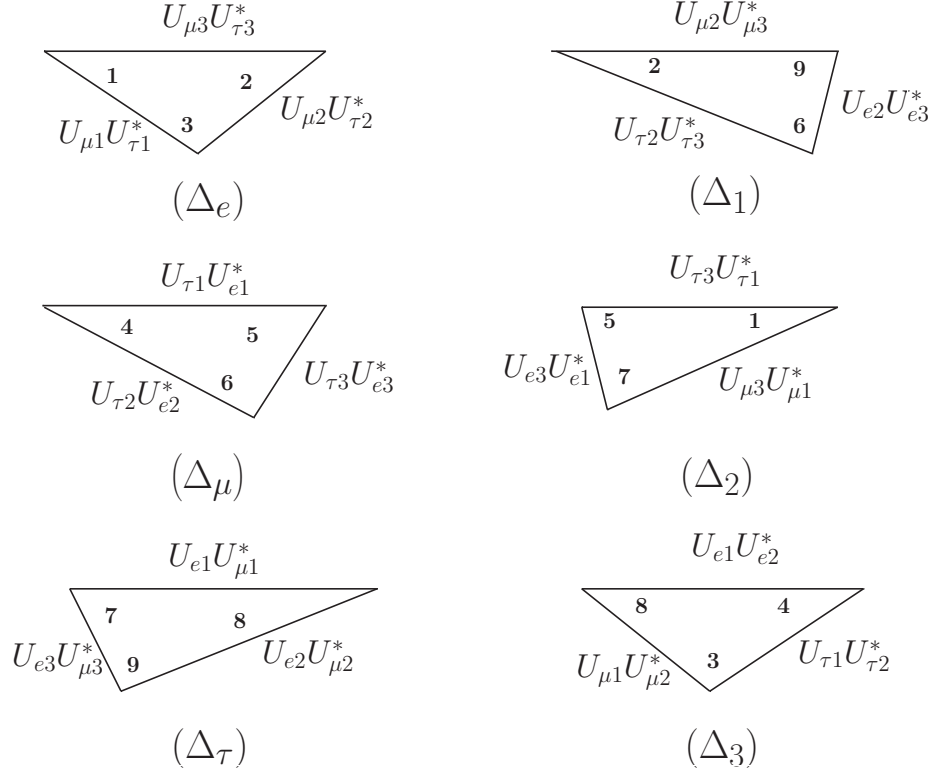


Figura 2.4: Triángulos unitarios de la matriz $PMNS$ en el plano complejo. Cada triángulo es nombrado por el índice que no se manifiesta en sus tres lados.

2.3.2. Triángulos Unitarios Leptónicos

En el escenario de tres neutrinos, en la base donde los eigenestados de sabor están relacionados con los eigenestados de masa a través de

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (2.61)$$

la unitariedad de la U_{PMNS} representa dos conjuntos de condiciones de normalización y ortogonalidad:

$$\sum_i (U_{\alpha i} U_{\beta i}^*) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \sum_\alpha (U_{\alpha i} U_{\alpha j}^*) = \delta_{ij}, \quad (2.62)$$

donde los subíndices griegos y latinos corren sobre (e, μ, τ) y $(1, 2, 3)$, respectivamente. En el plano complejo de las seis relaciones de ortogonalidad dadas en la ec. (2.62) se definen seis triángulos $(\Delta_e, \Delta_\mu, \Delta_\tau)$ y $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$, los llamados triángulos unitarios, se muestran en la figura 2.4. Estos seis triángulos tienen dieciocho lados diferentes y nueve diferentes ángulos internos (o externos). Pero la unitariedad de U requiere que los seis triángulos tengan la misma

área igual a $\frac{\mathcal{J}}{2}$, donde \mathcal{J} es el invariante de Jarlskog de la violación de CP definido a través de

$$\Im(U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^*) = \mathcal{J} \sum_{\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_k \varepsilon_{ijk}. \quad (2.63)$$

Si CP o T fueran una simetría exacta, se espera $\mathcal{J} = 0$ y los triángulos unitarios colapsarían a una línea en el plano complejo. Hay que notar que la forma y el área de los triángulos unitarios son irrelevantes para la naturaleza de los neutrinos, es decir, ellos son los mismos para los neutrinos de Dirac y Majorana, ya que $U_{e1}^* U_{\mu 1} + U_{e2}^* U_{\mu 2} = -U_{e3}^* U_{\mu 3}$ o equivalentemente $|U_{e1} U_{\mu 1}^* + U_{e2} U_{\mu 2}^*|^2 = |U_{e3} U_{\mu 3}^*|^2$ es fácil de obtener

$$2\Re(U_{e1} U_{\mu 2} U_{e2}^* U_{\mu 1}^*) = |U_{e3}|^2 |U_{\mu 3}|^2 - |U_{e1}|^2 |U_{\mu 1}|^2 - |U_{e2}|^2 |U_{\mu 2}|^2 \quad (2.64)$$

Combinando $U_{e1} U_{\mu 2} U_{e2}^* U_{\mu 1}^* = \Re(U_{e1} U_{\mu 2} U_{e2}^* U_{\mu 1}^*) + i\mathcal{J}$ con ec. (2.64) obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^2 &= |U_{e1}|^2 |U_{\mu 2}|^2 |U_{e2}|^2 |U_{\mu 1}|^2 - \frac{1}{4} (|U_{e3}|^2 |U_{\mu 3}|^2 - |U_{e1}|^2 |U_{\mu 1}|^2 - |U_{e2}|^2 |U_{\mu 2}|^2)^2 \\ &= |U_{e1}|^2 |U_{\mu 2}|^2 |U_{e2}|^2 |U_{\mu 1}|^2 - \frac{1}{4} (1 + |U_{e1}|^2 |U_{\mu 2}|^2 + |U_{e2}|^2 |U_{\mu 1}|^2 \\ &\quad - |U_{e1}|^2 - |U_{\mu 2}|^2 - |U_{e2}|^2 - |U_{\mu 1}|^2)^2 \end{aligned} \quad (2.65)$$

Como una generalización simple de ec. (2.65), \mathcal{J}^2 puede ser expresada en términos de los módulos de cualesquiera cuatro elementos de U :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^2 &= |U_{\alpha i}|^2 |U_{\beta j}|^2 |U_{\alpha j}|^2 |U_{\beta i}|^2 - \frac{1}{4} (1 + |U_{\alpha i}|^2 |U_{\beta j}|^2 + |U_{\alpha j}|^2 |U_{\beta i}|^2 \\ &\quad - |U_{\alpha i}|^2 - |U_{\beta j}|^2 - |U_{\alpha j}|^2 - |U_{\beta i}|^2)^2, \end{aligned} \quad (2.66)$$

en la cual $\alpha \neq \beta$ corre sobre (e, μ, τ) y $i \neq j$ $(1, 2, 3)$. La implicación de este resultado es muy obvia: la información sobre la violación de CP leptónica, en principio, puede ser extraída de la medida de los módulos de los elementos de la matriz de mezclas.

En el caso de tres mezclas de neutrinos de Majorana, hay tres invariantes de refasamiento asociados a la violación de CP [33]. El invariante de refasamiento relacionado con la fase de Dirac, es el invariante de Jarlskog \mathcal{J} , en completa analogía con J en el sector de los quarks. Los otros dos invariantes de refasamiento son asociados con las dos fases de Majorana en la matriz $PMNS$, los cuales se pueden elegir como [34, 35, 36]:

$$\mathcal{S}_1 \equiv \Im(U_{e1} U_{e3}^*), \quad \mathcal{S}_2 \equiv \Im(U_{e2} U_{e3}^*). \quad (2.67)$$

Los invariantes asociados con las fases de Majorana no están determinados en forma única. En lugar de \mathcal{S}_1 también se pudo haber elegido $\mathcal{S}'_1 \equiv \Im(U_{\tau 1} U_{\tau 2}^*)$ o $\mathcal{S}''_1 \equiv \Im(U_{\mu 1} U_{\mu 2}^*)$, mientras que en lugar de \mathcal{S}_2 se podría haber utilizado $\mathcal{S}'_2 \equiv \Im(U_{\tau 2}^* U_{\tau 3})$ o $\mathcal{S}''_2 \equiv \Im(U_{\mu 2} U_{\mu 3}^*)$. Las fases de Majorana β_1 y β_2 , o β_1 y $(\beta_2 - \beta_1)$, pueden ser expresadas en términos de los invariantes de

refasamiento, de esta forma se introduce en [34], por ejemplo vía $\cos \beta_2 = 1 - \frac{S_1^2}{|U_{e1}U_{e3}|^2}$. Teniendo en cuenta que la violación de CP debido a la fase β_2 requiere que ambos $\mathcal{S}_1 \equiv \Im m \{U_{e1}U_{e3}^*\} \neq 0$ y $\Re m \{U_{e1}U_{e3}^*\} \neq 0$. Análogamente, $\mathcal{S}_2 \equiv \Im m \{U_{e2}U_{e3}^*\} \neq 0$ podría implicar la violación de la simetría de CP sólo si se cumple $\Re e \{U_{e2}U_{e3}^*\} \neq 0$.

Como una consecuencia de la unitariedad de U , se pueden derivar dos relaciones interesantes de las condiciones dadas en la ec. (2.62):

$$\begin{aligned}\Delta_L &\equiv |U_{e2}|^2 - |U_{\mu1}|^2 = |U_{\mu3}|^2 - |U_{\tau2}|^2 = |U_{\tau1}|^2 - |U_{e3}|^2, \\ \Delta_R &\equiv |U_{e2}|^2 - |U_{\mu3}|^2 = |U_{\mu1}|^2 - |U_{\tau2}|^2 = |U_{\tau3}|^2 - |U_{e1}|^2.\end{aligned}\tag{2.68}$$

Las asimetrías fuera de la diagonal Δ_L y Δ_R caracterizan la estructura geométrica de U sobre sus ejes $U_{e1} - U_{\mu2} - U_{\tau3}$ y $U_{e3} - U_{\mu2} - U_{\tau1}$, respectivamente. Por ejemplo, $\Delta_L = \frac{1}{6}$ y $\Delta_R = -\frac{1}{6}$ fija el patrón de mezcla tri-bimáxima en la matriz U . Si tiene lugar $\Delta_L = 0$ (o $\Delta_R = 0$), la matriz U debe ser simétrica sobre los ejes $U_{e1} - U_{\mu2} - U_{\tau3}$ y $U_{e3} - U_{\mu2} - U_{\tau1}$. Geométricamente esto corresponde a la congruencia entre dos triángulos unitarios, es decir,

$$\begin{aligned}\Delta_L = 0 &: \Delta_e \cong \Delta_1, \Delta_\mu \cong \Delta_2, \Delta_\tau \cong \Delta_3; \\ \Delta_R = 0 &: \Delta_e \cong \Delta_3, \Delta_\mu \cong \Delta_2, \Delta_\tau \cong \Delta_1.\end{aligned}\tag{2.69}$$

De hecho, la contraparte de Δ_L en el sector de los quarks es solamente de $\mathcal{O}(10^{-5})$, lo cual implica que la matriz CKM es casi simétrica sobre su eje $V_{ud} - V_{cs} - V_{tb}$. Una matriz de mezcla del sabor exactamente simétrica podría insinuar una simetría del sabor subyacente, de la que se podría lograr algún entendimiento más profundo de la textura de las masas de los fermiones.

Hasta aquí se han establecido las bases teóricas para estudiar las masas y mezclas de los neutrinos. Por lo tanto, ahora se está en la posición de poder discutir las oscilaciones de los neutrinos en donde se involucran tanto las masas de los neutrinos y como los elementos de la matriz de mezclas leptónica.

2.4. Oscilación de Neutrinos

En los últimos años, ha sido ampliamente demostrado que los neutrinos oscilan de un sabor a otro. Este fenómeno se produce cuando las bases de interacción y de masas no coinciden, lo cual significa que las partículas que se propagan no son las mismas que las que se crean o se detecta. Esto ha demostrado ser el caso de los neutrinos, creados a través de las corrientes cargadas de las interacciones débiles como uno de los eigenestados débiles, ν_e , ν_μ y ν_τ , diferentes, en general, de los eigenestados de masa ν_1 , ν_2 y ν_3 , ya que la matriz de masa en la base de sabor no es diagonal. Esto, como más adelante se mostrará, conduce inevitablemente a las oscilaciones de los neutrinos.

El primero en abordar la cuestión de la oscilación de neutrinos en el sistema se Pontecorvo en 1957 [37]. Inspirado en las oscilaciones bien conocida $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$, Pontecorvo propuesto

inicialmente oscilaciones de neutrinos-antineutrino. La realización precisa de la idea en términos de las masas y las mezclas fue presentada por Maki, Nakagawa y Sakata en 1962 [38] y más tarde desarrollado por Pontecorvo en 1967 [39].

2.4.1. Oscilaciones en el Vacío

El problema que se quiere discutir es la probabilidad de observar, después de cierto tiempo, un eigenestado de sabor diferente al que tenía el neutrino cuando se creó. Mientras que la base natural para estudiar las interacciones de los neutrinos es la del sabor, su evolución en el vacío es mucho más simple en la base de los eigenestados de masa. Siempre se puede definir una transformación unitaria, que una las dos bases de los neutrinos y expresar los eigenestados de sabor ν_α ($\alpha = e, \mu, \tau$) como una combinación lineal de los eigenestados de masa ν_i ($i = 1, 2, 3$),

$$|\nu_\alpha\rangle = U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle, \quad (2.70)$$

donde se está sumando sobre los índices repetidos hasta el número de especies de neutrinos. La relación para los antineutrinos es exactamente la misma, pero tomando el complejo conjugado de los elementos de la matriz de mezcla U , es decir, $|\bar{\nu}_\alpha\rangle = U_{\alpha i} |\bar{\nu}_i\rangle$. Por lo tanto, sólo para una U compleja (incluyendo una fase de la violación CP) se podría observar una diferencia en la evolución de los neutrinos y antineutrinos en el vacío.

Al usar la ec. (2.70), el estado inicial del neutrino al tiempo $t = 0$ puede ser escrito como $|\nu(0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle = U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle$, después de un tiempo t el eigenestado de masa adquiere una fase dada por

$$|\nu(t)\rangle = U_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle. \quad (2.71)$$

Si ahora se proyecta este estado sobre un eigenestado del sabor, se obtiene la amplitud de probabilidad de encontrar el neutrino inicial en ese estado en particular, esto es:

$$\begin{aligned} A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \langle \nu_\beta | \nu(t) \rangle = U_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} \langle \nu_\beta | \nu_i \rangle \\ &= U_{\beta j} U_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} \langle \nu_j | \nu_i \rangle = U_{\beta i} e^{-iE_i t} U_{\alpha i}^*. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Y, por último, del cuadrado de esta amplitud se obtiene lo que se está buscando, la probabilidad de encontrar $|\nu_\beta\rangle$ al tiempo t de cuando se crea $|\nu_\alpha\rangle$ al tiempo $t = 0$, lo cual se expresa como

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = |A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)|^2 = |U_{\beta i} e^{-iE_i t} U_{\alpha i}^*|^2. \quad (2.73)$$

Desarrollando la última expresión se obtiene:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sum_i |U_{\beta i}|^2 |U_{\alpha i}^*|^2 + 2\Re \left[\sum_{i \neq j} U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta j}^* U_{\alpha j} e^{-i(E_i - E_j)t} \right], \quad (2.74)$$

donde se ha escrito explícitamente la suma. En todos los casos de interés, los neutrinos son relativistas, por lo que se puede aproximar

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p + \frac{m_i^2}{2p} \approx p + \frac{m_i^2}{2E}, \quad (2.75)$$

y reescribiendo a la ec. (2.74) como

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sum_i |U_{\beta i}|^2 |U_{\alpha i}^*|^2 + 2\Re e \left[\sum_{i \neq j} U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta j}^* U_{\alpha j} e^{-i \frac{\Delta_{ij}^2}{2E} t} \right], \quad (2.76)$$

se tiene la probabilidad en términos de la diferencia de los cuadrados de las masas de los neutrinos, $\Delta_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$.

Ahora se discutirán las oscilaciones para dos y tres sabores de los neutrinos.

Caso de dos Sabores

Echando un vistazo más de cerca a la ec. (2.76) en el escenario de dos sabores, es decir, si sólo se considerara por el momento a ν_e y ν_μ , la matriz de mezcla que conecta la base del sabor y la de interacción toma la forma sencilla

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

donde θ_0 es el ángulo de mezcla. Haciendo uso de la ecuaciones (2.76) y (2.77) se obtiene la probabilidad de oscilación en dos sabores

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = \sin^2 2\theta_0 \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2}{4E} L \right), \quad (2.78)$$

donde $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ y $L \approx t$ (para neutrinos relativistas) es la distancia entre la fuente y el detector. La unitariedad asegura que las probabilidades de supervivencia sean $P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = 1 - P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$, ya que U es real en el escenario de dos sabores, las mismas expresiones son obtenidas para la supervivencia del antineutrino y para las probabilidades de oscilación. Otra forma conveniente de expresar a la probabilidad de transición es dada por

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta_0 \sin^2 \left(1.27 \Delta m^2 \frac{L}{E} \right), \quad (2.79)$$

donde L está en metros y E en MeV (o L en km E en GeV).

Hay varias características notables en estas expresiones. La primera es el comportamiento oscilatorio en L/E , explicar por qué se llaman oscilaciones de neutrinos. En la ec. (2.78) se pueden distinguir dos factores: una amplitud constante, $\sin^2 2\theta_0$, y un término oscilatorio, $\sin^2 \left(\frac{\Delta m^2}{4E} L \right)$. Enfocando la atención en la amplitud, se nota que un ángulo de mezcla no cero es requerido para obtener las oscilaciones. Por otro lado, el máximo en la amplitud corresponde a un ángulo de mezcla de $\theta_0 = 45^\circ$, mezcla máxima. Ahora, poniendo atención en el término oscilante se observa que no se producirá la transición de sabor si los neutrinos no tienen masa.

En resumen, las oscilaciones requieren la masa de los neutrinos sea distinta de cero, para que la mezcla de los mismos tenga lugar.

Por otra parte, el factor $\frac{\Delta m^2}{4E}L$ debe ser del orden de la unidad si se desea observar el patrón oscilatorio. Se puede definir explícitamente la duración de la oscilación,

$$L_{\text{osc}} = \frac{4\pi E}{\Delta m^2} \approx 2.248\text{m} \frac{E(\text{MeV})}{\Delta m^2(\text{eV}^2)} \approx 2.248\text{km} \frac{E(\text{GeV})}{\Delta m^2(\text{eV}^2)}, \quad (2.80)$$

la cual será de ayuda en este argumento. Para $L \ll L_{\text{osc}}$ no se producen las oscilaciones, sin embargo, la fase en la ec. (2.78) es muy pequeña, dando lugar a que no haya efectos visibles. Por otro lado, para una fase muy grande, $L \gg L_{\text{osc}}$, la probabilidad de transición experimenta oscilaciones muy rápidas, traducido en el detector en la probabilidad promedio de la distancia, como

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_0. \quad (2.81)$$

Es notable cómo la probabilidad de oscilación, a través de la diferencia de los cuadrados de las masas Δm^2 , depende de la masa del neutrino. La consecuencia lamentable es que por medio de los experimentos de oscilación, no será posible acceder a la información sobre la masa absoluta individual de los neutrinos.

Caso de tres sabores

El número de especies activas de neutrinos puede ser determinado a través del ancho invisible de decaimiento del Z [11]. LEP midió experimentalmente esta cantidad obteniendo $N_\nu = 2.984 \pm 0.008$, y demostró la existencia de sólo tres sabores de neutrinos activos, ν_e , ν_μ y ν_τ . La forma unitaria más simple de la matriz de mezclas de los leptones, para el caso de los neutrinos de Dirac, está dada en términos de tres ángulos de mezclas y una fase de violación de CP. El caso de los neutrinos de Majorana es un poco más complicado, ya que se le agregan dos fases extras a la matriz de mezclas, aunque no afectarán a las oscilaciones de los neutrinos. La matriz de mezclas leptónica resultante U , conocida como matriz $PMNS$, Dado que las fases de Majorana no tienen ningún efecto sobre las oscilaciones de los neutrinos, se puede omitir el factor D , resultando en la siguiente expresión para la ec. (2.57):

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Remplazando esta matriz en la ec. (2.76), obteniendo las correspondientes fórmulas para las oscilaciones de tres sabores de neutrinos. Contrario al caso de dos sabores, aquí las fórmulas de los neutrinos y los antineutrinos no coinciden, a menos que $\delta = 0$ o π . A pesar de que no hay expresiones simples en este caso, hay varias aproximaciones, en términos de los dos sabores, que se aplican a efectos prácticos, véase por ejemplo el caso tratado en la ref. [28].

En el escenario de tres neutrinos existen dos diferencias de masas al cuadrado independientes, Δm_{21}^2 y Δm_{31}^2 , que determinarán la evolución de los neutrinos, mientras que Δm_{23}^2 fácilmente puede ser expresada en términos de las otras dos.

Estado actual de las oscilaciones de neutrinos de tres sabores

Cuatro de los seis parámetros de las oscilaciones de neutrinos están bastante bien determinados por los datos de las oscilaciones, los así llamados parámetros de neutrinos atmosféricos ($|\Delta m_{31}^2|$, θ_{23}) y solares ($|\Delta m_{21}^2|$, θ_{12}), mientras que θ_{13} , δ y el signo de Δm_{31}^2 permanecen desconocidos [40, 41, 42, 43, 44, 45].

El estado de los parámetros de neutrinos atmosféricos se determina por la combinación de diferentes análisis. Por un lado, por supuesto, tenemos las mediciones atmosféricas de los neutrinos de Super-Kamiokande [46], las cuales dan los límites más rigurosos sobre el ángulo de mezcla θ_{23} . Por otro lado, la determinación de $|\Delta m_{31}^2|$ es dominado por los experimentos de aceleradores MINOS [47] y K2K [48]. El mejor ajuste con un error de 1σ da los siguientes valores [41]:

$$\sin^2 \theta_{23} = 0.50_{-0.06}^{+0.07}, \quad |\Delta m_{31}^2| = 2.40_{-0.11}^{+0.12} \times 10^{-3} \text{eV}^2. \quad (2.83)$$

A pesar de tener una muy buena medida de $|\Delta m_{31}^2|$, no es posible determinar la jerarquía del espectro de las masas de los neutrinos, es decir el signo de Δm_{31}^2 , con los datos actuales.

La determinación de los parámetros de neutrinos solares proviene de la combinación del experimento de neutrinos de los reactores KamLAND [5] y de los experimentos de neutrinos solares SNO [4], Super-Kamiokande [49], Borexino [50] y Gallex/GNO [51]. Al igual que antes, la determinación de cada parámetro está dominado por un tipo de experimento. En consecuencia, θ_{12} es sobre todo limitada por experimentos solares (principalmente SNO), mientras que Δm_{21}^2 está determinado básicamente por KamLAND. Sin embargo, KamLAND también está empezando a ayudar en el límite inferior de θ_{12} . Los parámetros resultantes de este análisis son (a 1σ) [41]:

$$\sin^2 \theta_{12} = 0.304_{-0.016}^{+0.022}, \quad \Delta m_{31}^2 = 7.65_{-0.20}^{+0.23} \times 10^{-5} \text{eV}^2. \quad (2.84)$$

En cuanto al ángulo de mezcla θ_{13} , en este momento sólo tenemos límites superiores procedentes de los resultados del experimento del reactor CHOOZ [52] con algún efecto también de los datos solares y de KamLAND, especialmente para valores bajos de Δm_{13}^2 . Los límites siguientes se obtienen para 90 % C. L. (3σ) [41]:

$$\sin^2 \theta_{13} \leq \begin{cases} 0.060 (0.089) & \text{(solar + KamLand)} \\ 0.027 (0.058) & \text{(CHOOZ + atm + K2K + MINOS)} \\ 0.035 (0.056) & \text{Datos globales} \end{cases} \quad (2.85)$$

Los resultados más recientes fueron obtenidos por los experimentos T2K [53] y MINOS [54] los cuales reportaron un valor grande para el ángulo θ_{13} . Con el 90 % de C.L. las observaciones de T2K son consistentes con:

$$0.03(0.04) < \sin^2 2\theta_{13} < (0.28)0.34 \quad (2.86)$$

para $\delta_{CP} = 0$ y una jerarquía normal (invertida). El grupo MINOS reporta

$$0.01(0.026) < \sin^2 2\theta_{13} < (0.088)0.150 \quad (2.87)$$

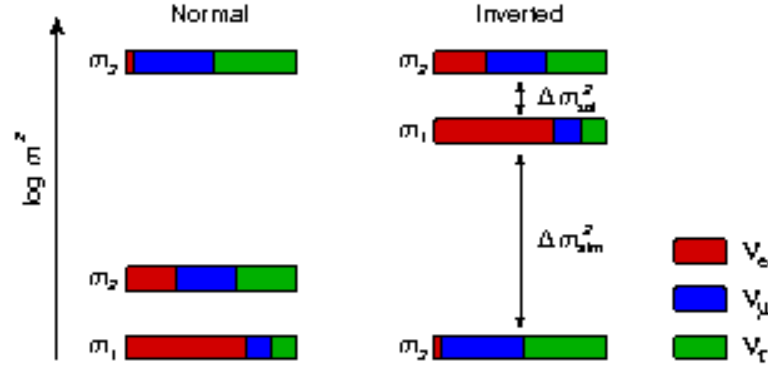


Figura 2.5: Posibles jerarquías en el espectro de masa de los neutrinos, obtenidas a partir de los experimentos de oscilaciones.

para $\delta_{CP} = 0$ y una jerarquía normal (invertida).

Por último, en los experimentos de oscilación de neutrinos todavía no se ha obtenido algún límite para el valor de la fase de violación de CP.

De los experimentos solares se sabe que Δm_{21}^2 , también conocido como la diferencia de masas al cuadrado solar (Δm_{\odot}^2), es positivo, mientras que el signo de Δm_{31}^2 o Δm_{atm}^2 , es aún desconocido. Este signo determina lo que se llama la jerarquía de masa de los neutrinos, $\Delta m_{31}^2 = |\Delta m_{31}^2|$ corresponde a la jerarquía normal y $\Delta m_{31}^2 = -|\Delta m_{31}^2|$ a la jerarquía invertida. La figura 2.5 muestra las dos configuraciones posibles para la jerarquía del espectro de masas de los neutrinos.

Un resumen de los parámetros de los neutrinos conocidos actualmente se da en el cuadro 2.1

2.4.2. Estado Actual de las Mezclas de los Leptones

Como un resultado del análisis global combinado, incluidos todos los efectos de la oscilación dominante y subdominante, la diferencia de los cuadrados de las masas de los neutrinos y los ángulos de mezcla en la matriz de mezcla leptónica, U_{PMNS} , se determinaron a un nivel de confianza de 1σ (3σ) [44]:

$$\Delta m_{21}^2 = 7.67_{-0.21}^{+0.22} \left({}_{-0.61}^{+0.67} \right) \times 10^{-5} \text{ eV}^2,$$

$$\Delta m_{31}^2 = \begin{cases} -2.37 \pm 0.15 \left({}_{-0.46}^{+0.43} \right) \times 10^{-3} \text{ eV}^2, & \left(\begin{array}{l} m_{\nu_2} > m_{\nu_1} > m_{\nu_3}. \\ \text{Jerarquía Invertida} \end{array} \right) \\ +2.46 \pm 0.15 \left({}_{-0.42}^{+0.47} \right) \times 10^{-3} \text{ eV}^2, & \left(\begin{array}{l} m_{\nu_3} > m_{\nu_2} > m_{\nu_1}. \\ \text{Jerarquía Normal} \end{array} \right) \end{cases} \quad (2.88)$$

Parámetro	Ajuste $\pm 1\sigma$	2σ	3σ
Δm_{21}^2 [10^{-5}eV^2]	$7.65^{+0.23}_{-0.20}$	7.25-8.11	7.05-8.34
Δm_{31}^2 [10^{-3}eV^2]	$2.40^{+0.12}_{-0.11}$	2.18-2.64	2.07-2.75
$\sin^2 \theta_{12}$	$0.304^{+0.022}_{-0.016}$	0.27-0.35	0.25-0.37
$\sin^2 \theta_{23}$	$0.50^{+0.07}_{-0.06}$	0.39-0.63	0.36-0.67
$\sin^2 \theta_{13}$	$0.01^{+0.016}_{-0.011}$	≤ 0.040	≤ 0.056

Cuadro 2.1: *Los mejores valores del ajuste con intervalos de error de 1σ , 2σ y 3σ (1 d.o.f.) para los parámetros de oscilación de tres sabores de neutrinos de los datos globales, incluye experimentos solares, atmosféricos, reactores (KamLAND y CHOOZ) y aceleradores (K2K y MINOS).*

$$\begin{aligned}
\theta_{12}^l &= 34.5^\circ \pm 1.4^\circ \left(\begin{array}{c} +4.8 \\ -4.0 \end{array} \right)^\circ, \\
\theta_{23}^l &= 42.3^\circ \begin{array}{c} +5.1 \\ -3.3 \end{array} \left(\begin{array}{c} +11.3 \\ -7.7 \end{array} \right)^\circ, \\
\theta_{13}^l &= 0.0^\circ \begin{array}{c} +7.9 \\ -0.0 \end{array} \left(\begin{array}{c} +12.9 \\ -0.0 \end{array} \right)^\circ, \\
\delta_{CP} &\in [0^\circ, 360^\circ].
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Los intervalos en la ec. (2.88) no son independientes, sino que están correlacionados de manera que no se pueden usar directamente para determinar la matriz de mezcla leptónica en un nivel de confianza dado. Como se describe en la Ref. [44], la matriz de mezcla leptónica puede ser extraída de la siguiente forma consistente: a partir de la χ_{global}^2 , que es una función de los seis parámetros, se puede definir la función de masas marginadas χ^2 :

$$\chi_{\text{mix,global}}^2(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta_{CP}) = \min_{(\Delta m_{21}^2, \Delta m_{13}^2)} \chi_{\text{global}}^2(\Delta m_{21}^2, \Delta m_{13}^2, \theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta_{CP}). \tag{2.90}$$

Se estudia la variación de $\chi_{\text{mix,global}}^2$ como una función de cada una de las combinaciones de la mezcla en U de la siguiente manera. Para una magnitud dada \bar{U}_{ij} de la entrada $U(i, j)$ se define $\chi^2(\bar{U}_{ij})$ como el valor mínimo de $\chi_{\text{mix,global}}^2$ con la condición

$$|U(i, j)(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta_{CP})| = \bar{U}_{ij}. \tag{2.91}$$

El rango permitido de la magnitud de la entrada ij , a un nivel de confianza dado, se define como la verificación de los valores \bar{U}_{ij} ,

$$\chi^2(\bar{U}_{ij}) - \chi_{\text{global,min}}^2 \leq \Delta\chi^2 \quad (C.L., 1 \text{ d.o.f.}) \tag{2.92}$$

Con este procedimiento se obtienen los siguientes valores de la magnitud de los elementos de la matriz completa, a 90% *C.L.*:

$$|U_{PMNS}|_{90\%} = \begin{pmatrix} 0.80 \rightarrow 0.84 & 0.53 \rightarrow 0.60 & 0.00 \rightarrow 0.17 \\ 0.29 \rightarrow 0.52 & 0.51 \rightarrow 0.69 & 0.61 \rightarrow 0.76 \\ 0.26 \rightarrow 0.50 & 0.46 \rightarrow 0.66 & 0.64 \rightarrow 0.79 \end{pmatrix}, \quad (2.93)$$

y al nivel de 3σ :

$$|U_{PMNS}|_{3\sigma} = \begin{pmatrix} 0.77 \rightarrow 0.86 & 0.50 \rightarrow 0.63 & 0.00 \rightarrow 0.22 \\ 0.22 \rightarrow 0.56 & 0.44 \rightarrow 0.73 & 0.57 \rightarrow 0.80 \\ 0.21 \rightarrow 0.55 & 0.40 \rightarrow 0.71 & 0.59 \rightarrow 0.82 \end{pmatrix}. \quad (2.94)$$

Por construcción, estos límites se obtuvieron bajo el supuesto de que U_{PMNS} es unitaria. En otras palabras, los rangos en las diferentes entradas de la matriz son correlacionados debido al hecho de que, en general, el resultado de un experimento dado restringe una combinación de varias entradas de la matriz, así como a las limitaciones impuestas por unitariedad. Como una consecuencia de la elección de un valor específico para un elemento, se restringe aún más el rango de los demás. Efectos en la determinación de la matriz de mezclas leptónica por violaciones de la unitariedad se han considerado en la Ref. [55].

En el cuadro 2.2 se muestran los valores de los ángulos de mezclas de los leptones para cada una de las nueve parametrizaciones ángulo-fase, linealmente independientes.

2.5. Neutrinos de Dirac o de Majorana

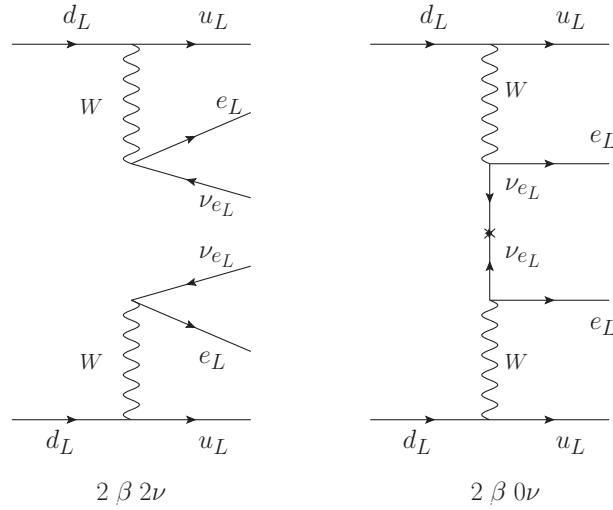
Las oscilaciones de neutrinos no proporcionan información ya sea sobre la escala de masa absoluta o si los neutrinos son partículas de Dirac o Majorana [56]. Así, uno de los problemas más fundamentales de la física de neutrinos es la cuestión de la naturaleza de los neutrinos masivos. Una forma directa para revelar la naturaleza de los neutrinos masivos es investigar los procesos en los que el número total de leptones no se conserva [57].

La mejor esperanza de observar un proceso poco frecuente de este tipo parece ser la búsqueda del decaimiento doble beta sin neutrinos ($2\beta 0\nu$), el diagrama de la derecha en la figura 2.6. El trasfondo de este proceso es la desintegración doble beta estándar representada a la izquierda de la figura 2.6, la cual se ha observado que tendrá lugar con un tiempo de vida de $T_{2\beta 2\nu} > 10^{19} - 10^{20}$ años. Si la fuente de violación del número leptónico es la masa de Majorana del neutrino, el inverso del tiempo de vida de este proceso está dado por:

$$T_{2\beta 0\nu}^{-1} \simeq \underbrace{G^{0\nu}}_{\text{fase}} \underbrace{|M^{0\nu}|^2}_{\text{Matriz Nuclear}} \underbrace{\left| \sum_{j=1}^3 m_{\nu_j} U_{ej}^2 \right|^2}_{|\langle m_{ee} \rangle|^2}, \quad (2.95)$$

Parametrización	Ángulos de Mezclas
$P_1 : U^{P_1}$	$\sin \vartheta_{12} = 0.567 \pm 0.039$, $\sin \vartheta_{23} = 0.687 \pm 0.080$, $\sin \vartheta_{13} = 0.085 \pm 0.085$. $\vartheta_{12} = (34.57 \pm 2.31)^\circ$, $\vartheta_{23} = (43.77 \pm 6.14)^\circ$, $\vartheta_{13} = (4.88 \pm 4.88)^\circ$.
$P_2 : U^{P_2}$	$\cos \vartheta = 0.715 \pm 0.075$, $\sin \vartheta_l = 0.122 \pm 0.135$, $\sin \vartheta_\nu = 0.544 \pm 0.231$. $\vartheta = (44.36 \pm 6.15)^\circ$, $\vartheta_l = (7.07 \pm 7.76)^\circ$, $\vartheta_\nu = (34.16 \pm 13.16)^\circ$.
$P_3 : U^{P_3}$	$\cos \vartheta_1 = 0.82 \pm 0.02$, $\sin \vartheta_2 = 0.664 \pm 0.243$, $\sin \vartheta_3 = 0.148 \pm 0.156$. $\vartheta_1 = (34.91 \pm 2.0)^\circ$, $\vartheta_2 = (43.17 \pm 15.64)^\circ$, $\vartheta_3 = (8.60 \pm 8.90)^\circ$.
$P_4 : U^{P_4}$	$\sin \vartheta = 0.565 \pm 0.035$, $\sin \vartheta_l = 0.103 \pm 0.106$, $\sin \vartheta_\nu = 0.679 \pm 0.141$. $\vartheta = (34.40 \pm 2.43)^\circ$, $\vartheta_l = (5.92 \pm 6.0)^\circ$, $\vartheta_\nu = (43.02 \pm 9.36)^\circ$.
$P_5 : U^{P_5}$	$\sin \vartheta = 0.556 \pm 0.212$, $\sin \vartheta_l = 0.117 \pm 0.128$, $\sin \vartheta_\nu = 0.685 \pm 0.075$. $\vartheta = (34.02 \pm 11.53)^\circ$, $\vartheta_l = (6.78 \pm 7.42)^\circ$, $\vartheta_\nu = (43.23 \pm 5.89)^\circ$.
$P_6 : U^{P_6}$	$\sin \vartheta = 0.438 \pm 0.148$, $\sin \vartheta_l = 0.38 \pm 0.12$, $\sin \vartheta_\nu = 0.605 \pm 0.140$. $\vartheta = (26.28 \pm 7.01)^\circ$, $\vartheta_l = (22.33 \pm 7.43)^\circ$, $\vartheta_\nu = (38.07 \pm 7.88)^\circ$.
$P_7 : U^{P_7}$	$\cos \vartheta = 0.60 \pm 0.09$, $\sin \vartheta_l = 0.70 \pm 0.18$, $\sin \vartheta_\nu = 0.856 \pm 0.166$. $\vartheta = (53.13 \pm 6.44)^\circ$, $\vartheta_l = (44.74 \pm 6.89)^\circ$, $\vartheta_\nu = (59.40 \pm 9.88)^\circ$.
$P_8 : U^{P_8}$	$\sin \vartheta = 0.682 \pm 0.98$, $\sin \vartheta_l = 0.459 \pm 0.182$, $\sin \vartheta_\nu = 0.56 \pm 0.10$. $\vartheta = (43.28 \pm 6.06)^\circ$, $\vartheta_l = (27.99 \pm 9.99)^\circ$, $\vartheta_\nu = (34.5 \pm 6.91)^\circ$.
$P_9 : U^{P_9}$	$\sin \vartheta = 0.405 \pm 0.115$, $\sin \vartheta_l = 0.416 \pm 0.154$, $\sin \vartheta_\nu = 0.749 \pm 124$. $\vartheta = (23.89 \pm 7.2)^\circ$, $\vartheta_l = (24.86 \pm 7.43)^\circ$, $\vartheta_d = (48.78 \pm 7.37)^\circ$.

Cuadro 2.2: Valores de los ángulos de mezcla en cada una de las diferentes parametrizaciones ángulo-fase de la matriz de mezcla del sabor leptónico. Aquí se cambió el ángulo θ por ϑ para evitar confusión cuando se construyan las relaciones de complementariedad de quarks y leptones.

Figura 2.6: *Decaimiento Doble Beta: Normal (izquierda) y sin neutrinos (derecha)*

Experimento	Núcleos	$ \langle m_{ee} \rangle $ (90%CL)
Heidelberg-Moscow I	^{76}Ge	$< 0.34 - 1.1$ eV
Heidelberg-Moscow II	^{76}Ge	$0.2 - 0.6$ eV
CUORICINO	^{123}Te	$< 0.2 - 1.1$ eV
NEMO-3	^{100}Mo	$< 0.6 - 2$ eV

Cuadro 2.3: *Límites actuales de varios experimentos del decaimiento doble beta sin neutrinos.*

donde $|\langle m_{ee} \rangle|$ es la entrada (1,1) en la matriz de masas en la base del sabor. A pesar de la supresión en la masa del neutrino (sobre la energía de este proceso), el modo sin neutrinos, tiene un factor de fase más grande que el modo con dos neutrinos, y como resultado se espera que el tiempo de vida sea del orden de

$$T_{2\beta 0\nu}^{-1} \sim \left(\frac{m_\nu}{E}\right) 10^9 T_{2\beta 2\nu}^{-1}, \quad (2.96)$$

que podría ser observable para las masas de neutrinos en el rango de eV. Varios experimentos han establecido estrictos límites superiores de $|\langle m_{ee} \rangle|$, como se muestra en el Cuadro 2.3.

Otros procesos que se pueden usar para tratar de encontrar la naturaleza de los neutrinos son los decaimientos semileptónicos del hyperon, $\Delta L = 2$ [57]. Hasta ahora, se ha prestado poca atención a estos decaimientos porque la búsqueda en la desintegración doble beta sin neutrinos es mucho más sensible a los efectos de los neutrinos de Majorana. En estos decaimientos

semileptónicos del hyperon, las masa efectiva de los neutrinos de Majorana está definida como:

$$\langle m_{ll} \rangle \equiv \sum_{j=1}^3 m_{\nu_j} U_{lj}^2, \quad l = e, \mu, \tau, \quad (2.97)$$

donde m_{ν_j} son las masas de los neutrinos de Majorana y U_{lj} son los elementos de la matriz de mezclas leptónica $PMNS$.

De la ec. (2.97) se obtiene que el cuadrado de las magnitudes de las masa efectivas de los neutrinos de Majorana son:

$$|\langle m_{ll} \rangle|^2 = \sum_{j=1}^3 m_{\nu_j}^2 |U_{lj}|^4 + 2 \sum_{j < k}^3 m_{\nu_j} m_{\nu_k} |U_{lj}|^2 |U_{lk}|^2 \cos 2(w_{lj} - w_{lk}), \quad (2.98)$$

donde

$$w_{lj} = \arg \{U_{lj}\} = \arctan \left\{ \frac{\Im U_{lj}}{\Re U_{lj}} \right\}, \quad (2.99)$$

este término contiene ambas fases de violación de CP, la de Dirac y la de Majorana.

En resumen, hasta aquí se tiene una extensión mínima del Modelo Estándar, en la cual se agregaron las masas y mezclas de los neutrinos al modelo. En el marco teórico de esta extensión se pueden explicar prácticamente todos los experimentos terrestres de bajas energías. Sin embargo, hay muchas razones para sospechar que se tiene que hacer una extensión más grande del Modelo Estándar. Una lista parcial incluye el problema de la jerarquía, el problema de la violación de CP fuerte, bariogénesis, la unificación de los acoplamientos de norma, el rompecabezas del sabor y la gravedad. La cuestión del rompecabezas del sabor es la que se estudia en este trabajo de tesis, por ello en el siguiente capítulo se mencionan varias interrogantes que involucran al sabor de las partículas elementales.

Problemas del Sabor en Física de Partículas

En el mundo subatómico, las componentes fundamentales de la materia tienen doce sabores: seis quarks y seis leptones (y sus antipartículas). El Modelo Estándar de las interacciones electrodébiles contiene trece parámetros libres en los sectores de los quarks y los leptones: tres masas de los leptones cargados, seis masas de los quarks, tres ángulos de mezcla del sabor de los quarks y una fase de violación de CP. Si los tres neutrinos conocidos son partículas de Majorana, se tienen que introducir nueve parámetros libres para describir sus propiedades de sabor: tres masas de los neutrinos, tres ángulos de la mezcla del sabor leptónico y tres fases que violan CP. Así, una teoría efectiva de las interacciones electrodébil a bajas energías en total, consta de veintidós parámetros del sabor que sólo pueden determinarse a partir de los experimentos. Entonces es muy natural que emerjan las siguientes preguntas:

- ¿Por qué el número de grados de libertad es tan grande en el sector de sabor?
- ¿Cuál es la física fundamental detrás de estos parámetros?

Estas preguntas, aún sin respuesta, son los llamados rompecabezas que constituyen la problemática del sabor en la física de partículas.

En este capítulo se mencionan varias relaciones empíricas entre las masas y/o mezclas de los quarks y leptones. En particular se realiza un análisis detallado de las llamadas relaciones de complementariedad de quarks y leptones.

3.1. Rompecabezas del Sabor

Los datos experimentales actuales sobre las oscilaciones de neutrinos sólo pueden garantizar que $m_{\nu_1} < m_{\nu_2}$. Se desconoce si m_{ν_3} es mayor que m_{ν_2} (jerarquía normal) o más pequeña que m_{ν_1} (jeraquía invertida). La posibilidad $m_{\nu_1} \approx m_{\nu_2} \approx m_{\nu_3}$ (cerca de la degeneración) no puede ser excluida en la actualidad. En cambio, las tres familias de fermiones cargados tienen

jerarquías de masa muy pronunciadas:

$$\frac{m_e}{m_\mu} \sim \frac{m_u}{m_c} \sim \frac{m_c}{m_t} \sim \lambda^4, \quad (3.1)$$

$$\frac{m_\mu}{m_\tau} \sim \frac{m_d}{m_s} \sim \frac{m_s}{m_b} \sim \lambda^2,$$

donde $\lambda \equiv \sin \theta_c \approx 0.22$ con θ_c el ángulo de Cabibbo de la mezcla del sabor de los quarks. En la parametrización estándar de la matriz de mezclas *CKM*, los tres ángulos de mezclas exhiben una jerarquía muy pronunciada:

$$\theta_{12}^q \sim \lambda, \quad \theta_{23}^q \sim \lambda^2, \quad \theta_{13}^q \sim \lambda^4. \quad (3.2)$$

Estos dos tipos de jerarquías pueden estar intrínsecamente relacionados entre sí, porque los ángulos de mezcla miden realmente una falta de coincidencia entre los eigenestados de masa y de sabor de los quarks tipo up y down. Por ejemplo, las relaciones

$$\theta_{12}^q \approx \sqrt{\frac{m_d}{m_s}}, \quad \theta_{23}^q \approx \sqrt{\frac{m_d}{m_b}}, \quad \theta_{13}^q \approx \sqrt{\frac{m_u}{m_t}}, \quad (3.3)$$

son compatible con las ecuaciones (3.1) y (3.2), y pueden ser derivadas de un patrón específico de las matrices de masas de los quarks tipo up y down con cinco ceros de textura. Por otro lado, parece bastante difícil encontrar una manera simple de vincular los dos ángulos de mezcla del sabor leptónico

$$\theta_{12}^l \sim \frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad \theta_{23}^l \sim \frac{\pi}{4} \quad (3.4)$$

con los valores pequeños de las razones de masas

$$\frac{m_e}{m_\mu} \quad \text{y} \quad \frac{m_\mu}{m_\tau}. \quad (3.5)$$

Pero, como se muestra explícitamente más adelante, el valor numérico grande¹ de θ_{12}^l y θ_{23}^l se puede atribuir a la jerarquía muy débil de las tres masas de los neutrinos, mientras que la pequeñez² de θ_{13}^l se atribuye a la jerarquía de masas muy pronunciada en el sector de los leptones cargados [58, 59, 60]. Por supuesto, hay muchas posibilidades de construir modelos para entender el patrón de mezclas del sabor observado en los leptones, pero hasta el momento ninguno de ellos ha sido justificado experimental y teóricamente.

Entre una serie de rompecabezas del sabor que actualmente existen, los siguientes tres son particularmente interesantes:

- Las masas de los tres leptones cargados satisfacen la igualdad

$$\frac{m_e + m_\mu + m_\tau}{(\sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau})^2} = \frac{2}{3} \quad (3.6)$$

en un grado de precisión sorprendentemente bueno, la barra de error es sólo de $\mathcal{O}(10^{-5})$. Esta igualdad es conocida como relación de Koide [61, 62, 63].

¹Valores mayores a treinta grados.

²Valores numéricos menores a 12 grados.

- Hay dos relaciones de Complementariedad de Quarks y Leptones en las mezclas del sabor

$$\theta_{12}^q + \theta_{12}^l \approx \frac{\pi}{4} \quad \theta_{23}^q + \theta_{23}^l \approx \frac{\pi}{4}, \quad (3.7)$$

las cuales son compatibles con los datos experimentales actuales [58, 59, 60].

- Dos triángulos unitarios de la matriz CKM , definidos por las condiciones de ortogonalidad

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0$$

y

$$V_{tb}V_{ub}^* + V_{ts}V_{us}^* + V_{td}V_{ud}^* = 0,$$

son triángulos casi rectángulos, es decir, el ángulo interno en común de estos dos triángulos cumple que

$$\alpha \equiv \arg \left(-\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{td}V_{tb}^*} \right) \approx \frac{\pi}{2} \quad (3.8)$$

basados en los actuales datos experimentales sobre las mezclas y la violación de CP de los quarks.

Estas relaciones numéricas especiales pueden ser accidentales, es decir, pueden ser sólo una coincidencia numérica. Pero también una o dos de ellas podrían ser resultado de una cierta simetría del sabor (subyacente). En particular las relaciones de mayor interés para esta tesis son las relaciones de Complementariedad de Quarks y Leptones, las cuales se revisan a detalle en la siguiente sección.

3.2. Complementariedad de Quarks y Leptones

Las relaciones empíricas de las ecuaciones (3.6)-(3.8) pueden ser usadas como guía en la búsqueda de una simetría del sabor más fundamental. En particular, las relaciones de mayor interés en el desarrollo de este trabajo tesis son las corresponden a las relaciones de Complementariedad de Quarks y Leptones dadas en la ec. (3.7), ya que son las que están directamente vinculadas con las oscilaciones de neutrinos y la violación de CP en ambos sectores.

El ángulo de mezcla solar θ_{12}^l y el correspondiente ángulo de mezcla del sabor en el sector de los quarks, el ángulo de Cabibbo θ_{12}^q , satisfacen la interesante e intrigante relación numérica (a un 90 % C. L.) [64, 65]

$$\theta_{12}^l + \theta_{12}^q \approx 47.5^\circ \pm 1.5^\circ. \quad (3.9)$$

Esta ecuación relaciona los ángulos de mezclas 1-2 en los sectores de los quarks y los leptones, a esta se le conoce comúnmente como relación de Complementariedad de Quark y Lepton (QLC, por sus siglas en inglés) y, si no es una relación accidental, podría implicar una simetría de quarks y leptones.

Una segunda relación QLC entre el ángulo de mezcla atmosférica de los leptones y el ángulo 2-3 de los quarks, que también se cumple [59], está dada como

$$\theta_{23}^l + \theta_{23}^q = (44.67_{-3.3}^{+5.1})^\circ. \quad (3.10)$$

Sin embargo, esta no es tan interesante como la QLC de la ec. (3.9), ya que θ_{23}^q tiene un valor numérico sobre los 2° , y la correspondiente relación QLC podría satisfacerse, dentro de los errores, incluso si el ángulo θ_{23}^q se toma como cero, siempre y cuando θ_{23}^l esté cerca del valor máximo de $\pi/4$.

Una tercera relación QLC posible, que no se realiza del todo o al menos no se realiza de la misma manera ya que es menor que 10° [59], se expresa como:

$$\theta_{13}^l + \theta_{13}^q < 8.1^\circ. \quad (3.11)$$

Las ecuaciones (3.9)-(3.11) son conocidas como relaciones de Complementariedad de Quarks y Leptones extendidas. Las relaciones QLC extendidas podrían implicar una simetría de quarks y leptones [66] o una unificación de leptones y quarks [67]. Una exploración numérica sistemática de todas las matrices de masas con ceros de texturas y con conservación de CP compatibles con las relaciones de QLC y la información experimental sobre mezclas de neutrinos se da en la Ref. [68].

Pero hay que actuar con cautela en el tema de hacer una vinculación inmediata, o trivial, entre las relaciones QLC extendidas y alguna simetría fundamental entre los quarks y leptones, tal como lo señala Cecilia Jarlskog [69]; Las relaciones QLC son variantes de la parametrización y los modelos específicos están muy lejos de ser lo suficientemente constreñidos para ser de utilidad en la conexión de los ángulos de mezclas de los leptones y los quarks.

Adoptar una parametrización específica para la matrices de mezclas de los leptones y los quarks es, de alguna manera, algo arbitrario. Ya que desde un punto de vista matemático las diferentes parametrizaciones son equivalentes. Sin embargo, es muy probable que la física subyacente, responsable de la mezcla del sabor y la violación de CP, se haga más transparente en una parametrización particular que en las otras. Entonces, ahora se analiza la dependencia de la parametrización de las relaciones QLC extendidas, calculando los ángulos de mezcla de los quarks y los leptones en cada una de las nueve parametrización ángulo-fase mostradas en el cuadro 1.5. Para esto se considera que los valores numéricos de las magnitudes de los nueve elementos de la matriz de mezclas *CKM* y *PMNS* están dados en las ecuaciones (1.152) y (2.93) (o ec. (2.94)), respectivamente. Entonces los resultados numéricos de los ángulos de mezcla de los quarks y los leptones, así como sus relaciones QLC, para cada una de las nueve parametrizaciones ángulo-fase, se enlistan en el cuadro 3.1. Es evidente de la tabla que las relaciones QLC extendidas aproximadamente se cumplen en las parametrizaciones P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , y P_5 , pero sufren una gran desviación en las otras cuatro parametrizaciones. Por lo tanto, las relaciones QLC extendidas son, en efecto, dependientes de la parametrización.

Parametrización	Relaciones QLC
P_1	$\theta_{12} + \vartheta_{12} = (47.59 \pm 2.35)^\circ$, $\theta_{23} + \vartheta_{23} = (46.11^{+6.2}_{-6.18})^\circ$, $\theta_{13} + \vartheta_{13} = (5.08 \pm 4.89)^\circ$.
P_2	$\theta + \vartheta = (46.72^{+6.20}_{-6.22})^\circ$, $\theta_u + \vartheta_l = (11.91^{+8.11}_{-8.01})^\circ$, $\theta_d + \vartheta_\nu = (46.23^{+13.83}_{-13.63})^\circ$.
P_3	$\theta_1 + \vartheta_1 = (47.93 \pm 2.04)^\circ$, $\theta_2 + \vartheta_2 = (45^{+15.71}_{-15.70})^\circ$, $\theta_3 + \vartheta_3 = (9.43^{+0.99}_{-0.98})^\circ$.
P_4	$\theta + \vartheta = (47.42 \pm 2.47)^\circ$, $\theta_u + \vartheta_l = (6.12 \pm 6.01)^\circ$, $\theta_d + \vartheta_\nu = (45.39^{+9.42}_{-9.40})^\circ$.
P_5	$\theta + \vartheta = (47.04 \pm 11.57)^\circ$, $\theta_u + \vartheta_l = (6.98 \pm 7.43)^\circ$, $\theta_d + \vartheta_\nu = (45.58^{+5.95}_{-5.93})^\circ$.
P_6	$\theta + \vartheta = (39.29 \pm 7.05)^\circ$, $\theta_u + \vartheta_l = (22.82 \pm 7.44)^\circ$, $\theta_d + \vartheta_\nu = (40.38^{+7.94}_{-7.92})^\circ$.
P_7	$\theta + \vartheta = (66.36 \pm 6.48)^\circ$, $\theta_u + \vartheta_l = (54.88^{+7.19}_{-7.09})^\circ$, $\theta_d + \vartheta_\nu = (69.72^{+10.18}_{-10.08})^\circ$.
P_8	$\theta + \vartheta = (56.25 \pm 6.10)^\circ$, $\theta_u + \vartheta_l = (28.48 \pm 10)^\circ$, $\theta_d + \vartheta_\nu = (36.81^{+6.97}_{-6.95})^\circ$.
P_9	$\theta + \vartheta = (36.9 \pm 7.24)^\circ$, $\theta_u + \vartheta_l = (25.34 \pm 7.44)^\circ$, $\theta_d + \vartheta_\nu = (51.19^{+7.43}_{-7.41})^\circ$.

Cuadro 3.1: *Relaciones de Complementariedad de Quarks y Leptones en las nueve parametrizaciones ángulo-fase. Los ángulos denotados por θ y ϑ son los ángulos en el sector de los quarks y leptones, respectivamente.*

El haber mostrado que las relaciones QLC extendidas son dependientes de la parametrización, da como resultado una disyuntiva, en la cual se puede actuar de forma muy estricta y se dejan de lado estas relaciones empíricas como simples coincidencias numéricas. O se actúa en forma más flexible, tomando a estas relaciones QLC como guía en la búsqueda de una simetría del sabor, sin perder de vista que dichas relaciones no serían en sí cantidades fundamentales del modelo. Esto último tiene sustento en que es muy probable que la física subyacente responsable de la mezcla del sabor y la violación de CP, se hace más transparente en una parametrización particular que en las otras.

Una forma de constreñir el rompecabezas del sabor, es decir, reducir el número de parámetros libres, predecir relaciones entre masas y ángulos de mezclas, es añadir al Modelo Estándar una simetría “horizontal” o de sabor. En particular la simetría del sabor que se usó para realizar esta tesis es la simetría permutacional de tres objetos S_3 , la cual se describe en el siguiente capítulo.

Simetría del Sabor para Tres Familias de Fermiones

En el Modelo Estándar con tres familias, fermiones análogos en diferentes generaciones están igualmente acoplados a los bosones de norma electrodébil. Como fermiones análogos se entiende a u, c, t y d, s, b en el sector de los quarks, mientras que e, μ, τ y ν_e, ν_μ, ν_τ en el sector de los leptones. Por consiguiente, antes del rompimiento espontáneo de la simetría de norma y de que adquieran masa los fermiones, el contenido físico del modelo no cambia si se intercambian los nombres de las familias. Esto significa que, antes del rompimiento espontáneo de la simetría de norma, la Lagrangiana del Modelo Estándar es simétrica respecto del grupo de permutaciones del sabor. En el caso de tres familias, este es el grupo S_3 de permutaciones de tres objetos que en este contexto son los nombres del sabor de los fermiones en diferentes generaciones de cada sector.

Este trabajo se enfocará en tratar de entender la naturaleza de las relaciones de complementariedad de quarks y leptones (QLC), y en la búsqueda de valores posibles para las masas efectiva de los neutrinos de Majorana. Por lo tanto, se realiza un tratamiento unificado de los quarks y los leptones, donde se supone que las matrices de masas de los leptones cargados y los quarks tienen la misma forma genérica con dos ceros de textura a partir de una simetría de sabor S_3 universal y de su rompimiento explícito secuencial. A continuación se presenta el grupo de simetría S_3 .

En este capítulo se hace una descripción del grupo de simetría S_3 , se determinan las matrices de masa para todos los fermiones, sin extender el sector de Higgs, obtenido que todas las matrices de masa se describen por medio de la matriz democrática, lo cual indica que los ángulos de mezcla del sabor deben ser nulos.

4.1. Lagrangiana de Yukawa

En esta sección antes de describir al grupo de simetría S_3 , se reescribe la Lagrangiana de Yukawa en una forma más compacta y practica. La Lagrangiana de Yukawa de para tres familias de quarks y leptones se escribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \bar{Q}_i Y_{ij}^u \phi \frac{1+\sigma_3}{2} Q_j + \bar{Q}_i Y_{ij}^d \phi \frac{1-\sigma_3}{2} Q_j \right\} \\ & + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \bar{l}_{Li} Y_{ij}^\nu \phi \frac{1+\sigma_3}{2} l_{Rj} + \bar{l}_{Li} Y_{ij}^l \phi \frac{1-\sigma_3}{2} l_{Rj} \right\}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde Q_i y L_i denotan los dobletes de isospín débil de los quarks y los leptones, respectivamente; ϕ es el campo de Higgs.

Los dobletes de isospín débil se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^u(x) \\ \psi_1^d(x) \end{pmatrix}, \quad l_1(x) = \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ e(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^{\nu_l}(x) \\ \psi_1^l(x) \end{pmatrix}, \\ Q_2(x) &= \begin{pmatrix} c(x) \\ s(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2^u(x) \\ \psi_2^d(x) \end{pmatrix}, \quad l_2(x) = \begin{pmatrix} \nu_\mu(x) \\ \mu(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2^{\nu_l}(x) \\ \psi_2^l(x) \end{pmatrix}, \\ Q_3(x) &= \begin{pmatrix} t(x) \\ b(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_3^u(x) \\ \psi_3^d(x) \end{pmatrix}, \quad l_3(x) = \begin{pmatrix} \nu_\tau(x) \\ \tau(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_3^{\nu_l}(x) \\ \psi_3^l(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Conviene reordenar los términos de la ec. (4.1) y escribir la Lagrangiana \mathcal{L}_Y en función de los espinores ψ^q y ψ^l , cuyas componentes se definen en el espacio de familias como:

$$\begin{aligned} \psi^u(x) &= \begin{pmatrix} u(x) \\ c(x) \\ t(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^u(x) \\ \psi_2^u(x) \\ \psi_3^u(x) \end{pmatrix}, \quad \psi^{\nu_l}(x) = \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ \nu_\mu(x) \\ \nu_\tau(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^{\nu_l}(x) \\ \psi_2^{\nu_l}(x) \\ \psi_3^{\nu_l}(x) \end{pmatrix}, \\ \psi^d(x) &= \begin{pmatrix} d(x) \\ s(x) \\ b(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^d(x) \\ \psi_2^d(x) \\ \psi_3^d(x) \end{pmatrix}, \quad \psi^l(x) = \begin{pmatrix} e(x) \\ \mu(x) \\ \tau(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^l(x) \\ \psi_2^l(x) \\ \psi_3^l(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Esto equivale a introducir un espacio Euclidiano real de tres dimensiones L_3 . Una base ortogonal de este espacio está formada por los vectores:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

4.2. El Grupo de Permutaciones S_3

El grupo S_3 tiene seis elementos: la identidad y las permutaciones de los índices 1, 2 y 3. La representación matricial del grupo S_3 en el espacio L_3 está constituida por las matrices que intercambian los índices de sabor.

El grupo S_3 se define como el grupo de permutaciones de tres objetos. Este es un grupo no abeliano y está formado por tres permutaciones pares y tres impares de tres objetos, las cuales se pueden etiquetar de la siguiente forma (f_1, f_2, f_3) . Los elementos del grupo son

$$S_3 \equiv \{\mathbf{e}, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}, \quad (4.5)$$

donde \mathbf{e} es el elemento identidad y las A_i (con $i = 1, \dots, 5$) etiquetan las permutaciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, & A_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & A_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

La notación usada se refiere al intercambio de los subíndices de f_1, f_2 y f_3 . Por ejemplo, A_1 actúa de la siguiente forma:

$$f_1 \rightarrow f_2, \quad f_2 \rightarrow f_1, \quad f_3 \rightarrow f_3. \quad (4.7)$$

En general, para el grupo de permutaciones S_n el producto entre dos de sus elementos es simplemente su aplicación sucesiva y este producto no es conmutativo. Así, por ejemplo al multiplicar A_2 con A_5 se obtiene que:

$$A_2 A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = A_3, \quad (4.8)$$

que en términos de f_1, f_2 y f_3 es

$$f_1 \rightarrow f_3 \rightarrow f_1, \quad f_2 \rightarrow f_1 \rightarrow f_3, \quad f_3 \rightarrow f_2 \rightarrow f_2. \quad (4.9)$$

Los productos entre los elementos restantes del grupo S_3 se realizan de manera análoga al ejemplo anterior. Así, la tabla de multiplicación del grupo está dada en el Cuadro 4.1.

Ahora, en general, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in S_n \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n, \quad (4.10)$$

donde A^{-1} es el elemento inverso. Por lo tanto, se cumple la condición

$$A^{-1} A = A A^{-1} = \mathbf{e}. \quad (4.11)$$

Como ejemplo particular en el caso de S_3 , el inverso de A_1 es

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Elementos	e	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
e	e	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	A_1	e	A_5	A_4	A_3	A_2
A_2	A_2	A_4	e	A_5	A_1	A_3
A_3	A_3	A_5	A_4	e	A_2	A_1
A_4	A_4	A_2	A_3	A_1	A_5	e
A_5	A_5	A_3	A_1	A_2	e	A_4

Cuadro 4.1: Tabla de multiplicación del grupo S_3 .

4.2.1. Clases Conjugadas

Una clase conjugada para un grupo G de orden g , se define como

$$(a) \equiv \{a, b/u^{-1}bu = a, u \in G\} \quad (4.13)$$

El elemento identidad **e** por sí mismo forma una clase conjugada, las clases restantes se determinan con ayuda de la tabla de multiplicación del grupo (ver Cuadro 4.1). Así, para la clase conjugada cuyo representante es A_1 y a la cual se denota como k_1 , se tiene:

$$\begin{aligned} A_4^{-1}A_1A_4 &= A_4^{-1}A_2 = A_1, \\ A_2^{-1}A_3A_2 &= A_2^{-1}A_4 = A_1, \\ A_3^{-1}A_2A_3 &= A_3^{-1}A_5 = A_1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Denotando con k_2 a la clase conjugada con representante A_4 , para esta tenemos,

$$\begin{aligned} A_5^{-1}A_4A_5 &= A_5^{-1}\mathbf{e} = A_4, \\ A_1^{-1}A_5A_1 &= A_1^{-1}A_3 = A_4. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Por lo tanto, el grupo S_3 tiene tres clases conjugadas que se denotan como **e**, k_1 y k_2 , y tienen la forma:

$$\mathbf{e} = \{\mathbf{e}\}, \quad k_1 = \{A_1, A_2, A_3\}, \quad k_2 = \{A_4, A_5\}. \quad (4.16)$$

Las clases conjugadas del grupo son de utilidad para construir los llamados operadores de clase y a su vez construir los proyectores del grupo.

4.2.2. Operadores de Clase para S_3

La suma de los elementos de un grupo G correspondientes a una misma clase conjugada se llama operador de clase. Al suponer que la i -ésima clase tiene g_i elementos, $\{R_1, R_2, \dots, R_{g_i}\}$, el operador de clase C_i se define como

$$C_i = \sum_{l=1}^{g_i} R_l^i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.17)$$

donde N es el número de clases conjugadas del grupo.

Para el grupo de permutaciones S_3 los operadores de clase son

$$C_1 = \mathbf{e}, \quad C_2 = A_1 + A_2 + A_3, \quad C_3 = A_4 + A_5. \quad (4.18)$$

4.2.3. Representaciones del grupo S_3

En esta sección se construye un par de representaciones matriciales del grupo S_3 , tomando como punto de partida al espacio vectorial tridimensional generado por los vectores base dados en la ec. (4.4). Entonces, de la forma de actuar del elemento unidad \mathbf{e} sobre los vectores bases de la ec. (4.4), se puede representar dicho elemento en forma matricial como:

$$D(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Ahora, aplicando A_5 a los vectores de la base, se obtiene:

$$A_5\vec{v}_1 = \vec{v}_3, \quad A_5\vec{v}_2 = \vec{v}_1 \quad \text{y} \quad A_5\vec{v}_3 = \vec{v}_2. \quad (4.20)$$

Entonces la representación matricial de A_5 está dada como

$$D(A_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Al proceder en forma análoga para los elementos restantes de S_3 se obtiene su representación matricial. Así, se encuentra que la representación matricial real del grupo S_3 es:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{e}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & P_{(12)} \leftrightarrow D(A_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ P_{(13)} \leftrightarrow D(A_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & P_{(23)} \leftrightarrow D(A_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ P_{(13)}P_{(12)} \leftrightarrow D(A_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & P_{(13)}P_{(23)} \leftrightarrow D(A_5) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ahora se construye una representación del grupo S_3 aprovechando el hecho que el grupo S_3 es isomorfo al grupo de simetría de un triángulo equilátero, ver la figura 4.1. Los elementos A_i , ($i = 1, 2, 3$) están asociados con reflexiones sobre los ejes indicados y los elementos A_4 y A_5 , con rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$, respectivamente, alrededor del eje z . Entonces, considerando nuevamente el espacio vectorial tridimensional generado por los vectores base dados en la expresión (4.4). Así, al aplicarle A_5 (rotación por $2\pi/3$ alrededor de z) a los vectores de la base, se obtiene:

$$\begin{aligned} A_5\vec{v}_1 &= \cos \frac{2\pi}{3}\vec{v}_1 - \sin \frac{2\pi}{3}\vec{v}_2 = -\frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{v}_2, \\ A_5\vec{v}_2 &= \sin \frac{2\pi}{3}\vec{v}_1 + \cos \frac{2\pi}{3}\vec{v}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2, \\ A_5\vec{v}_3 &= \vec{v}_3. \end{aligned} \quad (4.23)$$

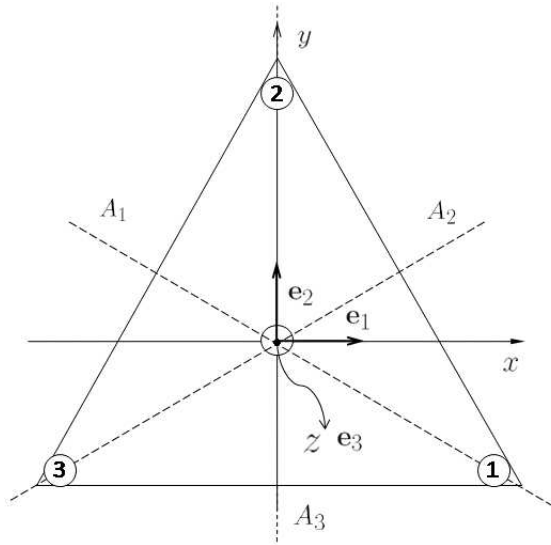


Figura 4.1: Simetrías de un triángulo equilátero, donde los elementos A_i , ($i = 1, 2, 3$) están asociados con reflexiones sobre los ejes indicados y los elementos A_4 y A_5 , con rotaciones de $2\pi/3$ y $4\pi/3$, respectivamente.

Así, la representación matricial del elemento A_5 es,

$$D(A_5) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Al proceder de forma similar con los otros elementos de S_3 , se obtiene la siguiente representación matricial:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{e}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D(A_1) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ D(A_2) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & D(A_3) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ D(A_4) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D(A_5) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Las matrices de esta representación son unitarias. En consecuencia, la representación que se acaba de construir es una representación unitaria.

Rep. \ Ele.	E	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$D^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$D^{(2)}$	1	-1	-1	-1	1	1
$D^{(3)}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Cuadro 4.2: Representaciones irreducibles de los elementos de S_3 . $D^{(1)}$ y $D^{(2)}$ corresponden a representaciones unidimensionales, mientras que $D^{(3)}$ es una representación bidimensional.

El número de representaciones irreducibles no equivalentes de un grupo G de orden g es igual al número de clases conjugadas del grupo. Para el grupo S_3 el número de clases conjugadas es 3, por lo tanto el número de representaciones irreducibles es 3.

Por otro lado, la dimensión de las representaciones irreducibles de un grupo se determina a través de la relación

$$\sum_{\nu=1}^3 n_{\nu}^2 = g, \quad (4.26)$$

donde ν es el índice del número de representación irreducible, n_{ν} es la dimensión de la representación irreducible y g es el número de elementos en el grupo. Para el grupo S_3 se obtiene

$$\sum_{\nu=1}^3 n_{\nu}^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 6. \quad (4.27)$$

Por simple inspección los valores para los cuales se cumple la ecuación anterior son

$$n_1 = n_2 = 1 \quad n_3 = 2. \quad (4.28)$$

Entonces, las representaciones irreducibles S_3 tienen dimensiones 1 y 2, respectivamente; esto es, el grupo S_3 se puede descomponer en dos singletes y un doblete.

Las matrices de la representación de la ec. (4.25) tienen una estructura en bloques, por lo tanto, se pueden descomponer en dos matrices de dimensiones 2×2 y 1×1 . Además, se sabe que existe una representación irreducible trivial para cada grupo, llamada la representación identidad, la cual se caracteriza por $D^{(1)}(R_i) = 1$ para todo $R_i \in G$. En el Cuadro 4.2 se resume lo anteriormente mencionado.

La tabla de caracteres correspondiente al grupo S_3 , obtenida a partir del Cuadro 4.2, está dada en el Cuadro 4.3.

Rep. \ Clases	E	k_1^3	k_2^2
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1	-1	1
$D^{(3)}$	2	0	-1

Cuadro 4.3: Tabla de caracteres de S_3 , donde k_i^l ($i = 1, 2$) corresponde a la clase i -ésima del grupo y el superíndice l indica el número de elementos de la clase.

La representación matricial de la ec. (4.25) en términos de sus componentes irreducibles, queda expresada como la suma directa de un solo singlete y un doblete, esto es,

$$D = D^{(2)} \oplus D^{(3)}. \quad (4.29)$$

Se puede obtener una representación de S_3 mediante el producto directo de sus representaciones irreducibles, en particular se construye el producto directo de cada elemento de S_3 consigo mismo en la representación $D^{(3)}$, esto es:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} &= \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, & A_1 \otimes A_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}A_1 & -\frac{\sqrt{3}}{2}A_1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}A_1 & -\frac{1}{2}A_1 \end{pmatrix}, \\
 A_2 \otimes A_2 &= \begin{pmatrix} -A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, & A_3 \otimes A_3 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}A_3 & \frac{\sqrt{3}}{2}A_3 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A_3 & -\frac{1}{2}A_3 \end{pmatrix}, \\
 A_4 \otimes A_4 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}A_4 & \frac{\sqrt{3}}{2}A_4 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}A_4 & -\frac{1}{2}A_4 \end{pmatrix}, & A_5 \otimes A_5 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}A_5 & -\frac{\sqrt{3}}{2}A_5 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A_5 & -\frac{1}{2}A_5 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \quad (4.30)$$

entonces se obtiene

$$D^{(3)} \otimes D^{(3)} = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus D^{(3)}, \quad (4.31)$$

que es la suma directa de un par de singletes y un doblete.

4.2.4. Proyectores

Las funciones adaptadas a la simetría S_3 , funciones invariantes bajo la acción del grupo, se pueden obtener a partir de los proyectores del grupo. Para construir los proyectores se usan los operadores de clase de la ec. (4.18) y la definición de los proyectores siguiente:

$$P^\nu = \frac{n_\nu}{g} \sum_i \chi^{(\nu)*} C_i, \quad (4.32)$$

donde los $\chi^{(\nu)}$ son los caracteres de la representación y los C_i son los operadores de clase. Entonces, la forma del operador de proyección sobre el singlete simétrico está dada por:

$$\begin{aligned} P_{1_S} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \mathbf{e} - A_2 + \frac{1}{2}(A_1 + A_3 - A_4 - A_5) & -\frac{\sqrt{3}}{2}(A_1 - A_3 - A_4 + A_5) \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(A_1 - A_3 + A_4 - A_5) & \mathbf{e} + A_2 - \frac{1}{2}(A_1 + A_3 + A_4 + A_5) \end{pmatrix}, \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

De manera análoga, para el operador de proyección sobre el singlete antisimétrico P_{1_A} se tiene

$$\begin{aligned} P_{1_A} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \mathbf{e} + A_2 - \frac{1}{2}(A_1 + A_4 + A_5) & \frac{\sqrt{3}}{2}(A_1 - A_3 + A_4 - A_5) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(A_1 - A_3 - A_4 + A_5) & \mathbf{e} - A_2 + \frac{1}{2}(A_1 + A_3 - A_4 - A_5) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Finalmente, para el operador P_2 que proyecta sobre el doblete, por definición se tiene:

$$P_2 = \mathbb{I}_{4 \times 4} - P_{1_S} - P_{1_A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

El proyector P_2 se puede descomponer en dos términos, cada uno de los cuales es un tensor de rango 1, esto es,

$$P_2 = P_2^{(1)} + P_2^{(2)}, \quad (4.36)$$

donde,

$$P_2^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 0 \ 0 \ -1), \quad (4.37)$$

y

$$P_2^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (0 \ 1 \ 1 \ 0). \quad (4.38)$$

Los eigenvalores de los proyectores elementales permitirán construir las matrices \mathcal{U} que diagonalizan por bloques al producto $D(R) \times D(R)$.

Con ayuda de los proyectores, el producto directo $\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$ se descompone en una suma directa de singletes y dobletes. Entonces, aplicando a dicho producto directo cada uno de los proyectores obtenidos anteriormente, se obtiene:

$$P_{1_S}(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_1y_2 \\ x_2y_1 \\ x_2y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1y_1 + x_2y_2 \\ 0 \\ 0 \\ x_1y_1 + x_2y_2 \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

$$P_{1_A}(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_1y_2 \\ x_2y_1 \\ x_2y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \\ -x_1y_2 + x_2y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

$$P_2(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_1y_2 \\ x_2y_1 \\ x_2y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1y_1 - x_2y_2 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \\ -x_1y_1 + x_2y_2 \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Escrito de otra forma, se tiene:

$$P_{1_S}(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_1 + x_2y_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_{1_A}(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_2 - x_2y_1) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

$$P_2(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_1 - x_2y_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_2 + x_2y_1) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

Los coeficientes de los eigenvectores son las funciones adaptadas a la simetría. Si (x_1, x_2) y (y_1, y_2) son las componentes de dos dobletes de S_3 , el producto directo $(x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2)$ contiene las siguientes componentes:

- Un singlete simétrico:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_1 + x_2y_2), \quad (4.44)$$

que es invariante bajo la acción del grupo S_3 .

- Un singlete antisimétrico:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_2 - x_2y_1), \quad (4.45)$$

que no es invariante bajo la acción del grupo S_3 .

- Un doblete cuyas componentes son:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_1 - x_2y_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_2 + x_2y_1) \right). \quad (4.46)$$

La matriz \mathcal{U} , que lleva a $\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$ a una forma diagonal por bloques, se forma con los eigenvectores de los proyectores con eigenvalor 1. Así, si se quiere que 1_S aparezca en la esquina superior derecha, se coloca a $|1_S\rangle$ como primera columna y si se coloca a $|1_A\rangle$ como segunda columna, entonces 1_A queda en el segundo bloque diagonal, etc. Para este caso, \mathcal{U} tiene la forma

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Al aplicar esta matriz a un elemento del grupo. Por ejemplo, al elemento $A_2 \otimes A_2$ que se forma por el producto directo de A_2 con A_2 en la representación bidimensional $D^{(3)}$ y se denota como $A_2^{(2 \otimes 2)}$. Entonces se tiene

$$\tilde{A}_2^{(2 \otimes 2)} = \mathcal{U}^{-1} A_2^{(2 \otimes 2)} \mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

El bloque en la esquina inferior derecha es la matriz A_1 en la representación $D^{(3)}$ original, con lo cual se identifica a (x_1, x_2) del doblete original.

Ahora, regresando a la representación matricial real, en la ec. (4.22), y al construir los operadores de proyección, se obtienen los siguientes resultados:

$$P_{1_S} = \frac{1}{6}(\mathbf{e} + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

Así, se puede escribir P_{1_S} de la forma:

$$P_{1_S} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} (1 \ 1 \ 1). \quad (4.50)$$

Por otro lado, el operador de proyección P_2 se obtiene de la diferencia

$$\begin{aligned} P_2 &= \mathbb{I}_{3 \times 3} - P_{1_S} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ -1 \ 0) + \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} (1 \ 1 \ -2) \end{aligned} \quad (4.51)$$

En este caso, la matriz S unitaria que diagonaliza por bloques se construye en forma análoga al caso anterior. Esto es, $S^{-1}A_iS = \tilde{A}_i$, donde \tilde{A}_i es la matriz diagonal por bloques de los elementos de la representación. Así, S tiene la forma

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{-2\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

La matriz \tilde{A}_i es también llamada matriz jerárquica, porque tiene ordenadas las masas de menor a mayor.

Una vez sentadas las bases matemáticas del grupo de permutaciones S_3 , se puede usar en la Lagrangiana de Yukawa para obtener las matrices de masa, tal como se muestra enseguida.

4.3. Simetría S_3 y Matrices de Masa

En la representación matricial real de 3×3 , dada en las expresiones de la ec. (4.22), las matrices son ortogonales, es decir, el transpuesto de cada elemento del grupo es su inverso. En la representación matricial real de S_3 , el subgrupo formado por los elementos e , A_4 y A_2 tienen determinante uno y son matrices de rotación; los elementos restantes tienen determinante menos uno y no son matrices de rotaciones.

El espacio L_3 tiene dos subespacios bajo la acción de S_3 que corresponden a las dos representaciones irreducibles de S_3 : un singlete simétrico y un doblete de simetría mixta. El conjunto de los vectores de L_3 invariantes bajo la acción del grupo S_3 es el subespacio invariante V_s . Este subespacio es unidimensional, sus elementos son los vectores proporcionales al vector $|v\rangle_S$ definido como:

$$|v\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

El vector $|v\rangle_S$ es un singlete de S_3 , es el singlete simétrico.

El espacio L_3 tiene tres dimensiones, por consiguiente, el subespacio V_2 ortogonal a V_s tiene dos dimensiones. También V_2 es un subespacio invariante bajo la acción de S_3 . Se debe elegir una base apropiada para el subespacio vectorial V_2 . Tomando al conjunto de vectores $|v\rangle_{2A}$ y $|v\rangle_{2S}$ ortogonales entre sí, ortogonales a $|v\rangle_S$ y normalizados a la unidad, se tienen:

$$|v\rangle_{2A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |v\rangle_{2S} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

Los vectores $|v\rangle_S$, $|v\rangle_{2A}$ y $|v\rangle_{2S}$ forman una base completa para L_3 .

Los vectores de V_2 son combinaciones lineales de $|v\rangle_{2A}$ y $|v\rangle_{2S}$. Los vectores $|v\rangle_{2A}$ y $|v\rangle_{2S}$ son antisimétricos y simétricos bajo las permutaciones de los dos primeros índices del sabor.

El acoplamiento de Yukawa en la notación de familias, ec. (4.3), es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\bar{\psi}_{Li}^u Y_{ij}^u \phi \psi_{Rj}^u + \bar{\psi}_{Rj}^d Y_{ij}^d \phi \psi_{Li}^d) \\ & + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\bar{\psi}_{Li}^{\nu_l} Y_{ij}^{\nu_l} \phi \psi_{Rj}^{\nu_l} + \bar{\psi}_{Rj}^l Y_{ij}^l \phi \psi_{Li}^l) + h.c. . \end{aligned} \quad (4.55)$$

Antes del rompimiento de la simetría de norma, los quarks y leptones no tienen masa y la teoría es quirral. Por lo tanto, los espinores izquierdos y derechos se transforman independientemente, esto es:

$$\psi_L^q(x) \rightarrow \psi_L^{q'}(x) = \mathbf{g} \begin{pmatrix} \psi_{1L}^q(x) \\ \psi_{2L}^q(x) \\ \psi_{3L}^q(x) \end{pmatrix}, \quad \psi_L^l(x) \rightarrow \psi_L^{l'}(x) = \mathbf{g} \begin{pmatrix} \psi_{1L}^l(x) \\ \psi_{2L}^l(x) \\ \psi_{3L}^l(x) \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

e igualmente para los espinores derechos

$$\psi_R^q(x) \rightarrow \psi_R^{q'}(x) = \tilde{\mathbf{g}} \begin{pmatrix} \psi_{1R}^q(x) \\ \psi_{2R}^q(x) \\ \psi_{3R}^q(x) \end{pmatrix}, \quad \psi_R^l(x) \rightarrow \psi_R^{l'}(x) = \tilde{\mathbf{g}} \begin{pmatrix} \psi_{1R}^l(x) \\ \psi_{2R}^l(x) \\ \psi_{3R}^l(x) \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

con $q = u, d$ y $l = \nu_l, l$; donde $\mathbf{g} \in S_{3L}$ actúa sobre los espinores izquierdos, y $\tilde{\mathbf{g}} \in S_{3R}$ actúa sobre los espinores derechos.

Así pues, el grupo de la simetría permutacional del sabor de la forma bilineal en la ec. (4.1) es $S_{3L} \times S_{3R}$, cuyos elementos son las parejas $(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$, con $\mathbf{g} \in S_{3L}$ y $\tilde{\mathbf{g}} \in S_{3R}$.

Las corrientes cargadas bajo la acción del grupo de sabor $S_{3L} \times S_{3R}$ se transforman de la siguiente forma:

$$J_\mu^{q\pm} \rightarrow J_\mu'^{q\pm} = \bar{\psi}_L^{u'} \gamma_\mu \psi_L^{d'} + h.c. , \quad (4.58)$$

$$J_\mu^{l\pm} \rightarrow J_\mu'^{l\pm} = \bar{\psi}_L^{\nu_l'} \gamma_\mu \psi_L^{l'} + h.c. , \quad (4.59)$$

sustituyendo las expresiones para $\psi_L^{d'}$, $\psi_L^{u'}$, $\psi_L^{\nu_l'}$ y $\psi_L^{l'}$ se obtiene:

$$J_\mu'^{q\pm} = \bar{\psi}_L^u \mathbf{g}_u^{-1} \mathbf{g}_d \gamma_\mu \psi_L^d + h.c. , \quad (4.60)$$

$$J_\mu'^{l\pm} = \bar{\psi}_L^{\nu_l} \mathbf{g}_{\nu_l}^{-1} \mathbf{g}_l \gamma_\mu \psi_L^l + h.c. . \quad (4.61)$$

De esta expresión, queda claro que las corrientes cargadas J_μ^\pm quedarán invariantes bajo las transformaciones del grupo de simetría de sabor, si y sólo si, \mathbf{g}_u y \mathbf{g}_d , así como \mathbf{g}_{ν_l} y \mathbf{g}_l , son la misma matriz. Esto es, la condición de invariancia de las corrientes cargadas bajo la acción

del grupo de simetría de las familias implica que los campos de los quarks tipo- u y tipo- d se transformen con el mismo grupo y con el mismo elemento del grupo. De forma análoga para el sector leptónico, la invariancia de las corrientes cargadas implica que los neutrinos y los leptones cargados se transformen con el mismo grupo y con el mismo elemento del grupo. A esto se debe que no hayamos puesto un índice u , d , ν o l en los elementos del grupo que aparecen en las expresiones de las ecuaciones (4.56) y (4.57).

Cuando la simetría de norma se rompe espontáneamente, los fermiones adquieren masa y la teoría deja de ser quiral. Por lo tanto, los campos de los quarks tipo- u y tipo- d se transforman de la siguiente forma:

$$\bar{\psi}^q(x) \rightarrow \bar{\psi}^{q'}(x) = \mathbf{g} \begin{pmatrix} \psi_{1L}^q(x) \\ \psi_{2L}^q(x) \\ \psi_{3L}^q(x) \end{pmatrix} + \mathbf{g} \begin{pmatrix} \psi_{1R}^q(x) \\ \psi_{2R}^q(x) \\ \psi_{3R}^q(x) \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

De igual forma los campos de los leptones cargados y los neutrinos se transforman como:

$$\bar{\psi}^l(x) \rightarrow \bar{\psi}^{l'}(x) = \mathbf{g} \begin{pmatrix} \psi_{1L}^l(x) \\ \psi_{2L}^l(x) \\ \psi_{3L}^l(x) \end{pmatrix} + \mathbf{g} \begin{pmatrix} \psi_{1R}^l(x) \\ \psi_{2R}^l(x) \\ \psi_{3R}^l(x) \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

Las componentes de quiralidad izquierda y derecha del mismo campo se transforman con el mismo elemento del grupo. El grupo de la simetría del sabor de las formas bilineales en las ecuaciones (4.60) y (4.61) es el grupo S_3^{diag} cuyos elementos son las parejas $(\mathbf{g}, \mathbf{g}')$ $\mathbf{g} \in S_{3L}$, $\mathbf{g}' \in S_{3R}$ y $\mathbf{g} = \mathbf{g}'$. Claramente, $S_3^{\text{diag}} \subset S_{3L} \times S_{3R}$.

Bajo la acción del grupo de simetría de familias $S_{3L} \times S_{3R}$, el término de masa proveniente del acoplamiento de Yukawa se transforma de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_Y \rightarrow \mathcal{L}'_Y = \bar{\psi}_L^{u'} M_u \psi_R^{u'} + \bar{\psi}_R^{d'} M_d \psi_L^{d'} + \bar{\psi}_L^{\nu_i'} M_{\nu_i} \psi_R^{\nu_i'} + \bar{\psi}_R^{l'} M_l \psi_L^{l'} + h.c., \quad (4.64)$$

sustituyendo las expresiones para $\psi^{q'}$, $\bar{\psi}^{q'}$, $\psi^{l'}$ y $\bar{\psi}^{l'}$ se obtiene:

$$\mathcal{L}'_Y = \bar{\psi}_L^u \mathbf{g}^T M_u \mathbf{g} \psi_R^u + \bar{\psi}_R^d \mathbf{g}^T M_d \mathbf{g} \psi_L^d + \bar{\psi}_L^{\nu_i} \mathbf{g}^T M_{\nu_i} \mathbf{g} \psi_R^{\nu_i} + \bar{\psi}_R^l \mathbf{g}^T M_l \mathbf{g} \psi_L^l + h.c.. \quad (4.65)$$

Por consiguiente, bajo la acción del grupo de sabor S_3^{diag} , las matrices de masas M_q y M_l se transforman de acuerdo con la siguiente regla:

$$\begin{aligned} M'_u &= \mathbf{g}^T M_u \mathbf{g}, & M'_d &= \mathbf{g}^T M_d \mathbf{g}, \\ M'_{\nu_i} &= \mathbf{g}^T M_{\nu_i} \mathbf{g}, & M'_l &= \mathbf{g}^T M_l \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Si se pide que el sector de Yukawa sea invariante bajo la acción del grupo de familia S_3^{diag} se debe cumplir que

$$M'_q = M_q \quad \text{y} \quad M'_l = M_l, \quad (4.67)$$

el sector de Yukawa del Modelo Estándar tiene la simetría de familia si la matriz de masas conmuta con todos los elementos del grupo S_3 , esto es

$$\begin{aligned} [M_{u,S}, \mathbf{g}] &= 0, & [M_{d,S}, \mathbf{g}] &= 0, \\ [M_{\nu_l,S}, \mathbf{g}] &= 0, & [M_{l,S}, \mathbf{g}] &= 0, \end{aligned} \quad (4.68)$$

donde las matrices $M_{q,S}$ y $M_{l,S}$ son las matrices de masas de los quarks y leptones que tienen la simetría de familias.

4.3.1. Representación Tensorial de S_3 y Matrices de Masas

Ahora se hace uso de la representación tensorial de S_3 para obtener las matrices de masa y mezcla en ambos sectores. Con $|v\rangle_S$ y su dual $\langle v|_S$ se puede formar un tensor \mathbf{T}_S de rango 1 invariante bajo la acción de S_3 por la izquierda y la derecha, ecuaciones (4.49) y (4.50),

$$\mathbf{T}_S = |v\rangle_S \langle v|_S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

El tensor \mathbf{T}_2 que se define por la ec. (4.51),

$$\mathbf{T}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (4.70)$$

conmuta con las matrices de la representación matricial real del grupo S_3 , ec. (4.22), y por consiguiente es invariante bajo la acción de S_3^{diag} .

Los tensores \mathbf{T}_S y \mathbf{T}_2 son los proyectores anteriormente obtenidos y satisfacen las relaciones

$$\mathbf{T}_S = \mathbf{T}_S^\dagger, \quad \mathbf{T}_S^2 = \mathbf{T}_S, \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2^\dagger, \quad \mathbf{T}_2^2 = \mathbf{T}_2, \quad \mathbf{T}_S \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_S = 0. \quad (4.71)$$

El tensor \mathbf{T}_2 proyecta sobre el espacio invariante V_2 . Los tensores \mathbf{T}_S y \mathbf{T}_2 descomponen la unidad como $\mathbf{T}_S + \mathbf{T}_2 = \mathbb{I}$. El producto de $|v\rangle_{2A}$ y su dual $\langle v|_{2A}$ forman un tensor \mathbf{T}_{2A} que se representa por la matriz

$$\mathbf{T}_{2A} = |v\rangle_{2A} \langle v|_{2A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.72)$$

De la misma manera, el producto de $|v\rangle_{2S}$ y su dual $\langle v|_{2S}$ forman un tensor \mathbf{T}_{2S} que se representa por la matriz

$$\mathbf{T}_{2S} = |v\rangle_{2S} \langle v|_{2S} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \quad (4.73)$$

Se verifica que $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_{2S} + \mathbf{T}_{2A}$, donde \mathbf{T}_{2S} y \mathbf{T}_{2A} son los proyectores ortogonales.

Se ha supuesto que el campo de Higgs no tiene índice de sabor y que es un singlete bajo el grupo de simetría de las familias. Si el campo de Higgs tiene el siguiente valor de expectación en el vacío $\langle 0|\phi|0\rangle = v$, al romper la simetría de norma se obtienen las matrices de masa hermitianas M^q y M^l de 3×3 :

$$M^q = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Y_{11}^k & Y_{12}^k & Y_{13}^k \\ Y_{21}^{k*} & Y_{22}^k & Y_{23}^k \\ Y_{31}^{k*} & Y_{32}^{k*} & Y_{33}^k \end{pmatrix}, \quad (4.74)$$

donde $k = u, d, \nu_l, l$. Cada uno de los elementos de la matriz de masas se puede escribir como:

$$M^k = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^k e^{i\phi_{ij}^k} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{con } i \neq j \quad (4.75)$$

y

$$M^k = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^k \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{con } i = j. \quad (4.76)$$

En estas expresiones, ϕ_{ij}^k es la fase del elemento M_{ij}^k de la matriz de masas. Con ayuda de la identidad $\mathbf{T}_S + \mathbf{T}_2 = \mathbb{I}$, la matriz M^k se puede descomponer en la suma de un término invariante bajo la acción de S_3^{diag} y otro que no lo es,

$$\begin{aligned} M^k &= (\mathbf{T}_S + \mathbf{T}_2) M^k (\mathbf{T}_S + \mathbf{T}_2) \\ &= \mathbf{T}_S M^k \mathbf{T}_S + \mathbf{T}_2 M^k \mathbf{T}_2 + (\mathbf{T}_S M^k \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_2 M^k \mathbf{T}_S). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Los dos primeros términos en el lado derecho de esta ecuación corresponden a una de las dos representaciones irreducibles $\mathbf{1}_S$ y $\mathbf{2}$ de S_3 . El primer término del lado derecho ($\mathbf{T}_S M^k \mathbf{T}_S$) es invariante respecto de la acción de $S_{3L} \times S_{3R}$. En forma explícita, se tiene que este término es

$$\begin{aligned} M_S^k &= \mathbf{T}_S M^k \mathbf{T}_S \\ &= \frac{v}{3\sqrt{2}} \{ Y_{11}^k + Y_{22}^k + Y_{33}^k + 2|Y_{12}^k| \cos \phi_{12}^k + 2|Y_{13}^k| \cos \phi_{13}^k + 2|Y_{23}^k| \cos \phi_{23}^k \} \mathbf{T}_S. \end{aligned} \quad (4.78)$$

El segundo término en el lado derecho de la ec. (4.77) nos da las proyecciones de la matriz de masas en el doblete de S_3 , este término se escribe de la siguiente forma:

$$\mathbf{T}_2 M^k \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_{2A} M^k \mathbf{T}_{2A} + \mathbf{T}_{2S} M^k \mathbf{T}_{2S} + (\mathbf{T}_{2A} M^k \mathbf{T}_{2S} + \mathbf{T}_{2S} M^k \mathbf{T}_{2A}). \quad (4.79)$$

Los primeros dos términos en el lado derecho de esta ecuación, bajo la acción del grupo de permutaciones de los primeros dos índices de familia, S_2 , se transforman como un singlete antisimétrico y un singlete simétrico con componentes $2A$ y $2S$, estos son los elementos del doblete de S_3 .

El término antisimétrico es el siguiente:

$$\mathbf{T}_{2A} M^k \mathbf{T}_{2A} = \frac{1}{2} \{ Y_{11}^k + Y_{22}^k - 2|Y_{12}^k| \cos \phi_{12}^k \} \mathbf{T}_{2A}. \quad (4.80)$$

Para el término simétrico es el siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{2S} M^k \mathbf{T}_{2S} &= \frac{1}{6} \{ Y_{11}^k + Y_{22}^k + 4Y_{33}^k + 2 |Y_{12}^k| \cos \phi_{12}^k \\ &\quad - 4 |Y_{23}^k| \cos \phi_{23}^k - 4 |Y_{13}^k| \cos \phi_{13}^k \} \mathbf{T}_{2S}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

El tercer término del lado derecho de la ec. (4.79) mezcla las componentes del doblete,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{2A} M^k \mathbf{T}_{2S} + \mathbf{T}_{2S} M^k \mathbf{T}_{2A} &= \{ Y_{11}^k - Y_{22}^k - 2 |Y_{13}^k| \cos \phi_{13}^k + 2 |Y_{23}^k| \cos \phi_{23}^k \} \mathbf{T}^+ \\ &\quad - 2 \{ |Y_{13}^k| \sin \phi_{13}^k - |Y_{12}^k| \sin \phi_{12}^k - |Y_{23}^k| \sin \phi_{23}^k \} \mathbf{T}^-. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Los tensores que ocurren en el lado derecho de la ec. (4.82) son los siguientes:

$$\mathbf{T}^+ = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = |v\rangle_{2S} \langle v|_{2A} + |v\rangle_{2A} \langle v|_{2S} \quad (4.83)$$

y

$$\mathbf{T}^- = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix} = i (|v\rangle_{2S} \langle v|_{2A} - |v\rangle_{2A} \langle v|_{2S}). \quad (4.84)$$

Los términos proporcionales a los tensores \mathbf{T}^+ y \mathbf{T}^- mezclan las componentes del doblete de S_3 . El tercer término de la ec. (4.77),

$$M_A^k = \mathbf{T}_S M^k \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_2 M^k \mathbf{T}_S, \quad (4.85)$$

no es invariante bajo la acción de S_3^{diag} ,

$$M_A^k \neq A_i^T (\mathbf{T}_S M^k \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_2 M^k \mathbf{T}_S) A_i. \quad (4.86)$$

El término no-simétrico M_A^k mezcla las representaciones irreducibles de singlete y de doblete de S_3 . Este término se puede escribir como

$$M_A^k = (\mathbf{T}_S M^k \mathbf{T}_{2A} + \mathbf{T}_{2A} M^k \mathbf{T}_S) + (\mathbf{T}_S M^k \mathbf{T}_{2S} + \mathbf{T}_{2S} M^k \mathbf{T}_S). \quad (4.87)$$

El primer término en el lado derecho de la ec. (4.87) se escribe de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{T}_S M^k \mathbf{T}_{2A} + \mathbf{T}_{2A} M^k \mathbf{T}_S) = \\ &= \frac{1}{6} \{ Y_{11}^k - Y_{22}^k + |Y_{13}^k| \cos \phi_{13}^k - |Y_{23}^k| \cos \phi_{23}^k \} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{6} \{ 2 |Y_{12}^k| \sin \phi_{12}^k + |Y_{13}^k| \sin \phi_{13}^k - |Y_{23}^k| \sin \phi_{23}^k \} \begin{pmatrix} 0 & -2i & -i \\ 2i & 0 & i \\ i & -i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

El segundo término de la ec. (4.87) es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{T}_S M^k \mathbf{T}_S + \mathbf{T}_S M^k \mathbf{T}_S) &= \frac{1}{18} \{ Y_{11}^k + Y_{22}^k - 2Y_{33}^k + 2|Y_{12}^k| \cos \phi_{12}^k \\
 &\quad - |Y_{23}^k| \cos \phi_{23}^k - |Y_{13}^k| \cos \phi_{13}^k \} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \{ |Y_{13}^k| \sin \phi_{13}^k + |Y_{23}^k| \sin \phi_{23}^k \} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i \\ i & i & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.89}
 \end{aligned}$$

los términos proporcionales a estos tensores mezclan las representaciones irreducibles de singlete y doblete de S_3 . El tensor \mathbf{T}_Z rompe la simetría permutacional S_3 y mezcla la componente simétrica $\mathbf{2}_S$ del doblete de S_3 con el singlete de S_3

$$\mathbf{T}_Z = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} = |v\rangle_S \langle v|_{2S} + |v\rangle_{2S} \langle v|_S. \tag{4.90}$$

Este tensor se puede escribir como la suma de dos términos

$$\mathbf{T}_Z = \frac{2}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.91}$$

El tensor \mathbf{T}_Z es de gran utilidad para caracterizar el patrón de rompimiento de la simetría S_3 .

En consecuencia, bajo la acción del grupo S_3^{diag} , el término de masa proveniente de los acoplamientos de Yukawa, en el caso de tres familias de fermiones, se puede descomponer en la suma de tres términos:

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_{YS} [\mathbf{T}_S M^k \mathbf{T}_S] + \mathcal{L}_{Y2} [\mathbf{T}_2 M^k \mathbf{T}_2] + \mathcal{L}_{YA} [(\mathbf{T}_S M^k \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_2 M^k \mathbf{T}_S)]. \tag{4.92}$$

El término \mathcal{L}_{YS} es invariante bajo el intercambio del índice de familias,

$$\psi \longrightarrow \psi' = A_i \psi, \tag{4.93}$$

pero los términos \mathcal{L}_{Y2} y \mathcal{L}_{YA} no lo son.

La condición de invariancia de \mathcal{L}_Y respecto de $S_{3L} \times S_{3R}$ se satisface si se anulan los coefi-

cientes de las ecuaciones (4.80), (4.81), (4.82), (4.88) y (4.89)

$$\begin{aligned}
Y_{11}^k + Y_{22}^k - 2|Y_{12}^k| \cos \phi_{12}^k &= 0, \\
Y_{11}^k + Y_{22}^k + 4Y_{33}^k + 2|Y_{12}^k| \cos \phi_{12}^k - 4|Y_{23}^k| \cos \phi_{23}^k - 4|Y_{13}^k| \cos \phi_{13}^k &= 0, \\
Y_{11}^k - Y_{22}^k - 2|Y_{13}^k| \cos \phi_{13}^k + 2|Y_{23}^k| \cos \phi_{23}^k &= 0, \\
|Y_{13}^k| \sin \phi_{13}^k - |Y_{12}^k| \sin \phi_{12}^k - |Y_{23}^k| \sin \phi_{23}^k &= 0, \\
Y_{11}^k - Y_{22}^k + |Y_{13}^k| \cos \phi_{13}^k - |Y_{23}^k| \cos \phi_{23}^k &= 0, \\
2|Y_{12}^k| \sin \phi_{12}^k + |Y_{13}^k| \sin \phi_{13}^k - |Y_{23}^k| \sin \phi_{23}^k &= 0, \\
Y_{11}^k + Y_{22}^k - 2Y_{33}^k + 2|Y_{12}^k| \cos \phi_{12}^k - |Y_{23}^k| \cos \phi_{23}^k - |Y_{13}^k| \cos \phi_{13}^k &= 0, \\
|Y_{13}^k| \sin \phi_{13}^k + |Y_{23}^k| \sin \phi_{23}^k &= 0.
\end{aligned} \tag{4.94}$$

Estas condiciones se satisfacen si $Y_{11}^k = Y_{ij}^k$ para todos los valores de i, j ($i, j = 1, 2, 3$) y si las fases toman los valores $\phi_{12}^k = 0, \pi$, y $\phi_{13}^k = \phi_{23}^k = 0$. Se sigue de aquí que las matrices de masas para los fermiones, que resultan de la condición de invariancia de \mathcal{L}_Y bajo la acción del grupo de la simetría permutacional del sabor $S_{3L} \times S_{3R}$, tienen en la representación de norma, la forma siguiente:

$$M_S^k = \frac{v}{\sqrt{2}} 3Y_{33}^k \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.95}$$

con eigenvalores dados por

$$\lambda_{1,2} = 0 \quad y \quad \lambda_3 = \frac{v}{\sqrt{2}} 3Y_{33}^k, \tag{4.96}$$

y con los siguientes eigenvectores

$$|v\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |v\rangle_{2A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |v\rangle_{2S} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \tag{4.97}$$

La matriz M_S^k conmuta con todos los elementos del grupo S_3 .

Las matrices U^k , con $k = u, d, l, \nu_l$, que transforman los campos de los fermiones de la representación adaptada a la simetría ó representación jerárquica son:

■ Para los quarks

$$\begin{aligned}
u' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^u - \psi_2^u), & d' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^d - \psi_2^d), \\
c' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^u + \psi_2^u - 2\psi_3^u), & s' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^d + \psi_2^d - 2\psi_3^d), \\
t' &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_1^u + \psi_2^u + \psi_3^u), & b' &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_1^d + \psi_2^d + \psi_3^d).
\end{aligned} \tag{4.98}$$

- Para los leptones

$$\begin{aligned}
\nu'_e &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^{\nu_l} - \psi_2^{\nu_l}), & e' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^l - \psi_2^l), \\
\nu'_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^{\nu_l} + \psi_2^{\nu_l} - 2\psi_3^{\nu_l}), & \mu' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^l + \psi_2^l - 2\psi_3^l), \\
\nu'_\tau &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_1^{\nu_l} + \psi_2^{\nu_l} + \psi_3^{\nu_l}), & \tau' &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_1^l + \psi_2^l + \psi_3^l).
\end{aligned} \tag{4.99}$$

De este modo, se asigna el fermión pesado al singlete y los dos fermiones más ligeros a cada una de las componentes del doblete. Así, cada campo de los quarks y leptones queda en una representación irreducible de S_3 .

La Lagrangiana en la representación jerárquica o adaptada a la simetría tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y^m &= \frac{v}{\sqrt{2}} 3Y_{33}^u \bar{\psi}^{u'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \psi^{u'} + \frac{v}{\sqrt{2}} 3Y_{33}^d \bar{\psi}^{d'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \psi^{d'} \\
&+ \frac{v}{\sqrt{2}} 3Y_{33}^{\nu_l} \bar{\psi}^{\nu_l'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \psi^{\nu_l'} + \frac{v}{\sqrt{2}} 3Y_{33}^l \bar{\psi}^{l'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \psi^{l'}.
\end{aligned} \tag{4.100}$$

La matriz de masas es diagonal en la representación adaptada a la simetría y, por consiguiente, esta es también la representación en la base de masas. Cada campo de los quarks y los leptones queda asignado a una representación irreducible de S_3 .

Las matrices U^k , ($k = u, d, \nu_l, l$) que diagonalizan a las matrices de masas de los quarks y leptones, satisfacen las siguientes condiciones:

$$U^d = U^u, \quad U^l = U^{\nu_l}. \tag{4.101}$$

La matriz de mezclas de los quarks V_{CKM} para tres familias

$$V_{CKM} = U^u U^{d\dagger}, \tag{4.102}$$

es la matriz unidad y no mezcla a los campos de los quarks,

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.103}$$

En forma similar, para la matriz de mezclas de los leptones U_{PMNS} para tres familias

$$U_{PMNS} = U_l^\dagger U_\nu \tag{4.104}$$

es la matriz unidad y no mezcla a los campos de los leptones

$$U_{PMNS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.105)$$

Esto es, la invariancia de \mathcal{L}_{YS} respecto de la simetría permutacional S_3^{diag} implica que los ángulos de mezclas sean nulos y que no haya relación funcional con las masas de los fermiones, esto no puede ser porque de acuerdo con los datos experimentales actuales todos los ángulos de mezcla del sabor en el Modelo Estándar son distintos de cero. Para obtener un valor no nulo de los ángulos de mezcla y encontrar una relación funcional entre ángulos de mezcla y masas de fermiones, es necesario romper la simetría permutacional S_3 . Para romper la simetría permutacional S_3 , basta con sumar a la matriz de masas de los fermiones otros tensores con propiedades de transformación definidas bajo la acción del grupo S_3 . Tal como se verá en el siguiente capítulo.

Simetría S_3 y Ceros de Textura

En física de partículas, un enfoque fenomenológico y teóricamente significativo para reducir el número de parámetros en el Modelo Estándar es la imposición de ceros de textura o de simetrías del sabor [23, 70]. Además, algunos ceros de textura se puede obtener a partir de una simetría del sabor. Una simetría permutacional del sabor ha sido propuesta por muchos autores con el objetivo de poner constricciones en las matriz de masas de los fermiones y en los parámetros de mezcla [71, 72, 73, 74]. Algunos modelos de simetría del sabor recientes se examinan en [75, 76, 77, 78, 79], ver también las referencias en ellos. Se han propuesto varios esquemas del rompimiento de la simetría basados en el grupo no abeliano $S_{3L} \times S_{3R}$, el cual se rompe de acuerdo a la siguiente cadena: $S_{3L} \times S_{3R} \supset S_{2L} \times S_{2R} \supset S_2^{\text{diag}}$. El grupo S_3 trata tres objetos simétricamente en tanto que la naturaleza de las matrices de Yukawa es una consecuencia de las representaciones irreducibles $\mathbf{1} \oplus \mathbf{2}$ de S_3 , que tratan a las tres generaciones de manera diferente. Distintas estimaciones para el rompimiento de la simetría permutacional dan origen a diferentes matrices de masas hermitianas M^k de la misma forma genérica de dos ceros de textura, las cuales en una base adaptada a la simetría, difieren en el valor numérico de la razón $Z^{\frac{1}{2}} = \frac{(M^k)_{23}}{(M^k)_{22}}$. En particular, el caso que es de especial interés para este trabajo es el de una simetría del sabor S_3 y su rompimiento explícito secuencial, que justifican tomar la misma forma genérica para las matrices de masas de los fermiones de Dirac, convencionalmente llamada matriz con dos ceros de textura [80, 81, 58].

En este capítulo, se usa la simetría permutacional S_3 y su rompimiento explícito, como una simetría del sabor, en un tratamiento unificado de las masas y mezclas de los quarks y los leptones. Además, con la ayuda de la representación matricial real del grupo S_3 , como base para las matrices de transformación de las clases de similitud, se hace una clasificación del conjunto de matrices de masas con ceros textura.

Algunas de las razones para proponer la validez de una matriz con dos ceros de textura como una forma universal de las matrices de masas de todos los fermiones de Dirac en la teoría son las siguientes:

- La idea de una simetría del sabor S_3 y su rompimiento explícito se han realizado exito-

samente en el sector de los quarks como una matriz de masas con dos ceros de textura, con esto se interpreta la jerarquía de masas muy pronunciada de los quarks tipo up y down [71, 72, 73, 74, 80, 81]. Además, los valores numéricos de la matriz de mezclas de los quarks determinados en este marco, se encuentran en buen acuerdo con los datos experimentales [80, 81].

- Los ángulos de mezcla de los quarks y la fase de violación de CP, que aparece en la matriz de mezclas V_{CKM} , se calcularon como funciones explícitas y exactas de las cuatro razones de masas de los quark $(m_u/m_t, m_c/m_t, m_d/m_b, m_s/m_b)$, un parámetro de rompimiento de la simetría definido como $Z^{\frac{1}{2}} = \frac{(M^k)_{23}}{(M^k)_{22}}$, y una fase de violación de CP $\phi_{u-d} = \phi_u - \phi_d$. Asumiendo que $Z_u = Z_d = Z$, un ajuste de χ^2 de la expresión teórica para V_{CKM}^{th} a los valores de V_{CKM}^{exp} determinados experimentalmente, da como resultado $Z^{1/2} = \left(\frac{81}{32}\right)^{1/2}$ y $\phi_{u-d} = 90^\circ$, en buen acuerdo con los datos experimentales [80, 81]. Este acuerdo ha mejorado conforme a la precisión de los datos experimentales ha mejorado y, ahora, es muy buena [11].
- Dado que el espectro de masas de los leptones cargados exhibe una jerarquía similar a una de los quarks, sería natural considerar la misma simetría S_3 y su rompimiento explícito para justificar el uso de la forma genérica con dos ceros de textura, para describir la matriz de masas de los leptones cargados.
- En cuanto a los neutrinos de Dirac, no tenemos información directa acerca de los valores absolutos o relativos de las masas de los neutrinos de Dirac, pero la matriz de masas con dos ceros de textura se puede obtener de una teoría de gran unificación $SO(10)$, la cual describe bien los datos de las masas y mezclas de los neutrinos [82, 83, 84]. Por otra parte, de argumentos de supersimetría, sería razonable suponer que los neutrinos de Dirac tienen una jerarquía de masas similar a la de los quarks up. Por lo tanto, sería muy natural describir a la matriz de masas de los neutrinos de Dirac a través de una matriz con dos ceros de textura.

Por otra parte, en los últimos diez años, importantes avances teóricos se han hecho en la comprensión de los mecanismos para la generación de la masa de los fermiones y la mezcla del sabor. Fenomenológicamente, algunos progresos notables se han realizado con la ayuda de los ceros de textura y de las simetrías del sabor, al especificar relaciones cuantitativa entre los ángulos de mezcla del sabor y las razones de masas de los quarks o leptones [80, 81, 58, 70, 7, 85], con un mínimo de parámetros libres. De hecho, cabe señalar que diferentes matrices de masa con ceros de textura situados en diferentes posiciones pueden tener exactamente el mismo contenido físico. Por lo tanto, surge la pregunta, ¿hay alguna relación entre estas matrices? Aquí se da una respuesta a esta cuestión, a través de las clases de similitud, propuesta recientemente hecha por Branco [86].

En este trabajo, los ceros de textura en una matriz se cuentan de la siguiente manera: dos ceros de textura fuera de la diagonal cuentan como un cero, mientras que uno sobre la diagonal cuenta como un cero [23]. Pero en la literatura se dice que una matriz de masas tiene el doble

de ceros de textura que el número obtenido con la regla anterior. Esto es así, porque en la literatura normalmente se hace un tratamiento en paralelo de las matrices de masas, es decir, las matrices de masas de ambos sectores de los quarks (quarks tipo- u y $-d$) o leptones (leptones cargados y neutrinos izquierdos) contienen la misma cantidad de ceros de textura. Por lo cual, el número total de ceros de textura en una matriz de masas es la suma de los ceros de textura procedentes de las dos matrices de masas en el sector de los quarks (quarks tipo- u y $-d$) o leptónico (leptones cargados y neutrinos izquierdos). Por lo tanto, para evitar la confusión en la nomenclatura de las matrices se adopta la siguiente convención:

1. Se contará el número de ceros de textura en una matriz con la regla anteriormente enunciada. Así, cuando se haga referencia a una matriz de masas, se hará con el número exacto de ceros que esta contenga.
2. Cuando se trabaje con la matriz de mezclas de los quarks V_{CKM} o los leptones U_{PMNS} , se tendrá que especificar el número total de ceros de textura presentes en ambas matrices de masas del sector de los quarks o leptónico. Por ejemplo, en un tratamiento paralelo donde las matrices de masas los quarks tipo- u y $-d$ son descritas por una matriz con dos ceros de textura, la matriz de mezclas de los quarks V_{CKM} está en un marco teórico con cuatro ceros de textura.

5.1. Masas a partir del rompimiento de $S_{3L} \times S_{3R}$

Las matrices de masa realistas de los quarks y leptones surgen de la simetría permutacional del sabor $S_{3L} \times S_{3R}$ y su rompimiento espontáneo o explícito. El grupo S_3 trata tres objetos de manera simétrica, en tanto que la naturaleza jerárquica de las matrices de masas es una consecuencia de la estructura de las representaciones irreducibles $\mathbf{1} \oplus \mathbf{2}$ de S_3 , las cuales tratan a las generaciones de manera diferente. Bajo la acción de la simetría exacta $S_{3L} \times S_{3R}$, el espectro de masas para los sectores de los quarks y leptones (leptones cargados y neutrinos de Dirac), consiste de una partícula masiva en una representación de singlete y un par de partículas de masa nula en una representación irreducible de doblete. En la base débil, la matriz de masas con la simetría exacta $S_{3L} \times S_{3R}$ es [87]:

$$M'_{3k,W} = \frac{m_{3k,W}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_W, \quad (5.1)$$

donde $m_{3k,W}$ denota la masa de la tercera familia, ya sea de los quarks o leptones. Para generar masa para la segunda familia, se tiene que romper la simetría permutacional $S_{3L} \times S_{3R}$ a $S_{2L} \times S_{2R}$. Esto se puede hacer sumando a $\bar{q}_L \left(M'_{3q,W} \right) q_R$ y $\bar{l}_L \left(M'_{3l,W} \right) l_R$ un término de la forma $\bar{q}_L \left(M'_{2q,W} \right) q_R$ y $\bar{l}_L \left(M'_{2l,W} \right) l_R$, respectivamente. Dichos términos son invariantes bajo la acción de $S_{2L} \times S_{2R}$ pero rompen la simetría $S_{3L} \times S_{3R}$. La forma más general de una matriz $M'_{2k,W}$ que es invariante bajo las permutaciones de los primeros dos renglones o dos columnas

es:

$$M'_{2k,W} = m_{3k,W} \begin{pmatrix} \alpha' & \alpha' & \beta' \\ \alpha' & \alpha' & \beta' \\ \beta' & \beta' & \gamma \end{pmatrix}_W. \quad (5.2)$$

Sin pérdida de generalidad, se puede descomponer esta matriz en la suma de un término invariante bajo $S_{3L} \times S_{3R}$ más una matriz de traza nula $M_{2k,W}$, invariante bajo $S_{2L} \times S_{2R}$, esto es:

$$M'_{2k,W} = \frac{m_{3k,W}}{3} \left\{ (2\alpha' + \gamma) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_W + \begin{pmatrix} \alpha' - \gamma & \alpha' - \gamma & 3\beta' - 2\alpha' - \gamma \\ \alpha' - \gamma & \alpha' - \gamma & 3\beta' - 2\alpha' - \gamma \\ 3\beta' - 2\alpha' - \gamma & 3\beta' - 2\alpha' - \gamma & -(2\alpha' - \gamma) \end{pmatrix}_W \right\}. \quad (5.3)$$

El primero término en el lado derecho de la ec. (5.3) se suma al término $M'_{3k,W}$:

$$M'_{3k,W} = \frac{m_{3k,W}}{3} (1 - \Delta_k) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_W, \quad (5.4)$$

donde Δ_k sustituye al factor $-(2\alpha' + \gamma)$. El segundo término en el lado derecho de la ec. (5.3) da la forma más general de la matriz de traza nula $M_{2k,W}$, que rompe $S_{3L} \times S_{3R}$ a $S_{2L} \times S_{2R}$, y da masa a la segunda familia, se expresa como

$$M_{2k,W} = \frac{m_{3k,W}}{3} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & -2\alpha \end{pmatrix}_W, \quad (5.5)$$

donde $\alpha \equiv (\alpha' - \gamma)$ y $\beta \equiv (3\beta' - 2\alpha' - \gamma)$.

Es evidente de la expresión (5.5) que $M_{2k,W}$ es una combinación lineal de dos matrices numéricamente independientes,

$$M_{2k,W} = \frac{m_{3k,W}}{3} \left(\sqrt{8} \alpha M_{2k,W}^A + 2 \beta M_{2k,W}^S \right) \quad (5.6)$$

donde

$$M_{2k,W}^A = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}_W \quad \text{y} \quad M_{2k,W}^S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_W. \quad (5.7)$$

Esta propiedad se utilizará más adelante para caracterizar el patrón de rompimiento de la simetría.

Ahora hay que romper la simetría $S_{2L} \times S_{2R}$. Para dar masa a la primera familia, se agrega otro término M_{1k} a la matriz de masas. Suponiendo que M_{1k} se transforma como el término de

simetría mixta del subgrupo $S_{2L} \times S_{2R}$ del grupo $S_{3L} \times S_{3R}$, que mezcla las representaciones irreducibles en el doblete $S_{2L} \times S_{2R}$. Así, colocando a la primera familia en una representación compleja, permitirá tener una fase que viola CP en la matrices de mezclas. Entonces, en la base débil, M_{1k} está dada por

$$M_{1k} = \frac{m_{3k,W}}{3} \begin{pmatrix} A_1 & iA_2 & -A_1 - iA_2 \\ -iA_2 & -A_1 & A_1 + iA_2 \\ -A_1 + iA_2 & A_1 - iA_2 & 0 \end{pmatrix}_W \quad (5.8)$$

Para finalizar, se suman las tres matrices dadas en las ecuaciones (5.4), (5.5) y (5.8).

5.1.1. Matriz de Masas con Dos Ceros de Textura

La asignación de los fermiones del Modelo Estándar a las representaciones irreducibles de $S_{3L} \times S_{3R}$ se hace más explícita al hacer un cambio de base, de la base débil a la base jerárquica o adaptada a la simetría. En esta base, los campos de los quarks son:

$$\begin{aligned} q_{1q,H}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (q_{1q,W}(x) - q_{2q,W}(x)), \\ q_{2q,H}(x) &= \frac{1}{\sqrt{6}} (q_{1q,W}(x) + q_{2q,W}(x) - 2q_{3q,W}(x)), \\ q_{3q,H}(x) &= \frac{1}{\sqrt{3}} (q_{1q,W}(x) + q_{2q,W}(x) + q_{3q,W}(x)). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Mientras que para los campos leptónicos son:

$$\begin{aligned} l_{1l,H}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (l_{1l,W}(x) - l_{2l,W}(x)), \\ l_{2l,H}(x) &= \frac{1}{\sqrt{6}} (q_{1l,W}(x) + q_{2l,W}(x) - 2q_{3q,W}(x)), \\ l_{3l,H}(x) &= \frac{1}{\sqrt{3}} (q_{1l,W}(x) + q_{2l,W}(x) + q_{3l,W}(x)). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Aquí, el subíndice H denota a la base jerárquica. En esta base jerárquica, los fermiones de la tercera familia están asignados a la representación irreducible invariante de singlete, $q_{3q,H}(x)$ y $l_{3l,H}(x)$, para los quarks y leptones, respectivamente. Las otras dos familias están asignadas a las dos componentes de las representaciones irreducibles de doblete, $q_{2q,H}(x)$ y $q_{1q,H}(x)$, para los quarks, así como $l_{2l,H}(x)$ y $l_{1l,H}(x)$ para los leptones. La matriz de masas $M_{1k,H}$ en la base adaptada a la simetría está relacionada a la matriz de masas en la base débil por la transformación unitaria

$$M_{k,H} = \mathcal{U}^\dagger M_{k,W} \mathcal{U} \quad (5.11)$$

donde

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

En esta base, M_k toma la forma

$$M_{k,H} = m_{k3} \left[\left(\begin{array}{ccc} 0 & |A_k|e^{i\phi_i} & 0 \\ |A_k|e^{-i\phi_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)_H + \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_k + \delta_k & C_k \\ 0 & C_k & \Delta_k - \delta_k \end{array} \right)_H \right. \\ \left. + \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \Delta_k \end{array} \right)_H \right].$$

La expresión anterior se puede reescribir como

$$M_{k,H} = m_{k3} \left(\begin{array}{ccc} 0 & A_k & 0 \\ A_k^* & B_k & C_k \\ 0 & C_k & D_k \end{array} \right)_H, \quad (5.13)$$

donde $A_k = |A_k|e^{i\phi_k}$, $B_k = -\Delta_k + \delta_k$ y $D_k = 1 - \delta_k$. Además, la matriz $M_{k,H}$ se puede reescribir factorizando la fase como

$$M_{k,H} = P_k^\dagger \overline{M}_{k,H} P_k, \quad (5.14)$$

donde P_k es una matriz diagonal de fases de la forma,

$$P_k = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_k} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_k} \end{array} \right) \quad (5.15)$$

y $\overline{M}_{k,H}$ es una matriz simétrica real

$$\overline{M}_{k,H} = m_{k3} \left(\begin{array}{ccc} 0 & |A_k| & 0 \\ |A_k| & B_k & C_k \\ 0 & C_k & D_k \end{array} \right). \quad (5.16)$$

Ahora, de la jerarquía tan marcada en las masas de los fermiones de Dirac, $m_{k3} \gg m_{k2} > m_{k1}$, se espera que el término $1 - \delta_k$ esté muy cerca de la unidad. El parámetro δ_k es una función del parámetro de rompimiento de la simetría $Z_k^{1/2}$ [80, 81, 58]. En otras palabras, cada posible patrón de simetría rota es ahora caracterizado por $Z_k^{1/2}$, el cual se define como la razón $Z_k^{1/2} = \frac{(M_k)_{23}}{(M_k)_{22}}$. Esta razón mide la mezcla de las representaciones irreducibles de singlete y doblete de S_3 .

El Patrón del Rompimiento de la Simetría

En la base adaptada a la simetría, $M_{3k,H}$ es una representación tensorial irreducible del singlete de $S_{3L} \times S_{3R}$,

$$M_{3k,H} = m_{3k} (1 - \Delta_k) \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)_H. \quad (5.17)$$

En esta misma base, el término $M_{2k,H}$ que rompe $S_{3L} \times S_{3R}$ a $S_{2L} \times S_{2R}$ está dado por

$$M_{2k,H} = m_{3k} \left(-\Delta_k + \delta_k \left(Z_k^{1/2} \right) \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & Z_k^{1/2} \\ 0 & Z_k^{1/2} & -1 \end{pmatrix}_H. \quad (5.18)$$

El patrón de rompimiento de la simetría está caracterizado por el parámetro $Z_k^{1/2}$, el cual mide la mezcla de las representaciones irreducibles de singlete y doblete de $S_{3L} \times S_{3R}$. La descomposición de $M_{2k,W}$ en una combinación lineal de dos matrices numéricas, dada en las ecuaciones (5.6) y (5.7), toma la forma

$$M_{2k,H} = m_{3k} \left(-\Delta_k + \delta_k \right) \left\{ 3\sqrt{2} N_{Ak} M_{2,H}^A + \frac{3}{2} N_{Sk} M_{2,H}^S \right\} \quad (5.19)$$

donde las matrices $M_{2,H}^A$ y $M_{2,H}^S$ tienen la forma:

$$M_{2,H}^A = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{8} \\ 0 & -\sqrt{8} & -1 \end{pmatrix}_H \quad \text{y} \quad M_{2,H}^S = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{8}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} & -1 \end{pmatrix}_H, \quad (5.20)$$

que son de la misma forma que $M_{2k,H}$ con parámetros de mezcla $-\sqrt{8}$ y $\frac{1}{\sqrt{8}}$, respectivamente. Los coeficientes N_{Ak} y N_{Sk} están dados por

$$N_{Ak} = \left(\frac{1}{\sqrt{8}} - Z_k^{1/2} \right) \quad \text{y} \quad N_{Sk} = \left(\sqrt{8} + Z_k^{1/2} \right). \quad (5.21)$$

Es evidente de las ecuaciones (5.18)-(5.21) que existe una descomposición correspondiente del parámetro de mezcla $Z_k^{1/2}$,

$$Z_k^{1/2} = N_{Ak} Z_A^{1/2} + N_{Sk} Z_S^{1/2}, \quad (5.22)$$

con

$$1 = N_{Ak} + N_{Sk}, \quad (5.23)$$

donde $Z_A^{1/2} = -\sqrt{8}$ es el parámetro de mezcla en la matriz $M_{2,H}^A$, y $Z_S^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{8}}$ es el parámetro de mezcla en $M_{2,H}^S$. En esta forma, una combinación lineal única de $Z_A^{1/2}$ y $Z_S^{1/2}$ es asociada al patrón de rompimiento de la simetría caracterizado por $Z_k^{1/2}$.

Hay que notar que los términos que rompe la simetría en la Lagrangiana de Yukawa, $\bar{q}_L (M_{2q}) q_R$ para los quarks y $\bar{l}_L (M_{2l}) l_R$ para los leptones, dependen sólo de dos campos cada uno. De acuerdo a las ecuaciones (5.19) y (5.20), los términos $\bar{q}_L (M_{2q,H}) q_R$ para los quarks y $\bar{l}_L (M_{2l,H}) l_R$ para los leptones, se separan en la suma de un término proporcional a $M_{2,H}^A$ que cambia de signo bajo el intercambio de esos dos campos, más otro término proporcional a $M_{2,H}^S$ que es invariante bajo el mismo intercambio. Entonces, la descomposición de $M_{2k,H}$ dada en la ec. (5.22) es equivalente a la descomposición de los términos $\bar{q}_L (M_{2q,H}) q_R$ y $\bar{l}_L (M_{2l,H}) l_R$, en

una parte simétrica y antisimétrica bajo el intercambio de esos dos campos. Así, la caracterización de M_{2k} y $Z_k^{1/2}$ como una combinación lineal de M_2^A y M_2^S , $Z_A^{1/2}$ y $Z_S^{1/2}$, respectivamente, es equivalente a una clasificación del patrón de rompimiento de la simetría definido por $M_{2k,H}$ en términos de las representaciones irreducibles del grupo S_2 de las permutaciones de los dos campos¹.

5.2. Clasificación de Ceros de Textura

El hecho que diferentes matrices de masa con ceros de textura situados en diferentes posiciones pueden tener exactamente el mismo contenido físico, hace que surja la pregunta, *¿hay alguna relación entre estas matrices?* En esta sección se da una respuesta a esta pregunta, a través de una clasificación de las matrices de masas con ceros de textura.

Esta clasificación de las matrices con ceros de textura, se hace a través de las clases de similitud. Las clases de similitud se definen como sigue:

Dadas dos matrices M y M' se dice que M es semejante a M' si existe una matriz invertible T para la cual

$$M' = TMT^{-1} \quad \text{o} \quad M' = T^{-1}MT. \quad (5.24)$$

Las clases de equivalencia asociadas a semejanza se llaman clases similitud. Otra forma de ver las clases de similitud es que las matrices que satisfacen la transformación de semejanza, ec. (5.24), tienen los mismos invariantes: determinante, traza y χ . Es decir,

$$\text{Tr} \{M\} = \text{Tr} \{M'\}, \quad \det \{M\} = \det \{M'\} \quad \text{y} \quad \chi' = \chi, \quad (5.25)$$

donde el invariante χ se define como:

$$\chi \equiv \frac{1}{2} (\text{Tr} \{M^2\} - \text{Tr} \{M\}^2). \quad (5.26)$$

Por lo tanto, todas las matrices que componen a una clase de similitud tienen los mismos eigenvalores, ya que todos tienen el mismo polinomio característico, dado por

$$\lambda_i^3 - \text{Tr} \{M\} \lambda_i^2 - \chi \lambda_i - \det \{M\} = 0. \quad (5.27)$$

La forma más general de la matriz de masas de 3×3 , simétrica y Hermitiana, es:

$$M^s = \begin{pmatrix} g & a & e \\ a & b & c \\ e & c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M^h = \begin{pmatrix} g & a & e \\ a^* & b & c \\ e^* & c^* & d \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

donde sólo seis de los nueve elementos de estas matrices son independientes uno del otro. Por lo tanto, en cierto sentido, la transformación de semejanza de la ec. (5.24) realiza la permutación

¹Para más detalles sobre los patrones de rompimiento de la simetría ver las secciones 5.6 y 5.7 de la tesis de doctorado de Ezequiel Rodriguez [87]

de los seis elementos independientes en las nueve entradas de las matrices. Pero si quiere preservar los invariantes de la ecuaciones (5.25) y (5.26), los elementos de la diagonal sólo pueden intercambiarse las posiciones sobre la diagonal, mientras que los elementos fuera de la diagonal sólo pueden intercambiar posiciones fuera de la diagonal. En consecuencia, se puede concluir que todas estas operaciones se reducen a las permutaciones de tres objetos. Así, resulta muy natural proponer como matrices de transformación T a los seis elementos de la representación matricial real de 3×3 del grupo de permutaciones S_3 , las cuales son:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(A_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T(A_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(A_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(A_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Entonces, aplicando las transformaciones dadas en la ec. (5.24) y tomando las matrices de la ec. (5.29) como matrices de transformación, se obtiene la clasificación de las matrices de masas con ceros de textura. Dicha clasificación se muestra en los Cuadros 5.1-5.4. En estos cuadros, la “ \star ” and “ \times ” denotan a un elemento no nulo de la matriz sobre la diagonal y fuera de ella, respectivamente.

Clase	Texturas			Invariantes	
				Simétrica	Hermitiana
I	$\begin{pmatrix} 0 & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & \star & 0 \\ \times & 0 & 0 \end{pmatrix}$	Tr = d det = $-a^2d$ $\chi = a^2$	Tr = d det = $- a ^2d$ $\chi = a ^2$

Cuadro 5.1: Matriz con cuatro ceros de textura.

Las matrices de masas hermitianas, en general, se pueden diagonalizar a través de la siguiente transformación de similitud:

$$UMU^\dagger = M^{\text{diag}}, \quad (5.30)$$

donde M^{diag} es una matriz diagonal cuyos elementos son los eigenvalores de la matriz M y U es una matriz unitaria, la cual se construye con los eigenvectores complejos de M . Los eigenvalores de una matriz hermitiana son reales, por lo cual inmediatamente pueden ser asociados con las masas de las partículas involucradas.

Por otro lado, las matrices de masas simétricas complejas tienen eigenvalores complejos, los cuales no pueden ser asociados directamente con las masas de las partículas involucradas. Así que se tiene que encontrar la manera de hacer una vinculación entre los eigenvalores de la matriz y las masas de las partículas. Una forma muy usada para relacionar los eigenvalores de una matriz de no hermitiana con las masas de las partículas es a través del teorema de descomposición en valores singulares (SVD, por sus siglas en inglés). Dicho teorema sentencia

Clase	Texturas			Invariantes	
				Simétrica	Hermitiana
I	$\begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & \star \\ \star & 0 & 0 \\ 0 & \star & \times \\ 0 & \times & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & \star & 0 \\ \times & 0 & \star \\ 0 & \times & 0 \\ \times & \star & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \star & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star \\ \star & 0 & \times \\ 0 & \star & 0 \\ \times & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\text{Tr} = d + g$ $\det = -c^2g$ $\chi = c^2 - gd$	$\text{Tr} = d + g$ $\det = - c ^2g$ $\chi = c ^2 - gd$
II	$\begin{pmatrix} 0 & \times & 0 \\ \times & 0 & \times \\ 0 & \times & \star \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & \star & \times \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ \times & 0 & 0 \\ \times & 0 & \star \\ 0 & \times & \times \\ \times & \star & 0 \\ \times & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \star & \times & 0 \\ \times & 0 & \times \\ 0 & \times & 0 \\ \star & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$	$\text{Tr} = d$ $\det = -a^2d$ $\chi = a^2 + c^2$	$\text{Tr} = d$ $\det = - a ^2d$ $\chi = a ^2 + c ^2$
III		$\begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}$		$\text{Tr} = g + b + d$ $\det = gbd$ $\chi = -gb - gd - bd$	$\text{Tr} = g + b + d$ $\det = gbd$ $\chi = -gb - gd - bd$
IV		$\begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ \times & 0 & \times \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$		$\text{Tr} = 0$ $\det = 2ace$ $\chi = a^2 + e^2 + c^2$	$\text{Tr} = 0$ $\det = a^*c^*e + ace^*$ $\chi = a ^2 + e ^2 + c ^2$

Cuadro 5.2: Matriz con tres ceros de textura.

que [88, 89]:

Toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ admite una descomposición en valores singulares. Además, los valores singulares están determinados de forma única y, si A es cuadrada y sus valores singulares son todos distintos, entonces los vectores singulares están también determinados de forma única salvo producto por un número complejo de módulo 1.

En forma explícita, el teorema SVD es: Sean m, n entero positivos y $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Una descomposición en valores singulares (completa) de A es una factorización

$$A = U\Sigma V^\dagger \quad (5.31)$$

donde $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ son unitarias y Σ es diagonal. Además,

$$\Sigma = \begin{cases} \begin{bmatrix} \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \\ 0_{m-n \times n} \end{bmatrix} & \text{si } m \geq n \\ \begin{bmatrix} \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} & 0_{m \times n-m} \end{bmatrix} & \text{si } n \geq m \end{cases} \quad (5.32)$$

En cualquier caso, $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_P$, $P = \min\{m, n\}$ son números reales no negativos ordenados de mayor a menor y se llaman valores singulares de A . Además, a los vectores u_1, \dots, u_m y

Clase	Texturas	Invariantes	
		Simétrica	Hermitiana
I	$\begin{pmatrix} 0 & \times & 0 \\ \times & \star & \times \\ 0 & \times & \star \\ \star & \times & \times \\ \times & 0 & 0 \\ \times & 0 & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & \star & \times \\ \times & \times & \star \\ \star & \times & 0 \\ \times & \star & \times \\ 0 & \times & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \\ \times & \times & \star \\ \star & \times & \times \\ \times & \star & 0 \\ \times & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} \text{Tr} &= b + d \\ \det &= -a^2 d \\ \chi &= a^2 + c^2 \\ &-bd \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Tr} &= b + d \\ \det &= - a ^2 d \\ \chi &= a ^2 + c ^2 \\ &-bd \end{aligned}$
II	$\begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ \times & \star & 0 \\ \times & 0 & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & \times & 0 \\ \times & 0 & \times \\ 0 & \times & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & 0 & \times \\ 0 & \star & \times \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} \text{Tr} &= b + d \\ \det &= -a^2 d \\ &-e^2 b \\ \chi &= a^2 + e^2 \\ &-bd \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Tr} &= b + d \\ \det &= - a ^2 d \\ &- e ^2 b \\ \chi &= a ^2 + e ^2 \\ &-bd \end{aligned}$
III	$\begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ \times & 0 & \times \\ \times & \times & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ \times & \star & \times \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & \times & \times \\ \times & 0 & \times \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} \text{Tr} &= d \\ \det &= 2ace - a^2 d \\ \chi &= a^2 + c^2 \\ &+e^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Tr} &= d \\ \det &= a^* c^* e \\ &+ace^* - a ^2 d \\ \chi &= a ^2 + c ^2 \\ &+ e ^2 \end{aligned}$
IV	$\begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & \star & \times \\ 0 & \times & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & 0 & \times \\ 0 & \star & 0 \\ \times & 0 & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & \times & 0 \\ \times & \star & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} \text{Tr} &= g + b + d \\ \det &= -gc^2 + gbd \\ \chi &= c^2 - gb \\ &-gd - bd \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Tr} &= g + b + d \\ \det &= -g c ^2 - gbd \\ \chi &= c ^2 - gb \\ &-gd - bd \end{aligned}$

Cuadro 5.3: Matriz con dos ceros de textura.

v_1, \dots, v_m que forma las columnas de U y V se les llama vectores singulares de A por la izquierda y por la derecha, respectivamente.

Por otro lado, de las propiedades de los valores singulares de una matriz se tiene que: *Los valores singulares de $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ distintos de cero son las raíces cuadradas positivas de los valores propios distintos de cero de $A^\dagger A$ y también de los de AA^\dagger . Además están determinados de forma única.*

Ahora, para diagonalizar a la matriz de masas de los neutrinos izquierdos de Majorana, la cual, en general, es simétrica compleja, se necesita construir las formas bilineales

$$M_{\nu_L} M_{\nu_L}^\dagger \quad \text{y} \quad M_{\nu_L}^\dagger M_{\nu_L}, \quad (5.33)$$

las cuales pueden ser diagonalizadas a través de las siguientes transformaciones:

$$U_R^\dagger M_{\nu_L}^\dagger M_{\nu_L} U_R = \text{diag} [m_{\nu_1}^{s2}, m_{\nu_2}^{s2}, m_{\nu_3}^{s2}], \quad (5.34)$$

$$U_L^\dagger M_{\nu_L} M_{\nu_L}^\dagger U_L = \text{diag} [m_{\nu_1}^{s2}, m_{\nu_2}^{s2}, m_{\nu_3}^{s2}],$$

donde las $m_{\nu_j}^s$, con $j = 1, 2, 3$, son los valores singulares de la matriz M_{ν_L} . Así, con ayuda de la simetría de la matriz M_{ν_L} y las transformaciones de la ec. (5.34), la matriz de masas de los neutrinos izquierdos de Majorana puede ser diagonalizada por la transformación:

$$U_\nu^\dagger M_{\nu_L} U_\nu^* = \text{diag} [m_{\nu_1}^s, m_{\nu_2}^s, m_{\nu_3}^s], \quad (5.35)$$

Clase	Texturas	Invariantes	
		Simétrica	Hermitiana
I	$\begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ \times & \star & \times \\ \times & \times & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & \times & \times \\ \times & 0 & \times \\ \times & \times & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & \times & \times \\ \times & \star & \times \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} \text{Tr} &= b + d \\ \det &= 2ace - a^2d \\ &\quad - be^2 \\ \chi &= a^2 + c^2 \\ &\quad + e^2 - bd \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Tr} &= b + d \\ \det &= - a ^2d - b e ^2 \\ &\quad + ace^* + a^*c^*e \\ \chi &= a ^2 + c ^2 + e ^2 \\ &\quad - bd \end{aligned}$
II	$\begin{pmatrix} \star & 0 & \times \\ 0 & \star & \times \\ \times & \times & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & \times & \times \\ \times & \star & 0 \\ \times & 0 & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & \times & 0 \\ \times & \star & \times \\ 0 & \times & \star \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} \text{Tr} &= b + d + g \\ \det &= gbd \\ &\quad - c^2g - e^2b \\ \chi &= e^2 + c^2 - gb \\ &\quad - gd - bd \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Tr} &= b + d + g \\ \det &= gbd \\ &\quad - c ^2g - e ^2b \\ \chi &= e ^2 + c ^2 - gb \\ &\quad - gd - bd \end{aligned}$

Cuadro 5.4: Matriz con un cero textura.

donde $U_\nu \equiv U_L$ es una matriz unitaria. Entonces, los valores singulares de la matriz M_{ν_L} pueden ser asociados directamente con las masa de los neutrinos ligeros.

A continuación se ve cómo se modifica la clasificación de la matrices con ceros de textura; mostrada en los Cuadros 5.1-5.4, al calcular las formas bilineales hermitianas, ec. (5.33). Por ejemplo, si se consideran las matrices con cuatro ceros de textura, Cuadro 5.1, y se calculan la formas bilineales MM^\dagger y $M^\dagger M$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}^\dagger &= \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & 0 \end{pmatrix}^\dagger &= \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & 0 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & \star & 0 \\ \times & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & \star & 0 \\ \times & 0 & 0 \end{pmatrix}^\dagger &= \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & \star & 0 \\ \times & 0 & 0 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & \star & 0 \\ \times & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En las expresiones anteriores, la “ \star ” y “ \times ” denotan a un elemento no nulo de la matriz sobre la diagonal y fuera de ella, respectivamente. Además, se puede notar que las formas bilineales de las tres matrices con cuatro ceros de textura clase uno, son matrices con tres ceros de textura clase III.

En forma análoga se pueden determinar las forma bilineales, MM^\dagger y $M^\dagger M$, para todas las clases de equivalencia de la clasificación. Obteniendo, como en el ejemplo anterior, que las formas bilineales de todas las matrices que componen una clase de similitud, pertenecen a la misma clase, ya sea la original o cualquier otra. Lo anterior se ilustra en la figura 5.1, donde la

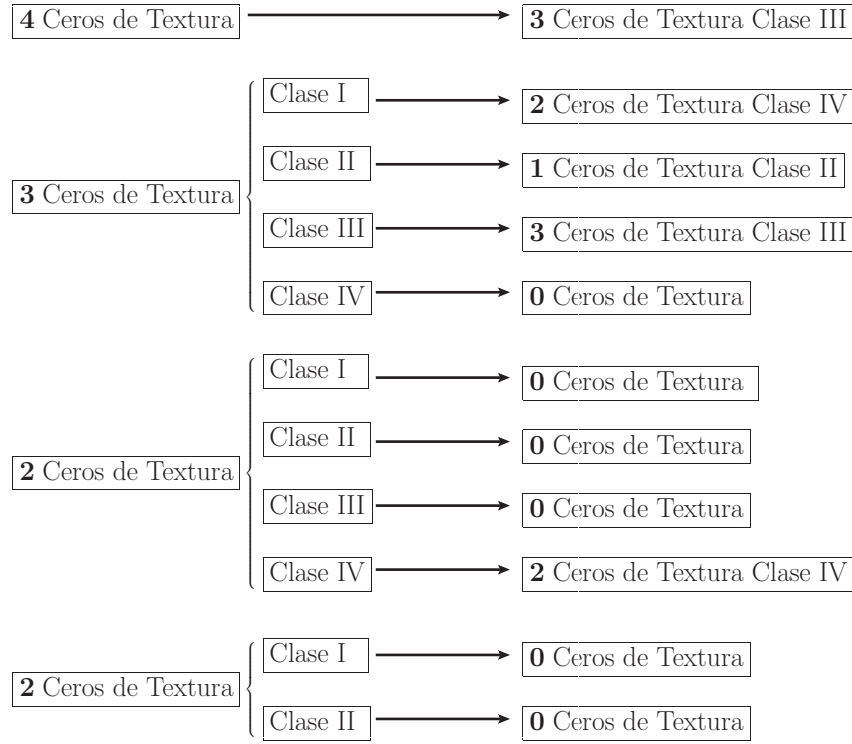


Figura 5.1: En esta figura se ilustra en que clase de equivalencia de la clasificación están las formas bilineales hermitianas MM^\dagger y $M^\dagger M$ de cada una de las matrices en una clase de equivalencia. La flecha indica la operación de calcular las forma bilineales MM^\dagger y $M^\dagger M$.

flecha indica la operación de calcular las forma bilineales MM^\dagger y $M^\dagger M$.

5.3. Mecanismo del subibaja y fases de los Neutrinos Izquierdos

Añadir al Modelo Estándar un término de masa puramente de Dirac es teóricamente desfavorecido, porque al introducir los neutrinos derechos, ν_R , en el Modelo Estándar (masas de Majorana igual a cero) se puede generar una masa de Dirac al neutrino a través de un acoplamiento al campo de Higgs de la forma:

$$\lambda_{\nu_D} \langle \phi \rangle \bar{\nu}_L \nu_R \equiv M_{\nu_D} \bar{\nu}_L \nu_R, \quad (5.36)$$

donde $\langle \phi \rangle \approx 174$ GeV es el valor de expectación en el vacío del campo de Higgs, y Y_{ν_D} es el acoplamiento de Yukawa del neutrino de Dirac. Entonces, para una masa física del neutrino de Dirac $M_{\nu_D} \approx 0.2$ eV, el acoplamiento de Yukawa toma el valor $\lambda_{\nu_D} \approx 10^{-12}$. Así surge la siguiente pregunta ¿por qué los acoplamientos de Yukawa de los neutrinos son mucho más pequeños que los acoplamientos de los leptones cargados? Esta pregunta no puede encontrar respuesta natural en extensiones mínimas invariantes del Modelo Estándar.

En la extensión del Modelo Estándar donde se propone al grupo S_3 como simetría del sabor y su rompimiento explícito secuencial produce la misma forma genérica, con dos ceros de textura clase I, para las matrices de masas de los fermiones de Dirac. No puede reproducir correctamente los datos experimentales de las mezclas y masas en el sector leptónico, si los neutrinos izquierdos son considerados como partículas puramente de Dirac [87]. Por lo tanto, en este trabajo se considera que los neutrinos izquierdos son partículas de Majorana y adquieren su masa pequeña a través del mecanismo del subibaja tipo I,

$$M_{\nu_L} = M_{\nu_D} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T, \quad (5.37)$$

donde M_{ν_D} y M_{ν_R} denotan a las matrices de masas de los neutrinos de Dirac y derechos de Majorana, respectivamente. La simetría de la matriz de masas de los neutrinos izquierdos, $M_{\nu_L} = M_{\nu_L}^T$, y el mecanismo de subibaja tipo I fijan la forma de la matriz de masas de los neutrinos derechos de Majorana, M_{ν_R} , la cual tiene que ser no singular y obviamente simétrica. Restricciones adicionales sobre M_{ν_R} provienen de pedir que M_{ν_L} también tenga dos ceros de textura clase I, como se muestra a continuación. Con este propósito en mente, el mecanismo de subibaja tipo I, ec. (5.37), puede ser escrito en una forma más explícita como:

$$M_{\nu_L} = \frac{1}{\det(M_{\nu_R})} M_{\nu_D} \text{adj}(M_{\nu_R}) M_{\nu_D}^T, \quad (5.38)$$

donde $\det(M_{\nu_R})$ y $\text{adj}(M_{\nu_R})$ son el determinante y la matriz adjunta de M_{ν_R} , respectivamente.

Ahora, si se considera la forma más general de una matriz simétrica compleja de 3×3

$$M_{\nu_R} = \begin{pmatrix} g_{\nu_R} & a_{\nu_R} & e_{\nu_R} \\ a_{\nu_R} & b_{\nu_R} & c_{\nu_R} \\ e_{\nu_R} & c_{\nu_R} & d_{\nu_R} \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

para representar a la matriz de masas de los neutrinos derechos, se puede reescribir la ec. (5.38) en una forma más explícita si se expresan $\det(M_{\nu_R})$ y $\text{adj}(M_{\nu_R})$ en términos de los cofactores de los elementos de la matriz M_{ν_R} . Entonces,

$$\det(M_{\nu_R}) = g_{\nu_R} X_{11} - a_{\nu_R} X_{12} + e_{\nu_R} X_{13} \quad (5.40)$$

y

$$M_{\nu_L} = \frac{1}{\det(M_{\nu_R})} \begin{pmatrix} G_{\nu_L} & A_{\nu_L} & E_{\nu_L} \\ A_{\nu_L} & B_{\nu_L} & C_{\nu_L} \\ E_{\nu_L} & C_{\nu_L} & D_{\nu_L} \end{pmatrix}, \quad (5.41)$$

donde

$$\begin{aligned}
 G_{\nu_L} &= X_{22}A_{\nu_D}^2, \\
 A_{\nu_L} &= -X_{12}|A_{\nu_D}|^2 + X_{22}A_{\nu_D}B_{\nu_D} - X_{23}A_{\nu_D}C_{\nu_D}, \\
 B_{\nu_L} &= X_{11}A_{\nu_D}^{*2} + X_{22}B_{\nu_D}^2 + X_{33}C_{\nu_D}^2 - 2X_{12}A_{\nu_D}^*B_{\nu_D} + 2X_{13}A_{\nu_D}^*C_{\nu_D} - 2X_{23}B_{\nu_D}C_{\nu_D}, \\
 E_{\nu_L} &= X_{22}A_{\nu_D}C_{\nu_D} - X_{23}A_{\nu_D}D_{\nu_D}, \\
 C_{\nu_L} &= X_{13}A_{\nu_D}^*D_{\nu_D} - X_{12}A_{\nu_D}^*C_{\nu_D} + X_{22}B_{\nu_D}C_{\nu_D} - X_{23}(B_{\nu_D}D_{\nu_D} + C_{\nu_D}^2) + X_{33}C_{\nu_D}D_{\nu_D}, \\
 D_{\nu_L} &= X_{22}C_{\nu_D}^2 - 2X_{23}C_{\nu_D}D_{\nu_D} + X_{33}D_{\nu_D}^2.
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

En estas expresiones, las X_{nm} ($m, n = 1, 2, 3$) son los cofactores que corresponden a los elementos de la matriz $\text{adj}(M_{\nu_R})$ ².

A partir de las ecuaciones (5.41) y (5.42), cuando la condición $X_{22} = X_{23} = 0$ se satisface, la matriz de masas de los neutrinos izquierdos de Majorana tendrán la misma forma universal con dos ceros de textura clase I. Estas condiciones son equivalentes a

$$g_{\nu_R}d_{\nu_R} = e_{\nu_R}^2, \quad g_{\nu_R}c_{\nu_R} = a_{\nu_R}e_{\nu_R}. \tag{5.43}$$

Así, se obtiene la relación

$$\frac{a_{\nu_R}}{c_{\nu_R}} = \frac{e_{\nu_R}}{d_{\nu_R}}. \tag{5.44}$$

Para $\det(M_{\nu_R})$ no nulo, estas condiciones (5.43) se satisfacen, si

$$g_{\nu_R} = 0 \quad \text{y} \quad e_{\nu_R} = 0. \tag{5.45}$$

La matriz de masas para los neutrinos derechos de Majorana, ec. (5.39), bajo las condiciones (5.45) adquiere la forma

$$M_{\nu_R} = \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_R} & 0 \\ a_{\nu_R} & b_{\nu_R} & c_{\nu_R} \\ 0 & c_{\nu_R} & d_{\nu_R} \end{pmatrix}, \tag{5.46}$$

la cual es una matriz simétrica con dos ceros de textura clase I. Además, se puede decir que la matriz de masas con dos ceros de textura clase I es invariante bajo la acción del mecanismo del subibaja tipo I [90, 70, 23, 59]. En otras palabras, en un tratamiento unificado (algunas ocasiones llamado tratamiento paralelo) en donde las matrices de masas de los neutrinos de Dirac y Majorana son representados por la misma forma genérica de una matriz con dos ceros de textura clase I, el mecanismo de subibaja da como resultado una matriz con dos ceros de

²Los cofactores de los elementos de la matriz M_{ν_R} , son definidos como $X_{nm} = (-1)^{n+m} \det(H_{nm})$, donde H_{nm} se obtiene por borrar el renglón n y la columna m de la matriz M_{ν_R} .

textura clase I para los neutrinos izquierdos de Majorana. Lo previamente mencionado se ilustra a continuación:

$$\begin{pmatrix} 0 & \times & 0 \\ \times & \star & \times \\ 0 & \times & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \times & 0 \\ \times & \star & \times \\ 0 & \times & \star \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \times & 0 \\ \times & \star & \times \\ 0 & \times & \star \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & \times & 0 \\ \times & \star & \times \\ 0 & \times & \star \end{pmatrix}$$

La invariancia con respecto al mecanismo del subibaja tipo I, no es exclusiva de la matriz con dos ceros de textura clase I, sino que en cualquier tratamiento unificado en donde las matrices de masas de los neutrinos de Dirac y derechos de Majorana sean representadas con la misma forma genérica de una matriz con ceros de textura, el mecanismo del subibaja dejará invariante a dicha matriz con ceros de textura.

También se puede notar que, si se pone $b_{\nu_R} = 0$ y/o $c_{\nu_R} = 0$, la expresión resultante para M_{ν_L} todavía tiene dos ceros de textura. Por lo tanto, M_{ν_L} también puede tener dos ceros de textura cuando M_{ν_R} tiene cuatro, tres o dos ceros de textura (los últimos dos casos también son conocidos como texturas de Fritzsche).

Ahora, sin pérdida de generalidad, se supone que las fases en las entradas de la matriz M_{ν_R} pueden ser factorizadas como

$$M_{\nu_R} = R \bar{M}_{\nu_R} R, \quad (5.47)$$

donde

$$\bar{M}_{\nu_R} = \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_R} & 0 \\ a_{\nu_R} & |b_{\nu_R}| & |c_{\nu_R}| \\ 0 & |c_{\nu_R}| & d_{\nu_R} \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

y $R \equiv \text{diag} [e^{-i\phi_c}, e^{i\phi_c}, 1]$ con $\phi_c \equiv \arg \{c_{\nu_R}\}$. Entonces, el mecanismo del subibaja tipo I toma la forma:

$$M_{\nu_L} = P_D^\dagger \bar{M}_{\nu_D} P_D R^\dagger \bar{M}_{\nu_R}^{-1} R^\dagger P_D \bar{M}_{\nu_D} P_D^\dagger, \quad (5.49)$$

así la matriz de masas de los neutrinos izquierdos tiene la siguiente forma con dos ceros de textura:

$$M_{\nu_L} = \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_L} & 0 \\ a_{\nu_L} & b_{\nu_L} & c_{\nu_L} \\ 0 & c_{\nu_L} & d_{\nu_L} \end{pmatrix}, \quad (5.50)$$

donde

$$\begin{aligned} a_{\nu_L} &= \frac{|a_{\nu_D}|^2}{a_{\nu_R}}, \\ b_{\nu_L} &= \frac{c_{\nu_D}^2}{d_{\nu_R}} + \frac{|c_{\nu_R}|^2 - |b_{\nu_R}| d_{\nu_R}}{d_{\nu_R}} \frac{|a_{\nu_D}|^2}{a_{\nu_R}^2} e^{i2(\phi_c - \phi_{\nu_D})} + 2 \frac{|a_{\nu_D}|}{|a_{\nu_R}|} \left(b_{\nu_D} e^{-i\phi_{\nu_D}} - \frac{c_{\nu_D} |c_{\nu_R}|}{d_{\nu_R}} e^{i(\phi_c - \phi_{\nu_D})} \right), \\ c_{\nu_L} &= \frac{c_{\nu_D} d_{\nu_D}}{d_{\nu_R}} + \frac{|a_{\nu_D}|}{|a_{\nu_R}|} \left(c_{\nu_D} e^{-i\phi_{\nu_D}} - \frac{|c_{\nu_R}| d_{\nu_D}}{d_{\nu_R}} e^{i(\phi_c - \phi_{\nu_D})} \right), \\ d_{\nu_L} &= \frac{d_{\nu_D}^2}{d_{\nu_R}}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Los elementos a_{ν_L} y d_{ν_L} son reales, mientras que b_{ν_L} y c_{ν_L} son complejos. Hay que tener en cuenta que los factores de fase que aparecen en las ecuaciones (5.49) y (5.51) están completamente determinados por el mecanismo de subibaja tipo I y de la elección de un anzats generalizado de Fritsch con dos ceros de textura para las matrices de masas de todos los fermiones de Dirac y una matriz de masas simétrica compleja para los neutrinos derechos de Majorana. Además, de las ecuaciones (5.51) se puede concluir que la mayor parte de la información sobre el número de ceros de textura presentes en la matriz M_{ν_R} se encuentra en los elementos (2, 2) y (2, 3) de la matriz M_{ν_L} .

En el análisis previo se obtuvo que la matriz M_{ν_L} tiene dos fases no ignorables, las cuales son:

$$\phi_1 \equiv \arg \{b_{\nu_L}\} \quad \text{y} \quad \phi_2 \equiv \arg \{c_{\nu_L}\}. \quad (5.52)$$

Ahora, sin pérdida de generalidad, se puede elegir que $\phi_1 = 2\phi_2 = 2\varphi$ y, en consecuencia, la siguiente relación se cumple:

$$\tan \phi_1 = \frac{2\Im c_{\nu_L} \Re c_{\nu_L}}{(\Re c_{\nu_L})^2 - (\Im c_{\nu_L})^2}. \quad (5.53)$$

En este caso el análisis se simplifica, ya que las fases no ignorables en M_{ν_L} se pueden factorizar como:

$$M_{\nu_L} = Q \bar{M}_{\nu_L} Q, \quad (5.54)$$

donde Q es una matriz diagonal de fases

$$Q \equiv \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

y \bar{M}_{ν_L} es una matriz simétrica real expresada como

$$\bar{M}_{\nu_L} = \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_L} & 0 \\ a_{\nu_L} & |b_{\nu_L}| & |c_{\nu_L}| \\ 0 & |c_{\nu_L}| & d_{\nu_L} \end{pmatrix}. \quad (5.56)$$

Entonces, la matriz M_{ν_L} puede ser diagonalizada por una matriz unitaria a través de la transformación

$$U_\nu^\dagger M_{\nu_L} U_\nu^* = \text{diag} [m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, m_{\nu_3}], \quad (5.57)$$

donde m_{ν_j} (con $j = 1, 2, 3$) son los eigenvalores de la matriz M_{ν_L} , y la matriz unitaria es

$$U_\nu \equiv Q \mathcal{O}_\nu, \quad (5.58)$$

donde \mathcal{O}_ν es la matriz ortogonal real que diagonaliza a la matriz simétrica real \bar{M}_{ν_L} .

5.4. Reparametrización de las Matrices de Masas

En esta sección se discute la reparametrización de la matriz de masas con dos ceros de textura en términos de sus eigenvalores. Para las matrices de masas de los fermiones de Dirac y neutrinos izquierdos de Majorana, ecuaciones (5.16) y (5.56), se pueden representar por la matriz:

$$\bar{M}_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i & 0 \\ a_i & b_i & c_i \\ 0 & c_i & d_i \end{pmatrix}, \quad i = u, d, l, \nu_L, \quad (5.59)$$

los elementos de la matriz \bar{M}_i son definidos reales positivos.

Ahora se discutirá la reparametrización de la matriz simétrica real \bar{M}_i en términos de sus eigenvalores, para esto se tiene en cuenta que la matriz de la ec. (5.59) puede ser diagonalizada por una matriz ortogonal real \mathbb{O} , a través de la transformación de similitud

$$\mathbb{O}^T \bar{M}_i \mathbb{O} = \text{diag} \{ m_1, m_2, m_3 \}, \quad (5.60)$$

donde m_j con $j = 1, 2, 3$ son los eigenvalores de \bar{M}_i . Así, se obtienen los siguientes invariantes de la matriz \bar{M}_i :

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ \bar{M}_i \} &= b_i + d_i = m_{i1} + m_{i2} + m_{i3}, \\ \det \{ \bar{M}_i \} &= -a_i^2 d_i = m_{i1} m_{i2} m_{i3}, \\ \chi_i &= \frac{\text{Tr} \{ \bar{M}_i^2 \} - \text{Tr} \{ \bar{M}_i \}^2}{2} = a_i^2 + c_i^2 - b_i d_i = -m_{i1} m_{i2} - m_{i1} m_{i3} - m_{i2} m_{i3}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Inmediatamente se obtiene, de las ecuaciones (5.61) que:

$$a_i^2 = -\frac{m_{i1} m_{i2} m_{i3}}{d_i}, \quad (5.62)$$

$$b_i = m_{i1} + m_{i2} + m_{i3} - d_i, \quad (5.63)$$

$$c_i^2 = \frac{(d_i - m_{i1})(d_i - m_{i2})(m_{i3} - d_i)}{d_i}. \quad (5.64)$$

En la expresión ec. (5.62) hay una inconsistencia de signo entre ambos lados de la igualdad, lo cual no es posible ya que a_i , d_i y los eigenvalores de \bar{M}_i son cantidades real, y el signo negativo del lado derecho de esta ecuación provoca que a_i sea una cantidad puramente imaginaria. Dicha inconsistencia de signo puede encontrar solución si se considera negativo a uno de los eigenvalores, es decir, $m_j = -|m_j|$ con $j = 1, 2, 3$. Cambiar el signo de uno de los eigenvalores es equivalente a realizar una rotación en el espacio de las eigenvalores. En otras palabras, para campos fermiónicos el signo de la masa es irrelevante, ya que se puede cambiar el signo por medio de una transformación quirál:

$$\Psi_{iR} \rightarrow \Psi'_{iR} = e^{i\gamma_5 \frac{\pi}{2}} \Psi_{iR}, \quad \Psi_{iL} \rightarrow \Psi'_{iL} = e^{-i\gamma_5 \frac{\pi}{2}} \Psi_{iL}. \quad (5.65)$$

Esta transformación cambia el signo del eigenvalor m_j , pero deja invariante al resto de la Lagrangiana.

A partir de la ec. (5.62) se puede concluir que el hecho de elegir a uno de los eigenvalores como negativo, tiene una repercusión directa en el intervalo de valores permitidos para el parámetro d_i . En otras palabras, como todos los elementos de la matriz (5.59) deben ser reales y dependiendo que eigenvalor se elija como negativo, el parámetro d debe satisfacer una de las siguientes condiciones:

1. Para una jerarquía normal de los eigenvalores ($m_{i3} > m_{i2} > m_{i1}$):

$$\begin{aligned} m_{i3} > d_i > m_{i2}, & \quad \text{para } m_{i1} = -|m_{i1}|, \\ m_{i3} > d_i > m_{i1}, & \quad \text{para } m_{i2} = -|m_{i2}|, \\ m_{i2} > d_i > m_{i1}, & \quad \text{para } m_{i3} = -|m_{i3}|. \end{aligned} \quad (5.66)$$

2. Para una jerarquía invertida de los eigenvalores ($m_{i2} > m_{i3} > m_{i1}$)³,

$$\begin{aligned} m_{i2} > d_i > m_{i3}, & \quad \text{para } m_{i1} = -|m_{i1}|, \\ m_{i1} > d_i > m_{i3}, & \quad \text{para } m_{i2} = -|m_{i2}|, \\ m_{i2} > d_i > m_{i1}, & \quad \text{para } m_{i3} = -|m_{i3}|. \end{aligned} \quad (5.67)$$

En este trabajo consideramos que cuando los eigenvalores de la matriz simétrica real \bar{M}_i cumplan con una jerarquía normal, se define $m_{i2} = -|m_{i2}|$, mientras que si cumplan con una jerarquía invertida, se define $m_{i1} = -|m_{i1}|$. Además, los elementos de la matriz \bar{M}_i se normalizan con respecto del eigenvalor más grande, es decir, m_{i3} para una jerarquía normal y m_{i2} para una jerarquía invertida. Así se obtiene que las expresiones de las ecuaciones (5.62)-(5.64) toman la forma:

1. Para una jerarquía normal de los eigenvalores ($m_{i3} > m_{i2} > m_{i1}$):

$$A_i = \sqrt{\frac{\tilde{m}_{i1}\tilde{m}_{i2}}{D_i}}, \quad (5.68)$$

$$B_i = 1 + \tilde{m}_{i1} - \tilde{m}_{i2} - D_i, \quad (5.69)$$

$$C_i^2 = \frac{1 - D_i}{D_i} (D_i - \tilde{m}_{i1}) (D_i + \tilde{m}_{i2}), \quad (5.70)$$

donde $A_i = \frac{a_i}{m_{i3}}$, $B_i = \frac{b_i}{m_{i3}}$, $C_i = \frac{c_i}{m_{i3}}$, $D_i = \frac{d_i}{m_{i3}}$, $\tilde{m}_{i1} = \frac{m_{i1}}{m_{i3}}$ y $\tilde{m}_{i2} = \frac{|m_{i2}|}{m_{i3}}$. Como $D_i = 1 - \delta_i$, el rango de valores para el parámetro δ_i es:

$$0 < \delta < 1 - \tilde{m}_{i1}. \quad (5.71)$$

³Este caso sólo es valido para los eigenvalores de la matriz de masas de lo neutrinos izquierdos

Con base en lo anterior, la matriz de masas con dos ceros de textura, ec. (5.59), reparametrizada en términos de sus eigenvalores y del parámetro δ_i tiene la forma:

$$\widetilde{M}_i = \frac{\bar{M}_i}{m_{i3}} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\widetilde{m}_{i1}\widetilde{m}_{i2}}{1-\delta_i}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\widetilde{m}_{i1}\widetilde{m}_{i2}}{1-\delta_i}} & \widetilde{m}_{i1} - \widetilde{m}_{i2} + \delta_i & \sqrt{\frac{\delta_i}{(1-\delta_i)}f_{i1}f_{i2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\delta_i}{(1-\delta_i)}f_{i1}f_{i2}} & 1 - \delta_i \end{pmatrix}. \quad (5.72)$$

donde

$$f_{i1} = (1 - \widetilde{m}_{i1} - \delta_i), \quad f_{i2} = (1 + \widetilde{m}_{i2} - \delta_i). \quad (5.73)$$

2. Para una jerarquía invertida de los eigenvalores ($m_{i2} > m_{i1} > m_{i3}$):

$$\widehat{A}_i = \sqrt{\frac{\widehat{m}_{i1}\widehat{m}_{i3}}{\widehat{D}_i}}, \quad (5.74)$$

$$\widehat{B}_i = 1 + \widehat{m}_{i3} - \widehat{m}_{i1} - \widehat{D}_i, \quad (5.75)$$

$$\widehat{C}_i^2 = \frac{1 - \widehat{D}_i}{\widehat{D}_i} (\widehat{D}_i - \widehat{m}_{i3}) (\widehat{D}_i + \widehat{m}_{i1}), \quad (5.76)$$

donde $\widehat{A}_i = \frac{a_i}{m_{i2}}$, $\widehat{B}_i = \frac{b_i}{m_{i2}}$, $\widehat{C}_i = \frac{c_i}{m_{i2}}$, $\widehat{D}_i = \frac{d_i}{m_{i2}}$, $\widehat{m}_{i1} = \frac{m_{i1}}{m_{i2}}$ y $\widehat{m}_{i3} = \frac{|m_{i3}|}{m_{i2}}$. Aquí también se puede definir $\widehat{D}_i \equiv 1 - \widehat{\delta}_i$, así, el intervalo de valores para el parámetro $\widehat{\delta}_i$ es:

$$0 < \widehat{\delta} < 1 - \widehat{m}_{i3}. \quad (5.77)$$

Con base en lo anterior, la matriz de masas con dos ceros de textura, ec. (5.59), reparametrizada en términos de sus eigenvalores y del parámetro $\widehat{\delta}_i$ tiene la forma:

$$\widehat{M}_i = \frac{\bar{M}_i}{m_{i2}} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\widehat{m}_{i1}\widehat{m}_{i3}}{1-\widehat{\delta}_i}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\widehat{m}_{i1}\widehat{m}_{i3}}{1-\widehat{\delta}_i}} & \widehat{m}_{i3} - \widehat{m}_{i1} + \widehat{\delta}_i & \sqrt{\frac{\widehat{\delta}_i}{(1-\widehat{\delta}_i)}\widehat{f}_{i1}\widehat{f}_{i3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\widehat{\delta}_i}{(1-\widehat{\delta}_i)}\widehat{f}_{i1}\widehat{f}_{i3}} & 1 - \widehat{\delta}_i \end{pmatrix}. \quad (5.78)$$

donde

$$\widehat{f}_{i1} = (1 + \widehat{m}_{i1} - \widehat{\delta}_i), \quad \widehat{f}_{i3} = (1 - \widehat{m}_{i3} - \widehat{\delta}_i). \quad (5.79)$$

Los parámetros pequeños δ_i también son funciones de las razones de masas de los fermiones y del parámetro de rompimiento de la simetría del sabor $Z_i^{1/2}$. El parámetro de rompimiento de la simetría del sabor $Z_i^{1/2}$, el cual mide la mezcla de las representaciones irreducibles de singlete y doblete de S_3 , se define como la razón

$$Z_i^{1/2} = \frac{(M_i)_{23}}{(M_i)_{22}}. \quad (5.80)$$

la razón $Z_i^{1/2}$ se relaciona con los parámetros δ_i por la siguiente ecuación cúbica:

$$\begin{aligned} \delta_i^3 - \frac{1}{Z_{i+1}} (2 + \tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1} + (1 + 2(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1})) Z_i) \delta_i^2 + \\ + \frac{1}{Z_{i+1}} (Z_i (\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) (2 + \tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + (1 + \tilde{m}_{i2}) (1 - \tilde{m}_{i1})) \delta_i - \frac{Z_i (\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1})^2}{Z_{i+1}} = 0. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Así, el parámetro pequeño δ_i se obtiene como una solución o raíz de la ecuación cúbica (5.81), que se anula cuando Z_i se anula. El último término en el lado izquierdo de la ec. (5.81) es igual al producto de las tres raíces de ec. (5.81). Por lo tanto, la raíz que se anula cuando Z_i se anula puede ser escrita como:

$$\delta_i = \frac{Z_i}{Z_i + 1} \frac{(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1})^2}{W_i(Z)}, \quad (5.82)$$

donde $W_i(Z)$ es el producto de las dos raíces de la ec. (5.81), que no se anulan cuando Z_i se anula. La forma explícita de $W_i(Z)$ es:

$$\begin{aligned} W_i(Z) = \left[p_i^3 + 2q_i^2 + 2q_i \sqrt{p_i^3 + q_i^2} \right]^{\frac{1}{3}} - |p_i| + \left[p_i^3 + 2q_i^2 - 2q_i \sqrt{p_i^3 + q_i^2} \right]^{\frac{1}{3}} \\ - \frac{1}{3} \left(\left[q_i + \sqrt{p_i^3 + q_i^2} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[q_i - \sqrt{p_i^3 + q_i^2} \right]^{\frac{1}{3}} \right) (Z_i (2(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 1) + (\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 2) \\ + \frac{1}{9} (Z_i (2(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 1) + (\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 2)^2 \end{aligned} \quad (5.83)$$

con

$$\begin{aligned} p_i = -\frac{1}{3} \frac{Z_i}{Z_{i+1}} (Z_i (2(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 1) + \tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1} + 2)^2 \\ + \frac{1}{Z_{i+1}} [Z_i (\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) (\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1} + 2) (1 + \tilde{m}_{i2}) (1 - \tilde{m}_{i1})], \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned} q_i = -\frac{1}{27} \frac{1}{(Z_{i+1})^3} (Z_i (2(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 1) + \tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1} + 2)^3 \\ + \frac{1}{6} \frac{1}{(Z_{i+1})^2} [Z_i (\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) (\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1} + 2) (1 + \tilde{m}_{i2}) (1 - \tilde{m}_{i1})] \times \\ \times (Z_i (2(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 1) + \tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1} + 2). \end{aligned} \quad (5.85)$$

5.5. Diagonalización de las Matrices de Masas

La matriz de masas con dos ceros de textura, ec. (5.59), puede ser diagonalizada por medio de la transformación de similitud:

$$\mathbb{O}_i^T \bar{M}_i \mathbb{O}_i = \text{diag} \{ m_{i1}, m_{i2}, m_{i3} \}, \quad i = u, d, l, \nu_L, \quad (5.86)$$

donde los m_j (con $j = 1, 2, 3$) son los eigenvalores de la matriz \bar{M} y \mathbb{O}_i es una matriz ortogonal real. Las columnas de la matriz \mathbb{O}_i son los eigenvectores de \bar{M} , es decir,

$$\mathbb{O}_i = [| M_{i1} \rangle, | M_{i2} \rangle, | M_{i3} \rangle]. \quad (5.87)$$

Los eigenvectores de la matriz \bar{M} tienen la forma:

$$|M_j\rangle = \frac{1}{N_j} \begin{pmatrix} a_i c_i \\ m_j c_i \\ (m_j - b_i) m_j - a_j^2 \end{pmatrix}, \quad (5.88)$$

donde N_j es la constante de normalización,

$$N_j^2 = (a_i^2 + m_j^2) c_i^2 + [(m_j - b_i) m_j - a_j^2]^2. \quad (5.89)$$

En forma explícita, la matriz ortogonal real es:

1. Para una jerarquía normal de los eigenvalores ($m_{i3} > m_{i2} > m_{i1}$):

$$\mathbf{O}_i = \left(| \widetilde{M}_{i1} \rangle, - | \widetilde{M}_{i2} \rangle, | \widetilde{M}_{i3} \rangle \right), \quad (5.90)$$

$$\mathbf{O}_i = \begin{pmatrix} \left[\frac{\tilde{m}_{i2} f_{i1}}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & - \left[\frac{\tilde{m}_{i1} f_{i2}}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\tilde{m}_{i1} \tilde{m}_{i2} \delta_i}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \left[\frac{\tilde{m}_{i1} (1 - \delta_i) f_{i1}}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\tilde{m}_{i2} (1 - \delta_i) f_{i2}}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{(1 - \delta_i) \delta_i}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ - \left[\frac{\tilde{m}_{i1} f_{i2} \delta_i}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & - \left[\frac{\tilde{m}_{i2} f_{i1} \delta_i}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{f_{i1} f_{i2}}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (5.91)$$

donde

$$f_{i1} = 1 - \tilde{m}_{i1} - \delta_i, \quad f_{i2} = 1 + \tilde{m}_{i2} - \delta_i, \quad (5.92)$$

$$\mathcal{D}_{i1} = (1 - \delta_i)(\tilde{m}_{i1} + \tilde{m}_{i2})(1 - \tilde{m}_{i1}), \quad (5.93)$$

$$\mathcal{D}_{i2} = (1 - \delta_i)(\tilde{m}_{i1} + \tilde{m}_{i2})(1 + \tilde{m}_{i2}), \quad (5.94)$$

$$\mathcal{D}_{i3} = (1 - \delta_i)(1 - \tilde{m}_{i1})(1 + \tilde{m}_{i2}). \quad (5.95)$$

Ahora, es fácil verificar que se cumple

$$\mathbf{O}_i \text{diag} \{ \tilde{m}_{i1}, -\tilde{m}_{i2}, 1 \} \mathbf{O}_i^T = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\tilde{m}_{i1} \tilde{m}_{i2}}{1 - \delta_i}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\tilde{m}_{i1} \tilde{m}_{i2}}{1 - \delta_i}} & \tilde{m}_{i1} - \tilde{m}_{i2} + \delta_i & \sqrt{\frac{\delta_i}{(1 - \delta_i)} f_{i1} f_{i2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\delta_i}{(1 - \delta_i)} f_{i1} f_{i2}} & 1 - \delta_i \end{pmatrix}. \quad (5.96)$$

2. Para una jerarquía invertida de los eigenvalores ($m_{i2} > m_{i1} > m_{i3}$):

$$\widehat{\mathbf{O}}_i = \left(- | \widehat{M}_{i1} \rangle, | \widehat{M}_{i2} \rangle, | \widehat{M}_{i3} \rangle \right), \quad (5.97)$$

$$\widehat{\mathbf{O}}_i = \begin{pmatrix} - \left[\frac{\hat{m}_{i3} \hat{f}_{i1}}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\hat{m}_{i1} \hat{m}_{i3} \hat{\delta}_i}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\hat{m}_{i1} \hat{f}_{i3}}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \left[\frac{\hat{m}_{i1} (1 - \hat{\delta}_i) \hat{f}_{i1}}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{(1 - \hat{\delta}_i) \hat{\delta}_i}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\hat{m}_{i3} (1 - \hat{\delta}_i) \hat{f}_{i3}}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ - \left[\frac{\hat{m}_{i1} \hat{f}_{i3} \hat{\delta}_i}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\hat{f}_{i1} \hat{f}_{i3}}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & - \left[\frac{\hat{m}_{i3} \hat{\delta}_i \hat{f}_{i1}}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (5.98)$$

donde:

$$\widehat{f}_{i1} = 1 + \widehat{m}_{i1} - \widehat{\delta}_i, \quad \widehat{f}_{i3} = 1 - \widehat{m}_{i3} - \widehat{\delta}_i, \quad (5.99)$$

$$\widehat{\mathcal{D}}_{i1} = (1 - \widehat{\delta}_i)(\widehat{m}_{i1} + \widehat{m}_{i3})(1 + \widehat{m}_{i1}), \quad (5.100)$$

$$\widehat{\mathcal{D}}_{i2} = (1 - \widehat{\delta}_i)(1 + \widehat{m}_{i1})(1 - \widehat{m}_{i3}), \quad (5.101)$$

$$\widehat{\mathcal{D}}_{i3} = (1 - \widehat{\delta}_i)(\widehat{m}_{i1} + \widehat{m}_{i3})(1 - \widehat{m}_{i3}). \quad (5.102)$$

Ahora, es fácil verificar que se cumple

$$\widehat{\mathbf{O}}_i \text{diag} \{ -\widehat{m}_{i1}, 1, \widehat{m}_{i3} \} \widehat{\mathbf{O}}_i^T = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\widehat{m}_{i1}\widehat{m}_{i3}}{1-\widehat{\delta}_i}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\widehat{m}_{i1}\widehat{m}_{i3}}{1-\widehat{\delta}_i}} & \widehat{m}_{i1} - \widehat{m}_{i2} + \widehat{\delta}_i & \sqrt{\frac{\widehat{\delta}_i}{(1-\widehat{\delta}_i)}\widehat{f}_{i1}\widehat{f}_{i2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\widehat{\delta}_i}{(1-\widehat{\delta}_i)}\widehat{f}_{i1}\widehat{f}_{i2}} & 1 - \widehat{\delta}_i \end{pmatrix}. \quad (5.103)$$

Al ordenar a la matriz diagonal de los eigenvalores

$$\text{diag} \{ -\widehat{m}_{i1}, 1, \widehat{m}_{i3} \} \quad (5.104)$$

en forma jerárquica, donde se coloca al elemento más grande en la entrada (3,3) y al más pequeño en la entrada (1,1). Para esto se tiene que hacer alguna de las siguientes transformaciones de similitud:

$$T(A_5)^{-1} \text{diag} \{ -\widehat{m}_{i1}, 1, \widehat{m}_{i3} \} T(A_5) = \text{diag} \{ \widehat{m}_{i3}, -\widehat{m}_{i1}, 1 \} \quad (5.105)$$

o

$$T(A_6) \text{diag} \{ -\widehat{m}_{i1}, 1, \widehat{m}_{i3} \} T(A_6)^{-1} = \text{diag} \{ \widehat{m}_{i3}, -\widehat{m}_{i1}, 1 \}, \quad (5.106)$$

donde las matrices T están dadas en las ecuaciones (5.29) y tiene la forma:

$$T(A_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T(A_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.107)$$

Después de aplicar alguna de la transformaciones de las ecuaciones (5.105) y (5.106), la matriz de la ec. (5.103) toma la forma:

$$\widehat{\mathbf{O}}_i^J \text{diag} \{ \widehat{m}_{i3}, -\widehat{m}_{i1}, 1 \} (\widehat{\mathbf{O}}_i^J)^T = \begin{pmatrix} 1 - \widehat{\delta}_i & 0 & \sqrt{\frac{\widehat{\delta}_i}{(1-\widehat{\delta}_i)}\widehat{f}_{i1}\widehat{f}_{i2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{\widehat{m}_{i1}\widehat{m}_{i3}}{1-\widehat{\delta}_i}} \\ \sqrt{\frac{\widehat{\delta}_i}{(1-\widehat{\delta}_i)}\widehat{f}_{i1}\widehat{f}_{i2}} & \sqrt{\frac{\widehat{m}_{i1}\widehat{m}_{i3}}{1-\widehat{\delta}_i}} & \widehat{m}_{i1} - \widehat{m}_{i2} + \widehat{\delta}_i \end{pmatrix}, \quad (5.108)$$

donde el superíndice J indica que la matriz diagonal de los eigenvalores se ordenó en forma jerárquica, y la matriz ortogonal $\widehat{\mathbf{O}}_i^J$ se construye a partir de alguna de las siguientes transformaciones de similitud:

$$T(A_5)^{-1} \widehat{\mathbf{O}}_i T(A_5) = \widehat{\mathbf{O}}_i^J \quad \text{o} \quad T(A_6) \widehat{\mathbf{O}}_i T(A_6)^{-1} = \widehat{\mathbf{O}}_i^J. \quad (5.109)$$

En forma explícita, $\widehat{\mathbf{O}}_i^J$ es:

$$\widehat{\mathbf{O}}_i^J = \begin{pmatrix} -\left[\frac{\widehat{m}_{i3}\widehat{\delta}_i\widehat{f}_{i1}}{\widehat{\mathcal{D}}_{i3}}\right]^{\frac{1}{2}} & -\left[\frac{\widehat{m}_{i1}\widehat{f}_{i3}\widehat{\delta}_i}{\widehat{\mathcal{D}}_{i1}}\right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\widehat{f}_{i1}\widehat{f}_{i3}}{\widehat{\mathcal{D}}_{i2}}\right]^{\frac{1}{2}} \\ \left[\frac{\widehat{m}_{i1}\widehat{f}_{i3}}{\widehat{\mathcal{D}}_{i3}}\right]^{\frac{1}{2}} & -\left[\frac{\widehat{m}_{i3}\widehat{f}_{i1}}{\widehat{\mathcal{D}}_{i1}}\right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\widehat{m}_{i1}\widehat{m}_{i3}\widehat{\delta}_i}{\widehat{\mathcal{D}}_{i2}}\right]^{\frac{1}{2}} \\ \left[\frac{\widehat{m}_{i3}(1-\widehat{\delta}_i)\widehat{f}_{i3}}{\widehat{\mathcal{D}}_{i3}}\right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\widehat{m}_{i1}(1-\widehat{\delta}_i)\widehat{f}_{i1}}{\widehat{\mathcal{D}}_{i1}}\right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{(1-\widehat{\delta}_i)\widehat{\delta}_i}{\widehat{\mathcal{D}}_{i2}}\right]^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (5.110)$$

donde

$$\widehat{f}_{i1} = 1 + \widehat{m}_{i1} - \widehat{\delta}_i, \quad \widehat{f}_{i3} = 1 - \widehat{m}_{i3} - \widehat{\delta}_i, \quad (5.111)$$

$$\widehat{\mathcal{D}}_{i1} = (1 - \widehat{\delta}_i)(\widehat{m}_{i1} + \widehat{m}_{i3})(1 + \widehat{m}_{i1}), \quad (5.112)$$

$$\widehat{\mathcal{D}}_{i2} = (1 - \widehat{\delta}_i)(1 + \widehat{m}_{i1})(1 - \widehat{m}_{i3}), \quad (5.113)$$

$$\widehat{\mathcal{D}}_{i3} = (1 - \widehat{\delta}_i)(1 - \widehat{m}_{i3})(\widehat{m}_{i1} + \widehat{m}_{i3}). \quad (5.114)$$

En conclusión: en este capítulo, se derivaron las matrices de masas para los fermiones de Dirac del Modelo Estándar extendido (quarks y leptones) a partir de una simetría permutacional del sabor S_3 y su rompimiento explícito secuencial. Así, se obtuvo un tratamiento unificado de las matrices de masa de los quarks y leptones, en el cual los neutrinos izquierdos adquieren masa a través del mecanismo del subibaja tipo I. Las matrices de masa de los fermiones de Dirac tienen la misma forma genérica con dos ceros de textura clase I y una jerarquía normal en los eigenvalores. Por consiguiente, la matriz de masa de los neutrinos izquierdos de Majorana también tiene dos ceros de textura clase I. Además, con ayuda del grupo de simetría S_3 , se realizó una clasificación en clases de equivalencia de las matrices de masa con ceros de textura. En esta clasificación se usaron las transformaciones de similitud, tomando a las seis matrices que componen a la representación real de S_3 como matrices de transformación. Con esta clasificación se redujo el número de matrices de masas de 3×3 con ceros de textura, de treinta y dos a solamente un once conjuntos de matrices. Cada uno de estos conjuntos de matrices tienen exactamente el mismo contenido físico.

Ahora, ya que se determinaron las matrices de masa de los fermiones del Modelo Estándar extendido se pueden deducir las matrices de mezcla del sabor en términos de las razones de masas de los fermiones, tal como se hace en el siguiente capítulo.

Matrices de Mezcla

En este capítulo se determinan las matrices de mezcla del sabor V_{CKM} y U_{PMNS} en términos de las razones de masas de los fermiones. Además se realiza un ajuste χ^2 de las expresiones teóricas exactas para las nueve magnitudes de las entradas de la matriz de mezclas $|(U^{th})_{ij}|$ a los valores experimentales $|(U^{exp})_{ij}|$ reportados en la literatura.

Las matrices de mezcla del sabor de los quarks y leptones, V_{CKM} y U_{PMNS} , surgen de la falta de correspondencia entre la diagonalización de las matrices de masa de los quarks tipo- u y $-d$ [12] y la diagonalización de las matrices de masa de leptones cargados y los neutrinos izquierdos [33], respectivamente,

$$V_{CKM} = U_u U_d^\dagger, \quad U_{PMNS} = U_l^\dagger U_\nu. \quad (6.1)$$

Por lo tanto, con el fin de obtener las matrices unitarias que aparecen en la ec. (6.1) y con ello poder hacer predicciones sobre los valores numéricos de los ángulos de mezcla del sabor y las fases de violación CP, se debe especificar la forma las matrices de masas.

Como ya se mencionó anteriormente, en el sector de los quarks la unitariedad de la matriz V_{CKM} conduce a las relaciones, dadas en la ec. (1.96)

$$\sum_i V_{ij} V_{ik}^* = \delta_{jk} \quad y \quad \sum_j V_{ij} V_{kj}^* = \delta_{ik}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Las combinaciones que se anulan pueden ser representadas como triángulos en un plano complejo. El área de todos los triángulos es igual a la mitad del invariante de Jarlskog J_q [91, 92], el cual es un invariante de refasamientos que mide la violación de CP. El término triángulo unitario es usualmente reservado para el triángulo obtenido de la relación:

$$V_{ud} V_{ub}^* + V_{cd} V_{cb}^* + V_{td} V_{tb}^* = 0. \quad (6.2)$$

En este caso, el invariante de Jarlskog es

$$J_q = \Im m [V_{us} V_{cs}^* V_{ub}^* V_{cb}], \quad (6.3)$$

y los ángulos internos del triángulo unitario son:

$$\alpha \equiv \arg\left(-\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{ud}V_{ub}^*}\right), \quad \beta \equiv \arg\left(-\frac{V_{cd}V_{cb}^*}{V_{td}V_{tb}^*}\right), \quad \gamma \equiv \arg\left(-\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}\right). \quad (6.4)$$

Para el sector leptónico, cuando los neutrinos izquierdos son partículas de Majorana, la matriz de mezclas se define como [93]

$$U_{PMNS} = U_l^\dagger U_\nu K \quad (6.5)$$

donde K es la matriz diagonal de las fases de Majorana de violación de CP,

$$K \equiv \text{diag} [1, e^{i\beta_1}, e^{i\beta_2}], \quad (6.6)$$

U_l es la matriz unitaria que diagonaliza a la matriz de masa de los leptones cargados y U_ν es la matriz unitaria que diagonaliza a la matriz de masa de los neutrinos izquierdos.

Además, en el caso de la mezcla de tres neutrinos hay tres invariantes de refasamiento [33], asociados con las tres fases de violación de CP presentes en la matriz U_{PMNS} . El invariante de refasamiento relacionado con la fase de Dirac, análogo a el invariante de Jarlskog en el sector de los quarks, viene dado por:

$$J_l \equiv \Im m [U_{e1}^* U_{\mu 3}^* U_{e3} U_{\mu 1}]. \quad (6.7)$$

El invariante de refasamiento J_l controla la magnitud de los efectos de la violación CP en las oscilaciones de neutrinos y es una cantidad observable directamente. Los otros dos invariantes de refasamiento asociados con las dos fases de Majorana en la matriz U_{PMNS} se pueden elegir como:

$$S_1 \equiv \Im m [U_{e1} U_{e3}^*], \quad S_2 \equiv \Im m [U_{e2} U_{e3}^*]. \quad (6.8)$$

Estos invariantes de refasamiento no están definidos de forma única, pero los que se muestran en las ecuaciones (6.7) y (6.8) son relevantes para la definición de la masas efectiva de los neutrinos de Majorana, m_{ee} , en el decaimiento doble beta sin neutrinos.

6.1. Matrices de Mezcla como Funciones de las Masas

Las matrices unitarias $U_{u,d}$ presentes en la definición de la matriz V_{CKM} , ec. (6.1), pueden ser escritas en forma polar como:

$$U_{u,d} = \mathbf{O}_{u,d}^T P_{u,d}. \quad (6.9)$$

En esta expresión, $P_{u,d}$ es la matriz diagonal de fases que aparece en la matriz de masas con cuatro ceros de textura dada en la ec. (5.14). Entonces, de la ec. (6.1), la matriz de mezclas de los quarks toma la forma:

$$V_{CKM}^{*th} = \mathbf{O}_u^T P^{(u-d)} \mathbf{O}_d, \quad (6.10)$$

donde

$$P^{(u-d)} = \text{diag} [1, e^{i\phi}, e^{i\phi}] \quad (6.11)$$

con $\phi = \phi_u - \phi_d$, y $\mathbf{O}_{u,d}$ son las matrices ortogonales reales de la ec. (5.91) que diagonalizan las matrices simétricas real $\bar{M}_{u,d}$, respectivamente.

Un análisis similar muestra que la matriz de mezclas leptónica U_{PMNS} , con $U_{\nu,l} = P_{\nu,l} \mathbf{O}_{\nu,l}$, puede ser escrita en la forma:

$$U_{PMNS}^{th} = \mathbf{O}_l^T P^{(\nu-l)} \mathbf{O}_\nu K, \quad (6.12)$$

donde

$$P^{(\nu-l)} = \text{diag} [1, e^{i\Phi_1}, e^{i\Phi_2}] \quad (6.13)$$

es la matriz diagonal de fases, con $\Phi_1 = 2\varphi - \phi_l$ y $\Phi_2 = \varphi - \phi_l$. Las matrices ortogonales reales $\mathbf{O}_{\nu,l}$ están definidas en la ec. (5.91).

Ahora, sustituyendo las expresiones de las ecuaciones (5.91), (6.11) y (6.13) en la matrices unitarias ecuaciones (6.10) y (6.12), permite expresar a las matrices de mezcla V_{CKM}^{th} y U_{PMNS}^{th} como funciones explícitas de las masas de los quarks y leptones, respectivamente. Para los elementos de la matriz de mezclas V_{CKM}^{th} se obtienen las mismas expresiones teóricas dadas por Mondragón y Rodríguez-Jauregui [81]:

$$V_{CKM}^{th} = \begin{pmatrix} V_{ud}^{th} & V_{us}^{th} & V_{ub}^{th} \\ V_{cd}^{th} & V_{cs}^{th} & V_{cb}^{th} \\ V_{td}^{th} & V_{ts}^{th} & V_{tb}^{th} \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

donde

$$\begin{aligned}
V_{ud}^{th} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_s f_{u1} f_{d1}}{\mathcal{D}_{u1} \mathcal{D}_{d1}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{\mathcal{D}_{u1} \mathcal{D}_{d1}}} \left(\sqrt{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d) f_{u1} f_{d1}} + \sqrt{\delta_u \delta_d f_{u2} f_{d2}} \right) e^{i\phi}, \\
V_{us}^{th} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_d f_{u1} f_{d2}}{\mathcal{D}_{u1} \mathcal{D}_{d2}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}{\mathcal{D}_{u1} \mathcal{D}_{d2}}} \left(\sqrt{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d) f_{u1} f_{d2}} + \sqrt{\delta_u \delta_d f_{u2} f_{d1}} \right) e^{i\phi}, \\
V_{ub}^{th} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_d \tilde{m}_s \delta_d f_{u1}}{\mathcal{D}_{u1} \mathcal{D}_{d3}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\mathcal{D}_{u1} \mathcal{D}_{d3}}} \left(\sqrt{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d) \delta_d f_{u1}} - \sqrt{\delta_u f_{u2} f_{d1} f_{d2}} \right) e^{i\phi}, \\
V_{cd}^{th} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s f_{u2} f_{d1}}{\mathcal{D}_{u2} \mathcal{D}_{d1}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_d}{\mathcal{D}_{u2} \mathcal{D}_{d1}}} \left(\sqrt{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d) f_{u2} f_{d1}} + \sqrt{\delta_u \delta_d f_{u1} f_{d2}} \right) e^{i\phi}, \\
V_{cs}^{th} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d f_{u2} f_{d2}}{\mathcal{D}_{u2} \mathcal{D}_{d2}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}{\mathcal{D}_{u2} \mathcal{D}_{d2}}} \left(\sqrt{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d) f_{u2} f_{d2}} + \sqrt{\delta_u \delta_d f_{u1} f_{d1}} \right) e^{i\phi}, \quad (6.15) \\
V_{cb}^{th} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d \tilde{m}_s \delta_d f_{u2}}{\mathcal{D}_{u2} \mathcal{D}_{d3}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_c}{\mathcal{D}_{u2} \mathcal{D}_{d3}}} \left(\sqrt{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d) \delta_d f_{u2}} - \sqrt{\delta_u f_{u1} f_{d1} f_{d2}} \right) e^{i\phi}, \\
V_{td}^{th} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_c \tilde{m}_s \delta_u f_{d1}}{\mathcal{D}_{u3} \mathcal{D}_{d1}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\mathcal{D}_{u3} \mathcal{D}_{d1}}} \left(\sqrt{\delta_u (1 - \delta_u)(1 - \delta_d) f_{d1}} - \sqrt{\delta_d f_{u1} f_{u2} f_{d2}} \right) e^{i\phi}, \\
V_{ts}^{th} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_c \tilde{m}_d \delta_u f_{d2}}{\mathcal{D}_{u3} \mathcal{D}_{d2}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_s}{\mathcal{D}_{u3} \mathcal{D}_{d2}}} \left(\sqrt{\delta_u (1 - \delta_u)(1 - \delta_d) f_{d2}} - \sqrt{\delta_d f_{u1} f_{u2} f_{d1}} \right) e^{i\phi}, \\
V_{tb}^{th} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_c \tilde{m}_d \tilde{m}_s \delta_u \delta_d}{\mathcal{D}_{u3} \mathcal{D}_{d3}}} + \left(\sqrt{\frac{f_{u1} f_{u2} f_{d1} f_{d2}}{\mathcal{D}_{u3} \mathcal{D}_{d3}}} + \sqrt{\frac{\delta_u \delta_d (1 - \delta_u)(1 - \delta_d)}{\mathcal{D}_{u3} \mathcal{D}_{d3}}} \right) e^{i\phi}.
\end{aligned}$$

Aquí, las \tilde{m} 's son

$$\tilde{m}_{u(d)} = \frac{m_{u(d)}}{m_{t(b)}}, \quad \tilde{m}_{c(s)} = \frac{m_{c(s)}}{m_{t(b)}}, \quad (6.16)$$

las f 's y \mathcal{D} 's están definidas en las ecuaciones (5.73) y (5.93), respectivamente. Y toman la forma:

$$\begin{aligned}
f_{u(d)1} &= (1 - \tilde{m}_{u(d)} - \delta_{u(d)}), \\
f_{u(d)2} &= (1 + \tilde{m}_{c(s)} - \delta_{u(d)}), \\
\mathcal{D}_{u(d)1} &= (1 - \delta_{u(d)})(\tilde{m}_{u(d)} + \tilde{m}_{c(s)})(1 - \tilde{m}_{u(d)}), \\
\mathcal{D}_{u(d)2} &= (1 - \delta_{u(d)})(\tilde{m}_{u(d)} + \tilde{m}_{c(s)})(1 + \tilde{m}_{c(s)}), \\
\mathcal{D}_{u(d)3} &= (1 - \delta_{u(d)})(1 - \tilde{m}_{u(d)})(1 + \tilde{m}_{c(s)}).
\end{aligned} \quad (6.17)$$

Ahora, para los elementos de la matriz de mezclas leptónica U_{PMNS}^{th} se obtiene las siguientes

expresiones teóricas:

$$U_{PMNS}^{th} = \begin{pmatrix} U_{e1}^{th} & U_{e2}^{th} e^{i\beta_1} & U_{e3}^{th} e^{i\beta_2} \\ U_{\mu 1}^{th} & U_{\mu 2}^{th} e^{i\beta_1} & U_{\mu 3}^{th} e^{i\beta_2} \\ U_{\tau 1}^{th} & U_{\tau 2}^{th} e^{i\beta_1} & U_{\tau 3}^{th} e^{i\beta_2} \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

donde

$$\begin{aligned} U_{e1}^{th} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 2} f_{l1} f_{\nu 1}}{\mathcal{D}_{l1} \mathcal{D}_{\nu 1}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu 1}}{\mathcal{D}_{l1} \mathcal{D}_{\nu 1}}} \left(\sqrt{(1 - \delta_l)(1 - \delta_\nu)} f_{l1} f_{\nu 1} e^{i\Phi_1} + \sqrt{\delta_l \delta_\nu} f_{l2} f_{\nu 2} e^{i\Phi_2} \right), \\ U_{e2}^{th} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 1} f_{l1} f_{\nu 2}}{\mathcal{D}_{l1} \mathcal{D}_{\nu 2}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu 2}}{\mathcal{D}_{l1} \mathcal{D}_{\nu 2}}} \left(\sqrt{(1 - \delta_l)(1 - \delta_\nu)} f_{l1} f_{\nu 2} e^{i\Phi_1} + \sqrt{\delta_l \delta_\nu} f_{l2} f_{\nu 1} e^{i\Phi_2} \right), \\ U_{e3}^{th} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2} \delta_\nu f_{l1}}{\mathcal{D}_{l1} \mathcal{D}_{\nu 3}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\mathcal{D}_{l1} \mathcal{D}_{\nu 3}}} \left(\sqrt{\delta_\nu (1 - \delta_l)(1 - \delta_\nu)} f_{l1} e^{i\Phi_1} - \sqrt{\delta_e} f_{l2} f_{\nu 1} f_{\nu 2} e^{i\Phi_2} \right), \\ U_{\mu 1}^{th} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu 2} f_{l2} f_{\nu 1}}{\mathcal{D}_{l2} \mathcal{D}_{\nu 1}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 1}}{\mathcal{D}_{l2} \mathcal{D}_{\nu 1}}} \left(\sqrt{(1 - \delta_l)(1 - \delta_\nu)} f_{l2} f_{\nu 1} e^{i\Phi_1} + \sqrt{\delta_l \delta_\nu} f_{l1} f_{\nu 2} e^{i\Phi_2} \right), \\ U_{\mu 2}^{th} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu 1} f_{l2} f_{\nu 2}}{\mathcal{D}_{l2} \mathcal{D}_{\nu 2}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 2}}{\mathcal{D}_{l2} \mathcal{D}_{\nu 2}}} \left(\sqrt{(1 - \delta_l)(1 - \delta_\nu)} f_{l2} f_{\nu 2} e^{i\Phi_1} + \sqrt{\delta_l \delta_\nu} f_{l1} f_{\nu 1} e^{i\Phi_2} \right), \\ U_{\mu 3}^{th} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2} \delta_\nu f_{l2}}{\mathcal{D}_{l2} \mathcal{D}_{\nu 3}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu}{\mathcal{D}_{l2} \mathcal{D}_{\nu 3}}} \left(\sqrt{\delta_\nu (1 - \delta_l)(1 - \delta_\nu)} f_{l2} e^{i\Phi_1} - \sqrt{\delta_l} f_{l1} f_{\nu 1} f_{\nu 2} e^{i\Phi_2} \right), \\ U_{\tau 1}^{th} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 1} \delta_l f_{\nu 1}}{\mathcal{D}_{l3} \mathcal{D}_{\nu 1}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\mathcal{D}_{l3} \mathcal{D}_{\nu 1}}} \left(\sqrt{\delta_l (1 - \delta_l)(1 - \delta_\nu)} f_{\nu 1} e^{i\Phi_1} - \sqrt{\delta_\nu} f_{l1} f_{l2} f_{\nu 2} e^{i\Phi_2} \right), \\ U_{\tau 2}^{th} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 1} \delta_l f_{\nu 2}}{\mathcal{D}_{l3} \mathcal{D}_{\nu 2}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 2}}{\mathcal{D}_{l3} \mathcal{D}_{\nu 2}}} \left(\sqrt{\delta_l (1 - \delta_l)(1 - \delta_\nu)} f_{\nu 2} e^{i\Phi_1} - \sqrt{\delta_\nu} f_{l1} f_{l2} f_{\nu 1} e^{i\Phi_2} \right), \\ U_{\tau 3}^{th} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2} \delta_l \delta_\nu}{\mathcal{D}_{l3} \mathcal{D}_{\nu 3}}} + \sqrt{\frac{\delta_l \delta_\nu (1 - \delta_l)(1 - \delta_\nu)}{\mathcal{D}_{l3} \mathcal{D}_{\nu 3}}} e^{i\Phi_1} + \sqrt{\frac{f_{l1} f_{l2} f_{\nu 1} f_{\nu 2}}{\mathcal{D}_{l3} \mathcal{D}_{\nu 3}}} e^{i\Phi_2}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

En estas expresiones las \tilde{m} 's son

$$\tilde{m}_{\nu 1(e)} = \frac{m_{\nu 1(e)}}{m_{\nu 3(\tau)}}, \quad \tilde{m}_{\nu 2(\mu)} = \frac{m_{\nu 2(\mu)}}{m_{\nu 3(\tau)}}, \quad (6.20)$$

las f 's and \mathcal{D} 's están definidas en las ecuaciones (5.73) y (5.93), respectivamente. Y toman la forma:

$$\begin{aligned} f_{\nu(l)1} &= (1 - \tilde{m}_{\nu 1(e)} - \delta_{\nu(l)}), \\ f_{\nu(l)2} &= (1 + \tilde{m}_{\nu 2(\mu)} - \delta_{\nu(l)}), \\ \mathcal{D}_{\nu(l)1} &= (1 - \delta_{\nu(l)})(\tilde{m}_{\nu 1(e)} + \tilde{m}_{\nu 2(\mu)})(1 - \tilde{m}_{\nu 1(e)}), \\ \mathcal{D}_{\nu(l)2} &= (1 - \delta_{\nu(l)})(\tilde{m}_{\nu 1(e)} + \tilde{m}_{\nu 2(\mu)})(1 + \tilde{m}_{\nu 2(\mu)}), \\ \mathcal{D}_{\nu(l)3} &= (1 - \delta_{\nu(l)})(1 - \tilde{m}_{\nu 1(e)})(1 + \tilde{m}_{\nu 2(\mu)}). \end{aligned} \quad (6.21)$$

A continuación se realizan los ajustes de χ^2 para ambas matrices de mezclas.

6.2. Ajustes χ^2

En esta sección se realiza un ajuste χ^2 de las expresiones teóricas exactas para las nueve magnitudes de las entradas de la matriz de mezclas $|(U^{th})_{ij}|$ a los valores experimentales $|(U^{exp})_{ij}|$ reportados en la literatura. La χ^2 en general se define como:

$$\chi^2 = (|U^{th}| - |U^{exp}|)^T V^{-1} (|U^{th}| - |U^{exp}|) \quad (6.22)$$

donde U^{th} es la matriz de mezclas teórica, U^{exp} es la matriz de mezclas experimental y V es la matriz de covarianza. En la diagonal de la matriz V están las varianzas de los datos experimentales y fuera de ella están las covariancias.

Uno de los objetivos que se persigue en este trabajo de tesis, es establecer un algoritmo de análisis de las matrices de masa y mezcla de los quarks y leptones. Por consiguiente, en los ajustes de χ^2 que más adelante se muestran se considera que la matriz de covarianza es diagonal, es decir, en dichos ajustes se considera que los valores numéricos de las magnitudes de los elementos de las matrices de mezcla experimentales, $|(U^{exp})_{ij}|$, no están correlacionados. Por lo tanto, la χ^2 toma la forma:

$$\chi^2 = \sum_i^3 \sum_j^3 \frac{\left(|(U^{th})_{ij}| - |(U^{exp})_{ij}| \right)^2}{\sigma_{ij}^2}. \quad (6.23)$$

Para obtener el valor numérico de la χ^2 total mínima que mejor ajusta los datos experimentales, se realiza un barrido del correspondiente espacio de parámetros libres. Ahora, para obtener el valor χ_{min}^2 por grado de libertad, se usa la relación:

$$\chi_{min, d.o.f.}^2 = \frac{\chi_{min}^2}{n_{d.o.f.}}, \quad (6.24)$$

donde $n_{d.o.f.}$ es el número de grados de libertad en el ajuste. Los grados de libertad que se tienen en un ajuste de χ^2 , son el número de observables menos el número de parámetros libres que se están ajustando, es decir,

$$n_{d.o.f.} = k_{(observables)} - l_{(parámetros libres)}. \quad (6.25)$$

Las regiones de parámetros se presentan en gráficas bidimensionales. Cada una de las cuales contiene la región permitida para un par de los parámetros libre, a su vez, cada uno de los puntos en la misma se obtiene ponderando la χ^2 para el par de parámetros que se está graficando. La forma de ponderar a la χ^2 para dos parámetros libres en particular es la siguiente:

se fijan los valores de los dos parámetros mientras se dejan variar libremente al resto, entonces se busca a la χ^2 mínima. Una vez que se encontró la $\chi_{min, pon}^2$ se almacenan todos los valores de los parámetros libres con los cuales χ^2 alcanza su valor mínimo ponderado. Es decir, cada punto en una gráfica se obtiene al encontrar la χ^2 mínima maginalizada con respecto de los parámetros que no están en presentes en la gráfica.

A continuación se presentan los ajustes de χ^2 para las matrices de mezcla de los quarks y leptones.

6.2.1. El Ajuste χ^2 para la Matriz de Mezclas de los Quarks

Se hace un ajuste χ^2 de las expresiones teóricas exactas para las magnitudes de las entradas de la matriz de mezclas $|(V_{CKM}^{th})_{ij}|$ a los valores experimentales dados por Nakamura [11]. En este ajuste, se calculan las magnitudes de las entradas de la matriz de mezclas ec. (6.15) con los siguientes valores numéricos de las razones masa de los quarks [11]:

$$\begin{aligned}\tilde{m}_u &= 2.5469 \times 10^{-5}, & \tilde{m}_c &= 3.9918 \times 10^{-3}, \\ \tilde{m}_d &= 1.5261 \times 10^{-3}, & \tilde{m}_s &= 3.2319 \times 10^{-2}.\end{aligned}\tag{6.26}$$

Los valores numéricos de las razones de masa se quedaron fijos en los valores indicados en la ec. (6.26). Mientras que ϕ , δ_u y δ_d quedaron como parámetros libres que deben ajustarse. Por lo tanto, la χ^2 queda en función de tres parámetros libres,

$$\chi^2(\phi, \delta_u, \delta_d),\tag{6.27}$$

pero en este ajuste se tienen seis grados de libertad (*d.o.f.*, por sus siglas en inglés), esto es, las nueve magnitudes observables de las entradas en la matriz V_{CKM} menos tres parámetros libres que se dejan variar.

Una vez que los mejores valores de los parámetros δ_u , δ_d y ϕ se determinan, se calculan los tres ángulos internos del triángulo unitario de la ec. (6.4) y el invariante de Jarlskog de la ec. (6.3).

Los mejores valores resultantes de los parámetros δ_u y δ_d , a un 90 % C.L., son:

$$\delta_u = (5.14_{-3.4}^{+1.3}) \times 10^{-3}, \quad \delta_d = (9.4_{-9.3}^{+5.6}) \times 10^{-4}\tag{6.28}$$

y la fase de violación de CP es

$$\phi = (89.86_{-0.31}^{+1.27})^\circ.\tag{6.29}$$

En las figuras 6.1-6.3 se muestran las regiones de parámetros permitidas, cada gráfica se genero ponderando la χ^2 .

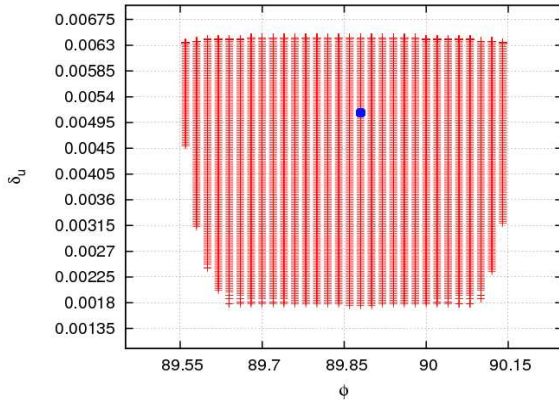


Figura 6.1: Región de parámetro permitida para δ_u y ϕ , ponderando a χ^2 con respecto de δ_d . Con un 90% C.L., el punto en azul corresponde a cuando χ^2 es mínima.

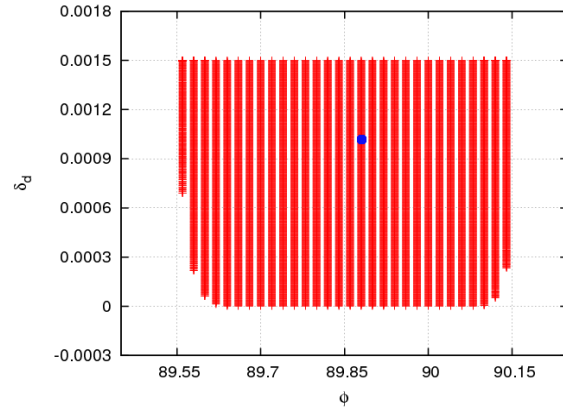


Figura 6.2: Región de parámetros permitida para δ_d y ϕ , ponderando a χ^2 con respecto de δ_u . Con un 90% C.L., el punto en azul corresponde a cuando χ^2 es mínima.

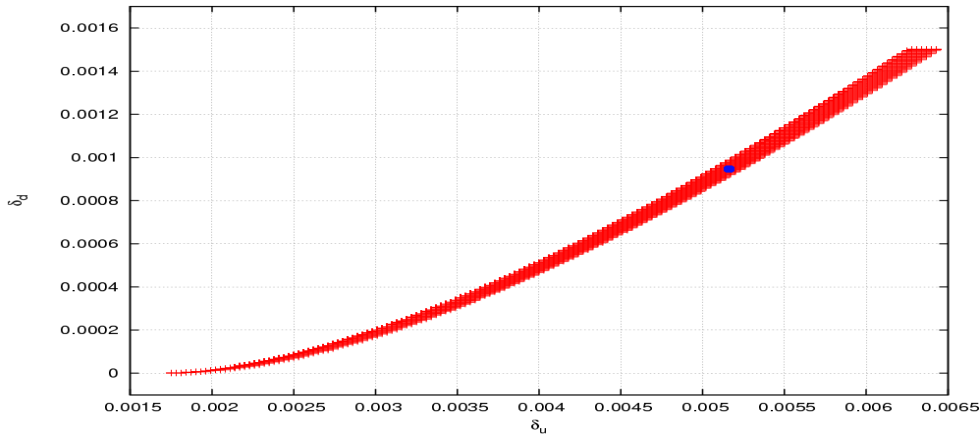


Figura 6.3: Región de parámetros permitida para δ_d y δ_u , ponderando a χ^2 con respecto de ϕ . Con un 90% C.L., el punto en azul corresponde a cuando χ^2 es mínima.

Los mejores valores para las magnitudes de las entradas de la matriz de mezclas CKM están dados en la siguiente expresión, a un 90% C.L.:

$$\left| V_{CKM}^{th} \right|_{90\%} = \begin{pmatrix} 0.974228 \pm 0.00009 & 0.22532^{+0.00035}_{-0.00039} & 0.003325^{+0.000056}_{-0.000066} \\ 0.22518^{+0.00036}_{-0.00039} & 0.97335 \pm 0.00009 & 0.04126^{+0.00065}_{-0.00063} \\ 0.00858^{+0.00025}_{-0.00017} & 0.04050^{+0.00062}_{-0.00067} & 0.999143 \pm 0.000026 \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

y los ángulos internos del triángulo unitario

$$\alpha^{th} = (92.3^{+1.14}_{-3.36})^\circ, \quad \beta^{th} = (20.41^{+0.05}_{-0.13})^\circ, \quad \gamma^{th} = (67.25^{+3.55}_{-0.10})^\circ. \quad (6.31)$$

El invariante de Jarlskog toma el valor

$$J_q^{th} = (2.8 \pm 0.01) \times 10^{-5}. \quad (6.32)$$

Todos estos resultados están en buen acuerdo con los valores experimentales dados en la ec. (1.152). El valor mínimo de χ^2 obtenido en este ajuste es 0.98 y el valor resultante de χ_{min}^2 por grado de libertad es $\chi_{min, d.o.f.}^2 = 0.32$, lo cual sugiere que el ajuste es razonable. Ahora vayamos a los leptones.

6.2.2. El Ajuste χ^2 para la Matriz de Mezclas Leptónica

En el caso de la matriz de mezclas leptónica, se hace el ajuste χ^2 de las expresiones teóricas exactas para las magnitudes de las entradas de la matriz de mezclas $|(U_{PMNS}^{th})_{ij}|$, dados en la ec. (6.19), a los valores extraídos del experimento por Gonzalez-Garcia [44], ver la ec. (2.93). Como Gonzalez-Garcia únicamente da un intervalo de valores, en este ajuste de χ^2 , el valor central de cada magnitud $|(U_{PMNS}^{exp})_{ij}|$ se determino tomando el promedio aritmético de su intervalo de valores

$$|(U_{PMNS}^{exp})_{ij}|^{central} = \frac{|(U_{PMNS}^{exp})_{ij}|^{max} + |(U_{PMNS}^{exp})_{ij}|^{min}}{2}. \quad (6.33)$$

Mientras que su desviación estándar se determino como:

$$\sigma_{ij} (|(U_{PMNS}^{exp})_{ij}|) = \frac{|(U_{PMNS}^{exp})_{ij}|^{max} - |(U_{PMNS}^{exp})_{ij}|^{min}}{2}. \quad (6.34)$$

El cálculo de χ^2 se realizó utilizando los siguientes valores para las masas de los leptones cargados [11]:

$$m_e = 0.510998910 \text{ MeV}, \quad m_\mu = 105.658367 \text{ MeV}, \quad m_\tau = 1776.82 \text{ MeV}. \quad (6.35)$$

Tomamos para las masas de los neutrinos izquierdos de Majorana una jerarquía normal. Esto permite escribir las razones de masas de los neutrinos izquierdos en términos de las diferencias de los cuadrados de las masas, y la masa del neutrino m_{ν_3} en la siguiente forma:

$$\tilde{m}_{\nu_1} = \sqrt{1 - \frac{\Delta m_{31}^2}{m_{\nu_3}^2}}, \quad \tilde{m}_{\nu_2} = \sqrt{1 - \frac{(\Delta m_{31}^2 - \Delta m_{21}^2)}{m_{\nu_3}^2}}. \quad (6.36)$$

Las diferencias de los cuadrados de las masas del neutrino se obtuvieron de los datos experimentales de las oscilaciones de neutrinos y están dados en Gonzalez-Garcia [44], mientras que la masa m_{ν_3} se deja como parámetro libre del ajuste χ^2 . Además, los parámetros δ_l , δ_ν , Φ_1 y Φ_2 también se dejaron como parámetros libres. Por lo tanto, se tienen cinco parámetros libres,

$$\chi^2(m_{\nu_3}, \delta_l, \delta_\nu, \Phi_1, \Phi_2), \quad (6.37)$$

es decir, en este ajuste χ^2 se tienen cuatro grados de libertad.

De los mejores valores obtenidos para m_{ν_3} y de los valores experimentales de Δm_{13}^2 y Δm_{21}^2 , se obtienen los siguientes mejores valores para las masas de los neutrinos, a un 90 % C.L. :

$$m_{\nu_1} = (3.22_{-0.39}^{+0.67}) \times 10^{-3} \text{ eV}, \quad m_{\nu_2} = (9.10_{-0.13}^{+0.25}) \times 10^{-3} \text{ eV}, \quad m_{\nu_3} = (4.92_{-0.22}^{+0.21}) \times 10^{-2} \text{ eV}. \quad (6.38)$$

Los mejores valores resultantes de los parámetros δ_l y δ_ν son, a un 90% C.L.:

$$\delta_l = (3 \pm 2.98) \times 10^{-2}, \quad \delta_\nu = 0.510_{-0.12}^{+0.09} \quad (6.39)$$

y el mejor valor de las fases de violación de CP son

$$\Phi_1 = 270^\circ \pm 10^\circ. \quad \text{y} \quad \Phi_2 = 180^\circ \pm 10^\circ. \quad (6.40)$$

En las figuras 6.4-6.13 se muestran las regiones de parámetros permitidas, cada gráfica se genero ponderando la χ^2 .

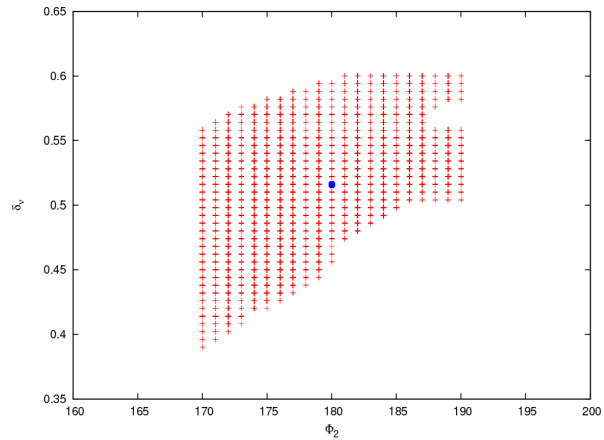
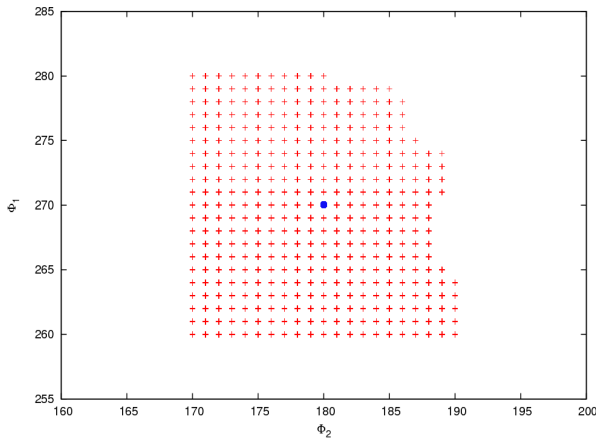


Figura 6.4: Región de parámetros permitida para Φ_2 y Φ_1 . Con un 90% C.L., el punto en azul corresponde a cuando χ^2 es mínima.

Figura 6.5: Región de parámetros permitida para Φ_2 y δ_ν . Con un 90% C.L., el punto en azul corresponde a cuando χ^2 es mínima.

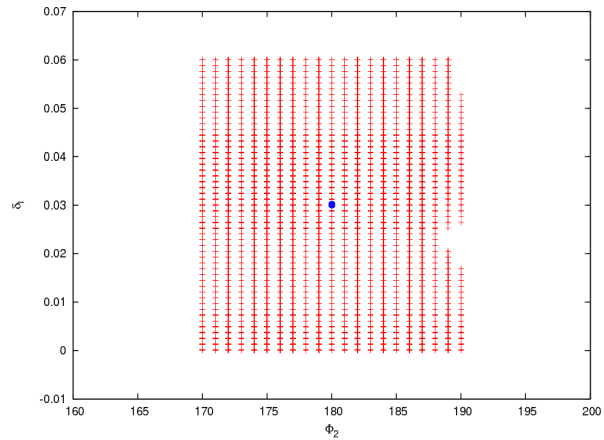
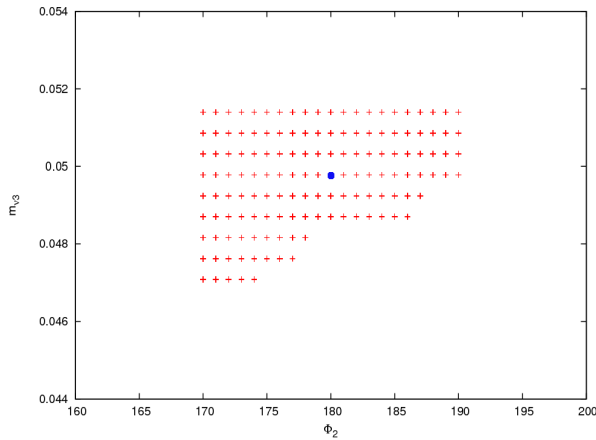


Figura 6.6: Región de parámetros permitida para Φ_2 y m_{ν_3} . Con un 90% C.L., el punto en azul corresponde a cuando χ^2 es mínima.

Figura 6.7: Región de parámetros permitida para Φ_2 y δ_l . Con un 90% C.L., el punto en azul corresponde a cuando χ^2 es mínima.

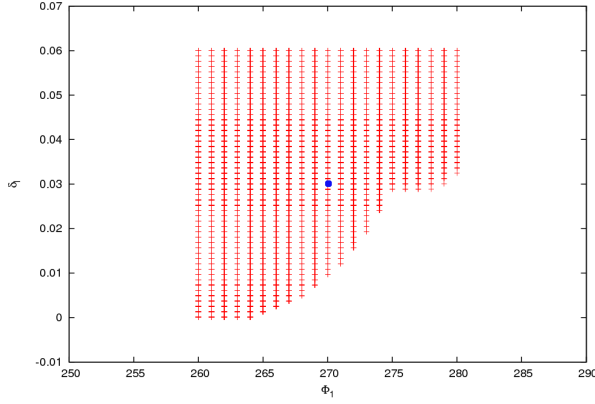


Figura 6.8: Región de parámetros permitida para Φ_1 y δ_l . Con un 90% C.L., el punto en azul corresponde a cuando χ^2 es mínima.

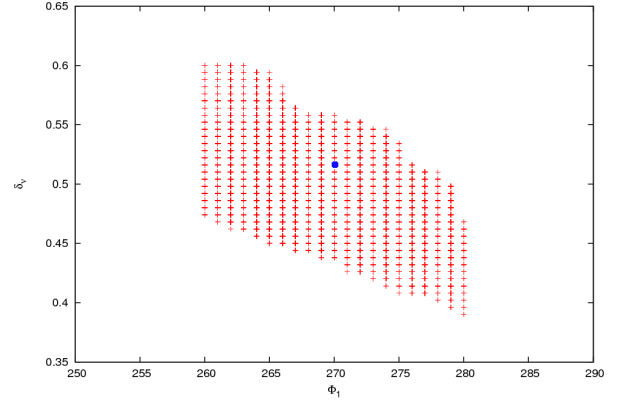


Figura 6.9: Región de parámetros permitida para Φ_1 y δ_ν . Con un 90% C.L., el punto en azul corresponde a cuando χ^2 es mínima.

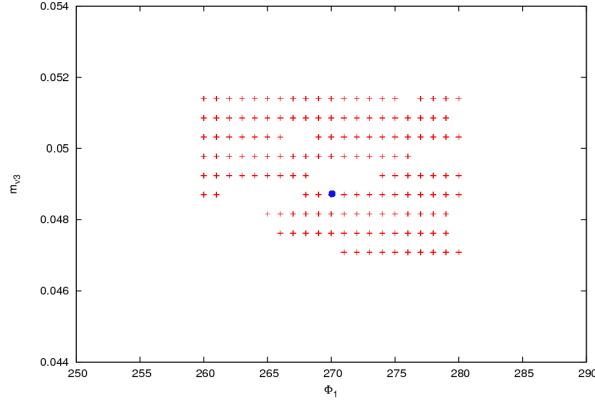


Figura 6.10: Región de parámetros permitida para Φ_1 y m_{ν_3} . Con un 90% C.L., el punto en azul corresponde a cuando χ^2 es mínima.

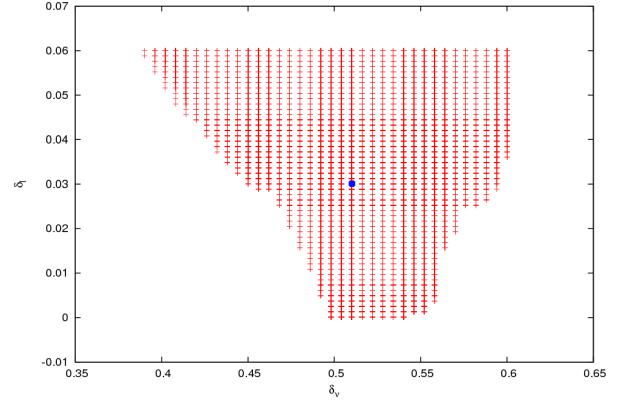


Figura 6.11: Región de parámetros permitida para δ_ν y δ_l . Con un 90% C.L., el punto en azul corresponde a cuando χ^2 es mínima.

Los mejores valores para las magnitudes de las entradas de la matriz de mezclas $PMNS$ están dados en la siguiente expresión, a un 90% C.L.:

$$\left| U_{PMNS}^{th} \right|_{90\%} = \begin{pmatrix} 0.8204_{-0.010}^{+0.008} & 0.5616_{-0.014}^{+0.012} & 0.1181_{-0.011}^{+0.017} \\ 0.3748_{-0.031}^{+0.018} & 0.6280_{-0.010}^{+0.019} & 0.6819 \pm 0.025 \\ 0.4345_{-0.020}^{+0.024} & 0.5388_{-0.024}^{+0.022} & 0.7216_{-0.027}^{+0.024} \end{pmatrix}. \quad (6.41)$$

El valor del invariante de refasamiento relacionado con la fase de Dirac es

$$J_l^{th} = (1.2 - 2.4) \times 10^{-2}. \quad (6.42)$$

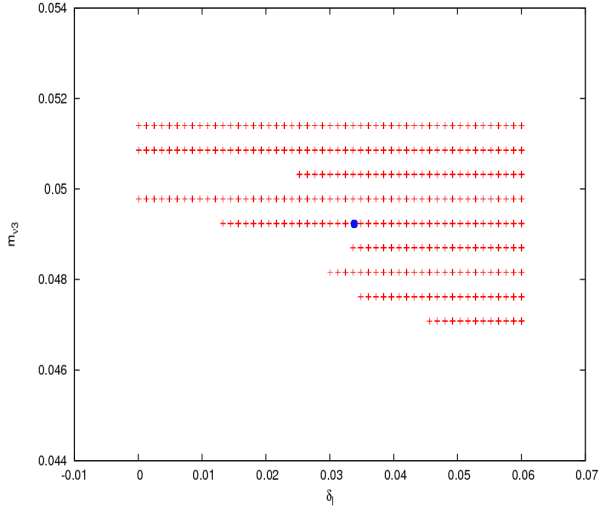


Figura 6.12: Región de parámetros permitida para δ_l y m_{ν_3} . Con un 90% C.L., el punto en azul corresponde a cuando χ^2 es mínima.

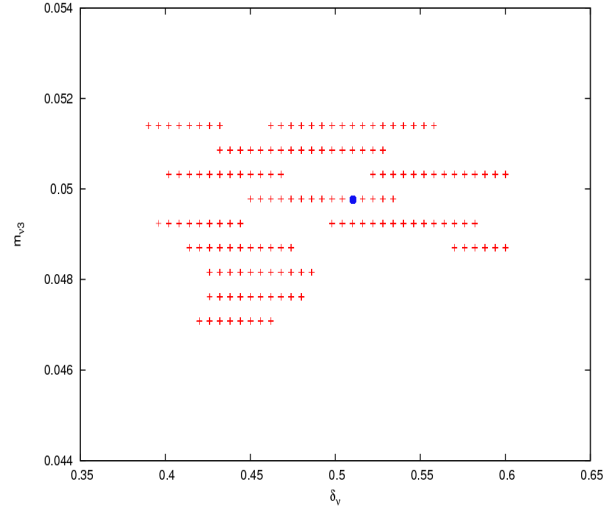


Figura 6.13: Región de parámetros permitida para δ_ν y m_{ν_3} . Con un 90% C.L., el punto en azul corresponde a cuando χ^2 es mínima.

En ausencia de información experimental sobre las fases de Majorana β_1 y β_2 , los dos invariantes de refasamiento S_1 y S_2 , ec. (6.8), asociados con las fases de Majorana en la matriz U_{PMNS} no pueden ser determinados de los valores experimentales. Por lo tanto, para hacer una estimación numérica de las fases de Majorana, se maximizan los invariantes de refasamiento S_1 y S_2 , así se obtiene un valor numérico para las fases de Majorana β_1 y β_2 . Entonces, los valores máximos de los invariantes de refasamiento, ec. (6.8), son:

$$S_1^{max} = -4.9 \times 10^{-2}, \quad S_2^{max} = 3.4 \times 10^{-2}, \quad (6.43)$$

con $\beta_1 = -1.4^\circ$ y $\beta_2 = 77^\circ$. En este análisis numérico, el valor mínimo de la χ^2 correspondiente al mejor valor es $\chi_{min}^2 = 0.59$, y el valor resultante de χ_{min}^2 por grado de libertad es $\chi_{min, d.o.f.}^2 = 0.147$. Todos los resultados numéricos del ajuste están en muy buen acuerdo con los valores de las magnitudes de las entradas en la matriz U_{PMNS} dada por Gonzalez-Garcia [44].

6.3. Ángulos de Mezcla

En la parametrización estándar del PDG, las entradas en las matrices de mezcla de los quarks y leptones están parametrizadas en términos de los ángulos de mezcla y las fases. Así, los ángulos de mezcla están relacionados con las magnitudes de las entradas de la matriz de mezclas de los quarks (leptones) $V_{CKM}(U_{PMNS})$ a través de las relaciones:

$$\sin^2 \theta_{12}^{q(l)} = \frac{|V_{us}(U_{e2})|^2}{1 - |V_{ub}(U_{e3})|^2}, \quad \sin^2 \theta_{23}^{q(l)} = \frac{|V_{cb}(U_{\mu 3})|^2}{1 - |V_{ub}(U_{e3})|^2}, \quad \sin^2 \theta_{13}^{q(l)} = |V_{ub}(U_{e3})|^2. \quad (6.44)$$

Entonces, las expresiones teóricas para los ángulos de mezclas de los quarks, como funciones de las razones de masa de los quarks, se obtienen fácilmente cuando las expresiones teóricas para

las magnitudes de las entradas en la matriz de mezclas CKM , dadas en las ecs. (6.15), son sustituidos por $|V_{ij}|$ en el lado derecho de las expresiones dadas en la ec. (6.44). En esta forma, manteniendo sólo los términos de orden dominante, se tiene:

$$\sin^2 \theta_{12}^{q^{th}} \approx \frac{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} - 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}} \cos \phi}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right) \left(1 + \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}\right)}, \quad (6.45)$$

$$\sin^2 \theta_{23}^{q^{th}} \approx \frac{(\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d})^2}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)}, \quad (6.46)$$

$$\sin^2 \theta_{13}^{q^{th}} \approx \frac{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d})^2}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)}. \quad (6.47)$$

Ahora, los valores numéricos de los ángulos de mezclas de los quarks pueden ser calculados de (6.15) y los valores numéricos de los parámetros δ_u y δ_d , ec. (6.28), y la fase de violación de CP (ϕ) obtenidos del ajuste χ^2 de $|V_{CKM}^{th}|$ a los valores experimentales de $|V_{CKM}^{exp}|$. De esta manera se obtiene. a un 90 % C.L.:

$$\theta_{12}^{q^{th}} = 13.02^\circ \pm 0.02^\circ, \quad \theta_{23}^{q^{th}} = (2.36_{-0.03}^{+0.04})^\circ, \quad \theta_{13}^{q^{th}} = 0.19^\circ \pm 0.03^\circ, \quad (6.48)$$

en muy buen acuerdo con los últimos análisis de los datos experimentales [11], dados en la ec. (1.155).

Los valores numéricos de los ángulos de mezcla de los leptones son calculados de manera similar. Las expresiones teóricas para los ángulos de mezcla como función de las razones de masa de los leptones cargados y los neutrinos, son obtenidas de las ecuaciones (6.44) cuando las expresiones para las magnitudes de los elementos de la matriz $PMNS$, dadas en las ecuaciones (6.19), son substituidas por $|U_{ij}|$ en el lado derecho de las ecuaciones (6.44), manteniendo sólo los términos de orden dominante, se obtiene:

$$\sin^2 \theta_{12}^{l^{th}} \approx \frac{f_{\nu 2} \left\{ \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}} + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu) + 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}} \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}} (1 - \delta_\nu) \cos \Phi_1 \right\}}{(1 + \tilde{m}_{\nu 2}) (1 - \delta_\nu) \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}\right) \left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right)}, \quad (6.49)$$

$$\sin^2 \theta_{23}^{l^{th}} \approx \frac{\delta_\nu + \delta_e f_{\nu 2} - \sqrt{\delta_\nu \delta_e f_{\nu 2}} \cos(\Phi_1 - \Phi_2)}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right) (1 + \tilde{m}_{\nu 2})}, \quad (6.50)$$

$$\sin^2 \theta_{13}^{l^{th}} \approx \frac{\delta_\nu \left\{ \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} + \frac{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2}}{(1 - \delta_\nu)} - 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2}}{(1 - \delta_\nu)}} \cos \Phi_1 \right\}}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right) (1 + \tilde{m}_{\nu 2})}. \quad (6.51)$$

De (6.21) se tiene que $f_{\nu 2} = 1 + \tilde{m}_{\nu 2} - \delta_\nu$. Las expresiones anteriores están escritas en términos de las razones de masa de los leptones. Cuando los valores conocidos de las masas leptónicas,

ec. (6.38), los valores de los parámetros delta ec. (6.39) y los valores de las fases de violación de CP obtenidos del ajuste χ^2 , son insertados en las ecs. (6.49)-(6.51), se obtienen los siguientes valores numéricos para los ángulos de mezcla, a un 90% C.L.:

$$\theta_{12}^{th} = (34.43_{-0.98}^{+0.85})^\circ, \quad \theta_{23}^{th} = (43.60_{-2.22}^{+1.97})^\circ, \quad \theta_{13}^{th} = (6.80_{-0.66}^{+0.95})^\circ, \quad (6.52)$$

los cuales están en muy buen acuerdo con los últimos datos experimentales [44, 45], dados en la ec. (2.89).

Una vez obtenidas las expresiones teóricas para los ángulos de mezclas del sabor de los quarks y los leptones, se pueden determinar las expresiones teóricas para las relaciones de complementariedad de quarks y leptones, tal como se hace en la siguiente sección.

6.4. Complementariedad de Quark y Leptones

Las relaciones entre los ángulos de mezclas y las magnitudes de las entradas de las matrices de mezcla dadas en las ecs. (6.44) permiten escribir las siguientes identidades:

$$\tan(\theta_{12}^q + \theta_{12}^l) = 1 + \Delta_{12}, \quad (6.53)$$

$$\tan(\theta_{23}^q + \theta_{23}^l) = 1 + \Delta_{23}, \quad (6.54)$$

y

$$\tan(\theta_{13}^q + \theta_{13}^l) = \frac{|V_{ub}|\sqrt{1-|U_{e3}|^2} + |U_{e3}|\sqrt{1-|V_{ub}|^2}}{\sqrt{1-|V_{ub}|^2}\sqrt{1-|U_{e3}|^2} - |U_{e3}||V_{ub}|} \quad (6.55)$$

donde

$$\Delta_{12} = \frac{|V_{us}||U_{e1}| + |U_{e2}| - |V_{ud}||U_{e1}| - |U_{e2}|}{|U_{e1}||V_{ud}| - |U_{e2}||V_{us}|} \quad (6.56)$$

y

$$\Delta_{23} = \frac{|V_{cb}||U_{\tau 3}| + |U_{\mu 3}| - |V_{tb}||U_{\tau 3}| - |U_{\mu 3}|}{|U_{\tau 3}||V_{tb}| - |U_{\mu 3}||V_{cb}|}. \quad (6.57)$$

Los valores numéricos de Δ_{12} y Δ_{23} obtenidos de la determinación experimental de $|V_{CKM}|$ y $|U_{PMNS}|$ son mucho más pequeños que uno,

$$\Delta_{12}, \Delta_{23} \ll 1,$$

por este motivo, la identidades ecs. (6.53)-(6.55) son algunas ocasiones llamadas relaciones de Complementariedad de Quarks y Leptones (QLC, por sus siglas en inglés).

La substitución de las magnitudes de los elementos de las matrices de mezcla CKM y $PMNS$, ecuaciones (6.15) y (6.19), permite expresar los términos pequeños Δ_{12} y Δ_{23} como

funciones de las razones de masa de los quarks y leptones. Entonces, las ecs. (6.53)-(6.55) toman la siguiente forma:

$$\tan\left(\theta_{12}^{qth} + \theta_{12}^{lth}\right) = 1 + \Delta_{12}^{th}\left(\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}, \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}, \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}, \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right), \quad (6.58)$$

$$\Delta_{12}^{th} \approx \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} * \zeta_1 - \left[\sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu_2})} f_{\nu_1} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}} f_{\nu_2} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu_2}}{\tilde{m}_{\nu_1}} (1 - \delta_\nu)}\right) \right]}{\sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu_2})(1 - \delta_\nu)} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu_2}}{\tilde{m}_{\nu_1}} (1 - \delta_\nu)}\right)}, \quad (6.59)$$

con

$$\zeta_1 = \left[\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}} f_{\nu_2} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu_2}}{\tilde{m}_{\nu_1}} (1 - \delta_\nu)}\right) + \sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu_2})(1 - \delta_\nu)} \right]. \quad (6.60)$$

Aquí, en lugar de escribir una larga pero no muy ilustrativa expresión exacta, se da una expresión aproximada para Δ_{12}^{th} , cuyo valor numérico es diferente del cálculo numérico exacto en un 12%.

En la derivación de la ec. (6.59) a partir de ec. (6.56) se usaron las siguientes aproximaciones:

$$\frac{|V_{us}^{th}|}{|V_{ud}^{th}|} \approx \sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \approx 0.23152, \quad (6.61)$$

que difiere del valor exacto en menos de 1%, y

$$\frac{|U_{e2}^{th}|}{|U_{e1}^{th}|} \approx \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}} \sqrt{\frac{1 + \tilde{m}_{\nu_2} - \delta_\nu}{1 - \tilde{m}_{\nu_1} - \delta_\nu}} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu_2}}{\tilde{m}_{\nu_1}} (1 - \delta_\nu)} \right\} \approx 0.688, \quad (6.62)$$

que difiere del valor exacto en menos de 1%.

La identidad ec. (6.58) que define $\Delta_{12}^{th}\left(\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}, \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}, \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}, \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right)$ frecuentemente se escribe en términos del ángulo ε_{12}^{th} que mide la desviación de la suma $(\theta_{12}^{qth} + \theta_{12}^{lth})$ del valor $\frac{\pi}{4}$. Entonces, la ec. (6.58) también se puede escribir como

$$\tan\left(\theta_{12}^{qth} + \theta_{12}^{lth}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon_{12}^{th}\right) = 1 + \Delta_{12}^{th}. \quad (6.63)$$

De estas expresión, se obtiene

$$\varepsilon_{12}^{th} = \arctan\left\{\frac{\Delta_{12}^{th}}{2 + \Delta_{12}^{th}}\right\}, \quad \left|\varepsilon_{12}^{th}\right| < \frac{\pi}{2} \quad (6.64)$$

que da a ε_{12}^{th} como función de las razones de masa de los quarks y leptones.

Del mismo modo, de la ec. (6.54) se tiene

$$\tan\left(\theta_{23}^{q^{th}} + \theta_{23}^{l^{th}}\right) = 1 + \Delta_{23}^{th} \left(\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}, \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}, \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}, \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \right), \quad (6.65)$$

donde

$$\Delta_{23}^{th} \approx \frac{\left(\left[\left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right) (1 + \tilde{m}_{\nu_2}) - \delta_\nu - \delta_e f_{\nu 2} \right]^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\delta_\nu + \delta_e f_{\nu 2}} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} - (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d})^2} + (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d}) \right)}{\left[\left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right) (1 + \tilde{m}_{\nu_2}) - \delta_\nu - \delta_e f_{\nu 2} \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} - (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d})^2} - (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d}) \sqrt{\delta_\nu + \delta_e f_{\nu 2}}} \quad (6.66)$$

Además,

$$\begin{aligned} \tan\left(\theta_{13}^{q^{th}} + \theta_{13}^{l^{th}}\right) \approx & \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d}) \left[\left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right) (1 + \tilde{m}_{\nu_2}) - \delta_\nu \left(\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_{\nu_2}}{(1-\delta_\nu)}} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} +}{\sqrt{1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} - \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d})^2} \left[\left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right) (1 + \tilde{m}_{\nu_2}) - \delta_\nu \left(\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_{\nu_2}}{(1-\delta_\nu)}} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} -} \\ & \frac{+\sqrt{\delta_\nu} \left(\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_{\nu_2}}{(1-\delta_\nu)}} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}} \right) \sqrt{1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} - \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d})^2}}{-\sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d}) \sqrt{\delta_\nu} \left(\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_{\nu_2}}{(1-\delta_\nu)}} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}} \right)}. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Así, después de substituir los valores numéricos de las razones de masa de los quarks y leptones en las ecs. (6.59)-(6.67), se obtiene:

$$\Delta_{12}^{th} = 0.1, \quad \Delta_{23}^{th} = 3.23 \times 10^{-2}, \quad (6.68)$$

$$\tan\left(\theta_{13}^{q^{th}} + \theta_{13}^{l^{th}}\right) = 6.53 \times 10^{-2}.$$

Por lo tanto,

$$\theta_{12}^{q^{th}} + \theta_{12}^{l^{th}} = 4.7^\circ. \quad (6.69)$$

$$\theta_{23}^{q^{th}} + \theta_{23}^{l^{th}} = 46^\circ, \quad (6.70)$$

$$\theta_{13}^{q^{th}} + \theta_{13}^{l^{th}} = 7^\circ. \quad (6.71)$$

Por consiguiente, las expresiones de las ecuaciones. (6.58) y (6.59) se obtienen de una expresión analítica exacta para $\tan\left(\theta_{12}^{q^{th}} + \theta_{12}^{l^{th}}\right)$ como una función de las magnitudes de las entradas en las matrices de mezcla V_{CKM}^{th} y U_{PMNS}^{th} , ecs (6.53) y (6.56). En las ecs. (6.15) y (6.19), los elementos de las matrices de mezcla V_{CKM}^{th} and U_{PMNS}^{th} están dadas como funciones explícitas exactas analíticas de las razones de masa de los quarks y leptones. Además estas expresiones son válidas para cualquier valor posible de las razones de masa de los quarks y leptones. De la ec. (6.59) se hace evidente que el valor numérico pequeño de Δ_{12}^{th} se debe a la cancelación

parcial de dos términos de casi la misma magnitud, pero de signo opuesto, que aparece en el numerador del lado derecho de la expresión de la ec. (6.59), esto es,

$$\sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \left[\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}} f_{\nu_2} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu_2}}{\tilde{m}_{\nu_1}}} (1 - \delta_\nu) \right) + \sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu_2})(1 - \delta_\nu)} \right] = 0.287 \quad (6.72)$$

y

$$\sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu_2})} f_{\nu_1} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}} f_{\nu_2} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu_2}}{\tilde{m}_{\nu_1}}} (1 - \delta_\nu) \right) = 0.22. \quad (6.73)$$

La igualdad numérica aproximada de estas dos expresiones tiene su origen en el efecto combinado de la jerarquía muy pronunciada en el espectro de masas de los leptones cargados y los quarks tipo- u y $-d$, la cual produce razones de masa pequeñas y muy pequeñas, y el mecanismo del subibaja tipo I que genera masas muy pequeñas para los neutrino, pero las razones de masa de los neutrinos son relativamente grandes.

En resumen, se puede concluir que la así llamada relación de complementariedad de quarks y leptones dada en ec. (6.58) es más que una coincidencia numérica, ésta es el resultado del efecto combinado de dos factores:

1. La jerarquía pronunciada en el espectro de masas de los fermiones de Dirac produce razones de masa pequeñas o muy pequeñas para los leptones cargados, quarks tipo- u y $-d$. La jerarquía de masa de los quarks se refleja en una jerarquía similar de los ángulos de mezcla pequeños o muy pequeños.
2. El mecanismo del subibaja tipo I que da la masa muy pequeña a los neutrinos izquierdos de Majorana, con valores de las razones de masa de los neutrinos relativamente grandes m_{ν_1}/m_{ν_2} , y permite valores grandes para los ángulos de mezclas θ_{12}^l y θ_{23}^l (ver las ecs. (6.49)-(6.51)) .

Los dos factores que se acaban de mencionar contribuyen al numerador de Δ_{12}^{th} con dos términos de casi igual magnitud pero signo opuesto. Por lo tanto, el valor numérico pequeño de Δ_{12}^{th} ocurren por la cancelación parcial de estos dos términos.

6.5. Masas Efectivas de Majorana

El cuadrado de las magnitudes de las masas efectivas de Majorana, ec. (2.97), son

$$|\langle m_{ll} \rangle|^2 = \sum_{j=1}^3 m_{\nu_j}^2 |U_{lj}|^4 + 2 \sum_{j < k}^3 m_{\nu_j} m_{\nu_k} |U_{lj}|^2 |U_{lk}|^2 \cos 2(w_{lj} - w_{lk}), \quad (6.74)$$

donde

$$w_{lj} = \arg \{U_{lj}\} = \arctan \left\{ \frac{\Im m U_{lj}}{\Re U_{lj}} \right\}, \quad (6.75)$$

este término contiene ambas fases de violación de CP, la de Dirac y la de Majorana.

La expresión teórica para el cuadrado de la magnitud de la masa efectiva de Majorana del neutrino del electrón, escrita en términos de las razones de masa de los leptones es:

$$\begin{aligned}
|\langle m_{ee} \rangle|^2 \approx & \frac{1}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right)^2 \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}\right)^2} \left\{ m_{\nu 1}^2 \left(1 - 4\sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}} (1 - \delta_\nu)\right) \right. \\
& + \frac{m_{\nu 2}^2 f_{\nu 2}^2}{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})^2 (1 - \delta_\nu)^2} \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}} \left(\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}} + 4\sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}} (1 - \delta_\nu) + 6\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu) \right) \\
& + 2\frac{m_{\nu 1} m_{\nu 3} \delta_\nu}{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})} \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}\right) \left(\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2}}{(1 - \delta_\nu)}} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}} \right)^2 \cos 2(w_{e1} - w_{e3}) \\
& + 2\frac{m_{\nu 1} m_{\nu 2} f_{\nu 2}}{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})(1 - \delta_\nu)} \left(\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}} + 2\left(1 - \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}\right) \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_e}{\tilde{m}_{\nu 2} \tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu)} \right) \cos 2(w_{e1} - w_{e2}) \\
& \left. + 2\frac{m_{\nu 2} m_{\nu 3} f_{\nu 2} \delta_\nu}{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})^2 (1 - \delta_\nu)^2} \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}\right) \left(2\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 2}}} (1 - \delta_\nu)\right) \cos 2(w_{e2} - w_{e3}) \right\}
\end{aligned} \tag{6.76}$$

donde $w_{e2} \approx \beta_1$ y

$$w_{e1} = \arctan \left\{ -\frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_e}{\tilde{m}_{\nu 2} \tilde{m}_\mu} \delta_e \delta_\nu f_{\nu 2}}}{\sqrt{(1 - \delta_\nu) + \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_e}{\tilde{m}_{\nu 2} \tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu)}}} \right\}, \tag{6.77}$$

$$w_{e3} \approx \arctan \left\{ \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \delta_e f_{\nu 2} (1 - \delta_\nu) + \sqrt{\delta_\nu} \left(\sqrt{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2}} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu)} \right) \tan \beta_2}}{-\sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \delta_e f_{\nu 2} (1 - \delta_\nu) \tan \beta_2 + \sqrt{\delta_\nu} \left(\sqrt{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2}} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu)} \right)}}} \right\}. \tag{6.78}$$

En forma similar, la expresión teórica para el cuadrado de la magnitud de la masa efectiva de Majorana del neutrino del muon es:

$$\begin{aligned}
|\langle m_{\mu\mu} \rangle|^2 \approx & \frac{1}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right)^2 \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}\right)^2 (1 + \tilde{m}_{\nu 2})} \left\{ \frac{m_{\nu 3}^2}{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})} \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}\right)^2 (\delta_\nu + 2\delta_e f_{\nu 2}) \right. \\
& + \frac{m_{\nu 2}^2}{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})(1 - \delta_\nu)} \left(1 - \delta_\nu - 4\sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}} (1 - \delta_\nu) + 6\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}\right) \\
& + 2m_{\nu 1} m_{\nu 2} f_{\nu 2} \left(\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}} (1 - \delta_\nu) + 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_e}{\tilde{m}_{\nu 2} \tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu)} \left(1 - \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}\right) \right) \cos 2(w_{\mu 1} - w_{\mu 2}) \\
& + 2m_{\nu 1} m_{\nu 3} \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}\right) \left(2\delta_\nu \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_e}{\tilde{m}_{\nu 2} \tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu)} + \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}} (1 - \delta_\nu) (\delta_\nu + \delta_e f_{\nu 2}) \right) \cos 2(w_{\mu 1} - w_{\mu 3}) \\
& \left. + 2\frac{m_{\nu 2} m_{\nu 3} f_{\nu 2}}{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})(1 - \delta_\nu)} \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}\right) \left((1 - \delta_\nu) (\delta_\nu + \delta_e f_{\nu 2}) - 2\delta_\nu \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_e}{\tilde{m}_{\nu 2} \tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu)} \right) \cos 2(w_{\mu 2} - w_{\mu 3}) \right\}
\end{aligned} \tag{6.79}$$

donde

$$w_{\mu 1} \approx \arctan \left\{ \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}} \delta_e \delta_\nu f_{\nu 2}}}{\sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu) + \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}} (1 - \delta_\nu)}}} \right\}, \tag{6.80}$$

$$w_{\mu 2} \approx \arctan \left\{ \frac{\sqrt{f_{\nu 2} \tan \beta_1 + \sqrt{\delta_e \delta_\nu}}}{\sqrt{f_{\nu 2} - \sqrt{\delta_e \delta_\nu} \tan \beta_1}} \right\} \tag{6.81}$$

y

$$w_{\mu 3} \approx \arctan \left\{ \frac{\tan \beta_2 - \sqrt{f_{\nu 2}}}{1 + \sqrt{f_{\nu 2}} \tan \beta_2} \right\}. \quad (6.82)$$

De estas expresiones y de los valores numéricos de las masas de los neutrinos dadas en la ec. (6.38), se obtienen las siguientes expresiones para las masas efectivas de los neutrinos de Majorana con las fases β_1 y β_2 como parámetros libres:

$$|\langle m_{ee} \rangle|^2 \approx \{9.41 + 8.29 \cos(1^\circ - 2\beta_1) + 4.3 \cos(1^\circ - 2w_{e3}) + 4.31 \cos 2(\beta_1 - w_{e3})\} \times 10^{-6} \text{ eV}^2 \quad (6.83)$$

donde

$$w_{e3} = \arctan \left\{ \frac{0.15 \tan \beta_2 - 0.013}{0.15 + 0.013 \tan \beta_2} \right\}. \quad (6.84)$$

En forma similar,

$$|\langle m_{\mu\mu} \rangle|^2 \approx \{4.8 + 0.17 \cos 2(44^\circ - w_{\mu 2}) + 1.8 \cos 2(w_{\mu 2} - w_{\mu 3})\} \times 10^{-4} \text{ eV}^2 \quad (6.85)$$

donde

$$w_{\mu 2} \approx \arctan \left\{ \frac{0.65 \tan \beta_1 + 0.13}{0.65 - 0.13 \tan \beta_1} \right\}, \quad (6.86)$$

y

$$w_{\mu 3} \approx \arctan \left\{ \frac{\tan \beta_2 - 0.13}{1 + 0.13 \tan \beta_2} \right\}. \quad (6.87)$$

Para hacer una estimación numérica de las masas efectivas de los neutrinos de Majorana, $|\langle m_{ee} \rangle|$ y $|\langle m_{\mu\mu} \rangle|$, se usan los siguientes valores para las fases de Majorana $\beta_1 = -1.4^\circ$ y $\beta_2 = 77^\circ$ obtenidos por maximizar los invariantes de refasamiento S_1 y S_2 , ec. (6.43). Entonces, los valores numéricos de las masas efectivas de los neutrinos de Majorana son:

$$|\langle m_{ee} \rangle| \approx 4.6 \times 10^{-3} \text{ eV}, \quad |\langle m_{\mu\mu} \rangle| \approx 2.1 \times 10^{-2} \text{ eV}. \quad (6.88)$$

Estos valores numéricos son consistentes con un ángulo de mezcla θ_{13}^l pequeño. Además, el valor numérico de $|\langle m_{ee} \rangle|$, obtenido en este esquema teórico, está al menos dos ordenes de magnitud por abajo de los valores experimentales actualmente (ver Cuadro 2.3). Por consiguiente, en los experimentos terrestres, en curso y futuros, del proceso de desintegración doble beta sin neutrinos, resultara muy complicado poder medir con precisión la masa efectiva de los neutrinos de Majorana, ya que el valor de dicha masa podría ser del orden de magnitud de las barras de error de la matriz nuclear $|M^{0\nu}|^2$.

En conclusión: a partir de un tratamiento unificado de la matrices de masa de los quarks y leptones, en cual la matrices tienen la misma forma genérica con dos ceros de textura clase I. En este capítulo, se dedujeron expresiones teóricas exactas para los elementos de las matrices de mezclas CKM y $PMNS$, ecs (6.15) y (6.19). La matriz de mezclas CKM ($PMNS$) se

parametrizó en términos de cuatro razones de masa de los quarks (leptones) y una (dos) fase de violación de CP. De tal forma que al realizar el ajuste de χ^2 para cada matriz de mezcla, se obtuvo un buen acuerdo con todos los datos experimentales disponibles. Además, se derivaron expresiones teóricas para los ángulos de mezcla de ambos sectores, las relaciones de complementariedad de quarks y leptones y las masas efectivas de Majorana para el neutrino del electrón y el neutrino del muon. De dichas expresiones teóricas se obtuvieron valores numéricos consistentes con todos los datos experimentales disponibles. De hecho, un resultado importantes derivado en este capítulo, fue establecer una relación directa entre las jerarquías de los espectros de masa de las partículas y los ángulos de mezclas, es decir, para una jerarquía de masa pronunciada se obtienen ángulos de mezcla pequeños y viceversa.

Conclusiones

En el Modelo Estándar de la partículas elementales antes de que los fermiones adquieran masa vía el mecanismo de Higgs, los fermiones de una misma carga (fermiones análogos) están igualmente acoplados a los campos de norma. En consecuencia, la invariancia respecto del intercambio de fermiones de la misma familia es una simetría natural exacta del Modelo Estándar sin masas. En este trabajo de tesis se demostró que al extender el Modelo Estándar imponiendo una simetría permutacional del sabor S_3 y su rompimiento explícito secuencial, se obtiene un tratamiento unificado de las matrices de masa de los quarks y leptones, en el cual los neutrinos izquierdos adquieren masa a través del mecanismo del subibaja tipo I. En este escenario, las matrices de masa de los fermiones de Dirac tienen la misma forma genérica (hermitiana) con dos ceros de textura clase I, y una jerarquía normal en el espectro de masa. Por consiguiente, la matriz de masa de los neutrinos izquierdos de Majorana también tiene dos ceros de textura clase I, pero es una matriz simétrica compleja. De este modo, una vez que se determinaron las matrices de masa de los fermiones del Modelo Estándar extendido, se dedujeron expresiones teóricas exactas para los elementos de las matrices de mezclas CKM y $PMNS$. La matriz de mezclas CKM se parametrizó en términos de cuatro razones de masa de los quarks, una fase de violación de CP y dos parámetros δ_u y δ_d asociados con el patrón de rompimiento de la simetría del sabor:

$$V_{CKM}(\tilde{m}_u, \tilde{m}_c, \tilde{m}_d, \tilde{m}_s, \phi, \delta_u, \delta_d).$$

Mientras que la matriz de mezclas leptónica $PMNS$ se parametrizó en términos de cuatro razones de masa de los leptones, dos fases de violación de CP y dos parámetros δ_ν y δ_l asociados con el patrón de rompimiento de la simetría del sabor:

$$U_{PMNS}(\tilde{m}_{\nu_1}, \tilde{m}_{\nu_2}, \tilde{m}_e, \tilde{m}_\mu, \Phi_1, \Phi_2, \delta_\nu, \delta_l).$$

Además, con ayuda del grupo de simetría S_3 , se realizó una clasificación en clases de equivalencia de las matrices de masa con ceros de textura. En esta clasificación se usaron las transformaciones de similitud, tomando a las seis matrices que componen a la representación real de S_3 como matrices de transformación. Con esta clasificación se redujo el número de matrices de masas de 3×3 con ceros de textura, de treinta y dos a solamente once conjuntos de matrices. Cada uno de estos conjuntos de matrices tienen exactamente el mismo contenido físico, en el

sentido que todas las matrices tiene los mismos eigenvalores.

De las expresiones teóricas de los elementos de las matrices de mezclas CKM y $PMNS$, se obtuvieron valores numéricos consistentes, a un 90 % C.L., con todos los datos experimentales disponibles. De hecho, un resultado importantes derivado en este trabajo de tesis, fue establecer una relación directa entre las jerarquías de los espectros de masa de los fermiones y los ángulos de mezclas, es decir, para una jerarquía de masa pronunciada se obtienen ángulos de mezcla pequeños y viceversa.

Otro resultado importante de este trabajo de tesis es haber estimado el valor numérico de las masas efectivas de los neutrinos de Majorana, $|\langle m_{ee} \rangle|$ y $|\langle m_{\mu\mu} \rangle|$, los cuales son consistentes con un ángulo de mezcla θ_{13}^l pequeño. Además, el valor numérico de $|\langle m_{ee} \rangle|$, obtenido en este esquema teórico, está al menos dos ordenes de magnitud por abajo de los valores experimentales actualmente (ver Cuadro 2.3). Por consiguiente, en los experimentos terrestres, en curso y futuros, del proceso de desintegración doble beta sin neutrinos, resultara muy complicado poder medir con precisión la masa efectiva de los neutrinos de Majorana, ya que el valor de dicha masa podría ser del orden de magnitud de las barras de error de la matriz nuclear $|M^{0\nu}|^2$.

Un aspecto importante que no se estudio en este trabajo, es la evolución con la energía de los elementos de las matrices de masas y mezclas del sector de los quarks y leptones, y con esto poder verificar sí las relaciones QLC son exactas en algún nivel de energía. También falto estudiar sí todas las posibles combinaciones de las matrices de masas en una clase de equivalencia, efectivamente reproducen la misma fenomenología del sabor.

7.1. Resumen de Resultados

En el capítulo cinco, se derivaron la matrices de masa M^k ($k = u, d, l, \nu_D$) para los fermiones de Dirac, las cuales tienen dos ceros de textura clase I, dada por

$$M_k = m_{k3} \begin{pmatrix} 0 & A_k & 0 \\ A_k^* & B_k & C_k \\ 0 & C_k & D_k \end{pmatrix},$$

donde $A_k = |A_k|e^{i\phi_k}$, $B_k = -\Delta_k + \delta_k$ y $D_k = 1 - \delta_k$. Las matrices de masa se construyen sumando tres términos de masa M_{3k} , M_{2k} y M_{1k} correspondientes a estados de menor simetría en un esquema para el rompimiento explícito de la simetría permutacional del sabor. El patrón de rompimiento explícito de la simetría de sabor $S_{3L} \times S_{3R}$ a $S_{2L} \times S_{2R}$ se caracteriza por el parámetro $Z_k^{1/2} = \frac{(M_k)_{23}}{(M_k)_{22}}$, el cual mide la mezcla de las representaciones irreducibles de singlete y doblete de $S_{3L} \times S_{3R}$. Este patrón de rompimiento se etiquetó en términos de las representaciones simétrica $Z_S^{1/2} = 1/\sqrt{8}$ y antisimétrica $Z_A^{1/2} = -\sqrt{8}$ de una grupo auxiliar $\tilde{S}(2)$ de permutaciones de dos campos en el término de Yukawa.

Además, como los neutrinos izquierdos de Majorana adquieren masa a través del mecanismo del subibaja tipo I, y dentro del marco teórico de un tratamiento unificado, donde los fermiones de Dirac y los neutrinos derechos de Majorana tienen la misma forma genérica con dos ceros de textura clase I. Se demostró en forma explícita que la matriz de masa de los neutrinos izquierdos de Majorana también tiene dos ceros de textura clase I, de la forma

$$M_{\nu_L} = \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_L} & 0 \\ a_{\nu_L} & b_{\nu_L} & c_{\nu_L} \\ 0 & c_{\nu_L} & d_{\nu_L} \end{pmatrix}.$$

También, se demostró que a pesar de representar a los neutrinos derechos con una matriz con tres o cuatro ceros de textura, la matriz de masa de los neutrinos izquierdos aún tiene dos ceros de textura clase I.

En el capítulo seis, se obtuvieron expresiones exactas para la matriz de mezclas de los quarks V_{CKM}^{th} y los leptones U_{PMNS}^{th} . Así, se dedujeron expresiones teóricas exactas para las magnitudes de las entradas de la matriz de los quarks $|(V_{CKM}^{th})_{ij}|$ y los leptones $|(U_{PMNS}^{th})_{ij}|$. A partir de las cuales se hizo un ajuste χ^2 de las expresiones teóricas exactas para las magnitudes de las entradas de las matrices de mezcla a los valores experimentales, obteniendo los siguientes resultados:

- Ajuste χ^2 para la matriz de mezclas de los quarks. Con las razones de masa de los quarks; $\tilde{m}_u = 2.5469 \times 10^{-5}$, $\tilde{m}_c = 3.9918 \times 10^{-3}$, $\tilde{m}_d = 1.5261 \times 10^{-3}$ y $\tilde{m}_s = 3.2319 \times 10^{-2}$. Se determinaron los siguientes mejores valores para los parámetros con un 90% C.L.: $\delta_u = (5.14_{-3.4}^{+1.3}) \times 10^{-3}$ y $\delta_d = (9.4_{-9.3}^{+5.6}) \times 10^{-4}$, y la fase de violación de CP es $\phi = (89.86_{-0.31}^{+1.27})^\circ$. Los mejores valores para las magnitudes de las entradas de la matriz de mezclas CKM están dados en la siguiente expresión:

$$\left| V_{CKM}^{th} \right|_{90\%} = \begin{pmatrix} 0.974228 \pm 0.00009 & 0.22532_{-0.00039}^{+0.00035} & 0.003325_{-0.000066}^{+0.000056} \\ 0.22518_{-0.00039}^{+0.00036} & 0.97335 \pm 0.00009 & 0.04126_{-0.00063}^{+0.00065} \\ 0.00858_{-0.00017}^{+0.00025} & 0.04050_{-0.00067}^{+0.00062} & 0.999143 \pm 0.000026 \end{pmatrix}$$

y los ángulos internos del triángulo unitario $\alpha^{th} = (92.3_{-3.36}^{+1.14})^\circ$, $\beta^{th} = (20.41_{-0.13}^{+0.05})^\circ$ y $\gamma^{th} = (67.25_{-0.10}^{+3.55})^\circ$. El invariante de Jarlskog toma el valor $J_q^{th} = (2.8 \pm 0.01) \times 10^{-5}$. Todos estos resultados están en buen acuerdo con los valores experimentales dados en PDG.

- Ajuste χ^2 para la matriz de mezclas leptónica. los siguientes valores para las masas de los leptones cargados $m_e = 0.510998910$ MeV, $m_\mu = 105.658367$ MeV y $m_\tau = 1776.82$ MeV. Tomamos para las masas de los neutrinos izquierdos de Majorana una jerarquía normal, obteniendo así

$$\tilde{m}_{\nu_1} = \sqrt{1 - \frac{(\Delta m_{32}^2 + \Delta m_{21}^2)}{m_{\nu_3}^2}}, \quad \tilde{m}_{\nu_2} = \sqrt{1 - \frac{\Delta m_{32}^2}{m_{\nu_3}^2}}.$$

Las diferencias de los cuadrados de las masas del neutrino se obtuvieron de los datos experimentales de las oscilaciones de neutrinos, mientras que la masa m_{ν_3} se deja como

parámetro libre. Así, de los mejores valores obtenidos para m_{ν_3} y de los valores experimentales de Δm_{13}^2 y Δm_{21}^2 , se obtuvieron los siguientes mejores valores para las masas de los neutrinos con un 90 % C.L.:

$$m_{\nu_1} = (3.22_{-0.39}^{+0.67}) \times 10^{-3} \text{eV}, \quad m_{\nu_2} = (9.1_{-0.13}^{+0.25}) \times 10^{-3} \text{eV}, \quad m_{\nu_3} = (4.71 - 5.14) \times 10^{-2} \text{eV}.$$

Los mejores valores resultantes para los parámetros son, con un 90 % C.L.: $\delta_\nu = 0.510_{-0.12}^{+0.09}$, $\delta_l = (0.02 - 6) \times 10^{-2}$, y las fases de violación de CP $\Phi_1 = 270^\circ \pm 10^\circ$ y $\Phi_2 = 180^\circ \pm 10^\circ$. Los mejores valores para las magnitudes de las entradas de la matriz de mezclas $PMNS$ están dados en la siguiente expresión:

$$\left| U_{PMNS}^{th} \right|_{90\%} = \begin{pmatrix} 0.8204_{-0.010}^{+0.008} & 0.5616_{-0.014}^{+0.012} & 0.1181_{-0.011}^{+0.017} \\ 0.3748_{-0.031}^{+0.018} & 0.6280_{-0.010}^{+0.019} & 0.6819 \pm 0.025 \\ 0.4345_{-0.020}^{+0.024} & 0.5388_{-0.024}^{+0.022} & 0.7216_{-0.027}^{+0.024} \end{pmatrix}.$$

El valor del invariante de refasamiento relacionado con la fase de Dirac es $J_l^{th} = (1.2 - 2.4) \times 10^{-2}$. Los valores máximos de los invariantes de refasamiento son: $S_1^{max} = -4.9 \times 10^{-2}$ y $S_2^{max} = 3.4 \times 10^{-2}$, Todos los resultados numéricos del ajuste están en muy buen acuerdo con los valores de las magnitudes de las entradas en la matriz U_{PMNS} dada por Gonzalez-Garcia.

Usando la igualdad de las magnitudes de los elementos correspondientes en las matrices V_{CKM}^{th} y V_{CKM}^{PDG} , se derivaron expresiones teóricas para los ángulos de mezcla como funciones de las razones de masa de los quarks $\tilde{m}_u, \tilde{m}_c, \tilde{m}_d, \tilde{m}_s$, y los parámetros que rompen la simetría de sabor, δ_u y δ_d , y la fase ϕ . Dichas expresiones tienen la forma:

$$\sin^2 \theta_{12}^{qth} \approx \frac{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} - 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}} \cos \phi}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right) \left(1 + \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}\right)},$$

$$\sin^2 \theta_{23}^{qth} \approx \frac{(\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d})^2}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)} \quad \text{y} \quad \sin^2 \theta_{13}^{qth} \approx \frac{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d})^2}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)}.$$

A partir de las expresiones anteriores se obtuvo $\theta_{12}^{qth} = 13.02^\circ \pm 0.02^\circ$, $\theta_{23}^{qth} = (2.36_{-0.03}^{+0.04})^\circ$ y $\theta_{13}^{qth} = 0.19^\circ \pm 0.03^\circ$. En muy buen acuerdo con los últimos análisis de los datos experimentales

En forma similar, para el sector leptónico se obtuvo

$$\sin^2 \theta_{12}^{lth} \approx \frac{f_{\nu 2} \left\{ \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}} + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu) + 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_e}{\tilde{m}_{\nu 2} \tilde{m}_\mu}} (1 - \delta_\nu) \cos \Phi_1 \right\}}{\left(1 + \tilde{m}_{\nu 2}\right) (1 - \delta_\nu) \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}\right) \left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right)},$$

$$\sin^2 \theta_{23}^{lth} \approx \frac{\delta_\nu + \delta_e f_{\nu 2} - \sqrt{\delta_\nu \delta_e f_{\nu 2}} \cos(\Phi_1 - \Phi_2)}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right) (1 + \tilde{m}_{\nu 2})},$$

$$\sin^2 \theta_{13}^{lth} \approx \frac{\delta_\nu \left\{ \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} + \frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_{\nu_2}}{(1-\delta_\nu)} - 2 \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_{\nu_2}}{(1-\delta_\nu)}} \cos \Phi_1 \right\}}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right) (1 + \tilde{m}_{\nu_2})}$$

donde $f_{\nu 2} = 1 + \tilde{m}_{\nu_2} - \delta_\nu$. Así, se obtienen los siguientes valores numéricos para los ángulos de mezcla: $\theta_{12}^{lth} = (34.43_{-0.98}^{+0.85})^\circ$, $\theta_{23}^{lth} = (43.60_{-2.22}^{+1.97})^\circ$ y $\theta_{13}^{lth} = (6.80_{-0.66}^{+0.95})^\circ$, los cuales están en muy buen acuerdo con los últimos datos experimentales.

De hecho, un resultado importantes derivado de la expresiones y valores de los ángulos de mezcla en ambos sectores, fue establecer una relación directa entre las jerarquías de los espectros de masa de las partículas y los ángulos de mezclas, es decir, para una jerarquía de masa pronunciada se obtienen ángulos de mezcla pequeños y viceversa.

Para las relaciones de complementariedad de quarks y leptones (QLC), se obtuvieron expresiones teóricas con la estructura funcional:

$$\tan \left(\theta_{12}^{qth} + \theta_{12}^{lth} \right) = 1 + \Delta_{12}^{th} \left(\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}, \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}, \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}, \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \right)$$

y

$$\tan \left(\theta_{23}^{qth} + \theta_{23}^{lth} \right) = 1 + \Delta_{23}^{th} \left(\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}, \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}, \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}, \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \right),$$

Después de substituir los valores numéricos de las razones de masa de los quarks y leptones en las QLC se obtiene: $\Delta_{12}^{th} = 0.1$, $\Delta_{23}^{th} = 3.23 \times 10^{-2}$ y $\tan \left(\theta_{13}^{qth} + \theta_{13}^{lth} \right) = 6.53 \times 10^{-2}$. Por lo tanto,

$$\theta_{12}^{qth} + \theta_{12}^{lth} = 4.7^\circ, \quad \theta_{23}^{qth} + \theta_{23}^{lth} = 46^\circ \quad \text{y} \quad \theta_{13}^{qth} + \theta_{13}^{lth} = 7^\circ.$$

En resumen, se puede concluir que la así llamada relación de complementariedad de quarks y leptones dada en ec. (6.58) es más que una coincidencia numérica, ésta es el resultado del efecto combinado de dos factores:

1. La jerarquía pronunciada en el espectro de masas de los fermiones de Dirac produce razones de masa pequeñas o muy pequeñas para los leptones cargados, quarks tipo-*u* y -*d*. La jerarquía de masa de los quarks se refleja en una jerarquía similar de los ángulos de mezcla pequeños o muy pequeños.
2. El mecanismo del subibaja tipo I que da la masa muy pequeña a los neutrinos izquierdos de Majorana, con valores de las razones de masa de los neutrinos relativamente grandes m_{ν_1}/m_{ν_2} , y permite valores grandes para los ángulos de mezclas θ_{12}^l y θ_{23}^l .

Los dos factores que se acaban de mencionar contribuyen al numerador de Δ_{12}^{th} con dos términos de casi igual magnitud pero signo opuesto. Por lo tanto, el valor numérico pequeño de Δ_{12}^{th} ocurren por la cancelación parcial de estos dos términos.

Finalmente para las masas efectivas de Majorana, al sustituir el valor numérico de las masas leptónicas el cuadrado de las magnitudes de las masas efectivas de Majorana, con las fases β_1

y β_2 como parámetros libres son:

$$|\langle m_{ee} \rangle|^2 \approx \{9.41 + 8.29 \cos(1^\circ - 2\beta_1) + 4.3 \cos(1^\circ - 2w_{e3}) + 4.31 \cos 2(\beta_1 - w_{e3})\} \times 10^{-6} \text{ eV}^2$$

donde

$$w_{e3} = \arctan \left\{ \frac{0.15 \tan \beta_2 - 0.013}{0.15 + 0.013 \tan \beta_2} \right\}.$$

Además,

$$|\langle m_{\mu\mu} \rangle|^2 \approx \{4.8 + 0.17 \cos 2(44^\circ - w_{\mu 2}) + 1.8 \cos 2(w_{\mu 2} - w_{\mu 3})\} \times 10^{-4} \text{ eV}^2$$

donde

$$w_{\mu 2} \approx \arctan \left\{ \frac{0.65 \tan \beta_1 + 0.13}{0.65 - 0.13 \tan \beta_1} \right\}, \quad \text{y} \quad w_{\mu 3} \approx \arctan \left\{ \frac{\tan \beta_2 - 0.13}{1 + 0.13 \tan \beta_2} \right\}.$$

Para hacer una estimación numérica de las masas efectivas de los neutrinos de Majorana, $|\langle m_{ee} \rangle|$ y $|\langle m_{\mu\mu} \rangle|$, se usaron los siguientes valores para las fases de Majorana $\beta_1 = -1.4^\circ$ y $\beta_2 = 77^\circ$ obtenidos por maximizar los invariantes de refasamiento S_1 y S_2 . Entonces, los valores numéricos de las masas efectivas de los neutrinos de Majorana son:

$$|\langle m_{ee} \rangle| \approx 4.6 \times 10^{-3} \text{ eV}, \quad |\langle m_{\mu\mu} \rangle| \approx 2.1 \times 10^{-2} \text{ eV}. \quad (7.1)$$

Estos valores numéricos son consistentes con un ángulo de mezcla θ_{13}^l pequeño. Además, el valor numérico de $|\langle m_{ee} \rangle|$, obtenido en este esquema teórico, está al menos dos ordenes de magnitud por abajo de los valores experimentales actualmente (ver Cuadro 2.3). Por consiguiente, en los experimentos terrestres, en curso y futuros, del proceso de desintegración doble beta sin neutrinos, resultara muy complicado poder medir con precisión la masa efectiva de los neutrinos de Majorana, ya que el valor de dicha masa podría ser del orden de magnitud de las barras de error de la matriz nuclear $|M^{0\nu}|^2$.

Matrices de masas de 3×3

La forma más general de una matriz 3×3 es:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

donde todos los elementos son complejos.

Por otro lado, los cofactores de los elementos de una matriz A de $n \times m$ se definen como:

$$X_{nm} = (-1)^{n+m} \det \{ \hat{A} \} \quad (\text{A.2})$$

donde \hat{A} se construye al eliminar el renglón n y la columna m . Por lo tanto, los cofactores de los elementos de una matriz de la forma de ec. (A.1) son:

$$\begin{aligned} X_{11} &= \begin{vmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = M_{22}M_{33} - M_{23}M_{32}, & X_{12} &= - \begin{vmatrix} M_{21} & M_{23} \\ M_{31} & M_{33} \end{vmatrix} = M_{23}M_{31} - M_{21}M_{33}, \\ X_{13} &= \begin{vmatrix} M_{21} & M_{22} \\ M_{31} & M_{32} \end{vmatrix} = M_{21}M_{32} - M_{22}M_{31}, & X_{21} &= - \begin{vmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = M_{13}M_{32} - M_{12}M_{33}, \\ X_{22} &= \begin{vmatrix} M_{11} & M_{13} \\ M_{31} & M_{33} \end{vmatrix} = M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}, & X_{23} &= - \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{31} & M_{32} \end{vmatrix} = M_{12}M_{31} - M_{11}M_{32}, \\ X_{31} &= \begin{vmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{22} & M_{23} \end{vmatrix} = M_{12}M_{23} - M_{13}M_{22}, & X_{32} &= - \begin{vmatrix} M_{11} & M_{13} \\ M_{21} & M_{23} \end{vmatrix} = M_{13}M_{21} - M_{11}M_{23}, \\ X_{33} &= \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Así, la matriz adjunta de la matriz M es:

$$\text{adj} \{ \bar{M} \} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

donde X_{nm} ($m, n = 1, 2, 3$) están dados en las ecs. (A.3).

El determinante de la matriz (A.1) es:

$$\det \{M\} = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$\det \{M\} = M_{11}M_{22}M_{33} - M_{11}M_{23}M_{32} - M_{21}M_{12}M_{33} \\ + M_{21}M_{13}M_{32} + M_{31}M_{12}M_{23} - M_{31}M_{13}M_{22}, \quad (\text{A.6})$$

en su forma más desarrollada. Pero el determinante de una matriz A es una combinación del renglón i con los cofactores del mismo, es decir,

$$\det \{A\} = A_{i1}X_{i1} + A_{i2}X_{i2} + \cdots + A_{in}X_{in} \quad (\text{A.7})$$

donde los X_{in} están definidos en las ecs. (A.2). Por lo tanto, el determinante de M en términos de los cofactores de sus elementos, en forma explícita, es:

$$\begin{aligned} \det \{M\} &= M_{11}X_{11} + M_{21}X_{21} + M_{31}X_{31}. && \text{Desarrollado por la primera columna} \\ \det \{M\} &= M_{11}X_{11} + M_{12}X_{12} + M_{13}X_{13}. && \text{Desarrollado por el primer renglón.} \\ \det \{M\} &= M_{12}X_{12} + M_{22}X_{22} + M_{32}X_{32}. && \text{Desarrollado por la segunda columna} \\ \det \{M\} &= M_{21}X_{21} + M_{22}X_{22} + M_{23}X_{23}. && \text{Desarrollado por el segundo renglón.} \\ \det \{M\} &= M_{13}X_{13} + M_{23}X_{23} + M_{33}X_{33}. && \text{Desarrollado por la tercera columna} \\ \det \{M\} &= M_{31}X_{31} + M_{32}X_{32} + M_{33}X_{33}. && \text{Desarrollado por el tercer renglón.} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

La traza de la matriz M es:

$$\text{Tr} \{M\} = M_{11} + M_{22} + M_{33}. \quad (\text{A.9})$$

El cuadrado traza ec. (A.9) es:

$$\text{Tr} \{M\}^2 = M_{11}^2 + M_{22}^2 + M_{33}^2 + 2M_{11}M_{22} + 2M_{11}M_{33} + 2M_{22}M_{33}. \quad (\text{A.10})$$

La traza de M^2 es:

$$\text{Tr} \{M\}^2 = M_{11}^2 + M_{22}^2 + M_{33}^2 + 2M_{12}M_{21} + 2M_{13}M_{31} + 2M_{23}M_{32}. \quad (\text{A.11})$$

Al definir al invariante

$$\chi \equiv \frac{1}{2} (\text{Tr} \{M^2\} - \text{Tr} \{M\}^2). \quad (\text{A.12})$$

A partir de las ecs. (A.10) y (A.11) se obtiene:

$$\chi = M_{12}M_{21} + M_{13}M_{31} + M_{23}M_{32} - M_{11}M_{22} - M_{11}M_{33} - M_{22}M_{33} \quad (\text{A.13})$$

Así, de las ecs. (A.3) el invariante χ se reescribe como:

$$\chi = -X_{11} - X_{22} - X_{33}. \quad (\text{A.14})$$

A partir de la matriz adjunta de la matriz M , ec. (A.4), se concluye:

$$\chi = -\text{Tr} \{ \text{adj} \{ M \} \}. \quad (\text{A.15})$$

El polinomio característico de la matriz M se determina a partir de la ecuación de eigenvalores

$$\det \{ \lambda_i \mathbb{I}_{3 \times 3} - M \} = \begin{vmatrix} \lambda_i - M_{11} & -M_{12} & -M_{13} \\ -M_{21} & \lambda_i - M_{22} & -M_{23} \\ -M_{31} & -M_{32} & \lambda_i - M_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{A.16})$$

$$\lambda_i (\lambda_i - M_{11}) (\lambda_i - M_{22}) - M_{33} (\lambda_i - M_{11}) (\lambda_i - M_{22}) - (\lambda_i - M_{11}) M_{23} M_{32} - \lambda_i M_{21} M_{12} + M_{21} M_{12} M_{33} - M_{21} M_{13} M_{32} - M_{31} M_{12} M_{23} - M_{13} M_{31} (\lambda_i - M_{22}) = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} & \lambda_i^3 - (M_{11} + M_{22} + M_{33}) \lambda_i^2 \\ & - (M_{12}M_{21} + M_{13}M_{31} + M_{23}M_{32} - M_{11}M_{22} - M_{11}M_{33} - M_{22}M_{33}) \lambda_i \\ & - (M_{11}M_{22}M_{33} - M_{11}M_{23}M_{32} - M_{21}M_{12}M_{33} + M_{21}M_{13}M_{32} + M_{31}M_{12}M_{23} - \\ & - M_{31}M_{13}M_{22},) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

con ayuda de las ecs. (A.6), (A.9) y (A.13) obtenemos el resultado

$$\lambda_i^3 - \text{Tr} \{ M \} \lambda_i^2 - \chi \lambda_i - \det \{ M \} = 0 \quad (\text{A.19})$$

Esta forma del polinomio característico esta dada en términos de los invariantes de la matriz. Por lo tanto, los eigenvalores de la matriz M tienen la forma:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= S_1 + S_2 + \frac{\text{Tr}\{M\}}{3} \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2}(S_1 + S_2) + \frac{\text{Tr}\{M\}}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(S_1 - S_2) \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{2}(S_1 + S_2) + \frac{\text{Tr}\{M\}}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(S_1 - S_2) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

donde

$$S_1 = \left[q + \sqrt{p^3 + q^2} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad S_2 = \left[q - \sqrt{p^3 + q^2} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (\text{A.21})$$

con

$$p = -\frac{1}{3}\chi - \frac{1}{9}\text{Tr} \{ M \}^2, \quad q = \frac{1}{6}\chi\text{Tr} \{ M \} + \frac{1}{2}\det \{ M \} + \frac{1}{27}\text{Tr} \{ M \}^3. \quad (\text{A.22})$$

Los eigenvalores de la matriz M , ecs. (A.20), cumplen con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= \text{Tr} \{M\} \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 &= -\chi \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= \det \{M\}\end{aligned}\tag{A.23}$$

Los eigenvectores de la matriz M tienen la forma

$$|\mathbf{M}_i\rangle = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_i - M_{22})M_{13} + M_{12}M_{23} \\ (\lambda_i - M_{11})M_{23} + M_{21}M_{13} \\ (\lambda_i - M_{22})(\lambda_i - M_{11}) - M_{12}M_{21} \end{pmatrix},\tag{A.24}$$

donde λ_i son los eigenvalores de ec. (A.1). Para verificar que los ec. (A.24) realmente son eigenvectores de la matriz ec. (A.1), se debe ver que se cumpla la ecuación de eigenvalores:

$$M|\mathbf{M}_i\rangle = \lambda_i|\mathbf{M}_i\rangle,\tag{A.25}$$

la cual en forma explicita se escribe como:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}.\tag{A.26}$$

Es más sencillo mostrar por separado que se cumple cada una de las tres ecuaciones resultantes de ec. (A.26). Entonces:

- Para el primer renglón de (A.26) se tiene:

$$\begin{aligned}M_{11}a_i + M_{12}b_i + M_{13}c_i &= M_{11}[(\lambda_i - M_{22})M_{13} + M_{12}M_{23}] + \\ &+ M_{12}[(\lambda_i - M_{11})M_{23} + M_{21}M_{13}] \\ &+ M_{13}[(\lambda_i - M_{22})(\lambda_i - M_{11}) - M_{12}M_{21}], \\ M_{11}a_i + M_{12}b_i + M_{13}c_i &= (\lambda_i - M_{22})M_{13}M_{11} + M_{12}M_{23}M_{11} + M_{21}M_{13}M_{12} \\ &+ (\lambda_i - M_{11})M_{23}M_{12} + (\lambda_i - M_{22})(\lambda_i - M_{11})M_{13} \\ &- M_{21}M_{13}M_{12}, \\ M_{11}a_i + M_{12}b_i + M_{13}c_i &= (\lambda_i - M_{22})M_{13}M_{11} + (\lambda_i - M_{11})M_{23}M_{12} \\ &+ M_{12}M_{23}M_{11} + \lambda_i(\lambda_i - M_{22})M_{13} \\ &- M_{11}(\lambda_i - M_{22})M_{13}, \\ M_{11}a_i + M_{12}b_i + M_{13}c_i &= M_{12}M_{23}M_{11} + \lambda_i M_{23}M_{12} - M_{11}M_{23}M_{12} \\ &+ \lambda_i(\lambda_i - M_{22})M_{13},\end{aligned}\tag{A.27}$$

así que:

$$M_{11}a_i + M_{12}b_i + M_{13}c_i = \lambda_i[(\lambda_i - M_{22})M_{13} + M_{23}M_{12}] = \lambda_i a_i.\tag{A.28}$$

- Para el segundo renglón de (A.26) se tiene:

$$\begin{aligned}
M_{21}a_i + M_{22}b_i + M_{23}c_i &= M_{21}[(\lambda_i - M_{22})M_{13} + M_{12}M_{23}] \\
&\quad + M_{22}[(\lambda_i - M_{11})M_{23} + M_{21}M_{13}] \\
&\quad + M_{23}[(\lambda_i - M_{22})(\lambda_i - M_{11}) - M_{12}M_{21}], \\
M_{21}a_i + M_{22}b_i + M_{23}c_i &= (\lambda_i - M_{22})M_{21}M_{13} + M_{21}M_{12}M_{23} + M_{22}M_{21}M_{13} \\
&\quad + (\lambda_i - M_{11})M_{22}M_{23} + (\lambda_i - M_{22})(\lambda_i - M_{11})M_{23} \\
&\quad - M_{23}M_{12}M_{21}, \\
M_{21}a_i + M_{22}b_i + M_{23}c_i &= (\lambda_i - M_{22})M_{13}M_{21} + (\lambda_i - M_{11})M_{23}M_{22} \\
&\quad + M_{22}M_{21}M_{13} + \lambda_i(\lambda_i - M_{11})M_{23} \\
&\quad - M_{22}(\lambda_i - M_{11})M_{23}, \\
M_{21}a_i + M_{22}b_i + M_{23}c_i &= M_{22}M_{21}M_{13} + \lambda_iM_{21}M_{13} - M_{22}M_{21}M_{13} \\
&\quad + \lambda_i(\lambda_i - M_{11})M_{23},
\end{aligned} \tag{A.29}$$

así que:

$$M_{21}a_i + M_{22}b_i + M_{23}c_i = \lambda_i[(\lambda_i - M_{11})M_{23} + M_{21}M_{13}] = \lambda_i b_i. \tag{A.30}$$

- Para el tercer renglón de (A.26) se tiene:

$$\begin{aligned}
M_{31}a_i + M_{32}b_i + M_{33}c_i &= M_{31}[(\lambda_i - M_{22})M_{13} + M_{12}M_{23}] \\
&\quad + M_{32}[(\lambda_i - M_{11})M_{23} + M_{21}M_{13}] \\
&\quad + M_{33}[(\lambda_i - M_{22})(\lambda_i - M_{11}) - M_{12}M_{21}], \\
M_{31}a_i + M_{32}b_i + M_{33}c_i &= (\lambda_i - M_{22})M_{31}M_{13} + M_{31}M_{12}M_{23} + M_{32}M_{21}M_{13} \\
&\quad + (\lambda_i - M_{11})M_{32}M_{23} + (\lambda_i - M_{22})(\lambda_i - M_{11})M_{33} \\
&\quad - M_{33}M_{12}M_{21}.
\end{aligned} \tag{A.31}$$

Con ayuda del polinomio característico ec. (A.17) se puede comprobar que

$$\begin{aligned}
(\lambda_i - M_{22})M_{13}M_{31} + M_{31}M_{12}M_{23} + (\lambda_i - M_{11})M_{23}M_{32} + M_{12}M_{13}M_{32} \\
+ M_{33}(\lambda_i - M_{11})(\lambda_i - M_{22}) - M_{12}M_{21}M_{33} = \lambda_i[(\lambda_i - M_{22})(\lambda_i - M_{11}) - M_{12}M_{21}].
\end{aligned} \tag{A.32}$$

De la ec. (A.32) se puede reescribir a la ec. (A.31) como:

$$M_{31}a_i + M_{32}b_i + M_{33}c_i = \lambda_i[(\lambda_i - m_{22})(\lambda_i - M_{11}) - M_{12}M_{21}] = \lambda_i c_i. \tag{A.33}$$

Al observar las ecs. (A.28), (A.30) y (A.33), se puede constatar que los vectores $|M_i\rangle$ satisfacen la ecuación de eigenvalores ec. (A.25). Por lo tanto, son eigenvectores de la matriz M .

Los eigenvectores $|M_i\rangle$, ec. (A.24), no están normalizados, por ello es necesario reescribirlos en la forma:

$$|\mathbf{M}_i\rangle = \frac{1}{N_i} \begin{pmatrix} (\lambda_i - M_{22})M_{13} + M_{12}M_{23} \\ (\lambda_i - M_{11})M_{23} + M_{21}M_{13} \\ (\lambda_i - M_{22})(\lambda_i - M_{11}) - M_{12}M_{21} \end{pmatrix}, \tag{A.34}$$

donde N_i es la constante de normalización. La cual se determina por medio de

$$\begin{aligned}
N_i^2 &= \langle M_i | M_i \rangle = [(\lambda_i^* - M_{22}^*)M_{13}^* + M_{12}^*M_{23}^*][(\lambda_i - M_{22})M_{13} + M_{12}M_{23}] \\
&\quad + [(\lambda_i^* - M_{11}^*)M_{23}^* + M_{21}^*M_{13}^*][(\lambda_i - M_{11})M_{23} + M_{21}M_{13}] \\
&\quad + [(\lambda_i^* - M_{22}^*)(\lambda_i^* - M_{11}^*) - M_{12}^*M_{21}^*][(\lambda_i - M_{22})(\lambda_i - M_{11}) - M_{12}M_{21}] \\
N_i^2 &= |\lambda_i|^4 + |\lambda_i|^2 (|M_{13}|^2 + |M_{23}|^2 + |M_{11}|^2 + |M_{22}|^2) + |M_{22}|^2 |M_{13}|^2 \\
&\quad + |M_{12}|^2 |M_{23}|^2 + |M_{11}|^2 |M_{23}|^2 + |M_{21}|^2 |M_{13}|^2 + |M_{11}|^2 |M_{22}|^2 + |M_{12}|^2 |M_{21}|^2 \\
&\quad - 2\Re e \{ \lambda_i^* M_{22} \} |M_{13}|^2 + 2\Re e \{ (\lambda_i^* - M_{22}^*) M_{13}^* M_{12} M_{23} \} - 2\Re e \{ \lambda_i^* M_{11} \} |M_{23}|^2 \\
&\quad + 2\Re e \{ (\lambda_i^* - M_{11}^*) M_{23}^* M_{21} M_{13} \} - 2 (|\lambda_i|^2 + |M_{11}|^2) \Re e \{ \lambda_i^* M_{22} \} \\
&\quad - 2 (|\lambda_i|^2 + |M_{22}|^2) \Re e \{ \lambda_i^* M_{11} \} + 4\Re e \{ \lambda_i^* M_{11} \} \Re e \{ \lambda_i^* M_{22} \} \\
&\quad - 2\Re e \{ (\lambda_i^* - M_{11}^*) (\lambda_i^* - M_{22}^*) M_{12} M_{21} \}.
\end{aligned} \tag{A.35}$$

La matriz que tiene a los eigenvectores de M como sus columnas es:

$$\mathbb{U} = (|M_1\rangle, |M_2\rangle, |M_3\rangle) \tag{A.36}$$

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \frac{(\lambda_1 - M_{22})M_{13} + M_{12}M_{23}}{N_1} & \frac{(\lambda_2 - M_{22})M_{13} + M_{12}M_{23}}{N_2} & \frac{(\lambda_3 - M_{22})M_{13} + M_{12}M_{23}}{N_3} \\ \frac{(\lambda_1 - M_{11})M_{23} + M_{21}M_{13}}{N_1} & \frac{(\lambda_2 - M_{11})M_{23} + M_{21}M_{13}}{N_2} & \frac{(\lambda_3 - M_{11})M_{23} + M_{21}M_{13}}{N_3} \\ \frac{(\lambda_1 - M_{22})(\lambda_1 - M_{11}) - M_{12}M_{21}}{N_1} & \frac{(\lambda_2 - M_{22})(\lambda_2 - M_{11}) - M_{12}M_{21}}{N_2} & \frac{(\lambda_3 - M_{22})(\lambda_3 - M_{11}) - M_{12}M_{21}}{N_3} \end{pmatrix} \tag{A.37}$$

A.1. Matriz Simétrica Singular y No Singular

En el caso particular de pedir que la matriz M sea singular, es decir, el $\det \{M\} = 0$, el polinomio característico ec. (A.19) toma la forma:

$$\lambda (\lambda^2 - \text{Tr} \{ \bar{M} \} \lambda - \chi) = 0. \tag{A.38}$$

En consecuencia uno de los eigenvalores es igual a cero, $\lambda_1 = 0$. Mientras que las otras dos se determinan al resolver la ecuación cuadrática

$$\lambda^2 - \text{Tr} \{ \bar{M} \} \lambda - \chi = 0. \tag{A.39}$$

Las raíces de la ecuación anterior son:

$$\begin{aligned}
\lambda_{2,3} &= \frac{\text{Tr} \{ \bar{M} \} \pm \sqrt{\text{Tr} \{ \bar{M} \}^2 + 4\chi}}{2}, \\
\lambda_{2,3} &= \frac{\text{Tr} \{ \bar{M} \} \pm \sqrt{\text{Tr} \{ \bar{M} \}^2 + 2(\text{Tr} \{ \bar{M}^2 \} - \text{Tr} \{ \bar{M} \}^2)}}{2}, \\
\lambda_{2,3} &= \frac{\text{Tr} \{ \bar{M} \} \pm \sqrt{2\text{Tr} \{ \bar{M}^2 \} - \text{Tr} \{ \bar{M} \}^2}}{2}.
\end{aligned} \tag{A.40}$$

Sin embargo, normalmente la matriz M debe ser no singular, para poder garantizar que tenga inversa. Por lo tanto, el determinante de \bar{M} debe ser diferente de cero.

Factorización de Fases

En esta sección se considera el caso cuando la matriz general de 3×3 , ec. (A.1), es hermitiana o simétrica, es decir, tiene la forma:

$$\mathbf{M}^{(H)} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12}^* & M_{22} & M_{23} \\ M_{13}^* & M_{23}^* & M_{33} \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \mathbf{M}^{(S)} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

respectivamente. Al escribir en forma polar a cada uno de los elementos de las matrices ec. (B.1) se obtiene:

$$\mathbf{M}^{(H)} = \begin{pmatrix} g & a e^{i\phi_a} & e e^{i\phi_e} \\ a e^{-i\phi_e} & b & c e^{i\phi_c} \\ e e^{-i\phi_e} & c e^{-i\phi_c} & d \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \mathbf{M}^{(S)} = \begin{pmatrix} g e^{i\phi_g} & a e^{i\phi_a} & e e^{i\phi_e} \\ a e^{i\phi_e} & b e^{i\phi_b} & c e^{i\phi_c} \\ e e^{i\phi_e} & c e^{i\phi_c} & d e^{i\phi_d} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

donde, sin pérdida de generalidad, se define:

$$\begin{aligned} a &= |M_{12}|, & b &= |M_{22}|, & c &= |M_{23}|, \\ d &= |M_{33}|, & e &= |M_{13}|, & g &= |M_{11}|. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

y

$$\begin{aligned} \phi_a &= \arg\{M_{12}\}, & \phi_b &= \arg\{M_{22}\}, & \phi_c &= \arg\{M_{23}\}, \\ \phi_d &= \arg\{M_{33}\}, & \phi_e &= \arg\{M_{13}\}, & \phi_g &= \arg\{M_{11}\}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

De la ec. (B.3) se concluye fácilmente que a, b, c, d, e y g , son reales y positivos.

Ahora se discuten las condiciones bajo las cuales se factorizan los términos fases de los elementos de las matrices ec. (B.2). Entonces, a partir del hecho que las matrices ec. (B.2) deben ser escrita en la forma:

$$\begin{pmatrix} g e^{i[0]\phi_g} & a e^{i\phi_a} & e e^{i\phi_e} \\ a e^{i[-1]\phi_a} & b e^{i[0]\phi_b} & c e^{i\phi_c} \\ e e^{i[-1]\phi_e} & c e^{i[-1]\phi_c} & d e^{i[0]\phi_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\eta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\eta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\eta_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & a & e \\ a & b & c \\ e & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\eta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\eta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\eta_3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} g e^{i[0]\phi_g} & a e^{i\phi_a} & e e^{i\phi_e} \\ a e^{i[-1]\phi_a} & b e^{i[0]\phi_b} & c e^{i\phi_c} \\ e e^{i[-1]\phi_e} & c e^{i[-1]\phi_c} & d e^{i[0]\phi_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g e^{i2[0]\eta_1} & a e^{i([-1]\eta_1+\eta_2)} & e e^{i([-1]\eta_1+\eta_3)} \\ a e^{i(\eta_1+[-1]\eta_2)} & b e^{i2[0]\eta_2} & c e^{i([-1]\eta_2+\eta_3)} \\ e e^{i(\eta_1+[-1]\eta_3)} & c e^{i(\eta_2+[-1]\eta_3)} & d e^{i2[0]\eta_3} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

La cantidad entre corchetes cuadrados corresponde al factor por el cual se debe multiplicar a la respectiva fase, ϕ o η , cuando la matriz es Hermitiana. De las matrices ec. (B.5), comparando los argumentos de las exponenciales, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

Matriz Simétrica	Matriz Hermitiana
$2\eta_1 = \phi_g, \quad \eta_1 + \eta_2 = \phi_a,$	$\eta_2 - \eta_1 = \phi_a,$
$2\eta_2 = \phi_b, \quad \eta_2 + \eta_3 = \phi_c,$	$\eta_3 - \eta_1 = \phi_e,$
$2\eta_3 = \phi_d, \quad \eta_1 + \eta_3 = \phi_e.$	$\eta_3 - \eta_2 = \phi_c.$

(B.6)

Así, para la matriz simétrica inmediatamente se puede concluir que:

$$\eta_1 = \frac{\phi_g}{2}, \quad \eta_2 = \frac{\phi_b}{2}, \quad \eta_3 = \frac{\phi_d}{2}. \quad (\text{B.7})$$

Por lo tanto, de (B.6) y (B.7) se tiene:

$$\phi_g + \phi_b = 2\phi_a, \quad \phi_b + \phi_d = 2\phi_c, \quad \phi_g + \phi_d = 2\phi_e. \quad (\text{B.8})$$

Ahora, para la matriz Hermitiana se considera sin pérdida de generalidad que $\eta_1 = 0$, así se obtiene:

$$\eta_2 = \phi_a, \quad \eta_3 = \phi_e, \quad (\text{B.9})$$

además, se debe cumplir que

$$\phi_a = \phi_e - \phi_c. \quad (\text{B.10})$$

Con ayuda de la identidad trigonométrica

$$\tan(\theta_1 \pm \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 \pm \tan \theta_2}{1 \mp \tan \theta_1 \tan \theta_2}. \quad (\text{B.11})$$

Las expresiones (B.8) se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \tan(\phi_g + \phi_b) &= \tan 2\phi_a = \frac{2 \tan \phi_a}{1 - \tan^2 \phi_a}, \\ \tan(\phi_b + \phi_d) &= \tan 2\phi_c = \frac{2 \tan \phi_c}{1 - \tan^2 \phi_c}, \\ \tan(\phi_g + \phi_d) &= \tan 2\phi_e = \frac{2 \tan \phi_e}{1 - \tan^2 \phi_e}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Mientras que la expresión ec. (B.10) se escribe como:

$$\tan \phi_a = \tan(\phi_e - \phi_c) = \frac{\tan \phi_e - \tan \phi_c}{1 + \tan \phi_e \tan \phi_c} \quad (\text{B.13})$$

Además, de la definición del argumento principal de un número complejo se obtiene:

$$\begin{aligned}\phi_a = \arg\{a\} &= \arctan \left\{ \frac{\Im a}{\Re a} \right\} \implies \tan \phi_a = \frac{\Im a}{\Re a}, \\ \phi_e = \arg\{e\} &= \arctan \left\{ \frac{\Im e}{\Re e} \right\} \implies \tan \phi_e = \frac{\Im e}{\Re e}, \\ \phi_c = \arg\{c\} &= \arctan \left\{ \frac{\Im c}{\Re c} \right\} \implies \tan \phi_c = \frac{\Im c}{\Re c}.\end{aligned}\tag{B.14}$$

Entonces, con ayuda de las expresiones (B.14), las ecuaciones (B.8) toman la forma:

$$\begin{aligned}\tan(\phi_g + \phi_b) &= \frac{2\Re a \Im a}{(\Re a)^2 - (\Im a)^2}, \\ \tan(\phi_b + \phi_d) &= \frac{2\Re c \Im c}{(\Re c)^2 - (\Im c)^2}, \\ \tan(\phi_g + \phi_d) &= \frac{2\Re e \Im e}{(\Re e)^2 - (\Im e)^2}.\end{aligned}\tag{B.15}$$

Mientras que la expresión ec. (B.10) toma la forma:

$$\tan \phi_a = \frac{\Re c \Im e - \Re e \Im c}{\Re c \Re e + \Im c \Im e}.\tag{B.16}$$

Si se satisfacen las condiciones ec. (B.15), la matriz simétrica ec. (B.1) se puede reescribir como:

$$M = Q\bar{M}Q\tag{B.17}$$

donde Q es una matriz diagonal de fases

$$Q = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi_a}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi_d}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\phi_f}{2}} \end{pmatrix}\tag{B.18}$$

y \bar{M} es una matriz simétrica real con los elementos positivos

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}.\tag{B.19}$$

Por otro lado, se satisfacen las condición ec. (B.16), la matriz hermitiana ec. (B.1) se puede reescribir como:

$$M = P^\dagger \bar{M} P\tag{B.20}$$

donde P es una matriz diagonal de fases

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_a} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_e} \end{pmatrix} \quad (\text{B.21})$$

y \bar{M} es una matriz simétrica real con los elementos positivos

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}. \quad (\text{B.22})$$

Finalmente, en los cuadros B.1-B.17 se muestra que forma adquieren la matriz diagonal de fases y simétrica real, para cada una de las clases de equivalencia mostradas en los cuadros 5.1-5.4.

Clase	Textura	Matriz de fases	Condición	Invariantes	
I	S	$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_a} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\phi_d}{2}} \end{pmatrix}$	N	$\text{Tr} = d $ $\det = - a ^2 d $ $\chi = a ^2$
	I	$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi_d}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	I	
	M	$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi_d}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	N	
	E	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & d & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi_d}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_a} \end{pmatrix}$	G	
	T	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & d & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi_d}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_a} \end{pmatrix}$	U	
	R	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & d & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi_d}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_a} \end{pmatrix}$	N	
	I	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & d & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi_d}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_a} \end{pmatrix}$	A	
I	H	$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	N	$\text{Tr} = d$ $\det = - a ^2d$ $\chi = a ^2$
	E	$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	I	
	R	$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	N	
	M	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & d & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_a} \end{pmatrix}$	G	
	I	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & d & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_a} \end{pmatrix}$	U	
	T	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & d & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_a} \end{pmatrix}$	N	
	I	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & d & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_a} \end{pmatrix}$	A	

Cuadro B.1: Matriz con cuatro ceros de textura

B.1. Reparametrización de las Matrices de Masas

La reparametrización de la matriz simétrica real \bar{M} , ec. (B.19) o ec. (B.22), en términos de sus eigenvalores se hace con ayuda de los invariantes de la matriz, para esto se tiene en

Clase	Textura	Matriz de fases	Condición	Invariantes
I	$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\phi_a-\phi_b}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi_b}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\phi_d}{2}} \end{pmatrix}$	NINGUNA	$\text{Tr} = b + d $ $\det = - a ^2 d $ $\chi = a ^2 - b d $
	$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi_d}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi_b}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{2\phi_a-\phi_b}{2}} \end{pmatrix}$		
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & d & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\phi_a-\phi_b}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi_d}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\phi_b}{2}} \end{pmatrix}$		
	$\begin{pmatrix} b & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi_b}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\phi_a-\phi_b}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\phi_d}{2}} \end{pmatrix}$		
	$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi_d}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\phi_a-\phi_b}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\phi_b}{2}} \end{pmatrix}$		
	$\begin{pmatrix} b & 0 & a \\ 0 & d & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi_b}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi_d}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{2\phi_a-\phi_b}{2}} \end{pmatrix}$		

Cuadro B.2: Matriz simétrica con tres ceros de textura clase I

cuenta que la matriz \bar{M} puede ser diagonalizada por una matriz ortogonal real \mathbb{O} , a través de la transformación de similitud:

$$\mathbb{O}^T \bar{M} \mathbb{O} = \text{diag} \{ m_1, m_2, m_3 \}, \quad (\text{B.23})$$

donde m_j con $j = 1, 2, 3$ son los eigenvalores de \bar{M} . Así se obtienen los siguientes invariantes de la matriz :

$$\text{Tr} \{ \bar{M} \} = m_1 + m_2 + m_3, \quad (\text{B.24})$$

$$\det \{ \bar{M} \} = m_1 m_2 m_3, \quad (\text{B.25})$$

$$\chi_i = \frac{\text{Tr} \{ \bar{M}_i^2 \} - \text{Tr} \{ \bar{M}_i \}^2}{2} = -m_1 m_2 - m_1 m_3 - m_2 m_3. \quad (\text{B.26})$$

Por lo tanto, se obtiene que

Clase	Textura	Matriz de fases	Condición	Invariantes	
III	SIMÉ- TRICA	$\begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi_g}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi_b}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\phi_d}{2}} \end{pmatrix}$	NINGUNA	Tr = $ g + b + d $ det = $ g b d $ $\chi = - d g $ $- b g - b d $
	HERMI- TICA	$\begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	NINGUNA	Tr = $g + b + d$ det = gbd $\chi = -dg - bg - bd$

Cuadro B.3: Matriz con tres ceros de textura clase III

★ Matriz con cuatro ceros de textura clase I

$$\begin{pmatrix} 0 & a_i & 0 \\ a_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_i \end{pmatrix}. \quad (\text{B.27})$$

En términos de sus eigenvalores los elementos de la matriz toman la forma:

$$d_i = m_{i1} + m_{i2} + m_{i3} \quad (\text{B.28})$$

$$a_i^2 = -\frac{m_{i1}m_{i2}m_{i3}}{m_{i1} + m_{i2} + m_{i3}}. \quad (\text{B.29})$$

Hay que cambiar el signo a uno de los eigenvalores:

- Para una jerarquía normal de los eigenvalores, $m_{i1} < m_{i2} < m_{i3}$, solamente se pueden cambiar de signo los eigenvalores m_{i1} y m_{i2} .
- Para una jerarquía invertida de los eigenvalores, $m_{i3} < m_{i1} < m_{i2}$, solamente se pueden cambiar de signo los eigenvalores m_{i1} y m_{i3} .

★ Matriz con tres ceros de textura clase I

$$\begin{pmatrix} 0 & a_i & 0 \\ a_i & b_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \end{pmatrix}. \quad (\text{B.30})$$

En términos de sus eigenvalores los elementos de la matriz toman la forma:

$$d_i = m_{i3}, \quad (\text{B.31})$$

$$b_i = m_{i1} + m_{i2}, \quad (\text{B.32})$$

$$a_i^2 = -m_{i1}m_{i2}. \quad (\text{B.33})$$

Hay que cambiar el signo a uno de los eigenvalores:

Clase	Textura	Matriz de fases	Condición	Invariantes	
I	HERMITICA	$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-i\phi_a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	NINGUNA	$\text{Tr} = b + d$ $\det = - a ^2 d$ $\chi = a ^2 - bd$
		$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_a} \end{pmatrix}$		
		$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & d & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-i\phi_a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		
		$\begin{pmatrix} b & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		
		$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		
		$\begin{pmatrix} b & 0 & a \\ 0 & d & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_a} \end{pmatrix}$		

Cuadro B.4: Matriz Hermitiana con tres ceros de textura clase I

- Para una jerarquía normal de los eigenvalores, $m_{i1} < m_{i2} < m_{i3}$, solamente se pueden cambiar de signo a el eigenvalor m_{i1} .
- Para una jerarquía invertida de los eigenvalores, $m_{i3} < m_{i1} < m_{i2}$, solamente se pueden cambiar de signo a el eigenvalor m_{i1} .

★ Matriz con tres ceros de textura clase II

$$\begin{pmatrix} 0 & a_i & 0 \\ a_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & d_i \end{pmatrix}. \quad (\text{B.34})$$

En términos de sus eigenvalores los elementos de la matriz toman la forma:

$$b_i = m_{i1} + m_{i2} + m_{i3}, \quad (\text{B.35})$$

Clase	Textura	Matriz de fases	Condición	Invariantes	
IV	SIMÉ- TRICA	$\begin{pmatrix} 0 & a & e \\ a & 0 & c \\ e & c & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\phi_e} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\phi_e + \phi_c = \phi_a$	$\text{Tr} = 0$ $\text{det} = 2 a c e $
	HERMI- TICA	$\begin{pmatrix} 0 & a & e \\ a & 0 & c \\ e & c & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-i\phi_e} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\phi_e - \phi_c = \phi_a$	$\chi = a ^2$ $+ c ^2 + e ^2$

Cuadro B.5: Matriz con tres ceros de textura clase IV

$$a_i^2 = -\frac{m_{i1}m_{i2}m_{i3}}{m_{i1} + m_{i2} + m_{i3}}, \quad (\text{B.36})$$

$$c_i^2 = -\frac{(m_{i1} + m_{i3})(m_{i1} + m_{i2})(m_{i2} + m_{i3})}{m_{i1} + m_{i2} + m_{i3}}, \quad (\text{B.37})$$

Hay que cambiar el signo a uno de los eigenvalores:

- Para una jerarquía normal de los eigenvalores, $m_{i1} < m_{i2} < m_{i3}$, solamente se pueden cambiar de signo a el eigenvalor m_{i2} .
- Para una jerarquía invertida de los eigenvalores, $m_{i3} < m_{i1} < m_{i2}$, solamente se pueden cambiar de signo a el eigenvalor m_{i1} .

★ Matriz con tres ceros de textura clase III

$$\begin{pmatrix} g_i & 0 & 0 \\ 0 & b_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \end{pmatrix}. \quad (\text{B.38})$$

Como la matriz anterior es una matriz diagonal, sin perdida de generalidad, se puede hacer la siguiente asignación:

- Para una jerarquía normal de los eigenvalores, $m_{i1} < m_{i2} < m_{i3}$, $g_i = m_{i1}$, $b_i = m_{i2}$ y $d_i = m_{i3}$.
- Para una jerarquía invertida de los eigenvalores, $m_{i3} < m_{i1} < m_{i2}$, $g_i = m_{i3}$, $b_i = m_{i1}$ y $d_i = m_{i2}$.

★ Matriz con tres ceros de textura clase IV

$$\begin{pmatrix} 0 & a_i & e_i \\ a_i & 0 & c_i \\ e_i & c_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.39})$$

Clase	Textura	Matriz de fases	Condición	Invariantes
II	$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\phi_a-2\phi_c+\phi_d}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\phi_c-\phi_d}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\phi_d}{2}} \end{pmatrix}$	NINGUNA	$\text{Tr} = d $ $\det = - a ^2 d $ $\chi = a ^2 + c ^2$
	$\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ a & 0 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\phi_c-\phi_d}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\phi_a-2\phi_c+\phi_d}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\phi_d}{2}} \end{pmatrix}$		
	$\begin{pmatrix} d & c & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi_d}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\phi_c-\phi_d}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{2\phi_a-2\phi_c+\phi_d}{2}} \end{pmatrix}$		
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & d & c \\ a & c & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\phi_a-2\phi_c+\phi_d}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi_d}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{2\phi_c-\phi_d}{2}} \end{pmatrix}$		
	$\begin{pmatrix} 0 & c & a \\ c & d & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\phi_c-\phi_d}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi_d}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{2\phi_a-2\phi_c+\phi_d}{2}} \end{pmatrix}$		
	$\begin{pmatrix} d & 0 & c \\ 0 & 0 & a \\ c & a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi_d}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\phi_a-2\phi_c+\phi_d}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{2\phi_c-\phi_d}{2}} \end{pmatrix}$		

Cuadro B.6: Matriz simétrica con tres ceros de textura clase II

En términos de sus eigenvalores los elementos de la matriz toman la forma, con e_i como parámetro libre:

$$m_{i1} + m_{i2} + m_{i3} = 0, \quad (\text{B.40})$$

$$(a_i \pm c_i)^2 = -m_{i1}m_{i2} - m_{i1}m_{i3} - m_{i2}m_{i3} - e_i^2 \pm \frac{m_{i1}m_{i2}m_{i3}}{e_i}. \quad (\text{B.41})$$

- Para una jerarquía normal de los eigenvalores, $m_{i1} < m_{i2} < m_{i3}$,

$$(a_i \pm c_i)^2 = (m_{i3} \mp e_i) \left\{ (m_{i3} \pm e_i) - \frac{m_{i1}m_{i2}}{e_i} \right\}. \quad (\text{B.42})$$

- Para una jerarquía invertida de los eigenvalores, $m_{i3} < m_{i1} < m_{i2}$,

$$(a_i \pm c_i)^2 = (e_i \pm m_{i2}) \left\{ (m_{i2} \mp e_i) - \frac{m_{i1}m_{i3}}{e_i} \right\}. \quad (\text{B.43})$$

Clase	Textura			Matriz de fases			Condición	Invariantes
II	S	$\begin{pmatrix} 0 & a & e \\ a & b & 0 \\ e & 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i(2\phi_a - \phi_b)/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_b/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_d/2} \end{pmatrix}$	$\phi_e - \phi_a = \frac{\phi_d - \phi_b}{2}$	Tr = $ b + d $			
	I							
	M							
	E	$\begin{pmatrix} b & a & 0 \\ a & 0 & e \\ 0 & e & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\phi_b/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(2\phi_a - \phi_b)/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_d/2} \end{pmatrix}$			det = $- a ^2 d - e ^2 b $		
	T							
	R							
I	$\begin{pmatrix} d & 0 & e \\ 0 & b & a \\ e & a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\phi_d/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_b/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(2\phi_a - \phi_b)/2} \end{pmatrix}$	$\chi = a ^2 + c ^2 - b d $					
C								
A								

Cuadro B.7: Matriz simétrica con dos ceros de textura clase II

★ Matriz con dos ceros de textura clase II

$$\begin{pmatrix} 0 & a_i & e_i \\ a_i & b_i & 0 \\ e_i & 0 & d_i \end{pmatrix}. \quad (\text{B.44})$$

En términos de sus eigenvalores los elementos de la matriz toman la forma, con d_i como parámetro libre:

$$b_i = m_{i1} + m_{i2} + m_{i3} - d_i, \quad (\text{B.45})$$

$$a_i^2 = \frac{(d_i - m_{i1} - m_{i2})(m_{i2} + m_{i3} - d_i)(m_{i1} + m_{i3} - d_i)}{m_{i1} + m_{i2} + m_{i3} - 2d_i}, \quad (\text{B.46})$$

$$e_i^2 = \frac{(m_{i3} - d_i)(m_{i2} - d_i)(d_i - m_{i1})}{m_{i1} + m_{i2} + m_{i3} - 2d_i}. \quad (\text{B.47})$$

- Para una jerarquía normal de los eigenvalores, $m_{i1} < m_{i2} < m_{i3}$,

$$m_{i3} > d_i > m_{i1}. \quad (\text{B.48})$$

- Para una jerarquía invertida de los eigenvalores, $m_{i3} < m_{i1} < m_{i2}$,

$$m_{i2} > d_i > m_{i3}. \quad (\text{B.49})$$

★ Matriz con dos ceros de textura clase III

$$\begin{pmatrix} 0 & a_i & e_i \\ a_i & 0 & c_i \\ e_i & c_i & d_i \end{pmatrix}. \quad (\text{B.50})$$

Clase	Textura	Matriz de fases	Condición	Invariantes
II	$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i(\phi_a+\phi_c)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	N I N G U N A	Tr = d det = $- a ^2 d$ $\chi = a ^2 + c ^2$
	$\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ a & 0 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-i\phi_c} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\phi_a-\phi_c)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		
	$\begin{pmatrix} d & c & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_c} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\phi_a+\phi_c)} \end{pmatrix}$		
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & d & c \\ a & c & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i(\phi_c-\phi_a)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_c} \end{pmatrix}$		
	$\begin{pmatrix} 0 & c & a \\ c & d & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-i\phi_c} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\phi_a-\phi_c)} \end{pmatrix}$		
	$\begin{pmatrix} d & 0 & c \\ 0 & 0 & a \\ c & a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\phi_c-\phi_a)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_c} \end{pmatrix}$		

Cuadro B.8: Matriz hermitiana con tres ceros de textura clase II

En términos de sus eigenvalores los elementos de la matriz toman la forma, con a_i como parámetro libre:

$$d_i = m_{i1} + m_{i2} + m_{i3}, \quad (\text{B.51})$$

$$(c_i \pm a_i)^2 = -m_{i1}m_{i2} - m_{i1}m_{i3} - m_{i2}m_{i3} - a_i^2 \pm \frac{a_i^2 d_i + m_{i1}m_{i2}m_{i3}}{a_i}. \quad (\text{B.52})$$

★ Matriz con dos ceros de textura clase IV

$$\begin{pmatrix} g_i & a_i & 0 \\ a_i & b_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \end{pmatrix}. \quad (\text{B.53})$$

Clase	Textura			Matriz de fases	Condición	Invariantes
II	H	$\begin{pmatrix} 0 & a & e \\ a & b & 0 \\ e & 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_a} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_e} \end{pmatrix}$	N	Tr = b + d	
	E					
	R					
	M	$\begin{pmatrix} b & a & 0 \\ a & 0 & e \\ 0 & e & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-i\phi_a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_e} \end{pmatrix}$	N	det = - a ² d - e ² b	
	I					
	T					
I	$\begin{pmatrix} d & 0 & e \\ 0 & b & a \\ e & a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-i\phi_e} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	N	$\chi = a ^2 + c ^2$ -bd		
C						
A						

Cuadro B.9: Matriz hermitiana con dos ceros de textura clase II

En términos de sus eigenvalores los elementos de la matriz toman la forma, con g_i como parámetro libre:

$$d_i = m_{i3}, \quad (\text{B.54})$$

$$b_i = m_{i1} + m_{i2}, \quad (\text{B.55})$$

$$a_i^2 = (g_i - m_{i1})(m_{i2} - g_i), \quad (\text{B.56})$$

con

$$m_{i2} > g_i > m_{i1}. \quad (\text{B.57})$$

★ Matriz con un cero de textura clase I

$$\begin{pmatrix} 0 & a_i & e_i \\ a_i & b_i & c_i \\ e_i & c_i & d_i \end{pmatrix}. \quad (\text{B.58})$$

En términos de sus eigenvalores los elementos de la matriz toman la forma, con g_i como parámetro libre:

★ Matriz con un cero de textura clase II

$$\begin{pmatrix} g_i & a_i & 0 \\ a_i & b_i & c_i \\ 0 & c_i & d_i \end{pmatrix}. \quad (\text{B.59})$$

En términos de sus eigenvalores los elementos de la matriz toman la forma, con g_i como parámetro libre:

Clase	Textura		Matriz de fases	Condición	Invariantes
I	S I M E T R I C A	$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & b & c \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\phi_a-\phi_b}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi_b}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\phi_d}{2}} \end{pmatrix}$	ϕ_b ϕ_d $= 2\phi_c$	$\text{Tr} = b + d $ $\det = - a ^2 d $ $\chi = a ^2 + c ^2 - b d $
		$\begin{pmatrix} b & a & c \\ a & 0 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi_b}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\phi_a-\phi_b}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\phi_d}{2}} \end{pmatrix}$		
		$\begin{pmatrix} d & c & 0 \\ c & b & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi_d}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi_b}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{2\phi_a-\phi_b}{2}} \end{pmatrix}$		
		$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & d & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\phi_a-\phi_b}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi_d}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\phi_b}{2}} \end{pmatrix}$		
		$\begin{pmatrix} b & c & a \\ c & d & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi_b}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi_d}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{2\phi_a-\phi_b}{2}} \end{pmatrix}$		
		$\begin{pmatrix} d & 0 & c \\ 0 & 0 & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi_d}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\phi_a-\phi_b}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\phi_b}{2}} \end{pmatrix}$		

Cuadro B.10: Matriz simétrica con dos ceros de textura clase I

Clase	Textura		Matriz de fases	Condición	Invariantes
III	S I M E T R I C A	$\begin{pmatrix} 0 & a & e \\ a & 0 & c \\ e & c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\phi_e-\phi_d}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\phi_c-\phi_d}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_d/2} \end{pmatrix}$	$\phi_a = \phi_e - \phi_d + \phi_c$	$\text{Tr} = d $ $\det = - a ^2 d + 2 e a c $ $\chi = a ^2 + c ^2 + e ^2$
		$\begin{pmatrix} d & c & e \\ c & 0 & a \\ e & a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\phi_d/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\phi_c-\phi_d}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{2\phi_e-\phi_d}{2}} \end{pmatrix}$		
		$\begin{pmatrix} 0 & e & a \\ e & d & c \\ a & c & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\phi_e-\phi_d}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_d/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{2\phi_c-\phi_d}{2}} \end{pmatrix}$		

Cuadro B.11: Matriz simétrica con dos ceros de textura clase III

Clase	Textura			Matriz de fases	Condición	Invariantes
I	H E R M I T I C A	$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & b & c \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-i\phi_a} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	N I N G U N A	Tr = d + b det = - a ² d $\chi = a ^2 + c ^2 - db$	
		$\begin{pmatrix} b & a & c \\ a & 0 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_a} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_c} \end{pmatrix}$			
		$\begin{pmatrix} d & c & 0 \\ c & b & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-i\phi_c} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_a} \end{pmatrix}$			
		$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & d & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-i\phi_a} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$			
		$\begin{pmatrix} b & c & a \\ c & d & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_c} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_a} \end{pmatrix}$			
		$\begin{pmatrix} d & 0 & c \\ 0 & 0 & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-i\phi_c} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$			

Cuadro B.12: Matriz hermitiana con dos ceros de textura clase I

Clase	Textura			Matriz de fases	Condición	Invariantes
III	H E R M I T I C A	$\begin{pmatrix} 0 & a & e \\ a & 0 & c \\ e & c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_a} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_e} \end{pmatrix}$	$\phi_c = \phi_e - \phi_a$	Tr = d det = - a ² d +2 e a c $\chi = a ^2 + c ^2 + e ^2$	
		$\begin{pmatrix} d & c & e \\ c & 0 & a \\ e & a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-i\phi_e} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$			
		$\begin{pmatrix} 0 & e & a \\ e & d & c \\ a & c & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_a} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_e} \end{pmatrix}$			

Cuadro B.13: Matriz hermitiana con dos ceros de textura clase III

Clase	Textura	Matriz de fases	Condición	Invariantes	
IV	S I M E T R I C A	$\begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\phi_f/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_b/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_d/2} \end{pmatrix}$	$2\phi_c = \phi_b + \phi_d$	Tr = $ f + d + b $
	E T R I C A	$\begin{pmatrix} b & 0 & c \\ 0 & f & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\phi_b/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_f/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_d/2} \end{pmatrix}$		det = $- c ^2 f + f d b $
	I C A	$\begin{pmatrix} d & c & 0 \\ c & b & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\phi_d/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_b/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_f/2} \end{pmatrix}$		$\chi = c ^2 - d b - d f - b f $
IV	H E R M I T I C A	$\begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_c} \end{pmatrix}$	N I N G U N A	Tr = $f + d + b$
	I M I T I C A	$\begin{pmatrix} b & 0 & c \\ 0 & f & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_c} \end{pmatrix}$		det = $- c ^2f + fdb$
	A	$\begin{pmatrix} d & c & 0 \\ c & b & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-i\phi_c} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\chi = c ^2 - db - df - bf$

Cuadro B.14: Matriz con dos ceros de textura clase IV

Clase	Textura	Matriz de fases	Condición	Invariantes	
I	S I M E T R I C A	$\begin{pmatrix} 0 & a & e \\ a & b & c \\ e & c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\phi_e - \phi_d}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_b/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_d/2} \end{pmatrix}$	$2\phi_c = \phi_b + \phi_d$	Tr = $ b + d $
	E T R I C A	$\begin{pmatrix} b & a & c \\ a & 0 & e \\ c & e & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\phi_b/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\phi_e - \phi_d}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_d/2} \end{pmatrix}$	$2\phi_a = \phi_e - \phi_d + \phi_b$	det = $- a ^2 d - e ^2 b + 2 e a c $
	A	$\begin{pmatrix} d & c & e \\ c & b & a \\ e & a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\phi_d/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_b/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{2\phi_e - \phi_d}{2}} \end{pmatrix}$	$\chi = a ^2 + c ^2 + e ^2 - b d $	

Cuadro B.15: Matriz simétrica con un cero de textura clase I

Clase	Textura	Matriz de fases	Condición	Invariantes	
II	S I M E	$\begin{pmatrix} f & 0 & e \\ 0 & b & c \\ e & c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\phi_f/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_b/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_d/2} \end{pmatrix}$	$2\phi_e = \phi_f + \phi_d$	$\text{Tr} = f + d + b $
	T R I	$\begin{pmatrix} d & c & e \\ c & b & 0 \\ e & 0 & f \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\phi_d/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_b/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_f/2} \end{pmatrix}$	$2\phi_c = \phi_b + \phi_d$	$\det = - c ^2 f - e ^2 d + f d b $
	C A	$\begin{pmatrix} f & e & 0 \\ e & d & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\phi_f/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_d/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_b/2} \end{pmatrix}$		$\chi = c ^2 - e ^2 - d b - d f - b f $
II	H E R M I T I C A	$\begin{pmatrix} f & 0 & e \\ 0 & b & c \\ e & c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-i\phi_e} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	N I N G U N A	$\text{Tr} = f + d + b$
	M I T I C A	$\begin{pmatrix} d & c & e \\ c & b & 0 \\ e & 0 & f \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_c} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_e} \end{pmatrix}$		$\det = - c ^2f + fdb$
	I C A	$\begin{pmatrix} f & e & 0 \\ e & d & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-i\phi_e} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_c} \end{pmatrix}$		$\chi = c ^2 - e ^2 - db - df - bf$

Cuadro B.16: Matriz con un cero de textura clase II

Clase	Textura	Matriz de fases	Condición	Invariantes	
I	H E R M I T I C A	$\begin{pmatrix} 0 & a & e \\ a & b & c \\ e & c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_a} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_e} \end{pmatrix}$	$\phi_c = \phi_e - \phi_a$	$\text{Tr} = b + d$
	E T R I C A	$\begin{pmatrix} b & a & c \\ a & 0 & e \\ c & e & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\phi_a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_e} \end{pmatrix}$		$\det = - a ^2d - e ^2b + 2 e a c $
	I C A	$\begin{pmatrix} d & c & e \\ c & b & a \\ e & a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-i\phi_e} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\chi = a ^2 + c ^2 + e ^2 - bd$

Cuadro B.17: Matriz hermitiana con un cero de textura clase I

Artículos Publicados

- **The S3 symmetry: Flavour and texture zeroes**
Journal of Physics: Conference Series 287 012015 (2011)
- **Universal Mass Texture, CP violation and Quark-Lepton Complementarity**
Physical Review D 82, 073010 (2010)
- **Universal mass texture and quark-lepton complementarity**
Journal of Physics: Conference Series 171 012063 (2009)
- **On quark-lepton complementarity**
AIP Conference Proceedings 857:287-292 (2006)

The S_3 symmetry: Flavour and texture zeroes

F. González Canales* and A. Mondragón**

Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510, México D.F., México

E-mail: *ffelix@fisica.unam.mx, **mondra@fisica.unam.mx

Abstract. We use the permutational symmetry group S_3 as a symmetry of flavour, which leads to a unified treatment of masses and mixings of the quarks and leptons. In this framework all mass matrices of the fermions in the theory have the same form with four texture zeroes of class I. Also, with the help of six elements of real matrix representation of S_3 as transformation matrices of similarity classes, we make a classification of the sets of mass matrices with texture zeroes in equivalence classes. This classification reduce the number of phenomenologically viable textures for the non-singular mass matrices of 3×3 , from thirty three down to only eleven independent sets of matrices. Each of these sets of matrices has exactly the same physical content.

1. Introduction

The Standard Model (SM) can be extended by adding of three right-handed neutrino states, which would be singlets of the gauge group of SM, but coupled to matter just through the neutrino masses [1]. But in minimal extensions of the Standard Model, considering a mass term for left-handed neutrinos purely of Dirac is not theoretically favored, because it can not explain easily why neutrinos are much lighter than the charged leptons. Thus, we assume that neutrinos have Majorana masses and acquire their small masses through of the type I seesaw mechanism.

In both lepton and quark sectors of the extended Standard Model, analogous fermions in different generations, say u, c and t or d, s and b , have completely identical couplings to all gauge bosons of the strong, electroweak interactions. Prior to the introduction of the Higgs boson and mass terms, the Lagrangian is chiral and invariant with respect to any permutation of the left and right quark fields. The introduction of a Higgs boson and the Yukawa couplings give mass to the quarks and leptons when the gauge symmetry is spontaneously broken. The mass term in the Lagrangian, obtained by taking the vacuum expectation value of the Higgs field in the quark and lepton Higgs couplings, gives rise to mass matrices \mathbf{M}_d , \mathbf{M}_u , \mathbf{M}_l and \mathbf{M}_ν ;

$$\mathcal{L}_Y = \bar{\mathbf{q}}_{d,L} \mathbf{M}_d \mathbf{q}_{d,R} + \bar{\mathbf{q}}_{u,L} \mathbf{M}_u \mathbf{q}_{u,R} + \bar{\mathbf{L}}_L \mathbf{M}_l \mathbf{L}_R + \bar{\nu}_L \mathbf{M}_\nu (\nu_L)^c + h.c. \quad (1)$$

Therefore, we propose, as well as many other authors [2, 3, 4, 5, 6], that the texture zeroes of the mass matrices of the quarks and leptons, are the result of a flavour permutational symmetry S_3 and its spontaneous or explicit breaking.

On the other hand, in the last ten years, important theoretical advances have been made in the understanding of the mechanisms for the mass fermion generation and flavour mixing. Phenomenologically, some striking progress has been made with the help of the texture zeroes and flavour symmetries in specifying the quantitative relationship between flavour mixing angles and quark or lepton mass ratios [3, 4, 7, 5] with a minimum of free parameters. In fact it, can be

noted that different mass matrices with texture zeroes located in different positions may have exactly the same physical content. Therefore the question arises, is there any relation between these matrices?. We find an answer to this question through the similarity classes, recently proposed by Branco [8].

In this paper, we use the permutational symmetry S_3 as a flavour symmetry, in a unified treatment of masses and mixings of quarks and leptons. Also, with the help of a real matrix representation of the group S_3 , as a basis for the transformation matrices of the similarity classes, we make a classification of the set of mass matrices with texture zeroes.

2. Flavour permutational symmetry S_3

A phenomenologically and theoretically meaningful approach for reducing the number of free parameters in the Standard Model is the imposition of texture zeroes [5, 7] or flavour symmetries. Recent flavour symmetry models are reviewed in [9]. Also, certain texture zeroes may be obtained from a flavour symmetry. In particular, a permutational S_3 flavour symmetry and its sequential explicit breaking justifies taking the same generic form for the mass matrices of all Dirac fermions, conventionally called a four texture zeroes form [3, 4]. Some reasons to propose the validity of a matrix with four texture zeroes as a universal form for the mass matrices of all Dirac fermions in the theory are the following:

- (i) The idea of S_3 flavour symmetry and its explicit breaking has been successfully realized as a mass matrix with four texture zeroes in the quark sector to interpret the strong mass hierarchy of up and down type quarks [2, 3]. Also, the numerical values of mixing matrices of the quarks determined in this framework are in good agreement with the experimental data [3].
- (ii) Since the mass spectrum of the charged leptons exhibits a hierarchy similar to the quark's one, it would be natural to consider the same S_3 symmetry and its explicit breaking to justify the use of the same generic form with four texture zeroes for the charged lepton mass matrix.
- (iii) As for the Dirac neutrinos, we have no direct information about the absolute values or the relative values of the Dirac neutrino masses, but the mass matrix with four texture zeroes can be obtained from an grand unified theory $SO(10)$ which describes well the data on masses and mixings of Majorana neutrinos [10]. Furthermore, from supersymmetry arguments, it would be sensible to assume that the Dirac neutrinos have a mass hierarchy similar to that of the u-quarks and it would be natural to take for the Dirac neutrino mass matrix also a matrix with four texture zeroes.

2.1. Mass matrices from the breaking of $S_{3L} \otimes S_{3R}$

Some authors have pointed out that realistic Dirac fermion mass matrices results from the flavour permutational symmetry $S_L(3) \otimes S_R(3)$ and its spontaneous or explicit breaking [2, 3, 4, 5, 6]. The group S_3 treats three objects symmetrically, while its 3×3 representation structure $\mathbf{1} \oplus \mathbf{2}$ treats the generations differently and adapts itself readily to the hierarchical nature of the mass spectrum. Under exact $S_{3L} \otimes S_{3R}$ symmetry, the mass spectrum for either quark sector (up or down quarks) or leptonic sector (charged leptons or Dirac neutrinos) consists of one massive particle in a singlet irreducible representation and a pair of massless particles in a doublet irreducible representation, the corresponding quark mass matrix with the exact $S_{3L} \otimes S_{3R}$ symmetry will be denoted by \mathbf{M}_{i3} with $i = u, d, l, \nu_D$. Here, u , d , l and ν_D denote the up quarks, down quarks, charged leptons and Dirac neutrinos, respectively. Assuming that there is only one Higgs boson in the theory, this $SU(2)_L$ doublet can be accommodated in a singlet representation of S_3 . In order to generate masses for the first and second families, we add

the terms \mathbf{M}_{i2} and \mathbf{M}_{i1} to \mathbf{M}_{i3} . The term \mathbf{M}_{i2} breaks the permutational symmetry $S_{3L} \otimes S_{3R}$ down to $S_{2L} \otimes S_{2R}$ and mixes the singlet and doublet representation of S_3 . \mathbf{M}_{i1} transforms as the mixed symmetry term in the doublet complex tensorial representation of $S_3^{diag} \subset S_{3L} \otimes S_{3R}$. Putting the first family in a complex representation will allow us to have a CP violating phase in the mixing matrix. Then, in a symmetry adapted basis, \mathbf{M}_i takes the form

$$M_i = m_{i3} \left[\begin{pmatrix} 0 & |A_i|e^{i\phi_i} & 0 \\ |A_i|e^{-i\phi_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_i + \delta_i & C_i \\ 0 & C_i & \Delta_i - \delta_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \Delta_i \end{pmatrix} \right]$$

$$M_i = m_{i3} \begin{pmatrix} 0 & A_i & 0 \\ A_i^* & B_i & C_i \\ 0 & C_i & D_i \end{pmatrix}. \quad (2)$$

where $A_i = |A_i|e^{i\phi_i}$, $B_i = -\Delta_i + \delta_i$ and $D_i = 1 - \delta_i$. From the strong hierarchy in the masses of the Dirac fermions, $m_{i3} \gg m_{i2} > m_{i1}$, we expect $1 - \delta_i$ to be very close to unity. The small parameter δ_i is a function of the flavour symmetry breaking parameter $Z_i^{1/2}$ [3, 4]. In other words, each possible symmetry breaking pattern is now characterized by the flavour symmetry breaking parameter $Z_i^{1/2}$, which is defined as the ratio $Z_i^{1/2} = \frac{(M_i)_{23}}{(M_i)_{22}}$. This ratio measures the mixing of singlet and doublet irreducible representations of S_3 . The mass matrix (2) may be written as $M_i = P_i^\dagger \bar{M}_i P_i$, where \bar{M}_i is a real symmetric matrix and $P_i \equiv \text{diag}[1, e^{i\phi_i}, e^{i\phi_i}]$.

3. Classification of texture zeroes in equivalence classes

In this section we make a classification of mass matrices with texture zeroes in terms of the similarity classes. The similarity classes are defined as follows: Two matrices M and M' are similar if there exists an invertible matrix T such that

$$M' = TMT^{-1} \quad \text{or} \quad M' = T^{-1}MT. \quad (3)$$

The equivalence classes associated with a similarity transformation are called similarity classes. Another way to see the similarity classes is that the matrices that satisfy the similarity transformation, eq. (3), have the same invariants; Trace, determinant and χ :

$$\text{Tr}\{M\} = \text{Tr}\{M'\}, \quad \det\{M\} = \det\{M'\} \quad \text{and} \quad \chi' = \chi \equiv \frac{\text{Tr}\{M^2\} - \text{Tr}\{M\}^2}{2}. \quad (4)$$

In this paper we will count the texture zeroes in a matrix as follows: two texture zeroes off-diagonal counts as one zero, while one on the diagonal counts as one zero [5]. But in the literature we find that a mass matrix has double number of texture zeroes than the number that we obtain with our rule. This is so, because in the literature the total number of texture zeroes counted in a mass matrix is the sum of the texture zeroes coming from the two mass matrices in the sector of quarks (up and down quarks) or leptons (charged leptons and left-handed neutrinos). Hence, to avoid confusion in the nomenclature of the matrices, we count the number of texture zeroes in a matrix with the rule previously enunciated, but when referring to this matrix we will follow the literature's rule and name it with the double of texture zeroes it actually has.

Now, from the most general form of the mass matrices of 3×3 , symmetric and Hermitian:

$$M^s = \begin{pmatrix} g & a & e \\ a & b & c \\ e & c & d \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad M^h = \begin{pmatrix} g & a & e \\ a^* & b & c \\ e^* & c^* & d \end{pmatrix}, \quad (5)$$

we can see that only six of the nine elements of these matrices are independent of each other. Therefore, in a certain sense the similarity transformation, eq. (3), realized the permutation of the six independent elements in the nine entries of the mass matrices. But if we want to preserve the invariants (4), the elements on the diagonal can only exchanged positions on the diagonal, while the off-diagonal elements can only exchange positions outside of the diagonal. Thus we have that all these operations reduce to the permutations of three objects. So it is natural propose to as transformation matrices T in the similarity classes, see eq.(3), the six elements of the real representation of the group of permutations S_3 , which are:

$$\begin{aligned} T(A_0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T(A_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T(A_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, T(A_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T(A_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Then, applying the transformations (3) and taking the matrices (6) as matrices of transformation, we get the classification of mass matrices with texture zeroes, which is shown in the tables 1, 2, 3 and 4. In this tables, the "★" and "×" denote an arbitrary non-vanishing matrix element on the diagonal and off-diagonal entries, respectively.

Class	Textures	Invariants	
		Symmetric	Hermitian
I	$\begin{pmatrix} 0 & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & \star & 0 \\ \times & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\text{Tr} = d$ $\det = -a^2 d$ $\chi = a^2$	$\text{Tr} = d$ $\det = - a ^2 d$ $\chi = a ^2$

Table 1. Matrix with eight texture zeroes.

4. Seesaw mechanism

The left-handed Majorana neutrinos acquire their small masses through the type I seesaw mechanism $M_{\nu_L} = M_{\nu_D} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T$, where M_{ν_D} and M_{ν_R} denote the Dirac and right handed Majorana neutrino mass matrices, respectively. The form of M_{ν_D} is given in eq. (2); which is a matrix with four texture zeroes class I, Hermitian, and from our conjecture of a universal S_3 flavour symmetry in a unified treatment of all fermions, it is natural to take for M_{ν_R} also a matrix with four texture zeroes of class I, but symmetric. Let us further assume that the phases in the entries of the M_{ν_R} may be factorized out as $M_{\nu_R} = R \bar{M}_{\nu_R} R$, where $R \equiv \text{diag} [e^{-i\phi_c}, e^{i\phi_c}, 1]$ with $\phi_c \equiv \arg \{c_{\nu_R}\}$ and

$$\bar{M}_{\nu_R} = \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_R} & 0 \\ a_{\nu_R} & |b_{\nu_R}| & |c_{\nu_R}| \\ 0 & |c_{\nu_R}| & d_{\nu_R} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

Then, the type I seesaw mechanism takes the form $M_{\nu_L} = P_D^\dagger \bar{M}_{\nu_D} P_D R^\dagger \bar{M}_{\nu_R}^{-1} R^\dagger P_D \bar{M}_{\nu_D} P_D^\dagger$ and the mass matrix of the left-handed Majorana neutrinos has the following form, with four texture zeroes of class I:

$$M_{\nu_L} = \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_L} & 0 \\ a_{\nu_L} & b_{\nu_L} & c_{\nu_L} \\ 0 & c_{\nu_L} & d_{\nu_L} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

Class	Textures	Invariants	
		Symmetric	Hermitian
I	$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & * \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & * & 0 \\ \times & 0 & * \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} * & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & \times \\ 0 & \times & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & \times & 0 \\ \times & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} * & 0 & \times \\ 0 & * & 0 \\ \times & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\text{Tr} = d + g$ $\det = -c^2 g$ $\chi = c^2 - gd$	$\text{Tr} = d + g$ $\det = - c ^2 g$ $\chi = c ^2 - gd$
II	$\begin{pmatrix} 0 & \times & 0 \\ \times & 0 & \times \\ 0 & \times & * \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ \times & 0 & * \\ \times & 0 & * \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} * & \times & 0 \\ \times & 0 & \times \\ 0 & \times & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & * & \times \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ \times & * & 0 \\ \times & 0 & \times \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} * & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$	$\text{Tr} = d$ $\det = -a^2 d$ $\chi = a^2 + c^2$	$\text{Tr} = d$ $\det = - a ^2 d$ $\chi = a ^2 + c ^2$
III	$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$	$\text{Tr} = g + b + d$ $\det = gbd$ $\chi = -gb - gd - bd$	$\text{Tr} = g + b + d$ $\det = gbd$ $\chi = -gb - gd - bd$
IV	$\begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ \times & 0 & \times \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$	$\text{Tr} = 0$ $\det = 2ace$ $\chi = a^2 + e^2 + c^2$	$\text{Tr} = 0$ $\det = a^* c^* e + ace^*$ $\chi = a ^2 + e ^2 + c ^2$

Table 2. Matrix with six texture zeroes.

Class	Textures	Invariants	
		Symmetric	Hermitian
I	$\begin{pmatrix} 0 & \times & 0 \\ \times & * & \times \\ 0 & \times & * \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ \times & \times & * \\ * & \times & \times \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} * & 0 & \times \\ \times & \times & * \\ * & \times & \times \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} * & \times & \times \\ \times & 0 & 0 \\ \times & 0 & * \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} * & \times & \times \\ \times & \times & * \\ \times & * & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} * & \times & \times \\ \times & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\text{Tr} = b + d$ $\det = -a^2 d$ $\chi = a^2 + c^2 - bd$	$\text{Tr} = b + d$ $\det = - a ^2 d$ $\chi = a ^2 + c ^2 - bd$
II	$\begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ \times & * & 0 \\ \times & 0 & * \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} * & \times & 0 \\ \times & 0 & \times \\ 0 & \times & * \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} * & 0 & \times \\ 0 & * & \times \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$	$\text{Tr} = b + d$ $\det = -a^2 d$ $\chi = a^2 + e^2 - bd$	$\text{Tr} = b + d$ $\det = - a ^2 d$ $\chi = a ^2 + e ^2 - bd$
III	$\begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ \times & 0 & \times \\ \times & \times & * \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ \times & * & \times \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} * & \times & \times \\ \times & 0 & \times \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$	$\text{Tr} = d$ $\det = 2ace - a^2 d$ $\chi = a^2 + c^2 + e^2$	$\text{Tr} = d$ $\det = a^* c^* e + ace^* - a ^2 d$ $\chi = a ^2 + c ^2 + e ^2$
IV	$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & \times \\ 0 & \times & * \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} * & 0 & \times \\ 0 & * & 0 \\ \times & 0 & * \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} * & \times & 0 \\ \times & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$	$\text{Tr} = g + b + d$ $\det = -gc^2 + gbd$ $\chi = c^2 - gb - gd - bd$	$\text{Tr} = g + b + d$ $\det = -g c ^2 - gbd$ $\chi = c ^2 - gb - gd - bd$

Table 3. Matrix with four texture zeroes.

where

$$\begin{aligned}
 a_{\nu_L} &= \frac{|a_{\nu_D}|^2}{a_{\nu_R}}, \quad d_{\nu_L} = \frac{d_{\nu_D}^2}{d_{\nu_R}}, \quad c_{\nu_L} = \frac{c_{\nu_D} d_{\nu_D}}{d_{\nu_R}} + \frac{|a_{\nu_D}|}{|a_{\nu_R}|} \left(c_{\nu_D} e^{-i\phi_{\nu_D}} - \frac{c_{\nu_R} |d_{\nu_D}|}{d_{\nu_R}} e^{i(\phi_c - \phi_{\nu_D})} \right) \\
 b_{\nu_L} &= \frac{c_{\nu_D}^2}{d_{\nu_R}} + \frac{|c_{\nu_R}|^2 - |b_{\nu_R}| d_{\nu_R}}{d_{\nu_R}} \frac{|a_{\nu_D}|^2}{a_{\nu_R}^2} e^{i2(\phi_c - \phi_{\nu_D})} + 2 \frac{|a_{\nu_D}|}{|a_{\nu_R}|} \left(b_{\nu_D} e^{-i\phi_{\nu_D}} - \frac{c_{\nu_D} |c_{\nu_R}|}{d_{\nu_R}} e^{i(\phi_c - \phi_{\nu_D})} \right).
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Class	Textures	Invariants	
		Symmetric	Hermitian
I	$\begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ \times & \star & \times \\ \times & \times & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & \times & \times \\ \times & 0 & \times \\ \times & \times & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & \times & \times \\ \times & \star & \times \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} \text{Tr} &= b + d \\ \det &= 2ace - a^2d \\ &-be^2 \\ \chi &= a^2 + c^2 \\ &+e^2 - bd \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Tr} &= b + d \\ \det &= - a ^2d - b e ^2 \\ &+ace^* + a^*c^*e \\ \chi &= a ^2 + c ^2 + e ^2 \\ &-bd \end{aligned}$
II	$\begin{pmatrix} \star & 0 & \times \\ 0 & \star & \times \\ \times & \times & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & \times & \times \\ \times & \star & 0 \\ \times & 0 & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & \times & 0 \\ \times & \star & \times \\ 0 & \times & \star \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} \text{Tr} &= b + d + g \\ \det &= gbd \\ &-c^2g - e^2b \\ \chi &= e^2 + c^2 - gb \\ &-gd - bd \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Tr} &= b + d + g \\ \det &= gbd \\ &- c ^2g - e ^2b \\ \chi &= e ^2 + c ^2 - gb \\ &-gd - bd \end{aligned}$

Table 4. Matrix with two texture zeroes.

The elements a_{ν_L} and d_{ν_L} are real, while b_{ν_L} and c_{ν_L} are complex. It may also be noticed that M_{ν_L} may also have four texture zeroes of class I when M_{ν_R} has four texture zeroes of class I, six texture zeroes of class II, six texture zeroes of class I and eight texture zeroes of class I. From eqs. (9) we conclude that the information of the number of texture zeroes in M_{ν_R} is found in elements (2,2) and (2,3) of the matrix M_{ν_L} . In this case, without loss of generality, we may choose $\arg\{b_{\nu_L}\} = 2\arg\{c_{\nu_L}\} = 2\varphi$, the analysis simplifies since the phases in M_{ν_L} may be factorized as $M_{\nu_L} = Q\bar{M}_{\nu_L}Q$, where Q is a diagonal matrix of phases $Q \equiv \text{diag}[e^{-i\varphi}, e^{i\varphi}, 1]$ and \bar{M}_{ν_L} is a real symmetric matrix.

5. Mass matrix with four texture zeroes as function of the fermion masses

Now, computing the invariants (4) of the real symmetric matrix \bar{M}_{ν_L} , we may express the parameters A_i, B_i, C_i and D_i occurring in (2) in terms of the mass eigenvalues. In this way, we get the \bar{M}_i matrix ($i = u, d, l, \nu_L$), reparametrized in terms of its eigenvalues and the parameter δ_i is

$$\bar{M}_i = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\tilde{m}_{i1}\tilde{m}_{i2}}{1-\delta_i}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\tilde{m}_{i1}\tilde{m}_{i2}}{1-\delta_i}} & \tilde{m}_{i1} - \tilde{m}_{i2} + \delta_i & \sqrt{\frac{\delta_i}{(1-\delta_i)}}f_{i1}f_{i2} \\ 0 & \sqrt{\frac{\delta_i}{(1-\delta_i)}}f_{i1}f_{i2} & 1 - \delta_i \end{pmatrix}, \tag{10}$$

where $\tilde{m}_{i1} = \frac{m_{i1}}{m_{i3}}, \tilde{m}_{i2} = \frac{|m_{i2}|}{m_{i3}}, f_{i1} = 1 - \tilde{m}_{i1} - \delta_i$ and $f_{i2} = 1 + \tilde{m}_{i2} - \delta_i$. The small parameters δ_i are also functions of the mass ratios and the flavour symmetry breaking parameter $Z_i^{1/2}$. The small parameter δ_i is obtained as the solution of the cubic equation $(1 - \delta_i)(\tilde{m}_{i1} - \tilde{m}_{i2} + \delta_i)^2 Z - \delta_i f_{i1} f_{i2} = 0$, and may be written as

$$\delta_i = \frac{Z_i}{Z_i + 1} \frac{(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1})^2}{W_i(Z)} \tag{11}$$

where $W_i(Z)$ is the product of the two roots that do not vanish when Z_i vanishes

$$\begin{aligned} W_i(Z) &= \left[p_i^3 + 2q_i^2 + 2q_i\sqrt{p_i^3 + q_i^2} \right]^{\frac{1}{3}} - |p_i| + \left[p_i^3 + 2q_i^2 - 2q_i\sqrt{p_i^3 + q_i^2} \right]^{\frac{1}{3}} + \\ &+ \frac{1}{9} (Z_i (2(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 1) + (\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 2)^2 - \frac{1}{3} \left(\left[q_i + \sqrt{p_i^3 + q_i^2} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[q_i - \sqrt{p_i^3 + q_i^2} \right]^{\frac{1}{3}} \right) \times \\ &\times (Z_i (2(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 1) + (\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 2) \end{aligned}$$

with $p_i = -\frac{1}{3} \frac{Z_i(Z_i(2(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 1) + \tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1} + 2)}{Z_i + 1} + \frac{[Z_i(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1})(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1} + 2)(1 + \tilde{m}_{i2})(1 - \tilde{m}_{i1})]}{Z_i + 1}$, and $q_i = \frac{1}{6} \frac{[Z_i(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1})(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1} + 2)(1 + \tilde{m}_{i2})(1 - \tilde{m}_{i1})]}{(Z_i + 1)^2} - \frac{1}{27} \frac{(Z_i(2(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 1) + \tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1} + 2)^3}{(Z_i + 1)^3}$.

Also, the values allowed for the parameters δ_i are in the following range $0 < \delta_i < 1 - \tilde{m}_{i1}$. Now, the entries in the real orthogonal matrix \mathbf{O} that diagonalize the matrix \tilde{M}_i , may also be expressed as

$$\mathbf{O}_i = \begin{pmatrix} \left[\frac{\tilde{m}_{i2} f_{i1}}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & - \left[\frac{\tilde{m}_{i1} f_{i2}}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\tilde{m}_{i1} \tilde{m}_{i2} \delta_i}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \left[\frac{\tilde{m}_{i1} (1 - \delta_i) f_{i1}}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\tilde{m}_{i2} (1 - \delta_i) f_{i2}}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{(1 - \delta_i) \delta_i}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ - \left[\frac{\tilde{m}_{i1} f_{i2} \delta_i}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & - \left[\frac{\tilde{m}_{i2} f_{i1} \delta_i}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{f_{i1} f_{i2}}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

where, $\mathcal{D}_{i1} = (1 - \delta_i)(\tilde{m}_{i1} + \tilde{m}_{i2})(1 - \tilde{m}_{i1})$, $\mathcal{D}_{i2} = (1 - \delta_i)(\tilde{m}_{i1} + \tilde{m}_{i2})(1 + \tilde{m}_{i2})$ and $\mathcal{D}_{i3} = (1 - \delta_i)(1 - \tilde{m}_{i1})(1 + \tilde{m}_{i2})$.

6. Mixing Matrices as Functions of the Fermion Masses

The quark mixing matrix $V_{CKM} = U_u U_d^\dagger$ takes the form

$$V_{CKM}^{th} = \mathbf{O}_u^T P^{(u-d)} \mathbf{O}_d, \quad (13)$$

where $P^{(u-d)} = \text{diag} [1, e^{i\phi}, e^{i\phi}]$ with $\phi = \phi_u - \phi_d$, and $\mathbf{O}_{u,d}$ are the real orthogonal matrices (12) that diagonalize the real symmetric mass matrices $\tilde{M}_{u,d}$. In a similar way, the lepton mixing matrix $U_{PMNS} = U_l^\dagger U_\nu$ may be written as

$$U_{PMNS}^{th} = \mathbf{O}_l^T P^{(\nu-l)} \mathbf{O}_\nu K, \quad (14)$$

where $P^{(\nu-l)} = \text{diag} [1, e^{i\Phi_1}, e^{i\Phi_2}]$ is the diagonal matrix of the Dirac phases, with $\Phi_1 = 2\varphi - \phi_l$ and $\Phi_2 = \varphi - \phi_l$. The real orthogonal matrices $\mathbf{O}_{\nu,l}$ are defined in eq. (12). Exact explicit expressions for the unitary matrices (13) and (14) are given by J. Barranco, F. Gonzalez Canales and A. Mondragon [4].

6.1. The χ^2 fit for the Quark Mixing Matrix

We made a χ^2 fit of the theoretical expressions for the moduli of the entries of the quark mixing matrix $|(V_{CKM}^{th})_{ij}|$, eq.(13) to the experimental values $|(V_{CKM}^{exp})_{ij}|$ [11]. We computed the moduli of the entries of the quark mixing matrix and the inner angles of the unitarity triangle from the theoretical expression (13) with the following numerical values of the quark mass ratios [11]:

$$\tilde{m}_u = 2.5469 \times 10^{-5}, \quad \tilde{m}_c = 3.9918 \times 10^{-3}, \quad \tilde{m}_d = 1.5261 \times 10^{-3}, \quad \tilde{m}_s = 3.2319 \times 10^{-2}. \quad (15)$$

The resulting best values of the parameters $\delta_u = 3.829 \times 10^{-3}$, $\delta_d = 4.08 \times 10^{-4}$ and the Dirac CP violating phase is $\phi = 90^\circ$. The best values for the moduli of the entries of the CKM mixing matrix are given in the following expression

$$|V_{CKM}^{th}| = \begin{pmatrix} 0.97421 & 0.22560 & 0.003369 \\ 0.22545 & 0.97335 & 0.041736 \\ 0.008754 & 0.04094 & 0.99912 \end{pmatrix} \quad (16)$$

and the inner angles of the unitary triangle $\alpha^{th} = 91.24^\circ$, $\beta^{th} = 20.41^\circ$ and $\gamma^{th} = 68.33^\circ$. The Jarlskog invariant takes the value $J_q^{th} = 2.9 \times 10^{-5}$. All these results are in very good agreement with the experimental values. The minimum value of χ^2 obtained in this fit is 4.6 and the resulting value of χ^2 for degree of freedom is $\frac{\chi^2_{min}}{d.o.f.} = 0.77$. In this way, we obtain the following numerical values for the mixing angles: $\theta_{12}^{qth} = 13^\circ$, $\theta_{23}^{qth} = 2.38^\circ$ and $\theta_{13}^{qth} = 0.19^\circ$. Which are also in very good agreement with the latest analysis of the experimental data [11].

6.2. The χ^2 fit for the Lepton Mixing Matrix

In the case of the lepton mixing matrix, we made a χ^2 fit of the theoretical expressions for the moduli of the entries of the lepton mixing matrix $|(U_{PMNS}^{th})_{ij}|$ to the values extracted from experiment as given by Gonzalez-Garcia [12]. The computation was made using the following values for the charged lepton masses [11]:

$$m_e = 0.5109 \text{ MeV}, \quad m_\mu = 105.685 \text{ MeV}, \quad m_\tau = 1776.99 \text{ MeV}. \quad (17)$$

We took for the masses of the left-handed Majorana neutrinos a normal hierarchy. From the best values obtained for m_{ν_3} and the experimental values of the Δm_{32}^2 and Δm_{21}^2 , we obtained the following best values for the neutrino masses

$$m_{\nu_1} = 2.7 \times 10^{-3} \text{ eV}, \quad m_{\nu_2} = 9.1 \times 10^{-3} \text{ eV}, \quad m_{\nu_3} = 4.7 \times 10^{-2} \text{ eV}. \quad (18)$$

The resulting best values of the parameters $\delta_l = 0.06$, $\delta_\nu = 0.522$ and the Dirac CP violating phases are $\Phi_1 = \pi$ and $\Phi_2 = 3\pi/2$. The best values for the moduli of the entries of the $PMNS$ mixing matrix are given in the following expression

$$|U_{PMNS}^{th}| = \begin{pmatrix} 0.820421 & 0.568408 & 0.061817 \\ 0.385027 & 0.613436 & 0.689529 \\ 0.422689 & 0.548277 & 0.721615 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

The value of the rephasing invariant related to the Dirac phase is $J_l^{th} = 8.8 \times 10^{-3}$. In this numerical analysis, the minimum value of the χ^2 , corresponding to the best fit, is $\chi^2 = 0.288$ and the resulting value of χ^2 degree of freedom is $\frac{\chi_{min}^2}{d.o.f.} = 0.075$. All numerical results of the fit are in very good agreement with the values of the moduli of the entries in the matrix U_{PMNS}^{exp} as given in Gonzalez-Garcia [12]. We obtain the following numerical values for the mixing angles: $\theta_{12}^{th} = 34.7^\circ$, $\theta_{23}^{th} = 43.6^\circ$ and $\theta_{13}^{th} = 3.5^\circ$. Which are also in very good agreement with the latest experimental data [12].

7. Conclusions

In this work we have shown that, starting from the flavour permutational symmetry S_3 , a simple and explicit ansatz about the pattern of symmetry breaking leads to a unified treatment of masses of quarks and leptons, in which the left-handed Majorana neutrinos acquire their masses via the type I seesaw mechanism. The mass matrices of all Dirac fermions have a similar form with four texture zeroes of class I and a normal hierarchy of masses. Then, the mass matrix of the left-handed Majorana neutrinos also has a four texture zeroes class I and a normal hierarchy of masses. In this scheme, we have a parametrization of the $CKM(PMNS)$ mixing matrix in terms of four quark (lepton) mass ratios and one (two) CP violating phase in very good agreement with all available experimental data. Also, with help of the symmetry group S_3 we made a classification of mass matrices with texture zeroes in equivalence classes. In this classification we use the similarity transformation $M' = TMT^{-1}$ or $M' = T^{-1}MT$, in which we take the transformation matrices T as six elements of real representation of S_3 . With this classification we reduce the number of phenomenologically viable textures for non-singular mass matrices of 3×3 , from thirty three down to only eleven independent sets of matrices. Each of these sets of matrices has exactly the same physical content.

Acknowledgments

We thank Dr. J. Barranco for many inspiring discussions on this problem. This work was partially supported by CONACyT Mexico under Contract No. 82291, and DGAPA-UNAM Contract No. PAPIIT IN112709.

References

- [1] Xing Z z 2010 *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **203-204** 82–117, Hernandez P 2010 (*Preprint* 1010.4131)
- [2] Fritzsche H 1977 *Phys. Lett.* **B70** 436, Pakvasa S and Sugawara H 1978 *Phys. Lett.* **B73** 61, Harari H, Haut H and Weyers J 1978 *Phys. Lett.* **B78** 459, Fritzsche H 1979 *Nucl. Phys.* **B155** 189.
- [3] Mondragon A and Rodriguez-Jauregui E 1999 *Phys. Rev.* **D59** 093009 (*Preprint* hep-ph/9807214), Mondragon A and Rodriguez-Jauregui E 2000 *Phys. Rev.* **D61** 113002 (*Preprint* hep-ph/9906429)
- [4] Barranco J, Gonzalez Canales F and Mondragon A 2010 *Phys. Rev.* **D82** 073010 (*Preprint* 1004.3781)
- [5] Fritzsche H and Xing Z z 2000 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **45** 1–81 (*Preprint* hep-ph/9912358)
- [6] Kubo J, Mondragon A, Mondragon M and Rodriguez-Jauregui E 2003 *Prog. Theor. Phys.* **109** 795–807 (*Preprint* hep-ph/0302196), Xing Z z, Yang D and Zhou S 2010 *Phys. Lett.* **B690** 304–310
- [7] Xing Z z and Zhang H 2003 *Phys. Lett.* **B569** 30–40 (*Preprint* hep-ph/0304234)
- [8] Branco G C, Emmanuel-Costa D, Gonzalez Felipe R and Serodio H 2009 *Phys. Lett.* **B670** 340–349
- [9] Altarelli G, Feruglio F and Merlo L 2009 *JHEP* **05** 020, de Adelhart Toorop R, Bazzocchi F and Merlo L 2010 *JHEP* **08** 001, Plentinger F, Seidl G and Winter W 2008 *JHEP* **04** 077, Plentinger F and Seidl G 2008 *Phys. Rev.* **D78** 045004 (*Preprint* 0803.2889)
- [10] Buchmuller W and Wyler D 2001 *Phys. Lett.* **B521** 291–298, Bando M and Obara M 2003 *Prog. Theor. Phys.* **109** 995–1015 Bando M, Kaneko S, Obara M and Tanimoto M 2004 (*Preprint* hep-ph/0403101)
- [11] Nakamura K *et al.* (Particle Data Group) 2010 *J. Phys.* **G37** 075021
- [12] Gonzalez-Garcia M C and Maltoni M 2008 *Phys. Rept.* **460** 1–129 (*Preprint* 0704.1800), Gonzalez-Garcia M C, Maltoni M and Salvado J 2010 *JHEP* **04** 056 (*Preprint* 1001.4524)

Universal mass matrix for quarks and leptons and CP violation

J. Barranco*

Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik (Albert-Einstein-Institut), Am Mühlenberg 1, D-14476 Golm, Germany

F. González Canales† and A. Mondragón‡

Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510, México D.F., Mexico

(Received 24 May 2010; published 20 October 2010)

The measurements of the neutrino and quark mixing angles satisfy the empirical relations called quark-lepton complementarity. These empirical relations suggest the existence of a correlation between the mixing matrices of leptons and quarks. In this work, we examine the possibility that this correlation between the mixing angles of quarks and leptons originates in the similar hierarchy of quarks and charged lepton masses and the seesaw mechanism type I, that gives mass to the Majorana neutrinos. We assume that the similar mass hierarchies of charged lepton and quark masses allows us to represent all the mass matrices of Dirac fermions in terms of a universal form with four texture zeroes.

DOI: 10.1103/PhysRevD.82.073010

PACS numbers: 12.15.Ff, 14.60.Pq, 12.15.Hh, 14.60.St

I. INTRODUCTION

The neutrino oscillations between different flavour states were measured in a series of experiments with atmospheric neutrinos [1], solar neutrinos [2], and neutrinos produced in nuclear reactors [3] and accelerators [4].

As a result of the global combined analysis including all dominant and subdominant oscillation effects, the difference of the squared neutrino masses and the mixing angles in the lepton mixing matrix, U_{PMNS} , were determined at 1σ (3σ) confidence level [5]:

$$\Delta m_{21}^2 = 7.67_{-0.21}^{+0.22} \begin{pmatrix} +0.67 \\ -0.61 \end{pmatrix} \times 10^{-5} \text{ eV}^2, \quad \Delta m_{31}^2 = \begin{cases} -2.37 \pm 0.15 \begin{pmatrix} +0.43 \\ -0.46 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \text{ eV}^2, (m_{\nu_2} > m_{\nu_1} > m_{\nu_3}). \\ +2.46 \pm 0.15 \begin{pmatrix} +0.47 \\ -0.42 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \text{ eV}^2, (m_{\nu_3} > m_{\nu_2} > m_{\nu_1}). \end{cases} \quad (1)$$

$$\theta_{12}^l = 34.5^\circ \pm 1.4 \begin{pmatrix} +4.8 \\ -4.0 \end{pmatrix}, \quad \theta_{23}^l = 42.3_{-3.3}^{+5.1} \begin{pmatrix} +11.3 \\ -7.7 \end{pmatrix}, \quad \theta_{13}^l = 0.0_{-0.0}^{+7.9} \begin{pmatrix} +12.9 \\ -0.0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Thus, values of the magnitudes of all nine elements of the lepton mixing matrix, U_{PMNS} , at 90% C.L., are

$$U_{PMNS} = \begin{pmatrix} 0.80 \rightarrow 0.84 & 0.53 \rightarrow 0.60 & 0.00 \rightarrow 0.17 \\ 0.29 \rightarrow 0.52 & 0.51 \rightarrow 0.69 & 0.61 \rightarrow 0.76 \\ 0.26 \rightarrow 0.50 & 0.46 \rightarrow 0.66 & 0.64 \rightarrow 0.79 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

The CHOOZ experiment determined an upper bound for the θ_{13}^l mixing angle [6]. The latest analyses give the following best values [7,8]:

$$\theta_{13}^l = -0.07_{-0.11}^{+0.18} \quad (4)$$

and [at 1σ (3σ)

$$\theta_{13}^l = 5.6_{-2.7}^{+3.0} (\leq 12.5)^\circ, \quad \theta_{13}^l = 5.1_{-3.3}^{+3.0} (\leq 12.0)^\circ; \quad (5)$$

see also [9]. On the other hand, in the last years extensive research has been done in the precise determination of the values of the V_{CKM} quark mixing matrix elements. The most precise fit results for the values of the magnitudes of all nine Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) elements are [10]

*jbarranc@aei.mpg.de

†ffelix@fisica.unam.mx

‡mondra@fisica.unam.mx

BARRANCO, GONZÁLEZ CANALES, AND MONDRAGÓN

PHYSICAL REVIEW D **82**, 073010 (2010)

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 0.97419 \pm .00022 & 0.2257 \pm .0010 & 0.00359 \pm .00016 \\ 0.2256 \pm .0010 & 0.97334 \pm .00023 & 0.0415_{-0.0011}^{+0.0010} \\ 0.00874_{-0.00037}^{+0.00026} & 0.0407 \pm .0010 & 0.999133_{-0.00043}^{+0.00044} \end{pmatrix} \quad (6)$$

and the Jarlskog invariant is

$$J^q = (3.05_{-0.20}^{+0.19}) \times 10^{-5}. \quad (7)$$

We also have the three angles of the unitarity triangle with the following reported best values [10]:

$$\alpha = (88_{-9}^{+6})^\circ, \quad \beta = (21.46 \pm 0.71)^\circ, \quad \gamma = (77_{-32}^{+30})^\circ. \quad (8)$$

Each of the elements of the V_{CKM} matrix can be extracted from a large number of decays and, for the purpose of our analysis, will be considered as independent. Hence, current knowledge of the mixing angles for the quark sector can be summarized at 1σ as [10]

$$\begin{aligned} \sin\theta_{12}^q &= 0.2257 \pm 0.001, \\ \sin\theta_{23}^q &= 0.0415_{-0.0011}^{+0.001}, \\ \sin\theta_{13}^q &= 0.00359 \pm 0.00016. \end{aligned} \quad (9)$$

The solar mixing angle θ_{12}^l and the corresponding mixing angle in the quark sector, the Cabibbo angle θ_{12}^q , satisfy an interesting and intriguing numerical relation (at 90% confidence level) [11],

$$\theta_{12}^l + \theta_{12}^q \approx 45^\circ + 2.5^\circ \pm 1.5^\circ; \quad (10)$$

see also [12]. Equation (10) relates the 1–2 mixing angles in the quark and lepton sectors, it is commonly known as quark-lepton complementarity relation (QLC) and, if not accidental, it could imply a quark-lepton symmetry. A second QLC relation between the atmospheric and 2–3 mixing angles is also satisfied [13],

$$\theta_{23}^l + \theta_{23}^q = (44.67_{-3.3}^{+5.1})^\circ. \quad (11)$$

However, this is not as interesting as (10) because θ_{23}^q is only about 2° , and the corresponding QLC relation would be satisfied, within the errors, even if the angle θ_{23}^q had been zero, as long as θ_{23}^l is close to the maximal value $\pi/4$. A third possible QLC relation is not realized at all, or at least not realized in the same way, since it is less than 10° [13]:

$$\theta_{13}^l + \theta_{13}^q < 8.1^\circ. \quad (12)$$

Equations (10)–(12) are known as the extended quark-lepton complementarity; for a review see [14]. The extended QLC relations could imply a quark-lepton symmetry [14] or a quark-lepton unification [15]. A systematic numerical exploration of all CP conserving textures of the neutrino mass matrix compatible to the QLC relations and the experimental information on neutrino mixings is given in [16].

The neutrino oscillations do not provide information about either the absolute mass scale or if neutrinos are Dirac or Majorana particles [17]. Thus, one of the most fundamental problems of the neutrinos physics is the question of the nature of massive neutrinos. A direct way to reveal the nature of massive neutrinos is to investigate processes in which the total lepton number is not conserved [18]. The matrix elements for these processes are proportional to the effective Majorana neutrino masses, which are defined as

$$\langle m_{ll} \rangle \equiv \sum_{j=1}^3 m_{\nu_j} U_{lj}^2, \quad l = e, \mu, \tau, \quad (13)$$

where m_{ν_j} are the neutrino Majorana masses and U_{lj} are the elements of the lepton mixing matrix.

In this work, we will focus our attention on understanding the nature of the QLC relation and finding possible values for the effective Majorana neutrino masses. Thus, we made a unified treatment of quarks and leptons, where we assumed that the charged lepton and quark mass matrices have the same generic form with four texture zeroes from a universal S_3 flavor symmetry and its sequential explicit breaking.

II. UNIVERSAL MASS MATRIX WITH A FOUR ZEROES TEXTURE

In particle physics, the imposition of a flavor symmetry has been successful in reducing the number of parameters of the standard model. Recent flavor symmetry models are reviewed in [19]; see also the references therein. In particular, a permutational S_3 flavor symmetry and its sequential explicit breaking allows us to take the same generic form for the mass matrices of all Dirac fermions, conventionally called the generalized Fritzsch ansatz with four texture zeroes [20,21]:

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} 0 & A_i & 0 \\ A_i^* & B_i & C_i \\ 0 & C_i & D_i \end{pmatrix}, \quad i = u, d, l, \nu_D, \quad (14)$$

where B_i , C_i , and D_i are real, while $A_i = |A_i|e^{i\phi_i}$ with $\phi_i = \arg\{A_i\}$.

In the most general case, all entries in the Hermitian mass matrix M_i are complex and nonvanishing. However, without loss of generality, by means of a common unitary transformation of the Dirac fields Ψ_{u,ν_D} and $\Psi_{d,l}$, it is always possible to change to a new flavor basis where the off-diagonal elements $(M_i)_{13} = (M_i)_{31}$ vanish [21]. The vanishing of the diagonal elements $(M_{u,\nu_D})_{11}$ and $(M_{d,l})_{11}$, constrains the physics and allows for the predictions of the

Cabibbo angle as function of the u and d -type quark masses in the quark sector and the solar angle as function of the charged leptons and Majorana neutrinos masses in the leptonic sector in good agreement with the experimental values.

Then, in the quark sector, M_u and M_d totally have four texture zeroes and, in the leptonic sector, M_{ν_D} and M_e , totally have four texture zeroes (here a pair of off-diagonal texture zeroes are counted as one zero, due to the Hermiticity of M_i) [21]. Hence, following a common convention we will refer to M_i as a generalized Fritzsch ansatz with four texture zeroes.

Some reasons to propose the validity of a generalized Fritzsch ansatz with four texture zeroes as a universal form for the mass matrix of all Dirac fermions in the theory are the following:

- (1) The idea of S_3 flavor symmetry and its explicit breaking has been successfully realized as a mass matrix with four texture zeroes in the quark sector to interpret the strong mass hierarchy of up and down type quarks [22].
- (2) The quark mixing angles and the CP violating phase, appearing in the V_{CKM} mixing matrix, were computed as explicit, exact functions of the four quark mass ratios (m_u/m_t , m_c/m_t , m_d/m_b , m_s/m_b), one symmetry breaking parameter defined as $Z^{1/2} \equiv \frac{C_i}{B_i}$, and one CP violating phase $\phi_{u-d} = \phi_u - \phi_d$. Assuming that $Z_u = Z_d = Z$, a χ^2 fit of the theoretical expression for V_{CKM}^{th} to the experimentally determined V_{CKM}^{exp} gave $Z^{1/2} = (\frac{81}{32})^{1/2}$ and $\phi_{u-d} = 90^\circ$, in good agreement with the experimental data [20]. This agreement has improved as the precision of the experimental data has improved and, now, it is very good [10].
- (3) Since the mass spectrum of the charged leptons exhibits a hierarchy similar to the quark's one, it would be natural to consider the same S_3 symmetry and its explicit breaking to justify the use of the same generic form with four texture zeroes for the charged lepton mass matrix.
- (4) As for the Dirac neutrinos, we have no direct information about the absolute values or the relative values of the neutrino masses, but the mass matrix with four texture zeroes can be obtained from an $SO(10)$ neutrino model which describes the data on neutrino masses and mixings well [23]. Furthermore, from supersymmetry arguments, it would be sensible to assume that the Dirac neutrinos have a mass hierarchy similar to that of the u -quarks and it would be natural to take for the Dirac neutrino mass matrix also a matrix with four texture zeroes.

The Hermitian mass matrix (14) may be written in terms of a real symmetric matrix \bar{M}_i and a diagonal matrix of phases $P_i \equiv \text{diag}[1, e^{i\phi_i}, e^{i\phi_i}]$ as follows:

$$M_i = P_i^\dagger \bar{M}_i P_i. \quad (15)$$

The real symmetric matrix \bar{M}_i may be brought to diagonal form by means of an orthogonal transformation,

$$\bar{M}_i = \mathbf{O}_i \text{diag}\{m_{i1}, m_{i2}, m_{i3}\} \mathbf{O}_i^T, \quad (16)$$

where the m_i 's are the eigenvalues of M_i and \mathbf{O}_i is a real orthogonal matrix. Now computing the invariants of the real symmetric matrix \bar{M}_i , $\text{tr}\{\bar{M}_i\}$, $\text{tr}\{\bar{M}_i^2\}$, and $\det\{\bar{M}_i\}$, we may express the parameters A_i , B_i , C_i , and D_i occurring in (14) in terms of the mass eigenvalues. In this way, we get that the \bar{M}_i matrix ($i = u, d, l, \nu_D$), reparametrized in terms of its eigenvalues and the parameter $D_i \equiv 1 - \delta_i$ is

$$\bar{M}_i = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\tilde{m}_{i1}\tilde{m}_{i2}}{1-\delta_i}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\tilde{m}_{i1}\tilde{m}_{i2}}{1-\delta_i}} & \tilde{m}_{i1} - \tilde{m}_{i2} + \delta_i & \sqrt{\frac{\delta_i}{(1-\delta_i)}} f_{i1} f_{i2} \\ 0 & \sqrt{\frac{\delta_i}{(1-\delta_i)}} f_{i1} f_{i2} & 1 - \delta_i \end{pmatrix}, \quad (17)$$

where $\tilde{m}_{i1} = \frac{m_{i1}}{m_{i3}}$, $\tilde{m}_{i2} = \frac{m_{i2}}{m_{i3}}$,

$$f_{i1} = 1 - \tilde{m}_{i1} - \delta_i, \quad f_{i2} = 1 + \tilde{m}_{i2} - \delta_i. \quad (18)$$

The small parameters δ_i are also functions of the mass ratios and the flavor symmetry breaking parameter $Z_i^{1/2}$ [20]. The flavor symmetry breaking parameter $Z_i^{1/2}$, which measures the mixing of singlet and doublet irreducible representations of S_3 , is defined as the ratio

$$Z_i^{1/2} = \frac{(M_i)_{23}}{(M_i)_{22}}. \quad (19)$$

It is related with the parameters δ_i by the following cubic equation [20]:

$$\begin{aligned} \delta_i^3 - \frac{1}{Z_i + 1} (2 + \tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1} + (1 + 2(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}))Z_i) \delta_i^2 \\ + \frac{1}{Z_i + 1} (Z_i(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1})(2 + \tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) \\ + (1 + \tilde{m}_{i2})(1 - \tilde{m}_{i1})) \delta_i + \frac{Z_i(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1})^2}{Z_i + 1} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Thus, the small parameter δ_i is obtained as the solution of the cubic equation (20), which vanishes when Z_i vanishes. The last term in the left-hand side of (20) is equal to the product of the three roots of (20). Therefore, the root that vanishes when Z_i vanishes may be written as

$$\delta_i = \frac{Z_i}{Z_i + 1} \frac{(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1})^2}{W_i(Z)}, \quad (21)$$

where $W_i(Z)$ is the product of the two roots of (20) which do not vanish when Z_i vanishes. The explicit form of $W_i(Z)$ is [20]

BARRANCO, GONZÁLEZ CANALES, AND MONDRAGÓN

$$\begin{aligned}
W_i(Z) = & [p_i^3 + 2q_i^2 + 2q_i\sqrt{p_i^3 + q_i^2}]^{1/3} - |p_i| + [p_i^3 + 2q_i^2 \\
& - 2q_i\sqrt{p_i^3 + q_i^2}]^{1/3} + \frac{1}{9}(Z_i(2(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 1) \\
& + (\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 2)^2 - \frac{1}{3}([q_i + \sqrt{p_i^3 + q_i^2}]^{1/3} \\
& + [q_i - \sqrt{p_i^3 + q_i^2}]^{1/3}) \times (Z_i(2(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 1) \\
& + (\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 2) \quad (22)
\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
p_i = & -\frac{1}{3}\frac{Z_i}{Z_i+1}(Z_i(2(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 1) + \tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1} + 2)^2 \\
& + \frac{1}{Z_i+1}[Z_i(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1})(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1} + 2) \\
& \times (1 + \tilde{m}_{i2})(1 - \tilde{m}_{i1})], \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_i = & -\frac{1}{27}\frac{1}{(Z_i+1)^3}(Z_i(2(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 1) + \tilde{m}_{i2} \\
& - \tilde{m}_{i1} + 2)^3 + \frac{1}{6}\frac{1}{(Z_i+1)^2}[Z_i(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) \\
& \times (\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1} + 2)(1 + \tilde{m}_{i2})(1 - \tilde{m}_{i1})] \\
& \times (Z_i(2(\tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1}) + 1) + \tilde{m}_{i2} - \tilde{m}_{i1} + 2). \quad (24)
\end{aligned}$$

Also, the values allowed for the parameters δ_i are in the following range: $0 < \delta_i < 1 - \tilde{m}_{i1}$.

Now, the entries in the real orthogonal matrix \mathbf{O} , Eq. (16), may also be expressed in terms of the eigenvalues of the mass matrix (14) as

$$\mathbf{O}_i = \begin{pmatrix} \left[\frac{\tilde{m}_{i2}f_{i1}}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{1/2} & - \left[\frac{\tilde{m}_{i1}f_{i2}}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{1/2} & \left[\frac{\tilde{m}_{i1}\tilde{m}_{i2}\delta_i}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{1/2} \\ \left[\frac{\tilde{m}_{i1}(1-\delta_i)f_{i1}}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{1/2} & \left[\frac{\tilde{m}_{i2}(1-\delta_i)f_{i2}}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{1/2} & \left[\frac{(1-\delta_i)\delta_i}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{1/2} \\ - \left[\frac{\tilde{m}_{i1}f_{i2}\delta_i}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{1/2} & - \left[\frac{\tilde{m}_{i2}f_{i1}\delta_i}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{1/2} & \left[\frac{f_{i1}f_{i2}}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

where,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{i1} = & (1 - \delta_i)(\tilde{m}_{i1} + \tilde{m}_{i2})(1 - \tilde{m}_{i1}), \\
\mathcal{D}_{i2} = & (1 - \delta_i)(\tilde{m}_{i1} + \tilde{m}_{i2})(1 + \tilde{m}_{i2}), \quad (26) \\
\mathcal{D}_{i3} = & (1 - \delta_i)(1 - \tilde{m}_{i1})(1 + \tilde{m}_{i2}).
\end{aligned}$$

III. SEESAW MECHANISM AND PHASES OF THE LEFT-HANDED NEUTRINO MASS MATRIX

The left-handed Majorana neutrinos naturally acquire their small masses through an effective type-I seesaw mechanism of the form

$$M_{\nu_L} = M_{\nu_D} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T, \quad (27)$$

PHYSICAL REVIEW D **82**, 073010 (2010)

where M_{ν_D} and M_{ν_R} denote the Dirac and right-handed Majorana neutrino mass matrices, respectively. The symmetry of the mass matrix of the left-handed Majorana neutrinos, $M_{\nu_L} = M_{\nu_L}^T$, and the seesaw mechanism of type I, Eq. (27), fix the form of the right-handed Majorana neutrinos mass matrix, M_{ν_R} , which has to be nonsingular and symmetric. Further restrictions on M_{ν_R} follow from requiring that M_{ν_L} also has a texture with four zeroes, as will be shown below. With this purpose in mind, the seesaw mechanism, Eq. (27), may be written in a more explicit form as

$$M_{\nu_L} = \frac{1}{\det(M_{\nu_R})} M_{\nu_D} \text{adj}(M_{\nu_R}) M_{\nu_D}^T, \quad (28)$$

where $\det(M_{\nu_R})$ and $\text{adj}(M_{\nu_R})$ are the determinant and adjugate matrix of M_{ν_R} , respectively. Now, if we consider the more general form of a complex symmetric matrix of 3×3

$$M_{\nu_R} = \begin{pmatrix} g_{\nu_R} & a_{\nu_R} & e_{\nu_R} \\ a_{\nu_R} & b_{\nu_R} & c_{\nu_R} \\ e_{\nu_R} & c_{\nu_R} & d_{\nu_R} \end{pmatrix} \quad (29)$$

to represent the right-handed Majorana neutrinos mass matrix, we may write Eq. (28) in a more explicit form if we express $\det(M_{\nu_R})$ and $\text{adj}(M_{\nu_R})$ in terms of the cofactors of the elements of the matrix M_{ν_R} . Then,

$$\det(M_{\nu_R}) = g_{\nu_R} X_{11} - a_{\nu_R} X_{12} + e_{\nu_R} X_{13} \quad (30)$$

and

$$M_{\nu_L} = \frac{1}{\det(M_{\nu_R})} \begin{pmatrix} G_{\nu_L} & A_{\nu_L} & E_{\nu_L} \\ A_{\nu_L} & B_{\nu_L} & C_{\nu_L} \\ E_{\nu_L} & C_{\nu_L} & D_{\nu_L} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

where

$$\begin{aligned}
G_{\nu_L} = & X_{22} A_{\nu_D}^2, \\
A_{\nu_L} = & -X_{12} |A_{\nu_D}|^2 + X_{22} A_{\nu_D} B_{\nu_D} - X_{23} A_{\nu_D} C_{\nu_D}, \\
B_{\nu_L} = & X_{11} A_{\nu_D}^{*2} + X_{22} B_{\nu_D}^2 + X_{33} C_{\nu_D}^2 - 2X_{12} A_{\nu_D}^* B_{\nu_D} \\
& + 2X_{13} A_{\nu_D}^* C_{\nu_D} - 2X_{23} B_{\nu_D} C_{\nu_D}, \quad (32) \\
E_{\nu_L} = & X_{22} A_{\nu_D} C_{\nu_D} - X_{23} A_{\nu_D} D_{\nu_D}, \\
C_{\nu_L} = & X_{13} A_{\nu_D}^* D_{\nu_D} - X_{12} A_{\nu_D}^* C_{\nu_D} + X_{22} B_{\nu_D} C_{\nu_D} \\
& - X_{23} (B_{\nu_D} D_{\nu_D} + C_{\nu_D}^2) + X_{33} C_{\nu_D} D_{\nu_D}, \\
D_{\nu_L} = & X_{22} C_{\nu_D}^2 - 2X_{23} C_{\nu_D} D_{\nu_D} + X_{33} D_{\nu_D}^2.
\end{aligned}$$

In these expressions, the X_{nm} ($m, n = 1, 2, 3$) are the cofactors of the corresponding elements of the $\text{adj}(M_{\nu_R})$ matrix.¹

¹The cofactors of the elements of M_{ν_R} matrix, are defined as $X_{nm} = (-1)^{n+m} \det(H_{nm})$, where H_{nm} is obtained by deleting the n row and the m column of M_{ν_R} matrix.

From Eqs. (31) and (32), when conditions $X_{22} = X_{23} = 0$ are satisfied, the mass matrix of the left-handed Majorana neutrinos will have the same universal form with four texture zeroes as the Dirac mass matrices. These conditions are equivalent to

$$g_{\nu_R} d_{\nu_R} = e_{\nu_R}^2, \quad g_{\nu_R} c_{\nu_R} = a_{\nu_R} e_{\nu_R}. \quad (33)$$

Thus, we obtain the relation

$$\frac{a_{\nu_R}}{c_{\nu_R}} = \frac{e_{\nu_R}}{d_{\nu_R}}. \quad (34)$$

For nonvanishing $\det(M_{\nu_R})$, these conditions (33) are satisfied, if

$$g_{\nu_R} = 0 \quad \text{and} \quad e_{\nu_R} = 0. \quad (35)$$

If we extend the meaning of a mass matrix with four texture zeroes, defined in (14), to include the symmetric mass matrix of the right-handed Majorana neutrinos, M_{ν_R} [24], which is non-Hermitian, we could say that the matrix with four zeroes texture is invariant under the action of the seesaw mechanism of type I [13,21,24]. It may also be noticed that, if we set $b_{\nu_R} = 0$ or/and $c_{\nu_R} = 0$, the resulting expression for M_{ν_L} still has four texture zeroes. Therefore, M_{ν_L} may also have four texture zeroes when M_{ν_R} has four, three, or two texture zeroes (the two last cases are called Fritzsch textures).

Let us further assume that the phases in the entries of the M_{ν_R} may be factorized out as

$$M_{\nu_R} = R \bar{M}_{\nu_R} R, \quad (36)$$

where

$$\bar{M}_{\nu_R} = \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_R} & 0 \\ a_{\nu_R} & |b_{\nu_R}| & |c_{\nu_R}| \\ 0 & |c_{\nu_R}| & d_{\nu_R} \end{pmatrix}, \quad (37)$$

and $R \equiv \text{diag}[e^{-i\phi_c}, e^{i\phi_c}, 1]$ with $\phi_c \equiv \arg\{c_{\nu_R}\}$. Then, the type-I seesaw mechanism takes the form

$$M_{\nu_L} = P_D^\dagger \bar{M}_{\nu_D} P_D R^\dagger \bar{M}_{\nu_R}^{-1} R P_D \bar{M}_{\nu_D} P_D^\dagger, \quad (38)$$

and the mass matrix of the left-handed neutrinos has the following form with four texture zeroes²:

$$M_{\nu_L} = \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_L} & 0 \\ a_{\nu_L} & b_{\nu_L} & c_{\nu_L} \\ 0 & c_{\nu_L} & d_{\nu_L} \end{pmatrix}, \quad (39)$$

where

²The seesaw invariance of the four zeroes mass matrix of the Majorana neutrino is also derived in [24]. However, these authors ignored the phases in the elements of mass matrices in their discussion.

$$\begin{aligned} a_{\nu_L} &= \frac{|a_{\nu_D}|^2}{a_{\nu_R}}, \\ b_{\nu_L} &= \frac{c_{\nu_D}^2}{d_{\nu_R}} + \frac{|c_{\nu_R}|^2 - |b_{\nu_R}| d_{\nu_R}}{d_{\nu_R}} \frac{|a_{\nu_D}|^2}{a_{\nu_R}^2} e^{i2(\phi_c - \phi_{\nu_D})} \\ &\quad + 2 \frac{|a_{\nu_D}|}{|a_{\nu_R}|} \left(b_{\nu_D} e^{-i\phi_{\nu_D}} - \frac{c_{\nu_D} |c_{\nu_R}|}{d_{\nu_R}} e^{i(\phi_c - \phi_{\nu_D})} \right), \\ c_{\nu_L} &= \frac{c_{\nu_D} d_{\nu_D}}{d_{\nu_R}} + \frac{|a_{\nu_D}|}{|a_{\nu_R}|} \left(c_{\nu_D} e^{-i\phi_{\nu_D}} - \frac{|c_{\nu_R}| d_{\nu_D}}{d_{\nu_R}} e^{i(\phi_c - \phi_{\nu_D})} \right), \\ d_{\nu_L} &= \frac{d_{\nu_D}^2}{d_{\nu_R}}. \end{aligned} \quad (40)$$

The elements a_{ν_L} and d_{ν_L} are real, while b_{ν_L} and c_{ν_L} are complex. Notice that the phase factors appearing in Eqs. (38) and (40) are fully determined by the seesaw mechanism and our choice of a generalized Fritzsch ansatz with four texture zeroes for the mass matrices of all Dirac fermions and the complex symmetric, but non-Hermitian, mass matrix of the right-handed Majorana neutrinos.

Now, to diagonalize the left-handed Majorana neutrino mass matrix M_{ν_L} by means of a unitary matrix, we need to construct the Hermitian matrices $M_{\nu_L} M_{\nu_L}^\dagger$ and $M_{\nu_L}^\dagger M_{\nu_L}$, which can be diagonalized with unitary matrices through the following transformations:

$$\begin{aligned} U_R^\dagger M_{\nu_L}^\dagger M_{\nu_L} U_R &= \text{diag}[|m_{\nu_1}^s|^2, |m_{\nu_2}^s|^2, |m_{\nu_3}^s|^2], \\ U_L^\dagger M_{\nu_L} M_{\nu_L}^\dagger U_L &= \text{diag}[|m_{\nu_1}^s|^2, |m_{\nu_2}^s|^2, |m_{\nu_3}^s|^2], \end{aligned} \quad (41)$$

where the $m_{\nu_j}^s$ ($j = 1, 2, 3$) are the singular values of the M_{ν_L} matrix. Thus, with the help of the symmetry of the matrix (39) and the transformations (41), the left-handed Majorana neutrino mass matrix, M_{ν_L} , is diagonalized by a unitary matrix

$$U_\nu^\dagger M_{\nu_L} U_\nu^* = \text{diag}[|m_{\nu_1}^s|, |m_{\nu_2}^s|, |m_{\nu_3}^s|], \quad (42)$$

where $U_\nu \equiv U_L \mathcal{K}$ and $\mathcal{K} \equiv \text{diag}[e^{i\eta_1/2}, e^{i\eta_2/2}, e^{i\eta_3/2}]$ is the diagonal matrix of the Majorana phases. From the previous analysis, the matrix M_{ν_L} has two nonignorable phases which are

$$\phi_1 \equiv \arg\{b_{\nu_L}\} \quad \text{and} \quad \phi_2 \equiv \arg\{c_{\nu_L}\}. \quad (43)$$

However, to describe the phenomenology of neutrino masses and mixing, only one phase in M_{ν_L} is required. Therefore, without loss of generality, we may chose $\phi_1 = 2\phi_2 = 2\varphi$ and the following relationship is fulfilled³:

$$\tan\phi_1 = \frac{2\Im mc_{\nu_L} \Re ec_{\nu_L}}{(\Re ec_{\nu_L})^2 - (\Im mc_{\nu_L})^2}. \quad (44)$$

³The general case, when $\phi_1 \neq 2\phi_2$ is slightly more complicated. This case will be treated in detail in a later paper.

BARRANCO, GONZÁLEZ CANALES, AND MONDRAGÓN

In this case, the analysis simplifies since the phases in M_{ν_L} may be factorized out as

$$M_{\nu_L} = Q\bar{M}_{\nu_L}Q, \quad (45)$$

where Q is a diagonal matrix of phases $Q \equiv \text{diag}[e^{-i\varphi}, e^{i\varphi}, 1]$ and \bar{M}_{ν_L} is a real symmetric matrix. Then, the matrix M_{ν_L} , can be diagonalized by a unitary matrix through the transformation

$$U_\nu^\dagger M_{\nu_L} U_\nu^* = \text{diag}[m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, m_{\nu_3}], \quad (46)$$

where m_{ν_j} ($j = 1, 2, 3$) are the eigenvalues of the matrix M_{ν_L} , and the unitary matrix is $U_\nu \equiv Q\mathbf{O}_\nu\mathcal{K}$ where \mathbf{O}_ν is the orthogonal real matrix (25), that diagonalizes the real symmetric matrix \bar{M}_{ν_L} .

It is also important to mention that when the Hermitian matrix with four texture zeroes defined in Eq. (14) is taken as a universal mass matrix for all Dirac fermions and right-handed Majorana neutrinos [13], the phases of all entries in the right-handed Majorana neutrino mass matrix are fixed at the numerical value of $\phi_{\nu_R} = n\pi$. Thus, the right-handed Majorana neutrino mass matrix is real and symmetric and has the form with four texture zeroes shown in (14). In the more general case in which the Dirac fermions and right-handed neutrino mass matrices are represented by Hermitian matrices, that can be written in polar form as $A = P^\dagger \bar{A}P$, where P is a diagonal matrix of phases and \bar{A} is a real symmetric matrix; the symmetry of the left-handed Majorana neutrino mass matrix also fixes all phases in the mass matrix of the right-handed neutrinos at the numerical value $\phi_{\nu_R} = n\pi$. Hence, the only undetermined phases in the mass matrix of the left-handed Majorana neutrinos M_{ν_L} are the phases ϕ_{ν_D} , coming from the mass matrix of the Dirac neutrinos.

IV. MIXING MATRICES

The quark and lepton flavor mixing matrices, U_{PMNS} and V_{CKM} , arise from the mismatch between diagonalization of the mass matrices of u and d type quarks [10] and the diagonalization of the mass matrices of charged leptons and left-handed neutrinos [25], respectively,

$$U_{PMNS} = U_l^\dagger U_\nu, \quad V_{CKM} = U_u U_d^\dagger. \quad (47)$$

Therefore, in order to obtain the unitary matrices appearing in (47) and get predictions for the flavor mixing angles and CP violating phases, we should specify the mass matrices. In the quark sector, the unitarity of V_{CKM} leads to the relations $\sum_i V_{ij}V_{ik}^* = \delta_{jk}$ and $\sum_j V_{ij}V_{kj}^* = \delta_{ik}$. The vanishing combinations can be represented as triangles in a complex plane. The area of all triangles is equal to half of the Jarlskog invariant, J_q [26], which is a rephasing invariant measure of CP violation. The term unitarity triangle is usually reserved for the triangle obtained from

PHYSICAL REVIEW D **82**, 073010 (2010)

the relation $V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0$. In this case the Jarlskog invariant is

$$J_q = \Im m[V_{us}V_{cs}^*V_{ub}^*V_{cb}], \quad (48)$$

and the inner angles of the unitarity triangle are

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \arg\left(-\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{ud}V_{ub}^*}\right), \\ \beta &\equiv \arg\left(-\frac{V_{cd}V_{cb}^*}{V_{td}V_{tb}^*}\right), \\ \gamma &\equiv \arg\left(-\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}\right). \end{aligned} \quad (49)$$

For the lepton sector, when the left-handed neutrinos are Majorana particles, the mixing matrix is defined as [27] $U_{PMNS} = U_l^\dagger U_L K$ where $K \equiv \text{diag}[1, e^{i\beta_1}, e^{i\beta_2}]$ is the diagonal matrix of the Majorana CP violating phases. Also in the case of three neutrino mixing there are three CP violation rephasing invariants [25], associated with the three CP violating phases present in the U_{PMNS} matrix. The rephasing invariant related to the Dirac phase, analogous to the Jarlskog invariant in the quark sector, is given by

$$J_l \equiv \Im m[U_{e1}^*U_{\mu 3}^*U_{e3}U_{\mu 1}]. \quad (50)$$

The rephasing invariant J_l controls the magnitude of CP violation effects in neutrino oscillations and is a directly observable quantity. The other two rephasing invariants associated with the two Majorana phases in the U_{PMNS} matrix can be chosen as

$$S_1 \equiv \Im m[U_{e1}U_{e3}^*], \quad S_2 \equiv \Im m[U_{e2}U_{e3}^*]. \quad (51)$$

These rephasing invariants are not uniquely defined, but the ones shown in Eqs. (50) and (51) are relevant for the definition of the effective Majorana neutrino mass, m_{ee} , in the neutrinoless double beta decay.

A. Mixing matrices as functions of the fermion masses

The unitary matrices $U_{u,d}$ occurring in the definition of V_{CKM} , Eq. (47), may be written in polar form as $U_{u,d} = \mathbf{O}_{u,d}^T P_{u,d}$. In this expression, $P_{u,d}$ is the diagonal matrix of phases appearing in the four texture zeroes mass matrix (15). Then, from (47), the quark mixing matrix takes the form

$$V_{CKM}^{\text{th}} = \mathbf{O}_u^T P^{(u-d)} \mathbf{O}_d, \quad (52)$$

where $P^{(u-d)} = \text{diag}[1, e^{i\phi}, e^{i\phi}]$ with $\phi = \phi_u - \phi_d$, and $\mathbf{O}_{u,d}$ are the real orthogonal matrices (25) that diagonalize the real symmetric mass matrices \bar{M}_i . A similar analysis shows that U_{PMNS} may also be written as $U_{PMNS} = U_l^\dagger U_\nu$, with $U_{\nu,l} = P_{\nu,l} \mathbf{O}_{\nu,l}$. This matrix takes the form

$$U_{PMNS}^{\text{th}} = \mathbf{O}_l^T P^{(\nu-l)} \mathbf{O}_\nu K, \quad (53)$$

where $P^{(\nu-l)} = \text{diag}[1, e^{i\Phi_1}, e^{i\Phi_2}]$ is the diagonal matrix of the Dirac phases, with $\Phi_1 = 2\varphi - \phi_l$ and $\Phi_2 = \varphi - \phi_l$. The real orthogonal matrices $\mathbf{O}_{\nu,l}$ are defined in Eq. (25). Substitution of the expressions (18) and (26) in the unitary matrices (52) and (53) allows us to express the mixing matrices V_{CKM}^{th} and U_{PMNS}^{th} as explicit functions of the masses of quarks and leptons. For the elements of the V_{CKM}^{th} mixing matrix, we obtained the same theoretical

expressions given by Mondragón and Rodríguez-Jauregui [20]:

$$V_{CKM}^{\text{th}} = \begin{pmatrix} V_{ud}^{\text{th}} & V_{us}^{\text{th}} & V_{ub}^{\text{th}} \\ V_{cd}^{\text{th}} & V_{cs}^{\text{th}} & V_{cb}^{\text{th}} \\ V_{td}^{\text{th}} & V_{ts}^{\text{th}} & V_{tb}^{\text{th}} \end{pmatrix}, \quad (54)$$

where

$$\begin{aligned} V_{ud}^{\text{th}} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_s f_{u1} f_{d1}}{\mathcal{D}_{u1} \mathcal{D}_{d1}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{\mathcal{D}_{u1} \mathcal{D}_{d1}} (\sqrt{(1-\delta_u)(1-\delta_d)} f_{u1} f_{d1} + \sqrt{\delta_u \delta_d} f_{u2} f_{d2})} e^{i\phi}, \\ V_{us}^{\text{th}} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_d f_{u1} f_{d2}}{\mathcal{D}_{u1} \mathcal{D}_{d2}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}{\mathcal{D}_{u1} \mathcal{D}_{d2}} (\sqrt{(1-\delta_u)(1-\delta_d)} f_{u1} f_{d2} + \sqrt{\delta_u \delta_d} f_{u2} f_{d1})} e^{i\phi}, \\ V_{ub}^{\text{th}} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_d \tilde{m}_s \delta_d f_{u1}}{\mathcal{D}_{u1} \mathcal{D}_{d3}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\mathcal{D}_{u1} \mathcal{D}_{d3}} (\sqrt{(1-\delta_u)(1-\delta_d)} \delta_d f_{u1} - \sqrt{\delta_u} f_{u2} f_{d1} f_{d2})} e^{i\phi}, \\ V_{cd}^{\text{th}} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s f_{u2} f_{d1}}{\mathcal{D}_{u2} \mathcal{D}_{d1}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_d}{\mathcal{D}_{u2} \mathcal{D}_{d1}} (\sqrt{(1-\delta_u)(1-\delta_d)} f_{u2} f_{d1} + \sqrt{\delta_u \delta_d} f_{u1} f_{d2})} e^{i\phi}, \\ V_{cs}^{\text{th}} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d f_{u2} f_{d2}}{\mathcal{D}_{u2} \mathcal{D}_{d2}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}{\mathcal{D}_{u2} \mathcal{D}_{d2}} (\sqrt{(1-\delta_u)(1-\delta_d)} f_{u2} f_{d2} + \sqrt{\delta_u \delta_d} f_{u1} f_{d1})} e^{i\phi}, \\ V_{cb}^{\text{th}} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d \tilde{m}_s \delta_d f_{u2}}{\mathcal{D}_{u2} \mathcal{D}_{d3}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_c}{\mathcal{D}_{u2} \mathcal{D}_{d3}} (\sqrt{(1-\delta_u)(1-\delta_d)} \delta_d f_{u2} - \sqrt{\delta_u} f_{u1} f_{d1} f_{d2})} e^{i\phi}, \\ V_{td}^{\text{th}} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_c \tilde{m}_s \delta_u f_{d1}}{\mathcal{D}_{u3} \mathcal{D}_{d1}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\mathcal{D}_{u3} \mathcal{D}_{d1}} (\sqrt{\delta_u (1-\delta_u)(1-\delta_d)} f_{d1} - \sqrt{\delta_d} f_{u1} f_{u2} f_{d1})} e^{i\phi}, \\ V_{ts}^{\text{th}} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_c \tilde{m}_d \delta_u f_{d2}}{\mathcal{D}_{u3} \mathcal{D}_{d2}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_s}{\mathcal{D}_{u3} \mathcal{D}_{d2}} (\sqrt{\delta_u (1-\delta_u)(1-\delta_d)} f_{d2} - \sqrt{\delta_d} f_{u1} f_{u2} f_{d1})} e^{i\phi}, \\ V_{tb}^{\text{th}} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_c \tilde{m}_d \tilde{m}_s \delta_u \delta_d}{\mathcal{D}_{u3} \mathcal{D}_{d3}}} + \left(\sqrt{\frac{f_{u1} f_{u2} f_{d1} f_{d2}}{\mathcal{D}_{u3} \mathcal{D}_{d3}}} + \sqrt{\frac{\delta_u \delta_d (1-\delta_u)(1-\delta_d)}{\mathcal{D}_{u3} \mathcal{D}_{d3}}} \right) e^{i\phi}. \end{aligned} \quad (55)$$

Here, the m 's, f 's, and \mathcal{D} 's are defined in (18) and (26), respectively. These take the form

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{u(d)} &= \frac{m_{u(d)}}{m_{l(b)}}, \\ \tilde{m}_{c(s)} &= \frac{m_{c(s)}}{m_{l(b)}}, \\ f_{u(d)1} &= (1 - \tilde{m}_{u(d)} - \delta_{u(d)}), \\ f_{u(d)2} &= (1 + \tilde{m}_{c(s)} - \delta_{u(d)}), \\ \mathcal{D}_{u(d)1} &= (1 - \delta_{u(d)})(\tilde{m}_{u(d)} + \tilde{m}_{c(s)})(1 - \tilde{m}_{u(d)}), \\ \mathcal{D}_{u(d)2} &= (1 - \delta_{u(d)})(\tilde{m}_{u(d)} + \tilde{m}_{c(s)})(1 + \tilde{m}_{u(d)}), \\ \mathcal{D}_{u(d)3} &= (1 - \delta_{u(d)})(1 - \tilde{m}_{u(d)})(1 + \tilde{m}_{c(s)}). \end{aligned} \quad (56)$$

Now, with the help of Eqs. (25) and (53), we obtain the theoretical expression of the elements of the lepton mixing matrix, U_{PMNS}^{th} . This expression has the following form:

$$U_{PMNS}^{\text{th}} = \begin{pmatrix} U_{e1}^{\text{th}} & U_{e2}^{\text{th}} e^{i\beta_1} & U_{e3}^{\text{th}} e^{i\beta_2} \\ U_{\mu 1}^{\text{th}} & U_{\mu 2}^{\text{th}} e^{i\beta_1} & U_{\mu 3}^{\text{th}} e^{i\beta_2} \\ U_{\tau 1}^{\text{th}} & U_{\tau 2}^{\text{th}} e^{i\beta_1} & U_{\tau 3}^{\text{th}} e^{i\beta_2} \end{pmatrix} \quad (57)$$

where

$$\begin{aligned}
U_{e1}^{\text{th}} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu_2} f_{11} f_{\nu 1}}{\mathcal{D}_{11} \mathcal{D}_{\nu 1}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu_1}}{\mathcal{D}_{11} \mathcal{D}_{\nu 1}} (\sqrt{(1-\delta_l)(1-\delta_\nu) f_{11} f_{\nu 1}} e^{i\Phi_1} + \sqrt{\delta_l \delta_\nu f_{12} f_{\nu 2}} e^{i\Phi_2})}, \\
U_{e2}^{\text{th}} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu_1} f_{11} f_{\nu 2}}{\mathcal{D}_{11} \mathcal{D}_{\nu 2}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu_2}}{\mathcal{D}_{11} \mathcal{D}_{\nu 2}} (\sqrt{(1-\delta_l)(1-\delta_\nu) f_{11} f_{\nu 2}} e^{i\Phi_1} + \sqrt{\delta_l \delta_\nu f_{12} f_{\nu 1}} e^{i\Phi_2})}, \\
U_{e3}^{\text{th}} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_{\nu_2} \delta_\nu f_{11}}{\mathcal{D}_{11} \mathcal{D}_{\nu 3}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\mathcal{D}_{11} \mathcal{D}_{\nu 3}} (\sqrt{\delta_\nu (1-\delta_l)(1-\delta_\nu) f_{11}} e^{i\Phi_1} - \sqrt{\delta_e f_{12} f_{\nu 1} f_{\nu 2}} e^{i\Phi_2})}, \\
U_{\mu 1}^{\text{th}} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu_2} f_{12} f_{\nu 1}}{\mathcal{D}_{12} \mathcal{D}_{\nu 1}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu_1}}{\mathcal{D}_{12} \mathcal{D}_{\nu 1}} (\sqrt{(1-\delta_l)(1-\delta_\nu) f_{12} f_{\nu 1}} e^{i\Phi_1} + \sqrt{\delta_l \delta_\nu f_{11} f_{\nu 2}} e^{i\Phi_2})}, \\
U_{\mu 2}^{\text{th}} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu_1} f_{12} f_{\nu 2}}{\mathcal{D}_{12} \mathcal{D}_{\nu 2}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu_2}}{\mathcal{D}_{12} \mathcal{D}_{\nu 2}} (\sqrt{(1-\delta_l)(1-\delta_\nu) f_{12} f_{\nu 2}} e^{i\Phi_1} + \sqrt{\delta_l \delta_\nu f_{11} f_{\nu 1}} e^{i\Phi_2})}, \\
U_{\mu 3}^{\text{th}} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_{\nu_2} \delta_\nu f_{12}}{\mathcal{D}_{12} \mathcal{D}_{\nu 3}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu}{\mathcal{D}_{12} \mathcal{D}_{\nu 3}} (\sqrt{\delta_\nu (1-\delta_l)(1-\delta_\nu) f_{12}} e^{i\Phi_1} - \sqrt{\delta_l f_{11} f_{\nu 1} f_{\nu 2}} e^{i\Phi_2})}, \\
U_{\tau 1}^{\text{th}} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu_2} \delta_l f_{\nu 1}}{\mathcal{D}_{13} \mathcal{D}_{\nu 1}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\mathcal{D}_{13} \mathcal{D}_{\nu 1}} (\sqrt{\delta_l (1-\delta_l)(1-\delta_\nu) f_{\nu 1}} e^{i\Phi_1} - \sqrt{\delta_\nu f_{11} f_{12} f_{\nu 2}} e^{i\Phi_2})}, \\
U_{\tau 2}^{\text{th}} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu_1} \delta_l f_{\nu 2}}{\mathcal{D}_{13} \mathcal{D}_{\nu 2}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_2}}{\mathcal{D}_{13} \mathcal{D}_{\nu 2}} (\sqrt{\delta_l (1-\delta_l)(1-\delta_\nu) f_{\nu 2}} e^{i\Phi_1} - \sqrt{\delta_\nu f_{11} f_{12} f_{\nu 1}} e^{i\Phi_2})}, \\
U_{\tau 3}^{\text{th}} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_{\nu_2} \delta_l \delta_\nu}{\mathcal{D}_{13} \mathcal{D}_{\nu 3}}} + \sqrt{\frac{\delta_l \delta_\nu (1-\delta_l)(1-\delta_\nu)}{\mathcal{D}_{13} \mathcal{D}_{\nu 3}} e^{i\Phi_1}} + \sqrt{\frac{f_{11} f_{12} f_{\nu 1} f_{\nu 2}}{\mathcal{D}_{13} \mathcal{D}_{\nu 3}} e^{i\Phi_2}}.
\end{aligned} \tag{58}$$

In these expressions the \tilde{m} 's, f 's, and \mathcal{D} 's are defined in (18) and (26), respectively. These take the form

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_{\nu_1(e)} &= \frac{m_{\nu_1(e)}}{m_{\nu_3(\tau)}}, \\
\tilde{m}_{\nu_2(\mu)} &= \frac{m_{\nu_2(\mu)}}{m_{\nu_3(\tau)}}, \\
f_{\nu(l)1} &= (1 - \tilde{m}_{\nu_1(e)} - \delta_{\nu(l)}), \\
f_{\nu(l)2} &= (1 + \tilde{m}_{\nu_2(\mu)} - \delta_{\nu(l)}), \\
\mathcal{D}_{\nu(l)1} &= (1 - \delta_{\nu(l)})(\tilde{m}_{\nu_1(e)} + \tilde{m}_{\nu_2(\mu)})(1 - \tilde{m}_{\nu_1(e)}), \\
\mathcal{D}_{\nu(l)2} &= (1 - \delta_{\nu(l)})(\tilde{m}_{\nu_1(e)} + \tilde{m}_{\nu_2(\mu)})(1 + \tilde{m}_{\nu_2(\mu)}), \\
\mathcal{D}_{\nu(l)3} &= (1 - \delta_{\nu(l)})(1 - \tilde{m}_{\nu_1(e)})(1 + \tilde{m}_{\nu_2(\mu)}).
\end{aligned} \tag{59}$$

B. The χ^2 fit for the quark mixing matrix

We made a χ^2 fit of the exact theoretical expressions for the moduli of the entries of the quark mixing matrix $|(V_{CKM}^{\text{th}})_{ij}|$ and the inner angles of the unitarity triangle α^{th} , β^{th} , and γ^{th} to the experimental values given by Amsler [10]. In this fit, we computed the moduli of the entries of the quark mixing matrix and the inner angles of the unitarity triangle from the theoretical expression (55) with the following numerical values of the quark mass ratios [10]:

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_u &= 2.5469 \times 10^{-5}, & \tilde{m}_c &= 3.9918 \times 10^{-3}, \\
\tilde{m}_d &= 1.5261 \times 10^{-3}, & \tilde{m}_s &= 3.2319 \times 10^{-2}.
\end{aligned} \tag{60}$$

The numerical values of the mass ratios were left fixed at the values given in Eq. (60) and the parameters δ_u and δ_d were left as free parameters to be varied. Hence, in the χ^2 fit we have 6 degrees of freedom, namely, the nine observable moduli of the entries in the V_{CKM} matrix less the three free parameters to be varied. Once the best values of the parameters δ_u , δ_d , and ϕ were determined, we computed the three inner angles of the unitarity triangle from Eq. (49) and the Jarlskog invariant from Eq. (48).

The resulting best values of the parameters δ_u and δ_d are

$$\delta_u = 3.829 \times 10^{-3}, \quad \delta_d = 4.08 \times 10^{-4} \tag{61}$$

and the Dirac CP violating phase is $\phi = 90^\circ$. The best values for the moduli of the entries of the CKM mixing matrix are given in the following expression:

$$|V_{CKM}^{\text{th}}| = \begin{pmatrix} 0.97421 & 0.22560 & 0.003369 \\ 0.22545 & 0.97335 & 0.041736 \\ 0.008754 & 0.04094 & 0.99912 \end{pmatrix} \tag{62}$$

and inner angles of the unitarity triangle

$$\alpha^{\text{th}} = 91.24^\circ, \quad \beta^{\text{th}} = 20.41^\circ, \quad \gamma^{\text{th}} = 68.33^\circ. \tag{63}$$

The Jarlskog invariant takes the value

$$J_q^{\text{th}} = 2.9 \times 10^{-5}. \quad (64)$$

All these results are in good agreement with the experimental values. The minimum value of χ^2 obtained in this fit is 4.6 and the resulting value of χ^2 for degree of freedom is $\frac{\chi^2_{\text{min}}}{\text{d.o.f.}} = 0.77$.

C. The χ^2 fit for the lepton mixing matrix

In the case of the lepton mixing matrix, we made a χ^2 fit of the theoretical expressions for the moduli of the entries of the lepton mixing matrix $|(U_{PMNS}^{\text{th}})_{ij}|$ given in Eq. (58) to the values extracted from experiment as given by Gonzalez-Garcia [5] and quoted in Eq. (3). The computation was made using the following values for the charged lepton masses [10]:

$$\begin{aligned} m_e &= 0.5109 \text{ MeV}, \\ m_\mu &= 105.685 \text{ MeV}, \\ m_\tau &= 1776.99 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (65)$$

We took for the masses of the left-handed Majorana neutrinos a normal hierarchy. This allows us to write the left-handed Majorana neutrino mass ratios in terms of the neutrino squared mass differences and the neutrino mass m_{ν_3} in the following form:

$$\tilde{m}_{\nu_1} = \sqrt{1 - \frac{(\Delta m_{32}^2 + \Delta m_{21}^2)}{m_{\nu_3}^2}}, \quad \tilde{m}_{\nu_2} = \sqrt{1 - \frac{\Delta m_{32}^2}{m_{\nu_3}^2}}. \quad (66)$$

The neutrino squared mass differences were obtained from the experimental data on neutrino oscillations given in Gonzalez-Garcia [5] and we left the mass m_{ν_3} as a free parameter of the χ^2 fit. Also, the parameters δ_e , δ_ν , Φ_1 , and Φ_2 were left as free parameters to be varied. Hence, in this χ^2 fit we have 4 degrees of freedom. From the best values obtained for m_{ν_3} and the experimental values of Δm_{32}^2 and Δm_{21}^2 , we obtained the following best values for the neutrino masses:

$$\begin{aligned} m_{\nu_1} &= 2.7 \times 10^{-3} \text{ eV}, \\ m_{\nu_2} &= 9.1 \times 10^{-3} \text{ eV}, \\ m_{\nu_3} &= 4.7 \times 10^{-2} \text{ eV}. \end{aligned} \quad (67)$$

The resulting best values of the parameters δ_e and δ_ν are

$$\delta_l = 0.06, \quad \delta_\nu = 0.522, \quad (68)$$

and the best values of the Dirac CP violating phases are $\Phi_1 = \pi$ and $\Phi_2 = 3\pi/2$. The best values for the moduli of the entries of the $PMNS$ mixing matrix are given in the following expression:

$$|U_{PMNS}^{\text{th}}| = \begin{pmatrix} 0.820421 & 0.568408 & 0.061817 \\ 0.385027 & 0.613436 & 0.689529 \\ 0.422689 & 0.548277 & 0.721615 \end{pmatrix}. \quad (69)$$

The value of the rephasing invariant related to the Dirac phase is

$$J_l^{\text{th}} = 8.8 \times 10^{-3}. \quad (70)$$

In the absence of experimental information about the Majorana phases β_1 and β_2 , the two rephasing invariants S_1 and S_2 , Eq. (51), associated with the two Majorana phases in the U_{PMNS} matrix, could not be determined from experimental values. Therefore, in order to make a numerical estimate of Majorana phases, we maximized the rephasing invariants S_1 and S_2 , thus obtaining a numerical value for the Majorana phases β_1 and β_2 . Then, the maximum values of the rephasing invariants, Eq. (51), are

$$S_1^{\text{max}} = -4.9 \times 10^{-2}, \quad S_2^{\text{max}} = 3.4 \times 10^{-2}, \quad (71)$$

with $\beta_1 = -1.4^\circ$ and $\beta_2 = 77^\circ$. In this numerical analysis, the minimum value of the χ^2 , corresponding to the best fit, is $\chi^2 = 0.288$ and the resulting value of χ^2 for degree of freedom is $\frac{\chi^2_{\text{min}}}{\text{d.o.f.}} = 0.075$. All numerical results of the fit are in very good agreement with the values of the moduli of the entries in the matrix U_{PMNS} as given in Gonzalez-Garcia [5].

V. THE MIXING ANGLES

In the standard Particle Data Group parametrization, the entries in the quark and lepton mixing matrices are parametrized in terms of the mixing angles and phases. Thus, the mixing angles are related to the observable moduli of quark (lepton) $V_{CKM}(U_{PMNS})$ through the relations:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{12}^{q(l)} &= \frac{|V_{us}(U_{e2})|^2}{1 - |V_{ub}(U_{e3})|^2}, \\ \sin^2 \theta_{23}^{q(l)} &= \frac{|V_{cb}(U_{\mu 3})|^2}{1 - |V_{ub}(U_{e3})|^2}, \\ \sin^2 \theta_{13}^{q(l)} &= |V_{ub}(U_{e3})|^2. \end{aligned} \quad (72)$$

Then, theoretical expression for the quark mixing angles as functions of the quark mass ratios are readily obtained when the theoretical expressions for the moduli of the entries in the CKM mixing matrix, given in Eqs. (55) and (26), are substituted for $|V_{ij}|$ in the right-hand side of Eqs. (72). In this way, and keeping only the leading order terms, we get

$$\sin^2 \theta_{12}^{q(l)} \approx \frac{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} - 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}} \cos \phi}{(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c})(1 + \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s})}, \quad (73)$$

BARRANCO, GONZÁLEZ CANALES, AND MONDRAGÓN

$$\sin^2 \theta_{23}^{q^{\text{th}}} \approx \frac{(\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d})^2}{(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c})}, \quad (74)$$

$$\sin^2 \theta_{13}^{q^{\text{th}}} \approx \frac{\frac{\tilde{m}_s}{\tilde{m}_c} (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d})^2}{(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c})}. \quad (75)$$

Now, the numerical values of the quark mixing angles may be computed from Eq. (55) and the numerical values of the parameters δ_u and δ_d , Eq. (61), and the CP violating phase $\phi = 90^\circ$ obtained from the χ^2 fit of $|V_{CKM}^{\text{th}}|$ to the experimentally determined values $|V_{CKM}^{\text{exp}}|$. In this way we obtain

$$\theta_{12}^{q^{\text{th}}} = 13^\circ, \quad \theta_{23}^{q^{\text{th}}} = 2.38^\circ, \quad \theta_{13}^{q^{\text{th}}} = 0.19^\circ, \quad (76)$$

in very good agreement with the latest analysis of the experimental data [28], see (9). The numerical values of the leptonic mixing angles are computed in a similar fashion. The theoretical expressions for the lepton mixing angles as function of the charged lepton and neutrino mass ratios are obtained from Eqs. (72) when the theoretical expressions for the moduli of the entries in the $PMNS$ mixing matrix, given in Eqs. (58) and (26), are substituted for $|U_{ij}|$ in the right-hand side of Eqs. (72). If we keep only the leading-orders terms, we obtain

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{12}^{l^{\text{th}}} \approx & \frac{1 + \tilde{m}_{\nu_2} - \delta_\nu}{(1 + \tilde{m}_{\nu_2})(1 - \delta_\nu)(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}})(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu})} \left\{ \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu) + 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}} (1 - \delta_\nu) \cos\Phi_1 \right\}, \quad (77) \end{aligned}$$

$$\sin^2 \theta_{23}^{l^{\text{th}}} \approx \frac{\delta_\nu + \delta_e f_{\nu 2} - \sqrt{\delta_\nu \delta_e} f_{\nu 2} \cos(\Phi_1 - \Phi_2)}{(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu})(1 + \tilde{m}_{\nu_2})}, \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{13}^{l^{\text{th}}} \approx & \frac{\delta_\nu}{(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu})(1 + \tilde{m}_{\nu_2})} \left\{ \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} + \frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_{\nu_2}}{(1 - \delta_\nu)} \right. \\ & \left. - 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_{\nu_2}}{(1 - \delta_\nu)}} \cos\Phi_1 \right\}. \quad (79) \end{aligned}$$

From Eqs. (59) we have that $f_{\nu 2} = 1 + \tilde{m}_{\nu_2} - \delta_\nu$. The expressions quoted above are written in terms of the ratios of the lepton masses. When the well-known values of the charged lepton masses, the values of the neutrino masses, Eq. (67), the values of the delta parameters Eq. (68), and the values of the Dirac CP violating phases obtained from the χ^2 fit in the lepton sector are inserted in Eqs. (77)–(79),

PHYSICAL REVIEW D **82**, 073010 (2010)

we obtain the following numerical values for the mixing angles:

$$\theta_{12}^{\text{th}} = 34.7^\circ, \quad \theta_{23}^{\text{th}} = 43.6^\circ, \quad \theta_{13}^{\text{th}} = 3.5^\circ, \quad (80)$$

which are in very good agreement with the latest experimental data [5,8].

VI. QUARK-LEPTON COMPLEMENTARITY

The relations between mixing angles and the moduli of the entries of the mixing matrices given in Eqs. (72) allow us to write the following identities:

$$\tan(\theta_{12}^q + \theta_{12}^l) = 1 + \Delta_{12}, \quad (81)$$

where

$$\Delta_{12} = \frac{|V_{us}|(|U_{e1}| + |U_{e2}|) - |V_{ud}|(|U_{e1}| - |U_{e2}|)}{|U_{e1}||V_{ud}| - |U_{e2}||V_{us}|}, \quad (82)$$

and

$$\tan(\theta_{23}^q + \theta_{23}^l) = 1 + \Delta_{23}, \quad (83)$$

where

$$\Delta_{23} = \frac{|V_{cb}|(|U_{\tau 3}| + |U_{\mu 3}|) - |V_{tb}|(|U_{\tau 3}| - |U_{\mu 3}|)}{|U_{\tau 3}||V_{tb}| - |U_{\mu 3}||V_{cb}|}, \quad (84)$$

and

$$\tan(\theta_{13}^q + \theta_{13}^l) = \frac{|V_{ub}|\sqrt{1 - |U_{e3}|^2} + |U_{e3}|\sqrt{1 - |V_{ub}|^2}}{\sqrt{1 - |V_{ub}|^2}\sqrt{1 - |U_{e3}|^2} - |U_{e3}||V_{ub}|}. \quad (85)$$

We notice that numerical values of Δ_{12} and Δ_{23} obtained from the experimentally determined $|V_{CKM}|$ and $|U_{PMNS}|$ are much smaller than 1,

$$\Delta_{12} \ll 1 \quad \text{and} \quad \Delta_{23} \ll 1,$$

for this reason, the identities (81)–(85) are sometimes called quark-lepton complementarity relations.

The substitution of expressions (55) and (58) for the moduli of the elements of the mixing matrices V_{CKM}^{th} and U_{PMNS}^{th} , allows us to express the small terms Δ_{12} and Δ_{23} as functions of the mass ratios of quarks and leptons. Then, Eqs. (81)–(85) take the following form:

$$\tan(\theta_{12}^{q^{\text{th}}} + \theta_{12}^{l^{\text{th}}}) = 1 + \Delta_{12}^{\text{th}} \left(\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}, \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}, \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}, \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \right), \quad (86)$$

where

$$\Delta_{12}^{\text{th}} \approx \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_d + \tilde{m}_u}{\tilde{m}_s + \tilde{m}_c}} \left[\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}} f_{\nu 2} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu_2}}{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu_1}}} (1 - \delta_\nu) \right) + \sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu_2})(1 - \delta_\nu)} \right] - \left[\sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu_2})} f_{\nu 1} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}} f_{\nu 2} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu_2}}{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu_1}}} (1 - \delta_\nu) \right) \right]}{\sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu_2})(1 - \delta_\nu)} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_d + \tilde{m}_u}{\tilde{m}_s + \tilde{m}_c}} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu_2}}{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu_1}}} (1 - \delta_\nu) \right)} \quad (87)$$

Here, rather than writing a lengthy but not very illuminating exact expression, we give an approximate expression for Δ_{12}^{th} , whose numerical value differs from the one obtained using the exact expression by 12%. In the derivation of Eq. (87) from (82) we used the following approximations:

$$\frac{|V_{us}^{\text{th}}|}{|V_{cb}^{\text{th}}|} \approx \sqrt{\frac{\tilde{m}_d + \tilde{m}_u}{\tilde{m}_s + \tilde{m}_c}} \approx 0.23152, \quad (88)$$

which differs from the exact value in less than 1%, and

$$\frac{|U_{e2}^{\text{th}}|}{|U_{e1}^{\text{th}}|} \approx \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}} \sqrt{\frac{1 + \tilde{m}_{\nu_2} - \delta_\nu}{1 + \tilde{m}_{\nu_1} - \delta_\nu}} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu_2}}{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu_1}}} (1 - \delta_\nu) \right\} \approx 0.688, \quad (89)$$

which differs from the exact value in less than 1%. The identity (86) that defines $\Delta_{12}^{\text{th}}(\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}, \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}, \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}, \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu})$ is frequently

written in terms of the angle $\varepsilon_{12}^{\text{th}}$ that measures the deviation of $(\theta_{12}^{q\text{th}} + \theta_{12}^{\text{lh}})$ from $\frac{\pi}{4}$. Then, Eq. (86) may also be written as

$$\tan(\theta_{12}^{q\text{th}} + \theta_{12}^{\text{lh}}) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon_{12}^{\text{th}}\right) = 1 + \Delta_{12}^{\text{th}}. \quad (90)$$

From this expression, we get

$$\varepsilon_{12}^{\text{th}} = \arctan\left\{\frac{\Delta_{12}^{\text{th}}}{2 + \Delta_{12}^{\text{th}}}\right\}, \quad |\varepsilon_{12}^{\text{th}}| < \frac{\pi}{2} \quad (91)$$

which gives $\varepsilon_{12}^{\text{th}}$ as function of the mass ratios of quarks and leptons. Similarly,

$$\tan(\theta_{23}^{q\text{th}} + \theta_{23}^{\text{lh}}) = 1 + \Delta_{23}^{\text{th}}\left(\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}, \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}, \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}, \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right), \quad (92)$$

where

$$\Delta_{23}^{\text{th}} \approx \frac{[(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu})(1 + \tilde{m}_{\nu_2}) - \delta_\nu - \delta_e f_{\nu 2}]^{1/2} + \sqrt{\delta_\nu + \delta_e f_{\nu 2}} \left(\sqrt{1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} - (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d})^2} + (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d}) \right)}{[(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu})(1 + \tilde{m}_{\nu_2}) - \delta_\nu - \delta_e f_{\nu 2}]^{1/2} \sqrt{1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} - (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d})^2} - (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d}) \sqrt{\delta_\nu + \delta_e f_{\nu 2}}} \quad (93)$$

Also,

$$\tan(\theta_{13}^{q\text{th}} + \theta_{13}^{\text{lh}}) \approx \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d}) \left[(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu})(1 + \tilde{m}_{\nu_2}) - \delta_\nu \left(\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_{\nu_2}}{(1 - \delta_\nu)}} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}} \right)^2 \right]^{1/2} + \sqrt{1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} - \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d})^2} \left[(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu})(1 + \tilde{m}_{\nu_2}) - \delta_\nu \left(\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_{\nu_2}}{(1 - \delta_\nu)}} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}} \right)^2 \right]^{1/2} - \sqrt{\delta_\nu} \left(\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_{\nu_2}}{(1 - \delta_\nu)}} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}} \right) \sqrt{1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} - \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d})^2}}{-\sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d}) \sqrt{\delta_\nu} \left(\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_{\nu_2}}{(1 - \delta_\nu)}} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}} \right)} \quad (94)$$

After substitution of the numerical values of the mass ratios of quarks and leptons in Eqs. (87)–(94), we obtain

$$\Delta_{12}^{\text{th}} = 0.1, \quad \Delta_{23}^{\text{th}} = 3.23 \times 10^{-2}, \quad (95)$$

$$\tan(\theta_{23}^{q\text{th}} + \theta_{23}^{\text{lh}}) = 6.53 \times 10^{-2}.$$

Hence,

$$\theta_{12}^{q\text{th}} + \theta_{12}^{\text{lh}} = 45^\circ + 2.7^\circ, \quad (96)$$

$$\theta_{23}^{q\text{th}} + \theta_{23}^{\text{lh}} = 45^\circ + 1^\circ, \quad (97)$$

$$\theta_{13}^{q\text{th}} + \theta_{13}^{\text{lh}} = 3.7^\circ. \quad (98)$$

Equations (86) and (87) are obtained from an exact analytical expression for $\tan(\theta_{12}^{q\text{th}} + \theta_{12}^{\text{lh}})$ as a function of the absolute values of the entries in the mixing matrices V_{CKM}^{th} and U_{PMNS}^{th} , Eqs. (81) and (82). In Eqs. (55) and (58), the elements of the mixing matrices V_{CKM}^{th} and U_{PMNS}^{th} are

BARRANCO, GONZÁLEZ CANALES, AND MONDRAGÓN

given as exact, explicit analytical functions of the quark and lepton mass ratios. Let us stress that these expressions are exact and valid for any possible values of the quark and lepton mass ratios. From (87), it becomes evident that the small numerical value of Δ_{12}^{th} is due to the partial cancellation of two large terms of almost the same magnitude but opposite sign appearing in the numerator of the expression in the right-hand side of Eq. (87), namely,

$$\sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \left[\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}} f_{\nu 2} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu_2}}{\tilde{m}_{\nu_1}}} (1 - \delta_\nu) \right) + \sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu_2})(1 - \delta_\nu)} \right] = 0.287, \quad (99)$$

and

$$\sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu_2})f_{\nu 1}} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}} f_{\nu 2} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu_2}}{\tilde{m}_{\nu_1}}} (1 - \delta_\nu) \right) = 0.22. \quad (100)$$

The approximate numerical equality of these two expressions has its origin in the combined effect of the strong hierarchy of charged leptons and u - and d -type quarks which yields small and very small mass ratios, and the seesaw mechanism type I which gives very small neutrino masses but relatively large neutrino mass ratios.

We may conclude that the so-called quark-lepton complementarity as expressed in (86) and (87) is more than a numerical coincidence—it is the result of the combined effect of two factors:

- (1) The strong mass hierarchy of the Dirac fermions which produces small and very small mass ratios of

PHYSICAL REVIEW D **82**, 073010 (2010)

u - and d -type quarks and charged leptons. The quark mass hierarchy is then reflected in a similar hierarchy of small and very small quark mixing angles.

- (2) The normal seesaw mechanism type I which gives very small masses to the left-handed Majorana neutrinos with relatively large values of the neutrino mass ratio m_{ν_1}/m_{ν_2} and allows for large θ_{12}^l and θ_{23}^l mixing angles [see Eqs. (77)–(79)].

The two factors just mentioned contribute to the numerator of Δ_{12}^{th} with two terms of almost equal magnitude but opposite sign. Hence, the small numerical value of Δ_{12}^{th} occurring by partial cancellation of these two terms.

VII. THE EFFECTIVE MAJORANA MASSES

The square of the magnitudes of the effective Majorana neutrino masses, Eq. (13), are

$$|m_{ll}|^2 = \sum_{j=1}^3 m_{\nu_j}^2 |U_{lj}|^4 + 2 \sum_{j<k}^3 m_{\nu_j} m_{\nu_k} \times |U_{lj}|^2 |U_{lk}|^2 \cos 2(w_{lj} - w_{lk}), \quad (101)$$

where $w_{lj} = \arg\{U_{lj}\}$; this term includes phases of both types, Dirac and Majorana.

The theoretical expression for the squared magnitude of the effective Majorana neutrino mass of electron neutrino, written in terms of the ratios of the lepton masses, is

$$\begin{aligned} |m_{ee}|^2 \approx & \frac{1}{(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu})^2 (1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}})^2} \left\{ m_{\nu_1}^2 \left(1 - 4 \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}} (1 - \delta_\nu) \right) + \frac{m_{\nu_2}^2 f_{\nu 2}^2}{(1 + \tilde{m}_{\nu_2})^2 (1 - \delta_\nu)^2} \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} \left(\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} + 4 \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}} (1 - \delta_\nu) \right) \right. \\ & + 6 \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu) + 2 \frac{m_{\nu_1} m_{\nu_2} \delta_\nu}{(1 + \tilde{m}_{\nu_2})} \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} \right) \left(\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_{\nu_2}}{(1 - \delta_\nu)}} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}} \right)^2 \times \cos 2(w_{e1} - w_{e3}) + 2 \frac{m_{\nu_1} m_{\nu_2} f_{\nu 2}}{(1 + \tilde{m}_{\nu_2})(1 - \delta_\nu)} \\ & \times \left(\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} + 2 \left(1 - \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} \right) \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu)} \right) \cos 2(w_{e1} - w_{e2}) + 2 \frac{m_{\nu_2} m_{\nu_3} f_{\nu 2} \delta_\nu}{(1 + \tilde{m}_{\nu_2})^2 (1 - \delta_\nu)^2} \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} \right) \left(2 \tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_{\nu_2} \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}} (1 - \delta_\nu) \right) \cos 2(w_{e2} - w_{e3}) \right\} \quad (102) \end{aligned}$$

where $w_{e2} \approx \beta_1$ and

$$w_{e1} = \arctan \left[- \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \delta_e \delta_\nu f_{\nu 2}}}{\sqrt{(1 - \delta_\nu) + \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu)}}} \right], \quad (103)$$

$$\begin{aligned} w_{e3} \approx & \arctan \left\{ \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \delta_e f_{\nu 2} (1 - \delta_\nu)}}{-\sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \delta_e f_{\nu 2} (1 - \delta_\nu)} \tan \beta_2 +} \right. \\ & \left. \times \frac{+\sqrt{\delta_\nu} (\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} \tilde{m}_{\nu_2}} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu)}) \tan \beta_2}{+\sqrt{\delta_\nu} (\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} \tilde{m}_{\nu_2}} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu)})} \right\}. \quad (104) \end{aligned}$$

In a similar way, the theoretical expression for the squared magnitude of the effective Majorana neutrino mass of the muon neutrino is

$$\begin{aligned}
|\langle m_{\mu\mu} \rangle|^2 \approx & \frac{1}{(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu})^2 (1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}})^2 (1 + \tilde{m}_{\nu_2})} \left\{ \frac{m_{\nu_3}^2}{(1 + \tilde{m}_{\nu_2})} \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}\right)^2 (\delta_\nu + 2\delta_e f_{\nu 2}) + \frac{m_{\nu_2}^2}{(1 + \tilde{m}_{\nu_2})(1 - \delta_\nu)} \left(1 - \delta_\nu \right. \right. \\
& - 4\sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} (1 - \delta_\nu)} + 6\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} \left. \right) + 2m_{\nu_1} m_{\nu_2} f_{\nu 2} \left(\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} (1 - \delta_\nu) + 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu)} \left(1 - \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}\right) \right) \\
& \times \cos 2(w_{\mu 1} - w_{\mu 2}) + 2m_{\nu_1} m_{\nu_3} \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}\right) \left(2\delta_\nu \times \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu)} + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} (1 - \delta_\nu) (\delta_\nu + \delta_e f_{\nu 2}) \right) \\
& \times \cos 2(w_{\mu 1} - w_{\mu 3}) + 2\frac{m_{\nu_2} m_{\nu_3} f_{\nu 2}}{(1 + \tilde{m}_{\nu_2})(1 - \delta_\nu)} \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}}\right) \left((1 - \delta_\nu) (\delta_\nu + \delta_e f_{\nu 2}) - 2\delta_\nu \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu)} \right) \\
& \times \cos 2(w_{\mu 2} - w_{\mu 3}) \left. \right\}, \tag{105}
\end{aligned}$$

where

$$w_{\mu 1} \approx \arctan \left\{ \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} \delta_e \delta_\nu f_{\nu 2}}}{\sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu)} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} (1 - \delta_\nu)}} \right\}, \tag{106}$$

and

$$w_{\mu 2} \approx \arctan \left\{ \frac{\sqrt{f_{\nu 2}} \tan \beta_1 + \sqrt{\delta_e \delta_\nu}}{\sqrt{f_{\nu 2}} - \sqrt{\delta_e \delta_\nu} \tan \beta_1} \right\}, \tag{107}$$

$$w_{\mu 3} \approx \arctan \left\{ \frac{\tan \beta_2 - \sqrt{f_{\nu 2}}}{1 + \sqrt{f_{\nu 2}} \tan \beta_2} \right\}. \tag{108}$$

From these expressions and the numerical values of the neutrinos masses given in Eq. (67), we obtain the following expressions for effective Majorana masses with the phases as free parameters:

$$\begin{aligned}
|\langle m_{ee} \rangle|^2 \approx & \{9.41 + 8.29 \cos(1^\circ - 2\beta_1) + 4.3 \cos(1^\circ \\
& - 2w_{e3}) + 4.31 \cos 2(\beta_1 - w_{e3})\} \times 10^{-6} \text{ eV}^2, \tag{109}
\end{aligned}$$

where

$$w_{e3} = \arctan \left\{ \frac{0.15 \tan \beta_2 - 0.013}{0.15 + 0.013 \tan \beta_2} \right\}. \tag{110}$$

Similarly,

$$\begin{aligned}
|\langle m_{\mu\mu} \rangle|^2 \approx & \{4.8 + 0.17 \cos 2(44^\circ - w_{\mu 2}) \\
& + 1.8 \cos 2(w_{\mu 2} - w_{\mu 3})\} \times 10^{-4} \text{ eV}^2, \tag{111}
\end{aligned}$$

where

$$w_{\mu 2} \approx \arctan \left\{ \frac{0.65 \tan \beta_1 + 0.13}{0.65 - 0.13 \tan \beta_1} \right\}, \tag{112}$$

$$w_{\mu 3} \approx \arctan \left\{ \frac{\tan \beta_2 - 0.13}{1 + 0.13 \tan \beta_2} \right\}. \tag{113}$$

In order to make a numerical estimate of the effective Majorana neutrinos masses $|\langle m_{ee} \rangle|$ and $|\langle m_{\mu\mu} \rangle|$, we used the following values for the Majorana phases $\beta_1 = -1.4^\circ$ and $\beta_2 = 77^\circ$ obtained by maximizing the rephasing invariants S_1 and S_2 , Eq. (71). Then, the numerical value of the effective Majorana neutrino masses are

$$|\langle m_{ee} \rangle| \approx 4.6 \times 10^{-3} \text{ eV}, \quad |\langle m_{\mu\mu} \rangle| \approx 2.1 \times 10^{-2} \text{ eV}. \tag{114}$$

These numerical values are consistent with the very small experimentally determined upper bounds for the reactor neutrino mixing angle θ_{13}^l [29].

VIII. CONCLUSIONS

In this communication, we outlined a unified treatment of masses and mixings of quarks and leptons in which the left-handed Majorana neutrinos acquire their masses via the type-I seesaw mechanism, and the mass matrices of all Dirac fermions have a similar form with four texture zeroes and a normal hierarchy. Then, the mass matrix of the left-handed Majorana neutrinos also has a texture with four zeros. In this scheme, we derived exact, explicit expressions for the Cabibbo (θ_{12}^q) and solar (θ_{12}^l) mixing angles as functions of the quark and lepton masses, respectively. The so-called quark-lepton complementarity relation takes the form

$$\theta_{12}^{q\text{th}} + \theta_{12}^{l\text{th}} = 45^\circ + \varepsilon_{12}^{\text{th}}. \tag{115}$$

The correction term, $\varepsilon_{12}^{\text{th}}$, is an explicit function of the ratios of quark and lepton masses, given in Eq. (91), which reproduces the experimentally determined value,

$$\varepsilon_{12}^{\text{exp}} \approx 2.7^\circ, \tag{116}$$

when the numerical values of the quark and lepton masses are substituted in (91).

BARRANCO, GONZÁLEZ CANALES, AND MONDRAGÓN

Three essential ingredients are needed to explain the correlations implicit in the small numerical value of $\varepsilon_{12}^{\text{th}}$:

- (1) The strong hierarchy in the mass spectra of the quarks and charged leptons, realized in our scheme through the explicit breaking of the S_3 flavor symmetry in the mass matrices with four texture zeroes, explains the resulting small or very small quark mixing angles; the very small charged lepton mass ratios explain the very small value of θ_{13}^l .
- (2) The normal seesaw mechanism that gives very small masses to the left-handed Majorana neutrinos with relatively large values of the neutrino mass ratio

PHYSICAL REVIEW D **82**, 073010 (2010)

m_{ν_1}/m_{ν_2} and allows for large θ_{12}^l and θ_{23}^l mixing angles.

The assumption of a normal hierarchy for the masses of the Majorana neutrinos.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Dr. Myriam Mondragón for many inspiring discussions on this exciting problem. This work was partially supported by CONACyT Mexico under Contracts No. 51554-F and No. 82291, and DGAPA-UNAM Contract No. PAPIIT IN112709.

-
- [1] Y. Fukuda *et al.* (Super-Kamiokande Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562 (1998); *Phys. Lett. B* **539**, 179 (2002); M. Sanchez *et al.*, *Phys. Rev. D* **68**, 113004 (2003); Y. Ashie *et al.* (Super-Kamiokande), *Phys. Rev. D* **71**, 112005 (2005).
 - [2] B. T. Cleveland *et al.*, *Astrophys. J.* **496**, 505 (1998); S. N. Ahmed *et al.* (SNO Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **92**, 181301 (2004); M. Altmann *et al.* (GNO Collaboration), *Phys. Lett. B* **616**, 174 (2005); B. Aharmim *et al.* (SNO Collaboration), *Phys. Rev. C* **72**, 055502 (2005).
 - [3] K. Eguchi *et al.* (KamLAND Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **90**, 021802 (2003); T. Araki *et al.* (KamLAND Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **94**, 081801 (2005).
 - [4] M. H. Ahn *et al.* (K2K), *Phys. Rev. Lett.* **90**, 041801 (2003).
 - [5] M. C. Gonzalez-Garcia and M. Maltoni, *Phys. Rep.* **460**, 1 (2008).
 - [6] M. Apollonio *et al.* (CHOOZ Collaboration), *Phys. Lett. B* **466**, 415 (1999).
 - [7] J. E. Roa, D. C. Latimer, and D. J. Ernst, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 061804 (2009); *Phys. Rev. C* **81**, 015501 (2010).
 - [8] M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni, and J. Salvado, *J. High Energy Phys.* **04** (2010) 056.
 - [9] M. Maltoni and T. Schwetz, *Proc. Sci.*, IDM2008 (2008) 072 [arXiv:0812.3161]; G. L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, A. Palazzo, and A. M. Rotunno, arXiv:0905.3549; H. L. Ge, C. Giunti, and Q. Y. Liu, *Phys. Rev. D* **80**, 053009 (2009); A. Palazzo and J. W. F. Valle, *Phys. Rev. D* **80**, 091301 (2009).
 - [10] C. Amsler *et al.* (Particle Data Group), *Phys. Lett. B* **667**, 1 (2008).
 - [11] A. Y. Smirnov, arXiv:hep-ph/0402264.
 - [12] A. Y. Smirnov, arXiv:0910.1778.
 - [13] F. Gonzalez Canales and A. Mondragon, *J. Phys. Conf. Ser.* **171**, 012063 (2009); *AIP Conf. Proc.* **857**, 287 (2006).
 - [14] H. Minakata, arXiv:hep-ph/0505262.
 - [15] P. H. Frampton, S. T. Petcov, and W. Rodejohann, *Nucl. Phys.* **B687**, 31 (2004); M. Raidal, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 161801 (2004); H. Minakata and A. Y. Smirnov, *Phys. Rev. D* **70**, 073009 (2004); P. H. Frampton and R. N. Mohapatra, *J. High Energy Phys.* **01** (2005) 025.
 - [16] F. Plentinger, G. Seidl, and W. Winter, *Nucl. Phys.* **B791**, 60 (2008); *Phys. Rev. D* **76**, 113003 (2007).
 - [17] L. Camilleri, E. Lisi, and J. F. Wilkerson, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **58**, 343 (2008).
 - [18] C. Barbero, L.-F. Li, G. LopezCastro, and A. Mariano, *Phys. Rev. D* **76**, 116008 (2007).
 - [19] H. Ishimori *et al.*, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **183**, 1 (2010); G. Altarelli, F. Feruglio, and L. Merlo, *J. High Energy Phys.* **05** (2009) 020; R. d. A. Toorop, F. Bazzocchi, and L. Merlo, *J. High Energy Phys.* **08** (2010) 001; F. Plentinger, G. Seidl, and W. Winter, *J. High Energy Phys.* **04** (2008) 077; F. Plentinger and G. Seidl, *Phys. Rev. D* **78**, 045004 (2008).
 - [20] A. Mondragón and E. Rodríguez-Jáuregui, *Phys. Rev. D* **61**, 113002 (2000); **59**, 093009 (1999).
 - [21] H. Fritzsch and Z.-z. Xing, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **45**, 1 (2000).
 - [22] H. Fritzsch, *Phys. Lett.* **70B**, 436 (1977); *Nucl. Phys.* **B155**, 189 (1979); S. Pakvasa and H. Sugawara, *Phys. Lett.* **73B**, 61 (1978); H. Harari, H. Haut, and J. Weyers, *Phys. Lett.* **78B**, 459 (1978).
 - [23] W. Buchmuller and D. Wyler, *Phys. Lett. B* **521**, 291 (2001); M. Bando and M. Obara, *Prog. Theor. Phys.* **109**, 995 (2003); M. Bando, S. Kaneko, M. Obara, and M. Tanimoto, arXiv:hep-ph/0405071.
 - [24] Z.-z. Xing and H. Zhang, *Phys. Lett. B* **569**, 30 (2003).
 - [25] K. A. Hochmuth, S. T. Petcov, and W. Rodejohann, *Phys. Lett. B* **654**, 177 (2007).
 - [26] C. Jarlskog, *Z. Phys. C* **29**, 491 (1985); *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1039 (1985).
 - [27] R. N. Mohapatra and A. Y. Smirnov, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **56**, 569 (2006).
 - [28] V. Mateu and A. Pich, *J. High Energy Phys.* **10** (2005) 041.
 - [29] G. L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, A. Palazzo, and A. M. Rotunno, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 141801 (2008); S. Pascoli and S. T. Petcov, *Phys. Rev. D* **77**, 113003 (2008).

Universal Mass Texture and Quark-Lepton Complementarity

F González Canales* and A Mondragón**

Instituto de Física, UNAM, 04510, México D.F., MEXICO

E-mail: *ffelix@fisica.unam.mx, **mondra@fisica.unam.mx

Abstract. Recent measurements of the neutrino and quark mixing angles satisfy the empirical relations called quark-lepton complementarity. This empirical data suggests the existence of a correlation between the mixing matrices of leptons and quarks. In this work, we examine the possibility that this correlation between the mixing angles of quarks and leptons originates in the similar hierarchy of quarks and charged lepton masses and the seesaw mechanism type I that gives mass to the Majorana neutrinos. We assume that the similar mass hierarchies of charged lepton masses and quark masses allows one to represent all the mass matrices of Dirac fermions in terms of a four zeros Fritzsch texture.

1. Introduction

In the last few years, the neutrino oscillations between different flavour states were measured in a series of experiments with atmospheric neutrinos [1], solar neutrinos [2,3], neutrinos produced in nuclear reactors [4] and accelerators [5]. As a result of the global combined analysis including all dominant and sub dominant oscillation effects, the difference of the squared neutrino masses and the mixing angles in the lepton mixing matrix, U_{PMNS} , were determined:

$$\begin{aligned} \Delta m_{21}^2 &= 7.67_{-0.21}^{+0.67} \times 10^{-5} \text{eV}^2, & \theta_{12}^l &= 34.5^\circ \pm 1.4^\circ \\ \Delta m_{32}^2 &= \begin{cases} -2.37 \pm 0.15 \times 10^{-3} \text{eV}^2, & (m_{\nu_2} > m_{\nu_1} > m_{\nu_3}) \\ +2.46 \pm 0.15 \times 10^{-3} \text{eV}^2, & (m_{\nu_3} > m_{\nu_2} > m_{\nu_1}) \end{cases} \\ \theta_{23}^l &= (42.3_{-3.3}^{+5.1})^\circ, & \theta_{13}^l &< 7.9^\circ \end{aligned} \quad (1)$$

at 90% confidence level [6–8]. The CHOOZ experiment [9] determined an upper bound for the θ_{13} mixing angle. It was soon realized [10] that the solar mixing angle θ_{12}^l and the Cabibbo angle θ_{12}^q , which is the corresponding angle in the quark sector, satisfy an interesting and intriguing numerical relation,

$$\theta_{12}^l + \theta_{12}^q = 45^\circ + 1.5^\circ \pm 1.45^\circ, \quad (2)$$

with $\theta_{12}^q = 13^\circ \pm 0.05^\circ$. Equation (2) relates the 1-2 mixing angles in the quark and lepton sectors, it is commonly called the quark-lepton complementarity relation (QLC) and, if not accidental, it could imply a quark-lepton symmetry (for a recent review see [11]) or a quark-lepton unification [12–15].

A second QLC relation that relates the atmospheric and 2-3 mixing angles, is also satisfied.

$$\theta_{23}^l + \theta_{23}^q = \left(44.67_{-3.35}^{+5.15}\right)^\circ. \quad (3)$$

However, this is not as interesting as (2) because θ_{23}^q is only about two degrees, and the corresponding QLC relation would be satisfied, within the errors, even if the angle θ_{23}^q had been zero, as long as θ_{23}^{MNSP} is close to the maximal value $\pi/4$.

A third possible QLC relation is not realized at all, or at least not realized in the same way, since is less than ten degrees.

$$\theta_{13}^l + \theta_{13}^q < 8.8^\circ. \quad (4)$$

In this short note we will focus our attention on understanding the nature of the QLC relation.

2. Universal Fritzsch texture of quarks and leptons

The quark and lepton flavour mixing matrices, U_{PMNS} and V_{CKM} , arise from the mismatch between diagonalization of the mass matrices of u and d type quarks and the mismatch in the diagonalization of the mass matrices of charged leptons and left handed neutrinos,

$$U_{MNSP} = U_l U_\nu^\dagger, \quad V_{CKM} = U_u U_d^\dagger. \quad (5)$$

Therefore, to get predictions for the flavour mixing angles and CP violating phases, we should specify the mass matrices.

In this work, we propose a unified treatment of quarks and leptons. Lepton and quark mass matrices could have the same mass texture from a universal flavour symmetry (exact at a certain energy scale). Imposing a flavour symmetry has been successful in reducing the number of parameters of the Standard Model. In particular, a permutational S_3 flavour symmetry and its sequential explicit breaking, allows us to represent the mass matrices as a modified Fritzsch texture:

$$\mathbf{M}_i^{(F)} = \begin{pmatrix} 0 & A_i & 0 \\ A_i^* & B_i & C_i \\ 0 & C_i & D_i \end{pmatrix} \quad i = u, d, l, \nu. \quad (6)$$

Some reasons to propose the validity of the modified Fritzsch texture as a universal mass texture for all fermions in the theory are the following:

- (i) The idea of S_3 flavour symmetry and its explicit breaking has been realized as a modified Fritzsch texture in the quark sector to interpret the strong mass hierarchy of up and down type quarks [16].
- (ii) The quark mixing angles and the CP violating phase appearing in the V_{CKM} mixing matrix were computed as explicit, exact functions of the four quark mass ratios $(m_u/m_t, m_c/m_t, m_d/m_b, m_s/m_b)$, one symmetry breaking parameter $Z^{1/2} = \left(\frac{81}{32}\right)^{1/2}$ and one CP violating phase $\phi_{u-d} = 90^\circ$, in very good agreement with experiment [17].
- (iii) Since the mass spectrum of the charged leptons exhibits a similar hierarchy to the quark's one, it would be natural to consider the same S_3 symmetry and its explicit breaking for the charged lepton mass matrix.
- (iv) As for the Dirac neutrinos, we have no direct information about the absolute values or the relative values of the neutrino masses, but the Fritzsch texture can be incorporated in a $SO(10)$ neutrino model [18]. Therefore it would be sensible to assume that the Dirac neutrinos have a mass hierarchy similar to that of the u-quarks and it would be natural to take for the Dirac neutrino mass matrix also a modified Fritzsch texture.

3. Invariance of the Fritzscht Texture

The left handed Majorana neutrinos naturally acquire their mass through an effective seesaw mechanism type I of the form

$$M_{\nu_L} = M_{\nu_D} M_R^{-1} M_{\nu_D}^T, \quad (7)$$

where M_{ν_D} and M_R denote the Dirac and right handed Majorana neutrino mass matrices. From our conjecture of a universal S_3 flavour symmetry it follows that M_R could have the same texture as that of M_{ν_D} and M_l . Then, it is straightforward to show that M_{ν_L} has also the same modified Fritzscht texture [19].

The hermitian mass matrix (6) may be written in terms of a real symmetric matrix $\bar{M}^{(F)}$ and a diagonal matrix of phases P as follows

$$M^{(F)} = P^\dagger \bar{M}^{(F)} P. \quad (8)$$

Then the seesaw mechanism type I takes the form

$$M_{\nu_L}^{(F)} = M_{\nu_D}^{(F)} (M_{\nu_R}^{(F)})^{-1} M_{\nu_D}^{(F)T} = P_D^\dagger \bar{M}_{\nu_D}^{(F)} P_D \left(P_R^\dagger \bar{M}_{\nu_R}^{(F)} P_R \right)^{-1} \left(P_D^\dagger \bar{M}_{\nu_D}^{(F)} P_D \right)^T. \quad (9)$$

The symmetry of M_{ν_L} , $M_{\nu_L} = M_{\nu_L}^T$, fixes the right handed Majorana neutrino phases, $\phi_{\nu_R} = n\pi$. Thus the mass matrix of right handed Majorana neutrino is real and symmetric and has a Fritzscht texture.

From (9), it also follows that the Fritzscht mass texture is invariant under the operation of see-saw mechanism type I.

$$M_{\nu_L} = \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_L} e^{in\pi} & 0 \\ a_{\nu_L} e^{in\pi} & b_{\nu_L} & c_{\nu_L} \\ 0 & c_{\nu_L} & d_{\nu_L} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} a_{\nu_L} &= \frac{|a_{\nu_D}|^2}{|a_{\nu_R}|}, \\ b_{\nu_L} &= \frac{c_{\nu_D}^2}{d_{\nu_R}} + \frac{c_{\nu_R}^2 - b_{\nu_R} d_{\nu_R}}{d_{\nu_R}} \frac{|a_{\nu_D}|^2}{|a_{\nu_R}|^2} e^{i2\phi_{\nu_D}} + 2 \left(b_{\nu_D} - \frac{c_{\nu_D} c_{\nu_R}}{d_{\nu_R}} \right) \frac{|a_{\nu_D}|}{|a_{\nu_R}|} \cos(\phi_{\nu_D} + n\pi), \\ c_{\nu_L} &= \frac{c_{\nu_D} d_{\nu_D}}{d_{\nu_R}} + \frac{|a_{\nu_D}|}{|a_{\nu_R}|} \left(c_{\nu_D} - \frac{c_{\nu_R} d_{\nu_D}}{d_{\nu_R}} \right) e^{i(\phi_{\nu_D} + n\pi)}, \\ d_{\nu_L} &= \frac{d_{\nu_D}^2}{d_{\nu_R}}. \end{aligned}$$

Since b_{ν_L} and c_{ν_L} are complex, in general, the left handed Majorana neutrino mass matrix, M_{ν_L} , is complex symmetric but not hermitian.

4. Mixing Matrices as Functions of the Fermion Masses

When the unitary matrices that diagonalize the mass matrices $M_i^{(F)}$ ($i = u, d, \nu, e$) are written in polar form, $U_i = O_i^T P_i$ and $M_i^{(F)} = P_i^\dagger \bar{M}_i P_i$, the expressions (5) for the mixing matrices take the form

$$U_{PMNS} = O_\nu^T P^{(l-\nu)} O_e K, \quad V_{CKM} = O_u^T P^{(u-d)} O_d, \quad (11)$$

where O_i , are the orthogonal matrices that diagonalize the real symmetric mass matrices $\bar{M}_i^{(F)}$ and $P^{(u-d)} = \text{diag}[1, e^{i\phi}, e^{i\phi}]$, $P^{(l-\nu)} = \text{diag}[1, e^{i\Phi}, e^{i\Phi}]$, where $\phi = \phi_u - \phi_d$, and $\Phi = \Phi_l - \Phi_\nu$, are the matrices of the Dirac phases and K is the diagonal matrix of the Majorana phases.

We reparametrized the matrices \bar{M}_i in terms of their eigenvalues. The orthogonal matrices are then expressed in terms of the mass eigenvalues of M_i :

$$\mathbf{O}_i = \begin{pmatrix} \left[\frac{\tilde{m}_{i2} f_{i1}}{D_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & - \left[\frac{\tilde{m}_{i1} f_{i2}}{D_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\tilde{m}_{i1} \tilde{m}_{i2} f_{i3}}{D_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \left[\frac{\tilde{m}_{i1} (1-\delta_i) f_{i1}}{D_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\tilde{m}_{i2} (1-\delta_i) f_{i2}}{D_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{(1-\delta_i) f_{i3}}{D_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ - \left[\frac{\tilde{m}_{i1} f_{i2} f_{i3}}{D_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & - \left[\frac{\tilde{m}_{i2} f_{i1} f_{i3}}{D_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{f_{i1} f_{i2}}{D_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$f_{i1} = 1 - \tilde{m}_{i1} - \delta_i, \quad f_{i2} = 1 + \tilde{m}_{i2} - \delta_i, \quad f_{i3} = \delta_i, \quad (13)$$

$$D_{i1} = (1 - \delta_i)(\tilde{m}_{i1} + \tilde{m}_{i2})(1 - \tilde{m}_{i1}), \quad (14)$$

$$D_{i2} = (1 - \delta_i)(\tilde{m}_{i1} + \tilde{m}_{i2})(1 + \tilde{m}_{i2}), \quad (15)$$

$$D_{i3} = (1 - \delta_i)(1 - \tilde{m}_{i1})(1 + \tilde{m}_{i2}), \quad (16)$$

$$\tilde{m}_{i1,2} = \frac{m_{i1,2}}{m_{i3}}, \quad (17)$$

the small parameters δ_i are also functions of the mass ratios and the symmetry breaking parameter $Z^{1/2}$.

Substitution of the expressions (12) and (13)-(16) in (11) allows us to express the mixing matrices U_{PMNS} and V_{CKM} as explicit functions of the masses of quark and lepton masses.

5. Quark-Lepton Complementarity

The resulting theoretical expression for the quark mixing angles written to first order in m_u/m_c and m_d/m_s , is

$$\sin^2 \theta_{12}^q \approx \frac{\frac{\tilde{m}_d}{m_s} + \frac{\tilde{m}_u}{m_c} - 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{m_c m_s}} \cos \phi}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{m_c}\right) \left(1 + \frac{\tilde{m}_d}{m_s}\right)}, \quad (18)$$

$$\tan \theta_{23}^q \approx \left(\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u}\right), \quad (19)$$

$$\tan \theta_{13}^q \approx \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} \left(\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u}\right). \quad (20)$$

Taking for the quark masses the values $m_u = 2.75\text{MeV}$, $m_c = 1310\text{MeV}$, $m_d = 6.0\text{MeV}$, $m_s = 120\text{MeV}$ [20] and maximal CP violation, $\phi = 90^\circ$ [17], we reproduce the numerical value of the quark mixing angles

$$\theta_{12}^q = 12.8^\circ, \quad \theta_{23}^q = 1.4^\circ, \quad \theta_{13}^q = 0.07^\circ, \quad (21)$$

in very good agreement with the latest analysis of the experimental data [21].

The theoretical expression for the lepton mixing angles are derived in a similar way. We obtain

$$\tan^2 \theta_{12}^{\text{th}} = \frac{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{m_{\nu 2}} + \frac{\tilde{m}_e}{m_\mu} - 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_e}{m_{\nu 2} m_\mu}} \cos \Phi}{1 + \frac{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_e}{m_{\nu 2} m_\mu} + 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_e}{m_{\nu 2} m_\mu}} \cos \Phi}, \quad (22)$$

$$\tan \theta_{23}^l \approx \left(\sqrt{\delta_\nu} - \sqrt{\delta_e}\right), \quad (23)$$

$$\tan \theta_{13}^l \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_\mu}} \left(\sqrt{\delta_\nu} - \sqrt{\delta_e}\right). \quad (24)$$

In the absence of experimental information, we assumed that CP violation is also maximal in the lepton sector *i.e.* $\Phi = 90^\circ$. Taking for the masses of the left handed Majorana neutrinos a normal hierarchy with the numerical values $m_{\nu_1} = 4.4 \times 10^{-3}$ eV and $m_{\nu_2} = 9 \times 10^{-3}$ eV, $m_{\nu_3} = 5 \times 10^{-2}$ eV and for the charged lepton masses the values $m_e = 0.5109$ MeV, $m_\mu = 105.685$ MeV and $m_\tau = 1776.99$ GeV [20], we obtain the following numerical values for the lepton mixing angles

$$\theta_{12}^l \approx 33.9^\circ, \quad \theta_{23}^l \approx 41.5^\circ, \quad \theta_{13}^l \approx 3.58^\circ. \quad (25)$$

We may now address the question of the meaning of the quark-lepton complementarity relations, as expressed in eq(2). The previous theoretical analysed allows us to calculate,

$$\tan(\theta_{12}^q + \theta_{12}^l) = 1 + \Delta_{12}^{\text{th}}, \quad (26)$$

$$\Delta_{12}^{\text{th}} = \frac{\left(\frac{\tilde{m}_d}{m_s} + \frac{\tilde{m}_u}{m_c}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{m_{\nu_2}} + \frac{\tilde{m}_e}{m_\mu}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{m_{\nu_2}} \frac{\tilde{m}_e}{m_\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \right] + \left(1 + \frac{\tilde{m}_d}{m_s} \frac{\tilde{m}_u}{m_c}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{m_{\nu_2}} + \frac{\tilde{m}_e}{m_\mu}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{m_{\nu_2}} \frac{\tilde{m}_e}{m_\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \right]}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{m_{\nu_2}} \frac{\tilde{m}_e}{m_\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\tilde{m}_d}{m_s} \frac{\tilde{m}_u}{m_c}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\tilde{m}_d}{m_s} + \frac{\tilde{m}_u}{m_c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{m_{\nu_2}} + \frac{\tilde{m}_e}{m_\mu}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (27)$$

$$\tan(\theta_{23}^q + \theta_{23}^l) = 1 + \Delta_{23}^{\text{th}}, \quad (28)$$

$$\Delta_{23}^{\text{th}} = \frac{1 - (\sqrt{\delta_\nu} - \sqrt{\delta_e}) [(\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u}) + 1] - (\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u})}{1 - (\sqrt{\delta_\nu} - \sqrt{\delta_e})(\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u})}. \quad (29)$$

$$\tan(\theta_{13}^q + \theta_{13}^l) = \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{m_c}} (\sqrt{\delta_\nu} - \sqrt{\delta_e}) \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{m_\mu}} (\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u})}{1 - \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{m_c} \frac{\tilde{m}_e}{m_\mu}} (\sqrt{\delta_\nu} - \sqrt{\delta_e})(\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u})}. \quad (30)$$

After substitution of the numerical value of the mass ratios of quarks and leptons in (27), we obtain,

$$\theta_{12}^q + \theta_{12}^l = 45^\circ + 1.7^\circ. \quad (31)$$

$$\theta_{23}^q + \theta_{23}^l = 45^\circ - 0.8^\circ, \quad (32)$$

$$\theta_{13}^q + \theta_{13}^l \approx 4^\circ. \quad (33)$$

in very good agreement with the experimental values.

According with the previous analysis, quark-lepton complementarity arises from the combined effect of two factors:

- (i) The strong mass hierarchy of the Dirac fermions produces in small and very small mass ratios of *u* and *d*-type quarks and charged leptons. The quark mass hierarchy is reflected in a similar hierarchy of small and very small quark mixing angles.
- (ii) The normal seesaw mechanism gives very small masses to the left handed Majorana neutrinos with relatively large values of the neutrino mass ratio m_{ν_1}/m_{ν_2} and allows for large θ_{12}^l and θ_{23}^l mixing angles.

6. The effective Majorana mass

One of the most fundamental problems of the physics of neutrinos is the question of the nature of massive neutrinos. A direct way to reveal the nature of massive neutrinos is to investigate processes in which the total lepton number is not conserved [22]. The matrix element of these processes are proportional to the effective Majorana neutrino masses, which are defined as

$$\langle m_{ll} \rangle \equiv \sum_{j=1}^3 m_{\nu_j} U_{lj}^2, \quad l = e, \mu, \tau, \quad (34)$$

where m_{ν_j} is the neutrino Majorana mass and U_{lj} are the elements of lepton mixing matrix U_{PMNS} .

The magnitudes square of the effective Majorana neutrino masses ec(34) are

$$|\langle m_{ll} \rangle|^2 = \sum_{j=1}^3 m_{\nu_j}^2 |U_{lj}|^4 + 2 \sum_{j < k} m_{\nu_j} m_{\nu_k} |U_{lj}|^2 |U_{lk}|^2 \cos 2(w_{lj} - w_{lk}), \quad (35)$$

where

$$w_{lj} = \arg \{U_{lj}\}. \quad (36)$$

The theoretical expression for the squared magnitudes of effective Majorana neutrino masses of electron and muon neutrinos are:

$$\begin{aligned} |\langle m_{ee} \rangle|^2 \approx & \frac{2m_{\nu_1}^2 + m_{\nu_1} m_{\nu_2} \left(\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{m_{\nu_2}} - 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu_1}}{m_\mu m_{\nu_2}}} \left(1 - \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{m_{\nu_2}}\right) \cos \Phi \right) \cos 2(w_{e1} - w_{e2})}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{m_\mu}\right)^2 \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{m_{\nu_2}}\right)^2} \\ & + \frac{m_{\nu_1} m_{\nu_3} \left(\frac{\tilde{m}_e}{m_\mu} \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{m_{\nu_2}}\right) \right) (\sqrt{\delta_\nu} - \sqrt{\delta_e})^2 \cos 2(w_{e1} - w_{e3})}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{m_\mu}\right)^2 \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{m_{\nu_2}}\right)^2} \end{aligned} \quad (37)$$

with , $w_{e3} = \Phi + \beta_2$,

$$w_{e1} = \arctan \left\{ \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_e}{m_{\nu_2} m_\mu}} \sin \Phi}{1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_e}{m_{\nu_2} m_\mu}} \cos \Phi} \right\}, \quad w_{e2} = \arctan \left\{ \frac{-\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{m_{\nu_2}}} \sin \beta_1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{m_\mu}} \sin \Phi}{-\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{m_{\nu_2}}} \cos \beta_1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{m_\mu}} \cos \Phi} \right\}. \quad (38)$$

$$\begin{aligned} |\langle m_{\mu\mu} \rangle|^2 \approx & \frac{4m_{\nu_1}^2 \left(\cos^2 \Phi + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{m_{\nu_2}} \cos \Phi \right) + m_{\nu_2}^2 \left(1 + 4\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_e}{m_{\nu_2} m_\mu}} \cos \Phi \right)}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{m_\mu}\right)^2 \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{m_{\nu_2}}\right)^2} \\ & + \frac{m_{\nu_1} m_{\nu_2} \left(\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{m_{\nu_2}} + 4\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_e}{m_{\nu_2} m_\mu}} \cos \Phi \right) \cos 2(w_{\mu 1} - w_{\mu 2})}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{m_\mu}\right)^2 \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{m_{\nu_2}}\right)^2} \\ & + \frac{m_{\nu_2} m_{\nu_3} (\sqrt{\delta_\nu} - \sqrt{\delta_e})^2 \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{m_{\nu_2}}\right) \left(1 + 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_e}{m_{\nu_2} m_\mu}} \cos \Phi \right) \cos 2(w_{\mu 2} - w_{\mu 3})}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{m_\mu}\right)^2 \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{m_{\nu_2}}\right)^2} \end{aligned} \quad (39)$$

with , $w_{\mu 3} = \Phi + \beta_2$,

$$w_{\mu 1} = \arctan \left\{ \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{m_{\nu 2}}} \sin \Phi}{-\sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{m_\mu}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{m_{\nu 2}}} \cos \Phi} \right\}, \quad w_{\mu 2} = \arctan \left\{ \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{m_{\nu 2}}} \frac{\tilde{m}_e}{m_\mu} \sin \beta_1 + \sin(\Phi + \beta_1)}{\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{m_{\nu 2}}} \frac{\tilde{m}_e}{m_\mu} \cos \beta_1 \cos(\Phi + \beta_1)} \right\} \quad (40)$$

Since we have no information about Majorana phases β_1 and β_2 , in first approximation we consider this phases equal to zero. Also, we made the assumption of maximal CP violation in the leptonic sector ($\Phi = 90^\circ$). Then, we obtain the following numerical value of the effective Majorana neutrino masses

$$|\langle m_{ee} \rangle| \approx 4.8 \times 10^{-3} \text{eV}, \quad |\langle m_{\mu\mu} \rangle| \approx 4.6 \times 10^{-3} \text{eV}. \quad (41)$$

These numerical values are consistent with the vary small experimentally determined upper bounds for the reactor neutrino mixing angle θ_{13}^l [23]- [24].

7. Conclusions

In this short communication, we outlined a unified treatment of masses and mixing of quarks and leptons in which the left handed Majorana neutrinos acquire their masses via the seesaw mechanism type I, and the mass matrices of all Dirac fermions have a similar Fritzsch texture and a normal hierarchy. Then the mass matrix of the left handed Majorana neutrino has also a Fritzsch texture of four zeros. In this scheme, we derived exact, explicit expressions for the Cabibbo (θ_{12}^q) and solar (θ_{12}^l) mixing angles as functions of the quark and lepton masses. The quark-lepton complementarity relation takes the form,

$$\theta_{12}^q + \theta_{12}^l = 45^\circ + \delta_{12}. \quad (42)$$

The correction term, δ_{12} , is an explicit function of the ratios of quark and lepton masses, given in eq.(27), which reproduces the experimentally determined value, $\delta_{12} \approx 1.7^\circ$, when the numerical values of the quark and lepton masses are substituted in (27) and maximal violation of CP in the lepton sector is assumed.

Three essential ingredients are needed to explain the correlations implicit in the small numerical value of δ_{12} :

- (i) The strong hierarchy in the mass spectra of the quarks and charged leptons, realized in our scheme through the explicit breaking of the S_3 flavour symmetry in the Fritzsch mass texture, explains the resulting small or very small quark mixing angles, the very small charged lepton mass ratios explain the very small θ_{13}^{MNSP} which, in our scheme, is independent of the neutrino masses.
- (ii) The normal seesaw mechanism that gives very small masses to the left handed Majorana neutrinos with relatively large values of the neutrino mass ratio $m_{\nu 1}/m_{\nu 2}$ and allows for large θ_{12}^{MNSP} and θ_{23}^{MNSP} mixing angles.
- (iii) The assumption of maximal CP violation in the lepton sector.

Acknowledgments

We thank Dr. Myriam Mondragón and Dr. Juan Barranco for many inspiring discussions on this exciting problem.

This work was partially supported by CONACyT Mexico under Contract No. 51554-F and 82291, and DGAPA-UNAM Contract No. PAPIIT IN1127019.

DISCRETE'08: Symposium on Prospects in the Physics of Discrete Symmetries IOP Publishing
 Journal of Physics: Conference Series **171** (2009) 012063 doi:10.1088/1742-6596/171/1/012063

References

- [1] Fukuda Y, et al. (Super-Kamiokande Collaboration) 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562.
 Fukuda Y et al. (Super-Kamiokande Collaboration) 2002 *Phys. Lett. B* **539** 179.
 Sanchez M et al., *Phys. Rev. D* **68**, 11 3004, (2003)
 Ashie Y et al.,(Super-Kamiokande Collaboration),2005 *Phys. Rev. D* **71** 112005 (arXiv:hep-ex/0501064)
- [2] B. T. Cleveland B T et al.2003 *Astrophys. J* **496** 505
 Ahmad S N et al. (SNO Collaboration), 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 181301 (arXiv:nucl-ex/0309004)
 Altmann M et al. (Super-Kamiokande Collaboration) 2005 *Phys. Lett. B* **616** 174
- [3] Aharmim B et al. (SNO Collaboration) 2005 *Phys. Rev. C* **72** 055502 (arXiv:nucl-ex/0502021)
- [4] Eguchi K et al. 2003 (KamLAND Collaboration) *Phys. Rev. Lett.* **90** 021802
 Ashie T et al. (KamLAND Collaboration) 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 081801
- [5] Ahn M H et al. 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 041801
- [6] Gonzalez-García M C and Michele Maltoni 2008 *Phys. Rept.* **460** 1-129
- [7] Maltoni M et al. 2004 *New J. Phys.* **6** 122
- [8] Schwetz T 2005 *Acta Phys. Polon. B* **36** 3203-3214 (arXiv:hep-ph/0510331)
- [9] Apollonio M et al.(CHOOZ Collaboration) 2003 *Eur. Phys. J. C* **27** 331-374 (arXiv:hep-ex/0301017 arXiv:hep-ex/9907037)
- [10] Smirnov A YarXiv Published in “Venice 2003, Neutrino oscillations” 1-21 (arXiv:hep-ph/0402264)
- [11] Minakata H, Published in “Venice 2005, Neutrino telescopes” 83-97 (arXiv:hep-ph/0505262)
- [12] Raidal M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 161801 (arXiv:hep-ph/0404046)
- [13] Minakata H and Smirnov A Y 2004 *Phys. Rev. D* **70** 073009 (arXiv:hep-ph/0405088)
- [14] Frampton P H and Mohapatra R N, 2005 *JHEP* 0501:025 (arXiv:hep-ph/0407139)
- [15] Frampton P H Petcov S T and Rodejohan W 2004 *Nucl. Phys. B* **687**:31-54
- [16] H Fritzsch 1977 *Phys. Lett. B* **70** 436
 H Fritzsch 1975 *Nucl. Phys. B* **155**, 189
 Pakvasa S and Sugawara H 1978 *Phys. Lett. B* **73** 61
 H. Harari, H. Haut and J. Weyers, *Phys. Lett. B.* **78**, 459 (1979)
- [17] Mondragón A and Rodríguez Jáuregui E 2000 *Phys. Rev. D* **61** 113002 (2000) (arXiv:hep-ph/0003104)
 Mondragón A and Rodríguez Jáuregui E 1999 *Phys. Rev. D* **59** 093009
- [18] Buchmüller W and Wyler D 2001 *Phys. Lett B* **521** 291
 Bando M and Obara M 2003 *Prog. Theor. Phys.* **109** 995
 Bando M, Kaneko S, Obara M and Tanimoto M arXiv:hep-ph/0405071
 Ross G G and Velasco-Sevilla L 20003 *Nucl. Phys. B* **623** 3-26
- [19] Fritzsch H and Xing Z “Mass and Flavor Mixing Schemes of Quarks and Leptons.” 2000 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **45** 1-81 (arXiv:hep-ph/9912358)
- [20] Amsler C et al. 2008 *Phys. Lett. B* **667**: 1,
- [21] Mateu V and Pich A 2005 *JHEP* **0510** 041 (arXiv:hep-ph/0509045)
- [22] Barbero C, Ling-Fong Li, López Castro G and Mariano A, 2007 *Phys. Rev. D* **76**, 116008
- [23] G.L. Fogoli, E. Lisi, A. Marrone, A. M. Rotunno, 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 141801
- [24] Pascoli, S. and Petcov, S. T. 2008 *Phys. Rev D* **77** 113003

On quark-lepton complementarity

F. González Canales and A. Mondragón

Instituto de Física, UNAM, 04510, México D.F., MEXICO

Abstract. Recent measurements of the neutrino solar mixing angle and the Cabibbo angle satisfy the empirical relation $\theta_{sol} + \theta_C \simeq \frac{\pi}{4}$. This relation suggests the existence of a correlation between the mixing matrices of leptons and quarks, the so called quark-lepton complementarity. Here, we examine the possibility that this correlation originates in the strong hierarchy in the mass spectra of quarks and charged leptons, and the seesaw mechanism that gives mass to the Majorana neutrinos. In a unified treatment of quarks and leptons in which the mass matrices of all fermions have a similar Fritzsch texture, we calculate the mixing matrices V_{CKM} and U_{MNSP} as functions of quark and lepton masses and only two free parameters, in very good agreement with the latest experimental values on masses and mixings. Three essential ingredients to explain the quark-lepton complementarity relation are identified: the strong hierarchy in the mass spectra of quarks and charged leptons, the normal seesaw mechanism and the assumption of maximal CP violation in the lepton sector.

Keywords: Quark and lepton masses and mixings, Neutrino masses and mixings, CKM matrix

PACS: 12.15.Ff, 14.60.Pq, 12.15.Hh, 14.60.St

INTRODUCTION

In the last few years, the neutrino oscillations between different flavour states were measured in a series of experiments with atmospheric neutrinos[1], solar neutrinos[2][3], neutrinos produced in nuclear reactors [4] and accelerators [5]. As a result, the difference of the squared neutrino masses and the mixing angles in the lepton mixing matrix, U_{MNSP} , were determined:

$$0.34 \leq \sin^2 \theta_{23} \leq 0.68, \quad 1.4 \times 10^{-3}(\text{eV})^2 \leq \Delta m_{23}^2 \leq 3.0 \times 10^{-3}(\text{eV})^2, \quad (1)$$

$$0.29 \leq \sin^2 \theta_{12} \leq 0.40, \quad 7.1 \times 10^{-5}(\text{eV})^2 \leq \Delta m_{12}^2 \leq 8.9 \times 10^{-5}(\text{eV})^2, \quad (2)$$

$$\sin^2 \theta_{13} \leq 0.046, \quad (3)$$

at 90% confidence level [6]-[7]. The CHOOZ experiment [8] determined an upper bound for the θ_{13} mixing angle. It was soon realized [9] that the solar mixing angle θ_{12}^{MNSP} and the Cabibbo angle θ_{12}^{CKM} , which is the corresponding angle in the quark sector, satisfy an interesting and intriguing numerical relation,

$$\theta_{12}^{MNSP} + \theta_{12}^{CKM} = 45^\circ + 1^\circ \pm 2.4^\circ, \quad (4)$$

with $\theta_{12}^{MNSP} = 33.9^\circ \pm 2.4^\circ$ (1σ) and $\theta_{12}^{CKM} = 12.8^\circ \pm 0.15^\circ$. Equation (4) relates the 1-2 mixing angles in the quark and lepton sectors, it is commonly called the quark-lepton complementarity relation (QLC) and, if not accidental, it could imply a quark-lepton symmetry (for a recent review see [10]) or a quark-lepton unification [11]-[14].

A second QLC relation, $\theta_{23}^{MNSP} + \theta_{23}^{CKM} \approx \frac{\pi}{4}$, is also satisfied. However, this is not as interesting as (4) because θ_{23}^{CKM} is only about two degrees, and the corresponding QLC relation would be satisfied, within the errors, even if the angle θ_{23}^{CKM} had been zero, as long as θ_{23}^{MNSP} is close to the maximal value $\pi/4$. A third possible QLC relation is not realized at all, or at least not realized in the same way, since $\theta_{13}^{CKM} + \theta_{13}^{MNSP}$ is less than ten degrees. In this short note we will focus our attention on understanding the nature of the QLC relation shown in equation (4).

UNIVERSAL FRITZSCH TEXTURE OF QUARKS AND LEPTONS

The quark and lepton flavour mixing matrices, U_{MNSP} and V_{CKM} , arise from the mismatch between diagonalization of the mass matrices of u and d type quarks and the diagonalization of the mass matrices of charged leptons and neutrinos,

$$U_{MNSP} = U_l^\dagger U_\nu, \quad V_{CKM} = U_u^\dagger U_d. \quad (5)$$

Therefore, to get predictions for the flavour mixing angles and CP violating phases, we should specify the mass matrices.

In this work, we propose a unified treatment of quarks and leptons. Lepton and quark mass matrices could have the same mass texture from a universal flavour symmetry (exact at a certain energy scale). Imposing a flavour symmetry has been successful in reducing the number of parameters of the Standard Model. In particular, a permutational S_3 flavour symmetry and its sequential explicit breaking, allows us to represent the mass matrices as a modified Fritzsch texture:

$$\mathbf{M}^{(F)} = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A^* & B & C \\ 0 & C & D \end{pmatrix} \quad i = u, d, l, \nu. \quad (6)$$

Some reasons to propose the validity of the modified Fritzsch texture as a universal mass texture for all fermions in the theory are the following:

1. The idea of S_3 flavour symmetry and its explicit breaking has been realized as a modified Fritzsch texture in the quark sector to interpret the strong mass hierarchy of up and down type quarks [15].
2. The quark mixing angles and the CP violating phase appearing in the V_{CKM} mixing matrix were computed as explicit, exact functions of the four quark mass ratios $(m_u/m_t, m_c/m_t, m_d/m_b, m_s/m_b)$, one symmetry breaking parameter $Z^{1/2} = \left(\frac{81}{32}\right)^{1/2}$ and one CP violating phase $\phi_{u-d} = 90^\circ$, in very good agreement with experiment [16].
3. Since the mass spectrum of the charged leptons exhibits a similar hierarchy to the quark's one, it would be natural to consider the same S_3 symmetry and its explicit breaking for the charged lepton mass matrix.
4. As for the Dirac neutrinos, we have no direct information about the absolute values or the relative values of the neutrino masses, but the Fritzsch texture can

be incorporated in a $SO(10)$ neutrino model [17]. Therefore it would be sensible to assume that the Dirac neutrinos have a mass hierarchy similar to that of the u-quarks and it would be natural to take for the Dirac neutrino mass matrix also a modified Fritzsche texture.

5. The left handed Majorana neutrinos naturally acquire their mass through an effective seesaw mechanism of the form

$$M_{\nu L} = M_{\nu D} M_R^{-1} M_{\nu D}^T, \quad (7)$$

where $M_{\nu D}$ and M_R denote the Dirac and right handed Majorana neutrino mass matrices. From our conjecture of a universal S_3 flavour symmetry it follows that M_R could have the same texture as that of $M_{\nu D}$ and M_l . Then, it is straightforward to show that $M_{\nu L}$ has the same modified Fritzsche texture [18].

MIXING MATRICES AS FUNCTIONS OF THE FERMION MASSES

When the unitary matrices that diagonalize the mass matrices $M_i^{(F)}$ are written in polar form, $U_i = P_i O_i$ and $M_i^{(F)} = P_i^\dagger \bar{M} P_i$, the expressions (5) for the mixing matrices take the form

$$U_{MNSP} = O_l^T P^{(l-\nu)} O_\nu K, \quad V_{CKM} = O_d^T P^{(u-d)} O_u, \quad (8)$$

where O_i , $i = u, d, \nu, l$, are the orthogonal matrices that diagonalize the real symmetric mass matrices $\bar{M}_i^{(F)}$ and $P^{(u-d)} = \text{diag}[1, e^{i\phi}, e^{i\phi}]$, $P^{(l-\nu)} = \text{diag}[1, e^{i\Phi}, e^{i\Phi}]$, where $\phi = \phi_u - \phi_d$, and $\Phi = \Phi_l - \Phi_\nu$, are the matrices of the Dirac phases and K is the diagonal matrix of the Majorana phases.

We reparametrized the matrices \bar{M}_i in terms of their eigenvalues. The orthogonal matrices are then expressed in terms of the mass eigenvalues of M_i :

$$\mathbf{O}_i = \begin{pmatrix} \left[\frac{\tilde{m}_{i2} f_{i1}}{D_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & - \left[\frac{\tilde{m}_{i1} f_{i2}}{D_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\tilde{m}_{i1} \tilde{m}_{i2} f_{i3}}{D_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \left[\frac{\tilde{m}_{i1} (1-\delta_i) f_{i1}}{D_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\tilde{m}_{i2} (1-\delta_i) f_{i2}}{D_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{(1-\delta_i) f_{i3}}{D_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ - \left[\frac{\tilde{m}_{i1} f_{i2} f_{i3}}{D_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & - \left[\frac{\tilde{m}_{i2} f_{i1} f_{i3}}{D_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{f_{i1} f_{i2}}{D_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$f_{i1} = 1 - \tilde{m}_{i1} - \delta_i, \quad f_{i2} = 1 + \tilde{m}_{i2} - \delta_i, \quad f_{i3} = \delta_i, \quad (10)$$

$$D_{i1} = (1 - \delta_i)(\tilde{m}_{i1} + \tilde{m}_{i2})(1 - \tilde{m}_{i1}), \quad (11)$$

$$D_{i2} = (1 - \delta_i)(\tilde{m}_{i1} + \tilde{m}_{i2})(1 + \tilde{m}_{i2}), \quad (12)$$

$$D_{i3} = (1 - \delta_i)(1 - \tilde{m}_{i1})(1 + \tilde{m}_{i2}), \quad (13)$$

the small parameters δ_i are also functions of the mass ratios and the symmetry breaking parameter $Z^{1/2} = (81/32)^{1/2}$.

Substitution of the expressions (9) and (10)-(13) in (8) allows us to express the mixing matrices U_{MNSP} and V_{CKM} as explicit functions of the quark and lepton masses.

QUARK-LEPTON COMPLEMENTARITY

The resulting theoretical expression for the Cabibbo angle written to first order in m_u/m_c and m_d/m_s , is

$$\sin^2 \theta_C^{\text{th}} = |V_{us}^{\text{th}}|^2 \approx \frac{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} - 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}} \cos \phi}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right) \left(1 + \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}\right)}. \quad (14)$$

Taking for the quark masses the values $m_u = 2.75\text{MeV}$, $m_c = 1310\text{MeV}$, $m_d = 6.0\text{MeV}$, $m_s = 120\text{MeV}$ and maximal CP violation, $\phi = 90^\circ$ [16], we reproduce the numerical value of the Cabibbo angle

$$\sin \theta_c^{\text{th}} = 0.225 \quad \text{or} \quad \theta_c = 12.8^\circ, \quad (15)$$

in very good agreement with the latest analysis of the experimental data [19].

The theoretical expression for the solar mixing angle is derived in a similar way. From $|(U_{MNSP})_{12}|^2 / |(U_{MNSP})_{11}|^2 = \tan^2 \theta_{12}^{\text{th}}$, we obtain

$$\tan^2 \theta_{12}^{\text{th}} = \frac{\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} - 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_e}{\tilde{m}_{\nu_2} \tilde{m}_\mu}} \cos \Phi}{1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_e}{\tilde{m}_{\nu_2} \tilde{m}_\mu} + 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_e}{\tilde{m}_{\nu_2} \tilde{m}_\mu}} \cos \Phi}. \quad (16)$$

In the absence of experimental information, we assumed that CP violation is also maximal in the lepton sector *i.e.* $\Phi = 90^\circ$. Taking for the masses of the left handed Majorana neutrinos a normal hierarchy with the numerical values $m_{\nu_1} = 4.4 \times 10^{-3}\text{eV}$ and $m_{\nu_2} = 1.0 \times 10^{-2}\text{eV}$, and for the charged lepton masses the values $m_e = 0.5109\text{MeV}$, $m_\mu = 105.685\text{MeV}$ and $m_\tau = 1776.99\text{GeV}$, we obtain the following numerical value for the solar mixing angle

$$\tan^2 \theta_{12}^{\text{th}} = 0.45 \quad \text{or} \quad \theta_{12}^{\text{th}} = 33.9^\circ. \quad (17)$$

We may now address the question of the meaning of the quark-lepton complementarity relation as expressed in eq(4). The previous theoretical analysed allows us to calculate,

$$\tan \left(\theta_c^{\text{th}} + \theta_{12}^{\text{th}} \right) = 1 + \Delta^{\text{th}}, \quad (18)$$

$$\Delta^{\text{th}} = \frac{\left(\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_e}{\tilde{m}_{\nu_2} \tilde{m}_\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \right] + \left(1 + \frac{\tilde{m}_d \tilde{m}_u}{\tilde{m}_s \tilde{m}_c}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_e}{\tilde{m}_{\nu_2} \tilde{m}_\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \right]}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_e}{\tilde{m}_{\nu_2} \tilde{m}_\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\tilde{m}_d \tilde{m}_u}{\tilde{m}_s \tilde{m}_c}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\tilde{m}_{\nu_1}}{\tilde{m}_{\nu_2}} + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (19)$$

After substitution of the numerical value of the mass ratios of quarks and leptons in (19), we obtain,

$$\Delta^{\text{th}} = 0.061 \quad \text{and} \quad \theta_c^{\text{th}} + \theta_{12}^{\text{th}} = 45^\circ + 1.7^\circ. \quad (20)$$

in very good agreement with the experimental value.

CONCLUSIONS

In this short communication, we outlined a unified treatment of masses and mixing of quarks and leptons in which the left handed Majorana neutrinos acquire their masses via the seesaw mechanism, and the mass matrices of all fermions have a similar Fritzsch texture and a normal hierarchy. In this scheme, we derived exact, explicit expressions for the Cabibbo and solar mixing angles as functions of the quark and lepton masses. The quark-lepton complementarity relation takes the form,

$$\theta_{12}^{\text{CKM}} + \theta_{12}^{\text{MNSP}} = 45^\circ + \delta_{12}. \quad (21)$$

The correction term, δ_{12} , is an explicit function of the ratios of quark and lepton masses, given in eq.(19), which reproduces the experimentally determined value, $\delta_{12} \approx 1.7^\circ$, when the numerical values of the quark and lepton masses are substituted in (19) and maximal violation of CP in the lepton sector is assumed.

Three essential ingredients are needed to explain the correlations implicit in the small numerical value of δ_{12} :

1. The strong hierarchy in the mass spectra of the quarks and charged leptons, realized in our scheme through the explicit breaking of the S_3 flavour symmetry in the Fritzsch mass texture, explains the resulting small or very small quark mixing angles, the very small charged lepton mass ratios explain the very small $\theta_{13}^{\text{MNSP}}$ which, in our scheme, is independent of the neutrino masses.
2. The normal seesaw mechanism that gives very small masses to the left handed Majorana neutrinos with relatively large values of the neutrino mass ratio m_{ν_1}/m_{ν_2} and allows for large $\theta_{12}^{\text{MNSP}}$ and $\theta_{23}^{\text{MNSP}}$ mixing angles.
3. The assumption of maximal CP violation in the lepton sector.

A more complete and detailed version of this work will be presented in a forthcoming publication [20]

ACKNOWLEDGEMENTS

We thank Dr. M. Mondragón for many inspiring discussions on this exciting problem and for a critical reading of the manuscript.

This work was partially supported by CONACyT Mexico under Contract No. 42026F, and DGAPA-UNAM Contract No. PAPIIT IN116202.

REFERENCES

1. Y. Fukuda et al. (Super-Kamiokande Collaboration), Phys. Rev. Lett. **81**, 1562. (1998)
 Y. Fukuda et al. (Super-Kamiokande Collaboration), Phys. Lett. B **539**, 179. (2002)
 M. Sanchez et al., Phys. Rev. D **68**, 11 3004, (2003)
 Y. Ashie et al.,(Super-Kamiokande Collaboration), Phys. Rev. D **71**, 112005 (2005),arXiv/hep-ex/0501064

2. B. T. Cleveland et al., *Astrophys. J.* **496**, 505 (2003)
S.N. Ahmad et al. (SNO Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **92**, 181301 (2004); arXiv:nucl-ex/0309004,
M. Altmann et al. (Super-Kamiokande Collaboration), *Phys. Lett. B* **616**, 174 (2005)
3. B. Aharmim et al., (SNO Collaboration), *Phys. Rev. C* **72**, 055502 (2005); arXiv: nucl-ex/0502021
4. K. Eguchi et al. (KamLAND Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **90**, 021802,(2003)
T. Ashie et al. (KamLAND Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **94**, 081801,(2005)
5. M. H. Ahn et al. *Phys. Rev. Lett.* **90**, 041801, (2003)
6. M. Maltoni et al. *New J. Phys.* **6**,122 (2004)
7. T. Schwetz, *Acta Phys. Polon. B* **36**, 3203-3214 (2005); arXiv:hep-ph/0510331
8. M. Apollonio et al.,(CHOOZ Collaboration), *Eur. Phys. J. C* **27**; 331-374, 2003, arXiv/hep-ex/0301017 hep-ex/9907037
9. A. Y. Smirnov arXiv:hep-ph/0402264, Published in “Venice 2003, Neutrino oscillations” 1-21
10. H. Minakata, arXiv:hep-ph/0505262, Published in “Venice 2005, Neutrino telescopes” 83-97
11. M. Raidal, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 161801, arXiv:hep-ph/0404046.
12. H. Minakata and A. Y. Smirnov, *Phys. Rev. D* **70** 073009 (2004), arXiv:hep-ph/0405088
13. P.H. Frampton and R. N. Mohapatra, *JHEP* 0501:025 (2005), arXiv:hep-ph/0407139
14. P.H. Frampton, S.T. Petcov and W. Rodejohan, *Nucl. Phys. B* **687**:31-54 (2004)
15. H. Fritzsch, *Phys. Lett. B* **70**, 436 (1977),
H. Fritzsch, *Nucl. Phys. B* **155**, 189 (1979),
S. Pakvasa and H. Sugawara, *Phys. Lett. B* **73**, 61 (1978)
H. Harari, H. Haut and J. Weyers, *Phys. Lett. B.* **78**, 459 (1979)
16. A. Mondragón and E. Rodríguez Jáuregui, *Phys. Rev. D* **61**, 113002 (2000),arXiv:hep-ph/0003104
A. Mondragón and E. Rodríguez Jáuregui *Phys. Rev. D.* **59** 093009 (1999)
17. W. Buchmüller and D. Wyler, *Phys. Lett B* **521**, 291 (2001)
M. Bando and M. Obara, *Prog. Theor. Phys.* **109**, 995 (2003)
M. Bando, S. Kaneko, M. Obara and M. Tanimoto, arXiv:hep-ph/0405071
G.G. Ross and L. Velasco-Sevilla *Nucl. Phys. B* **623** (2003) 3-26
18. H. Fritzsch and Z. Xing, “Mass and Flavor Mixing Schemes of Quarks and Leptons.”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **45** :1-81 (2000), arXiv:hep-ph/9912358
19. V. Mateu and A.Pich, *JHEP* **0510**:041 (2005), arXiv:hep-ph/0509045.
20. F. González Canales and A. Mondragón, Work in progress.

Bibliografía

- [1] **Super-Kamiokande** Collaboration, Y. Fukuda *et al.*, *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 1562–1567, [[hep-ex/9807003](#)].
- [2] **MINOS** Collaboration, D. G. Michael *et al.*, *Observation of muon neutrino disappearance with the MINOS detectors and the NuMI neutrino beam*, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 191801, [[hep-ex/0607088](#)].
- [3] **K2K Collaboration** Collaboration, M. Ahn *et al.*, *Measurement of Neutrino Oscillation by the K2K Experiment*, *Phys.Rev.* **D74** (2006) 072003, [[hep-ex/0606032](#)].
- [4] **SNO** Collaboration, B. Aharmim *et al.*, *An Independent Measurement of the Total Active 8B Solar Neutrino Flux Using an Array of 3He Proportional Counters at the Sudbury Neutrino Observatory*, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 111301, [[arXiv:0806.0989](#)].
- [5] **KamLAND** Collaboration, S. Abe *et al.*, *Precision Measurement of Neutrino Oscillation Parameters with KamLAND*, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 221803, [[arXiv:0801.4589](#)].
- [6] A. Mondragon and E. Rodriguez-Jauregui, *CP violating phase and quark mixing angles from flavour permutational symmetry breaking*, *Rev. Mex. Fis.* **46** (2000) 5–22, [[hep-ph/0003104](#)].
- [7] J. Kubo, A. Mondragon, M. Mondragon, and E. Rodriguez-Jauregui, *The flavor symmetry*, *Prog. Theor. Phys.* **109** (2003) 795–807, [[hep-ph/0302196](#)].
- [8] G. L. Kane, *Modern elementary particle physics (Updated Edition)*. ISBN:0201117495, Addison Wesley, Advanced Book Program, Redwood City, Calif, 1993.
- [9] C. T. Pei and L. L. Fong, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. ISBN 0-19-851961-3, Oxford Univ. Press, Oxford, 1999.
- [10] L. B. Okun, *Leptons and quarks / L. B. Okun; translated from Russian by V. I. Kisin*. ISBN:0444860029, North-Holland Pub. Co. : distributors for the U.S.A. and Canada, Elsevier North-Holland, Amsterdam ; New York :, 1982.

- [11] **Particle Data Group** Collaboration, K. Nakamura *et al.*, *Review of particle physics*, *J. Phys.* **G37** (2010) 075021.
- [12] **Particle Data Group** Collaboration, C. Amsler *et al.*, *Review of particle physics*, *Phys. Lett.* **B667** (2008) 1–1340.
- [13] R. Gastmans, S. L. Wu, and T. T. Wu, *Higgs production at the large hadron collider: Phenomenological model and theoretical predictions*, *Nucl. Phys.* **B850** (2011) 53–95.
- [14] C. Jarlskog, *Commutator of the quark mass matrices in the standard electroweak model and a measure of maximal cp nonconservation*, *Phys. Rev. Lett.* **55** (Sep, 1985) 1039–1042.
- [15] C. Jarlskog, *Introduction to CP Violation*, *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.* **3** (1989) 3–40.
- [16] R. E. Martinez, *Teoría Cuántica de Campos*. Universidad Nacional de Colombia, 2002.
- [17] G. D’Ambrosio and G. Isidori, *CP violation in kaon decays*, *Int. J. Mod. Phys.* **A13** (1998) 1–94, [[hep-ph/9611284](#)].
- [18] **Belle** Collaboration, , I. Adachi, K. Adamczyk, and H. Aihara, *First measurement of ϕ_{i3} with a binned model-independent Dalitz plot analysis of $B^- \rightarrow DK$, $D^- \rightarrow Ks\pi + \pi$ decay*, [arXiv:1106.4046](#).
- [19] M. Kobayashi and T. Maskawa, *CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction*, *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973) 652–657.
- [20] L.-L. Chau and W.-Y. Keung, *Comments on the parametrization of the kobayashi-maskawa matrix*, *Phys. Rev. Lett.* **53** (Nov, 1984) 1802–1805.
- [21] H. Fritzsch and Z.-Z. Xing, *Flavor symmetries and the description of flavor mixing*, *Phys. Lett.* **B413** (1997) 396–404, [[hep-ph/9707215](#)].
- [22] N. Cabibbo, *Unitary symmetry and leptonic decays*, *Phys. Rev. Lett.* **10** (Jun, 1963) 531–533.
- [23] H. Fritzsch and Z.-z. Xing, *Mass and flavor mixing schemes of quarks and leptons*, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **45** (2000) 1–81, [[hep-ph/9912358](#)].
- [24] L. Wolfenstein, *Parametrization of the kobayashi-maskawa matrix*, *Phys. Rev. Lett.* **51** (Nov, 1983) 1945–1947.
- [25] **Belle Collaboration** Collaboration, K.-F. Chen and *et al.*, *Observation of anomalous $v(1s)\pi + \pi^-$ and $v(2s)\pi + \pi^-$ production near the $v(5s)$ resonance*, *Phys. Rev. Lett.* **100** (Mar, 2008) 112001.

- [26] **BABAR** Collaboration, B. Aubert *et al.*, *The BaBar detector*, *Nucl. Instrum. Meth.* **A479** (2002) 1–116, [[hep-ex/0105044](#)].
- [27] P. Hernandez, *Neutrino physics*, [arXiv:1010.4131](#).
- [28] E. K. Akhmedov, *Neutrino physics*, [hep-ph/0001264](#).
- [29] B. Kayser, *cpt, cp, and c phases, and their effects, in majorana-particle processes*, *Phys. Rev. D* **30** (Sep, 1984) 1023–1033.
- [30] Z.-z. Xing, *Neutrino masses and flavor mixing*, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **203-204** (2010) 82–117.
- [31] S. F. King, *Neutrino Physics*, [arXiv:0712.1750](#).
- [32] Imagen tomada de la pagina web:
<http://www.lastfm.es/group/Classic+Rock/forum/14969/-/506111/8>.
- [33] K. A. Hochmuth, S. T. Petcov, and W. Rodejohann, $U_{PMNS} = U_\ell^\dagger U_{nu}$, *Phys. Lett.* **B654** (2007) 177–188, [[arXiv:0706.2975](#)].
- [34] J. A. Aguilar-Saavedra and G. C. Branco, *Unitarity triangles and geometrical description of cp violation with majorana neutrinos*, *Phys. Rev. D* **62** (Oct, 2000) 096009.
- [35] J. F. Nieves and P. B. Pal, *Rephasing-invariant cp violating parameters with majorana neutrinos*, *Phys. Rev. D* **64** (Sep, 2001) 076005.
- [36] J. F. Nieves and P. B. Pal, *Minimal rephasing-invariant cp-violating parameters with dirac and majorana fermions*, *Phys. Rev. D* **36** (Jul, 1987) 315–317.
- [37] B. Pontecorvo, *Mesonium and antimesonium*, *Sov. Phys. JETP* **6** (1957) 429.
- [38] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, *Remarks on the unified model of elementary particles*, *Progress of Theoretical Physics* **28** (1962), no. 5 870–880.
- [39] B. Pontecorvo, *Neutrino experiments and the question of leptonic-charge conservation*, *Sov. Phys. JETP* **26** (1968) 984–988.
- [40] M. Maltoni, T. Schwetz, M. A. Tortola, and J. W. F. Valle, *Status of global fits to neutrino oscillations*, *New J. Phys.* **6** (2004) 122, [[hep-ph/0405172](#)].
- [41] T. Schwetz, M. A. Tortola, and J. W. F. Valle, *Three-flavour neutrino oscillation update*, *New J. Phys.* **10** (2008) 113011, [[arXiv:0808.2016](#)].
- [42] G. L. Fogli *et al.*, *Observables sensitive to absolute neutrino masses (Addendum)*, *Phys. Rev.* **D78** (2008) 033010, [[arXiv:0805.2517](#)].
- [43] A. Bandyopadhyay, S. Choubey, S. Goswami, S. T. Petcov, and D. P. Roy, *Neutrino Oscillation Parameters After High Statistics KamLAND Results*, [arXiv:0804.4857](#).

- [44] M. C. Gonzalez-Garcia and M. Maltoni, *Phenomenology with Massive Neutrinos*, *Phys. Rept.* **460** (2008) 1–129, [[arXiv:0704.1800](#)].
- [45] M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni, and J. Salvado, *Updated global fit to three neutrino mixing: status of the hints of $\theta_{13} \neq 0$* , *JHEP* **04** (2010) 056, [[arXiv:1001.4524](#)].
- [46] **Super-Kamiokande** Collaboration, Y. Ashie *et al.*, *A Measurement of Atmospheric Neutrino Oscillation Parameters by Super-Kamiokande I*, *Phys. Rev.* **D71** (2005) 112005, [[hep-ex/0501064](#)].
- [47] **MINOS** Collaboration, P. Adamson *et al.*, *Measurement of Neutrino Oscillations with the MINOS Detectors in the NuMI Beam*, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 131802, [[arXiv:0806.2237](#)].
- [48] **K2K** Collaboration, E. Aliu *et al.*, *Evidence for muon neutrino oscillation in an accelerator-based experiment*, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 081802, [[hep-ex/0411038](#)].
- [49] **Super-Kamiokande** Collaboration, S. Fukuda *et al.*, *Determination of Solar Neutrino Oscillation Parameters using 1496 Days of Super-Kamiokande-I Data*, *Phys. Lett.* **B539** (2002) 179–187, [[hep-ex/0205075](#)].
- [50] C. Galbiati *et al.*, *New results on solar neutrino fluxes from 192 days of Borexino data*, *J. Phys. Conf. Ser.* **136** (2008) 022001.
- [51] R. L. Hahn, *2008 neutrino 2008 conference available online at <http://www2.phys.canterbury.ac.nz/jaa53/>*, .
- [52] **CHOOZ** Collaboration, M. Apollonio *et al.*, *Search for neutrino oscillations on a long base-line at the CHOOZ nuclear power station*, *Eur. Phys. J.* **C27** (2003) 331–374, [[hep-ex/0301017](#)].
- [53] **T2K Collaboration** Collaboration, K. Abe *et al.*, *Indication of Electron Neutrino Appearance from an Accelerator-produced Off-axis Muon Neutrino Beam*, *Phys.Rev.Lett.* **107** (2011) 041801, [[arXiv:1106.2822](#)].
- [54] **MINOS** Collaboration, P. Adamson *et al.*, *Improved search for muon-neutrino to electron-neutrino oscillations in MINOS*, [arXiv:1108.0015](#).
- [55] S. Antusch, C. Biggio, E. Fernandez-Martinez, M. B. Gavela, and J. Lopez-Pavon, *Unitarity of the Leptonic Mixing Matrix*, *JHEP* **10** (2006) 084, [[hep-ph/0607020](#)].
- [56] L. Camilleri, E. Lisi, and J. F. Wilkerson, *Neutrino Masses and Mixings: Status and Prospects*, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **58** (2008) 343–369.
- [57] C. Barbero, L.-F. Li, G. L. Castro, and A. Mariano, *$\delta l = 2$ hyperon semileptonic decays*, *Phys. Rev. D* **76** (Dec, 2007) 116008.

- [58] J. Barranco, F. Gonzalez Canales, and A. Mondragon, *Universal Mass Texture, CP violation and Quark-Lepton Complementarity*, *Phys. Rev.* **D82** (2010) 073010, [arXiv:1004.3781].
- [59] F. Gonzalez Canales and A. Mondragon, *Universal mass texture and quark-lepton complementarity*, *J. Phys. Conf. Ser.* **171** (2009) 012063.
- [60] F. Gonzalez Canales and A. Mondragon, *On quark-lepton complementarity*, *AIP Conf. Proc.* **857** (2006) 287–292, [hep-ph/0606175].
- [61] Y. Koide, *FERMION - BOSON TWO-BODY MODEL OF QUARKS AND LEPTONS AND CABIBBO MIXING*, *Nuovo Cim. Lett.* **34** (1982) 201.
- [62] Y. Koide, *A New View of Quark and Lepton Mass Hierarchy*, *Phys. Rev.* **D28** (1983) 252.
- [63] Y. Koide, *Charged lepton mass sum rule from $U(3)$ family Higgs potential model*, *Mod. Phys. Lett.* **A5** (1990) 2319–2324.
- [64] A. Y. Smirnov, *Neutrinos: ‘...Annus mirabilis’*, hep-ph/0402264.
- [65] A. Y. Smirnov, *Neutrino mass and new physics*, arXiv:0910.1778.
- [66] H. Minakata, *Quark-lepton complementarity: A review*, hep-ph/0505262.
- [67] P. H. Frampton, S. T. Petcov, and W. Rodejohann, *On deviations from bimaximal neutrino mixing*, *Nucl. Phys.* **B687** (2004) 31–54, [hep-ph/0401206].
- [68] F. Plentinger, G. Seidl, and W. Winter, *Systematic parameter space search of extended quark-lepton complementarity*, *Nucl. Phys.* **B791** (2008) 60–92, [hep-ph/0612169].
- [69] C. Jarlskog, *Ambiguities pertaining to quark-lepton complementarity*, *Phys. Lett.* **B625** (2005) 63–66, [hep-ph/0507212].
- [70] Z.-z. Xing and H. Zhang, *Lepton mass matrices with four texture zeros*, *Phys. Lett.* **B569** (2003) 30–40, [hep-ph/0304234].
- [71] H. Fritzsch, *Calculating the Cabibbo Angle*, *Phys. Lett.* **B70** (1977) 436.
- [72] S. Pakvasa and H. Sugawara, *Discrete Symmetry and Cabibbo Angle*, *Phys. Lett.* **B73** (1978) 61.
- [73] H. Harari, H. Haut, and J. Weyers, *Quark Masses and Cabibbo Angles*, *Phys. Lett.* **B78** (1978) 459.
- [74] H. Fritzsch, *Quark Masses and Flavor Mixing*, *Nucl. Phys.* **B155** (1979) 189.
- [75] H. Ishimori *et al.*, *Non-Abelian Discrete Symmetries in Particle Physics*, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **183** (2010) 1–163, [arXiv:1003.3552].

- [76] G. Altarelli, F. Feruglio, and L. Merlo, *Revisiting Bimaximal Neutrino Mixing in a Model with S_4 Discrete Symmetry*, *JHEP* **05** (2009) 020, [[arXiv:0903.1940](#)].
- [77] R. de Adelhart Toorop, F. Bazzocchi, and L. Merlo, *The Interplay Between GUT and Flavour Symmetries in a Pati-Salam $\times S_4$ Model*, *JHEP* **08** (2010) 001, [[arXiv:1003.4502](#)].
- [78] F. Plentinger, G. Seidl, and W. Winter, *Group Space Scan of Flavor Symmetries for Nearly Tribimaximal Lepton Mixing*, *JHEP* **04** (2008) 077, [[arXiv:0802.1718](#)].
- [79] F. Plentinger and G. Seidl, *Mapping out $SU(5)$ GUTs with non-Abelian discrete flavor symmetries*, *Phys. Rev.* **D78** (2008) 045004, [[arXiv:0803.2889](#)].
- [80] A. Mondragon and E. Rodriguez-Jauregui, *The breaking of the flavour permutational symmetry: Mass textures and the CKM matrix*, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 093009, [[hep-ph/9807214](#)].
- [81] A. Mondragon and E. Rodriguez-Jauregui, *The CP violating phase $\delta(13)$ and the quark mixing angles $\Theta(13)$, $\Theta(23)$ and $\Theta(12)$ from flavour permutational symmetry breaking*, *Phys. Rev.* **D61** (2000) 113002, [[hep-ph/9906429](#)].
- [82] W. Buchmuller and D. Wyler, *CP violation, neutrino mixing and the baryon asymmetry*, *Phys. Lett.* **B521** (2001) 291–298, [[hep-ph/0108216](#)].
- [83] M. Bando and M. Obara, *Neutrino mass matrix predicted from symmetric texture*, *Prog. Theor. Phys.* **109** (2003) 995–1015, [[hep-ph/0302034](#)].
- [84] M. Bando, S. Kaneko, M. Obara, and M. Tanimoto, *Symmetric mass matrix with two zeros in SUSY $SO(10)$ GUT, lepton flavor violations and leptogenesis*, [hep-ph/0405071](#).
- [85] Z.-z. Xing, D. Yang, and S. Zhou, *Broken S_3 Flavor Symmetry of Leptons and Quarks: Mass Spectra and Flavor Mixing Patterns*, *Phys. Lett.* **B690** (2010) 304–310, [[arXiv:1004.4234](#)].
- [86] G. C. Branco, D. Emmanuel-Costa, R. Gonzalez Felipe, and H. Serodio, *Weak Basis Transformations and Texture Zeros in the Leptonic Sector*, *Phys. Lett.* **B670** (2009) 340–349, [[arXiv:0711.1613](#)].
- [87] E. R. Jauregui, *Matriz de Mezclas de los Quarks y Simetría Permutacional del Sabor*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2000.
- [88] K. T. Haruo Yanai and Y. Takane, *Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices and Singular Value Decomposition*. Springer New York Dordrecht Heidelberg London, New York, 2011.
- [89] G. W. Stewart, *Introduction to Matrix Computations*. Academic Press, New York, 1973.

- [90] H. Nishihara, K. Matsuda, and T. Fukuyama, *Lepton and quark mass matrices*, *Phys. Rev.* **D60** (1999) 013006, [[hep-ph/9902385](#)].
- [91] C. Jarlskog, *Commutator of the Quark Mass Matrices in the Standard Electroweak Model and a Measure of Maximal CP Violation*, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 1039.
- [92] C. Jarlskog, *A Basis Independent Formulation of the Connection Between Quark Mass Matrices, CP Violation and Experiment*, *Z. Phys.* **C29** (1985) 491–497.
- [93] R. N. Mohapatra and A. Y. Smirnov, *Neutrino Mass and New Physics*, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **56** (2006) 569–628, [[hep-ph/0603118](#)].