



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GRÁFICAS PERFECTAS Y
DIGRÁFICAS NÚCLEO-PERFECTAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

DANIEL BALAM CRUZ HUITRÓN

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. MIKA OLSEN

2011





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Gráficas perfectas y digráficas núcleo-perfectas

Daniel Balam Cruz Huitrón

2011

Datos del alumno

Cruz Huitrón, Daniel Balam
2167 7634
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
406001007

Tutora

Dra. Mika Olsen

Sinodal 1

Dra. Rita Esther Zuazua Vega

Sinodal 2

Dr. Diego Antonio González Moreno

Sinodal 3

Dra. Diana Avella Alaminos

Sinodal 4

M. en C. Ilan Abraham Goldfeder Ortiz

Datos del trabajo escrito

Gráficas perfectas y digráficas núcleo-perfectas
68p
2011

Never say die!

Agradecimientos

Dedico este trabajo a mi madre, a mi padre y a mi hermano.

Agradezco a la Facultad de Ciencias de la UNAM, a mis amigos por los buenos tiempos y a todos mis profesores, incluso a los malos. En especial agradezco a José Antonio Alcántara, Pietra Delgado, Alejandro Díaz-Barriga, Daniel Labardini, Javier Páez, Ana Irene Ramírez y Rodolfo San Agustín. Por supuesto, extendo mi agradecimiento a mis tutoras Mika Olsen y Mucuy-kak Guevara y a mis sinodales por su apoyo, paciencia y por el tiempo que me dedicaron.

Índice

Introducción	v
1 Conceptos básicos	1
1.1 Conceptos básicos de gráficas	1
1.2 Gráficas conexas y 2-conexas	3
1.3 Conceptos básicos de digráficas	3
1.4 Ciclos dirigidos	5
1.5 Digráficas fuertemente conexas	7
1.6 Clanes	9
2 Digráficas núcleo-perfectas	13
2.1 Conceptos básicos de núcleos	13
2.2 Algunos ejemplos de núcleos	14
2.3 Digráficas núcleo-perfectas	15
2.4 Digráficas núcleo-imperfectas críticas	16
2.5 Algunas clases de digráficas núcleo-perfectas	17
2.5.1 Digráficas simétricas	17
2.5.2 Digráficas transitivas	18
2.5.3 Digráficas acíclicas	18
2.5.4 Digráficas sin ciclos impares	19
2.5.5 Digráficas con ciclos simétricos	20
3 Gráficas perfectas	23
3.1 Número cromático	23
3.2 Gráficas perfectas	24
3.2.1 Gráficas bipartitas	25
3.2.2 Gráficas trianguladas	26
3.2.3 Gráficas de intervalos	28
3.3 El Teorema Fuerte de las Gráficas Perfectas	31

3.4	El Teorema de las Gráficas Perfectas	31
3.5	Una caracterización de las gráficas perfectas	38
4	Gráficas solubles	41
4.1	Orientaciones	41
4.2	Gráficas solubles	42
4.3	Gráficas no-solubles minimales	43
4.4	Toda gráfica soluble es perfecta	45
4.5	Núcleos fraccionales	46
4.6	Función característica	48
4.7	Ciclos hamiltonianos	49
4.8	Teorema de Scarf	50
4.9	Creando núcleos fraccionales fuertes	51
4.10	Núcleos fraccionales fuertes	55
4.11	Toda gráfica perfecta es soluble	57
Conclusión		61
Índice de símbolos		63
Índice de figuras		65
Bibliografía		66

Introducción

El concepto del núcleo de una digráfica fue presentado por J. von Neumann y O. Morgenstern en 1944, como parte de la teoría de juegos. Las aplicaciones de los núcleos alcanzan campos como la lógica, inteligencia artificial, combinatoria, entre otros.

Una gráfica es perfecta si el orden de su subgráfica completa más grande es suficiente para colorearla. El desarrollo de estas gráficas ha sido constante desde la presentación del Teorema Fuerte de las Gráficas Perfectas en 1960, hasta su demostración, en 2006. Diversas propiedades han surgido con los años, en particular C. Berge y P. Duchet conjeturaron en 1963 que una gráfica es perfecta si y sólo si toda orientación normal resulta en una digráfica núcleo-perfecta. Este resultado representa un importante vínculo entre dos conceptos fundamentales de la teoría de gráficas: coloraciones y núcleos.

La prueba de esta conjetura no aparece como tal en la literatura, pero se sigue de los resultados de tres artículos distintos: *Recent problems and results about Kernels in directed graphs* ([3], 1990), *Perfect graphs are kernel solvable* ([4], 1994) y *The Strong Perfect Graph Theorem* ([6], 2006). En esta tesis presentamos una demostración de esta conjetura, usando un artículo tal vez menos conocido: *Fractional Kernels in digraphs* ([1],1998), en vez de [4], con lo cual facilitamos y disminuimos la longitud de la complicada demostración.

Comenzamos con un capítulo que ayuda al lector a introducirse a los conceptos de gráficas y digráficas que posteriormente serán relevantes en las demostraciones. En el segundo capítulo presentamos el concepto de núcleo, así como conceptos auxiliares, para estudiar algunas familias de digráficas que son núcleo-perfectas.

En el tercer capítulo trabajamos con el concepto de coloraciones y también mostramos algunas familias de gráficas que son perfectas. Presentamos el Teorema

Fuente de las Gráficas Perfectas y demostramos el Teorema de las Gráficas Perfectas, así como una caracterización de esta clase de gráficas. Finalmente en el cuarto capítulo presentamos el concepto que vincula a los dos capítulos previos, las gráficas solubles, y finalmente damos la demostración de la conjetura.

Capítulo 1

Conceptos básicos

1.1. Conceptos básicos de gráficas

Sea $G = (V, E)$ una gráfica, donde $V(G)$ es el conjunto de sus vértices y $E(G) \subseteq V \times V$ es el conjunto de sus *aristas*. El *orden* de G es $|V|$ y el *tamaño* de G es $|E|$. Una arista es una pareja no ordenada de elementos de V , de modo que $(u, v) = (v, u)$. Decimos que la arista $e = (u, v)$ es *incidente* a u y a v , y que u y v generan la arista e .

Una *subgráfica* de G es un subconjunto $U \subseteq V$ junto con un subconjunto de las aristas que los vértices de U generen en E . Una *subgráfica inducida* de G es un subconjunto $U \subseteq V$ junto con toda arista que los vértices de U generen en E . Denotamos por $G[U]$ a la subgráfica inducida por $U \subseteq V$ en G . En la figura 1.1 subrayamos las aristas que pertenecen a la subgráfica generada por $U = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_8\}$.

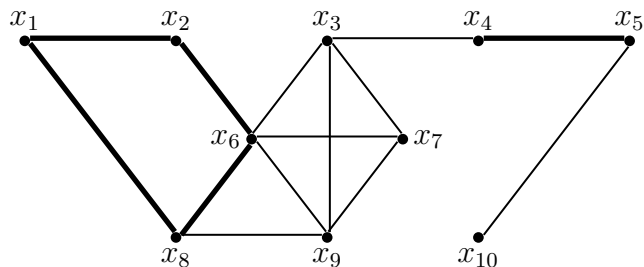


Figura 1.1 Diversos ejemplos de subgráficas.

En este trabajo, trataremos exclusivamente el caso de gráficas de orden finito y sin *lazos* (aristas de la forma (u, u)). Adicionalmente, siempre que hablemos de una subgráfica nos referimos a una subgráfica inducida. Usamos la notación $H \subseteq G$ para cualquier subgráfica H de G y si $V(G) \neq V(H)$ decimos que H es una subgráfica *propia* de G y la denotamos por $H \subset G$. Sea $U \subseteq V$, denotamos por $G - U$ a la subgráfica $G[V \setminus U]$.

Una subgráfica $H \subseteq G$ es *maximal* respecto a una propiedad p si H cumple p pero $G[V(H) \cup \{v\}]$, con $v \in V(G - H)$, no cumple p . Del mismo modo, H es *minimal* respecto a una propiedad p si H cumple p pero $G[V(H) \setminus \{v\}]$, con $v \in V(H)$, no cumple p .

Sea $U \subset V$, denotamos por $N(U)$ a la *vecindad de U* , es decir, los vértices $v \in V \setminus U$ tales que existe $u \in U$ tal que $(u, v) \in E$. Los elementos de $N(U)$ son los *vecinos* de U . $N[U] = N(U) \cup U$ es la *vecindad cerrada* de U . El *grado* de $v \in V$ es el número de aristas de G en las que v es incidente, y lo denotamos por $d(v)$.

Un *camino* en G es una sucesión de vértices $P = (x_0, \dots, x_n)$ tal que para cada vértice x_i , $i \in \{0, \dots, n - 1\}$, la arista $(x_i, x_{i+1}) \in E$. Una *trayectoria* es un camino $T = (x_0, \dots, x_n)$ que no repite ningún vértice. Un *ciclo* de longitud n en G es una trayectoria «cerrada» $C_n = (x_0, \dots, x_n)$, es decir, una trayectoria en la cual $x_0 = x_n$. La *longitud* de un camino es el número de aristas que posee, la longitud de un ciclo es el número de aristas o de vértices que posee. Un camino $P = (u, \dots, v)$ y una trayectoria $T = (u, \dots, v)$ reciben el nombre de *uv-camino* y *uv-trayectoria*, respectivamente. A una gráfica sin ciclos se le llama *gráfica acíclica*.

Denotamos por $\overline{G} = (V, \overline{E})$ al *complemento* de la gráfica G , donde $(u, v) \in \overline{E}$ si y sólo si $(u, v) \notin E$. Una gráfica es *completa* si para todo par de vértices $u, v \in V$ la arista $(u, v) \in E$. Es decir, puedes transitar entre cualesquiera dos vértices en un solo paso (usando una sola arista). Denotamos por K_n a la gráfica completa con n vértices.

Observemos que en la figura 1.1 la subgráfica generada por $\{x_3, x_6, x_7, x_9\}$ es completa. Adicionalmente, $P = (x_1, x_2, x_6, x_7, x_9, x_6, x_3)$, $T = (x_1, x_2, x_6, x_3)$ y $C = (x_6, x_9, x_8, x_6)$ son ejemplos de un camino, una trayectoria y un ciclo, respectivamente.

1.2. Gráficas conexas y 2-conexas

Una gráfica es *conexa* si entre cualesquiera dos vértices existe una trayectoria en G y es *disconexa* si para algún par de sus vértices dicha trayectoria no existe. Una *componente* Y de G es una subgráfica conexa maximal. Si G es conexa, $X \subset V$ y $G - X$ es desconexa, decimos que X *desconecta* a G , y llamamos a X un *conjunto de corte* o *separador* de G . En caso de que X consista de un solo vértice x , lo llamamos *vértice de corte* de G . Si u y v están en distintas componentes de $G - X$, decimos que X los separa. Es claro que para que X separe a u y v , cada uv -trayectoria contiene un vértice de X .

Proposición 1.1. *Sea X un conjunto de corte mínimo de G , entonces cada vértice de X tiene un vecino en cada componente de $G - X$.*

Demostración. Supongamos que existe $x \in X$ que no tiene un vecino en la componente G_1 de $G - X$. Entonces $G - (X \setminus \{x\})$ separa a x y a G_1 , y es por lo tanto un conjunto de corte más pequeño que X , una contradicción. □

Una gráfica es *2-conexa* si entre cualesquiera dos vértices existen dos trayectorias ajenas en G o, equivalentemente, todo par de vértices están en un ciclo de G .

Proposición 1.2. *Una gráfica 2-conexa no contiene vértices de corte.*

Demostración. Supongamos que existe un vértice de corte $x \in V$, es decir, existen vértices $u, v \in N(x)$ tal que x los separa. Entonces, toda uv -trayectoria pasa por x , por lo cual no pueden existir dos uv -trayectorias ajenas, una contradicción. □

En la figura 1.2 indicamos un conjunto de corte y las aristas que pierde la gráfica están marcadas con líneas punteadas, además son claramente visibles las componentes de $G - X$. Esta gráfica es además 2-conexa, y X es un conjunto de corte mínimo de G .

1.3. Conceptos básicos de digráficas

Una digráfica $D = (V, A)$ es un par ordenado, donde $V(D)$ es el conjunto de sus vértices, y $A(D) \subseteq V \times V$ es el conjunto de sus *arcos*. Un arco (u, v) es una arista dirigida, es decir, una pareja ordenada de elementos de V , de modo que $(u, v) \neq (v, u)$, y lo abreviamos como $u \rightarrow v$. Si $(u, v) \in A$ y $(v, u) \notin A$ decimos

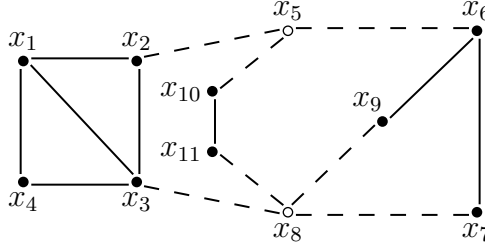


Figura 1.2 $X = \{x_5, x_8\}$ es un conjunto de corte de G .

que el arco (u, v) es un *arco asimétrico* de u a v . Si $u \rightarrow v$ y $u \leftarrow v$ decimos que existen *arcos simétricos* entre u y v , y lo abreviamos como $u \leftrightarrow v$. La *cola* del arco $a = u \rightarrow v = (u, v)$ es u y la *punta* es v , decimos que el arco a es incidente desde u y hacia v , y que u y v generan al arco a .

Al igual que en el caso de las gráficas, en este trabajo hablaremos exclusivamente de digráficas de orden finito y sin *lazos* (arcos de la forma (u, u)). Una *subgráfica (dirigida) inducida* de D es un subconjunto $U \subseteq V$ junto con todos los arcos que los vértices de U generen en A . Denotamos por $D[U]$ a la subgráfica inducida por $U \subseteq V$ en D . Usamos la notación $H \subseteq D$ para cualquier subgráfica H de D y si $V(D) \neq V(H)$ o $V(D) \setminus V(H) \neq \emptyset$ decimos que H es una subgráfica *propia* de D y la denotamos por $H \subset D$.

Si $u \rightarrow v$, decimos que u es *in-vecino* de v y que v es *ex-vecino* de u . El *ex-grado* de $v \in V$ es el número de ex-vecinos de v , y lo denotamos por $d^+(v)$. El *in-grado* de $v \in V$ es el número de in-vecinos de v , y lo denotamos por $d^-(v)$. El *grado total* o simplemente *grado* de $v \in V$ es el número de arcos de D a los que v es incidente, y lo denotamos por $d(v)$.

En una digráfica denotamos por $N^-(U)$ a la *in-vecindad* de U , el conjunto de vértices $v \in V \setminus U$ para los cuales existe $u \in U$ tal que $v \rightarrow u$. Del mismo modo denotamos por $N^+(U)$ a la *ex-vecindad* de U , el conjunto de vértices $v \in V \setminus U$ para los cuales existe $u \in U$ tal que $v \leftarrow u$. Así mismo $N^-[U] = N^-(U) \cup U$ y $N^+[U] = N^+(U) \cup U$ son respectivamente la *in-vecindad cerrada* y la *ex-vecindad cerrada* de U . $N(U) = N^-(U) \cup N^+(U)$ es la *vecindad total* o simplemente la *vecindad* de U , es decir, el conjunto de vértices $v \in V \setminus U$ para los cuales existe $u \in U$ tal que $v \rightarrow u$ o $v \leftarrow u$. Los vértices de $N(U)$ son los *vecinos* (tanto in-vecinos como ex-vecinos) de U .

Algunos tipos de ciclos son particularmente importantes, \mathcal{C} es un *ciclo hamiltoniano* en D si cumple que $V(D) = V(\mathcal{C})$, es decir, \mathcal{C} pasa por todos los vértices de D . Un camino es *simétrico* si existen arcos simétricos entre todo par de vértices consecutivos del camino y es *asimétrico* si no existen arcos simétricos entre ningún par de vértices consecutivos del mismo, en particular estaremos interesados en los ciclos simétricos y asimétricos.

Proposición 1.3. *Si existe un camino cerrado no simétrico en una digráfica D , entonces existe un ciclo en D .*

Demostración. Sea P un camino cerrado en D , como P no es simétrico, existe un par de vértices $u, v \in V(P)$ tales que en P no existen arcos simétricos entre ellos. Es decir, el arco (u, v) es asimétrico y como P es cerrado existe una vu -trayectoria de longitud mínima T en P . La longitud de T es mayor o igual a dos, entonces $(u, v) \cup T$ es un ciclo. □

A una digráfica sin ciclos se le llama *digráfica acíclica*. En la digráfica de la figura 1.3 hemos subrayado un ciclo hamiltoniano, un ejemplo de ciclo simétrico es $D[x_7, x_8, x_{12}]$ y $(x_1, x_2, x_5, x_9, x_1)$ es un ciclo asimétrico. $D[x_1, \dots, x_7]$ es una digráfica acíclica.

Proposición 1.4. *Una digráfica acíclica tiene al menos un pozo y al menos una fuente*

Demostración. Sea $D = (V, A)$ una digráfica acíclica y sea $T = (x_0, \dots, x_n)$ una trayectoria máxima en D . Como D es acíclica, $x_0 \neq x_n$ y por la maximalidad de T no podemos extender esa trayectoria más allá de x_n , por lo tanto $d(x_n) = d^-(x_n)$ y x_n es un pozo. Análogamente $d(x_0) = d^+(x_0)$ y por lo tanto x_0 es una fuente. □

En ciertas digráficas acíclicas podemos definir un orden parcial estricto de la siguiente manera:

Proposición 1.5. *Sea $D = (V, A)$ una digráfica acíclica y sin arcos simétricos, sea $<$ una relación binaria definida sobre V , tal que para $u, v \in V$, $u < v$ si existe una uv -trayectoria en D . Entonces $<$ es un orden parcial estricto de D y $<$ es único (salvo el orden $<'$ definido de manera opuesta, $u <' v$ si y sólo si existe $T = (v, \dots, u) \in D$).*

Demostración. Debemos demostrar que el orden $<$ cumple las siguientes propiedades para todos $u, v, w \in V$:

1. $u \not< u$ (irreflexividad).
2. Si $u < v$ entonces $v \not< u$ (anti-simetría).
3. Si $u < v$ y $v < w$ entonces $u < w$ (transitividad).

Como D es simple y acíclica, no existen uu -trayectorias o lazos en D , por lo cual se cumple 1.5.1. Si $u < v$ y $v < u$, entonces existe una uv -trayectoria T y una vu -trayectoria T' en D . El camino cerrado $T \cup T'$ no puede tener arcos simétricos entre sus vértices, por lo tanto, por la proposición 1.3 existe un ciclo en D , una contradicción, por lo tanto se cumple 1.5.2. Si $P_1 = (u, \dots, v)$ y $P_2 = (v, \dots, w)$ son trayectorias en D , entonces $P_3 = P_1 \cup P_2 = (u, \dots, v, \dots, w)$ es una trayectoria en D (no puede suceder que $P_1 \cap P_2 \neq v$ pues existiría un ciclo en D), por lo tanto $u < w$, lo cual implica que $<$ es un orden parcial estricto.

Supongamos que existen $<_1$ y $<_2$, dos ordenes parciales estrictos distintos definidos en V , y supongamos que ninguno de ellos es $<'$. Es decir, existen $u, v \in V$ tales que $u <_1 v$ y $v <_2 u$ y entonces existe un camino cerrado que contiene a u y v . Por la proposición 1.3 existe un ciclo en ese camino cerrado, una contradicción. \square

1.5. Digráficas fuertemente conexas

Una digráfica $D = (V, A)$ es *fuertemente conexa* si para todo par de vértices $u, v \in V$ existen una uv -trayectoria y una vu -trayectoria en D . Una *componente fuertemente conexo* o simplemente *componente fuerte* de una digráfica es una subgráfica maximal con la propiedad de ser fuertemente conexa. En la figura 1.4 subrayamos las componentes fuertes de la digráfica.

Proposición 1.6. *Cada vértice de una digráfica pertenece a una y sólo una componente fuerte.*

Demostración. Supongamos que existe un vértice u que está en dos componentes fuertes Y_1 y Y_2 de D . Descartamos el caso donde (sin pérdida de generalidad) $Y_1 = u$, pues eso quiere decir que $Y_1 \subseteq Y_2$. Si $Y_1, Y_2 \neq \{u\}$, existen trayectorias $T_1 = (v, \dots, u)$ y $T'_1 = (u, \dots, v)$ para un $v \in V(Y_1)$ y trayectorias $T_2 = (u, \dots, w)$ y $T'_2 = (w, \dots, u)$ para un $w \in V(Y_2)$. Por lo tanto $T = T_1 \cup T_2$ es una vw -trayectoria y $T' = T'_2 \cup T'_1$ es

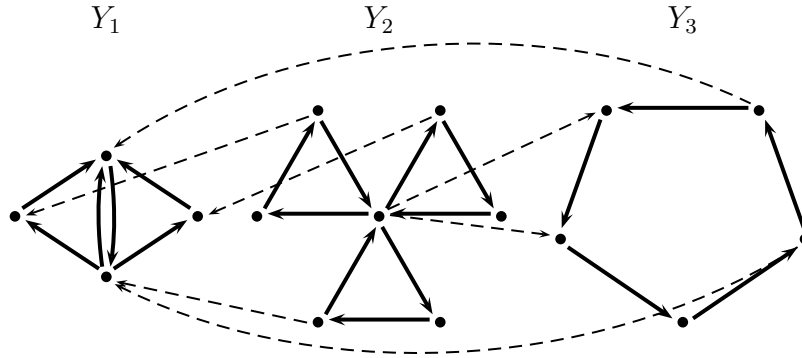


Figura 1.4 Las componentes fuertemente conexas de una digráfica.

una wv -trayectoria, es decir w pertenece a la componente fuerte Y_1 , lo cual contradice la maximalidad de Y_1 .

□

Por lo tanto para toda digráfica existe una partición de sus vértices, de modo que cada clase de equivalencia induce una componente fuerte. Sin embargo, no todo arco de la digráfica pertenece a una componente fuerte, de hecho podemos decir lo siguiente acerca de los arcos entre componentes fuertes.

Proposición 1.7. Sean Y_1 y Y_2 componentes fuertes de una digráfica, todos los arcos entre vértices de Y_1 y Y_2 van (sin pérdida de generalidad) de Y_1 a Y_2 .

Demostración. Sean $u, u' \in V(Y_1)$ y $v, v' \in V(Y_2)$, supongamos que existen los arcos $e_1 = (u, v), e_2 = (v', u') \in A$. Existen trayectorias $T_1 = (u', \dots, u)$ en Y_1 y $T_2 = (v, \dots, v')$ en Y_2 . Por lo tanto $T_1 \cup e_1$ es una $u'v$ -trayectoria y $T_2 \cup e_2$ es una vu' -trayectoria, lo cual contradice la maximalidad de Y_1 .

□

Para toda digráfica $D = (V, A)$ podemos construir una nueva digráfica $M(D)$ de modo que cada $v \in V(M(D))$ representa una componente fuerte de $Y(v)$ de D , y $u \rightarrow v \in A(M(D))$ si y sólo si existen $u_1 \in Y(u)$ y $v_1 \in Y(v)$ tales que $u_1 \rightarrow v_1 \in A$. Llamamos a $M(D)$ la *digráfica de contracción* de D , pues $M(D)$ equivale a contraer cada componente fuerte a un solo vértice.

Una componente fuerte Y para el cual no existen arcos que van de Y a $D - Y$ se llama *componente fuerte terminal* (por ejemplo, Y_1 en la figura 1.4). Análogamente,

una componente para el cual no existen arcos que van de $D - Y$ a Y se llama *componente fuerte inicial* (por ejemplo, Y_2 en la figura 1.4). Demostramos un último resultado:

Proposición 1.8. *Toda digráfica contiene una componente fuerte terminal y una componente fuerte inicial.*

Demostración. Sea D una digráfica, consideremos $M(D)$ y demostramos que es acíclica. Supongamos lo contrario, entonces existe $v \in V(M(D))$ que está contenido en un ciclo $C = (v, v_1, \dots, v_n, v)$ en $M(D)$. Entonces C pertenece a una componente fuerte de $M(D)$, y por lo tanto $Y(v), Y(v_1), \dots, Y(v_n)$ pertenecen a una componente fuerte de D , una contradicción a la maximalidad de cada uno de ellos.

Como $M(D)$ es acíclica, por la proposición 1.4 contiene un pozo u y una fuente v , entonces $Y(u)$ y $Y(v)$ son respectivamente una componente fuerte terminal y una componente fuerte inicial de D .

□

1.6. Clanes

Una digráfica es un *torneo* si para todo par de vértices $u, v \in V$ existe un único arco entre ellos, ya sea $u \rightarrow v$ o $u \leftarrow v$. Una digráfica es un *clan* si para todo par de vértices $u, v \in V$ existe por lo menos un arco entre ellos. Los clanes también reciben el nombre de digráficas *semicompletas*, pues puedes transitar entre cualquier par de vértices en un solo paso (usando un solo arco), en por lo menos una dirección. Una digráfica es *completa* si para todo par de vértices $u, v \in V$ existen arcos simétricos entre ellos. Es decir, puedes transitar entre cualquier par de vértices en un solo paso, en ambas direcciones.

En la figura 1.5 tenemos tres ejemplos de clanes, siendo la primera digráfica un torneo, la tercera una digráfica completa y la segunda es un clan, pero no es un torneo ni completa. Por definición todo torneo y digráfica completa son clanes. Denotamos por K_n a un clan de orden n .

Dos tipos importantes de digráficas son las digráficas simétricas y las digráficas transitivas. Una digráfica es *simétrica* si siempre que $u \rightarrow v$, entonces $u \leftarrow v$. Una digráfica completa es un ejemplo de un clan simétrico. Una digráfica es *transitiva* si siempre que $u \rightarrow v$ y $v \rightarrow w$ entonces $u \rightarrow w$.

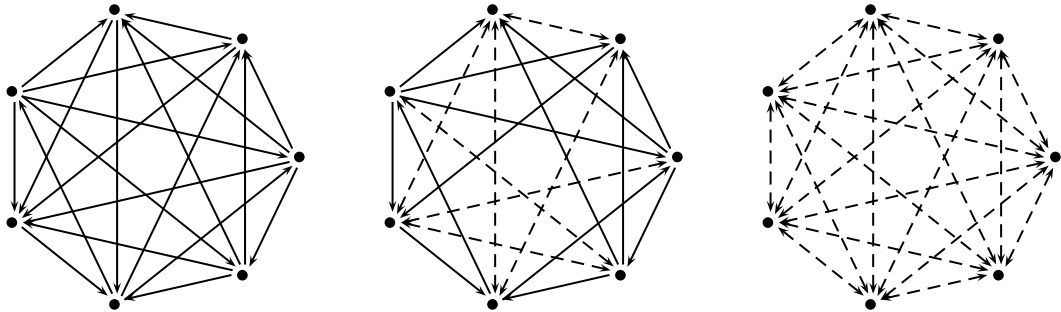


Figura 1.5 Ejemplos de clanes.

Proposición 1.9. *Todo torneo transitivo es acíclico.*

Demostración. Sea $D = (V, E)$ un torneo transitivo y supongamos que existe un ciclo $C_n = (x_0, \dots, x_n, x_0) \subseteq D$. Como $x_0 \rightarrow x_1, x_1 \rightarrow x_2$, por la transitividad de D tenemos que $x_0 \rightarrow x_2$. De hecho tenemos que $x_0 \rightarrow x_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto $x_0 \leftarrow x_n$, una contradicción, pues D es un torneo. □

Podemos entonces concluir:

Proposición 1.10. *Todo torneo transitivo tiene un único pozo y una única fuente.*

Demostración. Sea $D = (V, A)$ un torneo transitivo, por la proposición 1.9 D es acíclico y por la proposición 1.4 tiene al menos un pozo u y al menos una fuente v . Para todo vértice $x \in V \setminus \{u\}$, $x \rightarrow u, x \not\leftarrow u$, por lo tanto u es el único pozo de D . Análogamente, v es la única fuente de D . □

Una propiedad p de una gráfica o digráfica es *hereditaria* si p se cumple para toda subgráfica (inducida).

Proposición 1.11. *La simetría y la transitividad son propiedades hereditarias en digráficas.*

Demostración. Demostramos que la simetría es hereditaria, la demostración de la transitividad es análoga. Sea D simétrica y supongamos que existe una subgráfica no simétrica $H \subset D$, es decir existen $u, v \in V(H) \subset V(G)$ tal que $(u, v) \in A(H), (v, u) \notin A(H)$. Por la definición de $H = D[V(H)]$, también tenemos $(u, v) \in A(D), (v, u) \notin A(D)$, una contradicción. □

Dos digráficas $D_1 = (V_1, A_1)$ y $D_2 = (V_2, A_2)$ son *isomorfas* si existe una función biyectiva $f : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $(u, v) \in A_1$ si y sólo si $(f(u), f(v)) \in A_2$.

Proposición 1.12. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un único torneo transitivo de orden n , salvo isomorfismo.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre n . Para $n \in \{1, 2, 3\}$ el resultado es evidente. Supongamos que D es el único torneo transitivo con n vértices, sea $D' = (V, A)$ un torneo transitivo con $n + 1$ vértices. Sea $u \in V$ un pozo de D' , por la proposición 1.11, $D' - u$ es un torneo transitivo y por lo tanto $D' - u = D$. Por lo tanto D' también es el único torneo transitivo de orden $n + 1$. □

Capítulo 2

Digráficas núcleo-perfectas

2.1. Conceptos básicos de núcleos

Para una gráfica o digráfica, un conjunto $U \subseteq V$ es *independiente* si $E(G[U]) = \emptyset$ o $A(G[U]) = \emptyset$, respectivamente. Solamente en el caso de digráficas llamamos conjunto *absorbente* a $U \subseteq V$ si $V \setminus U \subseteq N^-(U)$, es decir, todo $v \in V$ pertenece a U o es in-vecino de U . Análogamente llamamos conjunto *dominante* a $U \subseteq V$ si $V \setminus U \subseteq N^+(U)$, es decir, todo $v \in V$ pertenece a U o es ex-vecino de U .

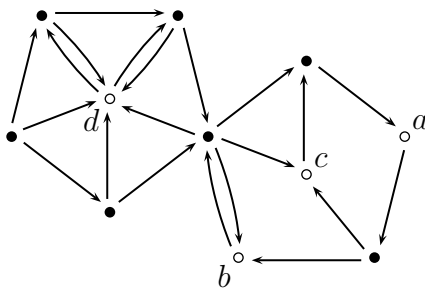


Figura 2.1 $\{a, b, c, d\}$ es núcleo de la digráfica.

Un *núcleo* de una digráfica es un conjunto que es tanto independiente como absorbente. Por ejemplo, en la figura 2.1, indicamos un núcleo de D . Podemos decir un poco más de un núcleo:

Proposición 2.1. *Un núcleo de una digráfica es un conjunto independiente maximal y un conjunto absorbente minimal.*

Demostración. Sea U un núcleo de $D = (V, A)$. Si $x \in V \setminus U$, entonces existe $u \in U$ tal que $x \rightarrow u$, por lo tanto $U \cup \{x\}$ no es independiente. Si $u \in U$, entonces $U' = U \setminus \{u\}$ no es absorbente pues $N[u] \cap U' = \emptyset$.

□

Aclaremos que existen autores que definen un núcleo como un conjunto independiente y dominante (véase por ejemplo [1]).

2.2. Algunos ejemplos de núcleos

Para determinar si un conjunto dado es un núcleo, hay que verificar que todo vértice de la digráfica está en el núcleo o es absorbido por (es in-vecino de) el núcleo. Es muy sencillo verificar que ciertas clases de digráficas tienen un núcleo:

Proposición 2.2. *Un clan tiene un núcleo si y sólo si tiene un pozo.*

Demostración. Todo núcleo de un clan consiste de un conjunto con un solo vértice, por lo tanto ese vértice es un pozo.

□

Si una trayectoria $T = (x_0 \dots, x_n)$ es de longitud par, el núcleo de T consiste de sus vértices pares, y si es de longitud impar, el núcleo de T consiste de sus vértices impares (véase la figura 2.2), por lo cual tenemos:

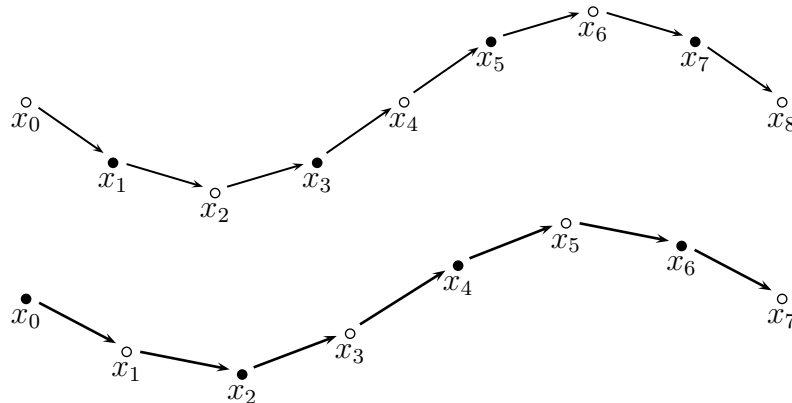


Figura 2.2 La existencia de núcleos en una trayectoria par y en una impar.

Observación 2.3. *Toda trayectoria tiene un núcleo.*

Los ciclos pares tienen dos núcleos, uno consiste de sus vértices pares y el otro de sus vértices impares. El caso contrario, un ciclo impar C_{2k+1} , no tiene un núcleo pues todo conjunto independiente U tiene orden a lo más k y absorbe por lo tanto a lo más a k vértices, dejando siempre un vértice que no pertenece a U y que tampoco es absorbido por él. En la figura 2.3 destacamos los vértices que componen uno de los núcleos de un ciclo par, mientras que el otro núcleo está formado por los vértices restantes.

Observación 2.4. *Todo ciclo par tiene un núcleo, todo ciclo impar no tiene un núcleo.*

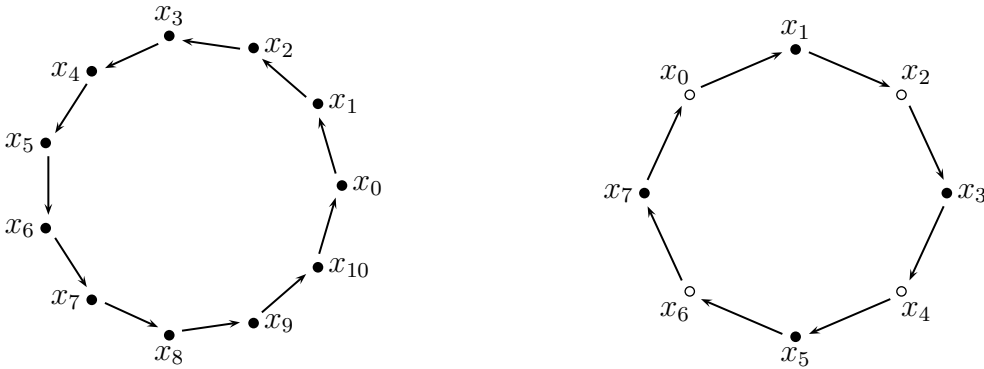


Figura 2.3 La existencia de núcleos en un ciclo impar y en uno par.

2.3. Digráficas núcleo-perfectas

Una digráfica que tiene la propiedad de que toda subgráfica $H \subseteq D$ tiene un núcleo se le llama *núcleo-perfecta*. Si bien puede ser difícil determinar que vértices pertenecen al núcleo de una subgráfica $H \subset D$ cualquiera, mediante la proposición 2.2 obtenemos un criterio muy sencillo si H es un clan:

Observación 2.5. *Todo clan de una digráfica núcleo-perfecta tiene un pozo.*

Esta condición es necesaria, pero no suficiente, para que una digráfica sea núcleo-perfecta, por ejemplo, todo clan de un ciclo impar de longitud mayor o igual a 5 tiene un núcleo, pero ya hemos visto que un ciclo impar no tiene núcleo. Un ciclo

impar es un ejemplo de una digráfica núcleo-imperfecta crítica, las cuales revisamos en la siguiente sección. En la Sección 2.5 revisaremos diversas clases de digráficas núcleo-perfectas.

2.4. Digráficas núcleo-imperfectas críticas

Una digráfica que no es núcleo-perfecta pero que cualquier subgráfica $H \subset G$ es núcleo-perfecta se le llama digráfica *núcleo-imperfecta crítica*. En la figura 2.4 tenemos un ejemplo, podemos ver que no tiene núcleo pero remover cualquier vértice (por ejemplo x_0) permite la existencia de un núcleo (en ese caso, $\{x_3, x_6, x_9\}$).

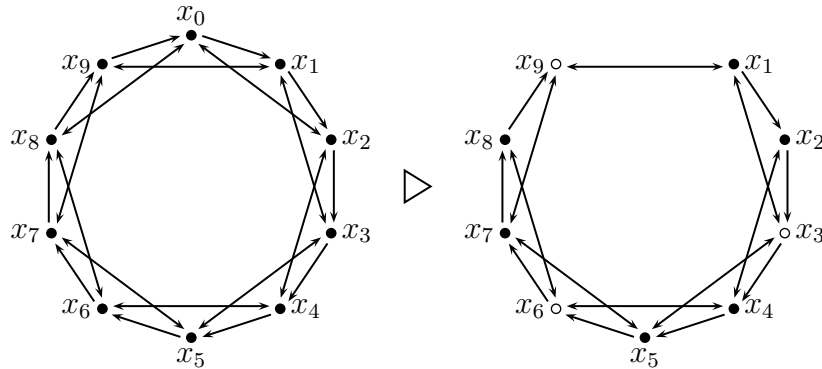


Figura 2.4 Una digráfica núcleo-imperfecta crítica.

Proposición 2.6. *Los ciclos impares son digráficas núcleo-imperfectas críticas.*

Demostración. Toda subgráfica propia de un ciclo impar es un conjunto de trayectorias, pero un ciclo impar no tiene núcleo. □

Si bien no existe una caracterización para las digráficas núcleo-imperfectas críticas, conocemos el siguiente resultado:

Proposición 2.7. *Una digráfica núcleo-imperfecta crítica es fuertemente conexa.*

Demostración. Sea $D = (V, A)$ una digráfica núcleo-imperfecta crítica y supongamos que no es fuertemente conexa. Por la proposición 1.8, existe una componente fuerte terminal Y de D , y como D es núcleo-imperfecta crítica, Y tiene un núcleo U_1 .

Sea $W = V \setminus (U_1 \cup \{v : v \in V, v \longrightarrow u, u \in U_1\})$. Como ningún vértice de Y está en W , $W \subset V$, por lo tanto sea U_2 un núcleo de $D[W]$. No existen arcos de Y a W , pues Y es una componente fuerte terminal, y tampoco existen arcos de W a Y por la construcción de W . Por lo tanto $U_1 \cup U_2$ es un conjunto independiente que también es absorbente en D , una contradicción. \square

2.5. Algunas clases de digráficas núcleo-perfectas

A continuación, estudiamos algunas clases de gráficas núcleo-perfectas. Comenzamos con algunas familias de digráfica que ya conocemos.

Proposición 2.8. *Las trayectorias son digráficas núcleo-perfectas.*

Demostración. Toda subgráfica de una trayectoria es un conjunto de trayectorias. \square

Proposición 2.9. *Los ciclos pares son digráficas núcleo-perfectas.*

Demostración. Toda subgráfica de un ciclo par es un conjunto de trayectorias o un ciclo par. \square

Proposición 2.10. *Los torneos transitivos son digráficas núcleo-perfectas.*

Demostración. Sea D un torneo transitivo, por la proposición 1.12, todo $H \subseteq D$ es un torneo transitivo, y por la proposición 1.10, H tiene un pozo v . Por lo tanto, por la proposición 2.2, v es un núcleo de H . \square

2.5.1. Digráficas simétricas

Proposición 2.11. *Las digráficas simétricas son digráficas núcleo-perfectas.*

Demostración. Por la proposición 1.11, la simetría es hereditaria, por lo tanto basta demostrar que toda digráfica simétrica $D = (V, A)$ tiene un núcleo. Sea $U \subseteq V$ un conjunto independiente máximo, para todo vértice $v \in V \setminus U$ existe $u \in U$ tal que $v \longrightarrow u$ o $v \longleftarrow u$ (y por lo tanto $v \longrightarrow u$). Entonces U es absorbente, y por lo tanto es un núcleo de D . \square

2.5.2. Digráficas transitivas

Proposición 2.12. *Las digráficas transitivas son digráficas núcleo-perfectas y todos los núcleos de una digráfica transitiva tienen la misma cardinalidad.*

Demostración. Por la proposición 1.11, la transitividad es hereditaria, por lo tanto basta demostrar que toda digráfica transitiva $D = (V, A)$ tiene un núcleo. Damos un algoritmo para encontrar tal núcleo: sea $U \subseteq V$ un conjunto absorbente, si U no es independiente, existen vértices $u_1, u_2 \in U$ tales que $u_1 \rightarrow u_2$. Consideramos ahora a $U' = U \setminus \{u_1\}$, U' es absorbente, pues $N^-(u_1) \subset N^-(u_2)$. Repetimos el proceso con U' para encontrar un conjunto absorbente e independiente.

Sean $U = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ y $W = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$ dos núcleos de G y supongamos que $r < s$. Como $|W \setminus U| > |U \setminus W|$, existen vértices u_i, w_j y w_k tales que $w_j \rightarrow u_i$ y $u_i \rightarrow w_k$ y, por la transitividad de D , $w_j \rightarrow w_k$, lo cual contradice la independencia de W . □

2.5.3. Digráficas acíclicas

Proposición 2.13. *Las digráficas acíclicas son digráficas núcleo-perfectas y el núcleo de una digráfica acíclica es único.*

Demostración. Claramente la propiedad de ser acíclica es hereditaria, por lo tanto basta demostrar que toda digráfica acíclica $D = (V, A)$ tiene un núcleo. Por la proposición 1.4, D tiene al menos un pozo, sea U_0 el conjunto de pozos de D , U_0 es un conjunto independiente. Si U_0 no es absorbente, consideremos a la subgráfica $D_1 = D - N^-[U_0]$ y al conjunto $U_1 = U_0 \cup \{\text{pozoes de } D_1\}$. Repetimos el proceso hasta dividir a V en dos conjuntos, siendo U_i independiente y todo vértice de $V \setminus U_i$ tiene un ex-vecino en U_i , por lo tanto U_i es un núcleo.

Sean $U = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ y $W = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$ dos núcleos de D , supongamos que $U \neq W$. Sin pérdida de generalidad, podemos afirmar que para los vértices $u_1 \notin W$ y $w_1 \notin U$ el arco $u_1 \rightarrow w_1 \in A$. Necesariamente w_1 debe tener un ex-vecino $u_2 \in U$ distinto de u_1 y a su vez u_2 debe tener un ex-vecino $w_2 \in W$. De esta forma vamos creando un camino P que intercala vértices de U y W . Eventualmente un vértice u_i (o w_i) debe tener un ex-vecino w_j (o u_j) en el núcleo opuesto que ya había sido tocado por P , pues $s < \infty$ (o $r < \infty$). Esto implica la existencia de un ciclo par en D , una contradicción. □

2.5.4. Digráficas sin ciclos impares

Si excluimos a los ciclos pares podemos debilitar la proposición 2.13:

Proposición 2.14. *Las digráficas sin ciclos impares son digráficas núcleo-perfectas.*

Para la demostración requerimos un lema que involucra una generalización del concepto de núcleo. Un *semi-núcleo* de una digráfica es un conjunto $W \subset V$ no vacío, independiente y tal que todo vértice de $N^+(W)$ tiene un ex-vecino en W (W absorbe a su ex-vecindad). Todo núcleo de una digráfica claramente cumple la condición de ser un semi-núcleo, pero si $V \neq N^+(W)$ entonces un semi-núcleo W no es un núcleo (véase la figura 2.5).

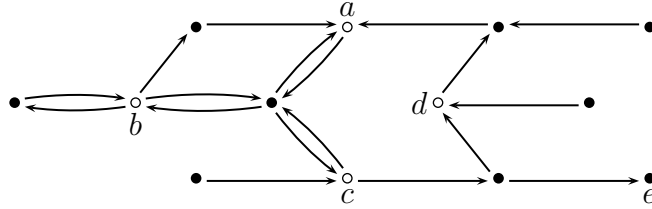


Figura 2.5 $\{a, b, c, d\}$ es un semi-núcleo que no es un núcleo por que no absorbe a e .

Lema 2.15. *Si para todo $U \subset V$ no vacío, $D[U]$ tiene un semi-núcleo, entonces D tiene un núcleo.*

Demostración. Sea W un semi-núcleo maximal de D y consideremos a $U = V \setminus N^+[W]$. Si $U = \emptyset$, entonces todo vértice de D pertenece a $N^+[W]$; así todo vértice de D pertenece a W o a $N^+(W)$. Como W es semi-núcleo, absorbe a su ex-vecindad, por lo tanto W es un núcleo.

Supongamos lo contrario, es decir $U \neq \emptyset$. Consideremos al semi-núcleo W' de $D[U]$, $W \cup W'$ es independiente por definición de U , y todo vértice de $N^+(W \cup W')$ tiene un ex-vecino en $W \cup W'$. Por lo tanto, $W \cup W'$ es un semi-núcleo de D , una contradicción a la maximalidad de W . □

Demostración de la proposición 2.14. La propiedad de no tener ciclos impares es hereditaria, por lo tanto basta demostrar que toda digráfica sin ciclos impares $D = (V, A)$ tiene un núcleo. De hecho, de acuerdo al lema 2.15, basta demostrar que

toda digráfica sin ciclos impares tiene un semi-núcleo.

Por la proposición 1.8, D tiene una componente fuerte terminal Y , por definición de componente fuerte terminal:

$$N^+(Y) \subseteq Y \tag{2.1}$$

Si $Y = K_1$ entonces Y es un semi-núcleo de D y hemos terminado. Si $|V(Y)| > 1$, fijamos un vértice $y \in V(Y)$ y consideremos a todas las yy_i -trayectorias $T_{ij}, j \in \{1, \dots, k\}$, donde $y_i \in V(Y)$. Por (2.1), toda T_{ij} está contenida en Y . Supongamos que (sin pérdida de generalidad) T_{i1} y T_{i2} tienen distinta paridad, entonces como Y es una componente fuerte, existe una $y_i y$ -trayectoria T en Y . Por lo tanto $T \cup T_{i1}$ y $T \cup T_{i2}$ son ciclos de distinta paridad en D , y al menos uno de ellos es impar, una contradicción.

Sea W el conjunto de $y_i \in V(Y)$ tal que todas las trayectorias T_{ij} son de longitud par. El conjunto $W \cup \{y\}$ es independiente, pues de existir $y_1, y_2 \in W$ tales que $(y_1, y_2) \in A$, la trayectoria $(y, \dots, y_1) \cup (y_1, y_2)$ es de longitud impar. Si b es un ex-vecino de $a \in W \cup \{y\}$, todo $c \in N^+[b]$ pertenece a una trayectoria par (y, \dots, a, b, c) , y entonces $c \in W \cup \{y\}$, por lo tanto $W \cup \{y\}$ es un semi-núcleo de D . □

2.5.5. Digráficas con ciclos simétricos

Proposición 2.16. *Las digráficas en las que todo ciclo es simétrico son digráficas núcleo-perfectas.*

Demostración. La propiedad de tener solamente ciclos simétricos es hereditaria, por lo tanto basta demostrar que toda digráfica $D = (V, A)$ en la que todo ciclo es simétrico tiene un núcleo. Damos una enumeración de los vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, sea D' la digráfica obtenida desde D tras eliminar todo arcos $v_i \rightarrow v_j$ cuando $i > j$ y $v_i \rightarrow v_j$ pertenece a un ciclo impar (véase por ejemplo la figura 2.6). D' no tiene ciclos impares, por lo tanto de acuerdo a la proposición 2.14, D' tiene un núcleo U que también es núcleo de D . □

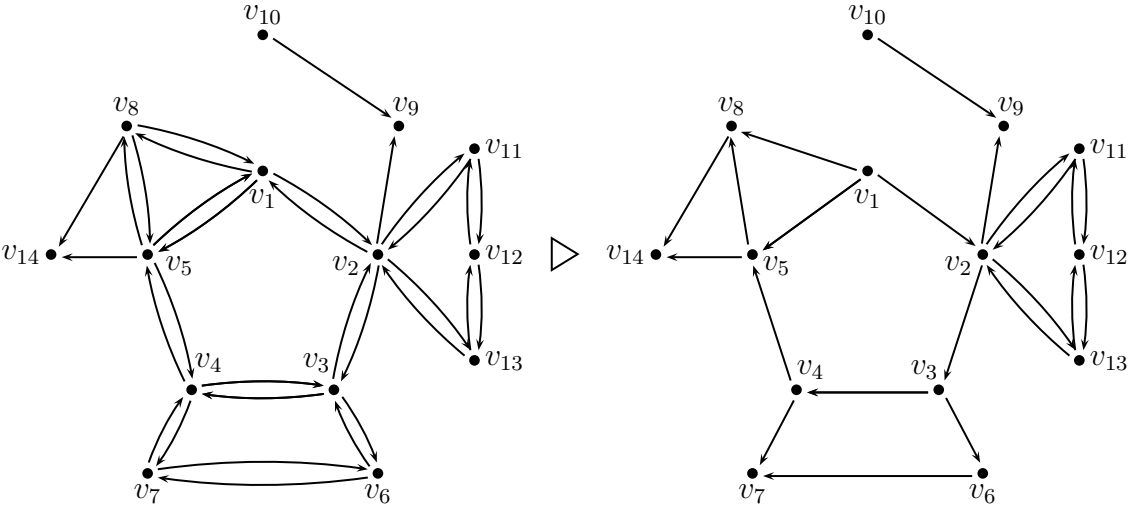


Figura 2.6 Proposición 2.16.

Capítulo 3

Gráficas perfectas

3.1. Número cromático

Una *coloración* de los vértices de una gráfica $G = (V, E)$ es una función $\mathfrak{C} : V \rightarrow S$ que asigna a cada vértice un color, con la única restricción de que $\mathfrak{C}(v) \neq \mathfrak{C}(w)$ siempre que $(v, w) \in E$. El conjunto $S = \{1, \dots, k\}$ es el conjunto de colores disponibles. Dado un color $i \in S$ denotamos al conjunto de vértices coloreados con i como \mathfrak{C}_i , la *clase cromática del color i* en \mathfrak{C} . Dado $v \in V$, identificamos al conjunto de vértices que comparten el color de v como \mathfrak{C}_v , la *clase cromática de v* en \mathfrak{C} .

Evidentemente cada clase $\mathfrak{C}_v, v \in V$, corresponderá a una clase $\mathfrak{C}_i, i \in S$. Si \mathfrak{C}_i y \mathfrak{C}_j son dos clases en $\mathfrak{C}(G)$, una *permutación* de los colores i y j consiste en asignar el color i a todo vértice de \mathfrak{C}_j y viceversa. Es claro que sin importar el número de permutaciones que se hagan en \mathfrak{C} , el número de colores usados no cambiará.

Si para G existe una coloración $\mathfrak{C} : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, diremos que G es *k -coloreable*, y que \mathfrak{C} es una *k -coloración* de G . Dado un k aleatorio, no toda gráfica es k -coloreable, por ejemplo, no es posible colorear un triángulo con solamente dos colores pues siempre existirían vecinos compartiendo un mismo color. El mínimo número de colores para el cual existe una coloración de G es el *número cromático* de G , denotado $\chi(G)$. Es claro que G es k -coloreable si $\chi(G) \leq k$.

Denotamos por $\omega(G)$ al *número de clan máximo* de G , el número entero más grande tal que $K_{\omega(G)} \subseteq G$ y por $\alpha(G)$ al *número de independencia* de G , el número entero más grande tal que $\overline{K_{\alpha(G)}} \subseteq G$. El complemento de una subgráfica completa

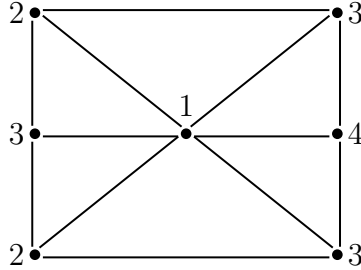


Figura 3.1 Una 4-coloración de una gráfica.

es un conjunto independiente, por lo tanto:

$$\alpha(G) = \omega(\overline{G}) \tag{3.1}$$

$$\omega(G) = \alpha(\overline{G}). \tag{3.2}$$

Podemos fijarnos en la subgráfica completa más grande de G y usar el hecho de que $\chi(K_n) = n$ para obtener una cota inferior trivial para $\chi(G)$:

$$\chi(G) \geq \omega(G). \tag{3.3}$$

Toda clase cromática de una $\chi(G)$ -coloración es un conjunto independiente y puede contener a lo más $\alpha(G)$ vértices, por lo tanto tenemos otra cota inferior trivial para $\chi(G)$:

$$\begin{aligned} \chi(G) \cdot \alpha(G) &\geq |V(G)| \\ \chi(G) &\geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.2. Gráficas perfectas

G es una gráfica *perfecta* si cada subgráfica $H \subseteq G$ tiene número cromático $\chi(H) = \omega(H)$, es decir, la cota trivial (3.3) es suficiente para colorear H . La gráfica G de la figura 3.1 es perfecta, pues al vértice coloreado con 4 podemos asignarle el color 2 para obtener una 3-coloración, y evidentemente $\omega(G) = 3$. En general para demostrar que una gráfica es perfecta basta con mostrar que se cumple la desigualdad contraria a (3.3):

$$\chi(G) \leq \omega(G).$$

Es evidente que $\omega(K_n) = n = \chi(K_n)$, por lo cual toda gráfica completa es perfecta. Además, la siguiente observación también es evidente y debemos tenerla en mente durante el desarrollo de este tema.

Observación 3.1. *La propiedad de perfección es hereditaria.*

Recordemos que en esta observación nos referimos a subgráficas inducidas, pues pueden existir subgráficas no inducidas de una gráfica perfecta que no conservan la perfección. Por ejemplo, una subgráfica que resulte de borrar una arista no necesariamente es perfecta. También hay operaciones de gráficas, como la contracción de aristas, que no preservan la perfección. Ejemplos de ambos casos se pueden ver en la figura 3.2.

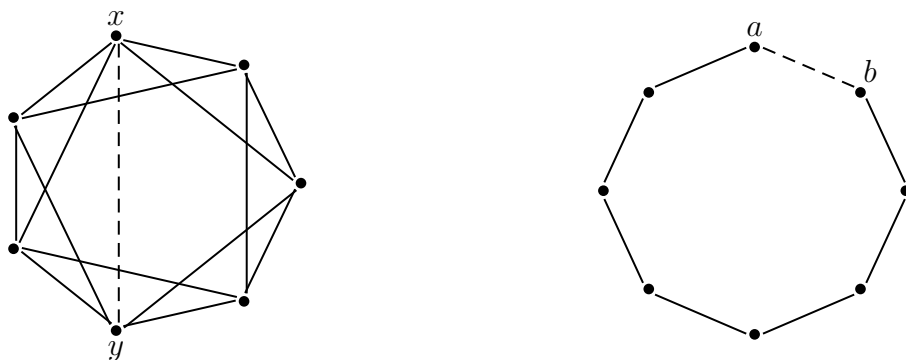


Figura 3.2 Borrar la arista (x, y) y contraer la arista (a, b) no preservan la perfección de la gráfica.

En las Secciones 3.2.1, 3.2.2 y 3.2.3 revisamos algunas clases particulares de gráficas perfectas.

3.2.1. Gráficas bipartitas

Recordemos que $G = (V, E)$ es una gráfica *bipartita* si podemos dividir a V en dos conjuntos ajenos V_1 y V_2 de modo que ambos sean independientes. Claramente una gráfica bipartita no puede contener un ciclo impar.

Proposición 3.2. *Toda gráfica bipartita es perfecta.*

Demostración. Sea $G = (V, E)$ bipartita, con $V = V_1 \cup V_2$. Si $E = \emptyset$, entonces $\omega(G) = 1 = \chi(G)$. Supongamos que $E \neq \emptyset$, una 2-coloración de G consiste en asignarle a todo vértice de V_1 el color 1 y a todo vértice de V_2 el color 2. G no puede contener a K_3 , pues entonces no es bipartita y por lo tanto $\chi(G) \leq 2 = \omega(G)$. \square

3.2.2. Gráficas trianguladas

Una arista entre dos vértices no consecutivos de un ciclo es una *cuerda*. Una gráfica es *triangulada* si todo ciclo de longitud mayor a 3 tiene una cuerda o, equivalentemente, si G no contiene ciclos inducidos de longitud mayor a 3. Por ejemplo, toda gráfica completa es triangulada y la gráfica de la figura 3.4 también es triangulada.

Sea G una gráfica con subgráficas $G_1, G_2, S \subseteq G$ tal que $G = G_1 \cup G_2$ y $S = G_1 \cap G_2$, decimos que G puede construirse pegando G_1 y G_2 sobre de S . La figura 3.3 es un ejemplo de esta construcción, aunque se debe notar que no es una gráfica triangulada. Esta técnica para construir gráficas nos ayuda a caracterizar la estructura de las gráficas trianguladas.

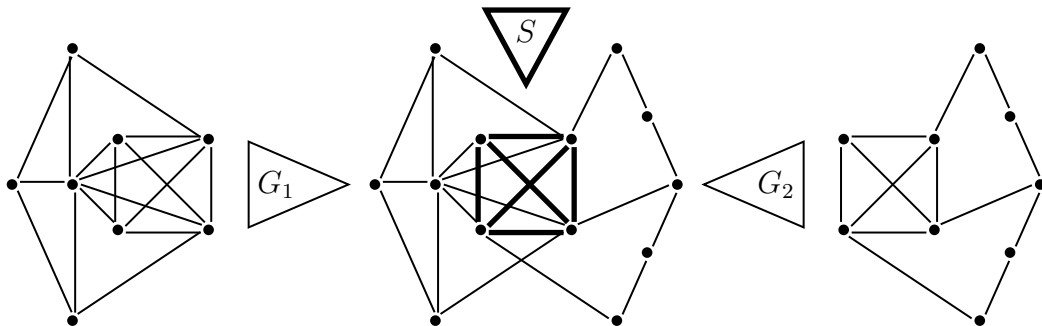


Figura 3.3 G es obtenida pegando G_1 y G_2 sobre de S .

Lema 3.3. *Una gráfica es triangulada si y sólo si puede ser construida recursivamente al pegar gráficas sobre de subgráficas completas, comenzando desde gráficas completas.*

Demostración. Demostramos primero la necesidad. Si G resulta de pegar dos gráficas trianguladas G_1 y G_2 sobre de una subgráfica completa, entonces G

también es triangulada, pues todo ciclo inducido de G está en un G_i y es por lo tanto de longitud 3. Como cualquier gráfica completa es triangulada, toda gráfica construida pegando gráficas completas sobre de subgráficas completas es triangulada.

Demostramos ahora la necesidad por inducción. Sea $G = (V, E)$ una gráfica triangulada. Si G es completa el lema se cumple trivialmente (podemos obtener G pegándola sobre sí misma), en particular se cumple para K_1 . Sea $|V(G)| > 1$ (G no completa) y supongamos que se cumple el lema para toda gráfica triangulada de menor orden. Sean $u, v \in V$ dos vértices no adyacentes de G y sea $X \subseteq V \setminus \{u, v\}$ un conjunto de corte mínimo que separa a u y v . Sea Y la componente de $G - X$ que contiene a u y consideremos a $G_1 = G[V(Y) \cup X]$, $G_2 = G - Y$ y $S = G[X]$. Claramente S es subgráfica de G_1 y G_2 y podemos construir a G pegando G_1 y G_2 sobre de S .

Como $G_1, G_2 \subseteq G$, ambas son trianguladas y es posible construirlas recursivamente por la hipótesis de inducción, queda por demostrar que S es completa. Supongamos que no lo es, por lo tanto existen vértices $a, b \in V(S)$ que no son adyacentes. Por la proposición 1.1, existen $a_1, b_1 \in V(Y)$ tal que $(a_1, a), (b_1, b) \in E$, y como Y es conexo existe un camino de longitud mínima $P_1 = (a, a_1 \dots, b_1, b)$ en G_1 . Análogamente, existe un camino de longitud mínima $P_2 = (a, \dots, b)$ en G_2 . Por lo tanto $P_1 \cup P_2$ es un ciclo inducido de longitud al menos 4 en G , una contradicción. \square

En la figura 3.4 podemos ver que G fue construida primero al pegar las gráficas completas $G[x_1, \dots, x_5]$ y $G[x_3, \dots, x_6]$ sobre de $G[x_3, x_4, x_5]$. Después, se le pegó $G[x_4, \dots, x_7]$ sobre de $G[x_4, x_5, x_6]$. Finalmente se le pegó $G[x_5, x_6, x_8, x_9]$ sobre de (x_5, x_6) . Esta construcción por supuesto no es única, de hecho es posible construirla con diferentes subgráficas o en distinto orden. Si $a = x_1, b = x_6$, de acuerdo a la demostración del lema 3.3 $X = \{x_3, x_4, x_5\}$ y $G[X]$ es completa.

Proposición 3.4. *Toda gráfica triangulada es perfecta.*

Demostración. Basta con demostrar que toda gráfica G construida al pegar dos gráficas perfectas G_1 y G_2 sobre de una subgráfica completa S es perfecta. Sea $H \subseteq G$, si H es subgráfica de G_1 o de G_2 , H es perfecta. Supongamos entonces que H no es subgráfica de ninguna de ellas, sea $H_i = H \cap G_i$ y $S' = H \cap S$. Entonces $S' \subseteq S$ es completa y H se puede construir pegando H_1 y H_2 sobre de S' .

Como $H_i \subseteq G_i$, $\chi(H_i) = \omega(H_i)$, supongamos que $\omega(H_1) = \max\{\omega(H_1), \omega(H_2)\}$. Sea \mathfrak{C}^1 una $\omega(H_1)$ -coloración de H_1 y \mathfrak{C}^2 una $\omega(H_2)$ -coloración de H_2 . Podemos

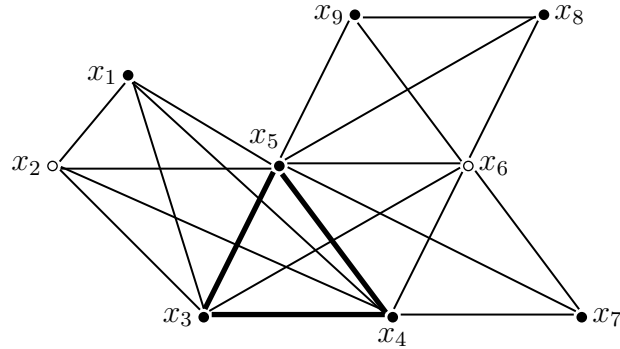


Figura 3.4 Una gráfica triangulada.

permutar los colores de \mathfrak{C}^2 del siguiente modo: sea $v \in S'$, y sean $\mathfrak{C}_v^2 = \mathfrak{C}_i^2$ y $\mathfrak{C}_v^1 = \mathfrak{C}_j^1$ sus clases cromáticas correspondientes, permutamos las clases \mathfrak{C}_i^2 y \mathfrak{C}_j^2 . Si j es un color que no aparece en \mathfrak{C}^2 , simplemente le asignamos el color j a \mathfrak{C}_i^2 (véase la figura 3.5). En un máximo de $|S'|$ pasos tendremos una $\omega(H_1)$ -coloración de H_2 , la cual podemos combinar con \mathfrak{C}^1 en una $\omega(H_1)$ -coloración de H , por lo tanto $\omega(H) = \omega(H_1) \leq \chi(H)$. \square

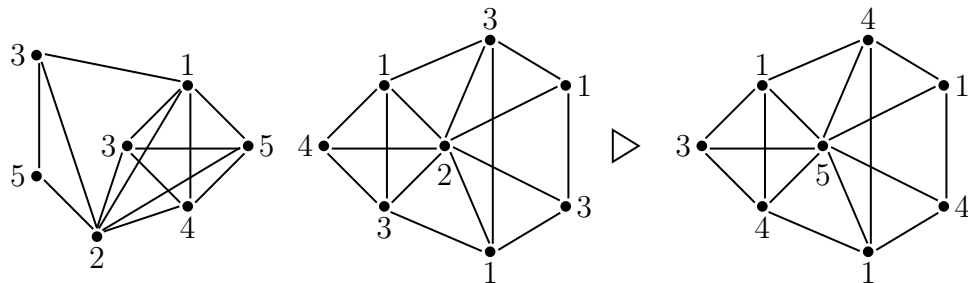


Figura 3.5 $\mathfrak{C}^1(H_1)$ y $\mathfrak{C}^2(H_2)$ nos rinden una $\omega(H_1)$ -coloración de H_2 .

3.2.3. Gráficas de intervalos

Una gráfica es una *gráfica de intervalos* si a cada vértice se le puede asignar un intervalo cerrado en \mathbb{R} tal que dos vértices son adyacentes si y sólo si sus intervalos correspondientes se intersectan. Es decir, si $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y existe un conjunto de intervalos cerrados $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_n : I_i = [a_i, b_i] \in \mathbb{R}\}$ tal

que $E = \{(v_i, v_j) : i \neq j, I_i \cap I_j \neq \emptyset\}$, decimos que G es la gráfica de intervalos de \mathcal{I} . Por ejemplo, la gráfica G de la figura 3.6 es de intervalos, pero H no, pues el intervalo I_4 debe intersectar a I_3 e I_1 , pero no a I_2 , lo cual es claramente imposible.

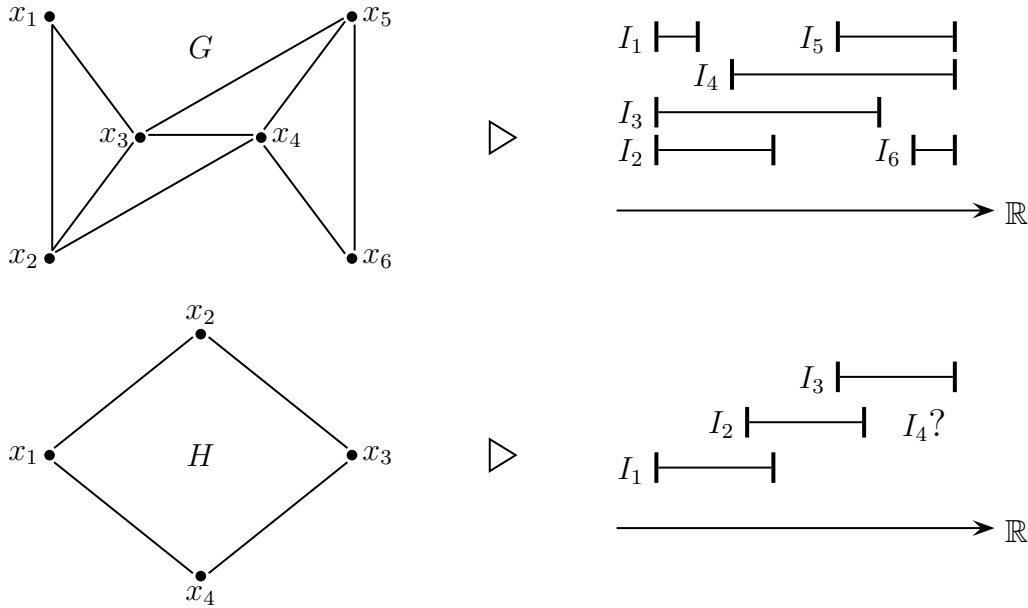


Figura 3.6 G es una gráfica de intervalo, pero H no.

Para demostrar que las gráficas de intervalos son perfectas, primero demostramos una propiedad que facilita la demostración. Para una gráfica $G = (V, E)$, un *orden de intervalos* de G es un orden $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ tal que

$$\text{si } i < j < k \text{ y } (v_i, v_k) \in E \text{ entonces } (v_j, v_k) \in E. \quad (3.5)$$

Por ejemplo, G en la figura 3.6 tiene el orden de intervalos sugerido, $\{x_1, \dots, x_6\}$. De hecho, demostramos que toda gráfica de intervalos tiene un orden de intervalos.

Proposición 3.5. *Una gráfica $G = (V, E)$ es de intervalos si y sólo si existe un orden de intervalos para G .*

Demostración. Sea $G = (V, E)$ la gráfica de intervalos de $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_n : I_i = [a_i, b_i] \in \mathbb{R}\}$, y ordenemos a V como $\{v_1, \dots, v_n\}$, tal que $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$.

Sabemos que si $i < j < k$, entonces $b_i \leq b_j \leq b_k$ y si $(v_i, v_k) \in E$ entonces $I_i \cap I_k \neq \emptyset$. Por lo tanto $a_k \leq b_i$, y tenemos:

$$\begin{aligned} a_k &\leq b_i \leq b_j \leq b_k \\ a_k &\leq b_j \leq b_k. \end{aligned}$$

Es decir, $I_j \cap I_k \neq \emptyset$ y por lo tanto $(v_j, v_k) \in E$, lo cual demuestra la suficiencia.

Demostramos ahora la necesidad, supongamos que $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ es un orden de intervalos en una gráfica G . Para cada v_i sea $i^* \in \{1, \dots, n\}$ el índice más pequeño tal que $v_{i^*} \in N[v_i]$, y sea $I_i = [i^*, i]$.

Si $(v_i, v_j) \in E$, $i < j$, entonces por definición de j^* , $j^* \leq i < j$ y por lo tanto $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Es decir:

$$E \subseteq \{(v_i, v_j) : i \neq j, I_i \cap I_j \neq \emptyset\}.$$

Si $I_i \cap I_j \neq \emptyset$, $i < j$, entonces $j^* \leq i < j$. Por definición de j^* , $(v_{j^*}, v_j) \in E$ y por (3.5), $(v_i, v_j) \in E$, por lo tanto:

$$E \supseteq \{(v_i, v_j) : i \neq j, I_i \cap I_j \neq \emptyset\}.$$

Por lo tanto G es la gráfica de intervalos de $\mathcal{I} = \{I_i : 1 \leq i \leq n\}$. □

Proposición 3.6. *Toda gráfica de intervalos es perfecta.*

Demostración. Sea $G = (V, E)$ una gráfica de intervalos, claramente una subgráfica $H \subseteq G$ es la gráfica de los intervalos de $V(H)$, por lo tanto basta demostrar que $\chi(G) = \omega(G)$. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ un orden de intervalos de V , y vamos a crear una coloración $\mathfrak{C}(G)$ empezando desde v_n hacia atrás con el siguiente algoritmo:

1. Coloreamos v_n con el color 1.
2. Después de colorear $v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}$, coloreamos v_i con el color del mínimo entero que no haya sido usado previamente al colorear un vecino de v_i .

Por ejemplo, en la figura 3.6, tendríamos que $\mathfrak{C}(x_6) = 1, \mathfrak{C}(x_5) = 2, \mathfrak{C}(x_4) = 3, \mathfrak{C}(x_3) = 1, \dots$. Claramente $\mathfrak{C}(G)$ es una k -coloración de G , donde k es el color máximo usado en el algoritmo. Supongamos que v_j está coloreado con k , eso quiere decir que v_j tiene un vecino $v_{j_i}, j_i > j$, coloreado con i , para todo color $1 < i < k$. Por lo tanto $G[v_j, v_{j_{k-1}}, \dots, v_{j_1}]$ es una subgráfica completa, y tenemos:

$$\begin{aligned} k &= |V(G[v_j, v_{j_{k-1}}, \dots, v_{j_1}])| \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq k \\ \omega(G) &= \chi(G). \end{aligned}$$

□

3.3. El Teorema Fuerte de las Gráficas Perfectas

Hasta ahora hemos estudiado diversas familias de gráficas que son perfectas, pero en este capítulo estamos más interesados en encontrar una manera de estudiar a toda gráfica perfecta. De acuerdo a la observación 3.1, si G tiene una subgráfica que no es perfecta, G no es perfecta. Por lo tanto existe un conjunto mínimo \mathcal{H} de gráficas no-perfectas tal que G es perfecta si y sólo si no contiene ninguna subgráfica isomorfa a un elemento de \mathcal{H} .

Una *gráfica de Berge* es aquella que no contiene como subgráfica a un ciclo impar C_{2k+1} o a su complemento \overline{C}_{2k+1} . En 1963, Berge planteo la *Conjetura Fuerte de las Gráficas Perfectas*:

Proposición 3.7 (Conjetura Fuerte de las Gráficas Perfectas). *Toda gráfica de Berge es perfecta.*

Evidentemente, la Conjetura Fuerte de las Gráficas Perfectas caracteriza \mathcal{H} , como el conjunto de ciclos impares y sus complementos. En 2002, Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour & Robin Thomas presentaron la demostración del Teorema Fuerte de las Gráficas Perfectas en [6]:

Teorema 3.8 (Teorema Fuerte de las Gráficas Perfectas). *Una gráfica es perfecta si y sólo si G y \overline{G} no contienen como subgráfica a un ciclo impar de longitud mayor o igual a 5.*

La extensa prueba de este teorema no será estudiada en este trabajo.

3.4. El Teorema de las Gráficas Perfectas

Procedemos ahora a estudiar un resultado relacionado, previamente conocido como la *Conjetura Débil de las Gráficas Perfectas*:

Teorema 3.9 (Teorema de las Gráficas Perfectas). *Una gráfica es perfecta si y sólo si su complemento es perfecto.*

Para esta demostración serán necesarios dos lemas. Sea $G = (V, E)$ una gráfica y $v \in V$, y consideremos una gráfica G' construida del siguiente modo: añadimos un vértice v' a V y añadimos las aristas (v', w) tal que $w \in N[v]$ a E . Decimos que G' fue construida desde G al *expandir* por dos al vértice v a una arista (v, v') . En la figura

3.7 tenemos dos ejemplos de este tipo de construcción. Notemos que podemos realizar la expansión de un vértice n veces, creando de este modo una subgráfica completas K_n . Expandir un vértice cero veces significa eliminarlo de la gráfica, expandirlo una vez significa no alterar la gráfica.

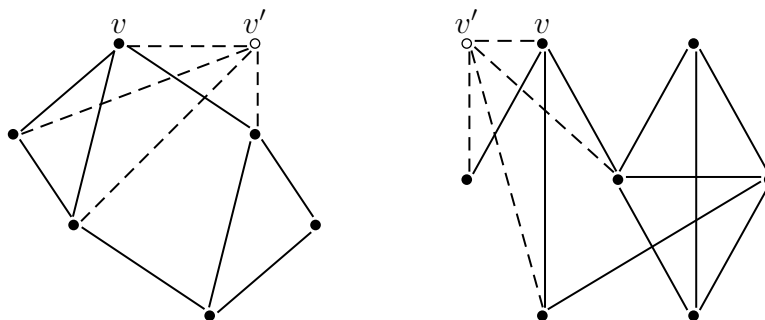


Figura 3.7 Gráficas construidas mediante la expansión de vértices.

Lema 3.10. *Sea G es una gráfica perfecta, si G' fue construida desde G al expandir un vértice entonces G' es perfecta.*

Demostración. Basta con demostrar el caso en el que expandimos un vértice dos veces. Procedemos por inducción sobre $|V(G)|$. Si $G = K_1$, expandir su vértice resulta en K_2 , que también es perfecta. Sea $G = (V, E)$ una gráfica perfecta, supongamos que se cumple el lema para toda gráfica de orden menor a $|V(G)|$, y también supongamos que construimos una gráfica G' al expandir $v \in V$ a (v, v') . Sea $H \subset G'$, si $H \subseteq G \subset G'$ entonces es perfecta pues G es perfecta. En caso contrario $v' \in V(H)$ y por lo tanto H fue construida desde una subgráfica propia de G al expandir v , y por hipótesis de inducción es perfecta. Por lo tanto, resta por demostrar que $\chi(G') \leq \omega(G')$.

Sabemos que $\omega(G') \in \{\omega(G), \omega(G) + 1\}$, puesto que sólo añadimos un vértice. Si $\omega(G') = \omega(G) + 1$:

$$\begin{aligned} \chi(G') &\leq \chi(G) + 1 = \omega(G) + 1 = \omega(G') \\ \chi(G') &\leq \omega(G'). \end{aligned}$$

Veamos entonces el caso en el que $\omega(G') = \omega(G)$. El vértice v no está contenido en algún $K_{\omega(G)} \subseteq G$, puesto que junto con v' existiría un $K_{\omega(G)+1} \subseteq G'$ (un ejemplo

de esta situación es la primera gráfica de la figura 3.7). Sea \mathfrak{C} una $\omega(G)$ -coloración de G , toda clase cromática de \mathfrak{C} está representada por algún vértice en cada $K_{\omega(G)}$. En particular, todo $K_{\omega(G)}$ tiene un representante de \mathfrak{C}_v distinto de v .

Consideremos a la subgráfica $H = G - (\mathfrak{C}_v \setminus \{v\})$, que tiene número de clan máximo $\omega(H) < \omega(G)$. Como G es perfecta, podemos colorear H con $\omega(G) - 1$ colores, sea \mathfrak{C}^1 una tal coloración. Como \mathfrak{C}_v es independiente, el conjunto $(\mathfrak{C}_v \setminus \{v\}) \cup \{v'\} = V(G' - H)$ también es independiente. Podemos entonces dar una $\omega(G)$ -coloración a G' de la siguiente manera: si $u \in V(H)$, le asignamos el color $\mathfrak{C}^1(u) \in \{1, \dots, \omega(G) - 1\}$, y si $u \in V(G' - H)$, le asignamos un nuevo color $\omega(G)$ (véase la figura 3.8). Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \chi(G') &\leq \omega(G) = \omega(G') \\ \chi(G') &\leq \omega(G'). \end{aligned}$$

□

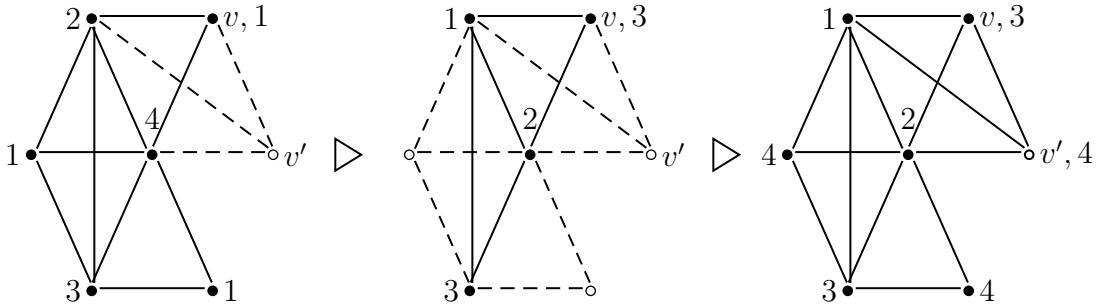


Figura 3.8 Creando una coloración de G' en la demostración del lema 3.10.

Lema 3.11. *Para toda gráfica perfecta existe una subgráfica completa que interseca a todos los conjuntos independientes de orden máximo.*

Demostración. Sea $G = (V, E)$ una gráfica perfecta y sea \mathcal{K} el conjunto de todos los conjuntos de vértices de subgráficas completas de G . Sea \mathcal{Q} el conjunto de todos los conjuntos independientes Q de G tales que $|Q| = \alpha(G)$.

Observemos por ejemplo la gráfica de la figura 3.9. Esta gráfica tiene 8 vértices, 19 aristas, 14 triángulos y 2 K_4 , por lo cual, en este caso $\mathcal{K} = \{V(K_i) : i = 1, 2, 3, 4\}$, y $|\mathcal{K}| = 8 + 19 + 14 + 2 = 43$. Como $\alpha(G) = 2$, \mathcal{Q} consiste de todos los pares de

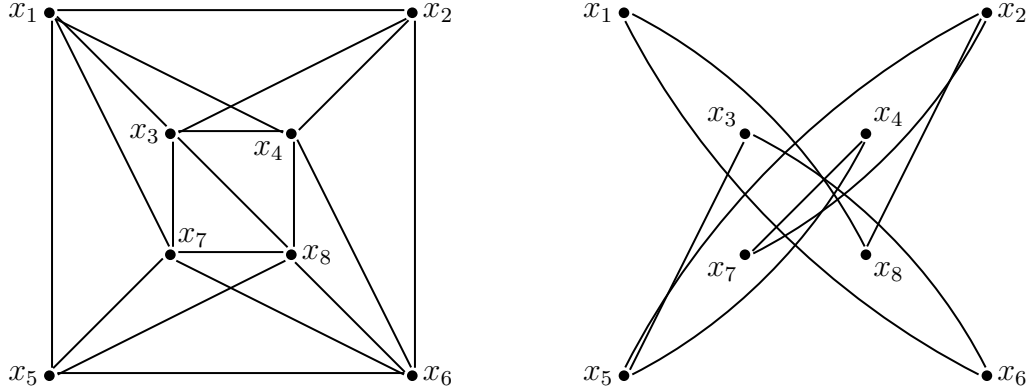


Figura 3.9 Una gráfica perfecta y su complemento.

vértices de las aristas faltantes de G .

Procedemos con la demostración por contradicción. Supongamos que no existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $K \cap Q \neq \emptyset$ para todo $Q \in \mathcal{Q}$. Entonces para todo $K \in \mathcal{K}$ existe $Q_K \in \mathcal{Q}$ tal que $Q_K \cap K = \emptyset$. Sea:

$$k(v) = |\{K \in \mathcal{K} : v \in Q_K\}|.$$

Es decir, $k(v)$ es el número de subgráficas completas $K \in \mathcal{K}$ que no intersectan un conjunto independiente (de orden $\alpha(G)$) $Q_K \in \mathcal{Q}$ al cual v pertenece. Consideremos a $H = G[\{v \in V : k(v) > 0\}]$, y vamos a construir una gráfica G' desde H mediante la repetida expansión de vértices, cada vértice se expande $k(v)$ veces hasta formar una subgráfica completa G_v . Es decir, $G' = (V', E')$, donde

$$\begin{aligned} V' &= \cup_{v \in V} V(G_v), \\ E' &= \{(x, y) : x \in G_v, y \in G_w \text{ y } v = w \text{ o } (v, w) \in E\}. \end{aligned}$$

Observemos que si v no pertenece a ninguno de los Q_K , entonces el vértice no aparecerá en G' . Como $H \subseteq G$ es perfecta, G' es perfecta por el lema 3.10, y por lo tanto

$$\chi(G') \leq \omega(G'). \tag{3.6}$$

Ahora calculemos explícitamente los valores de $\chi(G')$ y $\omega(G')$. Por su construcción, toda subgráfica completa maximal de G' es de la forma $G'[\cup_{x \in X} G_x]$, para algún $X \in \mathcal{K}$. Por lo tanto:

$$\omega(G') = \sum_{x \in X} k(x).$$

Por otro lado, por la definición de $k(x)$:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} k(x) &= \sum_{x \in X} |\{K \in \mathcal{K} : x \in Q_K\}|, \\ &= |\{K \in \mathcal{K} : x \in X, x \in Q_K\}|, \\ &= |\{(x, K) : x \in X, K \in \mathcal{K}, x \in Q_K\}|. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Podemos entonces contar ahora sobre los $K \in \mathcal{K}$:

$$\sum_{x \in X} k(x) = \sum_{K \in \mathcal{K}} |X \cap Q_K|.$$

Ahora bien, $G[X]$ es completa y todo Q_K es independiente, así que no pueden intersectarse más de una vez. Por lo tanto para toda K :

$$|X \cap Q_K| \leq 1.$$

En particular $|X \cap Q_X| = 0$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{K}} |X \cap Q_K| &= |X \cap Q_X| + \sum_{K \in \mathcal{K}, K \neq X} |X \cap Q_K| < |\mathcal{K}|, \\ &\leq |\mathcal{K}| - 1, \\ \omega(G') &\leq |\mathcal{K}| - 1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por otro lado, por la manera en la que construimos G' , se tiene que:

$$|V(G')| = \sum_{v \in V} k(v).$$

Por la definición de $k(v)$ y (3.7):

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} k(v) &= |\{(v, K) : v \in V, K \in \mathcal{K}, v \in Q_K\}|, \\ &= \sum_{K \in \mathcal{K}} |Q_K|. \end{aligned}$$

Como $|Q_K| = \alpha(G)$:

$$\begin{aligned} |V(G')| &= |\mathcal{K}| \cdot \alpha(G), \\ |\mathcal{K}| &= \frac{|V(G')|}{\alpha(G)}. \end{aligned}$$

Por la construcción de G' , para todo vértice v' agregado mediante la expansión de v tenemos $N[v] = N[v']$, es decir $\alpha(G) \geq \alpha(G')$, lo cual implica que:

$$\frac{|V(G')|}{\alpha(G)} \leq \frac{|V(G')|}{\alpha(G')}.$$

Finalmente, por (3.4):

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}| &= \frac{|V(G')|}{\alpha(G)} \leq \frac{|V(G')|}{\alpha(G')} \leq \chi(G') \\ |\mathcal{K}| &\leq \chi(G'). \end{aligned} \tag{3.9}$$

De las ecuaciones (3.8) y (3.9) resulta que:

$$\begin{aligned} \omega(G') &\leq |\mathcal{K}| - 1 < |\mathcal{K}| \leq \chi(G') \\ \omega(G') &< \chi(G'). \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción a (3.6). □

Procedemos ahora a la demostración del teorema:

Demostración del teorema 3.9. Procedemos por inducción sobre $|V(G)|$, si $|V(G)| = 1$, $\overline{K_1} = K_1$ es perfecta. Sea G tal que $|V(G)| \geq 2$ y supongamos que se cumple el teorema para toda gráfica de menor orden. Toda subgráfica propia de \overline{G} es el complemento de una subgráfica propia de G , y es perfecta por la hipótesis de inducción, por lo tanto queda por demostrar que

$$\chi(\overline{G}) \leq \omega(\overline{G}).$$

Por el lema 3.11 existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $K \cap Q \neq \emptyset$ para todo $Q \in \mathcal{Q}$, entonces en $G - K$ la cardinalidad de todo conjunto independiente maximal de G se reduce en 1, y por lo tanto:

$$\alpha(G - K) < \alpha(G).$$

Aplicando (3.1):

$$\begin{aligned} \omega(\overline{G} - K) &= \alpha(G - K) < \alpha(G) = \omega(\overline{G}), \\ \omega(\overline{G} - K) &< \omega(\overline{G}). \end{aligned}$$

Aplicando a $\overline{G} - K$ la hipótesis de inducción:

$$\chi(\overline{G} - K) = \omega(\overline{G} - K).$$

La eliminación de los vértices de K equivale a eliminar un conjunto independiente en \overline{G} . Si con esto eliminamos toda una clase cromática de alguna $\chi(\overline{G})$ -coloración, entonces:

$$\chi(\overline{G}) = \chi(\overline{G} - K) + 1.$$

No es posible eliminar 2 clases cromáticas, pues podríamos colorear ambas con el mismo color para crear una $(\chi(\overline{G}) - 1)$ -coloración de \overline{G} . También es posible que no eliminemos ninguna clase por completo, en cuyo caso:

$$\begin{aligned}\chi(\overline{G}) &= \chi(\overline{G} - K), \\ \chi(\overline{G}) &< \chi(\overline{G} - K) + 1.\end{aligned}$$

Considerar ambos casos nos indica que:

$$\chi(\overline{G}) \leq \chi(\overline{G} - K) + 1.$$

Por lo tanto concluimos:

$$\begin{aligned}\chi(\overline{G}) &\leq \chi(\overline{G} - K) + 1 = \omega(\overline{G} - K) + 1 \leq \omega(\overline{G}) \\ \chi(\overline{G}) &\leq \omega(\overline{G}).\end{aligned}$$

□

El teorema 3.9 nos garantiza que al demostrar que cierta familia de gráficas es perfecta, también estamos demostrando que la familia de sus complementos es perfecta. En particular queda demostrado:

Proposición 3.12. *Los complementos de las gráficas bipartitas, trianguladas y de intervalos son perfectas.*

El siguiente lema también es un corolario sencillo:

Lema 3.13. *Para toda gráfica perfecta existe un conjunto independiente que intersecta a todos las subgráficas completas de orden máximo.*

Demostración. Sea G una gráfica perfecta, por el teorema 3.9, \overline{G} es perfecta, y por el lema 3.11, \overline{G} tiene una subgráfica completa $\overline{H} \subseteq \overline{G}$ que intersecta a todos los conjuntos independientes \overline{K} de orden máximo. Por lo tanto, H es un conjunto independiente de G que intersecta a todas las subgráficas completas K de orden máximo.

□

3.5. Una caracterización de las gráficas perfectas

Finalmente, presentamos una importante caracterización de las gráficas perfectas. Como antecedentes recordamos algunos conceptos de álgebra. Sea M una matriz de $n \times n$, M es *invertible* si existe una matriz \overline{M} de $n \times n$ tal que $M\overline{M} = \overline{M}M = I$, donde I es la matriz identidad. El *rango* de M es el número de columnas linealmente independientes $rk(M) \leq n$, en particular cuando M es invertible $rk(M) = n$.

Proposición 3.14. Sean A una matriz de $n \times m$, B de $m \times n$ y AB de $n \times n$ una matriz invertible. Entonces $rk(AB) = rk(A) = n$.

Demostración. Como AB es invertible $rk(AB) = n$ y claramente $rk(AB) = n \geq rk(A)$. Supongamos que $n > rk(A)$, entonces existe un renglón i de A que es combinación lineal de los demás renglones. El renglón i correspondiente en AB es resultado de multiplicar al renglón i de A por las columnas de B , y por lo tanto el renglón i de AB es combinación lineal de sus demás renglones, una contradicción. Por lo tanto $rk(AB) = rk(A) = n$. □

Teorema 3.15. Una gráfica es perfecta si y sólo si para toda subgráfica $H \subseteq G$:

$$\alpha(H) \cdot \omega(H) \geq |V(H)|. \quad (3.10)$$

Demostración. Demostramos primero la suficiencia, sea G una gráfica perfecta y $H \subseteq G$, por (3.4):

$$\chi(H) \geq \frac{|V(H)|}{\alpha(H)}.$$

Como $\chi(H) = \omega(H)$:

$$\omega(H) \geq \frac{|V(H)|}{\alpha(H)},$$

$$\alpha(H) \cdot \omega(H) \geq |V(H)|.$$

Demostramos ahora la suficiencia por inducción sobre $|V(G)|$, si $|V(G)| = 1$, ésto es trivial. Sea G una gráfica tal que toda subgráfica $H \subseteq G$ cumple (3.10), y supongamos que G misma no es perfecta. Sabemos por hipótesis de inducción que toda subgráfica $H \subset G$ es perfecta. En particular, para todo conjunto independiente no vacío $U \subseteq V(G)$:

$$\chi(G - U) = \omega(G - U) \leq \omega(G).$$

De hecho afirmamos que:

$$\chi(G - U) = \omega(G - U) = \omega(G). \quad (3.11)$$

De lo contrario, supongamos que $\omega(G - U) \not\leq \omega(G)$, entonces:

$$\begin{aligned}\chi(G - U) &= \omega(G - U) < \omega(G), \\ \chi(G - U) &< \omega(G).\end{aligned}$$

Como U es independiente:

$$\chi(G) \leq \omega(G).$$

Lo cual implica que G es perfecta, una contradicción.

Sea $U = \{u\}$ y sea \mathfrak{C} una $\omega(G)$ coloración de $G - U$. Para una subgráfica de orden máximo $K \equiv K_{\omega(G)} \subseteq G$ se puede dar uno de dos casos:

Caso 1. Si $u \notin V(K)$ entonces K tiene un representante de cada clase cromática de \mathfrak{C} .

Caso 2. Si $u \in V(K)$, entonces K tiene un representante de todas menos una clase cromática de \mathfrak{C} .

Sea $Q_0 = \{v_1, \dots, v_{\alpha(G)}\}$ un conjunto independiente de tamaño máximo de G . Sean $Q_1, \dots, Q_{\omega(G)}$ las clases cromáticas de una $\omega(G)$ -coloración de $G - v_1$, sean $Q_{\omega(G)+1}, \dots, Q_{2\omega(G)}$ las clases cromáticas de una $\omega(G)$ -coloración de $G - v_2, \dots$, hasta $v_{\alpha(G)}$. De este modo tenemos $\alpha(G)\omega(G) + 1$ conjuntos independientes $Q_0, Q_1, \dots, Q_{\alpha(G)\omega(G)}$ en G y, por (3.11), para cada uno de ellos existe una subgráfica completa $J_i \equiv K_{\omega(G)} \subseteq G - Q_i, i \in \{0, \dots, \alpha(G)\omega(G)\}$.

Sea $J \equiv K_{\omega(G)} \subseteq G$ y supongamos que $J \cap Q_0 = \emptyset$, es decir, $v_i \notin V(J)$ para todo $v_i \in Q_0$. Entonces todo $Q_i, i \neq 0$, cumple el caso 1 y por lo tanto $J \cap Q_i \neq \emptyset$ para todo $i \neq 0$.

Supongamos ahora que $J \cap Q_0 \neq \emptyset$, ésto implica que existe un único $v_j \in Q_0$ tal que $J \cap Q_0 = \{v_j\}$. Por lo tanto para todo vértice $v_i \in Q_0, i \neq j$, tenemos $v_i \notin V(J)$, es decir Q_i cumple el caso 1 y por lo tanto $J \cap Q_i \neq \emptyset$. Además, $v_j \notin V(J)$ implica que Q_j cumple el caso 2 y por lo tanto $J \cap Q_j = \emptyset$. Por lo tanto, hemos mostrado que para todo J :

$$J \cap Q_i = \emptyset \text{ para exactamente un } i \in \{0, \dots, \alpha(G)\omega(G)\}. \quad (3.12)$$

Sea \mathcal{J} la matriz de $(\alpha(G)\omega(G) + 1) \times (\alpha(G)\omega(G) + 1)$ con 0 en toda entrada de la diagonal principal y 1 en todas las demás entradas. Sea A la matriz de $(\alpha(G)\omega(G) + 1) \times |V(G)|$ cuyos renglones son los vectores de incidencia de cada Q_i en $V(G)$. Sea B

la matriz de $|V(G)| \times (\alpha(G)\omega(G) + 1)$ cuyas columnas son los vectores de incidencia de cada K_i en $V(G)$. Ahora bien, para todo i tenemos por definición:

$$|K_i \cap Q_i| = 0. \quad (3.13)$$

También, por (3.12):

$$\begin{aligned} K_i \cap Q_j &\neq \emptyset, i \neq j, \\ |K_i \cap Q_j| &= 1, i \neq j. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Por (3.13), multiplicar el renglón i de A por la columna i de B da como resultado 0, y por (3.14), multiplicar el renglón i de A por la columna j de B da como resultado 1, $1 \neq j$. Por lo tanto:

$$A \cdot B = \mathcal{J}$$

Sea $\overline{\mathcal{J}}$ la matriz de $(\alpha(G)\omega(G) + 1) \times (\alpha(G)\omega(G) + 1)$ con $\frac{1}{\alpha(G)\omega(G)} - 1$ en toda entrada de la diagonal principal y $\frac{1}{\alpha(G)\omega(G)}$ en todas las demás entradas, es fácil comprobar que $\overline{\mathcal{J}}$ es la inversa de \mathcal{J} . Por lo tanto $rk(\mathcal{J}) = \alpha(G)\omega(G) + 1$ y, por la proposición 3.14, $rk(A) = \alpha(G)\omega(G) + 1$. Por lo tanto $rk(A) = \alpha(G)\omega(G) + 1 \leq n$, lo cual es una contradicción pues habíamos supuesto que G cumplía (3.10). □

Capítulo 4

Gráficas solubles

4.1. Orientaciones

Una *orientación* \vec{G} de una gráfica $G = (V, E)$ consiste en reemplazar cada arista $(u, v) \in E$ con un arco $u \rightarrow v$, $v \rightarrow u$ o ambos. La digráfica que resulta al orientar una gráfica tiene el mismo conjunto de vértices y un número de arcos mayor o igual que el número de aristas. La gráfica que resulta de remover la orientación (y juntar las posibles aristas dobles) de una digráfica D es la *gráfica subyacente* de D . Hay que hacer notar que para algunos autores una orientación consiste en reemplazar (u, v) con sólo uno de los arcos $u \rightarrow v$ o $v \rightarrow u$.

Algunos tipos de orientaciones pueden surgir de los conceptos básicos de digráficas, por ejemplo en una *orientación simétrica* se reemplaza la arista (u, v) con ambos arcos $u \rightarrow v$ y $v \rightarrow u$. Para una *orientación transitiva*, cada vez que reemplazamos dos aristas (u, v) y (v, w) con los arcos $u \rightarrow v$ y $v \rightarrow w$, también debemos tener el arco $u \rightarrow w$, si la arista (u, w) no está presente en la gráfica no podemos orientar (u, v) y (v, w) de ese modo.

El tipo de orientación con la cual trabajaremos es la *orientación normal*, también conocida como *orientación por pozos*, aquella en la que toda subgráfica completa de G queda orientada en \vec{G} como un clan con un pozo (véase por ejemplo la figura 4.1).

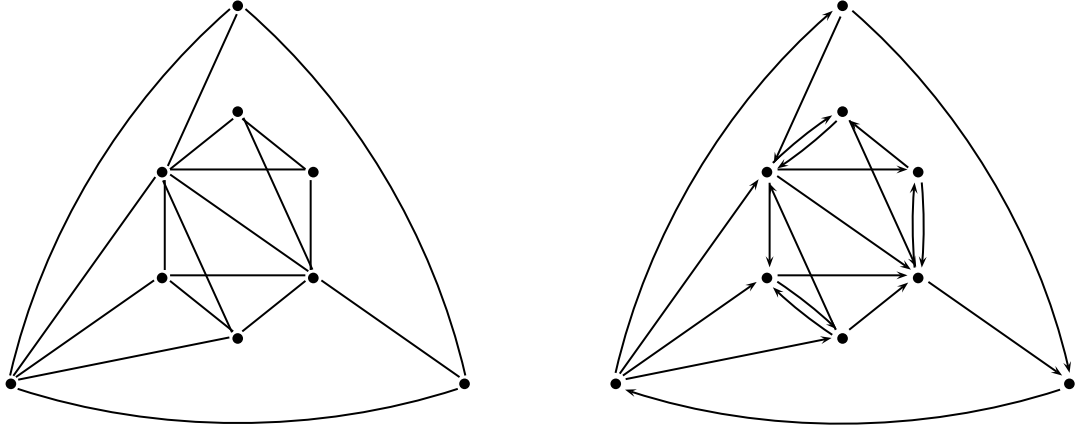


Figura 4.1 Una orientación normal de una gráfica.

4.2. Gráficas solubles

Una gráfica es *soluble* (o *núcleo-soluble*) si toda orientación normal de sus aristas resulta en una digráfica núcleo-perfecta. La siguiente observación es evidente:

Observación 4.1. *Toda gráfica completa es soluble.*

Más aún, podemos caracterizar todas las orientaciones normales de una gráfica completa:

Proposición 4.2. *Un clan está orientado normalmente si y sólo si todo ciclo tiene arcos simétricos entre por lo menos un par de vértices consecutivos.*

Demostración. Sea $D = (V, A)$ un clan orientado normalmente, sea $C = (v_0, \dots, v_n = v_0)$ un ciclo de D , y consideremos a $D[C] \subseteq D$ que también es un clan. Sin pérdida de generalidad, v_0 es un pozo de $D[C]$ y por lo tanto $v_i \rightarrow v_0, \forall i \neq 0$. En particular $v_0 \rightarrow v_1, v_1 \leftarrow v_0$, y queda demostrada la suficiencia.

Demostramos la necesidad, supongamos que D es un clan que cumple la hipótesis, y supongamos que su orientación no es normal. Es decir, existe un clan $K \subseteq D$ que no tiene un pozo. Sea $k_1 \in V(K)$, existe $k_2 \in V(K)$ tal que $k_1 \rightarrow k_2, k_1 \not\leftarrow k_2$, también existe k_3 tal que $k_2 \rightarrow k_3, k_2 \not\leftarrow k_3 \dots$. De hecho existe en K un camino de vértices distintos (k_1, \dots, k_n) tal que $k_i \rightarrow k_{i+1}$ pero $k_i \not\leftarrow k_{i+1}, \forall i$ y como K es finito, para un $m < n, k_n \rightarrow k_m, k_n \not\leftarrow k_m$. Por lo tanto no existen arcos simétricos

entre ningún par de vértices del ciclo (k_m, \dots, k_n, k_m) , una contradicción. □

4.3. Gráficas no-solubles minimales

En la figura 4.2 podemos ver que existen orientaciones normales de C_7 y \overline{C}_7 que no son núcleo-perfectas pues ambas digráficas no tienen núcleo. Vamos a revisar que de hecho, para todo ciclo impar (de longitud mayor o igual a 5) o su complemento existe una orientación normal que no es núcleo-perfecta.



Figura 4.2 Un ciclo impar y su complemento no son solubles.

Proposición 4.3. *Un ciclo impar C_{2k+1} , $k \geq 2$, no es soluble.*

Demostración. Consideremos la orientación \vec{C}_{2k+1} de C_{2k+1} como un ciclo dirigido, sus clanes son los arcos $x_i \rightarrow x_{i+1}$, para los cuales x_{i+1} es un pozo. Por lo tanto \vec{C}_{2k+1} es una orientación normal pero, por la observación 2.4, no tiene núcleo, y por lo tanto C_{2k+1} no es soluble. □

Proposición 4.4. *El complemento de un ciclo impar \overline{C}_{2k+1} , $k \geq 2$, no es soluble.*

Demostración. Para $k = 2$, $\overline{C}_5 = C_5$ no es soluble por la proposición 4.3. Sea $C_{2k+1} = (x_1, \dots, x_{2k+1}, x_1)$, $k \geq 3$, consideremos la siguiente orientación \vec{C} de \overline{C}_{2k+1} : reemplazamos toda arista (x_i, x_{i+2}) por $x_i \rightarrow x_{i+2}$, y todas las demás aristas por arcos simétricos. En la figura 4.3 se puede apreciar una muestra de esta orientación en C_{11} , donde las aristas punteadas representan a los arcos simétricos.

Veamos la estructura de una subgráfica completa de \vec{C} . Si U es un subconjunto de $k + 1$ vértices de \vec{C}_{2k+1} , entonces hay dos vértices consecutivos del ciclo en U , por lo cual $\vec{C}[U]$ no puede ser completa. Es decir, \vec{C}_{2k+1} contiene subgráficas completas K_n para $n \leq k$. Ahora bien, cualquier subgráfica inducida por un conjunto de n vértices contiene a lo más $n - 1$ arcos asimétricos, por lo tanto ningún K_n contiene ciclos compuestos enteramente por estos arcos (véase la figura 4.3).

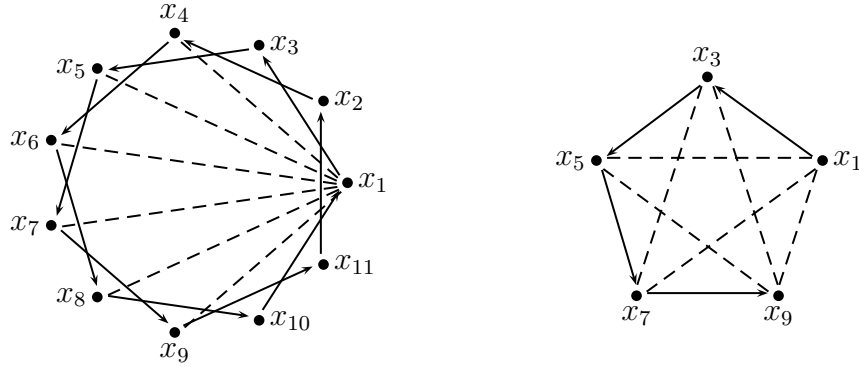


Figura 4.3 C_{11} con una muestra de la orientación de la proposición 4.4 y uno de sus clanes máximos.

Si K_n contiene un vértice x incidente exclusivamente a arcos simétricos, entonces x es un pozo de K_n . De lo contrario, todo los vértices pertenecen a un camino de arcos asimétricos en K_n . Este camino es de longitud $n - 1$, y por lo tanto podemos considerar a su vértice final x . Todos los demás vértices de K_n son adyacentes a x mediante arcos simétricos, por lo tanto x es un pozo de K_n . Con esto queda demostrado que \vec{C} es una orientación normal.

Como $\alpha(\vec{C}_{2k+1}) = 2$, un núcleo de \vec{C} solamente puede consistir de un vértice o de dos vértices consecutivos. El conjunto $\{x_i\}$ no es un núcleo pues $x_{i+1} \not\rightarrow x_i$, $\{x_i, x_{i+1}\}$ tampoco es un núcleo pues $x_{i+2} \not\rightarrow x_{i+1}$. Por lo tanto \vec{C} es una orientación normal que no es núcleo-perfecta, es decir, \vec{C}_{2k+1} no es soluble.

□

4.4. Toda gráfica soluble es perfecta

Ahora que sabemos que los ciclos impares y sus complementos no son gráficas solubles, sólo necesitamos un resultado más para probar que toda gráfica soluble es perfecta, que la propiedad de ser soluble es hereditaria.

Proposición 4.5. *Cualquier subgráfica de una gráfica soluble es también soluble.*

Demostración. Sea $G = (V, E)$ una gráfica soluble y consideremos una subgráfica $U \subset V$, $G[U] \subset G$. Sea $\vec{G}[U]$ una orientación normal, basta con demostrar que $\vec{G}[U]$ tiene un núcleo. Consideremos la siguiente orientación \vec{G} :

1. Si $x, y \in U$, orientamos a la arista (x, y) como en $\vec{G}[U]$.
2. Si $x, y \in V \setminus U$, orientamos a la arista (x, y) como $x \longleftrightarrow y$.
3. Si $x \in U, y \in V \setminus U$, orientamos a la arista (x, y) como $x \longleftarrow y$.

En la figura 4.4 tenemos un ejemplo de este tipo de orientación, las líneas punteadas representan arcos simétricos y $G[U]$ está subrayado.

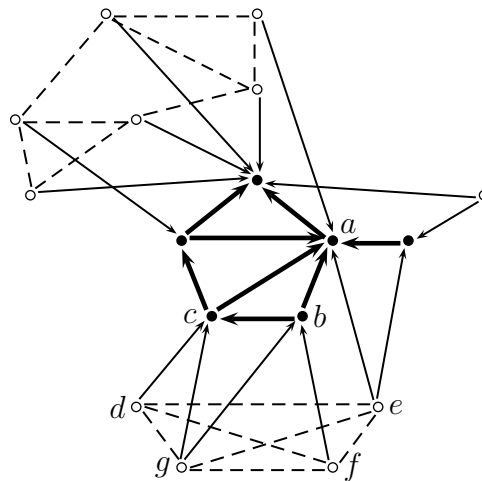


Figura 4.4 La orientación \vec{G} en la proposición 4.5.

Veamos que \vec{G} es normal, sea K un clan de \vec{G} . Si $V(K) \subseteq U$, entonces K está orientado como en $\vec{G}[U]$, es decir, normalmente, y por lo tanto tiene un pozo

(por ejemplo, en la figura 4.4, a en $G[\{a, b, c\}]$). Si $V(K) \subseteq V \setminus U$, entonces K está orientado simétricamente y por lo tanto todo $v \in V(K)$ es un pozo de K (por ejemplo, en la figura 4.4, f en $G[\{d, e, f, g\}]$). Finalmente, si $V(K)$ contiene elementos tanto de $V \setminus U$ como de U , consideremos a $W = V(K) \cap U$. Así $\vec{G}[W] \subset \vec{G}[U]$ es un clan y tiene un pozo w , además todo vértice de $V(K) \setminus W$ es in-vecino de w , por lo tanto w es pozo de K (por ejemplo, en la figura 4.4, c en $G[\{c, b, d, g\}]$). Entonces \vec{G} efectivamente es una orientación normal.

Sea U' un núcleo de \vec{G} , $U' \cap U$ es un conjunto independiente también en $\vec{G}[U]$. Además, por la construcción de \vec{G} , todos los ex-vecinos de un vértice de $\vec{G}[U]$ son vértices de $\vec{G}[U]$. Es así que $U' \cap U$ es núcleo de $\vec{G}[U]$. □

El siguiente resultado es consecuencia directa de las proposiciones 4.3, 4.4 y 4.5:

Proposición 4.6. *Toda gráfica soluble no puede contener a C_{2k+1} o a \overline{C}_{2k+1} como subgráficas.*

Finalmente, la demostración del siguiente teorema es muy sencilla.

Teorema 4.7. *Toda gráfica soluble es perfecta.*

Demostración. Sea G una gráfica soluble y $k \geq 2$, por la proposición 4.6, una gráfica soluble no contiene a C_{2k+1} o a \overline{C}_{2k+1} como subgráficas. Además G contiene a \overline{C}_{2k+1} si y sólo si \vec{G} contiene a C_{2k+1} . Por lo tanto G es perfecta por el teorema 3.8. □

4.5. Núcleos fraccionales

Procedemos a demostrar que toda gráfica perfecta es núcleo-perfecta, comenzamos generalizando el concepto de núcleo, al introducir el de núcleo-fraccional. De ahora en adelante trabajaremos con funciones cuyas imágenes están contenidas en $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, las llamadas funciones *no-negativas*. Una *función de peso* en una gráfica o digráfica es una función $f : V \rightarrow \mathbb{R}_+$.

La función f es *fraccionalmente absorbente* si para todo $v \in V(D)$:

$$\sum_{u \in N^+[v]} f(u) \geq 1. \tag{4.1}$$

La función f es *fuertemente absorbente* si fortalecemos este requisito: si para todo $v \in V(D)$ existe un clan K contenido en $N^+[v]$ tal que:

$$\sum_{u \in K} f(u) \geq 1. \quad (4.2)$$

Finalmente, la función f es *fraccionalmente independiente* si para todo clan K de D :

$$\sum_{u \in K} f(u) \leq 1. \quad (4.3)$$

Naturalmente estas definiciones dan pie a un nuevo concepto, f es un *núcleo fraccional* si cumple (4.1) y (4.3), es decir, si es fraccionalmente independiente y fraccionalmente absorbente. Si f cumple (4.2) en vez de (4.1), entonces es un *núcleo fraccional fuerte*.

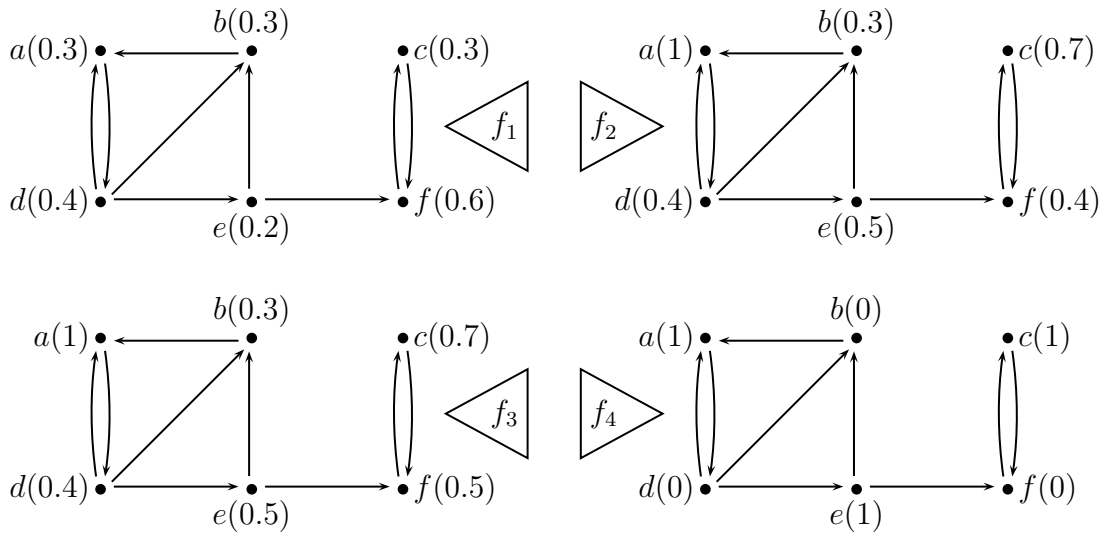


Figura 4.5 Funciones fraccionales de una digráfica.

En la figura 4.5 tenemos una digráfica con cuatro funciones de peso diferentes. La función f_1 es fraccionalmente independiente, pero no es fraccionalmente absorbente pues para c tenemos

$$\sum_{u \in N^+[c]} f_1(u) = f_1(c) + f_1(f) = 0.9 < 1.$$

La función f_2 es fraccionalmente absorbente, pero no es fraccionalmente independiente pues para $K = (a, b)$ tenemos

$$\sum_{u \in K} f_2(u) = f_2(a) + f_2(b) = 1.3 > 1.$$

La función f_2 tampoco es fuertemente absorbente pues para e no existe un clan $K \subset N^+[e]$ tal que $\sum_{u \in K} f_2(u) \geq 1$. f_3 es fuertemente absorbente, pero no es fraccionalmente independiente pues para $K = (a, b)$ tenemos

$$f_3(a) + f_3(b) = 1.3 > 1.$$

La función f_4 es un núcleo fraccional fuerte. Diremos que una digráfica D tiene un núcleo fraccional (o un núcleo fraccional fuerte), si existe una función de peso que sea núcleo fraccional (o núcleo fraccional fuerte).

4.6. Función característica

El ejemplo más básico de un núcleo fraccional fuerte es la *función característica* del núcleo de la digráfica. Esta función está definida para cualquier $U \subseteq V(D)$ de este modo:

$$F(v) = \begin{cases} 1 & v \in U \\ 0 & v \in V(D) \setminus U \end{cases}$$

Proposición 4.8. *La función característica F de un núcleo U es un núcleo fraccional fuerte.*

Demostración. Sea K un clan de $D = (V, A)$, existe a lo más un vértice $v \in V(K)$ que pertenece también a U , entonces F es fraccionalmente independiente pues:

$$\sum_{u \in K} F(u) = F(v) \leq 1.$$

Sea $v \in V$. Si $v \in U$ entonces el clan $K = v \in N^+[v]$ cumple que:

$$\sum_{u \in K} f(u) = F(v) \geq 1$$

Si $v \notin U$, existe $w \in N^+[v]$ tal que $w \in U$. Entonces el clan $K = (v, w) \subseteq N^+[v]$ cumple que:

$$\sum_{u \in K} f(u) = F(v) + F(w) = F(w) \geq 1.$$

Por lo tanto F es fuertemente absorbente. □

4.7. Ciclos hamiltonianos

Para determinar qué digráficas no tienen un núcleo fraccional, primero estudiamos qué impide que un clan tenga un núcleo fraccional.

Proposición 4.9. *Un clan que contiene un ciclo hamiltoniano asimétrico no tiene un núcleo fraccional.*

Demostración. Sea $D = (V, A)$ un clan con un ciclo hamiltoniano asimétrico y supongamos por contradicción que f es un núcleo fraccional de D . Entonces para todo clan K de D :

$$\sum_{u \in K} f(u) \leq 1.$$

En particular, al ser D mismo un clan:

$$\sum_{u \in V} f(u) \leq 1.$$

Como D contiene un ciclo hamiltoniano asimétrico $|N^+[v]| \leq |V| - 1$, para todo $v \in V$, y por lo tanto existen $x, v \in V$ tales que $f(x) > 0$ (f no puede ser la función 0, pues no se cumpliría (4.1)) y $x \notin N^+[v]$. Es decir:

$$\sum_{u \in N^+[v]} f(u) < 1.$$

Una contradicción pues f entonces no es fraccionalmente absorbente. □

Si bien todo clan que contiene un ciclo hamiltoniano asimétrico no está orientado normalmente la afirmación recíproca no es cierta, por ejemplo, el clan de la figura 4.6 no está orientado normalmente pero tampoco tiene un ciclo hamiltoniano asimétrico. Sin embargo, el clan generado por x_2, \dots, x_5 si tiene un ciclo hamiltoniano asimétrico, esto sugiere que todo clan de una digráfica debe prescindir de ciclos hamiltonianos asimétricos para que la digráfica este orientada normalmente.

Una digráfica en la que ningún clan contiene un ciclo hamiltoniano asimétrico es llamada *clan-acíclica*. El objetivo será demostrar el único impedimento para que una digráfica tenga un núcleo fraccional es que sea clan-acíclica. Por lo tanto, primero verificamos el siguiente resultado:

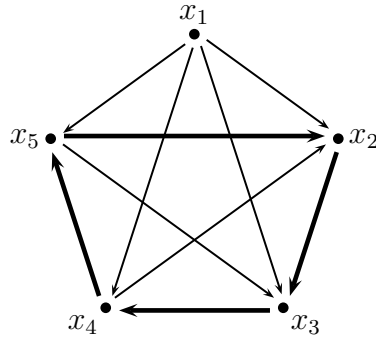


Figura 4.6 Una digráfica sin un ciclo hamiltoniano asimétrico.

Proposición 4.10. *Son equivalentes:*

- (a) *D está orientada normalmente*
- (b) *Todo clan de D no contiene un ciclo hamiltoniano asimétrico.*

Demostración. Demostramos primero que (a) \Rightarrow (b). Sea $K_n \subseteq D$, $V(K_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$ y sea v_i su pozo. Si $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$ es un ciclo hamiltoniano de K_n , entonces $v_i \rightarrow v_{i+1}$ y como v_i es pozo, $v_i \leftarrow v_{i+1}$. Por lo tanto \mathcal{C} no es asimétrico.

Para demostrar que (b) \Rightarrow (a), supongamos $K_n \subseteq D$ con un ciclo hamiltoniano asimétrico \mathcal{C} , entonces para todo $v \in V(K)$ existe $w \in V(K)$ tal que $v \rightarrow w$ pero $v \not\leftarrow w$. Por lo tanto K_n no tiene un pozo. □

4.8. Teorema de Scarf

Enunciamos dos teoremas de álgebra que serán necesarios para proceder.

Teorema 4.11 (Teorema de Scarf). *Sea $m < n$. Sea B una matriz real de tamaño $m \times n$ tal que las primeras m columnas de B forman la matriz identidad. Sea $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ un vector no-negativo, tal que el conjunto $\{\vec{\alpha} \in \mathbb{R}_+^n : B\vec{\alpha} = \vec{\beta}\}$ está acotado. Sea C una matriz real de tamaño $m \times n$ tal que $c_{ii} \leq c_{ik} \leq c_{ij}$ siempre que $i, j \leq m$, $i \neq j$ y $k > m$.*

Entonces existe un subconjunto $J \subset \{1, \dots, n\}$ de tamaño m tal que:

(a) $B\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ para algún $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}_+^n$ tal que $\alpha_j = 0$ si $j \notin J$.

(b) Para cada columna $k \in \{1, \dots, n\}$ existe un renglón $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $c_{ik} \leq c_{ij}$ para todo $j \in J$.

No demostraremos el teorema 4.11 pues excede los objetivos de este trabajo, la demostración puede ser encontrada en [1] o en [11].

Teorema 4.12. Sea B una matriz de $m \times n$ con $b_{ij} \in \mathbb{R}_+$, tal que B no contiene una columna de ceros. Sean $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}_+^n$ y $\vec{\beta} \in \mathbb{R}_+^m$. Entonces el conjunto $\{\vec{\alpha} \geq 0 : B\vec{\alpha} = \vec{\beta}\}$ está acotado.

Demostración. Escribamos $B\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ como:

$$\begin{pmatrix} b_{11}\alpha_1 + b_{12}\alpha_2 + b_{13}\alpha_3 + \dots + b_{1n}\alpha_n \\ b_{21}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + b_{23}\alpha_3 + \dots + b_{2n}\alpha_n \\ b_{31}\alpha_1 + b_{32}\alpha_2 + b_{33}\alpha_3 + \dots + b_{3n}\alpha_n \\ \vdots \\ b_{m1}\alpha_1 + b_{m2}\alpha_2 + b_{m3}\alpha_3 + \dots + b_{mn}\alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

Como B no contiene alguna columna de ceros entonces para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ existe un $b_{ij} \neq 0$ para algún i . Como todos los valores b_{ij} y β_i son no-negativos tenemos:

$$b_{ij}\alpha_j \leq b_{i1}\alpha_1 + \dots + b_{ij}\alpha_j + \dots + b_{in}\alpha_n = \beta_i,$$

$$\alpha_j \leq \frac{\beta_i}{b_{ij}}.$$

Por lo tanto α_j está acotado por:

$$\alpha_j \leq \max \left\{ \frac{\beta_i}{b_{ij}} \right\}, b_{ij} \neq 0, i \in \{i, \dots, m\}.$$

Entonces el conjunto $\{\vec{\alpha} \geq 0 : B\vec{\alpha} = \vec{\beta}\}$ está acotado. □

4.9. Creando núcleos fraccionales fuertes

Veremos un ejemplo de como encontrar un núcleo fraccional fuerte de una digráfica usando los teoremas de la Sección 4.8. Trabajaremos con la digráfica $D = (V, E)$ de la figura 4.7, esta digráfica está orientada normalmente, y usaremos

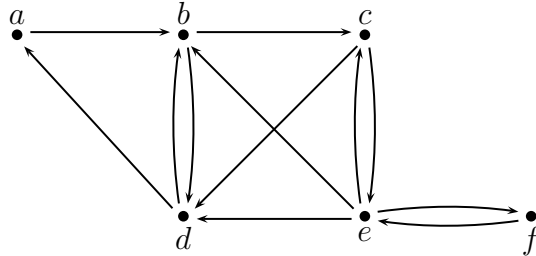


Figura 4.7 Construcción un núcleo fraccional de una digráfica.

este ejemplo como la base para demostrar que toda digráfica orientada normalmente tiene un núcleo fraccional fuerte.

Vamos a identificar los clanes maximales K_1, K_2, K_3 de D , y agregamos un nuevo vértice z_i por cada uno de ellos, además de agregar los arcos $z_i \rightarrow v, v \in K_i, i \in \{1, 2, 3\}$ para obtener una nueva digráfica D' . Para esta nueva digráfica, sus clanes maximales serán $K'_i = D'[K_i \cup z_i]$ (véase la figura 4.8).

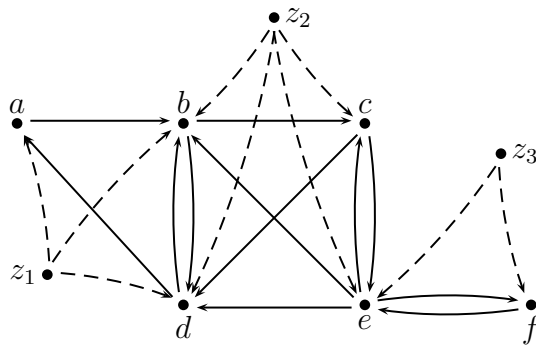


Figura 4.8 Construcción de los K'_i .

A continuación consideramos los nuevos clanes maximales K'_1, K'_2 y K'_3 , pero sin tomar en cuenta todos sus pares de arcos simétricos, como puede ser visto en la figura 4.9. Usamos la proposición 1.5 para construir en cada uno de ellos un orden parcial estricto $>_i$, y podemos ordenar los vértices de cada clan maximal de acuerdo a este orden. Es decir, tenemos tres órdenes $>_1, >_2$ y $>_3$, los cuales podemos representar

mediante n -adas de modo que las entradas están ordenadas de mayor a menor:

$$\begin{aligned} >_1 &= (b, a, d, z_1) \\ >_2 &= (d, c, b, e, z_2) \\ >_3 &= (e, f, z_3) \end{aligned}$$

Para cada orden, definimos la *altura* de un vértice del siguiente modo: la altura de z_i es 0, la del vértice que le sigue en el orden es 1, etc. También en la figura 4.9 asociamos cada vértice a su altura de acuerdo a cada orden. Observemos que en el caso de K'_3 tenemos dos vértices con la misma altura (e y f), pues no hay manera de compararlos bajo $>_3$ usando solamente arcos asimétricos de D' .

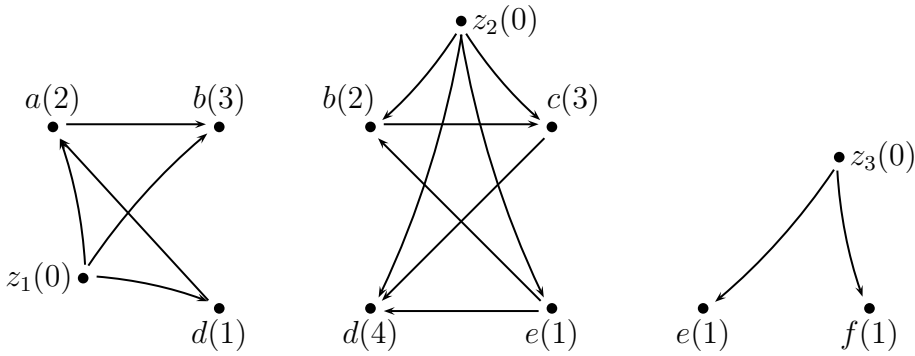


Figura 4.9 Los clanes maximales K'_1 , K'_2 y K'_3 de D' sin considerar los pares de arcos simétricos.

Damos una enumeración de los vértices de D' , de modo que los primeros vértices enumerados sean los z_i , de la siguiente manera: $w_1 = z_1, \dots, w_3 = z_3, w_4 = a, \dots, w_9 = f$. Definimos una matriz B como la matriz de incidencia de los K'_i :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde cada renglón representa a un clan maximal (en orden descendente) K'_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, y cada columna a uno de los vértices (en orden ascendente) w_i , $i \in \{1, \dots, 9\}$. Nótese cómo las primeras 3 columnas forman la matriz identidad de 3×3 y que B no tiene columnas de ceros. Sea $\vec{\beta} = (1 \ 1 \ 1)^T$, el conjunto

$\{\vec{\alpha} \geq 0 : B\vec{\alpha} = \vec{\beta}\}$ está acotado de acuerdo al teorema 4.12.

Definimos ahora una matriz C asociada a las alturas de los vértices, análoga a B , cada columna representa un vértice w_j y cada renglón a un clan maximal K_i . Si $w_j \in K_i$ la entrada C_{ij} es la altura de w_j en $>_i$ y si $w_j \notin K_i$, elegimos un número $\mathcal{M} > |V|$, en este caso 8, para ser la entrada C_{ij} .

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 & 2 & 3 & 8 & 1 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 8 & 2 & 3 & 4 & 1 & 8 \\ 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Al comparar B y C podemos ver que a cada entrada b_{ij} con valor 0, corresponde una entrada c_{ij} con valor $\mathcal{M} = 8$. Además $c_{ii} = 0, i \in \{1, 2, 3\}$ y $c_{ij} = 8, i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$. Podemos apreciar claramente que $1 \leq c_{ik} \leq 8, k > 3$, por lo tanto $c_{ii} = 0 \leq c_{ik} \leq 8 = c_{ij}$ siempre que $i, j \leq 3, i \neq j$ y $k > 3$.

De este modo hemos mostrado que se cumplen las condiciones del teorema 4.11. El teorema nos garantiza que existen J y $\vec{\alpha}$ que cumplen su conclusión aunque no nos da una manera de encontrarlos, en este caso una solución es:

$$J = \{4, 6, 9\}$$

$$\vec{\alpha} = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)^T$$

$k \in [n]$	$i \in [m]$	$c_{ik} \leq c_{i4}, c_{i6}, c_{i9}$
1	1	$0 \leq 2, 8, 8$
2	2	$0 \leq 8, 3, 8$
3	3	$0 \leq 8, 8, 1$
4	1	$2 \leq 2, 8, 8$
5	2	$2 \leq 8, 3, 8$
6	2	$3 \leq 8, 3, 8$
7	1	$1 \leq 2, 8, 8$
8	2	$1 \leq 8, 3, 8$
9	3	$1 \leq 8, 8, 1$

Figura 4.10 Comprobando la condición 4.11.(b).

La figura 4.10 comprueba que J cumple la condición 4.11.(b). Observemos que para esta solución particular todas las entradas de $\vec{\alpha}$ son enteras, pero en general

podemos esperar entradas fraccionales en la solución. Efectivamente $\alpha_j = 0$ si $j \notin J$, y es trivial comprobar que $B\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

Proponemos ahora un núcleo fraccional fuerte de D , $f(w_i) = \alpha_i$, es decir, la función:

$$f(v) = \begin{cases} 1 & v \in \{a, c, f\} \\ 0 & v \in \{b, d, e\} \end{cases}$$

En la figura 4.11 podemos comprobar que se trata de un núcleo fraccional fuerte.

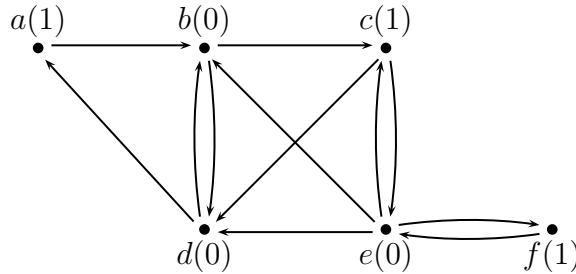


Figura 4.11 Un núcleo fraccional fuerte de D' .

4.10. Núcleos fraccionales fuertes

Generalizamos ahora el método de la Sección 4.9, mediante el siguiente teorema:

Teorema 4.13. *Toda digráfica orientada normalmente tiene un núcleo fraccional fuerte.*

Demostración. Sea $D = (V, A)$ una digráfica orientada normalmente. Enumeramos los clanes maximales de D como K_1, \dots, K_m . Construimos una nueva digráfica $D' = (V', A')$ del siguiente modo:

1. Añadimos m vértices z_1, \dots, z_m a V , de modo que $V' = V \cup \{z_1, \dots, z_m\}$.
2. Añadimos los arcos $z_i \rightarrow v$ a A , de modo que $A' = A \cup \{z_i \rightarrow v : v \in K_i\}$.

Claramente los clanes maximales de D' son $K'_i = D'[K_i \cup z_i]$. Sea $K_0 \subseteq K_i$ un clan cualquiera de D , tiene un pozo v_0 por la orientación normal de D . Consideremos en D' el clan $K'_0 = D'[K_0 \cup z_i]$, como $z_i \rightarrow v_0$, v_0 es pozo de K'_0 . Por lo tanto D'

está orientada normalmente.

Nos fijamos ahora en cada K'_i , sin considerar todos sus arcos simétricos. Por la proposición 4.10, D' es clan-acíclica, y por lo tanto cada K_i es acíclico. Por la proposición 1.5, existe un orden parcial estricto $<_i$ en cada K_i , y claramente el elemento mínimo del orden es z_i .

Sea $w_1 = z_1, w_2 = z_2, \dots, w_m = z_m, w_{m+1}, \dots, w_n$ una enumeración de V' . Sea B la matriz de incidencia de V' en los K'_i , es decir

$$B = (b_{ij}), b_{ij} = \begin{cases} 1 & w_j \in K'_i \\ 0 & w_j \notin K'_i \end{cases}$$

Sea $\vec{\beta} = \vec{1} \in \mathbb{R}^m$, el vector columna con 1 en todas las entradas. Claramente B es de $m \times n$ y toda $b_{ij} \in \mathbb{R}^+$. Como cada z_i pertenece exclusivamente a K'_i las primeras m columnas de B forman la matriz identidad y, como todo vértice pertenece a por lo menos un clan, B no tiene columnas de ceros. Por lo tanto, de acuerdo al teorema 4.12 el conjunto $\{\vec{\alpha} \geq 0 : B\vec{\alpha} = \vec{\beta}\}$ está acotado.

Sea $\mathcal{M} \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M} > |V|$. Sea C una matriz definida de la siguiente manera:

$$C = (c_{ij}), c_{ij} = \begin{cases} \text{La altura de } w_j \text{ en el orden } >_i & w_j \in K'_i \\ \mathcal{M} & w_j \notin K'_i \end{cases}$$

La matriz C claramente es de $m \times n$ y tenemos $c_{ii} = 0, \forall i$. Sea $j \leq m, j \neq i$, como cada z_i pertenece exclusivamente a K'_i tenemos $c_{ij} = \mathcal{M} > |V|$. Para $k > m$ tenemos $c_{ik} = \mathcal{M}$ o c_{ik} es igual a la altura de w_k que es a lo más $|V|$. Por lo tanto $c_{ii} = 0 \leq c_{ik} \leq \mathcal{M} = c_{ij}$ siempre que $i, j \leq m, i \neq j$ y $k > m$.

Por lo tanto B, C y $\vec{\beta}$ cumplen las condiciones del teorema 4.11, y podemos aplicarlo para obtener un conjunto $J \subset \{1, \dots, n\}$ de tamaño m y un vector $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ que cumple la condición 4.11.(a).

Definimos una función f en V como $f(w_j) = \alpha_j$ para $j \in \{m+1, \dots, n\}$ y demostramos que f es un núcleo fraccional fuerte de D . Como $\alpha_j \geq 0$, para todo j , claramente f es no-negativa. $B\vec{\alpha} = \vec{1}$ implica que:

$$\sum_{w_j \in K'_i} \alpha_j = 1.$$

Por lo tanto para todo clan maximal K_i de D :

$$\sum_{w_j \in K_i} f(w_j) = \sum_{w_j \in K_i} \alpha_j \leq \sum_{w_j \in K'_i} \alpha_j = 1.$$

Como cualquier clan K de D está contenido en algún K_i entonces:

$$\sum_{v \in K} f(v) = \sum_{v \in K_i} f(v) \leq 1.$$

Por lo tanto f cumple (4.3) y es fraccionalmente independiente.

Sea $w_k \in V$, $k > m$. De acuerdo a la condición 4.11.(b) existe un renglón $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $c_{ik} \leq c_{ij}$ para todo $j \in J$. Sea $K_i^J = \{w_j \in K'_i : j \in J\}$ la restricción de K'_i a elementos de J . Nótese que la ex-vecindad de w_k es la misma en D que en D' .

Demostramos que $K_i^J \subset N^+[w_k]$, supongamos por el contrario que existe w_j en K_i^J , pero no en $N^+[w_k]$. Como $w_j \in K_i^J$, tenemos que $c_{ij} < \mathcal{M}$. Además por 4.11.(b):

$$c_{ik} \leq c_{ij}.$$

Por lo tanto $c_{ik} < \mathcal{M}$ y entonces $w_k \in K'_i$. Como $w_j, w_k \in K'_i$, debe existir por lo menos un arco entre ellos. Entonces $w_k \leftarrow w_j$ pero $w_k \not\rightarrow w_j$ pues $w_j \notin N^+[w_k]$. Por lo tanto $w_k >_i w_j$, lo cuál implica

$$c_{ik} > c_{ij}.$$

Una contradicción. Concluimos que $K_i^J \subset M^+(w_k)$, y tenemos que:

$$1 = \sum_{w_j \in K'_i} \alpha_j = \sum_{w_j \in K_i^J} \alpha_j \leq \sum_{u \in M^+(w_k)} f(u).$$

Entonces f cumple (4.1). Como K_i^J es un clan, f de hecho cumple (4.2). Por lo tanto f es un núcleo fraccional fuerte. □

4.11. Toda gráfica perfecta es soluble

El hecho de que una digráfica tenga un núcleo fraccional fuerte no implica que tenga un núcleo, por ejemplo, las digráficas de la figura 4.12 no tienen núcleo, pero

las funciones asignadas a sus vértices son núcleos fraccionales fuertes. Sin embargo sabemos por el teorema 3.8 que ambas gráficas subyacentes son ejemplos minimales de gráficas no perfectas, y por lo tanto una gráfica que no sea de Berge (es decir, una gráfica que no es perfecta) tampoco es soluble.

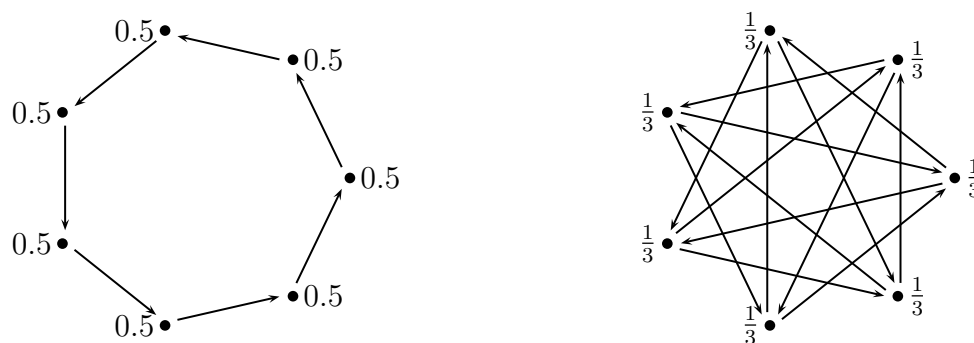


Figura 4.12 Digráficas con núcleo fraccional fuerte pero sin núcleo.

Probaremos la afirmación contrapuesta, es decir, que toda gráfica perfecta es soluble. Con este objetivo en mente, demostramos un par de resultados necesarios.

Lema 4.14. *Dada una gráfica perfecta con una función de peso $f : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ asociada a sus vértices, $f \not\equiv 0$, existe un conjunto independiente de la gráfica que interseca a toda subgráfica completa de peso maximal.*

Demostración. Sea $G = (V, E)$ una gráfica perfecta con una función de peso no negativa, $f \not\equiv 0$. Primero observamos que si K es una subgráfica completa de G , $V(K) = \{v_1, \dots, v_j, \dots, v_n\}$, y v_1, \dots, v_j tienen peso 0, entonces:

$$\sum_{u \in K} f(u) = \sum_{\substack{v_i \in V(K) \\ i \leq j}} f(v_i) + \sum_{\substack{v_i \in V(K) \\ i > j}} f(v_i) = 0 + \sum_{\substack{v_i \in K \\ i > j}} f(v_i)$$

Por lo tanto $K - \{v_1, \dots, v_j\}$ es una subgráfica completa de peso maximal, véase por ejemplo la figura 4.13. Consideremos entonces a $(G - W) \subseteq G$ donde $W = \{v \in V : f(v) = 0\}$. Toda subgráfica completa de orden maximal en $G - W$ es entonces también de peso maximal en G , por lo tanto basta con demostrar que existe un conjunto independiente U que interseca a toda subgráfica completa de orden maximal de $G - W$.

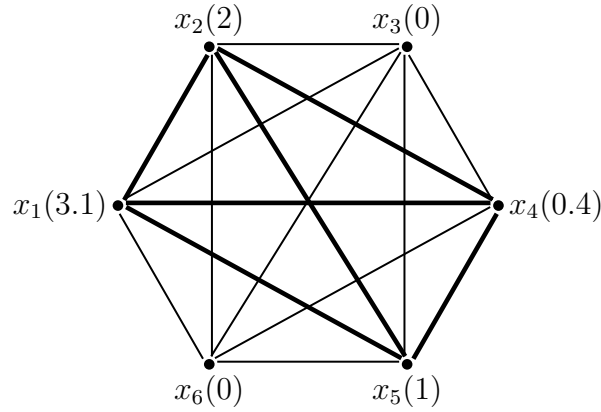


Figura 4.13 Un clan de peso maximal.

Por el lema 3.13 existe un conjunto independiente U_1 que interseca a todas las subgráficas completas de orden máximo de $G - W$. Consideramos ahora a $((G - W) - N[U_1]) \subseteq G$, existe un conjunto independiente U_2 que interseca a toda subgráfica de orden máximo de $(G - W) - N[U_1]$. Como G es finita, a lo más en m pasos encontramos un conjunto $U = U_1 \cup \dots \cup U_m$ que interseca a toda subgráfica completa de orden maximal de $G - W$ y U es independiente por construcción. □

Teorema 4.15. *Sea G una gráfica perfecta, $D = \vec{G}$ tiene un núcleo si y sólo si D tiene un núcleo fraccional fuerte.*

Demostración. La suficiencia es resultado de la proposición 4.8. Demostramos la necesidad, sea $D = \vec{G} = (V, E)$ una orientación de G y f un núcleo fraccional fuerte de D . Como f es fraccionalmente independiente, el peso maximal de todo clan de D es 1. Como f es fuertemente absorbente, para todo $v \in V$ existe un clan $K(v) \subseteq N^+[v]$ de peso 1. Por el lema 4.14 existe un conjunto independiente $U \subseteq V$ que interseca a todo clan de peso 1. Entonces U interseca a $K(v)$ y por lo tanto, para todo $v \in V$, $U \cap N^+[v] \neq \emptyset$. Es decir, U es absorbente en D y es un núcleo. □

Con este último teorema, la siguiente demostración es simple:

Teorema 4.16. *Toda gráfica perfecta es soluble.*

Demostración. Sea G una gráfica perfecta, por los teoremas 4.13 y 4.15, \vec{G} tiene un núcleo si está orientada normalmente. □

Conclusión

Como resultado de los teoremas 4.7 y 4.16 hemos demostrado:

Teorema 4.17. *Sea G una gráfica simple, son equivalentes:*

(a) $\chi(G) = \omega(G)$.

(b) *Toda orientación normal de G es núcleo-perfecta.*

La afortunada substitución de [4] por [1] permite evitar la complicada demostración de aproximadamente 15 paginas, que requiere familiaridad con conceptos de la teoría de juegos y la combinatoria. Pensamos que el concepto de núcleo fraccional fuerte es mucho más sencillo de comprender tras adquirir familiaridad con el concepto de núcleo.

La importancia del teorema 4.17 consiste en facilitar el trabajo sobre familias sospechosas de ser digráficas núcleo-perfectas, al considerar la familias de gráficas subyacentes y verificar su perfección.

Índice de símbolos

$A(D)$	Conjunto de arcos de una digráfica.....	3
C_n	Ciclo de longitud n	2
$D[U]$	Subdigráfica inducida por U en D	4
$E(G)$	Conjunto de las aristas de una gráfica.....	1
$G[U]$	Subgráfica inducida por U en G	1
$H \subset G, H \subset D$	H es subgráfica estricta de G o D	2
$H \subseteq G, H \subseteq D$	H es subgráfica de G o D	2
K_n	Gráfica completa o clan.....	2
$M(D)$	Digráfica de contracción de D	8
$N(U)$	Vecindad de U	2
$N[U]$	Vecindad cerrada de U	2
$N^+(U)$	Ex-vecindad de U	4
$N^+[U]$	Ex-vecindad cerrada de U	4
$N^-(U)$	In-vecindad de U	4
$N^-[U]$	In-vecindad cerrada de U	4
P	Camino.....	2
T	Trayectoria.....	2
$V(G)$	Conjunto de los vértices de una gráfica o digráfica.....	1
Y	Componente o componente fuerte.....	3
\mathcal{C}	Ciclo hamiltoniano.....	6

\mathfrak{C}	Coloración de los vértices de una gráfica	23
\mathfrak{C}_i	Clase cromática del color i	23
\mathfrak{C}_v	Clase cromática de v	23
$\alpha(G)$	Número de independencia de G	23
$\chi(G)$	Número cromático de G	23
$\omega(G)$	Número de clan máximo de G	23
\overline{G}	Complemento de G	2
\vec{G}	Orientación de una gráfica	41
$d(v)$	Grado de v	2
$d^+(v)$	Ex-grado de v	4
$d^-(v)$	In-grado de v	4
$rk(M)$	Rango de la matriz M	38

Índice de figuras

1.1	Diversos ejemplos de subgráficas.	1
1.2	$X = \{x_5, x_8\}$ es un conjunto de corte de G	4
1.3	Ciclos en una digráfica.	5
1.4	Las componentes fuertemente conexos de una digráfica.	8
1.5	Ejemplos de clanes.	10
2.1	$\{a, b, c, d\}$ es núcleo de la digráfica.	13
2.2	La existencia de núcleos en una trayectoria par y en una impar.	14
2.3	La existencia de núcleos en un ciclo impar y en uno par.	15
2.4	Una digráfica núcleo-imperfecta crítica.	16
2.5	$\{a, b, c, d\}$ es un semi-núcleo que no es un núcleo por que no absorbe a e	19
2.6	Proposición 2.16.	21
3.1	Una 4-coloración de una gráfica.	24
3.2	Borrar la arista (x, y) y contraer la arista (a, b) no preservan la perfección de la gráfica.	25
3.3	G es obtenida pegando G_1 y G_2 sobre de S	26
3.4	Una gráfica triangulada.	28
3.5	$\mathfrak{C}^1(H_1)$ y $\mathfrak{C}^2(H_2)$ nos rinden una $\omega(H_1)$ -coloración de H_2	28
3.6	G es una gráfica de intervalo, pero H no.	29
3.7	Gráficas construidas mediante la expansión de vértices.	32
3.8	Creando una coloración de G' en la demostración del lema 3.10.	33
3.9	Una gráfica perfecta y su complemento.	34
4.1	Una orientación normal de una gráfica.	42
4.2	Un ciclo impar y su complemento no son solubles.	43
4.3	C_{11} con una muestra de la orientación de la proposición 4.4 y uno de sus clanes máximos.	44
4.4	La orientación \vec{G} en la proposición 4.5.	45
4.5	Funciones fraccionales de una digráfica.	47

4.6	Una digráfica sin un ciclo hamiltoniano asimétrico.	50
4.7	Construcción un núcleo fraccional de una digráfica.	52
4.8	Construcción de los K'_i	52
4.9	Los clanes maximales K'_1 , K'_2 y K'_3 de D' sin considerar los pares de arcos simétricos.	53
4.10	Comprobando la condición 4.11.(b).	54
4.11	Un núcleo fraccional fuerte de D'	55
4.12	Digráficas con núcleo fraccional fuerte pero sin núcleo.	58
4.13	Un clan de peso maximal.	59

Bibliografía

- [1] R. AHARONI & R. HOLZMAN, Fractional Kernels in digraphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 73 (1998) 1-6.
- [2] C. BERGE, *Graphs and Hypergraphs* (1976) 307-312, 360-371.
- [3] C. BERGE & P. DUCHET, Recent problems and results about Kernels in directed graphs, *Discrete Mathematics* 86 (1990) 27-31.
- [4] E. BOROS & V. GURVICH, Perfect graphs are kernel solvable, *DIMACS Technical Report* (1994).
- [5] V. CHVÁTAL, On the Strong Perfect Graph Conjecture, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 20 (1976) 139-141.
- [6] M. CHUDNOVSKY, N. ROBERTSON, P. SEYMOUR & R. THOMAS, The Strong Perfect Graph Theorem, *Annals of Mathematics* 164 (2006) 51-229.
- [7] R. DIESTEL, *Graph Theory* (2005) 120-133.
- [8] G. JENNHWA CHANG, Perfect Graphs and Related Topics, (2007).
- [9] L. LOVÁSZ, A characterization of Perfect Graphs, *Journal of Combinatory Theory, Series B* 13 (1972) 95-98.
- [10] H. MEYNIEL, On the Perfect Graph Conjecture, *Discrete Mathematics* 16 (1976) 339-342.
- [11] C. RIOUX, Scarf's Theorem and applications in combinatorics (2006).
- [12] J. SU-TZU JUAN, Combinatorial Optimization Lecture 4: The Domination Problems of Interval Graphs (2010).

- [13] N. TROTIGNON & K. VUSKOVIC, On Roussel-Rubio-type Lemmas and their consequences, *Discrete Mathematics*, Vol. 311 8-9 (2011) 684-687.
- [14] A. WAGLER, Critical and Anticritical Edges in Perfect Graphs, *WG '01 Proceedings of the 27th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science* (2001).