

UN M  
POSGRADO



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

**“MODELADO DEL PROCESO DE  
ESTAMPADO PROFUNDO MEDIANTE UN  
CÓDIGO DE ELEMENTO FINITO PARA  
DEFORMACIÓN PLÁSTICA ANISOTRÓPICA”**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
**MAESTRO EN CIENCIA E  
INGENIERÍA DE MATERIALES**

P R E S E N T A  
**ING. MIGUEL ÁNGEL RAMÍREZ TOLEDO**

DIRECTOR DE TESIS  
Dr. Rafael Schouwenaars Franssens



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# *Agradecimientos*

Pareciera que fue ayer cuando la coordinación del posgrado en ciencia e ingeniería de materiales, previa cita, me dio la buena nueva, motivo por el cual me sentí completamente agradecido por permitirme ser parte de su programa de maestría. Las oportunidades como lo fue esa noticia en su debido momento no deberían dejarse pasar de ninguna manera. La intención de este pequeño pero importante espacio es mencionar a las personas que fueron fundamentales para que este trabajo finalmente haya llegado a su culminación.

Agradezco a los miembros del jurado que participaron en la revisión de este trabajo por sus comentarios, críticas y correcciones que sin duda enriquecieron este trabajo; gracias al Dr. Abel Camacho Galván, Dr. José Gonzalo González Reyes, Dr. José Bernardo Hernández Morales y Dr. Ignacio Alejandro Figueroa Vargas. Asimismo, agradezco a los miembros de mi comité tutorial que durante estos dos años estuvieron aportando ideas y críticas para que el desarrollo de esta investigación se vea reflejado en lo que es hoy; gracias Dr. Armando Ortíz Prado y Dr. Fermín Alberto Viniegra Heberlein. Al Dr. Rafael Schouwenaars Franssens por su paciencia en esas tardes de discusión y aclaración de ideas y conceptos, su capacidad para visualizar, entender y transmitir el conocimiento de este amplio tema de investigación, además de su apoyo moral y académico por mi salud. A mis compañeros del posgrado y de la UDIATEM por ser excelentes colegas en el trabajo, pero sobre todo por su valiosa amistad, como Humberto, Alfredo, Sebastián, Diana, Carlos, Roberto, Hugo, Agustín, Leonardo y muchas más personas que sin duda ocuparían varias páginas para mencionarlos a todos.

A mis padres, por ser una guía en mi vida que siempre se ha preocupado por darme lo mejor para que sea una mejor persona. Gracias por alentarme a seguir preparándome día a día. También, gracias a ustedes, a mi hermano y a mi bellísima Karla por haberme apoyado en momentos difíciles de salud durante la maestría, que ahora afortunadamente podemos contar como una valiosa experiencia del pasado.

MART

# Índice de figuras

<b>ANTECEDENTES</b>	1.1	Pasos generales para manufacturar una lata mediante (a) tres piezas, (b) dos.	2
	1.2	Segundo estampado profundo en la producción de latas de aluminio.	3
	1.3	Esquema del micro-estampado con martillo incremental.	5
	1.4	Pieza final del micro-estampado con martillo incremental.	5
	1.5	Panel estampado para la carrocería de un coche.	7
	1.6	Componentes estampados en caliente del chasis de un coche.	8
	1.7	Regiones de un poste B con diferentes resistencias y elongaciones.	9
<b>CAPÍTULO 1</b>	1.8	Microestructuras de (a) metal sin textura, (b) metal con textura cristalina, (c) metal con textura morfológica.	11
	1.9	Lámina con el sistema de referencia RD-TD-ND asociado a la muestra.	12
	1.10	Probeta de tracción empleada para calcular el parámetro de Lankford.	13
	1.11	Esquema de los elementos principales para el ensayo de Fukui.	14
	1.12	Orientación del material durante el proceso de estampado.	15
	1.13	Pliegues formados por defecto tecnológico.	16
	1.14	Definición de esfuerzo y representación cartesiana del tensor de esfuerzos $\sigma_{ij}$ .	18
	1.15	Representación geométrica de la superficie de cedencia en el sistema de ejes principales.	21
	1.16	Simetría sobre el plano octaédrico de la curva de fluencia para materiales isotrópicos.	22
	1.17	Parámetro de Lode definido en el sector de 30° sobre el plano $\Pi$ .	23
	1.18	Criterios de Tresca y von Mises sobre el plano $\Pi$ .	24
	1.19	Representación geométrica del endurecimiento isotrópico.	25
	1.20	Representación geométrica de la curva de fluencia ( $\Delta$ ) y la función potencial plástica ( $\Gamma$ ).	27
	1.21	Empaquetamiento de planos atómicos.	30
	1.22	Estructuras cristalográficas en metales.	31
	1.23	Esquema de dos planos atómicos sujetos a un esfuerzo cortante.	32
	1.24	Probeta de un monocristal sujeta a tracción.	39
	1.25	Ley de Bragg.	44
	1.26	Ángulos que describen a la matriz de rotación.	45
	1.27	Textura dentro de una aleación Al-Fe-Si laminada en frío.	46
	1.28	Ángulos de Euler, según la convención de Bunge.	47
	1.29	Regiones modeladas con la aproximación ALAMEL en un grano de un metal.	51
	1.30	Contacto microscópico entre dos superficies rugosas.	52
	1.31	Datos experimentales del coeficiente de fricción.	54
	1.32	Esquema ilustrativo de una capa portadora de lubricante sólido.	55
	1.33	Fuerza de fricción como función de la fuerza normal.	56

<b>CAPÍTULO 2</b>	2.1	Perfil de la lámina y forma final del sólido deformable.	60
	2.2	Gráficas para la ley de Swift de las aleaciones AA1100 y AA3103.	63
	2.3	Pasos para formar el ensamble del ensayo de Fukui.	65
	2.4	Modelo de elementos finitos para una barra de sección $A$ .	66
	2.5	Barra deformada para el primer incremento de tiempo.	67
	2.6	Segundo incremento de tiempo para la barra.	68
	2.7	Tercer incremento de tiempo para la barra.	68
	2.8	Condiciones de simetría para el desplazamiento de los lados de la lámina.	75
	2.9	División del espesor para el cuarto de lámina mediante elementos finitos.	76
	2.10	Mallado final del cuarto de lámina.	77
	2.11	Efecto Hourglassing en un modelo sólido para suelo.	81
<b>CAPÍTULO 3</b>	3.1	Energía cinética y energía por deformación para la aleación AA1100 durante la simulación numérica.	82
	3.2	Energía cinética y energía por deformación para la aleación AA3103 durante la simulación numérica.	83
	3.3	Balance de energía para la aleación AA1100, según la ecuación (2.16) del capítulo 2.	84
	3.4	Espesor [mm] vs $\theta$ [rad]. El valor de $\theta$ representa el ángulo, en coordenadas polares,...	85
	3.5	Espesor [mm] vs $\theta$ [rad], con $\theta \in [0, \pi/2]$ . El espesor en la malla fina muestra una oscilación mínima alrededor de...	86
	3.6	Espesor [mm] vs $\theta$ [rad], con $\theta \in [0, \pi/2]$ . El efecto hourglassing persiste en la simulación con malla gruesa...	86
	3.7	Espesor [mm] vs $\theta$ [rad], con $\theta \in [0, \pi/2]$ . Finalmente, el espesor calculado con la malla fina para la altura de...	87
	3.8	Espesor [mm] vs $\theta$ [rad], con $\theta \in [0, \pi/2]$ . El comportamiento de hourglassing para ambas mallas se muestra...	87
	3.9	Espesor [mm] vs $\theta$ [rad], con $\theta \in [0, \pi/2]$ . Se observa que el cálculo del espesor con una malla gruesa de...	88
	3.10	Espesor [mm] vs $\theta$ [rad], con $\theta \in [0, \pi/2]$ . La tendencia en el efecto hourglassing para el espesor de la copa...	88
	3.11	Espesor [mm] vs $\theta$ [rad], con $\theta \in [0, \pi/2]$ . Los valores para el espesor mostraron variación mínima cuando el mallado...	89
	3.12	Los espesores calculados con las aproximaciones ALAMEL y FC Taylor muestran una gran variación, causada por...	90
	3.13	La severidad que se observa en la variación del espesor para ALAMEL y FC Taylor se explica con la textura del...	90
	3.14	La precisión del modelo isotrópico en la medición del espesor sugiere que debe utilizarse una malla optimizada...	91
	3.15	En esta figura se observa que los espesores obtenidos para ALAMEL y FC Taylor han disminuido la variación...	91
	3.16	Esta figura muestra la persistencia del efecto hourglassing en la copa para las aproximaciones de FC Taylor y...	92
	3.17	La figura muestra el espesor más elevado que corresponde al modelo IsoCAEMallaFina; esto quiere decir que la altura...	92
	3.18	El efecto hourglassing se ha mantenido estable para el modelo IsoCAEMallaFina; sin embargo, en las...	93
	3.19	Finalmente, los resultados para el espesor de la copa se muestran similares para ambas aleaciones; esto quiere...	93

3.20	Altura [mm] vs $\theta$ [rad], con $\theta \in [0, \pi/2]$ . La figura muestra la formación de orejas para las aproximaciones ALAMEL y...	94
3.21	Altura [mm] vs $\theta$ [rad], con $\theta \in [0, \pi/2]$ . La gráfica muestra las alturas calculadas para la copa formada, según...	95
3.22	Copa isotrópica formada para la aleación AA1100; la forma de la copa que se obtiene para la aleación AA3103 es...	96
3.23	Deformación plástica equivalente en el cuarto de copa para la aleación AA3103; el resultado obtenido...	97
3.24	Copa anisotrópica para la aleación AA1100; se observa en la parte superior de la copa la formación de cuatro orejas; los...	97
3.25	Se observa la deformación verdadera (logarítmica) obtenida en el plano 1-2 (XY), asociada con el cambio de espesor...	98
3.26	Comparación de la precisión entre IsoCAEMallaFina e IsoCAEEM para el espesor de la copa, calculado a...	99
3.27	Precisión obtenida para la altura máxima en la copa de aleación AA1100 según IsoCAEMallaFina e IsoCAEEM.	100
3.28	Periferia de la copa que representa la altura máxima.	101
3.29	La copa experimental muestra una variación compleja en las orejas formadas durante el ensayo. Indica un...	102
3.30	Al igual que en la aleación AA1100, la altura experimental en la copa de la aleación AA3103 muestra la formación de...	102

## Índice de tablas

<b>CAPÍTULO 1</b>	1.1	Sistemas de deslizamiento en FCC, BCC y HCP.	33
	1.2	Producto tensorial $b_i n_j$ para los sistemas de deslizamiento en FCC y BCC.	35
	1.3	Factores de orientación $M_{ij}^s$ para los sistemas de deslizamiento en FCC y BCC.	36
<b>CAPÍTULO 2</b>	2.1	Modelos de las partes que componen el ensayo de Fukui. Acotaciones en [m].	60
	2.2	Composiciones típicas para las series de aluminios AA1100 y AA3103.	61
	2.3	Valores de las constantes de elasticidad y endurecimiento plástico isotrópico para las aleaciones AA1100 y AA3103.	62
	2.4	Valor de densidad para las aleaciones de aluminio.	64
	2.5	Condiciones de frontera para las piezas modeladas del estampado profundo.	75
<b>APÉNDICE I</b>	A1.1	Sistema operativo y procesador necesarios para los compiladores.	108
	A1.2	Esquema posible de compatibilidad para Abaqus y Fortran.	109

# Nomenclatura

ALAMEL,	<i>Advanced Lamel</i> , en inglés.
AA1100	Aleación de Al serie 1100.
AA3103	Aleación de Al serie 3103.
ALLAE,	Energía de deformación artificial.
ALLVD,	Energía de disipación por amortiguamiento.
ALLMW,	Energía por cambio artificial de la densidad.
ALLIE,	Energía de deformación.
ALLKE,	Energía cinética.
ALLFD,	Energía disipada por fricción.
ALLWK,	Trabajo realizado por fuerzas externas sobre el modelo.
ALLCW,	Trabajo producido por fricción.
ALLPW,	Trabajo producido por contacto entre superficies.
BCC,	<i>Body-Centered Cubic</i> , en inglés.
$\mathbf{b}, b_i,$	Vector de Burgers.
$b_i n_j,$	Producto tensorial.
CAE,	<i>Computer-Assisted Engineering</i> , en inglés.
CNC,	<i>Computer Numerical Control</i> , en inglés.
$C,$	Sistema de referencia asociado al cristal.
$dw_p,$	Función de trabajo plástico por unidad de volumen.
$d\varepsilon_{ij}^p,$	Tensor de deformación plástica infinitesimal.
$\overline{d\varepsilon}^p$ , PEEQ,	Deformación plástica equivalente.
$d_0,$	Diámetro inicial de la lámina a estampar.
$d_1,$	Diámetro final de la lámina estampada satisfactoriamente.
$d\lambda,$	Función escalar de la magnitud del tensor de esfuerzos infinitesimal.
$E, G, \nu,$	Módulo de Young, a corte y relación de Poisson en un material.
ETOTAL,	Energía total en un modelo numérico de Abaqus.
FEM,	<i>Finite Element Method</i> , en inglés.
$f(\sigma),$	Función que representa a un Criterio de Fluencia.
FCC,	<i>Face-Centered Cubic</i> , en inglés.
$f(g)$ , ODF,	<i>Orientation Distribution Function</i> , en inglés.
FC Taylor,	<i>Full Constraints Taylor Model</i> , en inglés.
$g(s),$	Función de la superficie potencial plástica.
$g,$	Matriz de rotación Sistema de ref. Cristal/Sistema de ref. Muestra.
HCP,	<i>Hexagonal Close-Packed</i> , en inglés.
$I_1, I_2, I_3,$	Primero, segundo y tercer invariante de $\sigma_{ij}$ .
$J_2, J_3,$	Segundo y tercer invariante de $s$ .
$k^2,$	Valor característico en el criterio de von Mises.
LDR,	<i>Limit Drawing Ratio</i> en inglés.
$\mathbf{l},$	Vector unitario normal a una superficie.
$\dot{l}_{ij},$	Tensor gradiente de velocidad en el cristal.
$M_{ij}^s, \mathbf{M}^s,$	Factor de orientación.
$\bar{M},$	Factor de orientación promedio.
$M(g),$	Factor de orientación como función de la ODF.
ND,	<i>Normal Direction</i> , en inglés.
$\mathbf{n}, n_i,$	Vector unitario en la dirección hidrostática, vector normal al plano de deslizamiento.
RD,	<i>Rolling Direction</i> , en inglés.
$R,$	Coefficiente de Lankford, rugosidad.
$\bar{R},$	Coefficiente de Lankford promedio.
$\Delta R,$	Coefficiente de Lankford para medir la amplitud de la anisotropía.
RX,	Rayos X.

$RA$ ,	Relación de aspecto en un elemento finito.
$s, s_{ij}$ ,	Tensor desviador de esfuerzos.
$S$ ,	Sistema de referencia asociado a la muestra, número adimensional de velocidad.
$TD$ ,	<i>Transverse Direction</i> , en inglés.
$T$ ,	Vector de esfuerzos de Cauchy.
ULSAB,	<i>Ultra Light Steel Automotive Body</i> , en inglés.
$\dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$ ,	Velocidad y aceleración en los nodos, respectivamente.
$\dot{W}_c$ ,	Trabajo interno disipado por fricción en un cristal.
$Y$ ,	Valor crítico para el esfuerzo cortante en criterio de Tresca, esfuerzo de tracción según Ley de Schmid.
$\varepsilon_w$ ,	Estricción del ancho en una probeta de tracción.
$\varepsilon_t$ ,	Adelgazamiento del espesor en una probeta de tracción.
$\alpha$ ,	Ángulo medido con respecto a la dirección RD.
$\sum \mathbf{F}$ ,	Suma de fuerzas en un sólido.
$\sum \mathbf{M}$ ,	Suma de momentos en un sólido.
$\delta S$ ,	Superficie diferencial.
$\delta \mathbf{P}$ ,	Fuerza interna en un sólido.
$\sigma_{ij}, \boldsymbol{\sigma}$ ,	Tensor de esfuerzos de Cauchy.
$\sigma$ ,	Eigenvalores de $\sigma_{ij}$ , variable en la ecuación característica de $\boldsymbol{\sigma}$ , esfuerzos principales idénticos, ley empírica de Swift.
$\delta_{ij}$ ,	Delta de Kronecker.
$\sigma_{ij}^p$ ,	Tensor de esfuerzos diagonalizado.
$\sigma_m$ ,	Esfuerzo normal promedio de $\boldsymbol{\sigma}$ .
$\mu$ ,	Parámetro de Lode, fricción seca.
$\bar{\sigma}$ ,	Esfuerzo de cedencia equivalente.
$\tau_m$ ,	Esfuerzo cortante teórico entre planos atómicos.
$\hat{\Omega}_{ij}^L$ ,	Tensor rotación de la red cristalina.
$\dot{\gamma}_s$ ,	Rapidez de deslizamiento del sistema de deslizamiento $s$ .
$\dot{\varepsilon}_{ij}$ ,	Parte simétrica del tensor $\dot{l}_{ij}$ .
$\varepsilon_{ij}^{(T)}$ ,	Deformación plástica macroscópica del monocristal.
$\varepsilon_{ij}^{(n)}$ ,	Deformación por deslizamiento sobre el sistema de deslizamiento $n$ .
$\tau_{CRSS}$ ,	<i>Critical Resolved Shear Stress</i> , en inglés.
$\lambda$ ,	Longitud de onda, parámetro de orientación en la Ley de Schmid.
$\varphi_1$ ,	Ángulo de Bunge RD con respecto a ND.
$\Phi$ ,	Parámetro de orientación en la Ley de Schmid, Ángulo de Bunge ND con respecto a RD'
$\varphi_2$ ,	Ángulo de Bunge direcciones [100] y [010] con respecto a ND.
$\varepsilon_0$ ,	Deformación inicial, constante de la Ley de Swift.



# Índice temático

## Antecedentes

Aplicaciones e importancia económica del proceso	1
• Latas de aluminio para bebidas	1
• Micro conformado y micro estampado profundo	4
• Estampado de carrocería para coches	5
• Estampado en caliente	7

## Objetivos

10

Capítulo 1. Introducción al modelado del proceso de estampado profundo	2
1.1. Efectos de la anisotropía.	11
1.2. Ensayo experimental de Fukui.	14
1.3. Fundamentos de la plasticidad continua.	16
1.3.1. Criterios de fluencia.	16
1.3.2. Criterio de Tresca.	23
1.3.3. Criterio de von Mises.	23
1.3.4. Las reglas de flujo plástico (Flow Rules).	26
1.3.5. La superficie potencial plástica.	26
1.3.6. Las ecuaciones de Prandtl-Reuss y Lévy-Mises.	27
1.4. Plasticidad cristalina.	29
1.4.1. Sistemas cristalinos FCC, BCC y HCP.	29
1.4.2. Sistemas de deslizamiento independientes.	34
1.4.3. Ley de Schmid en forma escalar.	38
1.4.4. Ley de Schmid generalizada.	40

1.5.	Texturas cristalinas en los metales.	42
1.6.	Deformación plástica en policristales.	47
1.6.1.	La aproximación de Sachs.	48
1.6.2.	La aproximación de Taylor.	48
1.6.3.	Aproximaciones actuales para deformación plástica cristalina.	50
1.7.	Aspectos básicos de la tribología en los procesos de manufactura.	52
Capítulo 2. Descripción del modelo isotrópico		58
2.1.	Módulo de parte.	58
2.2.	Módulo de propiedades.	61
2.3.	Módulo de ensamble.	64
2.4.	Módulo de paso.	66
2.4.1.	Introducción al análisis dinámico explícito.	66
2.4.2.	El método dinámico explícito.	69
2.4.3.	Estabilidad.	70
2.4.4.	Aceleración del tiempo de cálculo.	72
2.5.	Módulo de interacciones.	73
2.5.1.	Asignación de inercia al pisador.	74
2.5.2.	Asignación de fricción entre las superficies de contacto.	74
2.6.	Módulo de condiciones de frontera.	74
2.7.	Módulo de mallado.	76
2.8.	Verificación de los resultados numéricos.	77
2.8.1.	Balance de energías.	78

2.8.2. Efecto hourglassing y efecto locking.	79
Capítulo 3. Resultados de las simulaciones	82
3.1. Balance de energía.	82
3.2. Efecto Hourglassing.	84
3.3. Visualización de la copa formada.	96
3.4. Límite de precisión en la malla de elementos finitos.	98
3.5. Copa experimental vs copa simulada con FEM.	100
Discusión	103
Conclusiones	107
Apéndice I. Compatibilidad entre Abaqus y Fortran	108
Apéndice II. Adquisición de los resultados isotrópicos	110
Referencias	112

# Antecedentes

El proceso de estampado profundo pertenece al área de estampado de láminas metálicas (en inglés, *sheet metal forming*), por lo que se presenta aquí una justificación económica y tecnológica de esta área de investigación para concluir con los objetivos a realizar en esta tesis.

## Aplicaciones e importancia económica del proceso

La elaboración de productos de conformado de lámina ha propiciado uno de los cambios más importantes de la humanidad. La transición de una operación de conformado hecha a mano a una operación de conformado automatizada y realizada en grandes cantidades a menor tiempo, ha cambiado el estilo de vida en muchos aspectos. Hoy en día las operaciones de estampado están vinculadas con muchos productos que se utilizan diariamente, como el automóvil, las latas y envases, los aviones, cartuchos de armas, muebles metálicos, utensilios de cocina, entre otros. Tan sólo en México durante el año 2008 [1], las industrias metálicas básicas así como los rubros de fabricación de productos metálicos han producido 344,659 y 103,741 millones de pesos respectivamente.

En cada uno de estos procesos se presentan una amplia gama de condiciones de flujo plástico, de acuerdo al proceso que se aplique en la lámina. En el caso de estampado profundo, la herramienta utilizada provoca un estampado que obliga a la lámina a deformarse permanentemente en dirección radial. Dicho de otra forma, las deformaciones principales sobre el plano de la lámina son opuestas (una negativa y la otra positiva) y el cambio en su espesor será mínimo. A continuación se muestran aplicaciones donde el estampado profundo es utilizado en su gran mayoría, como una etapa intermedia de todo el proceso de manufactura del producto.

- Latas de aluminio para bebidas

A pesar de que hoy en día cada lata de aluminio sólo pesa 13 g en promedio, la producción tan grande de latas lo convierte en uno de los principales compradores de aluminio a nivel mundial. En Estados Unidos, la producción anual de latas de aluminio alcanza los 100 billones de piezas producidas, por lo que se estima que se requieren más de 1 millón de toneladas de aluminio para satisfacer esta demanda. Mientras que en la Unión Europea, la producción de latas para el año

2004 fue de 17 billones de piezas a base de acero, y cerca de 23 billones de aluminio. Esto significa que cualquier innovación en el proceso tecnológico que implique una reducción de costos se verá reflejado en millones de dólares de ahorro (Vea <http://www.aluminium.org/>).

En principio [2], la producción de latas se realizaba de manera artesanal y posteriormente se requería de un proceso de tres pasos para su producción: el corte de una lámina que representa el cuerpo de la lata, y el corte de dos láminas redondas que representan el fondo y tapa de la lata, soldadas en su cuerpo. Hoy, el estampado profundo se emplea para producir el mismo producto con sólo dos piezas en el caso de envasado de bebidas, lo cual reduce tiempos de producción y costos de operación.

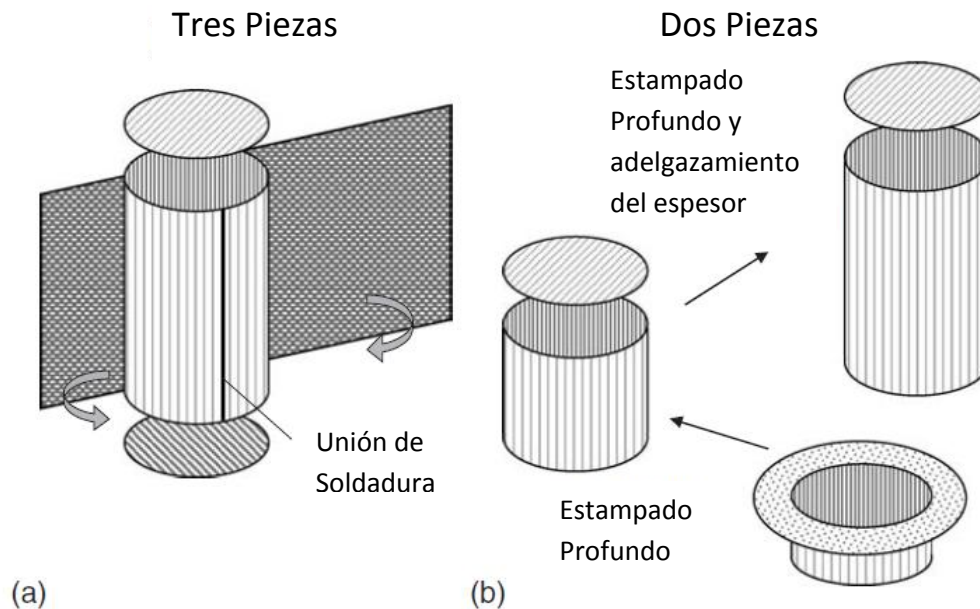


Fig. 1.1. Pasos generales para manufacturar una lata mediante (a) tres piezas, (b) dos piezas [2].

Como se muestra en la figura 1.1, para elaborar una lata de aluminio con dos piezas se requiere de estampar a la lámina en dos etapas. Ambas requieren de una lubricación previa de la lámina, aunque hoy en día las compañías adquieren rollos de lámina pre-lubricados para evitar ese paso previo. En la primera, se forma una copa inicial donde está controlado su espesor, mientras que en la segunda etapa, el estampado profundo se controla de tal forma que el espesor de la copa, así como sus dimensiones de tamaño, alcancen las normas establecidas para el cuerpo de la lata. La variación del espesor en la segunda etapa se debe a que se presentan esfuerzos circunferenciales en la lámina, además de esfuerzos

de tracción sobre la pared de la lata. A continuación se muestra un esquema del dispositivo donde se realiza el segundo estampado profundo.

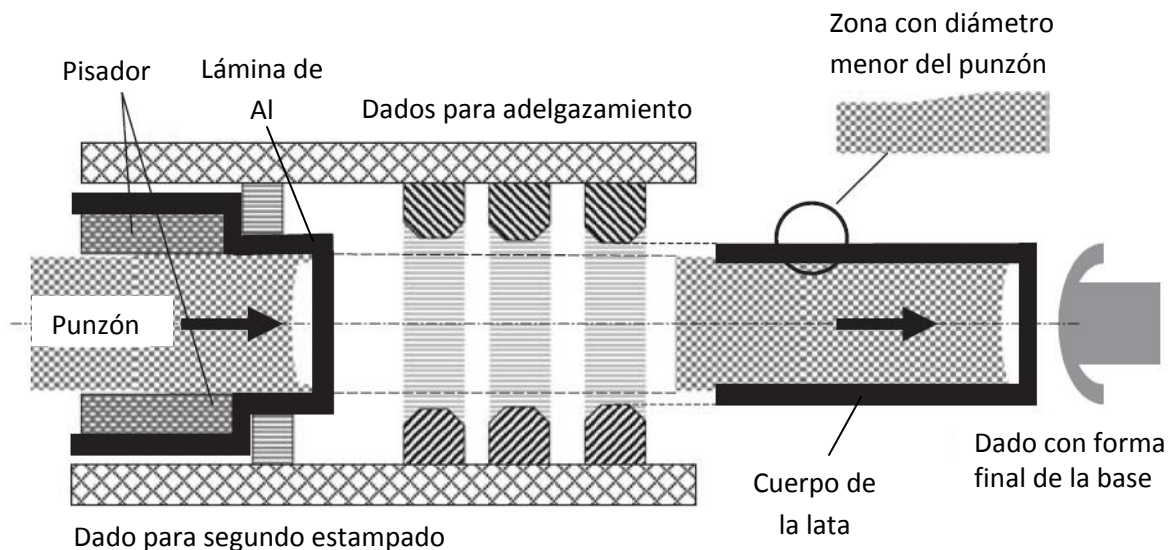


Fig. 1.2. Segundo estampado profundo en la producción de latas de aluminio [2].

En esta segunda etapa, se utiliza un punzón con la punta curva para deformar y endurecer la base de la copa. Con esto la base final de la lata obtiene una mayor resistencia, ya que en los pasos previos de estampado profundo su endurecimiento es prácticamente nulo. Como puede observarse en la figura 1.2, en esta etapa el punzón da un golpe más largo a la copa y recorre mayor distancia sobre el dispositivo. Una vez que la copa ha pasado por el dado de estampado, ésta se dirige hacia una serie de dados de adelgazamiento (en inglés, *ironing*) que reducen su espesor de 0.3 a 0.11 mm aproximadamente. Finalmente, el último extremo del punzón que entra en contacto con la copa presenta una reducción en su diámetro para evitar el adelgazamiento en la parte superior de la pared de la lata, ya que en pasos siguientes se requiere realizar una estricción en dicha zona. Dicho espesor se mantiene alrededor de los 0.16 mm aproximadamente. Una vez obtenida la forma final de la copa, la parte superior del cuerpo de la lata presenta "orejas" (en inglés, *earing*), las cuales deben cortarse para homogeneizar el tamaño final de la lata. La naturaleza de este inconveniente tecnológico se discute con mayor detalle en capítulos posteriores.

Los pasos posteriores para terminar el producto final de la lata como limpieza y decoración, acabados, manufactura de la tapa y abre-fácil, ensamble, además del llenado y envasado ya no están relacionados con el estampado profundo. Para mayor detalle, ver la referencia [2].

- Micro-conformado y micro-estampado profundo

En la actualidad es posible adquirir miles de productos en el mercado con tendencia a reducir su tamaño todos los días. En especial, los productos electrónicos que pueden llevarse en la mano (celulares, computadoras, reproductores de música, etc.) son un claro ejemplo de productos que demandan continuamente su miniaturización. Además, dispositivos sofisticados en la medicina, en el mercado de sensores y en sistemas optoelectrónicos también se ven afectados por este fenómeno [3]. Del año 2000 al 2004, se ha visto un incremento sustancial en el mercado de micro-conformado, que va de 15 a 35 billones de dólares a nivel mundial, lo cual muestra una gran demanda por la miniaturización en los productos comerciales y cuya tendencia de ascenso se ha mantenido hasta el día de hoy.

Los productos de micro-estampado requieren de un elevado conocimiento de la tecnología involucrada en su proceso de manufactura y producción. Sin embargo, disminuir cada vez más el tamaño de sus productos conlleva a un conformado mucho más complejo y costoso. Al final, el valor del producto terminado de un micro-estampado compensa los inconvenientes tecnológicos que se deben controlar durante el proceso. A continuación se lista una serie de razones de tamaño por las cuales se complica el micro-estampado [3].

- La razón de la superficie de la lámina al volumen de ésta se incrementa cuando se miniaturiza.
- La fuerza de adhesión y tensión superficial tienen un mayor efecto cuando se minimiza el producto.
- La influencia de los granos de la microestructura de la lámina tienen un mayor efecto en el micro estampado.
- La razón de los espacios sin lubricar, que se forman sobre la superficie rugosa, a la superficie total de la lámina disminuye e influye en el producto final.

Las investigaciones en esta área científica se centran principalmente en la elaboración de nuevos métodos para parametrizar la fricción, debido a que existen efectos de tamaño que cambian radicalmente esta propiedad. También, el control de la fuerza impuesta por el pisador se vuelve más complejo cuando éste reduce su tamaño. Por lo tanto, también será más difícil el control de los defectos tecnológicos asociados a esta fuerza. Finalmente, se requiere de nuevos métodos para medir el grado de estampabilidad (en inglés, *Limit Drawing Ratio*) de una lámina sujeta a un micro-estampado.

El micro-estampado con martillo incremental (en inglés, *incremental micro sheet forming by hammering*) es un ejemplo que se muestra a continuación. Como se observa en la figura 1.3, la pieza final consiste de una serie de capas adyacentes cuyo espesor alcanza 10  $\mu\text{m}$ , y el punzón que se utiliza es de 10  $\mu\text{m}$  de diámetro.

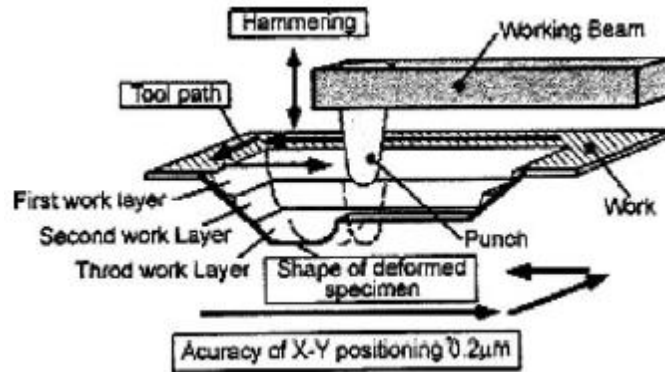


Fig. 1.3. Esquema del micro-estampado con martillo incremental, ver referencia [3].

La posición del martillo está controlada por una máquina CNC con servomotores, cuya precisión para posicionar es de 0.2  $\mu\text{m}$ . Este proceso ha sido puesto en línea de producción, y en la figura 1.4 se muestra la pieza final del proceso.

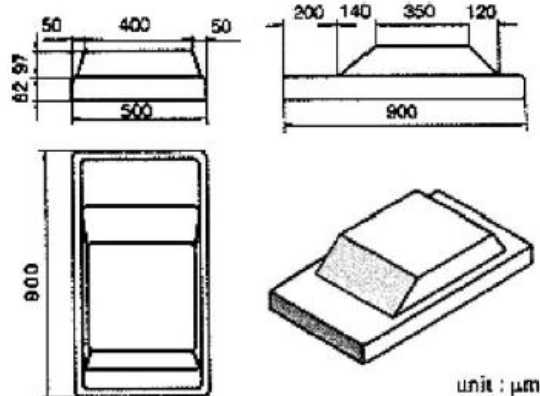


Fig. 1.4. Pieza final del micro-estampado con martillo incremental, ver referencia [3].

- Estampado de carrocería para coches

El estampado de láminas para carrocería de coches [4] es un proceso de manufactura que se realiza con altos niveles de producción, donde se busca que la calidad de los productos terminados se mejore, los tiempos de producción se reduzcan y se desarrollen mejores medios de entrega para los lotes de producción



manufacturados. El método del elemento finito (FEM) proporciona una herramienta numérica capaz de analizar el proceso de estampado, con el fin de mejorar el conocimiento que se tiene del proceso. Además, permite la capacidad de predicción, con lo cual se elimina el ensayo y error en el diseño de la pieza estampada y del herramental. Por lo tanto, el modelado numérico de estampado por FEM reduce los costos de operación que se requieren para elevar el porcentaje de confiabilidad del modelo. Un proceso común que se sigue en el estampado de láminas consiste en el diseño de la geometría de la pieza, para continuar con el diseño del herramental necesario. En esta parte del proceso es común realizar ensayos de manufactura con la pieza de trabajo y el herramental diseñados anteriormente, para retroalimentar con información experimental tanto el diseño de la pieza de trabajo como el diseño del herramental. Finalmente, este paso de retroalimentación promueve que el proceso de manufactura se optimice y termine funcionando adecuadamente en líneas de producción. Sin embargo, hoy en día este proceso para el diseño y manufactura de estampado de láminas requiere que se realice conjuntamente; es decir, se busca que el proceso se vuelva concurrente para reducir costos de operación y tiempo de desarrollo de nuevos productos.

Durante muchas décadas, el acero ha sido el principal material para la manufactura de la carrocería de los coches. Aun cuando se han utilizado materiales más ligeros como el aluminio, polímeros y materiales compuestos en lugar del acero, éste ha permanecido y sigue siendo el material más utilizado. Una lámina de acero para la carrocería de un coche debe conjuntar un número de requisitos, tales como buena conformabilidad, resistencia suficiente, buena capacidad de adhesión por soldadura, resistencia a la corrosión, buena calidad en los acabados superficiales, etc. Esta lista de requisitos puede conseguirse solamente en aceros con bajo contenido de carbono, debido a que aceros con medio y alto contenido de carbono no son lo suficientemente dúctiles, además de carecer una baja soldabilidad. Como ejemplos de aceros con bajo contenido de carbono son los aceros Al-killed, aceros libres de intersticiales, etc.

Se han realizado diferentes estudios para investigar la posibilidad de producir carrocerías para autos ultraligeros. Mientras el grupo ULSAB se ha dedicado al uso único de acero, Ford desarrolló el modelo P2000 con una carrocería hecha totalmente a base de aluminio [5]. Con la demanda de disminuir los costos en carrocerías más ligeras, la tendencia de las piezas estampadas es volverse más grandes. Por lo tanto, las piezas de trabajo y sus respectivos procesos de conformado son más complejos y difíciles, no solamente debido al tamaño sino también al uso de láminas que ajusten mejor en el ensamble del coche. La figura

1.5 muestra el panel para la carrocería de un coche, el cual es solamente un producto intermedio en la línea de producción.

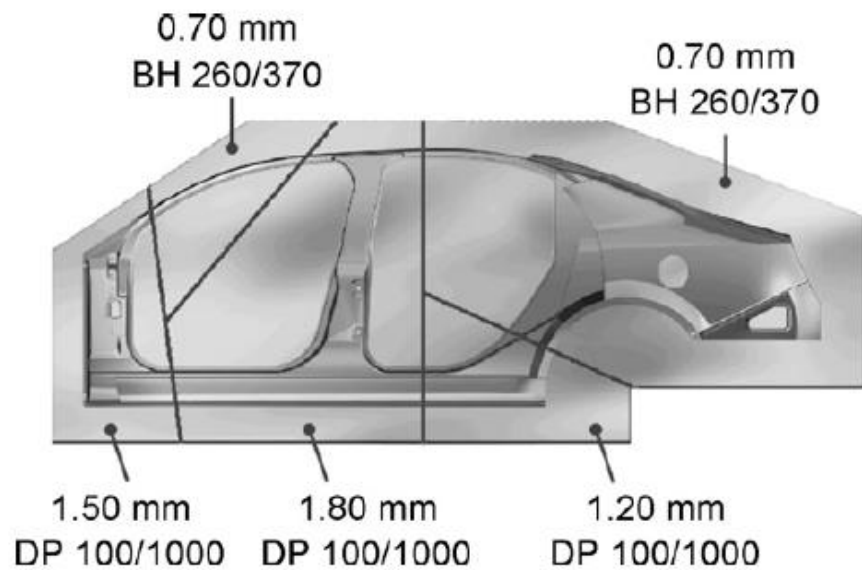


Fig. 1.5. Panel estampado para la carrocería de un coche [5].

- Estampado en caliente

Debido a la gran demanda de automóviles más ligeros, seguros y con mejor respuesta a posibles impactos, la industria automotriz ha empleado el uso de aceros de alta resistencia - con bajo contenido de carbono - (en inglés, *ultra-high strength steels*) como alternativa comercial en la estructura para el cuerpo exterior del auto; es decir, el chasis. Ha sido tan grande la demanda por este tipo de aceros para el chasis que desde el año 2000 se emplea para este propósito, y el número de partes producidas por año ha llegado hasta la cifra de 107 millones de partes producidas en el año 2007 [6]. Las partes del chasis que son estampadas en caliente, que se muestran en la figura 1.6, son: los postes A y B, la defensa delantera, la pared de fuego, el estribo, el túnel y las barras anti-impacto.

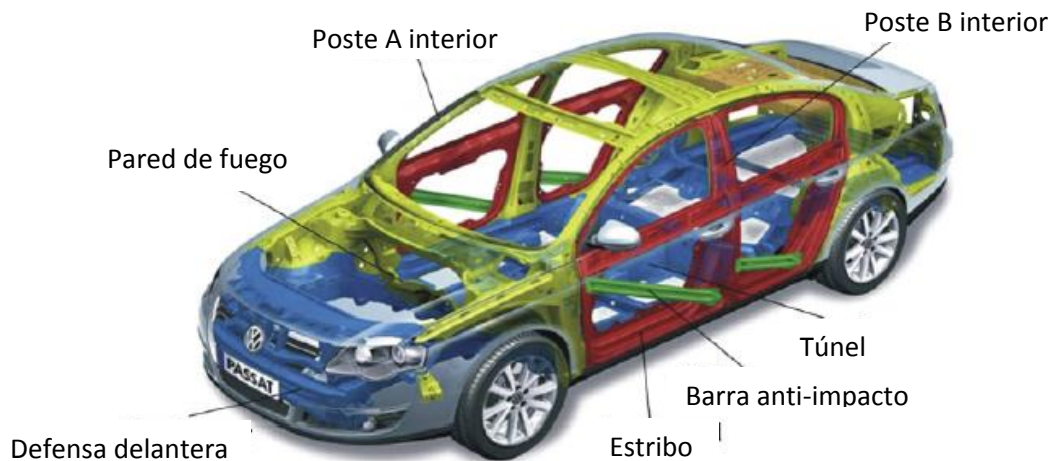


Fig. 1.6. Componentes estampados en caliente del chasis de un coche [6]. Los colores en la imagen muestran las partes principales del chasis del coche que se manufacturan con estampado en caliente.

El estampado en caliente se puede realizar mediante dos métodos: el estampado en caliente directo y el estampado en caliente indirecto. En el primero, la lámina de acero a estampar debe calentarse hasta la temperatura de austenización en un horno, para de ahí ser trasladada al troquel que estampa y temple a la pieza en una operación. En el segundo, la pieza recibe un primer estampado en frío, para después ser llevada hacia el horno que eleva su temperatura hasta la de austenización, y finalmente se traslada hacia el troquel de estampado en caliente; en este tipo de método, se realizan operaciones de calibración y templado. La resistencia de estos aceros se debe a la transformación martensítica que ocurre en el acero mediante el temple que recibe, y llega a alcanzar valores de hasta 1500 MPa a tracción.

La ventaja de realizar un tratamiento térmico a las piezas de acero estampadas en caliente es que eleva su resistencia (hasta 1500 MPa) al llevar a cabo una transformación martensítica dentro de su estructura cristalina. Es decir, el temple que reciben en el troquel está controlado para que ocurra adecuadamente esta transformación por contracción elástica del acero. Sin embargo, al realizar una transformación martensítica completa, el porcentaje de elongación de la pieza se reduce hasta un 5%. Esto empobrece el rendimiento de la pieza a la absorción de energía durante un impacto. Por lo tanto, el troquel de estampado presenta zonas con temperaturas de temple diferentes para formar en la pieza regiones con diferente contenido de martensita formada. Esto da por resultado una pieza con diferentes grados de absorción de energía al impacto y con zonas de resistencia

diferentes. Este efecto también se ha logrado cuando se crea una pieza mediante aceros cuya respuesta al temple es diferente. Mientras que en uno de los aceros es posible llegar a la temperatura de austenización, en el otro dicho efecto no sucede. Entonces, una vez que el troquel aplica el tratamiento térmico, en una de las partes de acero se consigue la alta resistencia por la formación de martensita. En la otra parte, los parámetros del tratamiento térmico no logran un temple en ella. Finalmente, ambas partes son soldadas mediante láser. En la figura 1.7 se muestra un poste B del chasis de un coche con ambas técnicas de estampado en caliente.

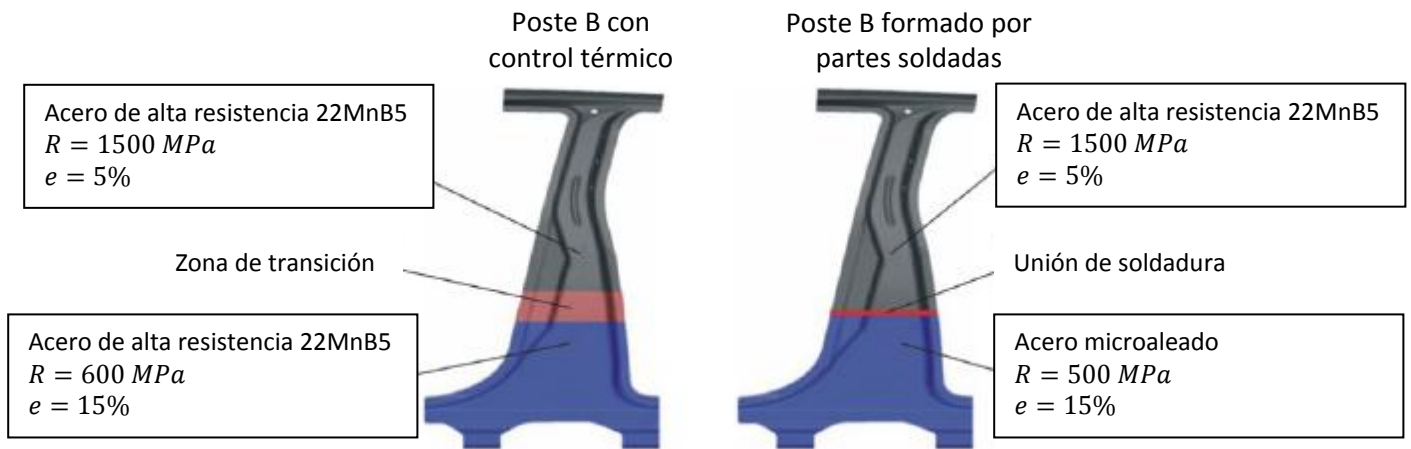


Fig. 1.7. Regiones de un poste B con diferentes resistencias y elongaciones [6].

Para una mayor información acerca del estampado en caliente, se recomienda revisar la referencia [6].

# Objetivos

1. Establecer el área de modelado numérico de estampado profundo como una línea de investigación en la Universidad Nacional Autónoma de México, por medio de un amplio estudio del marco teórico del tema, así como la creación de modelos numéricos recientes.
2. Investigar la eficiencia de cómputo para un modelo numérico de estampado profundo, bajo la hipótesis que supone a la lámina estudiada como un medio elasto-plástico isotrópico. Se utilizan técnicas de análisis para evaluar la eficiencia de cómputo, sin importar que la deformación plástica se defina como isotrópica o anisotrópica.
3. Lograr la compatibilidad entre el programa Abaqus y el compilador Fortran para que sea posible la evaluación de una subrutina que modela plasticidad anisotrópica de manera numérica, al paquete comercial Abaqus CAE.

# Capítulo 1

## Introducción al modelado del proceso de estampado profundo

En este capítulo se presenta el estado del arte relacionado con el proceso de estampado profundo. También se explica el ensayo experimental para medir la estampabilidad en una lámina; es decir, la cantidad de deformación impuesta por estampado que una lámina metálica puede resistir antes de fallar.

### 1.1. Efectos de la anisotropía

Durante el conformado mecánico de cualquier metal, es usual que el material adquiera una orientación dentro de su microestructura (ya sea en la morfología de los granos que la componen o bien en su estructura cristalina), lo cual modifica el valor de las propiedades mecánicas, físicas e incluso químicas según la dirección que se analiza. En el caso de una orientación morfológica de los granos, su forma será la responsable del comportamiento anisotrópico dentro del metal; por otra parte, la orientación en la estructura cristalina de los granos se conoce como textura y es la responsable de tal comportamiento. En las secciones posteriores se analiza con mayor detalle el concepto de textura. La figura 1.8 muestra las orientaciones de las microestructuras mencionadas.

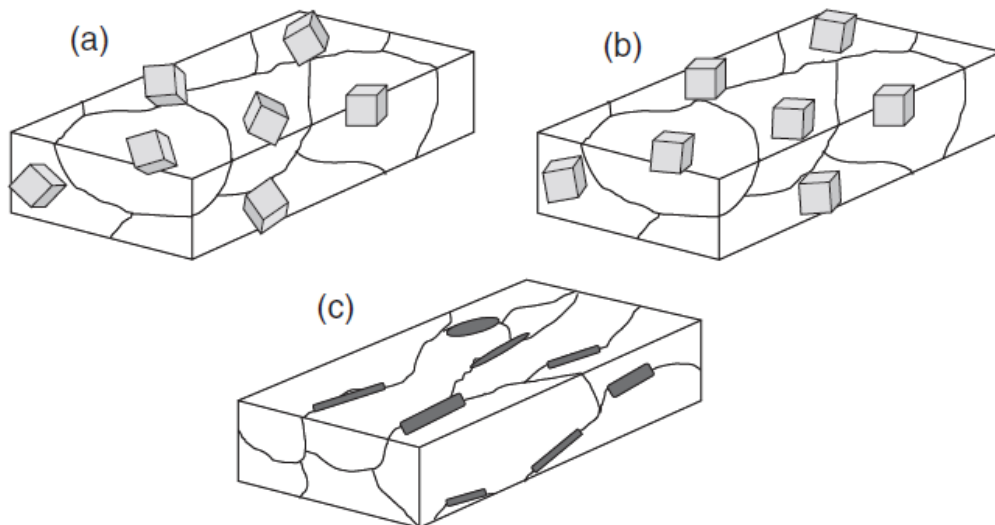


Fig. 1.8. Microestructuras de (a) metal sin textura, (b) metal con textura cristalina, (c) metal con textura morfológica [7].

En el caso del estudio de las latas de aluminio para bebida, se menciona la formación de “orejas” (en inglés, *earing*) una vez hecho el segundo estampado profundo. Esto es un inconveniente tecnológico producido por la anisotropía de la lámina, por lo que se han propuesto métodos para medir experimentalmente este fenómeno. La medición de la plasticidad anisotrópica se realiza mediante probetas de tracción manufacturadas de la propia lámina. Cada una de ellas se encuentra orientada con respecto a la dirección de laminado (RD) y una vez ensayada a tracción, se mide la estricción de su ancho y el adelgazamiento del espesor. La figura 1.9 muestra la orientación del sistema de referencia asociado a la lámina, con la dirección de laminado (RD), dirección normal al plano de la lámina (ND) y la dirección transversal a la lámina (TD).

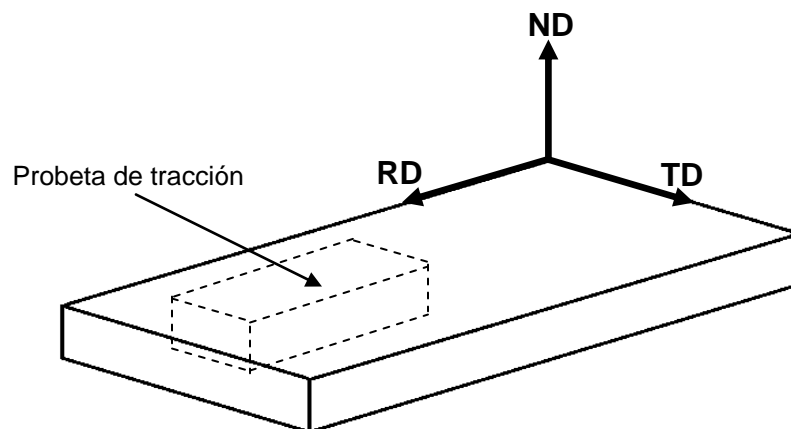


Fig. 1.9. Lámina con el sistema de referencia RD-TD-ND asociado a la muestra (sistema de referencia macroscópico).

Es decir, a cada ángulo  $\alpha$  medido con respecto a RD, se manufacturan varias probetas que se ensayan en una máquina de tracción, para encontrar sus contracciones y elongaciones. La figura 1.10 muestra la orientación de las probetas de tracción con respecto a la dirección de laminado (RD) para utilizarse en un ensayo de tracción.

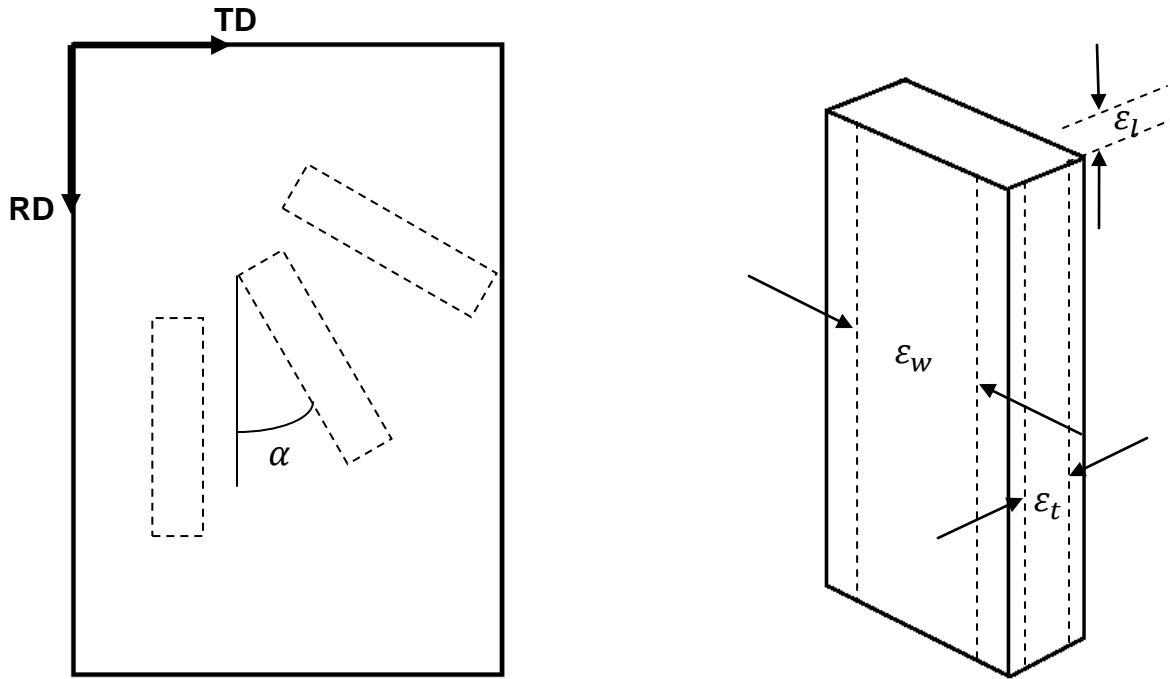


Fig. 1.10. Probeta de tracción empleada para calcular el parámetro de Lankford. La probeta de la derecha muestra los parámetros medidos durante el ensayo.

La razón de la estricción del ancho ( $\epsilon_w$ ) al adelgazamiento del espesor ( $\epsilon_t$ ) se conoce como coeficiente de Lankford ( $R$ ).

$$R(\alpha) = \frac{\epsilon_w}{\epsilon_t} \quad \text{ó bien } r = \frac{\dot{\epsilon}_w}{\dot{\epsilon}_t} \quad (1.1)$$

El valor de  $R$  puede estar en el intervalo  $[0, \infty)$ , interpretando para 0 que la lámina no se contrae en el ancho, y para  $\infty$  la lámina no se adelgaza en el espesor. El valor de  $R = 1$  se entiende como un valor promedio que indica comportamiento isotrópico, aunque la lámina conserva su naturaleza anisotrópica. Esta razón también puede definirse mediante la estricción del ancho ( $\epsilon_w$ ) y la deformación longitudinal de la probeta ( $\epsilon_l$ ). Para medir el promedio de la resistencia de una lámina al adelgazamiento de su espesor, se define el valor de Lankford para 3 valores de  $\alpha$  ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $90^\circ$ ) como se muestra.

$$\bar{R} = \frac{R_{0\pi} + R_{\pi/2} + 2R_{\pi/4}}{4} \quad (1.2)$$



Además, para medir la amplitud de la anisotropía en el plano de laminado, se utiliza una diferencia en el valor de Lankford.

$$\Delta R = \frac{R_{0\pi} + R_{\pi/2} - 2R_{\pi/4}}{2} \quad (1.3)$$

Un valor de  $\bar{R}$  arriba de 1 indica buena conformabilidad, ya que esto significa que la placa se contrae más de lo que se adelgaza.

## 1.2. Ensayo experimental de Fukui

El ensayo de Fukui generalmente consiste de un punzón el cual es la herramienta encargada de presionar a la lámina, y cuya forma de copa queda permanente en la lámina; un pisador que sirve para presionar a la lámina y evitar que sus extremos se levanten; y un dado que sirve como base para la lámina antes de empezar el proceso. De manera simple se muestra en la figura 1.11 el esquema principal de una máquina para el ensayo de Fukui.

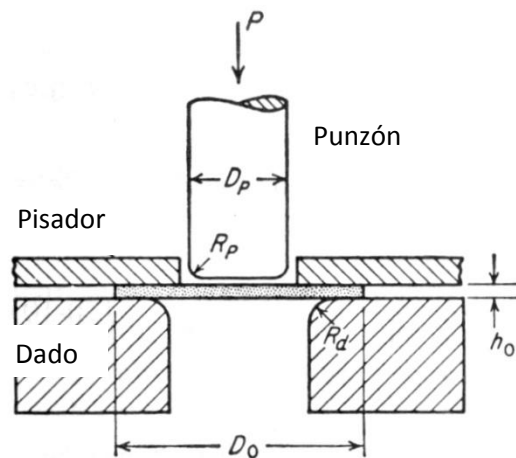


Fig. 1.11. Esquema de los elementos principales para el ensayo de Fukui [8].

Resulta evidente que son parámetros importantes la fuerza del punzón, la fuerza en el pisador, la lubricación en la interacción lámina/pisador y lámina/dado, el espesor de la lámina, además de la geometría en cada una de las herramientas utilizadas. A pesar de la simplicidad en los pasos del proceso, la realidad es que su complejidad es elevada. Se han intentado una serie de análisis matemáticos complejos para la descripción y predicción de este proceso, considerando un estado de esfuerzos biaxial sobre la lámina [8]. La mayoría de los estudios

experimentales en estampado profundo se han realizado para el ensayo de Fukui, donde el punzón tiene la forma de una copa (ver figura 1.11).

En la figura 1.12 se muestran las zonas importantes durante el conformado de la lámina. La zona exterior de la lámina o ceja (en inglés, *flange*) es una de ellas debido a la presencia de la mayor cantidad de deformación, y la pared debido a que requiere resistir la fuerza impuesta por el punzón para poder transmitirla hacia la ceja. Además, si el diámetro inicial de la lámina es muy grande, también lo es la fuerza transmitida a través de la pared lo cual conduce a que ésta se fracture, previa estricción en la base de la copa. La estampabilidad de la lámina puede medirse de acuerdo al parámetro LDR (en inglés, *Limit Drawing Ratio*), el cual expresa la razón del diámetro inicial de la lámina al diámetro de la copa conformada satisfactoriamente ( $LDR = d_0/d_1$ ). Este es un parámetro experimental muy utilizado para medir la cantidad de estampado que puede recibir una lámina circular.

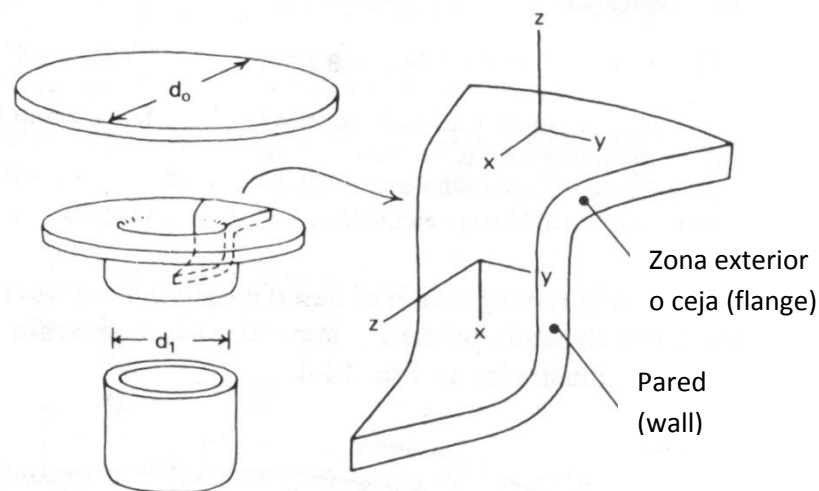


Fig. 1.12. Orientación del material durante el proceso de estampado.

Algunos defectos tecnológicos pueden ocurrir durante el proceso de estampado profundo, los cuales se han controlado en gran medida. Uno de ellos se le conoce como “arrugas” (en inglés, *wrinkling* [9]), el cual se manifiesta con la presencia de una gran cantidad de pliegues en la zona del doblado de la lámina una vez terminado el proceso. Este defecto es ocasionado por una falta de control en la fuerza aplicada por el pisador; una vez controlado el pisador, es posible evitar este defecto controlando adecuadamente la fuerza que ejerce sobre la lámina. La figura 1.13 ilustra el defecto mencionado.

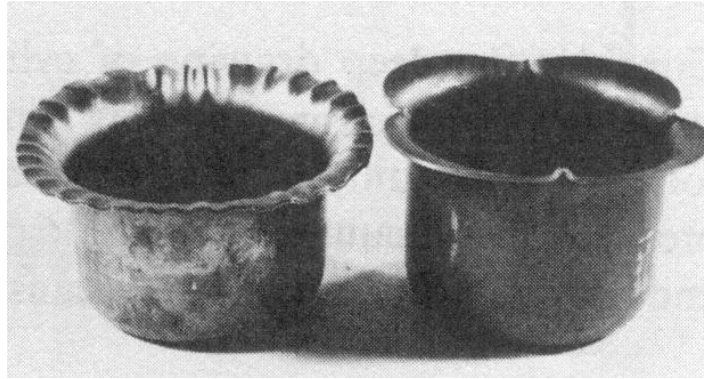


Fig. 1.13. Pliegues formados por defecto tecnológico (en inglés, *wrinkling*) [9].

### 1.3. Fundamentos de la plasticidad continua

Una deformación elástica que se impone en un sólido cambia su configuración. Sin embargo, una vez que se eliminan las cargas la deformación del sólido regresa a su forma inicial. Dicho de otra forma, el estado elástico en un sólido induce deformaciones recuperables. Para alcanzar condiciones de flujo plástico en un sólido, es necesario deformar elásticamente, y luego llegar a un punto de transición. Al rebasar este punto, una parte de la deformación total en el sólido queda permanente, recuperándose únicamente la deformación elástica del sólido cuando se eliminan todas las cargas sobre él. En esta parte se estudian los fundamentos de la plasticidad isotrópica, necesarios para comprender cuando se hable más adelante de plasticidad anisotrópica.

#### 1.3.1. Criterios de fluencia

Un criterio de fluencia, o cedencia, es una función matemática de las componentes del tensor de esfuerzos que predice el comienzo de la deformación plástica en un material para cualquier combinación de esfuerzos posible en un sólido. Es decir,

$$f(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, ) = k^2 \quad (1.4)$$

Donde  $k^2$  es una constante positiva. O bien, si se transforma al sistema de referencia de ejes principales, el criterio de cedencia queda definido sólo con las componentes principales del tensor de esfuerzos.

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = k^2 \quad (1.5)$$

Para la mayoría de los metales dúctiles, a menudo se consideran suposiciones que se han observado de análisis experimentales, además de simplificar en gran medida la teoría de la plasticidad para materiales isotrópicos. En primer lugar, el efecto Bauschinger no se considera en la plasticidad desarrollada en esta sección. Por lo tanto, los esfuerzos de cedencia a tracción y a compresión son equivalentes; y como se menciona más adelante, esta simplificación se observa en la simetría del lugar geométrico de la cedencia. En segundo lugar, el valor para la relación de Poisson es constante debido a que se considera que no hay cambio de volumen por deformación plástica. En tercer lugar, la ausencia de una teoría de la plasticidad a altas temperaturas se debe a la falta de datos experimentales y a la multi-dependencia a otros parámetros de la función que describe a la velocidad de deformación. Por lo tanto, los efectos de la temperatura y el fenómeno de fluencia lenta en metales (en inglés, *creep*) no son considerados en la plasticidad isotrópica. Finalmente, se ha encontrado de manera experimental que la magnitud del esfuerzo hidrostático a tracción o compresión no influye en la cedencia de un metal. Esto sucede porque su mecanismo de deformación se activa con el movimiento de dislocaciones (deslizamiento) o bien mediante maclas (en inglés, *twinning*), ambos activados por esfuerzos cortantes.

Cuando un sólido está sujeto a la acción de fuerzas que otros cuerpos ejercen sobre él, se produce una resistencia ó fuerzas internas distribuidas dentro de todo el espacio que ocupa, de tal forma que si el sólido se divide en elementos más pequeños, éstos se encuentran sujetos en un equilibrio estático ( $\sum \mathbf{F} = 0$  y  $\sum \mathbf{M} = 0$ ). La figura 1.14 muestra la definición de esfuerzo. Se observa que  $\mathbf{l}$  es el vector normal a la superficie  $\delta S$ , mientras que  $\delta \mathbf{P}$  es la fuerza interna que se ejerce desde la mitad superior del sólido. El vector de esfuerzos  $\mathbf{T}$  que actúa en el origen se define como  $\mathbf{T} = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \delta \mathbf{P} / \delta S$ , donde la componente  $\sigma$  de  $\mathbf{T}$  actúa en la dirección normal  $\mathbf{l}$ , mientras que  $\tau$  actúa sobre el plano definido por  $\delta S$ ; si en el origen de la superficie  $\delta S$  se define un sistema cartesiano rectangular, es fácil demostrar que el estado de esfuerzos en un sólido queda representado por un ente matemático llamado tensor de esfuerzos ( $\boldsymbol{\sigma}$  ó  $\sigma_{ij}$  en notación índice). El resultado de este análisis estático define al tensor de esfuerzos de Cauchy, relacionado con el vector de esfuerzos en el sólido; es decir,  $T_i^{(l)} = \sigma_{ij} l_j$  (Fórmula de Cauchy). En el paralelepípedo de la figura 1.14 se muestran las nueve componentes que componen al tensor de esfuerzos de segundo orden. Como se requiere equilibrio estático en el sólido, las ecuaciones de equilibrio requieren que la suma de fuerzas y momentos sea nula.

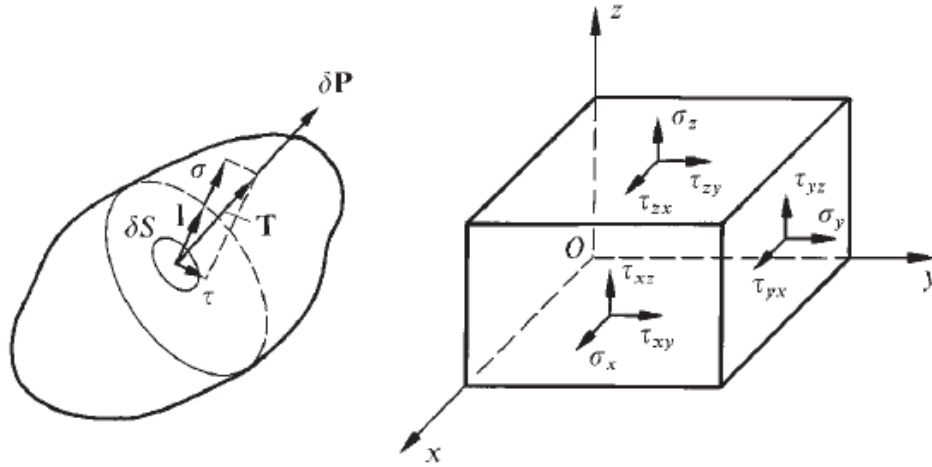


Fig. 1.14. Definición de esfuerzo y representación cartesiana del tensor de esfuerzos  $\sigma_{ij}$ . Las nueve componentes del tensor de esfuerzos se aplican en el punto  $O$  del sistema  $XYZ$ .

El resultado obtenido de esta condición de equilibrio es la simetría del tensor de esfuerzos ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ). La ecuación (1.6) muestra las seis componentes independientes del tensor de esfuerzos  $\sigma_{ij}$ .

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

De la definición de esfuerzo se observa que el vector de esfuerzos  $\mathbf{T}$  asociado a la superficie  $\delta S$  no necesariamente se encuentra en la misma dirección del vector normal  $\mathbf{l}$ . Esto quiere decir que existe una dirección característica para  $\mathbf{l}$  (eigenvector) en la cual el vector  $\mathbf{T}$  se representa como un múltiplo escalar ( $\sigma$ , eigenvalor) de  $\mathbf{l}$  ( $\mathbf{T}^{(l)} = \sigma \mathbf{l}$ ). Aquellas direcciones donde se cumple la aseveración anterior se denominan direcciones principales de esfuerzos. Utilizando la fórmula de Cauchy, la definición de direcciones principales y la delta de Kronecker ( $\delta_{ij}$ ), es posible definir un sistema de ecuaciones donde las variables a calcular son las direcciones principales ( $l_i$ ) con su respectivo eigenvalor. Además, también debe de considerarse que el vector  $\mathbf{l}$  es un vector unitario. La ecuación (1.7) muestra el resultado anterior.

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) l_i = 0 \quad (1.7a)$$

$$l_i l_i = 1 \quad (1.7b)$$

Para que el sistema de ecuaciones (1.7) proporcione una solución no trivial (es decir,  $l_i \neq 0$ ), es necesario que se cumpla la condición de ortogonalidad (1.7b) y que el determinante formado por los coeficientes de  $l_i$  sea nulo ( $|\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}| = 0$ ). La expansión de este determinante define la ecuación característica del tensor de esfuerzos  $\sigma$ . La ecuación (1.8) muestra la forma de dicha ecuación.

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (1.8)$$

Donde las tres raíces de la ecuación representan los esfuerzos principales de  $\sigma_{ij}$ , aplicados sobre planos donde los esfuerzos cortantes son nulos; y los coeficientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  representan el primer, segundo y tercer invariante de  $\sigma_{ij}$ , respectivamente. La forma de los tres invariantes queda en función de las componentes del tensor de esfuerzos  $\sigma$ . Debido a que los esfuerzos principales del tensor  $\sigma_{ij}$  son independientes de la orientación del sistema de referencia, entonces los coeficientes de la ecuación característica – ó invariantes – también deben poseer esta característica. La ecuación (1.9) muestra los valores para los tres invariantes.

$$I_1 = \sigma_{ii} = tr\sigma \quad (1.9a)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = \frac{1}{2}[(tr\sigma)^2 - tr(\sigma^2)] \quad (1.9b)$$

$$I_3 = \varepsilon_{ijk}\sigma_{1i}\sigma_{2j}\sigma_{3k} = det\sigma \quad (1.9c)$$

Dado que las direcciones principales son ortogonales entre sí, es posible definir un sistema de referencia de tres dimensiones donde el tensor de esfuerzos representa un punto que tiene asociado un estado hidrostático de esfuerzos y una parte asociada únicamente al estado cortante puro, pasando de un espacio de seis a tres dimensiones. La ecuación (1.10) muestra el tensor de esfuerzos diagonalizado.

$$\sigma_{ij}^p = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Como se menciona antes, el esfuerzo hidrostático a tracción o compresión no influye en el comienzo de la deformación plástica, por lo que es conveniente separar la parte hidrostática de cualquier tensor de esfuerzos. Se define como

tensor desviador de esfuerzos a la parte del tensor  $\sigma_{ij}$  que no posee cambio de volumen, como se define en la ecuación (1.11).

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (1.11)$$

Donde  $s_{ij}$  es el desviador de esfuerzos, y cuya característica principal es que su traza es nula ( $s_{ii} = 0$ );  $\sigma_m$  representa el esfuerzo normal promedio de  $\sigma_{ij}$ , definido como  $\sigma_m = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ ; y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. En conclusión,  $s_{ij}$  es la parte del tensor de esfuerzos responsable del comienzo de la deformación plástica. Posee cinco variables linealmente independientes puesto que su traza es nula, y también se puede diagonalizar como el tensor  $\sigma_{ij}$ . La ecuación (1.12) muestra la ecuación característica para el tensor desviador de esfuerzos, así como los valores para sus respectivos invariantes ( $J_2, J_3$ ).

$$s^3 + J_2 s - J_3 = 0 \quad (1.12a)$$

$$J_2 = -\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad (1.12b)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} \quad (1.12c)$$

En la figura 1.15 se presenta de manera geométrica a la superficie de cedencia, definida por la función  $f$  en el sistema cartesiano formado por los ejes principales ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ). Cualquier estado de esfuerzos en este espacio vectorial de tres dimensiones está definido por un vector que emana desde el origen del sistema de referencia ( $\mathbf{OQ}$ ). Se define como plano octaédrico, o plano  $\Pi$ , a aquel que posee su vector normal sobre la dirección  $\mathbf{OH}$  que define la igualdad  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ ; es decir,  $\mathbf{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ . El vector unitario  $\mathbf{n}$  define la dirección de la componente hidrostática del vector  $\mathbf{OQ}$ , representada por el vector  $\mathbf{OG}$ . Mientras que la componente del desviador de esfuerzos está representada por el vector  $\mathbf{OP}$ , cuyas componentes son  $(s_1, s_2, s_3)$  y su magnitud es  $\sqrt{2J_2}$ . El resultado es que el vector  $\mathbf{OP}$ , llamado también esfuerzo cortante octaédrico, define un cilindro en el espacio  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Este cilindro es la superficie de cedencia del material, y su intersección con el plano octaédrico define a la curva de fluencia (en inglés, *yield locus*) o lugar geométrico de la fluencia. Cada proyección sobre el plano octaédrico es  $\sqrt{2/3}$  veces la proyección de su correspondiente componente de los ejes principales asociada.

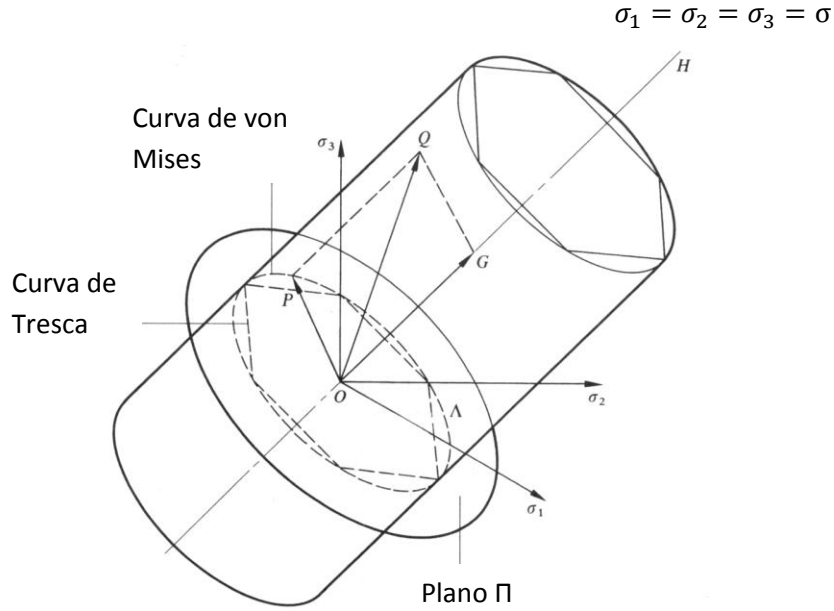


Fig. 1.15. Representación geométrica de la superficie de cedencia en el sistema de ejes principales.

Por lo tanto, la función de cedencia queda definida en términos de las componentes del desviador de esfuerzos.

$$f(s_1, s_2, s_3) = k^2 \quad (1.13)$$

El lugar geométrico de la fluencia para un material isotrópico posee una geometría característica sobre el plano octaédrico, la cual es consecuencia de las simplificaciones que se mencionan antes. Existe una simetría de la curva de fluencia con respecto a cada uno de los ejes proyectados ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ). Esto se debe a que el lugar geométrico de la fluencia es una función de los invariantes del tensor desviador de esfuerzos. Es decir, si  $P(a, b, c)$  es un punto de la curva de fluencia, entonces  $P'(a, c, b)$  también forma parte de la curva.

$$f(J_2, J_3) = k^2 \quad (1.14)$$

Además, el efecto Bauschinger provoca que la curva de fluencia posea simetría con respecto a las líneas auxiliares en el plano  $\Pi$ . Cada una de estas líneas es ortogonal con su correspondiente eje proyectado ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ). Dicho de otra forma, si un punto  $R(d, e, f)$  del plano  $\Pi$  provoca cedencia, entonces  $R'(-d, -e, -f)$  también lo hace, con lo cual se concluye que la distancia radial desde el origen del



plano  $\Pi$  hasta cada uno de los puntos  $R$  y  $R'$  es la misma. La figura 1.16 muestra al plano octaédrico de tal forma que su vector normal sale del papel.

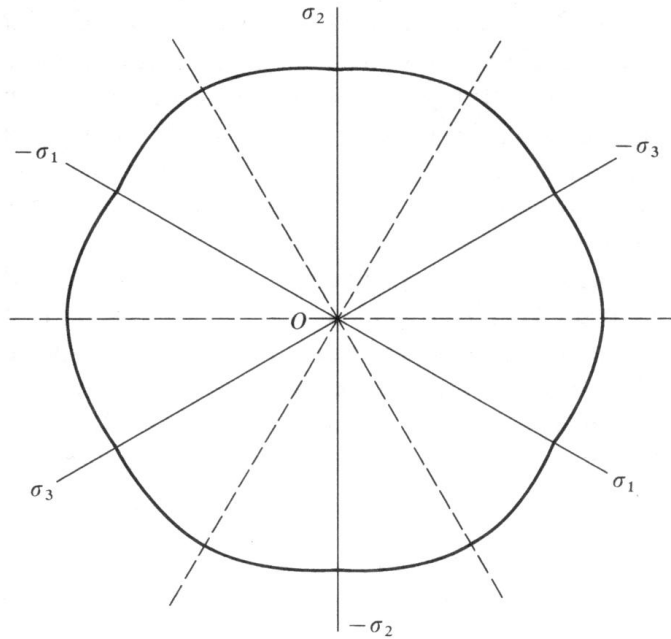


Fig. 1.16. Simetría sobre el plano octaédrico de la curva de fluencia para materiales isotrópicos.

En conclusión, la función matemática que define al criterio de cedencia depende únicamente de las componentes del tensor desviador de esfuerzos, ya que el esfuerzo hidrostático no influye en el comienzo de la deformación plástica. Además, debido a que la traza del desviador de esfuerzos es nula, solamente se tienen cinco componentes linealmente independientes. La simetría que posee la curva de fluencia debido al efecto Bauschinger y a la dependencia de los invariantes del desviador de esfuerzos obliga a que la curva repita su forma cada  $30^\circ$  sobre el plano  $\Pi$ . Esta simetría peculiar sobre el sector de  $30^\circ$  está limitada por dos estados de esfuerzos particulares. Sobre la línea horizontal se encuentra un estado de esfuerzos a cortante puro, mientras que la línea a  $30^\circ$  sobre la horizontal define un estado de esfuerzos de tracción o compresión uniaxial. Mediante geometría sobre el plano  $\Pi$  [10], es posible definir el parámetro experimental de Lode ( $\mu$ ), utilizado para calcular la curva de cedencia de materiales isotrópicos. Ver la figura 1.17.

$$\mu = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_3 - \sigma_1} \quad (1.15)$$

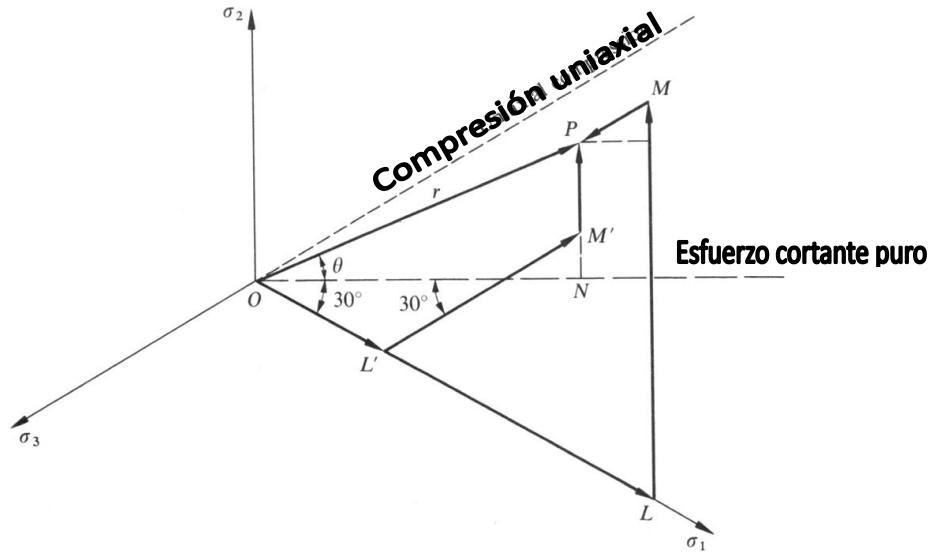


Fig. 1.17. Parámetro de Lode definido en el sector de 30° sobre el plano  $\Pi$ .

### 1.3.2. Criterio de Tresca

Este criterio de cedencia, desarrollado por el ingeniero mecánico francés Henri Tresca (1814-1885), propone que la deformación plástica empieza cuando el esfuerzo cortante máximo alcanza un valor crítico. Es decir, la función matemática del lugar geométrico de la fluencia posee la siguiente forma, como se muestra en la ecuación (1.16).

$$\sigma_1 - \sigma_3 = Y \quad \text{con} \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (1.16)$$

En la mayoría de los casos, la desigualdad en la ecuación (1.16) no se conoce a priori, por lo que debe calcularse. Ver figura 1.18.

### 1.3.3. Criterio de von Mises

Las bases del criterio de von Mises (también conocido como criterio plasticidad J2 o de la máxima energía de distorsión) fueron elaboradas por el matemático Richard von Mises (1883-1953). Dichas bases están sustentadas en consideraciones teóricas. El resultado de ellas es que la cedencia debe alcanzarse cuando el segundo invariante del desviador de esfuerzos alcanza un valor constante crítico.

$$J_2 = s_{ij}s_{ij} = 2k^2 \quad (1.17)$$

Donde  $s_{ij}$  es el desviador de esfuerzos. Según Nadai, el criterio de fluencia de von Mises establece que la cedencia se alcanza cuando el esfuerzo cortante octaédrico adquiere un valor constante, característico para cada material. También, Hencky propuso que la cedencia se logra cuando la energía de distorsión elástica en el material posee un valor característico cuando se alcanza un punto del lugar geométrico de la fluencia. Mediante un ajuste experimental, es posible que el criterio de Tresca y von Mises concuerden en el plano octaédrico. Así pues, el hexágono de Tresca queda circunscrito en el círculo de von Mises, como se muestra en la figura 1.18.

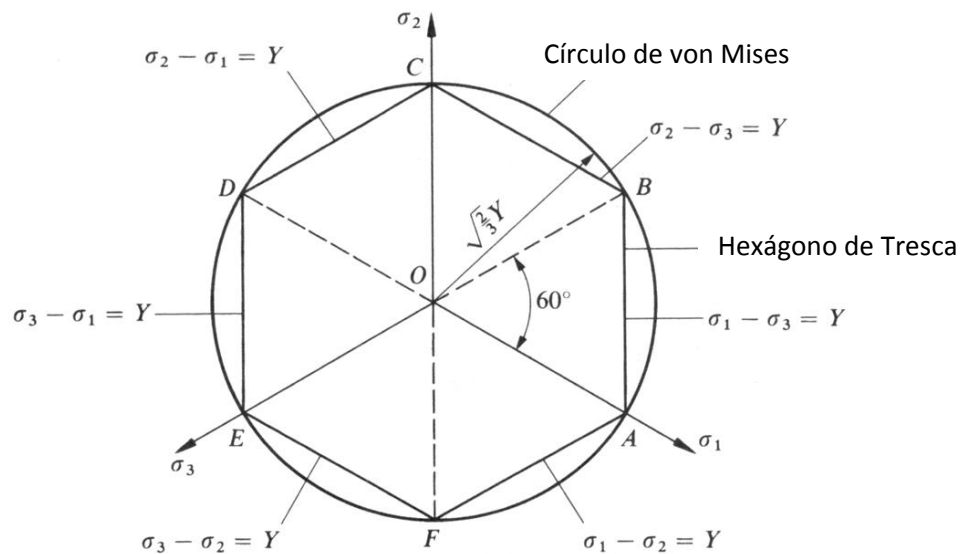


Fig. 1.18. Criterios de Tresca y von Mises sobre el plano  $\Pi$ .

Una vez que el material haya alcanzado el lugar geométrico de la fluencia, éste comienza a deformarse plásticamente, de tal forma que dicha deformación se vuelve permanente, aun si se eliminan las sollicitaciones de él. Si la forma o posición de la curva de fluencia cambia durante el proceso de deformación, se dice que ésta depende de la historia completa de la deformación plástica. De lo contrario, se define como sólido elástico perfectamente plástico a aquel sólido que, una vez alcanzado el punto de cedencia, no requiere de una sollicitación mayor para seguir deformando plásticamente.

El endurecimiento isotrópico en un material se refiere a que el tamaño del lugar geométrico de la fluencia cambia según la variación del estado de esfuerzos, representada por una trayectoria específica en el plano octaédrico, como se muestra en la figura 1.19 (trayectoria  $P_0P$ ). Una vez más, este endurecimiento aplica para materiales isotrópicos y el efecto Bauschinger se desprecia aun cuando exista anisotropía por endurecimiento por trabajo en frío. Debido a que sólo cambia en tamaño, cada punto de la curva de cedencia con endurecimiento está determinado por el esfuerzo de cedencia instantáneo a tracción uniaxial. De tal forma que es necesario relacionar el esfuerzo de cedencia instantáneo con la cantidad de deformación plástica instantánea posterior a una curva de cedencia inicial. Este esfuerzo se denomina esfuerzo de cedencia equivalente ( $\bar{\sigma}$ ), y se puede determinar de dos formas. La primera, estableciendo la hipótesis que  $\bar{\sigma}$  es una función del trabajo plástico por unidad de volumen ( $dw_p$ ). La segunda, que  $\bar{\sigma}$  es una función de la deformación plástica total; es decir, se define, con el segundo invariante del tensor de deformación plástica infinitesimal ( $d\varepsilon_{ij}^p$ ), a la deformación plástica equivalente ( $\overline{d\varepsilon^p}$ ). En la ecuación (1.18) y (1.19) se establece de manera matemática.

$$\bar{\sigma} = \varphi\left(\int dw_p\right) = \varphi\left(\int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p\right) = \varphi\left(\int \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^p\right) \quad (1.18)$$

$$\bar{\sigma} = \omega\left(\int \overline{d\varepsilon^p}\right) = \omega\left(\int \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p\right) = \omega\left(\int \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^p\right) \quad (1.19)$$

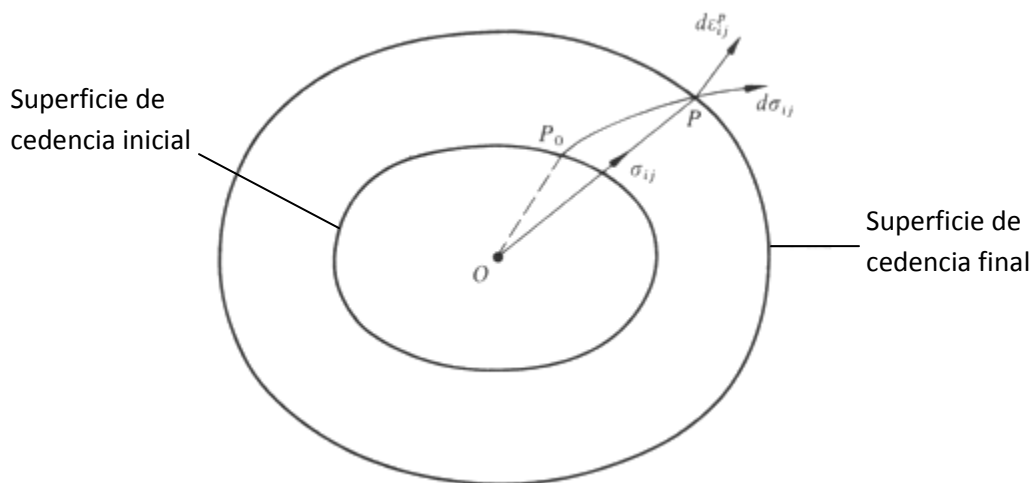


Fig. 1.19. Representación geométrica del endurecimiento isotrópico.

### 1.3.4. Las reglas de flujo plástico (*Flow Rules*)

Así como la ley de Hooke relaciona esfuerzos y deformaciones elásticas para el rango elástico, las relaciones esfuerzo-deformación para el rango plástico (en inglés, flow rules) también existen. Es necesario relacionar el tensor de deformación plástica infinitesimal con el tensor de esfuerzos y su respectivo incremento.

### 1.3.5. La superficie potencial plástica

El comportamiento plástico que muestran los materiales isotrópicos indica que los ejes principales del tensor de esfuerzos infinitesimal coinciden con los del tensor de deformación plástica infinitesimal. En el sistema coordenado de esfuerzos principales, el tensor de deformación plástica infinitesimal está representado por un vector ortogonal al vector normal del plano octaédrico, por lo que su dirección pasa por el origen del sistema coordenado  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Es decir,  $d\boldsymbol{\varepsilon}^p \sim (d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p)$ , donde la constante de proporción tiene unidades de esfuerzo, y sus componentes se encuentran sobre el plano  $\Pi$ . Esto significa que la posición de  $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$  define una superficie con forma de cilindro, al igual que el lugar geométrico de la fluencia. También, la ortogonalidad que posee  $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$  con el cilindro define el llamado principio de la normalidad. Finalmente, la intersección del cilindro formado por  $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$  y el plano octaédrico define una curva ( $g$ ), que es función de los esfuerzos principales del desviador de esfuerzos.

$$g(s_1, s_2, s_3) = k^2 \quad (1.20)$$

Al igual que el lugar geométrico de la fluencia para materiales isotrópicos, la función  $g$  también posee simetría con respecto a los ejes proyectados en el plano octaédrico; además, la simetría de  $g$  también se da con respecto a los ejes ortogonales asociados a cada eje proyectado. Por lo tanto, la forma de la curva  $g$  también está definida en un sector de  $30^\circ$  del plano octaédrico, como muestra la figura 1.20. De manera matemática, esto se escribe como se muestra en la ecuación (1.21).

$$g(J_1, J_2) = k^2 \quad (1.21)$$

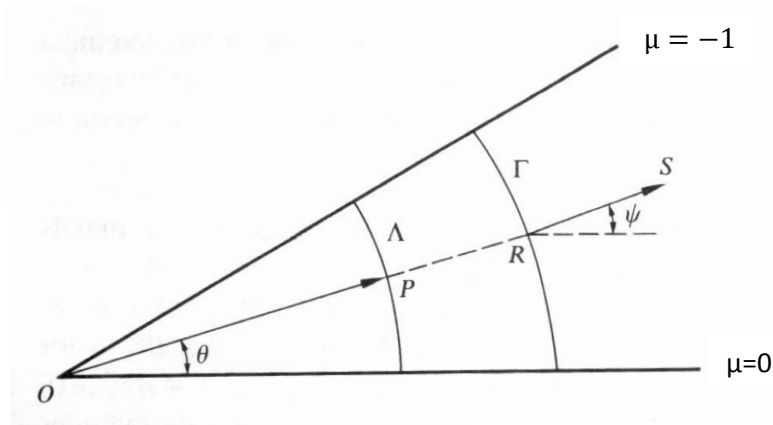


Fig. 1.20. Representación geométrica de la curva de fluencia ( $\Lambda$ ) y la función potencial plástica ( $\Gamma$ ).

La función  $g$  define la razón de las componentes del tensor de deformación plástica infinitesimal, y se le conoce como función potencial plástica. A su vez, la función potencial plástica define las reglas de flujo plástico, las cuales describen las relaciones esfuerzo-deformación para la región plástica en un espacio de nueve dimensiones.

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (1.22)$$

Donde  $d\lambda$  es una función escalar que describe la magnitud del tensor de esfuerzos infinitesimal, y puede depender de la posición y del tiempo. Una manera de comprobar el principio de normalidad, es a través del trabajo plástico por unidad de volumen ( $dw^p$ ). El producto doble punto entre tensores de segundo orden cuando  $f = g$  obliga a que ambos sean ortogonales entre sí, como lo establece la ecuación (1.23); además, se ha mostrado este hecho geoméricamente en figuras anteriores.

$$dw^p = \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^p = 0 \quad (1.23)$$

### 1.3.6. Las ecuaciones de Prandtl-Reuss y Lévy-Mises

En estas ecuaciones de plasticidad, se postula que la función del lugar geométrico de la fluencia coincide con la función potencial plástica. Es decir, la razón de las componentes del tensor de deformación plástica infinitesimal está descrita por la forma de la curva de fluencia. De esta forma, el criterio de von Mises es la forma

más simple para la función potencial plástica y en cualquier dirección dentro del plano octaédrico se requiere del mismo valor para alcanzar la cedencia. Por lo tanto, si se define a  $g = J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$  y se utiliza la ecuación (1.22), las reglas de flujo plástico quedan definidas de la siguiente forma.

$$d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij}d\lambda \quad (1.24a)$$

$$\frac{d\varepsilon_x^p}{s_x} = \frac{d\varepsilon_y^p}{s_y} = \frac{d\varepsilon_z^p}{s_z} = \frac{d\gamma_{xy}^p}{\tau_{xy}} = \frac{d\gamma_{yz}^p}{\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{xz}^p}{\tau_{xz}} = d\lambda \quad (1.24b)$$

En estas igualdades, se utiliza la deformación total infinitesimal en lugar de solamente su parte plástica. La proporción que guardan los esfuerzos cortantes con las deformaciones a corte implica que los ejes principales coinciden para el tensor de esfuerzos infinitesimal y el tensor de deformación plástica infinitesimal. Las dos hipótesis para la cantidad de endurecimiento isotrópico coinciden en el caso de las ecuaciones de Lévy-Mises por el hecho de que  $g = f$ . Dado que  $g$  es una función homogénea de grado dos con magnitud de  $\bar{\sigma}^2/3$ , por el teorema de Euler para funciones homogéneas, geometría y las ecuaciones (1.22) y (1.24), el trabajo plástico por unidad de volumen queda definido como se muestra en la ecuación (1.25).

$$dw^p = \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij} d\lambda = 2f d\lambda = \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 d\lambda = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^p$$

$$\therefore d\lambda = \frac{3d\bar{\varepsilon}^p}{2\bar{\sigma}} \quad (1.25)$$

Donde  $\bar{\sigma}$  y  $d\bar{\varepsilon}^p$  son el esfuerzo equivalente y deformación plástica equivalente, por lo que las ecuaciones de Prandtl-Reuss quedan definidas. Las ecuaciones quedan completas cuando se agrega la parte elástica, utilizadas para materiales isotrópicos elasto-plásticos como describe la ecuación (1.26).

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[ (1 + \nu) d\sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} d\sigma_{kk} \right] + \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) d\lambda \quad (1.26)$$

En muchos problemas de plasticidad, las trayectorias de carga producen deformaciones plásticas mucho más grandes comparadas con las deformaciones elásticas. En este caso, se dice que el material es elástico y perfectamente

plástico, y las ecuaciones (1.24) se vuelven las ecuaciones de Lévy-Mises, quitando el superíndice de las ecuaciones de Prandtl-Reuss, como muestra la ecuación (1.27).

$$\frac{d\varepsilon_x}{s_x} = \frac{d\varepsilon_y}{s_y} = \frac{d\varepsilon_z}{s_z} = \frac{d\gamma_{xy}}{\tau_{xy}} = \frac{d\gamma_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{xz}}{\tau_{xz}} = d\lambda \quad (1.27)$$

## 1.4. Plasticidad cristalina

Hasta este punto, la plasticidad continua ha logrado predecir los resultados experimentales obtenidos de metales con una alta refinación de grano y sujetos a cargas estáticas. Sólo de esta forma, un metal se considera como un sólido elasto-plástico homogéneo e isotrópico. Sin embargo, se observa que la plasticidad de un metal muestra una gran dependencia a la temperatura, composición, rapidez de deformación y orientación cristalográfica. Lo último se debe al arreglo estructural que presentan todos los materiales policristalinos en cada uno de sus granos que lo forman. Es por esta razón que es importante comprender como ocurre la plasticidad en un monocristal, para después extrapolar este resultado hacia un conjunto de granos que representan a un metal. Además, el ya mencionado efecto Bauschinger y el fenómeno de difusión que ocurre a temperaturas elevadas complican aun más el problema.

### 1.4.1. Sistemas cristalinos FCC, BCC y HCP

La estructura cristalina de un monocristal metálico sólido está formada por un arreglo geométrico tridimensional repetitivo de los átomos que la componen. La forma exterior de cada uno de estos átomos se representa con el modelo de esferas elásticas perfectas, puesto que la mayoría de los elementos metálicos que forman a un monocristal poseen al orbital s como su capa de valencia, encargada de los enlaces con otros átomos. Este orbital, de acuerdo a la solución de la ecuación de Schrödinger presenta una función de onda con simetría radial, por lo que no es descabellado modelar a los átomos como esferas.

La mayoría de los metales en su estado sólido presentan un empaquetamiento cristalino llamado cúbico centrado en las caras (en inglés, *Face-Centered Cubic*, FCC), cúbico centrado en el cuerpo (en inglés, *Body-Centered Cubic*, BCC), o también hexagonal compacto (en inglés, *Hexagonal Close-Packed* HCP). Los empaquetamientos FCC y HCP se forman apilando varios planos atómicos (A, B y



C), como se muestra en la figura 1.21. Los círculos de línea completa forman al plano A; debajo se encuentran los círculos con línea punteada, que representan al plano B; finalmente, los puntos que se observan en la figura corresponden con los centros de los círculos que forman al plano C. La descripción anterior de los planos atómicos indica una secuencia de apilamiento característica de la estructuras FCC, es decir, un apilamiento ABCABC. Los átomos del plano B se encuentran debajo del plano A, exactamente en los espacios formados por 3 átomos adyacentes del plano A. De igual forma, los átomos del plano C se encuentran en los espacios formados por 3 átomos adyacentes del plano B. A su vez, la secuencia de apilamiento ABABAB utiliza dos planos atómicos (A y B), donde los átomos del plano A se posicionan en los espacios formados por 3 átomos adyacentes del plano B; este mismo patrón de posición se repite debajo del plano B con un plano A, para formar la estructura hexagonal compacta HCP. Ver la figura 1.21. Los tres empaquetamientos anteriores poseen direcciones (encerradas entre corchetes) y planos cristalográficos (encerrados entre paréntesis) de cada uno de ellos, aunque no son los únicos empaquetamientos que se pueden formar, de acuerdo a las trece redes de Bravais.

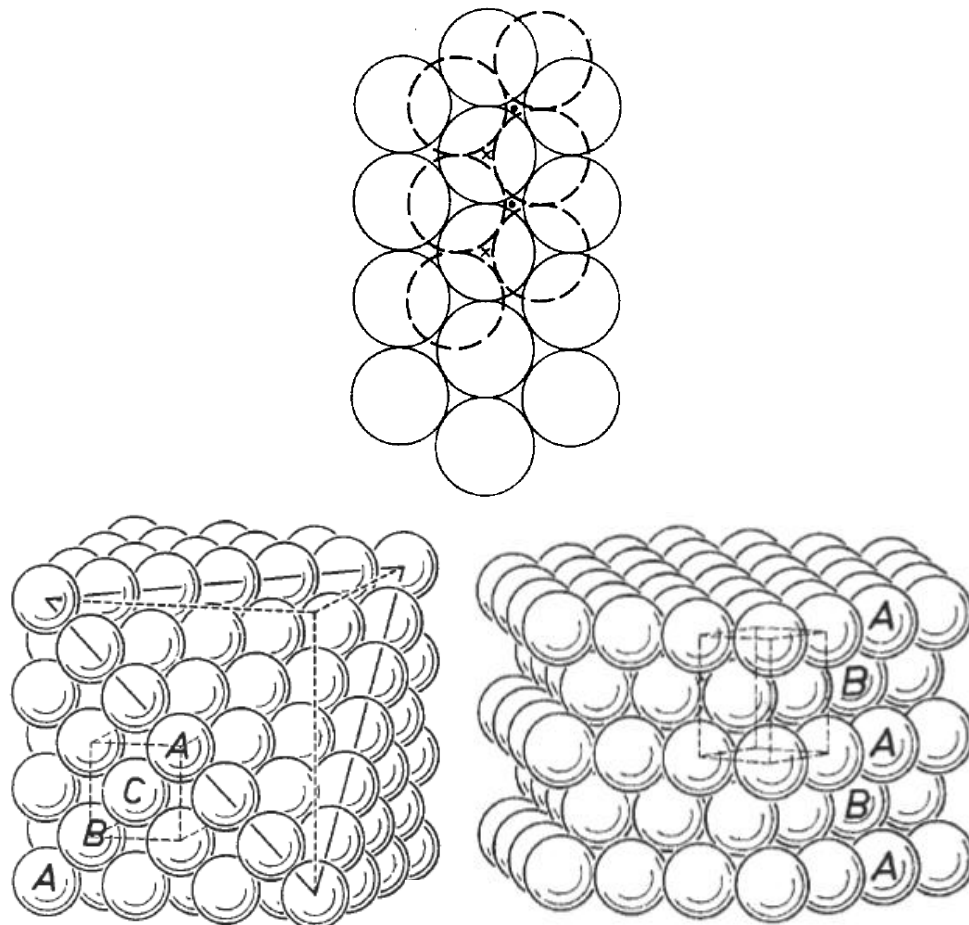


Fig.1.21. Empaquetamiento de planos atómicos [11].

La celda unitaria de los empaquetamientos BCC, FCC y HCP se muestran en la figura 1.22. En cada una de ellas se muestran algunos planos cristalográficos, escritos con la notación de los índices de Miller.

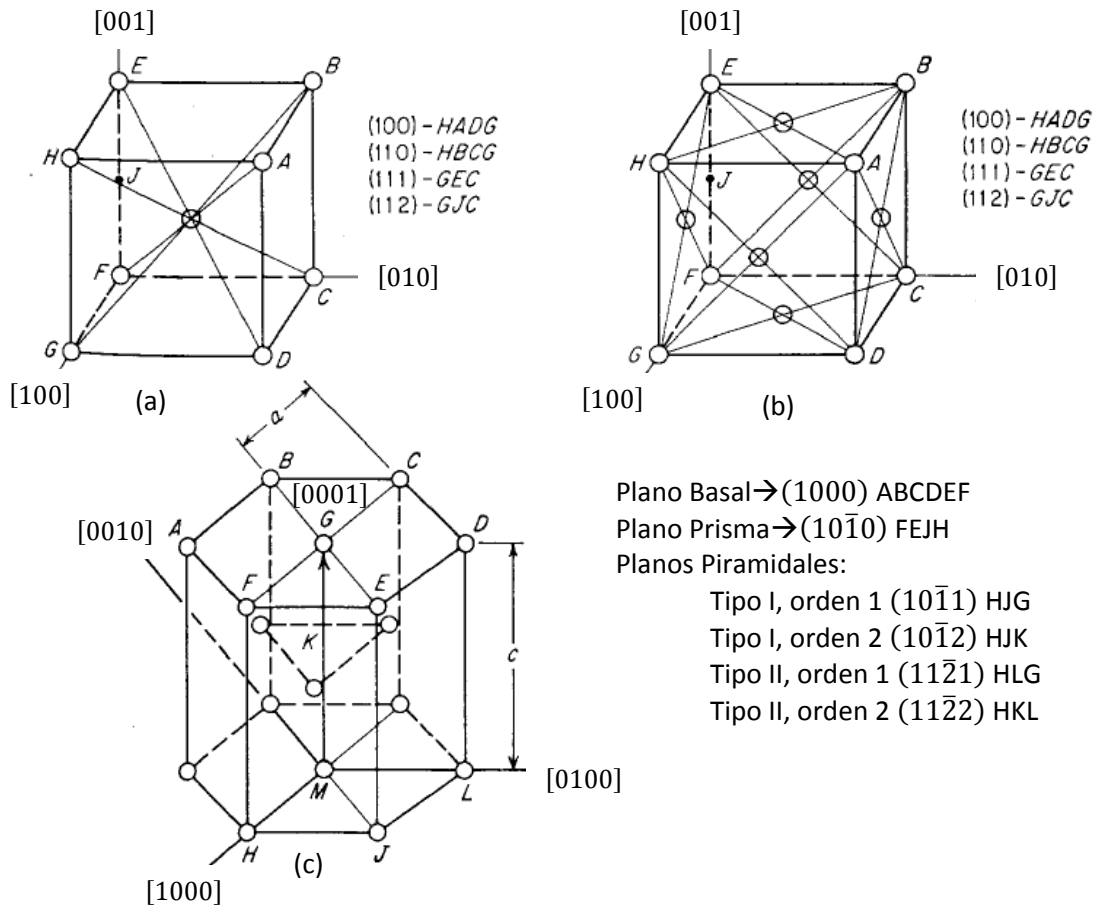


Fig. 1.22. Estructuras cristalográficas en metales. (a) Planos cristalográficos en BCC, (b) Planos cristalográficos en FCC, (c) Planos cristalográficos en HCP [12].

El deslizamiento que ocurre entre planos cristalográficos específicos de un empaquetamiento explica la deformación plástica macroscópica que ocurre en un monocristal cuando se encuentra sujeto a sollicitaciones. De hecho, existe un esfuerzo cortante teórico [13] capaz de inducir deslizamiento relativo entre planos atómicos. La figura 1.23 muestra dos planos atómicos separados una distancia  $a$  que se encuentran sujetos a un esfuerzo cortante aplicado en el plano de deslizamiento. Al principio, el esfuerzo cortante es nulo cuando los planos se encuentran en la posición que se muestra; de igual forma, el esfuerzo es nulo cuando los planos se han movido una distancia  $b$ , de tal forma que el átomo 1 se encuentra justo arriba del átomo 2. Finalmente, el átomo 1 en la posición  $b$  avanza a la posición media del plano inferior, donde también se tiene un esfuerzo cortante nulo por simetría. Se ha observado experimentalmente que la variación del

comportamiento en el esfuerzo cortante posee una periodicidad en el desplazamiento atómico, debido a que los átomos son atraídos hacia la siguiente columna de átomos más cercanos desde las posiciones nulas anteriores.

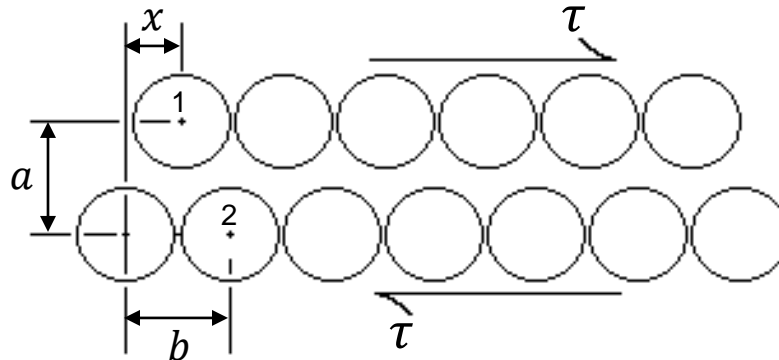


Fig. 1.23. Esquema de dos planos atómicos sujetos a un esfuerzo cortante.

Por lo tanto, si se propone que el esfuerzo cortante sea descrito por una función sinusoidal del desplazamiento ( $x$ ), su forma queda descrita según la ecuación (1.28).

$$\tau(x) = \tau_m \text{sen} \left( \frac{2\pi x}{b} \right) \quad (1.28)$$

Donde  $\tau_m$  es el esfuerzo cortante teórico, y  $b$  el periodo de la función sinusoidal. Para valores pequeños de desplazamientos, la función sinusoidal se considera equivalente a su argumento y es posible aplicar la Ley de Hooke (ver la figura 1.23). La ecuación (1.29) muestra las consideraciones anteriores.

$$\tau \approx \tau_m \frac{2\pi x}{b} \quad (1.29a)$$

$$\tau = G\gamma = G \frac{x}{a} \quad (1.29b)$$

Igualando las ecuaciones (1.29a) y (1.29b), se obtiene la expresión para  $\tau_m$ . Para describir a  $\tau_m$  generalmente se utiliza la aproximación donde los planos atómicos están separados a una misma distancia ( $a = b$ ). La ecuación (1.30) muestra el resultado para el esfuerzo cortante teórico en un monocristal.

$$\tau_m = \frac{G}{2\pi} \frac{b}{a} \quad (1.30a)$$

$$\tau_m = \frac{G}{2\pi} \quad (1.30b)$$

Sin embargo, se ha observado de manera experimental en probetas de tracción de monocristales que la deformación plástica comienza a valores mucho menores a  $\tau_m$ . El esfuerzo cortante requerido para producir deformación plástica en monocristales metálicos está entre 0.5 y 10 [MPa]. Esto quiere decir que existen otros mecanismos de deformación a nivel cristalino que promueven el deslizamiento con sollicitaciones menores a  $\tau_m$ .

El deslizamiento en una red cristalina se debe principalmente al movimiento de los defectos de línea llamados dislocaciones. Además, también ocurre deslizamiento por medio de maclas (en inglés, *twinning*), cuya naturaleza muestra una simetría en la orientación cristalográfica a través del plano de maclaje, definiendo su localización en el monocristal. En general, aquellas maclas formadas por una alta velocidad de deformación aplicada al monocristal se denominan maclas mecánicas. Sin embargo, el movimiento de dislocaciones es activado por un esfuerzo cortante que es aplicado sobre una dirección y plano cristalográficos específicos. Tanto el plano como la dirección mencionados, se denomina como sistema de deslizamiento. La deformación plástica se encuentra confinada generalmente en los planos con mayor densidad atómica y ocurre en la dirección mejor empaquetada dentro de dichos planos. La resistencia al deslizamiento en estos planos es menor, en comparación con otros planos posibles de deslizamiento. En las estructuras FCC, BCC y HCP se encuentran sistemas de deslizamiento específicos, como se muestra en la tabla 1.1.

Tabla 1.1. Sistemas de deslizamiento en FCC, BCC y HCP [14].

<b>Estructura Cristalina</b>	<b>Sistemas de deslizamiento</b>	<b>Observaciones</b>
FCC	1. $\{111\}\{110\} \rightarrow 4 \times 3 = 12$	12 sistemas de deslizamiento activables.
BCC	1. $\{110\}\{111\} \rightarrow 6 \times 2 = 12$ 2. $\{112\}\{111\} \rightarrow 24$ 3. $\{123\}\{111\} \rightarrow \infty$	Los sistemas (1) se refieren al plano y dirección cristalinos con mayor densidad atómica. Los planos en los sistemas (2) y (3) son activados solamente si la dirección $\langle 111 \rangle$ se encuentra en dichos planos. Para la condición Pencil Glide, se requiere que los planos contengan a la dirección $\langle 111 \rangle$ , por lo que existe un número infinito de sistemas de deslizamiento.

HCP	1. $(0001)\langle 11\bar{2}0 \rangle \rightarrow 1 \times 3 = 3$ 2. $\{10\bar{1}0\}\langle 11\bar{2}0 \rangle \rightarrow 3$ $c/a > \sqrt{8/3}$ 3. $\{10\bar{1}1\}\langle 11\bar{2}0 \rangle \rightarrow 6$ $c/a < \sqrt{8/3}$	Los sistemas (1) representan al plano y direcciones cristalográficas con mayor densidad atómica. La temperatura activa los sistemas de deslizamiento (2) y (3), y la relación $c/a$ es un parámetro que se utiliza para predecir que sistemas se activan. (Valor teórico, $c/a = \sqrt{8/3}$ ).
-----	--	---

#### 1.4.2. Sistemas de deslizamiento independientes

Para describir el deslizamiento que ocurre dentro de un monocristal, es necesario formular una ecuación constitutiva local que relacione los esfuerzos, deformaciones y su rotación de cuerpo rígido. Para lograr lo anterior, se requiere establecer el modelado de procesos internos tales como rapidezces de deslizamiento en varios sistemas de deslizamiento y la rotación de la red cristalina. El resultado de la descripción formulada por la ecuación constitutiva local debería explicar la deformación plástica macroscópica que se observa en el sólido, según la aproximación cristalina que se utilice. Más adelante se hace una breve descripción de algunas aproximaciones cristalinas utilizadas.

La ecuación constitutiva local consiste en una ecuación cinemática y un criterio de selección para los sistemas de deslizamiento activos en el cristal, como se explica más adelante. La ecuación cinemática relaciona el tensor gradiente de velocidad con las rapidezces de deslizamiento de aquellos sistemas de deslizamiento activos. La ecuación (1.31) muestra la ecuación cinemática.

$$\dot{l}_{ij} = \dot{\Omega}_{ij}^L + \sum_{s=1}^N b_i n_j \dot{\gamma}_s \quad (1.31)$$

Donde  $\dot{l}_{ij}$  es el tensor gradiente de velocidad en el cristal,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{n}$  son el vector de Burgers unitario y el vector normal unitario del plano de deslizamiento, respectivamente;  $\dot{\gamma}_s$  la rapidez de deslizamiento del sistema de deslizamiento  $s$ ,  $\dot{\Omega}_{ij}^L$  representa la rotación de la red cristalina y  $N$  representa el número de sistemas de deslizamiento disponibles en la red cristalina (por ejemplo, 12 para FCC). La parte simétrica del tensor  $\dot{l}_{ij}$  se define cuando se elimina  $\dot{\Omega}^L$  y la parte anti-simétrica del producto tensorial  $b_i n_j$ . La ecuación (1.32) define al tensor velocidad de deformación local ( $\dot{\epsilon}$ ).

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \sum_{s=1}^N M_{ij}^s \dot{\gamma}_s \quad (1.32)$$

Donde  $\dot{\gamma}_s$  es la rapidez de deformación asociada al sistema  $s$  y  $M_{ij}^s$  su respectivo factor de orientación. Este factor es una matriz simétrica compuesta por funciones lineales de los cosenos directores de los vectores normales a los planos de deslizamiento  $\mathbf{n}$  y los vectores asociados a las direcciones de deslizamiento  $\mathbf{b}$ , con respecto a un sistema de referencia específico. La ecuación (1.33) muestra la definición del factor de orientación.

$$M_{ij}^{(s)} = \sum_s \frac{1}{2} \{ b_i^{(s)} n_j^{(s)} + b_j^{(s)} n_i^{(s)} \} \quad (1.33)$$

A continuación se muestra el producto tensorial  $b_i n_j$  para los sistemas FCC y BCC, así como sus factores de orientación  $M_{ij}^s$  en la tabla 1.2 y 1.3 respectivamente, definidos en el sistema de referencia cristalino.

Tabla 1.2. Producto tensorial  $b_i n_j$  para los sistemas de deslizamiento en FCC y BCC.

FCC		BCC	
Sistema 1 (111)[10 $\bar{1}$ ]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	Sistema 1 (110)[1 $\bar{1}$ 1]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
Sistema 2 (111)[ $\bar{1}$ 10]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Sistema 2 (110)[ $\bar{1}$ 11]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
Sistema 3 (111)[0 $\bar{1}$ 1]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	Sistema 3 (1 $\bar{1}$ 0)[111]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
Sistema 4 (1 $\bar{1}$ 1)[110]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Sistema 4 (1 $\bar{1}$ 0)[11 $\bar{1}$ ]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
Sistema 5 (1 $\bar{1}$ 1)[011]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	Sistema 5 (101)[11 $\bar{1}$ ]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Sistema 6 (1 $\bar{1}$ 1)[ $\bar{1}$ 01]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	Sistema 6 (101)[ $\bar{1}$ 11]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Sistema 7 ( $\bar{1}$ 11)[101]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	Sistema 7 (10 $\bar{1}$ )[1 $\bar{1}$ 1]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Sistema 8 ( $\bar{1}11$ )[ $0\bar{1}1$ ]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	Sistema 8 ( $10\bar{1}$ )[ $111$ ]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Sistema 9 ( $\bar{1}11$ )[ $110$ ]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Sistema 9 ( $011$ )[ $\bar{1}\bar{1}1$ ]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
Sistema 10 ( $11\bar{1}$ )[ $\bar{1}10$ ]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Sistema 10 ( $011$ )[ $11\bar{1}$ ]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$
Sistema 11 ( $11\bar{1}$ )[ $101$ ]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	Sistema 11 ( $0\bar{1}1$ )[ $\bar{1}11$ ]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
Sistema 12 ( $11\bar{1}$ )[ $011$ ]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	Sistema 12 ( $0\bar{1}1$ )[ $111$ ]	$b_i n_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Tabla 1.3. Factores de orientación  $M_{ij}^s$  para los sistemas de deslizamiento en FCC y BCC.

FCC		BCC	
Sistema 1 ( $111$ )[ $10\bar{1}$ ]	$M_{ij}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{bmatrix}$	Sistema 1 ( $110$ )[ $\bar{1}\bar{1}1$ ]	$M_{ij}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$
Sistema 2 ( $111$ )[ $\bar{1}10$ ]	$M_{ij}^2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$	Sistema 2 ( $110$ )[ $\bar{1}11$ ]	$M_{ij}^2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$
Sistema 3 ( $111$ )[ $0\bar{1}1$ ]	$M_{ij}^3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Sistema 3 ( $\bar{1}\bar{1}0$ )[ $111$ ]	$M_{ij}^3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$
Sistema 4 ( $\bar{1}\bar{1}1$ )[ $110$ ]	$M_{ij}^4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$	Sistema 4 ( $\bar{1}\bar{1}0$ )[ $11\bar{1}$ ]	$M_{ij}^4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$
Sistema 5 ( $\bar{1}\bar{1}1$ )[ $011$ ]	$M_{ij}^5 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Sistema 5 ( $101$ )[ $11\bar{1}$ ]	$M_{ij}^5 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$
Sistema 6 ( $\bar{1}11$ )[ $\bar{1}01$ ]	$M_{ij}^6 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$	Sistema 6 ( $101$ )[ $\bar{1}11$ ]	$M_{ij}^6 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$
Sistema 7 ( $\bar{1}11$ )[ $101$ ]	$M_{ij}^7 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$	Sistema 7 ( $10\bar{1}$ )[ $\bar{1}\bar{1}1$ ]	$M_{ij}^7 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$

Sistema 8 ( $\bar{1}11$ )[ $0\bar{1}1$ ]	$M_{ij}^8 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Sistema 8 ( $10\bar{1}$ )[ $111$ ]	$M_{ij}^8 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{bmatrix}$
Sistema 9 ( $\bar{1}11$ )[ $110$ ]	$M_{ij}^9 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$	Sistema 9 ( $011$ )[ $1\bar{1}1$ ]	$M_{ij}^9 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Sistema 10 ( $11\bar{1}$ )[ $\bar{1}10$ ]	$M_{ij}^{10} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$	Sistema 10 ( $011$ )[ $11\bar{1}$ ]	$M_{ij}^{10} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Sistema 11 ( $11\bar{1}$ )[ $101$ ]	$M_{ij}^{11} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$	Sistema 11 ( $0\bar{1}1$ )[ $\bar{1}11$ ]	$M_{ij}^{11} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Sistema 12 ( $11\bar{1}$ )[ $011$ ]	$M_{ij}^{12} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	Sistema 12 ( $0\bar{1}1$ )[ $111$ ]	$M_{ij}^{12} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

En 1928, von Mises demostró que se requieren al menos de cinco sistemas de deslizamiento linealmente independientes para que un cristal experimente deformación plástica por deslizamiento general. Con o sin el número de sistemas de deslizamiento independientes, los granos que componen a la estructura cristalina dentro de un policristal se ven restringidos en su deslizamiento por aquellos granos vecinos con los cuales forman límites de grano.

Una deformación plástica infinitesimal en el monocristal indica que un número  $n$  de sistemas de deslizamiento están activos, cada uno con su respectiva deformación por deslizamiento. Es decir, las contribuciones de cada sistema de deslizamiento sumadas entre sí completan a la deformación plástica macroscópica del monocristal. La ecuación (1.34) muestra la afirmación anterior.

$$\varepsilon_{ij}^{(T)} = \sum_n \varepsilon_{ij}^{(n)} \quad (1.34)$$

De la ecuación (1.32) se deduce que las componentes del tensor  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  definen un sistema de seis ecuaciones, por lo que se requieren de seis sistemas de deslizamiento linealmente independientes activos para que el sistema de ecuaciones tenga solución. Debido a que tanto el tensor  $\dot{l}_{ij}$  como  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  son conocidos porque representan el modo de deformación impuesto, las incógnitas del sistema de ecuaciones son las rapidezces de deformación  $\dot{\gamma}^s$  y los factores de orientación asociados a los sistemas de deslizamiento activos  $M^s$ . Sin embargo, la



solución del sistema de ecuaciones no es única debido a que existen muchas combinaciones posibles de seis sistemas de deslizamiento linealmente independientes en HCP, FCC y BCC. Además, los procesos de deformación plástica por deslizamiento no producen cambio en la densidad del cristal; es decir, a nivel macroscópico no existe un cambio de volumen, por lo que la traza del tensor de deformaciones es nula. La traza del tensor  $\dot{\epsilon}_{ij}$  también es cero debido a la ortogonalidad entre el vector de Burgers y el vector normal al plano de deslizamiento.

$$tr\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33} = 0 \quad (1.35)$$

Como resultado, existen solamente cinco componentes del tensor de deformaciones que definen un sistema de cinco ecuaciones linealmente independientes, por lo que se requieren únicamente cinco sistemas de deslizamiento linealmente independientes para que la ecuación (1.32) tenga solución. En FCC [15] se encuentran 384 combinaciones diferentes de sistemas de deslizamiento linealmente independientes; mientras que en BCC, para los sistemas (1) de la tabla 1.1 se tienen 384 combinaciones linealmente independientes, aunque los sistemas (2) aportan un número mayor de combinaciones posibles de sistemas de deslizamiento independientes.

Sin embargo, cabe destacar que este resultado es válido únicamente para deformaciones plásticas homogéneas que pueden expresarse linealmente, como muestra la ecuación (1.34), y sólo se cumple en elementos volumétricos infinitesimales. Esto quiere decir que cuando el deslizamiento dentro del cristal sea comparable con las dimensiones de los átomos que lo forman, esto deja de ser homogéneo puesto que es comparable con el núcleo de una dislocación e invalida el resultado de von Mises. A su vez, las dimensiones de la deformación plástica no deben sobrepasar el límite donde la linealidad de la ecuación (1.34) siga siendo válida.

### 1.4.3. Ley de Schmid en forma escalar

Esta ley explica que el deslizamiento en un monocristal depende de la orientación que poseen los sistemas de deslizamiento y de la magnitud del estado de esfuerzos que se proyecta sobre ellos. En el caso de un monocristal, esta magnitud sería el esfuerzo de cedencia calculado en la curva esfuerzo-deformación para un ensayo de tracción. Su valor se ve afectado por la

temperatura y la composición del monocristal. La forma de la ley de Schmid para un monocristal sujeto a tracción se explica a continuación. La figura 1.24 muestra una probeta de monocristal con sección transversal  $A$ , sujeta a una fuerza  $F$ . La orientación del sistema de deslizamiento está definida por el ángulo  $\Phi$  que forma el vector unitario normal  $\mathbf{n}$  del plano de deslizamiento con el eje de tracción; y por el ángulo  $\lambda$  que también forma el vector unitario  $\mathbf{u}$  con el eje de tracción.

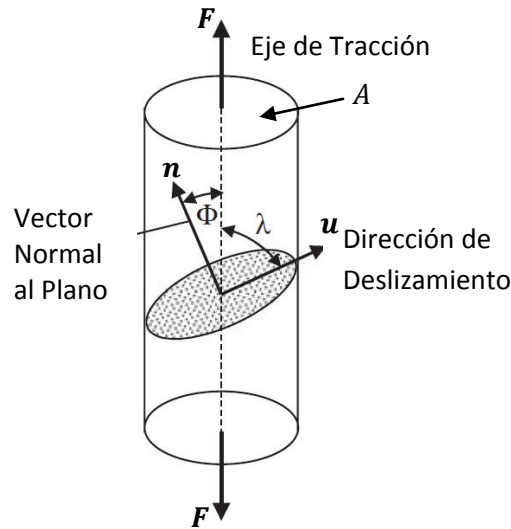


Fig. 1.24. Probeta de un monocristal sujeta a tracción. La orientación del sistema de deslizamiento ( $\Phi$  y  $\lambda$ ) está definida con respecto al eje de tracción [16].

El esfuerzo cortante crítico  $\tau_{CRSS}$  (en inglés, *critical resolved shear stress*) representa la magnitud del esfuerzo necesario para que comience deslizamiento en el monocristal. La ecuación (1.36) define su valor.

$$\tau_{CRSS} = \frac{P_F}{A_p} \quad (1.36)$$

Donde  $P_F$  es la proyección de  $F$  sobre el vector unitario  $\mathbf{u}$ , y  $A_p$  es el área del plano de deslizamiento. Además, por geometría se puede calcular el siguiente resultado de la figura 1.24.

$$P_F = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = F \cos \lambda \quad (1.37)$$

$$A_p = \frac{A}{\cos \Phi} \quad (1.38)$$

Sustituyendo los resultados de las ecuaciones (1.37) y (1.38) en la ecuación (1.36), se obtiene la ley de Schmid en forma escalar. El valor  $m$  se define como el factor de Schmid.

$$\tau_{CRSS} = \frac{F \cos \lambda}{\frac{A}{\cos \Phi}} = \frac{F}{A} \cos \Phi \cos \lambda = \sigma \cos \Phi \cos \lambda = m \sigma \quad (1.39)$$

#### 1.4.4. Ley de Schmid generalizada

El análisis de la sección anterior deduce la ley de Schmid considerando que la probeta se encuentra sujeta a una tracción simple. Sin embargo, un sólido puede estar sujeto a sollicitaciones de tal forma que el estado de esfuerzos asociado es más complicado. Es por esto que la forma de la ley de Schmid involucra tensores de segundo orden asociados con el inicio de deslizamiento en el monocristal. La ecuación (1.40) muestra la forma tensorial de la ley de Schmid.

$$\tau_{CRSS} = \mathbf{M}^{(s)} : \mathbf{s} = M_{ij}^{(s)} s_{ij} \quad (1.40)$$

Donde  $\mathbf{s}$  es el tensor desviador de esfuerzos y  $\mathbf{M}^{(s)}$  el factor de orientación para el sistema de deslizamiento  $s$ , como se define en la ecuación (1.33).

El valor de  $\tau_{CRSS}$  define el valor requerido para que comience el deslizamiento en un monocristal. Además, el deslizamiento está asociado con el movimiento de dislocaciones y con las maclas, como se había mencionado anteriormente. Por lo tanto,  $\tau_{CRSS}$  se ve afectado directamente con la interacción que presenten las dislocaciones con los defectos cristalinos dentro del cristal. En el caso de un monocristal puro,  $\tau_{CRSS}$  es idéntico al esfuerzo de Peierls ( $\tau_{peierls}$ ). Este esfuerzo cortante está relacionado con el movimiento de una dislocación a través de la red cristalina en una dirección particular. La ecuación (1.41) muestra su valor.

$$\tau_{peierls} = \frac{G}{1-\nu} e^{-2\pi w/b} = \frac{G}{1-\nu} e^{-[2\pi a/(1-\nu)b]} \quad (1.41)$$

Donde  $a$  es la distancia entre planos de deslizamiento,  $b$  es la distancia entre átomos sobre la dirección de deslizamiento; además,  $w$  es el ancho del núcleo de la dislocación, por lo que muestra que  $\tau_{peierls}$  posee una alta dependencia a este

parámetro. De esta forma se puede deducir que  $\tau_{peierls}$  es bastante pequeño. Sin embargo, dentro de un material policristalino – es decir, un material formado con varios monocristales separados con límites de grano entre sí – se encuentran otros defectos cristalinos que interrumpen el movimiento de las dislocaciones. La ecuación (1.42) muestra la influencia de los defectos cristalinos que afectan directamente al valor de  $\tau_{CRSS}$ .

$$\tau_{CRSS} = \tau_{peierls} + \tau_{SS} + \tau_{PP} + \tau_{GB} + \mu b \alpha \sqrt{\rho_d} \quad (1.42)$$

De tal forma que  $\tau_{CRSS}$  se ve afectado por la presencia de átomos intersticiales y sustitucionales en soluciones sólidas que impiden el movimiento de dislocaciones, formando atmósferas de Cottrell y Snoek respectivamente. Esto está representado en la ecuación (1.42) con el término  $\tau_{SS}$ , que se refiere al endurecimiento por solución sólida. El término  $\tau_{PP}$  se refiere al esfuerzo cortante que se presenta gracias a los obstáculos fuertes y débiles, que impiden en mayor o menor medida el movimiento de las dislocaciones. Es decir, se entiende que un obstáculo fuerte para una dislocación puede ser otra dislocación, o bien defectos volumétricos como precipitados que pueden activar el mecanismo de Orowan y las fuentes de Frank-Reed, restringiendo su movimiento en los puntos de intersección; y obstáculos débiles a aquellos cúmulos de átomos con su propio sistema cristalino por los cuales una dislocación se detiene temporalmente, hasta que el esfuerzo cortante aplicado alcance el valor suficiente para que ésta se libere, siguiendo su camino.

Un límite de grano se logra cuando se tiene una diferencia grande en la orientación relativa de dos celdas unitarias adyacentes, ambas celdas con el mismo sistema cristalino. Estos límites de grano en un policristal (en inglés, *Grain Boundaries* GB, representado por  $\tau_{GB}$ ) forman barreras muy fuertes contra el movimiento de dislocaciones, dando lugar a que se formen apilamientos de dislocaciones sobre el límite de grano. De hecho, los apilamientos de dislocaciones forman dislocaciones intrínsecas y extrínsecas sobre el límite de grano. Las dislocaciones intrínsecas poseen un campo de esfuerzos despreciable que no influyen en el endurecimiento del cristal, por lo que se quedan ancladas al límite de grano. Sin embargo, las dislocaciones extrínsecas pueden formar parte del límite de grano, y emitir dislocaciones desde él, formando escalones sobre los límites de grano. Estos escalones son importantes puesto que emiten dislocaciones antes de que las fuentes de Frank-Reed se activen, por lo que son importantes al inicio de la deformación plástica. Finalmente, el término  $\mu b \alpha \sqrt{\rho_d}$  se refiere a la fórmula de Taylor [17], y está asociada con el esfuerzo cortante que se

alcanza una vez que muchas dislocaciones han interactuado entre sí, deteniendo en gran medida su movimiento. El resultado de esta interacción produce una selva de dislocaciones (en inglés, *dislocation forest*).

Cabe destacar que los últimos tres términos de la ecuación (1.42) pueden agruparse debido a que todos se definen gracias al término que representa la densidad de dislocaciones  $\rho_d$ .

## 1.5. Texturas cristalinas en los metales

Las texturas, o bien orientaciones preferenciales, están ampliamente relacionadas con la anisotropía de las propiedades en un material. Esto quiere decir que el valor para cada una de las propiedades es diferente según la dirección cristalina estudiada dentro del material. En el caso de materiales cuya manufactura se realiza mediante la compresión de un polvo para generar un sólido conglomerado, se obtiene una distribución aleatoria en la orientación cristalográfica de los granos; sin embargo, en la mayoría de los casos existe una formación en la orientación de los granos hacia una dirección preferencial debido a un proceso natural – como la formación de dendritas en la fundición de metales – o a un proceso tecnológico (forja, estampado, extrusión, etc.).

La medición cuantitativa experimental macroscópica de las texturas se lleva a cabo generalmente con la difracción de rayos X (RX) sobre una muestra metálica que se encuentra expuesta a ellos, aunque también se utiliza difracción de neutrones y electrones. Se requiere de un proceso específico para la preparación de las muestras, aislamiento del lugar de pruebas y la condición de Bragg como base teórica para la medición de los ángulos de difracción de la radiación utilizada. Para producir radiación que se difracte por los planos cristalográficos en un cristal, la longitud de onda de la radiación incidente debe ser más pequeña que los espacios de la red cristalina. La difracción de la radiación electromagnética (RX, rayos  $\gamma$ ,...) sucede por medio de la dispersión elástica de las ondas que inciden en los átomos de la muestra del material. Sin embargo, los RX solamente interactúan con los electrones de las capas que conforman a los átomos, mientras que la radiación con electrones interactúa tanto con las capas atómicas como con el núcleo de los átomos. Finalmente, la radiación con neutrones interactúa principalmente con el núcleo de los átomos que forman al material de la muestra.

Cuando la radiación electromagnética interactúa con la materia en lugar de átomos individuales, las ondas de radiación de cada átomo interactúan entre sí,

dando lugar a una interferencia de ondas secundaria (principio de Huygens-Fresnel) debido a que la mayoría de éstas no se encuentran en fase, por lo que se anulan entre sí. Sólo para ángulos de incidencia específicos es posible que las ondas electromagnéticas se encuentren en fase para que su difracción sea detectable. Para que ocurra una difracción de radiación electromagnética en fase, es necesario que se cumplan tres condiciones: 1. El arreglo atómico en el material de la muestra debe ser ordenado; es decir, cristalino. 2. La radiación debe ser monocromática, lo cual significa que debe tener sólo una longitud de onda. 3. La longitud de onda de la radiación ( $\lambda$ ) debe ser del mismo orden de tamaño (o incluso más pequeño) que la difracción característica.

Dadas las tres condiciones de difracción anteriores, es lógico pensar que el ángulo de difracción de una onda electromagnética depende de su longitud de onda y del espacio entre los átomos que la dispersan. La ley de Bragg [18] muestra dicha dependencia, considerando que los planos atómicos son como “espejos” que reflejan la onda electromagnética y que se encuentran separados por una distancia característica del cristal ( $d$ ). La figura 1.25 muestra los planos atómicos y las ondas electromagnéticas que interactúan con ellos. La radiación incidente  $L$  se encuentra en fase y la línea perpendicular a ésta representa una de las crestas de las ondas en fase. Una parte de la radiación  $L$  se ve reflejada por los átomos del plano  $A$  (trayectoria  $LM$ ), mientras que el resto sigue viajando hasta ser reflejada por los átomos en los planos atómicos  $B$  y  $C$ . Para obtener una onda reflejada con intensidad en la dirección  $MN$ , es necesario que se encuentre en fase. Esto significa que la longitud de onda de la radiación reflejada debe ser igual a la longitud de onda de la radiación incidente, o bien un múltiplo entero de ésta. Por lo tanto, los segmentos  $PM_1$  y  $M_1Q$  deben ser un múltiplo de la longitud de onda, como muestra la ecuación (1.43a). Además, por geometría los segmentos  $PM_1$  y  $M_1Q$  se encuentran relacionados con el ángulo de incidencia  $\theta$  y la distancia  $d$ , como muestra la ecuación (1.43b). Igualando las ecuaciones (1.43a) y (1.43b), se obtiene la ley de Bragg, como se muestra en la ecuación (1.43c).

$$PM_1 = M_1Q = n\lambda \quad (1.43a)$$

$$PM_1 = M_1Q = d \sin \theta \quad (1.43b)$$

$$n\lambda = d \sin \theta \quad (1.43c)$$

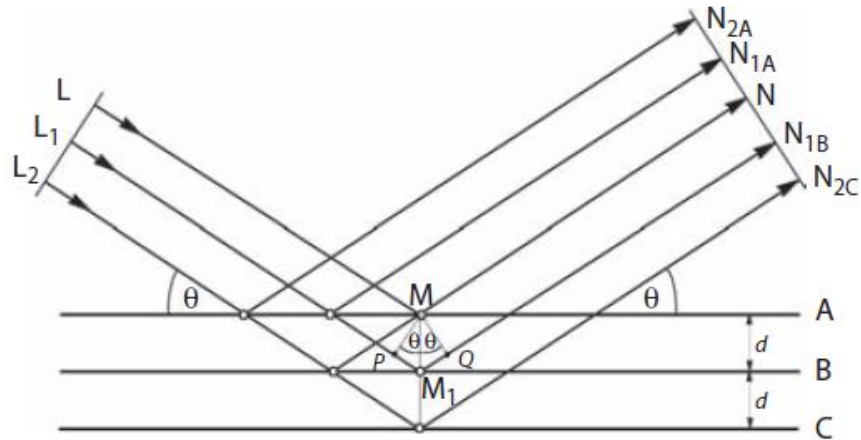


Fig. 1.25. Ley de Bragg.

La ley de Bragg es fundamental para la medición de texturas debido a que se pueden identificar los planos cristalinos de un cristal, cuando se utiliza radiación con longitud de onda conocida. Aunque el fenómeno que ocurre es difracción y no reflexión, la radiación difractada se le conoce comúnmente como radiación reflejada.

Al tener una incidencia de la radiación sobre la muestra, lo que se obtiene es una proyección de las direcciones que se encuentran en una pequeña región alrededor de la superficie expuesta puesto que cada plano cristalino dentro de los granos muestra un ángulo de difracción diferente. Por tal motivo, lo que se observa es solamente una proyección bidimensional de un objeto de tres dimensiones, es decir, de las orientaciones cristalográficas de los granos dentro del material que forman a la textura en conjunto. Una analogía parecida a esto es cuando se ilumina una botella con una lámpara y se proyecta su sombra hacia la pared; si se gira a la botella de tal forma que quede inclinada, su proyección sobre la pared también cambia. Dicho de otra forma, la ley de Bragg limita a dos dimensiones las imágenes que se obtienen de la estructura cristalina que conforman los granos, por lo que se requieren de varias proyecciones para poder identificar el sistema cristalino de cada grano y recrear completamente a todas las orientaciones dentro de la muestra metálica.

Para especificar una orientación, es necesario establecer un sistema de referencia. Se requiere de un sistema de referencia cartesiano que esté relacionado con la muestra ( $S: S_1, S_2, S_3$ ) y un sistema de referencia que se relacione con las direcciones cristalográficas ( $C: C_1, C_2, C_3$ ). Esto quiere decir que existe una matriz de rotación que describe la orientación cristalográfica con

respecto al sistema de referencia de la muestra. La ecuación (1.44) muestra el resultado anterior.

$$C = gS \quad (1.44)$$

Donde  $C$  y  $S$  representan el sistema de referencia del cristal y el sistema de referencia de la muestra, respectivamente;  $g$  es la matriz de rotación que asocia a ambos sistemas de referencia. Esta matriz se define con los cosenos de los ángulos que forman las direcciones  $\langle 100 \rangle$  con los ejes del sistema de la muestra. La figura 1.26 muestra los ángulos con respecto al sistema de referencia de una lámina. Los ángulos  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  representan los ángulos que forma la dirección  $[100]$  con los ejes RD, TD y ND respectivamente;  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  los ángulos de  $[010]$  con respecto a los ejes RD, TD y ND respectivamente y los ángulos  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  definen la orientación de la dirección  $[001]$  con respecto a RD, TN y ND respectivamente.

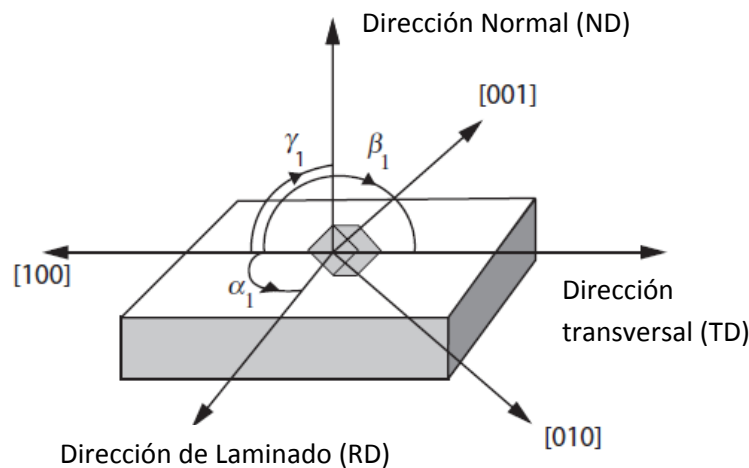


Fig. 1.26. Ángulos que describen a la matriz de rotación.

Por lo tanto,  $g$  es una matriz cuadrada de nueve componentes como se muestra en la ecuación (1.45). Tanto renglones como columnas representan vectores unitarios, por lo que  $g$  es una matriz ortonormal, y su inversa es simplemente la matriz transpuesta ( $g^T = g^{-1}$ ). Además, las nueve componentes de  $g$  son dependientes debido a que el producto cruz entre dos renglones de la matriz proporciona el tercer renglón. Es por esta razón que la matriz  $g$  se define puesto que permite definir de manera matemática otras descripciones de la misma orientación que describe, con un menor número de parámetros.



$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

El mapa que conjunta todas las orientaciones se denomina ODF (en inglés, *Orientation Distribution Function*). En él se encuentran definidas todas las texturas de la muestra estudiada. A continuación se muestra una ODF para un metal.

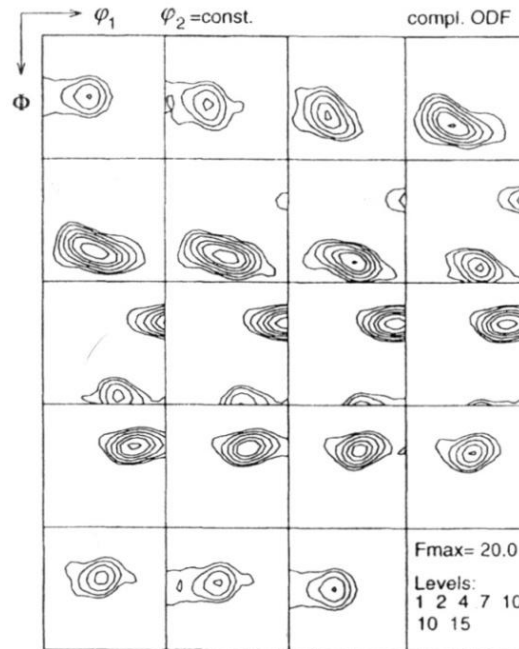


Figura 1.27. Textura dentro de una aleación Al-Fe-Si laminada en frío [19].

Se observan tres parámetros que se requieren dentro de la ODF para poder orientarse adecuadamente. Estos son  $\varphi_1$ ,  $\Phi$ ,  $\varphi_2$ , que definen a los ángulos de Euler de acuerdo a la definición de Bunge. La figura 1.28 muestra la convención para los ángulos de Bunge. El ángulo  $\varphi_1$  define el giro del eje RD con respecto al eje ND, para tomar la posición RD';  $\Phi$  define la rotación del eje ND con respecto al eje RD', para que sea coincidente con el eje [001] del cristal; finalmente,  $\varphi_2$  representa el giro con respecto a ND sobre el plano definido por las direcciones [100] y [010], para que las direcciones RD' y TD sean coincidentes con los ejes [100] y [010].

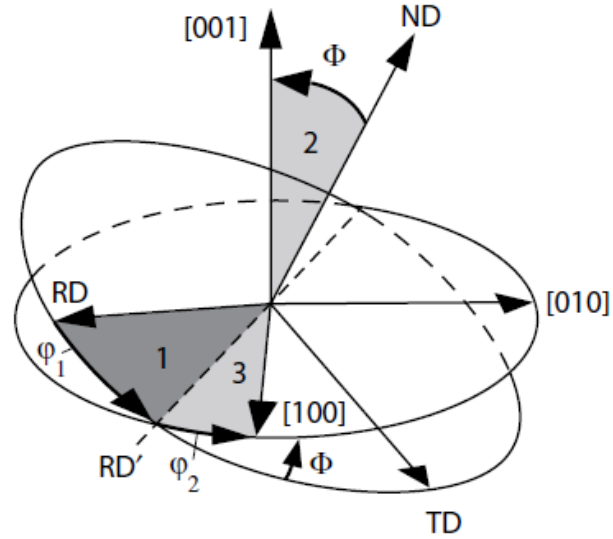


Fig. 1.28. Ángulos de Euler, según la convención de Bunge.

Análíticamente, las tres rotaciones definidas por los ángulos de Euler se pueden definir mediante tres matrices de transformación, como muestra la ecuación (1.46). Además, estas matrices se encuentran relacionadas con la matriz de rotación  $g$ , definida anteriormente.

$$g_{\varphi_1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & \text{sen}\varphi_1 & 0 \\ -\text{sen}\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, g_{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi & \text{sen}\Phi \\ 0 & -\text{sen}\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix}, g_{\varphi_2} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & \text{sen}\varphi_2 & 0 \\ -\text{sen}\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.46a)$$

$$g = g_{\varphi_1} g_{\Phi} g_{\varphi_2} \quad (1.46b)$$

Finalmente, estos tres ángulos también se encuentran relacionados con los ángulos que se utilizan durante la medición experimental de la muestra, la cual se realiza con un aparato que se denomina goniómetro (en inglés, *goniometer*).

## 1.6. Deformación plástica en policristales

Es necesario determinar la relación entre la deformación plástica incremental de un monocristal con la deformación homogénea macroscópica impuesta para poder predecir el comportamiento plástico, la evolución de la plasticidad anisotrópica y su respectiva formación de texturas dentro de un policristal, especialmente cuando se ve sometido a grandes deformaciones como en el caso de forja y estampado de láminas.

### 1.6.1. La aproximación de Sachs

Una primera aproximación entre la deformación plástica cristalina y la deformación plástica macroscópica fue propuesta por Sachs en 1928, considerando que el esfuerzo a tracción de un material policristalino es equivalente a la suma de todas las contribuciones de aquellos granos individuales con menor resistencia a la tracción. De tal forma que para un grano, su respectivo esfuerzo de tracción está definido según la ley de Schmid escalar:  $Y_i = g_i \tau$ , donde  $g$  es el factor inverso de Schmid ( $1/m_i$ ) y  $\tau$  el esfuerzo sobre el plano de deslizamiento. El esfuerzo a tracción del policristal es simplemente el promedio de todas las contribuciones anteriores:  $Y = \int Y(g) f(g) dg = \int g \tau f(g) dg$ , donde  $f(g)$  es la función de distribución de orientaciones definida por la textura dentro del metal. El inconveniente con esta aproximación de límite inferior es la falta de un equilibrio local y compatibilidad entre los granos vecinos, dando solamente un promedio global para el valor de tracción macroscópica.

### 1.6.2. La aproximación de Taylor

Taylor (1938) elaboró una aproximación de límite superior donde se consideró a las deformaciones cristalinas homogéneas, haciendo hincapié en la necesidad de una compatibilidad completa con el conjunto de granos representativo. Gracias a las observaciones experimentales que realizó, llegó a la conclusión de que la velocidad de deformación en los granos individuales no era tan diferente de la velocidad de deformación macroscópica impuesta. Por lo tanto, Taylor consideró que ambas velocidades de deformaciones son iguales (en inglés, *Full Constraints Taylor Model*).

$$1^a \text{ Hipótesis de Taylor: } \dot{\epsilon}_{ij}^{macro} = \dot{\epsilon}_{ij}^{cristal} = \dot{\epsilon}_{ij} \quad (1.47)$$

Tomando el resultado de von Mises para sistemas de deslizamiento independientes, es posible escribir el tensor  $\dot{\epsilon}_{ij}$  como una combinación lineal de cinco sistemas de deslizamiento linealmente independientes.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \sum_{s=1}^5 M_{ij}^{(s)} \dot{\gamma}_{(s)} \quad (1.48)$$

Donde  $M_{ij}^{(s)}$  es el factor de orientación para el sistema de deslizamiento respectivo, definido anteriormente en la ecuación (1.33), y  $\dot{\gamma}_{(s)}$  la rapidez de deslizamiento en su respectivo sistema. Hasta este punto, la aproximación de Taylor permite que la ecuación (1.48) relacione una deformación macroscópica impuesta con la deformación plástica que ocurre en un monocristal. Sin embargo, se requiere de un criterio de selección de sistemas de deslizamiento para definir el conjunto de cinco sistemas de deslizamiento independientes que se activan por el tensor velocidad de deformación impuesto  $\dot{\epsilon}_{ij}$  puesto que existen muchas combinaciones posibles, como se explica en la sección 1.4.2. La ecuación (1.49) muestra el criterio de selección.

$$2^{\text{a}} \text{ Hipótesis de Taylor: } \quad \text{Min}\{\dot{W}_c\} = \text{Min}\{\sum_S \tau_{CRSS}^S \dot{\gamma}_{(s)}\} \quad (1.49)$$

Donde  $\dot{W}_c$  es el trabajo interno que el cristal disipa por fricción, por unidad de tiempo;  $\tau_{CRSS}^S$  el esfuerzo cortante crítico de Schmid y  $\dot{\gamma}_{(s)}$  la rapidez de deslizamiento para su respectivo sistema de deslizamiento  $s$ . Haciendo uso de este principio de mecánica de medios continuos, es posible conocer los sistemas de deslizamiento linealmente independientes que se activan con el mínimo trabajo interno hecho por el cristal; es decir, se calcula  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{n}$  de cada uno de ellos, con lo cual queda definida la matriz de factores de orientación  $M_{ij}^{(s)}$ , así como su respectivo  $\tau_{CRSS}^S$  que activa el sistema  $s$ . Al tener la matriz  $M_{ij}^{(s)}$ , es posible calcular las rapidezces de deformación  $\dot{\gamma}_{(s)}$  para cada sistema de deslizamiento, utilizando la ecuación (1.48). Finalmente, el estado de esfuerzos proyectado ( $s_{ij}$ ) sobre la matriz  $M_{ij}^{(s)}$  que produce el valor de  $\tau_{CRSS}^S$  respectivo, es calculado mediante la ley de Schmid generalizada, escrita en la ecuación (1.40).

El procedimiento anterior permite calcular el lugar geométrico de la fluencia en un grano, considerando que la deformación macroscópica impuesta al metal es idéntica con la deformación que éste experimenta. Sin embargo, es necesario realizar este procedimiento para una muestra representativa de granos que constituyen al metal. Es aquí donde se utiliza la información que proporciona la ODF acerca de la orientación preferencial que define la textura cristalina del metal estudiado, para poder calcular un factor de orientación promedio  $\bar{M}$  representativo de toda la muestra de granos, como se muestra en la ecuación (1.50).

$$\bar{M} = \int M(g)f(g)dg \quad (1.50)$$

Donde  $M(g)$  es el factor de orientación expresado como función de la orientación cristalográfica, y  $f(g)$  es la función ODF del cristal estudiado. El argumento de la función ODF representa la descripción de la orientación cristalográfica en la muestra; es decir, los ángulos de Euler según Bunge, por ejemplo:  $g: \{\varphi_1, \Phi, \varphi_3\}$ . El término  $f(g)dg$  representa la fracción de volumen de todos los granos de la muestra, que poseen una orientación cristalográfica, asociados a un volumen representativo  $dg$  del mismo, definido en el espacio Euler. El valor promedio  $\bar{M}$  se multiplica con el esfuerzo de fluencia uniaxial medido de una probeta del material sometida a tracción, para calcular el esfuerzo de fluencia correspondiente al tensor velocidad de deformación  $\dot{\epsilon}_{ij}$ . Este procedimiento se realiza en cada incremento de deformación, actualizando la orientación de la textura en el metal y en consecuencia, al factor de Schmid  $M(g)$  y la superficie de cedencia asociada.

### 1.6.3. Aproximaciones actuales para deformación plástica cristalina

Hoy en día existen otro tipo de aproximaciones que, en su mayoría, están basadas en la aproximación de Taylor para deformación plástica cristalina, como resultado de resolver la relación entre la deformación incremental del grano y la deformación macroscópica impuesta. La primera aproximación que se ha analizado aquí es la aproximación de Taylor, la cual considera que ambas son idénticas (*Full Constraints Taylor Model*, FC Taylor).

Una segunda aproximación ha sido desarrollada hace más de treinta años (Honeff, Mecking, 1978), debido a que consideraba a la aproximación Full Constraints de Taylor muy estricta con el movimiento local permitido en los granos del policristal. De tal forma que aquellos granos bastante elongados (que se encuentran a menudo en aquellos metales altamente deformados) pueden experimentar esfuerzos cortantes en planos localizados, sin crear incompatibilidades. Este es el origen de la aproximación de restricciones relajadas (en inglés, *Relaxed Constraints model*). En la actualidad, las aproximaciones intentan explicar la interacción de varios granos entre sí, para después relacionar esta interacción local con la deformación macroscópica del policristal (en inglés, *multi-grain models*).

La aproximación Self Consistent considera la interacción entre un grano y todos sus vecinos mediante una matriz homogénea hipotética que representa el comportamiento constitutivo promedio de todo el policristal, por lo que se pueden relacionar esfuerzos y deformaciones locales en el grano y su alrededor con las deformaciones macroscópicas impuestas. Otras aproximaciones toman en cuenta

la posibilidad de que el grano se pueda subdividir durante la deformación plástica; es decir, esta aproximación permite que las velocidades de deformación en un grano varíen dentro de él, y sean completamente diferentes de los valores macroscópicos de deformación. Esto generalmente ocurre a bajas temperaturas, y con menor ocurrencia cuando se consideran estudios a temperaturas altas.

Algunas aproximaciones recientes que analizan la interacción entre varios granos dentro de un metal son la aproximación Lamel (LAMEL), y la aproximación Advanced Lamel (ALAMEL). La aproximación Lamel toma en cuenta la interacción de dos granos adyacentes entre sí; en ella no se permite deslizamiento en su frontera común. Su uso es únicamente para predecir la deformación plástica en laminado de metales. Sin embargo, la aproximación ALAMEL propone que el gradiente de la velocidad promedio en ambos lados de un límite de grano sea igual al gradiente de velocidad macroscópica; además, se logra un equilibrio de esfuerzos en los límites de grano. Es decir, la aproximación FC Taylor propone que la deformación de un grano sea igual a la deformación macroscópica, lo cual conlleva a que ésta sea homogénea desde el centro de un grano hasta los límites de otro grano, mientras que en la aproximación ALAMEL se propone que los límites de grano muestren una continuidad en la velocidad de deformación y esfuerzos, produciendo una discontinuidad en el centro del grano. Tanto la distribución de esfuerzos como las velocidades de deformación dentro de los granos se consideran distribuciones heterogéneas. La figura 1.29 muestra las interacciones que se modelan con la aproximación ALAMEL.

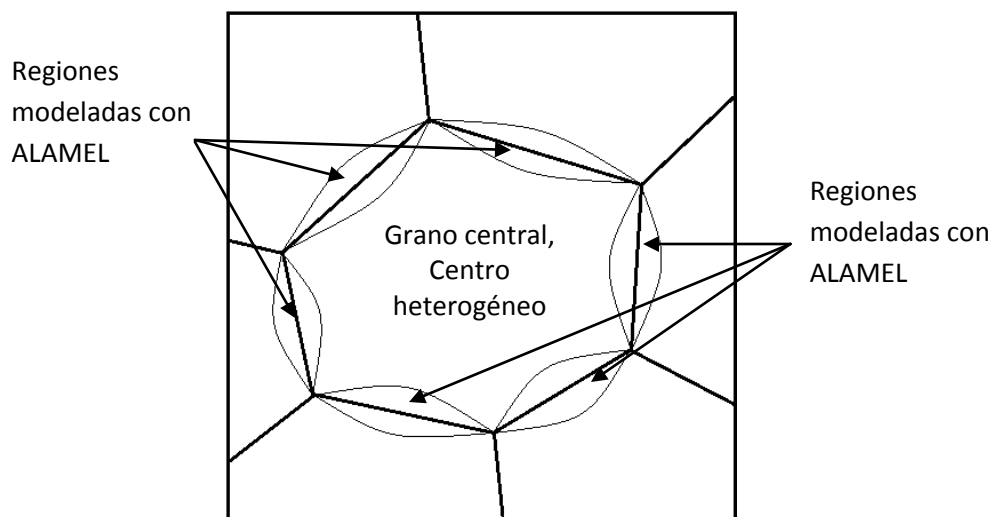


Fig. 1.29. Regiones modeladas con la aproximación ALAMEL en un grano de un metal.

Todas las regiones del grano central que se modelan con ALAMEL se consideran como el conjunto que determina la contribución de la deformación local que ofrece el grano al policristal completo. Para una mayor información, se recomienda leer la referencia [20].

## 1.7. Aspectos básicos de la tribología en los procesos de manufactura

La tribología es la ciencia dedicada al estudio de superficies en contacto que se encuentran en movimiento relativo [21]. El resultado de este movimiento relativo induce fricción entre las superficies, definida como una oposición a dicho movimiento y que no solamente depende del material que compone a las superficies, sino también de su geometría, rugosidad, temperatura y en su caso, del tipo de lubricación que las separa. Por lo tanto, esta área de estudio abarca un gran número de investigaciones que requieren de un uso multidisciplinario. Las superficies en cuestión poseen una rugosidad producida por el acabado superficial del proceso de conformado que las fabrica; de tal forma que el área de manufactura que pertenece a la ingeniería mecánica se vuelve importante en un estudio de tribología. A su vez, esta rugosidad de las superficies propicia que el contacto entre ambas se realice en pequeñas zonas microscópicas localizadas, ya sea en el rango elástico o plástico; este tipo de interacción es estudiada por la mecánica de contacto. La figura 1.30 muestra un esquema del contacto a nivel microscópico de las superficies.

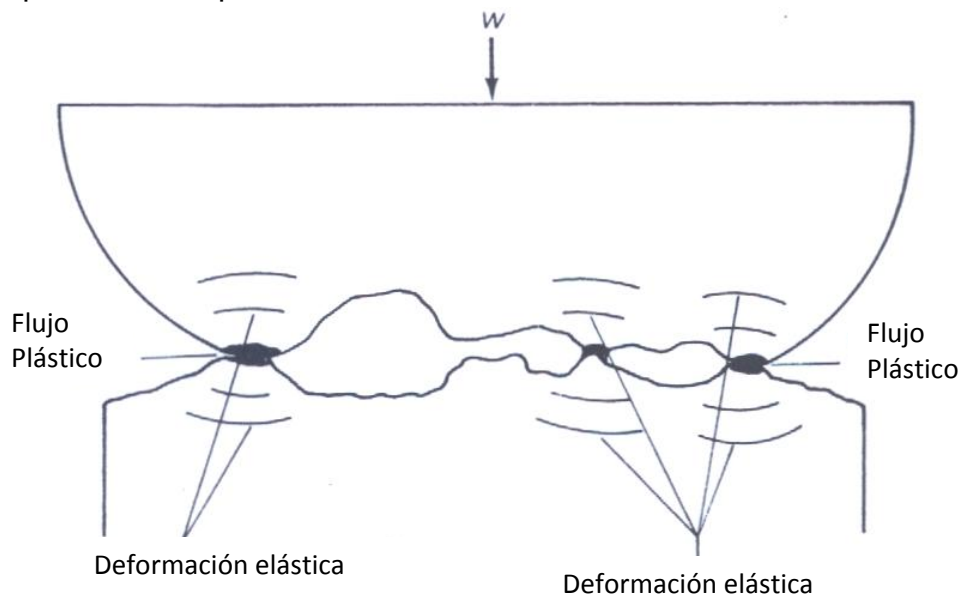


Fig. 1.30. Contacto microscópico entre dos superficies rugosas.

También, dichas deformaciones están en total relación con la estructura cristalina y fractura de las superficies; un área estudiada por la metalurgia mecánica y la metalurgia física. La corrosión que puede existir en las superficies es un fenómeno estudiado por la metalurgia química y también es necesaria para un estudio tribológico. Finalmente, si el propósito del estudio tribológico es reducir la fricción, el uso de lubricantes entre las superficies es un área estudiada por la mecánica de fluidos, donde generalmente se busca optimizar el espesor de la capa lubricante entre las superficies.

Debido a que el estampado profundo es un proceso que pertenece al estampado de láminas, es necesario revisar los aspectos más importantes de la tribología en esta área con el propósito de adquirir bases para comprender modelos aun más complejos que no se analizan aquí. A pesar de que la tribología es importante para optimizar y predecir la viabilidad de los procesos de manufactura en general, esta área de conocimiento no ha tenido una gran investigación si se compara con el estudio de la tribología en los elementos de máquinas. Además de la diversidad en las áreas de estudio de la tribología que se ha mencionado, la gran variedad de los procesos de manufactura también agrega un factor multidisciplinario al estudio de la tribología en esta área. Por lo tanto, aquí solamente se mencionan los aspectos únicos de la tribología en el estampado de láminas que son diferentes de aquellos aspectos únicos de la tribología en el diseño de elementos de máquinas.

- Un aspecto único de la tribología en el estampado de láminas es la presión que se ejerce sobre la superficie común pieza de trabajo/herramienta, debido a que ésta rebasa el esfuerzo de cedencia en la pieza de trabajo. Por lo tanto, los valores de fricción para estampado de láminas son totalmente diferentes de aquellos valores obtenidos para la gran mayoría de los elementos de máquinas, cuyo diseño generalmente es en el rango elástico.
- Los lubricantes representan un alto costo, además de que es difícil removerlos de la pieza de trabajo y llegan a afectar otro tipo de procesos subsecuentes (soldadura, pintado y otros recubrimientos superficiales). Sin embargo, en muchas operaciones los lubricantes son críticos para el control de la calidad del acabado superficial, desgaste en la herramienta y consumo de potencia en la máquina-herramienta. El uso de los lubricantes también es un aspecto diferente si hablamos de estampado de láminas. A diferencia del punto de vista metalúrgico, el trabajo en frío y en caliente para los lubricantes establece una temperatura límite que define un rango de temperaturas para lubricantes orgánicos y lubricantes sintéticos, que algunos autores definen como 250 °C [22].



- Cuando se está diseñando el herramental para el estampado de láminas, es muy importante predecir las deformaciones a las que se encuentra sujeta la lámina cuando se estampa con el fin de diseñar la carga que se requiere en la prensa, considerando necesariamente que existe fricción en las superficies involucradas. De hecho, el aspecto más importante de la tribología en el estampado de láminas es que siempre existe contacto directo entre la lámina y la herramienta de estampado en algunas zonas localizadas. Es decir, el lubricante utilizado disminuye la fricción entre las superficies según el régimen de velocidad que alcance. El régimen de capa completa (en inglés, *full film regime*) representa una separación casi en su totalidad entre la lámina y la herramienta, lo cual disminuye en demasía a la fricción; mientras que el régimen de capa frontera (en inglés, *boundary film regime*) establece el mayor aumento en la fricción, por lo que existe el mayor contacto entre las asperezas de las superficies. Para el estampado profundo, la figura 1.31 [23] muestra la variación experimental del coeficiente de fricción seca, cuyos resultados son similares con respecto al número adimensional de velocidad definido como  $S = \mu Ux/pR^2$ , donde  $\mu$  es el coeficiente de fricción seca,  $U$  es la velocidad de deslizamiento en la superficie común,  $x$  la longitud de contacto,  $p$  la presión en la superficie común y  $R$  la rugosidad (la altura máxima en el perfil). Los datos experimentales consideraron diversos acabados superficiales (Electrical Discharge Texturing, EDT; shot blasting, shotblast; y Laser Beam Texturing, lasertex), así como varios lubricantes utilizados para la medición experimental.

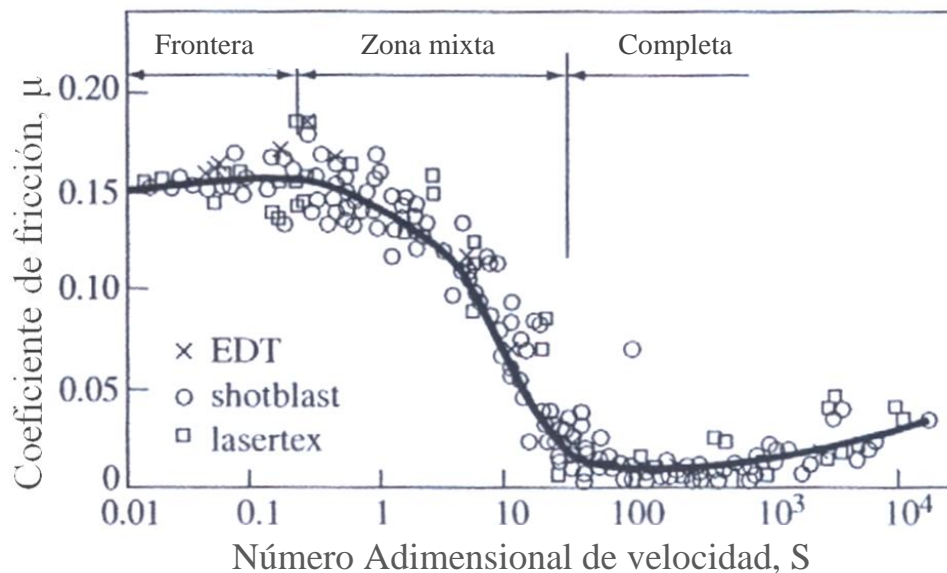


Fig. 1.31. Datos experimentales del coeficiente de fricción, que muestran similitud con el número adimensional  $S$ .

- Los lubricantes líquidos a base de agua, o emulsiones, son ampliamente utilizados en el estampado de láminas para coches y latas por tener un bajo nivel de contaminación. Una mezcla con aceite, aditivos, agentes antibacteriales, anti-espuma, etc., junto con una base de agua lubrica tan bien como un lubricante de aceite puro. Además, su composición a base de agua le otorga propiedades refrigerantes, muy apreciadas en el conformado de metales a altas velocidades.
- El uso de lubricantes sólidos para estampado de láminas es importante cuando la complejidad de la pieza de trabajo es alta, mostrando una mejor lubricación comparada con las emulsiones [24]. Los lubricantes sólidos más utilizados son los jabones a base de zinc y calcio, la cera natural de las abejas y algunos polímeros. La mejor forma de añadir estos lubricantes sólidos a la lámina es a través de una capa portadora hecha de polímero (por ejemplo, una capa a base de Teflón). El resultado de esta lubricación es que reduce la carga de estampado en la prensa, así como una mayor altura permisible de la copa conformada, sin que ésta se rompa en la base. Sin embargo, se debe poner una gran atención en el espesor de la capa, ya que un espesor insuficiente provoca un mayor desgaste en la herramienta; mientras que un exceso de la capa de jabón puede terminar adhiriéndose a la herramienta y provocar que las tolerancias en la pieza de trabajo se vean comprometidas. Para usos industriales, este tipo de capas generalmente se ponen por medio de aerosoles en polvo o co-laminación. La figura 1.32 muestra un esquema de los espesores manejados para las capas de jabón y cera. También se utilizan con frecuencia las capas metálicas como medio de lubricación, especialmente en el estampado de aceros. Por ejemplo, algunos contenedores de comida son estampados con lámina de acero cubierta de estaño; dicha capa posee la doble ventaja de lubricar durante el estampado y de ser un agente protector contra la corrosión.

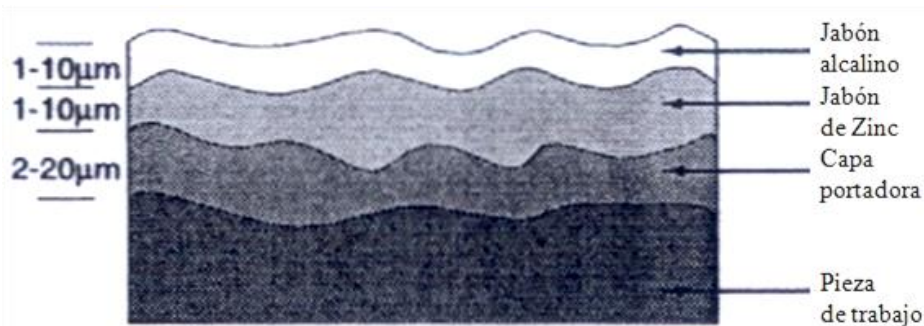


Fig. 1.32. Esquema ilustrativo de una capa portadora de lubricante sólido.

- El acabado superficial en una lámina estampada también representa un factor importante. Un acabado suave representa un aspecto más atractivo a la vista del consumidor, lo cual es importante si estamos hablando de productos como contenedores o partes estampadas para autos. Por lo tanto, el valor del coeficiente de fricción depende del aplanado de las asperezas en una superficie el cual se logra por medio de algún acabado superficial. La figura 1.33 muestra el comportamiento de la fuerza de fricción como una función de la fuerza normal que se ejerce en la pieza de trabajo, incluyendo a las láminas con estampado profundo. Es evidente de esta figura que el modelo de Coulomb para fricción seca aplica solamente si las asperezas en la superficie no han sido aplanadas por algún acabado superficial o durante el proceso de manufactura. Esto, como se ha mencionado antes, provoca que el contacto en la superficie común ocurra únicamente en zonas microscópicas localizadas. El estampado profundo se encuentra en una región mixta donde las asperezas de la superficie poseen un gran porcentaje de aplanamiento, sin llegar a ser aplastadas completamente. Por lo tanto, es justificable que los resultados en una simulación de estampado profundo tengan una veracidad aceptable si se toma un coeficiente de fricción seca constante; la realidad es que la fricción en el estampado profundo requiere de un modelado mucho más complejo que involucre todos los aspectos que se han mencionado.

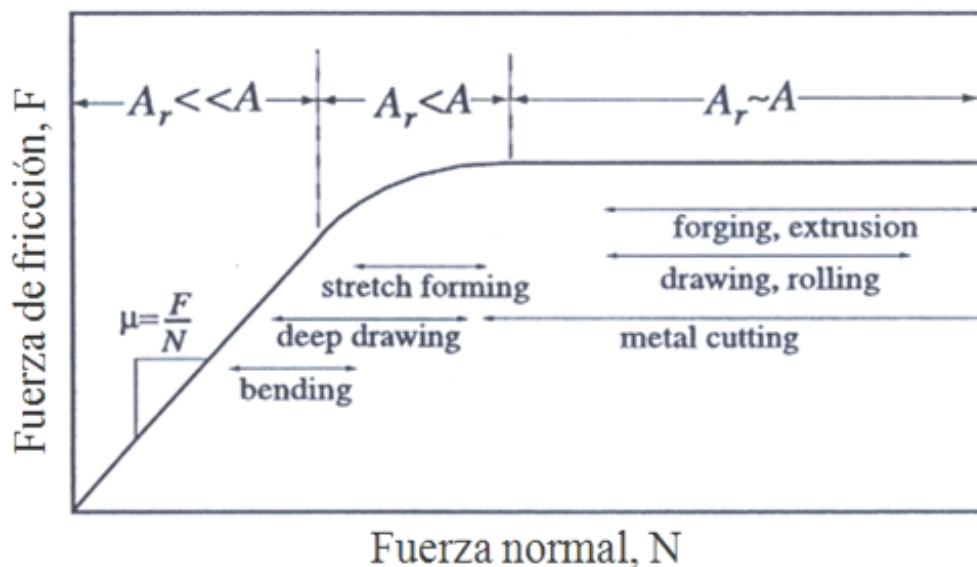


Fig. 1.33. Fuerza de fricción como función de la fuerza normal. El modelo de Coulomb para fricción seca se utiliza en procesos donde el área real de contacto ( $A_r$ ) es mucho menor que el área macroscópica aparente ( $A$ ). Bending: doblado de láminas, deep drawing: estampado profundo, stretch forming: proceso de estirado, metal cutting: procesos de corte en metales; drawing, rolling: estampado, laminado; forging, extrusion: forja, extrusión.

- La interacción entre las asperezas de la superficie de trabajo y la superficie de la herramienta es de vital importancia. Al entrar en contacto ambas superficies, en ocasiones se forman pequeños fragmentos de desgaste a partir de las asperezas por medio del mecanismo llamado micro-corte. Estos fragmentos se pueden adherir tanto a la pieza de trabajo como a la herramienta. En ambos casos, los acabados superficiales pueden verse afectados si no se controla adecuadamente la generación de fragmentos de desgaste. Cuando los fragmentos son adheridos a la pieza de trabajo, se forma una capa de ceniza (en inglés, *smudge*) que a menudo puede quitarse con un paño suave; sin embargo, cuando los fragmentos se adhieren en gran cantidad a la herramienta, es muy probable que se formen surcos en la lámina debido a que la tolerancia en la herramienta ha cambiado drásticamente (en inglés, *galling*).

El propósito de esta sección ha sido mostrar una síntesis actual de los aspectos más relevantes de la tribología en el estampado de láminas, la cual representa un área de investigación importante para el modelado numérico del estampado profundo. De acuerdo a la figura 1.31, es aceptable considerar que la fricción ocasionada en la superficie común pieza de trabajo/herramienta se comporte de acuerdo al modelo de Coulomb para fricción seca, tomando en cuenta que este valor experimental ha sido calculado para regímenes de velocidad moderados y bajos; cabe señalar que esta parte del modelo es un área que puede recibir futuras aportaciones para el desarrollo de modelos de fricción aun más complejos.

## Capítulo 2

### Desarrollo del modelo isotrópico

En este capítulo se describe a detalle el modelo numérico que se utiliza en esta tesis para resolver el caso de estampado profundo, considerando que la lámina se comporta como un medio elasto-plástico isotrópico. El programa Abaqus CAE contiene un ambiente de programación amigable, de tal forma que la creación de un modelo numérico se realiza por medio de módulos. La descripción en este capítulo se lleva a cabo a través de cada uno de los módulos en Abaqus CAE. Además, se presentan varias técnicas de interpretación de resultados que se utilizan para comprobar la veracidad, precisión y exactitud del modelo numérico.

#### 2.1. Módulo de parte

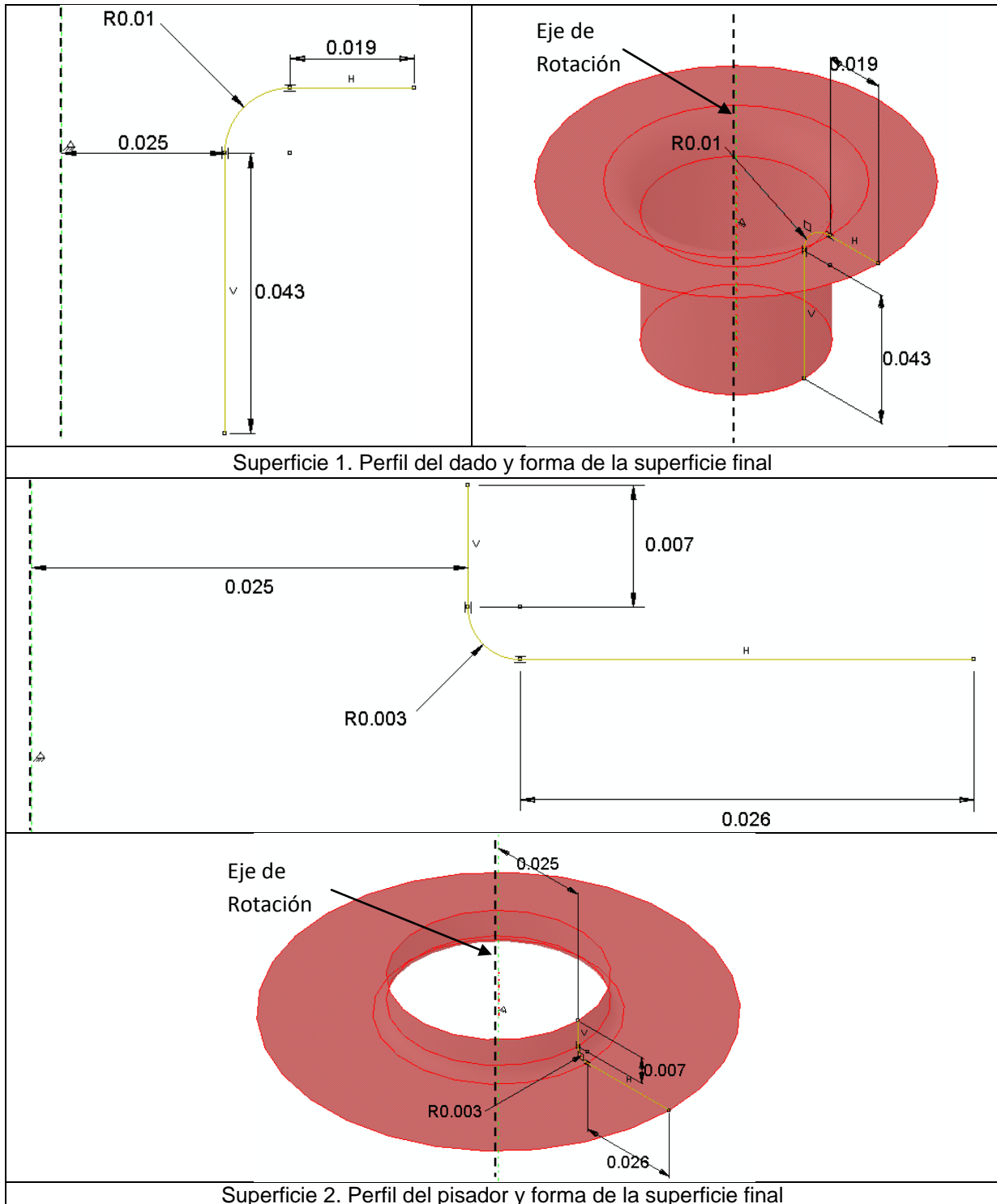
El primer paso para recrear el proceso de estampado profundo comienza en este módulo. La geometría de los componentes del ensayo experimental de Fukui se utilizan en esta parte; es decir, este módulo requiere que el usuario proporcione las dimensiones del punzón, lámina, sujetador y dado para que se genere un modelo geométrico de cada uno de los componentes.

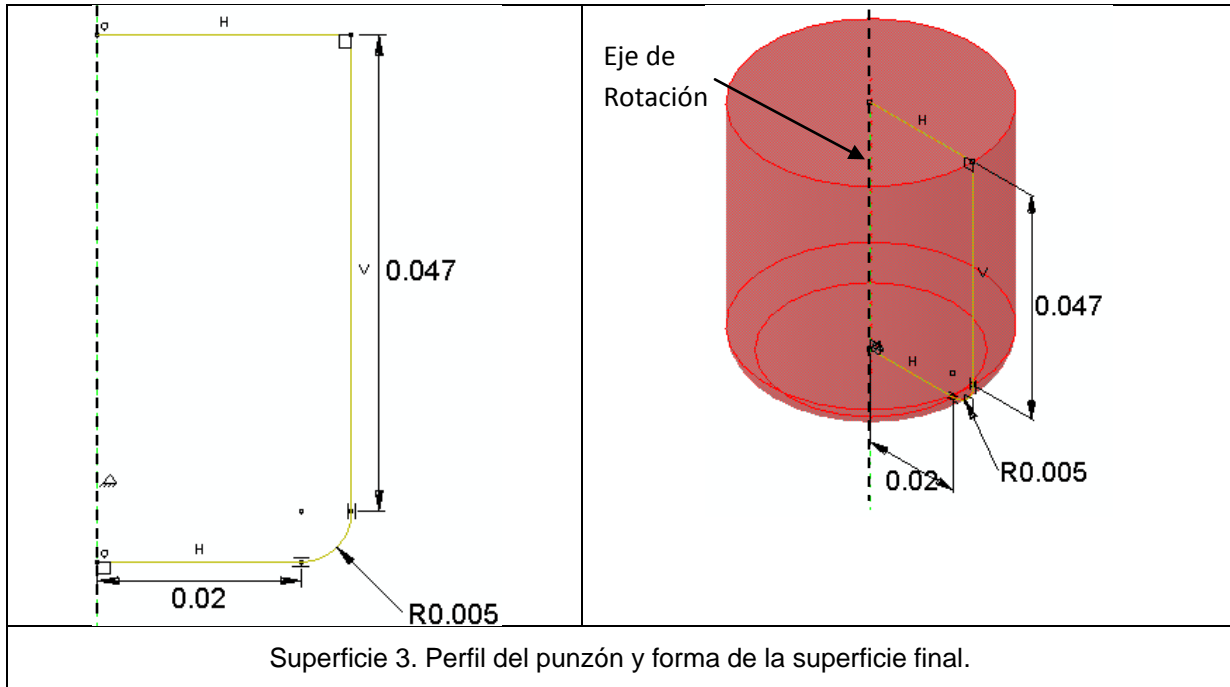
Durante el proceso de estampado profundo, es lógico pensar que todos los componentes del ensayo de Fukui se deforman. Por supuesto, el propósito principal del ensayo es que la lámina se deforme de manera permanente para que ocurra la formación de la copa. La realidad es que el diseño mecánico del punzón, dado y pisador se realiza con el fin de que se deformen únicamente en el rango elástico, de tal forma que la vida útil de operación en todos ellos sea lo más longeva posible. Una vez que existen deformaciones permanentes en los componentes mencionados, es necesario que sean reemplazados para seguir obteniendo resultados experimentales certeros. Además, la magnitud de la deformación elástica en dichos componentes es muy pequeña comparada con el porcentaje de deformación (tanto elástica como plástica) que se realiza en la lámina. Por lo tanto, es justificable que en el modelo se realice la siguiente simplificación: tanto el dado como el punzón y pisador son cuerpos modelados como entes que no presentan ningún tipo de deformación; es decir, superficies rígidas libres de movimiento cuya forma se conserva igual desde el comienzo de la simulación numérica hasta su finalización.

El programa Abaqus realiza una construcción analítica de la forma de la superficie rígida que se desee. Es decir, se dibuja un perfil o contorno de la parte para

después rotarlo alrededor de un eje de rotación. La tabla 2.1 muestra la geometría de las superficies rígidas y el perfil que se utiliza para la construcción del punzón, pisador y dado.

Tabla 2.1. Modelos de las partes que componen el ensayo de Fukui. Acotaciones en [m].





La construcción del modelo geométrico para la lámina a estampar se describe a continuación. De acuerdo a varias descripciones analíticas del estampado profundo [25], las propiedades del material utilizado en la lámina se pueden suponer con simetría rotacional, de tal forma que existe comportamiento isotrópico planar y anisotropía normal al plano de la lámina. Además, la medición experimental de la anisotropía con el parámetro de Lankford se realiza en un intervalo de 0 a 90° con respecto a la dirección de laminado debido a su simetría rotacional. Por lo tanto, las características de la lámina están completamente definidas por un cuarto de ésta. La figura 2.1 muestra el modelo geométrico del cuarto de lámina, cuya elaboración se realiza con la extrusión visual (o virtual) lineal de un perfil (a diferencia de las superficies rígidas, donde la extrusión virtual se realiza alrededor de un eje).

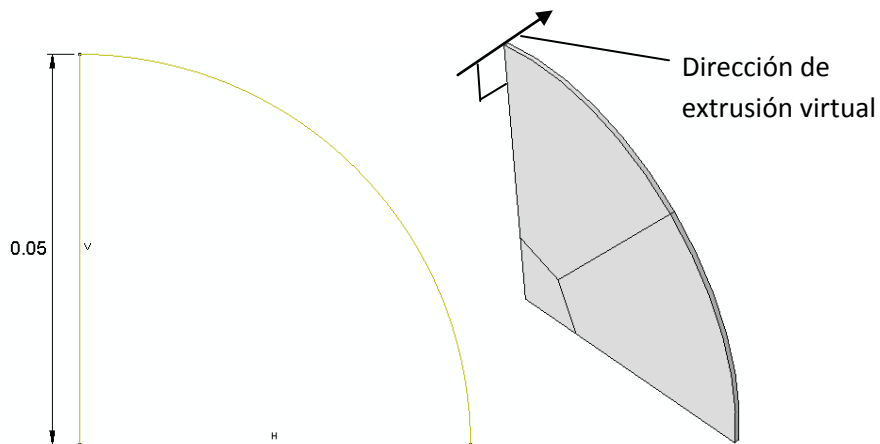


Fig. 2.1. Perfil de la lámina y forma final del sólido deformable. Acotaciones en [m].

La cantidad de extrusión visual que se realiza con el perfil de la lámina define el espesor de ésta, cuyo valor es de 0.87 [mm]. Así pues, el modelo de Abaqus CAE para la lámina queda definido como un sólido deformable, cuyo comportamiento mecánico es explicado con mayor detalle en el siguiente módulo. Además, las divisiones que se observan en la lámina 3D sirven como guía para dividirla en pequeños elementos finitos estructurados. Esto se explica con mayor detalle en el Módulo de malla.

## 2.2. Módulo de propiedades

Como se describe en la sección anterior, el único sólido deformable durante la simulación numérica es el modelo geométrico que representa al cuarto de lámina. Por lo tanto, deben de definirse las propiedades mecánicas para la lámina durante toda la simulación numérica. El material que se utiliza en esta tesis para la lámina son dos aleaciones de Aluminio de las series AA1100 y AA3103; las dos aleaciones son utilizadas ampliamente – además del estampado de láminas – en aplicaciones donde la conformabilidad y la resistencia a la corrosión son necesarias, y su límite de cedencia es bajo [26]. La tabla 2.2 muestra la composición de cada una de las aleaciones mencionadas.

Tabla 2.2. Composiciones típicas para las series de aluminios AA1100 y AA3103 [27]. Los datos mostrados están en % wt.

Elementos	AA1100	AA3103
Aluminio, Al	≥99.0%	≤96.3%
Cromo, Cr	X	≤0.10%
Berilio, Be	≤0.000800%	X
Hierro, Fe	X	≤0.70%
Cobre, Cu	0.050-0.20%	≤0.10%
Magnesio, Mg	X	≤0.30%
Manganeso, Mn	≤0.050%	0.90-1.50%
Silicio, Si	X	≤0.50%
Si+Fe	≤0.95%	X
Zinc, Zn	≤0.1%	≤0.20%
Otros componentes	≤0.15%	≤0.15%

Para la simulación numérica, las dos aleaciones de aluminio mencionadas se modelan como un medio elasto-plástico isotrópico, cuyo endurecimiento está definido por la ley de Swift. La parte elástica isotrópica de cada aleación se define como un sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, por lo que se requiere definir el módulo de Young ( $E$ ) y la relación de Poisson ( $\nu$ ) para cada aleación de



aluminio. Es decir, la matriz de rigidez queda definida por la ley de Hooke para comportamiento elástico isotrópico [28], representado en la ecuación (2.1).

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right] \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[ (1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk} \right]$$

Una vez alcanzado el límite de cedencia en cada aleación, el endurecimiento isotrópico en la zona plástica está descrito por la ley empírica de Swift [29].

$$\sigma = K(\varepsilon_0 + \varepsilon)^n \quad (2.2)$$

Donde  $K$ ,  $\varepsilon_0$  y  $n$  son constantes empíricas particulares para cada material. La curva esfuerzo–deformación que representa la ley de Swift posee una cantidad de deformación previa representada por la constante  $\varepsilon_0$ . Cuando la constante  $\varepsilon_0 = 0$ , se dice que el material ha sido recocido. El uso de la ley de Swift para el comportamiento plástico de las aleaciones es justificado puesto que es utilizado para definir de manera matemática la existencia de un esfuerzo de cedencia en el material. Es decir,  $\varepsilon_0$  representa un desfase de la curva esfuerzo-deformación, lo cual define el esfuerzo de cedencia al comienzo de la deformación plástica. La tabla 2.3 muestra el valor de las constantes para la ley de Swift que definen completamente el comportamiento elasto-plástico isotrópico de la lámina.

Tabla 2.3. Valores de las constantes de elasticidad y endurecimiento plástico isotrópico para las aleaciones AA1100 y AA3103.

Comportamiento	AA1100	AA3103
Elasticidad isotrópica		
• Módulo de Young, $E$ [GPa]	68.9	68.9
• Relación de Poisson, $\nu$ [1]	0.33	0.33
Ley de Swift		
• $K$ [MPa]	146.3	193.6
• $\varepsilon_0$ [1]	0.001	0.001
• $n$ [1]	0.258	0.240

En la figura 2.2 se muestran las curvas de endurecimiento que describe la ley de Swift para las dos aleaciones estudiadas. El cálculo de ellas se realizó en una hoja

de cálculo, con datos proporcionados para las deformaciones ( $\epsilon^p$ ) en el intervalo  $[0,0.15]$ , con incrementos de 0.0001. Por lo tanto, en la hoja de cálculo la variable independiente es  $\epsilon^p$  y la variable dependiente es  $\sigma$ . De esta forma, el esfuerzo de cedencia de cada aleación está determinado de manera tabular como una función de la deformación plástica y si se requiere, puede definirse también con respecto a otras variables según sea el caso. El programa Abaqus CAE realiza una interpolación lineal de esta tabla [30] para determinar el esfuerzo de cedencia para un estado dado; en caso de que las deformaciones plásticas en la simulación sean superiores al último valor de deformación de la tabla, el último esfuerzo de cedencia permanece constante.

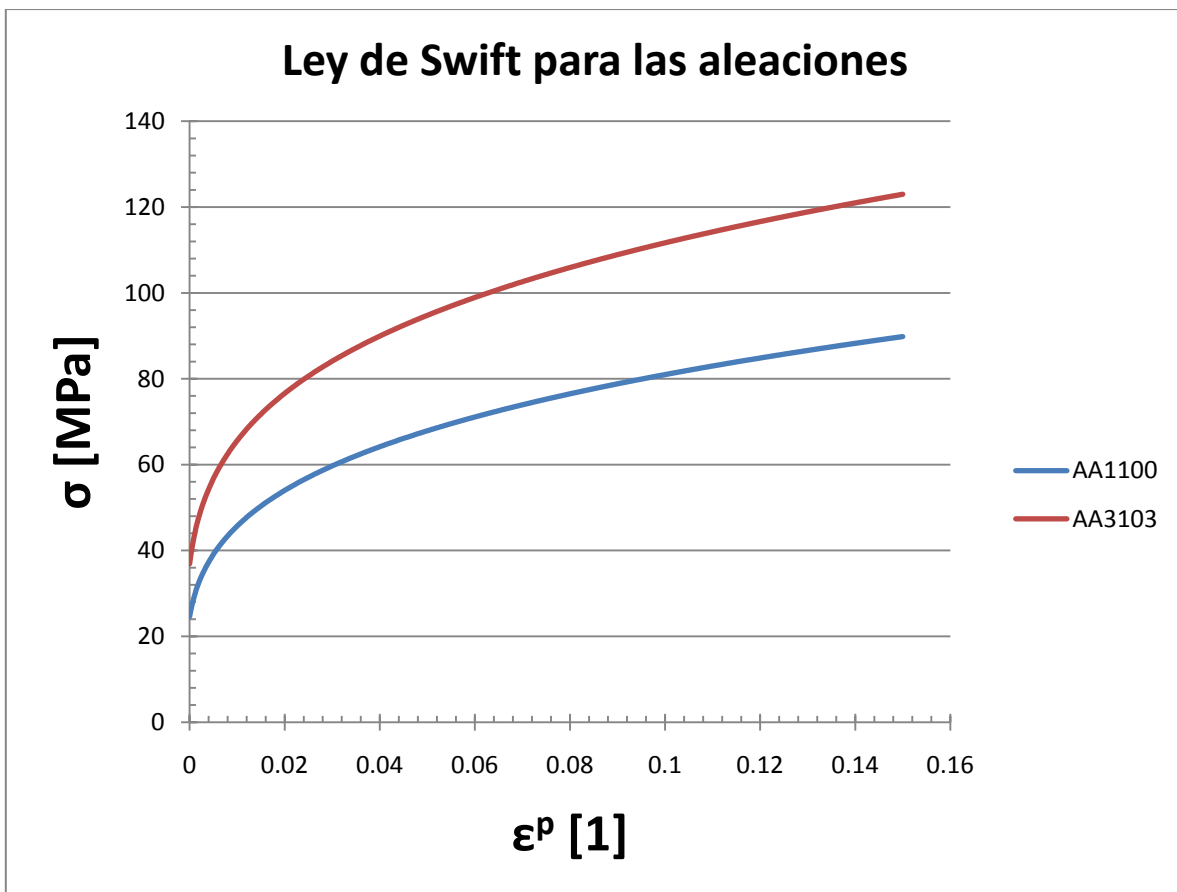


Fig 2.2. Gráficas para la ley de Swift de las aleaciones AA1100 y AA3103.

Finalmente, es necesario definir la densidad de cada aleación de aluminio para poder realizar la simulación numérica. Como se explica con mayor detalle en el Módulo de paso, es necesario asignar el valor de densidad al material de las aleaciones de aluminio para que el método de la simulación numérica se pueda

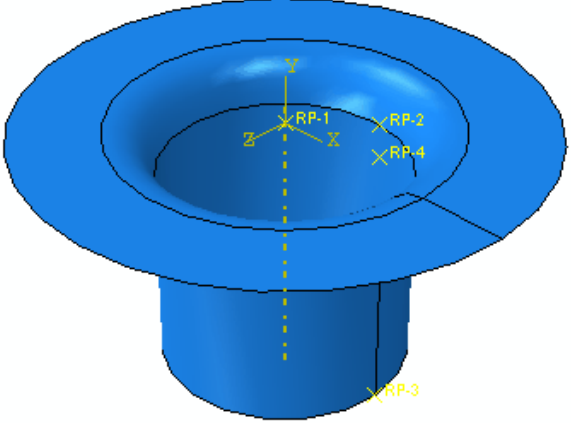
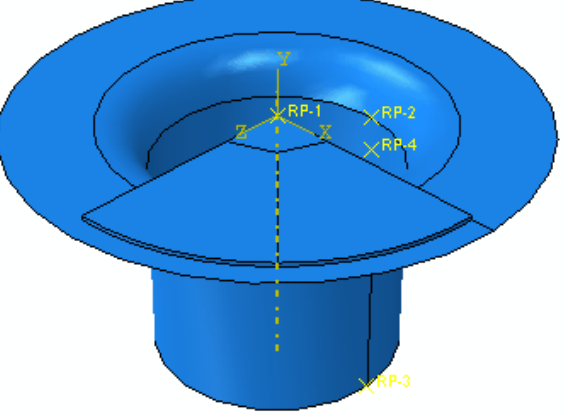
llevar a cabo. La tabla 2.4 muestra el valor de densidad para cada aleación de la serie AA.

Tabla 2.4. Valor de densidad para las aleaciones de aluminio.

	AA1100	AA3103
Densidad, $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2710	2710

### 2.3. Módulo de ensamble

La función de este módulo es formar el ensamble final con las piezas formadas en el módulo de parte. Es decir, es en esta parte donde se recrea un ensamble que represente al ensayo de Fukui, por lo que es necesario colocar a los modelos del pisador, dado, punzón y lámina en la posición inicial del ensayo experimental. La figura 2.3 muestra el procedimiento para formar el ensamble final.

Pasos de ensamble	Partes del ensamble
El dado es la primera parte del ensamble.	
El cuarto de lámina se coloca por arriba del dado, de tal forma que coincida el vértice del cuarto de lámina con el centro del dado.	

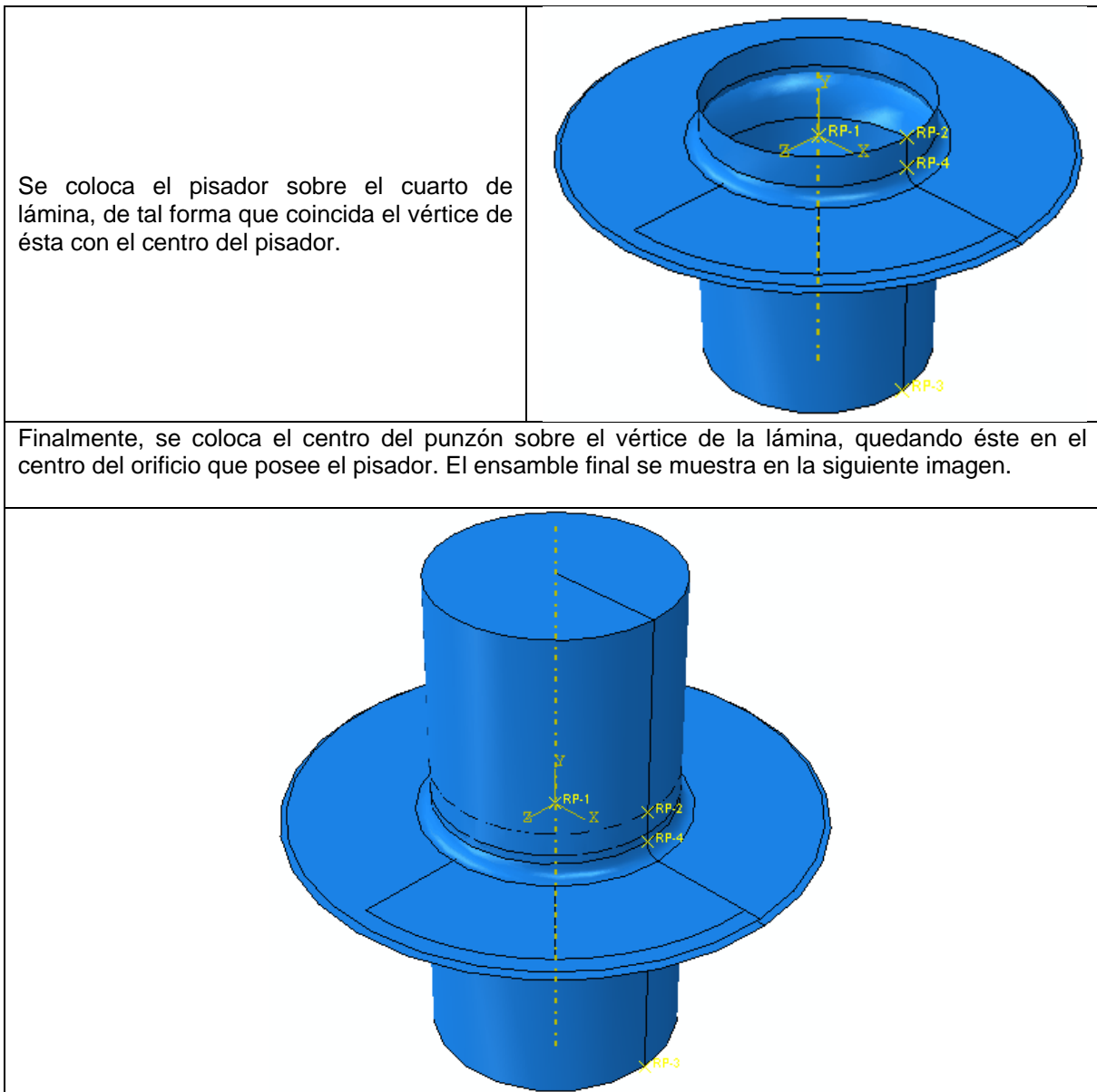


Fig. 2.3. Pasos para formar el ensamble del ensayo de Fukui.

Finalmente, a cada superficie rígida se le asigna un punto de referencia de tal forma que todo el movimiento de cada cuerpo rígido está asociado a su respectivo punto. De esta forma, se pueden establecer los grados de libertad que posee cada superficie rígida si se limita el movimiento de sus puntos de referencia. Más adelante se explican las condiciones de frontera que se asignan a cada uno de estos puntos.

## 2.4. Módulo de paso

El tipo de solución numérica que se utiliza en la tesis es asignada en este módulo. El análisis dinámico explícito – también llamado método dinámico explícito – utiliza el concepto teórico de cómo las fuerzas (o desplazamientos específicos) que se aplican en un modelo numérico se propagan a través de los nodos que forman parte de los elementos finitos del mismo; dicho de otra forma, una vez dividido el modelo en elementos finitos, cada nodo que compone a cada uno de ellos está sujeto a un campo de desplazamientos inducido por las condiciones de frontera. Para un análisis de esfuerzos y deformaciones es fundamental calcular el campo de desplazamientos de cada uno de los nodos del modelo puesto que es con esta variable que se calculan los esfuerzos y deformaciones.

### 2.4.1. Introducción al análisis dinámico explícito

El análisis dinámico explícito consiste en una propagación de las fuerzas dinámicas que se aplican al modelo (en inglés, *stress wave propagation* [31]); es decir, una propagación de los esfuerzos a través del modelo dividido en elementos finitos. Para empezar a entender mejor cómo funciona este análisis, se aplica el mismo a una barra de sección transversal  $A$ , sujeta a una compresión  $P$  en uno de sus extremos, mientras que el extremo opuesto se encuentra empotrado. La división de esta barra se realiza mediante tres elementos finitos lineales, cada uno de ellos de longitud  $l$  y compuestos por dos nodos. La figura 2.4 muestra el modelo de elementos finitos para la barra mencionada, así como las condiciones de frontera (compresión y empotramiento) a las que se encuentra sujeta.

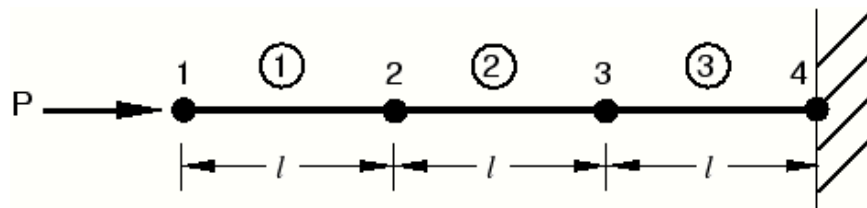
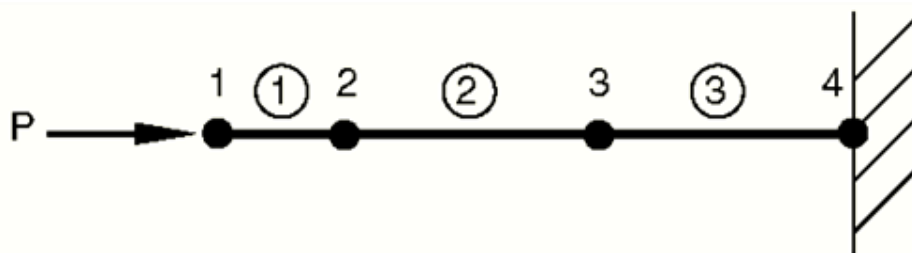


Fig. 2.4. Modelo de elementos finitos para una barra de sección  $A$ . El número de cada elemento se encuentra encerrado en un círculo.

En el primer incremento de tiempo, el nodo 1 posee una aceleración  $\ddot{u}_1$  como resultado de la fuerza concentrada  $P$  que se aplica sobre él. A su vez, esta aceleración se integra en el incremento de tiempo analizado para calcular la velocidad  $\dot{u}_1$  correspondiente al nodo 1. Entonces, con el valor de  $\dot{u}_1$  se calcula la

velocidad de deformación para el elemento ①,  $\dot{\epsilon}_{el1}$ , puesto que se conoce la longitud  $l$  de los elementos. Una vez que se integra el resultado del valor de  $\dot{\epsilon}_{el1}$  en el incremento de tiempo respectivo, se obtiene el incremento de deformación para el elemento ①,  $\Delta\epsilon_{el1}$ . La deformación total en el elemento ①,  $\epsilon_{el1}$ , es la suma de la deformación inicial,  $\epsilon_0$ , y del incremento de deformación respectivo,  $\Delta\epsilon_{el1}$ ; para este incremento de tiempo,  $\epsilon_0$  es nulo puesto que estaba en reposo. En este momento se conoce la deformación total del elemento ①, por lo que se aplica la ecuación constitutiva del material que se asigna a la barra. Si suponemos un sólido elástico lineal, entonces el esfuerzo en la barra es  $\sigma_{el1} = E\epsilon_{el1}$ , donde  $E$  es el módulo de Young. Cabe resaltar que los nodos 2 y 3 no se mueven puesto que no existen fuerzas que se apliquen sobre ellos. La figura 2.5 muestra la deformación de la barra para el primer incremento de tiempo, además del esquema del proceso anterior para determinar la deformación en el elemento ①.

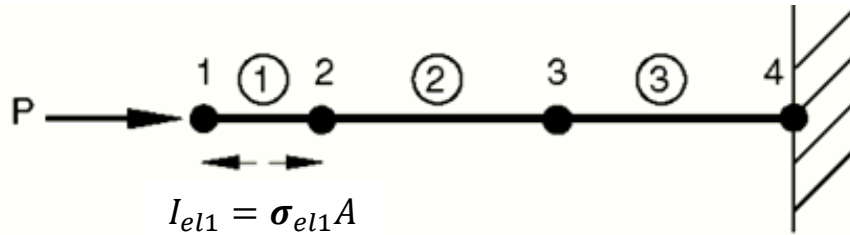


$$\ddot{u}_1 = \frac{P}{M_1} \rightarrow \dot{u}_1 = \int \ddot{u}_1 dt \rightarrow \dot{\epsilon}_{el1} = \frac{-\dot{u}_1}{l} \rightarrow \Delta\epsilon_{el1} = \int \dot{\epsilon}_{el1} dt$$

$$\rightarrow \epsilon_{el1} = \epsilon_0 + \Delta\epsilon_{el1} \rightarrow \sigma_{el1} = E\epsilon_{el1}$$

Fig. 2.5. Barra deformada para el primer incremento de tiempo. Se muestra el proceso para determinar  $\epsilon_{el1}$  y  $\sigma_{el1}$ .  $M_1$  representa la masa del elemento 1.

Para el segundo incremento de tiempo, existen fuerzas internas asociadas al elemento ① que se oponen a la fuerza  $P$  y que se aplican en el nodo 1. Dichas fuerzas internas, por la ley de la acción y la reacción, también se aplican en el nodo 2, que pertenece al elemento ②. Es decir, se requiere de un balance de fuerzas dinámicas tanto en el nodo 1 como en el nodo 2. El valor de las fuerzas internas ( $I$ ) está asociado con el esfuerzo calculado en el primer incremento de tiempo. Dicho de otra forma,  $I_{el1} = \sigma_{el1}A$ . La figura 2.6 muestra la deformación en la barra para el segundo incremento de tiempo, así como el proceso para el cálculo de la deformación en el elemento ②.



$$\ddot{u}_1 = \frac{P - I_{el1}}{M_1} \rightarrow \dot{u}_1 = \dot{u}_1^{ant} + \int \ddot{u}_1 dt$$

$$\ddot{u}_2 = \frac{I_{el1}}{M_2} \rightarrow \dot{u}_2 = \int \ddot{u}_2 dt$$

$$\dot{\epsilon}_{el1} = \frac{\dot{u}_2 - \dot{u}_1}{l} \rightarrow \Delta \epsilon_{el1} = \int \dot{\epsilon}_{el1} dt \rightarrow \epsilon_{el1} = \epsilon_{el1}^{ant} + \Delta \epsilon_{el1} \rightarrow \sigma_{el1} = E \epsilon_{el1}$$

Fig. 2.6. Segundo incremento de tiempo para la barra. En este momento, se aplica una fuerza interna  $I_{el1}$  en el nodo 1 y en el nodo 2. Por lo tanto, ambos nodos se encuentran sujetos a diferentes aceleraciones ( $\ddot{u}_1$  y  $\ddot{u}_2$ ).

Como se puede observar en la figura 2.6, las aceleraciones  $\ddot{u}_1$  y  $\ddot{u}_2$  producen dos diferentes velocidades de desplazamiento  $\dot{u}_1$  y  $\dot{u}_2$  en los nodos 1 y 2 respectivamente. Sin embargo, para este incremento es necesario agregar la velocidad de desplazamiento del nodo 1 que ocurrió en el incremento de tiempo anterior, la cual está representado por  $\dot{u}_1^{ant}$ . Esto quiere decir que el nodo 1 posee velocidad al comienzo del segundo incremento de tiempo. De tal forma que para este segundo incremento, la nueva velocidad de deformación ( $\dot{\epsilon}_{el1}$ ) se calcula con la diferencia de velocidades de desplazamiento y la longitud  $l$  del elemento. Finalmente, el proceso de cálculo continúa como en el primer incremento hasta llegar al cálculo del esfuerzo en el elemento ①.

En el caso de un tercer incremento de tiempo, los nodos 1, 2 y 3 de la barra están sujetos a las fuerzas internas de la barra ( $I_{el1}, I_{el2}$ ) así como a la fuerza concentrada  $P$ , según corresponda. El proceso continúa hasta que el análisis alcance el tiempo total deseado. La figura 2.7 muestra el tercer incremento de tiempo.

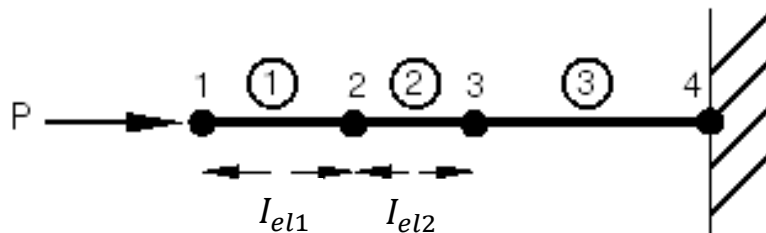


Fig. 2.7. Tercer incremento de tiempo para la barra. Los nodos 1, 2 y 3 se encuentran sujetos a fuerzas dinámicas.

## 2.4.2. El método dinámico explícito

Un análisis dinámico explícito realiza un gran número de incrementos de tiempo de manera eficiente. El programa utiliza una regla (también operador) de integración de tiempo explícita; la palabra explícita se refiere a que la regla necesita los valores previos calculados para poder seguir realizando el cálculo del siguiente valor. Cada incremento de tiempo requiere menos tiempo de cálculo debido a que no se requiere un sistema de ecuaciones o matriz acoplada del sistema para encontrar la solución. También, esta regla de integración satisface el equilibrio dinámico de cada nodo para el primer incremento de tiempo  $t$ . Por lo tanto, las aceleraciones calculadas al tiempo  $t$  se utilizan para calcular las velocidades al tiempo  $t + \Delta t/2$  y finalmente los desplazamientos de los nodos se calculan para el tiempo  $t + \Delta t$ .

El beneficio de cálculo que se logra una vez que se aplica el método dinámico explícito a un modelo de elementos finitos consiste en implementar la regla de integración explícita con el uso de matrices diagonales de masa agrupadas (en inglés, *lumped matrix*). Las ecuaciones de movimiento para el modelo son integradas con el uso de la ya mencionada regla de integración que se muestra en la ecuación (2.3).

$$\dot{\mathbf{u}}^{(i+\frac{1}{2})} = \dot{\mathbf{u}}^{(i-\frac{1}{2})} + \frac{\Delta t^{(i+1)} + \Delta t^{(i)}}{2} \ddot{\mathbf{u}}^{(i)} \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{u}^{(i+1)} = \mathbf{u}^{(i)} + \Delta t^{(i+1)} \dot{\mathbf{u}}^{(i+\frac{1}{2})} \quad (2.3b)$$

Donde  $\dot{\mathbf{u}}$  es la velocidad y  $\ddot{\mathbf{u}}$  es la aceleración. El superíndice  $(i)$  se refiere al incremento de número actual, y los superíndices  $(i - 1/2)$  e  $(i + 1/2)$  se refieren a los incrementos medios. Como se había mencionado, el estado cinético del modelo se va calculando a partir de los valores de  $\dot{\mathbf{u}}^{(i-\frac{1}{2})}$  y  $\ddot{\mathbf{u}}^{(i)}$  que se conocen del incremento de tiempo anterior. Al utilizar matrices diagonales de masa agrupadas, el proceso de cálculo se vuelve eficiente puesto que la matriz inversa se calcula fácilmente y es la que se utiliza para calcular las aceleraciones. La ecuación (2.4) muestra la propiedad de las matrices diagonales.

$$\mathbf{M} = M_{ij} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{M}^{-1} = M_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix} \quad (2.4)$$



Por lo que el cálculo de las aceleraciones queda definido como se muestra en la ecuación (2.5).

$$\ddot{\mathbf{u}}^{(i)} = \mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{F}^{(i)} - \mathbf{I}^{(i)}) \quad (2.5)$$

Donde  $\mathbf{M}$  es la matriz diagonal de masa agrupada,  $\mathbf{F}$  es el vector de fuerza aplicado, y finalmente  $\mathbf{I}$  es el vector de fuerza interna. Este procedimiento explícito no requiere de iteraciones y tampoco requiere resolver una matriz acoplada o sistema de ecuaciones.

La regla de integración explícita requiere que los nodos del modelo numérico tengan asociada una masa – definida por la densidad del material – o inercia para todos sus grados de libertad, a menos que otras condiciones de frontera (por ejemplo, condiciones de desplazamiento) se apliquen sobre ellos. Dicho de otra forma, un nodo sin masa asignada puede existir solamente si todos sus grados de libertad en traslación están restringidos; también, un nodo con momento de inercia definido existe siempre y cuando sus grados de libertad rotacionales no presenten ninguna restricción. Para el caso de una superficie rígida (pisador, dado y punzón) es necesario asignar una masa o inercia a su punto de referencia asignado; de lo contrario, es necesario restringir el movimiento del punto de referencia en traslación o rotación según sea el caso.

### 2.4.3. Estabilidad

La estabilidad de la regla de integración que se muestra en la ecuación (2.3) durante el cálculo de los desplazamientos de los nodos está definida por el valor máximo de la frecuencia del sistema. La ecuación (2.6) muestra lo anterior.

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{MAX}} \quad (2.6)$$

Para controlar las grandes frecuencias en las oscilaciones, es necesario introducir una cantidad de amortiguamiento al modelo.

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{MAX}} \left( \sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right) \quad (2.7)$$

Donde  $\xi$  es la fracción de amortiguamiento crítico para el caso donde se tiene la mayor frecuencia. Una aproximación del límite de estabilidad se define como se muestra en la ecuación (2.8).

$$\Delta t \approx \frac{L_{min}}{c_d} \quad (2.8)$$

Donde  $L_{min}$  es la longitud más pequeña del elemento finito y  $c_d$  es la velocidad instantánea efectiva de dilatación del material, que se va propagando a través de todo el modelo de elementos finitos (en inglés, *current effective dilatational wave speed of the material*). La velocidad  $c_d$  se calcula por medio de la respuesta hipoeelástica efectiva del material, definida a partir del comportamiento constitutivo que se asigna al material en el módulo de propiedades. Esta respuesta hipoeelástica se define con las constantes efectivas de Lamé ( $\hat{\lambda}, \hat{\mu}$ ) que se determinan de la siguiente manera: se define a  $\Delta p$  como el incremento del esfuerzo promedio equivalente (donde  $p = -tr\sigma/3$ ),  $\Delta S$  como el incremento del tensor desviador de esfuerzos,  $\Delta \varepsilon_{vol}$  como el incremento en la deformación volumétrica y  $\Delta e$  como el incremento del tensor desviador de deformaciones. La ecuación esfuerzo-deformación para el comportamiento hipoeelástico queda definida como se muestra en la ecuación (2.9).

$$\Delta p = -\hat{K} \Delta \varepsilon_{vol} \quad (2.9a)$$

$$\Delta S = 2\hat{\mu} \Delta e \quad (2.9b)$$

Donde  $\hat{K}$  es el módulo efectivo de la ecuación hipoeelástica. Este módulo, junto con las constantes  $\hat{\lambda}$  y  $\hat{\mu}$ , se determinan como se muestra en la ecuación (2.10).

$$\hat{K} = \frac{-\Delta p}{\Delta \varepsilon_{vol}} \quad (2.10a)$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2} \frac{\Delta S : \Delta e}{\Delta e : \Delta e} \quad (2.10b)$$

$$\hat{\lambda} = \hat{K} - \frac{2}{3} \hat{\mu} \quad (2.10c)$$

Si los incrementos en la deformación son insignificantes, las ecuaciones (2.9) y (2.10) proporcionan resultados numéricos erróneos. Cuando esto sucede, el programa Abaqus establece a las constantes de Lamé iniciales ( $\lambda_0, \mu_0$ , que en este

caso se definen a partir del módulo de Young  $E$  y la relación de Poisson  $\nu$ ) como las constantes hipoelásticas efectivas. En el caso de que el incremento de deformación volumétrica sea significativo y el incremento del tensor desviador de esfuerzos no lo sea, el módulo efectivo  $\hat{\mu}$  se calcula como indica la ecuación (2.11).

$$2\hat{\mu} = \frac{1}{2} [3(\lambda_0 + 2\mu_0) - 3\hat{K}] \quad (2.11)$$

La constante hipoelástica de Lamé que calcula la ecuación (2.11) representa la rigidez del elemento finito y determina la velocidad instantánea efectiva de dilatación, como se expresa en la ecuación (2.12). Para una mayor información del método, se recomienda revisar las referencias [32] y [33].

$$c_d = \sqrt{\frac{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}{\rho}} \quad (2.12)$$

#### 2.4.4. Aceleración del tiempo de cálculo

El incremento de tiempo involucrado en una simulación que utiliza la regla de integración explícita es proporcional al periodo que dura el evento simulado, para una malla de elementos finitos específica. Si se ignora amortiguamiento en el modelo, el incremento de tiempo se define tomando el valor mínimo de la ecuación (2.8) para todos los elementos finitos de la malla. Esto quiere decir que el tiempo de simulación es directamente proporcional con el número de incrementos de tiempo que se realicen. Para un análisis numérico cuasi-estático, es importante conocer que existen opciones que ofrece el programa Abaqus para acelerar el proceso de cálculo e invertir menos tiempo de simulación. La ecuación (2.13) muestra la relación entre el número de incrementos de tiempo ( $n$ ) con la duración del tiempo de simulación a realizar ( $T$ ).

$$n \approx T \max \left( \frac{1}{L_e} \sqrt{\frac{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}{\rho}} \right) \quad (2.13)$$

Donde  $L_e$  define la longitud característica del elemento finito. El número de incrementos de tiempo ( $n$ ) realizados en una simulación se puede reducir de manera “artificial” si se cambia manualmente el valor para el incremento de

tiempo, una vez que se conoce su valor cuando el programa Abaqus realiza su cálculo de forma automática sin acelerar el proceso. Al hacer esto, se introducen dos tipos de errores numéricos: si se eleva en demasía la rapidez de cálculo, se introducen de manera numérica errores por fuerzas inerciales los cuales provocan que la respuesta física de la simulación se vea afectada. Para evitar que las fuerzas inerciales “artificiales” sean contraproducentes para la respuesta del modelo numérico, es necesario que este incremento de tiempo no se eleve en demasía. El segundo error artificial que se introduce se presenta cuando existen en el modelo numérico parámetros dependientes del tiempo (por ejemplo, el comportamiento del material utilizado); en este caso, el incremento de tiempo no debería cambiarse y lo mejor es utilizar el incremento de tiempo calculado sin aceleración del proceso.

Si se incrementa de manera artificial la densidad del material ( $\rho$ ) en la ecuación (2.13), con un factor  $f^2$  por ejemplo, el número de incrementos  $n$  se reduce con un factor de  $n/f$ , ya que el tiempo del periodo  $T$  también se reduce con un factor  $T/f$ . Este proceso de cálculo se denomina aceleración de cálculo por cambio artificial de la densidad (en inglés, *mass scaling factor*). El cambio artificial de la densidad tiene el mismo efecto sobre las fuerzas inerciales que produce el cambio manual del incremento de tiempo. Sin embargo, la ventaja de utilizar esta aceleración de cálculo se debe a que no realiza ningún cambio en el incremento de tiempo que se calcula, por lo que es posible utilizarse en simulación de problemas donde existen parámetros que dependen del tiempo.

## 2.5. Módulo de interacciones

Es necesario definir en el modelo la cantidad de masa que define a una superficie rígida, como se ha mencionado anteriormente. En esta parte también se definen los contactos superficiales a los que se encuentra sujeta la lámina. Además, se reportan los valores utilizados para definir la fricción entre los contactos pisador/lámina, dado/lámina y punzón/lámina, así como la masa asignada al pisador. Abaqus CAE no reconoce ningún tipo de contacto mecánico entre partes geométricas definidas a menos que se defina el contacto en este módulo; la simple proximidad entre dos superficies en un ensamble no es un hecho suficiente para indicar que existe un tipo de interacción entre ellas.

### 2.5.1. Asignación de inercia al pisador

Como se describe en el capítulo uno, el control de la fuerza que ejerce el pisador sobre la lámina es esencial para evitar defectos tecnológicos. Por lo tanto, dentro del ambiente de Abaqus CAE es necesario definir la cantidad de masa que posee la superficie rígida asociada al pisador, para que el programa pueda realizar el cálculo de su aceleración en cada incremento de tiempo. Sin embargo, una vez formada la copa en el modelo de elementos finitos, el pisador continúa presionando con la fuerza que se establece en el módulo de condiciones de frontera. Por lo tanto el contacto entre el pisador y la copa deja de existir, provocando que el pisador continúe acelerándose con la fuerza aplicada sobre él. Para minimizar este efecto, se ha establecido que el valor para la masa del pisador sea de 0.1 [g], logrando que el pisador no recorra gran distancia y que su efecto en la medición de las energías del modelo sea mínimo.

### 2.5.2. Asignación de fricción entre las superficies de contacto

Haciendo referencia a la sección 1.7 del capítulo 1, se establece que para el modelo de plasticidad isotrópica de esta tesis se define un contacto superficial entre las superficies comunes dado/lámina, pisador/lámina y punzón/lámina. En todos estos contactos, la fricción se modela como seca y de acuerdo al modelo de Coulomb, con un coeficiente de fricción constante ( $\mu$ ) de 0.15.

## 2.6. Módulo de condiciones de frontera

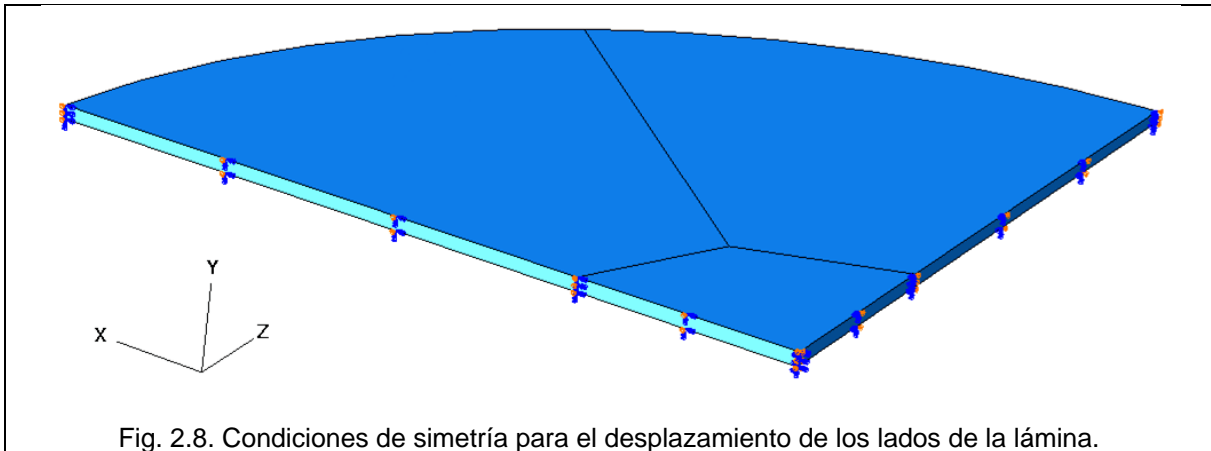
En esta parte se definen las condiciones de frontera a las que se encuentra sujeto todo el modelo isotrópico de estampado profundo. Las condiciones de frontera son parámetros dependientes del tipo de paso que se define en la sección 2.4, de tal forma que toda la evolución de cada una de las condiciones de frontera asignadas al modelo se mantiene constante durante todo el proceso de simulación, sin importar el incremento de tiempo calculado.

Como se menciona en el módulo de ensamble, los puntos de referencia que representan a las superficies analíticamente rígidas definen completamente el movimiento de ellas. Por lo tanto, la asignación de condiciones de frontera para estas superficies se asigna en sus puntos de referencia respectivos. La tabla 2.5

muestra las condiciones de frontera para las piezas que representan a los elementos del estampado profundo: dado, pisador, punzón y lámina.

Tabla 2.5. Condiciones de frontera para las piezas modeladas del estampado profundo.

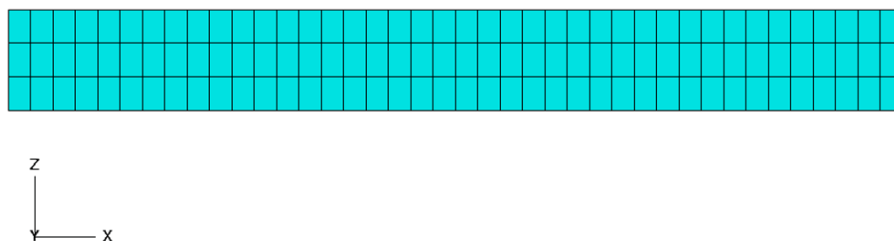
Piezas del estampado profundo	Condiciones de frontera
i. Punzón	<p>Velocidad de 0.05 m/s, en la dirección Y negativa. Ver figura 2.8.</p> <p>Su movimiento solamente es de traslación en la dirección Y negativa; es decir <math>u_x = u_z = u_{rx} = u_{ry} = u_{rz} = 0</math>, donde <math>u_r</math> representa el desplazamiento rotacional y <math>u</math> al desplazamiento traslacional. Ver figura 2.8.</p>
ii. Pisador. El valor asignado representa la cuarta parte del promedio de la fuerza que aplica el troquel durante el ensayo de Fukui.	<p>Se aplica una fuerza de 1250 N, presionando al cuarto de lámina.</p> <p>El movimiento está restringido igual que para el punzón, <math>u_x = u_z = u_{rx} = u_{ry} = u_{rz} = 0</math></p>
iii. Dado	<p>El punto de referencia se encuentra en condición de empotramiento, es decir <math>u_x = u_y = u_z = u_{rx} = u_{ry} = u_{rz} = 0</math></p>
iv. Cuarto de lámina	<p>El movimiento de los nodos que forman los lados del cuarto de lámina posee simetría con respecto a los ejes X y Z. Es decir, <math>u_x = u_{ry} = u_{rz} = 0</math> para el eje X; mientras que para el eje Z, <math>u_z = u_{rx} = u_{ry} = 0</math> es la condición de simetría necesaria. La figura 2.8 muestra tales condiciones.</p>



## 2.7. Módulo de mallado

En esta parte del modelo, es necesario definir la malla de elementos finitos que divide todo el cuarto de lámina. Las piezas restantes del estampado profundo no requieren de un mallado puesto que no se deforman durante la simulación numérica.

Los elementos finitos que se utilizan para dividir a la lámina son paralelepípedos estructurados lineales, de integración reducida y con control para la disminución del efecto hourglassing. Más adelante se explica con mayor detalle los últimos dos aspectos mencionados. El espesor del cuarto de lámina se divide mediante tres elementos finitos, como se muestra en la figura 2.9.



Como el espesor de la lámina es de 0.87 [mm], el tamaño de cada elemento finito calculado es de 0.29 [mm]. Para calcular las dimensiones restantes de los elementos finitos, es necesario introducir el concepto de razón de aspecto ( $RA$ ). Dicha razón de aspecto se define como la longitud más grande a la longitud más corta del elemento finito. Mientras el valor de dicha razón conserve al elemento finito más compacto y regular en su forma (es decir, que la longitud grande sea

parecida a la longitud pequeña), esto conlleva a que se obtengan mejores resultados numéricos [34]. La ecuación 2.14 muestra la definición de la razón de aspecto ( $RA$ ).

$$RA = \frac{LG}{LP} \quad (2.14)$$

Donde  $LG$  y  $LP$  representan la longitud más grande y más pequeña del elemento finito, respectivamente. Por lo tanto, para definir las dos dimensiones restantes de los elementos finitos, se considera que ambas son del mismo tamaño, y que los elementos finitos poseen una razón de aspecto de 1.5. Además, las divisiones que se hicieron en el espesor definen a la longitud más pequeña en los elementos finitos. Entonces, las dimensiones finales se calculan como se muestra en la ecuación (2.15).

$$LG = RA \cdot LP = 1.5 \cdot 0.29[mm] = 0.435[mm] \quad (2.15)$$

Por lo que las dimensiones calculadas de cada paralelepípedo estructurado son de 0.29 [mm] para el espesor y 0.435 [mm] para los lados restantes. Para definir estos valores en Abaqus CAE, se emplean las divisiones en la lámina formadas en el módulo de parte, definiendo que el programa divida cada una de ellas en partes iguales de tamaño 0.435[mm]. Con esta técnica de división por elementos finitos, la relación de aspecto promedio en la lámina es de 1.83, y los elementos finitos no sobrepasan el valor de 2.88. La figura 2.10 muestra el mallado final, con un total de 30, 423 elementos creados.

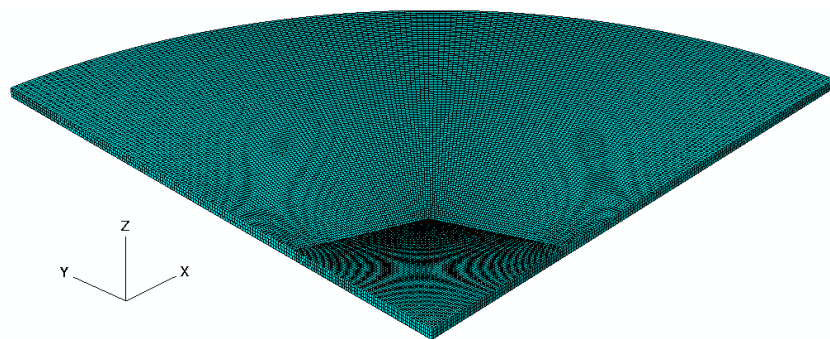


Fig. 2.10. Mallado final del cuarto de lámina.



## 2.8. Verificación de los resultados numéricos

La eficiencia en la precisión del cálculo en los procesos numéricos que realiza Abaqus permite saber si los resultados obtenidos de sus simulaciones muestran una congruencia. Esta parte de la simulación numérica requiere de un alto dominio en el área, por lo que en esta tesis se utiliza únicamente el balance de energías en la simulación, así como la cuantificación del efecto hourglassing producido durante la simulación numérica. Ambos criterios están altamente recomendados por los desarrolladores de Abaqus.

### 2.8.1. Balance de energía

La velocidad a la que se lleva a cabo un proceso de estampado de láminas generalmente es alta (como en el caso de la producción de latas de aluminio), lo cual define que éste es un proceso dinámico; sin embargo, la energía de las cargas dinámicas impuestas durante un proceso de estampado profundo es despreciable si se compara con la energía de deformación impuesta en la lámina. Por lo tanto, para simplificar la simulación numérica de este tipo de procesos es necesario considerar que el análisis realizado pasa a través de una secuencia de estados muy cercanos al equilibrio con el fin de reducir el efecto de las fuerzas inerciales asociadas a él. A este tipo de análisis numéricos se les llama cuasi-estáticos, y su análisis se realiza con la misma regla de integración explícita empleada durante un análisis dinámico explícito; la razón que justifica lo anterior se debe únicamente a la eficiencia de cálculo que ofrece la regla de integración explícita. Por lo tanto, es necesario realizar un balance de energías en Abaqus para el cálculo numérico, definido como se muestra en la ecuación (2.16).

$$E_I + E_V + E_{EC} + E_{DF} - E_W = E_{TOT} = \text{constante} \quad (2.16)$$

Donde  $E_I$  es la energía interna (tanto por deformación elástica como plástica),  $E_V$  es la energía absorbida por disipación viscosa,  $E_{EC}$  es la energía cinética,  $E_{DF}$  es la energía absorbida por disipación de la fricción,  $E_W$  es el trabajo realizado por fuerzas externas y  $E_{TOT}$  es la energía total del modelo.

Este cálculo de la energía [35] en el modelo en Abaqus es muy importante para la verificación de precisión en la solución de un análisis dinámico explícito y está altamente recomendado por los expertos en programación numérica de Abaqus. En general, la energía total (ETOTAL en Abaqus) debería ser una constante o bien

los valores deberían estar muy cercanos a una constante; las energías “artificiales” que se utilizan para acelerar el tiempo de cálculo, como la energía de deformación artificial (ALLAE en Abaqus), la disipación por amortiguamiento (ALLVD en Abaqus) y el trabajo por cambio artificial de la densidad (ALLMW en Abaqus), deberían ser despreciables comparados con las energías reales tales como la energía de deformación, la energía cinética, la energía disipada por fricción y el trabajo que realizan fuerzas externas sobre el modelo (ALLIE, ALLKE, ALLFD y ALLWK respectivamente, en Abaqus).

Para análisis numéricos cuasi-estáticos el valor de la energía cinética (ALLKE) no debería exceder una fracción pequeña de los valores asociados a la energía de deformación (ALLIE). Es una buena costumbre que se calcule también a las variables asociadas con el trabajo producido por fricción y contacto de superficies (ALLCW y ALLPW respectivamente, en Abaqus) cuando están presentes en el modelo y requieren analizarse (como en vigas y uniones). Los valores de estas energías deberían ser cercanos a cero.

### 2.8.2. Efecto hourglassing y efecto locking

En general hoy en día la implementación numérica de los procesos de manufactura presenta ciertos problemas relacionados con la definición de los elementos utilizados para dividir a la región de estudio. Es decir, la programación lineal que se utiliza para integrar sobre los puntos de cada elemento afecta a los resultados obtenidos. En el programa Abaqus se llevan a cabo dos tipos de integración numérica [36] en los puntos que integran a los elementos finitos. El trabajo virtual es la expresión que se integra en cada incremento de deformación calculado. La integración completa (*full integration*, en inglés) realiza el proceso de integración de manera exacta debido a que tiene los puntos suficientes que conforman al elemento finito (por lo menos para modelos lineales de materiales); todos los elementos tetraedros y triangulares utilizan integración completa, y la principal desventaja de esta integración es que el tiempo de cálculo aumenta. Por ejemplo, un elemento tetragonal cuadrático posee 27 puntos de integración, mientras que un elemento tetragonal lineal tiene solamente 8; por lo tanto, el análisis realizado con elementos de 27 puntos de integración realiza el cálculo (aproximadamente) 3.5 veces más de tiempo que si se utiliza una integración reducida. Por otra parte, para la integración reducida el número de puntos de integración es suficiente para integrar exactamente las contribuciones del campo de deformaciones, que son de un orden menor al orden de la interpolación; las contribuciones de orden superior que se encuentran en el elemento no son

tomadas en cuenta para el análisis. Las contribuciones de orden superior del campo de deformaciones no son tomadas en cuenta para la integración.

La ventaja de utilizar una integración reducida es que las deformaciones y los esfuerzos se calculan en posiciones que proveen una precisión óptima, es decir puntos Barlow. La segunda ventaja es que los recursos computacionales se ven reducidos, lo cual se ve reflejado en el tiempo de cálculo que requiere la computadora. La tercera ventaja es la prevención del efecto locking. La razón principal aceptada para justificar la aparición de este efecto radica en que el elemento finito no puede interpolar correctamente una propiedad con los valores en sus respectivos nodos y sus funciones de forma. Por ejemplo, los elementos finitos resueltos con integración completa que se encuentran en flexión, calculan deformaciones cortantes (en inglés, *shear locking*) que en realidad no existen. Por lo tanto, estos elementos son muy rígidos y el cálculo de deformaciones cortantes inexistentes afecta la predicción del resultado físico estudiado con efectos numéricos y artificiales anexos. El efecto locking también ocurre cuando el comportamiento del material estudiado es (casi) incompresible ( $\nu = 0.5$ , en inglés, *volumetric locking*) debido a que la constante de Lamé  $\lambda$  se vuelve infinitamente grande. Los elementos muestran una alta rigidez en presencia de deformaciones que no deberían causar cambios de volumen.

Este efecto, así como el efecto hourglassing, se producen debido a que los elementos están definidos por el principio de trabajo virtual (es decir, método de desplazamientos). La ecuación (2.17) define lo anterior.

$$\text{Trabajo Virtual} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\sigma}_i : \delta \mathbf{D}_i V_i \quad (2.17)$$

Donde se tiene un producto tensorial dentro de la suma,  $n$  el número de puntos de integración del elemento finito,  $V_i$  el volumen asociado con el  $i$ -ésimo punto de integración.

Al realizar este cálculo iterativo con integración reducida durante la simulación numérica se produce el efecto llamado hourglassing en inglés. Este error de cálculo en la simulación se debe a que los modos de deformación se producen durante una integración reducida, lo cual provoca que se admitan puntos en los cuales no se calcule deformación, utilizando al trabajo virtual. Cuando esto sucede, se dice que en los puntos de integración existen modos de energía nula (en inglés, *zero-energy modes*), lo cual se propaga a través de toda la malla de elementos finitos y provoca soluciones inexactas. Estos modos de energía nula

provocan que exista una gran distorsión en la malla de elementos finitos, particularmente en aquellos elementos finitos cuadriláteros y hexaedros. La figura 2.11 muestra una malla de elementos finitos con distorsión, ocasionada por el efecto hourglassing.

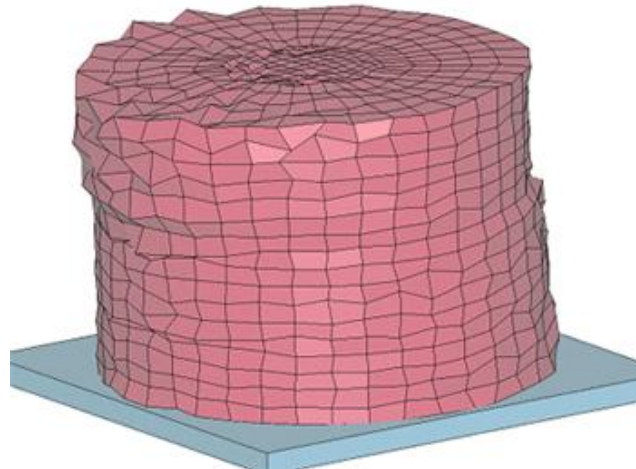


Fig. 2.11. Efecto Hourglassing en un modelo sólido para suelo.

Existen varias aproximaciones dentro del programa Abaqus para minimizar este efecto dentro de los resultados numéricos. La aproximación viscoelástica integral (*integral viscoelastic approach*, en inglés) genera mayor resistencia al efecto hourglassing durante los primeros instantes de aplicación de la carga dinámica. La fuerza (o momento) se calcula de la siguiente manera.

$$Q = \int_0^t sK(t - t') \frac{dq}{dt} dt' \quad (2.18)$$

Donde  $q$  es un parámetro que mide la cantidad de efecto hourglassing,  $K$  es la rigidez del efecto hourglassing y  $s$  representa uno de los factores de escala disponibles en Abaqus para acelerar el proceso de integración.

## Capítulo 3

### Resultados de las simulaciones

El capítulo tres reporta los resultados obtenidos de las simulaciones que se llevaron a cabo para las dos aleaciones de aluminio AA1100 y AA3103 propuestas en esta tesis. Previo a esto, se muestra el balance de energías así como la influencia del efecto hourglassing en todas las simulaciones numéricas realizadas según se establece en la sección 2.8 del capítulo dos. Cabe señalar que se realiza una comparación del efecto hourglassing que se encuentra en las simulaciones de esta tesis con el efecto hourglassing que se obtiene de resultados numéricos para deformación plástica anisotrópica, con el fin de señalar la importancia del estudio de este efecto cuando se realiza modelado numérico empleando códigos de plasticidad anisotrópica.

#### 3.1. Balance de energía

Como se establece en la sección 2.8, la energía cinética durante la simulación representa una fracción pequeña (menor al 5%) de los valores correspondientes a la energía de deformación. También, la energía total se conserva en un valor constante durante la simulación numérica. Las figuras 3.1 y 3.2 muestran las gráficas del comportamiento de las energías mencionadas para las dos aleaciones.

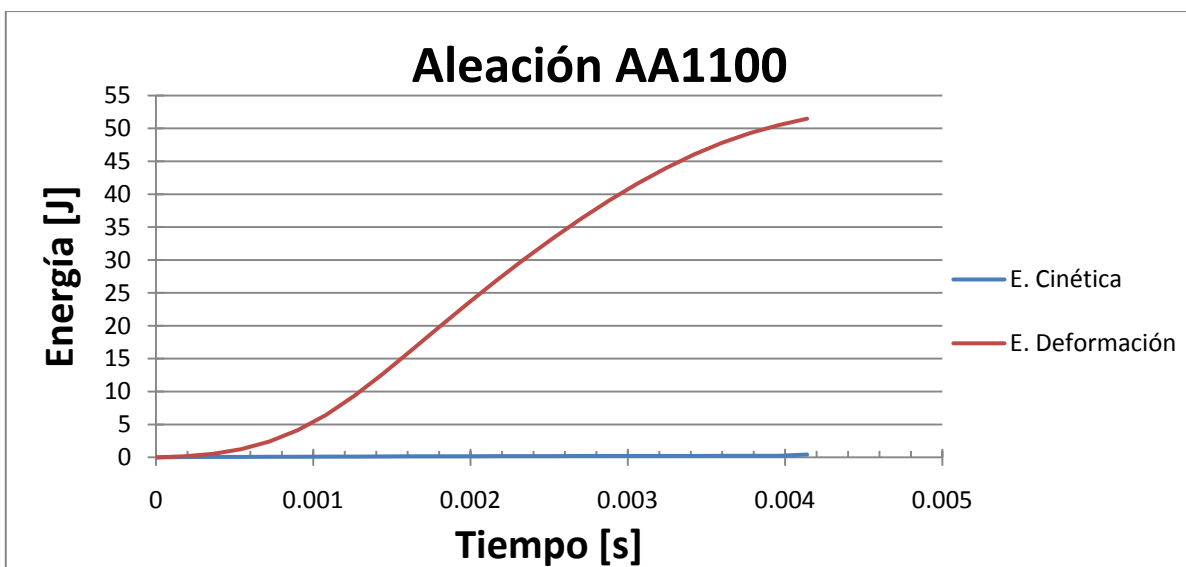


Fig. 3.1. Energía cinética y energía por deformación para la aleación AA1100 durante la simulación numérica.

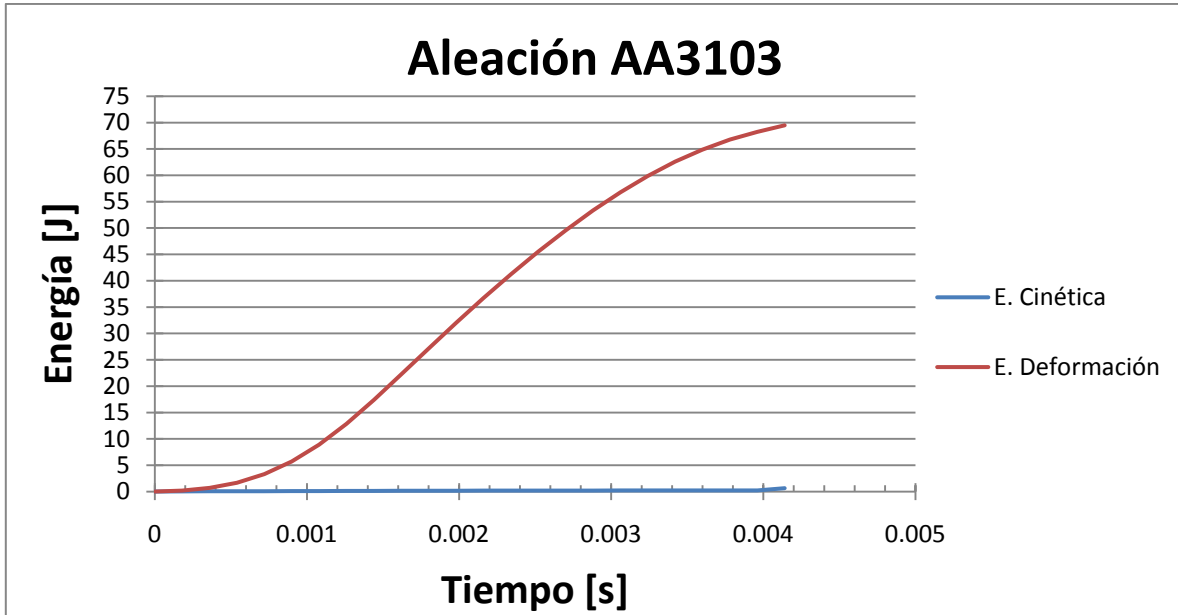


Fig. 3.2. Energía cinética y energía por deformación para la aleación AA3103 durante la simulación numérica.

Además, la figura 3.3 muestra una gráfica del balance de energía definido por la ecuación (2.16) correspondiente a la aleación AA1100; el balance de energía para la aleación restante muestra un comportamiento similar al mostrado por la aleación AA1100, por lo cual se omite su presentación. De la ecuación (2.16) podemos afirmar que todo el trabajo que realiza el punzón cuando estampa a la lámina se convierte en energía cinética, energía por fricción y contacto, además de energía interna tanto por deformación elástica como plástica; la energía por disipación viscosa del modelo numérico se considera nula debido a que no se define ningún componente viscoso que disipe energía durante la simulación. Dicha afirmación se sustenta en los resultados que muestran las figuras 3.1 y 3.2, puesto que la energía total muestra un valor muy cercano a cero.

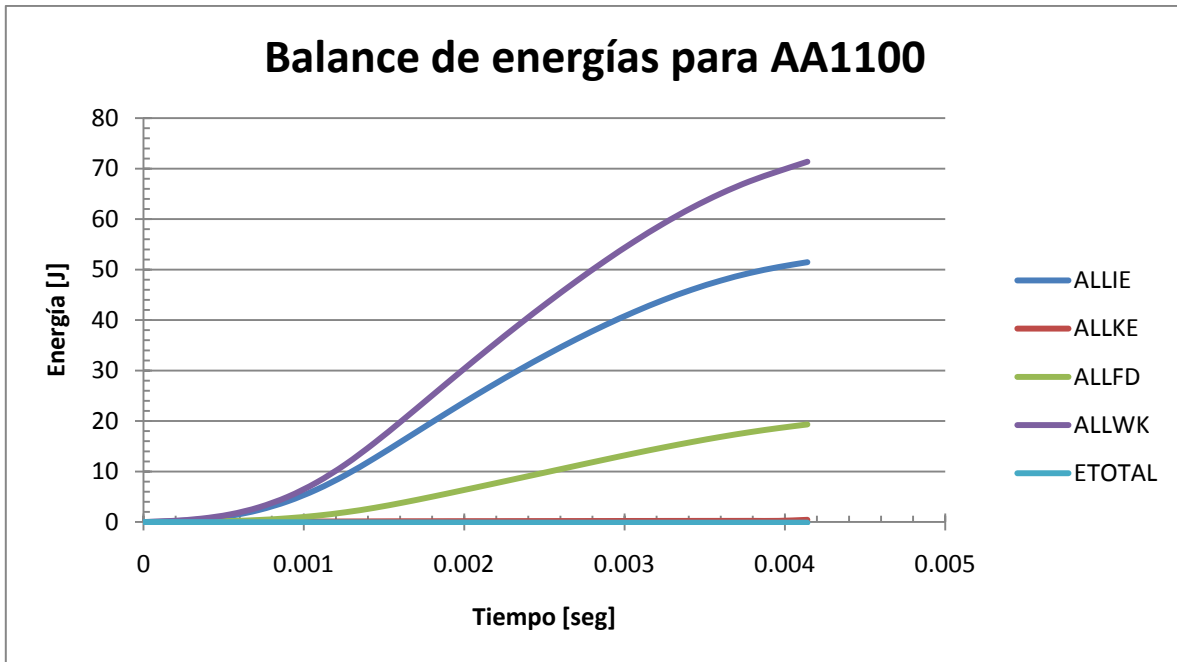


Fig. 3.3. Balance de energía para la aleación AA1100, según la ecuación (2.16) del capítulo 2.

Por lo tanto, este balance energético prueba la buena precisión de los modelos numéricos que se utilizaron para las dos aleaciones de aluminio. A continuación, se muestran los resultados para el espesor de la copa que se obtiene de las dos aleaciones de aluminio. Dicha medición muestra el comportamiento del efecto hourglassing durante las simulaciones realizadas.

### 3.2. Efecto hourglassing

El efecto hourglassing, cuya presencia se manifiesta por nodos sin deformación calculada, se observa midiendo el espesor de la lámina una vez que la copa ha sido formada. También, la altura máxima de la copa es una posición donde debe de observarse el efecto, debido a que en la zona más alta es donde se espera la formación de orejas (*fenómeno earring*, en inglés). Ambas mediciones deberían mostrar valores constantes tanto para el espesor como para la altura máxima, si se analiza el caso isotrópico. Sin embargo, las mediciones del espesor y altura máxima muestran una variación en el desplazamiento de los nodos de la copa aun en el caso isotrópico, que a su vez se vuelve aun más relevante en el caso anisotrópico. Como las mediciones experimentales para el coeficiente de Lankford y el LDR se calculan por medio de desplazamientos medidos una vez que se forma la copa, es necesario controlar la variación de la malla de elementos finitos

para que el modelo numérico se pueda ajustar con los datos experimentales del ensayo de Fukui.

Por lo tanto, las figuras 3.4–3.7 muestran la variación del espesor simulado para la aleación AA1100 obtenidos de la simulación numérica, según la altura correspondiente medida desde el centro de la copa formada; y de las figuras 3.8–3.11 se muestra el espesor obtenido para la aleación AA3103. En ellas se compara el efecto hourglassing para una malla de elementos finitos fina (la malla descrita en la sección 2.7) y para una malla de elementos finitos gruesa (3096 elementos finitos, distribuidos como se describe en la sección 2.7 para la malla de elementos finitos fina).

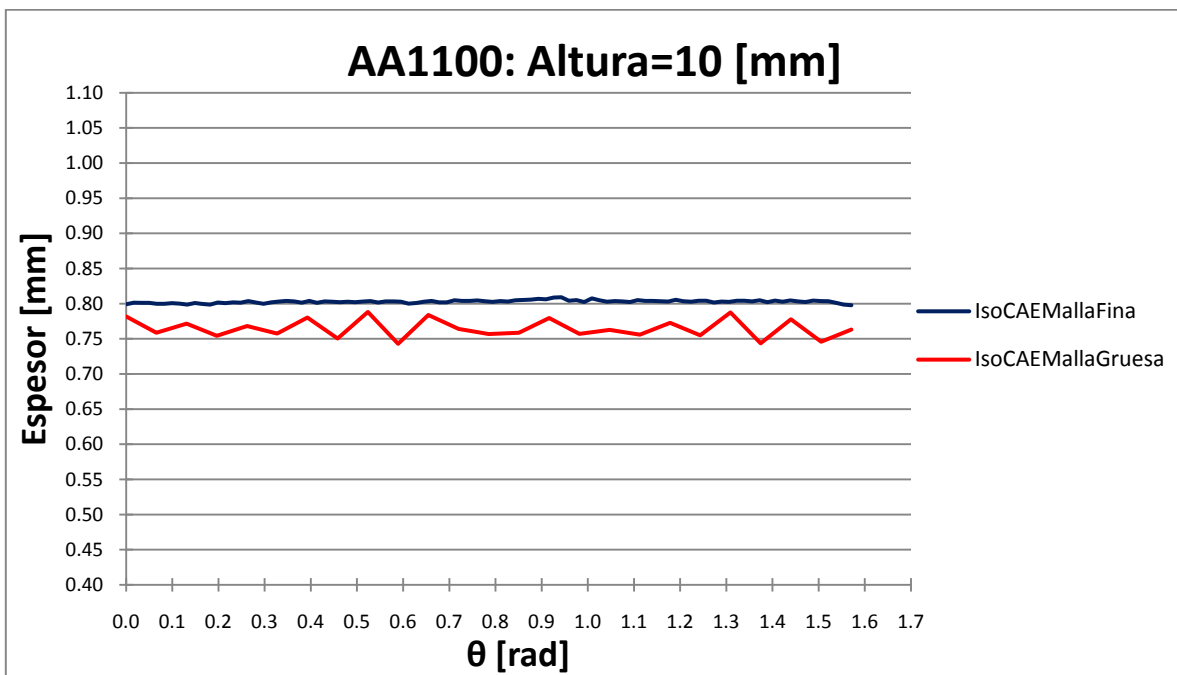


Fig. 3.4. Espesor [mm] vs  $\theta$  [rad]. El valor de  $\theta$  representa el ángulo, en coordenadas polares, que recorre a todo el cuarto de copa (es decir  $\theta \in [0, \pi/2]$ , donde  $\pi/2 \approx 1.57$ ), medido desde un extremo del cuarto de copa hasta su extremo opuesto. La variación calculada en el espesor se muestra con mayor severidad al estar más cerca de la base de la copa.



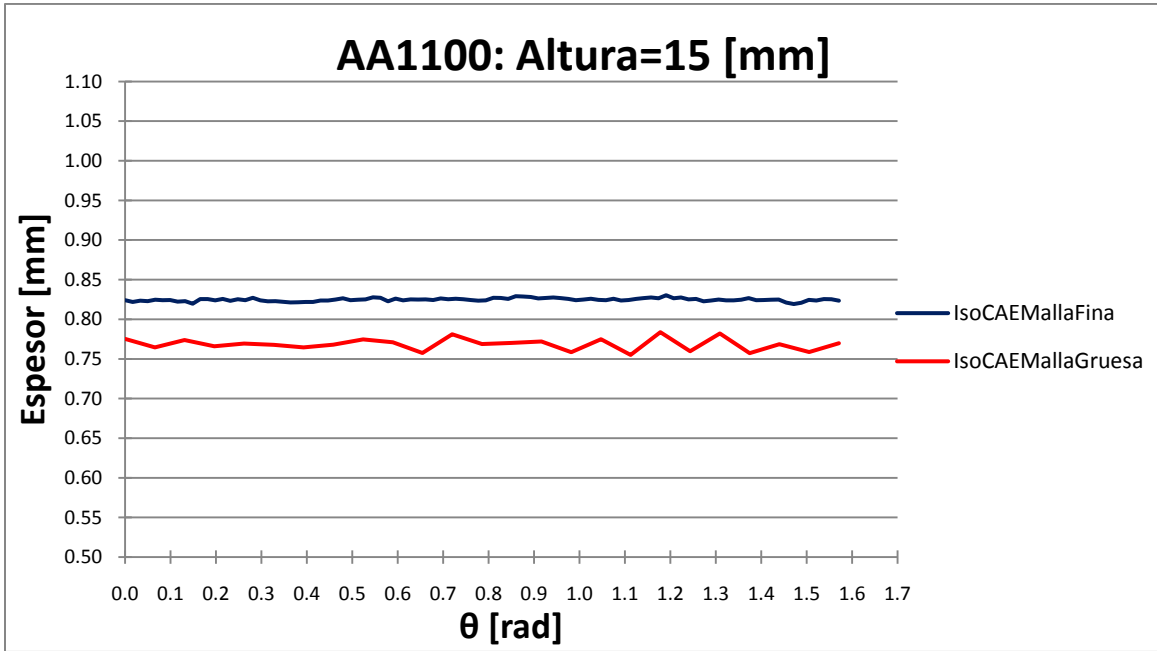


Fig. 3.5. Espesor [mm] vs  $\theta$  [rad], con  $\theta \in [0, \pi/2]$ . El espesor en la malla fina muestra una oscilación mínima alrededor de un valor constante, entre los valores 0.8 [mm] y 0.85 [mm]; la malla gruesa sigue mostrando una variación mayor, además de calcular un espesor menor al predicho por la malla fina.

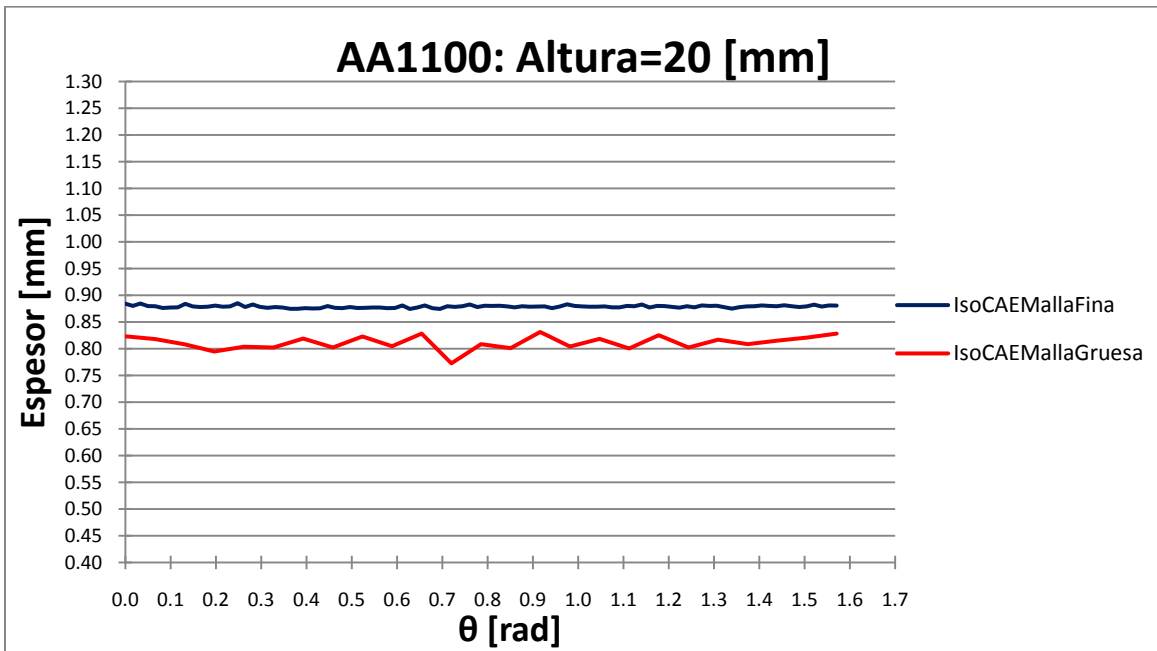


Fig. 3.6. Espesor [mm] vs  $\theta$  [rad], con  $\theta \in [0, \pi/2]$ . El efecto hourglassing persiste en la simulación con malla gruesa. El espesor calculado para la malla gruesa sigue mostrando un valor menor, el cual se espera que influya en un valor mayor de la altura máxima calculada en la copa.

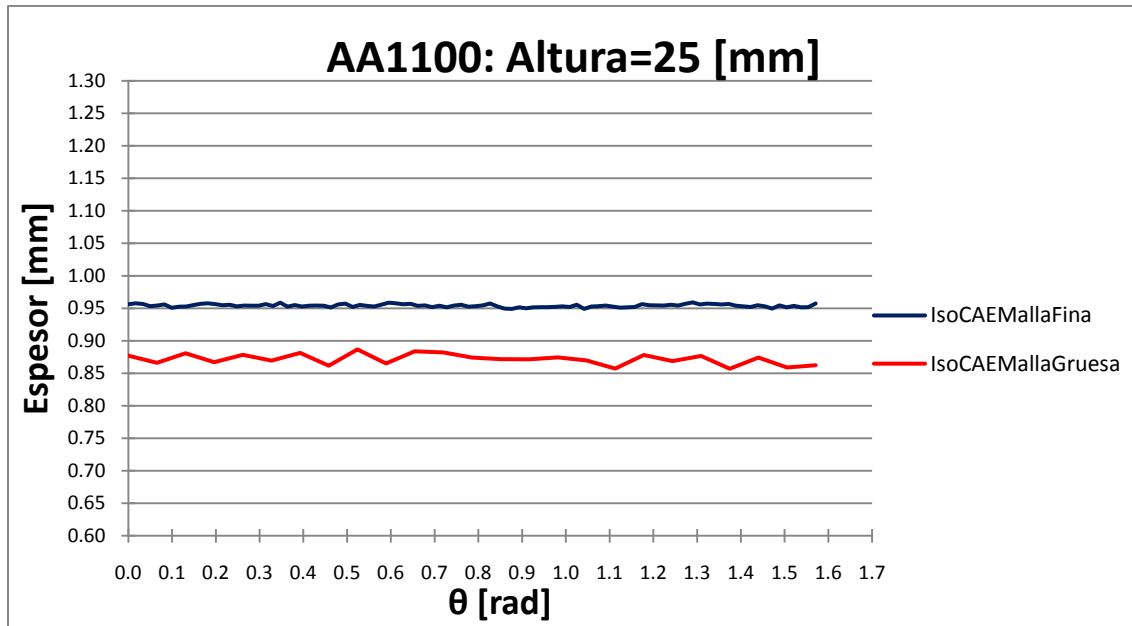


Fig. 3.7. Espesor [mm] vs  $\theta$  [rad], con  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Finalmente, el espesor calculado con la malla fina para la altura de 25 [mm] muestra un valor prácticamente constante; no así el valor calculado para la malla gruesa, que sigue mostrando una severa variación en los nodos que pertenecen al espesor de la copa.

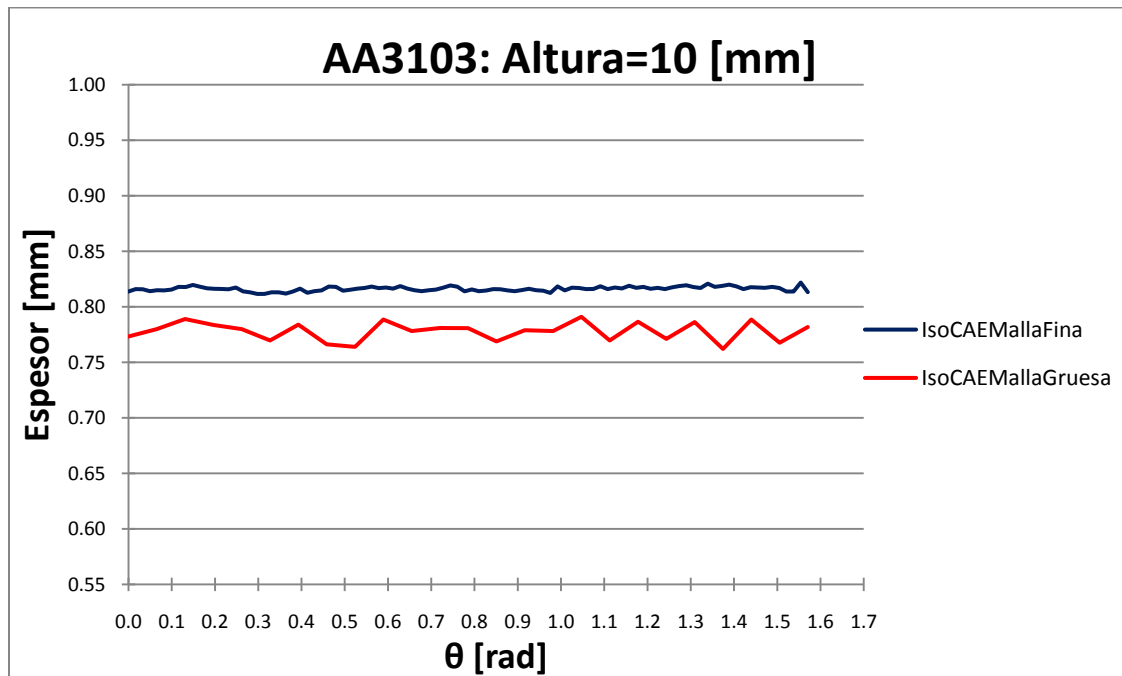


Fig. 3.8. Espesor [mm] vs  $\theta$  [rad], con  $\theta \in [0, \pi/2]$ . El comportamiento de hourglassing para ambas mallas se muestra similar a lo encontrado para la aleación AA1100; sin embargo, el espesor calculado por la malla fina muestra un valor mayor calculado para la aleación AA3103. Este cambio puede explicarse por la diferencia de endurecimiento isotrópico definido en cada aleación.

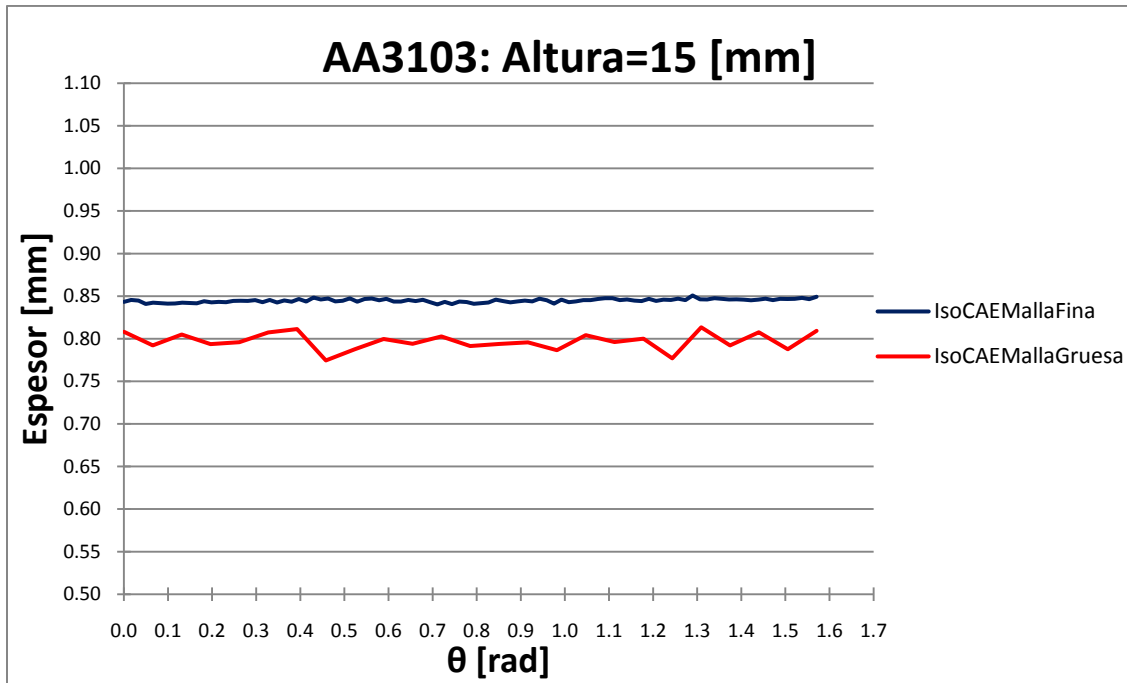


Fig. 3.9. Espesor [mm] vs  $\theta$  [rad], con  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Se observa que el cálculo del espesor con una malla gruesa de elementos finitos muestra una gran variación, producto del efecto hourglassing. Además, el valor que calcula para el espesor es menor al que se observa para el espesor calculado con una malla más fina de elementos finitos.

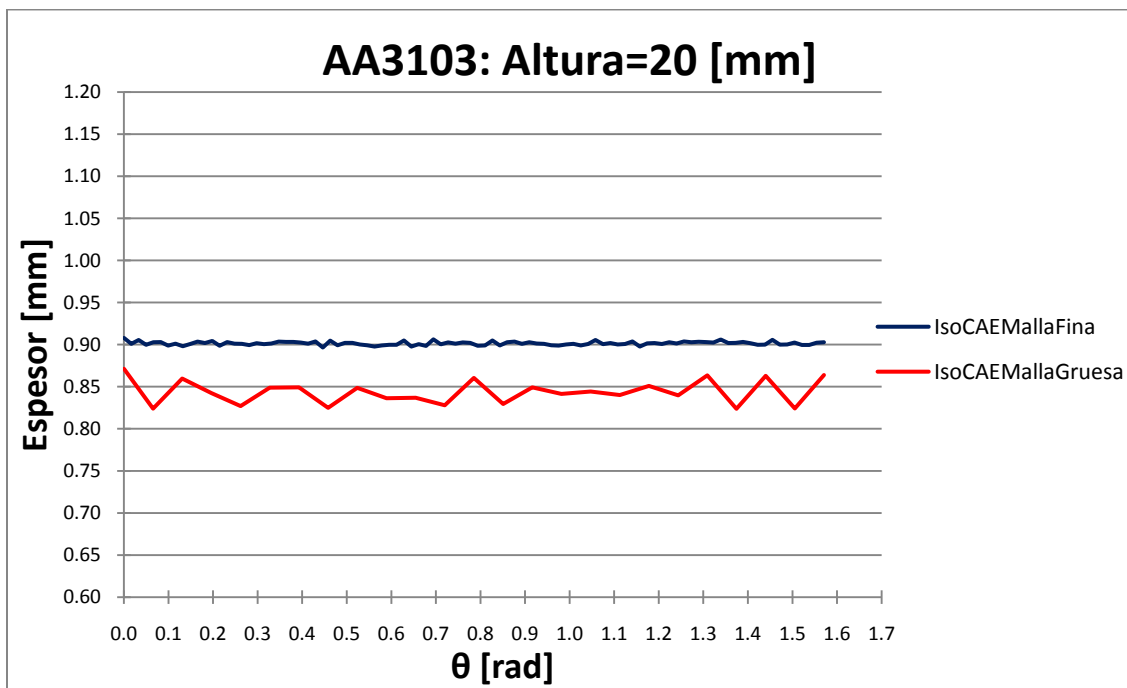


Fig. 3.10. Espesor [mm] vs  $\theta$  [rad], con  $\theta \in [0, \pi/2]$ . La tendencia en el efecto hourglassing para el espesor de la copa se muestra parecida a la encontrada en la aleación AA1100.

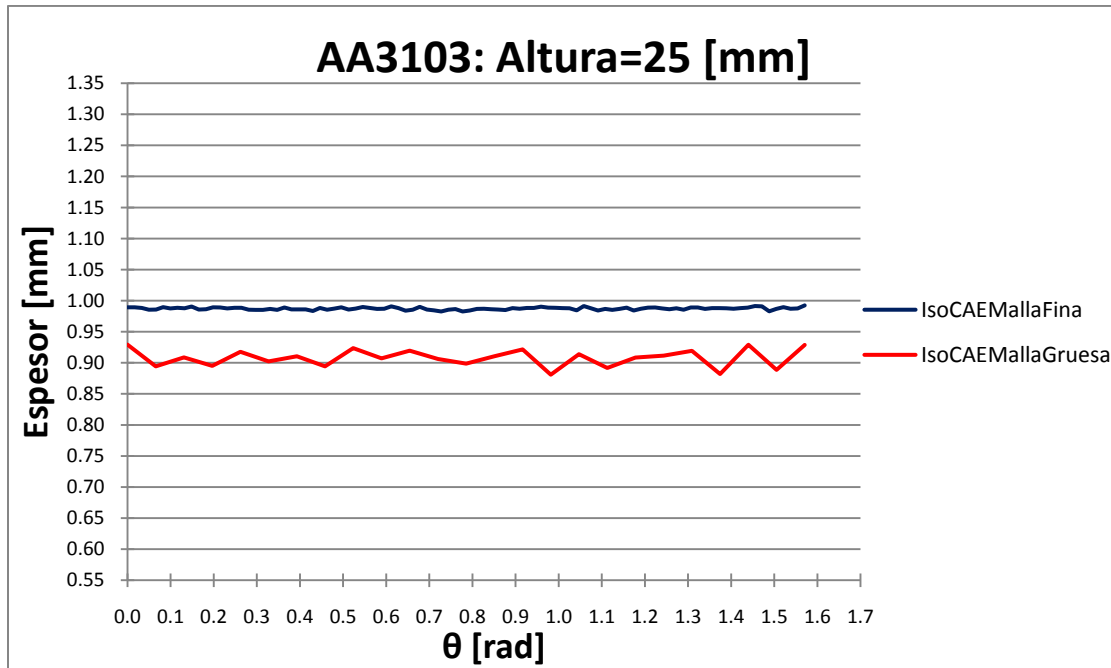


Fig. 3.11. Espesor [mm] vs  $\theta$  [rad], con  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Los valores para el espesor mostraron variación mínima cuando el mallado de elementos finitos se vuelve más fino; para esta aleación se encontraron espesores más grandes que los encontrados para la aleación AA1100, con lo cual se espera que la altura máxima de la aleación AA3103 sea menor.

De las figuras anteriores se puede observar una gran dependencia del efecto hourglassing hacia el número de elementos finitos definidos en una malla, así como a su distribución y, en consecuencia, a su relación de aspecto. Esto se manifiesta directamente en la variación que se observa cuando el programa calcula el espesor de la copa. Debido a que este efecto es una consecuencia de la integración numérica reducida que se emplea, se espera también una variación en la medición de cualquier desplazamiento de los nodos de la copa formada.

A continuación se comparan los resultados del modelo isotrópico de malla fina y gruesa, con los resultados para deformación plástica anisotrópica realizados en colaboración con la *Katholieke Universiteit Leuven (KULeuven)*. Se utilizaron las aproximaciones Advanced Lamel (ALAMEL) y Full Constraints (FC Taylor) para las aleaciones AA1100 y AA3103. El propósito de esta comparación es ilustrar la necesidad de una subrutina que explique la deformación plástica por influencia de texturas dentro del metal, de tal forma que la ecuación constitutiva del material, programada en la subrutina, refleje la anisotropía del mismo. Las figuras 3.12–3.19 muestran los espesores encontrados para ambas aleaciones, comparando los resultados anisotrópicos con los resultados del modelo isotrópico descrito en esta tesis.

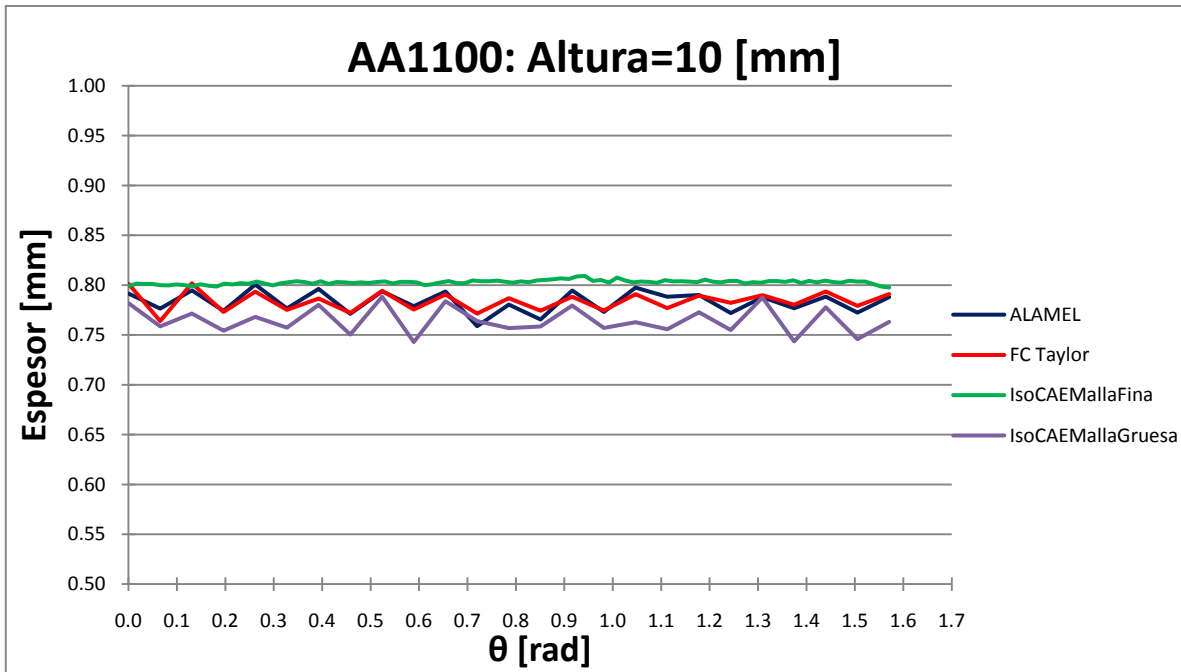


Fig. 3.12. Los espesores calculados con las aproximaciones ALAMEL y FC Taylor muestran una gran variación, causada por el efecto hourglassing. El valor calculado para el espesor a esta altura muestra un valor menor comparándolo con el valor que el modelo isotrópico calcula, como resultado de la malla gruesa utilizada en ALAMEL y FC Taylor.

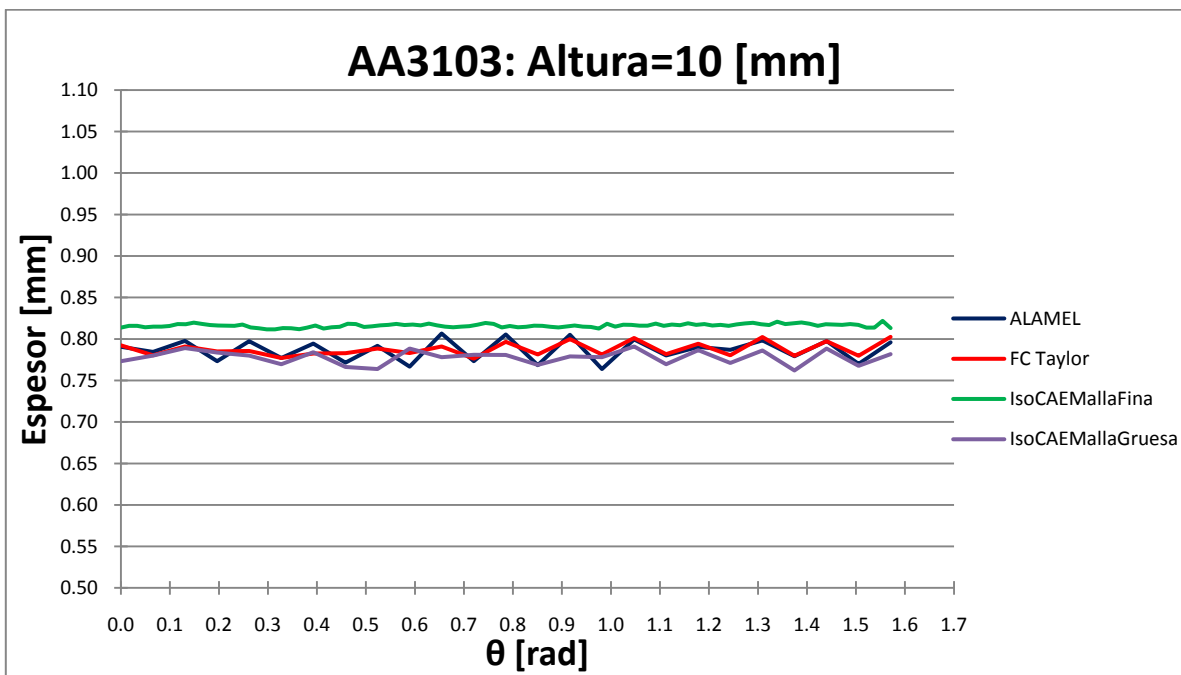


Fig. 3.13. La severidad que se observa en la variación del espesor para ALAMEL y FC Taylor se explica con la textura del material. Ésta ocasiona que el material comience a rotar dentro de sí mismo, lo cual obliga a que se produzca una variación importante en el espesor de la copa.

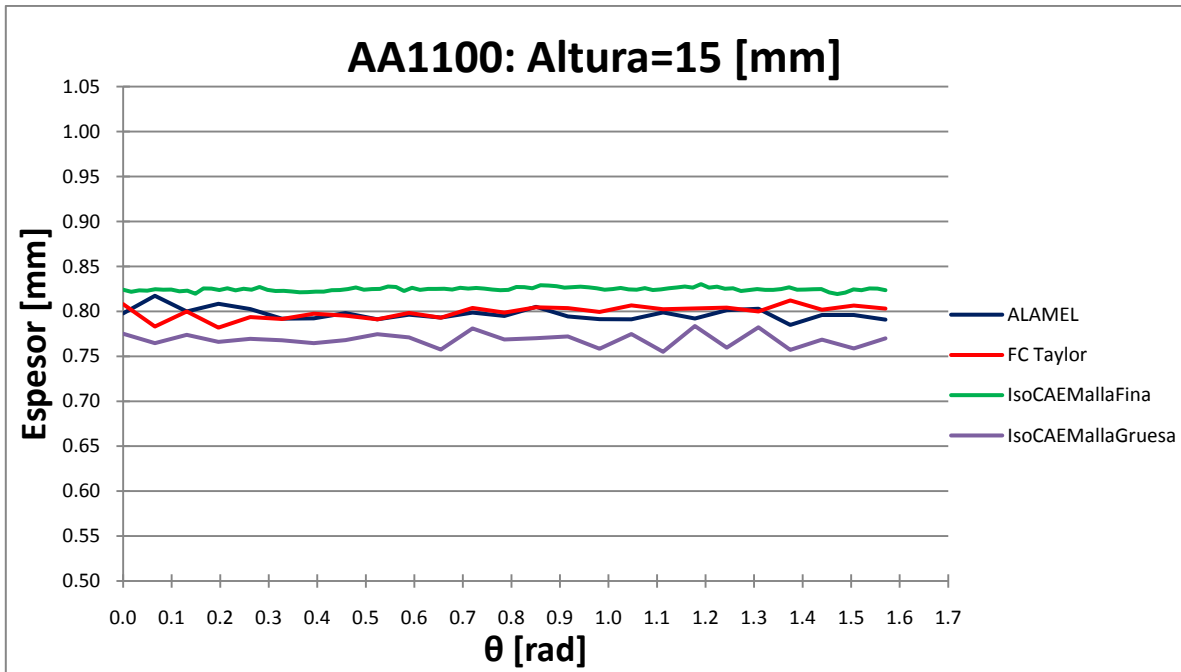


Fig. 3.14. La precisión del modelo isotrópico en la medición del espesor sugiere que debe utilizarse una malla optimizada de elementos finitos donde se utilicen las aproximaciones de ALAMEL y FC Taylor; es decir, que se optimice en conjunto la distribución y número de elementos finitos en el modelo numérico.

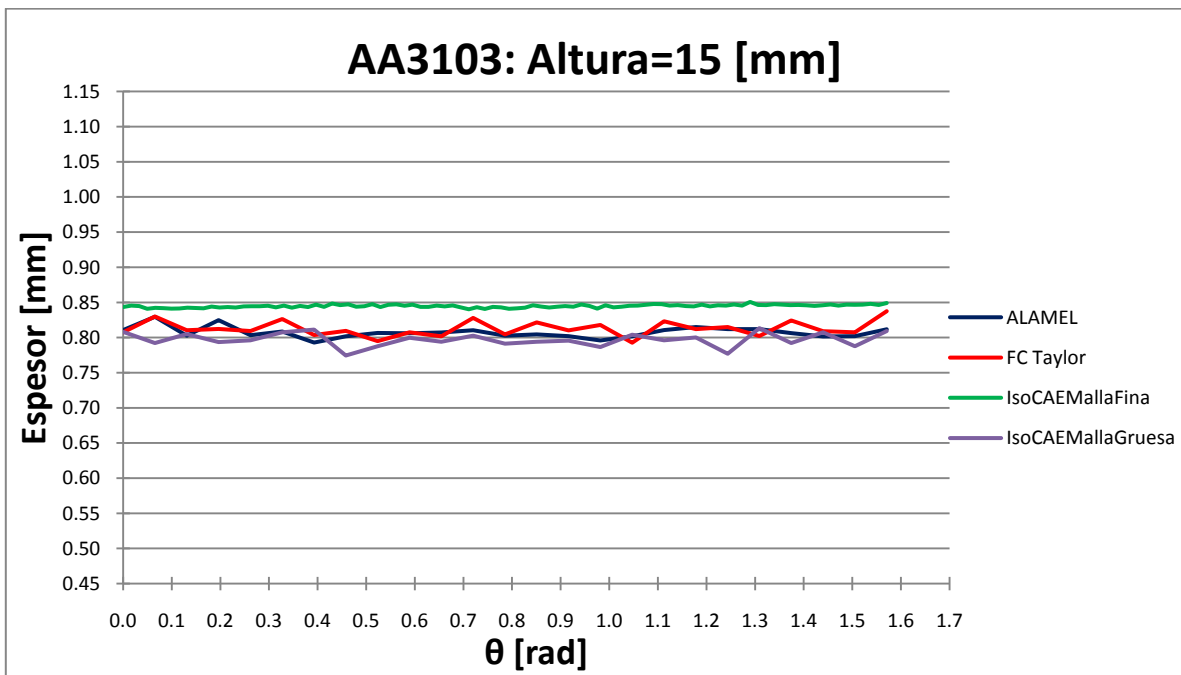


Fig. 3.15. En esta figura se observa que los espesores obtenidos para ALAMEL y FC Taylor han disminuido la variación ocasionada por el efecto hourglassing. Esto sugiere una reducción en el espesor de la copa.

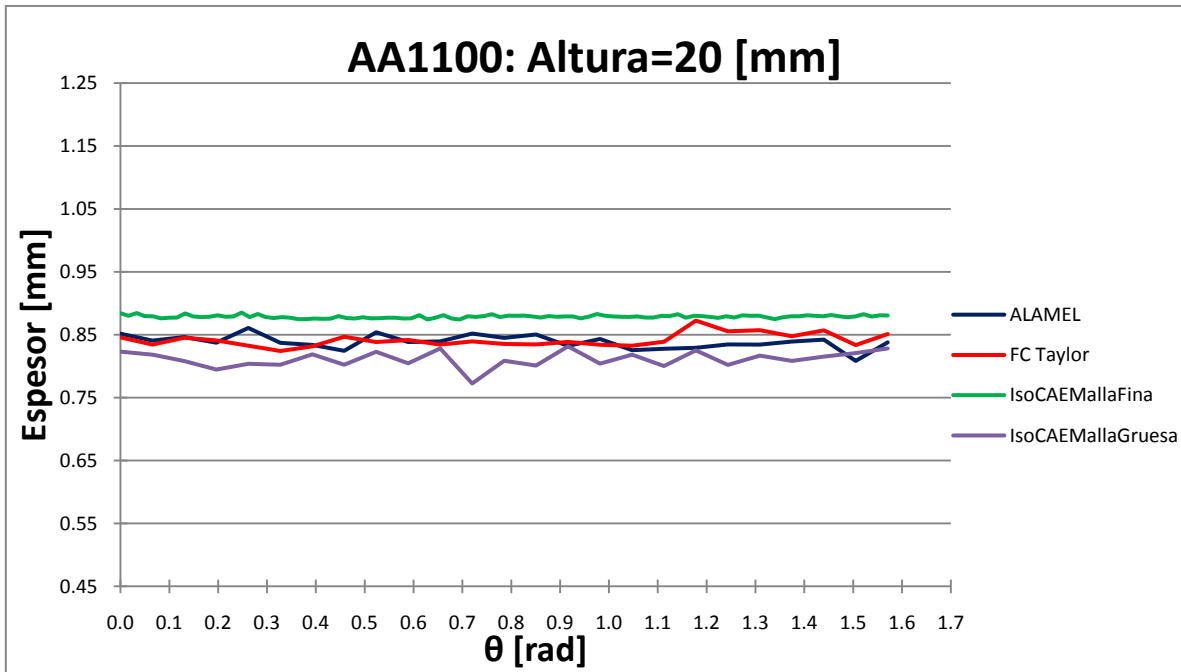


Fig. 3.16. Esta figura muestra la persistencia del efecto hourglassing en la copa para las aproximaciones de FC Taylor y ALAMEL. Se espera que una malla fina de elementos finitos utilizada para las aproximaciones anteriores ayude a minimizar este error numérico.

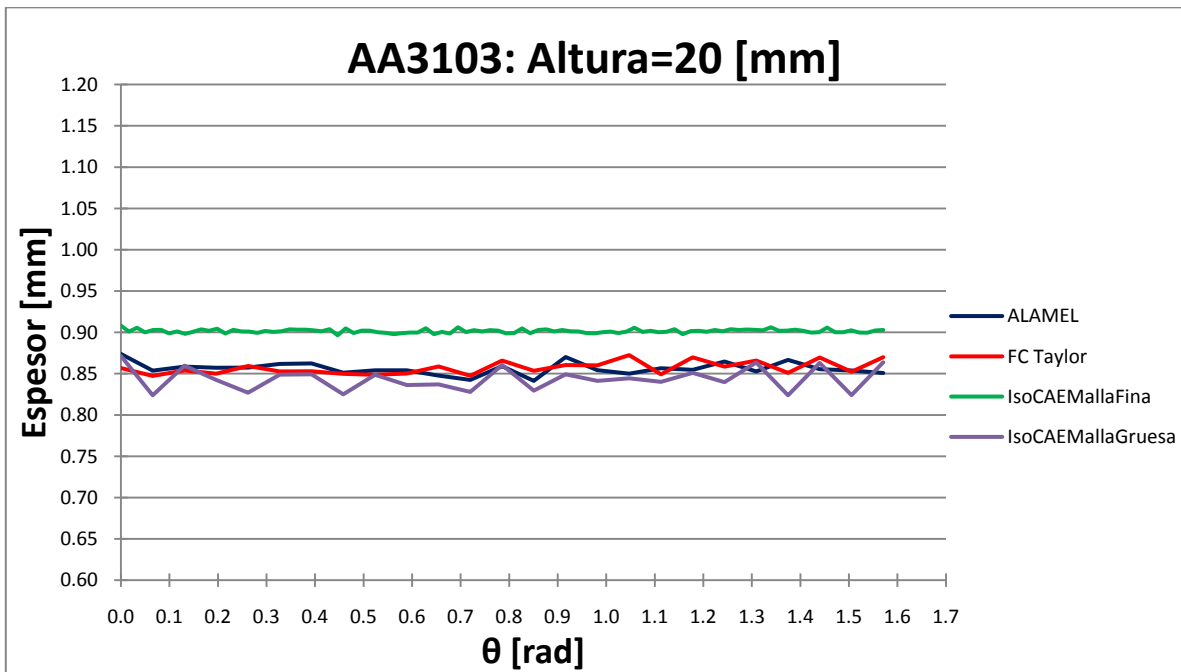


Fig. 3.17. La figura muestra el espesor más elevado que corresponde al modelo IsoCAEMallaFina; esto quiere decir que la altura alcanzada en su correspondiente copa será menor que la altura alcanzada en las aproximaciones ALAMEL y FC Taylor. Hasta ahora, la mayor severidad del efecto hourglassing se ha observado cerca de la base de las copas formadas.

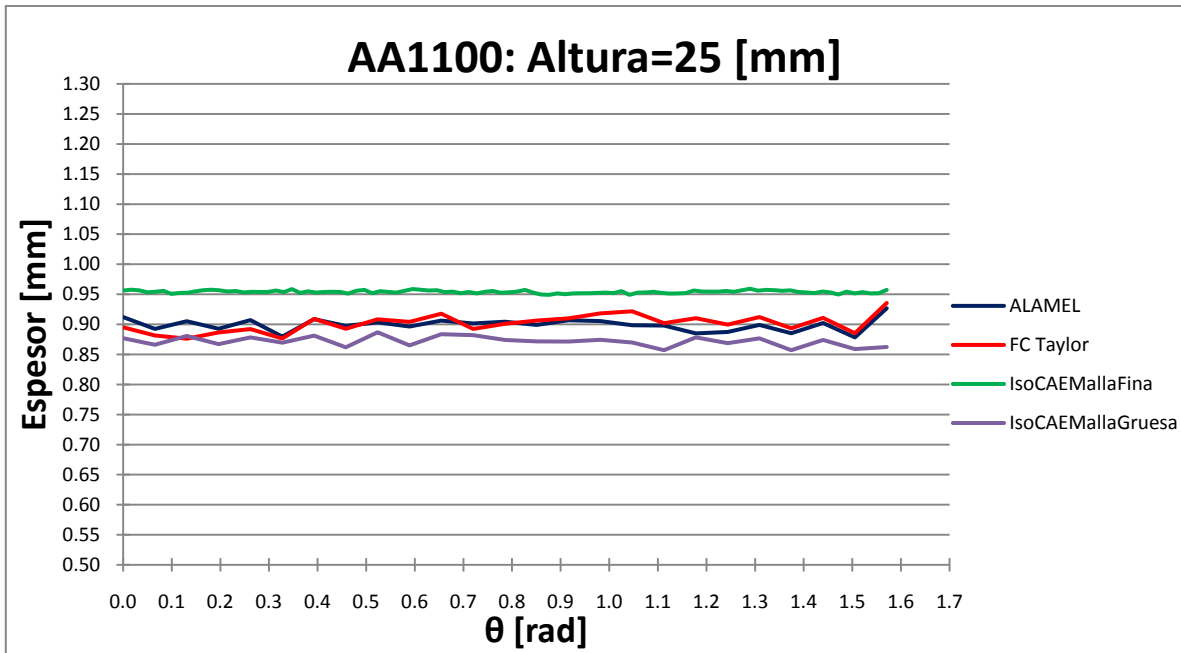


Fig. 3.18. El efecto hourglassing se ha mantenido estable para el modelo IsoCAEMallaFina; sin embargo, en las aproximaciones ALAMEL y FC Taylor persiste dicho efecto, por lo cual existe una mayor variación en la malla de elementos finitos debido a la integración reducida.

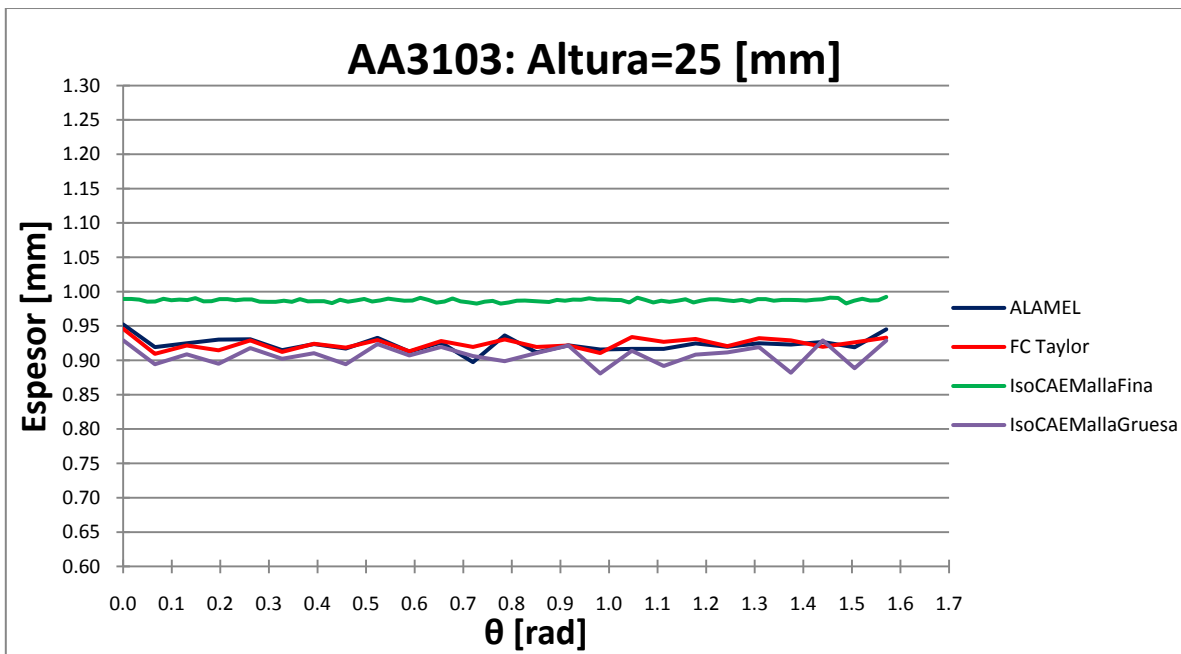


Fig. 3.19. Finalmente, los resultados para el espesor de la copa se muestran similares para ambas aleaciones; esto quiere decir que en el caso isotrópico, la variación de la malla depende mucho más de errores numéricos obtenidos. Sin embargo, en los análisis que incluyen deformación plástica anisotrópica, se observa que el efecto hourglassing depende más de la definición de la malla de elementos finitos que de las texturas que definen al material.



La variación de la malla de elementos finitos también se analiza si se mide la altura final de la copa. Con esta medición es posible ver las diferencias entre las orejas obtenidas de los resultados experimentales y las orejas numéricas simuladas, así como la influencia del efecto hourglassing en dichas mediciones. Por lo tanto, esta altura medida es importante para ajustar el modelo numérico con el experimento. Para el caso isotrópico, la formación de orejas se omite, por lo que se espera una altura constante de la copa, a diferencia de las orejas calculadas por las aproximaciones ALAMEL y FC Taylor para las aleaciones AA1100 y AA3103. Las figuras 3.20 y 3.21 muestran la altura de la copa formada para las aleaciones estudiadas en esta tesis.

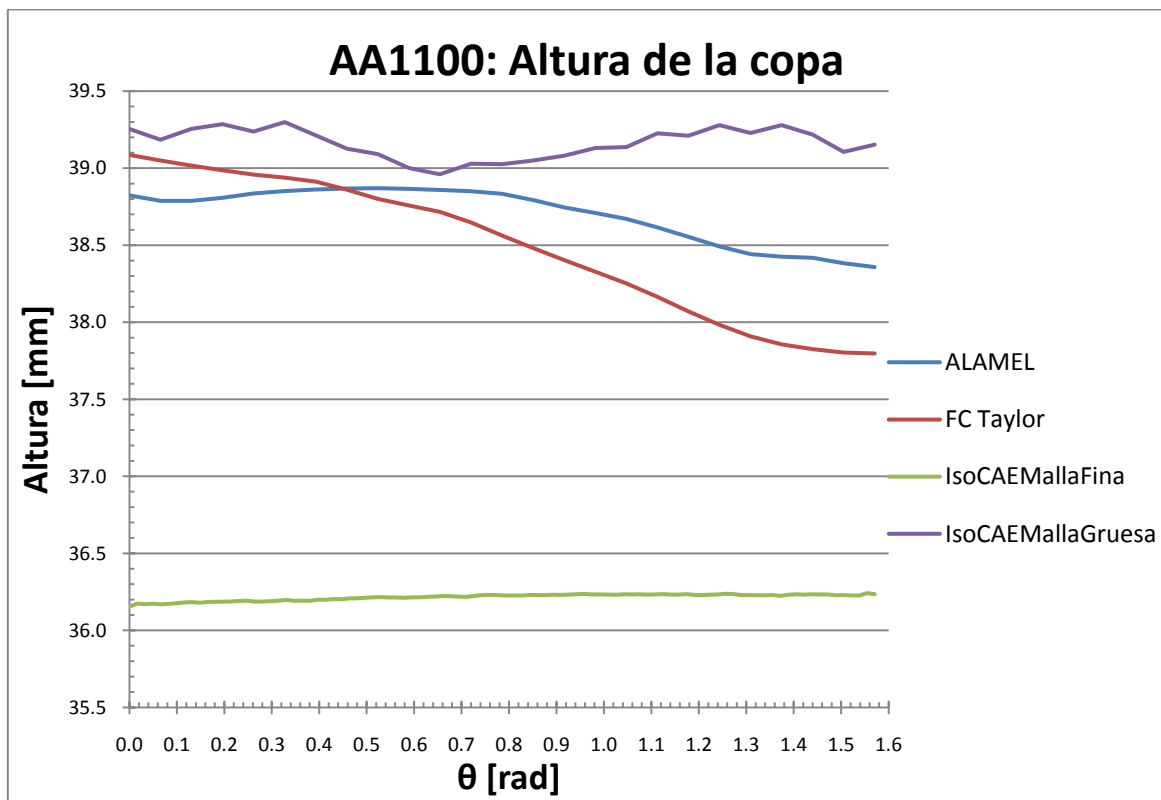


Fig. 3.20. Altura [mm] vs  $\theta$  [rad], con  $\theta \in [0, \pi/2]$ . La figura muestra la formación de orejas para las aproximaciones ALAMEL y FC Taylor, así como una altura constante en el modelo IsoCAEMallaFina.

Los resultados para ALAMEL y FC Taylor de la figura 3.20 han sido suavizados para eliminar el efecto hourglassing y observar las orejas formadas. Ambas aproximaciones calculan media oreja en el intervalo estudiado ( $[0, \pi/2]$ ), lo cual predice que existen dos orejas formadas en toda la copa. Como se observa en las gráficas de espesor, la altura para IsoCAEMallaFina es menor y concuerda con el

espesor grueso observado. Cabe resaltar la gran inexactitud en el cálculo de la altura que realiza el modelo IsoCAEMallaGruesa, mostrando alturas similares con las aproximaciones ALAMEL y FC Taylor. Este resultado muestra la importancia de la definición de la malla de elementos finitos para las simulaciones numéricas. Además, se espera que las simulaciones realizadas ALAMEL y FC Taylor también se vean beneficiadas con la definición de una malla de elementos finitos óptima.

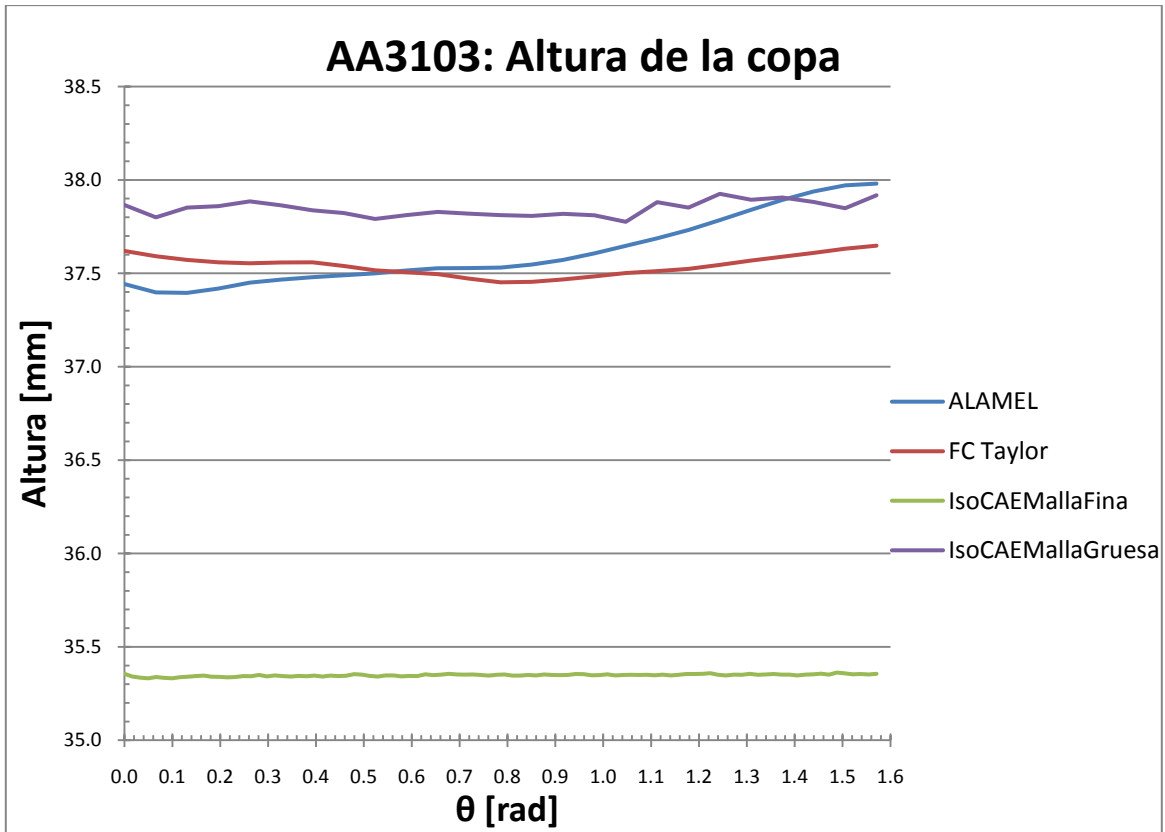


Fig. 3.21. Altura [mm] vs  $\theta$  [rad], con  $\theta \in [0, \pi/2]$ . La gráfica muestra las alturas calculadas para la copa formada, según ALAMEL, FC Taylor, IsoCAEMallaFina e IsoCAEMallaGruesa.

Las aproximaciones ALAMEL y FC Taylor de la figura 3.21 muestran la formación de media oreja y una oreja en el intervalo  $([0, \pi/2])$ , respectivamente. Se observa también una gran inexactitud en la altura calculada con una malla gruesa y la altura calculada con una malla fina. Los valores para la altura también muestran un menor tamaño con las alturas en la aleación AA1100, debido a que la aleación AA3103 posee una ley de endurecimiento isotrópico que define un esfuerzo de cedencia mayor.



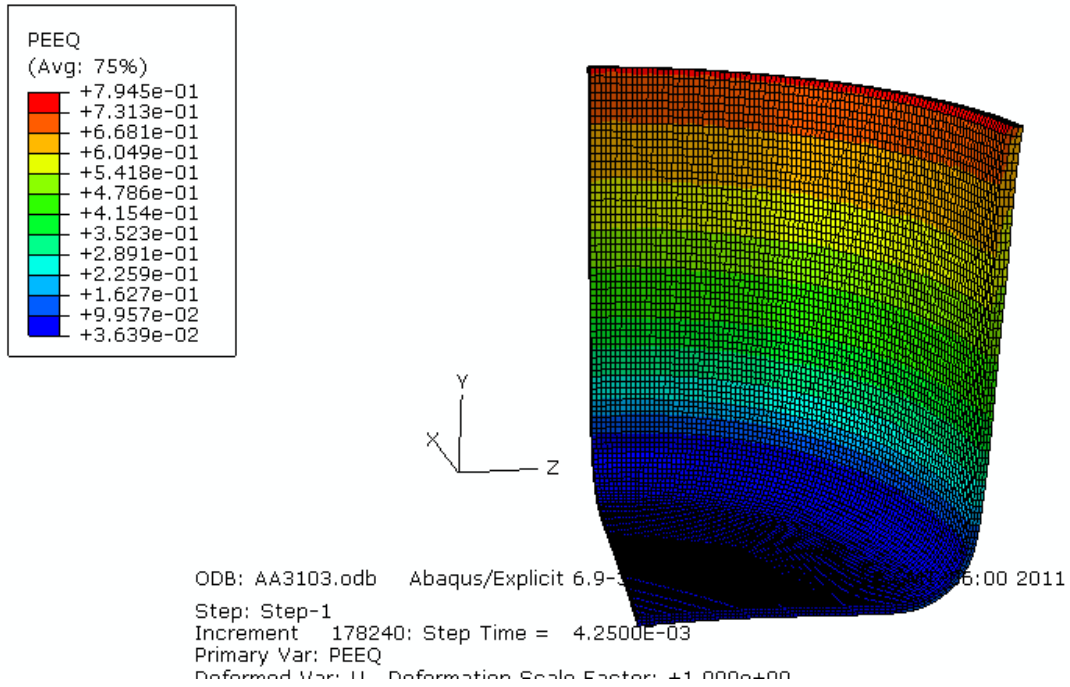


Fig. 3.23. Deformación plástica equivalente en el cuarto de copa para la aleación AA3103; el resultado obtenido para la copa con aleación AA1100 es similar al mostrado en la figura.

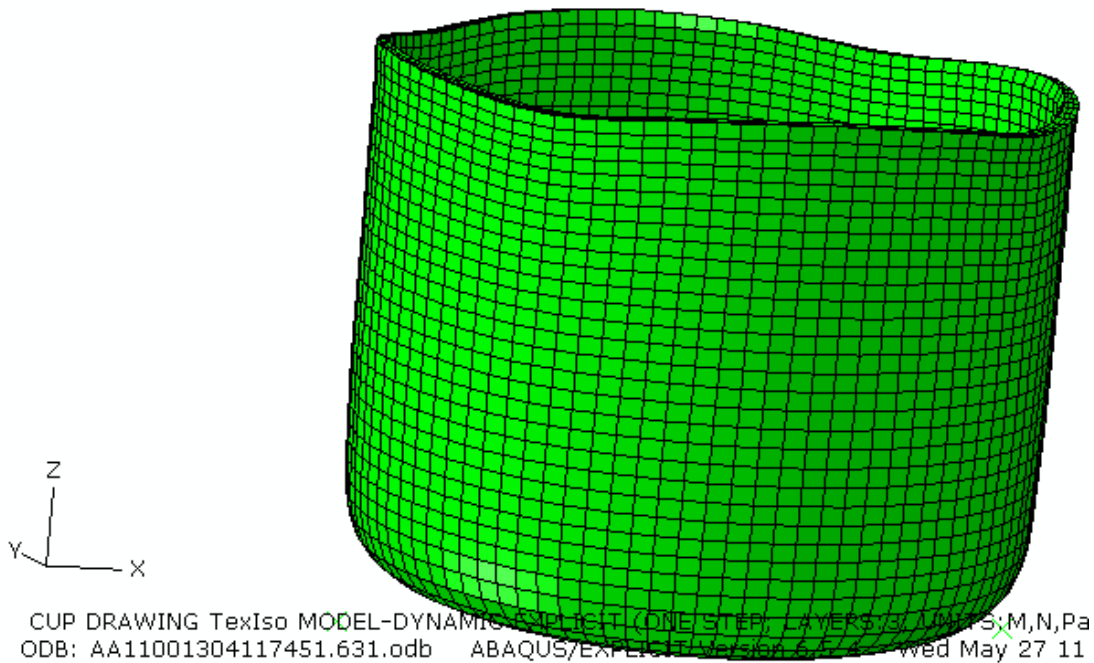


Fig. 3.24. Copa anisotrópica para la aleación AA1100; se observa en la parte superior de la copa la formación de cuatro orejas; los resultados para la aleación AA3103 son similares.

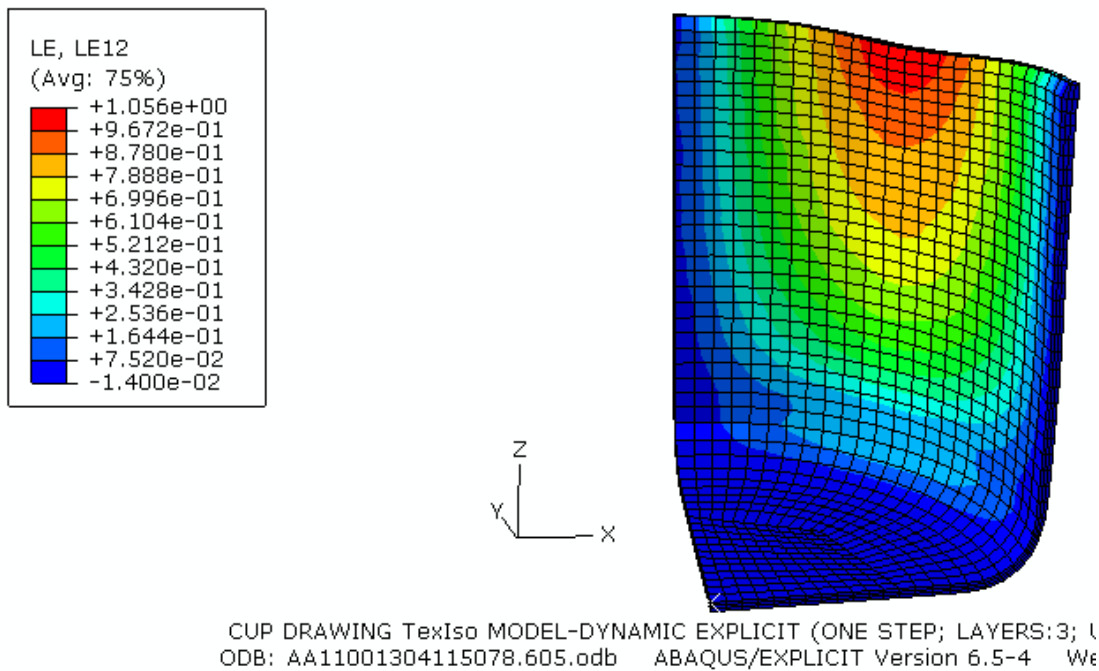


Fig. 3.25. Se observa la deformación verdadera (logarítmica) obtenida en el plano 1-2 (XY), asociada con el cambio de espesor en la copa.

### 3.4. Límite de precisión en la malla de elementos finitos

Se ha observado en las secciones anteriores una precisión satisfactoria en los resultados numéricos obtenidos para la malla de elementos IsoCAEMallaFina. En esta sección se pretende señalar que existe un límite de precisión para la malla de elementos finitos debido a que un refinamiento mayor de ésta si calcula resultados más precisos, pero requiere de un mayor tiempo de cómputo; sin embargo, la diferencia entre el porcentaje de precisión en ambas mallas resulta despreciable. Las figuras 3.26 y 3.27 muestran la variación para el espesor y la altura máxima en la copa para la aleación AA1100, según la malla IsoCAEMallaFina y una malla de elementos finitos con un mayor número de elementos: IsoCAEEM. La distribución de los elementos finitos para la malla IsoCAEEM se realiza como se describe en la sección 2.7 para la malla IsoCAEMallaFina; la única diferencia es que el espesor de la lámina ahora se encuentra dividido por seis elementos finitos, lo cual da por resultado una malla con 229 416 elementos finitos estructurados.

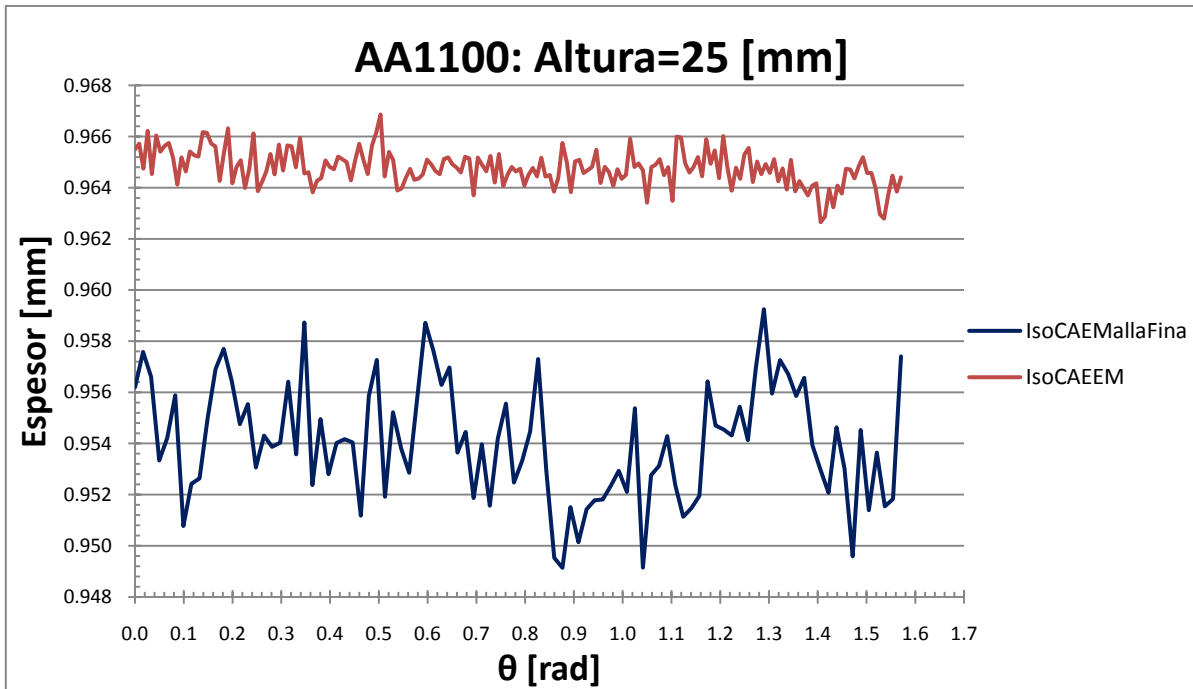


Fig. 3.26. Comparación de la precisión entre IsoCAEMallaFina e IsoCAEEM para el espesor de la copa, calculado a 25 [mm] desde el centro interior en la base.

De acuerdo a la figura 3.26, la diferencia entre ambas mediciones numéricas resulta de apenas milésimas de milímetro, por lo que ésta es prácticamente nula. Si consideramos que la medición del espesor con IsoCAEEM es la medición más precisa, la desviación que produce IsoCAEMallaFina en el espesor a 0 [rad] y a  $\pi/2$  [rad] es de 0.96 % y 0.73 %, respectivamente.

El comportamiento que se observa en el espesores similar para las alturas de 10 [mm], 15 [mm] y 20 [mm] en la copa con aleación AA1100, por lo que se omite su presentación. A continuación se muestra la precisión que se obtiene en el cálculo de la altura para la aleación AA1100, tanto para la malla IsoCAEMallaFina como para la malla IsoCAEEM.

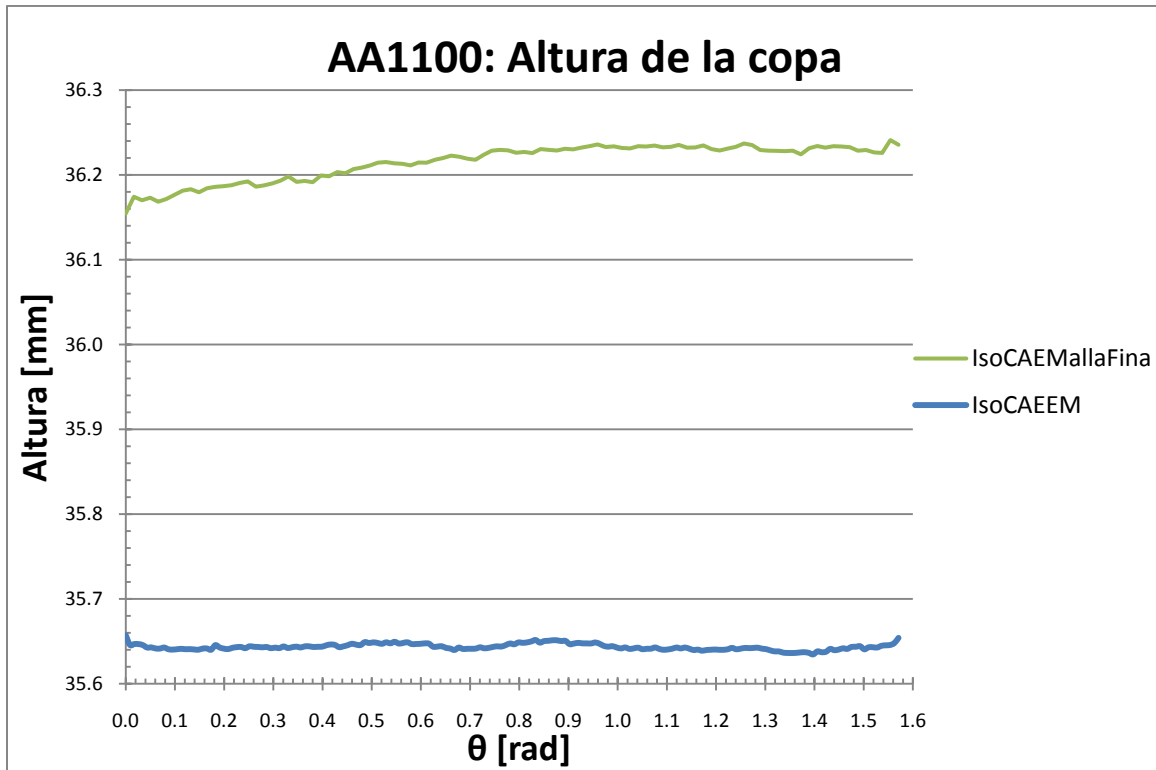


Fig. 3.27. Precisión obtenida para la altura máxima en la copa de aleación AA1100 según IsoCAEMallaFina e IsoCAEEM.

La gráfica de la figura 3.27 muestra una variación entre la altura calculada con IsoCAEMallaFina e IsoCAEEM. Sin embargo, la diferencia entre ambas mediciones también es pequeña como en el caso del espesor. Una vez más, si consideramos que la medición del espesor con IsoCAEEM es la medición más precisa, la desviación que produce IsoCAEMallaFina en la altura máxima a 0 [rad] y a  $\pi/2$  [rad] es de 1.39 % y 1.60 %, respectivamente.

### 3.5. Copa experimental vs copa simulada con FEM

Se realizaron en el departamento de Mecánica de la *Katholieke Universiteit Leuven (KU Leuven)* tres estampados en el ensayo de Fukui para la aleación AA1100 y AA3103, respectivamente. Posteriormente, cada copa conformada se coloca en una máquina de coordenadas CNC para medir, desde el centro interior de la copa, las coordenadas cartesianas que representan su posición. Gracias a estas coordenadas es posible calcular las alturas máximas y espesores experimentales. Sin embargo, debido a la simetría en la lámina (como se explica en la sección 2.1), cada punto experimental de la altura máxima que se muestra

en las figuras 3.29 y 3.30 es un valor promedio de cuatro puntos experimentales simétricos que se miden sobre la periferia de la altura máxima de la copa. La figura 3.28 muestra un esquema que explica la idea anterior. Para el incremento  $\Delta\theta$ , se tienen cuatro alturas, cuyo promedio representa un punto del intervalo  $[0\pi, \pi/2]$  de las figuras 3.29 y 3.30. Este incremento se define según la máquina de coordenadas CNC y, para las seis copas, tiene un valor de  $7.5^\circ$ .

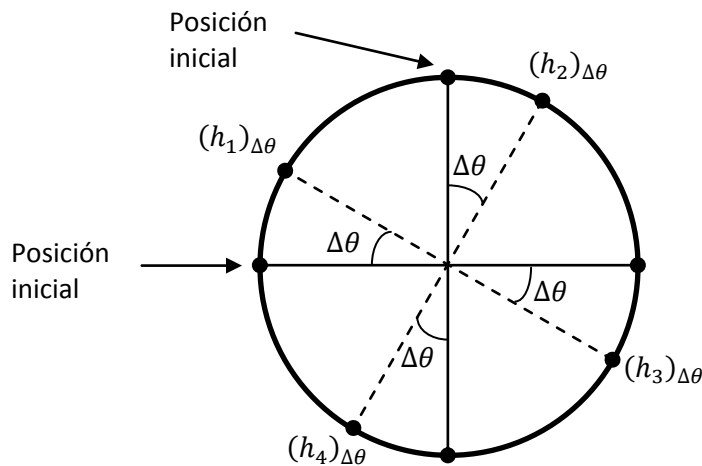


Fig. 3.28. Periferia de la copa que representa la altura máxima.

Hasta ahora, las simulaciones por elemento finito para deformación plástica anisotrópica han proporcionado resultados numéricos aceptables. Sin embargo, la realidad indica que la copa experimental obtenida del ensayo de Fukui aun es diferente de las copas simuladas con ALAMEL, FC Taylor e IsoCAEMallaFina. El tamaño y distribución de las orejas formadas en la copa experimental muestra una variación compleja, comparado con los resultados de ALAMEL y FC Taylor; las figuras 3.29y 3.30muestran una gráfica comparativa entre los modelos numéricos mencionados para las aleaciones AA1100 y AA3103, respectivamente. El punto importante de estas gráficas es el siguiente: la necesidad de seguir investigando en el tema para definir nuevos modelos y aproximaciones cristalinas que expliquen aun mejor la naturaleza de la deformación plástica anisotrópica en los metales.



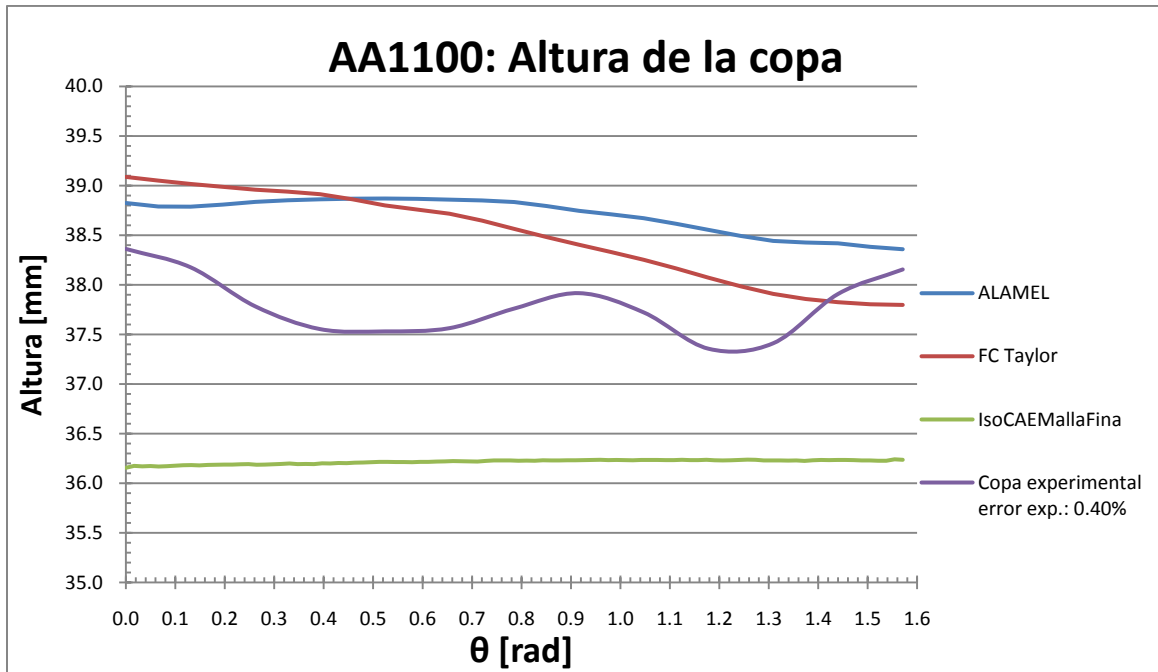


Fig. 3.29. La copa experimental muestra una variación compleja en las orejas formadas durante el ensayo. Indica un adelgazamiento localizado en regiones específicas de la pared de la copa. Los datos experimentales fueron proporcionados por la *KULeuven*, y la curva mostrada es un promedio para la altura de tres copas experimentales.

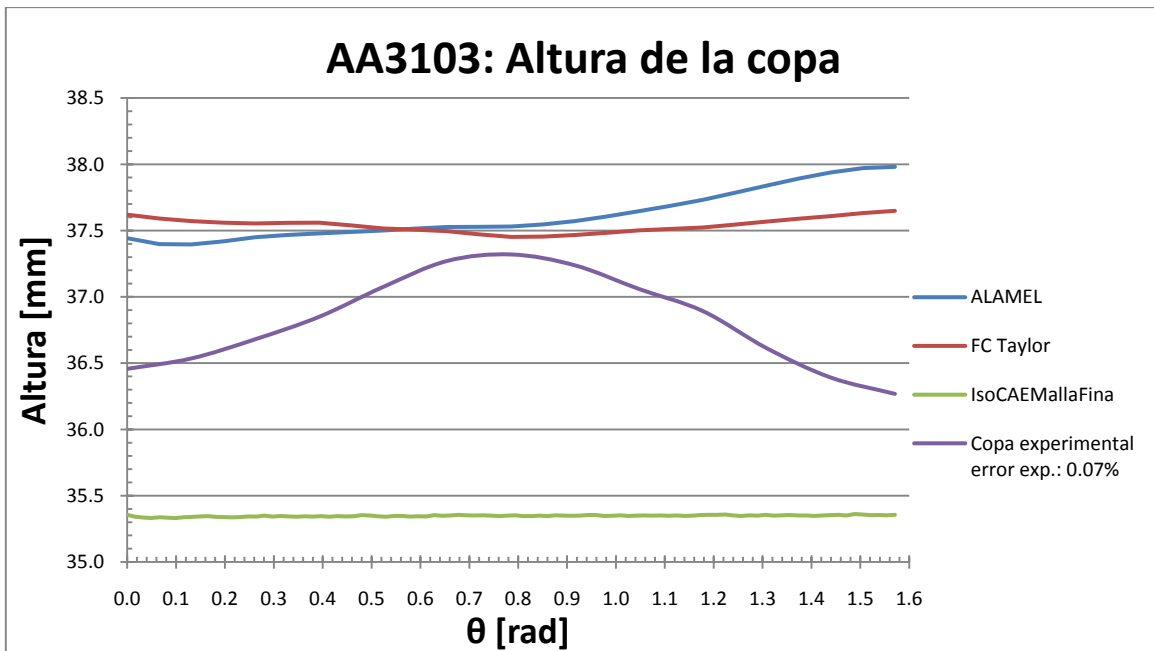


Fig. 3.30. Al igual que en la aleación AA1100, la altura experimental en la copa de la aleación AA3103 muestra la formación de una oreja en el cuarto de lámina; el tamaño de la oreja es menor al predicho por las aproximaciones ALAMEL y FC Taylor. Los datos experimentales fueron proporcionados por la *KULeuven*, y la curva mostrada es un promedio para la altura de tres copas experimentales.

## Discusión

Se ha llevado a cabo la investigación y desarrollo de un modelo numérico para estampado profundo capaz de predecir la forma final de la lámina estampada en un ensayo. Los materiales que se han modelado en las láminas a estampar pertenecen a la serie AA de aleaciones de aluminio (AA1100 y AA3103), utilizadas ampliamente en aquellos procesos de manufactura donde la ductilidad juega un papel importante en la elaboración del producto. Como un primer paso en esta nueva línea de investigación, se ha analizado el comportamiento de la lámina estampada como un material elasto-plástico con endurecimiento isotrópico sujeto a las condiciones de fronteras especificadas para el ensayo de Fukui; posteriormente se establecieron las técnicas necesarias para el análisis de los resultados numéricos. Cabe resaltar que las técnicas utilizadas en el modelo numérico isotrópico se utilizan también en aquellos modelos numéricos que incorporan un código de deformación plástica anisotrópica.

Los resultados de esta tesis no solamente provienen de los resultados numéricos de las simulaciones realizadas, tal y como se establece inicialmente en los objetivos. Se ha elaborado un marco teórico bastante extenso del área de investigación a partir de las referencias [2-25], el cual se espera sea de utilidad para la orientación inicial de nuevos proyectos en el área. Los aspectos económicos del estampado profundo, que se mencionan con ejemplos tecnológicos, tienen la intención de motivar y justificar cualquier investigación relacionada que se desee llevar a cabo. Se mencionan también los aspectos y parámetros experimentales que se utilizan en el experimento de Fukui (LDR y el parámetro de Lankford), para darle al lector una idea de cómo se miden los resultados experimentales de anisotropía y estampabilidad en láminas. El desarrollo de la plasticidad, desde su idealización isotrópica hasta las teorías actuales de plasticidad cristalina, se ha llevado a cabo de una manera estructurada. Esta estructura tiene por objetivo introducir paulatinamente los conceptos importantes de texturas cristalinas y programación por elementos finitos para lograr una mejor comprensión de la teoría involucrada. Por todo lo anterior, el marco teórico para estampado profundo desarrollado en esta tesis provee de la suficiente información para empezar investigaciones futuras en esta área. Sin duda, se recomienda como primera lectura para aquellos lectores interesados en seguir desarrollando esta línea de investigación.

Los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas se realizaron con una gran eficiencia en el cálculo numérico. La copa obtenida para las aleaciones AA1100 y AA3103 muestra claramente una altura constante, lo cual justifica que

esta investigación debe dirigirse hacia el estudio y desarrollo de nuevos códigos numéricos para deformación plástica anisotrópica. Los estudios experimentales reportados en aleaciones de aluminio con texturas altamente orientadas, muestran la formación de orejas que definen la altura de la copa [37]. El caso más general muestra la formación de cuatro orejas sobre toda la circunferencia situada en la parte superior de la copa.

Como se había mencionado, la eficiencia numérica en los resultados se ha controlado de manera eficaz según los criterios que establecen los manuales del programa Abaqus y la literatura que existe en el tema. El balance de energía realizado para las simulaciones muestra claramente que la energía artificial se conserva en niveles aceptables, logrando así una respuesta numérica del modelo acorde a la respuesta física definida con las consideraciones que se utilizan (propiedades de los materiales, condiciones de frontera, etc.). El uso de integración reducida en los elementos finitos previene el error numérico locking, además de acelerar el proceso de cálculo en las simulaciones. Como consecuencia de lo anterior, los resultados numéricos ahora muestran el efecto hourglassing que se produce al utilizar integración reducida. La medición de los espesores en la copa muestra una variación muy pequeña que se considera constante; esto se ha logrado como consecuencia del mallado fino para el modelo numérico IsoCAEMallaFina. Para este modelo, el espesor muestra valores más grandes que en los modelos FC Taylor y ALAMEL, debido a que no existe la formación de orejas como consecuencia del modelado de deformación plástica por texturas cristalinas. Es por esta razón que la altura alcanzada en la copa se observa menor en el modelo IsoCAEMallaFina, y mayor altura alcanzada en los modelos FC Taylor y ALAMEL. El comportamiento elasto-plástico de las aleaciones se ve reflejado en los espesores y alturas calculados con la malla fina; la aleación AA1100 muestra un endurecimiento isotrópico menor que el observado en la aleación AA3103, lo cual propicia que se requieran sollicitaciones mayores para deformar a la aleación AA3103. Es por esta razón que los espesores se muestran mayores para la aleación AA3103 y la altura máxima de la copa se muestra mayor en la aleación AA1100.

El uso de una malla con menor número de elementos finitos en el modelo isotrópico muestra errores de cálculo significativos, puesto que calcula alturas similares a las obtenidas en FC Taylor y ALAMEL donde también se ha utilizado la misma malla; esto sugiere que los resultados numéricos para los modelos FC Taylor y ALAMEL pueden mejorarse aun más si la malla de elementos finitos a utilizar se optimiza. La sugerencia de los expertos de Abaqus considera que la reducción del efecto hourglassing se aminora en gran medida con una malla de elementos finitos óptima; es decir, es necesario encontrar un balance entre el

número de elementos finitos utilizados y el tiempo de cómputo [38]. A mayor número de elementos finitos, mayor tiempo de cálculo; de lo contrario, la precisión numérica se ve perjudicada.

El modelo numérico para estampado profundo presentado en esta tesis arroja resultados óptimos como se ha discutido en los párrafos anteriores. Sin embargo, la idea principal de esta tesis es promulgar el desarrollo de ideas nuevas en el área de investigación, por lo que este modelo numérico no está restringido a mejorarse en futuros trabajos a realizar. Los modelos geométricos que se utilizaron para representar al dado, punzón y pisador del ensayo de Fukui son un ejemplo. Cuando éstos se consideran como sólidos deformables, es posible definir las cargas que actúan sobre ellos según la ecuación constitutiva del material asignado. Con la consideración anterior, es posible definir y estudiar la respuesta del modelo numérico considerando fatiga en las piezas mencionadas durante el ensayo. Se ha dedicado en el capítulo dos una sección amplia que explica los aspectos generales de la naturaleza de la fricción en los procesos de manufactura. A grandes rasgos, el comportamiento de la fricción se vuelve complejo puesto que el contacto y movimiento relativo entre superficies siempre existe, sin importar el espesor de la capa lubricante que se genere entre ellas. En la literatura se han propuesto modelos para optimizar este espesor y disminuir el coeficiente de fricción generado en las superficies; de hecho, en esta tesis se reporta un modelo numérico para la fricción seca en el estampado profundo. Sin embargo, ésta es una de las áreas de investigación con mayor aporte y desarrollo potencial. El efecto de la temperatura también es una consideración importante que puede ser investigada para incluirse en el modelo numérico. Existe una gran variedad de piezas cuya manufactura se realiza a través de procesos de estampado en caliente, como se menciona en el capítulo uno. La adición de la temperatura como parámetro de la ecuación constitutiva que describe el comportamiento del material es una mejora que puede agregarse al modelo numérico.

El ajuste entre modelo numérico y experimental se logra gracias a la predicción del estado de esfuerzos generado por el campo de desplazamientos en la lámina a estampar, de acuerdo a la ecuación constitutiva del material modelado. Sin embargo, los parámetros experimentales para medir la anisotropía en la lámina y su correspondiente grado de estampabilidad (parámetro de Lankford y LDR, respectivamente) no contemplan cargas sino desplazamientos. Por lo tanto, los resultados numéricos para el modelo deben de ajustarse con los datos experimentales obtenidos del ensayo de Fukui. La intención de esto es lograr una relación entre simulación numérica y experimento para poder controlar la carga impuesta por el troquel utilizado. Esto lograría que la carga impuesta por el troquel se vuelva una función del desplazamiento numérico y experimental, permitiendo

cuantificar dicha relación además de predecir la carga antes de utilizar el equipo. Se ha hecho una comparación entre copa experimental y modelos numéricos que muestra la necesidad de una malla de elementos finitos óptima para mejorar las predicciones que proporcionan las aproximaciones ALAMEL y FC Taylor; sin embargo, los resultados numéricos aun muestran discrepancias con las orejas formadas en la copa experimental. Esto significa que el área de investigación aun requiere de nuevos desarrollos y propuestas para poder formular una mejor explicación de los datos experimentales obtenidos.

Finalmente, el uso de códigos numéricos para plasticidad anisotrópica requiere de la revisión de los manuales de Abaqus, con el fin de investigar el lenguaje de programación que se utiliza para su desarrollo. En el apéndice uno se muestra una forma que resuelve la compatibilidad entre Abaqus y el compilador Fortran para que se puedan incluir subrutinas al análisis numérico que se realice en Abaqus. Sin embargo, la evaluación de la subrutina para deformaciones plásticas anisotrópicas requiere de un mayor conocimiento del lenguaje Fortran en caso de que se presente un error de programación en el código de la subrutina. El desarrollo de esta subrutina ha requerido de varios trabajos doctorales realizados por investigadores de la *KULeuven*, lo cual rebasa los alcances de esta tesis. Cabe destacar que esta área de programación relacionada con subrutinas escritas en lenguaje Fortran requiere de un alto dominio y experiencia del modelado numérico de procesos físicos. Por lo tanto, cualquier error de programación posterior relacionado con el lenguaje Fortran debe investigarse antes para su resolución. También se recomienda investigar en los manuales de Abaqus la estructura de la subrutina que se desee definir, puesto que cada una de ellas posee variables numéricas que deben definirse para que ésta funcione adecuadamente.

## Conclusiones

- Se ha elaborado un marco teórico profundo del tema: *Modelado del proceso de estampado profundo mediante un código para deformación plástica anisotrópica*. Se espera que éste sea de gran utilidad para futuras investigaciones relacionadas con el tema.
- Se ha desarrollado un modelo numérico isotrópico para el proceso de estampado profundo; el análisis del mismo muestra que la precisión y exactitud en los resultados son satisfactorios, por lo que no se afecta la respuesta física del modelo utilizado. Esto se refleja en la mínima variación del valor para el espesor y la altura máxima alcanzados en la copa. El mallado óptimo del modelo numérico isotrópico sugiere que los resultados numéricos para las aproximaciones FC Taylor y ALAMEL pueden mejorarse aun más.
- La evaluación de la subrutina que considera deformaciones plásticas anisotrópicas al modelo numérico en Abaqus requiere de una revisión del código y su programación, lo cual va más allá de los alcances de esta tesis. Sin embargo, se ha logrado establecer la compatibilidad entre el programa Abaqus y el compilador Fortran lo cual permite la incorporación de códigos personalizados al programa Abaqus.
- Se proponen diversas mejoras para el modelo numérico desarrollado en esta tesis, mostrando la necesidad de un trabajo a futuro para esta línea de investigación.

## Apéndice I

### Compatibilidad entre Abaqus y Fortran

El programa Abaqus cuenta con la opción de compilar aquellos códigos de programación (llamados también subrutinas) que realizan un propósito que ha sido definido por el usuario. Tal es el caso de la deformación plástica anisotrópica, del mallado adaptativo y remallado, del tipo de elemento finito, así como muchas otras opciones que ofrece Abaqus. Los lenguajes de programación utilizados para desarrollar las subrutinas de Abaqus son los compiladores Intel Fortran y Microsoft C++. Cada subrutina que se define en los manuales de Abaqus requiere de un esquema específico que está desarrollado ya sea en el lenguaje Fortran o en el lenguaje Microsoft C++. En el capítulo tres se compararon los resultados numéricos isotrópicos de esta tesis con los resultados numéricos anisotrópicos calculados a partir de una subrutina escrita en el lenguaje Fortran. Por lo tanto, este apéndice describe brevemente como se logra que el compilador Fortran y el programa Abaqus trabajen en conjunto durante una simulación numérica.

La tabla A1.1 muestra los requerimientos necesarios para que Abaqus y sus compiladores puedan trabajar entre sí.

Tabla A1.1. Sistema operativo y procesador necesarios para los compiladores.

Procesador	Compiladores
Windows/x86-32 bit	Intel Fortran 9.1 o superior, Microsoft Visual C++ 2005 SP1 (también se le conoce como Visual C++ 8.0) o superior.
Windows/x86-64 bit	Intel Fortran 9.1 o superior, Microsoft Visual C++ 2005 SP1 (también se le conoce como Visual C++ 8.0) o superior.

Sin embargo, la instalación del compilador Intel Fortran requiere a su vez de un programa adicional para que funcione correctamente. Por lo tanto, es necesario investigar cuales son los productos más recientes para Intel Fortran, con el propósito de lograr definir la compatibilidad entre sistema operativo, procesador y compilador. Aunque no se utilizó para los resultados de esta tesis, la tabla A1.2 muestra los programas que se requieren para que Abaqus y el compilador Fortran trabajen entre sí, logrando la compatibilidad entre ambos programas.

Tabla A1.2. Esquema posible de compatibilidad para Abaqus y Fortran.

Programas Instalados	Observaciones
Microsoft Visual Studio 2005	Este programa es necesario para configurar el ambiente de trabajo del compilador Intel Fortran.
Intel Visual Fortran 10.0.025 IA32	Se muestra la versión del compilador, así como el procesador necesario (IA32); esta versión también puede instalarse en procesadores y sistemas operativos de 64 bits.
Abaqus 6.8.1	Se instalan Abaqus Standard, Abaqus Explicit, Abaqus CAE, entre otros.

Una vez instalados satisfactoriamente tanto el compilador Intel Fortran como el programa Abaqus, es posible que el programa Abaqus aborte la simulación, debido a un error de programación señalado en el archivo <nombre del Job>.log cuando se intenta utilizar una subrutina; este error de configuración está relacionado con el archivo ifortvars.bat que instala el compilador Intel Fortran, y que éste utiliza para configurar las carpetas de los archivos de donde el compilador exporta la subrutina utilizada. La solución a este problema consiste en crear el vínculo entre Abaqus y Fortran manualmente, desde una ventana DOS de Windows. Ya en la ventana DOS, es necesario buscar la ubicación del archivo ifortvars.bat. Como ejemplo se muestra una línea de comando en la ventana DOS, donde se ubica dicho archivo.

C:\Program Files\ (x86) \Intel\Compiler\Fortran\9.1\em64t\bin\ (A1.1)

De tal forma que una vez ubicado en la línea (A1.1), se ejecuta el archivo ifortvars.bat para que éste configure las carpetas de acuerdo a las necesidades del compilador.

Una vez realizada la configuración con el archivo ifortvars.bat, es posible que aparezca nuevamente un error en el archivo <nombre del Job>.log, relacionado con el archivo ejecutable package.exe; este error se resuelve si se ejecuta el archivo package.exe desde una ventana DOS de Windows. La solución es copiar y pegar archivos <nombre>.dll que se despliegan cada vez que se ejecuta el archivo package.exe a la carpeta donde éste se encuentra; como ejemplo están los archivos ABQPAC\_Core.dll, ABQSPS\_Core.dll, ABQDMP\_Core.dll, etc. Para cualquier error adicional a los mencionados en este apéndice, existen foros de discusión en internet relacionados con la compatibilidad entre Abaqus e Intel Fortran (buscar en internet Dr. Fortran, por ejemplo).



## Apéndice II

### Adquisición de los resultados isotrópicos

Ya se ha mencionado anteriormente que la malla de elementos finitos en la lámina no sufre de rotación durante la simulación numérica para el caso isotrópico. Aprovechando este hecho, la medición de los espesores y alturas se torna más fácil que en el caso anisotrópico, donde si existe una rotación en cada incremento de deformación.

Lo primero que se realiza es obtener las coordenadas de los nodos interiores y exteriores una vez que la copa se haya formado (para eliminar exceso de energía artificial: tiempo del paso: 4.25E-03 seg). El archivo se obtiene de la siguiente forma: en el módulo de visualización de Abaqus CAE, abrir el menú Tools→XY Data→Create...; aparece una ventana con varias opciones, seleccionar ODB Field Output. En el menú que se despliega elegir Position: Unique Nodal; en la ventana aparecen las variables que se pueden medir en cada nodo. Elegir la opción COORD: Coordinates. La pestaña Elements/Nodes proporciona diversas formas de seleccionar nodos individuales o conjuntos de nodos desde el modelo visual de elemento finito (*pick from viewport*). Para seleccionar los nodos se ha utilizado la opción *pick from viewport*, además de considerar que el espesor se mide a las alturas de 10, 15, 20 y 25 mm desde el centro de la copa. Sin embargo, la distorsión de la copa en su dirección axial propicia que los nodos de los elementos finitos no queden exactamente a las alturas de estudio mencionadas. La forma más sencilla de calcular la posición de cualquier nodo de la copa desde su centro interior es mediante la definición de un vector de posición desde el centro interior de la copa. La ecuación (A2.1) muestra la forma para realizarlo.

$$\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^c(x_1^c, x_2^c, x_3^c) + \mathbf{x}'(x_1', x_2', x_3') \quad (\text{A2.1})$$

Donde  $\mathbf{x}$  es la posición general de los nodos de la copa,  $\mathbf{x}^c$  la posición del centro interior de la copa, y  $\mathbf{x}'$  la posición relativa de los nodos de la copa con respecto al centro interior de la misma. Esto se establece así debido a que las pruebas experimentales realizadas en la *KULeuven* se midieron desde el centro interior de la copa. Por lo tanto, para definir a  $\mathbf{x}'$  es necesaria la diferencia entre las coordenadas generales y las coordenadas del centro interior. Haciendo uso de esto, es posible determinar aquellos nodos interiores y exteriores que se encuentran más cercanos a las alturas estudiadas dentro de la copa.

Volviendo a la adquisición de datos (ventana *XY Data from ODB Field Output*) se seleccionan los nodos interiores y exteriores de la copa desde el modelo numérico visual para cada altura de estudio. Se hace clic en *Save*, y los datos COORD se guardan en un archivo temporal que crea Abaqus. Aquí se recomienda hacer la medición para cada altura e inmediatamente crear el reporte de los datos. Para hacer el reporte de los datos adquiridos, seleccionar *Report*→*XY*... Aparece una ventana donde muestra los archivos para cada uno de los nodos que se seleccionaron anteriormente. Seleccionar la coordenada 1 y crear un archivo <nombre del archivo>.rpt. Entonces, en la misma ventana ir a la pestaña *setup* para nombrar al archivo que contiene toda la información de las coordenadas de la copa y definir la carpeta donde se va a guardar (<nombre del archivo>.rpt). Este archivo con extensión rpt puede abrirse en cualquier hoja de cálculo. Este proceso se repite para las coordenadas 2 y 3, por lo que en total se crean tres archivos rpt. Una vez que se abren los archivos rpt con una hoja de cálculo, la información contenida en ellos aparece en renglones. Es decir, aparece una columna para los incrementos de tiempo, y en cada uno de sus renglones aparecen las coordenadas para los nodos seleccionados en el archivo rpt. Se recomienda copiar el renglón correspondiente a  $\Delta t = 4.25e - 03$  y pegar los datos como columna en una hoja de cálculo (pegado especial en *Microsoft Excel*) para poder aplicar la ecuación (A2.1) de manera iterativa.

Para obtener los espesores, es necesario volver al archivo ODB en el módulo de visualización. Cada espesor de la copa se calcula por medio de la coordenada radial de las coordenadas cilíndricas  $(R, \theta, z)$ . Esto significa que cada coordenada radial está definida sobre el plano  $R\theta$  que corta perpendicularmente a la copa; el corte de este plano se define según la altura estudiada ( $z$ ). Debido a que Abaqus ocupa un sistema de referencia rectangular, se debe de aplicar las transformaciones correspondientes para convertir los datos de las coordenadas a coordenadas cilíndricas. De tal forma que podemos calcular una  $R_{interior}$  que representa la distancia radial de los nodos interiores de la copa, medido desde el centro de la misma. Con la misma transformación de coordenadas, se calcula  $R_{exterior}$  para los nodos exteriores de la copa. La diferencia entre ambos radios define al espesor de la copa.

$$e = |R_{interior} - R_{exterior}| \quad (A2.2)$$

Finalmente, para la altura máxima de los nodos en la copa formada se aplica el procedimiento anterior (utilizando la opción *pick from viewport*) pero seleccionando los nodos que se encuentran en la parte más alta.

# Referencias

---

- [1] Agenda Estadística de los Estados Unidos Mexicanos INEGI, 2009. 12. Industria, cuadro 12.3. Valor de la producción de la industria manufacturera por subsector de actividad económica 2007 y 2008.
- [2] Verlinden B. et al., 2007. Aluminium beverage cans, in: Thermo-Mechanical Processing of Metallic Materials, first ed. Pergamon Materials Series Elsevier, UK, pp. 367-385.
- [3] Vollertsen F. et al., 2004. State of the art in micro forming and investigations in micro deep drawing. Journal of Materials Processing Technology 151, 70-79.
- [4] Liu Y. et al., 2004. FE simulation for concurrent design and manufacture of automotive sheet-metal parts. Journal of Materials Processing Technology 150, 145-150.
- [5] Jeswiet J. et al., 2008. Metal forming progress since 2000. CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology 1, 2-17.
- [6] Karbasian H., Tekkaya A.E., 2010. A review on hot stamping. Journal of Materials Processing Technology xxx, xxx-xxx.
- [7] Verlinden B. et al., 2007. Textural Developments during Thermo-Mechanical Processing, in: Thermo-Mechanical Processing of Metallic Materials, first ed. Pergamon Materials Series Elsevier, UK, pp. 153.
- [8] Hill, R., 1998. Miscellaneous Topics, in: The Mathematical Theory of Plasticity, first ed. Oxford Classics series, USA, pp. 282-287.
- [9] Hosford W., Caddell R., 1993. Cupping, redrawing and ironing, in: Metal Forming, Mechanics and Metallurgy, second ed. PTR Prentice-Hall Inc, USA, pp. 287-288.
- [10] Chakrabarty, J., 2006. Foundations of plasticity, in: Theory of Plasticity, third ed. Elsevier Butterworth-Heinemann, UK, pp. 59.
- [11] Steurer W., 1996. Crystal Structure of the Metallic Elements, in: Cahn R., Haseen P. (Eds.), Physical Metallurgy vol. 1, fourth ed. Elsevier Science B.V., The Netherlands, pp. 12,13.
- [12] Dieter G., 1986. Plastic Deformation of Single Crystals, in: Mechanical Metallurgy, SI Metric Edition Materials Science&Metallurgy McGraw Hill, UK, pp. 105, 107.
- [13] Dieter G., 1986. Plastic Deformation of Single Crystals, in: Mechanical Metallurgy, SI Metric Edition Materials Science&Metallurgy McGraw Hill, UK, pp. 117-119.
- [14] Argon S., 1996. Mechanical Properties of single-phase crystalline media: deformation at low temperature, in: Cahn R., Haseen P. (Eds.), Physical Metallurgy vol. 3, fourth ed. Elsevier Science B.V., The Netherlands, pp. 1908.
- [15] Hirth J., Lothe J., 1982. Slip Systems of Perfect Dislocations, in: Theory of Dislocations, second ed. John Wiley & Sons Inc., USA, pp. 295-298.
- [16] Verlinden B. et al., 2007. Modelling, in: Thermo-Mechanical Processing of Metallic Materials, first ed. Pergamon Materials Series Elsevier, UK, pp. 207.
- [17] Dieter G., 1986. Plastic Deformation of Single Crystals, in: Mechanical Metallurgy, SI Metric Edition Materials Science&Metallurgy McGraw Hill, UK, pp. 143.
- [18] Randle V., Engler O., 2010. Application of Diffraction to Texture Analysis, in: Introduction to Texture Analysis: Macrotecture, Microtexture and Orientation Mapping, second ed. Taylor and Francis Group CRC Press, USA, pp. 55.
- [19] Randle V., Engler O., 2010. Application of Diffraction to Texture Analysis, in: Introduction to Texture Analysis: Macrotecture, Microtexture and Orientation Mapping, second ed. Taylor and Francis Group CRC Press, USA, pp. 135.
- [20] Van Houtte P. et al., 2005. Deformation texture prediction: from de Taylor model to the advanced Lamel model. International Journal of Plasticity 21, 589-624.
- [21] Blau P., 1992. Glossary of Terms, in: Henry S. (Eds.), ASM Handbook vol. 18 Friction, Lubrication and Wear Technology, first ed. ASM International, USA, pp. 20.
- [22] Schmid S., Wilson W., 2001. Tribology in manufacturing, in: Bharat B. (Eds.), Modern Tribology Handbook vol. 2, first ed. CRC Press LLC, USA, pp. 1387.

- 
- [23] Schmid S., Wilson W., 2001. Tribology in manufacturing, in: Bharat B. (Eds.), Modern Tribology Handbook vol. 2, first ed. CRC Press LLC, USA, pp. 1407.
- [24] Schmid S., Wilson W., 2001. Tribology in manufacturing, in: Bharat B. (Eds.), Modern Tribology Handbook vol. 2, first ed. CRC Press LLC, USA, pp. 1408.
- [25] Hosford W., Caddell R., 1993. Cupping, redrawing and ironing, in: Metal Forming, Mechanics and Metallurgy, second ed. PTR Prentice-Hall Inc, USA, pp. 289.
- [26] <http://www.aluminium.org/>, 2010.
- [27] Information provided by The Aluminum Association, Inc. from Aluminum Standards and Data 2000 and/or International Alloy Designations and Chemical Composition Limits for Wrought Aluminum and Wrought Aluminum Alloys (Revised 2001).
- [28] Mase T.G., Mase E.G., 2000. Hooke's Law for Isotropic Media, Elastic Constants, in: Continuum mechanics for engineers, second ed. CRC Press LLC, USA.
- [29] Chakrabarty, J., 2006. Stresses and Strains, in: Theory of Plasticity, third ed. Elsevier Butterworth-Heinemann, UK, pp. 9,10.
- [30] Abaqus Analysis User's Manual. Chap. 19.2.1. Classical Metal Plasticity.
- [31] Getting started with Abaqus: interactive edition. 1.6. A quick review of the finite element method.
- [32] Abaqus Analysis User's Manual. Chap. 6.3.3. Explicit dynamic analysis.
- [33] Abaqus Theory Manual. Chap. 2.4.5. Explicit dynamic analysis.
- [34] Logan L., 2002. A first course in the finite element method. © 2002 Wadsworth Group, Thomson. Third edition, page 308.
- [35] Abaqus Analysis User's Manual. 6.3.3. Explicit Dynamic Analysis, Output.
- [36] Abaqus Theory Manual. 3.1.1. Element Library: overview.
- [37] Verlinden B. et al., 2007. Plasticity, in: Thermo-Mechanical Processing of Metallic Materials, first ed. Pergamon Materials Series Elsevier, UK, pp. 43, 44.
- [38] Abaqus Analysis User's Manual. 24.1.1. Solid (continuum) elements, choosing between full- and reduced- integration elements.