



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA

COMPENSACION DE PERTURBACIONES DESACOPLADAS  
USANDO MODOS DESLIZANTES DE ALTO ORDEN

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
**DOCTOR EN INGENIERÍA**  
INGENIERIA ELÉCTRICA - CONTROL

Presenta:

**JOSÉ ANTONIO ESTRADA TORRES**

TUTOR:

Dr. LEONID FRIDMAN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez  
Secretario: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez  
Vocal: Dr. Leonid Fridman  
1<sup>er.</sup> Suplente: Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoría  
2<sup>do.</sup> Suplente: Dr. Jorge Ángel Dávila Montoya

Posgrado de Ingeniería  
Ciudad Universitaria, México, D.F.

TUTOR DE TESIS:  
Dr. Leonid Fridman

---

FIRMA



# Resumen

En esta tesis se proponen esquemas de control para compensación de perturbaciones para una clase de sistemas no lineales de una entrada y una salida. La clase de sistemas mencionada recibe el nombre de sistemas en la forma de retroalimentación estricta y se caracterizan por tener una estructura triangular. Se propone un esquema, al cual denominamos diseño jerárquico, de diseño basado en los algoritmos de control por modos deslizantes de alto orden. El control obtenido mediante el esquema de diseño propuesto, puede asegurar que la salida del sistema realice seguimiento exacto de una señal de referencia suave. Lo anterior se logra a pesar de la presencia de perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas, tanto acopladas como no acopladas.

En una segunda propuesta se utilizan modos deslizantes de alto orden integrales, con los cuales se puede usar el conocimiento de las condiciones iniciales del sistema para iniciar en el modo deslizante de orden correspondiente evitando así el periodo transitorio. Con este procedimiento es posible ampliar la región de atracción del controlador obtenido con el diseño jerárquico.

Se realiza un análisis de estabilidad, usando la metodología de análisis de cascadas, para el caso particular de un sistema de segundo orden en lazo cerrado con un controlador obtenido mediante el esquema de diseño jerárquico. Este análisis está basado en la teoría de Lyapunov. Los resultados obtenidos permiten concluir estabilidad en tiempo finito para el caso perturbado, que es un caso más general que el tratado en el análisis de cascadas tradicional.

Se propone un esquema de diseño que combina la técnica de diseño conocida como backstepping con el diseño jerárquico arriba mencionado. Con este diseño, se combinan las características de estabilidad otorgadas por el backstepping, cuyos resultados pueden ser semiglobales e incluso globales, con las características de exactitud y robustez ante

perturbaciones del diseño jerárquico.

Finalmente, se presentan los resultados experimentales obtenidos al aplicar el diseño jerárquico, propuesto en esta tesis, a un sistema mecánico. Este sistema mecánico es conocido como péndulo de rueda de inercia, el cual es un sistema subactuado en el que se realizó el seguimiento de una señal periódica por la posición del péndulo. Esta señal periódica se obtuvo al hacer oscilar un modelo línealizado del mismo péndulo de rueda de inercia.

---

# Abstract

In this thesis, control algorithms for compensation of unmatched perturbations, for a class of nonlinear single input-single output systems, are proposed. The class of nonlinear systems aforementioned are known as systems in strict-feedback form and present a triangular structure. A higher order sliding modes based algorithm, that we named hierarchical design, is proposed. The controller obtained through the proposed design algorithm achieves exact output tracking of a smooth reference signal, despite the presence of matched and unmatched external perturbations and parametric uncertainties.

In a second proposal, integral higher order sliding modes are applied in order to use the knowledge of the initial conditions of the system. Thus, the sliding mode motion is established from the beginning avoiding then the transient. By this procedure is possible to enlarge the region of attraction of the controller obtained through the hierarchical design.

The stability analysis of a second order system, in closed loop with a hierarchical design obtained controller, is carried out using the cascade analysis theory. This analysis is based on Lyapunov theory. The results allow to conclude finite time stability for the perturbed case, which is more general than the traditional one in standard cascade analysis.

It is proposed a control design scheme that combines backstepping with the hierarchical design above mentioned. This design combines the semiglobal, or global, stability obtained through backstepping with the exactness and robustness of the hierarchical design.

Finally, experimental results of the application of the hierarchical design to a mechanical system are presented. The mechanical system is known as the inertia wheel pendulum, which is an underactuated system. The goal was position tracking of a periodic signal by

the pendulum. The periodic signal is obtained by generating oscillations on a linearized inertia wheel pendulum model.

---

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del Arte . . . . .	2
1.2. Motivación . . . . .	4
1.3. Objetivos . . . . .	5
1.4. Contribuciones y estructura de la tesis . . . . .	6
<b>2. Antecedentes</b>	<b>9</b>
2.1. Grado relativo . . . . .	9
2.2. Forma de retroalimentación estricta . . . . .	12
2.3. Inclusiones diferenciales y homogeneidad . . . . .	12
2.4. Modos deslizantes de alto orden . . . . .	15
2.4.1. Propiedades de homogeneidad de MDAO . . . . .	15
2.4.2. Control cuasicontinuo homogéneo por MDAO . . . . .	18
<b>3. Compensación de perturbaciones usando MDAO</b>	<b>21</b>
3.1. Planteamiento del problema . . . . .	22
3.2. Algoritmo de diseño . . . . .	23
3.2.1. Prueba de convergencia . . . . .	25
3.3. Ejemplo . . . . .	27
3.3.1. Suavización de la señal de control . . . . .	31
<b>4. Diseño jerárquico con MDAO integrales</b>	<b>35</b>
4.1. MDAO Integrales . . . . .	36
4.2. Controlador por diseño jerárquico con MDAO integrales . . . . .	40
4.2.1. Modificación al control por diseño jerárquico . . . . .	40
4.2.2. Prueba de convergencia . . . . .	41
4.3. Ejemplo . . . . .	43
<b>5. Estudio de estabilidad mediante teoría de cascadas</b>	<b>47</b>
5.1. Estabilidad de Cascadas NLVT . . . . .	49

5.2. Estudio de estabilidad sin función de Lyapunov . . . . .	51
5.3. Estudio de estabilidad con función de Lyapunov. . . . .	54
5.4. Ejemplo . . . . .	56
<b>6. Combinación de MDAO y <i>Backstepping</i></b>	<b>61</b>
6.1. <i>Backstepping</i> . . . . .	62
6.2. Diseño combinado MDAO- <i>Backstepping</i> . . . . .	65
6.3. Ejemplos . . . . .	73
6.3.1. Sistema de segundo orden . . . . .	73
6.3.2. Sistema de tercer orden . . . . .	76
<b>7. Resultados experimentales</b>	<b>81</b>
7.1. Generación de trayectoria deseada . . . . .	84
7.2. Seguimiento de la trayectoria deseada . . . . .	86
<b>8. Conclusiones</b>	<b>91</b>
<b>Apéndices</b>	<b>95</b>
<b>A. Demostración de los Teoremas 2.1 y 2.2</b>	<b>97</b>
<b>B. Función de Lyapunov para el algoritmo Twisting</b>	<b>101</b>
<b>C. Cálculo de ganancias del doble relevador</b>	<b>107</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>111</b>

---

---

# Introducción



El problema de diseño de control para sistemas no lineales con perturbaciones es un problema aún abierto a propuestas de nuevas soluciones. Cuando se trata de perturbaciones que cumplen la condición de acoplamiento, existen diferentes técnicas que permiten alcanzar cierto nivel de robustez del control diseñado. El rediseño de Lyapunov, ver por ejemplo [Attaullah y Khalil, 2008], y el control por modos deslizantes [Utkin, 1992], cuyo control es discontinuo, son técnicas que pueden asegurar robustez a perturbaciones acopladas. Sin embargo, cuando se habla de incertidumbres o perturbaciones no acopladas la técnica más usada para el diseño es la conocida como *backstepping*, cuya primer versión fue reportada en [Kokotović y otros, 1991].

El *backstepping* es un procedimiento recursivo que combina la obtención de una función de Lyapunov con el diseño por realimentación. En esta técnica el problema de diseño para el sistema completo se separa en una serie de subsistemas de menor orden, que incluso pueden llegar a ser escalares. Aprovechando que para sistemas de menor orden y sistemas escalares hay una mayor flexibilidad de diseño, se puede resolver el problema de estabilización, seguimiento y control robusto con condiciones menos restrictivas que las que exigen otros métodos. El *backstepping* se puede aplicar en sistemas con estructura triangular, al menos a bloques. Dicha estructura es tal que cada estado puede ser controlado por otro, es decir, que algunos estados son usados como control virtual, en una forma escalonada, hasta llegar al estado en el que aparece la entrada de control real. Se puede

ver como una conexión en cascada donde el primer estado tiene como entrada un segundo estado a través de un integrador, este segundo estado a su vez, tiene como entrada un tercero, también a través de integrador, y así sucesivamente hasta llegar al estado en el que aparece la entrada de control real.

El procedimiento de diseño por *backstepping*, consiste en tomar el primer subsistema y aprovechando la estructura triangular, diseñar un control virtual suave que lo estabilice. Luego se busca una función de Lyapunov para este primer control virtual que asegure la estabilidad asintótica del primer subsistema. Enseguida se procede a hacer un cambio de coordenadas tal que la derivada del primer control virtual aparece ahora en el segundo subsistema. Lo que se obtiene después del cambio de coordenadas es que el primer subsistema es estable cuando su entrada es cero. Para el segundo subsistema se procede a diseñar un nuevo control, para ello se agrega a la función de Lyapunov, conocida del primer subsistema, un término que depende de la variable introducida para hacer el cambio de coordenadas antes mencionado. Al calcular la derivada de la nueva función de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema, que ahora involucra a los primeros dos subsistemas, se elige el control de tal forma que asegure que dicha derivada sea negativa, es decir que asegure estabilidad asintótica. Este procedimiento se repite hasta llegar a la entrada de control real, en cada paso se agrega un término a la función de Lyapunov y se obtiene un nuevo control virtual cuya complejidad también aumenta. Mediante *backstepping*, es posible asegurar estabilidad asintótica para sistemas triangulares a pesar de la presencia de perturbaciones desacopladas, con la condición de que éstas sean acotadas por la norma del estado; si las perturbaciones consideradas no se desvancen con la norma del estado entonces sólo es posible asegurar estabilidad a una región cuya magnitud dependerá de la cota de las perturbaciones.

## 1.1. Estado del Arte

Como se puede apreciar por lo arriba mencionado, el *backstepping* hace del diseño por retroalimentación un procedimiento sistemático que involucra una transformación de coordenadas paso a paso y la obtención, en cada paso, de un control virtual basado en una

---

función de Lyapunov. El problema es que se llega a leyes de control complejas que demandan gran capacidad de cómputo, que se incrementa con el orden del sistema, por lo que en ocasiones no es realizable, prácticamente hablando. Tratando de solucionar esta desventaja se han propuesto esquemas que combinan el diseño por *backstepping* con otras técnicas de control robusto, especialmente el control de estructura variable [Freeman y Kokotović, 1993], [Liu y Zinober, 1996].

En [Bartolini y otros, 2000] se estudia la combinación del control por modos deslizantes de segundo orden con *backstepping*, esto con el objetivo de reducir la demanda de cálculo del *backstepping*. Después en [Ferrara y Giacomini, 2001] se vuelve a estudiar esta combinación, pero en este artículo lo que se busca es aplicar modos deslizantes de segundo orden a sistemas con perturbaciones no acopladas. El procedimiento de diseño es igual al de *backstepping* con la diferencia de que es detenido en el paso  $n - 1$  y se introducen dos nuevas variables obtenidas mediante la apropiada selección de la superficie de deslizamiento. Los resultados obtenidos aseguran estabilidad asintótica localmente. En [Scarrat y Zinober, 2000] se extiende la viabilidad de la aplicación de un diseño que combina modos deslizantes y *backstepping*, a sistemas que no están en la forma triangular, con la condición de que sean observables y de fase mínima, separando el diseño del control de la identificación de los parámetros con incertidumbre; los efectos desestabilizadores de la identificación se compensan mediante la introducción de amortiguamiento no lineal. En [Koshkouei y Zinober, 2000] se sortea la condición de fase mínima para sistemas que pueden ser transformados a una forma especial (forma de retroalimentación semiestricta). *Todos estos trabajos se basan esencialmente en el diseño por backstepping y sólo en los pasos finales introducen el control por modos deslizantes.*

El control por modos deslizantes, que como se ha mencionado no compensa perturbaciones desacopladas [Drazenovic, 1969], también ha sido combinado con otras técnicas de control con el fin de robustificar el diseño ante perturbaciones no acopladas [Davis y Spurgeon, 1993]. En [Choi, 2003] se desarrolla un método de diseño en el que la superficie de deslizamiento es conmutada usando un criterio basado en desigualdades matriciales lineales (LMI). En lo que se refiere a la elección de la matriz de proyección, [Castaños y Fridman, 2006] propone un método de elección que asegura que las perturbaciones desacopladas no serán amplificadas y se minimiza su efecto, en este método se combina el control  $H_\infty$  con control por modos deslizantes integrales. El resultado anterior es generalizado, para en que la matriz que premultiplica al control depende del estado, en [Rubagotti y otros, 2011].

El problema de control robusto para sistemas en la forma no lineal controlable por bloques (forma NCB) [Loukianov y Utkin, 1981], es abordado en [Loukianov, 2002] en donde se aplican modos deslizantes para compensar la incertidumbre acoplada y la dinámica de orden reducido que se obtiene, una vez que se alcanza el modo deslizante, es estabilizada mediante el enfoque de alta ganancia. Para ello se realiza una transformación de coordenadas adicional a la forma NCB, la cual lleva al sistema a una forma lineal, y se introduce la nueva dinámica deseada. Los parámetros de la forma lineal se eligen lo suficientemente grandes, en forma jerárquica, y tomando en cuenta la cota de las perturbaciones, para que la dinámica estable domine a la dinámica de las perturbaciones, logrando acotamiento final de las soluciones. En esta misma línea en [Huerta-Avila y otros, 2007], se estudia una aplicación práctica de compensación de perturbaciones desacopladas en el control descentralizado de generadores síncronos. El esquema propuesto combina control por bloques [Loukianov, 1998], control integral por modos deslizantes [Utkin y otros, 1999] y control por modos deslizantes anidados [Adhami-Mirhosseini y Yazdanpanah, 2005]. Las dos últimas se aplican para suprimir las perturbaciones desacopladas. Siguiendo la técnica de control por bloques algunos estados son usados como controles virtuales. De nuevo se realiza una transformación de coordenadas que introduce una dinámica lineal pero además se incluye un término adicional destinado a compensar las perturbaciones desacopladas. Debido a esta transformación es necesario que cada control virtual sea suave, ya que es necesario diferenciarlo, por lo que en el término adicional se usa la función sigmoide en lugar de la función signo, lo cual provoca pérdida de exactitud.

## 1.2. Motivación

Hasta aquí, se han mencionado trabajos que combinan diferentes técnicas para diseñar controles robustos ante perturbaciones desacopladas. A excepción de los métodos que se concentran en la selección de la matriz de proyección, todos los otros usan la idea de control virtual. Con *backstepping* se corre el riesgo de llegar a leyes de control tan complejas que el cálculo numérico demande una capacidad de cálculo enorme, por otra parte tiene la ventaja de que, al cumplirse ciertas condiciones, una debida selección de ganancias

---

puede hacer que el controlador tenga validez global. Sin embargo, *backstepping* no permite asegurar estabilidad asintótica si existen perturbaciones externas, en otras palabras, perturbaciones que no dependen del estado.

Además, debido a la necesidad de diferenciar cada control virtual, es necesario que estos sean suaves por lo que no es posible aplicar en ellos modos deslizantes estándar, empleados en gran variedad de aplicaciones por sus características de robustez y tiempo de convergencia finito. Esta dificultad podría eludirse, por ejemplo usando modos deslizantes de alto orden (MDAO)<sup>1</sup> [Fridman y Levant, 2002], sin tener que recurrir a la introducción de funciones sigmoide, que como se ha mencionado provoca pérdida de exactitud.

### 1.3. Objetivos

En este trabajo se desea utilizar control por MDAO, para compensar el efecto de perturbaciones en sistemas no lineales en la forma de retroalimentación estricta.

Se desea mejorar los resultados de estabilidad a una región que se obtienen con *backstepping*, cuando en el sistema se presentan tanto incertidumbre paramétrica como perturbaciones externas. Mediante MDAO se pretende obtener no sólo estabilidad asintótica sino estabilidad en tiempo finito.

En la primera propuesta se introducirá un esquema de diseño que permita asegurar estabilidad en tiempo finito del origen del sistema de error. Después, en una segunda propuesta se buscará ampliar la región de atracción mediante el uso de los llamados MDAO integrales.

En la primera propuesta, se hará uso de la suposición de que las cotas de las funciones del sistema se mantienen durante el transitorio previo al establecimiento de los modos deslizantes. En un análisis posterior se estudiará el efecto del transitorio con técnicas de Lyapunov, usando la metodología de análisis de cascadas, aún cuando se carezcan de funciones de Lyapunov conocidas para la gran mayoría de los algoritmos de MDAO.

---

<sup>1</sup>HOSM por las siglas en inglés de *Higher Order Sliding Modes*

Buscando obtener estabilidad global, o al menos semiglobal, se propondrá una combinación de diseño usando la técnica de *backstepping* y el diseño de compensación de perturbaciones basado en MDAO con estabilidad local mencionado anteriormente.

Con el fin de verificar experimentalmente los resultados teóricos, se aplicará el algoritmo de la primera propuesta de diseño al problema de seguimiento de oscilaciones generadas en un sistema mecánico subactuado.

## 1.4. Contribuciones y estructura de la tesis

Previo a los capítulos en que se presentan las contribuciones del trabajo de investigación, en el capítulo 2 se presentan una serie de conceptos que posteriormente son utilizados en los algoritmos de diseño. Este capítulo consta de cuatro secciones en las que se presenta el concepto de grado relativo, la llamada forma de retroalimentación estricta y posteriormente se introducen los conceptos sobre inclusiones diferenciales y homogeneidad. Conceptos en los que se fundamenta la estabilidad de los controladores por MDAO.

Las contribuciones de la tesis son presentadas a partir del capítulo 3, son listadas a continuación, a la vez que se hace mención de los diferentes trabajos publicados reportando los resultados correspondientes

- El algoritmo de diseño presentado en el capítulo 3, cuyas versiones preliminares fueron reportadas en [Estrada y Fridman, 2008b], [Estrada y Fridman, 2008a] y su versión final en [Estrada y Fridman, 2010b], es aplicable a sistemas no lineales en la forma de retroalimentación estricta. Logra seguimiento exacto en tiempo finito de la señal deseada a pesar de la presencia de perturbaciones tanto acopladas como no acopladas. En adelante al hablar de perturbaciones nos referimos tanto a incertidumbre paramétrica como a perturbaciones externas. El tipo de control por modos deslizantes de alto orden usado aquí es el llamado cuasicontinuo, el cual se elige porque tiene la característica de ser discontinuo única y exclusivamente en la variedad de deslizamiento correspondiente, la cual está determinada por el orden del controlador. El diseño se realiza en una forma jerárquica, definiendo en el primer
-

paso la dinámica deseada para la salida mediante la señal de referencia y en cada paso subsecuente la dinámica de cada estado está determinada por el anterior con lo que el diseño es sistemático.

- La propuesta mencionada en el punto anterior, a la cual nos referiremos como diseño jerárquico, hace uso de la suposición de ciertas cotas sobre las funciones del sistema, dichas cotas deben ser mantenidas durante el transitorio para asegurar la estabilidad. Si estas condiciones no se cumplen globalmente, errores iniciales grandes pueden provocar la necesidad de reajustar las ganancias del controlador. Sin embargo, es posible asegurar *estabilidad semi global* si se modifica el diseño para usar MDAO integrales. Al hacerlo se tiene la posibilidad de tomar las condiciones iniciales arbitrarias, que se suponen conocidas, como si fueran los valores deseados para cada estado y proponiendo trayectorias auxiliares para cada uno de ellos, se llega de una forma suave al seguimiento de la verdadera señal deseada. Esta propuesta fue reportada en [Estrada y Fridman, 2010a] y es presentada en el capítulo (4).
- Para el caso de la propuesta de diseño jerárquico, el cálculo de la señal de control real es más sencilla que cuando se usa la modificación con MDAO integrales. Tomando en cuenta esto en el capítulo 5, se aplica la metodología de análisis de estabilidad de sistemas en cascada para analizar la estabilidad de la primera propuesta de diseño, cuando es aplicada a un sistema de segundo orden. *Dicho análisis permite obtener información sobre las condiciones de crecimiento que el término de interconexión debe cumplir para asegurar la estabilidad.* Dos análisis son presentados. En el primero no se conoce una función de Lyapunov para el algoritmo de modos deslizantes de segundo orden, los resultados de este primer análisis fueron reportados en [Estrada y otros, 2010b]. En el segundo análisis en sí se usa una función de Lyapunov conocida para el algoritmo de segundo orden conocido como *twisting*, lo que representa una modificación al algoritmo originalmente propuesto con algoritmos de MDAO cuasicontínuos los; los resultados de esta segunda propuesta de análisis han sido aceptados en el *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*.
- En el capítulo (6) se presenta un diseño que combina el diseño jerárquico con la técnica de *backstepping*. El diseño así obtenido combina las bondades del *backstepping*, como son el uso de todo el conocimiento que se tiene del sistema en el controlador, de tal forma que se asegura estabilidad semi global o global y, por otra parte, gracias

a los términos con MDAO, el controlador también asegura estabilidad en tiempo finito y exacta al origen del sistema de error.

- Con el objetivo de probar experimentalmente el diseño jerárquico, se realizaron pruebas en un sistema mecánico conocido como péndulo de rueda de inercia. Aplicando el diseño de jerárquico al modelo no lineal, se obtiene un controlador con el que se logró hacer seguimiento de oscilaciones predecidas para un modelo lineal del sistema. Los resultados de estos experimentos permitieron la publicación de los siguientes trabajos [Estrada y otros, 2010a] y [Estrada y otros, 2011].

Finalmente en el capítulo 8 se presentan las conclusiones y se amplía la discusión de los resultados. En este trabajo de investigación no se consideraron los efectos de ruido en la medición de las variables de estado, siendo este un punto crucial para aplicaciones prácticas y que queda abierto a futuras investigaciones.

---



La finalidad de este capítulo es introducir el tipo de sistemas para los que es aplicable el esquema de control propuesto y estudiar los conceptos matemáticos en los que se basa dicho diseño. En la primera sección se da la definición de grado relativo [Isidori, 1989]. En la segunda sección se da la definición de la llamada forma de retroalimentación estricta [Khalil, 2002]; también en esta segunda sección se dan las condiciones para que un sistema no lineal pueda ser llevado a dicha forma. La importancia de la forma de retroalimentación estricta en este trabajo, es que el esquema de compensación de perturbaciones desacopladas propuesto es aplicable precisamente a sistemas que tienen esa forma. En la sección 3 se introducen conceptos referentes a inclusiones diferenciales y sus soluciones, se dan las definiciones de homogeneidad y de orden del modo deslizante. En la última sección se estudian las propiedades de homogeneidad de los modos deslizantes de alto orden y se presenta el control cuasicontinuo por modos deslizantes de alto orden.

## 2.1. Grado relativo

A lo largo del presente trabajo, el concepto de grado relativo de un sistema es utilizado frecuentemente. Es por ello que se incluye aquí su definición formal, primero para sistemas con una entrada una salida y luego para sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas.

Considérese el siguiente sistema no lineal con una entrada y una salida

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde  $f, g, h$  son suficientemente suaves en  $D \subset R^n$  ( $f, g$  son campos vectoriales). La derivada de la salida está dada por

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}[f(x) + g(x)u] \triangleq L_f h(x) + L_g h(x)u$$

donde  $L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x)$  se denomina la derivada de Lie de  $h$  con respecto a  $f$  (o a lo largo de  $f$ ), de forma análoga  $L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x)$  es la derivada de Lie de  $h$  con respecto a  $g$ . Esta notación es conveniente cuando se realizan diferenciaciones repetidas, ya sea respecto del mismo o respecto de otro campo vectorial. Suponiendo que  $L_g h(x) = 0$ , al calcular la segunda derivada de  $y$  se tiene

$$\ddot{y} = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x}[f(x) + g(x)u] = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u$$

Si el término que multiplica a la entrada es distinto de cero, se dice que el grado relativo del sistema es 2. Tomando en cuenta lo arriba mencionado, se introduce ahora la definición de grado relativo.

**Definición 2.1** [Isidori, 1989] *Se dice que el sistema (2.1) tiene grado relativo  $r$  en un punto  $x^0$  si*

1.  $L_g L_f^k h(x) = 0$  para toda  $x$  en una vecindad de  $x^0$  y toda  $k < r - 1$ .
2.  $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$

Lo anterior significa que la entrada aparece por primera vez en la  $r$ -ésima derivada total de la salida  $y$ . Nótese que pueden existir puntos donde el grado relativo no está definido. Considérese el sistema multivariable (2.2), por facilidad únicamente se considerarán aquellos sistemas con el mismo número de entradas y de salidas.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.2}$$

con  $x \in R^n$  y donde

$$\begin{aligned} u &= (u_1, \dots, u_m)^T \\ y &= (y_1, \dots, y_m)^T \\ g(x) &= [g_1(x) \dots g_m(x)]; \quad g(x) \in R^{n \times m} \\ h(x) &= (h_1(x), \dots, h_m(x))^T \end{aligned}$$

**Definición 2.2** [Isidori, 1989] Se dice que el sistema (2.2) tiene grado relativo vectorial  $(r_1, \dots, r_m)$  en un punto  $x^0$  si

1.

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0$$

para  $1 \leq j \leq m$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $k < r_i - 1$ , y para toda  $x$  en una vecindad de  $x^0$ .

2. La matriz  $A(x) \in R^{m \times m}$  es no singular en  $x = x^0$

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Cada uno de los números  $r_1, \dots, r_m$  está asociado al  $i$ -ésimo canal de salida del sistema. Por definición para toda  $k < r_i - 1$  el vector renglón

$$[L_{g_1} L_f^k h_i(x) \dots L_{g_m} L_f^k h_i(x)]$$

es cero para toda  $x$  en una vecindad de  $x^0$  y para  $k = r_i - 1$ , este vector tiene al menos un elemento diferente de cero en  $x^0$  (la matriz es no singular). Como consecuencia de la primera condición se tiene que para cada  $i$ , existe al menos un valor de  $j$  tal que el sistema (una entrada y una salida) con entrada  $u_j$  y salida  $y_i$  tiene exactamente grado relativo  $r_i$  en  $x^0$  y para cualquier otro valor de  $j$  (i.e. de entrada) el correspondiente grado relativo, si existe, necesariamente es mayor o igual a  $r_i$ .

## 2.2. Forma de retroalimentación estricta

El sistema de una entrada-una salida dado por la ecuación (2.4), está en la forma de retroalimentación estricta [Khalil, 2002] y es el tipo de sistemas estudiados en este trabajo.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1) + g_1(t, x_1)x_2 + \omega_1(t, x_1) \\ \dot{x}_i &= f_i(t, \bar{x}_i) + g_i(t, \bar{x}_i)x_{i+1} + \omega_i(t, \bar{x}_i) \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x) + g_n(t, x)u + \omega_n(t, x) \\ i &= 2, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{x}_i = [x_1 \dots x_i]^T$ ;  $u \in \mathbb{R}$  es la señal de control. Además se supone que  $f_i(t, \bar{x}_i)$  y  $g_i(t, \bar{x}_i)$  son funciones suaves y que el término desconocido  $\omega_i(t, \bar{x}_i)$ , debido a incertidumbre de los parámetros y a las perturbaciones externas, es acotado;  $g_i(t, \bar{x}_i) \neq 0 \quad \forall x \in D \subset \mathbb{R}^n, t \in [0, \infty)$ . Nótese que  $f_i(t, \bar{x}_i)$  y  $g_i(t, \bar{x}_i)$  y  $\omega_i(t, \bar{x}_i)$  dependen únicamente de los estados  $x_1 \dots x_i$ , en otras palabras, la estructura es triangular. Esta relación de dependencia es importante, como se verá en el siguiente capítulo, debido a las condiciones que se deben satisfacer respecto al grado relativo del sistema, para aplicar el algoritmo de diseño propuesto.

## 2.3. Inclusiones diferenciales y homogeneidad

A continuación se presentan algunas definiciones y conceptos que son usados en la sección 2.4, para llegar a los resultados ahí obtenidos. La primera da una definición de semicontinuidad por arriba para funciones multivaluadas (mapeos entre conjuntos).

**Definición 2.3** [Aubin, 1991] *Se dice que una función multivaluada  $F : X \mapsto Y$  es semicontinua por arriba en  $x \in X$  si y sólo si para toda vecindad  $U$  de  $F(x)$ ,*

$$\exists \eta > 0 \text{ tal que } \forall x' \in B_x(x, \eta), \quad F(x') \subset U$$

donde  $B_x$  es una bola de radio  $\eta$  centrada en el punto  $x$ . Si lo anterior se cumple  $\forall x \in X$ , entonces se dice que  $F$  es semicontinua por arriba.

En otras palabras semicontinuidad por arriba de  $F$ , implica que la distancia entre los puntos de  $F(x)$  y el conjunto  $F(y)$  tiende a cero cuando  $x \rightarrow y$ .

**Definición 2.4** Una inclusión diferencial  $\dot{x} \in F(x)$  es llamada una inclusión diferencial de Filippov si el campo vectorial multivaluado  $F(x)$  es no vacío, cerrado, convexo, localmente acotado y semicontinuo por arriba [Filippov, 1988]. Las soluciones están definidas como funciones del tiempo absolutamente continuas. Dichas soluciones siempre existen [Filippov, 1988] y satisfacen la inclusión diferencial en casi todas partes.

Las soluciones de inclusiones de Filippov existen para cualquier condición inicial y tienen la mayoría de las propiedades estándar conocidas, excepto unicidad [Filippov, 1988].

**Definición 2.5** Se dice que una ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$  con el lado derecho localmente acotado y medible en el sentido de Lebesgue se entiende en el sentido de Filippov si sus soluciones están definidas como las soluciones de una inclusión de Filippov especialmente construida  $\dot{x} \in F(x)$ . En el caso más usual, cuando  $f$  es continua en casi todas partes, salvo en  $x$ , el procedimiento es tomar  $F(x)$  como la cerradura convexa del conjunto de todos los posibles valores límite de  $f$  en un punto dado  $x$ , obtenido cuando un punto de continuidad  $y$  (un punto donde  $f$  es continua), tiende a  $x$ . Una solución de  $\dot{x} = f(x)$  es por definición una solución de  $\dot{x} \in F(x)$ .

Los valores de  $f$  dentro de un conjunto con medida 0, no influyen en las soluciones de Filippov. Como ya se ha mencionado, el diseño de controladores por MDAO se simplifica cuando está basado en la homogeneidad de las inclusiones diferenciales consideradas. En las definiciones siguientes se aborda el concepto de homogeneidad y algunas propiedades asociadas a él.

**Definición 2.6** [Bacciotti y Rosier, 2001] Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (y respectivamente un campo vectorial multivaluado  $F(x) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , o un campo vectorial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) es llamada homogénea de grado  $q \in \mathbb{R}$  con el operador de dilatación  $d_\kappa : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\kappa^{m_1}x_1, \kappa^{m_2}x_2, \dots, \kappa^{m_n}x_n)$ , donde  $m_1, \dots, m_n$  son números positivos (pesos), si para cualquier  $\kappa > 0$  se cumple que  $f(x) = \kappa^{-q}f(d_\kappa x)$  (respectivamente  $F(x) = \kappa^{-q}d_\kappa^{-1}F(d_\kappa x)$ , o  $f(x) = \kappa^{-q}d_\kappa^{-1}f(d_\kappa x)$ ).

El grado de homogeneidad  $q$ , diferente de cero, de un campo vectorial siempre puede ser escalado a  $\pm 1$  cambiando apropiadamente los pesos  $m_1, \dots, m_n$ .

Es importante resaltar que la homogeneidad de un campo vectorial (un campo vectorial multivaluado  $F(x)$ ) puede definirse de forma equivalente como la invariancia de la ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$  (la inclusión diferencial  $\dot{x} \in F(x)$ ) respecto a la transformación combinada de tiempo y coordenadas  $G_\kappa : (t, x) \mapsto (\kappa^{-q}t, d_\kappa x)$ .

En el contexto de la definición 2.6, hay diferencia entre una función y un campo vectorial escalar (un campo vectorial multivaluado). La diferencia consiste en que a un campo vectorial, se le asocia una ecuación diferencial (inclusión diferencial para el caso multivaluado), es decir, que la diferenciación con respecto al tiempo aparece explícitamente. Por ejemplo considerando la función  $f(x) = x^3$ , con la dilatación  $d_\kappa : x \mapsto \kappa x$ , es decir el operador  $d_\kappa$  es simplemente la constante escalar  $\kappa$ . Se tiene, según la definición, que  $f(d_\kappa x) = \kappa^{-q}(\kappa x)^3$ , por lo que el grado de homogeneidad es  $q = 3$ . Por otra parte, para el campo vectorial  $\dot{x} = x^3$ , con la misma dilatación  $d_\kappa : x \mapsto \kappa x$ , se tiene  $\frac{d(d_\kappa x)}{d(\kappa^{-q}t)} = (\kappa x)^3$  de donde  $\frac{dx}{dt} = \kappa^{-q}d_\kappa^{-1}\kappa^3x^3 = \kappa^{-q}\kappa^2x^3$ . Por lo que el grado de homogeneidad para este campo vectorial escalar es  $q = 2$ . Para el caso multivariable  $d_\kappa$  es una matriz diagonal con elementos  $\kappa^{m_1}, \kappa^{m_2}, \dots, \kappa^{m_n}$ .

Se dan a continuación dos propiedades de las inclusiones diferenciales e inmediatamente después un teorema que las relaciona.

**Propiedad 2.1** *Una inclusión diferencial  $\dot{x} \in F(x)$  (ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$ ) es global y uniformemente estable en tiempo finito en  $x = 0$ , si es estable en el sentido de Lyapunov y para cualquier  $R > 0$  existe  $T > 0$ , tal que cualquier trayectoria que inicia dentro del disco  $\|x\| < R$  se estabiliza en  $x = 0$  en el tiempo  $T$ .*

Un conjunto  $D$  es llamado de dilatación contraíble si  $d_\kappa D \subset D$  para cualquier  $\kappa < 1$ .

**Propiedad 2.2** *Una inclusión diferencial homogénea (una ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$ ) es contractiva si existen dos conjuntos compactos  $D_1, D_2$  y  $T > 0$ , tales que  $D_2$  contiene al origen y está en el interior de  $D_1$ ,  $D_1$  es de dilatación contraíble y todas las trayectorias que inicien dentro de  $D_1$  en el tiempo 0 se localizan en  $D_2$  en el tiempo  $T$ .*

El siguiente teorema que relaciona las propiedades definidas arriba, es enunciado de acuerdo al Teorema 1 en [Levant, 2005a]

**Teorema 2.1** *Sea  $\dot{x} \in F(x)$  una inclusión de Filippov homogénea con un grado de homogeneidad negativo  $-p$ . Entonces las propiedades 2.1 y 2.2 son equivalentes y el tiempo máximo de asentamiento es una función, continua y homogénea, de las condiciones iniciales de grado  $p$ .*

Es evidente que la propiedad 2.1 implica 2.2. La prueba de que 2.2 implica 2.1 se incluye en el apéndice A.

## 2.4. Modos deslizantes de alto orden

El enfoque de control por modos deslizantes se basa en mantener, exactamente, una restricción debidamente seleccionada (e.g.  $\sigma = x - y_d = 0$ ). Esto se logra mediante conmutación a alta frecuencia de la señal de control. Sin embargo, además de que los modos deslizantes estándar son aplicables únicamente cuando el grado relativo es uno, la conmutación de alta frecuencia provoca vibraciones, efecto conocido como castaño (en inglés *chattering*). Esta exigencia en cuanto al grado relativo, así como el efecto de castaño, pueden removerse cuando se usa debidamente el enfoque de modos deslizantes de alto orden, conservando las propiedades de convergencia en tiempo finito y mejorando su precisión. Prácticamente todos los controladores por MDAO poseen la característica de homogeneidad. Al construir nuevos controladores por MDAO, basándose en el enfoque de homogeneidad las pruebas de convergencia se vuelven estándar y se asegura la mayor precisión posible en presencia de mediciones ruidosas, retardos y considerando la discretización [Levant, 2006]. Supóngase que se desea mantener una restricción, dada por la igualdad de una función suave  $\sigma$  a cero. Como se supone que el grado relativo del sistema es conocido y es constante, existe un número  $r$  tal que si la función  $\sigma$  se deriva  $r$  veces aparecerá la entrada, es decir, tratándose de un control por modos deslizantes, una función discontinua. Entonces los modos deslizantes se clasifican por el número de la derivada total,  $\sigma^{(r)}$ , en la que aparece por primera vez dicha discontinuidad. A este número se le denomina orden de deslizamiento. A continuación se estudian las propiedades del control MDAO homogéneo y se presenta un método de construcción de una clase de estos controladores, los cuales son función de  $\sigma$  y de sus  $r - 1$  derivadas. Para realizar el cálculo de las  $r - 1$  derivadas de  $\sigma$  que el control requiere, se propone el uso del diferenciador robusto exacto [Levant, 1998],[Levant, 2003], cuyo desarrollo también está basado en los conceptos de homogeneidad.

### 2.4.1. Propiedades de homogeneidad de MDAO

Antes de comenzar el planteamiento del problema se da la definición formal del orden de deslizamiento. Por simplicidad, se tratan únicamente modos deslizantes respecto a una restricción escalar. Considérese una ecuación diferencial discontinua

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.5}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $f$  es una función vectorial localmente acotada y medible. Entiéndase esta ecuación diferencial en el sentido de Filippov y considérese una restricción dada por  $\sigma(x) = 0$ , donde  $\sigma : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  es una función suficientemente suave.

**Definición 2.7** *Suponga que las derivadas respecto al tiempo  $\dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ , a lo largo de la trayectoria del sistema, existen y son funciones continuas (univaluadas) de  $x$ . Entonces el conjunto deslizante de orden  $r$ , que forma una condición de dimensión  $r$  en los estados de la dinámica del sistema, está determinado por las igualdades:*

$$\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0. \quad (2.6)$$

Sea el conjunto dado por (2.6), no vacío y localmente un conjunto integral en el sentido de Filippov (i.e. son trayectorias de Filippov de la inclusión diferencial asociada a (2.5)). Entonces se dice que las trayectorias correspondientes, dentro del conjunto (2.6), están en el modo deslizante de orden  $r$ , respecto a la restricción  $\sigma$ .

Considérese ahora el siguiente sistema una entrada-una salida

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a(t, \xi) + b(t, \xi)u, & \xi \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \\ \sigma &: (t, \xi) \mapsto \sigma(t, \xi) \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde  $\sigma$  es la salida medida del sistema,  $u$  es la entrada de control. Las funciones  $a, b$  son desconocidas. Lo que se desea es lograr que la igualdad  $\sigma = 0$  se cumpla en tiempo finito y una vez que se satisface mantener esa igualdad; para ello se utilizará una retroalimentación discontinua. Primero se extiende el sistema mediante una ecuación ficticia  $\dot{t} = 1$ , con ello es posible considerar sistemas no autónomos. Haciendo las siguientes definiciones:  $\tilde{\xi} = (\xi, t)^T$ ,  $\tilde{a}(\tilde{\xi}) = (a(t, \xi), 1)^T$ ,  $\tilde{b}(\tilde{\xi}) = (b(t, \xi), 1)^T$ , el sistema (2.7) toma la forma de la ecuación (2.8)

$$\dot{\tilde{\xi}} = \tilde{a}(\tilde{\xi}) + \tilde{b}(\tilde{\xi})u, \quad \sigma = \sigma(\tilde{\xi}). \quad (2.8)$$

Se supone que el grado relativo  $r$  del sistema (2.8) es conocido y constante. Entonces, la siguiente ecuación se cumple [Isidori, 1989].

$$\begin{aligned} \sigma^{(r)} &= h(t, \xi) + g(t, \xi)u, & g(t, \xi) \neq 0 \\ \text{donde } h(t, \xi) &= \sigma^{(r)}|_{u=0} \\ g(t, \xi) &= \frac{\partial}{\partial u} \sigma^{(r)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Debido a la incertidumbre en las funciones  $a, b$  y a que sólo se conocen cotas para ellas, no es posible llegar a la forma (2.9) a partir de (2.7). Suponga que las siguientes desigualdades

$$0 < K_m \leq \frac{\partial}{\partial u} \sigma^{(r)} \leq K_M, \quad |\sigma^{(r)}|_{u=0} \leq C \quad (2.10)$$

se cumplen para algunos valores de  $K_m, K_M, C > 0$ . Estas condiciones se cumplen, al menos localmente, para cualquier sistema suave (2.7) con un grado relativo bien definido en un punto dado  $\dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$ . Supóngase que las desigualdades (2.10) se cumplen globalmente. Entonces (2.9),(2.10) implican la siguiente inclusión diferencial

$$\sigma^{(r)} \in [-C, C] + [K_m, K_M]u \quad (2.11)$$

El control acotado de retroalimentación

$$u = \Psi(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}). \quad (2.12)$$

es construido de tal forma que la igualdad  $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$ , se establece en tiempo finito. Obsérvese que si el valor de  $u$  es cercano a la constante  $\Psi(0, \dots, 0)$  en una vecindad del origen, entonces no se puede estabilizar el origen de  $\sigma^{(r)} = c + ku$ , con  $c \in [-C, C], k \in [K_m, K_M]$ ; por lo que la función  $\Psi$  tiene que ser discontinua en el origen. Suponiendo que el control (2.12), impone propiedades de homogeneidad a la inclusión (2.11),(2.12) entonces debido al término  $[-C, C]$ , con  $C > 0$ , el lado derecho de (2.11) sólo puede ser una función multivaluada con grado de homogeneidad 0. Si el grado de homogeneidad fuera positivo entonces el lado derecho de (2.11),(2.12) tiende a cero cerca del origen, lo cual no es posible con  $C > 0$ . Con un grado de homogeneidad negativo este lado derecho es no acotado cerca del origen lo cual contradice el acotamiento local de  $\Psi$ . Por lo tanto el grado de homogeneidad de (2.11), debe de ser 0 y el grado de homogeneidad de la función  $\sigma^{(r-1)}$  debe ser opuesto al grado de homogeneidad del sistema completo (i.e. igual al peso de la variable de tiempo). Escalando el grado de homogeneidad a  $-1$ , se tiene que los pesos de  $t, \sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$  son  $1, r, r-1, \dots, 1$  respectivamente.

**Definición 2.8** [Levant, 2005b] *La inclusión (2.11) y el controlador (2.12), son llamados homogéneos deslizantes de orden  $r$  si se cumple que para cualquier  $\kappa > 0$  y  $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$  la transformación combinada de tiempo y coordenadas:*

$$G_\kappa : (t, \sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}) \mapsto (\kappa t, \kappa^r \sigma, \kappa^{r-1} \dot{\sigma}, \dots, \kappa \sigma^{(r-1)}) \quad (2.13)$$

*preserva la inclusión diferencial (2.11),(2.12).*

La transformación (2.13) convierte a la inclusión (2.11),(2.12) en:

$$\sigma^{(r)} \in [-C, C] + [K_m, K_M] \Psi(\kappa^r \sigma, \kappa^{r-1} \dot{\sigma}, \dots, \kappa \sigma^{(r-1)})$$

Por lo que (2.12) es deslizante homogéneo de orden  $r$  si y solo si:

$$\Psi(\kappa^r \sigma, \kappa^{r-1} \dot{\sigma}, \dots, \kappa \sigma^{(r-1)}) = \Psi(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}) \quad (2.14)$$

### 2.4.2. Control cuasicontinuo homogéneo por MDAO

Con la finalidad de reducir el efecto de castaño, se diseña un controlador que es continuo en todas partes excepto en el conjunto deslizante de orden  $r$ :  $\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$ . Debido a esta propiedad dicho controlador es llamado cuasicontinuo. En la práctica, el conjunto  $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$  nunca es alcanzado debido a retardos de conmutación, ruidos de medición y perturbaciones que no se desvanecen en el origen. La dinámica estará en una vecindad del modo deslizante de orden  $r$ . Considérese el método de construcción del control  $\Psi_{r-1,r}$ , dado por las expresiones (2.15)

$$\begin{aligned} \varphi_{0,r} &= \sigma, \quad N_{0,r} = |\sigma|, \quad \Psi_{0,r} = \varphi_{0,r}/N_{0,r} = \text{signo}(\sigma) \\ \varphi_{i,r} &= \sigma^{(i)} + \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)} \Psi_{i-1,r} \\ N_{i,r} &= |\sigma^{(i)}| + \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)} \\ \Psi_{i,r} &= \varphi_{i,r}/N_{i,r}; \quad i = 0, \dots, r-1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde  $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$ , son números positivos. La siguiente proposición se puede probar por inducción.

**Proposición 2.1** [Levant, 2005b]  $N_{i,r} > 0$ . La función  $\Psi_{i,r}(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i)})$  es continua en todas partes (i.e. puede ser redefinida por continuidad) excepto en el punto  $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(i)} = 0$ .

**Teorema 2.2** [Levant, 2005b] Si los parámetros  $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}, \alpha > 0$  son escogidos suficientemente grandes en el orden dado, el controlador homogéneo de orden  $r$ .

$$u = -\alpha \Psi_{r-1,r}(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}) \quad (2.16)$$

asegura la estabilidad en tiempo finito de (2.11), (2.16). El modo deslizante de orden  $r$ , estable en tiempo finito,  $\sigma \equiv 0$  es establecido en el sistema (2.7), (2.16).

La prueba del teorema 2.2, dónde se especifican las condiciones que deben cumplir los parámetros  $\beta_i, \alpha$ , se incluye en el apéndice A.

En la práctica, no es necesario conocer los valores exactos de  $C, K_m, K_M$  para aplicar estos controladores. Con  $\alpha$  suficientemente grande, cada elección de los parámetros  $\beta$ , determina una familia de controladores aplicable a todos los sistemas del tipo (2.7) con grado relativo  $r$ . Como resultado de la proposición (2.1), se tiene que el control (2.16) es continuo en todas partes excepto en el modo deslizante de orden  $r$  es decir, en el conjunto:  $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$ .

A continuación se dan ejemplos de controles cuasi continuos con  $r \leq 4$ .

1.  $u = -\alpha \text{signo}(\sigma)$
2.  $u = -\alpha \frac{\dot{\sigma} + |\sigma|^{1/2} \text{signo}(\sigma)}{|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{1/2}}$
3.  $u = -\alpha \frac{\ddot{\sigma} + 2(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{2/3})^{-1/2}(\dot{\sigma} + |\sigma|^{2/3} \text{signo}(\sigma))}{\ddot{\sigma} + 2(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{2/3})^{1/2}}$
4.  $u = -\alpha \frac{\dot{\sigma} + 3[\ddot{\sigma} + (|\dot{\sigma}| + 0.5|\sigma|^{3/4})^{-1/3}(\dot{\sigma} + 0.5|\sigma|^{3/4} \text{signo}(\sigma))][|\ddot{\sigma}| + (|\dot{\sigma}| + 0.5|\sigma|^{3/4})^{2/3}]^{1/2}}{|\dot{\sigma}| + 3[|\ddot{\sigma}| + (|\dot{\sigma}| + 0.5|\sigma|^{3/4})^{2/3}]^{1/2}}$

Con la finalidad de preservar las propiedades de exactitud y estabilidad en tiempo finito, se incluye como parte del controlador el diferenciador homogéneo, robusto y exacto reportado en [Levant, 2003], para calcular  $\dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$  en tiempo real. Su aplicación es factible debido a que  $\sigma^{(r)}, \Psi$  en (2.12) son acotadas. El controlador con el diferenciador queda de la forma:

$$u = -\alpha \Psi(z_0, \dots, z_{r-1}) \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= -\lambda_0 L^{1/r} |z_0 - \sigma|^{(r-1)/r} \text{signo}(z_0 - \sigma) + z_1 \\ \dot{z}_1 &= -\lambda_1 L^{1/r-1} |z_1 - \dot{z}_0|^{(r-2)/(r-1)} \text{signo}(z_1 - \dot{z}_0) + z_2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\dot{z}_{r-2} = -\lambda_{r-2} L^{1/2} |z_{r-2} - \dot{z}_{r-3}|^{1/2} \text{signo}(z_{r-2} - \dot{z}_{r-3}) + z_{r-1}$$

$$\dot{z}_{r-1} = -\lambda_{r-1} L \text{signo}(z_{r-1} - \dot{z}_{r-2})$$

donde  $L \leq C + \sup|\Psi|K_M$  y los parámetros  $\lambda_i$  seleccionados de tal forma que  $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_{r-1}$ . Una posible elección de estos parámetros para  $r \geq 6$  es  $\lambda_{r-1} = 1.1, \lambda_{r-2} = 1.5, \lambda_{r-3} = 3, \lambda_{r-4} = 5, \lambda_{r-5} = 8, \lambda_{r-6} = 12$ .

Si se consideran los pesos  $r - i$ , para cada  $z_i$  con  $i = 0, 1, \dots, r - 1$ , se obtiene la inclusión diferencial (2.11),(2.17),(2.18) con grado de homogeneidad  $-1$ . Debido al tiempo finito de convergencia del diferenciador [Levant, 2003], la inclusión diferencial de Filippov correspondiente también es uniformemente estable en tiempo finito.

---



---

# Compensación de perturbaciones desacopladas usando MDAO.

En este capítulo se presenta el algoritmo de diseño de control para sistemas en la llamada forma de retroalimentación estricta, reportado en [Estrada y Fridman, 2010b] (ver también [Estrada y Fridman, 2008b] y [Estrada y Fridman, 2008a]). Con este algoritmo de diseño se obtiene seguimiento exacto y en tiempo finito de la salida deseada, en presencia de perturbaciones no acopladas. El procedimiento se basa en un enfoque jerárquico de diseño y hace uso de controladores cuasicontinuos por modos deslizantes de alto orden, descritos en el capítulo 2, así como de la idea de control virtual.

Como primer paso se define la dinámica deseada de la salida. Esta dinámica está determinada por la tarea a realizar, ya sea esta de regulación o seguimiento. Una vez que se ha definido la dinámica para el estado que representa la salida del sistema, la dinámica de los estados restantes en la estructura triangular estará definida por la del estado anterior. Para lograr el comportamiento deseado, cada control virtual se divide en dos partes, una está destinada a compensar la parte no lineal nominal del sistema y la segunda es responsable de lograr la dinámica deseada aún en presencia de perturbaciones. Puesto que la señal de referencia y las perturbaciones se suponen acotadas, los controles virtuales también serán acotados. Es en esta segunda parte del control donde se incluye el control cuasicontinuo por modos deslizantes de alto orden, sin embargo, no es agregado directamente si no a través de un número determinado de integrales que dependerá del grado relativo que tendría el estado escalar en particular al ser visto como salida.

### 3.1. Planteamiento del problema

Considere la clase de sistemas no lineales, de una sola entrada, en la forma de retroalimentación estricta (3.1):

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1) + g_1(t, x_1)x_2 + \omega_1(t, x_1) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_i &= f_i(t, \bar{x}_i) + g_i(t, \bar{x}_i)x_{i+1} + \omega_i(t, \bar{x}_i) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= f_n(t, x) + g_n(t, x)u + \omega_n(t, x) \\
 i &= 2, \dots, n-1
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{x}_i = [x_1 \dots x_i]^T$ ;  $u \in \mathbb{R}$  es la señal de control. Además  $f_i(t, \bar{x}_i)$ ,  $g_i(t, \bar{x}_i)$  y  $\omega_i(t, \bar{x}_i)$  son funciones suaves, con al menos  $n-i$  derivadas acotadas,  $\forall x \in D \subset \mathbb{R}^n, t \in [0, \infty)$ , y también que  $g_i(t, \bar{x}_i) \neq 0$  en  $D, t \in [0, \infty)$ .

Tanto los estados como las funciones  $f_i, g_i$  se consideran conocidos, mientras que los términos  $\omega_i$  son desconocidos y representan variación de parámetros y perturbaciones externas. La condición  $\|g_i(t, \bar{x}_i)\| > d_{g_i} \quad \forall x \in D \subset \mathbb{R}^n, t \in [0, \infty)$ , donde  $d_{g_i}$  son constantes positivas también se cumple. La última condición es necesaria si se pretende rechazar perturbaciones no desvanecientes, que es el caso que nos interesa.

Las condiciones sobre la existencia de las derivadas de las funciones del sistema, tanto las conocidas como las desconocidas, son las condiciones típicas requeridas para *backstepping*, se relajan las condiciones sobre las perturbaciones en el sentido de que son no desvanecientes. En el capítulo 6, se amplía la discusión sobre estas condiciones y los resultados a que se puede llegar usando *backstepping*.

Se busca diseñar un controlador para que la salida  $y = x_1$  haga el seguimiento de una señal suave  $y_d$ .

Se supone el completo conocimiento del vector de estados  $x$ . Para garantizar que  $x_1$  realice el seguimiento de la señal de referencias  $y_d$ , la primera superficie de deslizamiento se elige como la diferencia entre estas señales. Luego se incluye la  $(n-1)$ -ésima integral del controlador homogéneo deslizante de orden  $n$  como parte del primer control virtual. El error entre el control virtual mencionado y el estado siguiente es considerado como superficie de deslizamiento para el siguiente control virtual.

## 3.2. Algoritmo de diseño

Considerando el estado  $x_2$  como control virtual en la primera ecuación de (3.1), la perturbación  $\omega_1(t, x_1)$  aparece como acoplada. Se propone el siguiente algoritmo de diseño para realizar el seguimiento de  $y_d$ , en presencia de perturbaciones (los argumentos de las funciones son omitidos para evitar complejidad innecesaria en las expresiones).

*Paso 1:*

Tomando a  $x_2 = \phi_1(t, x_1)$  como control virtual, se elige como superficie de deslizamiento a  $\sigma_1 = x_1 - y_d$ . El controlador cuasicontinuo homogéneo deslizante de orden  $n$  es incluido en  $\phi_1(t, \sigma_1)$ . El control  $\phi_1(t, \sigma_1)$  deberá ser una función diferenciable  $n - 1$  veces:

$$\begin{aligned}\phi_1(t, \sigma_1) &= g_1(\cdot)^{-1}\{-f_1(\cdot) + u_{11}\} \\ \dot{u}_{11} &= u_{1,2} \\ &\vdots \\ \dot{u}_{1(n-1)} &= -\alpha_1 \Psi_{n-1,n}(\sigma_1, \dot{\sigma}_1, \dots, \sigma_1^{(n-1)})\end{aligned}\tag{3.2}$$

Donde la función  $\Psi_{n-1,n}$ , es el control por MDAO cuasicontinuo [Levant, 2005b], construido de acuerdo a (2.15). A su vez las derivadas  $\sigma_1, \dot{\sigma}_1, \dots, \sigma_1^{(n-1)}$  se calculan mediante el diferenciador robusto y exacto de orden  $(n - 1)$  [Levant, 2003].

*Paso  $i$ :*

Dado que la dinámica deseada para  $x_i$  es  $\phi_{i-1}(t, \sigma_{i-1})$ , entonces  $\sigma_i = x_i - \phi_{i-1}(t, \sigma_{i-1})$  debe elegirse como la  $i$ -ésima superficie de deslizamiento. El control propuesto es análogo a (3.2), pero con algunos cambios en el orden:

$$\begin{aligned}\phi_i(t, \sigma_i) &= g_i^{-1}\{-f_i + u_{i1}\} \\ \dot{u}_{i1} &= u_{i2} \\ &\vdots \\ \dot{u}_{i(n-i)} &= -\alpha_i \Psi_{n-i,n-i+1}(\sigma_i, \dot{\sigma}_i, \dots, \sigma_i^{(n-i)})\end{aligned}\tag{3.3}$$

Es claro que además del orden del control cuasicontinuo  $\Psi_{n-i,n-i+1}$ , también se cambia la restricción siendo esta ahora  $\sigma_i$ . Se tiene entonces que este controlador cuasicontinuo es de orden  $n - i + 1$ , introducido a través de  $n - i$  integradores. Las derivadas de  $\sigma_i$  son

calculadas mediante el diferenciador de orden  $n - i$  propuesto en [Levant, 2003].

*Paso n:*

En este paso se obtiene el control real  $u$ . Debido a la forma en que se ha contruido cada control virtual, siguiendo el procedimiento se tiene que en el control real, el término para compensar las perturbaciones tiene orden de deslizamiento igual a uno, es decir se trata de la función signo estándar. Por lo tanto definiendo  $\sigma_n = x_n - \phi_{n-1}(t, \sigma_{n-1})$ , se tiene:

$$u = g_n^{-1}\{-f_n + u_{n1}\} \quad (3.4)$$

$$\text{donde } u_{n1} = -\alpha_n \text{signo}(\sigma_n)$$

**Teorema 3.1** *Dado que  $y_d$  y  $g_i$  en el sistema (3.1) son funciones suaves, con  $n$  y  $n - i$  derivadas acotadas respectivamente, el control (3.4) obtenido como resultado final del algoritmo de diseño jerárquico arriba propuesto, con  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  debidamente seleccionadas, asegura la estabilidad en tiempo finito de  $\sigma_1 = x_1 - y_d = \dot{\sigma}_1 = \dots = \sigma_1^{(n-1)} = 0$ .*

**Nota 3.1** Es importante resaltar que  $y_d$  puede ser una constante, es decir el mismo esquema sirve tanto para seguimiento como para regulación.

**Nota 3.2** El término  $u_{n,1} = -\alpha_n \text{signo}(\sigma_n)$  en el control (3.4), es de hecho el control cuasicontinuo de orden uno, ampliamente conocido por su uso en los modos deslizantes estándar. Es fácil observar que el término  $u_{n,1} = -\alpha_n \text{signo}(\sigma_n)$ , en el control (3.4), puede ser suavizado si se incrementa al menos en uno el orden del término cuasicontinuo en cada control, tanto en los virtuales como en el real, ya que en consecuencia se puede agregar un integrador más a cada uno de estos términos responsables de rechazar las perturbaciones. Para ver la aplicación de este procedimiento consulte el ejemplo al final de este capítulo.

El orden del controlador  $u$ , el cual se incrementa tanto con los integradores y como con los diferenciadores introducidos en cada paso, depende de la dimensión del sistema. El incremento en el orden debido a los integradores puede calcularse con la siguiente expresión

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

y debido a los diferenciadores según la siguiente

$$\sum_{i=2}^n i = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

con lo que se llega a la siguiente ecuación para el orden del controlador

$$\text{orden}_u = n^2 - 1.$$

En el caso de que se haya incrementado el orden de cada control virtual, denotando como  $k$  a dicho incremento se tiene

$$\text{orden}_u = (n + k)^2 - 1.$$

La prueba de convergencia del teorema (3.1), hace uso de la suposición de que  $\sigma_i = 0$  en tiempo finito, es decir que las ganancias escogidas para cada control virtual  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , aseguran la convergencia en tiempo finito de la inclusión diferencial particular de cada paso del diseño, independientemente del comportamiento que se tiene en el transitorio. Este problema del transitorio es abordado en capítulos siguientes.

En cuanto al ajuste, la experiencia que se tuvo al realizar simulaciones fue que es recomendable ajustar una a una las ganancias. Comenzando por el subsistema del primer estado y tomando al segundo como señal de control disponible, una vez que se logra el seguimiento deseado, introducir la dinámica del segundo estado y ajustar los parámetros del siguiente control virtual. El proceso se repite hasta llegar al controlador real.

### 3.2.1. Prueba de convergencia

- Para el estado  $n$

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= f_n + g_n u + \omega_n(x, t) \\ \text{con } u &= g_n^{-1} \{-f_n - \alpha_n \text{signo}(\sigma_n)\} \\ \sigma_n &= x_n - \phi_{n-1}; \quad \phi_{n-1} \text{ suficientemente suave} \end{aligned}$$

Por lo que  $\dot{\sigma}_n = -\alpha_n \text{signo}(\sigma_n) + \omega_n(t, x) + \dot{\phi}_{n-1}$ , tomando  $\alpha_n \geq |\omega_n| + |\dot{\phi}_{n-1}|$  asegura la aparición del modo deslizante estándar (de orden 1) para la restricción  $\sigma_n$ .

- Para el estado  $(n - 1)$ .

El control virtual  $\phi_{n-1}$ , está definido de acuerdo a (3.3). La restricción está definida por  $\sigma_{n-1} = x_{n-1} - \phi_{n-2}$ , derivando y sustituyendo  $\phi_{n-1}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{n-1} &= \dot{x}_{n-1} - \dot{\phi}_{n-2} \\ &= f_{n-1} + g_{n-1} \phi_{n-1} + \omega_{n-1}(t, \bar{x}_{n-1}) - \dot{\phi}_{n-2} \\ \dot{\sigma}_{n-1} &= u_{(n-1)1} + \omega_{n-1}(t, \bar{x}_{n-1}) - \dot{\phi}_{n-2} \end{aligned}$$

derivando de nuevo

$$\ddot{\sigma}_{n-1} = \dot{u}_{(n-1)1} + \dot{\omega}_{n-1}(t, \bar{x}_{n-1}) - \ddot{\phi}_{n-2} \quad (3.5)$$

y de acuerdo a (3.3):

$$\dot{u}_{(n-1)1} = -\alpha_{n-1} \Psi_{1,2}(\sigma_{n-1}, \dot{\sigma}_{n-1})$$

Esto es (3.5) toma la siguiente forma

$$\ddot{\sigma}_{n-1} = h_{n-1}^*(t, x_{n-1}) + g_{n-1}^*(t, x_{n-1})u_{n-1} \quad (3.6)$$

$$\text{con } h_{n-1}^*(t, x_{n-1}) = \ddot{\sigma}_{n-1}|_{u_{n-1}=0} = \dot{g}_{n-1}^*(\cdot) - \ddot{\phi}_{n-2}$$

$$g_{n-1}^*(t, x) = \frac{\partial}{\partial u_{n-1}} \ddot{\sigma}_{n-1}$$

$$u_{n-1} = -\alpha_{n-1} \Psi_{1,2}(\sigma_{n-1}, \dot{\sigma}_{n-1}) \quad (3.7)$$

Si existen constantes  $K_{m(n-1)}, K_{M(n-1)}, C_{(n-1)} > 0$  tales que se cumple que

$$0 < K_{m(n-1)} \leq \frac{\partial}{\partial u_{n-1}} \ddot{\sigma}_{n-1} \leq K_{M(n-1)}, \quad |\ddot{\sigma}_{n-1}|_{u_{n-1}=0} \leq C_{n-1} \quad (3.8)$$

entonces (3.6),(3.8) implican la inclusion diferencial

$$\ddot{\sigma}_{n-1} \in [-C_{n-1}, C_{n-1}] + [K_{m(n-1)}, K_{M(n-1)}]u_{n-1} \quad (3.9)$$

y el controlador (3.7) asegura la estabilidad en tiempo finito de (3.9),(3.7). El modo deslizante de orden 2 estable es establecido para la restricción  $\sigma_{n-1}$ .

- Para el primer estado.

$\sigma_1 = x_1 - y_d$ ,  $\phi_1$  como se definió en (5.6). Derivando  $\sigma_1$  y haciendo las sustituciones correspondientes se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_d \\ &= f_1 + g_1 \phi_1 + \omega_1(t, x_1) - \dot{y}_d \\ &= u_{11} + \omega_1(t, x_1) - \dot{y}_d \\ \sigma_1^{(n)} &= \dot{u}_{(1)n-1} + \omega_1^{(n-1)}(t, x_1) - y_d^{(n)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde  $\dot{u}_{(1)n-1} = -\alpha_1 \Psi_{n-1,n}(\sigma_1, \dot{\sigma}_1, \dots, \sigma_1^{(n-1)})$ . Notese que la ecuación (3.10) es análoga a (3.5), por lo que siguiendo el mismo procedimiento

$$\sigma_1^{(n)} = h_1^*(t, x_1) + g_1^*(t, x_1)u_1 \quad (3.11)$$

$$h_1^*(t, x_1) = \sigma_1^{(n)}|_{u_1=0} = g_1^{(n-1)} - y_d^{(n)}$$

$$g_1^*(t, x_1) = \frac{\partial}{\partial u_1} \sigma_1^{(n)}$$

$$u_1 = -\alpha_1 \Psi_{n-1,n}(\sigma_1, \dot{\sigma}_1, \dots, \sigma_1^{(n-1)}) \quad (3.12)$$

Si las desigualdades

$$0 < K_{m1} \leq \frac{\partial}{\partial u_1} \sigma_1^n \leq K_{M1}, \quad |\sigma_1|_{u_1=0} \leq C_1 \quad (3.13)$$

se cumplen para algunas  $K_{m1}, K_{M1}, C_1 > 0$  entonces (3.11),(3.13) implican la inclusión diferencial

$$\sigma_1^{(n)} \in [-C_1, C_1] + [K_{m1}, K_{M1}]u_1 \quad (3.14)$$

y el controlador (3.12) asegura la estabilidad en tiempo finito de (3.14),(3.12). El modo deslizante de orden  $r$ , estable en tiempo finito se establece para la restricción  $\sigma_1$ , lo cual implica que  $\sigma_1 = \dot{\sigma}_1 = \dots = \sigma_1^{(n-1)} = 0$ .

### 3.3. Ejemplo

Considérese el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2\text{sen}(x_1) + 1.5x_2 + \omega_1(t, x_1) \\ \dot{x}_2 &= 0.8x_1x_2 + x_3 + \omega_2(t, \bar{x}_2) \\ \dot{x}_3 &= -1.5x_3^2 + 2u + \omega_3(t, x) \end{aligned} \quad (3.15)$$

las funciones  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  y la señal de referencia  $y_d$  son las siguientes

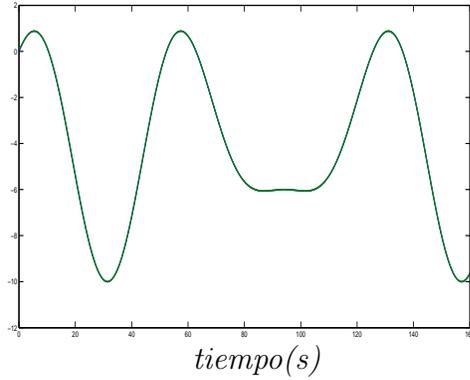
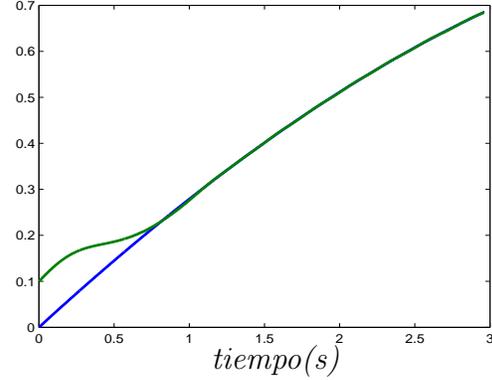
$$\begin{aligned} \omega_1(t, x_1) &= 0.2\text{sen}(t) + 0.1x_1 + 0.12 \\ \omega_2(t, \bar{x}_2) &= 0.3\text{sen}(2t) + 0.2x_1 + 0.2x_2 - 0.4 \\ \omega_3(t, x) &= 0.2\text{sen}(2t) + 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.3 \\ y_d &= 2\text{sen}(0.15t) + 4\text{cos}(0.1t) - 4 \end{aligned}$$

Eligiendo  $\sigma_1 = x_1 - y_d$ , se tiene

$$\begin{aligned} \phi_1(t, x_1, \sigma_1) &= \frac{1}{1.5} \{-2\text{sen}(x_1) + u_{11}\} \\ \dot{u}_{11} &= u_{12} \\ \dot{u}_{12} &= -\alpha_1 \Psi_{2,3}(\sigma_1, \dot{\sigma}_1, \ddot{\sigma}_1) \end{aligned}$$

donde

$$\Psi_{2,3} = \frac{\ddot{\sigma}_1 + 2(|\dot{\sigma}_1| + |\sigma_1|^{2/3})^{-1/2}(\dot{\sigma}_1 + |\sigma_1|^{2/3}\text{signo}(\sigma_1))}{|\ddot{\sigma}_1| + 2(|\dot{\sigma}_1| + |\sigma_1|^{2/3})^{1/2}}$$

Figura 3.1: Señales  $x_1, y_d$ .Figura 3.2: Acercamiento a las señales  $x_1, y_d$ .

Ahora se elige  $\sigma_2 = x_2 - \phi_1(t, x, \sigma_1)$  y el correspondiente control virtual

$$\begin{aligned}\phi_2(t, x, \sigma_2) &= -0.8x_1x_2 + u_{21} \\ \dot{u}_{21} &= -\alpha_2\Psi_{1,2}(\sigma_2, \dot{\sigma}_2) \\ \Psi_{1,2}(\sigma_2, \dot{\sigma}_2) &= \frac{\dot{\sigma}_2 + |\sigma_2|^{1/2}\text{signo}(\sigma_2)}{|\dot{\sigma}_2| + |\sigma_2|^{1/2}}\end{aligned}$$

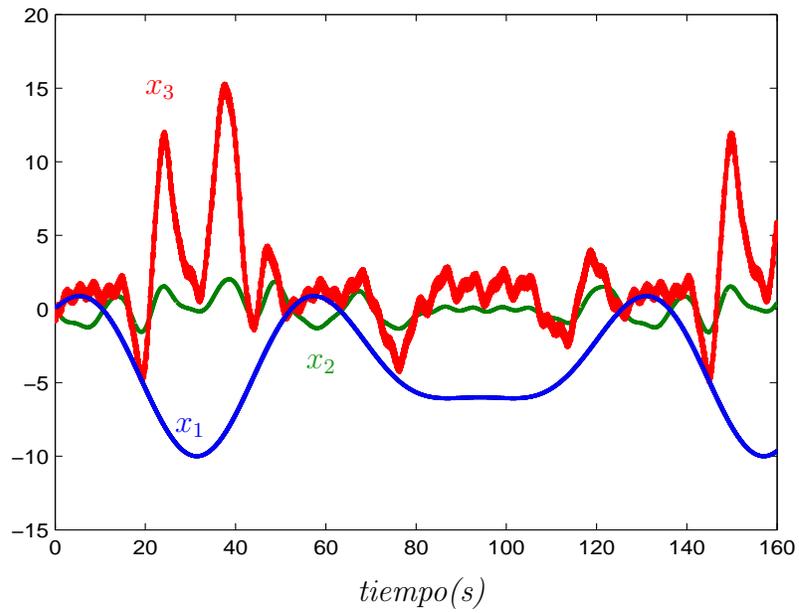
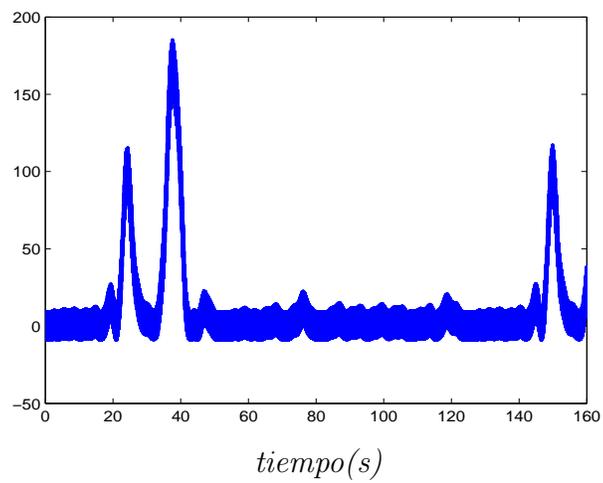
Finalmente para el estado  $x_3$ , se elige  $\sigma_3 = x_3 - \phi_2(t, \bar{x}_2, \sigma_2)$  y se introduce un control por modos deslizantes de primer orden

$$u = \frac{1}{2}\{1.5x_3^2 - \alpha_3\text{signo}(\sigma_3)\}$$

Las figuras (3.1)-(3.5), muestran los resultados obtenidos en simulación. Se usaron los siguientes valores de parámetros  $\alpha_1 = 6, \alpha_2 = 10, \alpha_3 = 16$  y las siguientes condiciones iniciales  $x = [0.1 \ 0 \ 0]^T$ .

Obsérvese en la gráfica de la señal de control, figura (3.4), que existe un pico de control antes del segundo 40, esto se debe al término cuadrático  $-1.5x_3^2$  presente en la dinámica del tercer estado. Este término es eliminado por retroalimentación mediante  $u$ , lo cual puede apreciarse claramente al ver que los picos de control corresponden con los picos del estado  $x_3$ .

Es importante resaltar que el control cuasicontinuo del primer control virtual, debe satisfacer la igualdad  $u_{11} = \dot{y}_d - \omega_1$ , cuando se ha logrado el seguimiento. Esta relación se obtiene de la ecuación  $\dot{\sigma}_1 = u_{11} + \omega_1 - \dot{y}_d = 0$ . En la figura (3.5) la gráfica de ambas señales confirma que esta relación se cumple.

Figura 3.3: Estados  $x_1, x_2, x_3$ .Figura 3.4: señal de control  $u$ .

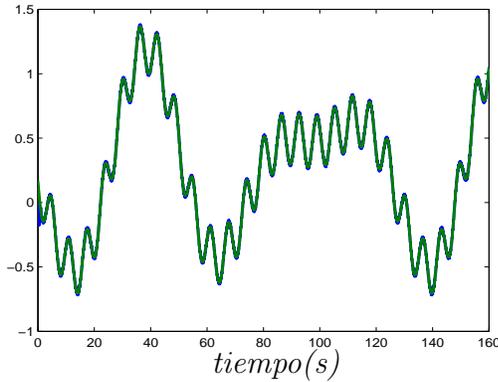


Figura 3.5: Señales  $u_{11}, \dot{y}_d - \omega_1$

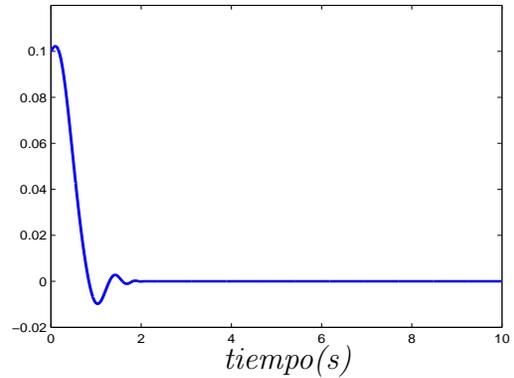


Figura 3.6: Señal de error  $\sigma_1$

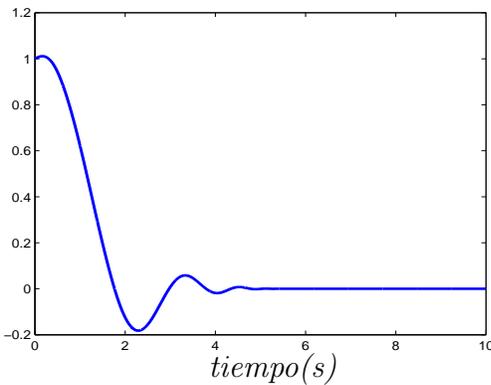


Figura 3.7: Error  $\sigma_1$  para las condiciones iniciales  $x(0) = [1 \ -1 \ 1]^T$

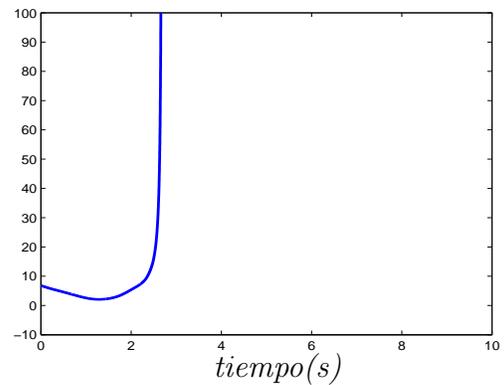


Figura 3.8: Error  $\sigma_1$  para las condiciones iniciales  $x(0) = [3 \ -2 \ 4]^T$

Por último, en las figuras (3.7),(3.8) se muestran las señales de error  $\sigma_1$  obtenidas en simulación al usar las condiciones iniciales  $x(0) = [1 \ -1 \ 1]^T$  y  $x(0) = [3 \ -2 \ 4]^T$  respectivamente. Se puede ver en la figura (3.8) que el controlador no logra la convergencia. Como se ha comentado previamente, la región de atracción está determinada por el valor de las ganancias  $\alpha_i$ . Una opción para ampliar dicha región es reajustar las ganancias. Sin embargo, si se conocen las condiciones iniciales, se puede plantear una estrategia para hacer que los errores iniciales, respecto de trayectorias auxiliares especialmente diseñadas, sean tales que el controlador pueda asegurar la estabilidad sin la necesidad de reajustar sus ganancias. Este problema es abordado en el siguiente capítulo.

### 3.3.1. Suavización de la señal de control

Como se mencionó en la nota 3.2, es posible suavizar la señal de control real. Esto se logra incrementando el orden del término de control cuasicontinuo presente en cada control, tanto en los virtuales como en el real, y simultáneamente incrementando el número correspondiente de integradores por los que es introducido. Para el ejemplo anterior, incrementando en uno el orden de cada algoritmo cuasicontinuo, se tiene:

- Paso 1. Definiendo a  $\sigma_1 = x_1 - y_d$ , la expresión para el primer control virtual es

$$\begin{aligned}\phi_1(t, x_1, \sigma_1) &= \frac{1}{1.5} \{-2\text{seno}(x_1) + u_{11}\} \\ \dot{u}_{11} &= u_{12}; \quad \dot{u}_{12} = u_{13} \\ \dot{u}_{13} &= -\alpha_1 \Psi_{3,4}(\sigma_1, \dot{\sigma}_1, \ddot{\sigma}_1, \ddot{\sigma}_1)\end{aligned}$$

donde

$$\Psi_{3,4} = \frac{\ddot{\sigma}_1 + 3[\ddot{\sigma}_1 + (|\dot{\sigma}_1| + 0.5|\sigma_1|^{3/4})^{-1/3}(\dot{\sigma}_1 + 0.5|\sigma_1|^{3/4}\text{signo}(\sigma_1))][|\dot{\sigma}_1| + (|\dot{\sigma}_1| + 0.5|\sigma_1|^{3/4})^{2/3}]^{1/2}}{|\dot{\sigma}_1| + 3[|\dot{\sigma}_1| + (|\dot{\sigma}_1| + 0.5|\sigma_1|^{3/4})^{2/3}]^{1/2}}$$

- Paso 2. Se define  $\sigma_2 = x_2 - \phi_1$  y el correspondiente control virtual

$$\begin{aligned}\phi_2 &= -0.8x_1x_2 + u_{21} \\ \dot{u}_{21} &= u_{22} \\ \dot{u}_{22} &= -\alpha_2 \Psi_{2,3}(\sigma_2, \dot{\sigma}_2, \ddot{\sigma}_2)\end{aligned}$$

donde

$$\Psi_{2,3} = \frac{\ddot{\sigma}_2 + 2(|\dot{\sigma}_2| + |\sigma_2|^{2/3})^{-1/2}(\dot{\sigma}_2 + |\sigma_1|^{2/3}\text{signo}(\sigma_2))}{|\ddot{\sigma}_2| + 2(|\dot{\sigma}_2| + |\sigma_2|^{2/3})^{1/2}}$$

- Paso 3. Para el cálculo del control real, definiendo  $\sigma_3 = x_3 - \phi_2$ , se tiene

$$\begin{aligned}u &= -0.8x_1x_2 + u_{31} \\ \dot{u}_{31} &= -\alpha_3 \Psi_{1,2}(\sigma_3, \dot{\sigma}_3) \\ \Psi_{1,2}(\sigma_3, \dot{\sigma}_3) &= \frac{\dot{\sigma}_3 + |\sigma_3|^{1/2}\text{signo}(\sigma_3)}{|\dot{\sigma}_3| + |\sigma_3|^{1/2}}\end{aligned}$$

Las figuras (3.9) y (3.10) muestran cómo la salida alcanza a la señal deseada, a partir de lo cual se mantiene el seguimiento; la figura (3.11), muestra la dinámica de los tres estados. Se usaron las condiciones iniciales  $x(0) = [0, 1 \ 0 \ 0]^T$ , para la simulación.

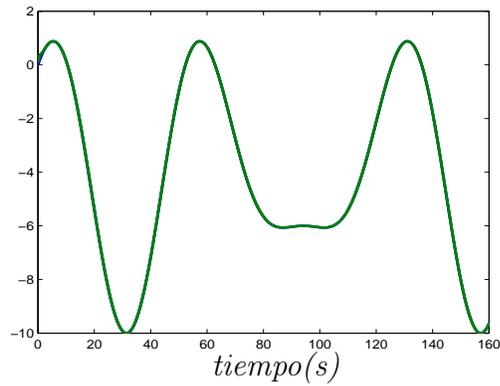


Figura 3.9: Señales  $x_1, y_d$  con el control suavizado.

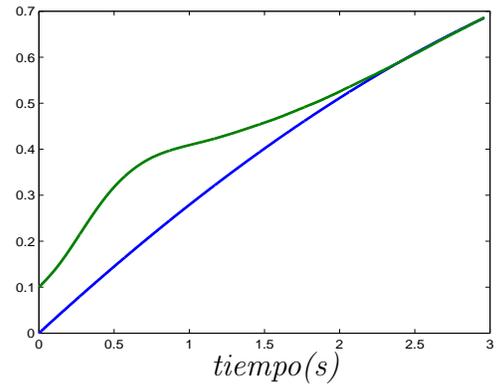


Figura 3.10: Acercamiento a las señales  $x_1, y_d$  con el control suavizado.

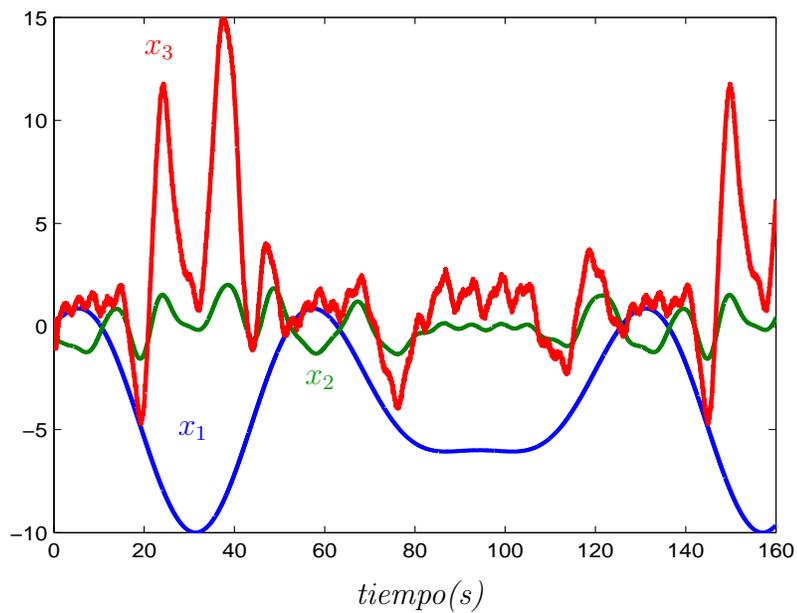
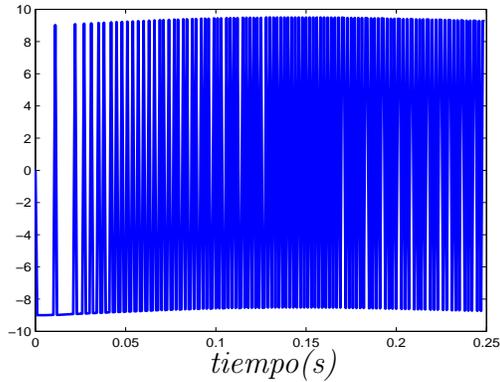
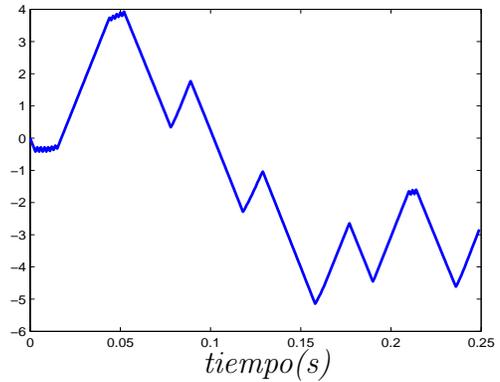
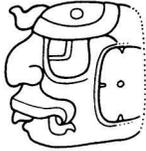


Figura 3.11: Estados  $x_1, x_2, x_3$ .

Figura 3.12: Control  $u$  sin suavizar.Figura 3.13: Control  $u$ , suavizado.

En las figuras (3.12) y (3.13) se muestra un acercamiento a las señales de control obtenidas con el control sin suavizar y con el control suavizado, la diferencia como era de esperarse es muy grande, el nuevo control no sólo es suave sino que es diferenciable una vez. En el acercamiento a la señal de control suavizada se pueden apreciar cambios abruptos. En esos picos, la derivada de esta señal tiene un cambio súbito, sin embargo, dicha derivada existe y está acotada. Se puede hacer una analogía con una señal cuadrada, cuya integral es una señal triangular cuyos picos corresponden a los saltos de la señal cuadrada. Así, la discontinuidad del algoritmo de modos deslizantes cuasicontinuo de segundo orden, introducido en el control a través de una integral, es reflejada en la señal  $u$ .





---

# Diseño jerárquico con MDAO integrales

En el capítulo anterior se presenta un algoritmo de diseño de control, aplicable a sistemas en forma de retroalimentación estricta, con el cual se logra que la salida deseada haga seguimiento exacto en tiempo finito de una señal suave, aún en presencia de perturbaciones tanto acopladas como desacopladas. Lo anterior se logra usando algoritmos de control cuasicontinuos de alto orden y mediante un diseño jerárquico. Usando la idea de control virtual se obliga a la salida a seguir a la señal deseada; cada estado (control virtual) adopta la dinámica necesaria para lograr este objetivo.

A diferencia del diseño por *backstepping*, en el algoritmo arriba mencionado no se obtiene una ley de control que asegure la estabilidad global del origen del sistema de error. Obsérvese que cada control virtual realiza una linealización por retroalimentación, pero esto se logra después de un transitorio. La prueba de convergencia está basada en la suposición de que las ganancias seleccionadas serán suficientemente grandes para mantener la estabilidad en el transitorio. Como se aclara en el capítulo 3, el ajuste de ganancias se realiza en simulación. Si los errores iniciales son tales que las suposiciones de acotamiento se violan, puede perderse la estabilidad. El motivo, como se explica al inicio de la primera sección del presente capítulo, es que las inclusiones diferenciales cambian, pudiendo provocar la inestabilidad mencionada.

Como alternativa para librar la dificultad arriba mencionada, en el presente capítulo se propone el uso de MDAO integrales, ver [Levant y Alelishvili, 2007]. La idea es construir, con el conocimiento de las condiciones iniciales de los estados del sistema y de sus

correspondientes derivadas, trayectorias auxiliares para alcanzar la trayectoria deseada. Estas trayectorias son diseñadas como una función del error y buscan empezar en el modo deslizante correspondiente desde el momento inicial. Estas trayectorias auxiliares son por construcción suaves y tales que coinciden con las verdaderas trayectorias deseadas después de un determinado tiempo. Dicho tiempo es diseñado también como una función de las condiciones iniciales, debido a que, de elegirse constante, puede llevar a velocidades de convergencia muy lenta si los errores iniciales son pequeños o, por otra parte, exigir dinámicas de convergencia muy rápidas, si los errores iniciales son grandes, lo cual provocaría el mismo problema que se quiere solucionar.

En el capítulo presente, en la primera sección se explica la conveniencia de que el algoritmo de diseño jerárquico, presentado en el capítulo 3, sea modificado para usar en éste los llamados MDAO integrales [Levant y Alelishvili, 2007], y se introduce el concepto de estos últimos. En la segunda sección, cuyos resultados están reportados en [Estrada y Fridman, 2010a], se describe el esquema de diseño y su prueba de convergencia. Por último, se realizaron simulaciones usando el ejemplo del capítulo 3, esto con el fin de mostrar las modificaciones en el diseño del control y corroborar los resultados teóricos; el ejemplo y resultados de simulación están incluidos en la sección 4.3.

## 4.1. MDAO Integrales

Primero se desea mostrar la conveniencia de usar MDAO integrales en combinación con el algoritmo jerárquico presentado en el capítulo 3. Para ello reescribimos la prueba de convergencia para el control (3.4), en los pasos correspondientes al estado  $n$  y al estado  $n - 1$  (los argumentos de las funciones son omitidos para evitar complejidad innecesaria en las expresiones):

- Para el estado  $n$

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= f_n + g_n u + \omega_n \\ \text{con } u &= g_n^{-1} \{-f_n + \alpha_n \text{signo}(\sigma_n)\} \\ \sigma_n &= x_n - \phi_{n-1}; \quad \phi_{n-1} \text{ suficientemente suave} \end{aligned}$$

Por tanto  $\dot{\sigma}_n = -\alpha_n \text{signo}(\sigma_n) + \omega_n + \dot{\phi}_{n-1}$  y tomando  $\alpha_n \geq |\omega_n| + |\dot{\phi}_{n-1}|$  entonces después de un tiempo finito  $T_n$  se establece el modo 1-deslizante para la restricción  $\sigma_n$ . En el

transitorio, cuando  $x_n \neq \phi_{n-1}$ , el subsistema

$$\dot{x}_{n-1} = f_{n-1} + g_{n-1}x_{n-1} + \omega_{n-1}$$

expresado en términos del error  $\sigma_{n-1} = x_{n-1} - \phi_{n-2}$ , quedaría

$$\dot{\sigma}_{n-1} = u_{(n-1)1} + \omega_{n-1} - \dot{\phi}_{n-2} + g_{n-1}\sigma_n$$

después de  $T_n$ , se cumple que  $\sigma_n = 0 \Rightarrow g_{n-1}\sigma_n = 0$  y la prueba de convergencia se sigue como en el capítulo anterior llegando a la siguiente expresión (ver ecuación (3.9))

$$\ddot{\sigma}_{n-1} \in [-C_{n-1}, C_{n-1}] + [K_{m(n-1)}, K_{M(n-1)}]u_2$$

la constante  $C_{n-1}$ , dependerá del valor que tomen las funciones  $\omega_{n-1,1}, \dot{\phi}_{n-2}$ , a lo largo de las trayectorias del sistema. La ganancia del control  $u_2$ , es la ganancia a ser ajustada en simulación. Obsérvese que  $\dot{\sigma}_{n-1}$  depende directamente de  $\sigma_n$ , por lo que, aún en el caso de que  $T_n$  siguiera siendo el mismo, un cambio en las condiciones iniciales del sistema podría provocar que la nueva constante  $C_{n-1}$ , sea mayor que la que puede compensar la ganancia seleccionada para  $u_2$ , provocando inestabilidad del sistema. Lo mismo puede decirse para cada uno de los estados restantes.

Suponiendo que se conocen las condiciones iniciales del sistema, es posible plantearse un cambio de restricción,  $\sigma_i = \Sigma_i$ , tal que en el momento inicial  $\Sigma_i = 0$ . Esta es la idea subyacente en el concepto de los MDAO integrales, cuyos fundamentos son presentados a continuación, para posteriormente aplicarlos a la solución del problema arriba planteado.

Considérese el siguiente control cuasicontinuo homogéneo  $r$ -deslizante

$$u = -\alpha \Psi_{r-1,r}(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)})$$

el cual es construido de acuerdo con la expresiones en (2.15), que por conveniencia son reescritas a continuación

$$\begin{aligned} \varphi_{0,r} &= \sigma, \quad N_{0,r} = |\sigma|, \quad \Psi_{0,r} = \varphi_{0,r}/N_{0,r} = \text{signo}(\sigma) \\ \varphi_{i,r} &= \sigma^{(i)} + \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)} \Psi_{i-1,r} \\ N_{i,r} &= |\sigma^{(i)}| + \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)} \\ \Psi_{i,r} &= \varphi_{i,r}/N_{i,r}; \quad i = 0, \dots, r-1 \\ u &= -\alpha \Psi_{r-1,r}(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}). \end{aligned}$$

La notación  $\vec{\sigma}$ , será usada en este capítulo para denotar  $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ .

Ahora considérese una función  $\rho(t)$ , con derivada  $\rho^{(r-1)}(t)$  Lipschitz, como una trayectoria auxiliar tal que  $\sigma(t, x(t)) = \rho(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_f$ , además de cumplir la siguiente condición:

$$\begin{aligned} \rho(t_0) = \sigma(t_0), \dots, \rho^{(j)}(t_0) = \sigma^{(j)}(t_0) \\ j = 1, \dots, r-1; \quad \rho(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq t_f. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Como  $\rho^{(r-1)}(t)$  es una función Lipschitz, entonces se cumple que su derivada  $\rho^{(r)}(t)$  existe casi en todas partes y es acotada (cuando existe), y para la nueva salida  $\Sigma(t, x) = \sigma(t, x) - \rho(t)$  se satisfacen las siguientes desigualdades

$$0 < K_m \leq \frac{\partial}{\partial u} \Sigma^{(r)} \leq K_M, \quad |\Sigma^{(r)}|_{u=0} \leq C$$

para nuevas  $K_m, K_M, C > 0$ .

La ecuación (4.2) define la función suave que satisface (4.1) propuesta en [Levant y Alelishvili, 2007] para  $\rho(t)$

$$\rho(t) = (t - t_f)^r (c_0 + c_1(t - t_0) + \dots + c_{r-1}(t - t_0)^{r-1}) \quad (4.2)$$

Los parámetros  $c_i$  deben calcularse de las condiciones (4.1), una vez asignado  $t_f$ .

Aunque  $t - t_f$ , puede escogerse como una constante, se desea evitar la necesidad de una ganancia de control muy grande para llegar al modo  $r$ -deslizante cuando las condiciones iniciales estén muy alejadas de las deseadas, pero también evitar que la velocidad de convergencia sea muy lenta si las condiciones iniciales están muy próximas de las deseadas. Por ello es conveniente elegir a  $t_f - t_0$  como una función de las condiciones iniciales. En [Levant y Alelishvili, 2007] se propone el uso de la siguiente función

$$T(\vec{\sigma}(t_0)) = \lambda(|\sigma(t_0)|^{p/r} + |\dot{\sigma}(t_0)|^{p/(r-1)} + \dots + |\sigma^{(r-1)}(t_0)|^p)^{1/p} \quad (4.3)$$

donde  $p, \lambda > 0$  que es una función positiva definida, homogénea deslizante de orden  $r$  (ver definición 2.8), con grado 1 de homogeneidad, i.e.

$$t_f - t_0 = T(\vec{\sigma}(t_0)), \quad T(d_\kappa \vec{\sigma}) = \kappa T(\vec{\sigma}) \quad \forall \kappa > 0 \quad (4.4)$$

El resultado principal reportado en [Levant y Alelishvili, 2007], se enuncia a continuación

**Teorema 4.1** [Levant y Alelishvili, 2007] *La función  $\rho(t - t_0, \vec{\sigma}(t_0))$  está unívocamente determinada por (4.1), (4.2), (4.4). Entonces para toda  $\alpha$  suficientemente grande, el controlador (4.5):*

$$\begin{aligned} u &= -\alpha \Psi_{r-1,r}(\Sigma, \dot{\Sigma}, \dots, \Sigma^{(r-1)}) \\ \Sigma(t, x) &= \begin{cases} \sigma(t, x) - \rho(t - t_0, \vec{\sigma}(t_0)), & t_0 \leq t \leq t_0 + T(\cdot) \\ \sigma(t, x), & t \geq t_0 + T(\cdot) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

*establece, independientemente de las condiciones iniciales  $\vec{\sigma}(t_0)$ , el modo  $r$ -deslizante estable en tiempo finito  $\sigma \equiv 0$  con tiempo transitorio (4.4). La igualdad  $\sigma(t, x(t)) = \rho(t - t_0, \vec{\sigma}(t_0))$  es mantenida durante el transitorio.*

La robustez de los MDAO integrales ante cambios en las condiciones iniciales es aplicada en la siguiente sección al control por diseño jerárquico.

## 4.2. Controlador por diseño jerárquico con MDAO integrales

### 4.2.1. Modificación al control por diseño jerárquico

La modificación al algoritmo de [Estrada y Fridman, 2008a] consiste en sustituir cada  $\sigma_i$  por  $\Sigma_i = \sigma_i - \rho_i$ , donde  $\rho_i$  es la función suave definida en la sección anterior. Entonces el procedimiento de diseño queda como sigue:

*Paso i:* La  $i$ -ésima superficie deslizante ahora es  $\Sigma_i = \sigma_i - \rho_i$  donde  $\sigma_i = x_i - \phi_{i-1}(x_{i-1})$  (excepto por  $\sigma_1 = x_1 - y_d$ ).

$$\begin{aligned} \phi_i(t, x_i, \sigma_i) &= g_i^{-1}\{-f_i + u_{i1}\} \\ \dot{u}_{i1} &= u_{i2} \\ &\vdots \\ \dot{u}_{i(n-i)} &= -\alpha_i \Psi_{n-i, n-i+1}(\Sigma_i, \dot{\Sigma}_i, \dots, \Sigma_i^{(n-i)}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$\Psi_{n-i, n-i+1}$  definida de acuerdo a (2.15), pero con  $\sigma = \Sigma_i$ , y con  $\rho_i$  tal que (4.1) se satisface:

$$\left. \begin{aligned} \rho_i(t_0) = \sigma_i(t_0), \dots, \rho_i^{(n-i)}(t_0) = \sigma_i^{(n-i)}(t_0) \\ \rho_i(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq t_{fi} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

y construida según (4.2) sustituyendo  $r = n - i + 1$ ; la misma sustitución se hace en (4.3) para definir  $T(\vec{\sigma}_i(t_0))$ .

*Paso n:*  $\Sigma_n = \sigma_n - \rho_n$ , donde  $\sigma_n = x_n - \phi_{n-1}(t, \bar{x}_{n-1}, \sigma_{n-1})$ .

$$\begin{aligned} \phi_n(t, \bar{x}_{n-1}, \sigma_{n-1}) &= g_n^{-1}\{-f_n + u_{n1}\} \\ \text{donde } u_{n1} &= -\alpha_n \text{signo}(\Sigma_n) \end{aligned} \quad (4.8)$$

**Teorema 4.2** *Si el sistema (3.1) es BIBS entonces dado que  $\omega_i$  y  $y_d$  son funciones suaves con  $n-i$  y  $n$  derivadas acotadas respectivamente, el controlador (4.8), resultado del diseño jerárquico con MDAO integrales, asegura la estabilidad en tiempo finito de  $\sigma_1 = x_1 - y_d = \dots = \sigma_1^{(n-1)} = 0$  en el sistema (3.1) independientemente de sus condiciones iniciales  $x(t_0)$ .*

**Nota 4.1** *La condición BIBS es suficiente pero no necesaria, como puede verse en la prueba de convergencia.*

### 4.2.2. Prueba de convergencia

- Para el estado  $n$

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= f_n + g_n u + \omega_n(t, x) \\ \text{con } u &= g_n^{-1} \{-f_n + \alpha_n \text{signo}(\Sigma_n)\} \\ \Sigma_n &= \sigma_n - \rho_n \\ \sigma_n &= x_n - \phi_{n-1}; \quad \phi_{n-1} \text{ suficientemente suave} \end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\dot{\Sigma}_n = -\alpha_n \text{signo}(\sigma_n) + \omega_n(t, x) - \dot{\phi}_{n-1} - \dot{\rho}_n$$

por lo que eligiendo  $\alpha_n$  tal que

$$\alpha_n \geq |\omega_n| + |\dot{\phi}_{n-1}| + |\dot{\rho}_n|$$

el modo 1-deslizante se establece para  $\Sigma_n$  después de  $t = t_0$ , i.e. desde el inicio, y para  $\sigma_n$  después de  $T_n = t_{fn} - t_0 = \lambda_n(|\sigma_n(t_0)|)$ , cuya expresión se obtiene al elegir  $p = 1$  en (4.3).

- Ahora para  $x_{n-1}$ ,  $\phi_{n-1}$  definida según (4.6), la restricción es  $\Sigma_{n-1} = \sigma_{n-1} - \rho_{n-1}$ ,  $\sigma_{n-1} = x_{n-1} - \phi_{n-2}$  entonces:

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}_{n-1} &= \dot{x}_{n-1} - \dot{\phi}_{n-2} - \dot{\rho}_{n-1} \\ &= f_{n-1} + g_{n-1} x_n + \omega_{n-1} - \dot{\rho}_{n-1} - \dot{\phi}_{n-2} \\ &= f_{n-1} + g_{n-1}(\phi_{n-1} + \rho_n) + \dot{\omega}_{n-1} - \dot{\rho}_{n-1} - \dot{\phi}_{n-2} \end{aligned}$$

La función  $f_{n-1}$  puede no ser compensada por  $\phi_{n-1}$  desde  $t = t_0$  debido a las condiciones iniciales arbitrarias de  $x_n$ . Sin embargo debido a la condición BIBS,  $x_{n-1}$  permanece acotada por lo que después de  $t = t_0 + T_n$ , cuando  $x_n = \phi_{n-1}$  :

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}_{n-1} &= u_{(n-1)1} + \omega_{n-1}(t, \bar{x}_{n-1}) - \dot{\rho}_{n-1} - \dot{\phi}_{n-2} \\ \ddot{\Sigma}_{n-1} &= \dot{u}_{(n-1)1} + \dot{\omega}_{n-1}(t, \bar{x}_{n-1}) - \ddot{\rho}_{n-1} - \ddot{\phi}_{n-2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

y de acuerdo a (4.6)  $\dot{u}_{n-1,1} = -\alpha_{(n-1)}\Psi_{1,2}(\Sigma_{n-1}, \dot{\Sigma}_{n-1})$ , es decir (4.9) toma la forma:

$$\ddot{\Sigma}_{n-1} = h_{n-1}^*(t, x) + g_{n-1}^*(t, x)u_{n-1} \quad (4.10)$$

$$\text{con } h_{n-1}^*(t, x) = \ddot{\Sigma}_{n-1}|_{u_{n-1}=0}$$

$$g_{n-1}^*(t, x) = \frac{\partial}{\partial u_{n-1}} \ddot{\Sigma}_{n-1}$$

$$u_{n-1} = -\alpha_{n-1}\Psi_{1,2}(\Sigma_{n-1}, \dot{\Sigma}_{n-1}) \quad (4.11)$$

Si para ciertas constantes  $K_{m_{n-1}}, K_{M_{n-1}}, C_{n-1} > 0$  se cumple que

$$0 < K_{m_{n-1}} \leq \frac{\partial}{\partial u_{n-1}} \ddot{\Sigma}_{n-1} \leq K_{M_{n-1}}, \quad |\ddot{\Sigma}_{n-1}|_{u_{n-1}=0}| \leq C_{n-1}$$

entonces implica la siguiente inclusión diferencial

$$\ddot{\Sigma}_{n-1} \in [-C_{n-1}, C_{n-1}] + [K_{m_{n-1}}, K_{M_{n-1}}]u_{n-1} \quad (4.12)$$

y el controlador (4.11) mantiene (puesto que fue establecido en  $t_0$ ) la estabilidad de (4.12),(4.11). El modo 2-deslizante estable es mantenido para  $\Sigma_{n-1}$  desde  $t_0$  y para  $\sigma_{n-1}$  después de  $t_{fn-1} = t_0 + T_i$ .

El mismo procedimiento es aplicado a los estados restantes del sistema (3.1).

**Nota 4.2** Como se mencionó anteriormente, la condición BIBS no es necesaria, basta con que en cada subsistema de (3.1):

$$\dot{x}_i = f_i(t, \bar{x}_i) + g_i(t, \bar{x}_i)x_{i+1} + \omega_i(t, \bar{x}_i)$$

el estado  $x_i$  permanezca acotado, al menos en el intervalo  $t < t_{fi}$ , porque después de ese tiempo  $f_i(t, \bar{x}_i)$  es compensado. Esta condición BIBS podría ser relajada gracias a los resultados sobre ajuste de MDAO reportados en [Levant y Michael, 2009], en donde las ganancias pueden ser variables, permitiendo la posibilidad de considerar el orden de crecimiento que permitiría mantener el acotamiento de los estados.

### 4.3. Ejemplo

Considere el sistema de tercer orden perturbado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2\text{sen}(x_1) + 1.5x_2 + \omega_1(t, x_1) \\ \dot{x}_2 &= 0.8x_1x_2 + x_3 + \omega_2(t, \bar{x}_2) \\ \dot{x}_3 &= -1.5x_3^2 + 2u + \omega_3(t, x)\end{aligned}\tag{4.13}$$

las funciones  $\omega_1, \omega_2$  son perturbaciones acotadas desacopladas y la función  $\omega_3$  es una perturbación acotada acoplada y se definen como:

$$\begin{aligned}\omega_1(t, x_1) &= 0.2\text{sen}(t) + 0.1x_1 + 0.12 \\ \omega_2(t, \bar{x}_2) &= 0.3\text{sen}(2t) + 0.2x_1 + 0.2x_2 - 0.4 \\ \omega_3(t, x) &= 0.2\text{sen}(2t) + 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.3\end{aligned}$$

se desea diseñar un controlador para que  $x_1$  haga seguimiento de la señal suave  $y_d = 2\text{sen}(0.15t) + 4\text{cos}(0.1t) - 4$ . Así, la primera superficie de deslizamiento es  $\Sigma_1 = \sigma_1 - \rho_1$ ,  $\sigma_1 = x_1 - y_d$  y el control virtual para  $x_1$  es:

$$\begin{aligned}\phi_1(t, x_1, \vec{\sigma}_1) &= \frac{1}{1.5} \{-2\text{sen}(x_1) + u_{11}\} \\ \dot{u}_{11} &= u_{12} \\ \dot{u}_{12} &= -\alpha_1 \Psi_{2,3}(\Sigma_1, \dot{\Sigma}_1, \ddot{\Sigma}_1)\end{aligned}$$

$$\text{donde } \Psi_{2,3}(\vec{\Sigma}_1) = \frac{\ddot{\Sigma}_1 + 2(|\dot{\Sigma}_1| + |\Sigma_1|^{2/3})^{-1/2}(\dot{\Sigma}_1 + |\Sigma_1|^{2/3}\text{signo}(\Sigma_1))}{|\ddot{\Sigma}_1| + 2(|\dot{\Sigma}_1| + |\Sigma_1|^{2/3})^{1/2}}$$

$$\begin{aligned}\rho_1 &= (t - t_{f1})^3(c_{10} + c_{11}(t - t_0) + c_{12}(t - t_0)^2) \\ T_1 &= \lambda_1(|\sigma_1(t_0)|^2 + |\dot{\sigma}_1(t_0)|^3 + |\ddot{\sigma}_1(t_0)|^6)^{1/6}\end{aligned}$$

para el siguiente estado  $\Sigma_2 = \sigma_2 - \rho_2$ ,  $\sigma_2 = x_2 - \phi_1(x_1, t)$

$$\begin{aligned}\phi_2(t, \bar{x}_2) &= -0.8x_1x_2 + u_{21} \\ \dot{u}_{21} &= -\alpha_2 \Psi_{1,2}(\Sigma_2, \dot{\Sigma}_2) \\ \Psi_{1,2}(\Sigma_2, \dot{\Sigma}_2) &= \frac{\dot{\Sigma}_2 + |\Sigma_2|^{1/2}\text{signo}(\Sigma_2)}{|\dot{\Sigma}_2| + |\Sigma_2|^{1/2}} \\ \rho_2 &= (t - t_{f2})^2(c_{20} + c_{21}(t - t_0)) \\ T_2 &= \lambda_2(|\sigma_2(t_0)| + |\dot{\sigma}_2(t_0)|^2)^{1/2}\end{aligned}$$

Por último para  $x_3$ ,  $\Sigma_3 = \sigma_3 - \rho_3$ ,  $\sigma_3 = x_3 - \phi_2(x_2, t)$

$$u = \frac{1}{2}\{1.5x_3^2 + u_{31}\}$$

$$u_{31} = -\alpha_3 \text{signo}(\Sigma_3)$$

$$\rho_3 = (t - t_{f_3})(c_{30}); T_3 = \lambda_3(|\sigma_3(t_0)|)$$

En las figuras (4.1) y (4.2) se muestran resultados de simulación, usando  $\alpha_1 = 2.5$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $\alpha_3 = 4$ ,  $\lambda_1 = 6$ ,  $\lambda_2 = 0.5$ ,  $\lambda_3 = 1$ . Para la figura (4.1) las condiciones iniciales son  $x(0) = [3 -2 4]^T$ , condiciones para las cuales el algoritmo original no logra estabilidad, como se comentó en el capítulo anterior (ver figura (3.8)). Para la figura (4.2) las condiciones iniciales son  $x(0) = [-3 1.5 2]^T$  además de haber cambiado la señal  $y_d$  introduciendo un adelanto en el tiempo de 30 segundos.

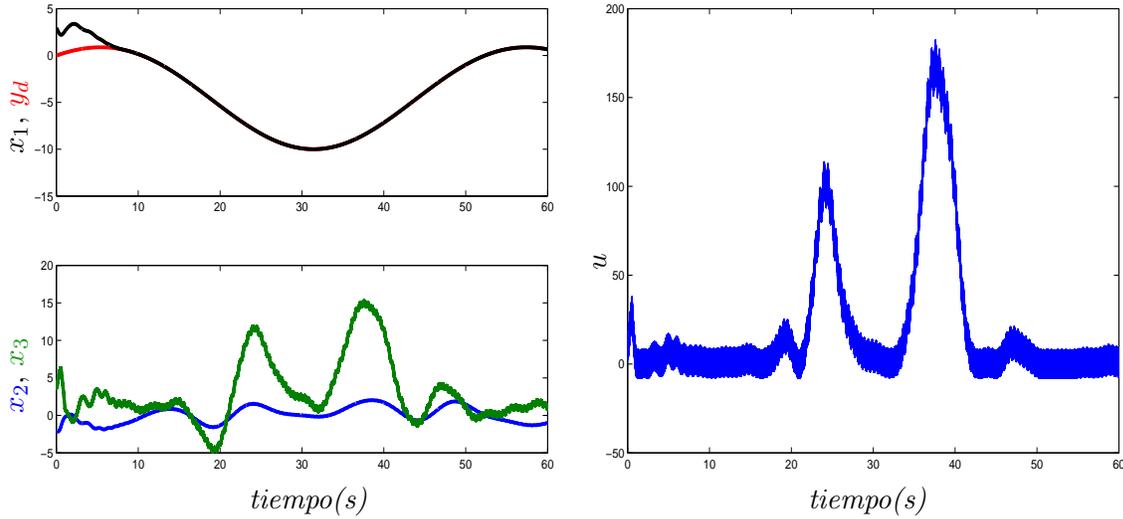


Figura 4.1: Estados (izquierda) y señal de control (derecha)

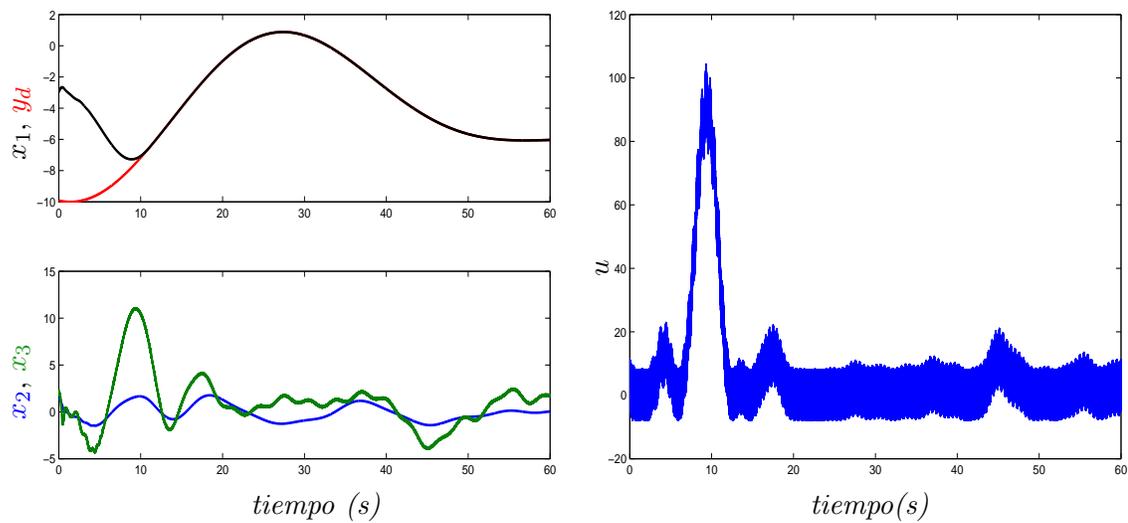


Figura 4.2: Estados (izquierda) y señal de control (derecha)





---

# Estudio de estabilidad mediante teoría de sistemas en cascada

El controlador obtenido con el diseño jerárquico presentado en el capítulo 3, asegurar estabilidad en tiempo finito del origen del sistema de error basándose en la suposición de que la velocidad de convergencia de cada control virtual permitirá llegar a obtener el modo deslizante de orden correspondiente para la restricción  $\sigma_i$ . El problema de esta suposición es que no puede asegurarse a priori. Como se menciona en el capítulo 3, el ajuste de ganancias se realiza en simulación para lograr la convergencia para ciertas condiciones iniciales del sistema. Cuando estas condiciones iniciales cambian, también lo hace el transitorio, pudiendo provocar que las perturbaciones e incertidumbres rebasen las magnitudes que pueden ser manejadas por las ganancias previamente seleccionadas, a menos que sus cotas se satisfagan globalmente, en otras palabras, podría llevar a inclusiones diferenciales para las que las ganancias seleccionadas,  $\alpha_i$ , sean muy pequeñas para que el correspondiente control  $\Psi_{n-i,n-i+1}$ , establezca el modo deslizante. La introducción de trayectorias auxiliares con la técnica de MDAO integrales presentada en el capítulo 4, logra solucionar el problema del comportamiento en el transitorio, a pesar del cambio en condiciones iniciales, debido a que estas son consideradas en el diseño. Lo anterior se logra a expensas de una mayor complejidad en el esquema de control. En el presente capítulo se propone aplicar la metodología de análisis de cascadas, para estudiar el comportamiento en el transitorio al aplicar el algoritmo de diseño jerárquico, si bien el análisis aquí presentado se reduce únicamente a aquellos sistemas en los que sólo se introduce un control virtual. El objetivo es obtener condiciones que permitan asegurar estabilidad del esquema

de control propuesto basándose en las características de crecimiento de las funciones  $g_i$  del sistema. El tipo de sistemas de la ecuación (3.1), puede ser visto como un conjunto de sistemas en cascada, si se considera que las funciones que forman al sistema están evaluadas a lo largo de las trayectorias de éste. Los resultados obtenidos para sistemas autónomos en cascada, ver por ejemplo [Sontag, 1989],[Sontag, 1991], no pueden ser aplicados directamente a sistemas variantes en el tiempo, que es el caso que nos interesa debido a las perturbaciones dependientes en el tiempo y a el problema de seguimiento. El procedimiento de análisis de estabilidad para sistemas no autónomos en cascada que se sigue en el presente trabajo está reportado en [Panteley y Loría, 1997],[Panteley y Loría, 1998], en donde se dan condiciones suficientes para estabilidad uniforme global y asintótica (UGAS por sus siglas en inglés) para estos sistemas. Dichos resultados son aplicados al esquema de control propuesto en esta tesis, haciendo las consideraciones necesarias para poder analizar al sistema en lazo cerrado como una cascada. De esta forma se logra concluir estabilidad en tiempo finito de la cascada la cual, a diferencia de los sistemas estudiados en análisis de cascada estándar, está afectada por perturbaciones.

Una ventaja del análisis en cascada es que se analiza a cada subsistema por separado y se consideran términos de interconexión. Al analizar a cada subsistema por separado el análisis es más simple. Lo que se busca es que cada subsistema cumpla con ciertas condiciones de estabilidad y, por otra parte, condiciones de crecimiento sobre el término de interconexión; si estas condiciones se cumplen puede llegarse a la conclusión de estabilidad del sistema completo.

Dos enfoques son presentados. En el primero se considera que no se conoce una función de Lyapunov para el subsistema esclavo; este caso corresponde a todos los algoritmos MDAO cuasicontinuos de orden mayor o igual a dos, ya que no se ha encontrado una función de Lyapunov para ninguno de ellos. En el segundo enfoque sí se usa una función de Lyapunov para realizar el análisis del sistema esclavo, esto es posible gracias a la función de Lyapunov reportada en [Santesteban y otros, 2010]. Al final se presenta un ejemplo en el que un sistema de suspensión magnética es controlado y tiene la particularidad de que, si bien para el diseño es visto como dos subsistemas conectados en cascada, el subsistema esclavo es de segundo orden y su salida tiene grado relativo dos respecto al control virtual por lo que se usa un algoritmo cuasicontinuo de tercer orden en dicho control virtual. Antes de presentar los dos enfoques mencionados se expone un desarrollo sobre análisis de cascadas no lineales variantes en el tiempo (NLVT), cuyos resultados son usados en el primer enfoque y cuya metodología también es usada para el segundo.

---

## 5.1. Estabilidad de Cascadas NLVT

Considere los sistemas en la forma de cascada NLVT siguiente<sup>1</sup>

$$\Sigma_1 : \dot{x}_1 = f_1(t, x_1) + g(t, x) \quad (5.1a)$$

$$\Sigma_2 : \dot{x}_2 = f_2(t, x_2) \quad (5.1b)$$

donde  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^m$ ,  $x := [x_1, x_2]^T$ . Las funciones  $f_1, f_2$  y  $g$  son continuas en sus argumentos, Lipschitz localmente en  $x$  y uniformemente en  $t$  respectivamente;  $f_1$  es continuamente diferenciable respecto a sus argumentos. Obsérvese que el término  $g(t, x_1)x_2$ , de la expresión (3.1), es un caso particular de  $g(t, x)$  del sistema (5.1).

Se supone estabilidad asintótica en el sentido de Lyapunov (uniformemente respecto a las condiciones iniciales), de cada origen  $x_i = 0$  respectivo a los sistemas  $\Sigma_2$  y  $\Sigma_1^0$ , este último dado por la siguiente ecuación

$$\Sigma_1^0 : \dot{x}_1 = f_1(t, x_1).$$

La propiedad de estabilidad asintótica uniforme de  $\Sigma_2$  es equivalente a la existencia de una función  $\beta \in \mathcal{KL}$  que satisface que para todo  $x_{2o} \in \mathbb{R}^m$  todo  $t_o \geq 0$  y todo  $t \geq t_o$ ,

$$|x_2(t)| \leq \beta(|x_{2o}|, t - t_o). \quad (5.2)$$

Además se supone la existencia de  $\theta_1 \in \mathcal{K}$  y  $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$  continuas tales que

$$|g(t, x)| \leq \theta_1(|x_2|)\alpha(|x|). \quad (5.3)$$

En particular, bajo la suposición de que el origen de (5.1b) es global uniforme y asintóticamente estable, se tiene para  $r > 0$  y para todo  $t_o \geq 0$ , lo siguiente

$$|g(t, x(t))| \leq c_g(r)\alpha^*(|x_1(t)|)$$

para todo  $|x_{2o}| < r$  y todo  $t \geq t_o$  donde  $c_g(r)$  es la función clase  $\mathcal{K}$  definida por  $c_g(r) := \theta_1(\beta(\cdot, 0))$ . La nueva función  $\alpha^*$ , considera el hecho de que al ser  $x_2$  asintóticamente estable, la cota superior de la función  $\alpha$  puede ponerse en términos de  $x_1$ .

Realizadas estas suposiciones es posible enunciar la siguiente proposición, usando el mismo razonamiento de los resultados reportados en [Panteley y Loría, 2001].

---

<sup>1</sup>Obsérvese que las dimensiones de los estados  $x_1, x_2$  y de las funciones  $f_1, f_2$  y  $g$  no son como en el resto del documento, se ha preferido dejar así para no introducir nueva notación.

**Proposición 5.1** *Para el sistema (5.1), supóngase que el origen de  $\Sigma_2$  es asintóticamente estable (o estable en tiempo finito) y que*

1. *existe una función diferenciable y radialmente no acotada  $V : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , y números positivos  $c_1, c_2$  tales que*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(t, x_1) \leq c_1 V + c_2; \quad (5.4)$$

2. *existen números positivos  $\eta, c_3$  tales que*

$$|x_1| \geq \eta \implies \left| \frac{\partial V}{\partial x_1} \right| |x_1| \leq c_3 V;$$

3. *La función  $g(t, x)$  cumple con (5.3) y existen números positivos  $c_4, c_5$  tales que para cada  $x_2 \in \mathbb{R}^m$  (condición de crecimiento lineal)*

$$|g(t, x)| \leq c_4 + c_5 |x_1|.$$

Entonces, las trayectorias del sistema (5.1) existen para todo  $t$ . Si además, el sistema  $\Sigma_1^0$  es uniforme global y asintóticamente estable (o respectivamente estable en tiempo finito), también lo es la cascada (5.1).

Cabe resaltar que La suposición 1) es muy poco restrictiva, siempre puede satisfacerse si el sistema  $\Sigma_1^0$  es *completo*<sup>2</sup> [Angeli y Sontag, 1999]. La suposición 2) también es poco restrictiva, por ejemplo siempre se cumple para una función polinomial. La suposición 3) es estándar en la metodología de análisis de cascadas, nótese que  $g$  es cero si  $x_2 = 0$  pero puede ser diferente de cero cuando  $x_1 = 0$ .

**Demostración** Se demuestra completitud (que el sistema es completo). Supóngase que existe  $t_f < \infty$  tal que  $|x_1(t)| \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow t_f$ . Sea  $\eta$  el referido en la suposición 2. Entonces, si  $|x_1| \geq \eta$  se cumple que

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1} (f_1 + g) \\ &\leq c_1 V + c_2 + c_4 \left| \frac{\partial V}{\partial x_1} \right| + c_3 V \\ &\leq cV + c_2, \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>El término en inglés es *forward complete*, es decir que las trayectorias de solución son extendibles conforme  $t \rightarrow \infty$

---

donde  $c := c_1 + c_3(1 + c_4/\eta)$ . Integrando ambos miembros, se llega que en cualquier instante de tiempo  $t \geq t_o$  en el que  $|x_1(t)| \geq \eta$ , se cumple que

$$\dot{V}(x_1(t)) \leq [V(x_1(t_k)) + c_2(t - t_k)]e^{c(t-t_k)},$$

donde la secuencia  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es definida como

$$t_k := \text{mín} \{s \in [t_o; t] : |x_1(\tau)| \geq \eta, \forall \tau \in [s; t]\}.$$

Es decir,  $V(x_1(t))$  es finita para todo tiempo finito en el que  $|x_1(t)| \geq \eta$ . Dado que  $V$  es radialmente no acotada y continua,  $V(x_1(t))$  también es finita cuando  $|x_1(t)| \leq \eta$ . Se concluye que  $V(x_1(t))$  es finita para todo tiempo finito, lo que implica que  $|x_1(t)|$  también es finita y por lo tanto la propiedad de completitud queda demostrada. Ahora la afirmación de estabilidad se deriva trivialmente del hecho de que  $\Sigma_2$  es estable en tiempo finito.  $\square$

## 5.2. Estudio de estabilidad sin función de Lyapunov

El análisis de estabilidad de los controladores por MDAO cuasicontínuos se hace con base en sus propiedades de homogeneidad, no hay funciones de Lyapunov disponibles para dichos algoritmos. Sin embargo es posible aplicar la metodología de cascadas descrita en la sección anterior. Es importante resaltar que no se supone la existencia de una función de Lyapunov para el subsistema esclavo, que se sabe estable, sino que la suposición es mucho menos restrictiva.

Considérese el sistema no lineal perturbado siguiente

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1) + g_1(t, x)x_2 + \omega_1(t, x_1) \quad (5.5a)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(t, x) + g_2(t, x)u + \omega_2(t, x). \quad (5.5b)$$

A diferencia de (3.1) la función  $g_1$  depende de todo el estado, sin embargo se hace la suposición de que el grado relativo de cada estado no cambia. Todas las otras suposiciones también permanecen sin cambio.  $x := [x_1, x_2]^T$  es el vector de estados  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  y  $u \in \mathbb{R}$  es el control. Se suponen a  $f_i$  y  $g_i$  como funciones escalares suaves,  $\omega_1$  and  $\omega_2$  son desconocidas y representan perturbaciones externas y variación de parámetros. Además,  $g_i \neq 0 \quad \forall x \in D$  y todo  $t \in [0, \infty)$ , donde  $D$  denota un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ .

Se sigue el procedimiento descrito en el capítulo 3, para diseñar un controlador para que la salida,  $y = x_1$ , del sistema (5.5), haga el seguimiento exacto de una señal suave con derivadas acotadas  $y_d$ .

*Paso 1.* Definiendo el error de seguimiento como  $\sigma_1 = x_1 - y_d$ . Se define el siguiente control virtual que constituye la dinámica deseada para  $x_2$

$$\phi(t, x) = g_1(t, x)^{-1} [-f_1(t, x_1) + \dot{y}_d + u_{11}] \quad (5.6a)$$

$$\dot{u}_{11} = -\alpha_1 \Psi_{1,2}(\sigma_1, \dot{\sigma}_1) \quad (5.6b)$$

*Paso 2.* Se calcula el control real  $u$

$$u = g_2(t, x)^{-1} \{-f_2(t, x) + \dot{\phi}(t, x) + u_{21}\} \quad (5.7)$$

$$u_{21} = -\alpha_2 \text{signo}(\sigma_2)$$

donde  $\alpha_2$  es una constante positiva.

Como se ha mencionado, la prueba de estabilidad dada en el capítulo 3, asegura convergencia si las suposiciones sobre las cotas de las funciones se satisfacen. En dicha prueba se hace la suposición de que en el transitorio, previo al establecimiento del modo deslizante correspondiente para cada control, dichas condiciones se cumplen. A continuación se estudia la estabilidad de lazo cerrado, considerando el efecto del error en el transitorio, para un sistema de segundo orden.

Debido a que  $\sigma_2 = x_2 - \phi(t, x)$ , la ecuación (5.5a) es equivalente a

$$\dot{\sigma}_1 = f_1(t, x_1) + g_1(t, x)\sigma_2 + \omega_1(t, x_1) - \dot{y}_d + g_1(t, x)\phi(t, x)$$

ahora definimos  $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2]^T$  y usando (5.6a) se llega a

$$\dot{\sigma}_1 = F_1(t, \sigma_1) + g_1(t, \sigma)\sigma_2 \quad (5.8a)$$

$$F_1(t, \sigma_1) = \omega_1(t, \sigma_1) - \dot{y}_d - \int_0^t \alpha_1 \Psi_{1,2}(\sigma_1(s), \dot{\sigma}_1(s)) ds \quad (5.8b)$$

Sustituyendo (5.7) en la ecuación (5.5b), se tiene

$$\dot{\sigma}_2 = F_2(t, \sigma_2) \quad (5.9a)$$

$$F_2(t, \sigma) = -\alpha_2 \text{signo}(\sigma_2) + \omega_2(t, \sigma) \quad (5.9b)$$

Obsérvese lo siguiente:

1.– La clave para demostrar estabilidad en lazo cerrado es que las ecuaciones (5.8) y (5.9a) tienen una estructura en *cascada*. Esto es las funciones que intervienen son dependientes de las trayectorias del sistema i.e.  $\sigma$  depende de los estados originales.

- 2.– Para perturbaciones acotadas  $\omega_2$  y ganancia  $\alpha_2$  suficientemente grande, el origen del sistema (5.9a), *i.e.*  $\sigma_2 = 0$ , es estable en tiempo finito. Si se considera a  $\omega_2(t, x(t))$  como acotada, entonces lo anterior se cumple independientemente del comportamiento de  $x_1(t)$ .
- 3.– Si  $\sigma_2 \equiv 0$  y  $g_1(t, \sigma)$  es acotada (*i.e.* a lo largo de las trayectorias), entonces se tiene

$$\dot{\sigma}_1 = F_1(t, \sigma_1). \quad (5.10)$$

El origen  $\sigma_1 = 0$  de la ecuación integro-diferencial (5.10) es estable en tiempo finito. Se puede ver más fácilmente al expresarse de la siguiente manera, diferenciando (5.10) se tiene  $(\xi_1 = \sigma_1, \xi_2 = F_1(t, \sigma_1))$  en el contexto de la ecuación (5.10), es decir, sin considerar la interconexión).

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 \quad (5.11)$$

$$\dot{\xi}_2 = \dot{\omega}_1 - \alpha_1 \Psi_{1,2}(\xi_1, \xi_2) \quad (5.12)$$

$$\xi_2(t_0) = \omega_1(x_1, t_0) \quad (5.13)$$

Es decir, las trayectorias generadas por las condiciones iniciales  $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\xi_1(t_0)$  and  $\xi_2(t_0)$  definidas según las ecuaciones anteriores, coinciden con las trayectorias de (5.10) para cualquier condición inicial de tal forma que  $\sigma_1(t_0) = \xi_1(t_0)$ . La estabilidad en tiempo finito del sistema (5.11), con  $\dot{\omega}_1$  acotado, (5.12) ha sido bien establecida en [Levant, 2005b].

Si para el subsistema (5.10), se supone la existencia de una función que cumpla con las condiciones 1, 2 de la proposición 5.1, y el término de interconexión  $g_1$ , a su vez, cumple con la condición de crecimiento lineal de la misma, se puede asegurar estabilidad del sistema completo. Este resultado se enuncia en la siguiente proposición

**Proposición 5.2** *Si para el sistema (5.5), se cumple que  $|g_1(t, x)| \leq c_4 + c_5 |x_1|$  y las ganancias  $\alpha_1, \alpha_2$  de las ecuaciones (5.6),(5.7), respectivamente, se eligen suficientemente grandes entonces el sistema en lazo cerrado es estable en tiempo finito.*

**Nota 5.1** La principal ventaja de la proposición anterior es que se basa en condiciones de crecimiento para  $g_1$  que son verificables.

La existencia de la función que permite probar completitud del sistema no es restrictiva sobre todo considerando que el sistema para el que se supone su existencia es estable, en la siguiente sección se usa de nuevo la metodología de cascadas pero esta vez con una función de Lyapunov.

### 5.3. Estudio de estabilidad con función de Lyapunov.

Considérese el sistema en lazo cerrado

$$\dot{\sigma}_1 = - \int_0^t [\alpha_1 \text{signo}(\sigma_1(s)) + \beta_1 \text{signo}(\dot{\sigma}_1(s))] ds + g_1(t, \sigma) \sigma_2 + \omega_1 \quad (5.14a)$$

$$\dot{\sigma}_2 = -\alpha_2 \text{signo}(\sigma_2) + \omega_2 \quad (5.14b)$$

a diferencia de la sección anterior el algoritmo, *twisting*  $u_{11} - \alpha_1 \text{signo}(\sigma_1) - \beta_1 \text{signo}(\dot{\sigma}_1)$ , es usado en lugar del cuasicontinuo  $\Psi_{1,2}$ . El integrando es considerado a evaluarse a lo largo de las trayectorias del sistema.

De nuevo se tiene un sistema en cascada representado por una ecuación integro-diferencial. Para estudiar su estabilidad, el sistema (5.14a) es expresado en una forma más conveniente. Sea  $z_1 = \sigma_1$ ,  $z_2 = \omega_1 - \int_0^t [\alpha_1 \text{signo}(\sigma_1(s)) + \beta_1 \text{signo}(\dot{\sigma}_1(s))] ds$ . Entonces, la ecuación (5.14a) es equivalente a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} z_2 \\ \dot{\omega}_1 - \alpha_1 \text{signo}(z_1) - \beta_1 \text{signo}(z_2) \end{bmatrix}}_{F_1(z)} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_1(t, \begin{bmatrix} z_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}) \sigma_2 \\ \Phi \end{bmatrix}}_{G(t, z, \sigma_2)} \quad (5.15)$$

$$\text{donde } \Phi = -\beta_1 \text{signo}(\dot{z}_1) + \beta_1 \text{signo}(z_2)$$

dado que  $z_2(t_0) = \omega_1(t_0, x_1(t_0))$ . Obsérvese que  $\Phi \leq 2\beta_1$  y  $G(t, z, 0) = 0$ .

**Nota 5.2** Lo que significa que las trayectorias de  $\sigma_1$  en (5.14a), coinciden con las de  $z_1$  en (5.15), si las condiciones iniciales satisfacen que  $z_2(t_0) = \omega_1(t_0, x_1(t_0))$ . Sin embargo, es importante resaltar que esto es usado sólo para propósitos de análisis, el conocimiento de  $\omega_1(t_0, x_1(t_0))$ , no es necesario y de hecho se supone desconocido. También obsérvese que  $\sigma_2$  es una variable de estado diferente de  $z_2$ , se deja así para resaltar que se desea hacer por separado el análisis del subsistema  $\dot{z} = F_1(z)$ , cómo se hace en el análisis de cascadas.

**Teorema 5.1** *El origen del sistema en lazo cerrado (5.14) es globalmente estable en tiempo finito, si se cumple que  $\alpha_1 - |\dot{\omega}_1| > \beta_1 > |\dot{\omega}_1|$ ,  $\alpha_2 > |\omega_2|$  y existe una función no decreciente  $\theta$  tal que*

$$\left| g_1(t, \begin{bmatrix} z_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}) \right| \leq \theta(|\sigma_2|) |z_1|. \quad (5.16)$$

**Demostración** Para su demostración se usan los argumentos para probar estabilidad de sistemas en cascada NLVT, de forma análoga a la sección anterior, pero en esta ocasión todas las desigualdades usadas provienen de la función de Lyapunov para el algoritmo twisting reportada en [Santiesteban y otros, 2010]. En el apéndice B, se presenta un desarrollo para obtener las características de dicha función de Lyapunov y la obtención de las desigualdades usadas a continuación, un par de ellas obtenidas específicamente para fines de la demostración del teorema 5.1, por lo que no están reportadas en [Santiesteban y otros, 2010]. La demostración se divide en dos partes.

1. El origen del sistema (5.14b) es globalmente estable en tiempo finito. Sea la función candidata de Lyapunov  $V_2 = \sigma_2^2$ , su derivada a lo largo de las trayectorias de (5.14b) está dada por  $\dot{V}_2 \leq -2(\alpha_2 - |\omega_2|)|\sigma_2|$  i.e.

$$\dot{V}_2 \leq -2(\alpha_2 - |\omega_2|)V_2^{1/2}$$

eligiendo  $\alpha_2$  tal que  $\alpha_2 - |\omega_2| > 0$  se cumpla, se concluye estabilidad en tiempo finito al integrar la expresión anterior.

2. En este paso se combinan las características de estabilidad en tiempo finito del sistema  $\dot{z} = F_1(z)$ , con la completitud del sistema (5.15), y el resultado del paso previo para finalmente concluir estabilidad en tiempo finito de la cascada.

La estabilidad en tiempo finito de  $\dot{z} = F_1(z)$  es demostrada en [Santiesteban y otros, 2010], mediante una función estricta de Lyapunov  $V(z)$ . En este trabajo se usa esa misma función para probar completitud de (5.15). Supóngase que dicha función de Lyapunov  $V(z)$  es positiva definida y propia, su derivada total a lo largo de las trayectorias de  $\dot{z} = F_1(z)$  satisface

$$\dot{V} \leq -c_1 V^{c_2}, \quad c_1 > 0, \quad c_2 \in (0, 1).$$

y existen constantes  $c_3, c_4, c_5, c_6 > 0$  tales que

$$|z_1| \geq c_4 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial V}{\partial z_1} \right| |z_1| \leq c_3 V \quad (5.17)$$

$$\|z\| \geq c_6 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial V}{\partial z_2} \right| \leq c_5 V \quad (5.18)$$

Si lo anterior se cumple entonces

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dz} [F_1(z) + G(t, z, \sigma_2)] &\leq -c_1 V^{c_2} \\ &+ \left| \frac{\partial V}{\partial z_1} g_1(t, \begin{bmatrix} z_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}) \sigma_2 \right| + \left| \frac{\partial V}{\partial z_2} 2\beta \right|. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Ahora, puesto que  $\sigma_2(t)$  converge a cero en tiempo finito, entonces es global y uniformemente acotada, por lo tanto usando (5.16), se llega a

$$\left| g_1(t, \begin{bmatrix} z_1 \\ \sigma_2(t) \end{bmatrix} \right| |\sigma_2(t)| \leq \theta(|\sigma_2(t)|) |z_1| |\sigma_2(t)| \quad (5.20)$$

$$\leq c_7 |z_1| \quad (5.21)$$

donde  $c_7$  depende únicamente de la magnitud de  $\sigma_2(t_0)$ . Se concluye de todo lo anterior que las trayectorias  $z(t)$ ,  $\sigma_2(t)$  satisfacen

$$\frac{dV}{dz} [F_1(z) + G(t, z, \sigma_2)] \leq c_3 c_7 V(z(t)) + 2\beta c_5 V(z(t))$$

para todo  $t$  tal que  $|z_1(t)| \geq c_4$  y  $\|z\| \geq c_6$ . Es decir,

$$|z_1(t)| \geq c_4, \|z\| \geq c_6 \quad \Rightarrow \quad \dot{V}(z(t)) \leq (c_3 c_7 + 2\beta c_5) V(z(t)).$$

Integrando la desigualdad anterior usando infinito como límite superior se concluye que el sistema es completo.

Sea  $t_f < \infty$  el tiempo de asentamiento para  $\sigma_2(t)$ . De la propiedad de completitud, para todo  $t$  tal que  $t > t_f$  y observando que  $G(t, z, 0) = 0$  se obtiene, invocando de nuevo (5.19)

$$\frac{dV}{dz} [F_1(z) + G(t, z, \sigma_2)] \leq -c_1 V^{c_2}$$

para todo  $t \geq t_f$ . Integrando esta última expresión se concluye estabilidad en tiempo finito.  $\square$

## 5.4. Ejemplo

El ejemplo aquí presentado hace uso de un control virtual en el que se introduce un control cuasicontinuo. El sistema es una suspensión magnética y se busca hacer seguimiento de una posición deseada, a diferencia de los ejemplos de los capítulos anteriores, el término de interconexión depende de aquella variable que se está usando como control virtual, tal y como se expone en las secciones anteriores de este capítulo. Sin embargo el esquema de control propuesto en el capítulo 3 puede ser aplicado gracias a que se sigue cumpliendo con los requerimientos necesarios, como es el de grado relativo de la salida respecto a la entrada de control.

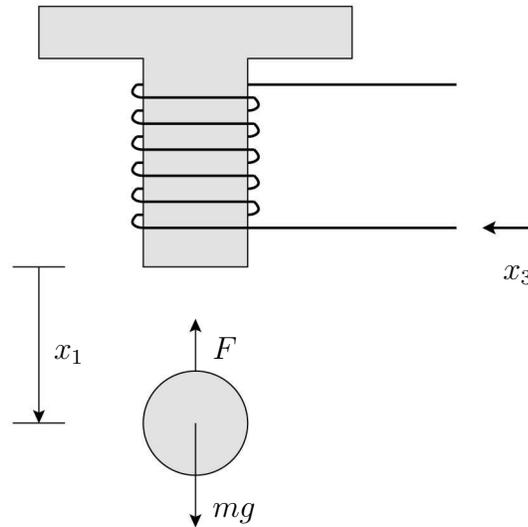


Figura 5.1: Esquema del sistema de suspensión magnética.

Considérese el siguiente modelo no lineal de un sistema de suspensión magnética, ver figura (5.1)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= G - \frac{Q}{m} \frac{x_3}{x_1^2} x_3 + \omega_2(t, \bar{x}_2) \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R}{L} x_3 + \frac{2Q}{L} \left[ \frac{x_2 x_3}{x_1^2} \right] + \frac{u}{L} + \omega_3(t, x_3)\end{aligned}$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  son la posición y velocidad de la bola;  $x_3$  es la corriente en la bobina. El objetivo es seguimiento de una señal suave  $x_{1d}$ . El término de interconexión,  $\frac{Q}{m} \frac{x_3}{x_1^2}$ , como se había mencionado depende de  $x_3$ , sin embargo, los grados relativos de los estados  $x_1, x_2, x_3$  son 1, 2 y 3 respectivamente. Por lo tanto, el esquema de diseño jerárquico puede ser aplicado.

Las siguientes perturbaciones son introducidas al sistema

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \text{sen}(t) \\ \omega_3 &= 0.01 \text{sen}(2t)\end{aligned}$$

$\omega_1$  correspondería a  $x_1$  pero se considera dicho estado como no perturbado. Adicionalmente los parámetros usados en el cálculo de la señal de control están alterados, siendo

un diez por ciento más pequeños que los valores reales de la planta. La siguiente tabla muestra los parámetros de la planta

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidades
Resistencia de la bobina	$R$	28.7	$\Omega$
Inductancia de la bobina	$L$	0.65	$H$
Constante gravitacional	$G$	9.81	$m/s^2$
Constante de fza. magnética	$Q$	$1.4 \times 10^{-4}$	-
Masa de la bola	$m$	$11.87 \times 10^{-3}$	$kg$

El estado  $x_3$  será el control virtual para el subsistema  $x_1, x_2$ . El orden del control por modo deslizante, viendo a  $x_3$  como entrada de control, para poder controlar el estado  $x_1$  sería de orden 2, sin embargo  $x_3$  no es una señal de control real sino un estado y tiene grado relativo uno respecto a la entrada de control real, por lo que debe ser diferenciable al menos una vez. Por lo tanto un modo deslizante de tercer orden a través de un integrador es incluido en el control virtual.

- Sea  $\sigma_1 = x_1 - y_d$  y

$$x_3^* = \phi_1 = \frac{x_1^2 m}{x_3 Q} [G + \ddot{y}_d - \int \Psi_{2,3}(\sigma_1, \sigma_1^{(1)}, \sigma_1^{(2)})].$$

Entonces, definiendo  $\sigma_2 = x_3 - \phi_1$ . La entrada de control está definida por

$$u = R x_3 - 2Q \left[ \frac{x_2 x_3}{x_1^2} \right] + \dot{\phi}_1 - \alpha_2 L \text{signo}(\sigma_2)$$

Haciendo las manipulaciones algebraicas pertinentes se obtiene la siguiente cascada ( $\xi_1 = \sigma_1$ ).

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 \tag{5.22}$$

$$\dot{\xi}_2 = -\alpha_1 \int \Psi_{2,3}(\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_2) + \omega_2(t, \xi_1) + \frac{Q x_3(t)}{m x_1^2(t)} \sigma_2 \tag{5.23}$$

$$\dot{\sigma}_2 = -\alpha_2 \text{signo}(\sigma_2) + \omega_3(t, \xi_1, \sigma) \tag{5.24}$$

La cual es estable con  $\alpha_1, \alpha_2$  suficientemente grandes. Obsérvese que  $g = \frac{Q x_3(t)}{m x_1^2(t)}$  está indefinida para  $x_1 = 0$ , por lo que la posición deseada no debe pasar por cero; tomando en cuenta esto  $g$  cumple con la suposición 3 de la proposición 5.1, dentro de una región  $D$ , por alguna constante  $c_4$  y  $c_5 = 0$ .

Los resultados de simulación se muestran en las figuras (5.2) a (5.4).

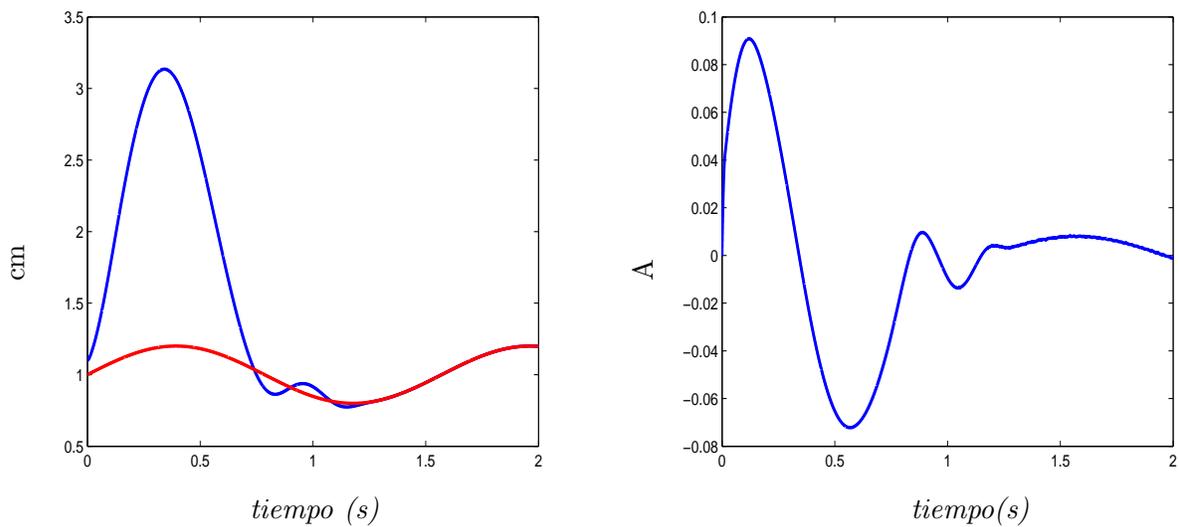


Figura 5.2: Posición real y deseada (izquierda). Corriente en la bobina (derecha).

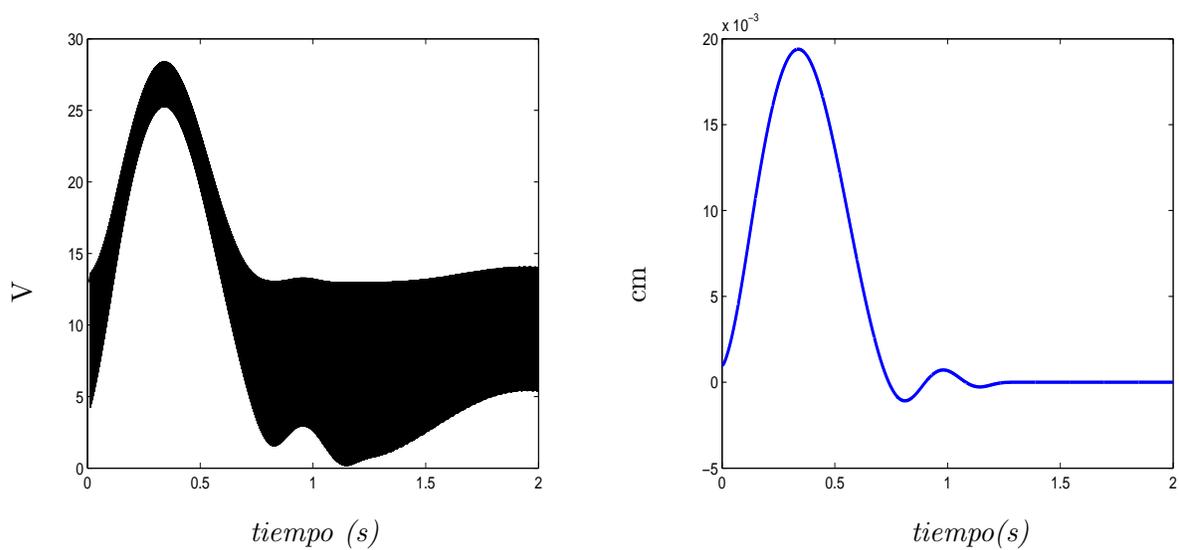


Figura 5.3: Señal de control (izquierda). Señal de error  $\sigma_1$  (derecha).





---

# Combinación de MDAO y *Backstepping*

En los capítulos anteriores se ha mostrado cómo realizar regulación o seguimiento de una señal suave por la salida del sistema, a pesar de la presencia de incertidumbres paramétricas y señales externas, las cuales se requiere tengan cierto grado de suavidad. La propuesta ha sido usar la idea de control virtual y un diseño jerárquico. Sin embargo, con el objetivo de mantener cierto nivel de simplicidad en el procedimiento de diseño, se ha optado por que en cada control virtual, la dinámica nominal sea cancelada, dejando al término de control por MDAO, incluido en cada control virtual, la tarea de rechazar las perturbaciones e inducir la dinámica deseada. Visto de otra manera, se está construyendo paso a paso, una superficie de deslizamiento no lineal con ayuda del conocimiento de la planta nominal, pero en el control real,  $u$ , no se ve reflejado el conocimiento de la parte nominal. Con la técnica de diseño por *backstepping*, aprovechando la estructura triangular de los sistemas en la forma de retroalimentación estricta y usando la idea de control virtual, puede construirse una ley de control que puede asegurar estabilidad asintótica al origen, en el caso de regulación, considerando únicamente incertidumbre desvaneciente en el origen. Para el caso de seguimiento las incertidumbres, en general, no se desvanecen en el origen del sistema de error, permitiendo únicamente alcanzar estabilidad asintótica a una región que depende de la magnitud de las incertidumbres. Debido a que la ley de control contruida por *backstepping* se basa en el conocimiento de una función de Lyapunov, construida paso a paso, el procedimiento tiene la ventaja de poder llegar a leyes de control globales. Otra ventaja del *backstepping* es que pueden evitarse cancelaciones innecesarias

de no linealidades.

Tomando en cuenta las ventajas y debilidades tanto del diseño de control jerárquico basado en MDAO y de la técnica de *backstepping*, en este capítulo se propone hacer una combinación de ambas técnicas. La primera sección es una introducción al diseño por *backstepping* y en la segunda sección está detallada la propuesta de combinación con el diseño de control jerárquico. El capítulo concluye con un ejemplo en donde se muestra la conveniencia de usar la combinación propuesta mediante simulaciones.

## 6.1. *Backstepping*

La técnica de *backstepping*, reportada inicialmente en [Kanellakopoulos y otros, 1991] y posteriores mejoras en [Krstic y otros, 1995], permite un diseño sistemático basado en Lyapunov que relaja la condición de acoplamiento. Para mostrar la idea detrás de esta técnica, comenzaremos con el caso particular de *backstepping* con un integrador simple. Considérese el siguiente sistema:

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi \quad (6.1a)$$

$$\dot{\xi} = u \quad (6.1b)$$

con  $[\eta^T, \xi]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$  es el estado y  $u \in \mathbb{R}$  es la entrada de control. Las funciones  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  son suaves, estrictamente sólo es necesario que existan sus derivadas hasta cierto orden, en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  que contiene  $\eta = 0$  y  $f(0) = 0$ . El objetivo es diseñar un control por retroalimentación de estados que estabilice el origen ( $\eta = 0, \xi = 0$ );  $f$  y  $g$  se consideran conocidas. El sistema puede verse como una conexión en cascada de dos subsistemas, el primer componente es (6.1a), con  $\xi$  como entrada y el segundo es el integrador (6.1b). Supóngase que se conoce una ley de control  $\varphi(\eta)$ , con  $\varphi(0) = 0$ , y una función de Lyapunov  $V(\eta)$  que satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\varphi(\eta)] \leq -W(\eta), \quad \forall \eta \in D \quad (6.2)$$

donde  $W(\eta)$  es positiva definida. Entonces se puede concluir estabilidad asintótica al origen del siguiente sistema

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\varphi(\eta).$$

Sumando y restando el término  $g(\eta)\varphi(\eta)$  al lado derecho de la última ecuación se obtiene

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\varphi(\eta) + g(\eta)[\xi - \varphi(\eta)]$$

que con el cambio de variables  $z = \xi - \varphi(\eta)$  queda como

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\varphi(\eta) + g(\eta)z \quad (6.3a)$$

$$\dot{z} = v \quad (6.3b)$$

$$\text{donde } v = u - \dot{\varphi}$$

dado que  $f, g$  y  $\varphi$  son conocidas, la derivada de  $\varphi$  puede calcularse con la siguiente expresión

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\xi].$$

Obsérvese que el origen del subsistema (6.3a), es asintóticamente estable cuando su entrada  $z$  es cero. Lo anterior es aprovechado para diseñar el control  $v$  que estabilice el sistema completo. Se propone  $V_c(\eta, z) = V(\eta) + \frac{1}{2}z^2$  como función candidata de Lyapunov, con la cual se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &= \frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\varphi(\eta)] + \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta)z + z\dot{z} \\ &\leq -W(\eta) + \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta)z + zv \end{aligned}$$

por lo que eligiendo  $v = -\frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - kz$  con  $k > 0$  se obtiene

$$\dot{V}_c = -W(\eta) - kz^2$$

que permite concluir que el origen ( $\eta = 0, z = 0$ ) es asintóticamente estable, lo que implica que ( $\eta = 0, \xi = 0$ ) también lo es (debido a que  $\varphi(0) = 0$ ). La expresión para el control, una vez sustituyendo  $v, z$  y  $\dot{\varphi}$  es la siguiente

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} [f(\eta) - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} g(\eta) - k[\xi - \varphi(\eta)]].$$

Si la función  $V(\eta)$ , es radialmente no acotada y todas las suposiciones se cumplen globalmente, el origen es global y asintóticamente estable.

El procedimiento se puede aplicar para el caso más general en que el subsistema (6.1b), tiene una dinámica más compleja y además considerar incertidumbre paramétrica, como en el siguiente sistema:

$$\dot{\eta} = f_1(\eta) + g_1(\eta)\xi + \omega_1(\eta, \xi) \quad (6.4a)$$

$$\dot{\xi} = f_2(\eta, \xi) + g_2(\eta, \xi)u + \omega_2(\eta, \xi) \quad (6.4b)$$

donde  $\eta \in \mathbb{R}^n$  y  $\xi \in \mathbb{R}$ . Se supone que  $g_1 \neq 0$  y que todas las funciones son suaves sobre un dominio  $(\eta, \xi) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Suponiendo que las funciones  $f_1, f_2, \omega_1$  y  $\omega_2$  se desvanecen en el origen, además de cumplirse lo siguiente

$$\begin{aligned}\omega_1(\eta, \xi) &\leq a_\eta \|\eta\| \\ \omega_2(\eta, \xi) &\leq a_{2\eta} \|\eta\| + a_\xi |\xi|\end{aligned}$$

y que se puede diseñar un controlador  $\varphi(\eta)$ , con  $\varphi(0) = 0$ , con una función de Lyapunov tales que en  $D$  se cumple que

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \eta} (f_1 + g_1 \varphi + \omega_1) &\leq -b \|\eta\|^2 \\ |\varphi(\eta)| &\leq a_{1\varphi} \|\eta\| \\ \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right\| &\leq a_{\partial \varphi}\end{aligned}$$

entonces se puede realizar un diseño por *backstepping*, para hallar un controlador  $u$  que asegure estabilidad asintótica al origen del sistema.

El procedimiento es descrito a detalle en la siguiente sección para el caso de seguimiento de una señal suave por la salida del sistema y considerando perturbaciones no desvanecientes. El objetivo será la estabilización del origen del sistema de error. Obsérvese que para el caso en que la salida deseada es la constante cero y las perturbaciones son desvanecientes se tendría el caso arriba presentado. Para el caso con perturbaciones no desvanecientes, el diseño por *backstepping* sólo puede asegurar que el error de seguimiento converge a una región cuya magnitud depende de la magnitud de las perturbaciones, es decir, estabilidad práctica. Sin embargo, con la combinación propuesta a continuación es posible concluir no sólo estabilidad práctica, sino estabilidad en tiempo finito del origen del sistema de error, es decir, seguimiento exacto en tiempo finito.

## 6.2. Diseño combinado MDAO-*Backstepping*

A continuación se hará un análisis análogo a la sección anterior, pero para el caso de seguimiento en un sistema perturbado, cada control virtual estará compuesto por dos partes, una de ellas asegura estabilidad asintótica de la parte nominal del sistema, la otra parte es el término de control cuasicontinuo como se propone en el algoritmo de diseño jerárquico reportado en [Estrada y Fridman, 2010b]. En dicho trabajo, una parte de cada control virtual es para eliminar la dinámica nominal del sistema, dejando la tarea de estabilización al término de MDAO presente en cada control virtual. El esquema sólo asegura estabilidad local respecto a las condiciones iniciales. En esta sección se busca aplicar la técnica de *backstepping* para que el control real incluya términos diseñados a partir de la parte conocida del sistema, que aseguren la estabilización del sistema completo a una región acotada del espacio de estados. La idea entonces, es lograr estabilidad práctica del sistema completo gracias al diseño por *backstepping* y una vez que esto se logra, probar que se alcanza seguimiento exacto en tiempo finito, gracias a los términos de control de modos deslizantes de alto orden cuasicontinuos.

Considere de nuevo la clase de sistemas no lineales en la forma de retroalimentación estricta considerada en capítulos anteriores, cuya expresión está dada por la ecuación (6.5):

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1) + g_1(t, x_1)x_2 + \omega_1(t, x_1) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_i &= f_i(t, \bar{x}_i) + g_i(t, \bar{x}_i)x_{i+1} + \omega_i(t, \bar{x}_i) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= f_n(t, x) + g_n(t, x)u + \omega_n(t, x) \\
 i &= 2, \dots, n-1
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T$ ;  $u \in \mathbb{R}$  es la señal de control. Además  $f_i(t, \bar{x}_i)$ ,  $g_i(t, \bar{x}_i)$  y  $\omega_i(t, \bar{x}_i)$  son funciones suaves, con al menos  $n-i$  derivadas acotadas,  $\forall x \in D \subset \mathbb{R}^n, t \in [0, \infty)$ . También se cumple que  $\|g_i(t, \bar{x}_i)\| > d_{g_i} \quad \forall x \in D \subset \mathbb{R}^n, t \in [0, \infty)$ , donde  $d_{g_i}$  son constantes positivas. Las funciones  $\omega_i$  y  $g_i$ ,

cumplen con la siguientes condiciones de crecimiento

$$\|\omega_i\| \leq b_i^* \|\bar{x}_i\| + d_i^* \quad (6.6)$$

$$\|g_i\| \leq b_{g_i}^* \|\bar{x}_i\| \quad \forall \|\bar{x}_i\| \geq r^* \quad (6.7)$$

donde  $b_i^*, b_{g_i}^*, d_i^*$  son constantes positivas. La razón de (6.7) se explica más adelante cuando se trata con las variables del error de seguimiento.

Mediante los términos  $\omega_i$  son consideradas tanto incertidumbres paramétricas como perturbaciones externas, adicionalmente se supone que  $\omega_i$  tiene  $n - i$  derivadas acotadas respecto a las trayectorias del sistema.

El objetivo de control es que la salida del sistema haga seguimiento de una señal suave. Por simplicidad en la exposición, se considera como salida del sistema al estado  $x_1$ , otra salida puede ser considerada siempre y cuando tenga grado relativo bien definido y que, en caso de existir, la dinámica cero sea entrada estable-estado estable.

Como se ha mencionado, el procedimiento se dividirá en dos partes, primero mediante *backstepping* y análisis de Lyapunov se busca asegurar estabilidad práctica del sistema completo. Los controles virtuales se definen de la siguiente manera:

$$x_{i+1} = \phi_i = \phi_{iBS} + \phi_{iQC}; \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (6.8)$$

donde  $\phi_{iBS}$  se diseñará mediante *backstepping* y  $\phi_{iQC}$  es introducido para compensar perturbaciones, en especial aquellas que no dependen del estado, mediante algoritmos de MDAO cuasicontinuos según la propuesta reportada en [Estrada y Fridman, 2010b]. Por construcción, los términos  $\phi_{iQC}$  cumplen con las siguientes condiciones:

$$|\phi_{iQC}| \leq d_{\phi_i} \quad (6.9)$$

$$\left| \frac{d^j}{dt^j} \phi_{iQC} \right| \leq d_{\phi_{ij}}; \quad \text{con } j = 1, \dots, n - i \quad (6.10)$$

Como el objetivo de control es el seguimiento de una señal suave por el estado  $x_1$ , denominamos a dicha señal suave como  $\phi_0$ , definimos las siguientes variables de error

$$\sigma_i = x_i - \phi_{i-1}; \quad i = 1, \dots, n \quad (6.11)$$

suponemos que las desigualdades (6.6),(6.7) pueden ser expresadas en términos del error quedando

$$\|\omega_i\| \leq b_i \|\bar{\sigma}_i\| + d_i \quad (6.12)$$

$$\|g_i\| \leq b_{g_i} \|\bar{\sigma}_i\| \quad \forall \|\bar{x}_i\| \geq r \quad (6.13)$$

donde  $r$  es una constante positiva y  $\bar{\sigma}_i = [\sigma_1, \dots, \sigma_i]^T$ . Aún cuando las funciones  $g_i$  están acotadas por abajo por una constante, se pide que para valores grandes de  $\bar{x}_i$  crezcan según (6.13). Esto se debe a que en una primera etapa queremos asegurar que las trayectorias convergen a una vecindad del origen del error.

Adicionalmente suponemos que la siguiente desigualdad se satisface sobre  $D$

$$\max \left\{ \left| \frac{\partial \phi_{iBS}}{\partial \sigma_j} \right|, \left| \frac{\partial \phi_{iBS}}{\partial x_j} \right| \right\} \leq b_{\partial \phi_i}; \quad j = 1, \dots, i; \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (6.14)$$

para alguna constante positiva  $b_{\partial \phi_i}$ . Es decir que las derivadas parciales de  $\phi_{iBS}$  respecto de las variables  $\sigma_1, \dots, \sigma_j, x_1, \dots, x_j$ , de las cuales es función, están acotadas por  $b_{\partial \phi_i}$ , una constante que acota el valor absoluto de todas ellas en la región  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

- Comenzamos por analizar el subsistema de error  $\sigma_1 = x_1 - \phi_0$ , cuya ecuación dinámica queda como sigue

$$\dot{\sigma}_1 = f_1(t, x_1) + g_1(t, x_1)x_2 - \dot{\phi}_0 + \omega_1(t, x_1)$$

usando el procedimiento presentado en la sección anterior, tomando a  $x_2$  como control virtual, de acuerdo con la ecuación (6.8)  $\phi_1 = \phi_{1BS} + \phi_{1QC}$ , se supone el conocimiento de una función de Lyapunov  $V_1(t, \sigma_1)$  tal que si  $\phi_1$  fuera el control se tendría:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial V_1}{\partial \sigma_1} \dot{\sigma}_1 \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial V_1}{\partial \sigma_1} [f_1 + g_1 \phi_{1BS} - \dot{\phi}_0 + g_1 \phi_{1QC} + \omega_1] \\ &\leq -a_1 \|\sigma_1\|^2 + \frac{\partial V_1}{\partial \sigma_1} [g_1 \phi_{1QC} + \omega_1] \end{aligned} \quad (6.15)$$

como puede apreciarse, el control  $\phi_{1BS}$  aseguraría el seguimiento asintótico en el caso no perturbado, las letras *BS* en el subíndice, servirán para indicar los término diseñados mediante *backstepping*. Por otro lado el término  $\phi_{1QC}$  es un término acotado con al menos  $n-1$  derivadas respecto al tiempo acotadas, el cual es introducido para compensar perturbaciones, en especial aquellas que no dependen del estado, mediante un algoritmo de MDAO cuasicontinuo según la propuesta reportada en [Estrada y Fridman, 2010b]. La presencia de perturbaciones y el término con el que se busca rechazarlas, provocan que aparezcan términos cuyo signo no está definido. Suponemos que  $V_1$  cumple con la siguiente condición

$$\left\| \frac{\partial V_1}{\partial \sigma_1} \right\| \leq a_{12} \|\sigma_1\|, \quad \forall \|\sigma_1\| > a_{13} \quad (6.16)$$

usando las expresiones de acotamiento (6.9),(6.12), (6.13) y (6.16) en la ecuación (6.15) se llega a

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &\leq -a_1\|\sigma_1\|^2 + a_{12}b_{g_1}d_{\phi_1}\|\sigma_1\|^2 + a_{12}b_1\|\sigma_1\|^2 + a_{12}d_1\|\sigma_1\| \\
 &\leq -(a_1 - a_{12}b_{g_1}d_{\phi_1} - a_{12}b_1)\|\sigma_1\|^2 + a_{12}d_1\|\sigma_1\| \\
 &\leq -a_1^*\|\sigma_1\|^2 + a_{1d}\|\sigma_1\|
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

donde  $a_1^* = a_1 - a_{12}b_{g_1}d_{\phi_1} - a_{12}b_1$  y  $a_{1d} = a_{12}d_1$ . El parámetro  $a_1$  depende de la construcción de  $\phi_{1BS}$ , es decir, se selecciona por diseño, por lo que se elige de tal forma que  $a_1^* \gg 0$ . Por lo tanto  $\dot{V}_1$  es negativa para  $\|\sigma_1\|$  suficientemente grande. Con ello se asegura estabilidad práctica, a diferencia de la sección anterior en la que se pudo concluir estabilidad asintótica. Esto debido que en la perturbación  $\omega_1$  se considera un término que no depende del estado y que, por lo tanto, no puede considerarse desvaneciente conforme  $\sigma_1 \rightarrow 0$ . A continuación se itera el procedimiento, como se hace en backstepping, pero con el objetivo de asegurar estabilidad práctica del sistema completo.

- Procedemos ahora a analizar el siguiente subsistema de error,  $\sigma_2 = x_2 - \phi_1$  cuya ecuación dinámica es la siguiente

$$\dot{\sigma}_2 = f_2(t, \bar{x}_2) + g_2(t, \bar{x}_2)x_3 - \dot{\phi}_1 + \omega_2(t, \bar{x}_2)$$

considerando ahora a  $x_3$  como control virtual,  $x_3 = \phi_2 = \phi_{2BS} + \phi_{2QC}$ , y la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_{2c} = V_1 + \frac{1}{2}\sigma_2^2$$

se procede a calcular su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema. Sumando y restando el término  $g_1\phi_1$  al lado derecho de la ecuación de  $\dot{\sigma}_1$  y usando la siguiente expresión

$$\dot{\phi}_1 = \frac{\partial\phi_{1BS}}{\partial\sigma_1}\dot{\sigma}_1 + \frac{\partial\phi_{1BS}}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial\phi_{1BS}}{\partial t} + \frac{d}{dt}\phi_{1QC}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{2c} &= \overbrace{\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial V_1}{\partial \sigma_1}(f_1 + g_1\phi_1 + \omega_1)}^{\dot{V}_1} + \frac{\partial V_1}{\partial \sigma_1}g_1\sigma_2 + \sigma_2 \left( \dot{f}_2 + g_2\phi_2 - \dot{\phi}_1 + \omega_2 \right) \\
\dot{V}_{2c} &= \dot{V}_1 + \frac{\partial V_1}{\partial \sigma_1}g_1\sigma_2 \\
&+ \sigma_2 \left( \dot{f}_2 + g_2\phi_{2BS} - \frac{\partial \phi_{1BS}}{\partial \sigma_1}(f_1 + g_1x_2 - \dot{\phi}_0) - \frac{\partial \phi_{1BS}}{\partial x_1}(f_1 + g_1x_2) - \frac{\partial \phi_{1BS}}{\partial t} \right) \\
&+ \sigma_2 \left( g_2\phi_{2QC} - \frac{\partial \phi_{1BS}}{\partial \sigma_1}\omega_1 - \frac{\partial \phi_{1BS}}{\partial x_1}\omega_1 - \dot{\phi}_{1QC} + \omega_2 \right) \tag{6.18}
\end{aligned}$$

donde  $\frac{\partial V_1}{\partial \sigma_1}g_1\sigma_2$  es el término debido al error provocado por el hecho de que  $x_2$  no es un control real y habrá un transitorio en el que  $x_2 \neq \phi_1$ , debido a las condiciones iniciales arbitrarias. Usando la desigualdad (6.14) se tiene que en  $D$

$$\max \left\{ \left| \frac{\partial \phi_{1BS}}{\partial \sigma_1} \right|, \left| \frac{\partial \phi_{1BS}}{\partial x_1} \right| \right\} \leq b_{\partial \phi_1} \tag{6.19}$$

para alguna constante positiva  $b_{\partial \phi_1}$ . Por lo que eligiendo el control virtual  $\phi_{2BS}$  de acuerdo a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\phi_{2BS} &= \frac{1}{g_2} \left( -a_2\sigma_2 - \dot{f}_2 - \frac{\partial V_1}{\partial \sigma_1}g_1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \phi_{1BS}}{\partial \sigma_1}(f_1 + g_1x_2 + \dot{\phi}_0) + \frac{\partial \phi_{1BS}}{\partial x_1}(f_1 + g_1x_2) + \frac{\partial \phi_{1BS}}{\partial t} \right) \tag{6.20}
\end{aligned}$$

y usando las desigualdades de acotamiento (6.9),(6.10),(6.12),(6.13),(6.17) y (6.19) en (6.18) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{2c} &\leq -a_1^*\|\sigma_1\|^2 + a_{1d}\|\sigma_1\| - a_2\|\sigma_2\|^2 \\
&\quad + \sigma_2(b_{g_2}d_{\phi_2}\|\bar{\sigma}_2\| + 2b_{\partial \phi_1}(b_1\|\sigma_1\| + d_1) + d_{\phi_{11}} + b_2\|\bar{\sigma}_2\| + d_2) \\
&\leq -a_1^*\|\sigma_1\|^2 + 2b_{\partial \phi_1}b_1\|\sigma_1\|\sigma_2 - a_2\|\sigma_2\|^2 + (b_{g_2}d_{\phi_2} + b_2)\|\bar{\sigma}_2\|^2 \\
&\quad + a_{1d}\|\sigma_1\| + (2b_{\partial \phi_1}d_1 + d_{\phi_{11}} + d_2)\|\sigma_2\| \tag{6.21}
\end{aligned}$$

usando formas cuadráticas se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{2c} &\leq - \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_1^* & -b_{\partial \phi_1}b_1 \\ -b_{\partial \phi_1}b_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} + (b_{g_2}d_{\phi_1} + b_2)\|\bar{\sigma}_2\|^2 \\
&\quad + a_{1d}\|\sigma_1\| + (b_{\partial \phi_1}d_1 + d_{\phi_{11}} + d_2)\|\sigma_2\| \tag{6.22}
\end{aligned}$$

eligiendo  $a_1^*a_2 > (b_{\partial \phi_1}b_1)^2$  se asegura la positividad definida de la matriz de coeficientes constantes de la desigualdad (6.22). Denotando como  $\lambda_{2min}(a_1^*, a_2)$  al mínimo

valor propio de dicha matriz, lo cual hace énfasis en su dependencia de los parámetros ajustables  $a_1^*$ ,  $a_2$ , la ecuación (6.22) puede escribirse como

$$\begin{aligned}\dot{V}_{2c} &\leq - (\lambda_{2\min}(a_1^*, a_2) + b_{g_2}d_{\phi_1} + b_2) \|\bar{\sigma}_2\|^2 \\ &\quad + a_{1d} \|\sigma_1\| + (2b_{\partial\phi_1}d_1 + d_{\phi_{11}} + d_2) \|\sigma_2\| \\ &\leq - a_2^* \|\bar{\sigma}_2\|^2 + a_{1d} \|\sigma_1\| + a_{2d} \|\sigma_2\|\end{aligned}\tag{6.23}$$

por lo tanto  $V_{2c}$  es negativa fuera de una bola cuyo radio disminuye al incrementar  $a_2^*$ .

- La estabilidad práctica de todo el sistema se concluye aplicando a los estados restantes un análisis como el arriba desarrollado. Entonces se tiene que proponiendo la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_{ic} = V_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^i \sigma_j^2; \quad i = 2, \dots, n\tag{6.24}$$

en cada paso se construye un control virtual de acuerdo a la siguiente ecuación

$$\phi_i = \phi_{iBS} + \phi_{iQC}; \quad i = 2, \dots, n\tag{6.25}$$

$$\phi_{iBS} = \frac{1}{g_i} \left( -a_i \sigma_i - f_i - \frac{\partial V_{(i-1)c}}{\partial \sigma_{i-1}} + \dot{\phi}_{(i-1)BS}^* \right)$$

donde  $\dot{\phi}_{(i-1)BS}^* = \frac{\partial \phi_{(i-1)BS}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ \frac{\partial \phi_{(i-1)BS}}{\partial \sigma_j} (f_j + g_j x_{j+1} - \dot{\phi}_{(j-1)BS}^*) + \frac{\partial \phi_{(i-1)BS}}{\partial x_j} (f_j + g_j x_{j+1}) \right\}$

donde el superíndice en  $\dot{\phi}_{(i-1)BS}^*$  se usa para diferenciarlo de  $\dot{\phi}_{(i-1)BS}$ , en cuya expresión interviene la perturbación desconocida  $\omega_{i-1}$ , por lo que no puede calcularse analíticamente de forma exacta. Siguiendo un procedimiento análogo al seguido para obtener la desigualdad (6.23), se puede obtener una expresión como la siguiente

$$\dot{V}_{ic} \leq -a_i^* \|\bar{\sigma}_i\|^2 + \sum_{j=1}^i a_{jd} \|\sigma_j\|\tag{6.26}$$

donde las constantes positivas  $a_i^*$ , son parámetros a seleccionar mientras que  $a_{jd}$  dependen de las cotas de las perturbaciones.

**Nota 6.1** La restricción (6.14), puede asegurarse al menos en una región  $D_i \in \mathbb{R}^i$ , y los términos introducidos por dicha cota deben ser considerados para seleccionar

los parámetros  $a_i$ , que a su vez determinan  $a_i^*$ , que aseguren estabilidad práctica. Si bien este requerimiento parece restrictivo, es estándar en el diseño por backstepping (ver por ejemplo [Khalil, 2002], p.599). Aún más, la suposición de suavidad de las funciones  $f_i, g_i$  y  $\omega_i$  se limita a la existencia de un cierto número de derivadas de dichas funciones respecto a las trayectorias del sistema. Lo anterior puede apreciarse mejor si se toma en cuenta que con  $\phi_i$ , se desea compensar el término  $\dot{\phi}_{(i-1)BS}$  y, debido al diseño recursivo, esto implica que para calcular  $\dot{\phi}_{(n-1)BS}$ , se requiere la existencia de  $\phi_{1BS}^{(n-1)}$  y por lo tanto también de las  $n - 1$  derivadas de  $f_i, g_i$  respecto a las trayectorias del sistema. El término  $\phi_{iQC}$  es considerado por separado por considerar que representa ventajas en cuanto a la complejidad del análisis, sin embargo, la existencia de sus  $n - i$  derivadas también es necesaria y se satisface gracias a la forma en que es construido.

Finalmente se llega a la siguiente expresión para el control real

$$u = u_{BS} + u_{QC} \quad (6.27)$$

$$u_{BS} = \frac{1}{g_n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_{(n-1)BS}}{\partial \sigma_i} (f_i + g_i x_{i+1}) - \frac{\partial V_{(n-1)c}}{\partial \sigma_{n-1}} - a_n \sigma_n - f_n \right)$$

donde  $u_{QC}$ , es un término acotado por una constante, su construcción es discutida más adelante.

Ahora se tienen los elementos para enunciar la siguiente proposición

**Proposición 6.1** *Existe  $B_\sigma$ , tal que las trayectorias del sistema (6.5), en lazo cerrado con el controlador (6.27), con parámetros  $a_i$  debidamente seleccionados, satisfacen que  $\|\sigma_1, \dots, \sigma_n\| \leq B_\sigma$ , para todo  $t > T_{BS}$ , para algún tiempo acotado  $T_{BS}$ .*

Tanto la magnitud de  $B_\sigma$  como la de  $T_{BS}$  dependen de los parámetros  $a_i$  seleccionados. Ahora definimos los términos  $\phi_{iQC}$  de cada control virtual de acuerdo a la propuesta en [Estrada y Fridman, 2010b], cuyos detalles se presentan en el capítulo (3) del presente documento:

$$\phi_{iQC}^{(n-i)} = -\alpha_i \Psi_{n-i, n-i+1}(\sigma_i, \dot{\sigma}_i, \dots, \sigma_i^{(n-i)})$$

$$u_{QC} = -\alpha_n \text{signo}(\sigma_n)$$

los superíndices entre paréntesis indican el número de derivada. De nuevo recalamos la posibilidad de elevar el orden de los términos cuasicontinuos de cada control virtual, para

suavizar la señal de control real, si se denota dicho incremento en el orden por medio de la variable  $k$ , las expresiones quedan de la siguiente manera:

$$\phi_{iQC}^{(n+k-i)} = -\alpha_i \Psi_{n+k-i, n+k-i+1}(\sigma_i, \dot{\sigma}_i, \dots, \sigma_i^{(n+k-i)}) \quad (6.28)$$

$$u_{QC}^{(k)} = -\alpha_n \Psi_{k, k+1}(\sigma_n, \dot{\sigma}_n, \dots, \sigma_n^{(k)}) \quad (6.29)$$

Recordando que  $\sigma_i = x_i - \phi_{i-1}$ , se tiene el siguiente sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i &= f_i + g_i \phi_i + \omega_i - \dot{\phi}_{i-1} - g_i \sigma_i \\ \dot{\sigma}_n &= f_n + g_n u + \omega_n - \dot{\phi}_{n-1} \\ i &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (6.30)$$

cuyas trayectorias, de acuerdo a la proposición (6.1), permanecen para todo  $t > T_{BS}$  en una bola de radio acotado,  $B_\sigma$ , del espacio  $\mathbb{R}^n$ . Dadas las suposiciones sobre las derivadas de las funciones, resaltadas en la nota (6.1), entonces para cada señal  $\sigma_i$  del sistema (6.30) se cumple que

$$\sigma_i^{(n+k-i+1)} = h_i^*(t, \bar{\sigma}_i) + g_i^*(t, \bar{\sigma}_i) u_i \quad (6.31)$$

$$\text{con } h_i^*(t, \bar{\sigma}_i) = \sigma_i^{(n+k-i+1)}|_{u_i=0}$$

$$g_i^*(t, \bar{\sigma}_i) = \frac{\partial}{\partial u_i} \sigma_i^{(n+k-i+1)}$$

$$u_i = -\alpha_i \Psi_{n+k-i, n+k-i+1}(\sigma_i, \dot{\sigma}_i, \dots, \sigma_i^{(n+k-i)}) \quad (6.32)$$

y existen constantes  $K_{mi}, K_{Mi}, C_i > 0$  tales que se cumple que

$$0 < K_{mi} \leq \frac{\partial}{\partial u_i} \sigma_i^{(n+k-i+1)} \leq K_{Mi}, \quad \left| \sigma_i^{(n+k-i+1)}|_{u_i=0} \right| \leq C_i \quad (6.33)$$

por lo que (6.31),(6.33) implican la inclusion diferencial

$$\sigma_i^{(n+k-i+1)} \in [-C_i, C_i] + [K_{mi}, K_{Mi}] u_i \quad (6.34)$$

y el controlador (6.32) asegura la estabilidad en tiempo finito de (6.34),(6.32). El modo deslizante de orden  $n + k - i + 1$  es establecido para  $\sigma_i$ . Con lo cual se concluye la demostración del siguiente teorema

**Teorema 6.1** *Considérese el sistema (6.5) para el cual se diseña un controlador de acuerdo con las ecuaciones (6.27),(6.25),(6.28),(6.29), con parámetros  $a_i$  tales que la proposición (6.1) se cumple. Entonces las inclusiones diferenciales (6.34) son establecidas después del tiempo  $T_{BS}$  y con una elección adecuada de los parámetros  $\alpha_i$  se asegura que el origen  $\bar{\sigma}_n = 0$  del sistema en lazo cerrado es uniformemente estable en tiempo finito. Si además, la proposición (6.1), se cumple globalmente, entonces  $\bar{\sigma}_n = 0$  es global y uniformemente estable en tiempo finito.*

A continuación se presentan dos ejemplos, en el primero se ilustra la diferencia entre usar el diseño por *backstepping* y el diseño combinado. El segundo es el mismo sistema de los ejemplos de los capítulos 3 y 4.

## 6.3. Ejemplos

### 6.3.1. Sistema de segundo orden

Considérese el siguiente sistema de segundo orden perturbado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2 + \omega_1 \\ \dot{x}_2 &= u + \omega_2\end{aligned}$$

se desea que  $\sigma_1 = x_1 - \phi_0 = 0$ , donde  $\phi_0$  es la señal suave de la que se desea hacer seguimiento exacto. Para buscar la dinámica de error, usando  $x_1 = \sigma_1 + \phi_0$ , se obtiene

$$\begin{aligned}x_1^2 &= \sigma_1^2 + 2\sigma_1\phi_0 + \phi_0^2 \\ x_1^3 &= \sigma_1^3 + 3\sigma_1^2\phi_0 + 3\sigma_1\phi_0^2 + \phi_0^3\end{aligned}$$

con lo cual se llega a

$$\dot{\sigma}_1 = \sigma_1^2 + 2\sigma_1\phi_0 + \phi_0^2 - \sigma_1^3 - 3\sigma_1^2\phi_0 - 3\sigma_1\phi_0^2 - \phi_0^3 + x_2 + \omega_1 - \dot{\phi}_0.$$

Primero, se desea diseñar los términos de control por *backstepping* que estabilizarán el sistema, para posteriormente agregar los términos  $\phi_{iQC}$  que compensarán las perturbaciones. El control  $\phi_{1BS}$  se elige como

$$\phi_{1BS} = -a_1\sigma_1 - \sigma_1^2 - 2\sigma_1\phi_0 - \phi_0^2 + 3\sigma_1^2\phi_0 + \phi_0^3 + \dot{\phi}_0 \quad (6.35)$$

obsérvese que los términos que ayudan a la estabilidad no son eliminados por  $\phi_{1BS}$ . Sustituyendo en la ecuación de  $\dot{\sigma}_1$  a  $\phi_{1BS} = x_2$  y usando  $V_1 = \frac{1}{2}\sigma_1^2$  como candidata de Lyapunov se tiene

$$\dot{V}_1 = \sigma_1(-\sigma_1^3 - 3\phi_0^2\sigma_1 - a_1\sigma_1 + \omega_1) \quad (6.36)$$

$$\leq -\sigma_1^4 - (3\phi_0^2 + a_1)\sigma_1^2 + |\sigma_1\omega_1| \quad (6.37)$$

Ahora para calcular el control  $u$  se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\phi}_1 \\ &= u - \dot{\phi}_{1BS} - \dot{\phi}_{1QC} \\ \text{con } \dot{\phi}_{1BS} &= \frac{\partial \phi_{1BS}}{\partial \sigma_1} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\phi}_{1BS} &= (-2\sigma_1 - 2\phi_0 + 6\sigma_1\phi_0) (x_1^2 - x_1^3 + x_2 - \dot{\phi}_0)\end{aligned}$$

Se propone  $V_{2c} = V_1 + \frac{1}{2}\sigma_2^2$ , y se calcula su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema

$$\begin{aligned}\dot{V}_{2c} &\leq -\sigma_1^4 - (3\phi_0^2 + a_1)\sigma_1^2 + |\sigma_1\omega_1| + \sigma_1\sigma_2 \\ &\quad + \sigma_2(u - \dot{\phi}_1 + \omega_2)\end{aligned}$$

por lo cual  $u = u_{BS} + u_{QC}$  se elige de la siguiente manera

$$u = \underbrace{-a_2\sigma_2 + \dot{\phi}_{1BS} - \sigma_1}_{u_{BS}} - \underbrace{\int_0^s \alpha_2 \Psi_{1,2}(\sigma_2, \dot{\sigma}_2) dt}_{u_{QC}}$$

es decir que el control real se hace diferenciable al menos una vez, al incrementar en uno,  $k = 1$ , el orden mínimo necesario para cada control cuasicontinuo. De acuerdo a lo que se propuso en la sección anterior, el término  $\dot{\phi}_{1QC}$  no es compensado exactamente por  $u_{BS}$  si no que se deja a la ganancia  $a_1$ , elegida en simulación, el trabajo de compensarla. Entonces los términos cuasicontinuos quedan de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_{1QC} &= -\alpha_1 \Psi_{2,3}(\sigma_1, \dot{\sigma}_1, \ddot{\sigma}_1) \\ \dot{u}_{QC} &= -\alpha_2 \Psi_{1,2}(\sigma_2, \dot{\sigma}_2).\end{aligned}$$

En simulación se definió  $\phi_0 = \text{seno}(t)$ , como la señal a seguir y las perturbaciones introducidas al sistema fueron las siguientes:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 0.6\text{sen}(3t) + 0.2 \\ \omega_2 &= 0.2\text{sen}(4t) + x_1\text{sen}(x_2)\end{aligned}$$

▷ Se realizaron pruebas en simulación para el sistema sin perturbación y usando únicamente  $\phi_{1BS}, u_{BS}$  logrando seguimiento asintótico, ver figuras (6.5)-(6.6).

- ▷ Posteriormente en una segunda simulación se introducen perturbaciones y se verifica el comportamiento del sistema usando sólo el control  $\phi_{BS}$  en los primeros 7 segundos, posteriormente se incluyen los términos  $\phi_{1QC}, u_{QC}$  para compensar perturbaciones. Como se predijo teóricamente, usando sólo  $\phi_{1BS}$  únicamente es posible obtener estabilidad práctica, ver figuras (6.7)-(6.8), debido al tipo de perturbaciones presentes. Una vez que se agregan los términos del diseño jerárquico puede observarse que se logra el objetivo de seguimiento exacto en tiempo finito.

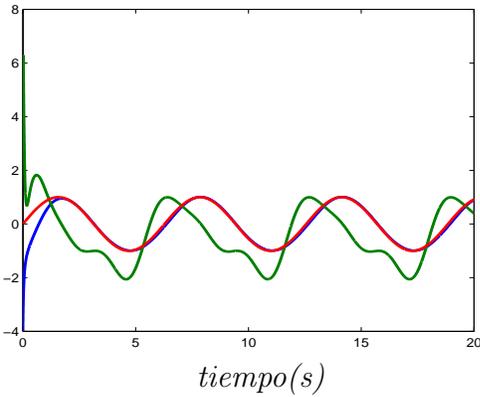


Figura 6.1: Estados, sistema sin perturbaciones.

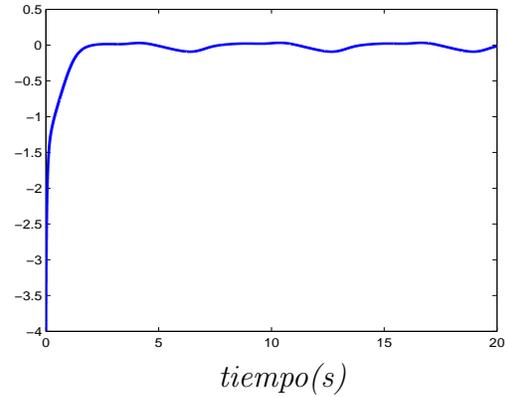


Figura 6.2: Error  $\sigma_1$ , sistema sin perturbaciones.

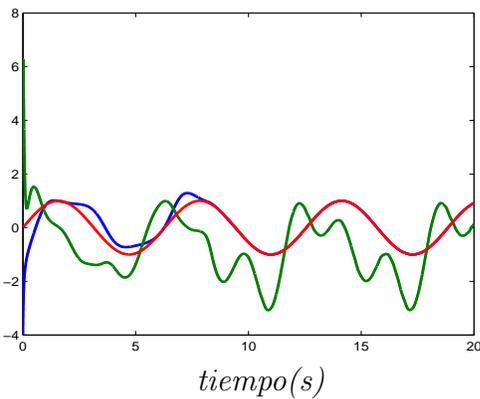


Figura 6.3: Estados, sistema perturbado.

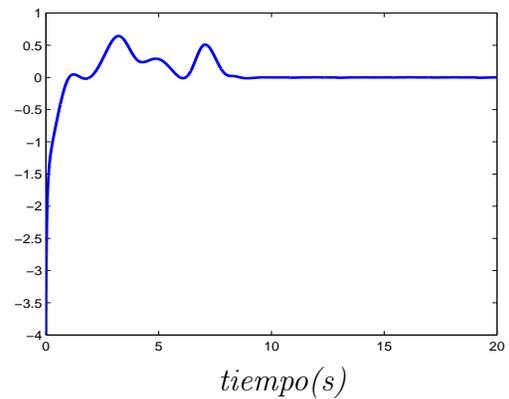


Figura 6.4: Error  $\sigma_1$ , sistema perturbado.

### 6.3.2. Sistema de tercer orden

En este ejemplo se aplica el diseño combinado al sistema usado en los ejemplos de los capítulos (3) y (4). Al igual que en la sección (3.3.1), se incrementará en uno el orden de los términos de control por MDAO para obtener una señal de control  $u$  suave. Considérese entonces el siguiente sistema no lineal perturbado

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 2\text{sen}(x_1) + 1.5x_2 + \omega_1(t, x_1) \\
\dot{x}_2 &= 0.8x_1x_2 + x_3 + \omega_2(t, \bar{x}_2) \\
\dot{x}_3 &= -1.5x_3^2 + 2u + \omega_3(t, x)
\end{aligned} \tag{6.38}$$

donde las funciones  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  representan las perturbaciones, la señal de referencia es  $\phi_0$ . Estas funciones fueron definidas de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\omega_1(t, x_1) &= 0.2\text{sen}(t) + 0.1x_1 + 0.12 \\
\omega_2(t, \bar{x}_2) &= 0.3\text{sen}(2t) + 0.2x_1 + 0.2x_2 - 0.4 \\
\omega_3(t, x) &= 0.2\text{sen}(2t) + 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.3 \\
\phi_0 &= 2\text{sen}(0.15t) + 4\text{cos}(0.1t) - 4
\end{aligned}$$

Las señales de error quedan definidas como

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 - \phi_0 \\
\sigma_2 &= x_2 - \phi_1; \phi_1 = \phi_{1BS} + \phi_{1QC} \\
\sigma_3 &= x_3 - \phi_2; \phi_2 = \phi_{2BS} + \phi_{2QC}.
\end{aligned}$$

Comenzamos por el diseño por *backstepping*.

Paso 1. Se tiene la siguiente dinámica de error

$$\dot{\sigma}_1 = 2\text{sen}(x_1) + 1.5x_2 - \dot{\phi}_0 + \omega_1$$

se propone  $V_1 = \frac{1}{2}\sigma_1^2$  como función candidata de Lyapunov y se calcula  $\dot{V}_1$

$$\dot{V}_1 = \sigma_1(2\text{sen}(x_1) + 1.5x_2 - \dot{\phi}_0 + \omega_1)$$

para evitar complejidad innecesaria y aprovechando que, por el momento, únicamente se busca establecer estabilidad práctica, el término acotado  $2\text{sen}(x_1)$  no será eliminado mediante  $\phi_{1BS}$ , se elige  $\phi_1$  como

$$\phi_1 = \underbrace{-a_1\sigma_1 + \frac{\dot{\phi}_0}{1.5}}_{\phi_{1BS}} + \phi_{1QC}$$

con lo cual se tiene que si  $x_2 = \phi_1$

$$\dot{V}_1 \leq -1.5a_1\sigma_1^2 + \sigma_1(2 + |\omega_1| + |\phi_{1QC}|)$$

con lo que es posible asegurar estabilidad práctica.

Paso 2. Se tiene que

$$\sigma_2 = 0.8x_1x_2 + x_3 - \dot{\phi}_{1BS} + \omega_2 - \dot{\phi}_{1QC}$$

y proponiendo  $V_{2c} = \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2$ , se procede a calcular  $\dot{V}_{2c}$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2c} &= \sigma_1 \left( 2\text{sen}(x_1) + 1.5\phi_1 - \dot{\phi}_0 + \omega_1 + 1.5(x_2 - \phi_1) \right) \\ &\quad + \sigma_2 \left( 0.8x_1x_2 + x_3 - \dot{\phi}_1 + \omega_2 \right) \\ \dot{V}_{2c} &\leq -1.5a_1\sigma_1^2 + \sigma_1 (2 + |\omega_1| + |\phi_{1QC}|) + 1.5\sigma_1\sigma_2 \\ &\quad + \sigma_2 \left( 0.8x_1x_2 + x_3 - \dot{\phi}_{1BS} + \omega_2 - \dot{\phi}_{1QC} \right). \end{aligned}$$

El término  $\dot{\phi}_{1BS} = -a_1(2\text{sen}(x_1) + 1.5)x_2 - \dot{\phi}_0 + \omega_1 + \ddot{\phi}_0/1.5$ , será compensado mediante el control virtual  $\phi_2$  excepto por el término desconocido  $\omega_1$ , el cual será considerado en la selección de ganancia para mantener la estabilidad práctica. Entonces, eligiendo a  $\phi_2$  como sigue

$$\phi_2 = -0.8x_1x_2 - a_1 \left( 2\text{sen}(x_1) + 1.5x_2 - \dot{\phi}_0 \right) + \frac{\ddot{\phi}_0}{1.5} - 1.5\sigma_1 - a_2\sigma_2 + \phi_{2QC}$$

y suponiendo que  $x_3 = \phi_2$ , se llega a

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2c} &\leq -1.5a_1\sigma_1^2 + \sigma_1 (2 + |\omega_1| + |\phi_{1QC}|) \\ &\quad + \sigma_2 \left( -a_2\sigma_2 + a_1\omega_1 + \omega_2 - \dot{\phi}_{1QC} + \phi_{2QC} \right) \\ \dot{V}_{2c} &\leq -1.5a_1\sigma_1^2 - a_2\sigma_2^2 + \sigma_1 (2 + |\omega_1| + |\phi_{1QC}|) \\ &\quad + \sigma_2 \left( a_1|\omega_1| + |\omega_2| - |\dot{\phi}_{1QC}| + |\phi_{2QC}| \right) \end{aligned}$$

la expresión anterior puede ser llevada usando formas cuadráticas y las condiciones sobre las cotas de las perturbaciones y los controles  $\phi_{iQC}$  a la forma

$$\dot{V}_{2c} \leq -a_2^* \|\bar{\sigma}_2\|^2 + a_{1d} \|\sigma_1\| + a_{2d} \|\sigma_2\| \quad (6.39)$$

con lo que se asegura estabilidad práctica.

Paso 3. Aquí se obtendrá la expresión para el control  $u$ . Se tiene que

$$\dot{\sigma}_3 = -1.5x_3^2 + 2u - \dot{\phi}_2 + \omega_3$$

se propone la siguiente función candidata de Lyapunov  $V_{3c} = V_{2c} + \frac{1}{2}\sigma_3^2$ , de donde

$$\begin{aligned} \dot{V}_{3c} &= \dot{V}_{2c} + \sigma_3 \left( -1.5x_3^2 + 2u - \dot{\phi}_2 + \omega_3 \right) \\ &\leq -a_2^* \|\bar{\sigma}_2\|^2 + a_{1d} \|\sigma_1\| + a_{2d} \|\sigma_2\| + \sigma_2\sigma_3 \\ &\quad + \sigma_3 \left( -1.5x_3^2 + 2u - \dot{\phi}_{2BS} + \omega_3 - \dot{\phi}_{2QC} \right) \end{aligned}$$

en donde se ha usado la ecuación (6.39) y se considera el error debido a que  $x_3 \neq \phi_2$ . Se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_{2BS} &= \frac{\partial \phi_{2BS}}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \phi_{2BS}}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial \phi_{2BS}}{\partial \sigma_1} \dot{\sigma}_1 + \frac{\partial \phi_{2BS}}{\partial \sigma_2} \dot{\sigma}_2 + a_1 \ddot{\phi}_0 + \frac{\ddot{\phi}_0}{1.5} \\ \dot{\phi}_{2BS} &= [-0.8x_2 + a_1 \cos(x_1)] (2\text{sen}(x_1) + 1.5x_2 + \omega_2) \\ &\quad + [-0.8x_1 + 1.5a_1] (0.8x_1x_2 + x_3 + \omega_2) \\ &\quad + 1.5 \left( 2\text{seno}(x_1) + 1.5x_2 - \dot{\phi}_0 + \omega_1 \right) \\ &\quad + a_2 \left( 0.8x_1x_2 + x_3 - \dot{\phi}_1 + \omega_2 \right) + a_1 \ddot{\phi}_0 + \frac{\ddot{\phi}_0}{1.5}\end{aligned}$$

en el control  $u_{BS}$ , no se consideran los términos desconocidos  $\omega_1, \omega_2$  ni el término  $\dot{\phi}_{1C}$  implicado por la presencia de  $\dot{\phi}_1$  en la ecuación de arriba. Como se mostró en la sección anterior, una adecuada selección de ganancias  $a_i$ , permite mantener la estabilidad práctica. El control  $u$  se define entonces como

$$u = \underbrace{u_{QC} - a_3 \sigma_3 + \frac{1}{2} [1.5x_3^2 - \sigma_2 + \dot{\phi}_{2BS}^*]}_{u_{BS}}$$

$$\begin{aligned}\text{donde } \dot{\phi}_{2BS}^* &= [-0.8x_2 + a_1 \cos(x_1)] (2\text{sen}(x_1) + 1.5x_2) \\ &\quad + [-0.8x_1 + 1.5a_1] (0.8x_1x_2 + x_3) \\ &\quad + 1.5 \left( 2\text{sen}(x_1) + 1.5x_2 - \dot{\phi}_0 \right) \\ &\quad + a_2 \left( 0.8x_1x_2 + x_3 + a_1(2\text{sen}(x_1) + 1.5x_2 - \dot{\phi}_0) \right) + a_1 \ddot{\phi}_0 + \frac{\ddot{\phi}_0}{1.5}\end{aligned}$$

Los términos  $\phi_{1QC}, \phi_{2QC}$  y  $u_{QC}$ , como se mencionó anteriormente, son construidos de tal forma que la señal de control obtenida es suave:

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_{1QC} &= -\alpha_1 \frac{\ddot{\sigma}_1 + 3[\ddot{\sigma}_1 + (|\dot{\sigma}_1| + 0.5|\sigma_1|^{3/4})^{-1/3}(\dot{\sigma}_1 + 0.5|\sigma_1|^{3/4}\text{signo}(\sigma_1))] [|\dot{\sigma}_1| + (|\dot{\sigma}_1| + 0.5|\sigma_1|^{3/4})^{2/3}]^{1/2}}{|\dot{\sigma}_1| + 3[|\dot{\sigma}_1| + (|\dot{\sigma}_1| + 0.5|\sigma_1|^{3/4})^{2/3}]^{1/2}} \\ \ddot{\phi}_{2QC} &= -\alpha_2 \frac{\ddot{\sigma}_2 + 2(|\dot{\sigma}_2| + |\sigma_2|^{2/3})^{-1/2}(\dot{\sigma}_2 + |\sigma_2|^{2/3}\text{signo}(\sigma_2))}{|\dot{\sigma}_2| + 2(|\dot{\sigma}_2| + |\sigma_2|^{2/3})^{1/2}} \\ \dot{u}_{QC} &= -\alpha_3 \frac{\dot{\sigma}_3 + |\sigma_3|^{1/2}\text{signo}(\sigma_3)}{|\dot{\sigma}_3| + |\sigma_3|^{1/2}}\end{aligned}$$

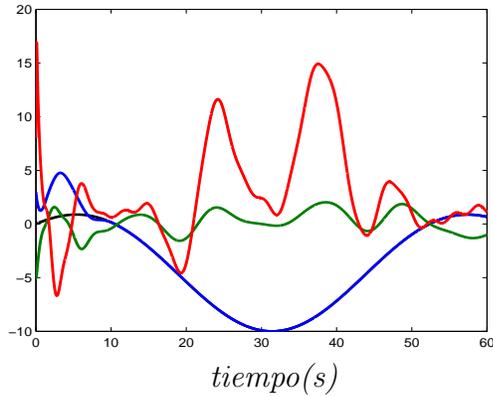


Figura 6.5: Señales de los estados  $x_1, x_2, x_3$  y la referencia  $\phi_0$ .

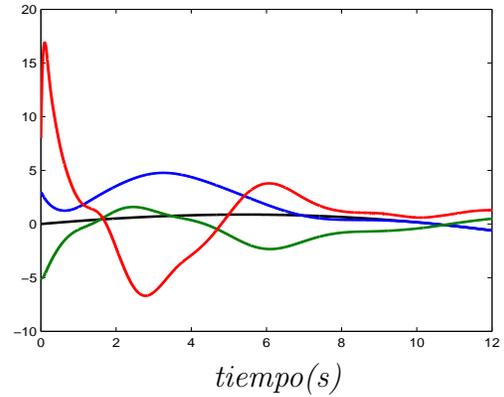


Figura 6.6: Acercamiento a los señales de estados y referencia.

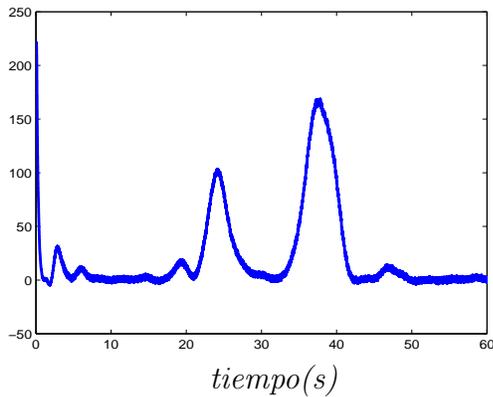


Figura 6.7: Señal de control  $u$ .

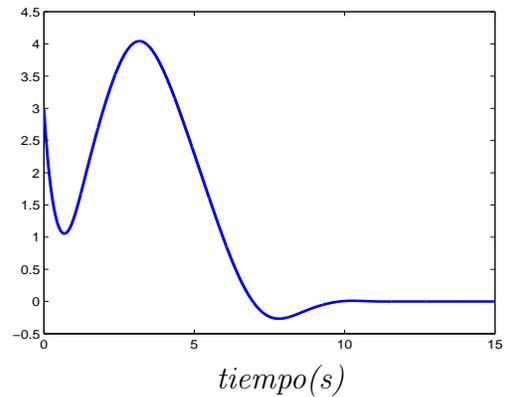


Figura 6.8: Error  $\sigma_1$ .

Se corrieron varias simulaciones con diferentes condiciones iniciales obteniendo siempre la convergencia esperada. Las gráficas arriba mostradas corresponden a las condiciones iniciales  $x(0) = [3 \ -5 \ 8]^T$ , las ganancias seleccionadas fueron  $a_1 = 1, a_2 = 6, a_3 = 12$ , mientras que para los controles cuasicontinuos las mismas ganancias que las usadas en el capítulo 3 para el control suavizado, es decir  $\alpha_1 = 45, \alpha_2 = 150, \alpha_3 = 280$ . El pico de control al inicio es debido a las condiciones iniciales seleccionadas, una vez que se alcanza el seguimiento, no se puede apreciar diferencia entre el controlador del capítulo 3 y el que se obtiene con el diseño combinado MDAO-*Backstepping*.

---

# Resultados experimentales



En este capítulo se presentan resultados experimentales de la aplicación del algoritmo de diseño jerárquico [Estrada y Fridman, 2010b], y descrito en el capítulo 3. La planta sobre la que se realiza control es el llamado péndulo de rueda de inercia, ver figura (7.1). El sistema es subactuado y se desea seguir una determinada dinámica en la posición del péndulo, es decir en el estado subactuado. El primer paso es generar la señal deseada de posición, para ello se usa la metodología reportada en [Aguilar y otros, 2009b], en donde se inducen oscilaciones periódicas en el péndulo, por medio de un control conocido como control de doble relevador. Dicho enfoque está basado en el hecho de que los algoritmos de modos deslizantes de orden dos, producen castaño (oscilaciones de alta frecuencia y pequeña amplitud), al existir dinámica no modelada. Usando esta propiedad se busca generar oscilaciones que tengan una amplitud mayor y una frecuencia mucho menor que las producidas pertenecientes al fenómeno de castaño. Esta amplitud y la respectiva frecuencia de oscilación se obtienen en función de únicamente dos ganancias pertenecientes al control de doble relevador. De esta manera, las oscilaciones que se producirían en la planta debido al control de doble relevador son usadas como señal deseada para el algoritmo de diseño jerárquico.

Es importante mencionar que para poder aplicar el algoritmo de diseño jerárquico primero es necesario llevar el modelo de la planta a la forma de retroalimentación estricta, para ello se aplica un método reportado en [Olfati-Saber, 2000], con el cual se obtiene un modelo no lineal con dinámica cero estable. Debido a que dicha dinámica cero es estable, el algoritmo

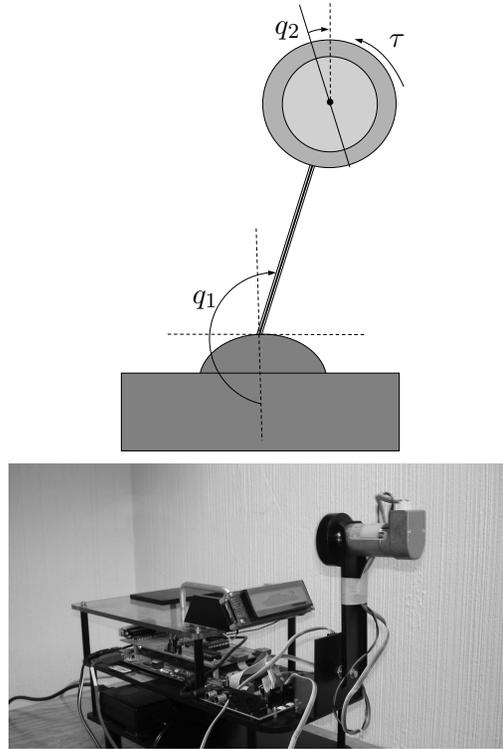


Figura 7.1: Péndulo de rueda de inercia (abajo el sistema físico experimental).

de diseño jerárquico puede ser aplicado con el objetivo arriba descrito, sin correr el riesgo de que los estados no considerados en el objetivo de control provoquen inestabilidad.

Para obtener el modelo dinámico del péndulo de rueda de inercia, ver figura (7.1), considérese su Lagrangiano dado por la siguiente expresión

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \underbrace{\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_2 & J_2 \end{bmatrix}}_M \dot{q} - V(q_1) \quad (7.1)$$

donde  $q = [q_1, q_2]^T$ ,  $q_1 \in R$  es el ángulo absoluto del péndulo medido en sentido dextrogiro a partir de la posición vertical hacia arriba,  $q_2 \in R$  es el ángulo absoluto del disco,  $M$  es la matriz de inercia, que en el caso del péndulo de rueda de inercia es constante, cuyos valores dependen de parámetros del sistema tales como masa, dimensiones geométricas y momentos de inercia de la rueda y el péndulo. Además

$$V(q_1) = -h \cos(q_1)$$

es la energía potencial, donde  $h$  es también una constante que depende de la masa y dimensiones de la rueda y el péndulo. La ecuación de Euler-Lagrange para el sistema es

la siguiente

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_2 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \operatorname{sen} q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tau. \quad (7.2)$$

correspondiente a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Para poder aplicar el esquema de diseño jerárquico es necesario transformar el modelo del sistema. Obsérvese que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -\frac{\partial V}{\partial q_1}$$

basándose en esta característica, en [Olfati-Saber, 2000] se propone un cambio global de variables como el de la expresión (7.4)

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = J_1 \dot{q}_1 + J_2 \dot{q}_2 \\ z_2 &= q_1 \\ z_3 &= q_2 \\ z_4 &= \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (7.4)$$

el cual está basado en una propiedad de simetría de la energía cinética respecto de la variable no actuada. Aplicando dicho cambio se obtiene el siguiente modelo

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -h \operatorname{sen}(z_2) \\ \dot{z}_2 &= J_1^{-1} z_1 - J_1^{-1} J_2 z_4 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= \frac{h \operatorname{sen}(z_2)}{J_1 - J_2} + \frac{J_1}{J_2(J_1 - J_2)} \tau \end{aligned} \quad (7.5)$$

obsérvese que los estados  $z_1, z_2, z_4$  pueden verse como un subsistema en forma de retroalimentación estricta, con dinámica interna representada por el estado  $z_1$ . La posición absoluta de la rueda, representada por el estado  $z_3$ , puede ser ignorada en el diseño del controlador puesto que no afecta la dinámica de los estados restantes. Es la velocidad de la rueda, es decir  $z_4$ , la que será usada como control virtual de  $z_2$ , que es la posición del péndulo. De lo anterior se tiene que es posible aplicar el esquema de diseño jerárquico al subsistema de segundo orden  $z_2, z_4$ .

Antes de realizar el diseño del controlador, en la siguiente sección se presenta el procedimiento para encontrar aquellas oscilaciones  $q_r$ , que un controlador de doble relevador

podría provocar en el péndulo alrededor de su posición vertical hacia arriba, es importante resaltar que en la práctica las oscilaciones que se predicen teóricamente, no son idénticas a las producidas en la planta, las diferencias entre las oscilaciones predichas y las reales son debidas precisamente a perturbaciones externas e incertidumbre en parámetros. Sin embargo el objetivo de control será que la posición angular del péndulo del sistema físico haga seguimiento exacto de la posición angular obtenida al hacer oscilar en simulación al modelo lineal.

## 7.1. Generación de trayectoria deseada (oscilaciones periódicas) en el péndulo de rueda de inercia

A continuación se describe como provocar oscilaciones alrededor de las posición vertical hacia arriba. Primero reescribimos el modelo para ponerlo en términos de posiciones y velocidades de referencia  $(q_r, \dot{q}_r)$

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_2 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{1r} \\ \ddot{q}_{2r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \operatorname{sen} q_{1r} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tau_r. \quad (7.6)$$

Para el cálculo de las ganancias del controlador de doble relevador, necesarias para provocar oscilaciones, se usa el método de la función descriptiva para analizar el sistema relevado [Atherton, 1975], [Boiko, 2009]. Sin embargo, este método se aplica a sistemas lineales, por lo tanto, para poder aplicarlo al péndulo de rueda de inercia, es necesario obtener un modelo lineal de éste. Si se linealiza el modelo alrededor de la posición vertical hacia arriba  $(q_{1r}^*, q_{2r}^*, \dot{q}_{1r}^*, \dot{q}_{2r}^*) = (\pi, 0, 0, 0)$ , se tiene que es un punto de equilibrio inestable lo cual hace que el sistema sea muy sensible a cambios en la condición inicial alrededor del punto de equilibrio. Aplicando ciertas propiedades estructurales de la planta, reportadas en [Grizzle y otros, 2005], es posible obtener una linealización exacta con dinámica cero localmente estable. Entonces siguiendo el procedimiento de [Grizzle y otros, 2005], se definen las siguientes variables

$$p_1 = q_{1r} - \pi + J_1^{-1} J_2 q_{2r} \quad (7.7)$$

$$\eta = K p_1 + J_1 \dot{q}_{1r} + J_2 \dot{q}_{2r} \quad (7.8)$$

con la nueva salida  $\eta$ , se obtiene un sistema de fase mínima para todo  $K > 0$ , la dinámica cero es de dimensión uno y es exponencialmente estable. Nuestro interés es que las

trayectorias de la dinámica cero se desvanezcan alrededor del punto de equilibrio  $\pi$ . Es fácil verificar que

$$J_1 \dot{p}_1 = \eta - K p_1$$

derivando la nueva salida se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= K J_1^{-1} J_2 \dot{q}_{2r} - h \operatorname{sen}(q_{1r}) + K \dot{q}_{1r}, \\ \ddot{\eta} &= -h \cos(q_{1r}) \dot{q}_{1r} - K J_1^{-1} h \operatorname{sen}(q_{1r}), \\ \ddot{\eta} &= R(q_{1r}, \dot{q}_{1r}) + H(q_{1r}) \tau_r\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}H(q_{1r}) &= \frac{h \cos(q_{1r})}{J_1 - J_2}, \\ R(q_{1r}, \dot{q}_{1r}) &= h (\dot{q}_{1r}^2 + H(q_{1r})) \operatorname{sen}(q_{1r}) \\ &\quad - \frac{hK}{J_1} \dot{q}_{1r} \cos(q_{1r}).\end{aligned}\tag{7.9}$$

por lo que podemos tomar

$$\tau_r = H^{-1}(q_{1r}) (u - a_0 \eta - a_1 \dot{\eta} - a_2 \ddot{\eta} - R(q_{1r}, \dot{q}_{1r})),\tag{7.10}$$

donde  $H(q_r)$  es no singular alrededor del punto de equilibrio  $(q_{1r}^*, \dot{q}_{1r}^*) = (\pi, 0)$ , con  $a_0, a_1$  y  $a_2$  constantes positivas. Definiendo las nuevas variables de estado como  $x = (x_1, x_2, x_3) = (\eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta})$ , se obtiene el siguiente modelo lineal

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u, \\ \dot{p}_1 &= -\frac{K}{J_1} p_1 + \frac{1}{J_1} y, \quad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C x.\end{aligned}\tag{7.11}$$

Se usará el siguiente control de doble relevador para excitar las oscilaciones periódicas

$$u = -c_1 \operatorname{signo}(y) - c_2 \operatorname{signo}(\dot{y})\tag{7.12}$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son parámetros escalares escogidos de tal forma que la función escalar de salida  $y(t)$  tenga oscilaciones periódicas con frecuencia  $\Omega$  y amplitud deseadas  $A_p$ . El procedimiento para calcular las ganancias  $c_1, c_2$  se presenta en el apéndice C.



de la rueda, cuyo valor no es importante para la dinámica sino su derivada. Aplicando el procedimiento en [Estrada y Fridman, 2010b]:

*Paso 1.* Definiendo  $\sigma_1 = z_2 - q_{1r}(t)$ . Se construye el siguiente control virtual  $\phi_1$

$$\begin{aligned}\phi_1 &= J_1 J_2^{-1} \{ J_1^{-1} z_1 + u_{1,1} \} \\ \dot{u}_{1,1} &= -\alpha_1 \frac{\dot{\sigma}_1 + |\sigma_1|^{1/2} \text{signo}(\sigma_1)}{|\dot{\sigma}_1| + |\sigma_1|^{1/2}}\end{aligned}\quad (7.13)$$

la derivada  $\dot{\sigma}_1$  es calculada con el siguiente diferenciador robusto [Levant, 2003]

$$\begin{aligned}\dot{s}_0 &= -\lambda_2 L^{1/2} |s_0 - \sigma_1|^{1/2} \text{signo}(s_0 - \sigma_1) + s_1 \\ \dot{s}_1 &= -\lambda_1 L \text{signo}(s_1 - \dot{s}_0).\end{aligned}\quad (7.14)$$

*Paso 2.* Se calcula el control real para el estado  $z_4$ , como sigue

$$\begin{aligned}\tau &= J_2 J_1^{-1} \{ h \text{sen}(z_1) + (J_1 - J_2) u_{2,1} \} \\ u_{2,1} &= -\alpha_2 \text{signo}(\sigma_2).\end{aligned}\quad (7.15)$$

donde  $\sigma_2 = z_4 - \phi_1$

El control fue probado experimentalmente en el sistema de péndulo de rueda de inercia (Mechatronic Kit) fabricado por Quanser Inc., ver figura (7.1), para el cual se usaron los siguientes parámetros  $J_1 = 4.572 \times 10^{-3}$ ,  $J_2 = 2.495 \times 10^{-5}$ , y  $h = 0.3544$  (ver [Aström y otros, 2001]).

Para las pruebas experimentales se eligieron  $\Omega = 2\pi$  [rad/s] y  $A_p = 0.05$  como valores de frecuencia y amplitud deseadas. Siguiendo el procedimiento presentado en el apéndice C, se grafica la traza de Nyquist para (7.11) usando los siguientes valores  $K = 1 \times 10^{-4}$ ,  $a_0 = 350$ ,  $a_1 = 155$  y  $a_2 = 22$ . Se identifica sobre la traza de Nyquist que la frecuencia deseada  $\Omega = 2\pi$  [rad/s], pertenece al tercer cuadrante, ya que  $\text{Re}\{j2\pi\} = -6.73 \times 10^{-4}$  y  $\text{Im}\{j2\pi\} = -6.85 \times 10^{-4}$ . Usando las ecuaciones (C.8), (C.9), del apéndice C, se obtienen los siguientes valores para las ganancias del doble relevador, responsable de generar las oscilaciones en el modelo de referencia:  $c_1 = 5.7177$  y  $c_2 = -5.82$ .

La figura 7.3 muestra la referencia periódica alrededor de  $\pi$ . Los parámetros usados para el controlador (7.13), (7.15) así como para el diferenciador (7.14), fueron ajustados en simulación usando  $q_1(0) = 3.2$  como condición inicial de la posición del péndulo y condición inicial igual a cero para los demás estados. Se obtuvieron los siguientes valores para los parámetros del controlador, los cuales fueron usados en la prueba experimental:  $\alpha_1 = -8$ ,  $\alpha_2 = 200$ ,  $\lambda_1 = 1.1$ ,  $\lambda_2 = 1.5$  y  $L = 10$ .

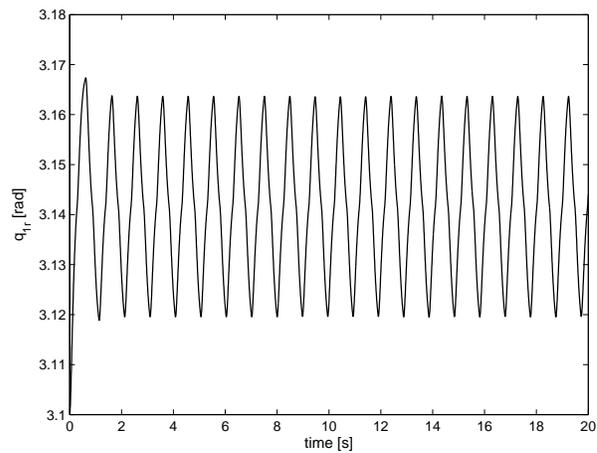


Figura 7.3: Señal periódica de referencia generada por el control de doble relevador en el modelo de referencia.

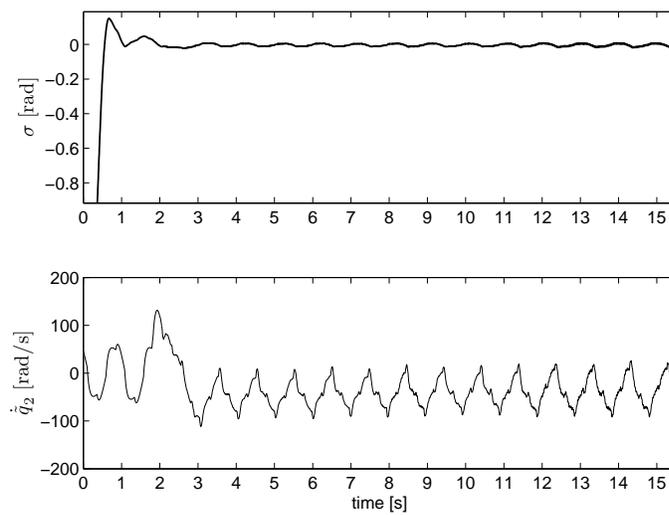


Figura 7.4: Error de seguimiento  $\sigma_1$  (sin presencia de perturbaciones externas) y velocidad del disco ( $\dot{q}_2$ ).

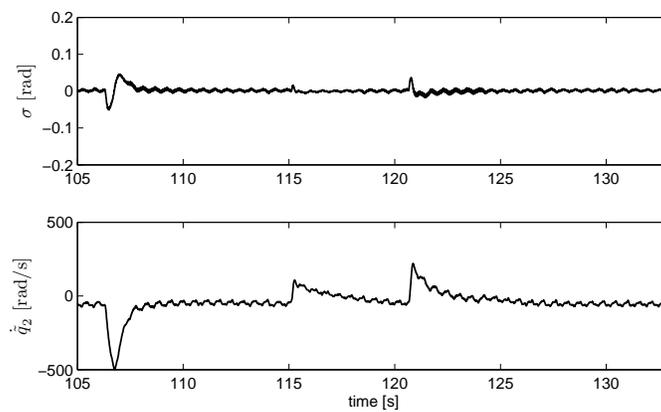


Figura 7.5: Error de seguimiento  $\sigma_1$  (en presencia de perturbaciones externas) y velocidad del disco ( $\dot{q}_2$ ).



---

# Conclusiones



En este trabajo se presenta un algoritmo de diseño para una clase de sistemas no lineales con perturbaciones tanto acopladas como no acopladas. El algoritmo asegura teóricamente seguimiento exacto, de una señal suave por la salida del sistema, y convergencia en tiempo finito. El tipo de sistemas a los que el algoritmo propuesto es aplicable son aquellos cuyo modelo puede ser representado en la forma denominada de retroalimentación estricta.

La propuesta de diseño permite contruir controles virtuales tan suaves como sea necesario, de acuerdo al grado relativo. Para rechazar las perturbaciones se introducen términos basados en MDAO pero también permite usar la información conocida del sistema en la construcción de cada control virtual.

Debido a que en el algoritmo de diseño arriba mencionado no se contruye un controlador que asegure estabilidad global de todo el sistema, el procedimiento de diseño es sencillo pero los resultados son locales. Sin embargo, la flexibilidad del esquema permite plantear trayectorias auxiliares para cada control virtual. Aprovechando lo anterior, estabilidad semiglobal puede asegurarse modificando el diseño para introducir MDAO integrales. Esto permite tener robustez ante cambios en las condiciones iniciales que, de otra forma, exigirían reajustar las ganancias para poder asegurar la estabilidad. Los resultados teóricos de convergencia en tiempo finito y exactitud de seguimiento se siguen conservando.

El análisis de estabilidad, usando la metodología de cascadas, presentado en el capítulo 5, permite aplicar análisis de Lyapunov a algoritmos de control basados en MDAO aún cuando no se cuente con una función de Lyapunov conocida. Gracias a esto es posible obtener información sobre las condiciones suficientes que deben cumplir los términos de interconexión de la cascada para poder concluir estabilidad de todo el sistema. Como el análisis de cascadas separa el sistema en subsistemas más simples para analizar su estabilidad por separado, evitando la búsqueda de un solo control en forma recursiva, como en *backstepping*, generalmente se obtienen leyes de control con un menor grado de complejidad que las obtenidas con *backstepping*.

Hasta antes del capítulo 6, los esquemas de control presentados usan el conocimiento del sistema para eliminar su dinámica en cada control virtual, pero sin reflejarlo en el control real. En el capítulo 6, se combina el diseño jerárquico con la técnica de *backstepping*. La combinación permite tomar la parte conocida del sistema y, mediante *backstepping*, construir un control que hace uso de toda esta información para estabilizar el sistema. La complejidad del control se incrementa en aras de mejorar la estabilidad cuando se está lejos del objetivo deseado. Teóricamente, al combinarse con el diseño jerárquico, se recuperan las características de seguimiento exacto y en tiempo finito, a pesar de la presencia tanto de incertidumbre paramétrica como de perturbaciones suaves externas.

El algoritmo de diseño jerárquico fue probado experimentalmente en un sistema mecánico, un péndulo de rueda de inercia. Los resultados experimentales comprueban su eficacia. El objetivo de control fue que la variable subactuada hiciera seguimiento de una señal obtenida para un modelo linealizado del sistema. Debido a la linealización, es de esperarse que haya incertidumbre paramétrica, sin embargo, adicionalmente se introdujeron manualmente perturbaciones. La exactitud del esquema de control fue la mayor que se puede alcanzar, ya que estuvo dentro del rango de máxima precisión que podía otorgar el sensor.

Como puede apreciarse por lo arriba mencionado, el esquema de diseño de control para compensación de perturbaciones basado en MDAO propuesto en esta tesis, brinda ventajas en cuanto al tipo de perturbaciones que puede manejar, así como la flexibilidad de combinarse con otras técnicas de diseño. Conserva las características de exactitud y estabilidad en tiempo finito de los controladores por MDAO, pero permite usar la información conocida del sistema, de tal forma que otras técnicas de diseño pueden ser usadas tanto

---

como para obtener la señal de control como para estudiar la estabilidad del sistema.

Para finalizar, los nuevos resultados sobre funciones de Lyapunov para algoritmos de MDAO así como algoritmos generalizados que permiten considerar no una restricción escalar sino vectorial, permiten pensar en que la idea subyacente al diseño aquí propuesto podría ser usada en sistemas más generales, con múltiples entradas y múltiples variables. Además de abordar problemas en los que no se había usado control por MDAO debido que no se podía hacer análisis de estabilidad de Lyapunov.



# Apéndices



# Demostración de los Teoremas 2.1 y 2.2

## Demostración del Teorema 2.1<sup>1</sup>

Se debe probar que la propiedad propIndDif3 implica a las propiedad propIndDif1. Existe un número  $0 < \kappa < 1$  tal que  $D_2 \subset d_\kappa D_1 \subset D_1$ . Esto se infiere por la continuidad de la distancia entre  $D_2$  y la frontera de  $d_\kappa D_1$  con respecto a  $\kappa$  en métrica de Hausdorff. Por lo tanto las trayectorias que inician en  $D_1$  entran a  $W_1 = d_\kappa D_1$  en tiempo  $T$ . Sea  $W_j = d_\kappa^j D_1$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $W_0 = D_1$ , las trayectorias que inician en  $W_j$  terminan en  $W_{j+1}$  en tiempo  $\kappa^{j+1}T$ , por lo que:

$$\begin{aligned} \dots \supset W_{-1} \supset W_0 \supset W_1 \dots \supset W_j \\ \dots \cup W_{-1} \cup W_0 \cup W_1 \dots \cup W_j &= \mathbb{R}^n \\ \dots \cap W_{-1} \cap W_0 \cap W_1 \dots \cap W_j &= 0 \end{aligned}$$

donde 0 es el origen. De donde, toda trayectoria que se inicie en  $W_j$  converge en tiempo finito al origen. El tiempo de convergencia es estimado por la siguiente expresión.

$$\kappa^{j+1}T(1 + \kappa^p + \kappa^{2p} + \dots + \kappa^{jp}) = \kappa^{j+1}T/(1 - \kappa^p)$$

Para cualquier  $R > 0$ , existe  $\mu \ll 1$  tal que cualquier trayectoria que inicie en  $d_\mu D_1$  no podrá abandonar el disco  $\|X\| \leq R$  en el tiempo  $\mu^p T$  debido al acotamiento local de  $F(x)$ .

---

<sup>1</sup>Esta prueba ha sido tomada de [Levant, 2005a]

Esto prueba estabilidad de Lyapunov. Aplicando la transformación inversa  $G_{\mu^{-1}}$  se obtiene que las trayectorias que inician en  $D_1$  son confinadas a algún conjunto compacto  $D_0$  en el tiempo  $T$ . Denotando  $D_j = d_k^j D_0$ , se obtiene una secuencia de conjuntos embebidos que se contraen hasta el origen 0. Por lo que toda trayectoria que inicie en 0 tiene que pertenecer a todos estos conjuntos y por lo tanto no puede abandonar 0.

El conjunto de trayectorias transitorias que inician en un punto dado es compacto en la métrica C [Filippov, 1988]. El tiempo máximo de convergencia  $\Theta$  de todas las trayectorias que inician en  $x$  es una función homogénea  $\Theta(x)$ . Es igual a cero en el origen. Su continuidad en el origen se deriva de su homogeneidad: el tiempo máximo de convergencia tiende a cero cuando el disco  $d_\kappa D$  de condiciones iniciales se contrae hacia el origen con  $\kappa \rightarrow 0$ . Cualquier solución que se inicia cercana a  $x$  llega a un punto cercano al origen en un tiempo  $\Theta(x)$ . El tiempo de convergencia residual es pequeño debido a la continuidad de la función  $\Theta(x)$  en el origen.

## Demostración del Teorema 2.2<sup>2</sup>

Asígnense los pesos, grados de homogeneidad,  $r - i$  a  $\sigma^{(i)}$ ,  $i = 0, \dots, r - 1$ , y a  $t$  el peso 1, grado negativo de homogeneidad del sistema, lo cual corresponde a la homogeneidad del modo deslizante de orden  $r$ .

**Lema A.1** *El peso de  $N_{i,r}$ , es igual a  $r - i$ ,  $i = 0, \dots, r - 1$ . Cada función homogénea localmente acotada  $\omega(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i)})$  de peso  $r - i$  satisface la desigualdad  $|w| \leq cN_{i,r}$  para alguna  $c > 0$ .*

*Por lo tanto  $N_{i,r}$  es una función positiva definida localmente acotada, lo que implica que  $\omega/N_{i,r}$  es acotada por una esfera unitaria y por lo tanto en todas partes.*

**Lema A.2** *Sea  $1 \leq i \leq r - 2$ , entonces para cualquier  $\beta_i, \gamma_i, \gamma_{i+1}$  con  $\beta_{i+1} > 0$  suficientemente grande, la siguiente desigualdad:*

$$|\sigma^{(i+1)} + \beta_{i+1} N_{i,r}^{(r-i-1)/(r-i)} \Psi_{i,r}| \leq \gamma_{i+1} N_{i,r}^{(r-i-1)/(r-i)}$$

---

<sup>2</sup>Esta prueba ha sido tomada de [Levant, 2005b]

asegura el establecimiento en tiempo finito y posterior mantenimiento, de la desigualdad:

$$|\sigma^{(i)} + \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)} \Psi_{i-1,r}| \leq \gamma_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)}$$

Prueba: Considérese el conjunto  $\Omega(\xi) = \{(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i)}) \mid |\Psi_{i,r}| \leq \xi\}$  para alguna determinada  $\xi > 0$ ,  $\xi < \gamma_i/(3\beta_i)$ ,  $\xi < 1/3$ . La desigualdad  $|\Psi_{i,r}| \leq \xi$ , implica que  $|\sigma^{(i)}| \leq 2\beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)}$  y por lo tanto  $\Omega(\xi) \in \Omega_1(\xi)$ , donde el conjunto  $\Omega_1(\xi)$  está definido por

$$|\sigma^{(i)} + \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)} \Psi_{i-1,r}| \leq 3\xi \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)}$$

Esto es equivalente, en su caso, a  $\phi_- \leq \sigma^{(i)} \leq \phi_+$ ; donde  $\phi_-$ ,  $\phi_+$  son funciones homogéneas de  $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i-1)}$  del peso  $r-i$ . Restringiendo  $\phi_-$  y  $\phi_+$  a la esfera homogénea de radio  $\rho = 1$ , donde  $\rho^p = \sigma^{p/r} + \sigma^{p/r-1} + \dots + (\sigma^{(i-1)})^{p/(r-i+1)}$ ,  $p = 2r$ , se obtienen funciones  $\phi_{1-}$ ,  $\phi_{1+}$  continuas en dicha esfera. Estas funciones  $\phi_{1-}$ ,  $\phi_{1+}$  pueden ser aproximadas por arriba y por abajo por funciones suaves  $\phi_{2-}$ ,  $\phi_{2+}$  respectivamente.

Cualquier función  $\phi$  definida en la esfera homogénea  $\rho = 1$  es unívocamente extendida a la función  $\Phi$  de peso  $\omega = 0$  definida en el espacio completo  $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i-1)}$  por la formula:

$$\Phi(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i-1)}) = \rho^\omega \phi(\rho^{(-r)} \sigma, \rho^{(-r+1)} \dot{\sigma}, \dots, \rho^{(-r-i+1)} \sigma^{(i-1)})$$

donde la función  $\rho$  es la arriba definida. De esta forma las funciones  $\phi_{2-}$ ,  $\phi_{2+}$  son extendidas por homogeneidad a las funciones continuas homogéneas  $\phi_-$  y  $\phi_+$  de  $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i-1)}$  de el peso  $r-i$ , y son suaves en todas partes excepto en 0, se tiene entonces  $\Omega(\xi) \subset \Omega_2 = \{(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i-1)}) \mid \phi_- \leq \sigma^{(i)} \leq \phi_+\}$ .

Ahora se demostrará que  $\Omega_2$  es invariante y atrae a las trayectorias cuando  $\beta_{i+1}$  es suficientemente grande. La frontera "superior" de  $\Omega_2$  está dada por la ecuación

$$\pi_+ = \sigma^{(i)} - \Phi_+ = 0$$

Fuera de  $\Omega_2$  se asegura la desigualdad  $|\Psi_{i,r}| \geq \xi$ . Supóngase que en el momento inicial  $\pi_+ > 0$  y por lo tanto  $\Psi_{i,r} \geq \xi$ . Tomando en cuenta que  $\dot{\Phi}_+$  es homogénea de peso  $r-i-1$  y, de acuerdo al **Lema A.1**,  $|\Psi_+| \leq \kappa N_{i,r}^{(r-i-1)/(r-i)}$  y  $|\pi_+| \leq \kappa_1 N_{i,r}$  para algunas  $\kappa, \kappa_1 > 0$ , se obtiene al diferenciar que para  $\beta_{i+1}$  suficientemente grande:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_+ &\leq (-\beta_{i+1}\xi + \gamma_{i+1})N_{i,r}^{(r-i-1)/(r-i)} - \dot{\Phi}_+ \\ &\leq (-\beta_{i+1}\xi + \gamma_{i+1} + \kappa)N_{i,r}^{(r-i-1)/(r-i)} \\ &\leq (-\beta_{i+1}\xi + \gamma_{i+1} + \kappa)(\kappa_1^{-1}\pi_+)^{(r-i-1)/(r-i)}. \end{aligned}$$

Por lo que  $\pi_+$  se desvanece en tiempo finito con  $\beta_{i+1}$  suficientemente grande. De tal forma que la trayectoria ingresa inevitablemente en  $\Omega_2$  en tiempo finito. De forma similar, la trayectoria ingresa en  $\Omega_2$  cuando  $\pi_+$  es negativo y por lo tanto  $\Psi_{i,r} \leq -\xi$ . Por lo anterior es evidente que  $\Omega_2$  es invariante.

Eligiendo  $\Phi_+$  y  $\Phi_-$  suficientemente cercanas a  $\phi_+$  y  $\phi_-$  en la esfera homogénea y  $\beta_{i+1}$  suficientemente grande, se obtiene del **Lema A.1** que  $\Omega_2 \in \Omega_1(\gamma_i/(3\beta_i))$  y la afirmación del **Lema A.2**.

Se puede ahora relacionar el presente análisis con los modos deslizantes estándar, es decir de orden uno, de la siguiente forma, cuando  $i = 0$  el **Lema A.2** quedaría de la siguiente forma:

**Lema A.3** *La desigualdad  $|\dot{\sigma} + \beta_1|\sigma|^{(r-1)/r} \text{sign}(\sigma)| \leq \gamma_1|\sigma|^{(r-1)/r}$ , con  $0 \leq \gamma_1 \leq \beta_1$  asegura que la identidad  $\sigma \equiv 0$  es establecida en tiempo finito y una vez establecida se mantiene.*

Para terminar la prueba se procede de forma análoga a la prueba del **Lema A.2**, se prueba que para toda  $\gamma > 0$  con  $\alpha$  suficientemente grande se establece en tiempo finito la desigualdad  $|\sigma^{(r-1)} + \beta_{r-1}N_{r-2,r}^{1/2}\Psi_{r-2,r}| \leq \gamma N_{r-2,r}^{1/2}$  y es mantenida posteriormente.

# Función de Lyapunov para el algoritmo Twisting

Considere el siguiente sistema de segundo orden

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \delta(t, x) + u\end{aligned}\tag{B.1a}$$

$$\text{con } u = -\alpha \text{signo}(x_1) - \beta \text{signo}(x_2)\tag{B.1b}$$

donde los estados  $x_1$  y  $x_2 \in \mathbb{R}$  son variables escalares,  $\delta$  es una perturbación acotada y  $u \in \mathbb{R}$  es un control de modos deslizantes de segundo orden conocido como *twisting*;  $\alpha, \beta > 0$  son parámetros del controlador.

De acuerdo a los resultados presentados en [Santesteban y otros, 2010], se formula la siguiente proposición.

**Proposición B.1** *Sea  $|\delta(t, x)| \leq M$  para todo  $(t, x) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 > 0$  y considérese la siguiente función*

$$V(x_1, x_2) = \alpha^2 \gamma_1 x_1^2 + \gamma_2 |x_1|^{3/2} \text{signo}(x_1) x_2 + \alpha \gamma_1 |x_1| x_2^2 + \frac{1}{4} \gamma_1 x_2^4.\tag{B.2}$$

*Entonces se tiene lo siguiente*

- *Para cualquier valor dado  $\alpha > 0$  y de  $\beta$  tal que  $\alpha - M > \beta > M$ , siempre existen parámetros  $\gamma_1, \gamma_2$  tales que  $V$  es una función estricta de Lyapunov para el sistema (B.1). Es decir,  $V$  es positiva definida, propia y su derivada a lo largo de las trayectorias de (B.1) es negativa definida.*
- *para todo  $\beta > M$ , existen constantes  $c_1 > 0$  y  $c_2 \in (0, 1)$  tales que*

$$\frac{dV}{dx_1} \dot{x}_1 + \frac{dV}{dx_2} \dot{x}_2 \leq -c_1 V^{c_2};\tag{B.3}$$

- (por lo tanto) las soluciones generadas por cualquier par  $(x_{1o}, x_{2o}) \in \mathbb{R}^2$  que satisface  $(x_1(t_0), x_2(t_0)) = (x_{1o}, x_{2o})$  convergen al origen  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  en tiempo finito  $t_f$  donde

$$t_f \leq \frac{4}{c_1} V(x_{1o}, x_{2o})^{1/4}. \quad (\text{B.4})$$

## Positividad definida de la función $V$

Para probar que  $V$  es positiva definida, primero suponemos  $\alpha > 0$ , como única restricción. Sea  $\mu > 0$  y obsérvese que

$$V(x_1, x_2) = \mu(|x_1|^{1/2} + |x_2|)^4 + W \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2) \geq & (\alpha^2 \gamma_1 - \mu)|x_1|^2 - (\gamma_2 + 4\mu)|x_1|^{3/2}|x_2| \\ & + (\alpha \gamma_1 - 6\mu)|x_1||x_2|^2 - 4\mu|x_1|^{1/2}|x_2|^3 \\ & + \left(\frac{1}{4}\gamma_1 - \mu\right)|x_2|^4. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Suponemos que para cualquier ganancia dada  $\alpha > 0$ , una elección apropiada de los parámetros  $\gamma_1, \gamma_2$  harán que  $W \geq 0$  y, por lo tanto, haciendo a  $V$  positiva definida y radialmente no acotada. Para probar que la suposición es verdadera, definimos  $\eta_m$  de la siguiente manera

$$\eta_m = \min \left\{ (\alpha^2 \gamma_1 - \mu), \frac{1}{6}(\alpha \gamma_1 - 6\mu), \left(\frac{1}{4}\gamma_1 - \mu\right) \right\}.$$

Si  $\eta_m > 0$ , lo que implica que  $\gamma_1 > 0$  y en consecuencia que  $\alpha > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2) \geq & -(\gamma_2 + 4\mu) [|x_1|^{3/2}|x_2| + |x_1|^{1/2}|x_2|^3] \\ & \eta_m [|x_1|^2 + 6|x_1||x_2|^2 + |x_2|^4]. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Además, para cualquier valor dado de los parámetros  $\alpha, \gamma_1, \mu > 0$  tal que  $\eta_m > 0$ , elíjase  $\gamma_2 > 0$  tal que  $\gamma_2 \leq 4\eta_m - 4\mu$ . Bajo las mencionadas condiciones, la desigualdad (B.7) implica que

$$W(x_1, x_2) \geq \eta_m [|x_1|^{1/2} - |x_2|]^4 \geq 0.$$

Se resalta que siempre existe  $\gamma_2 > 0$  que satisface que  $\gamma_2 \leq 4\eta_m - 4\mu$ .

Ahora se calcula una cota superior para  $V$ . Para ello obsérvese de (B.6), que

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2) &\leq (\alpha^2\gamma_1 - \mu)|x_1|^2 + (\gamma_2 + 4\mu)|x_1|^{3/2}|x_2| \\ &\quad + (\alpha\gamma_1 - 6\mu)|x_1||x_2|^2 + 4\mu|x_1|^{1/2}|x_2|^3 \\ &\quad + \left(\frac{1}{4}\gamma_1 - 4\mu\right)|x_2|^4 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

que en conjunto con (B.5), implica la siguiente desigualdad

$$V(x_1, x_2) \leq (\mu + \eta_M) [|x_1|^{1/2} + |x_2|]^4 \quad (\text{B.9})$$

con  $\eta_M = \max\{(\alpha^2\gamma_1 - \mu), (\alpha\gamma_1 - 6\mu), (\gamma_2 + 4\mu), (\frac{1}{4}\gamma_1 - 4\mu)\}$ .

## Derivadas de $V$ respecto al sistema

A continuación se obtienen las desigualdades usadas en el análisis del capítulo (5). Comenzamos por obtener las siguientes derivadas parciales de  $V$ , haciendo uso de la identidad  $|x_1|^{3/2}\text{signo}(x_1) = x_1|x_1|^{1/2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} &= 2\alpha^2\gamma_1 x_1 + \frac{3}{2}\gamma_2|x_1|^{1/2}x_2 + \alpha\gamma_1\text{signo}(x_1)x_2^2 \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} &= \gamma_2|x_1|^{3/2}\text{signo}(x_1) + 2\alpha\gamma_1|x_1|x_2 + \gamma_1x_2^3. \end{aligned}$$

Además, definiendo  $c_8 := \max\{2\alpha^2\gamma_1, \frac{3}{2}\gamma_2, \alpha\gamma_1\}$  se tiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial V}{\partial x_1} \right| &\leq c_8 (|x_1|^{1/2} + |x_2|)^2 \\ \Rightarrow \left| \frac{\partial V}{\partial x_1} \right| |x_1| &\leq c_8 (|x_1|^{1/2} + |x_2|)^4. \end{aligned}$$

De la ecuación anterior y (B.9) obtenemos

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x_1} \right| |x_1| \leq \frac{c_8}{\mu + \eta_M} V(x_1, x_2)$$

Es decir, (5.17) se cumple para  $V$  con  $z = (x_1, x_2)^\top$ . De forma similar sea  $c_9 := \max\{\gamma_2, 2\alpha\gamma_1, \gamma_1\}$  entonces

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x_2} \right| \leq c_9 (|x_1|^{1/2} + |x_2|)^3$$

que para  $\|x\|$  suficientemente grande cumple con

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial V}{\partial x_2} \right| &\leq c_9 (|x_1|^{1/2} + |x_2|)^4 \\ \Rightarrow \left| \frac{\partial V}{\partial x_2} \right| &\leq \frac{c_9}{\mu + \eta_M} (|x_1|^{1/2} + |x_2|)^4. \end{aligned}$$

De donde, (5.18) se cumple para  $V$  con  $z = (x_1, x_2)^\top$ .

Para el cálculo de la derivada total  $V$  a lo largo de las trayectorias de (B.1), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= 2\alpha^2 \gamma_1 x_1 x_2 \\ &+ \gamma_2 |x_1|^{3/2} \left( -\alpha - \beta \text{signo}(x_1 x_2) + \delta \right) \\ &+ \frac{3}{2} \gamma_2 |x_1|^{1/2} x_2^2 + \alpha \gamma_1 x_2^2 \text{signo}(x_1) x_2 \\ &+ 2\alpha \gamma_1 |x_1| x_2 \left( -\alpha \text{signo}(x_1) - \beta \text{signo}(x_2) + \delta \right) \\ &+ \gamma_1 x_2^3 \left( -\alpha \text{signo}(x_1) - \beta \text{signo}(x_2) + \delta \right). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

después de simplificaciones algebraicas se llega a

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &\leq -2\alpha \gamma_1 (\beta - M) |x_1| |x_2| - \gamma_1 (\beta - M) |x_2|^3 \\ &\quad - \gamma_2 (\alpha - \beta - M) |x_1|^{3/2} + \frac{3}{2} \gamma_2 x_2^2 |x_1|^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Sea  $\kappa > 0$ , agregando  $\kappa$  veces la siguiente expresión

$$(|x_1|^{1/2} + |x_2|)^3 - [|x_1|^{3/2} + 3|x_1||x_2| + 3|x_1|^{1/2}|x_2|^2 + |x_2|^3] = 0$$

al lado derecho de (B.11) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &\leq -[\gamma_2 (\alpha - \beta - M) - \kappa] |x_1|^{3/2} \\ &\quad + \frac{3}{2} [\gamma_2 + 3\kappa] x_2^2 |x_1|^{1/2} \\ &\quad + [3\kappa - 2\alpha \gamma_1 (\beta - M)] |x_1| |x_2| \\ &\quad - [\gamma_1 (\beta - M) - \kappa] |x_2|^3 - \kappa (|x_1|^{1/2} + |x_2|)^3. \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &\leq -[\gamma_2 (\alpha - \beta - M) - \kappa] |x_1|^{3/2} \\ &\quad - |x_2| \begin{bmatrix} |x_1|^{1/2} \\ |x_2| \end{bmatrix}^\top N \begin{bmatrix} |x_1|^{1/2} \\ |x_2| \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

donde

$$N = \begin{bmatrix} 2\alpha\gamma_1(\beta - M) - 3\kappa & -\frac{3}{2}[\gamma_2 + 3\kappa] \\ -\frac{3}{2}[\gamma_2 + 3\kappa] & \gamma_1(\beta - M) - \kappa \end{bmatrix}$$

es positiva semidefinida para valores suficientemente grandes de  $\gamma_1$  y  $\beta > M$ . Usando (B.12), se obtiene la siguiente restricción  $\gamma_2(\alpha - \beta - M) - \kappa > 0$ , que combinada con  $\beta > M$  permite obtener la restricción  $\alpha - M > \beta > M$ .

## Estabilidad en tiempo finito

Enseguida se busca  $c_1$  y  $c_2$  tales que la desigualdad (B.3) se satisfice.

$$\dot{V}(x_1, x_2) \leq -\kappa(|x_1|^{1/2} + |x_2|)^3.$$

Usando (B.8) se obtiene

$$-V(x_1, x_2)^{3/4} \geq -(\mu + \eta_M)^{3/4} [ |x_1|^{1/2} + |x_2| ]^3$$

por lo tanto

$$\dot{V}(x_1, x_2) \leq -\frac{\kappa}{(\mu + \eta_M)^{3/4}} V(x_1, x_2)^{3/4}. \quad (\text{B.13})$$

En particular, la desigualdad (B.3) se cumple para  $\alpha - M > \beta > M$ , con  $\gamma_1 > 0$  y

$$c_1 = \frac{\kappa}{(\mu + \eta_M)^{c_2}}, \quad c_2 = \frac{3}{4}.$$

Por último, una cota superior para el tiempo de convergencia de las trayectorias a cero, puede calcularse integrando (B.13) a lo largo de las trayectorias generadas por (B.1) a partir de condiciones iniciales arbitrarias  $(x_{1o}, x_{2o}) \in \mathbb{R}^2$

$$t_f \leq \frac{4}{c_1} V(x_{1o}, x_{2o})^{1/4}. \quad (\text{B.14})$$



## Cálculo de ganancias del doble relevador

A continuación se expone brevemente el procedimiento para obtener las fórmulas para calcular las ganancias del doble relevador para generar oscilaciones, el método usado es el de la función descriptiva según se reporta en [Aguilar y otros, 2009b,a].

Considérese el modelo linealizado de la planta

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R} \quad (\text{C.1})$$

el cual puede representarse con una función de transferencia de la siguiente forma

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

Suponiendo que la matriz  $A$  no tiene valores propios sobre el eje imaginario, y que, el grado relativo de (C.1) es mayor a uno.

La función descriptiva,  $N$ , del controlador de estructura variable (7.12) está dada por la primer armónica de la señal de control periódica dividida por la amplitud de  $y(t)$  [Atherton, 1975]:

$$N = \frac{\omega}{\pi A_p} \int_0^{2\pi/\omega} u(t) \operatorname{sen}(\omega t) dt + j \frac{\omega}{\pi A_p} \int_0^{2\pi/\omega} u(t) \operatorname{cos}(\omega t) dt \quad (\text{C.2})$$

donde  $A_p$  es la amplitud de la entrada a la no linealidad (dicha no linealidad es precisamente el control) y  $\omega$  es la frecuencia de  $y(t)$ . El algoritmo de control (7.12) puede analizarse como la conexión en paralelo de dos relevadores, la entrada al primer relevador es la variable de salida  $y(t)$ , y la entrada al segundo relevador la derivada de la mencionada variable de salida. Se tiene que la función descriptiva para el primer relevador es

$$N_1 = \frac{4c_1}{\pi A_p},$$

mientras que para el segundo es [Atherton, 1975]

$$N_2 = \frac{4c_2}{\pi A_2},$$

donde  $A_2$  es la amplitud de  $dy/dt$ . Por otra parte, tomando en cuenta la relación entre  $y$ ,  $dy/dt$  en el dominio de Laplace se obtiene una relación entre las amplitudes  $A_p$  y  $A_2$ :  $A_2 = A_p\Omega$ , donde  $\Omega$  es la frecuencia de la oscilación. Usando la notación empleada en (7.12) obtenemos la siguiente expresión

$$N = N_1 + sN_2 = \frac{4c_1}{\pi A_p} + j\Omega \frac{4c_2}{\pi A_2} = \frac{4}{\pi A_p}(c_1 + jc_2), \quad (\text{C.3})$$

donde  $s = j\Omega$ . Obsérvese que la función descriptiva de (7.12) únicamente depende de la amplitud. Por lo cual se usa la ecuación de balance armónico [Atherton, 1975], para hallar los parámetros de la oscilación:

$$W(j\Omega)N(a) = -1, \quad (\text{C.4})$$

donde  $a$  es la amplitud de la oscilación de la entrada a la no linealidad y  $W(j\omega)$  es la respuesta característica en la frecuencia compleja (la traza de Nyquist) de la planta. De nuevo usando la notación de (7.12) y sustituyendo la amplitud de la oscilación de entrada al primer relevador se obtiene

$$W(j\Omega) = -\frac{1}{N(A_p)}, \quad (\text{C.5})$$

donde la función del lado derecho está dada por:

$$-\frac{1}{N(A_p)} = \pi A_p \frac{-c_1 + jc_2}{4(c_1^2 + c_2^2)}.$$

La ecuación (C.4) es equivalente a la condición de intersección de la traza de Nyquist del sistema en lazo abierto con el eje real en el punto  $(-1, j0)$ . En la figura (C.1), se ilustra gráficamente cómo encontrar los valores solución de (C.4). La función  $-1/N$  es una línea recta cuya pendiente depende de la razón  $c_2/c_1$ . El punto de intersección de esta línea recta con la traza de Nyquist  $W(j\Omega)$  nos da la solución del problema.

Se tiene entonces que la frecuencia de las oscilaciones  $\Omega$  depende únicamente de la relación  $\xi = c_2/c_1$ , según la siguiente expresión:

$$\xi = \frac{c_2}{c_1} = -\frac{\text{Im}\{W(j\Omega)\}}{\text{Re}\{W(j\Omega)\}}. \quad (\text{C.6})$$

Puesto que la amplitud de oscilaciones está dada por

$$A_p = \frac{4}{\pi} |W(j\Omega)| \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad (\text{C.7})$$

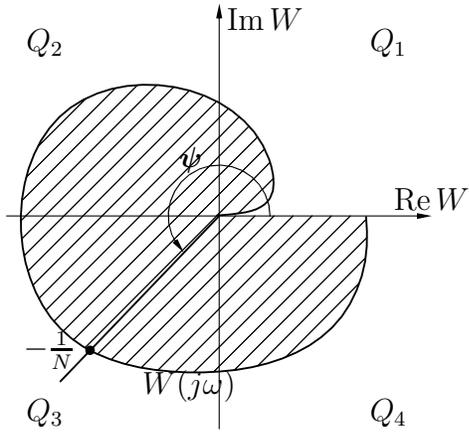


Figura C.1: Ejemplo de la traza de Nyquist del sistema  $W(j\omega)$ , con el controlador de doble relevador.

se tiene que  $c_1$  y  $c_2$  pueden calcularse de acuerdo con

$$c_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \frac{A_p}{|W(j\Omega)|} \left( \sqrt{1 + \xi^2} \right)^{-1} & \text{si } \Omega \in Q_2 \cup Q_3 \\ -\frac{\pi}{4} \frac{A_p}{|W(j\Omega)|} \left( \sqrt{1 + \xi^2} \right)^{-1} & \text{si } \Omega \in Q_1 \cup Q_4 \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

$$c_2 = \xi c_1. \quad (\text{C.9})$$



---

# Bibliografía

- ADHAMI-MIRHOSSEINI, A. y YAZDANPANA, M. J.: «Robust Tracking of perturbed systems by nested sliding mode control». En: *International conference on Control and Automation, Proceedings of the*, pp. 44–48. Budapest, Hungary, 2005.
- AGUILAR, L.; BOIKO, I.; FRIDMAN, L. y IRIARTE, R.: «Generating self-excited oscillations for underactuated mechanical systems via two relay controller». *International Journal of Control*, 2009a, **82(9)**, pp. 1678–1691.
- AGUILAR, L.; BOIKO, I.; FRIDMAN, L. y IRIARTE, R.: «Generating self-excited oscillations via two-realy controller». *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2009b, **54(2)**, pp. 416 – 420.
- ANGELI, D. y SONTAG, E.D.: «Forward completeness, unboundedness observability, and their Lyapunov characterizations». *Systems and Control Letters*, 1999, **38**, pp. 209–217.
- ASTRÖM, K.; BLOCK, D. y SPONG, M.: *The Reaction Wheel Pendulum*. Lecture Notes for the Reaction Wheel Pendulum (Part of the Mechatronics Control Kit), Urbana-champaign,IL, 2001.
- ATHERTON, D.: *Nonlinear Control Engineering: Describing Function Analysis and Design*. Nonlinear Control Engineering. Van Nostrand, Workingham, U.K., 1975.
- ATTAULLAH, Y. M. y KHALIL, H.K.: «Lyapunov Redesign Approach to Output Regulation of Nonlinear Systems Using Conditional Servocompensators». En: *American Control Conference, Proceedings of*, pp. 395–400. Seattle, USA, 2008.
- AUBIN, JEAN-PIERRE: *Viability Theory*. Birkhäuser, Boston, 1st<sup>a</sup> edición, 1991.
- BACCIOTTI, A. y ROSIER, L.: *Lyapunov Functions and Stability in Control Theory*. volumen 267 de *Lecture Notes in Control and Information Science*. Springer, London, 1st<sup>a</sup> edición, 2001.

- BARTOLINI, G.; FERRARA, A.; GIACOMINI, L. y USAI, E.: «Properties of a Combined Backstepping Second Order Sliding Mode Algorithm for Some Classes of Nonlinear Systems With Non-Matched Uncertainties». *Transactions on Automatic Control*, 2000, **45(7)**, pp. 1334–1341.
- BOIKO, I.: *Discontinuous control systems: Frequency-domain analysis and design*. Birkhäuser, Boston, USA, 2009.
- CASTAÑOS, F. y FRIDMAN, L.: «Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **55(5)**, pp. 853–858.
- CHOI, H.H.: «Robust implementation of sliding mode control schemes». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**, pp. 1634–1638.
- DAVIS, R. y SPURGEON, S.K.: «Robust implementation of sliding mode control schemes». *International Journal of Systems Science*, 1993, **24**, pp. 733–743.
- DRAZENOVIC, B.: «The Invariance Conditions in Variable Structure Systems». *Automatica*, 1969, **5(3)**, pp. 287–295.
- ESTRADA, A.; AGUILAR, L.T.; IRIARTE, R. y FRIDMAN, L.: «Two-relay controller for real-time trajectory generation and its application to inverted orbital stabilization of inertia wheel pendulum». En: *11th International Workshop on Variable Structure Systems*, pp. 458 – 462. Mexico City, Mexico, 2010a.
- ESTRADA, A.; AGUILAR, L.T.; IRIARTE, R. y FRIDMAN, L.: «Two relay controller for real time trajectory generation and its application to inverted orbital stabilization of inertia wheel pendulum via quasi-continuous HOSM». *Asian Journal of Control*, 2011. doi: 10.1002/asjc.339.
- ESTRADA, A. y FRIDMAN, L.: «Exact compensation of unmatched perturbations via HOSM». En: *47th IEEE Conference on Decision and Control, Proceedings of the*, pp. 1993 – 1998. Cancún, México, 2008a.
- ESTRADA, A. y FRIDMAN, L.: «Quasi-continuous HOSM control for systems with unmatched perturbations». En: *10th. IEEE Workshop on Variable Structure Systems*, pp. 179 – 184. Antalya, Turkey, 2008b.
-

- ESTRADA, A. y FRIDMAN, L.: «Integral HOSM Semiglobal Controller for Finite-Time Exact Compensation of Unmatched Perturbations». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010a, **55(11)**, pp. 2645–2649.
- ESTRADA, A. y FRIDMAN, L.: «Quasi-continuous HOSM control for systems with unmatched perturbations». *Automatica*, 2010b, **46(11)**, pp. 1916–1919.
- ESTRADA, A.; LORÍA, A. y CHAILLET, A.: «Cascades stability analysis applied to a control design for unmatched perturbation rejection based on HOSM». En: *11th International Workshop on Variable Structure Systems*, pp. 45 – 49. Mexico City, Mexico, 2010b.
- FERRARA, A. y GIACOMINI, L.: «Output Feedback Second-Order Sliding Mode Control for a Class of Nonlinear Systems With Non-Matched Uncertainties». *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 2001, **123(7)**, pp. 313–323.
- FILIPPOV, A.F.: *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
- FREEMAN, R. A. y KOKOTOVIĆ, P. V.: «Design of 'softer' robust non-linear control law». *International Journal of Systems Science*, 1993, **29**, pp. 1425–1437.
- FRIDMAN, L. y LEVANT, A.: *Sliding Mode Control in Engineering*. pp. 53–101. Marcel Dekker, New York, 2002.
- GRIZZLE, J.W.; MOOG, C.H. y CHEVALLEREAU, C.: «Nonlinear control of mechanical systems with an unactuated cyclic variable». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50(5)**, pp. 559–576.
- HUERTA-AVILA, H.; LOUKIANOV, A. G. y CAÑEDO, J. M.: «Nested Integral Sliding Modes of Large Scale Power Systems». En: *46th IEEE Conference on Decision and Control, Proceedings of the*, pp. 1993–1998, 2007.
- ISIDORI, A.: *Nonlinear Control Systems*. Springer Verlag, New York, USA, second<sup>a</sup> edición, 1989.
- KANELLAKOPOULOS, I.; KOKOTOVIĆ, P.V. y MORSE, A.S.: «Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable system». *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1991, **36(11)**, pp. 1241–1253.
- KHALIL, H. K.: *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New York, USA, third<sup>a</sup> edición, 2002.

- KOKOTOVIĆ, P. V.; KANELLAKOPOULOS, I. y MORSE, A. S.: *Foundations of Adaptive Control*. capítulo Adaptive Feedback Linearization of Non-linear Systems, pp. 311–346. Springer-Verlag, New York, 1991.
- KOSHKOU EI, A. J. y ZINOBER, A.S.I.: «Adaptive Sliding Backstepping of a Parametric Semi-Strict Feedback Systems with Unmatched Uncertainty». En: *6th. IEEE International Workshop on Variable Structure Systems*, pp. 393–402. Gold Coast, Queensland, Australia, 2000.
- KRSTIC, M.; KANELLAKOPOULOS, I. y KOKOTOVIC, P.: *Nonlinear and Adaptive Control Design*. Wiley Interscience, New York, USA, 1995.
- LEVANT, A.: «Robust exact differentiation via sliding mode technique». *Automatica*, 1998, **34(3)**, pp. 379–384.
- LEVANT, A.: «High-order sliding modes: differentiation and output-feedback control». *International Journal of Control*, 2003, **76(9-10)**, pp. 924–941.
- LEVANT, A.: «Homogeneity approach to high-order sliding mode design». *Automatica*, 2005a, **41(5)**, pp. 823–830.
- LEVANT, A.: «Quasi-Continuous High-Order Sliding-Mode Controllers». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005b, **50(11)**, pp. 1812–1816.
- LEVANT, A.: *Advances in Variable Structure*. pp. 143–168. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- LEVANT, A. y ALELISHVILI, L.: «Integral High-Order Sliding Modes». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52(7)**, pp. 1278–1282.
- LEVANT, A. y MICHAEL, A.: «Adjustment of high-order sliding-mode controllers». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2009, **19(15)**, pp. 1657–1672.
- LIU, P. y ZINOBER, A.S.I.: «Robust control of non-linear uncertain systems via sliding-mode with recursive-interlacing design». En: *IEEE International Workshop on Variable Structure Systems*, Tokyo, Japan, 1996.
- LOUKIANOV, A. G.: «Nonlinear Block Control with Sliding Mode». *Automation and Remote Control*, 1998, **7(59)**, pp. 916–933.
-

- LOUKIANOV, A. G.: «Robust Block decomposition Sliding Mode Control Design». *Mathematical Problems in Engineering*, 2002, **8(4-5)(11)**, pp. 349–365.
- LOUKIANOV, A. G. y UTKIN, V.I.: «Methods of reducing equations for dynamic systems to a regular form». *Automation and Remote Control*, 1981, **4(42)**, pp. 413–420.
- OLFATI-SABER, R.: «Control of underactuated mechanical systems with two degrees of freedom and simmetry». En: *Proc. of American Control Conference*, pp. 4092–4096. Chicago, USA, 2000.
- PANTELEY, E. y LORÍA, A.: «Global uniform asymptotic stability of cascaded nonautonomous nonlinear systems». En: *Proceedings of the fourth European control conference*, Brussels, Belgium, 1997.
- PANTELEY, E. y LORÍA, A.: «On global uniform asymptotic stability of non linear time-varying non autonomous systems in cascade». *Systems and Control Letters*, 1998, **33(2)**, pp. 131–138.
- PANTELEY, E. y LORÍA, A.: «Growth rate conditions for uniform asymptotic stability of cascaded time-varying systems». *Automatica*, 2001, **37**, pp. 453 – 460.
- RUBAGOTTI, M.; ESTRADA, A.; CASTAÑOS, F.; FERRARA, A. y FRIDMAN, L.: «Integral Sliding Mode Control for Nonlinear Systems With Matched and Unmatched Perturbations». *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2011. doi: 10.1109/TAC.2011.2159420. (aceptado).
- SANTIESTEBAN, R.; FRIDMAN, L. y MORENO, J.A.: «Finite-time convergence analysis for Twisting controller via a strict Lyapunov function». En: *The 11th Workshop on Variable Structure Systems*, pp. 1–6. Mexico City, Mexico, 2010.
- SCARRAT, J. C. y ZINOBER, A.S.I.: «Dynamical Adaptive Backstepping: A Modular Approach». En: *6th. IEEE International Workshop on Variable Structure Systems*, pp. 403–412. Gold Coast, Queensland, Australia, 2000.
- SONTAG, E. D.: «Remarks on stabilization and input-to-state stability». En: *28th IEEE Conference on Decision and Control, Proceedings of the*, Fort Lauderdale, FL, 1989.
- SONTAG, E. D.: «Further facts about input-to-state stabilization». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, **36(4)**, pp. 473–476.

UTKIN, V. I.; GULDNER, J. y SHI, J.: *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Taylor & Francis, 1999.

UTKIN, V.I.: *Sliding modes in control and optimization*. Springer Verlag, Berlin, Germany, 1992.

---