UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Filosofía y Letras

Instituto de Investigaciones Filosóficas

Programa de Maestría y Doctorado en Filosofía

¿Qué tiene de lógica la forma lógica?

Tesis que para obtener el grado de

Maestra en Filosofía presenta:

Laura Campos Millán

Asesor de tesis:

Axel Arturo Barceló Aspeitia

Ciudad de México, Octubre 2011.

Contenido

Introducción

En la filosofía del lenguaje pueden distinguirse dos proyectos cuyo tema de investigación está centrado en la forma lógica. El primero de ellos apela a la forma lógica de las expresiones de un lenguaje natural con la finalidad de dar cuenta de ciertas relaciones de implicación lógica entre las expresiones del lenguaje en cuestión (paradigmáticamente, Frege 1972a, Whitehead y Russell, 1910, Wittgenstein, 2002). Me referiré a este proyecto como *proyecto lógico*. Más recientemente, en la filosofía del lenguaje y en la lingüística contemporáneas, el uso de la noción de forma lógica se ha inscrito dentro del proyecto más amplio de dar cuenta, al menos, del significado lingüístico de las expresiones de un lenguaje natural (sólo menciono por su importancia la tradición iniciada por Davidson, especialmente, 1967; y por otra parte, la tradición iniciada por Montague en su clásico de 1974). A este segundo proyecto lo llamaré *proyecto semántico*. Trabajos aún más ambiciosos, impulsados notoriamente desde la lingüística, involucran alguna noción de *forma lógica* en la investigación de la interfaz entre sintaxis, semántica y pragmática (sólo por mencionar algunos DuBois, 2003 y Van Valin, 2005). En lo que sigue no abordo esta última línea de investigación.

Los proyectos lógico y semántico tienen en común la idea de que el comportamiento lógico de las expresiones de un lenguaje en el primer caso o el significado lingüístico de éstas en el segundo, se explica a partir de la *estructura* de tales expresiones. Esta estructura es reconocida como la forma lógica del ítem lingüístico en cuestión. La premisa que permite integrar estos dos proyectos en uno solo es que la concepción de 'estructura' es la misma para ambos. Bajo esta premisa, el proyecto unificado nace con el objetivo de generar una teoría en la que el concepto de forma lógica dé cuenta de la estructura de las expresiones de un lenguaje *L* dado. Esta estructura sería responsable del significado lingüístico de una expresión de *L* así como de las propiedades lógicas de dicha expresión. La unificación contemplada plantea además que el proyecto semántico es una extensión del proyecto lógico. Esto es así porque bajo el entendido de que no todos los aspectos del contenido de las expresiones en el lenguaje natural son relevantes para explicar el perfil lógico de éstas, el proyecto lógico tuvo como propósito llevar a cabo un *análisis* de estas expresiones. Una de las tareas del análisis era la de eliminar aquellos aspectos del contenido de una expresión que no contribuyen al comportamiento lógico de ésta. La forma lógica se presentó como el resultado de este análisis: la forma lógica es cierta configuración simbólica que da cuenta de las propiedades lógicas de una expresión y de sus relaciones lógicas con otras expresiones. En este sentido, la extensión del proyecto lógico a través del proyecto semántico propone que el significado convencional de las palabras es también responsable del comportamiento lógico de éstas.

Si la unificación de estos proyectos es entendida de la manera esbozada, me pregunto si la premisa de la que dicha unificación depende es después de todo aceptable. Es decir, me pregunto si tenemos razones y cuáles para aceptar que la noción de estructura en el proyecto semántico y en el proyecto lógico es la misma como para dar lugar a un solo proyecto. Mi posición al respecto es que en ausencia de dichas razones dicha premisa carece de apoyo. Para afirmar lo anterior me baso en que la noción de forma lógica a la que cada uno de estos proyectos apela no puede asumirse sin más argumento como una y la misma recurriendo a *una* noción de estructura de las expresiones de un lenguaje.

En defensa de mi posición argumento que el concepto de forma lógica dentro del proyecto lógico cuenta con una delimitación de principio. Esta delimitación establece criterios a los cuales el concepto de forma lógica del proyecto semántico debe responder.

En mi argumentación he asumido que el proyecto lógico está enmarcado dentro de los *sistemas lógicos* desarrollados a partir de la *teoría de la demostración* y de la *teoría de modelos*: *sistemas deductivos* y *sistemas deductivo-semánticos* (o *lenguajes formales interpretados*). Debido a que se trata de sistemas distintos, esperaríamos dos conceptos de forma lógica distintos definidos en el marco de cada una de ellos. No obstante, esta conclusión no es inmediata. El concepto de forma lógica que surge a partir de los sistemas lógicos desarrollados en el marco de la investigación fundacionista de la escuela de Hilbert, abre una perspectiva para plantear la continuidad del concepto de forma lógica, digamos que, de *Frege* a *Tarski* como de manera estándar es aceptado, pero *sólo* vía *Hilbert*.

Este concepto de forma lógica tuvo como antecedente la definición recursiva de las expresiones legítimas dentro de un sistema formal planteada incipientemente por Frege en *Conceptografía* (1972a). Aquí argumento que la forma lógica representada por medio del aparato simbólico de este sistema fue entendida como el *contenido general* de una proposición. Este contenido da cuenta del comportamiento lógico de dicha proposición. De acuerdo con mi exposición, Hilbert acepta que la forma lógica juegue este segundo papel, pero rechaza concebirla como portando cualquier clase de contenido semántico (Hilbert, 1993 y Hilbert y Ackerman, 1928). Esto se debe, según leo, a que Hilbert dedica especial atención al hecho de que la utilización de métodos recursivos para la definición de un sistema lógico permite además presentar a la forma lógica como cierta entidad combinatoria finita. Es decir, Hilbert reconoce el hecho de que en un sistema lógico definido recursivamente la forma lógica adquiere una 'dualidad' remarcable: se presenta como una *entidad abstracta* responsable del comportamiento lógico de las expresiones y sintácticamente como una *entidad combinatoria finita* de símbolos (1993). El proyecto fundacionista de Hilbert fue erigido prácticamente a partir de este reconocimiento. Como argumento, lo anterior obedece a que el proyecto de Hilbert estuvo constreñido por un criterio de objetividad del conocimiento matemático anclado en la epistemología de las matemáticas de Kant. Según este criterio, la confiabilidad de una teoría matemática depende de la aplicación de métodos recursivos para la introducción de conceptos. La tesis que suscribo es que el concepto de forma lógica de Hilbert responde a este criterio.

En apoyo de esta tesis argumento que Hilbert trata teóricamente la 'dualidad' de la forma lógica en términos de la noción de *estructura* (Hilbert y Bernays, 1968) A partir de este tratamiento la forma lógica de una expresión es entendida como cierta *estructura formal*. Esta estructura formal a su vez es explicada en términos de *estructura deductiva* y de *estructura concreta*. En el desarrollo de este argumento utilizo 'patrón' para referirme a la estructura concreta y reservo 'estructura' para hablar propiamente de estructura formal y deductiva así como de su antecedente: *estructura conceptual*. Abordo el concepto de *patrón* a partir de la epistemología de las matemáticas de Kant (2002). Respecto al concepto de estructura básicamente he considerado la concepción de Hilbert de los sistemas axiomáticos (Hilbert y Ackermann, 1928 y Hilbert y Bernays, 1968) y cierta noción de formalidad, reconocida como *algebraica* (Hilbert 1993).

De este recorrido se desprende primero, que la estructura formal de una expresión da cuenta del comportamiento lógico de dicha expresión y está determinada por las 'reglas de formación' y de derivación de un *sistema deductivo* (Hilbert y Ackermann, 1928) Un segundo resultado es que la introducción de la metateoría de los sistemas deductivos permitió integrar sistemáticamente el segundo aspecto de la forma lógica (Hilbert, 1993). En la metateoría de un sistema deductivo la estructura formal de cualquier fórmula del sistema es una *estructura concreta*: una concatenación finita de unidades sintácticas especificable como el resultado de un proceso recursivo. Concluyo que el concepto de forma lógica de Hilbert responde de esta manera al estándar de objetividad del conocimiento matemático en los términos requeridos por la epistemología de Kant.

Mi planteamiento de que el concepto de forma lógica de Hilbert tiene continuidad en los sistemas deductivos interpretados se basa en las siguientes dos premisas. La primera es que a partir de la teoría semántica introducida por Tarski (1983a), el proceso de interpretación de las expresiones de un sistema formal se realiza por medio de una definición recursiva que especifica cómo el contenido semántico de las expresiones complejas del sistema está compuesto por el contenido semántico de los constituyentes de esas expresiones. La segunda considera que la noción de interpretación introducida por estos sistemas para definir validez, mantiene vigente una noción de formalidad que hace sentido de la idea de *re*interpretar el vocabulario no-lógico de tales sistemas (Tarski, 1983b). Estas premisas permiten repensar la idea de que hay un paso directo de la noción de formalidad de *Conceptografía* a la noción introducida por la semántica de Tarski. El matiz que sugiero dar a este tránsito es que el objetivo original de Frege de capturar formalmente una noción de generalidad para explicar la validez de una inferencia fue viable, con limitaciones, a través de las 'notas' características de la noción de forma lógica de Hilbert *viz*. su carácter algebraico y su tratamiento metateórico.

La primera de las premisas anteriores recoge el hecho de que la semántica definida para los lenguajes formales es *composicional*. Esta propiedad es el resultado de la definición de la formación e interpretación de las fórmulas de un sistema formal como procesos recursivos paralelos. La composicionalidad actúa de esta manera como un constreñimiento del proyecto lógico originado en el marco de los sistemas deductivos interpretados: la noción de forma lógica operante en este proyecto es una que determina la composionalidad de los lenguajes formales. Ahora bien, dada la elementalidad de las facultades cognitivas que respalda la confiabilidad de los métodos formales de acuerdo con la noción de forma lógica de Hilbert, es plausible proponer que estas mismas facultades son ejercidas ampliamente en el uso del lenguaje cotidiano. Si lo anterior es cierto, habría al menos una razón para proponer que los aspectos del significado lingüístico de las oraciones de un lenguaje natural relevantes para explicar el comportamiento lógico de tales oraciones son igualmente amplios.

Desde esta perspectiva el proyecto semántico de la forma lógica está ahora en puerta como extensión del proyecto lógico. Así entendido, el objetivo del proyecto semántico es dar cuenta del significado lingüístico de las expresiones de un lenguaje natural por medio de una semántica composicional. Aquí el reto es que el análisis de las expresiones del lenguaje natural entregue formas lógicas adecuadas en un lenguaje formal previamente especificado. Se trata de que tales formas determinen la formación y la interpretación de dichas expresiones como procesos paralelos definibles recursivamente en la metateoría del lenguaje formal en turno. En este sentido, concluyo que el proyecto semántico de la forma lógica se justifica como extensión del proyecto lógico bajo el supuesto de que en virtud de la forma lógica de sus expresiones, los lenguajes naturales son composicionales.

Capítulo 1. Frege y el lenguaje lógicamente perfecto

Frege y Hilbert comparten la posición de que la objetividad del conocimiento matemático debe estar justificada (Frege, 1959 y Hilbert, 1993). Para ambos es posible justificar la objetividad del conocimiento matemático, particularmente el aritmético, por medio de un aparato que opere con la *forma* (*lógica*) de las proposiciones aritméticas. Pero, debido a que la noción de objetividad que cada uno pretende justificar a través de la formalidad de las proposiciones aritméticas es distinta, la noción de formalidad operante en los proyectos fundacionistas de Frege por un lado, y de Hilbert por otro, es también distinta. Por formalidad Frege (1959 y 1972a) entiende generalidad; Hilbert (1993) por su parte entiende independencia de contenido semántico.

Un hecho notorio es que estos autores emplearon prácticamente un mismo aparato técnico para apoyar su propia noción de formalidad (Frege, 1972a y Hilbert y Ackermann 1928). Este hecho apunta a que dicho aparato es formal en un sentido que no se identifica con ninguna de las nociones de formalidad aquí en juego, sin por eso ser ajeno a ellas. Mi lectura es que este aparato responde a un ideal de objetividad científica del que son parte las nociones de objetividad del conocimiento matemático de Frege y de Hilbert respectivamente. Cuál sea el sentido en el que este aparato es formal es algo que debe empezar a aclararse al exponer las posiciones de estos autores. En este capítulo presento algunos de los aspectos de la posición de Frege. Los capítulos restantes están dedicados a presentar en mayor detalle la posición de Hilbert.

1.1. Frege acerca de la objetividad del conocimiento matemático

Para presentar la noción de formalidad de Frege sigo la motivación fundacionista de esta noción discutida en *Los Fundamentos de la Aritmética* (1959).[1] En esta obra Frege sostuvo que las proposiciones aritméticas son ampliamente aplicables (*GL* §§14 y 18), por lo que su justificación no podía apelar a proposiciones sintéticas las cuales, aunque dan lugar a conocimiento objetivo (*GL* §26), emplean en su justificación proposiciones particulares (*GL* §3). La tesis fundacionista de Frege, a saber, su *tesis logicista* establece que las verdades de las matemáticas son analíticas *i. e.* son proposiciones cuya justificación procede *a priori* por medio de una demostración que sólo emplea definiciones y proposiciones verdaderas que no pueden ni requieren ser justificadas (*GL* §§3-4).

Los supuestos de los que parte la tesis de este capítulo de que para Frege formalidad se entiende como generalidad (máxima)[2] son los siguientes. Primero, para Frege la objetividad de las verdades aritméticas tiene su 'fundamento ontológico' en la objetividad de los objetos aritméticos en tanto que entidades reales pero no físicas (*GL* §§26, 58-61). Aquí, la objetividad de un objeto significa que el objeto existe con independencia de nuestro psicologismo. De acuerdo con Daston y Galison en 'nuestro psicologismo' están incluidas las representaciones mentales surgidas de la percepción/experiencia, las intuiciones, las imágenes, ideas y sensaciones, las cuales al ser individuales y privadas son incomunicables y están por eso exentas de una regulación legaliforme (Daston y Galison, 2001, p. 270).

---

[1] A continuación me refiero a esta obra por *GL* y las referencias a sus párrafos irán insertadas en el texto principal con el número de párrafo correspondiente.

[2] Para MacFarlane (2000), generalidad máxima es lo que hoy reconocemos como neutralidad al tema. De acuerdo con MacFarlane, al decir que las verdades de la lógica son máximamente generales, Frege entiende que la generalidad de estas verdades está en su aplicabilidad (2000, p. 75). Regresando a Frege, el sentido en el que una verdad es general fácilmente puede entenderse como la aplicabilidad de ésta a cualquier dominio i. e. su aplicabilidad absoluta (GL §14).

También sigo de cerca la interpretación del *Principio del Contexto* de Wright (1983, pp. 14-16). Para Wright, este principio establece que las nociones *ontológicas* como la de *objeto* se explican a través de nociones *lingüísticas* (*GL* §62). El 'platonismo' de Frege se desprende, según esta interpretación, de la tesis de que los términos numéricos son *nombres propios*. Los objetos aritméticos son bajo esta tesis las referencias de los términos numéricos en las proposiciones aritméticas (*GL* §§45-54). De acuerdo con Frege

> Sólo en el contexto de una proposición significan algo las palabras. Por tanto, se tendrá que llegar a aclarar el sentido de una proposición en la que aparece un término numérico…ya hemos asegurado que bajo los términos numéricos hay que entender objetos independientes. (*GL* §62)

El lenguaje proporciona criterios sintácticos para identificar un término numérico y criterios semánticos para determinar el contenido de una proposición en la que dicho término ocurre. Los segundos son 'un medio para aprehender un número determinado' (*GL* §62). Por lo que una vez fijados, es posible establecer cuando un término numérico ya identificado es un nombre propio (*GL* §62).

Esta interpretación del principio del contexto supone además que la semántica del lenguaje de la aritmética es *composicional* (*GL* §60). De donde se sigue que, en particular, la objetividad de la verdad de una proposición aritmética va a requerir que los objetos a los que se refieren los términos numéricos posean una existencia objetiva.[3] Finalmente supongo que para Frege la garantía epistémica de la existencia objetiva de un objeto aritmético la obtenemos por medio de un criterio de identidad de este objeto. Por el principio del contexto, el criterio de identidad de un objeto opera propiamente sobre los

[3] El caso de la objetividad de los conceptos lo trata Frege especialmente en *GL* §47. Por las consecuencias que tiene para la noción de formalidad, aquí sólo discuto el caso de los términos numéricos.

términos numéricos. En consecuencia, la pregunta por la identidad de un objeto concierne a la referencia de un término singular: qué refiere un término numérico y cuándo dos términos numéricos cualesquiera tienen la misma referencia.

> Si se ha de designar un objeto con el símbolo *a*, entonces debemos poseer un criterio que nos permita distinguir en general si *b* es lo mismo que *a* […] (*GL* §62)

La identidad de un objeto matemático y por tanto, la garantía epistémica que tenemos de que su existencia es objetiva depende de la determinación de la referencia del término numérico relevante. Esto último a su vez depende para Frege de que en principio podamos aclarar el sentido de una igualdad numérica (*GL Introducción* y §62)

Por lo dicho hasta aquí, la justificación de la objetividad de las verdades aritméticas requiere que esté determinada la referencia de los términos numéricos que ocurren en estas proposiciones. La tarea de los métodos formales, *i.e.* de un sistema como el de *Conceptografía*[4] es proporcionar las herramientas para este fin (Frege, 1972b, p. 210).

1.1.1. Métodos formales y objetividad del conocimiento matemático

El propósito de un sistema formal en la justificación de la objetividad de las verdades aritméticas es permitir derivar como teoremas sólo proposiciones analíticas (*GL* §10). Si de acuerdo con la convicción de Frege esta tarea podía realizarse a través de un 'lenguaje lógicamente perfecto' (Frege 1979, p. 252), el papel de *Conceptografía* iba a ser el de coordinar la sintaxis y la semántica de un lenguaje lógico de tal modo que los términos numéricos en las proposiciones aritméticas poseyeran siempre su referencia correcta (Frege, 1972b, p. 212-213).[5] Para Frege esto significaba que en el sistema de

[4] En adelante las referencias a esta obra aparecen en el texto como *BS*.

[5] Aclaro que aunque estos hayan sido los objetivos que Frege pretendía lograr mediante el lenguaje formal de *Conceptografía*, eso no quiere decir que los haya cumplido. El surgimiento de la 'Paradoja de Russell' hizo claro que las estipulaciones sintácticas y semánticas hechas por Frege 'no son suficientes para asegurar una referencia [de los términos numéricos] en todos los casos.' (Dummett 1991, p. 159).

Conceptografía era posible fijar el valor de verdad de todos los juicios de identidad entre términos numéricos de las proposiciones aritméticas (*GL* §§62 y 66). Logrado lo anterior, ante una expresión legítimamente formada de este lenguaje, una *fórmula*, podía seguirse la conclusión de que los términos numéricos que la conforman refieren a objetos objetivos. La formalidad del lenguaje de este sistema significa que los términos numéricos son *unívoca y universalmente aplicables* y que las proposiciones formadas por estos términos, representadas por las fórmulas del sistema, son *generales* (Frege, 1972b, pp. 210, 211 y 214).

La 'estrategia logicista' de Frege estaba en lograr 'manipular' el contenido general de una proposición aritmética (*GL* §§16 y 17) a través de la *forma lógica*: 'Requerimos de un complejo de símbolos del que se destierre toda multivocidad, y a cuya forma lógica rigurosa no pueda escapar el contenido' (Frege, 1972b, p. 212). De modo que a través de la forma lógica de una proposición general y por tanto, a través de medios lingüísticos sintácticos y semánticos, es posible justificar la objetividad de la proposición. Esto no significa que la existencia de los objetos a los que refieren los nombres en una proposición general dependa de la forma de la proposición, sino sólo que de esta forma depende que los términos en la proposición refieran a esos objetos.

Por otra parte, la forma de una proposición aritmética *p* determina las relaciones lógicas de la proposición (*BS* §13 y Frege 1972b, p. 214). La *demostración* de *p* explicita estas relaciones (*GL* §90). Por lo que la demostración de *p* se realiza en virtud de la forma de *p*. Para Frege la justificación de la verdad de una proposición aritmética depende de su demostración (*GL* §§1-3). Esto quiere decir que la proposición adquiere el estatus de verdad analítica y (justificable) *a priori* a través de su demostración (*GL* §3). Una vez que una proposición aritmética está justificada nuestro juicio de que es objetiva está también justificado: Podemos juzgar correctamente de la objetividad de esta proposición. Esto es así porque si una proposición es analítica y (justificable) *a priori*, ello significa que su contenido es (máximamente) general.

Ahora bien, ¿de qué sino del 'contenido lógico' de una proposición depende la 'cadena' de dependencias lógicas de la que es parte la proposición y que se simbolizan en su demostración? Con base en (*BS* §3, *GL* §§16 y 91) sostengo la hipótesis de que para Frege el contenido general de una proposición es el *contenido lógico* que da cuenta de la 'cadena' de inferencias de la que dicha proposición es parte. A partir de la hipótesis anterior, concluyo que la noción operante de formalidad en el fundacionismo de Frege es una según la cual la generalidad absoluta de una proposición es tratada adecuadamente a partir del carácter formal de las fórmulas de *Conceptografía*. En este sentido, la forma lógica de una proposición aritmética 'captura' el contenido general de la proposición. Por lo que para Frege la forma (lógica) de una proposición aritmética no está ni debe estar exenta de contenido semántico.

1.2. ¿En qué sentido es formal el sistema de *Conceptografía*?

La noción de formalidad como independencia del contenido semántico de una expresión es la que utiliza Hilbert en su propio proyecto fundacionista (Hilbert, 1993). Al igual que Frege, para Hilbert la objetividad del conocimiento matemático se justifica a partir de la forma lógica de las proposiciones matemáticas; y tal como Frege, él mismo propuso el empleo de un sistema formal para explicitar y manipular dicha forma. Más aún, el sistema formal empleado por Hilbert retoma como base el aparato técnico de *Conceptografía*. Sólo para Hilbert este aparato es un *cálculo lógico* (Hilbert 1993, p. 103). No obstante, algo que prácticamente se mantendrá constante en ambos autores es que el aparato técnico de *Conceptografía* explicita y permite manipular la forma lógica de las proposiciones aritméticas. Sólo que para Frege esta forma captura el contenido general de una proposición matemática; mientras que para Hilbert, la misma forma está libre de cualquier contenido semántico. ¿Cómo explicar esta situación sin reducirla a una mera disputa verbal?

La explicación que empiezo a trazar aquí considera que este hecho es indicativo de que el sentido en el que el sistema de *Conceptografía* es formal es distinto del que las respectivas nociones de formalidad de Frege y Hilbert recuperan. Recordemos que estas nociones se desarrollaron en el marco de dos proyectos fundacionistas distintos entre sí. Como consta en lo que aquí he presentado para el caso de Frege; y como lo expongo en el resto de esta tesis para el caso de Hilbert, ambos proyectos estuvieron guiados por nociones de objetividad del conocimiento aritmético también distintas una de la otra. Estas nociones responden no obstante a un ideal científico de objetividad. Por un lado, la amplia aplicabilidad o la generalidad de este conocimiento, por el otro, el papel que juegan ciertas capacidades cognitivas básicas en su consecución. Cuando las nociones de formalidad de Frege y Hilbert son colocadas en este trasfondo, el desarrollo de los métodos formales para sustentarlas aparece justamente como eso, como un desarrollo guiado por aquel ideal de objetividad.

A partir del hecho de que el aparato de *Conceptografía* sustenta ambas nociones de formalidad, cabe aducir que *algo* en el aparato de *Conceptografía* sirve al ideal de objetividad al que responden aquellas nociones de formalidad, sin que este *algo* pueda ser identificado sólo con una de esas nociones. Aquello que hace del sistema de *Conceptografía* un sistema formal debería continuar aclarándose cuando conozcamos las razones que llevaron a Hilbert a defender una noción de formalidad distinta de la noción de formalidad que defendió Frege.

Capítulo 2. Bases epistemológicas del proyecto fundacionista de Hilbert

Este capítulo y el siguiente están dedicados a la exposición de las bases epistemológicas del proyecto fundacionista de Hilbert. El objetivo es defender la tesis de que este proyecto está guiado por la adaptación de un *criterio constructivo de objetividad* que tiene su origen en *el método de introducción de conceptos aritméticos* de Kant (2002).

El argumento que ofrezco para defender esta tesis tiene dos supuestos. El primero, es que el finitismo constituye el marco epistemológico del fundacionismo de Hilbert (Stenlund, 2009). El segundo, que el finitismo responde a ciertas condiciones de aplicación confiable para la lógica (Hilbert, 1993). En donde por 'lógica' voy a entender la teoría desarrollada en (Hilbert y Ackermann 1928).[6] La hipótesis que defiendo es que estas condiciones se explican a partir del criterio de objetividad al que da lugar el método de introducción de conceptos aritméticos de Kant (2002) En este capítulo presento propiamente este método. El criterio de objetividad a que da lugar este método establece que son objetivas las matemáticas cuyos conceptos se introducen por *construcción*. A partir de la premisa de que en el método de Kant la construcción de un concepto aritmético depende de la aplicación de la lógica; y que por lo tanto, en este método la construcción de un concepto es garantía de objetividad debido a la aplicación confiable de la lógica, afirmo que en su doctrina finitista, Hilbert asume que hay una teoría matemática que es confiable y cuya confiabilidad depende de la aplicación de la lógica. La conclusión de este capítulo es que las matemáticas finitistas son *la* teoría matemática constructivamente confiable y como

[6] Un ejemplo de los sistemas formales presentados en (Hilbert y Ackermann, 1928) aparece en el Apéndice D.

tal, objetiva según las condiciones fijadas por el estándar de objetividad derivado de la epistemología de las matemáticas de Kant.

2.1. El proyecto fundacionista de Hilbert y la epistemología de las matemáticas de Kant

El objetivo del proyecto fundacionista de Hilbert fue el de justificar a las ‘matemáticas clásicas’. Las ‘matemáticas clásicas’ agrupan a las teorías matemáticas en las que se aplican correctamente los conceptos y principios de la lógica aristotélica, particularmente el principio del tercero excluido. En especial las teorías matemáticas a las que se refería Hilbert como ‘clásicas’ eran la teoría de números, el análisis y la teoría de conjuntos transfinita (Zach, 2006, p. 411).

Actualmente es aceptado que el fundacionismo de Hilbert está influido por la epistemología de las matemáticas de Kant. La pregunta es hasta qué punto.[7] El propio Hilbert (1993) ofrece una explicación de los alcances filosóficos de la versión madura de su proyecto fundacionista. Este texto aporta evidencia para apoyar lo siguiente. Es presumible que Hilbert asumió a partir de la obra de Kant, que las matemáticas que construyen sus conceptos son epistémicamente confiables y que no requieren más justificación que la que proviene de dicha construcción. Estas matemáticas pueden denominarse *constructivas*. Hilbert aceptó también que hay más matemáticas que las que Kant consideró. Por lo que el objetivo de su proyecto fundacionista fue mostrar que las matemáticas *no-construcitivas* son tan confiables como las *constructivas*. Un segundo elemento que Hilbert pudo haber asumido a partir de Kant es la idea de que los objetos de las matemáticas constructivas no son entidades conceptuales sino que son accesibles a través de la *intuición* (Giaquinto, 2002

[7] Para Stenlund el proyecto fundacionista de Hilbert es en su totalidad un intento por introducir a las matemáticas post-kantianas en el marco de la filosofía crítica de Kant (Stenlund, 2009, pp. 485-503).

y Zach, 2006). No obstante, las posturas metafísica y epistemológica respecto de estos objetos permanecen poco claras dentro del fundacionismo de Hilbert. Estudios recientes apuntan a que Hilbert finalmente se centró en el método de introducción de los conceptos de estos objetos como medio para garantizar la existencia objetiva de tales objetos (Sieg 2002 y Zach 2003).

La explicación que tengo de la estrategia utilizada por Hilbert es la siguiente.[8] Parte del fundacionismo de Hilbert consiste en desarrollar un método de introducción de conceptos (Hilbert, 1993, p. 100). Este método está basado en el método de introducción de conceptos aritméticos desarrollado por Kant (2002). El método de Kant delimita una parte de las matemáticas: las *matemáticas constructivas*. Las matemáticas constructivas son aquellas en las que la introducción de sus conceptos da lugar a la exhibición *a priori* de la regla de un proceso de repetición que genera una *secuencia finita* de unidades discretas y uniformes. La secuencia generada por este proceso de repetición tiene un correlato en la constitución formal de un objeto empírico al cual es aplicable el concepto. En el método de Kant la construcción es marca de objetividad por el vínculo que crea entre un concepto y la intuición del objeto al que se aplica dicho concepto.

De acuerdo con la lectura que propongo del proyecto fundacionista de Hilbert, un criterio de objetividad semejante al que utiliza Kant dirige el método de introducción de conceptos que es parte de este proyecto de justificación de las matemáticas clásicas (Hilbert 1993, p. 95). La hipótesis que planteo es que sin cuestionar el vínculo entre concepto construido e intuición y posiblemente aceptándolo tácitamente, este nuevo criterio fija

[8] Mi interpretación tiene su fuente en la discusión de Sieg acerca de la transición que hace Hilbert en su proyecto fundacionista del *objeto finitista* al *proceso finitista* (Sieg, 2009, pp. 469 y ss.).

como marca de objetividad a la sola generación de los procesos asociados a los conceptos construidos.

A favor de esta lectura asumo que el finitismo constituye la base epistemológica del proyecto fundacionista de Hilbert (Stenlund, 2009 y Zach, 2006). Así también he asumido que el finitismo obedece a ciertas condiciones de aplicación confiable para la lógica (Hilbert, 1993, p. 95). La hipótesis que planteo es que estas condiciones se explican a partir del criterio de objetividad al que da lugar el método de introducción de conceptos aritméticos de Kant.[9]

2.2. Condiciones de aplicación para la lógica

El proyecto fundacionista de Hilbert se desarrolla en un marco epistemológico que tiene en su base ciertas condiciones de aplicación para *la* lógica. De acuerdo con estas condiciones, los principios y reglas de la lógica clásica deben aplicarse a objetos no-lógicos, homogéneos y discretos (Hilbert, 1993, p. 95). Las propiedades de estos objetos son únicamente propiedades combinatorias derivadas de las relaciones de concatenación y sucesión entre ellos. De modo que es posible generar un autoconvencimiento inmediato acerca de las propiedades de cualquiera de estos objetos a través de experiencias habituales y comunes y sobre la base de nuestras capacidades cognitivas básicas (1993, p. 95). Metafísicamente, se trata de objetos *concretos* y epistemológicamente, de objetos *intuitivos* (Sieg, 1999 y Zach, 2006). Pero hasta ahora, carecemos de una interpretación consensuada acerca de lo que Hilbert entendió por *objeto concreto* y por *intuición*. Se admite por ejemplo que los objetos concretos son perceptibles sin que la concreción se entienda 'como

[9] Mi argumento está inspirado en la interpretación de Stenlund (2009) del fundacionismo de Hilbert. Stenlund enfatiza el carácter epistemológico de este proyecto. Para Stenlund el objetivo de este proyecto es el de clarificar el infinito en las matemáticas clásicas. Pero nada en mi argumento depende de la conclusión de Stenlund acerca de que Hilbert no cumple dicho objetivo (Stenlund 2009, n. 31 y pp. 489 y 493).

una característica de los objetos físicos espacio-temporales en contraste con los objetos "abstractos"' (Zach 2006, p. 13). Acerca del concepto de intuición, la mayoría de las interpretaciones coinciden en que se trata del concepto kantiano de *intuición sensible*. Aunque no existe acuerdo acerca de si se trata de *intuición pura* o de *intuición empírica*. Más recientemente se ha argumentado que Hilbert no tuvo un único concepto de intuición a lo largo de su obra. Según esta lectura, en el período temprano aparece una noción cercana a la *intuición empírica*; mientras que en el período de la década de 1920 la noción en juego es la de *intuición pura*; posteriormente, en la década de 1930, incluso hay mención de un tercer modo de acceso cognitivo *a priori* al lado de la intuición pura y del entendimiento kantianos, *el modo finito*.[10]

De acuerdo con Hilbert, existe una parte de las matemáticas que cumple con las condiciones de aplicación de la lógica clásica. La caracterización de esta parte de las matemáticas fue la tarea de lo que ahora conocemos como *finitismo*. El finitismo es principalmente una visión acerca del conocimiento matemático.[11] El planteamiento de esta doctrina es que existe *una* parte de las matemáticas que es tan confiable como racionalmente puede pedirse debido a que sus objetos son adecuados para la aplicación de la lógica clásica. El propio Hilbert habla de 'la teoría ordinaria elemental de números' como finita (1993, p. 64). Sin embargo hoy se reconoce la ausencia de criterios claros para identificar debidamente a las matemáticas finitas. La tesis más aceptada es que la *aritmética*

---

[10] Sobre el desarrollo de *los* proyectos fundacionistas de Hilbert y su relación con la transformación de los conceptos de *objeto* e *intuición* (Sieg, 2009); acerca de los diferentes sentidos de intuición (Detlefsen, 2005, pp. 251, 253 y 262; Stenlund, 2009, p. 488; y Zach, 2006, p. 13).

[11] Giaquinto (2002) menciona tres proyectos diferentes que pueden llevar la etiqueta de 'finitismo': semántica finitista, ontología finitista y propiamente, la epistemología finitista (2002, p. 159).

primitivo-recursiva[12] es la teoría que mejor cumple con las demandas finitistas.[13] Pero esta identificación no es definitiva.

El finitismo divide además el lenguaje de las matemáticas en enunciados *reales* (*contentuales*/*concretos/finitistas*) e *ideales*. Los *enunciados reales elementales* constan de secuencias de numerales. En este sentido, el contenido de los enunciados reales elementales es un contenido *concreto* o *contentual* al cual podemos acceder de manera inmediata y cierta. La seguridad epistémica de los enunciados reales elementales proviene, presumiblemente, del hecho de que el manejo de numerales sólo exige reglas para concatenar signos (Giaquinto 2002, p. 156). Ya he mencionado que para Hilbert la aplicación confiable de la *inferencia lógica concreta* la lógica requiere de objetos *dados* inmediatamente en la intuición *e. g.* los numerales (1993, p. 95). Sin embargo ya en el terreno finitista hay enunciados no elementales en los que fracasa la aplicación de principios tan básicos como el principio del tercero excluido.

> Por una parte, encontramos en las matemáticas enunciados finitistas que no contienen sino numerales […] De acuerdo con nuestro enfoque finitista, estos enunciados se presentan como algo inmediatamente intuitivo y comprensible, como algo susceptible de ser negado, que es verdadero o falso, y en relación a lo cual podemos hacer valer sin ninguna clase de restricciones las reglas de la lógica aristotélica. El principio de no contradicción […] y el del "tercero excluido" […]

[12] En el Apéndice A de este documento presento los elementos básicos de esta teoría.

[13] Raatikainen (2003) resume las razones que se han dado a favor de la tesis de que las matemáticas finitistas son 'capturadas' por la aritmética primitivo-recursiva. Pero reconoce que al no haber criterios claros en la obra de Hilbert para hacer esta identificación la cuestión no puede considerarse como decidida (2003, pp. 157-177). Por su parte Zach (2003) argumenta que para identificar a las matemáticas finitistas es indispensable considerar los 'métodos finitistas' admitidos y empleados en la escuela de Hilbert. Tras revisar estos métodos, Zach sugiere que la matemática finitista va más allá de la aritmética primitivo-recursiva.

> son aquí válidos. Así, si digo que este enunciado es falso, esto resulta equivalente a afirmar que su negación es verdadera.
>
> Además de estos enunciados elementales absolutamente no problemáticos, encontramos enunciados finitistas que sí lo son, por ejemplo aquellos que no se pueden descomponer en enunciados más simples. (Hilbert, 1993, p. 102)

Los enunciados finitistas problemáticos a los que Hilbert se refiere en esta cita son enunciados en los que ocurre 'un numeral indeterminado' dentro del alcance de un cuantificador ahora estándar 'no-acotado'. Mientras que para Hilbert los cuantificadores universal y existencial 'acotados' pueden interpretarse finitariamente como abreviaturas de conjunciones y disyunciones respectivamente, los cuantificadores no acotados introducen totalidades infinitas. Cuando esto ocurre 'las leyes lógicas utilizadas por el ser humano desde que éste tiene la capacidad de pensar y que Aristóteles nos ha enseñado no tienen aquí validez' (1993, p.99).

La introducción de enunciados ideales pretende remediar esta situación: 'tenemos que *añadir a los enunciados finitos los enunciados ideales*, conservando de este modo las reglas de la lógica aristotélica en su simplicidad original' (Hilbert, 1993, p. 100, énfasis en el original). Los enunciados ideales no expresan 'afirmaciones finitistas' sino que son 'fórmulas que carecen de todo significado' (Hilbert, 1993, p. 102). Por lo que en contraste con los enunciados reales, los enunciados ideales no expresan un contenido accesible inmediatamente a través de la intuición. Debido a ello, la inferencia concreta no se aplica a los segundos. La tarea fundacionista se concentrará en extender la confiabilidad de la aplicación de la lógica al dominio ideal sin pasar por 'la delimitación explícita de las leyes lógicas que son válidas para la esfera de las proposiciones finitarias' (1993, p. 100).[14] Mi propia tarea es mostrar que la estrategia fundacionista de Hilbert se explica a partir del método de introducción de conceptos aritméticos de Kant.

2.3. Método de introducción de conceptos aritméticos de Kant

Para defender que las condiciones para la aplicación confiable de la lógica que Hilbert utiliza en la introducción de las matemáticas ideales obedecen al criterio de objetividad proveniente del método de introducción de conceptos aritméticos de Kant, a continuación presento este método. A partir de esta exposición defino un concepto de construcción del que obtengo el *criterio constructivo de objetividad para las matemáticas de Kant*.

De acuerdo con Kant (2002),[15] a todo concepto objetivo le corresponde una *forma lógica*, un *esquema* y una *intuición* (B §§298-99). La forma lógica de un concepto es una función que realiza una *síntesis* de representaciones: unifica varias representaciones consideradas como meramente posibles en una sola representación.[16] Esta representación unificada corresponde a una característica o propiedad común de diversas representaciones. Gracias a su forma lógica un concepto es lógicamente posible. La posibilidad lógica de un concepto significa la posibilidad del objeto al que se aplica el concepto. Para tener un concepto como tal y no sólo su posibilidad se requiere además de su forma lógica, de una regla de aplicación. El *esquema* de un concepto es esta regla.

[14] De ahí la dificultad para precisar el significado y el alcance de las condiciones de aplicación para la lógica establecidas por Hilbert y en consecuencia, para identificar a la teoría matemática finitista

[15] En adelante las referencias a (Kant, 2002) aparecen dentro del texto entre paréntesis con la habitual referencia al número de párrafo y a las versiones A o B según sea el caso.

[16] La noción de *forma* en Kant tiene que ver siempre con una 'articulación' de las relaciones por las cuales se nos dan nuestras representaciones y es siempre una aportación de nuestra cognición (A §§55-6, B §§84-5). Es decir, la *forma intuitiva* y la *forma lógica* dependen de las facultades de nuestra cognición y gracias a eso son accesibles *a priori*. La forma lo es siempre de una representación y de acuerdo con Kant, nuestras representaciones o son 'representaciones de relación' o no son representaciones para nosotros (B §§67-8).

En “La estética trascendental” Kant (2002) sostiene que nuestro acceso a los objetos está condicionado por las características de nuestra cognición. El argumento de “La estética trascendental” parte de que nuestras intuiciones sensibles están *estructuradas*[17] bajo cierta *forma*. Esta forma tiene su origen en nuestra representación ‘pura’ (*a priori*) del *espacio* y el *tiempo*. A partir de la premisa acerca de que los objetos sólo nos son dados en la intuición sensible, Kant afirma que los objetos nos son dados sólo a través de un *patrón*[18] de relaciones articulado por las formas del espacio y del tiempo. Razón por la cual, nuestro acceso a la forma espacial y temporal de un objeto es condición indispensable para el conocimiento de este objeto. Puesto que nuestro conocimiento de las formas del espacio y del tiempo es *a priori*, el patrón de un objeto es accesible también *a priori*.

Se sigue de lo anterior que el objeto al que se aplica un concepto sólo es accesible a través de la representación en la intuición del patrón de este objeto (B §298). Lo que quiere decir que el objeto al que se aplica un concepto está constreñido por las formas del espacio y del tiempo. El *esquema* de un concepto es la regla que articula el patrón de un objeto. Una vez dada esta regla, un concepto se constituye como tal *i. e*. es aplicable y en tanto que lo es, es adquiere objetividad (B §299). El esquema de un concepto depende de nuestro acceso a las relaciones temporales y espaciales por las que representamos a los objetos. Debido a que este acceso lo tenemos garantizado *a priori* por nuestra cognición, nuestras propias facultades cognitivas confieren objetividad a nuestros conceptos.

[17] Por *estructura* en el marco de la epistemología de Kant entiendo una combinación de relaciones espaciales o temporales cuya (instrucción de) organización, combinación, articulación, orden o forma está dada por las formas puras de la intuición sensible: el espacio y el tiempo. En adelante uso ‘patrón’ para referirme a esta clase de estructura de carácter *concreto* y accesible a la intuición.
[18] La nota anterior aclara mi uso de ‘patrón’.

2.3.1. Conceptos matemáticos y objetividad

En el marco epistemológico de Kant, la objetividad de los conceptos matemáticos depende de las intuiciones del tiempo y del espacio y tiene en este sentido, la misma fuente que la objetividad de los conceptos sensibles. A continuación ofrezco evidencia para esta afirmación.

Las intuiciones del tiempo y del espacio corresponden respectivamente a los conceptos del tiempo y del espacio (A §§720 y 724). En cuanto tales, el espacio y el tiempo son las formas de la intuición que hacen posible todas nuestras representaciones empíricas. De acuerdo con Kant, las formas de la intuición pueden representarse como *quanta* (A §723). Como *quanta* las formas del espacio y del tiempo se conciben como agregados a través de la sucesiva adición de cada una de sus partes. Nuestra representación de esta clase de agregados es nuestra representación del tiempo y del espacio como *cantidades extensivas* (*quanta extensiva*)[19] (B §203).

Las *cantidades extensivas* pueden ser representadas no directamente como tales sino a través del proceso que las genera. Como las intuiciones del espacio y del tiempo suministran la diversidad de una representación, el proceso en cuestión unifica lo 'homogéneo en la diversidad' (B §§202-3). Las partes que constituyen a las intuiciones del tiempo y del espacio son lo *homogéneo*, la intuición en sí misma, la *diversidad*. Estas partes pueden considerarse como *unidades* de una clase común: puntos del espacio o momentos del tiempo (A §163). La unificación consiste entonces en un proceso por el cual la unidad espacial o temporal se repite sucesivamente hasta generar una totalidad. La representación

[19] De acuerdo con Paton (1936) la terminología utilizada para referir a las instancias de las *cantidades extensivas* (*quanta extensiva*) por medio de '*magnitudes* determinadas' tiende a obscurecer el sentido original del concepto relacionado con la categoría de cantidad (*quantitas*) (Paton 1936, n. 6, p. 126). En lo sucesivo, me apego a la terminología de Paton: en lugar de términos de 'magnitud' utilizo terminología de 'cantidad'.

resultante es la de un espacio o un tiempo determinados: una extensión espacial propiamente o una duración temporal (A §724).

De esta manera las *cantidades extensivas* pueden representarse o bien a partir de su cualidad (*qualitat*) o bien, de su cantidad (*quantitas*) (A §720). Desde la cualidad nos referimos a una limitación del espacio: la *figura* de una representación. Desde la cantidad nos referimos a la división del tiempo: la *cantidad* de la representación propiamente (*quantitas*). La *figura* y la *cantidad* son conceptos matemáticos (A §724). La figura es un concepto geométrico y la cantidad es un concepto aritmético. Puesto que la figura y la cantidad se conforman a partir de nuestras representaciones del tiempo y del espacio, ambas son 'propiedades formales' de los objetos y pertenecen a las condiciones que hacen posible la representación de éstos. En tanto que los objetos nos son dados en la intuición y que ésta tiene la forma del tiempo y del espacio, todos los objetos pueden representarse como agregados de partes previamente dadas (B §204), en los términos de Kant, como instancias de *quanta extensiva*: *quantum* (B §§202-204). Un *quantum* es una figura o una cantidad limitada que resulta de la adición sucesiva de unidades espaciales o temporales respectivamente. La intuición *a priori* de la figura o de la cantidad de los objetos es antecedente y condición para la intuición empírica éstos. En esta medida, los conceptos matemáticos se aplican a los objetos que se nos dan a través de la forma del tiempo y del espacio y por tanto, a todos y solos los objetos de la experiencia (Shabel, 2006, p. 117).

El proceso que da lugar a un *quantum* es el de una *síntesis de lo diverso* (*en el tiempo y en el espacio*). Esta síntesis es realizada por la forma lógica de los conceptos de tiempo y de espacio en general y así también, por la forma lógica de cualquier concepto sensible en particular. Por lo que el proceso de síntesis de lo diverso que genera un *quantum* determinado puede realizarse *a priori* y el *quantum* resultante exhibirse asimismo de manera *a priori*. Un concepto es construible si es posible presentar *a priori* la intuición que le corresponde (B §741). La intuición que le corresponde a un concepto matemático es la intuición del tiempo o del espacio sólo que limitadas respectivamente, a cierta cantidad o extensión determinada: un *quantum*. En la medida de que los conceptos matemáticos son construibles son aplicables a objetos empíricos. Por lo tanto, los conceptos matemáticos tienen la misma objetividad de los conceptos sensibles.

2.3.2. Construcción de conceptos aritméticos

La posición de Kant acerca de la aritmética es que los conceptos aritméticos son *construibles*. Por medio de su construcción, a través de un concepto aritmético es generada la intuición de una cantidad determinada o duración temporal. Una cantidad determinada no es un objeto, sino una propiedad de un objeto gracias a la cual es posible que éste sea tal para nosotros. Siendo así que los objetos nos son dados con propiedades aritméticas o no son objetos para nosotros. En otras palabras, cualquier objeto de una experiencia posible es ya un objeto al que puede aplicarse un concepto aritmético (B §299). En este sentido, la construcción de un concepto determina la aplicabilidad de este concepto y por tanto, la objetividad del mismo.

La forma lógica de un concepto aritmético es la regla de un proceso finito y repetitivo de adición de unidades (B §300). Este proceso genera una secuencia finita de unidades sucesivas. Para Kant, la secuencia generada por este proceso de repetición tiene un correlato en la constitución formal de los objetos empíricos (B §§299-300). A partir de esta secuencia, el esquema del concepto opera como instrucción para producir la intuición que le corresponde (B §180). Debido a que por este proceso repetitivo de adición de unidades ‘generamos el tiempo’ (A §143), la intuición correspondiente con una secuencia limitada de unidades sucesivas es una intuición limitada de tiempo: una cantidad determinada. El esquema de esta cantidad no es sino la regla de un proceso finito de adición de unidades. Por lo que en el caso de los conceptos aritméticos su esquema 'coincide' con su forma lógica. Se sigue que la forma lógica de un concepto aritmético no es sólo la condición formal del objeto al cual se aplica un concepto, sino que es además su condición sensible. La construcción de un concepto aritmético es posible entonces solo a partir de la forma lógica del concepto (Shabel, 2006, pp. 111-12).

Un concepto es objetivo si es aplicable. La objetividad de los conceptos aritméticos depende entonces de su forma lógica en tanto que ésta determina su construcción. Para Kant esto es así porque la forma lógica de los conceptos aritméticos depende del concepto de tiempo: la forma lógica de un concepto aritmético puede generar la intuición de una secuencia limitada de unidades discretas sólo porque tenemos la intuición del tiempo como una secuencia ilimitada de unidades temporales (B §§202-3). Sin nuestra intuición original del tiempo no generaríamos la forma lógica de los conceptos aritméticos. Esta forma limita la intuición original del tiempo. Para ello, dicha forma proporciona la regla de un procedimiento que reproduce el proceso por el cual generamos el tiempo, sólo que esta vez el proceso termina (B §48, A §163).

En suma, el método de introducción de conceptos aritméticos de Kant estipula que estos conceptos se introducen por construcción. La construcción de un concepto aritmético consiste en generar, a partir de la regla de un proceso finito y repetitivo de adición de unidades, la intuición de una secuencia finita de unidades sucesivas. Esta regla está determinada por la forma lógica de los conceptos aritméticos. La intuición generada por esta regla es parte de las condiciones que hacen posible la representación de un objeto de la experiencia al cual es aplicable el concepto construido. La aplicabilidad de un concepto aritmético depende entonces de su construcción. Dado que un concepto objetivo es un concepto aplicable, un concepto construido es objetivo. El criterio de objetividad a que da lugar el método de introducción de conceptos aritméticos de Kant establece que son objetivas las matemáticas que construyen sus conceptos.

La forma lógica como tal depende de 'las leyes del entendimiento' las cuales son para Kant, las 'leyes' de la lógica aristotélica. Por tanto, la construcción de un concepto depende de la aplicación de estas 'leyes'. De esta manera es delimitado un marco en el que la introducción de conceptos por construcción es garantía de objetividad en virtud de la aplicación correcta de la lógica aristotélica. El método de introducción de conceptos aritméticos de Kant tiene así ciertas consecuencias para la aplicación de la lógica que explican el finitismo. Mi hipótesis es que Hilbert asume a partir de este método que hay una teoría matemática epistémicamente confiable cuya confiabilidad depende de la construcción de sus conceptos. Las matemáticas finitistas son *la* teoría matemática constructivamente confiable. El resto de las matemáticas, clásicas y no constructivas *viz*. las *matemáticas ideales* requieren justificación. El método de introducción de conceptos desarrollado por Hilbert tiene el propósito de dar esta justificación.

Capítulo 3. El método de introducción de conceptos de Hilbert

Con base en el capítulo anterior, concluyo que los métodos constructivos introducen conceptos aplicables a los objetos del dominio de la aritmética demarcado por la epistemología de las matemáticas de Kant. Los métodos constructivos cuentan por eso con el respaldo de la existencia objetiva de los objetos de este dominio. El criterio de objetividad elaborado sobre este resultado establece que la confiabilidad de una teoría matemática depende de la aplicación de metodología constructiva para la introducción de conceptos. La interpretación que sigo en este capítulo atribuye al fundacionismo de Hilbert el planteamiento de que el dominio finitista está conformado por los objetos a los que se aplican los conceptos obtenidos por construcción. De acuerdo con Zach (2003) los métodos de introducción de conceptos finitistas son recursivos. De donde resulta plausible sugerir que en las matemáticas finitistas la confiabilidad asociada con la construcción es recuperada por la recursión.

Sobre este resultado, sugiero que en el enunciado de que la aplicación de la lógica es confiable al *generar* la *estructura conceptual finitista* se encuentra una de las motivaciones básicas del proyecto fundacionista de Hilbert. Luego de exponer mis razones para sustentar el *enunciado de confiabilidad* anterior, con base en (Raatikainen, 2003) sugiero que el objetivo de este proyecto puede formularse en el *enunciado fundacionista* de que un sistema de axiomas 'caracteriza' un dominio de objetos cuya existencia es objetiva si este sistema es una extensión deductivamente conservativa de las matemáticas finitistas (2003, p. 161 y ss.)

La estrategia que sigo para presentar lo anterior pasa por la reformulación del criterio constructivo de objetividad de Kant. En esta reelaboración el criterio establece que hay construcción de conceptos y por tanto, garantía de la existencia objetiva de los objetos matemáticos, si y sólo si el sistema de axiomas finitista es consistente. A partir de esta reformulación replanteo el enunciado de confiabilidad diciendo que la aplicación de la lógica es y se mantiene confiable siempre y cuando el sistema de axiomas finitista sea consistente. Aquí, sigo a Zach (2003) en su planteamiento de que el proyecto fundacionista de Hilbert programó la introducción escalonada de las teorías matemáticas empezando por la parte finitista hasta la ideal. Llegados a este punto, adquiere sentido el enunciado de que la justificación de una extensión ideal de las matemáticas finitistas requiere que los sistemas ideales de axiomas no sólo sean consistentes, sino que preserven la consistencia del sistema finitista (Hilbert, 1993, 106). Ambas condiciones son integradas en la noción de *consistencia-real* introducida en (Raatikainen, 2003). Por último, la descripción que el propio Hilbert hace del método de justificación de una teoría ideal (Hilbert, 1993, 107), supone que una teoría real-consistente es una extensión deductivamente conservativa de las matemáticas finitistas (Raatikeinen, 2003, pp. 163-163)

Finalmente, concluyo que la prueba de la consistencia-real de una teoría matemática ideal introduce una tensión sobre la noción de *estructura* de Hilbert. La tensión se encuentra entre la posibilidad de que una teoría ideal sea, legítimamente, una extensión de las matemáticas finitistas y la posibilidad de que esta teoría ideal esté justificada. En el capítulo cuatro presento la propuesta de Hilbert para resolver esta tensión. Esta propuesta se basa en la *formalización* y en el enfoque metateórico de la *Teoría de la Demostración*.

3.1. De Kant a Hilbert: Construcción sin intuición de objetos

De la exposición del método de Kant se extrae que la construcción de los conceptos de la aritmética depende de la forma lógica[20] de tales conceptos. Esta última a su vez depende de la intuición del tiempo.[21] Aquí planteo que en el método desarrollado por Hilbert dicha dependencia va a ser absorbida por un nuevo mecanismo. En lugar de que la construcción de un concepto finitista requiera de la intuición del tiempo, en el método de Hilbert basta con 'la regla' de un procedimiento que genera una secuencia finita de ciertas unidades para tener construcción y en tal medida, para garantizar la objetividad del concepto. El pronunciamiento al respecto de que la secuencia así generada es una propiedad de un objeto de una experiencia posible no es una cuestión secundaria o que pueda hacerse sin mayor argumento. Simplemente, en el método de introducción de conceptos de Hilbert la construcción de un concepto no requiere pronunciarse el respecto.

Sin embargo, la objetividad de las matemáticas constructivas en el método de Kant radica justo en la aplicabilidad de sus conceptos a objetos de una experiencia posible. En el método de Hilbert en cambio, el pronunciamiento acerca del vínculo entre construcción y aplicabilidad a objetos empíricos está ausente. En tanto que se retrase la respuesta a la pregunta acerca de si las secuencias obtenidas por medio de los conceptos finitistas son el patrón del tiempo, por ejemplo, Hilbert está obligado a reformular el vínculo entre construcción y objetividad. La respuesta de Hilbert, según leo, obedece a un razonamiento como el siguiente.

---

[20] Acerca de la noción de forma lógica de Kant remito al lector a la nota no. 16 de este documento.

[21] La forma lógica de los conceptos aritméticos depende de la intuición pura del tiempo en última instancia. Pero sólo en la medida de que tales intuiciones son pensadas podemos transitar de la intuición al razonamiento matemático. En tanto que objeto del pensamiento, las intuiciones son conceptualizadas. La intuición del tiempo como objeto da lugar al concepto del tiempo. Este concepto, como todos los conceptos, tiene una forma lógica. La forma lógica del concepto de tiempo depende sí de la intuición, pura en este caso *i. e. a priori*, pero también del entendimiento *i. e.* de reglas y principios 'lógicos' también dados *a priori* (Kant, 2002, A 33 y §26; B 160-161).

Del modelo de Kant se sigue que la construcción de los conceptos aritméticos depende de la aplicación de la lógica. Por lo que si la lógica se aplica como se aplica en la construcción de estos conceptos aritméticos, la lógica debería dar lugar a la misma objetividad. Al extraer las condiciones para la aplicación de la lógica del contexto de las matemáticas constructivas, trasladamos la base de la objetividad de la construcción situada originalmente en la intuición a las condiciones de aplicación para la lógica. Estas condiciones enmarcan el finitismo. El finitismo es por su parte la base epistemológica del método de introducción de conceptos del fundacionismo de Hilbert.

En apoyo de esta interpretación, retomo la afirmación de Hilbert acerca de que la *inferencia lógica concreta* goza de la mayor confiabilidad (Hilbert, 1993, p. 95). También, su reconocimiento de que Kant ha establecido las condiciones necesarias para la aplicación de este *modo* de inferencia (1993, p.95). Así como su explicación de la doctrina finitista y de la división entre matemáticas finitistas e ideales bajo el argumento de preservar la confiabilidad de la lógica fuera del dominio constructivo (1993, p. 100). Para Kant dicha aplicación da lugar a la representación de un objeto del dominio finitista a través del proceso que genera el patrón de este objeto (*vi*. sección 2.3.1). La hipótesis que defiendo es que para Hilbert, la objetividad constructiva de la *inferencia concreta* se obtiene al generar no el patrón de los objetos finitistas, sino al recuperar el 'patrón' de los procesos constructivos. Si los procesos mismos o las secuencias generadas a partir de éstos sirven para representar 'algo' es una cuestión independiente de las matemáticas finitistas.

De acuerdo con esta lectura, el método de introducción de conceptos de Hilbert pretende conservar las ventajas epistemológicas del modelo de Kant, pero de una manera que evita hacer un pronunciamiento metafísico explícito. Siguiendo a Kant, la propuesta de Hilbert es que una teoría matemática confiable es aquella en la que sus conceptos se introducen por construcción. Las *matemáticas finitistas* responden a este criterio de objetividad.

3.2. Condiciones para la aplicación de la lógica (Revisitadas)

En el método de introducción de conceptos aritméticos de Kant se entiende que la construcción de un concepto genera cierta clase de relaciones, a saber, aquellas por las cuales representamos un objeto de la aritmética. Los conceptos aritméticos son conceptos construidos. La construcción es un proceso repetitivo de adición de unidades discretas y uniformes. Este proceso genera (la intuición de) una secuencia finita de estas unidades. Esta secuencia es el *patrón* de un objeto accesible a través de la intuición empírica al cual es aplicable el concepto construido. Un objeto de una experiencia posible es accesible a nosotros sólo vía la intuición y a través de la 'forma pura' de ésta. Esta forma es siempre susceptible de pensarse *a priori* bajo un patrón como el anterior. Por lo que dentro de la epistemología de las matemáticas de Kant, cualquier objeto de una experiencia posible es un objeto al que puede aplicarse un concepto aritmético; y paralelamente, todo concepto construido es aplicable a un objeto de una experiencia posible. En virtud de esto último, los conceptos aritméticos son objetivos. De esta noción de construcción es posible obtener un criterio de objetividad. Este criterio establece que la confiabilidad de una teoría matemática depende de la aplicación de metodología constructiva para la introducción de conceptos. Este criterio cuestiona la objetividad de las matemáticas no-constructivas. Para mantener el criterio constructivo de objetividad y las matemáticas no-constructivas, debe defenderse que incluso aunque las segundas no se reducen a las matemáticas constructivas (Hilbert, 1993, p. 96), son tan objetivas como éstas.

Desde la lectura que propongo, la estrategia de Hilbert para justificar las matemáticas ideales utiliza los métodos constructivos como marca de objetividad. La aplicación de metodología constructiva, pretendidamente, da lugar a conceptos que logran hacer una caracterización completa de las propiedades de los objetos de la aritmética enmarcada por la epistemología de las matemáticas de Kant. Estos métodos están así respaldados por la existencia objetiva de los objetos a las cuales son aplicables los conceptos generados a través de ellos. Presumiblemente, los métodos de introducción y de formación de conceptos de las matemáticas finitistas responden a esta delimitación.

Una consecuencia del método de introducción de conceptos de Kant es que si la construcción es garantía de la objetividad de un concepto ello sólo se debe a la aplicación correcta de la lógica. Este resultado puede generalizarse afirmando que los métodos de introducción de conceptos de las matemáticas finitistas son altamente confiables debido a la aplicación correcta de la lógica. Según mi exposición, una de las motivaciones centrales del desarrollo programático del fundacionismo de Hilbert se encuentra en el objetivo de mantener inamovible esta confiabilidad a través de las extensiones ideales.

Para apoyar mi lectura en el siguiente apartado presento el método de introducción de conceptos adoptado por Hilbert. A continuación, expongo cómo en este método es trasladado el criterio constructivo de objetividad original de Kant.

3.2.1. El método de introducción de conceptos de Kant y el método de introducción de conceptos de Hilbert

De acuerdo con Kant, las representaciones a partir de las cuales generamos nuestro conocimiento son únicamente 'representaciones de relación'. Esto quiere decir que todo el conocimiento que podemos tener de un objeto es de sus relaciones con otros objetos y con el sujeto mismo (Kant 2002, B67-68). Entre éstas, destacan las relaciones características del patrón de un objeto, las cuales describen el *patrón* de un proceso cognitivo elemental. El método de introducción de conceptos aritméticos de Kant ofrece un modelo para caracterizar al dominio de la aritmética a partir de las relaciones que caracterizan al patrón de los objetos que lo conforman.

De acuerdo con este método, un concepto aritmético produce (a través de su forma) la intuición de un *proceso finito de adición de unidades basado en la repetición*: un 'proceso finito de contar' (Shabel, 2006, p. 112). Este proceso genera el patrón de relaciones por medio del cual representamos al objeto al que es aplicable dicho concepto. Este patrón de relaciones es característico del objeto representado. La construcción de este patrón obedece a una regla. Esta regla está dada por la forma lógica del concepto en cuestión. El método de introducción de conceptos aritméticos de Kant nos enseña que la caracterización más general y completa que podemos hacer de un objeto es por medio de una regla que recrea las relaciones a través de las cuales representamos este objeto.

Hilbert por su parte propuso desarrollar un modelo matemático de las relaciones entre los objetos de las matemáticas finitistas a partir de los *axiomas* que generan las relaciones entre los conceptos finitistas (Hilbert y Bernays 1968, p. 2).[22] Ambos, los axiomas finitistas y las relaciones inferidas a partir de ellos, tienen la característica de que podemos, en principio, someterlos a un examen *intuitivo* y convencernos de aceptarlos o no (1968, p.2). Presumiblemente, este examen sólo pone en juego nuestra capacidad de combinar unidades discretas. Desde la lectura que propongo la construcción, en los términos especificados dentro de la epistemología de las matemáticas de Kant, es

[22] En la lectura de esta obra me he ayudado del proyecto de traducción *Hilbert Bernays Project* cuyos resultados preliminares están a disposición del público en: http://www.ags.uni-sb.de/~cp/p/hilbertbernays/demobilingual.pdf.

introducida como estándar de objetividad del conocimiento matemático a través de las matemáticas finitistas. En ellas, la formación de conceptos se restringe a *procesos recursivos* (Zach 2003).[23] Estos procesos son admitidos en el entendido de que se trata de procesos que son en principio realizables dadas las capacidades cognitivas del ser humano (Hilbert y Bernays, 1968, p. 32). La explicación que doy de esta delimitación de las matemáticas finitistas supone que los procesos recursivos 'capturan' a los procesos constructivos. Una vez supuesto lo anterior, la delimitación de las matemáticas finitistas se explica por la aceptación de que la realización de un proceso constructivo es una condición para la intuición de un objeto de una experiencia posible. Este objeto es uno cuyas propiedades son inmediatamente accesibles para nosotros dadas las características de nuestra cognición. Lo anterior no requiere afirmar que a través de la realización de un proceso recursivo generamos *a priori* o de otra manera la intuición de una secuencia finita de unidades temporales discretas y uniformes. Lo que la teoría rescata de dicha intuición es nuestra capacidad de captar la regla para realizar cierta clase de computaciones dado cierto numeral, un par de numerales, una triada de ellos, etc. Así como la intuición de que al final de estas computaciones vamos a obtener cierto numeral determinado. Es esta capacidad la que entra en juego al aceptar que en principio, podemos llevar a cabo un proceso recursivo y que de éste, podemos obtener la evidencia para aceptar o no un enunciado finitista. Puesto que de acuerdo con la epistemología de Kant, los conceptos acerca de secuencias de esta clase son objetivos, el conocimiento matemático obtenido por medio de métodos recursivos es objetivo.

---

[23] La opinión generalizada es que los métodos recursivos de las matemáticas finitistas no van más allá de la recursividad primitiva en donde las funciones se definen de N^m a N^k con m y k que pertenecen a N. Sin embargo, Zach (2003) sugiere revisar esta demarcación a la luz de la metodología empleada por Ackermann (1924).

Hilbert desarrolló la propuesta epistemológica finitista a partir de una nueva aproximación al método axiomático. Mediante este paso, la investigación fundacionista de Hilbert conjuntó un método de introducción de conceptos —cuyo fondo y significado epistémico se encuentra en el método de introducción de conceptos aritméticos de Kant, con cierta concepción de los sistemas axiomáticos.[24] El éxito de este proyecto estuvo ligado así al servicio que los sistemas de axiomas pudieran prestar al cumplimiento de las demandas epistémicas de Kant. Antes de proseguir con la propuesta fundacionista de Hilbert y su relación con la epistemología de las matemáticas de Kant, presento algunos aspectos del método axiomático que son relevantes a esta discusión. Después de lo cual paso al examen del papel de este método en la implementación de la base epistémica del proyecto fundacionista de Hilbert.

3.2.2. Método de Hilbert de introducción de conceptos *via* estructuras conceptuales

En *Los Fundamentos de la Geometría* Hilbert (1899) presentó a los axiomas como enunciados que conciernen sólo a las relaciones entre los conceptos de una teoría (Mancosu *et al*. en prensa). Más adelante en *Los Fundamentos de las Matemáticas*, Hilbert y Bernays (1968) concibieron al lado de la axiomática finita a la *axiomática formal* como una

[24] Es conveniente mencionar al respecto la opinión más extendida acerca del proyecto fundacionista de Hilbert. El proyecto fracasó. Y su fracaso fue plenamente demostrado por los *teoremas de incompleción* de Gödel (1931). Sin embargo, este no es un trabajo en favor o en contra de una tesis fundacionista. Este trabajo concierne a la noción de forma lógica. Aquí sostengo que el significado mínimo de esta noción aceptado en el proyecto lógico de la forma lógica, mantiene vigente aspectos importantes introducidos por la noción de formalidad desarrollada a partir del proyecto fundacionista de Hilbert. Como señalaré al final, estos aspectos motivan a la vez que conducen el proyecto semántico de la forma lógica. Los resultados de incompleción demostrados por Gödel (1931) son relevantes para el tema de este documento si a raíz de éstos se sigue que la noción de formalidad de Hilbert no responde adecuadamente al estándar de objetividad constructivo o en su caso, si este estándar es desestimado a partir de tales resultados.

idealización matemática no de ciertos objetos dados, sino de la *estructura conceptual*[25] de una teoría. Esta idealización consiste en 'caracterizar' el dominio de la teoría en consideración a través de su *estructura*.[26] La 'caracterización' del dominio de una teoría a través de su estructura tiene dos pasos: el primero es la definición implícita de las relaciones básicas entre los elementos de la teoría a través de los axiomas; el segundo es la prueba de consistencia (1968, pp. 7 y ss.).

Las relaciones en la estructura conceptual de una teoría son entonces definidas implícita y totalmente por un sistema de axiomas. De esta manera se pretende que la estructura conceptual de una teoría modele las relaciones básicas entre los *objetos* del dominio en consideración y entre *objetos* de dominios con el mismo número de objetos (Hilbert y Bernays, 1968, p. 9). La idea de que los axiomas definen implícitamente las relaciones básicas entre los conceptos de una teoría de manera que el dominio de ésta queda caracterizado a partir de tales axiomas, es la idea detrás de la afirmación de que un sistema de axiomas define o caracteriza la estructura conceptual de una teoría.

En resumen, con base en el método de Kant como modelo y junto con la concepción de los sistemas de axiomas como enunciados que conciernen sólo a las relaciones entre los conceptos de una teoría, los sistemas de axiomas pueden verse como sistemas de reglas que generan la *estructura conceptual* de una teoría. En este papel, los sistemas de axiomas funcionan como el esquema de una teoría a partir del cual se realizan los procesos que

[25] La *estructura conceptual* de una teoría se entiende como un sistema integrado por los principios de la teoría y sus 'modos de inferencia' o métodos para la formación de sus conceptos (Hilbert y Bernays, 1968, pp. 16-7).

[26] La interpretación de que esta concepción de los sistemas axiomáticos hace de la obra de la escuela de Hilbert un trabajo precursor del *estructuralismo matemático* en la tradición iniciada por Shapiro ha sido sostenida en diversas ocasiones (como ejemplos menciono a Parsons 1990, Sieg 2002, Shapiro 2009). Sin embargo, sin negar la influencia que la obra de la escuela de Hilbert pueda tener en la tradición estructuralista iniciada por Shapiro, en este trabajo no necesito comprometerme con la afirmación de que la noción de estructura empleada por Hilbert es ya la noción del estructuralismo matemático o precursora de ésta.

generan las relaciones conceptuales de la teoría en turno. Un proceso realizado a partir de un sistema de axiomas y que genera la estructura conceptual de una teoría es una *demostración*/*derivación* en este sistema (Hilbert y Ackermann, 1928 y Hilbert y Bernays, 1968, p. 16). Decimos entonces que el esquema de una teoría es un sistema de reglas del que proceden las demostraciones que dan lugar a la estructura conceptual de esta teoría. Si suponemos que la estructura conceptual de una teoría describe completamente las propiedades de los elementos del dominio de esta teoría, este dominio es caracterizado a partir del esquema de dicha teoría.

3.2.3. Reinvención del criterio constructivo de Kant como criterio de objetividad para sistemas de axiomas

Del método de introducción de conceptos de Kant se sigue que donde hay construcción hay conceptos objetivos como resultado de la aplicación correcta de la lógica. Frente a este resultado, planteo que el fundacionismo de Hilbert recupera los métodos constructivos a través de métodos recursivos. El supuesto que acompaña al fundacionismo según esta lectura es que donde hay aplicación de estos métodos es generada la estructura conceptual de las matemáticas finitas. Por lo que de la premisa de que la construcción de un concepto es garantía de objetividad debido a la aplicación correcta de la lógica; así como de la premisa de que es posible caracterizar al dominio finitista a partir del sistema de axiomas que genera la estructura conceptual finitista, sugiero que el método de introducción de conceptos finitistas de Hilbert está dirigido por el supuesto de que al generar la estructura conceptual de las matemáticas finitistas hay aplicación restringida y confiable de la lógica.

En la concepción temprana de Hilbert acerca de los sistemas de axiomas, la consistencia de estos sistemas había recibido el mayor interés por su papel en la justificación de una teoría matemática. En su concepción madura, hemos visto que la consistencia de un sistema de axiomas es parte de las condiciones para generar la estructura de una teoría. Estos antecedentes hacen plausible suponer que en su investigación fundacionista Hilbert se atuviera a la posición de que un sistema de axiomas es epistémicamente confiable si es consistente. En esta etapa también Hilbert concibe la consistencia de las matemáticas no finitistas como una propiedad de los sistemas axiomáticos definida en términos de la noción de *demostrabilidad*/*derivabilidad* (Hilbert, 1993, pp. 106-107) De acuerdo con esta noción, un sistema de axiomas es consistente si y sólo si el sistema no *demuestra* una oración y la negación de esta oración. Para sostener la afirmación de que la aplicación de la lógica es confiable en el dominio finitista debe ser cierto que el sistema de axiomas finitista es consistente.[27] Por la aplicación restringida y confiable de la lógica se entiende entonces que el sistema de axiomas de las matemáticas finitistas es consistente. A partir de esta última afirmación, es posible reformular el criterio constructivo de objetividad diciendo que hay construcción de conceptos y por tanto, garantía de la existencia objetiva de los objetos matemáticos, si y sólo si el sistema de axiomas finitista es consistente. Este enunciado conduce a nueva reformulación del *enunciado de confiabilidad*, según la cual, la aplicación de la lógica es confiable si y sólo si el sistema finitista es consistente. Por último, a partir del enunciado de confiabilidad y por el criterio constructivo de objetividad, se sigue, el *enunciado fundacionista*, a saber, que un sistema de axiomas caracteriza un dominio de objetos cuya existencia es objetiva si el sistema es consistente y consistente *respecto al*

[27]De acuerdo con Zach (2003) La versión axiomatizada de la aritmética primitiva recursiva de segundo orden presentada por Ackermann (1924) representa la versión de la metodología finitista sancionada por Hilbert. Este sistema comprende además de la aritmética primitivo-recursiva, un esquema de definición para las funciones recursivas de primero y segundo orden así como los llamados 'axiomas transfinitos'. Estos últimos regulan el uso de los cuantificadores universal y existencial de acuerdo con el análisis de la cuantificación ofrecido por Hilbert y Bernays a partir del ε-operador (Zach 2003, pp.223-224 y Apéndice B en este documento).

sistema finitista. Desde la lectura que defiendo, el objetivo del fundacionismo de Hilbert está formulado en el enunciado anterior.

3.2.4. Estrategia de justificación de las matemáticas ideales

De la sección presente se desprende que si hay un sistema de axiomas epistémicamente confiable este debiera ser el sistema finitista. El criterio de objetividad operante detrás de esta afirmación es uno por el cual la objetividad depende de la construcción de conceptos y ésta significa generar la estructura conceptual finitista a partir de un grupo de axiomas consistente. Bajo este criterio, el método de introducción de conceptos de Hilbert respondió a la demanda de legitimar a las matemáticas ideales como extensiones de las matemáticas finitas: ‘La extensión por medio de ideales es lícita y permisible solamente cuando con ello no se provoca el surgimiento de contradicciones en el dominio original.’ (Hilbert, 1993, p. 106). La estrategia adoptada por Hilbert consistió en legitimar a los ‘métodos ideales’ de introducción de conceptos (‘modos de razonamiento/inferencia’) bajo una única condición: ‘Existe una condición única, aunque absolutamente necesaria, para la aplicación del método de los elementos ideales, a saber, la prueba de consistencia.’ (Hilbert, 1993, p. 106).

Si la prueba de consistencia de los sistemas axiomáticos ideales va a servir para legitimar a los métodos ideales, la prueba debe ajustarse con el fin de probar que la extensión ideal en juego no genera contradicciones en la parte finitista de las matemáticas. El ajuste requerido debe permitir mostrar que una extensión ideal consistente es consistente también al respecto de la estructura conceptual finitista. La prueba de consistencia de una teoría matemática ideal debe por tanto mostrar que el sistema de axiomas ideal en turno es *real-consistente* (Raatikainen 2003, p. 162). Esto significa que el sistema ideal no puede demostrar ningún enunciado que contradice a un enunciado demostrable en las matemáticas finitistas. Una consecuencia esperada de la prueba de consistencia de las matemáticas ideales requerida era que ésta implicara que las matemáticas ideales son una extensión deductivamente conservativa de las matemáticas finitistas.[28]

La justificación de las matemáticas ideales por medio de la demostración de su consistencia-real crea una tensión entre la posibilidad de que una teoría ideal sea realmente una extensión de las matemáticas finitistas y la posibilidad de que esta teoría ideal esté justificada. Para disolver la tensión Hilbert establece que

> La extensión por medio de la adición de ideales es lícita y permisible solamente cuando con ello no se provoca el surgimiento de contradicciones en el dominio original, y en consecuencia, únicamente si al suprimir los elementos ideales, las relaciones que resultan para los elementos originales son válidas en la esfera original (1993, p. 106).

La situación que Hilbert nos presenta es una en la que pareciera que la demostración de la consistencia-real de una teoría ideal, como extensión de las matemáticas finitas, requiere un método de eliminación de los elementos ideales de la teoría que permita a la vez preservar la teoría ideal. En otras palabras, esta demostración pide *suprimir* de la estructura de una teoría ideal su parte ideal y pide también *no reducir* esta estructura a la estructura de las matemáticas finitistas. En el capítulo siguiente argumento que esta tensión sobre la noción de estructura impuesta por la demostración de la consistencia-real de una teoría ideal la resuelve Hilbert mediante la formalización y el enfoque metateórico introducido por la teoría de la demostración.

---

[28] En el 'Programa de Hilbert' la afirmación de que la demostración de la consistencia-real de las matemáticas ideales requiere mostrar que no hay una oración real cuya negación sea demostrable en el sistema ideal supone la consistencia de las matemáticas finitistas y que éstas son *real-completas* es decir, que el sistema de axiomas finitista demuestra todas y solas las oraciones reales verdaderas (Raatikainen 2003, p. 168).

Capítulo 4. El proyecto de formalización

La formalización de una teoría matemática axiomatizada es el método de introducción de conceptos dentro del fundacionismo de Hilbert. El objetivo de la formalización es convertir el problema de la justificación de una teoría matemática ideal en un problema de las matemáticas finitistas. En el marco del proyecto de Hilbert, la formalización debía cumplir dos condiciones para alcanzar este objetivo. Muy pronto Gödel (1986) se dio a la tarea de cumplir *a pie juntillas* estas condiciones para demostrar que aun así, la formalización no puede lograr su objetivo. Considerando, sin embargo, que las nociones de formalidad y de forma de Hilbert surgen del cumplimiento de tales condiciones, aquí aproximo este trabajo. Mi propósito es mostrar que la noción de formalidad y a partir de ésta, la noción de forma, responden al criterio constructivo de objetividad originado a partir del método de introducción de conceptos aritméticos de Kant.

Las condiciones que cumple la formalización de una teoría axiomatizada son dos. Primero, la formalización genera un modelo matemático de la estructura conceptual de la teoría original. Segundo, la formalización genera objetos del dominio finitista. A partir de la definición recursiva de un cálculo lógico y bajo el supuesto de que los procesos recursivos generan objetos finitistas, la formalización de una teoría matemática X genera un sistema formal de axiomas a partir del cual es deducida una *estructura formal* que idealmente es el equivalente lógico de la estructura conceptual de X. Además, la formalización de X produce el *patrón-sintáctico canónico* del sistema formal de X tal que, desde una perspectiva *metateórica*, el patrón-sintáctico de una teoría X es caracterizable por el sistema formal finitista.

Por lo dicho en el capítulo 3, una teoría ideal real-consistente es una extensión deductivamente conservativa de las matemáticas finitistas. Por lo que, desde una perspectiva metateórica del sistema formal de X, la consistencia-real de X significa que en este patrón no hay ni puede haber un objeto que cumpla con la propiedad de ser la fórmula final de una demostración y cuyo patrón-sintáctico es (el que corresponde en los símbolos del sistema con la expresión) '$1 \neq 1$' (Hilbert, 1993, p. 107) La explicación del paso que hay entre la prueba de la consistencia-real de una teoría ideal X a la conclusión de que X es epistémicamente confiable, es que X cumple con el criterio constructivo de objetividad para las matemáticas de Hilbert. El criterio establece que la garantía epistémica que podemos tener acerca de la existencia objetiva de los objetos matemáticos depende de que el sistema de axiomas finitista permanezca consistente a través de cualquier extensión ideal consistente.

4.1. Base del aparato técnico de Hilbert para el proyecto de formalización

La justificación de las matemáticas ideales requiere un método de introducción de conceptos capaz de generar la estructura conceptual de una teoría matemática ideal. La propuesta de Hilbert fue crear un *sistema de símbolos* capaz de reproducir entre sus elementos sólo relaciones caracterizables en la estructura conceptual finitista *viz.* secuencias finitas de unidades discretas y uniformes. El propósito de este sistema fue el de 'transformar' una teoría axiomatizada dada a través de su lenguaje. Este proceso de 'transformación' no es sino la *formalización* de una teoría axiomatizada.

El empleo de un *cálculo lógico* como un lenguaje para 'traducir' una teoría matemática por medio de un simbolismo apropiado para 'seguir' rigurosamente los pasos de una demostración, era parte de la tradición de la lógica matemática iniciada por Frege (1972a) y continuada en *Principia Mathematica* (Whitehead y Russell, 1910). Pero la utilización del simbolismo del cálculo en los términos requeridos por el proyecto de formalización de Hilbert no había sido parte de esta tradición. Notoriamente, la investigación acerca de las relaciones entre cálculos lógicos considerados en sí mismos como sistemas de signos, no era ajena dentro de la 'tradición algebraica de la lógica' (Badesa, 2004).

Estas tradiciones *viz*. la representada por *Principia Mathematica* y la algebraica, conformaban la 'lógica matemática' de la época de Hilbert (Sayed-Ahmed, 2005, p. 467). El hecho de que estas tradiciones hayan cabido bajo una misma denominación deja ver que no eran ajenas una de la otra. Aun así, Mancosu afirma que dentro del círculo académico en el que participaba Hilbert era habitual distinguir entre ambas (2003, p. 63). A reserva de lo que futuras investigaciones aporten, el estado de la investigación actual y especialmente, la configuración del aparato técnico y metodológico que aparece ya en la obra de Hilbert evidencian la confluencia de ambas tradiciones (Marek y Mycielski, 2001). Dentro de los límites del trabajo que presento, hay elementos que apuntan en aquella dirección. Toda vez que el manejo del *cálculo lógico* que acompaña al proyecto de formalización sólo es explicable si suponemos dicha confluencia (Hilbert, 1993, pp. 100-03).

En la tradición representada por *Principia Mathematica* la lógica fue concebida como una *teoría de la deducción*[29] encargada de establecer las *proposiciones lógicas* últimas de las que se deducen las verdades matemáticas. Esta teoría dispuso de un cálculo axiomático desarrollado como un instrumento para el análisis riguroso de las relaciones deductivas entre las proposiciones matemáticas. Los algebristas por su parte asumieron la tarea de utilizar a las matemáticas para estudiar a la lógica (Sayed-Ahmed, 2005). En particular, estuvieron interesados en desarrollar un aparato simbólico adecuado para tratar las relaciones lógicas dentro de una teoría matemática a través de manipulaciones algebraicas (un ejemplo paradigmático es Boole, 1982). Pero el intercambio abierto de los resultados y de los métodos entre ambas tradiciones —constatado por Mancosu (2003) y Badesa (2005)— no repercutió en la modificación de los enfoques originales. La lógica matemática algebraica permaneció interesada en estudiar, que no en fundar, matemáticamente a la

[29] Al respecto es importante notar que Russell y Whitehead reconocen una diferencia entre lo que es propiamente el tratamiento de la lógica que aparece en el sistema de *Principia* y un cálculo lógico. La lógica de *Principia* es, para sus autores, una *teoría de la deducción* encargada de establecer las *proposiciones primitivas* de las que se deduce cualquier razonamiento matemático (Whitehead y Russell 1910, p. 91). Para tratar a esta teoría de la deducción como un cálculo lógico, sus 'reglas de deducción' deben tomarse como 'reglas ordinarias del algebra' (1910, p. 91). Como reglas algebraicas ordinarias, las reglas de deducción lógica admiten múltiples interpretaciones. De acuerdo con estos dos autores, en cualquiera de sus interpretaciones estas reglas siguen siendo reglas de deducción, por lo que cualquier interpretación de ellas tendría que presuponer la teoría de la deducción de *Principia*. Por lo que, concluyen, esta teoría es el fundamento de cualquier cálculo lógico; y por ello, una investigación fundacional debe partir de ésta.

> Tratadas como un "cálculo," las reglas de deducción son capaces de muchas otras interpretaciones. Pero todas las otras interpretaciones dependen de la que aquí se considera, ya que en todas ellas deducimos consecuencias a partir de nuestras reglas y entonces, presuponemos la teoría de la deducción (Whitehead y Russell 1910, p. 120).

lógica; en tanto que el otro partido siguió interesado en fundar a las matemáticas en *la* lógica.

Precisamente por las técnicas utilizadas y por los resultados obtenidos en una y otra tradición, la distinción entre ambas puede resultar ociosa. Tal es la posición de Sayed-Ahmed (2005, p. 467). Badesa (2004) apunta en la dirección contraria cuando afirma que el enfoque algebraico de la lógica matemática propició el surgimiento de la teoría de modelos (2004, p. 65). El método propuesto por Hilbert para probar la consistencia de las matemáticas ideales señala en la misma dirección. Este método plantea una diferencia legítima entre la tradición logicista y la tradición algebraica de la lógica matemática (Hilbert, 1993, p. 101). El eje de esta diferencia, según mi lectura, está en la concepción de formalidad.[30] El proyecto de formalización sugiere la siguiente hipótesis. La prueba de consistencia de las matemáticas ideales es parte del proyecto de Hilbert para justificar a las matemáticas clásicas. El hilo conductor de este proyecto en su parte teórica es un criterio constructivo de objetividad a partir del cual se propone la tesis de un sistema de axiomas

[30] Como he argumentado en el capítulo uno, Frege trabajó con una noción de formalidad que no puede entenderse como libre de contenido semántico. Por otra parte, la posición epistemológica fundacional de Russell según la cual nuestra cognición es 'puesta a andar' con la experiencia, estuvo acompañada de la tesis de que las *formas simples* de las que depende la inferencia lógica son conocidas por medio de la descomposición de los hechos del mundo actual y por abstracción de lo particular y subjetivo de éstos (Russell, 1914, pp. 53-54). En contraposición a lo individual, subjetivo o privado, dichas formas simples son generales, ampliamente aplicables y comunicables a través del lenguaje (Russell, 1919, pp. 196 y ss). Asimismo, Russell reconoció que el tema que concierne a la lógica y a las matemáticas es el estudio de las *formas* para "establecer que éstas son siempre verdaderas o algunas veces verdaderas…" (1919, p. 200). Por lo que si bien Frege y Russell difieren acerca del origen y fundamento de la forma de una expresión, es defendible que ambos coinciden en la postura de que lo formal no está privado de contenido semántico.

Esta concepción de la formalidad contrasta con la concepción que Detlefsen llama *algebraica* o *sintáctica* (2005). De acuerdo con Detlefsen, dentro de la tradición algebraica tuvo cabida la idea de que el razonamiento matemático "puede consistir en la manipulación sintáctica de signos sin contenido representacional, descriptivo, intuitivo o conceptual" (2005, p. 272). Esta idea evolucionó en una concepción del simbolismo algebraico según la cual el algebra como 'ciencia de los símbolos y sus combinaciones' estipula reglas para la manipulación de signos capaces de determinar las interpretaciones asignables a tales signos (2005, p. 277). Esta concepción del papel de los signos en un cálculo fue la "semilla de variantes maduras de formalismo" (2005, p. 277). En particular, el formalismo de la escuela de Hilbert permitirá 'que los signos y los complejos de signos jueguen papeles significativos en el razonamiento matemático independientemente de cualquier interpretación que pudiera darse de ellos' (2005, p. 296).

que caracteriza la estructura conceptual de las matemáticas finitistas genera una teoría objetiva si el sistema es consistente. En este marco, las matemáticas no-finitistas necesitan probar su objetividad por 'referencia' a la estructura finitista. Esto significó probar que las matemáticas ideales si son objetivas, son real-consistentes. El planteamiento metodológico para probar la consistencia-real de las matemáticas ideales fue la formalización de una teoría ideal.

El criterio constructivo de objetividad que dirige el proyecto fundacionista de Hilbert proviene de la epistemología de las matemáticas de Kant. En la base del planteamiento metodológico están primero las nociones de un mecanismo de *simbolización* y de demostración de las verdades de una teoría matemática; segundo, una *concepción sintáctica* de la formalidad; y tercero, una *perspectiva metateórica*. El primero de los apartados de esta base técnica proviene de la tradición de la lógica a la que pertenece *Principia Mathematica*; de acuerdo con Detlefsen (2005) y Badesa (2004), respectivamente, los dos elementos restantes fueron parte de la tradición algebraica de la lógica.

Por lo dicho en la sección 3.2.4., una teoría ideal es real-consistente si es una extensión conservativa de la estructura conceptual de las matemáticas finitistas. Por lo que, para cumplir con el objetivo de justificar las teorías ideales, la formalización de una teoría axiomatizada debe generar una idealización matemática de *esta* teoría en la que *a la vez* puedan ser 'suprimidos' los elementos ideales (Hilbert, 1993, p. 106), de tal modo que los métodos finitistas basten para probar la consistencia-real de la teoría original. Este objetivo impone dos condiciones sobre la formalización para disolver la tensión entre *suprimir* de la estructura conceptual de una teoría ideal su parte ideal sin que ello signifique reducir esta estructura a la estructura finitista. La primera condición es que la formalización permita justamente deducir la estructura conceptual de una teoría ideal. La segunda es a esta estructura puedan aplicarse correctamente los métodos finitistas para probar su consistencia-real. Como estos métodos solo se aplican a objetos finitistas, la estructura obtenida mediante la formalización debe ser un objeto finitista. Muy pronto, Gödel (1931) demostró que la tensión es indisoluble: la formalización no puede cubrir ambas condiciones y no lo hace ni siquiera para las matemáticas finitistas (si éstas contienen o se identifican con la aritmética primitivo-recursiva).

No obstante, la noción de formalidad de Hilbert surge de la metodología diseñada para cubrir las dos condiciones anteriores. Por esta razón me detengo en ellas. Mi propósito es defender que esta noción de formalidad y en general, el proyecto de formalización no se entendería independientemente del estándar de objetividad del conocimiento matemático impuesto por Kant.

4.2. El proceso de formalización y el tema de la justificación

La formalización en un sentido estrecho de traducir una teoría matemática mediante un 'lenguaje de fórmulas' era hasta cierto punto una práctica familiar en la época de Hilbert. Sin embargo, para cumplir con el doble objetivo de la formalización planteado dentro del fundacionismo de Hilbert esta noción de formalización tuvo que revisarse.

El método de introducción de conceptos aceptado por Hilbert establece que la estructura conceptual de una teoría se obtiene por medio de demostraciones a partir del esquema de esta teoría.[31] Sólo que la 'introducción de teorías' es, digamos, *paulatina* (Zach, 2003, p. 214-215): Una teoría es legítimamente introducida sólo como extensión de una teoría previamente justificada *i. e.* real-consistente y, la teoría recién introducida, se justifica demostrando que ella misma es real-consistente. La formalización de la estructura

---

[31] Véase Apéndice C.

conceptual de una teoría empieza por el esquema de la teoría. En este esquema además de los axiomas, están los 'modos de inferencia' empleados en la teoría. Un *cálculo lógico* en tanto que mecanismo simbólico de demostración sirve para implementar la primera fase de la formalización.

> En el cálculo lógico contamos con un lenguaje de signos […] con la capacidad no sólo de dar cuenta en fórmulas de las proposiciones de las matemáticas, sino igualmente de expresar por medio de procesos formales las inferencias lógicas (Hilbert, 1993, p. 103).

Este mecanismo permite simbolizar el esquema de una teoría y deducir una estructura simbólica lógicamente equivalente a la estructura conceptual de ésta: su *estructura formal/deductiva* (Hilbert y Bernays 1968, p. 45). Para cumplir con la segunda condición de la formalización, la estructura formal generada en esta primera fase debe ser adecuada para probar la consistencia-real de la teoría original correspondiente.

De manera incipiente, tanto en *Principia* como en *Conceptografía*, las expresiones legítimas de estos sistemas, las fórmulas, se entienden como el resultado de un *proceso definido recursivamente*. Las demostraciones se presentan también, incipientemente, como procesos recursivos: procesos realizados en una serie finita de pasos a partir de ciertas expresiones privilegiadas o ya demostradas y en donde, pretendidamente, cada uno de los pasos procede por medio de una regla de deducción ya especificada (Frege, 1972a y 1953, §§90-1; y Whitehead y Russell, 1910, p. 7 como ejemplo de formación de una fórmula; y pp. 104 como ejemplos de demostración). Si con base en estos sistemas, suponemos que la simbolización de una expresión o de una demostración tiene la finalidad de seguir cada uno de los pasos de su formación o deducción, respectivamente, resulta que el *patrón-sintáctico* generado por el proceso de simbolización de una fórmula o de una demostración recrea el proceso recursivo que origina dicha fórmula o demostración. Una vez hecha la elección inicial, arbitraria y permanente sobre el vocabulario, las fórmulas y las demostraciones generadas en un sistema formal obtienen un patrón-sintáctico canónico.

Con estos antecedentes, la premisa de que los procesos recursivos capturan a los procesos de construcción, según los entiende Kant, junto a la premisa de que los procesos recursivos dan lugar a objetos finitistas, ayudan a explicar por qué el cálculo lógico fue privilegiado por Hilbert como método de introducción de conceptos confiable. La aplicación de este cálculo en el proyecto de formalización no sólo permitiría deducir la estructura formal de una teoría, sino que lo haría de modo que las fórmulas y las demostraciones así obtenidas pudieran a su vez caracterizarse por el sistema de axiomas finitista. Utilizo 'sistema formal' para referirme al resultado de la simbolización del esquema de una teoría matemática y a la derivación de la estructura formal de ésta a partir de un cálculo lógico.

En el proyecto de formalización presentado por la escuela de Hilbert, la formalización de una teoría matemática axiomatizada fue concebida como un proceso para generar un *sistema formal*. Este sistema consta de un *sistema formal de axiomas* a partir del cual es derivada una *estructura formal* como modelo o idealización de la estructura conceptual de la teoría axiomatizada de origen (Hilbert y Bernays, 1968, p. 3). Una estructura formal es deducida de un *sistema formal de axiomas* por medio de procesos de demostración. Las expresiones obtenidas por estos procesos y que conforman un sistema formal son *fórmulas* con cierto *patrón-sintáctico* canónico. Llamaré 'relaciones formales' a las relaciones que dan lugar a una fórmula en un sistema formal (1968, p. 17). Las relaciones formales están expresadas en la formación y en la demostración de una fórmula y, pretendidamente, cumplen en la estructura formal de la teoría el papel análogo a las relaciones conceptuales en la estructura conceptual de esta teoría (1968, p. 7): Las relaciones en la estructura conceptual de una teoría son en su formalización, *relaciones formales i.e.* relaciones definidas totalmente a partir del sistema formal de axiomas y derivadas a partir de éstos por medio de reglas así mismo formales (Hilbert, 1993, p. 103). Tenemos que, en un sistema formal, tanto la formación de las fórmulas como los procesos de demostración se obtienen por medio de procesos recursivos. Estos procesos están totalmente dirigidos por *reglas* que operan sin tener en cuenta la interpretación de los signos (Hilbert, 1993, pp. 100-4).[32] Las reglas junto con los signos empleados en la formación de fórmulas son totalmente explicitados como parte de las especificaciones iniciales de un sistema formal.

La formalización pretende cumplir de esta manera con la condición de generar una estructura formal como modelo o idealización de la estructura conceptual de una teoría axiomatizada original. Además, en el proceso de simbolización y deducción de esta estructura formal, la formalización da lugar a un *patrón de relaciones sintáctico* característico de dicha estructura formal y cuyas propiedades pueden describirse a partir del sistema de axiomas finitista.

4.2.1. Influencia de la lógica algebraica en el proyecto de formalización

El tratamiento del simbolismo dentro de un sistema formal como el propuesto por Hilbert sugiere el análisis algebraico de la lógica. Bajo el entendido de que los procesos mentales que subyacen al razonamiento se manifiestan en la manera en la que usamos los signos la lógica matemática en la tradición iniciada por Boole (1982), persiguió la tarea de

[32] Presumiblemente, es por esta razón que se considera a las reglas de deducción y a la estructura deducida por medio de ellas esencialmente 'sintácticas'. Sin embargo, yo conservaré la denominación de 'estructura formal/deductiva' para referirme al resultado de deducir las relaciones lógicas que se siguen a partir de un grupo de axiomas en un lenguaje canónico.

desarrollar sistemas de signos para estudiar las relaciones lógicas como relaciones algebraicas dentro de lo que más adelante se conocerían como *estructuras algebraicas*.[33] Estas investigaciones mostraron que una misma estructura algebraica podía ser caracterizada por más de un sistema de axiomas, de tal manera que era posible 'transformar' las expresiones de un sistema en expresiones lógicamente equivalentes en el otro sistema.

A través de estas investigaciones fue introducida una noción de formalidad según la cual un resultado formal se define porque su validez no depende de la interpretación de los símbolos sino solamente de las 'leyes para la combinación' de éstos (Boole, 1982, pp. 63 y 65). En esta tradición, la formalización se convirtió en un proceso mediante el cual podían obtenerse expresiones algebraicas lógicamente equivalentes a las expresiones de una teoría matemática pero con un patrón sintáctico canónico, a saber, la *forma de una ecuación* (Badesa, 2004, p. 65). Un sistema de ecuaciones así generado hizo posible que la solución de ciertos problemas de la teoría original dependiera de la respuesta a la pregunta por los dominios en los cuales tienen solución las ecuaciones del sistema. De acuerdo con Badesa (2004), una vez que esta tradición se benefició con la introducción de las nociones de un lenguaje formal y de formalización —vigentes en la tradición logicista— surgió la investigación metateórica con enfoque semántico de los sistemas lógicos. Esta investigación planteó de manera *natural* la pregunta por la relación entre las fórmulas de un lenguaje formal y sus dominios de solución *i. e.* de *satisfacción* (2004, p. 65).

Aquí sugiero que el acceso metateórico al lenguaje de un sistema lógico practicado dentro de la tradición algebraica aparece en el proyecto de formalización de Hilbert en la

[33] Un sistema de objetos interrelacionados entre sí a partir de ciertas operaciones regidas por un grupo de axiomas.

idea de hacer del patrón-sintáctico de una estructura formal un objeto del dominio finitista. Pues si bien es cierto que Hilbert había emprendido mucho antes estudios metateóricos de los sistemas de axiomas,[34] el nuevo enfoque introducido en el proyecto de formalización compartió con el enfoque algebraico su orientación metalingüística. Claro que las diferencias entre ambas investigaciones son también notables. Siguiendo a Badesa (2004), al partido algebrista le interesó responder la pregunta por las fórmulas y su interpretación (2004, p. 65); mientras que el partido de Hilbert quiso investigar las propiedades combinatorias de las fórmulas *i.e*. la relación entre las fórmulas y las matemáticas finitistas.

4.2.2. Justificación de las matemáticas ideales

En la sección 4.3 mencioné un supuesto introducido implícitamente por la formalización. Según este supuesto, un simbolismo diseñado para seguir *rigurosamente* los pasos en una demostración en la tradición de *Conceptografía* (Frege, 1972a) va a generar relaciones entre sus signos susceptibles de ser estudiadas por las matemáticas finitistas. Este hecho planteó la posibilidad de un cálculo lógico cuyo simbolismo fuera capaz de producir sólo 'relaciones finitistas' entre sus signos: secuencias finitas de signos. En realidad, tras el incipiente tratamiento recursivo que hace Frege para definir las expresiones del sistema formal de *Conceptografía*, mismo que vuelve a constatarse en *Principia*, el simbolismo de un cálculo lógico estaba dispuesto para el fin anterior.

La concepción de los sistemas formales presentada en los ejemplos de (Hilbert y Ackermann 1928), contiene las especificaciones estándar sobre la notación requeridas para 'el tratamiento sistemático de las fórmulas' (Hilbert y Ackermann, 1928, p. 72). Se trata de un *sistema de signos* integrado por un alfabeto básico y reglas para su combinación las

[34] Esta investigación había estado centrada en el estudio de ciertas propiedades de los sistemas de axiomas hoy reconocidas como *metapropiedades* tales como la independencia, la consistencia y la compleción.

cuales producen sólo combinaciones finitas de tales signos como expresiones. [demostración] Mediante este sistema de signos la formalización de una teoría matemática X debería dar lugar a la estructura formal de X. Por ‘la estructura formal de X’ debemos entender una idealización matemática de la estructura conceptual de X. Además, y con este resultado se completa la formalización, la relación de X respecto a las matemáticas finitistas va a poder ser investigada en el *patrón*-sintáctico del sistema formal de X. En particular, la consistencia-real de X debe probarse a partir de este patrón-sintáctico. Esto es posible debido a que en este patrón:

> Una demostración matemática es una figura que se presenta ante nosotros como algo intuitivo. Consiste de inferencias llevadas a cabo de acuerdo con el esquema
>
> $$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}\end{array}}{\mathfrak{T}}$$
>
> en la [*sic*] que cada una de las premisas, esto es, de las fórmulas que corresponden a $\mathfrak{S}$ y a $\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ es o bien un axioma o resulta de un axioma por sustitución o coincide con la fórmula final de una inferencia previa o resulta de una fórmula de ese tipo por sustitución. Una fórmula es demostrable si es la fórmula última de alguna demostración (Hilbert, 1993, p. 104).

La prueba de la consistencia-real de X debe ‘mostrar que con los axiomas y reglas’ de X ‘es imposible obtener “$1 \neq 1$” como la fórmula final’ de una demostración (1993, p. 107). Pero ¿por qué Hilbert tomó este camino para la justificación de X?

El problema que Hilbert enfrentaba para justificar una teoría matemática ideal era el de probar la consistencia-real del sistema de axiomas relevante. Esta prueba, en los términos en que Hilbert la presenta funciona sólo si el sistema finitista es deductivamente completo al respecto de los enunciados finitistas[35] y consistente (Raatikainen, 2003, p. 168). Es decir, la consistencia-real de un sistema de axiomas ideal, *TI*, a saber, la prueba de que en el patrón-sintáctico de *TI* no hay una demostración cuya fórmula final es '1 ≠ 1', sólo puede funcionar si es cierto que *(i)* para cualquier enunciado real, *TF* demuestra el enunciado o su negación; y que (*ii*) TF es consistente *i. e*., que para cualquier enunciado real, no hay en el sistema una demostración de éste enunciado y de su negación, por lo que, en particular, *TF* no demuestra '1 ≠ 1'. Si (*i*) y (*ii*), entonces suponiendo que *TI* demuestra '1 ≠ 1', ello implicaría que *TF* demuestra '1 ≠ 1' (por compleción-real deductiva de *TF*), pero por el supuesto de consistencia de *TF*, esto no ocurre: *TF* no demuestra '1 ≠ 1'. Por lo que a menos que *TF* sea inconsistente, *TI* no demuestra '1 ≠ 1'. De ahí que baste con probar que *TI* no demuestra '1 ≠ 1' para concluir que *TI* es real-consistente (2003, p. 163).

Pero de acuerdo con Raatikainen, lo anterior quiere decir que si *TI* es real-consistente, ello implica que *TI* es una extensión deductivamente conservativa de *TF* (2003, 163-64): los teoremas de *TI* en el lenguaje de *TF* son teoremas de *TF i. e*. para cualquier ψ en el lenguaje de *TF*, $TI \vdash \psi \rightarrow TF \vdash \psi$. Si esta tesis es correcta, la prueba de consistencia real en los términos planteados por Hilbert (1993) debería intrigarnos. Me explico. Una vez que las matemáticas finitas y las matemáticas ideales han sido concebidas como cierto tipo de estructura matemática, a saber las estructuras formales: *TF* y *TI* respectivamente, por qué no demostrar que TI preserva ciertas propiedades matemáticas de la estructura de TF. Es decir, ¿por qué no definir 'la relación' adecuada entre *TI* y *TF* que nos diga que *TI*

[35] Awodey y Reck (2002) dan la siguiente definición: Una teoría T es *deductivamente completa* (relativo a una relación de deducción dada $\vdash$) si cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes se sostiene:

1. Para todas las oraciones ϕ, o bien $T \vdash \phi$, o bien $T \vdash \phi$
2. Para todas las oraciones ϕ, o bien $T \vdash \phi$, o bien $T \cup \{\phi\}$ es incosistente.
3. No hay ninguna oración ϕ tal que $T \cup \{\phi\}$ y $T \cup \{\neg\phi\}$ sean ambos consistentes.

(Awodey y Reck. 2002, p. 5)

'preserva las relaciones y las operaciones' de *TF*? Esta relación entre *TI* y *TF* puede estudiarse con diversos recursos matemáticos dependiendo de qué tipo de estructura sea definida para *TI* y *TF*. Así por ejemplo, si las estructuras formales se definen como estructuras teórico-conjuntistas, éstas son ternas conformadas por un conjunto no vacío *A* como dominio de discurso, un conjunto *R* de relaciones definidas como *n*-tuplas $<a_0, a_1,\ldots,a_{n-1}>$ en *A* x *A* x *A*… (*i.e.* definidas en A^n); un conjunto *F* de funciones definidas de A^n a *A*, donde cada función asigna a una *n*-tupla $<a_0, a_1,\ldots,a_{n-1}>$ de elementos de A^n un elemento a_i de *A*; y por último un conjunto de elementos distinguidos o constantes c_k de *A*. En este caso, para mostrar que *TI* 'preserva la estructura' de *TF* hablamos de establecer cierto *mapeo* del dominio *B* de *TF* al dominio *C* de *TI*. Si *B* y *C* son los conjuntos base de las estructuras algebraicas *TF* y *TI* respectivamente, entonces el mapeo requerido es cierto *homomorfismo* de *TF* en *TI*. Siguiendo a Enderton (2004, p. 141), un homomorfismo φ de *TF* en *TI* es una función $\varphi: B \to C$ tal que,

(i) Para cada símbolo de relación *R* *n*-aria y cada *n*-tupla $<b_0,\ldots,b_{n-1}>$ de elementos de *B*,

$$<b_0,\ldots,b_{n-1}> \in R^{TF} \text{ si y sólo si } <\varphi(b_0),\ldots,\varphi(b_{n-1})> \in R^{TI}$$

(ii) Para cada símbolo de función *f* n-aria y para cada n-tupla $<b_0,\ldots,b_{n-1}>$ de elementos de *B*,

$$\varphi(f^{TF}(b_0,\ldots,b_{n-1})) = f^{TI}(\varphi(b_0),\ldots,\varphi(b_{n-1}))$$

(iii) Para cada símbolo constante c,

$$\varphi(c^{TF}) = c^{TI}$$

Haciendo eco de la afirmación de Hilbert al respecto de que para establecer la equivalencia entre estructuras todo lo que importa es el número de elementos en sus dominios (Hilbert y

Bernays, 1968, p. 9),[36] entonces la imagen de B bajo φ, $B\varphi$, debe ser un subconjunto de C, digamos D, tal que la contraimagen de D mediante φ sea 'todo' B. Sirva este breve paso por cierta clase de relaciones entre ciertas estructuras matemáticas sólo como una manera muy imprecisa de introducir la observación hecha por Shapiro según la cual Hilbert reconoció que 'las estructuras isomorfas son equivalentes' (Shapiro 2009, p.439). Pues si lo anterior es cierto, quiere decir que Hilbert reconoció que las propiedades matemáticas de las estructuras matemáticas pueden investigarse digamos que, por 'analogía en las formas' y que estas analogías son algebraicamente tratables al nivel del lenguaje de estas estructuras. Frente a este resultado y por la tesis de que la justificación de una teoría ideal depende de que ésta sea una extensión deductivamente conservativa de la *estructura* finitista, es remarcable el hecho de que Hilbert no haya optado por definir la función, mapeo, aplicación u homomorfismo apropiado entre la estructura ideal y la finitista para demostrar el resultado de *conservación* relevante.

Lo cierto es que antes tomar esta vía hacia el establecimiento de una de estas relaciones entre la estructura formal *TF* y la estructura formal *TI*, la consistencia de *TF* debía estar resuelta y por medios finitistas. Como he argumentado los métodos finitistas de introducción de conceptos están restringidos por el criterio constructivo de objetivad proveniente de la epistemología de las matemáticas de Kant. Así, se espera que estos métodos garanticen que cualquier concepto introducido por medio de ellos sea objetivo. La propuesta que hace Hilbert para demostrar la consistencia-real de una teoría matemática nos revela que el tratamiento finitista de esta prueba pretende servirse sólo de la inducción matemática elemental (Torretti, 1998, pp. 223-25).

[36] Hilbert y Bernays (1968) declaran que para determinar la equivalencia entre dos sistemas de axiomas *sólo es esencial considerar el número de individuos de un dominio* (1968, p. 9).

Según mi lectura, al circunscribir las matemáticas finitistas, Hilbert pretendió algo más que una teoría cuyos modos de formación de conceptos estuvieran restringidos a los métodos recursivos. También colocó en primer plano la posibilidad de que estos modos de formación de conceptos tuvieran el *patrón* de los objetos finitistas. Muy plausiblemente, y por razones epistémicas, la dirección de sus intereses haya corrido a la inversa: porque los métodos recursivos podían explicitarse ellos mismos por medio de un *patrón,* Hilbert circunscribió una teoría cuya formación de conceptos se restringe a estos métodos.[37] La formalización permitió ambos objetivos. Un proceso de formalización genera *estructura* (*estructura deductiva*) y *patrón* (*estructura concreta*). La *estructura formal* comprende esta dualidad. Este resultado es posible por la utilización de un lenguaje definido recursivamente. Por ello, las demostraciones —a través de las cuales son definidas las relaciones formales entre las expresiones del sistema, son configuraciones de signos que pueden estudiarse como entidades combinatorias finitas. La convicción que Hilbert y su escuela parecen haber compartido es que la *caracterización* completa de estas entidades requería sólo de la aplicación de inducción matemática finita, en tanto que dichas entidades resultan de un proceso recursivo finito.

Resumiendo, la formalización de una teoría matemática X que emplea un lenguaje recursivo genera la *estructura formal* de X. La estructura formal de X presenta la propiedad de ser *estructura deductiva* y *estructura concreta*. Es estructura deductiva en cuanto que las relaciones básicas entre los elementos de X, sus fórmulas, son establecidas por los teoremas

---

[37] La plausibilidad de esta interpretación proviene de la afirmación hecha por Hilbert de que el objetivo último de la Teoría de la Demostración era el de 'describir la actividad de nuestro pensamiento, hacer un protocolo de las reglas de acuerdo con las cuales realmente procede nuestro pensamiento' (Hilbert 1928, p. 475, citado en Raatikainen, 2003, p. 165). A partir de esta afirmación, la estrategia de Hilbert puede explicarse si aceptamos que 'la actividad de nuestro pensamiento' puede ser codificada a través de un proceso recursivo. De este modo al describir las propiedades del patrón de los ítems lingüísticos generados por recursión, lo que obtenemos es 'el protocolo de reglas por las cuales procede nuestro pensamiento.'

demostrables a partir de los axiomas de la estructura formal de X y en este sentido, dependen de las reglas de inferencia de esta estructura. Desde una perspectiva metateórica, la estructura formal de X es una estructura concreta: La estructura concreta de X no es sino el *patrón* de relaciones sintácticas entre los signos del lenguaje empleado en la formalización de X. La formalización es así un método para desarrollar una teoría ideal y al mismo tiempo de restringir ese desarrollo al dominio finitista. Esto es posible porque la formalización permite escribir una teoría matemática en *el lenguaje* de las matemáticas finitistas. La introducción de la Teoría de la Demostración hizo posible tratar matemáticamente la dualidad de las estructuras formales y las relaciones entre estas estructuras. Notablemente, este tratamiento evitó definir la función, mapeo, aplicación u homomorfismo apropiado entre una estructura ideal y la finitista para demostrar que la segunda preserva ciertas propiedades matemáticas de la primera. La teoría de la demostración permitió distinguir sistemáticamente entre la estructura deductiva y la estructura concreta de una estructura formal y extrajo consecuencias a partir de la investigación de la estructura concreta por medio de inducción matemática.

La tensión que la justificación de una teoría ideal impone sobre la noción de estructura debería resolverse mediante la formalización y el enfoque metateórico introducido por la Teoría de la Demostración. Por una parte la formalización garantiza que toda demostración, incluso una llevada a cabo a partir de los axiomas de una teoría ideal, sea un objeto finitista. Con ello, la formalización asegura que las matemáticas finitistas se convirtieran en la metateoría de los sistemas formales. Este resultado abre la posibilidad de probar *finitariamente* la consistencia-real de una teoría ideal *viz.* por medio de una prueba por inducción sobre la complejidad de las derivaciones (Torretti, 1998, pp. 223-224). Aquella tensión debería resolverse entonces apelando a los dos niveles en los que puede ser abordada una estructura formal. En un primer nivel, una estructura formal es una estructura deductiva en la que, de haberlos, son *preservados* los elementos ideales; en el plano metateórico, esta misma estructura formal es una estructura concreta en la que, de haberlos, son *suprimidos* los elementos ideales.

En conclusión, frente a las tesis de Raatikainen (2003) y de Shapiro (2009), el planteamiento de Hilbert de justificar a una teoría ideal por medio de la prueba de la consistencia-real de esta teoría requiere explicación. Lo que he tratado de mostrar es que las herramientas diseñadas para llevar a cabo esta prueba: la formalización y la Teoría de la Demostración, no se entienden sin el estándar de objetividad al que Hilbert somete el conocimiento matemático. De haber sido exitosa, la estrategia ideada por Hilbert permitiría mostrar para cualquier teoría matemática ideal 'completa' que pueda ser *escrita* en el lenguaje finitista *i. e.* formalizada, si ésta es o no una extensión deductivamente conservativa respecto a las matemáticas finitistas y por tanto, real-consistente.[38] La explicación del paso que hay entre esta prueba y la conclusión de que los objetos ideales de la teoría ideal correspondiente están legítimamente introducidos y que, en consecuencia, esta teoría ideal es epistémicamente confiable, está en que la teoría ideal cumple con el criterio constructivo de objetividad para las matemáticas preservando así la aplicación confiable de la lógica.

---

[38] De acuerdo con Awodey y Reck (2002), 'en general, las nociones de compleción surgen en contextos donde las axiomatizaciones están siendo realizadas con objetivos específicos en mente' (Awodey y Reck, 2002, p. 7) De ahí que cuando una axiomatización se califica como 'completa', lo que se quiere dar a entender es que el teórico ha logrado su objetivo y que no requiere ya de la adición de ni un axioma más al sistema. Aquí retomo esta noción débil y vaga de compleción de un sistema de axiomas.

Capítulo 5. Formalización, formalidad y forma

En este capítulo presento las nociones de formalización, formalidad y forma obtenidas del proyecto de formalización de Hilbert. Aquí argumento que al aceptar la elementalidad de las facultades cognitivas que respaldan la recursión, podemos defender que la noción de forma de Hilbert incorpora la confiabilidad de los procesos recursivos para legitimar la introducción de conceptos matemáticos y garantizar de este modo, la objetividad de los objetos a los que dichos conceptos son aplicables. Esta noción de forma enfrenta dos dificultades inmediatas. Aquí, respondo por la primera, pero dejo abierta la segunda.

La primera dificultad que enfrenta este concepto está en las razones que condujeron a la introducción de la semántica estándar para los sistemas lógicos desarrollados en la tradición iniciada por *Conceptografía.* Entre estas razones está la que elabora Tarski (1983b) para mostrar la insuficiencia de los sistemas formales *à la* Hilbert para dar cuenta de la relación de consecuencia lógica. La opinión generalizada es que la noción de forma operante en los *sistemas formales deductivo-semánticos* o *lenguajes formales interpretados* es heredera de la noción de forma empleada por Frege en *Conceptografía*. Sin negar lo anterior, aquí sugiero que la noción de forma operante en los lenguajes formales interpretados también es heredera, en un grado que hace falta valorar, de la noción de forma que utiliza Hilbert. Para ello no sólo tomo en cuenta que en los lenguajes formales interpretados la forma de una expresión es la encargada de determinar la formación y la interpretación de esta expresión; que esta forma es definida recursivamente y representada al nivel metalingüístico como una entidad combinatoria finita. También apelo al sentido de formalidad introducido por los sistemas formales desarrollados por Hilbert según el cual los sistemas de axiomas son libremente interpretables. Y sugiero que este sentido de formalidad reaparece en los lenguajes formales interpretados en la posibilidad de reinterpretar múltiplemente el vocabulario no-lógico de las expresiones de este lenguaje. Notoriamente, ambos sentidos de formalidad son herederos de una noción algebraica antecedente. La lección que extraigo de este resultado es que la noción algebraica de formalidad, sistematizada ya en los sistemas formales de Hilbert, permite clarificar el sentido en el que es formal el sistema lógico de *Conceptografía*. Presumiblemente, la concepción de formalidad introducida por los lenguaje formales interpretado integra sistemáticamente dos de los aspectos fundamentales de esta noción que Frege y Hilbert respectivamente ponderaron: su generalidad y su independencia de contenido semántico.

La segunda dificultad para la noción de forma lógica de Hilbert proviene del objetivo de la formalización según el cual esta noción debe permitir probar la consistencia de una teoría —recursivamente axiomatizada y completa,[39] a partir de las matemáticas finitistas. La imposibilidad de alcanzar este objetivo significó el fracaso del proyecto fundacionista de Hilbert y con ello, la inoperancia de la noción de forma aquí en juego. Sin embargo, al aceptar el respaldo epistémico de esta noción es posible liberar a los sistemas formales del requisito de consistencia estipulado por Hilbert. Así, el carácter cognitivamente elemental de la noción de forma se afirma como responsable de la confiabilidad epistémica de estos sistemas. No obstante, esta vía plantea un nuevo problema para el concepto de forma lógica. Al perder las restricciones que el fundacionismo de Hilbert imponía sobre la noción de forma al nivel metateórico, existe el riego de trivializar esta noción al entenderla ahora como el resultado de la aplicación de cualquier conjunto de reglas que definen un proceso recursivo. En la conclusión de este documento adelanto una posible solución a este segundo problema.

[39] Véase nota anterior.

5.1. Conceptos de formalización, formalidad y forma

A partir del proyecto de formalización de Hilbert la *formalización* de una teoría axiomatizada se entiende como un proceso para generar una estructura formal. Una estructura formal tiene la propiedad de ser *estructura deductiva* y *estructura concreta*. Es estructura deductiva en cuanto que las relaciones básicas entre sus fórmulas son derivadas a partir de los axiomas de dicha estructura formal y a través de las reglas de deducción de esta estructura. Desde una perspectiva metateórica, esta misma estructura formal es una estructura concreta: es el *patrón* de relaciones sintácticas entre los signos del lenguaje empleado en la obtención de la estructura deductiva. Pretendidamente, dicho patrón no es sino una entidad combinatoria finita y como tal, es susceptible de ser caracterizado completamente por el sistema de axiomas de las matemáticas finitistas.[40] A partir de esta noción de formalización, la *formalidad* se entiende como una propiedad de las fórmulas de una estructura formal. Esta propiedad depende de la definición recursiva de los procesos de formación y de deducción de las fórmulas en la estructura deductiva y es tratable en la estructura concreta por las matemáticas finitistas en tanto que metateoría de las estructuras formales. Ser formal es entonces ser un objeto finitista *i.e.* un objeto del dominio caracterizable por las matemáticas finitas ssi éstas son la metateoría de una estructura formal: “[L]os objetos del finistismo están caracterizados como *objetos formales* los cuales son generados recursivamente por un proceso de repetición” (Zach, 2006, p. 421).

En este marco la *forma lógica* es lo que da lugar a un objeto formal: la forma da lugar a una fórmula dentro de una estructura formal tal que dicha fórmula es un objeto de la metateoría del sistema, a saber, un objeto finitista. La forma de un objeto formal depende de las reglas de formación y de deducción así como de los axiomas a partir de los que es

[40] Vi. Apéndice B.

derivada una estructura deductiva. La forma de una fórmula es el conjunto de relaciones formales que producen dicha fórmula en una estructura formal.[41] Esta forma es explicitada a través de la formalización del proceso de formación y de derivación de una fórmula en la estructura deductiva de una estructura formal; y es *estudiada* como un objeto finitista en la estructura concreta. La respuesta a la pregunta acerca de qué tiene de lógica la forma lógica es que la forma de una fórmula en una estructura formal 'tiene de lógica' un conjunto de relaciones formales que depende de las reglas de formación, de derivación y de los axiomas de una estructura formal. Esta noción de forma responde, primero, al criterio constructivo de objetividad extraído de la epistemología de las matemáticas de Kant; y segundo, al supuesto de que los procesos de formación y de deducción de las fórmulas en una estructura formal pueden describirse como procesos recursivos a través un sistema de signos definido recursivamente.

Para concluir, quisiera señalar el alcance que el concepto de formalidad de Hilbert ha tenido en nuestra manera de entender esta noción dentro de la lógica. Mi propósito es plantear la motivación que el proyecto semántico de la forma lógica[42] tiene a partir del concepto de formalidad desarrollado por Hilbert.

5.2. Formalidad en Frege, en Hilbert y después de Hilbert

En la exposición precedente he argumentado que la noción de formalidad de Hilbert tiene como antecedentes la noción de forma de Kant y la noción de formalidad algebraica. Una manera de entender la noción de forma lógica de Kant es diciendo que la forma (de un concepto) es lógica en el sentido de que es una regla dada por nuestro entendimiento que

[41] Las relaciones formales son relaciones definidas totalmente por las reglas de formación de las fórmulas y por las reglas de deducción de las mismas a partir de un sistema formal de axiomas.
[42] El proyecto que pretende dar cuenta del significado lingüístico de las expresiones del lenguaje natural apelando a la forma lógica de tales expresiones.

determina la formación de una representación capaz de ‘armonizar’ una diversidad de intuiciones posibles (Kant, 2001, A 68, A 244 y B 306). En particular, la forma lógica de los conceptos aritméticos es el resultado de una tarea cognitiva realizada *a priori* que da lugar a la intuición del patrón de relaciones espacio-temporales por el cual tenemos acceso a un objeto de una experiencia posible (2001, A 724, B299-300, B741). Al permitir este acceso la forma confiere objetividad a los conceptos aritméticos. De acuerdo con la interpretación que he presentado, Hilbert pretendió capturar la objetividad asociada con la intuición de este patrón a través del finitismo. Hilbert incorporó además en su investigación fundacionista una noción de formalidad entendida como un modo de razonamiento que utiliza expresiones lingüísticas pero ‘sin adhesión a una interpretación esencial’ de estas expresiones (Detlefsen, 2002, p. 291). El origen algebraico de esta noción fue reconocido abiertamente por el propio Hilbert (1993, pp. 101 y 103).

En el proyecto de formalización de Hilbert, el aparato deductivo del sistema de *Conceptografía* fue puesto al servicio de esta noción de formalidad algebraica y supeditado a la noción de objetividad anterior. En el capítulo uno argumenté que el sistema de *Conceptografía* fue diseñado para responder a una noción de formalidad entendida como ‘generalidad máxima’ de las verdades de la lógica, pero en contra de la noción de formalidad según la cual las expresiones formales carecen de contenido semántico. Asimismo defendí allí que detrás de este sistema estaba la convicción de Frege de que el trabajo de la lógica podía realizarse a través de las estipulaciones sintácticas y semánticas del sistema de *Conceptografía.*[43] Notoriamente, en razón de esta convicción el sistema de *Conceptografía* colocó las bases de un sistema de signos en el que las expresiones legítimamente formadas del sistema son definidas recursivamente.

[43] Veáse nota 5.

A partir de los resultados obtenidos por Hilbert, he planteado la hipótesis de que si la convicción de que el lenguaje puede hacer el trabajo de lógica condujo a un lenguaje recursivo, toda vez que para Hilbert la recursividad captura la objetividad asociada con los procesos constructivos, entonces la definición recursiva del 'lenguaje de la lógica' en *Conceptografía* revela el reconocimiento tácito de que los procesos de formación y de derivación de las expresiones son procesos constructivos.[44] Sin embargo ni Frege ni Russell habían puesto en primer plano la elementalidad cognitiva de los procesos recursivos y su relación con los procesos deductivos como sí lo hizo Hilbert. Fue este último quien con base en el criterio constructivo de objetividad de Kant, integró abiertamente la objetividad asociada con los procesos recursivos en una noción de formalidad. El proyecto de formalización de Hilbert tuvo el fin de modelar la elementalidad cognitiva misma asociada con la recursión para legitimar la introducción de los objetos matemáticos.

5.2.1 Libre interpretación de los sistemas formales

De acuerdo con el concepto de formalización de Hilbert un objeto formal de la metateoría de una estructura formal que resulta de un proceso recursivo y que en esa medida, puede ser descrito por medio de la aplicación de inducción matemática elemental. Por consiguiente, las propiedades de los objetos formales como *ser una fórmula, ser un axioma, ser una demostración* o *ser un teorema*, son todas también formales *i.e.* resultado del proceso recursivo de su generación. Por lo que la investigación metateórica de los sistemas formales es el estudio de los procesos a través de los cuales los signos se combinan para generar secuencias finitas de signos y con ellas, otras secuencias finitas (Giaquinto 2002, p. 150). En otras palabras, en virtud de que un sistema formal es el resultado de la aplicación de

[44] Es remarcable que para Frege —y también para Russell, esta caracterización del lenguaje de la lógica fue compelida por la manera en la que más fielmente pueden registrarse las demostraciones matemáticas.

metodología recursiva, el patrón sintáctico de un objeto formal es una entidad combinatoria finita y como tal, un objeto posible de una investigación metateórica finitista. Este estudio, pretendidamente, no debería pedir más que la aplicación del principio de inducción matemática sobre la complejidad de las secuencias finitas de signos.

El enfoque metateórico adoptado dentro de la investigación fundacionista de Hilbert se concentró en los objetos formales y las relaciones entre éstos y las matemáticas finitistas. En cambio de acuerdo con Badesa (2004), la perspectiva metateórica planteada en el contexto de la lógica algebraica respecto a los lenguaje formales[45] se enfocó en la pregunta por la relación entre el lenguaje formal y los dominios de satisfacción de sus fórmulas (2004, pp. 51 y ss). Pero el que ambos enfoques sean distintos no significa que se contrapongan. Si en ambas investigaciones el lenguaje es formal o parte de un sistema formal en el sentido que 'formal' tiene de acuerdo con esta exposición, entonces estas investigaciones son al menos compatibles. Sin embargo, históricamente sabemos que estos dos enfoques metateóricos fueron contrapuestos. Entre las críticas más contundentes en contra de los sistemas formales 'tipo Hilbert', *H,* está la de Tarski (1983b) según la cual estos sistemas son inadecuados para tratar con nociones como la propia relación de *consecuencia lógica*. La razón aludida es que los sistemas *H* son incapaces de dar cuenta de los aspectos semánticos involucrados tanto en ésta como en otras relaciones y propiedades lógicas. El método de introducción de conceptos semánticos creado por Tarski (1983a) pretendía superar esta y otras carencias.

La semántica ahora estándar permitió no obstante complementar a los sistemas formales *H* por medio de la incorporación de (definiciones de) conceptos semánticos. Voy a

[45] Badesa enfatiza que para tener el concepto de un lenguaje formal hay que *percatarse* 'de la estructura recursiva de las fórmulas del lenguaje' (Badesa 2004, p. 62).

llamar a estos sistemas formales *HT*.[46] Pero la integración de los sistemas *HT* no significó, necesariamente, el abandono del presupuesto acerca de la elementalidad de las facultades cognitivas involucradas en un proceso recursivo sobre el que descansa la noción de formalidad de Hilbert. Una razón para pensar que los sistemas *HT* no son ajenos a la noción de forma de Hilbert está en la tesis de Badesa (2004) acerca de que uno de los primeros resultados de lo que se convertiría en la Teoría de Modelos surgió en el contexto de la lógica algebraica. En esta tradición, al menos a partir de Boole (1982), la validez de un resultado *formal*, representado por medio de una expresión con cierta forma sintáctica canónica, debería alcanzarse independientemente de la interpretación de esta expresión. Como he argumentado, el proyecto de formalización de Hilbert recupera la noción algebraica de formalidad en la idea de que es posible obtener resultados acerca de las propiedades de los sistemas formales de axiomas y las relaciones entre éstos independientemente de la interpretación de los axiomas. En la propia tradición de la lógica algebraica, aquella noción de validez formal antecedió a la pregunta por las interpretaciones posibles de un *lenguaje formal*. Finalmente, los sistemas *HT* introducen una noción de formalidad según la cual el lenguaje de un sistema formal es libremente interpretable. Esta noción de formalidad es aún considerada como:

> una de las fortalezas de la lógica matemática contemporánea y un soporte principal de las matemáticas en general (Shapiro, 2005, p. 441).

Desde esta postura es deseable que un sistema lógico, *H* o *HT*, en tanto que formalmente adecuado, carezca de restricciones para la interpretación de sus fórmulas. Shapiro (2005)

[46] Paradigmáticamente, con la incorporación de la semántica formal estándar, entendemos *estructura* en su definición dentro de la teoría de conjuntos: una tupla conformada por un dominio no vacío de objetos, el conjunto de funciones y/o relaciones definidas sobre este dominio; así como el conjunto de elementos destacados de este mismo dominio.

argumenta que esta concepción de formalidad introduce el sentido algebraico de esta noción. Tanto Shapiro (2005) como Detlefsen (2005) concuerdan en que en los sistemas formales de Hilbert es sistematizada esta noción algebraica de formalidad. Sólo que Detlefsen añade que esto se debe a que Hilbert permite operar lógicamente con los signos de un aparato formal sin considerar en ello ninguna clase de contenido semántico. Ferreirós afirma que la noción de formalidad entendida como la libre interpretación de los sistemas formales fue introducida por los sistemas *H* (2001, p. 469). Awodey y Reck (2002) reconocen por su parte que la formalidad de un lenguaje formal está en la posibilidad 'considerar un amplio rango de interpretaciones' (2002, p. 11). Por lo que cabe sugerir que la noción de formalidad introducida por los sistema *HT*, de acuerdo con la cual un lenguaje formal o con mayor precisión, el vocabulario no-lógico de una lenguaje formal es libremente reinterpretable no es ajena a la noción de formalidad de Hilbert.

Frege, por su parte, manifestó abiertamente su rechazo a una concepción de forma independiente de todo contenido semántico; Russell hizo lo propio respecto a la concepción algebraica de los sistemas lógicos como múltiplemente interpretables.[47] Frente a estas dos posiciones que resumen parte de los resultados que aquí he presentado, cabe reconsiderar la versión ampliamente aceptada de que la semántica aún estándar opera con una noción de forma heredera de *Conceptografía*, es decir, con una noción de forma como generalidad. La vigencia de esta postura y la de Shapiro antes mencionada constata que el carácter formal de *Conceptografía* no es agotado ni por la noción de generalidad de Frege ni por la noción algebraica de formalidad de Hilbert. Los sistemas formales interpretados abren una nueva perspectiva desde la cual evaluar en qué sentido es formal el sistema de *Conceptografía*. La

[47] En el caso de Frege remito al lector al capítulo 1 de este documento. Para el caso de Russell, a las notas no. 29 y no. 30, también de este documento.

respuesta que perfilo es que la generalidad necesaria para explicar la validez de una inferencia y con ello, la aplicación universal de la lógica, es formalmente tratable vía la noción algebraica de formalidad sistematizada por Hilbert. Es mérito de Tarski (1982a) el haber mostrado lo anterior al reunir ambos aspectos en una sola noción de formalidad. Cuáles sean las 'fortalezas' de esta noción dependen de la función que cumplen los sistemas formales interpretados en la introducción de conceptos matemáticos. La evaluación positiva de estas 'fortalezas' se traduce en la adhesión al proyecto lógico de la forma lógica y motiva su extensión a través del proyecto semántico.

5.3. ¿Por qué conservar el concepto de formalidad de Hilbert?

De acuerdo con el criterio de objetividad del que depende el concepto de formalidad de Hilbert, los objetos generados por recursión gozan de un tipo de evidencia que los hace ser especialmente confiables para operar con ellos (Sieg 1999, p. 31 y Giaquinto 2002, pp. 156-7). El supuesto de que las demostraciones matemáticas son lógicamente analizables a través de un lenguaje recursivo aparece tácitamente en la *Conceptografía*. Para Hilbert, este supuesto es entendido en términos de una relación entre los procesos de formación de las expresiones dentro de un sistema formal y ciertos procesos cognitivos elementales. En virtud de esta relación, la evidencia de la que gozan los procesos de formación dentro de un sistema formal es intuitiva y autoconvincente. De acuerdo con la exposición que he hecho, el finitismo es el modelo teórico de esta evidencia: En el finitismo la *intuición* de un *objeto aritmético*, en los términos expuestos por Kant, es aproximada a través de la introducción de un objeto formal por métodos recursivos.

Hilbert buscó extender las ventajas epistémicas asociadas con la recursión fuera de los límites de la intuición a través de una noción de formalidad. Para ello sistematizó un lenguaje recursivo, propuso una metateoría de este lenguaje y con ello, abrió la posibilidad para establecer relaciones entre estructuras formales. Cabe preguntarnos si como lo propuso Hilbert, la demostración de la consistencia-real de una teoría recursivamente axiomatizada es la manera de adecuar la formalidad a las condiciones de objetividad asociadas con la recursión. Y si por consiguiente, a falta de esta demostración, esta noción de formalidad es incorrecta.

Los sistemas formales desarrollados por Hilbert nos plantean que (i) la recursión es confiable por el respaldo que recibe de la elementalidad de las facultades cognitivas involucradas en su realización; (ii) en un sistema formal la forma lógica de una expresión es explicitada por la sintaxis del sistema como resultado de un proceso recursivo; y (iii) en virtud de lo anterior, la forma lógica de una expresión es en la metateoría del sistema una entidad combinatoria finita. Por otra parte, la consistencia es una propiedad de los sistemas de axiomas y su relación con la confiabilidad de los procesos recursivos es lo que está en cuestión. Si (i)-(iii) son razones para admitir que la noción de formalidad de Hilbert recupera la confiabilidad de los procesos constructivos introducida por Kant,[48] la pregunta es si esta confiabilidad debe supeditarse al criterio que legitima un sistema de axiomas y si éste criterio es la consistencia; en caso de que lo sea, debemos cuestionar si dicha consistencia requiere demostrarse en los términos estipulados por Hilbert. Una respuesta afirmativa a esta serie de cuestiones conduce a negar que el concepto de formalidad en juego capture la confiabilidad de los procesos recursivos. Sin embargo, el rechazo de la posición fundacionista de Hilbert libera la confiabilidad de estos procesos del requisito de consistencia en los términos establecidos por Hilbert.

[48] Una pregunta previa es por supuesto si tenemos razones para conservar la noción de objetividad de Kant aquí en juego.

De acuerdo con la posición fundacionista de Hilbert, la existencia de un objeto matemático se garantiza formalmente por las relaciones formales entre la teoría de dicho objeto y la matemática finita; en particular, porque la consistencia-real de dicha teoría se sigue formalmente de la consistencia de la matemática finita. Stenlund (2009) señala que esta posición fundacionista presupone que las matemáticas son *una* ciencia deductiva unificada a partir de un centro ontológico. Pero la práctica matemática reciente hace implausible mantener tal unidad (2009, p. 501). Ante lo cual, la posición fundacionista de Hilbert es al menos cuestionable. No obstante, la pérdida de este centro ontológico no cuestiona (i)-(iii), en particular no cuestiona el carácter cognitivamente elemental de los procesos recursivos que 'fundamenta' la noción de formalidad de Hilbert. Aunque esta pérdida sí cuestiona el papel de la forma lógica para garantizar la existencia objetiva de los objetos matemáticos y justificar la objetividad de conocimiento matemático. En particular el riesgo que ahora corre la noción de forma de Hilbert es el de trivializarse como el resultado de cualquier proceso recursivo. Este es el problema que dejo abierto. Aunque como parte de las conclusiones de este documento ofrezco una solución posible. Esta solución depende de la viabilidad del proyecto semántico de la forma lógica.

Conclusión

El comentario con el que finalizo trata de las motivaciones que el *proyecto semántico de la forma lógica* tiene a partir del proyecto de formalización de Hilbert.

El problema planteado por la tradición semanticista iniciada por Tarski de que la noción de formalidad de Hilbert es insuficiente para definir la relación de consecuencia lógica es al menos, debilitado con la introducción de la noción de formalidad como la libre interpretación de los sistemas lógicos. Sin embargo, esto no resuelve el segundo problema planteado para esta noción. Se trata de repensar el papel que la forma lógica tiene una vez que es rechazada la posición fundacionista enarbolada en el supuesto de unidad de las matemáticas como una ciencia deductiva. Tras el rechazo de esta posición fundacionista ¿tiene aún la forma lógica un papel en la justificación de la objetividad del conocimiento matemático? O peor aún ¿qué evita que esta noción se trivialice al resultado de cualquier proceso recursivo? Evidentemente parte de nuestra respuesta dependerá de la posición que tomemos al respecto de si la objetividad del conocimiento matemático requiere justificarse.

En lugar de proseguir en esta línea, pido que consideremos que, con la incorporación de la semántica estándar a los sistemas formales de Hilbert y tras el rechazo de la posición fundacionista de este último, es todavía cierto que la forma lógica de una expresión dentro de un sistema formal determina los procesos de formación y de interpretación de esta expresión; y lo hace de modo tal que estos procesos aceptan una descripción como procesos recursivos. Este concepto de forma lógica sirve de base al proyecto lógico. De acuerdo con este concepto, la sintaxis y la semántica de los sistemas formales son tales que las expresiones en un sistema formal son construidas a través de una serie finita de pasos cada uno de los cuales está asociado con cierto valor semántico.

Tradicionalmente, esta propiedad de la *sintaxis formal* y de la *semántica formal* ha sido reconocida al declarar que los *lenguajes formales* surgidos en el marco de estos sistemas formales son *composicionales*. En una primera aproximación, digamos que un lenguaje composicional es aquel en el que el valor semántico de una expresión compleja de este lenguaje depende del valor semántico de todas y cada una de las partes constituyentes de esta expresión y del modo de combinación sintáctica de estas partes.

Ahora bien, de acuerdo con las bases epistemológicas de estos sistemas formales, la recursión es confiable en tanto que recupera la objetividad de los procesos constructivos. Esta es una razón para argumentar que el concepto de forma lógica definido por Hilbert sobre una base recursiva, introduce la confiabilidad de la recursión dentro del proyecto lógico en tanto que determina la composicionalidad de los lenguajes formales. En la medida de que la objetividad de los procesos constructivos está respaldada por la elementalidad de las facultades cognitivas involucradas en la ejecución de estos procesos, es plausible plantear la hipótesis de que estas mismas facultades se ejercen cotidianamente a través del lenguaje natural. Esta hipótesis motiva la propuesta de dar una explicación formal de los aspectos que integran a los lenguajes naturales. El proyecto semántico de la forma lógica se inscribe en esta propuesta y como tal, está acotado por el criterio de objetividad al que obedece el proyecto lógico. Esto significa al menos que el proyecto semántico está comprometido con la defensa de la composicionalidad del lenguaje natural.

En conclusión, la hipótesis de que las capacidades cognitivas que respaldan la confiabilidad de los métodos formales se ejercen ampliamente a través del lenguaje natural, conduce a proponer al proyecto semántico de la forma lógica como una extensión del proyecto lógico. Por esta razón, el proyecto semántico de la forma lógica es viable bajo la defensa de la hipótesis de que en virtud de la forma lógica de sus expresiones, los lenguajes naturales son composicionales. Además, la restricción de la forma lógica a la definición de *gramáticas* composicionales actúa también como un límite que impide trivializar esta noción: No cualquier conjunto de reglas que definen un proceso recursivo dan lugar a una forma lógica, sino sólo aquellas que conforman la gramática de un lenguaje composicional.

Apéndice A
Aritmética primitivo-recursiva

Formalización de la aritmética de los números naturales suficiente para expresar cualquier función primitivo-recursiva en el marco de una teoría lógica que incluye a todas las tautologías. Su invención es atribuida a Skolem (1923).[49] Torretti (1998) afirma que fue esta teoría la que Hilbert y su escuela retomaron como paradigma de las matemáticas finitas (1998, pp. 211 y ss.). No obstante, Zach (2003) afirma que la evidencia disponible sugiere que la recursividad primitiva a la que Hilbert y sus seguidores cercanos pretendieron restringir la metodología finitista, es resultado de un desarrollo propio e independiente de la obra de Skolem (2003, p. 220 y nota no. 23).

Lenguaje de la aritmética primitivo-recursiva

Un número infinito numerable de variables $x, y, z,\ldots$ variando sobre los números naturales.
Un número infinito numerable de variables proposicionales $p, q, r,\ldots$
Conectivas proposicionales $\rightarrow, \sim, \wedge, \vee, \leftrightarrow$
El símbolo de identidad =
El símbolo constante 0
El símbolo de sucesor: S
Símbolos para cada función primitivo-recursiva
En especial se incluyen los símbolos de la suma y el producto: + y ·
Paréntesis ()

Axiomas lógicos

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
4. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$
5. $\sim\sim A \rightarrow B$
6. $A \rightarrow \sim\sim A$

Axiomas para la identidad

1. $x = x$
2. $x = y \rightarrow y = x$
3. $((x = y) \wedge (y = z)) \rightarrow (x = z)$

Axiomas aritméticos

1. $\sim(S(x) = 0)$
2. $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$

Esquema para la definición de funciones primitivo-recursivas

$$\varphi(0, b_1,\ldots,b_n) = \mathfrak{a}(b_1,\ldots,b_n)$$
$$\varphi(S(a), b_1,\ldots,b_n) = \mathfrak{b}(a, \varphi(a), b_1,\ldots,b_n)$$

[49] Skolem, T. (1923) "The foundations of elementary arithmetic" in Jean van Heijenoort (trad. y ed.). (1967) *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Harvard University Press, pp. 302-33.

donde $\mathfrak{a}(b_1,\ldots,b_n)$ sólo contiene las variables $b_1,\ldots,b_n$, y $\mathfrak{b}(a, c, b_1,\ldots,b_n)$ sólo contiene las variables a, c, $b_1,\ldots,b_n$; y en donde ni $\mathfrak{a}$ ni $\mathfrak{b}$ contienen al símbolo φ ni a ningún otro símbolo de función que no haya sido definido con anterioridad. (Zach 2003, p. 220)

En especial se definen las funciones suma y producto

$x + 0 = x$
$x + S(y) = S(x + y)$

$x \cdot 0 = x$
$x \cdot S(y) = xy + x$

Regla de inducción (en lugar del esquema de inducción)

- De $\varphi(0)$ y $\varphi(y) \rightarrow \varphi S(x)$, deduce $\varphi(y)$ para cualquier fórmula φ(x).

Apéndice B

Sistema de axiomas de la aritmética finitista (Ackermann 1924)[50]

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
3. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
4. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
5. $(A \wedge B) \rightarrow A$
6. $(A \wedge B) \rightarrow B$
7. $(A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
8. $A \rightarrow (A \vee B)$
9. $B \rightarrow (A \vee B)$
10. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$
11. $A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$
12. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((\sim A \rightarrow B) \rightarrow B)$
13. $a = a$
14. $a = a \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b))$
15. $\sim(a + 1 = 0)$
16. $\sim(a = 0) \rightarrow (a = \delta(a) + 1)$

Nota: δ es una constante funcional definida por
$\delta(0) = 0$
$\delta\,(a + 1) = a$

Reglas de inferencia

1. *Modus ponens*: De $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ se infiere $\mathfrak{B}$.
2. Sustitución: Si $\mathfrak{A}$ es un axioma y x es una variable cualquiera, se infiere de $\mathfrak{A}$ la fórmula que se obtiene reemplazando uniformemente x en $\mathfrak{A}$ por la expresión apropiada de acuerdo con el parámetro sintáctico de x.

Esquema de definición para funciones recursivas

$$\varphi(0, b_1,\ldots,b_n) = \mathfrak{a}(b_1,\ldots,b_n)$$

$$\varphi(S(a), b_1,\ldots,b_n) = \mathfrak{b}(a, \varphi(a), b_1,\ldots,b_n)$$

en donde el término $\mathfrak{a}(b_1,\ldots,b_n)$ sólo contiene las variables $b_1,\ldots,b_n$, y = $\mathfrak{b}(a, c, b_1,\ldots,b_n)$ sólo contiene las variables a, c, $b_1,\ldots,b_n$; y en donde ni $\mathfrak{a}$ ni $\mathfrak{b}$ contienen al símbolo φ ni a ningún otro símbolo de función que no haya sido definido con anterioridad (Zach 2003, p. 220).

[50] Ackermann, W. (1924) 'Begründung des "tertium non datur" mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit', Disertación, Universidad de Göttingen. (Citado en Torretti, 1998 y Zach , 2003).

Apéndice C

Teorías matemáticas ideales

El *programa de Hilbert* las teorías matemática debían introducirse una por una empezando por la teoría de números elemental o la aritmética primitivo-recursiva, para continuar con las teorías ideales, por ejemplo, la aritmética de segundo orden, Z_2 y a continuación, ZFC. Para poder introducir ZFC después Z_2, Z_2 debía probar la consistencia de ZFC.

I. Axiomas de la aritmética de segundo orden Z_2

1. $x + 1 \neq 1$;
2. $x \neq y \rightarrow x + 1 \neq y + 1$;
3. $x + (y + 1) = (x + y) + 1$;
4. $x \cdot 1 = x$;
5. $x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x$;
6. $\forall x[x \in X \leftrightarrow y \in X] \leftrightarrow [X = Y]$;
7. $\exists X \forall y[y \in X \leftrightarrow \psi(y)]$ donde ψ es cualquier fórmula del lenguaje sin la variable libre X;
8. $1 \in X \wedge \forall x[x \in X \rightarrow x + 1 \in X] \rightarrow \forall x[x \in X]$.

II. Axiomas de la Teoría de Conjuntos ZFC

1. **Extensionalidad**

   $\forall z[z \in x \leftrightarrow z \in y] \rightarrow x = y$
2. **Unión**

   $\exists u \forall y[y \in u \leftrightarrow (\exists z \in x)\ [y \in z]]$
3. **Conjunto Potencia**

   $\exists p \forall y[y \in p \leftrightarrow (\forall z \in y)\ [z \in x]]$
4. **Esquema de Reemplazo**

   $\forall x \exists z \forall y[\varphi(x, y) \rightarrow \forall d \exists r \forall y[y \in r \leftrightarrow (\exists x \in d)\varphi(x, y)]$

   La fórmula φ puede contener variables libres distintas de x e y pero no las variables d, r o z.
5. **Infinito**

   $\exists s[\exists x[x \in s] \wedge (\forall x \in s)(\exists y \in s)\forall z[z \in y \leftrightarrow (z \in x \vee z = x)]]$
6. **Regularidad**

   $\exists y[y \in x] \rightarrow (\exists y \in x)(\forall z \in y)\ [z \notin x]$
7. **Elección**

   $$\{[(\forall y \in z)\exists z[z \in y] \wedge \forall yzt[y \in x \wedge z \in x \wedge t \in y \wedge t \in z \rightarrow y = z]\}$$
   $$\rightarrow \exists s(\forall y \in x)\exists t \forall u[(u \in y \wedge u \in s) \leftrightarrow u = t)]$$

Apéndice D

Ejemplo de un sistema formal del 'cálculo funcional restringido'

En (Hilbert y Ackermann, 1928), Hilbert y Ackermann ofrecen varios ejemplos de sistemas formales. Aquí retomo los componentes básicos de un sistema que reconoceríamos como de primer orden. De acuerdo con Raatikainen (2003), cuando Hilbert en su proyecto fudacionista habla de preservar la validez de los principios de la lógica clásica, en realidad está pensado en preservar los principios de la lógica de predicados de primer orden hoy estándar.

a. Variables proposicionales X, $Y, \ldots$
b. Variables de objeto x, $y, \ldots$
c. Símbolos de relación $F()$, $G(), \ldots$
d. Conectivas: $\vee$ y $\neg$. ($X \rightarrow Y$ significa $\neg X \vee Y$.)
e. Cuantificadores: $\forall$ y $\exists$. (En el original '(x)' para '$\forall x$' y '(Ex)' para '$\exists x$')
f. Axiomas:
   17. $X \vee X \rightarrow X$
   18. $X \rightarrow X \vee X$
   19. $X \vee X \rightarrow Y \vee X$
   20. $X \rightarrow Y) \rightarrow [Z \vee X \rightarrow Z \vee Y]$
   21. $\forall x\, F(x) \rightarrow F(x)$
   22. $F(x) \rightarrow \exists x\, F(x)$.

g. Reglas de inferencia:

   Regla de sustitución.

   Modus ponens

$$\frac{\phi \rightarrow \psi(x)}{\phi \rightarrow \forall x\, \psi(x)}$$

(Si x no ocurre libre en ϕ)

$$\frac{\psi(x) \rightarrow \phi}{\exists x\, \psi(x) \rightarrow \phi}$$

BIBLIOGRAFÍA

AWODEY, S. y Reck, E. H. (2002). “Completeness and Categoricity. Part I: 19th Century Axiomatics to 20th Century Metalogic”, en *History and Philosohy of Logic* 23, pp.1-30.

BADESA, C. (2004). *The Birth of Model Theory: Löwenheims's Theorem in the Frame of the Theory of Relatives*. Princeton: Princeton University Press.

BOOLE, G. (1982). *Investigación sobre las leyes del pensamiento.* (J. A. Suárez Hernández Trad.). Madrid: Paraninfo. (Trabajo original publicado en 1854).

BRADY, G. (1997). “From the Algebra of Relations to the Logic of Quantifiers”, en Nathan Houser *et al.* (Eds.). *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*, Bloomintong/Indianapolis: Indiana University Press, pp. 173-192.

DASTON, L. y Galison, P. (2001). *Objetivity*. New York: Zone Books.

DAVIDSON, D. (1967). “Truth and Meaning” en *Synthese* 17, pp. 304–323.

DETLEFSEN, M. (2008). “In Search of Formalism”, Lección I: Background, École Normale Supérieure, University of Notre Dame, Agence Nationale de la Recherche, U of Paris-Diderot, U of Nancy 2, Collège de France, Octubre 10, 2008, URL: <http://philosophy.nd.edu/people/all/profiles/detlefsen-michael/documents/InSearchofFormalism.L1f.HO_000.pdf>

-----(2005). “Formalism”, en S. Shapiro (ed.). *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford: Oxford university Press, pp. 236-317.

DUMMETT, M., (1991). *Frege: Philosophy of Mathematics*, Cambridge MA: Harvard University Press.

DuBOIS, J. (2003). “Argument Structure. Grammar in use” en J. DuBois, L. Kumpf y W. Ashby (Eds.), *Preferred Argument Structure. Grammar as Architecture for Function*. Amsterdam: John Benjamins, pp. 11-60.

ENDERTON, H. (2004). *Una introducción matemática a la lógica*. (J.A. Amor, Trad.) (2ª Ed.). México: Universidad Nacional Autónoma de México/Instituto de Investigaciones Filosóficas. (Trabajo original publicado en 1972).

FERREIRÓS, J. (2001). “The Road to Modern Logic-An Interpretation”, *The Bulletin of Symbolic Logic* 4, pp. 441-484.

FREGE, G. (1959). *The Foundations of Arithmetic*. (J. L. Austin, Trad.). Oxford: Basil Blackwell. (Trabajo original publicado en 1884).

-----.(1979). *Posthumous Writings*. (Hans Hermes, Friedrich Kambartel*, et al*. Eds., Peter Long Trad.). Oxford: Basil Blackwell.

-----.(1972). *Conceptografía*. *Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos*. (H. Padilla Trad.). México: Universidad Nacional Autónoma de México/Instituto de Investigaciones Filosóficas

-----(1972a). “Conceptografía” en Frege (1972), pp. 7-104. (Trabajo original publicado en 1789).

-----(1972b) “Sobre la justificación científica de una Conceptografía”, en Frege (1972), pp. 209-214.

GIAQUINTO, M. (2002) *The Search for Certainty: a Philosophical Account of Mathematics*, UK: Clarendon/Nueva York: Oxford University Press.

GÖDEL, K. (1986). *Collected Works.* Vol 1, (S. Feferman Ed.). Nueva York: Oxford University Press/Clarendon Press.

-----. (1986). “On formally undecidable propositions of *Principia Mathematica* and Related Systems I”, en K. Gödel (1986), pp. 145-195. (Trabajo original publicado en 1931).

GREEN, J. (1994) “The Algebra of Logic: What Boole Really Started” en Modern Logic, Vol. 4, No. 1, pp. 48-62.

HILBERT, (1993). “Acerca del Infinito” en *Fundamentos de las matemáticas*, (C. Álvarez y L. F. Segura selec., introd. y trad.). México: Universidad Naciona Autónoma de México, pp. 83-121.

HILBERT, D. y Ackermann, W. (1928). *Grundzüge der theoritischen Logik*. Berlín: Springer-Verlag.

HILBERT, D. y Bernays, P. (1968). *Grundlagen der Mathematik,* vol. I. (2ª ed.). Berlín/ Heidelberg/New York: Springer-Verlag.

KANT, I. (2002). *Crítica de la razón pura*, (P. Ribas prólogo, traducción, notas e índices), Madrid: Alfaguara.

LINDSTRÖM, S. y Palmgren E. (eds.). (2009). *Logicism, Intuitionism, and Formalism. What Become of Them?*. Dordrecht: Springer.

MacFARLANE, J. G. (2000). *What does it mean to say that logic is formal?*, Tesis doctoral. University of Pittsburgh.

MANCOSU, P. (2003). “The Russellian Influence on Hilbert and his School”, *Synthese* 137, p. 59-101.

MANCOSU, P., Zach, R. y Badesa, C. "The development of Mathematical logic from Russell to Tarski: 1900-1935", en prensa, versión final: abril de 2005. URL < http://www.ucalgary.ca/rzach/papers/history.html>

MAREK, W. V. y Mycielski J. (2001). “Foundations of Mathematics in the Twentieth Century”, en *The American Mathematical Monthly* 5, pp. 449-468.

MONTAGUE, R. (1974). *Formal Philosophy: Selected Papers of Richard Montague*. (R. Thomasson Ed.). New Haven: Yale University Press.

PATON, H. J. (1936) *Kant's Metaphisycs of Experience. A commentary of the first half of the Kritik der Reinen Vernunf*, Vol. II, Londres, George Allen & Unwin LTD.

RAATIKAINEN, P. (2003). "Hilbert's Program Revisited", en *Synthese* 127, pp. 157-177.

RUSSELL, B. (1919). *Introduction to Mathematical Philosophy*. Lodres: Allen and Unwin.

-----.(1914). *Our Knowledge of the External World*. Londres: John Allen and Unwin LTD.

SAYED-AHMED, T. (2005). "Algebraic Logic, Where Does It Stand Today?", en *The Bulletin of Symbolic Logic* 4, pp. 465-516.

SHABEL, L. (2006). "Kant's Philosophy of Mathematics" en P. Guyer (Ed.), *The Cambridge Companion to Kant*, (2a ed.). Cambridge: Cambridge University Press, pp. 95- 128.

SHAPIRO, S. (2005). "Categories, Structures, and the Frege-Hilbert Controversy: The Status of Meta-mathematics", en S. Lindström (2009), pp. 435-448.

SIEG. W. (1999). "Hilbert's Programs: 1917-1922", en *The Bulletin of Symbolic Logic* 1, pp. 1-44.

----- (2009) "Beyond Hilbert's Reach?", en S. Lindström (2009), pp. 449-483.

STENLUND, S. (2009), "Hilbert and the Problem of Clarifying the Infinite", en S. Lindström (2009), pp. 485-503.

TARSKI, A. (1983). *Logic, Semantics and Metamathematics.* (J. Corcoran Ed., J. H. Woodger Trad.). (2ª ed.). Indianapolis: Hackett.

-----.(1983a). "The Concept of Truth in Formalized Languages", en Tarski (1983), pp. 152-278. (Trabajo original publicado en 1933).

-----.(1983b). "On the Concept of Logical Consequence" en Tarski (1983), pp. 409-420.

TORRETTI, R. (1998). *El Paraíso de Cantor*. Santiago de Chile: Editorial Universitaria/Universidad Nacional Andrés Bello.

WHITEHEAD, A. N. y Russell, B. (1910). *Principia Mathematica,* vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press.

WITTGENSTEIN, L. (2002). *Tractatus Logico-philosophicus*. (L. M. Valdés Villanueva, trad., introd. y notas). Madrid: Tecnos. (Trabajo original publicado en 1922).

WRIGHT, C. (1983). *Frege´s Conception of Numbers as Objects*. Gran Bretaña: Aberdeen University.

Van VALIN, R. (2005). *Exploring the Syntax-Semantics Interface*. Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, São Paulo: Cambridge University Press.

ZACH, R. (2006). “Hilbert´s Program then and now”, en D. Jacquette (ed.). *Philosophy of Logic*. *Handbook of the Philosophy of Science*, vol. 5. Amsterdam: Elsevier, pp. 411-447.

-----.(2003). “The Practice of Finitism: Epsilon Calculus and Consistency Proofs in Hilbert’s Program”, en *Synthese* 137, pp. 211-259.