



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**



UNAM

INSTITUTO DE ASTRONOMÍA
CENTRO DE RADIOASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES
FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**DINÁMICA DE DISCOS DE ACRECIÓN:
EFECTOS DE AUTO-GRAVEDAD Y
VISCOSIDAD**

T E S I S

PRESENTADA POR:

NOEL LÓPEZ GONZAGA

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
**MAESTRO EN CIENCIAS
(ASTRONOMÍA)**

TUTOR:

DR. WILLIAM HENRY LEE ALARDIN

CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, D.F.
OCTUBRE, 2011



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado asignado:

Presidente:	Dra. Estela Susana Lizano Soberón
Primer Vocal:	Dr. Alejandro Cristián Raga Rasmussen
Secretario:	Dr. Mauricio Reyes Ruiz
Segundo Vocal:	Dr. William Henry Lee Alardin
Tercer Vocal:	Dr. Erick Nagel Vega

*A mi esposa Susana Blacio,
a mi padre Irineo López
y a mi madre Nora Gonzaga.*

Índice general

Índice general	I
1 Introducción	5
1.1. Acreción como fuente de energía	5
1.2. Espectro emitido	7
1.3. Modelos de discos de acreción	9
1.4. Viscosidad	10
1.5. Autogravedad	12
1.6. Objetivos	14
1.7. Teoría y resultados de los toros de acreción	14
2 Smoothed Particle Hydrodynamics	15
2.1. Introducción	15
2.2. Descripción Lagrangiana y Euleriana	15
2.3. Fundamentos de SPH	16
2.4. El Kernel de interpolación	18
2.5. Mecánica de Fluidos	19
2.6. Propiedades Físicas de los fluidos	19
2.7. Derivada Material	21
2.8. Conservación de masa	22
2.9. Conservación de momento	24
2.9.1. Fuerzas en un fluido	24
2.9.2. Ecuación de momento	24
2.9.3. Viscosidad artificial y disipación	26
2.10. Conservación de energía	27
2.10.1. Primera Ley de la termodinámica	27
2.10.2. La ecuación de energía	28
2.11. Integración temporal en SPH	29
2.12. Resolución	29

3	Acreción	31
3.1.	Introducción	31
3.2.	Acreción de Bondi	31
3.3.	Formación de discos	37
3.4.	Torcas tipo viscosas	40
3.4.1.	Prescripción α	43
3.4.2.	Prescripción β	45
3.5.	Discos de acreción	45
3.5.1.	Discos delgados	45
3.5.2.	Discos gruesos	50
3.5.3.	Toro en equilibrio	53
4	Interacciones gravitacionales	57
4.1.	Influencia del agujero negro sobre el disco	57
4.1.1.	Agujero Negro de Schwarzschild.	58
4.1.2.	Potencial de Paczyński-Wiita	58
4.1.3.	Distribución de momento angular Kepleriano	59
4.2.	Interacción Disco - Agujero negro.	60
4.3.	Autogravedad.	62
4.3.1.	Transformadas de Fourier y la ecuación de Poisson	63
4.3.2.	Potenciales en coordenadas cilíndricas	66
4.3.3.	Acoplamiento en el SPH	70
5	Resultados	73
5.1.	Condiciones iniciales	74
5.1.1.	Generación del toro y el parámetro de amortiguamiento	74
5.1.2.	Estabilidad en los discos autogravitantes	75
5.2.	Resultados para la prescripción α	77
5.3.	Resultados para la prescripción β	80
5.4.	Comparación entre la prescripción α y β	83
5.5.	Discos de acreción autogravitantes	91
5.5.1.	Discos con $\alpha = 0.01$	93
5.5.2.	Discos con $\alpha = 0.1$	95
6	Análisis y conclusiones	101
	Bibliografía	105
	Índice de figuras	109
	Índice de tablas	114

Agradecimientos

Quisiera empezar por agradecer a mi director de tesis, el Dr. William Lee, por haberme dado la oportunidad de trabajar con él. Agradesco mucho su paciencia, consejos y el apoyo que siempre me brinda para la solicitud de becas, congresos y aplicaciones para el Doctorado. Siempre estuvo pendiente de mi desempeño académico y sus enseñanzas fueron muy valiosas para mi formación tanto profesional, como personal. Ha sido una experiencia muy valiosa el haber trabajado con él y espero que en un futuro se pueda volver a repetir. Gracias Dr. William.

Quiero agradecer a los miembros de mi comité tutor, la Dra. Barbara Pichardo, la Dra. Irene Cruz-Gonzalez y el Dr. William Lee, por haberme guiado durante la maestría. Las recomendaciones que me dieron durante las reuniones de comité siempre fueron muy acertadas y facilitaron mi estancia durante la maestría.

A los sinodales, la Dra Susana Lizano, el Dr. Alejandro Raga, el Dr. Mauricio Reyes, el Dr. William Lee y el Dr. Erick Nagel, por haber aceptado revisar mi tesis en un periodo muy corto. Sus comentarios fueron de gran importancia para este trabajo de tesis.

A mi esposa, Susana Blacio Gonzalez, por haberme apoyado a lo largo de estos años. Este trabajo no habría sido posible sin tu ayuda y comprensión. Gracias por llenar mi vida con momentos de amor y alegría. Eres mi más grande inspiración y juntos trabajaremos por nuestro futuro. Te amaré por siempre.

Quiero agradecer a mis padres, Irineo López Cruz y Nora Gonzaga Cortez, por darme la vida y cuidarme desde pequeño. Su cariño y amor fueron vitales para mi formación personal. Gracias por colocarme en el camino de la ciencia y motivarme para seguir adelante. Agradesco todos los esfuerzos que hicieron tanto por mí como por mis hermanos para darnos una buena educación. Son unos excelentes padres y siempre serán un gran ejemplo para mí. Los quiero mucho.

A mis hermanos, Sacnite y Aarón, mis compañeros de juegos, peleas y travesuras

desde pequeños. Siempre he contado con ustedes y ustedes siempre contarán conmigo. Gracias por la ayuda que siempre me han brindado.

Agradesco a mis abuelitos, Genaro López, Imelda Cruz y Maria Cortes, por que siempre tengo presente todos los consejos que me han dado. Siempre he tenido un gran respeto hacia ellos y los admiro mucho.

Quiero agradecerle a mis amigos, compañeros de la preparatoria, licenciatura y maestría, Aldo Bermejo, Dante Montsalvo, Javier Suarez, Alejandro Aranda, Adriana Caballero, Monica Sanchez, Roy Matadamas, Carlos Escobar, Juan Carlos Rodriguez, Manuel Martínez, Yira Ramírez y Casandra Badillo por apoyarme tanto en asuntos escolares, como en los extracurriculares (fiestas, paseos, etc..). Siempre han estado presentes tanto en los momentos más alegres, como en algunos momentos difíciles. Gracias por ayudarme y brindarme su amistad.

A mis suegros, Patricia Gonzalez y Jose Luis Blacio, así como a Mariana Blacio y Diana Blacio, por confiar en mi en tan poco tiempo y por aceptarme en su familia. Todos han sido muy amables conmigo y los aprecio mucho.

Quiero agradecer al Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme dado la oportunidad de realizar mis estudios de maestría en esta gran institución. También quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) y a la Fundación Telmex por haberme apoyado economicamente a lo largo de este periodo.

Resumen

Se presentan simulaciones de estructuras toroidales alrededor de un agujero negro utilizando un potencial pseudo-newtoniano para producir efectos de gravedad fuerte provocados por la masa central. Se estudiaron toros de acreción con simetría axisimétrica, contruidos bajo una ley de momento angular constante.

Se utilizaron dos tipos de prescripción para generar la viscosidad del disco: la prescripción α y la prescripción β , la primera basada en movimientos caóticos y campos magnéticos internos, mientras que la segunda predice movimientos turbulentos puramente hidrodinámicos.

Se estudió la estructura y la dinámica de los toros de acreción bajo la influencia de la autogravedad. El potencial gravitacional del toro se resolvió utilizando Transformadas Rápidas de Fourier y diferencias finitas.

Los elementos del fluido que simularán al toro fueron generados con un método de Monte Carlo (para poder obtener números aleatorios), esto permitió crear una distribución de N partículas con un perfil toroidal en el plano R, z bajo ciertas condiciones iniciales. Una vez obtenidas las partículas que forman parte de los elementos del fluido, estas se relajaron dinámicamente introduciendo un término de amortiguamiento en las ecuaciones de movimiento con el objeto de obtener un estado de equilibrio de la distribución, o al menos muy cercano a este.

El código utilizado calcula distintas variables hidrodinámicas del sistema, como la densidad y energía total como funciones del tiempo, así como la masa del disco y la posición del centro de masa en la dirección R y z . Estos datos fueron analizados para poder observar diferencias entre discos con prescripción α y β , al igual que entre discos sin y con autogravedad.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Acreción como fuente de energía

El proceso de acreción a lo largo de la historia ha sido de gran importancia en el estudio de diversos sistemas. Este se encuentra presente en sistemas que van de tamaños de escala pequeños como los discos protoestelares hasta los núcleos activos de galaxias. Es de gran importancia poder entender la física detrás de este proceso, así como la formación, evolución y estructura de los discos de acreción.

El proceso de acreción ocurre cuando gas o materia cae (se acreta) hacia un objeto con atracción gravitacional y se acumula sobre el mismo. Esto puede ocurrir sobre cualquier objeto con una cierta masa M , sin embargo la extracción de energía resulta ser mucho más eficiente cuando el objeto central es más compacto, es decir que la razón M/R_* , siendo R_* el radio del objeto, sea mucho mayor.

La extracción de energía potencial gravitacional de la materia que esta siendo acreta a un cuerpo es la principal fuente de potencia en muchos de los sistemas binarios cercanos (Prendergast & Burbidge, 1968), y también se sabe que esta es la responsable de alimentar de energía a los Núcleos Activos de Galaxias y Quasares (Greenhill et al., 1996).

Para tener una idea del orden de magnitud de la energía que proporciona la acreción a estos sistemas, podemos hacer lo siguiente. Para un cuerpo de masa M y radio R_* , la energía potencial gravitacional liberada (por unidad de masa) en su superficie es

$$\Delta E_{acc} = \frac{GM}{R_*}, \quad (1.1)$$

donde G es la constante gravitacional. Si el cuerpo que esta acretando es una estrella de neutrones, con radio $R_* \approx 10$ km, masa $M \approx M_\odot$, entonces tenemos que ΔE_{acc} es del orden de 10^{20} erg por gramo de materia acretada. Para comparar este resultado, consideremos la energía que podríamos extraer de una masa m , obtenida por reacciones de fusión nuclear. El máximo para esta energía usualmente se obtiene en la astrofísica,

siendo el material inicialmente hidrógeno, por lo que la conversión que necesitamos es la quema de hidrógeno a helio. Esto implica una liberación de energía por unidad de masa

$$\Delta E_{nuc} = 0.007c^2, \quad (1.2)$$

donde $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ es la velocidad de la luz, con lo que obtenemos que esto es del orden de $6 \times 10^{18} \text{ erg}$ por gramo o 1/20 la energía liberada por acreción.

Un concepto importante en la teoría de acreción es el límite de Eddington. Esta cantidad nos indica el valor máximo de la luminosidad para una masa dada en un sistema esférico de acreción. Consideremos la acreción estable con simetría esférica. Podemos suponer que el material que esta siendo acretado consiste principalmente de Hidrógeno completamente ionizado. Debido a que la sección eficaz de los protones es un factor $(m_e/m_p)^2$ más pequeño ($m_e/m_p \approx 5 \times 10^{-4}$ es la razón entre la masa del electrón y el protón) que la sección eficaz de los electrones libres, la radiación ejercerá una fuerza principalmente en los electrones libres a través de la dispersión de Thomson. Tomando a S como el flujo de energía radiada (en $\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$) y a $\sigma_T = 6.7 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$ la sección eficaz de Thomson, entonces la fuerza radial hacia afuera en cada electrón será igual a la tasa con la cual se absorbe el momento, $\sigma_T S/c$ donde c es la velocidad de la luz.

Por otra parte, debido a que el gas esta ionizado, las fuerzas electrostáticas de Coulomb también juegan un papel importante entre los protones y electrones. Los electrones arrastraran con ellos a los protones durante su movimiento. Por lo que la radiación empujará al par protón-electrón en contra de la fuerza de gravedad total $GM(m_p + m_e)/r^2$ que actúa sobre cada par a una distancia radial r del centro. Podemos expresar al flujo de energía radiada en términos de la luminosidad L (erg s^{-1}) de la fuente de acreción, utilizando la simetría esférica tenemos que $S = L/4\pi r^2$. Por lo tanto la fuerza neta total en el par electrón-protón será

$$\frac{GM(m_p + m_e)}{r^2} - \frac{L\sigma_T}{4\pi cr^2} \approx \left(GMm_p - \frac{L\sigma_T}{4\pi c} \right) \frac{1}{r^2}.$$

Esta última aproximación es valida ya que la masa del protón m_p es mucho mayor que la masa del electrón m_e . El límite de Eddington se alcanza cuando esta última expresión se vuelve igual a cero. Es decir cuando la acreción de detiene.

$$L_{Edd} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T} \approx 1.3 \times 10^{38} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \text{ erg s}^{-1}. \quad (1.3)$$

Para una masa M fija esta cantidad nos indica el valor de la luminosidad L máxima para el cual puede existir la acreción de materia en dicho sistema. Para luminosidades mayores, la presión que ejerce la radiación (hacia afuera), excederá la atracción gravitacional (dirigida hacia el objeto central) y por lo tanto la acreción se detendrá. Si parte de luminosidad de la fuente central es generada por algún mecanismo diferente de la acreción, por ejemplo la quema de núcleos, entonces las capas externas del material que rodean al objeto central serán expulsadas, provocando una inestabilidad del sistema. Si

la luminosidad del sistema es obtenida totalmente por el proceso de acreción, entonces al detenerse la acreción de materia, la fuente se apagaría.

A pesar de las suposiciones realizadas para obtener el límite de Eddington, este resulta ser una aproximación de gran importancia. Para sistemas con una geometría diferente este límite varía significativamente de la situación real, pero aun así el límite nos puede dar un estimado de la situación real.

Para objetos alimentados por acreción el límite de Eddington implica un límite en la tasa de acreción estacionaria, \dot{M} (g s^{-1}). Si toda la energía cinética de la materia que cae se transformara a radiación en la superficie estelar, R_* , entonces de la ecuación (1.1) tenemos que la luminosidad de acreción es

$$L_{acc} = \frac{GM\dot{M}}{R_*}. \quad (1.4)$$

Podemos expresar la ecuación (1.4) en términos de ordenes de magnitud típicos, escribiendo la tasa de acreción como $\dot{M} = 10^{16} \dot{M}_{16} \text{ g s}^{-1}$,

$$\begin{aligned} L_{acc} &= 1.3 \times 10^{33} \dot{M}_{16} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{10^9 \text{ cm}}{R_*} \right) \text{ erg s}^{-1} \\ &= 1.3 \times 10^{36} \dot{M}_{16} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{10 \text{ km}}{R_*} \right) \text{ erg s}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Con esto podemos ver que para las estrellas de neutrones (del orden de $1M_\odot$ y $R_* \approx 10 \text{ km}$) la luminosidad será del orden de $10^{36} \text{ erg s}^{-1}$, mientras que para enanas blancas (del orden de $1M_\odot$ y $R_* \approx 10^9 \text{ cm}$) la luminosidad será del orden de $10^{33} \text{ erg s}^{-1}$.

1.2. Espectro emitido

Para la observación de estos objetos donde ocurre la acreción se puede hacer una estimación utilizando los términos ya descritos. Podemos caracterizar el espectro continuo de la radiación emitida con una temperatura de radiación T_{rad} , definida de tal forma que la energía típica de un fotón, $h\bar{\nu}$ sea del orden de kT_{rad} , por lo tanto $T_{rad} = h\bar{\nu}/k$, donde $k = 1.381 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$ y $h = 6.626 \times 10^{-27} \text{ erg s}$ son las constantes de Boltzmann y Planck, respectivamente.

Así mismo, para una luminosidad de acreción L_{acc} proveniente de una fuente con radio R_* , podemos definir una temperatura de cuerpo negro T_b como la temperatura que tendría la fuente si esta radiara como un cuerpo negro, es decir:

$$T_b = \left(\frac{L_{acc}}{4\pi R_* \sigma} \right)^{1/4}, \quad (1.6)$$

donde $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ es la constante de Stefan-Boltzmann.

Por último, definimos la temperatura T_{th} como la temperatura que el material acretado podría alcanzar si toda su energía potencial gravitacional fuera convertida completamente en energía térmica. Para cada par protón-electrón acretado, la energía potencial liberada sería $GM(m_p + m_e)/R_* \approx GMm_p/R_*$, y tomando la energía térmica como $3kT$ ($3/2kT$ por cada partícula), entonces tenemos que

$$T_{th} = \frac{GMm_p}{3kR_*}. \quad (1.7)$$

La temperatura de radiación que esperamos tiene que estar entre la temperatura de cuerpo negro y la temperatura térmica. Si el flujo de acreción es ópticamente grueso, la radiación puede alcanzar el equilibrio térmico con el material acretado y por lo tanto la temperatura debería tener un valor cercano a la temperatura de cuerpo negro T_b . Por otro lado si la energía de acreción es convertida directamente en radiación, la cual escapa sin alguna otra interacción, es decir si el material es ópticamente delgado, tendríamos que la temperatura de radiación se acercaría más al valor de la temperatura térmica T_{th} . Entonces la temperatura de radiación cumple con

$$T_b < T_{rad} < T_{th}.$$

Esto es simplemente una estimación obtenida de la suposición de que podemos caracterizar al disco con una sola temperatura ¹ (T_{rad}). Esto no aplica, por ejemplo, a una distribución no-Maxwelliana de electrones radiando en un campo magnético fijo.

Para el caso de una estrella de neutrones de una masa solar, el límite superior (1.7) nos da $T_{th} \approx 5.5 \times 10^{11}$ K, o en términos de energía $kT_{th} \approx 50$ MeV. En el caso del límite inferior, necesitamos tener una idea del valor de la luminosidad de acreción L_{acc} ; una primera aproximación puede ser el límite de Eddington $L_{Edd} \approx 10^{38}$ erg s⁻¹. Con esto obtenemos que $T_b \approx 10^7$ K ó $kT_b \approx 1$ KeV. La energía que esperamos para los fotones como resultado de la acreción en estrellas de neutrones debe de estar en el rango

$$1 \text{ keV} \lesssim h\bar{\nu} \lesssim 50 \text{ MeV}.$$

Análogamente podemos obtener el rango de energías esperado para el caso en el cual el objeto central es un agujero negro con masa $M \approx 1M_\odot$ y un radio ² $R_* \approx 3$ km. La energía esperada esta en el rango de

$$1.6 \text{ keV} \lesssim h\bar{\nu} \lesssim 160 \text{ MeV}.$$

Debido a que las estrellas de neutrones y los agujeros negros son los objetos más compactos que existen en el universo, podemos esperar que los sistemas que acretan materia hacia alguno de estos objetos resulten ser los más luminosos. El rango de emisión

¹En realidad la temperatura varia a lo largo del disco de acreción. El resultado obtenido en esta sección nos da una estimación de lo que podríamos esperar en estos sistemas.

²En el caso del agujero negro R_* no indica el radio de la superficie del agujero negro, en este caso R_* representa el radio de Schwarzschild. Este radio se definirá en el capítulo 5.

en el espectro irá desde los rayos X medios hasta los duros y posiblemente en la región de los rayos gamma.

Podemos aplicar estos límites también a enanas blancas que acretan materia. Para estos sistemas una aproximación a la luminosidad de acreción es del orden de $L_{acc} \approx 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$ (obtenida de la ecuación (1.5)). Tomando una masa $M = M_{\odot}$ y $R_* = 5 \times 10^8 \text{ cm}$, obtenemos que las frecuencias esperadas deben de estar en el rango

$$6 \text{ eV} \lesssim h\bar{\nu} \lesssim 100 \text{ keV}.$$

Esto nos indica que la emisión de las enanas blancas que acretan debe de ser en el óptico, ultravioleta y posiblemente en la región de los rayos X. Lo cual corresponde a lo que se sabe de las estrellas variables cataclísmicas.

1.3. Modelos de discos de acreción

El proceso de acreción es un fenómeno de gran importancia en la astrofísica. Sus estudios comenzaron con los trabajos realizados por Salpeter (1964) y Zeldovich (1964), en los cuales sugirieron que los objetos masivos podrían obtener energía debido a la influencia gravitacional que ejercen en las estrellas vecinas o el medio que los rodea. Posteriormente trabajos como los de Shklovsky (1967) y Prendergast & Burbidge (1968) enfatizaron la importancia del momento angular para la acreción en un sistema binario, en particular estudiaron el comportamiento de las fuentes de rayos X (Sco X-1 y Cyg X-2). Los primeros modelos de discos de acreción fueron construidos por Shakura (1972), Pringle & Rees (1972), Shakura & Sunyaev (1973). Estos modelos fueron construidos para estrellas de neutrones y agujeros negros, utilizando la física Newtoniana. Modelos que tomaban en cuenta la relatividad general sobre la parte interna del disco de acreción fueron propuestos por Novikov & Thorne (1973). También se propusieron modelos para los núcleos de las galaxias, Lynden-Bell (1969) propuso que en el centro de las galaxias podría existir un agujero negro supermasivo ($10^7 - 10^9 M_{\odot}$) rodeado por un disco de acreción gaseoso que estaría alimentando al agujero negro y por lo tanto suministrando grandes cantidades de energía.

A pesar de que las propiedades de los discos estándar de acreción (Shakura & Sunyaev, 1973), es decir, los discos delgados, se conoce muy bien aún falta por explorar varios aspectos. ¿Que pasa por ejemplo, si queremos construir un modelo de un disco de acreción en donde la tasa de acreción sea muy grande, superando la tasa de acreción de Eddington \dot{M}_{Edd} ³? de acuerdo con los estudios realizados por Abramowicz et al. (1978) y Paczyński & Wiita (1980), los discos deben volverse más gruesos, al menos en las regiones más cercanas a los objetos compactos, estos discos ya no estaran soportados unicamente por la rotación kepleriana, sino que ahora la presión tendrá un papel importante en la estructura radial y vertical del disco. Estas estructuras soportadas por

³La tasa de acreción de Eddington es la tasa de acreción necesaria para igualar la luminosidad de Eddington, para una masa M de la estrella y un radio R_* fijos, de acuerdo con la ecuación (1.5).

presión dan origen a los *discos gruesos* o también llamados *toros*. Dichas estructuras toroidales posiblemente se forman después del colapso del núcleo en una estrella masiva rotante (Woosley, 1993) o en las etapas posteriores a la fusión de dos objetos compactos en binarias cernanas (Narayan et al., 1992). En el contexto de las binarias de baja masa en rayos X (LMXB, por sus siglas en inglés), observaciones realizadas con RXTE (van der Klis, 2000) han mostrado que existen oscilaciones en milisegundos en sistemas que contienen una estrella de neutrones o un agujero negro rodeado por un toro de acreción. Los discos gruesos fueron puestos a prueba a partir del descubrimiento de la inestabilidad Papaloizou-Pringle (Papaloizou & Pringle, 1984), ellos sugieren que los toros libres de vorticidad son dinámicamente inestables ante modos globales no axisimétricos. Esto quiere decir que sería imposible para dichos objetos existir en un estado de equilibrio en la naturaleza, ya que estos serían destruidos o distorcidos drásticamente por la inestabilidad durante el tiempo que le toma en llegar a un equilibrio. Esto estimuló el estudio de estas estructuras toroidales y desde entonces se ha realizado diversos estudios, tanto analíticos como numéricos considerando diferentes leyes de rotación y distribuciones de la entropía (ver Narayan (1991) para un review acerca de este tema). Algunos estudios acerca de la inestabilidad Papaloizou-Pringle fueron realizados posteriormente (ver Kojima 1986, Glatzel 1987, Blaes 1987, Goodman & Narayan 1988). Algunos años después se realizaron estudios con simulaciones hidrodinámicas en 3D (Zurek & Benz 1986, Hawley 1990, 1991). Estos cálculos mostraron que aunque esta inestabilidad crece, la tasa de crecimiento de la inestabilidad a lo largo del toro no es muy significativa (Hawley, 1991), y en ocasiones la inestabilidad puede ser estabilizada por efectos del flujo (Blaes, 1987) y/o por la autogravedad (Goodman & Narayan, 1988).

1.4. Viscosidad

Aun cuando la teoría de los discos de acreción ha tenido grandes logros al poder ajustarse a las observaciones, esta teoría no tiene un poder predictivo muy grande a excepción de algunas situaciones límite. Esto se debe principalmente a la incertidumbre de la naturaleza y magnitud de la viscosidad. Como se verá en más adelante, la viscosidad gobierna la estructura local del disco, así como la escala de tiempo con la que éste evoluciona. Una de las cosas que se sabe con cierta certeza es que la viscosidad molecular ordinaria es demasiado pequeña para producir alguna influencia en el disco, aunque no hay razón alguna para que modelos que incluyan esta viscosidad no puedan ser construidos.

Parte del problema que enfrentan los discos de acreción es que en estos sistemas se tiene que lidiar con un medio con un fuerte rozamiento que además es supersónico, radiativo, y tiene números de Reynold altos. El rozamiento y los números de Reynold altos han hecho que se llegue a pensar que el flujo debe de ser inestable ante movimientos turbulentos. Esto ha llevado a las discusiones de la teoría de mezclado (von Weizsacker, 1943) y fue parte de la motivación para la prescripción α (Shakura & Sunyaev, 1973).

Para los discos α podemos definir el número de Reynolds efectivo como

$$Re \approx \alpha^{-1}(R/H)^2 \gg 1,$$

donde Re es el número de Reynolds efectivo, R es la coordenada radial y H es un tamaño típico de escala en la dirección z^4 (este termino será descrito más adelante). Lynden-Bell & Pringle (1974) argumentaron que $Re \approx 10^3$, basado en la intuición de la turbulencia de laboratorio (subsónica y no-radiativa). Aunque no hay una justificación para esta proposición.

Aunque, hay una pequeña certeza acerca de cómo hacer una prescripción para dicha viscosidad turbulenta en la ausencia de una teoría física propia para la turbulencia. Una de las viscosidades más adoptadas es la prescripción α introducida por Shakura (1972) y Shakura & Sunyaev (1973), la cual describe la viscosidad ν como el producto del tamaño típico de escala H determinado por la presión, la velocidad del sonido c_s y un parámetro α en el cual esta contenida toda la física que se desconoce:

$$\nu = \alpha c_s H.$$

En esta prescripción a la viscosidad se le atribuye un origen en la turbulencia y en las pequeñas inestabilidades magnéticas dentro del fluido. Aunque es posible calcular un valor de α , una parametrización de este tipo para ν es únicamente útil si el parámetro de proporcionalidad α es aproximadamente constante. Podríamos esperar que esto sucediera únicamente si las cantidades de escala fueran escogidas en una manera física apropiada. Los modelos para la estructura y evolución de los discos de acreción en sistemas binarios cercanos (novas enanas y estrellas simbióticas) muestran que la parametrización de Shakura & Sunyaev con α constante lleva a resultados que reproducen el comportamiento observado de los discos en estos sistemas de manera correcta. Los modelos dependientes del tiempo para las eyecciones de las novas enanas (Meyer & Meyer-Hofmeister, 1984) y los transitorios de rayos X (Cannizzo, 1996) demuestran que, sobre un amplio rango de estados físicos del disco en diferentes fases de su evolución, los valores obtenidos para el parámetro de viscosidad α no varían más allá que aproximadamente un orden de magnitud y los valores no están muy alejados de la unidad. Como un resultado de estos éxitos y la falta de una teoría, la prescripción α es usada esencialmente en casi todos los modelos de discos de acreción. A pesar de su éxito, la prescripción α no contiene información acerca del mecanismo que genera la turbulencia, únicamente contiene los límites físicos para su eficiencia en un disco.

Algunos otros estudios, como el de Balbus & Hawley (1991) y sus colaboradores Hawley et al. (1995), han mostrado que para discos de acreción magnéticos no auto-gravitantes, existe una inestabilidad que puede dar origen a la turbulencia con la dependencia y cantidades requeridas. No obstante en algunos sistemas como en el caso de

⁴Estamos suponiendo que el sistema tiene simetría axisimétrica. La posición de los puntos en el espacio sera descrita por un sistema de coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z) . El eje z coincide con el eje de rotación del disco.

las regiones proto-estelares y los discos protoplanetarios, la ionización no es tan grande como para mantener una viscosidad magnética significativa, por lo que el origen de la viscosidad en estos sistemas tiene que ser distinto, probablemente hidrodinámico.

Si la turbulencia hidrodinámica puede mantener la viscosidad en el perfil de momento angular de un disco de acreción y si esto puede resultar en un transporte de momento angular hacia las regiones con un momento angular específico mayor aun no está tan claro. Balbus et al. (1996), argumentaron en contra de una viscosidad puramente hidrodinámica; ellos basaron sus argumentos en experimentos numéricos, aunque estos experimentos se han realizado para números de Reynolds muy bajos comparados con los que se encuentran en estos objetos astrofísicos. Dubrulle (1992) y Kato & Yoshizawa (1997) junto con otros investigadores, han argumentado a favor, basados principalmente en consideraciones analíticas. Los experimentos con flujos de Couette-Taylor (Wendt, 1933; Taylor, 1936a,b) muestran una clara evidencia de la existencia de una inestabilidad puramente hidrodinámica. Aunque el fluido es esencialmente incompresible, la turbulencia es generada por encima de un número de Reynolds crítico, independiente del perfil radial del momento angular. Richard & Zahn (1999) reanalizaron los resultados de los experimentos de Taylor y, para números de Reynolds grandes, los han interpretado en términos de una viscosidad turbulenta. Con base en estos estudios Duschl et al. (2000) han propuesto una generalización para la prescripción de la viscosidad en discos de acreción basada en la turbulencia puramente hidrodinámica generada a un número de Reynolds crítico. Esta es llamada la prescripción β .

$$\nu = \beta R v_\phi$$

donde β es el parámetro de eficiencia, R es el radio en coordenadas cilíndricas y v_ϕ es la velocidad circular. En esta búsqueda de la prescripción correcta para la viscosidad de los discos de acreción, puede resultar más probable que un enfoque más observacional pueda resultar más fructífero para descubrir las propiedades de la viscosidad del disco que un enfoque puramente teórico. Aunque como es usual, no es tan fácil el poder interpretar la observaciones en una manera no ambigua. En este trabajo se hará un análisis de ambas prescripciones haciendo un estudio de la estructura y dinámica que cada uno de estos provoca en el disco de acreción. Posteriormente se hará una comparación para poder encontrar alguna característica que pueda ayudar a diferenciar entre cual es el mecanismo que provoca la viscosidad en el fluido.

1.5. Autogravedad

Los discos de acreción son un resultado natural de las estructuras rotantes que colapsan. En algunos casos, las masas pueden ser relativamente altas y los efectos de autogravedad pueden ser importantes.

Tradicionalmente, los modelos de acreción ignoran la autogravedad asociada con el disco y consideran al disco en una rotación Kepleriana alrededor de un objeto compacto

(Pringle, 1981). Pero en ciertas ocasiones no resulta ser tan válido el despreciar esta contribución. Por ejemplo, existen observaciones en Núcleos Activos de Galaxias (Greenhill et al., 1996) y en discos protoestelares (Hillenbrand et al., 1992) que apuntan a que en algunos casos la autogravedad del disco puede jugar un papel importante.

En el contexto de los discos de acreción en Núcleos Activos de Galaxias, en la galaxia Seyfert NGC 1068, la curva de rotación parece mostrar una desviación significativa a la ley Kepleriana, ya que se observa una velocidad de rotación que va como $r^{-0.35}$ a distancia aproximadamente de 1 pc del centro (Greenhill et al., 1996). La observación de emisión de maseres de agua en NGC 1068 también han sugerido la presencia de un disco autogravitante (Huré, 2002; Lodato & Bertin, 2003). En escalas espaciales pequeñas, la autogravedad juega un papel crucial en las etapas finales de la formación estelar. Se piensa que el material con un momento angular bajo colapsa en una protoestrella en escalas de tiempo del orden de 10^5 años, mientras que el material con un momento angular alto genera un disco alrededor de la protoestrella (Cassen & Moosman, 1981). Ya que la masa del disco crece conforme la caída de material proveniente de la nube inicial continua, el disco en principio, podría llegar a ser autogravitante. La autogravedad puede llegar a tener un papel importante en la generación de inestabilidades del sistema. Cuando llegamos a tener regiones de alta densidad, la autogravedad se vuelve importante y las inestabilidades locales, similares a la inestabilidad de Jeans podrían generarse. Este fenómeno ha sido considerado ya por varios autores en conexión con varios objetos astrofísicos, pero aun falta por hacerse un estudio más completo en los discos de acreción.

En las galaxias espirales la materia interestelar forma un disco muy plano. En estos casos se cree que las inestabilidades locales son importantes para la formación de estrellas en estas condiciones. Los discos estelares delgados desarrollan inestabilidades locales debido a la autogravedad (Toomre, 1964). Aquí la inestabilidad aumenta las velocidades de las estrellas. Un resultado de esto, es que el disco se vuelve más grueso y la inestabilidad se debilita. Este tipo de inestabilidades también se han considerado en el contexto de los anillos de Saturno (Ginsburg et al. 1971) y con las nebulosas protoplanetarias (Safronov 1969).

Otro ejemplo de los efectos generados por la autogravedad se observa en algunos experimentos numéricos en discos, los cuales muestran que la autogravedad genera inestabilidades no axisimétricas, en forma de ondas de densidad espirales, las cuales redistribuyen la materia y el transporte de momento angular hacia afuera (Tohline & Hachisu, 1990; Laughlin et al., 1997; Pickett et al., 2000, 2003; Mayer et al., 2002). Fromang et al. (2004) mostraron que la autogravedad puede producir también un efecto estabilizador. Ellos hicieron comparaciones entre toros con campos magnéticos con y sin autogravedad para densidades y perfiles de rotación similares. Se observó que el disco sin autogravedad mostraba un comportamiento más desordenado que el disco con autogravedad. El primero arrojaba fluctuaciones en la densidad más altas, mientras que el segundo mantenía una estructura global mucho más coherente. Uno esperaría que las fluctuaciones de densidad locales se hicieran más notables con la presencia de la autogravedad. Pero al

contrario, la naturaleza global del potencial parece ser más importante en la evolución del disco. En este régimen, la autogravedad suaviza el efecto de la turbulencia y le da una coherencia al disco.

En este trabajo se hará un estudio de los efectos que se generan al tomar en cuenta la autogravedad del disco en modelos axisimétricos. El cálculo de dicha autogravedad se calculará utilizando Transformadas Rápidas de Fourier.

1.6. Objetivos

- Realizar un estudio del comportamiento de la estructura y evolución de los toros de acreción alrededor de agujeros negros, utilizando la prescripción α y β para el acoplamiento de la viscosidad. Estos toros no incluyen un campo magnético, ni autogravedad y se supondrá que las partículas en el disco experimentan un proceso adiabático.
- Comparar los resultados obtenidos para ambas prescripciones para poder determinar si existe alguna diferencia significativa que pueda ser útil para compararse posteriormente con observaciones y de esta forma poder determinar la naturaleza de la viscosidad dentro del fluido.
- Analizar el comportamiento desde un enfoque dinámico de un toro de acreción autogravitante.

1.7. Teoría y resultados de los toros de acreción

En el capítulo 2 se dará una descripción de las ecuaciones necesarias para describir la dinámica de un gas utilizando técnicas numéricas (SPH). También se describirá la naturaleza física de las ecuaciones requeridas. En el capítulo 3 se hará una revisión del proceso de acreción, desde la acreción esférica hasta la formación de discos. Se desarrollarán las ecuaciones que describen el comportamiento de los discos de acreción delgados y gruesos (toros) así como la construcción de un toro estable. En el capítulo 4 se describirán las interacciones gravitacionales involucradas en el sistema agujero negro-toro. Se justificará el uso de un potencial semi-Newtoniano y se describirá el uso de técnicas eficientes para el cálculo de la autogravedad del toro. En el capítulo 5 se mostrarán los resultados obtenidos de las simulaciones. Estos podrán observarse en figuras y tablas. Al final se darán las conclusiones de este trabajo y sus posibles aplicaciones.

Capítulo 2

Smoothed Particle Hydrodynamics

2.1. Introducción

Varios de los objetos astrofísicos que observamos en el universo han sido formados por procesos que involucran la dinámica de fluidos. Desde grandes a pequeñas escalas, del gas en los cúmulos de galaxias hasta la estructura interna de los planetas y estrellas, todo ha sido formado por la interacción entre gravedad, dinámica de gases y otros procesos físicos, tales como la interacción con la radiación, las reacciones nucleares y los campos magnéticos.

La técnica de *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) para simular fenómenos hidrodinámicos fue descrita inicialmente por Lucy (1977); Gingold & Monaghan (1977). Fue originalmente desarrollado para simular fenómenos no-axisimétricos en la astrofísica. Esta técnica ha sido empleada en el estudio de muchos problemas de la astrofísica incluyendo discos de acreción, formación estelar, explosiones de supernovas, colisiones estelares, formación e interacción de galaxias, (ver Rosswog 2009 para un revisión del tema). El código SPH que se usara para el trabajo en esta tesis fue originalmente desarrollado por el Dr. William Lee (Lee & Ramirez-Ruiz, 2002). Este código describe la evolución de un disco grueso axisimétrico de acreción (toro).

En este capítulo se hará una breve descripción de los principios básicos que se encuentran detrás del método SPH, así como las principales ecuaciones de la mecánica de fluidos que se incorporan en el código.

2.2. Descripción Lagrangiana y Euleriana

Existen dos formas de describir el movimiento de un fluido. En la *descripción Lagrangiana*, esencialmente se estudia el movimiento de las partículas de manera indivi-

dual. En este caso, para las variables independientes se toma el tiempo y una etiqueta para las partículas del fluido. Para la etiqueta se puede tomar el vector de posición \mathbf{x}_0 de la partícula en algún tiempo de referencia $t = 0$. Por lo que la posición de la partícula ser $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$, lo cual representa la posición en un tiempo t de la partícula que se encontraba en la posición \mathbf{x}_0 en $t = 0$.

En la *descripción Euleriana*, nos concentramos más en lo que sucede en un punto espacial \mathbf{x} , de tal forma que las variables independientes sean \mathbf{x} y t . Es decir, la variable del flujo se escribe como $F(\mathbf{x}, t)$.

La descripción Euleriana se usa en general para estudios de flujos en una región determinada. La descripción Lagrangiana se usa cuando estamos interesados en encontrar los caminos de las partículas con una identidad fija.

2.3. Fundamentos de SPH

El SPH se puede ver como un esquema de interpolación, que nos permite expresar cualquier función en términos de valores en un conjunto de puntos desordenados, es decir las partículas.

Consideremos una función $f(\mathbf{r})$, que esta definida en el espacio, $\xi(\mathbf{r})$. Una aproximación suave a esta función puede ser obtenida como

$$\tilde{f}(\mathbf{r})_h = \int_{\xi} f(\mathbf{r}') W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d^3 r'. \quad (2.1)$$

La función, W es conocida como el kernel. Y cumple con las siguientes propiedades,

$$\int W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}' = 1. \quad (2.2)$$

Su ancho esta parametrizado por el tamaño de suavizamiento, h . Si uno quisiera recuperar la función original en el límite de un región infinitesimal pequeña entonces el kernel debe de satisfacer la siguiente relación

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{f}_h(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}).$$

Típicamente, la función del kernel tiene un pico muy pronunciado en $r = 0$, de tal forma que cuando $h \rightarrow 0$, el kernel se vuelve una función delta, $\delta(\mathbf{r})$.

Ahora supongamos que únicamente conocemos los valores de $f(\mathbf{r})$ en un número de puntos discretos N , en lugar de sobre todo el dominio. Dichos puntos tendran una distribución de densidad $\rho(\mathbf{r})$ de la siguiente forma

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (2.3)$$

donde \mathbf{r}_j es la posición del punto j . Para llegar a una aproximación discreta, escribimos la integral de interpolación como

$$\tilde{f}(\mathbf{r})_h = \int_{\xi} \frac{f(\mathbf{r}')}{\rho(\mathbf{r}')} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) \rho(\mathbf{r}') d^3 r', \quad (2.4)$$

Podemos remplazar la integral por una suma sobre un conjunto de puntos de interpolación, cuyas masas, m_j , resultan del término $\rho(\mathbf{r}') d^3 r'$

$$\tilde{f}(\mathbf{r})_h = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho(\mathbf{r}_j)} f(\mathbf{r}_j) W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h). \quad (2.5)$$

A cada punto, con su masa asociada, se le conoce como una partícula SPH. La ecuación (2.5) es la ecuación base para el método SPH, ya que nos permite encontrar aproximaciones suaves a las cantidades físicas del fluido.

Por ejemplo, para la densidad en cada punto del fluido tomamos $f(\mathbf{r}) \equiv \rho(\mathbf{r})$ en la ecuación (2.5), por lo tanto

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r})_h = \sum_{j=1}^N m_j W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h). \quad (2.6)$$

El método de Smoothed Particle Hydrodynamics recibe este nombre debido a que la masa de cada partícula puede ser pensada como un suavizamiento de esta misma sobre la región del kernel, de tal forma que podamos obtener una distribución de densidad continua del fluido.

Este formalismo de suavizamiento también nos indica una manera de encontrar el gradiente de alguna propiedad del fluido. Por definición de la función de interpolación

$$\tilde{\nabla} f(\mathbf{r}) = \int_{\xi} \nabla f(\mathbf{r}') W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d^3 r'.$$

Haciendo una integración por partes

$$\tilde{\nabla} f(\mathbf{r}) = \int_{\partial\xi} f(\mathbf{r}') W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) \mathbf{n} da + \int_{\xi} f(\mathbf{r}') \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d^3 r'.$$

Lo que obtenemos es la suma de dos integrales, una de superficie y otra de volumen. El término de superficie lo podemos ignorar si suponemos que el espacio de solución se extiende muy lejos, de tal forma que la función $f(\mathbf{r})$ se vuelve despreciable, o que la función del kernel desaparece. En principio este término de superficie puede ser usado para proveer de condiciones de frontera al SPH al evaluar esto para partículas que estén cerca de la frontera para las cuales la función $f(\mathbf{r})$, ni el kernel desaparecen. En la práctica, sin embargo, esto puede resultar complicado de hacer. Suponiendo que el término de la integral de superficie puede ser ignorado, la interpolación para el gradiente de una función resulta ser

$$\tilde{\nabla} f(\mathbf{r}) = \int_{\xi} f(\mathbf{r}') \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d^3 r'.$$

O expresado en su forma discreta,

$$\tilde{\nabla} f(\mathbf{r})_h = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho(\mathbf{r}_j)} f(\mathbf{r}_j) \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h). \quad (2.7)$$

En esta expresión se utiliza el gradiente ∇ de la función del kernel, es decir ∇W . Esta función es analítica y conocida, por que no hay necesidad de utilizar una aproximación con diferencias finitas. Con las ecuaciones (2.5) y (2.7), podemos expresar cualquier propiedad del fluido y su gradiente local puede ser evaluado, suponiendo que ∇W no desaparece. El gradiente nos permite calcular la presión y las fuerzas viscosas en cualquier punto dentro del fluido, y por lo tanto sobre las partículas.

Las principales ventajas del SPH sobre otros métodos es que es Lagrangiano y no requiere del uso de mallas para calcular derivadas espaciales. Además, no es necesario saber que regiones necesitan de una resolución más alta para poder seguir de mejor manera la simulación, ya que las partículas siguen la distribución del fluido y automáticamente le dan más resolución a las zonas con densidades más altas. Esto no quiere decir que el método del SPH sea el mejor, existen métodos Eulerianos con ventajas que pueden superar al SPH. Por lo que la elección del método que se utiliza depende del problema que se tenga y de los parámetros a estudiar.

2.4. El Kernel de interpolación

Para restringir el número de partículas que contribuyen en la suma de la ecuación (2.5) a un subconjunto local, el kernel debe de tener una forma compacta, ya que de otra forma la suma se extenderá sobre todas las N partículas, lo que lo haría un método numérico de $O(N^2)$ ineficiente. Diferentes funciones para el kernel han sido propuestas para su uso en SPH. El kernel utilizado en los cálculos originales de Gingold & Monaghan (1977) era esférico y Gaussiano

$$W(r, h) = \frac{1}{\pi^{3/2} h^3} e^{-\sigma^2},$$

donde $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ y $\sigma = r/h$.

La forma más usada del kernel es la forma propuesta por Monaghan & Lattanzio (1985), la cual también es usada en este modelo. Con esta función se reduce el número de partículas que se involucran en el cálculo de las cantidades del SPH. El kernel esta dado por

$$W(q, h) = \frac{\alpha}{h^\nu} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3 & \text{si } 0 \leq q < 1, \\ \frac{1}{4}(2 - q)^3 & \text{si } 1 \leq q < 2, \\ 0 & 2 < q \end{cases} \quad (2.8)$$

donde $q = r/h$, ν es el número de dimensiones, es decir 1, 2 o 3, y α es la normalización, la cual toma valores de $2/3$, $10/7\pi$ y $1/\pi$ para una, dos y tres dimensiones respectivamente. En este trabajo solo se utilizará el valor para dos dimensiones.

2.5. Mecánica de Fluidos

En los discos de acreción, la materia se encuentra en un estado gaseoso, tal y como sucede en la mayoría del material del universo. Esto significa que las partículas que constituyen el material, usualmente electrones libres y varias especies de iones, interactúan directamente solo por colisiones, en lugar de fuerzas de corto alcance más complicadas.

En promedio, una partícula del gas tendrá que viajar una cierta distancia, *camino libre medio*, λ , antes de cambiar su estado de movimiento al colisionar con otra partícula. Si estamos únicamente interesados en escalas de longitud $L \gg \lambda$ podemos considerar al gas como un fluido continuo con una velocidad v , temperatura T y una densidad ρ definida en cada punto. Entonces, entramos en el estudio del comportamiento de estas y otras variables del fluido como función de la posición y el tiempo al imponer las leyes de conservación de energía, masa y momento. Si necesitamos considerar el comportamiento del gas a escalas de longitud comparables al camino libre medio entre las colisiones, entonces debemos usar las ideas de la física de plasmas.

Es por esto que el gas en los discos de acreción se estudiará utilizando la teoría de fluidos. En esta sección se describirán las propiedades de los fluidos necesarias para el estudio de los discos. Se desarrollara la teoría detrás de las ecuaciones y su implementación en el SPH.

2.6. Propiedades Físicas de los fluidos

Densidad

La densidad es una de las cantidades fundamentales que nos dará información acerca de la estructura del fluido durante la evolución del sistema. Como vimos en la sección 2.3, la densidad para cada posición de una partícula dada será estimada por una suma, con una cierta función de peso, de la masa de todas las partículas en el espacio de soluciones. Si tomamos la contribución de todas las partículas, como se mencionó anteriormente, para calcular la densidad en todos los puntos tendríamos que hacer una suma

del orden de $O(N^2)$, lo cual hace ineficiente la simulación. Pero con el kernel finito de la ecuación (2.8), el cual es distinto de cero únicamente hasta un radio de $2h$, la suma se reduce a la contribución de la partícula en dicha posición y sus vecinos más cercanos. La densidad toma la siguiente forma

$$\rho_i = m_i W(0, h_i) + \sum_{j=1}^{N_n} m_j W(r_{ij}, h_j), \quad (2.9)$$

donde h_j es el tamaño de suavizamiento de la partícula j , N_n es el número de vecinos de la partícula i cuya distancia a dicha partícula es menor que $2h_j$ y $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$

Ecuación de Estado

En adición a la densidad del fluido, la presión P , también debe de estar definida a través de una ecuación de estado. En un sistema simple compuesto de una sola componente, la especificación de dos propiedades independientes determina completamente el estado del sistema. Podemos escribir dicha relación como

$$P = P(V, T),$$

con V siendo el volumen del fluido. A esta relación se le denomina *ecuación de estado*. Existen varias ecuaciones de estado que se utilizan para describir gases en distintas situaciones o con propiedades particulares. Algunas de las más importantes son las siguientes.

La primera es la ecuación de estado para un gas puramente isotérmico

$$P = c_s^2 \rho, \quad (2.10)$$

donde P es la presión y c_s es la velocidad del sonido para un gas isotérmico. La velocidad del sonido se define como

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right).$$

La segunda es la ecuación de estado para un gas ideal

$$P = \rho RT, \quad (2.11)$$

donde T es la temperatura absoluta, y R es la constante de los gases. El valor de la constante de los gases depende de la masa molecular m del gas,

$$R = \frac{\mathfrak{R}}{m},$$

donde $\mathfrak{R} = 8314.36 \text{ J Kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ es la *constante universal de los gases*.

Esta ecuación la podemos escribir también de la siguiente manera

$$P = (\gamma - 1)u\rho, \quad (2.12)$$

donde u es la energía interna por unidad de masa y $\gamma = C_V/C_P$, con C_V la capacidad calorífica a volumen constante y C_P la capacidad calorífica a presión constante.

Por último tenemos la *ecuación politrópica*. Aunque esta relación no es precisamente una ecuación de estado, existen ciertos procesos en los cuales podemos aplicarla como tal. El primero es cuando la transformación de un sistema termodinámico experimenta un proceso adiabático ideal $dQ = 0$, usando la primera ley de la termodinámica $dU = dQ - PdV$ llegamos a que

$$P = K\rho^\gamma \quad (2.13)$$

donde K es una constante y $\gamma = C_V/C_P$ el índice politrópico del gas. El segundo caso es cuando tenemos un gas degenerado de fermiones $T \rightarrow 0$, en este caso es posible usar la ecuación politrópica como una ecuación de estado verdadera, es decir, sin necesidad de suponer que el gas experimente un proceso específico. En este caso podemos usar la expresión (2.13) con K siendo una función de la entropía del gas y γ el índice adiabático. En el límite de electrones no relativistas, $\gamma = 5/3$ y para un gas de electrones ultra relativista $\gamma = 4/3$. La energía interna de un gas con una ecuación politrópica esta dado por

$$u = \frac{K}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1}. \quad (2.14)$$

2.7. Derivada Material

Sea F una variable de campo. Utilizando coordenadas Eulerianas (x, y, z, t) , encontraremos el valor de la tasa de cambio de F en cada punto siguiendo a la partícula con una identidad fija. Es decir, representar un concepto Lagrangiano en el contexto Euleriano. Para un incremento arbitrario e independiente dx y dt , el incremento en $F(x, t)$ es

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i, \quad (2.15)$$

utilizando la notación de Einstein. Si suponemos que los incrementos no son arbitrarios y ahora están asociados al seguimiento de una partícula de identidad fija, los incrementos dx y dt ya no serán independientes, sino estos estarán relacionados con las componentes de la velocidad de la siguiente forma

$$dx_i = v_i dt.$$

donde v_i representa la componente de la velocidad en el eje x_i . Sustituyendo esto en la ecuación (2.15) obtenemos

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + v_i \frac{\partial F}{\partial x_i}. \quad (2.16)$$

En mecánica de fluidos se utiliza una notación especial D/Dt en lugar de la derivada d/dt . De esta forma se hace énfasis de que la derivada temporal se lleva a cabo siguiendo el movimiento de la partícula. En notación vectorial, la ecuación anterior resulta ser

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F. \quad (2.17)$$

A la tasa de cambio total d/dt (D/Dt) generalmente se le denomina *derivada material*. En este trabajo nos quedaremos con la notación d/dt para referirnos a la derivada material.

2.8. Conservación de masa

Consideremos un volumen V fijo en el espacio, delimitado por la superficie A . La masa contenida en dicho volumen es

$$\int_V \rho dV'$$

siendo ρ la densidad del fluido. Por lo tanto, el cambio en la masa por unidad de tiempo dentro de dicha área esta dado por la integral de volumen

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dv = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

La derivada temporal se puede introducir dentro de la integral en la parte derecha de la ecuación ya que el volumen esta fijo y por lo tanto no es función del tiempo. La tasa de flujo de masa que sale del volumen esta dado por la integral de superficie

$$\int_A \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A},$$

ya que $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$ es el flujo que sale y atraviesa un elemento de área $d\mathbf{A}$. La ley de conservación de masa indica que la tasa de incremento de masa dentro de un volumen fijo debe ser igual a la tasa de materia que fluye a través de la frontera. Es decir,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_A \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}, \quad (2.18)$$

la cual es la forma integral de la ley para un volumen fijo en el espacio.

La forma diferencial puede obtenerse transformando la integral de superficie en el lado derecho de la ecuación (2.18) a una integral de volumen por medio del teorema de la divergencia, el cual nos da

$$\int_A \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV.$$

Por lo tanto la ecuación (2.18) resulta ser

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0.$$

Esta relación debe ser válida para cualquier volumen, siendo esto únicamente posible si el integrando es nulo en todos los puntos. Esto requiere que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.19)$$

la cual es llamada la *ecuación de continuidad* y expresa la forma diferencial del principio de conservación de masa.

Si desarrollamos todos los terminos de la ecuación (2.19) tenemos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0.$$

Recordando que la derivada material es $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$, llegamos a la forma lagrangiana de la ecuación de continuidad

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.20)$$

En SPH la ecuación de continuidad puede ser remplazada ya sea por la función interpolante

$$\tilde{\rho}_i = \sum_j m_j W(r_{ij}, h_j) \quad (2.21)$$

o utilizando la expresión para la divergencia en SPH

$$\rho_i (\nabla \cdot \mathbf{v})_i = \sum_j m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \nabla_i W(r_{ij}, h_j)$$

, podemos llegar a la forma en SPH de la ecuación (2.19)

$$\frac{d\tilde{\rho}_i}{dt} = \sum_j m_j (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \nabla_i W(r_{ij}, h_j). \quad (2.22)$$

En algunos problemas de acreción puede ser práctico el tratar la acreción hacia un cuerpo como pérdida de masa debido a un pozo (Anzer et al 1987). En estos casos la ecuación de continuidad (2.19) tendría un término extra

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = -f(\mathbf{r}), \quad (2.23)$$

donde $f(\mathbf{r})$ es, por ejemplo, una función continua, la cual es cero fuera de una esfera que rodea el origen. Entonces, considerando que el parámetro h es constante en el espacio y tiempo, podemos escribir la ecuación de continuidad en el SPH como

$$\frac{d\tilde{\rho}_i}{dt} = \sum_j m_j (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \nabla_i W(r_{ij}, h_j) - \sum_j m_j \frac{f_j}{\rho_j} W(r_{ij}, h_j). \quad (2.24)$$

2.9. Conservación de momento

2.9.1. Fuerzas en un fluido

Las fuerzas que actúan en un elemento de fluido pueden dividirse convenientemente en tres clases, fuerzas de cuerpo, fuerzas superficiales y fuerzas de línea. Estas se describen de la siguiente forma:

Fuerzas de cuerpo: Estas fuerzas son provocadas por acción a distancia, sin contacto físico. Estas resultan por la interacción del medio al ser colocado en un cierto campo de fuerzas. Las fuerzas de cuerpo pueden ser conservativas o no conservativas. *Las fuerzas conservativas* son aquellas que pueden expresarse como el gradiente de una función.

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi$$

donde Φ es llamada la función potencial. Las fuerzas que satisfacen esta condición son conservativas por que el movimiento resultante conserva la suma de la energía cinética y potencial, en ausencia de procesos disipativos.

Fuerzas superficiales: Las fuerzas superficiales son aquellas que son ejercidas por el entorno a través del contacto directo. Estas son proporcionales a la extensión de área.

Fuerzas lineales: Las fuerzas de tensión superficiales son también llamadas fuerzas lineales por que estas actúan a lo largo de una línea y tienen una magnitud proporcional a la extensión de la línea. Ellas aparecen en la interfase entre un líquido y un gas, o en la interfase entre dos líquidos inmiscibles. Las fuerzas de tensión superficiales no aparecen directamente en las ecuaciones de movimiento, pero entran únicamente en las condiciones de frontera.

2.9.2. Ecuación de momento

Consideremos un volumen en el fluido. La fuerza total actuando en este fluido, sin considerar los esfuerzos internos dentro del fluido, sino únicamente las fuerzas superficiales que actúan en la frontera del volumen, es igual a la integral

$$-\oint P ds$$

de la presión, tomada a lo largo de la superficie que limita el volumen. Transformando esto en una integral de volumen, tenemos

$$-\oint P ds = \int \nabla P dV.$$

Podemos ver que el fluido que rodea cualquier elemento de volumen dV ejerce sobre ese elemento una fuerza $-dV\nabla P$. Con esto, podemos establecer una ecuación de

movimiento de un elemento de volumen en el fluido al igualar la fuerza $-\nabla P$ a el producto de la densidad y la aceleración:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P. \quad (2.25)$$

Esta derivada $d\mathbf{v}/dt$ que aparece aquí, no denota la tasa de cambio de la velocidad del fluido en un espacio fijo, sino en lugar de eso, esta derivada indica la tasa de cambio de la velocidad de una partícula del fluido determinada conforme se mueve en el espacio. Entonces, utilizando la derivada material dada por la ecuación (2.17), tenemos que

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}.$$

Sustituyendo esto en la ecuación (2.25), encontramos que

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho}. \quad (2.26)$$

A esta ecuación de movimiento se le denomina la *ecuación de Euler*. Si el fluido esta en un campo gravitacional, una fuerza adicional $\rho \mathbf{g}$, donde \mathbf{g} es la aceleración debida a la gravedad, actúa en cualquier unidad de volumen. Por lo que esta fuerza debe de ser añadida a la parte derecha de la ecuación (2.25), por lo que la ecuación (2.26) toma la forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g}. \quad (2.27)$$

Para la implementación en el SPH, es mejor si rescribimos el término del gradiente de presión como

$$\frac{\nabla P}{\rho} = \nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{P}{\rho^2} \nabla \rho.$$

Por lo tanto la ecuación de Euler quedaría de la siguiente forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) - \frac{P}{\rho^2} \nabla \rho. \quad (2.28)$$

El lado derecho de esta última ecuación en SPH resulta ser

$$\begin{aligned} \left(\frac{\nabla P}{\rho} \right)_i &= \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \frac{P_j}{\rho_j} \nabla_i W(r_{ij}, h_j) + \frac{P_j}{\rho_j^2} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \rho_j \nabla_i W(r_{ij}, h_j) \\ &= \sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W(r_{ij}, h_{ij}). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Con este resultado tenemos que la ecuación (2.28) en SPH esta dada por la expresión

$$\frac{d\tilde{v}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W(r_{ij}, h_{ij}). \quad (2.30)$$

Esta ecuación conserva el momento total. Nótese que el momento angular se conserva localmente, ya que todas las fuerzas están dirigidas a lo largo de una línea que une los centros de las partículas.

2.9.3. Viscosidad artificial y disipación

Hasta ahora hemos obtenido ecuaciones para fluidos sin viscosidad. En este caso no hay ningún mecanismo que permita la conversión de energía cinética a calor por medio de viscosidad, y por esta razón, no es posible hacer la simulación de choques con las ecuaciones tal y como las tenemos. En la dinámica de gases, aun las condiciones iniciales más suaves nos pueden llevar a soluciones discontinuas. En fluidos reales, la viscosidad física permite que haya disipación de calor, y la energía en choques siempre esta disponible para ser convertida en calor sin importar que tan pequeña sea esta viscosidad, ya que el gradiente de las variables a lo largo del choque se ajusta para tratar de permitir esta disipación. Una de las estrategias para lidiar numéricamente con los choques es ampliar la discontinuidad a un tamaño razonable donde pueda ser resuelto numéricamente y a lo largo del cual los gradientes puedan ser calculados. Esto se puede hacer añadiendo un término extra, disipación artificial al fluido. Por lo que se añade explícitamente un término de presión en las ecuaciones del fluido. Estos se escriben de la siguiente forma.

$$P_\alpha = \Pi_\alpha \rho^2 = -\alpha \rho l c_s \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.31)$$

y

$$P_\beta = \Pi_\beta \rho^2 = -\beta \rho l^2 (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \quad (2.32)$$

donde α y β son parámetros adimensionales que controlan la fuerza de la viscosidad artificial y l es un tamaño típico de escala sobre el cual el choque se extiende. Vale la pena mencionar que el nombre de viscosidad artificial se le atribuye ya que esta tiene un comportamiento más o menos similar al de una viscosidad real, pero como su nombre lo dice, se introduce de manera artificial para lidiar numéricamente con los choques. La expresión (2.31) tiene que ver con una viscosidad de bulto y su propósito es eliminar las oscilaciones con velocidad subsónica, especialmente en la región pos-choque.

La ecuación (2.32) fue propuesta por von Neumann y Richtmyer. Este tipo de viscosidad artificial viscosidad es importante principalmente en el régimen supersónico ya que elimina la interpenetración de las partículas en choques con números de Mach altos.

En el SPH, la viscosidad artificial se introduce en la ecuación de momento (2.30)

$$\frac{d\tilde{v}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W(r_{ij}, h_{ij}). \quad (2.33)$$

La viscosidad artificial, es decir el término extra en la ecuación (2.33), esta dada por

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} (-\alpha c_s \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2) / \rho_{ij} & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0 \\ 0 & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} > 0 \end{cases}$$

donde $\rho_{ij} = (\rho_i + \rho_j)/2$, c_s es la velocidad del sonido y

$$\mu_{ij} = \frac{h \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2 + \eta^2} \quad (2.34)$$

donde $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$ y $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. El parametro η^2 en la fórmula para μ_{ij} ayuda a prevenir singularidades. Este término debe de ser suficientemente pequeño para prevenir un suavizamiento severo en el término viscoso en regiones de alta densidad, esto normalmente se logra al tomar $\eta^2 = 0.01h^2$. Al escoger a η^2 de esta forma hacemos que el suavizamiento de la velocidad únicamente se lleve acabo si el espaciamiento entre las partículas es menor que $0.1h$.

Esta formulación fue usada por primera vez por Monaghan & Gingold (1983). Esta es la forma más común para la viscosidad artificial en SPH y además ha mostrado que reproduce de manera correcta los choques. También existen algunas otras recetas para lidiar con las deficiencias que tiene la receta estándar para la viscosidad (para una revisión de estas técnicas ver Rosswog 2009).

2.10. Conservación de energía

2.10.1. Primera Ley de la termodinámica

Para el SPH necesitamos hacer uso de la primera ley de la termodinámica, $dU = dQ - PdV$, en términos de cantidades específicas. La restricción para los procesos adiabáticos, es decir sin pérdida de calor, hacen que el término

$$dQ = 0.$$

Además, si tomamos las cantidades por unidad de masa, entonces tenemos que la energía U se convertirá en la energía por unidad de masa u . El volumen se convertirá en volumen por unidad de masa, lo que es lo mismo que $1/\rho$. La diferencia dV entonces se puede expresar como

$$d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{d\rho}{\rho^2}.$$

Con esto, tenemos que la primera ley sin generación de entropía esta dada por

$$du = \frac{P}{\rho^2} d\rho \quad (2.35)$$

de lo cual se obtiene que

$$\frac{du}{dt} = \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (2.36)$$

y

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_s = \frac{P}{\rho^2}. \quad (2.37)$$

2.10.2. La ecuación de energía

Para la conservación de energía, sin viscosidad artificial, debemos tomar en cuenta los efectos de compresión en la energía interna del gas. Para un gas con una ecuación de estado isotérmico esto no es necesario, ya que la energía interna del gas es constante debido a la pérdida de calor provenientes del sistema. En un gas ideal sí debemos de calcular los efectos de la energía interna. Utilizando la expresión obtenida de la primera ley de la termodinámica (2.36) y la ecuación de continuidad en forma lagrangiana (2.20) obtenemos que el cambio en la energía interna es

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{P}{\rho^2}\rho\nabla\cdot\mathbf{v} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)u &= -\frac{P}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{v}.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Siguiendo el mismo método utilizado para la conservación de momento, podemos encontrar una expresión en SPH para la ecuación de la energía.

$$\frac{d\tilde{u}_i}{dt} = \frac{P_i}{\rho_i^2} \sum_j m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W(r_{ij}, h_{ij}) \quad (2.39)$$

Benz (1990) muestra que la energía total se conserva con esta ecuación en ausencia de viscosidad artificial.

Con la inclusión de la viscosidad artificial hay una entrega de calor del gas debido a los choques. En el caso de una relación de estado politrópica (2.13), la energía interna del gas cambia debido a que la entropía del gas aumenta. Este cambio en la entropía hace que también exista un cambio en el valor de K . Dicho cambio se deberá a la viscosidad artificial y esta dado por

$$\frac{dK_i}{dt} = \frac{\gamma-1}{2\rho_i^{\gamma-1}} \sum_j m_j \Pi_{ij} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W(r_{ij}, h_{ij}). \quad (2.40)$$

Para la ecuación de estado de un gas ideal (2.11), se necesita añadir un término para que exista la conservación total de energía. La ecuación final involucra la ecuación (2.39) y este nuevo término

$$\frac{d\tilde{u}_i}{dt} = \frac{P_i}{\rho_i^2} \sum_j m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W(r_{ij}, h_{ij}) + \frac{1}{2} \sum_j m_j \Pi_{ij} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W(r_{ij}, h_{ij}). \quad (2.41)$$

Esta ecuación nos asegura la conservación total de la energía del gas. Estas ultimas ecuaciones junto con la ecuación de estado y las ecuaciones (2.9), (2.22) y (2.30) forman un conjunto completo de ecuaciones del SPH.

2.11. Integración temporal en SPH

Para poder integrar las ecuaciones diferenciales del SPH se debe encontrar un balance razonable entre la eficiencia y precisión del integrador. Ya que la evaluación de las derivadas usualmente implica un gran costo, especialmente para fluidos autogravitantes, se debe de minimizar el número de evaluaciones de la fuerza por cada paso de tiempo, lo cual le da preferencia a integradores de bajo orden, siempre y cuando sean estables y convergan.

La integración numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias para las variables físicas de cada partícula puede ser llevada a cabo por los métodos estándar (como el algoritmo Leapfrog o el Stormer-Verlet) con un control para el paso de tiempo que involucre una condición de Courant¹, los términos de fuerza y los términos de difusión por viscosidad (Monaghan 1989).

El paso de tiempo δt puede ser obtenido calculando primero δt_f y δt_{cv} de acuerdo a

$$\delta t_f = \min_i \left(\frac{h_i}{|f_i|} \right)$$

donde i corre sobre todas las partículas y f_i es la aceleración neta sobre la partícula i . Y

$$\delta t_{cv} = \min_i \frac{h_i}{c_{s,i} + 0.6(\alpha c_{s,i} + \beta \max_j \mu_{ij})},$$

donde α, β y μ_{ij} son las cantidades definidas en la sección 2.9.3 y $c_{s,i}$ es la velocidad del sonido en la posición de la partícula i .

El paso de tiempo se define como $\delta t = 0.25 \min(\delta t_a, \delta t_{cv})$. Este paso para cada partícula se calcula como el valor mínimo de los dos tamaños de paso anteriores, y después es redondeado para igualar un múltiplo de 2 veces el mínimo tamaño posible de paso que pueda tomar el código SPH.

2.12. Resolución

Para poder obtener resultados confiables existen algunas cosas que hay que tomar en cuenta al hacer simulaciones. Algunas de ellas son la resolución y el número de partículas. Es importante mantener una resolución alta para poder reducir el ruido numérico, es decir las fluctuaciones alrededor de la solución real. Se debe tratar de correr las simulaciones con el número más alto de partículas que se pueda, tomando un balance entre la eficiencia y la resolución. Hay que tomar en cuenta que usualmente para obtener propiedades termodinámicas confiables se requiere un número relativamente más grande de partículas que cuando se busca, por ejemplo, una distribución de masa.

¹La condición de Courant o Courant-Friedrichs-Levi (CFL) asegura que la velocidad numérica de propagación de la información no exceda la velocidad física. Si una escala espacial de tamaño Δx puede ser resuelta, entonces el tamaño de tiempo numérico tiene que cumplir con $\Delta t < \Delta x/c_s$ para asegurar una estabilidad numérica (Press et al., 1992)

También es importante mencionar que las simulaciones se deben de verificar siempre a distintas resoluciones para probar la estabilidad y convergencia del modelo. Esto nos dará una mayor seguridad de que los resultados que obtengamos esten oscilando alrededor de una solución o convergen a esta.

Capítulo 3

Acreción

3.1. Introducción

Para este trabajo estudiaremos la dinámica de los toros de acreción alrededor de un agujero negro. Para poder realizar dicho estudio, es necesario que primero podamos comprender algunos conceptos del proceso de acreción, es por eso que en la primer parte de este capítulo se analizará el caso de una estrella aislada acretando del medio interestelar. Algunos conceptos obtenidos de este estudio pueden ser de gran importancia para posteriormente hacer un estudio más complejo. La importancia de la acreción como una fuente de energía fue primeramente reconocida en el estudio de sistemas binarios, especialmente en binarias de rayos-X (Shklovsky, 1967; Prendergast & Burbidge, 1968). En particular, el estudio del proceso de acreción ha tenido un gran progreso en esta área y esto es debido a que las binarias revelan más información que algunos otros sistemas. Además de que la mayoría de estrellas son miembros de sistemas binarios, los cuales en alguna etapa de su evolución deben sufrir alguna transferencia de masa. En esta capítulo se describirán algunas propiedades de estos sistemas, así como la formación, estructura y estabilidad de los discos de acreción delgados y gruesos (toros).

3.2. Acreción de Bondi

Antes de hacer una descripción de los discos de acreción estudiaremos el caso de una estrella de masa M acretando material con simetría esférica proveniente de una nube de tamaño mucho mayor. Esto es una aproximación razonable a la situación real de una estrella aislada acretando material del medio interestelar, ignorando ciertas otras propiedades, como el momento angular, campos magnéticos y movimientos de bulto del medio interestelar. El problema de acreción esférica, aun cuando no es una muy buena aproximación a otro tipo de flujos de acreción como los que ocurren en estrellas binarias o núcleos activos de galaxias, es de gran significancia para la teoría, ya que introduce

conceptos importantes que nos permitirán tener una mejor visión cuando realicemos estudios en sistemas más complejos. El problema de acreción de gas por una estrella con un movimiento relativo con respecto al gas fue considerado primero por Hoyle & Lyttleton (1939) y después por Bondi & Hoyle (1944). El caso de acreción esférica con la estrella en reposo respecto al gas fue estudiado por Bondi (1952), de ahí que este tipo de acreción recibe su el nombre de acreción de Bondi.

Una de las razones principales por las que este problema nos da información muy útil para problemas posteriores es que podemos tratarlo analíticamente. En este caso por conveniencia, utilizamos coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) y colocamos el origen en el centro de la estrella. Debido a la simetría esférica las propiedades del fluido no dependen de las coordenadas θ y ϕ , por lo tanto la velocidad del gas únicamente tendrá una componente radial $v = v_r$. Por convención tomaremos que si el gas esta cayendo, este tendrá una velocidad negativa; una velocidad positiva corresponde a un viento estelar.

Como vimos en el capítulo anterior el gas debe obedecer la dinámica de fluidos, por lo tanto la ecuación de continuidad (2.19), para un flujo estacionario con simetría esférica se reduce a

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho v) = 0. \quad (3.1)$$

Esta ecuación al integrarla nos indica que $r^2 \rho v = cte$. Con este resultado y teniendo que $\rho(-v)$ es el flujo que se dirige hacia la estrella, entonces la constante debe de estar relacionada con la tasa de acreción \dot{M} (constante), la expresión final para la conservación de masa es,

$$-4\pi r^2 \rho v = \dot{M}. \quad (3.2)$$

Ignorando la autogravedad del medio, la única fuerza externa que actúa en este sistema es la fuerza de gravedad \mathbf{g} , generada por el objeto central, y únicamente tiene una componente radial, $f_r = -GM\rho/r^2$ (fuerza por unidad de volumen). Por lo tanto la ecuación de Euler (2.26) para este caso resulta ser,

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0. \quad (3.3)$$

En lugar de la ecuación de energía dada por la expresión (2.38), utilizamos una relación politrópica,

$$P = K\rho^\gamma, \quad K = \text{constante} \quad (3.4)$$

Con esto podemos tratar el caso de acreción adiabática ($\gamma = \frac{5}{3}$) y el isotérmico ($\gamma = 1$). Además podemos incluir la ley del gas ideal para poder determinar una temperatura una vez encontrada $P(r)$ y $\rho(r)$

$$T = \frac{\mu m_H P}{\rho k}.$$

Con toda esta información el problema se reduce a encontrar una solución para las ecuaciones (3.2), (3.3) y (3.4), para v , ρ y P en términos de la posición radial.

En lugar de integrar directamente las ecuaciones, lo que hacemos es expresar la derivada de la presión de diferente forma,

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = c_s^2 \frac{d\rho}{dr}.$$

Por lo que el término $(1/\rho)(dP/dr)$ en la ecuación de Euler (3.3) lo podemos escribir como $(c_s^2/\rho)(d\rho/dr)$. Y utilizando la ecuación de continuidad tenemos que

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{vr^2} \frac{d}{dr}(vr^2) = 0.$$

Por lo tanto la ecuación de Euler (3.3) resulta ser

$$v \frac{dv}{dr} - \frac{c_s^2}{vr^2} \frac{d}{dr}(vr^2) + \frac{GM}{r^2} = 0. \quad (3.5)$$

A esta ecuación la podemos reordenar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} v \frac{dv}{dr} - \frac{c_s^2}{vr^2} \left(r^2 \frac{dv}{dr} + 2vr \right) + \frac{GM}{r^2} &= 0 \\ v \frac{dv}{dr} \left(1 - \frac{c_s^2}{v^2} \right) - \frac{2c_s^2}{r} + \frac{GM}{r^2} &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dr}(v^2) \left(1 - \frac{c_s^2}{v^2} \right) &= \frac{2c_s^2}{r} - \frac{GM}{r^2} \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dr}(v^2) \left(1 - \frac{c_s^2}{v^2} \right) &= -\frac{GM}{r^2} \left[1 - \frac{2c_s^2 r}{GM} \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

En general c_s^2 es una función que depende de la posición r . Podemos analizar el comportamiento de esta ecuación bajo ciertas suposiciones. Podemos suponer que a distancias lejos de la estrella el factor $[1 - (2c_s^2 r/GM)]$ debe ser negativo. Esto quiere decir que para valores de r grandes el lado derecho de la ecuación (3.6) es positivo. Para tener una sistema con acreción, el factor dv^2/dr debe ser negativo, ya que de esta forma el gas lejos de la estrella estaría en reposo y se aceleraría conforme se aproxima a la estrella. Estas dos condiciones se cumplen si y solo si para r grande el flujo del gas es *subsónico*, es decir

$$v^2 < c_s^2$$

para r grande. Podemos ver que en la ecuación (3.6) el lado izquierdo se vuelve cero si $dv^2/dr = 0$ o cuando $c_s^2 = v^2$. Esta última igualdad ocurre para un radio igual a

$$r_s = \frac{GM}{2c_s^2(r_s)}. \quad (3.7)$$

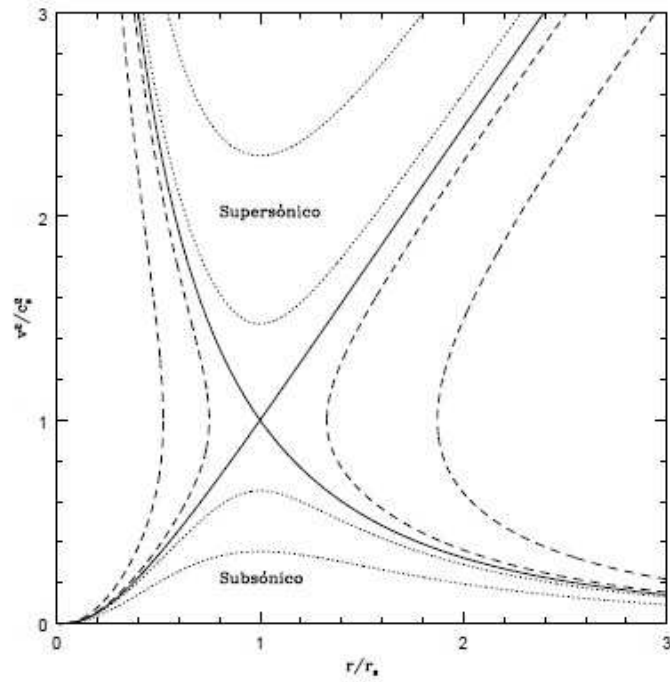


Figura 3.1: Familia de soluciones de la ecuación 3.6. El punto sónico tiene coordenadas (1,1). Las líneas sólidas tienen regiones en donde el fluido adquiere velocidades subsónicas y supersónicas, además que abarcan regiones que van desde la superficie de la estrella central hasta infinito. Las líneas punteadas únicamente tienen regiones ya sea supersónicas o subsónicas. Las otras líneas tienen regiones donde el gas pasa de supersónico a subsónico y viceversa, pero no abarcan todo el espacio.

A este radio se le llama el *punto sónico*, que es el punto en el cual el gas cambia de ser subsónico a supersónico o viceversa. Este radio es llamado el punto sónico, que es el punto al cual el gas cambia de ser subsónico. De las condiciones mencionadas anteriormente, entonces tenemos que para $r < r_s$ el flujo debe ser supersónico cerca de la estrella, es decir,

$$v^2 > c_s^2.$$

Existen varias soluciones para la ecuación (3.6) dependiendo de las condiciones de frontera del problema. La Figura 3.1 muestra seis familias de soluciones obtenidas al graficar $v^2(r)/c_s^2(r)$ contra r/r_s . Ahora podemos integrar directamente la ecuación (3.3), utilizando la ecuación (3.4) para relacionar ρ con P

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{K\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho}{\rho} - \frac{GM}{r} = \text{constante} \quad \text{para } \gamma \neq 1$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{K\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - \frac{GM}{r} = \text{constante}$$

O recordando que $K\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma P/\rho = c_s^2$, obtenemos la integral de Bernoulli

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c_s^2}{\gamma-1} - \frac{GM}{r} = \text{constante} \quad (3.8)$$

De la propiedad ya cononocida de nuestra solución física, tenemos que $v^2 \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$, de tal forma que la constante en la ecuación (3.8) debe de ser $c_s^2(\infty)/(\gamma-1)$, donde $c_s^2(\infty)$ es la velocidad del sonido del gas muy lejos de la estrella. En particular tenemos que en el punto sónico ($r = r_s$) tenemos que $v^2(r_s) = c_s^2(r_s)$ y por la ecuación (3.7) tenemos que $GM/r_s = 2c_s^2(r_s)$, por lo tanto la integral de Bernoulli en este punto resulta ser

$$\begin{aligned} \frac{c_s^2(r_s)}{2} + \frac{c_s^2(r_s)}{\gamma-1} - \frac{GM}{r_s} &= \frac{c_s^2(\infty)}{\gamma-1} \\ c_s^2(r_s) \left[\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)} \right] &= \frac{c_s^2(\infty)}{\gamma-1} \\ c_s(r_s) &= c_s(\infty) \left(\frac{2}{5-3\gamma} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Esta última ecuación nos relaciona $c_s(\infty)$ con $c_s(r_s)$, es decir nos permite introducir las condiciones de frontera en el problema.

De la ecuación (3.2) podemos obtener la tasa de acreción \dot{M} , recordando que esta tasa es independiente de r

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho(-v) = 4\pi r_s^2 \rho(r_s) c_s(r_s). \quad (3.10)$$

También tenemos que $c_s^2 \propto \rho^{\gamma-1}$. Con esto tenemos que

$$\rho(r_s) = \rho(\infty) \left[\frac{c_s(r_s)}{c_s(\infty)} \right]^{2/(\gamma-1)}.$$

Con este resultado y sustituyendo la expresión (3.9) en la ecuación (3.10) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{M} &= 4\pi \left(\frac{GM}{2c_s^2(r_s)} \right)^2 \rho(r_s) c_s(r_s) \\ &= \pi G^2 M^2 \frac{\rho(\infty)}{c_s^3(\infty)} \left[\frac{c_s(r_s)}{c_s(\infty)} \right]^{2/(\gamma-1)} \left(\frac{2}{5-3\gamma} \right)^{-3/2} \\ &= \pi G^2 M^2 \frac{\rho(\infty)}{c_s^3(\infty)} \left[\frac{2}{5-3\gamma} \right]^{(5-3\gamma)/2(\gamma-1)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

De esta ecuación podemos ver que la dependencia de \dot{M} con γ no es muy fuerte, ya que el factor entre paréntesis cuadrados, varía de 1 para el límite $\gamma = \frac{5}{3}$ a aproximadamente 4.5 en el límite $\gamma = 1$. Para un valor $\gamma = 1.4$, el cual sería un valor típico para el índice adiabático para parte del medio interestelar, el factor entre corchetes es 2.5. La ecuación (3.11) nos muestra que la acreción del medio interestelar no puede ser un fenómeno observable relevante. Utilizando parámetros razonables, $c_s(\infty) = 10 \text{ km s}^{-1}$, $\rho(\infty) = 10^{-24} \text{ g cm}^{-3}$ y $\gamma = 1.4$, la ecuación (3.11) nos da

$$\dot{M} \cong 1.4 \times 10^{11} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{\rho(\infty)}{10^{-24}} \right) \left(\frac{c_s(\infty)}{10 \text{ km s}^{-1}} \right)^{-3} \text{ g s}^{-1}.$$

Utilizando la luminosidad de acreción L_{acc} para una estrella de neutrones

$$L_{acc} = 1.3 \times 10^{36} \dot{M}_{16} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{10 \text{ km}}{R_*} \right) \text{ erg s}^{-1}$$

obtenemos que la luminosidad únicamente será del orden de $2 \times 10^{31} \text{ erg s}^{-1}$, por lo que si colocamos el sistema a una distancia típica de 1 Kpc, esto resultará en un flujo muy pequeño para poder ser detectado.

A partir de este análisis podemos obtener algunas conclusiones principales que posteriormente podremos aplicar de manera más general.

La primera es que la tasa de acreción constante \dot{M} está determinada por las condiciones del ambiente en el infinito (distancia muy lejana) y una condición de superficie. La tasa de acreción en estrellas aisladas rodeadas de medio interestelar resulta ser muy pequeña para poder tener una importancia observacional. Es por esto que es necesario estudiar otro tipo de sistemas (estrellas binarias) para poder encontrar sistemas de acreción que tengan luminosidades más altas.

Otro punto es que, un flujo de acreción con una tasa mayor o igual a \dot{M} dada por la expresión (3.11) debe poseer un punto sónico, es decir que la velocidad con la que fluye el material debe de volverse supersónica en una región cerca a la superficie estelar. Una consecuencia de esto es que el material que está cayendo a la estrella debe de juntarse a la superficie de ésta con una velocidad muy pequeña (no en el caso de agujeros negros), así que debe de existir algún mecanismo que frene el flujo de acreción supersónico.

Finalmente, la atracción gravitacional de la estrella influye de manera importante en el comportamiento del gas únicamente en la región dentro del radio de acreción $r_{acc} \approx 2GM/c_s^2(\infty)$. Este radio podemos expresarlo en términos de la temperatura, utilizando la relación para un gas adiabático $c_s = (5kT/3\mu m_H)^{1/2}$ donde μ es el peso molecular promedio y m_H la masa del hidrógeno

$$r_{acc} \approx 3 \times 10^{14} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{10^4 \text{ K}}{T(\infty)} \right) \text{ cm}$$

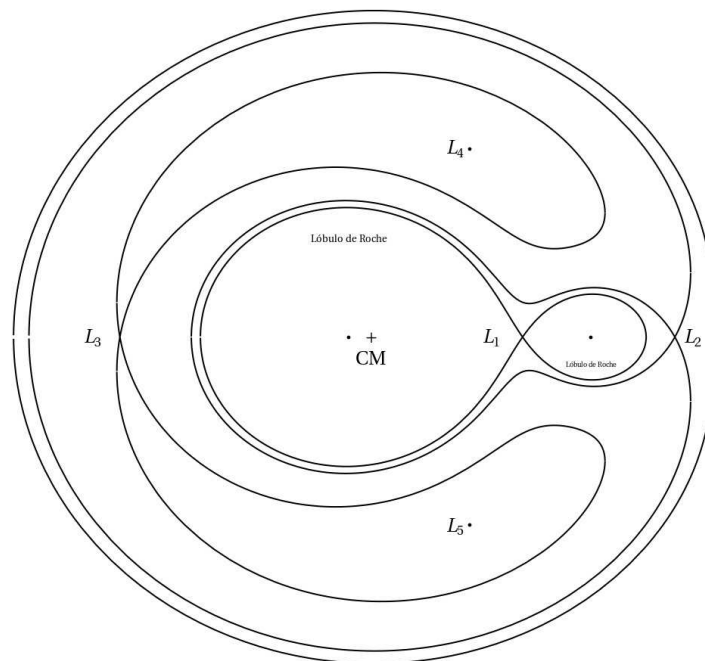


Figura 3.2: Equipotenciales de un sistema binario. L_1 es el punto de Lagrange por donde ocurre el desbordamiento de materia. L_2 y L_3 son puntos de Lagrange inestables. Y L_4 y L_5 son puntos estables. El lóbulo de Roche es la equipotencial que encierra a cada uno de los objetos. Dentro del lóbulo de Roche la fuerza gravitacional que domina es la de la estrella a la cual le corresponde el lóbulo.

3.3. Formación de discos

Como ya vimos en el caso de un objeto central inmerso en un medio interestelar aislado, la tasa de acreción es muy baja comparada con lo que esperamos. Es por eso que ahora nos enfocaremos en la formación de estructuras que no cumplen con una simetría esférica. En sistemas binarios cercanos la transferencia de masa puede ocurrir por un fenómeno llamado desbordamiento del *lóbulo de Roche*. La esencia de este suceso es considerar las órbitas de partículas de prueba en el potencial gravitacional generado por dos estrellas masivas que están orbitando alrededor una de otra debido a la atracción mutua que sienten. En la Figura (3.2) se muestran las equipotenciales de un sistema binario. El lóbulo de Roche de una estrella es la región de revolución que la rodea y a partir de la cual la fuerza gravitacional que domina en dicha región es la de la estrella misma.

Debido a la rotación de los sistemas binarios, en la mayoría de los casos la materia tiene un alto momento angular específico, por lo que este no puede ser directamente acretao por la estrella que lo está capturando. El material tiene que pasar del lóbulo de Roche de una a la otra pasando por el punto de Lagrange L_1 , Figura 3.3. Visto des-

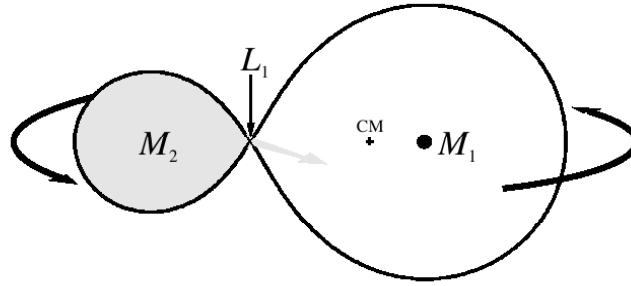


Figura 3.3: Sistema binario con la estrella secundaria de masa M_2 llenando su Lóbulo de Roche y transportando masa a través de L_1 hacia el lóbulo del objeto compacto con masa M_1

de el marco de referencia de la estrella 1, es como si el material fuera inyectado por una pequeña región la cual estaría girando alrededor de dicha estrella en el plano de la binaria.

Si el periodo de la binaria no es muy largo, este punto de inyección estaría rotando muy rápido, por lo que parecería que la corriente de gas se estuviera moviendo casi ortogonalmente a la línea que une los centros de las estrellas, mientras emerge a través del punto L_1 .

Para tener una mejor imagen de lo que sucede con el gas una vez que atraviesa el punto L_1 , tomemos v_{\parallel} y v_{\perp} como las componentes de la velocidad del flujo en un marco de referencia no rotante y a ángulos rectos de la línea instantánea que une a los centros.

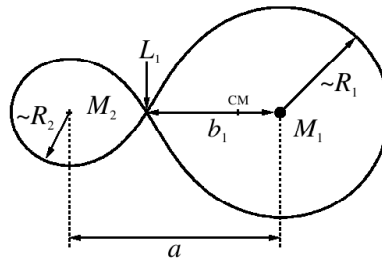


Figura 3.4: Geometría del sistema binario: R_1 y R_2 se definen como los radios de las esferas cuyo volumen sea igual al volumen correspondiente al lóbulo de Roche. b_1 es la distancia de objeto compacto al punto L_1

Con esto tenemos que la velocidad perpendicular es $v_{\perp} \sim b_1 \omega$, con $\omega = 2\pi/P$ siendo ω la velocidad angular y P el periodo de la binaria, Figura 3.4. La componente paralela es $v_{\parallel} \lesssim c_s$ donde c_s es la velocidad del sonido en la envoltura de la secundaria, ya que el gas es presuntamente empujado hacia L_1 por las fuerzas de presión. Para temperaturas

típicas de una envoltura estelar $T \approx 10^4$ K la velocidad paralela $v_{\parallel} \sim c_s$ no puede ser mucho mayor que 10 km s^{-1} .

Siendo la velocidad paralela similar a la velocidad del sonido y la velocidad perpendicular del orden de unas decenas de la velocidad del sonido, la velocidad total resultante nos indica que la corriente que atraviesa L_1 es supersónica. Este hecho puede simplificar los cálculos de la trayectoria de la corriente, ya que en este caso se pueden ignorar las fuerzas de presión y por lo tanto la corriente seguirá una trayectoria balística determinada por el potencial de Roche, básicamente como si este estuviera constituido por partículas de prueba. Además, como $v_{\parallel} \sim c_s$ es mucho más pequeña que las velocidades adquiridas durante la caída libre hacia la estrella primaria, las condiciones iniciales cerca de L_1 tendrán un efecto muy pequeño en la trayectoria.

Con estos argumentos se puede realizar una buena aproximación a la trayectoria de la corriente tomando la órbita de una partícula de prueba soltada desde una posición en reposo en L_1 , con un momento angular dado, cayendo en el campo gravitacional de la estrella primaria. La corriente continua de gas tratará de seguir esta órbita pero se interceptará a ella misma, lo que esto resulta en una disipación de energía por medio de choques. Además, el gas no tendrá mucha oportunidad de deshacerse del momento angular que tenía inicialmente, por lo que tratará de moverse sobre la órbita de menor energía para un momento angular dado, es decir, una órbita circular. El gas inicialmente estará moviéndose en una órbita alrededor de la primaria en el plano de la binaria a un radio R_{circ} , que corresponda a una órbita Kepleriana a ese mismo radio con el momento angular específico igual al que tenía el gas al pasar por L_1 . Por lo tanto el gas tendrá una velocidad circular

$$v_{\phi}(R_{circ}) = \left(\frac{GM_1}{R_{circ}} \right)^{1/2}$$

donde por conservación de momento angular tenemos que

$$R_{circ}v_{\phi}(R_{circ}) = b_1^2\omega$$

Recordando que $\omega = 2\pi/P$ y que P en un sistema binario está dado por

$$4\pi^2 a^3 = GMP^2,$$

con a siendo la separación de las estrellas. Con esto podemos obtener una expresión para R_{circ} de la siguiente forma

$$R_{circ}/a = [1 + (M_1/M_2)][0.5 - 0.227 \log(M_1/M_2)]. \quad (3.12)$$

A este radio frecuentemente se le denomina como *Radio de circularización*. Este radio siempre es menor que el radio del lóbulo de Roche R_L , típicamente un factor 2-3 menor, excepto para valores muy pequeños de M_1/M_2 , por lo que el gas estará orbitando alrededor de la primaria dentro del lóbulo de Roche. Aunque esto puede que no suceda si el radio de la estrella primaria es mayor que el radio de circularización, en estos casos el gas chocará contra la superficie de la estrella antes de poder estar en una órbita circular.

Esta situación no ocurre en los sistemas binarios que contienen un objeto compacto. Como ejemplo, el radio de las enanas blancas de baja masa es $R_* \leq 10^9$ cm, mientras que el radio de circularización obtenido con la ecuación (3.12) es

$$R_{circ} \gtrsim 3.5 \times 10^9 \text{ cm.}$$

Lo cual permitiría que el gas proveniente de la estrella secundaria pudiera entrar en una órbita circular.

Con esto tenemos que para la corriente continua del gas que esta entrando en el lóbulo de Roche de la primaria la configuración inicial será un anillo de materia en $R = R_{circ}$. Dentro de este anillo existirán procesos disipativos (como colisiones, choques, disipación por viscosidad, etc..) que convertirán parte de la energía proveniente del movimiento orbital a energía interna (calor). Parte de esta energía será radiada y será extraída del gas. Así que la única manera en la que el gas puede compensar esta pérdida de energía es al caer cada vez más profundo en el potencial gravitacional de la primaria, esto significa, orbitar cada vez más cerca; pero para poder hacer esto se necesita que haya pérdida de momento angular. Debido a que para un momento angular dado la configuración con menor energía es la órbita circular y además que el tiempo para la redistribución del momento angular, por lo general, es mucho más grande que el tiempo de enfriamiento t_{rad} y que el tiempo dinámico t_{din} , entonces, podemos esperar que la mayoría del gas este cayendo muy lentamente, en forma de espiral, hacia la primaria. Este movimiento más bien puede parecer a una serie de órbitas aproximadamente circulares en el plano orbital de la primaria. A esta configuración se le conoce como *discos de acreción*.

Este proceso de caer en espiral hacia el centro involucra la pérdida de momento angular, pero en ausencia de torcas externas, esto más bien significa que el momento angular se debe redistribuir. La transferencia de momento angular será entonces producida por torcas internas que permitan que el momento de las partes internas sea transferido a las partes externas del disco. Debido a este aumento de momento angular en las partes externas, el gas en esas zonas se moverá en espiral pero alejándose del objeto central. El disco entonces tendrá dos regiones, una en la que el gas se dirige hacia el objeto central cayendo cada vez más profundo en el potencial gravitacional y la otra región en la que el gas se esta alejando del objeto central, llevándose el momento angular otorgado por las partes internas.

3.4. Torcas tipo viscosas

Antes de estudiar la estructura de los discos de acreción analizaremos el mecanismo de transferencia de momento angular. Un proceso importante en la acreción es la conversión de energía cinética orbital a calor. Una ley de rotación Kepleriana implica una rotación diferencial, es decir, el material a radios diferentes, se mueve con distinta velocidad angular Ω . Esto también ocurre en otras leyes de rotación, siempre y cuando la

ley no sea $\Omega = \text{constante}$. En estos casos los elementos de fluido a lo largo de flujos de línea vecinos tendrán un roce entre ellos. Debido a los movimientos caóticos térmicos o los movimientos turbulentos presentes en fluidos se pueden generar esfuerzos viscosos que como consecuencia permiten tener un transporte de momento, masa, etc..., ortogonal al movimiento del gas.

Como se mencionó en la sección anterior, es válido considerar a los discos de acreción como anillos continuos de materia girando alrededor del agujero negro, esto ya que $v_\phi \gg v_r$. Los movimientos caóticos, que dan lugar a la viscosidad, toman lugar en un flujo en equilibrio, el intercambio de los elementos del fluido no puede resultar en una transferencia neta de materia entre anillos continuos. Por lo tanto, la masa cruza la superficie con $R = \text{constante}$ a tasas iguales en ambas direcciones, del orden de $H\rho\tilde{v}$ por unidad de longitud de arco, donde $\rho(R)$ es la densidad de masa, \tilde{v} es la velocidad promedio de los movimientos caóticos y H es un ancho característico del disco (este parámetro se describiera en la sección de discos delgados). Ya que ambos flujos de masa llevan diferente momento angular, existe un transporte de momento angular debido a diversos procesos caóticos, es decir, se ejerce una torca viscosa en la región externa de la corriente provocada por la región interna, y además se ejerce de la misma forma una torca opuesta provocada por la externa sobre la interna. Por lo tanto podemos expresar el flujo de momento ϕ por unidad de longitud de arco a través de $R = \text{constante}$ en la dirección hacia afuera como,

$$\rho\tilde{v}H(R + \lambda/2)v_\phi(R - \lambda/2)$$

donde λ es el tamaño típico de las parcelas en donde ocurren los movimientos caóticos. En este caso se toma el valor de $\lambda/2$ como un promedio para la posición de la materia que es intercambiada durante los movimientos caóticos. Esta expresión indica que la materia que inicialmente tenía una velocidad circular $v_\phi(R - \lambda/2)$ ahora se encuentra en la posición $R + \lambda/2$.

La torca ejercida sobre el anillo externo por el anillo interno esta dada por la transferencia neta hacia afuera del momento angular. Es decir

$$\rho\tilde{v}H \left[(R + \lambda/2)v_\phi(R - \lambda/2) - (R - \lambda/2)v_\phi(R + \lambda/2) \right].$$

Como primera aproximación, si λ es muy pequeña, la expresión anterior se puede escribir en terminos de la derivada de la velocidad circular v_ϕ o en términos de la derivada de la velocidad angular $\Omega = v_\phi/R$. Con esto tenemos que la torca por unidad de longitud de arco es

$$-\rho\tilde{v}H\lambda R^2\Omega',$$

donde $\Omega' = d\Omega/dR$, y además suponemos que la velocidad angular cambia muy lentamente con respecto a λ . Para el caso de un anillo circular, podemos obtener la torca total multiplicando el resultado obtenido en la ecuación anterior por el tamaño del anillo, $2\pi R$. Tomando $\rho H = \Sigma$, con Σ siendo la *densidad superficial*, podemos expresar la torca que

ejerce el anillo externo sobre el interno (que es = - la torca que ejerce el interno sobre el externo) como

$$G(R) = 2\pi R\nu\Sigma R^2\Omega'. \quad (3.13)$$

Aquí hemos tomado el valor de la viscosidad cinemática estandar ν , la cual en procesos que involucran turbulencia hidrodinámica puede ser aproximada por $\nu \sim \lambda\tilde{v}$. Podemos ver que esta torca desaparece cuando tenemos el caso de rotación de un cuerpo rígido, donde $\Omega' = 0$. Partiendo de esta forma para la torca, ahora consideramos que la torca neta en un anillo de gas entre R y $R + dR$, tenemos que

$$G(R + dR) - G(R) = \frac{\partial G}{\partial R} dR.$$

Debido a que esta torca está actuando en el sentido de la velocidad angular $\Omega(R)$, entonces existe una tasa de trabajo

$$\Omega \frac{\partial G}{\partial R} dR = \left[\frac{\partial}{\partial R} (G\Omega) - G\Omega' \right] dR \quad (3.14)$$

realizada por la torca. En este caso el término

$$\frac{\partial}{\partial R} (G\Omega) dR$$

es la tasa por convección de la energía rotacional a través del gas por las torcas, mientras que el término $-G\Omega' dR$, representa la tasa local de pérdida de energía mecánica hacia el gas. Esta pérdida de energía se transforma a energía interna. Esto significa que las torcas viscosas causan una disipación dentro del gas a una tasa igual a $G\Omega' dR$ por ancho de anillo dR . Esta energía será radiada por ambas caras del disco.

Por lo tanto la tasa de disipación por unidad de superficie $D(R)$ está dada por

$$D(R) = \frac{G\Omega'}{4\pi R} = \frac{1}{2}\nu\Sigma(R\Omega')^2. \quad (3.15)$$

El caso particular en el que consideramos que la velocidad angular tiene una forma Kepleriana,

$$\Omega = \Omega_k = \left(\frac{GM}{R^3} \right)^{1/2} \quad (3.16)$$

a un cierto radio R . Usando la expresión (3.15) obtenemos

$$D(R) = \frac{9}{8}\nu\Sigma \frac{GM}{R^3}.$$

Podemos ver que esta propiedad es dependiente de la posición R del anillo y de la densidad superficial de este mismo. También depende del parámetro de viscosidad ν , el cual debido a la ausencia de una teoría acerca de los movimientos caóticos o turbulentos dentro de los fluidos, típicamente va a estar caracterizado por un tamaño característico λ y una velocidad característica v .

A continuación se describirán algunas formas para el parámetro de viscosidad ν que frecuentemente se utilizan para la descripción de la viscosidad en discos de acreción.

3.4.1. Prescripción α

La primera prescripción para la viscosidad en el contexto de discos astrofísicos fue propuesta por Shakura & Sunyaev (1973). En su trabajo, ellos argumentaron que la transferencia de momento angular hacia las partes externas del disco (con rotación diferencial) no se debe a la viscosidad molecular, ya que es muy pequeña, ni a transporte de momento angular por medio de radiación, sino más bien a los movimientos turbulentos y pequeños campos magnéticos caóticos presentes en el disco.

En un medio con rotación diferencial y con una distribución de momento angular aumentando hacia las partes externas, la materia es estable con respecto a pequeños cambios que preserven momento angular. Pero la teoría lineal de perturbaciones nos indica una condición para la cual existe la pérdida de estabilidad para un flujo laminar.

Para describir el promedio de movimientos presentes en dicha turbulencia podemos usar la formula para los flujos laminares

$$\eta = \rho v_t l$$

donde η es la viscosidad dinámica, la cual se relaciona con la viscosidad cinemática como $\nu = \eta/\rho$, v_t es la velocidad turbulenta y l un tamaño de escala característico. En el caso de discos de acreción delgados podemos suponer que el tamaño máximo de las parcelas l del fluido estará dado por el tamaño de escala típico H de los discos.

Para esfuerzos tangenciales la componente del tensor de esfuerzos que indica la magnitud de este esfuerzo es la componente $\sigma_{R\phi}$ (más adelante se dará la forma completa del tensor de esfuerzos). Esta componente está definida de la siguiente forma.

$$\sigma_{R\phi} = \eta R \frac{d\Omega}{dR}.$$

Si suponemos que el cambio en la velocidad angular es muy pequeño, podemos aproximar la derivada $d\Omega/dR$ como Ω/R . Recordando que $\Omega = v_\phi/R$, el esfuerzo tangencial resultaría ser

$$\sigma \sim \eta \frac{v_\phi}{R}.$$

Sustituyendo el valor de η para la turbulencia en flujos laminares en la expresión anterior, obtenemos

$$\sigma_{R\phi} \sim \rho H \frac{v_t v_\phi}{R}. \quad (3.17)$$

Más adelante mostraremos que en los discos delgados $H \sim Rc_s/v_\phi$, por lo que

$$\sigma_{R\phi} \sim c_s^2 \rho \frac{v_t}{c_s}. \quad (3.18)$$

donde hemos multiplicado y dividido por c_s para tomar un cociente adimensional entre las velocidades.

Dentro de la prescripción α no solo se encuentran descritos los movimientos turbulentos dentro del fluido, si no también se atribuye parte de la viscosidad a los campos magnéticos dentro de este mismo. Las variaciones caóticas y en pequeñas escalas del campo magnético pueden ser generadas por las inestabilidades en el plasma, reconexiones de las líneas del campo magnético en regiones con polaridad opuesta, etc. Por lo que suponiendo que la energía de estos campos magnéticos no excedan la energía térmica de la materia, es decir

$$\frac{H_m^2}{8\pi} \lesssim \rho \frac{c_s^2}{2}.$$

donde H_m es la intensidad del campo magnético. Podemos caracterizar la componente del tensor de esfuerzos en la dirección tangencial, por una componente debida a campos magnéticos, esto es,

$$\sigma_{R\phi} \sim \rho c_s^2 \left(\frac{H_m^2}{4\pi\rho c_s^2} \right)$$

donde hemos asignado una forma en particular a la componente tangencial del tensor de esfuerzos $\sigma_{R\phi} \sim \rho c_s^2$. Sumando ambas contribuciones (turbulencia + campos magnéticos) encontramos que

$$\sigma_{R\phi, total} \sim \rho c_s^2 \frac{v_t}{c_s} + \rho c_s^2 \left(\frac{H_m^2}{4\pi\rho c_s^2} \right) = \alpha \rho c_s^2.$$

donde α es un parámetro para la viscosidad que nos determina la eficiencia y contiene la información de los campos magnéticos internos y la turbulencia. Recordando que $\sigma_{R\phi} \sim \eta v_\phi / R \sim \nu \rho v_\phi / R$, podemos tomar una forma general para la viscosidad cinemática,

$$\begin{aligned} \frac{\nu \rho v_\phi}{R} &\sim \alpha \rho c_s^2 \\ \nu &\sim \alpha c_s R \frac{c_s}{v_\phi}. \end{aligned}$$

Utilizando la relación $H \sim R c_s / v_\phi$, obtenemos la prescripción α

$$\nu \sim \alpha c_s^2 H, \quad (3.19)$$

con

$$\alpha \sim \frac{v_t}{c_s} + \left(\frac{H_m^2}{4\pi\rho c_s^2} \right).$$

Podemos ver que este valor de α debe de cumplir con que $\alpha \leq 1$, ya que si $\alpha > 1$ la turbulencia debe de ser supersónica lo cual llevaría al calentamiento rápido del plasma y a la generación de choques, con lo que se reduciría el valor de α nuevamente por debajo de 1.

3.4.2. Prescripción β

Los resultados de los experimentos en flujos de Couette-Taylor turbulentos realizados por Richard & Zahn (1999) sugieren una prescripción para la viscosidad basada en movimientos turbulentos puramente hidrodinámicos a números de Reynolds muy altos. En este caso los efectos provocados por los campos magnéticos no juegan un papel importante en la transferencia de momento angular. Los flujos de Couette-Taylor resultan del fluido viscoso incompresible puesto a rotar entre dos cilindros coaxiales, cada uno a rotando con una velocidad angular distinta (Taylor 1936), haciendo que el fluido rote conforme a una ley de rotación no Kepleriana; se observó, a números de Reynolds mucho menores a los astrofísicos, el comienzo de la turbulencia.

Para que el flujo se vuelva inestable, se requiere que el número de Reynolds del flujo $Re = Rv_\phi/\nu$ sea alto y exceda al número de Reynolds crítico. Esto lleva a la generación de turbulencia y por lo tanto a una producción de una viscosidad efectiva. La viscosidad turbulenta que se deriva es la llamada prescripción β

$$\nu = \beta Rv_\phi, \quad (3.20)$$

con $\beta \approx 10^{-5}$. La decisión de escoger a R como un tamaño natural de escala se debe a que R es un parámetro relevante para el transporte del momento angular y el cual contiene la información acerca de los agentes que llevan acabo la turbulencia, básicamente el campo de rotación.

A diferencia de la prescripción α , la prescripción β no depende de cantidades locales, como la velocidad del sonido o el tamaño de escala, si no más bien depende de parámetros globales como la velocidad circular.

3.5. Discos de acreción

En la sección anterior vimos que en la mayoría de sistemas binarios con transferencia de masa el material acretado tendrá suficiente momento angular para formar un disco de acreción. Para el estudio de estos sistemas podemos realizar diferentes aproximaciones que nos permitan simplificar el sistema y tener una mejor visión de los procesos físicos que ocurren dentro de el. Una de ellas se basa en que en ciertas ocasiones el flujo está confinado muy cerca del plano orbital que a primera aproximación podemos considerar el disco como un flujo de gas bi-dimensional. Esta aproximación de disco delgado ha tenido bastante aceptación y permite elaborar una extensa teoría. La segunda aproximación es la de los discos gruesos cuya teoría aun está en desarrollo.

3.5.1. Discos delgados

Para estudiar la dinámica en discos de acreción delgados alrededor de agujeros negros es necesario hacer algunas aproximaciones. Supondremos que en coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z) la materia se encuentra muy cercana al plano ecuatorial del agujero

negro, es decir $z = 0$. El disco va a estar caracterizado por una densidad superficial $\Sigma(R, t)$, la cual representa la masa por unidad de superficie del disco, y está dada por la integral de la densidad del gas ρ en la dirección z . El potencial gravitacional producido por el agujero negro será Newtoniano y además suponemos que la masa del agujero negro M es mucho mayor que la masa del disco M_d , por lo que en este caso la autogravedad del disco puede ser despreciada.

Una vez formado el disco, la materia se estará moviendo en órbitas circulares alrededor de la estrella que está acretando, por lo que supondremos que la velocidad angular Ω será Kepleriana, $\Omega_K(R)$ y la materia tendrá una velocidad circular $v_\phi = R\Omega_K(R)$.

Además de esta velocidad circular, podemos suponer que el gas tendrá una pequeña velocidad radial v_R , la cual será negativa cerca de la estrella central, para que pueda acretar materia. En general v_R es una función que depende de del radio R y del tiempo t .

Estructura radial de discos delgados estacionarios.

En muchos casos las condiciones externas del sistema (como la tasa de transferencia de masa) cambia en escalas mucho más grandes que t_{vis} . En estos casos, un disco estable puede llegar a tener una estructura en un estado estacionario, el cual podemos examinar despreciando los términos temporales en las ecuaciones de conservación.

Si integramos la ecuación de conservación sin el término temporal, $\nabla \cdot (\rho v) = 0$, con $\rho = 2\pi R\Sigma$ encontramos que

$$\dot{M} = -2\pi R\Sigma v_R \quad (3.21)$$

Esto nos indica que el flujo de masa a través de cada punto es independiente de la posición R . En este caso el signo negativo se introduce ya que $v_R < 0$, pues el flujo está dirigido hacia la estrella central.

La ecuación de conservación del momento angular en un disco delgado tendrá la siguiente forma

$$\frac{\partial}{\partial R}(2\pi R\Sigma v_R R^2 \Omega) = \frac{\partial G}{\partial R}.$$

donde G estará dada por la expresión (3.13). Si integramos la ecuación para el momento angular tenemos que

$$2\pi R\Sigma v_R R^2 \Omega = G + C$$

donde C es una constante de integración. Utilizando (3.13) para el valor de G obtenemos

$$-v\Sigma\Omega' = \Sigma(-v_R)\Omega + \frac{C}{2\pi R^3} \quad (3.22)$$

La constante C está relacionada con la tasa a la cual fluye el momento angular hacia el objeto compacto. Si suponemos que el disco mantiene una ley de rotación Kepleriana aun en las partes cercanas al objeto compacto (esto también implica que la estrella central no debe estar girando sobre su eje o en todo caso su rotación debe ser muy lenta), entonces esta constante adquiere la siguiente forma.

$$C = -\dot{M}(GMR_*)^{1/2}$$

donde R_* es el radio de la estrella central. Sustituyendo esto en la expresión (3.22) y tomando $\Omega = \Omega_K$ (ecuación 3.16), encontramos que

$$\nu\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right] \quad (3.23)$$

Con ayuda de la ecuación (3.15) podemos encontrar la disipación por unidad de área en una cara del disco generada por la viscosidad $D(R)$,

$$D(R) = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right] \quad (3.24)$$

Podemos ver de esta ecuación que el flujo de energía emitido por las caras del disco delgado estacionario es independiente de la viscosidad. Esta cantidad no tiene un significado de gran importancia, y es que la ecuación (3.24) nos muestra que podemos conocer su dependencia con algunos de los parámetros (\dot{M} , R , etc.), aun cuando no conocemos de manera precisa la naturaleza física de la viscosidad ν .

La estructura vertical del disco debe de ser autoconsistente con las suposiciones que hemos realizado. En principio si no hay flujos en la dirección z , el disco debe de cumplir con la condición de equilibrio hidrostático en esta dirección.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{GM}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right].$$

Esta ecuación es básicamente la ecuación de Euler (2.26), ignorando los términos de velocidad. Para un disco delgado se debe de cumplir que $z \ll R$, por lo tanto tenemos que

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{GM}{R^3}. \quad (3.25)$$

Definiendo una escala de altura típica del disco en la dirección z como H , entonces podemos aproximar la derivada como $\partial P/\partial z \sim P/H$ y $z \sim H$. Con esto y recordando que $P \sim \rho c_s^2$, donde c_s es la velocidad del sonido, encontramos que la suposición para un disco delgado debe ser

$$H \cong c_s \left(\frac{R}{GM} \right)^{1/2} \quad R \ll R$$

por lo que se requiere que

$$c_s \ll \left(\frac{GM}{R} \right)^{1/2}$$

es decir que se en un disco delgado, la velocidad local Kepleriana debe de ser altamente supersónica. Esto básicamente es una condición sobre la temperatura del disco y sobre el mecanismo de enfriamiento.

Si la aproximación de disco delgado es válida podemos simplificar el trabajo necesario para encontrar la estructura del disco. Ya que los gradientes de presión y temperatura son esencialmente en la dirección vertical, podemos decir que la estructura vertical y radial están desacopladas. Por lo que podemos tratar a la estructura vertical a un radio dado como algo análogo a la estructura estelar unidimensional.

En general podemos definir una densidad central del disco aproximadamente por

$$\rho = \Sigma/H \quad (3.26)$$

con

$$H = R \frac{c_s}{v_\phi}. \quad (3.27)$$

La velocidad del sonido estará dada por

$$c_s^2 = \frac{P}{\rho} \quad (3.28)$$

y donde la presión P estará dada por la suma de la presión del gas más la presión de radiación

$$P = \frac{\rho k T_c}{\mu m_p} + \frac{4\sigma}{3c} T_c^4. \quad (3.29)$$

En este caso σ es la constante de Stefan-Boltzmann y suponemos que la temperatura $T(R, z)$ tiene un valor muy cercano a la temperatura central $T_c(R) = T(R, 0)$. Cabe mencionar que debido a que T es una función de R existirán regiones en las que la presión de radiación sea más importante que la presión del gas o viceversa.

Tomando la aproximación "plano-paralelo" para cada radio, tenemos que el flujo de energía radiada a través de una superficie a $z = \text{constante}$ esta dada por

$$F(z) = \frac{-16\sigma T^3}{3\kappa_R \rho} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (3.30)$$

donde κ_R es la opacidad media de Rosseland. Por simplicidad suponemos que el disco es óptimamente grueso de tal forma que

$$\tau = \rho H \kappa_R(\rho, T_c) = \Sigma \kappa_R \gg 1,$$

de tal forma que la radiación emitida sea muy cercana a la emisión de un cuerpo negro. Utilizando aproximaciones para disco delgado, tenemos que el flujo es aproximadamente,

$$F(z) \sim \frac{4\sigma}{3\kappa_R \rho H} T^4(z) = \frac{4\sigma}{3\tau} T^4(z),$$

pero como sabemos que la tasa de disipación total a través de una de las mitades de la estructura vertical debe de ser igual a la tasa de disipación $D(R)$ emitida por una de las caras, entonces tenemos que

$$\frac{4\sigma T^4}{3\tau} = D(R) = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.31)$$

Esta ecuación representa nuestra ecuación de energía del sistema. Finalmente, para completar el conjunto de ecuaciones que nos describan nuestro sistema, necesitamos una relación que exprese el comportamiento de la opacidad κ_R en función de las propiedades locales del disco, es decir $\kappa_R = \kappa_R(\rho, T_c)$ y alguna relación (como la prescripción α o β) para la viscosidad ν .

Estructura para un disco estacionario con prescripción α

Una solución algebraica para un disco delgado alrededor de un agujero negro descrito por las ecuaciones (3.26) hasta (3.31) fue obtenida por Shakura y Sunyaev (1973). Para la construcción de este modelo utilizaron la prescripción α (3.19),

$$\nu = \alpha c_s H$$

Ellos pudieron diferenciar tres partes que conforman el disco delgado:

1. Una región dominada por presión de radiación y donde en la interacción entre materia y radiación la dispersión de electrones libres es de mayor importancia.
2. La región donde la presión esta determinada por la presión del gas y donde aun la dispersión de electrones dan la mayor contribución a la opacidad.
3. La región donde domina la presión del gas. Además la opacidad esta determinada por la absorción libre-libre y otros mecanismos.

Estas partes están localizadas de la siguiente forma: Existen dos regiones del tipo 3, una en la parte más externa del disco y la otra en una región muy delgada situada en las cercanías del agujero negro. Y existen dos regiones del tipo 2 intermedias entre una región del tipo 1 y las regiones tipo 3.

Aquí únicamente mencionaremos la solución en la cual la densidad ρ y la temperatura T_c se comportan de tal forma que la opacidad media de Rosseland se puede aproximar por la ley de Kramer's, es decir

$$\kappa_R = 5 \times 10^{24} \rho T_c^{-7/2} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}. \quad (3.32)$$

Y además, también se ignorara el término de presión de radiación de la ecuación de estado.

Una vez teniendo completo el conjunto de ecuaciones que describen la estructura del disco delgado, ellos encontraron la solución analítica a este problema. Para poder visualizar de mejor manera las cantidades obtenidas de los discos, podemos expresar la

solución en términos de $R_{10} = R/(10^{10} \text{ cm})$, $m_1 = M/M_\odot$ y $\dot{M}_{16} = \dot{M}/(10^{16} \text{ g s}^{-1})$. La solución de Shakura-Sunyaev es

$$\begin{aligned}
\Sigma &= 5.2\alpha^{-4/5} \dot{M}_{16}^{7/10} m_1^{1/4} R_{10}^{-3/4} f^{14/5} \text{ g cm}^{-2}, \\
H &= 1.7 \times 10^8 \alpha^{-1/10} \dot{M}_{16}^{3/20} m_1^{-3/8} R_{10}^{9/8} f^{3/5} \text{ cm}, \\
\rho &= 3.1 \times 10^{-8} \alpha^{-7/10} \dot{M}_{16}^{11/20} m_1^{5/8} R_{10}^{-15/8} f^{11/5} \text{ g cm}^{-3}, \\
T_c &= 1.4 \times 10^4 \alpha^{-1/5} \dot{M}_{16}^{3/10} m_1^{1/4} R_{10}^{-3/4} f^{6/5} \text{ K}, \\
\tau &= 190\alpha^{-4/5} \dot{M}_{16}^{1/5} f^{4/5}, \\
v &= 1.8 \times 10^{14} \alpha^{4/5} \dot{M}_{16}^{3/10} m_1^{-1/4} R_{10}^{-3/4} f^{6/5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}, \\
v_R &= 2.7 \times 10^4 \alpha^{4/5} \dot{M}_{16}^{3/10} m_1^{-1/4} R_{10}^{-1/4} f^{-14/5} \text{ cm s}^{-1}, \\
\text{con } f &= \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right]^{1/4}. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

De la solución podemos ver que el parámetro α no entra en ninguna de las expresiones con una potencia muy alta. Esto significa que los ordenes de magnitud de estos parámetros no son muy sensibles al valor actual de α . Pero también nos indica que no esperamos encontrar un tamaño típico de α al hacer comparaciones directas de la teoría de discos estacionarios con las observaciones.

También podemos ver que el tamaño del parámetro de H si cumple con la condición de disco delgado, ya que

$$H/R = 1.7 \times 10^{-2} \alpha^{1/10} \dot{M}_{16}^{3/20} m_1^{-3/8} R_{10}^{1/8} f^{3/5}.$$

La velocidad radial $v_R \sim 0.3 \text{ km s}^{-1}$ está por debajo del valor de la velocidad del sonido ($c_s \sim 10 \text{ km s}^{-1}$), mientras que la velocidad kepleriana $v_\phi \sim 1000 \text{ km s}^{-1}$ es muy supersónica. También tenemos que la opacidad que resulta de la solución va de acuerdo con la suposición de que el disco es ópticamente grueso. Estos resultados nos muestran una autoconsistencia con las suposiciones realizadas al principio, por lo que el modelo es válido para discos delgados siempre y cuando no se viole ninguna de las condiciones.

3.5.2. Discos gruesos

En la sección anterior se discutió la teoría para los discos de acreción delgados ($H \ll R$). Esta suposición nos permite entender de manera razonable la teoría, además

los resultados obtenidos de estos estudios concuerdan con las observaciones realizadas. Esto ha permitido que exista un gran avance en el estudio del fenómeno de acreción. Pero a pesar de estos buenos resultados, aun falta mucho por entender de estos sistemas. En particular, existen ciertas regiones o casos en los cuales las suposiciones de disco delgado realizadas para obtener la solución propuesta por Shakura & Sunyaev (1973) ya no es muy válida, por ejemplo en las zonas más internas de los discos de acreción alrededor de agujeros negros de masa estelar o estrellas de neutrones, por lo que es necesario que encontremos una solución diferente.

El interés actual en la teoría de la estructura, evolución y estabilidad de discos de acreción gruesos se debe a la posibilidad de que estos puedan ser relevantes para entender el funcionamiento de las fuentes centrales en radio galaxias y cuasares. También pueden ser importantes durante las etapas tempranas de formación estelar, podrían estar involucrados en la formación de flujos bipolares y chorros o podrían formarse durante la fusión de dos estrellas, al tratar el sistema de deshacerse de su exceso de momento angular. Los efectos de autogravedad en estos casos podrían tener una mayor relevancia que en el caso de modelos de AGN.

Uno de los primeros intentos por construir un modelo de disco grueso fue realizado por Paczyński & Wiita (1980). Algunas de las suposiciones que realizaron fueron: un balance global de energía, es decir que la cantidad total de energía generada por la viscosidad dentro del disco es radiada por las superficies de este mismo; una presión dominada por radiación; un potencial pseudo-Newtoniano¹ para la interacción del agujero negro con el gas; una ecuación de estado bariónica; y además ignoraron los efectos de la autogravedad. De los primeros estudios se observó que si uno especifica la distribución del momento angular por unidad de masa, $l(r)$, en la superficie del disco y uno escoge el borde interno del disco, entonces el balance de las fuerzas gravitacionales, rotacionales y de presión determinarán la forma del disco. Estudios posteriores, Jaroszynski, Abramowicz y Paczynski (1980) extendieron estos modelos a la relatividad general utilizando la métrica de Schwarzschild y Kerr.

Para este trabajo se realizarán simulaciones para modelar discos de acreción gruesos (toros) alrededor de un agujero negro. Se trabajará en coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z) y se considerará una configuración axisimétrica con el eje de rotación coincidiendo con el eje z . El fluido estará rotando en el campo gravitacional externo del agujero negro. Para el estudio del comportamiento de las prescripciones de viscosidad se ignorará la autogravedad del fluido, pero posteriormente se incluirá para poder estudiar los efectos producidos por el acoplamiento de estas fuerzas.

Las ecuaciones que describan la estructura del disco deben incluir el tensor de esfuerzos para poder acoplar la viscosidad. El flujo será adiabático, es decir, no hay enfriamiento radiativo local incluido.

Con estas suposiciones, tenemos que las ecuaciones básicas para poder describir la estructura de los toros serán las siguientes:

¹Este potencial se describirá en el capítulo 4

- Conservación de masa (ver ecuación 2.20)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (r \rho v_R) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (3.34)$$

- Conservación de momento (Es básicamente la ecuación 2.26, o 2.33 en su forma para SPH, más la fuerza gravitacional del agujero negro, la fuerza centrífuga y la viscosidad como fuerzas externas.)

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_R}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} + v_z \frac{\partial v_R}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{R} \right) + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial R} \\ + \frac{\partial P}{\partial R} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \tau_{RR}) - \frac{\partial \tau_{Rz}}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_z}{\partial R} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} \\ - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \tau_{zR}) - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_\phi}{\partial R} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_\phi v_R}{R} \right) \\ - \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \tau_{\phi R}) + \frac{\tau_{\phi R}}{R} + \frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial z} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

- Conservación de energía (La ecuación 2.38, o la expresión 2.39 para SPH, más el término de disipación de energía por unidad de masa y el término de viscosidad artificial $T(ds/dt)_{art.}$)

$$\frac{du}{dt} = - \left(\frac{P}{\rho} \right) \nabla \cdot \mathbf{v} + T \frac{ds}{dt} + T \left(\frac{ds}{dt} \right)_{art} \quad (3.38)$$

donde la disipación de energía esta dada por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + v_R \frac{\partial S}{\partial R} + v_z \frac{\partial S}{\partial z} \right) \\ - \left(\frac{\tau_{R\phi}^2}{\eta} + \frac{\tau_{z\phi}^2}{\eta} + \frac{\tau_{RR}^2}{\eta} + \frac{\tau_{zz}^2}{\eta} + \frac{\tau_{zR}^2}{\eta} \right) - \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

y

$$T \left(\frac{ds}{dt} \right)_{i,art} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} m_j \Pi_{ij} v_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (3.40)$$

donde Π_{ij} y W_{ij} son los términos descritos en el capítulo 2 para SPH.

- Ecuación de estado

$$p = (\gamma - 1)\rho u. \quad (3.41)$$

Donde τ_{ij} es el tensor de esfuerzos viscoso, F es el flujo radiativo (que en este caso omitiremos), Φ es el potencial gravitacional producido por el objeto central, S es la entropía y u la energía interna del gas.

Las componentes del tensor de esfuerzos viscoso están dadas de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \tau_{RR} &= 2\eta \frac{\partial v_R}{\partial R} - \frac{2}{3}\eta \nabla \cdot \mathbf{v} \quad , \quad \tau_{zz} = 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\eta \nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \tau_{\phi\phi} &= 2\eta \frac{v_R}{R} - \frac{2}{3}\eta \nabla \cdot \mathbf{v} \quad , \quad \tau_{Rz} = \tau_{zR} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial R} + \frac{\partial v_R}{\partial z} \right), \\ \tau_{R\phi} &= \tau_{\phi R} = \eta R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{l}{R^2} \right) \quad , \quad \tau_{z\phi} = \tau_{\phi z} = \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{l}{R} \right) \end{aligned}$$

donde l es el momento angular específico (por unidad de masa) y η es la viscosidad dinámica. Las ecuaciones (3.34) hasta (3.41) junto las relaciones para la viscosidad, flujo radiativo y opacidad nos permiten describir la estructura de los discos gruesos sin autogravedad. En el siguiente capítulo se describirán los elementos que se utilizaron para las simulaciones de este trabajo, así como la adaptación de las fuerzas de autogravedad.

3.5.3. Toro en equilibrio

Para poder llevar a cabo las simulaciones de los discos de acreción debemos tener ciertas condiciones iniciales. En este trabajo utilizamos un toro estacionario, sin viscosidad, en un estado de rotación pura, como condición inicial. Un toro en estado estacionario esta descrito por las ecuaciones (3.34) - (3.37) y (3.41) con las derivadas temporales, las componentes del tensor de esfuerzos y los términos para el flujo radiativo iguales a cero. Para un sistema axisimétrico, el campo de velocidades del fluido con masa girando alrededor de su eje de simetría tiene las componentes:

$$v_R = 0, \quad v_\phi = R\Omega, \quad v_z = 0$$

donde Ω es la velocidad angular, en general una función de R y z . Con estas suposiciones, las únicas ecuaciones que tienen términos distintos a cero son:

$$\text{ecuación (3.35)} \rightarrow -\rho \frac{v_\phi^2}{R} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{\partial P}{\partial R} = 0$$

$$\text{ecuación (3.36)} \rightarrow \rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0.$$

De donde obtenemos las siguientes ecuaciones,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{\partial \Phi}{\partial R} + \Omega^2 R, \quad (3.42)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (3.43)$$

donde P es la presión y Φ es el potencial gravitacional. Estas ecuaciones representan el balance de las fuerzas que actúan en un elemento del fluido. En forma vectorial, las ecuaciones anteriores se pueden escribir como

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = -\nabla \Phi + \Omega^2 \mathbf{R} = \mathbf{g}_{eff} \quad (3.44)$$

donde se introdujo la gravedad efectiva \mathbf{g}_{eff} como la suma de una aceleración gravitacional y una centrífuga. Podemos ver que la gravedad efectiva debe de ser ortogonal a las superficies de presión constante (*superficies isobáricas*). En términos del momento angular por unidad de masa $l(R)$, la ecuación (3.44) en la dirección radial se puede escribir como

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dR} = -\frac{d\Phi}{dR} + \frac{l^2}{R^3} \quad (3.45)$$

Utilizando la ecuación (2.13) tenemos,

$$\gamma K \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dR} + \frac{d\Phi}{dR} - \frac{l^2}{R^3} = 0,$$

Integrando esta última ecuación desde infinito hasta R , tenemos que

$$\frac{\gamma K}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} + \Phi - \int_{\infty}^R \frac{l^2(R')}{R'^3} dR' = W_0,$$

donde W_0 es el valor inicial del potencial efectivo W , cuyas unidades son energía por unidad de masa. Utilizando la relación politrópica, $P = K\rho^\gamma$, tenemos que

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} + W(R, z) = W_0. \quad (3.46)$$

Donde definimos al potencial efectivo W como

$$W(R, z) \equiv \Phi(R, z) + \int_R^{\infty} \frac{l^2(R')}{R'^3} dR' \quad (3.47)$$

El potencial gravitacional $\Phi(R, z)$ se especificará en el siguiente capítulo. La cantidad $l(R)$ es el momento angular del disco de acreción por unidad de masa, cuyo valor será definido en el capítulo 5.

Partiendo de la ecuación (3.46) y usando nuevamente la relación politrópica, $P = K\rho^\gamma$, encontramos la expresión para la densidad ρ como función de R y z en un toro estacionario

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma K}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} &= W_0 - W(R, z) \\
\rho^{\gamma-1} &= \frac{\gamma - 1}{\gamma K} [W_0 - W(R, z)] \\
\rho(R, z) &= \left[\left(\frac{1}{K} \right) (W_0 - W(R, z)) \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \right]^{1/(\gamma-1)} \quad (3.48)
\end{aligned}$$

Podemos ver que si variamos la constante politópica K podemos variar la densidad del disco, y por lo tanto la masa, para una misma distribución de momento angular. Si disminuimos el valor de la constante K la densidad del disco aumentará y tendremos discos más masivos. Esto se utilizó para generar discos con diferentes masas. Las constantes utilizadas se darán en el capítulo 5.

Capítulo 4

Interacciones gravitacionales

En este capítulo se hará un estudio de los campos gravitacionales provocados por el agujero negro y el disco, así como la interacción mutua entre ellos. Una forma de encontrar estos campos gravitacionales es a partir del potencial gravitacional generado por cada uno de los elementos. En el caso del agujero negro se puede utilizar una aproximación semi-Newtoniana y para el disco se puede recurrir a la suma de los potenciales generados por cada una de las partículas que lo constituyen. Una suma directa de cada uno de los potenciales producidos por cada partícula resulta ser un método ineficiente en el sentido computacional. Es por esto que se recurre a los métodos llamados "Fast Poisson Solvers"(FPS) los cuales serán descritos más adelante, pero cuyo principio se basa en resolver la ecuación de Poisson.

4.1. Influencia del agujero negro sobre el disco

Para el sistema que queremos modelar, un disco de acreción grueso alrededor de un agujero negro de masa estelar, un ingrediente importante que determina la estructura del disco es la fuerza gravitacional del agujero negro sobre cada uno de los elementos de este mismo.

Un agujero negro se define como una región del espacio-tiempo que no puede comunicarse con el universo externo. La frontera de esta región se llama *horizonte de eventos*. La solución estacionaria más general de un agujero negro se puede conocer analíticamente, y depende de tres parámetros: la masa M , momento angular J , y una carga Q del agujero negro. Estos parámetros son cantidades observables independientes que caracterizan un agujero negro estacionario. El tratamiento que seguiremos a continuación será una descripción de un agujero negro simple, es decir, uno con $J = Q = 0$.

4.1.1. Agujero Negro de Schwarzschild.

Partiendo de la métrica de Schwarzschild en coordenadas esféricas

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.1)$$

donde $r = (R^2 + z^2)^{1/2}$. Para un observador estático en este campo gravitacional, es decir con r, θ, ϕ fijos, el tiempo propio estará dado por la ecuación (4.1) como

$$d\tau^2 = -ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 \quad (4.2)$$

ó

$$d\tau = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2} dt. \quad (4.3)$$

Esto muestra la dilatación del tiempo para un reloj en el campo gravitacional comparado con un reloj localizado a una distancia infinita ($d\tau < dt$). Podemos ver que la ecuación (4.3) tiene una singularidad en $r = 2GM/c^2$. A este radio se le llama el *horizonte de eventos* o el *radio de Schwarzschild*. También recibe el nombre de *límite estático*, ya que los observadores estáticos no pueden existir dentro de $r_g = 2GM/c^2$.

4.1.2. Potencial de Paczyński-Wiita

Para poder determinar el movimiento de las partículas alrededor de los agujeros negros, podemos utilizar la métrica de Schwarzschild (4.1) y un equivalente al Lagrangiano para las geodésicas. Pero en ciertas ocasiones podemos hacer aproximaciones más prácticas que nos permitan modelar los efectos de la relatividad general y determinar el movimiento de la materia alrededor de agujeros negros no rotantes.

Esta aproximación se obtiene tomando un potencial *pseudo-Newtoniano*, que fue introducido por Paczyński & Wiita en 1980 y está dado por la siguiente expresión,

$$\Phi_{PW}(r) = -\frac{GM}{r - r_g}, \quad (4.4)$$

Este potencial permite introducir un efecto relativista que juega un papel muy importante en las regiones muy cercanas al agujero negro central: esto es, la existencia de la última órbita circular kepleriana estable en $r_{ms} = 3r_g$ para el caso de Schwarzschild. Esta última órbita estable nos determina el borde interior del disco de acreción, ya que para $r > r_{ms}$ la materia cae hacia el agujero negro debido a la pérdida de momento angular como resultado de una torca viscosa interna. Pero para $r < r_{ms}$ la materia es acreta hacia el agujero negro con prácticamente momento angular constante y donde la teoría de los discos de acreción, descrita en el capítulo 3, ya no es válida. Este efecto de la última órbita estable es de gran importancia para el estudio de los agujeros negros. En el caso de los agujeros negros con un cierto momento angular, $J \neq 0$, descritos por la métrica de Kerr, la última órbita estable se utiliza para encontrar el valor del spin del agujero negro

(McClintock et al., 2011), lo cual resulta de gran importancia para estudiar la formación de dichos objetos o de chorros relativistas.

4.1.3. Distribución de momento angular Kepleriano

En este trabajo el uso del potencial pseudo-Newtoniano nos servirá para poder describir la distribución del momento angular en el disco de mejor manera. Esta distribución se obtiene utilizando la teoría Newtoniana. En esta teoría tenemos que el movimiento orbital se puede describir en términos de un potencial efectivo (por unidad de masa)

$$W(r, L_k) = \Phi(r) + \frac{l_k^2}{2r^2},$$

siendo l_k el momento angular kepleriano por unidad de masa y $\Phi(r)$ el potencial gravitacional. En el mínimo del potencial efectivo, la derivada de dicho potencial es nula, y entonces¹,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r} = 0 &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{l_k^2}{r^3} \\ \frac{l_k^2}{r^3} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ r\Omega^2 = r\dot{\phi}^2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \end{aligned} \quad (4.5)$$

este último resultado nos indica que la fuerza aplicada iguala a la fuerza centrípeta en el mínimo del potencial efectivo, esta es la condición para un movimiento uniforme. Por lo tanto tenemos que para órbitas circulares se debe de cumplir la siguiente condición,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)_{l_k} = 0 \quad (4.6)$$

o en términos del potencial gravitacional Φ ,

$$\left(\frac{d\Phi}{dr} \right) - l_k^2 \left(\frac{1}{r^3} \right) = 0. \quad (4.7)$$

Para el caso del potencial Newtoniano, tenemos que $\Phi(r) = -GM/r$, por lo tanto la ecuación (4.7) con este potencial resulta ser

$$\frac{GM}{r^2} - \frac{l_k^2}{r^3} = 0$$

¹En este desarrollo consideramos que la distribución de momento angular es constante, en el siguiente capítulo se explicará la razón por la cual se utilizó dicha distribución

Por lo que la distribución de momento Kepleriano esta dada por

$$l_k(r) = \sqrt{GMr}.$$

Para el caso del potencial de Paczyński-Wiita podemos hacer algo análogo. Tomando el potencial $\Phi_{PW}(r)$ de la expresión (4.4) y sustituyéndolo en la ecuación (4.7) tenemos que

$$\frac{GM}{(r - r_g)^2} - \frac{l_k^2}{r^3} = 0.$$

Por lo tanto el momento angular Kepleriano para este potencial es

$$l_k = \sqrt{\frac{GMr^3}{(r - r_g)^2}}. \quad (4.8)$$

En la Figura 4.1 se muestran las distribuciones de momento angular para una potencial Kepleriano y un potencial de Paczyński-Wiita. El potencial de Paczyński-Wiita reproduce efectos relativistas que juegan un papel muy importante en las regiones muy cercanas al agujero negro central, donde mucha de la energía es liberada; el efecto relativista más esencial es la existencia de la última órbita circular kepleriana estable en $r_{ms} = 3r_g$ (para el caso de un agujero negro de Schwarzschild). Para $r > r_{ms}$, el movimiento radial de la materia acreta en el disco esta asociado con la pérdida de momento angular como un resultado del esfuerzo viscoso. Para $r < r_{ms}$ la materia acreta cae hacia el agujero negro con prácticamente momento angular constante. Como resultado, r_{ms} es también el borde más interior del disco de acreción, donde los esfuerzos viscosos dejarán de afectar notablemente las trayectorias del flujo del gas.

4.2. Interacción Disco - Agujero negro.

La interacción del agujero negro con el disco básicamente se debe a la influencia gravitacional que ejerce el agujero negro sobre cada una de las partículas del disco y viceversa. Como vimos en la sección anterior el potencial gravitacional utilizado para describir la influencia del agujero negro estará dado por un potencial de Paczynski-Wiita dado por la ecuación (4.4). A partir de este potencial podemos encontrar la fuerza en la dirección z y en la dirección R , ya que $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi$. Las componentes de la fuerza en ambas direcciones seran

$$F_{z_i} = -\frac{GMm_i}{r_i(r_i - r_g)^2}z \quad (4.9)$$

y

$$F_{R_i} = -\frac{GMm_i}{r_i(r_i - r_g)^2}R \quad (4.10)$$

donde M es la masa del agujero negro, m_i la masa de la partícula i y r_i es la distancia del agujero negro a la partícula i dada por la expresión $r_i^2 = R^2 + z^2$. La tercera Ley de Newton

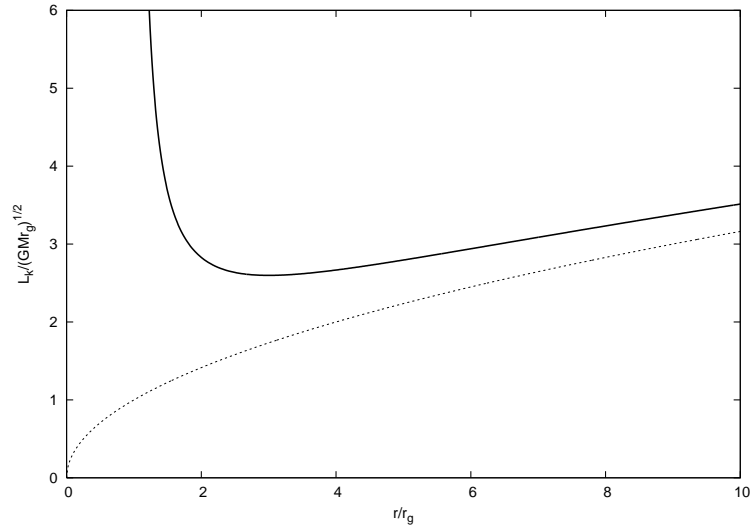


Figura 4.1: Comparación de la distribución del momento angular para el potencial de Paczyński-Wiita (línea continua) y el potencial Newtoniano (línea punteada)

nos dice que las fuerzas de acción y reacción entre dos cuerpos son de igual magnitud, opuestas y colineales. Esto significa que cuando el agujero negro ejerce una fuerza F_i en la partícula i , dicha partícula ejercerá una fuerza $-F_i$ sobre el agujero negro. Por lo tanto la fuerza que siente el agujero negro es la suma de todas las fuerzas $-F_i$ provocada por todas las partículas que conforman el disco.

En el caso de las partículas del código SPH, estas no son partículas puntuales si no que representan una serie de anillos que comparten el mismo eje, el cual coincide con la posición del agujero negro. Debido a que el agujero negro se encuentra en el eje de simetría de todos los anillos, la fuerza radial se anulará debido a que por cada sección de masa en el anillo que ejerce una fuerza sobre el agujero negro, siempre existe una sección de masa radialmente opuesta que ejercerá una fuerza de igual magnitud pero en sentido contrario. Al sumar todas las secciones del anillo la fuerza radial resultante es igual a cero.

Durante la simulación en la dirección z aun cuando se trata de mantener una igualdad de partículas tanto por encima como por debajo del plano $z = 0$, los errores numéricos no siempre permiten que esto se mantenga siempre así. Es por eso que la fuerza total que siente el agujero negro provocada por el disco no siempre será igual a cero, por lo que existe una fuerza resultante que provocará un movimiento en el agujero negro que permitirá la conservación del momento lineal en la dirección z . Esta fuerza resultante se puede calcular de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
F_{z_{\text{Disco-AN}}} &= \sum_i^N f_{z_i} \\
&= - \sum_i^N \frac{GMm_i}{r_i(r_i - r_g)^2} z
\end{aligned} \tag{4.11}$$

donde N es el número de partículas del disco. El poder describir de manera completa la interacción entre el disco y el agujero negro nos permite poder seguir el comportamiento del momento lineal en la dirección z , es decir la conservación de dicho momento.

4.3. Autogravedad.

Debido a que el disco está espacialmente esparcido, la gravedad puede jugar un papel relevante en la estructura del disco. La gravedad que actúa en el disco por su propio potencial gravitacional es llamada *autogravedad*. Por definición el potencial gravitacional en un punto \mathbf{r} está dado por

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \tag{4.12}$$

Para incluir la autogravedad en las ecuaciones de la hidrodinámica, esta se debe de agregar como una fuerza externa en la ecuación de Euler (2.26). En ciertas situaciones la inclusión de la autogravedad puede desestabilizar el disco y llevar a una fragmentación. Si tomamos la definición (4.12) para el cálculo de la autogravedad en cada punto esto se transformaría en una suma sobre todas las partículas. Numericamente hablando, esto quiere decir que para calcular la fuerza, provocada por la autogravedad, sobre cada partícula necesitamos hacer N operaciones, por lo que en total por cada iteración en el tiempo necesitamos hacer N^2 operaciones. Esto significa una gran inversión del tiempo computacional para el cálculo de dichas fuerzas, lo cual resulta en una manera muy ineficiente de calcular la autogravedad. Además de que como se mencionó anteriormente, las partículas que participan en el SPH no representan partículas puntuales, si no más bien anillos concéntricos. Esto requiere que en lugar de utilizar la fuerza de una partícula puntual aproximemos con algún método la fuerza generada por un anillo para una región distinta a su eje.

Para este trabajo el método que utilizaremos para resolver el potencial gravitacional del disco es el FPS. Estos métodos básicamente lo que hacen es resolver la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 4\pi G \rho(\mathbf{r}) \tag{4.13}$$

para el potencial $\Phi(\mathbf{r})$ de una manera más rápida. En este caso para poder resolver el potencial gravitacional, el FPS utilizará una combinación del método de diferencias finitas con las transformadas de Fourier. Escencialmente lo que el método hace es aplicar

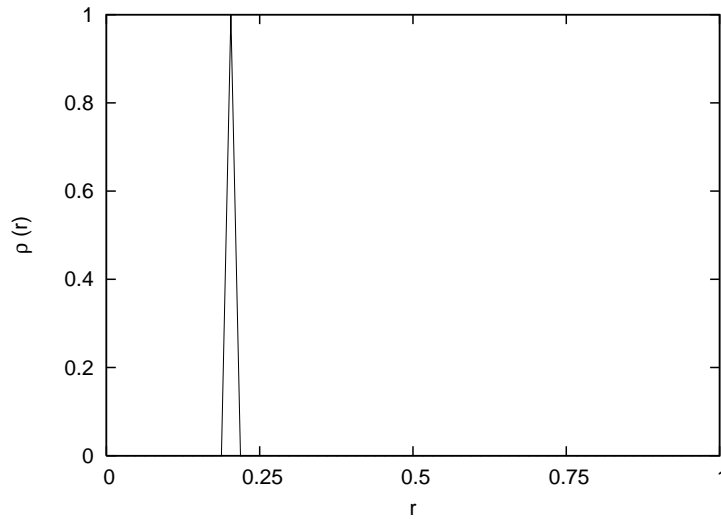


Figura 4.2: Distribución de densidad para una Delta de Kronecker centrada en $r = 0.2$.

la transformada de Fourier en la dirección z sobre una distribución de densidad en una malla, aplicar el método de diferencias finitas sobre la coordenada R , resolver el sistema para encontrar el valor de Φ en el espacio de Fourier y posteriormente aplicar la transformada inversa. A continuación se describirá el método con más detalle, pero antes se hará una revisión de las transformadas de Fourier como una alternativa para resolver la ecuación de Poisson.

4.3.1. Transformadas de Fourier y la ecuación de Poisson

Antes de aplicar las transformadas de Fourier como un método para encontrar el potencial generado por una distribución de densidad axisimétrica, es importante estudiar el comportamiento de este método en problemas más sencillos y de menor dimensión.

En el problema unidimensional, tenemos que numéricamente el potencial estará dado por

$$\Phi(r) = -G \int \frac{\rho(r')}{\sqrt{(r-r')^2 + \epsilon^2}} dr' \quad (4.14)$$

donde ρ describe la distribución de densidad y ϵ es un parámetro de suavizamiento. Este parámetro ϵ ayuda a prevenir una singularidad cuando $r = r'$.

Para reducir el tiempo computacional necesario para el cálculo del potencial Φ generado por una distribución dada, la integral anterior se puede reescribir como el producto de una convolución que será calculada en el espacio de Fourier. Tomando $K(r) = (r^2 + \epsilon^2)^{-1/2}$ el potencial dado por la ecuación(4.14) se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\Phi(r) &= -G \int \rho(r') K(r-r') dr' \\
&= -G[\rho * K](r)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

donde $*$ es el operador de convolución. Del teorema de la convolución tenemos que para las funciones f y g se cumple que $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$, donde \mathcal{F} representa la transformada de Fourier. Si aplicamos la transformada inversa \mathcal{F}^{-1} , a esta última relación encontramos que

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(f * g)] = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)]$$

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)]$$

Aplicando este resultado a la ecuación (4.15), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\Phi(r) &= -G\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(\rho) \cdot \mathcal{F}(K)] \\
&= -G \int \left[\int \rho(r) e^{-2\pi i s r} dr \cdot \int K(r) e^{-2\pi i s r} dr \right] e^{2\pi i s r} ds \\
&= -G \int \left[\int \rho(r) e^{-2\pi i s r} dr \cdot \int \frac{e^{-2\pi i s r}}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2}} dr \right] e^{2\pi i s r} ds,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Para calcular el potencial Φ de manera eficiente se recurre a la Transformada Rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés), donde el número de operaciones se puede reducir de $O(N^2)$ a $O(N \ln N)$, siendo N el número de intervalos.

Existen algunos problemas al usar la Transformada de Fourier Discreta, uno de ellos es la periodicidad. Para ejemplificar este problema, tomemos el caso en el que la distribución de densidad esta determinada por una masa puntual en una dimensión en la posición $r = 0.2$. Esto quiere decir que la función de densidad ρ sera igual a una delta de Kronecker centrada en $r = 0.2$. Además tomamos un kernel K con $\epsilon = 0.01$. Resumiendo esto

$$\rho(r) = \delta(r - 0.2) \tag{4.17}$$

$$K(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 0.01^2}} \tag{4.18}$$

En la Figura 4.2 se muestra la distribución de densidad para este ejemplo. Con todo esto podemos calcular el potencial analítico:

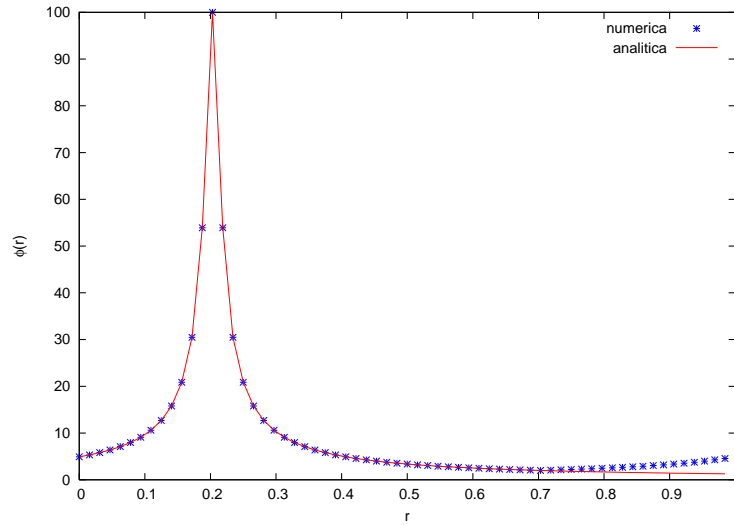


Figura 4.3: Potencial gravitacional encontrado utilizando Transformadas Rápidas de Fourier. La línea continua muestra la solución obtenida analíticamente, mientras que los asteriscos muestran la solución numérica.

$$\begin{aligned}
 \Phi(r) &= -G \int \frac{\delta(r' - 0.2)}{\sqrt{(r - r')^2 + 0.01^2}} dr' \\
 &= -G \frac{1}{\sqrt{(r - 0.2)^2 + 0.01^2}}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

La Figura 4.3 muestra el potencial calculado analíticamente y el potencial calculado con la FFT discreta. Podemos ver de la solución analítica que el potencial no debe de ser periódico, sin embargo el potencial numérico siempre será periódico (debido a que el kernel que estamos usando lo es) y su valor difiere de la solución analítica para $r > 0.5$.

A este problema se le llama *aliasing*, esto puede ser resuelto duplicando el espacio en la dirección radial y llenando las nuevas celdas con una masa igual a cero.

En coordenadas cartesianas podemos extrapolar este método para poder encontrar los potenciales de ciertas distribuciones de densidad en 2 o 3 dimensiones.

En el caso de la simulación que utilizaremos en este trabajo, las distribuciones de densidad están dadas en coordenadas cilíndricas, por lo que necesitamos un algoritmo que nos permita calcular el potencial con estas coordenadas. Debido a que en coordenadas cilíndricas no es posible hacer una convolución como la que se realizó en el caso anterior, pues involucra términos cruzados de las coordenadas, el método que se describirá a continuación es una combinación de las técnicas de diferencias finitas con las transformadas de Fourier.

4.3.2. Potenciales en coordenadas cilíndricas

En el caso de simetría cilíndrica en 2D la derivada del potencial respecto a la coordenada polar es nula, $\partial\Phi/\partial\theta = 0$, con esto la ecuación de Poisson (4.13) en coordenadas cilíndricas resulta ser

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial\Phi}{\partial R} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 4\pi G\rho(R, z) \quad (4.20)$$

Empezaremos el análisis aplicando la transformada discreta del seno en la dirección axial (\hat{z}) a la ecuación de Poisson. La transformada del seno usa las funciones senoidales para formar un conjunto completo de funciones base en el intervalo que va de 0 a 2π , y nos permite asegurarnos que en las fronteras axiales la solución será igual a cero.

La transformada discreta en función del seno se define como

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \sin \frac{\pi j k}{N} \quad (4.21)$$

con la inversa

$$f_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \sin \frac{\pi k j}{N} \quad (4.22)$$

donde f_j , $j = 0, \dots, N - 1$ es el arreglo de datos y $f_0 \equiv 0$. Para resolver la ecuación de Poisson utilizaremos una malla uniforme en el plano (R, z) . Los puntos en la malla cumplirán con $a \leq z < b$ y $0 \leq R \leq R_{frontera}$ y estarán distribuidos en la malla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} z &= a + i\Delta_z, \quad i = 0, 1, \dots, N_z - 1, \\ R &= j\Delta_R, \quad i = 0, 1, \dots, N_R, \end{aligned} \quad (4.23)$$

con

$$\Delta_z = \frac{L}{N_z}$$

y

$$\Delta_R = \frac{R_{frontera}}{N_R}$$

donde N_R y N_z son el número de puntos en la malla en la dirección R y z respectivamente y $L = b - a$.

La transformada del seno para el potencial gravitacional resulta ser.

$$\Phi(R, z) = \frac{2}{N_z} \sum_{k=0}^{N_z-1} \tilde{\Phi}_k(R) \sin \frac{\pi k z}{\Delta_z N_z} \quad (4.24)$$

Sustituyendo la ecuación (4.24) en la ecuación de Poisson (4.20) nos lleva a

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_k}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\Phi}_k}{\partial R} - \frac{1}{\Delta_z^2} \left(\frac{\pi k}{N_z} \right)^2 = 4\pi G \tilde{\rho}_k \quad (4.25)$$

donde $\tilde{\rho}_k$ fue transformada de manera similar como la función $\Phi(R, z)$.

El siguiente paso a realizar es escribir estas ecuaciones en forma de diferencias finitas pero esta vez aplicada a la coordenada R . Para todos los puntos fuera del eje ($j \geq 1$), la ecuación (4.25) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\Phi}_{k,j+1} - 2\tilde{\Phi}_{k,j} + \tilde{\Phi}_{k,j-1}}{\Delta_R^2} + \frac{\tilde{\Phi}_{k,j+1} - \tilde{\Phi}_{k,j-1}}{2j\Delta_R^2} \\ - \frac{1}{\Delta_z^2} \left(\frac{\pi k}{N_z} \right)^2 = 4\pi G \tilde{\rho}_k \quad (j \geq 1). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Factorizando los términos comunes,

$$\tilde{\Phi}_{k,j} \left[2 + \frac{\Delta_R^2}{\Delta_z^2} \left(\frac{\pi k}{N_z} \right)^2 \right] - \tilde{\Phi}_{k,j-1} \left(1 - \frac{1}{2j} \right) - \tilde{\Phi}_{k,j+1} = -4\pi G \Delta_R^2 \tilde{\rho}_{k,j} \quad (4.27)$$

Definiendo algunos coeficientes de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} S_{k,j} &= -4\pi G \Delta_R^2 \tilde{\rho}_{k,j}, \\ \lambda_k &= 2 + \frac{\Delta_R^2}{\Delta_z^2} \left(\frac{\pi k}{N_z} \right)^2, \\ \beta_j &= 1 + \frac{1}{2j}, \\ \gamma_j &= 1 - \frac{1}{2j}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

podemos escribir la ecuación (4.27) como

$$-\gamma_j \tilde{\Phi}_{k,j-1} + \lambda_k \tilde{\Phi}_{k,j} - \beta_j \tilde{\Phi}_{k,j+1} = S_{k,j}. \quad (4.29)$$

La ecuación (4.29) corresponde a un conjunto de ecuaciones. El sistema se describe de la siguiente forma,

$$\begin{bmatrix} -\gamma_1 & \lambda_k & -\beta_1 & 0 & \cdots \\ 0 & -\gamma_2 & \lambda_k & -\beta_2 & \cdots \\ & & & \cdots & \\ & & & & \cdots \\ & & & \cdots & -\gamma_{N_R-1} & \lambda_k & -\beta_{N_R-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{k,0} \\ \tilde{\Phi}_{k,1} \\ \vdots \\ \tilde{\Phi}_{k,N_R-1} \\ \tilde{\Phi}_{k,N_R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{k,1} \\ S_{k,2} \\ \vdots \\ S_{k,N_R-1} \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

En este sistema al parecer tenemos $N_R - 1$ ecuaciones y $N_R + 1$ incógnitas. Sin embargo, hemos asumido que conocemos el valor del potencial en la frontera radial, por lo que el valor de $\tilde{\Phi}_{k,N_R}$ es conocido. Con esto el conjunto de ecuaciones resulta ser

$$\begin{bmatrix} -\gamma_1 & \lambda_k & -\beta_1 & 0 & \cdots \\ 0 & -\gamma_2 & \lambda_k & -\beta_2 & \cdots \\ & & & \cdots & \\ & & & & \cdots \\ & & & \cdots & -\gamma_{N_R-1} & \lambda_k & -\beta_{N_R-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{k,0} \\ \tilde{\Phi}_{k,1} \\ \vdots \\ \tilde{\Phi}_{k,N_R-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{k,1} \\ S_{k,2} \\ \vdots \\ S_{k,N_R-1} + \beta_{N_R-1} \tilde{\Phi}_{k,N_R} \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

De la misma forma podríamos asumir que el potencial en el eje, $\tilde{\Phi}_{k,0}$, también está especificado, con lo que tendríamos un conjunto de $N_R - 1$ ecuaciones y $N_R - 1$ incógnitas. En lugar de esto, añadiremos una ecuación adicional utilizando la simetría en el eje para poder encontrar el valor de $\tilde{\Phi}_{k,0}$. Para poder hacer esto, requerimos una forma en diferencias finitas de la ecuación de Poisson que sea válida para $j = 0$. Esta expresión la obtenemos tomando el límite de la ecuación (4.25) (la ecuación seno-transformada de Poisson en forma diferencial) cuando $R \rightarrow 0$, es decir,

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_k}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\Phi}_k}{\partial R} - \frac{1}{\Delta_z^2} \left(\frac{\pi k}{N_z} \right)^2 \right) = 4\pi G \tilde{\rho}_k. \quad (4.32)$$

El segundo término de esta ecuación puede ser expresado de manera diferencial en este límite. Con ayuda de la regla de L'Hospital tenemos que

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)}{\frac{\partial}{\partial R} (R)} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}}{1} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}.$$

Por lo tanto, el límite cuando $R \rightarrow 0$, la ecuación seno-transformada de Poisson en forma diferencial se vuelve

$$2 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_k}{\partial R^2} - \frac{1}{\Delta_z^2} \left(\frac{\pi k}{N_z} \right)^2 = 4\pi \tilde{\rho}_k. \quad (4.33)$$

Obteniendo la forma en diferencias finitas de la ecuación (4.33)

$$2 \frac{\tilde{\Phi}_{k,1} - 2\tilde{\Phi}_{k,0} + \tilde{\Phi}_{k,-1}}{\Delta_R^2} - \frac{1}{\Delta_z^2} \left(\frac{\pi k}{N_z} \right)^2 = 4\pi \tilde{\rho}_{k,0}. \quad (4.34)$$

Esta ecuación es únicamente válida sobre el eje, es por eso que se ha sustituido el valor $j = 0$ en la densidad. Ahora, debido a que la geometría del problema es axisimétrica, tenemos que $\partial \Phi / \partial R|_{R=0} = 0$, con esto encontramos que $\tilde{\Phi}_{k,-1} = \tilde{\Phi}_{k,1}$. Esta condición nos dice que en el eje la función Φ debe de alcanzar un valor máximo o mínimo. El resultado anterior lo obtenemos utilizando la forma en diferencias finitas en el eje

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Phi}_k}{\partial R} \right|_{R=0} = \frac{\tilde{\Phi}_{k,1} - \tilde{\Phi}_{k,-1}}{2\Delta_R} = 0$$

y como $\Delta_R \neq 0$ entonces obtenemos que

$$\tilde{\Phi}_{k,1} = \tilde{\Phi}_{k,-1}. \quad (4.35)$$

Sustituyendo la ecuación (4.35) en la ecuación (4.34) nos lleva a

$$4 \frac{\tilde{\Phi}_{k,1} - \tilde{\Phi}_{k,0}}{\Delta_R^2} - \frac{1}{\Delta_z^2} \left(\frac{\pi k}{N_z} \right)^2 = 4\pi \tilde{\rho}_{k,0}, \quad (4.36)$$

la cual podemos expresar de la siguiente forma utilizando los coeficientes dados en la expresión (4.28)

$$(2 + \lambda_k) \tilde{\Phi}_{k,0} - 4\tilde{\Phi}_{k,1} = S_{k,0} \quad (4.37)$$

Con esta última ecuación podemos completar el conjunto de ecuaciones, el cual resulta ser

$$\begin{bmatrix} 2 + \lambda_k & -4 & 0 & \cdots & & & \\ -\gamma_1 & \lambda_k & -\beta_1 & \cdots & & & \\ & & & \cdots & & & \\ & & & & \cdots & -\gamma_{N_R-2} & \lambda_k & -\beta_{N_R-2} \\ & & & & \cdots & 0 & -\gamma_{N_R-1} & \lambda_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{k,0} \\ \tilde{\Phi}_{k,1} \\ \vdots \\ \tilde{\Phi}_{k,N_R-2} \\ \tilde{\Phi}_{k,N_R-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{k,0} \\ S_{k,1} \\ \vdots \\ S_{k,N_R-2} \\ S_{k,N_R-1} + \beta_{N_R-1} \tilde{\Phi}_{k,N_R} \end{bmatrix} .$$

Este sistema tridiagonal de N_R ecuaciones con N_R incógnitas puede ser resuelto de manera rápida en $O(N_R)$ operaciones y la solución puede ser codificada de manera consistente (Press et al. 1992). Este proceso será repetido para cada "número de onda" k , y finalmente se utilizará la transformada inversa del seno para encontrar el potencial $\Phi(R, z)$.

4.3.3. Acoplamiento en el SPH

Para los cálculos del potencial gravitacional del disco se utilizó el método descrito en la sección anterior. Las condiciones de frontera se establecieron a un radio R y distancia en z que estuvieran lo más lejos posible del disco, pero sin disminuir de manera considerable la resolución de la malla. El potencial gravitacional a $R_{frontera}$ es $\Phi(R_{frontera}, z) = 0$ y en la coordenada z , la condición de frontera fué $\Phi(R, z_{frontera}) = \Phi(R, -z_{frontera}) = 0$ ya que el agujero negro se encuentra en la posición $(0, 0)$ y la componente en la dirección z del centro de masa del disco se encuentra (la mayor parte del tiempo) cercano a $z = 0$. El número de puntos que se generaron en la malla fue de $N_R = N_z = 256$, respetando la condición de que el número de puntos debe de ser un múltiplo de 2 para que la Transformada de Fourier pueda ser llevada a cabo. Aunque podemos variar el valor de N_R pues no necesariamente debe de ser un múltiplo de 2, puesto que en esta dirección únicamente se aplican las diferencias finitas, se trató de mantener una resolución similar en ambas direcciones.

La motivación de escoger el número de puntos ya mencionado, fué para que al menos pudieramos tener uno o más puntos cercanos a cada partícula de la simulación. Por lo que la separación entre cada punto de la malla para el código de autogravedad siempre debe de menor que el tamaño de h (parametro de suavizamiento del SPH).

El procedimiento que se siguió para el calculo de la autogravedad a un tiempo dado de la simulación, fue el siguiente.

- Generar la distribución de densidad del disco sobre la malla que utilizará el código que calculará el potencial gravitacional. Para obtener la distribución de densidad de manera eficiente, se utilizó la ecuación 2.9. Con esto únicamente requerimos del orden de N operaciones para generar dicha distribución.
- Resolver para Φ la ecuación de Poisson con el método descrito en la sección anterior sobre cada punto en la malla.
- Una vez obtenido el potencial gravitacional generado por el disco, se prosiguió a calcular la fuerza gravitacional sobre cada punto de la malla. Esto se realizó utilizando un método numérico para el cálculo de las derivadas.

$$\frac{\Phi(R, z)}{dR} \approx \frac{\Phi(R + \Delta_R, z) - \Phi(R - \Delta_R, z)}{2\Delta_R}$$

$$\frac{\Phi(R, z)}{dz} \approx \frac{\Phi(R, z + \Delta_z) - \Phi(R, z - \Delta_z)}{2\Delta_z}$$

- Para obtener la fuerza sobre cada partícula del SPH, se buscó el punto más cercano sobre la malla a dicha partícula. Sin embargo, para obtener una mejor aproximación de la fuerza gravitacional no se le asignó el valor de la fuerza en el punto más cercano, sino que se realizó una interpolación numérica para poder tener un resultado mucho más suavizado.
- Finalmente, una vez obtenidos los valores de la fuerza gravitacional ejercida por el disco sobre cada partícula en la dirección radial y en la dirección z , estas fuerzas simplemente se añadieron como fuerzas externas en las ecuaciones de movimiento (3.35) y (3.36).

Capítulo 5

Resultados

El propósito de este trabajo es estudiar el comportamiento en la estructura y dinámica de los toros de acreción alrededor de agujeros negros estelares. Las simulaciones de los toros de acreción utilizadas en este trabajo incluyen viscosidad y autogravedad pero se desprecia la disipación de energía y el campo magnético. Como ya se mencionó anteriormente, para simular los efectos de gravedad fuerte del agujero negro en este trabajo, se utilizó el potencial de Paczinski & Wiita (1980). Para el disco de acreción la distribución de momento angular que utilizaremos será una función constante. Es decir,

$$l(r) = l_K(r_0) = l_0 = cte.$$

donde r_0 es el radio Kepleriano, definido de tal forma que los elementos del fluido que giran con la velocidad local Kepleriana tengan un momento angular específico $l^2 = GMr_0$ y en donde se obtiene el máximo de la densidad del disco. La justificación de usar una distribución de momento angular específico constante en lugar de una distribución Kepleriana es que el toro no solo está soportado por la rotación Kepleriana sino también por la presión del gas, es por esto que una distribución Kepleriana no es la más indicada en este caso. En general, la distribución de momento angular específico se puede describir por una ley de potencias, en este caso tomamos el caso más simple, una ley constante.

Para la simulación de los toros de acreción se utilizaron dos códigos numéricos escritos en el lenguaje de programación Fortran 77. Uno de estos códigos fue utilizado para la generación de las condiciones iniciales (código de relajación) y el segundo se utilizó para hacer evolucionar el sistema. Ambos códigos fueron en gran parte escritos por el Dr. William H. Lee del Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México. La adaptación de las rutinas para la autogravedad y las modificaciones mencionadas en el capítulo 4 fueron escritas por el autor de este trabajo. Para el análisis de los datos se utilizó un tercer código, el cual permitió calcular la tasa de acreción en función del tiempo y algunas de las propiedades que se mencionarán más adelante.

El procedimiento que se siguió para este estudio fue el siguiente: Ejecutar el código

de relajación. Con este código se genera un toro a partir de la distribución de N partículas. Esto se hace utilizando el método de Monte Carlo para generar números aleatorios. El código hace que estas partículas lleguen a un estado de equilibrio en donde el sistema se encuentra soportado únicamente por la rotación, utilizando un término de amortiguamiento (descrito más adelante). Esto se hace utilizando el método de SPH descrito en el capítulo 2 y utilizando las ecuaciones (3.42) y (3.43).

Una vez generadas las condiciones iniciales se hacen evolucionar las partículas con el código de evolución. En este código se puede activar la viscosidad y la autogravedad dependiendo del estudio que se requiera. Ya evolucionado el sistema, las variables hidrodinámicas resultantes fueron procesadas para poder realizar el análisis y posteriormente graficarlas.

Este trabajo se dividió en dos partes, una dedicada al estudio de las prescripciones para la viscosidad, en donde se despreció la autogravedad del disco. Y la segunda, en donde se realizó un estudio más completo de los discos de acreción incluyendo la viscosidad y autogravedad.

5.1. Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales se obtienen fijando algunas cantidades físicas del sistema, como: la masa del objeto central, la ecuación de estado, la constante politrópica, el índice adiabático y la distribución de momento angular. Para la parte de las prescripciones los valores fijos que se tomaron para el código son: $K = 0.96 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-4/3}$ como la constante politrópica ¹, $\gamma = 4/3$ el índice adiabático, $M_{AN} = 2.5M_{\odot}$ la masa del agujero negro ², $\Omega(r_0) = l(r_0)/r_0^2$ la velocidad angular específica inicial (por unidad de masa), $r_0 = 4.25r_g$ y $r_g = 2GM/c^2$ el radio de Schwarzschild. En donde $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ es la constante de gravitación universal y $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ es la velocidad de la luz en el vacío. Para las comparaciones entre las prescripciones se utilizara un toro con una masa $M_d = 6.95 \times 10^{29} \text{ kg} = 0.35M_{\odot}$.

Para la parte de autogravedad se utilizaron los mismos valores de las constantes a excepción de los valores de la constante politrópica. De la ecuación (3.48) podemos ver que al modificar el valor de la constante politrópica K podemos aumentar o disminuir la densidad de materia que puede existir en el toro, con esto podemos variar la masa del toro que sera soportado por el sistema. Los valores de la constante politrópica que utilizamos, así como las respectivas masas de los discos resultantes se muestran en la Tabla 5.1.

5.1.1. Generación del toro y el parámetro de amortiguamiento

Una vez fijados los valores iniciales del sistema, se generan los elementos del fluido que simularán el toro. Esta formación de elementos se hace utilizando un método de

¹Es la constante politrópica usada en Igumenshchev et al. (1996) propuesta en CGS.

²Con esta masa para el agujero negro se estarían simulando sistemas binarios de rayos X galácticos

Tabla 5.1: Condiciones iniciales para discos autogravitantes. En la tabla se muestran la letra asignada a cada modelo, la constante politrópica utilizada, la masa del disco que se genera y la razón entre la masa del disco y la masa del agujero negro.

Modelo	Constante Politrópica $\times 10^9 [\text{N m}^2 \text{kg}^{-4/3}]$	Masa del disco (M_d) [kg]	M_d/M_{AN}
a)	1.90	8.87×10^{28}	0.02
b)	1.64	1.38×10^{29}	0.03
c)	1.38	2.31×10^{29}	0.05
d)	1.12	4.33×10^{29}	0.09
e)	0.86	9.57×10^{29}	0.19

Monte Carlo para generar los números aleatorios, lo cual nos permite poder crear una distribución aleatoria de N partículas con un perfil toroidal en el plano R, z en coordenadas cilíndricas. El número de partículas utilizado para las simulaciones en este trabajo fue $N = 6452$. La extensión de la malla para la generación del toro fue $R_{frontera} = 12r_g$ y $z_{frontera} = 6r_g$. Mientras que en el código de evolución la extensión radial se aumento a $R_{frontera} = 14r_g$. Aquí hubo hacer un balance entre resolución y precisión, ya que si tomamos una malla mucho más grande podríamos ganar más precisión en las partes externas del disco, pero la resolución en las regiones internas del disco se perdería.

Para poder llevar al toro a una situación de equilibrio introducimos un término de amortiguamiento en las ecuaciones de movimiento. Esto nos permite obtener un equilibrio (o al menos lo más cercano a el) para la distribución de partículas de manera más rápida y eficiente, ya que de otra manera tendríamos que esperar para que el sistema entrara de manera natural al equilibrio (situación que ocurre de después de un tiempo mucho mayor al tiempo dinámico). El término de amortiguamiento es proporcional a la velocidad radial y vertical de la partícula, es decir, $-v_r/t_{am}$ y $-v_z/t_{am}$, respectivamente. El tiempo característico de amortiguamiento t_{am} se obtiene a partir del inverso de la velocidad angular inicial $t_{am} = 1/\Omega_0$. El introducir este término de amortiguamiento en las ecuaciones de Euler (2.28) no altera la ley de rotación de las partículas.

5.1.2. Estabilidad en los discos autogravitantes

En este trabajo se busco hacer simulaciones con discos autogravitantes de diferente masa. Para discos con una masa mucho menor que la del agujero negro, la estructura del disco estará determinada por la fuerza de gravedad que ejerce el agujero negro sobre cada partícula del disco. La fuerza que ejerce cada partícula sobre sus vecinos, autogravedad, es despreciable y por lo tanto el añadir estas fuerzas o no, da el mismo resultado. Sin embargo, a medida que la masa del disco de acreción aumenta hasta hacerse comparable con la masa del agujero negro, estos efectos pueden ser relevantes. Pero si tomamos discos de acreción cada vez más masivos, en una situación de relajación soportada unicamente por la presión y gravedad, estos pueden llegar a ser inestables.

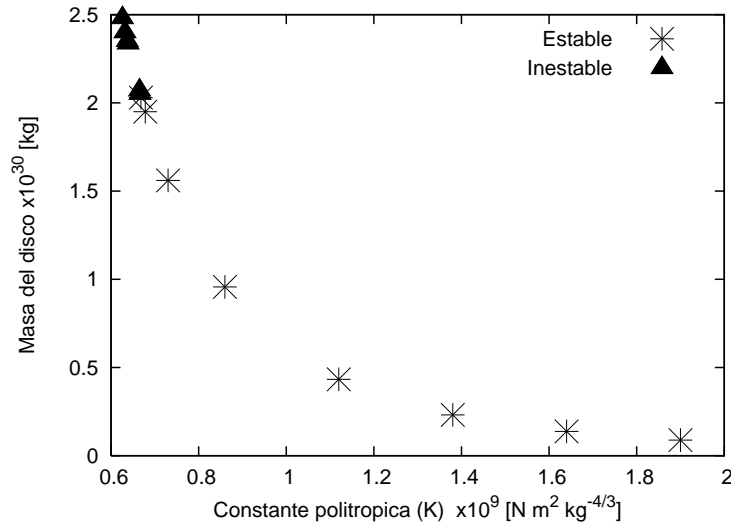


Figura 5.1: En la figura los asteriscos muestran los puntos que corresponden a discos relajados estables, mientras que los triángulos representan los discos que han sido acretados durante el proceso de relajación, es decir inestables. Cada valor determinado de K permite generar un disco con una masa diferente.

Antes de determinar las condiciones iniciales que se utilizaron para este trabajo, se generaron discos de acreción con diferentes masas y se determinó un límite para la masa máxima del disco con la cual se puede permanecer en un estado estacionario. Para poder determinar si el disco permanece en un estado de relajamiento se tomó como condición de estabilidad que el disco pudiera mantener al menos 10 % de su masa durante unas cuantas decenas del tiempo dinámico. En estos sistemas el tiempo dinámico es $t_\phi \approx R/v_\phi \approx \Omega^{-1}$, así que tomando el valor de $\Omega = \Omega(r_0)$ tenemos que el tiempo dinámico es aproximadamente $t_\phi \approx 2 \times 10^{-4}$ segundos. Mientras que el tiempo viscoso es del orden de $t_\nu \approx R^2/\nu \approx 0.1$, por lo que podemos desprestigiar la viscosidad durante el proceso de relajación, los efectos que observemos durante esta etapa serán puramente dinámicos. En la Figura 5.1 se muestran las masas de los discos que cumplen con este criterio de estabilidad.

Por debajo de una masa igual a 2.05×10^{30} kg (es decir para una constante politrópica $K = 0.66 \times 10^9$ N m² kg^{-4/3}) o un cociente de masas menor a $M_{d,crit}/M_{bh} = 0.41$ los discos autogravitantes pueden llegar a un estado de relajación. Los discos con masa mayor a la masa crítica $M_{d,crit}$ tienden a concentrar más materia en radios cada vez más cercanos al agujero negro, por lo que gran parte de esta materia empieza a moverse a radios menores a r_g . Esto provoca que el disco empiece a destruirse por la atracción gravitacional del agujero negro, es decir, que la materia que conforma el disco sea acretada.

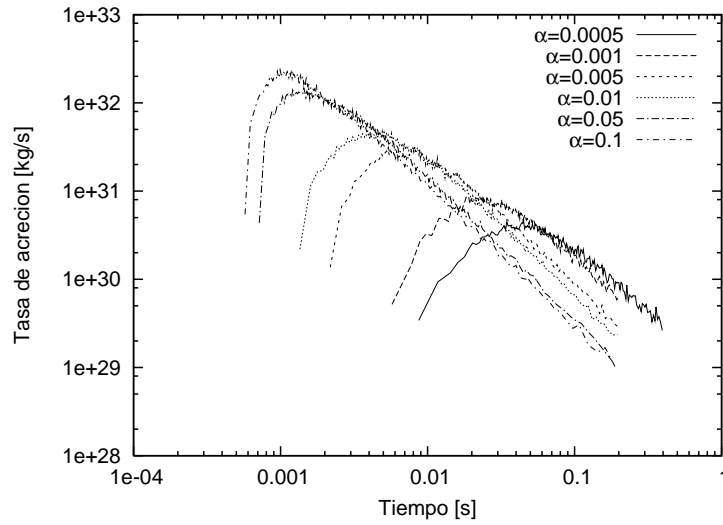


Figura 5.2: Tasa de acreción en función del tiempo para discos de acreción con la prescripción α .

5.2. Resultados para la prescripción α

Como se mencionó en la sección 3, la viscosidad descrita por la prescripción α supone que los movimientos caóticos dentro del fluido o las pequeñas perturbaciones, provocadas por campos magnéticos internos, son los responsables de generar la viscosidad interna del disco. El coeficiente de viscosidad que se incluye en las ecuaciones para los esfuerzos (3.15) está determinado por la velocidad del sonido local c_s , su tamaño de escala en la dirección z determinado por la presión y una constante α en la cual se encuentra toda la información del origen de dicha viscosidad. Este valor de α no tendría que ser necesariamente constante en todo el disco, pero en este trabajo consideraremos que esto es válido o al menos cercano a un valor constante.

Para el estudio de esta prescripción se utilizaron diferentes valores de la constante α . Una vez evolucionados los discos con los diferentes valores de α se prosiguió a obtener la tasa de acreción como función del tiempo, el valor de t para el cual ocurre el máximo en dicha curva ($t_{\dot{M}_{max}}$), el valor de t para el cual la tasa de acreción máxima \dot{M}_{max} ha disminuido en un factor de 10 ($t_{\dot{M}_{10}}$) y la masa del disco a $t = t_{\dot{M}_{10}}$. Los valores de α utilizados para las simulaciones así como los parámetros obtenidos para cada valor de α se muestran en la Tabla 5.2.

Para este estudio el tiempo $t_{\dot{M}_{10}}$ será un parámetro con el cual podamos comparar los discos evolucionados con la prescripción α (discos α) con los discos evolucionados con la prescripción β (discos β). De la Tabla 5.2 podemos ver que a medida que el valor de α aumenta, también aumenta la tasa de acreción máxima. Esto es de esperarse, ya que un parámetro de viscosidad más alto permite un mayor intercambio de momento angular. Esto no es válido para tiempos tardíos de la evolución, ya que podemos ver que

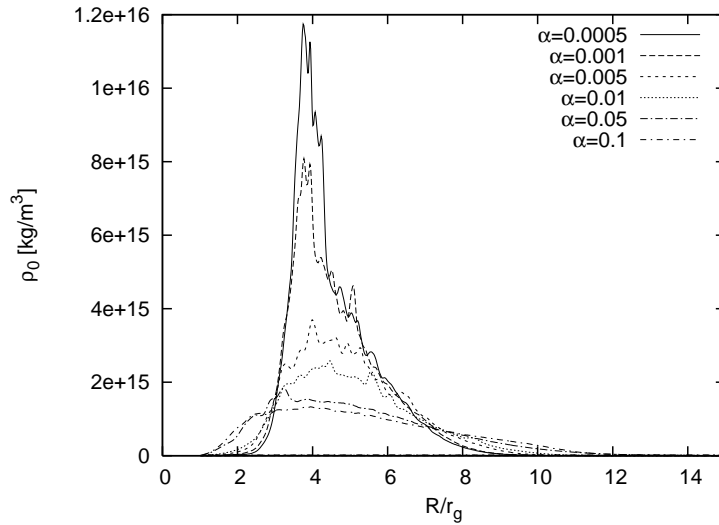


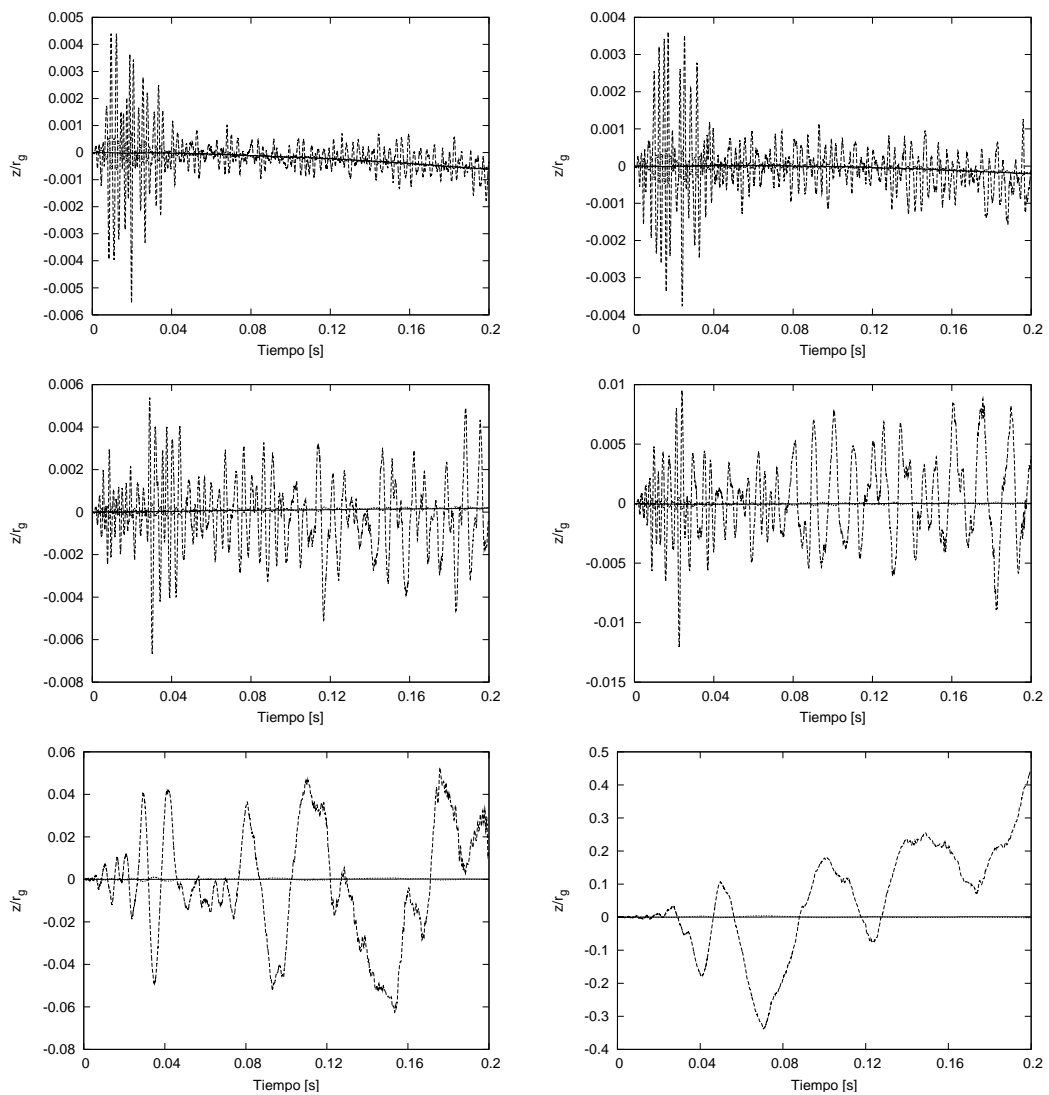
Figura 5.3: Curvas de densidad en función de la coordenada R para $z = 0$ en discos de acreción con la prescripción α a $t = t_{\dot{M}_{10}}$.

Tabla 5.2: Resultados para discos α

α	$t_{\dot{M}_{max}}$ [s]	\dot{M}_{max} $\times 10^{30}$ [kg/s]	$t_{\dot{M}_{10}}$ [s]	$M_d(t_{\dot{M}_{10}})$ $\times 10^{30}$ [kg]
0.0005	0.0454	4.27	0.3211	0.213
0.001	0.0216	8.35	0.1685	0.216
0.005	0.0069	28.80	0.0472	0.214
0.01	0.0046	45.00	0.0313	0.214
0.05	0.0014	135.40	0.0106	0.220
0.1	0.0011	221.28	0.0065	0.244

los discos con parámetros de viscosidad menores mantienen una tasa de acreción mayor que los discos que tienen valores de α más grandes, esto puede ser causado por dos razones, una es que la masa del disco ha disminuido de manera significativa, por lo que el agujero negro ya no dispone de tanta materia como antes. La segunda razón es que para poder alcanzar una mayor tasa de acreción es necesario que la transferencia de momento angular sea más eficiente, por lo que el disco se debe expandir mucho más para valores de α mayores, lo que también ocasiona que la temperatura dentro del disco disminuya, al igual que la velocidad del sonido, la cual esta relacionada con la viscosidad cinemática. También vemos que el tiempo en el cual se alcanza un máximo y el valor de $t_{\dot{M}_{10}}$, se vuelven cada vez mas pequeños para valores de α mayores. En la figura 5.2 se observa el comportamiento de \dot{M} en función del tiempo para los valores de α que se muestran en la Tabla 5.2. En esta figura podemos ver que la curva para la tasa de acreción no comienza en $t = 0$, esto se debe a que el coeficiente de viscosidad se fue introduciendo en la simulación de manera suave (utilizando una función exponencial para regular el

Figura 5.4: En esta grafica se muestra la posición en la coordenada z : del centro de masa total del sistema (línea continua), del centro de masa del disco (línea con guiones) y del centro de masa del agujero negro (línea punteada) para simulaciones de discos de acreción con diferentes valores de α , todas normalizadas a r_g . En la primer línea se muestran de izquierda a derecha, discos con $\alpha = 0.0005$ y $\alpha = 0.001$. En la segunda línea para $\alpha = 0.005$ y $\alpha = 0.01$. En la tercer línea $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.1$. Las variaciones en la componente z del centro de masa del agujero negro son muy similares a las variaciones de la componente en z del centro de masa total del sistema, es por esto que casi no se puede distinguir en las gráficas la línea punteada y de la continua.



parámetro de viscosidad), esto para prevenir la formación de choques dentro del disco. Las condiciones iniciales fueron realizadas bajo un régimen puramente dinámico (sin viscosidad) es por esto que al activar la viscosidad observamos un incremento en la tasa de acreción hasta alcanzar un máximo, posteriormente la tasa de acreción disminuye debido a que la masa del disco se vuelve cada vez menor a medida que pasa el tiempo.

Es importante también estudiar la estructura del disco α para posteriormente poder compararla con los discos β . En la Figura 5.3 se muestran las curvas de densidad en el plano $z = 0$ a un tiempo $t = t_{\dot{M}_{10}}$. Esto se hace para poder hacer una comparación coherente que nos permita entender el comportamiento de la prescripción usada en cada disco. Podemos ver de la Figura 5.3 que los discos de acreción con prescripción α se esparcen de manera más rápida para valores mayores de α . Para $\alpha = 0.1$ tenemos un aplanamiento mayor que para $\alpha = 0.0005$, en $t = t_{\dot{M}_{10}}$. El disco contiene más materia en las partes internas que externas. Además se observan algunos picos de densidad a lo largo del disco, como en el caso del pico que se encuentra en $R = 4r_g$ para el disco con $\alpha = 0.001$. Los picos con menor tamaño probablemente son debido a que la función de densidad en la simulación no es una función completamente suave, sino más bien es el resultado de la interpolación de puntos discretos.

Antes de continuar, es importante hacer un estudio para saber si el sistema esta conservando ciertas cantidades, como el momento lineal. De las simulaciones podemos obtener la posición en la dirección z del centro de masa total, del disco y del agujero negro. Si la posición del centro de masa total en la dirección z permanece constante, entonces podemos decir que el momento lineal en la dirección z se conserva. Debido a que la simulación En la Figura 5.4 podemos ver el comportamiento del centro de masa total en la dirección z . El valor absoluto del centro de masa total se mantiene siempre menor que 0.001 en el intervalo de tiempo de 0 a 0.2 segundos. Esto indica que el desplazamiento en z (z_{cm}) que sufre el centro de masa total cumple con $z_{cm} < 0.001r_g$, es decir siempre es menor que el 0.1 % de r_g .

5.3. Resultados para la prescripción β

Así como en el caso de la viscosidad α se realizaron simulaciones de discos de acreción con dicha viscosidad, para la prescripción β también se realizaron varias simulaciones. Para poder realizar posteriormente una comparación con los resultados obtenidos para la viscosidad α , necesitamos tener un parámetro en común con los discos α . En este caso tomamos a la tasa de acreción máxima como este parámetro común. Es decir que para cada valor de α de la Tabla 5.2 se busco un disco de acreción con prescripción β que alcanzara una tasa de acreción máxima prácticamente igual. En la Tabla 5.3 se muestran los valores encontrados para β , junto con sus respectivos parámetros. Nuevamente podemos ver que a medida que aumenta el valor de β también aumenta la tasa de acreción máxima y además que los tiempos respectivos son más pequeños para valores de β mayores. En la Figura 5.5 podemos ver la evolución de la tasa de acreción en función del

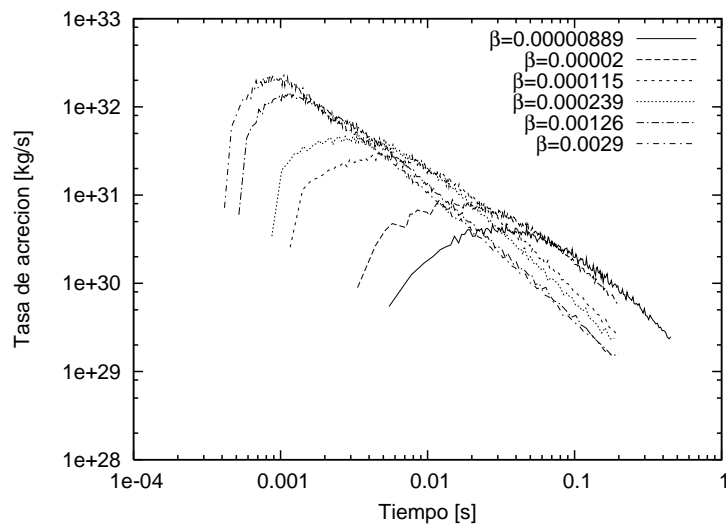


Figura 5.5: Tasa de acreción en función del tiempo para discos de acreción con la prescripción β .

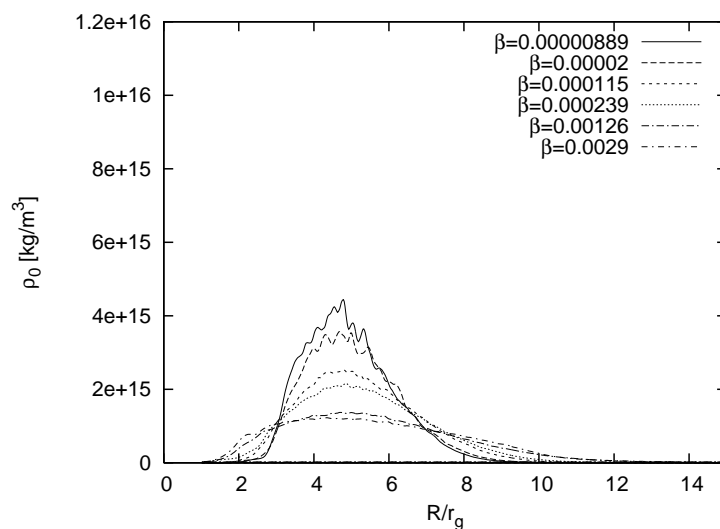


Figura 5.6: Curvas de densidad en función de la coordenada R para $z = 0$ en discos de acreción con la prescripción β a $t = t_{M10}$.

tiempo para los diferentes valores de β .

En el caso de los discos de acreción con prescripción β las curvas de densidad en el plano $z = 0$ se observan más aplanadas. Esto puede verse en la Figura 5.6. La densidad mayor que se alcanza con estos discos es del orden de $4 \times 10^{15} \text{ kg/m}^3$. Podemos ver que no hay picos prominentes de densidad en las curvas y que en las regiones más cercanas al agujero negro la densidad es más alta que en las zonas externas (más alejadas del agujero negro) del disco. La razón de que no existan picos en las curvas de densidad

Figura 5.7: Evolución del centro de masa total (línea continua), centro de masa del disco (línea con guiones) y centro de masa del agujero negro (línea punteada) en la dirección z para los diferentes valores de β . En la primera línea se muestran de izquierda a derecha los parámetros para $\beta = 8.89 \times 10^{-6}$ y $\beta = 2.00 \times 10^{-5}$. En la segunda línea para $\beta = 1.15 \times 10^{-4}$ y $\beta = 2.39 \times 10^{-4}$. En la tercera línea $\beta = 1.26 \times 10^{-3}$ y $\beta = 2.90 \times 10^{-3}$. Nuevamente los desplazamientos en la dirección z del centro de masa total del sistema y del centro de masa del agujero negro son muy similares, por lo que son casi indistinguibles.

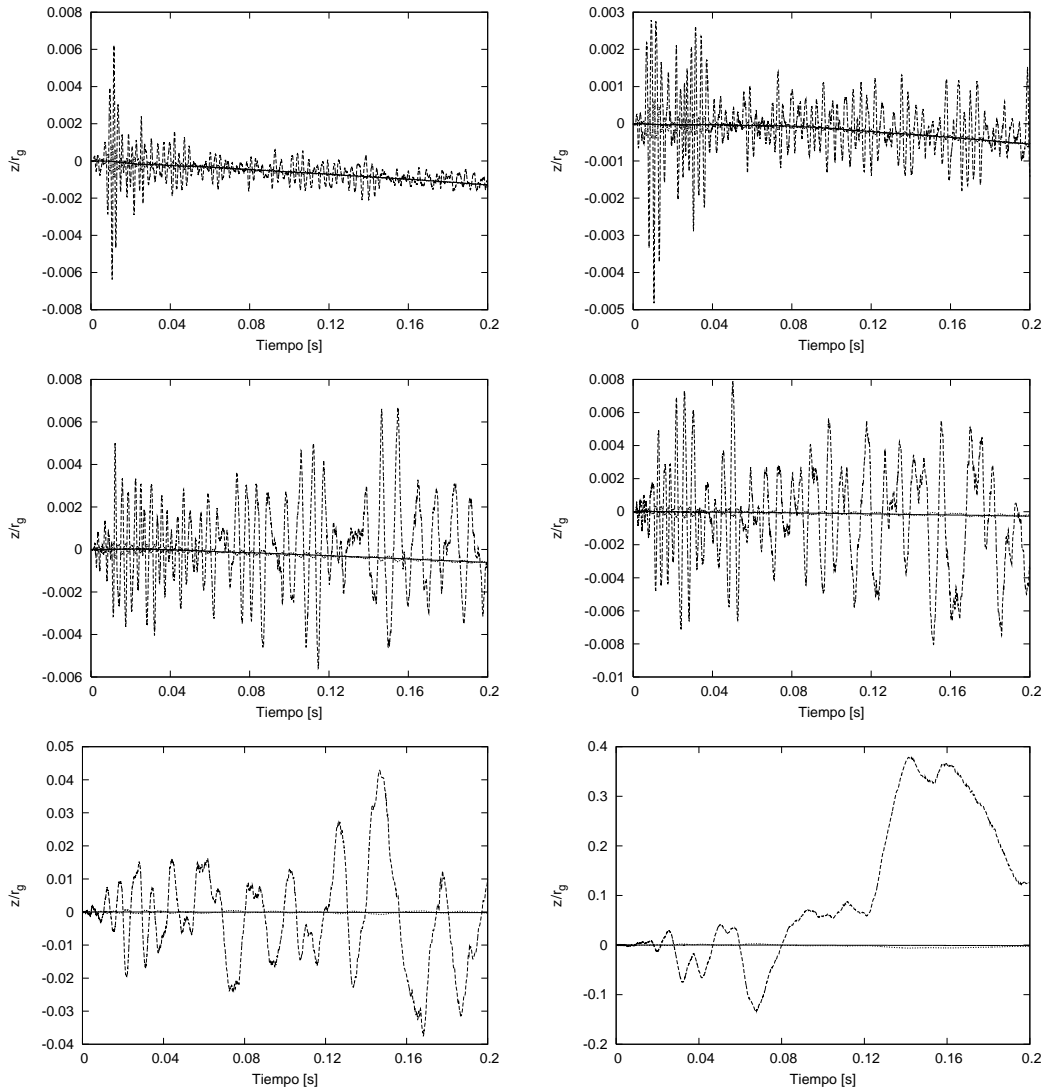


Tabla 5.3: Resultados para discos β

β	$t_{\dot{M}_{max}}$ [s]	\dot{M}_{max} $\times 10^{30}$ [kg/s]	$t_{M_{10}}$ [s]	$M_d(t_{M_{10}})$ $\times 10^{30}$ [kg]
8.89×10^{-6}	0.0325	4.28	0.3048	0.208
2.00×10^{-5}	0.0179	8.13	0.1650	0.204
1.15×10^{-4}	0.0050	28.93	0.0444	0.220
2.39×10^{-4}	0.0029	45.68	0.0278	0.226
1.26×10^{-3}	0.0011	136.36	0.0099	0.259
2.90×10^{-3}	0.0009	219.84	0.0059	0.292

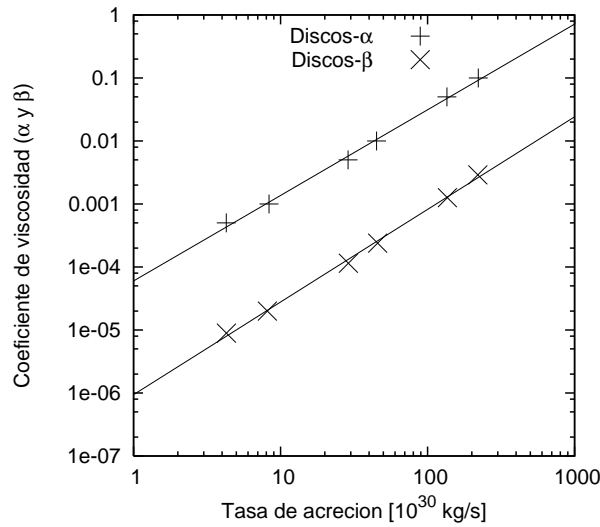


Figura 5.8: Relación entre la Tasa de acreción máxima y el parámetro de viscosidad. Para un mismo valor de \dot{M}_{max} se pueden crear discos de acreción con la prescripción α y β .

para los discos β es que estos discos

En la Figura 5.7 podemos ver el desplazamiento del centro de masa total del sistema en la dirección z . En general el valor absoluto de este desplazamiento del centro de masa es menor que $0.002 r_g$, en algunos casos es mucho menor que esto. Por lo que podemos decir que z_{cm} es menor que el 0.2 % de r_g .

5.4. Comparación entre la prescripción α y β

Los valores para β como era de esperarse (Duschl et al. 2000) resultaron ser más pequeños que los valores de α para una misma tasa de acreción máxima. Esto debido a que los valores de la velocidad circular v_ϕ y la distancia en R , que están involucrados en la prescripción β , son por lo general más grandes que los valores de la velocidad del

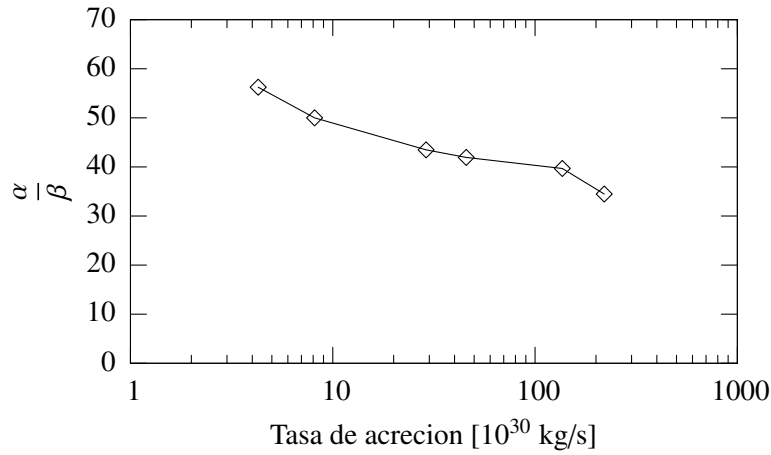


Figura 5.9: Razón entre el parámetro de viscosidad α y β para un mismo valor de la Tasa de acreción máxima. Se puede observar un decaimiento para tasas de acreción más altas, aunque para todo propósito práctico es constante.

sonido c_s y el tamaño típico en la dirección vertical H que determinan la prescripción α .

En la figura 5.8, podemos observar los valores obtenidos para los parámetros de viscosidad a diferentes tasas de acreción. Para cada prescripción se obtuvo la curva que mejor ajustara los datos obtenidos. En el caso de la prescripción α la curva que mas se ajusta es la que obedece la ecuación $\alpha = 5.96 \times 10^{-5} \dot{M}_{max}^{1.36} \text{ (s/kg)}^{1.36}$. Para la prescripción β la ecuación de la curva que mejor se ajusta es aquella con la ecuación $\beta = 9.41 \times 10^{-7} \dot{M}_{max}^{1.47} \text{ (s/kg)}^{1.36}$. Se puede apreciar una ligera diferencia de 0.11 en el valor del exponente que determina la curva de cada una de ellas. En la Figura 5.9 se graficó la razón entre el valor de α y el valor de β obtenidos para cada tasa de acreción máxima. Podemos ver que la curva que describe esta razón decae a medida que aumentamos el valor de la tasa de acreción máxima.

En la Figura 5.10 se puede observar el comportamiento de la tasa de acreción para los discos α y β . En esta figura se observa una diferencia en las curvas antes de alcanzar los máximos, esta diferencia se debe a que la viscosidad se incluye en la simulación de manera suave. Además, para obtener la curva de la tasa de acreción se realizó una derivación numérica tomando un intervalo de masa fijo, es decir, tomamos una diferencia de masa fija $\Delta M_{disco} = M_d(t_1) - M_d(t_2)$ y registramos el valor para t_1 y t_2 . El valor de la derivada se lo asignamos a un punto medio entre t_1 y t_2 .

Podemos observar de esta figura que para los parámetros de viscosidad, que alcanzan una tasa máxima de acreción similar, no hay una diferencia muy clara en el comportamiento, al menos no a simple vista. Los parámetros que se muestran en las Tablas 5.2 y 5.3 nos indican que para una tasa de acreción máxima dada, la prescripción β tiene valores ligeramente mas pequeños para el tiempo en el cual ocurre el máximo. En la Figura 5.13 podemos ver graficados los valores de $t_{\dot{M}_{max}}$ para diferentes tasas de acreción. La

Figura 5.10: Graficas de la tasa de acreción en función del tiempo para diferentes valores de α y β . En cada grafica se muestra las curvas para discos α y β que alcanzan un mismo valor para la tasa de acreción máxima.

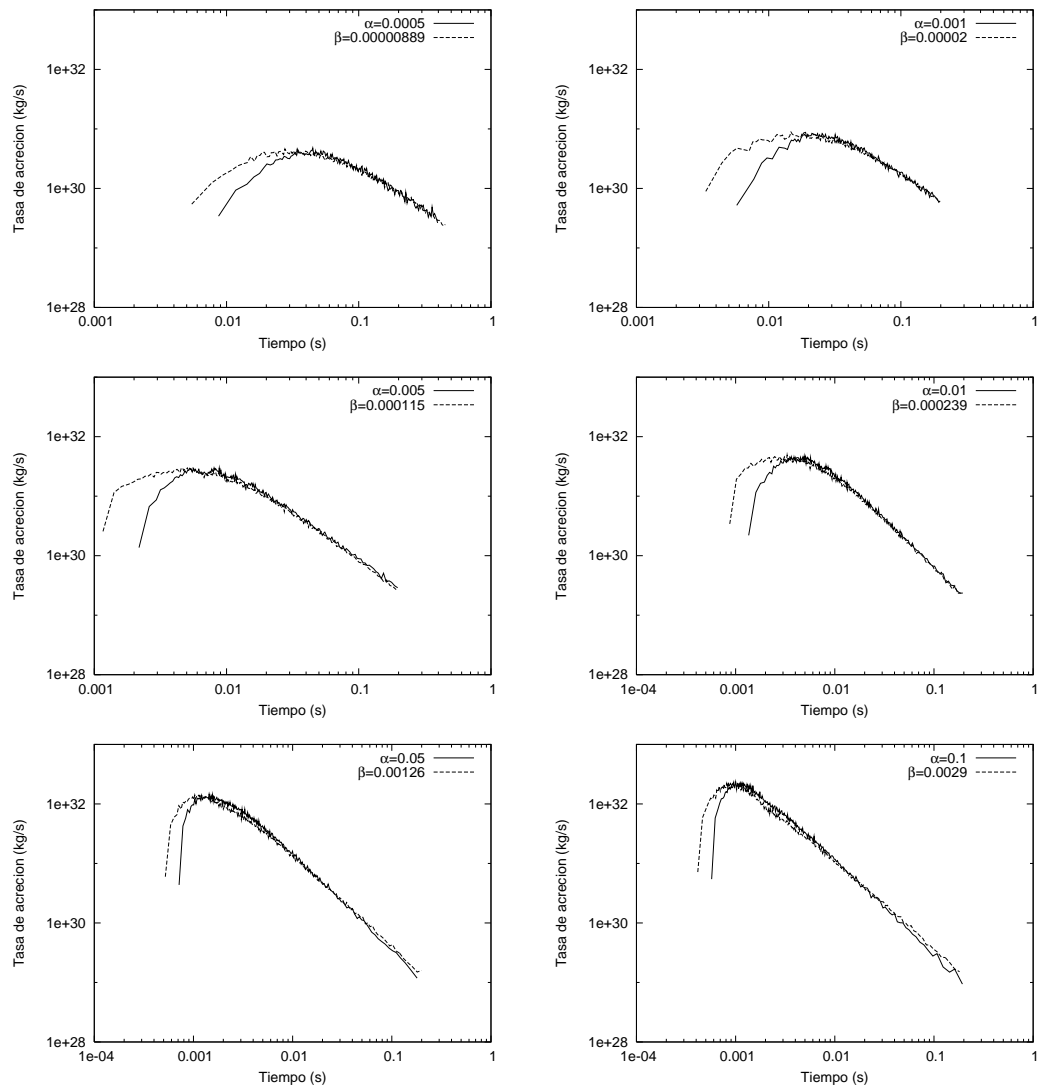


Figura 5.11: En esta Figura se muestra la distribución de las partículas del SPH a un tiempo $t = t_{M_{10}}$ para valores de $\beta = 8.89 \times 10^{-6}, 2.00 \times 10^{-5}, 1.15 \times 10^{-4}$ y $\alpha = 0.0005, 0.001, 0.005$. Podemos ver que para estos valores de viscosidad, la diferencia no es muy notable entre discos con prescripción β y α .

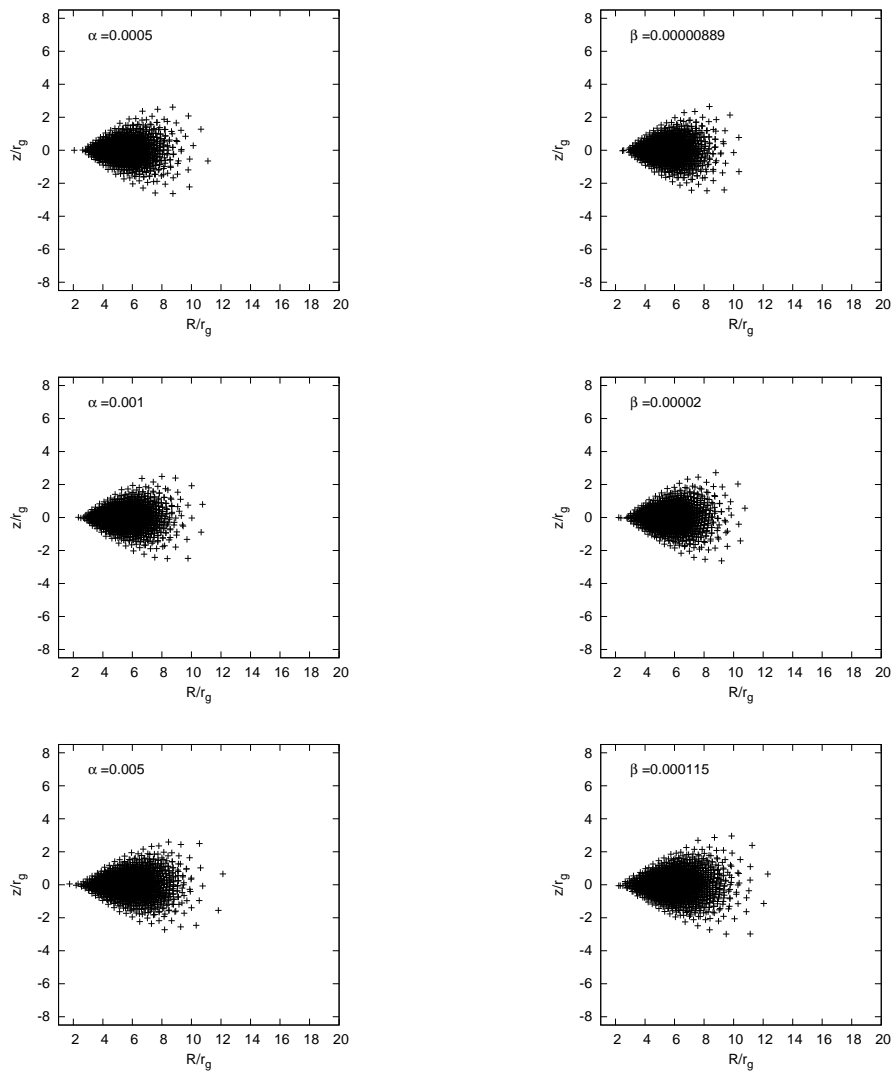
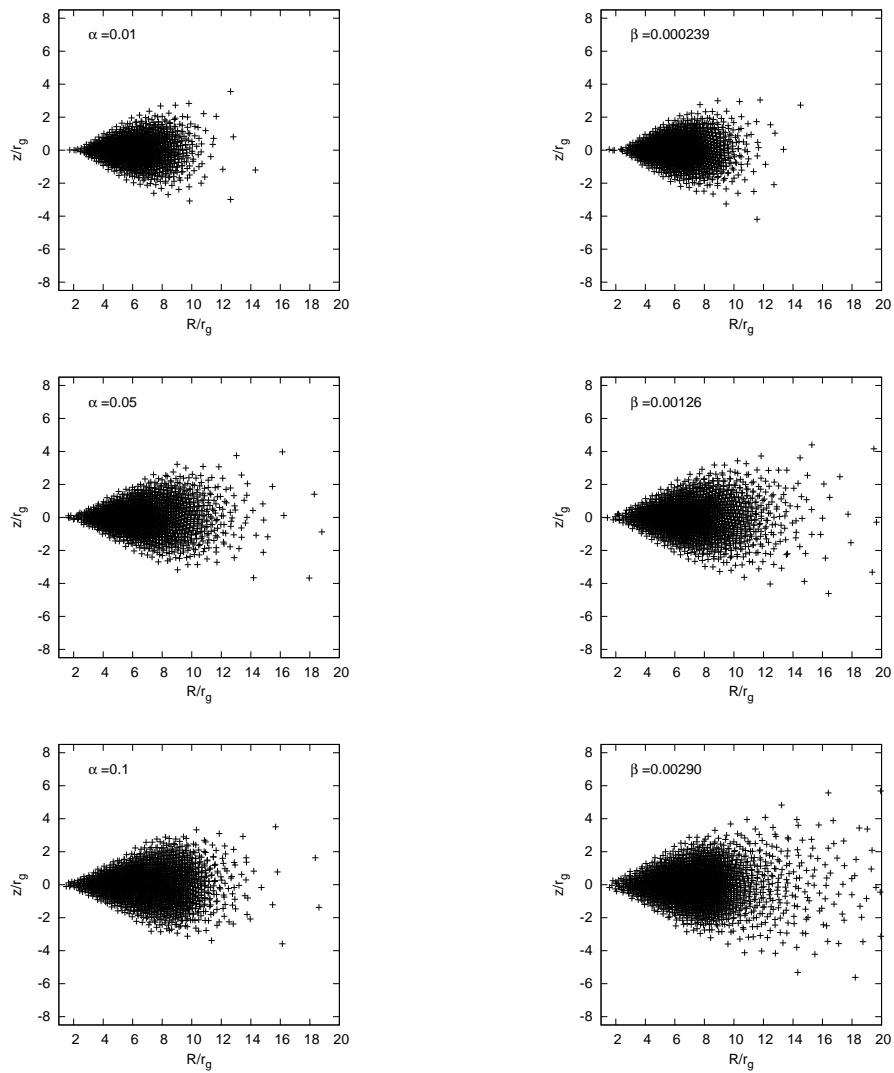


Figura 5.12: En esta Figura se muestra la distribución de las partículas del SPH a un tiempo $t = t_{M_{10}}$ para valores de $\beta = 2.39 \times 10^{-4}$, 1.26×10^{-3} , 2.90×10^{-3} y $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$. Podemos ver que existe una diferencia más notable para valores grandes de α y β .



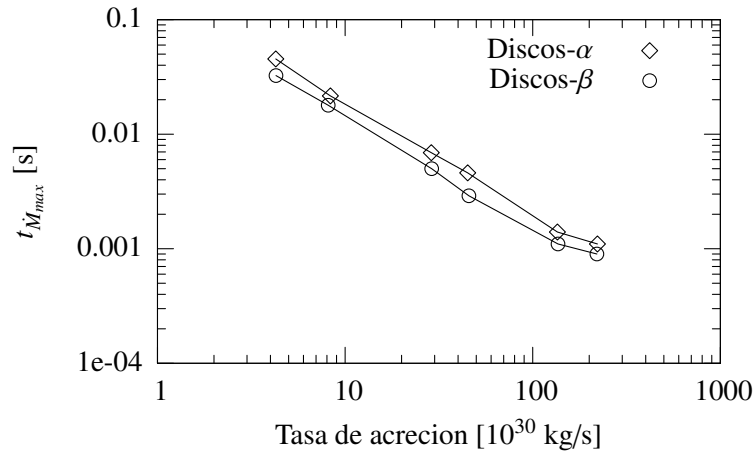


Figura 5.13: Relación entre el tiempo $t_{\dot{M}_{max}}$ y la tasa de acreción máxima. El parámetro $t_{\dot{M}_{max}}$ es el tiempo para el cual el disco alcanza la tasa de acreción máxima. En la gráfica se puede apreciar una ligera diferencia entre los discos α y los discos β .

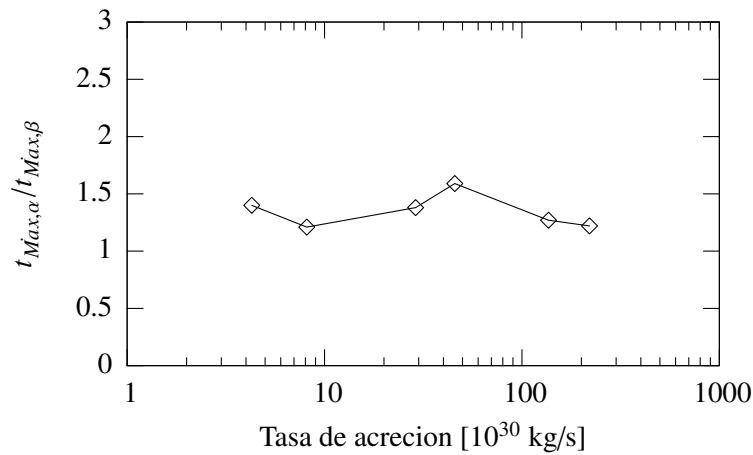


Figura 5.14: Razón entre $t_{\dot{M}_{max}}$ obtenido para un disco α entre el $t_{\dot{M}_{max}}$ obtenido para un disco β para una misma tasa de acreción máxima. Esta razón es más o menos constante y oscila alrededor del valor 1.3.

diferencia para una tasa de acreción $\dot{M}_{max} \approx 221 \cdot 10^{30}$ kg/s es de 0.0002 segundos y para una tasa de acreción de $\dot{M}_{max} \approx 3.2 \cdot 10^{30}$ kg/s es de 0.0129 segundos. En la Figura 5.14 podemos ver que la razón $t_{\dot{M}_{max,\alpha}}/t_{\dot{M}_{max,\beta}}$ para una tasa de acreción máxima \dot{M}_{max} dada, permanece casi constante. Esta oscila alrededor del valor 1.3.

De la misma forma podemos ver en la Figura 5.15 que el tiempo para el cual la tasa de acreción máxima se ha reducido en un factor de 10 tiene un comportamiento similar

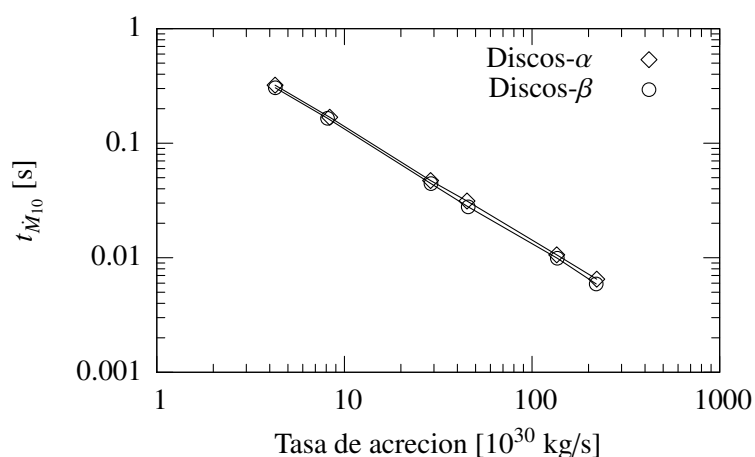


Figura 5.15: Relación entre el tiempo $t_{\dot{M}_{10}}$ y la tasa de acreción máxima para discos α y β . El parámetro $t_{\dot{M}_{10}}$ es el tiempo para el cual la tasa de acreción máxima \dot{M}_{max} ha decaído en un factor de 10. El comportamiento es muy similar en los discos α y los discos β .

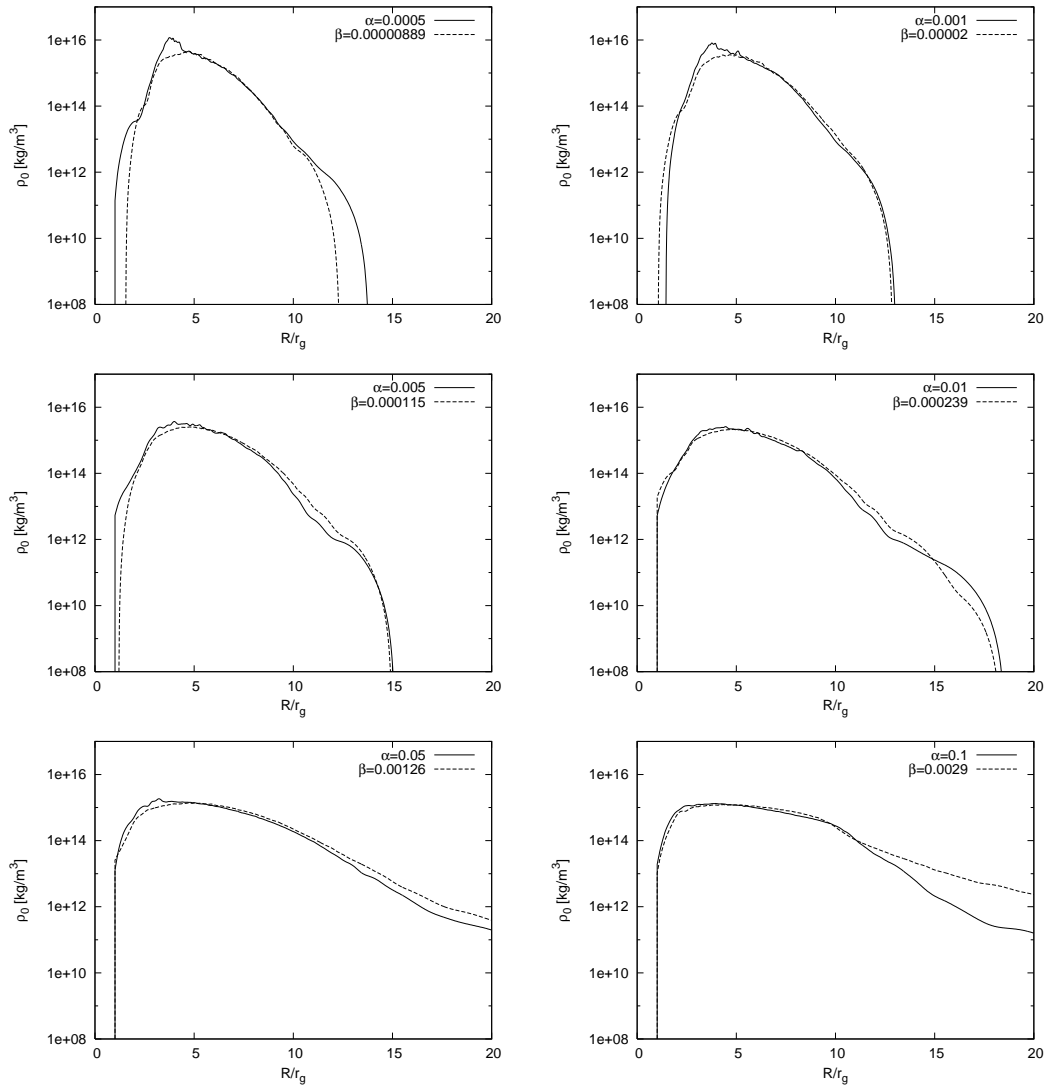
Tabla 5.4: Diferencias entre los discos α y β para $t_{\dot{M}_{10}} \cdot \Delta t_{\dot{M}_{10}} = t_{\dot{M}_{10},\alpha} - t_{\dot{M}_{10},\beta}$

\dot{M}_{max} $\times 10^{30}$ [kg/s]	$\Delta t_{\dot{M}_{10}}$ [s]
4.28	0.0163
8.13	0.0035
28.93	0.0028
45.68	0.0035
136.36	0.0007
219.84	0.0006

para ambas prescripciones. Para $\alpha = 0.1$ el valor de este tiempo es de $t_{\dot{M}_{10}} = 0.0065$, mientras que el valor correspondiente en $\beta = 2.90 \times 10^{-3}$ es del orden de $t_{\dot{M}_{10}} = 0.0059$. Esto nos da una diferencia de 0.0006. Para el resto de los valores esto no varía mucho, en la Tabla 5.4 se muestran las diferencias obtenidas.

Para poder diferenciar la prescripción β de la prescripción α también necesitamos hacer comparaciones entre la estructura que tienen los discos β y los discos α . Para esto analizamos la estructura del disco a un tiempo en común. En este caso este tiempo será $t_{\dot{M}_{10}}$, es decir el tiempo para el cual la tasa de acreción máxima ha caído en un factor de 10. En la Figura 5.16 se muestran las curvas de densidad para discos de acreción α y β que comparten la misma tasa de acreción máxima. Podemos ver que la estructura de los discos α no difiere mucho de la estructura que tienen los discos β . Los discos con $\alpha = 0.0005, 0.001, 0.005, 0.01$ muestran una curva de densidad prácticamente similar a la de los discos α . En el caso de $\alpha = 0.05, 0.1$ se puede apreciar una diferencia en

Figura 5.16: Comparación de las curvas de densidad en el plano $z = 0$ en función de R para los discos α y discos β al tiempo $t = t_{M_{10}}$. En cada gráfica se muestran las curvas de densidad para discos α y β con una misma tasa de acreción máxima.



las partes externas del disco. En el caso de $\alpha = 0.05$ la diferencia con el disco con $\beta = 0.00126$ es de tan solo de $\approx 5 \times 10^{11} \text{ kg/m}^3$, mientras que en el disco con $\alpha = 0.1$ la diferencia con el disco con $\beta = 0.0029$ esta diferencia llega a ser hasta de un orden de magnitud. Los discos β muestran un perfil de densidad más expandido, mientras que los discos con α pequeña contienen algunos picos de densidad en las regiones internas. Para el disco con $\alpha = 0.0005$ nuevamente observamos el pico de densidad del orden de $\approx 1 \times 10^{16} \text{ kg/m}^3$ a una distancia $R = 4r_g$ del centro. Esto puede verse también en las Figuras 5.11 y 5.12, aquí podemos ver que los discos- β si tienden a estar más esparcidos que los discos- α .

5.5. Discos de acreción autogravitantes

Tabla 5.5: Comparación entre condiciones iniciales con autogravedad y sin autogravedad. Donde r_{in} es el radio interno, r_{ex} es el radio exterior del disco y H lo tomaremos como la extensión del disco en la dirección z a un radio $r = r_0$ (con $r_0 = 4.25r_g$).

Modelo	Sin autogravedad		Con autogravedad		
	r_{in}/r_g	r_{ex}/r_g	r_{in}/r_g	r_{ex}/r_g	H/r_g
a)	2.40	8.22	2.42	8.0	1.16
b)	2.42	8.24	2.44	7.95	1.16
c)	2.38	8.28	2.46	7.67	1.15
d)	2.38	8.42	2.42	7.27	1.12
e)	2.36	8.39	2.47	6.07	1.01

Como se mencionó al inicio de este capítulo, para el estudio de los discos autogravitantes se crearon toros relajados con diferentes masas, es decir se crearon condiciones iniciales variando la masa del disco, para el programa de evolución. Las masas de los discos son las que se muestran en la Tabla 5.1. Los discos construidos se muestran en las Figuras 5.17 y 5.18. A medida que la masa del disco se vuelve mas comparable con la masa del agujero negro, la densidad en el plano $z = 0$ se vuelve mayor en los discos autogravitantes que en los discos sin autogravedad. Podemos ver que las curvas de densidad para los modelos a), b) y c) con autogravedad son muy similares a las de los discos sin autogravedad. El radio exterior de estos discos se hace ligeramente más pequeño. En la Tabla 5.5 se muestran estas variaciones del radio externo e interno de los discos, así como el parametro de extensión en la dirección z , el cual disminuye para discos con mayor masa, la diferencia entre el disco menos masivo y el más masivo es de $\Delta H = 0.15r_g$, mientras que la diferencia en la extensión radial Δr_{ex} es aproximadamente de $2r_g$. Los modelos d) y e) con autogravedad tienen una curva de densidad más concentrada, alcanzando valores para la densidad máxima del orden de 10^{17} y $5 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$, respectivamente, mientras que los discos con las mismas masas de los modelos d) y e) alcanzan densidades del orden de 2×10^{16} y $4 \times 10^{16} \text{ kg/m}^3$.

Figura 5.17: Lado izquierdo: Curvas de densidad en el plano $z = 0$ para los modelos a), b) y c) (orden descendente) con y sin autogravedad. Lado derecho: Disco de acreción autogravitante relajado que servirá como condición inicial. La masa de los discos corresponde a los modelos a), b) y c) (orden descendente).

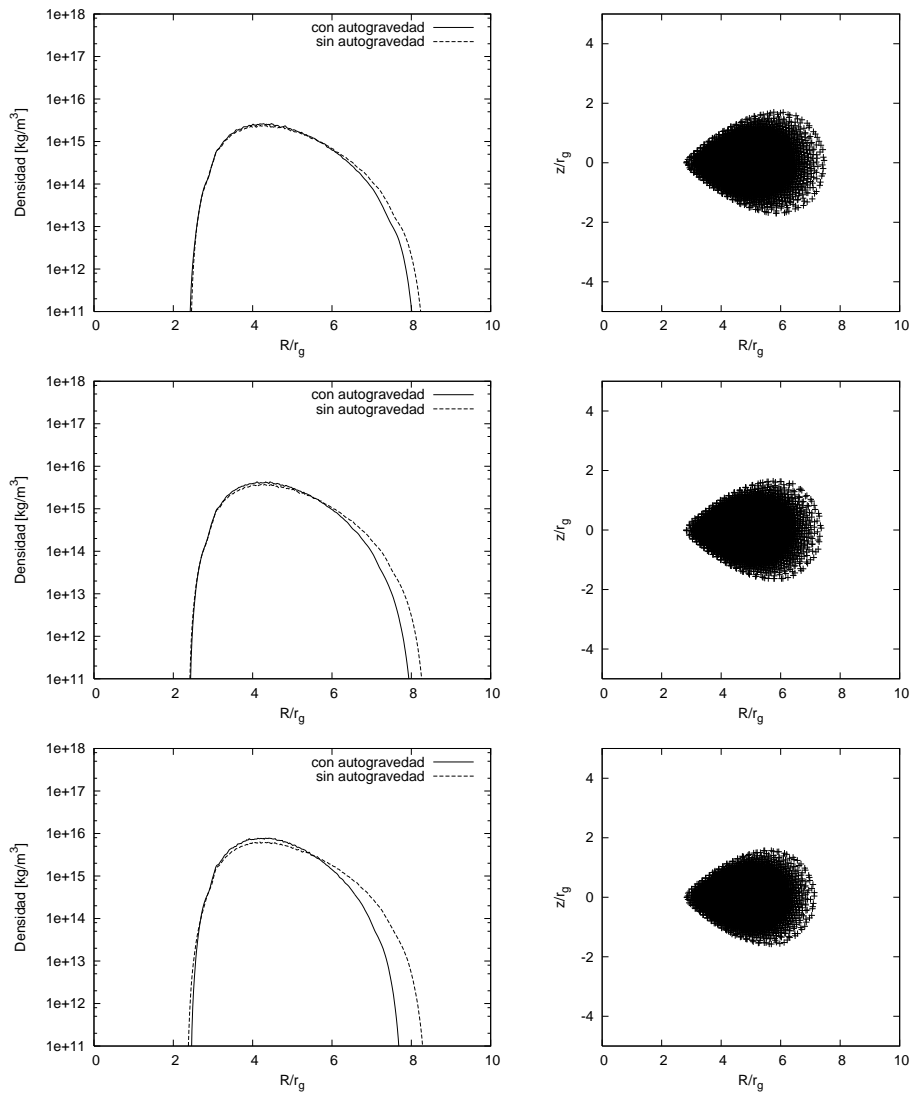
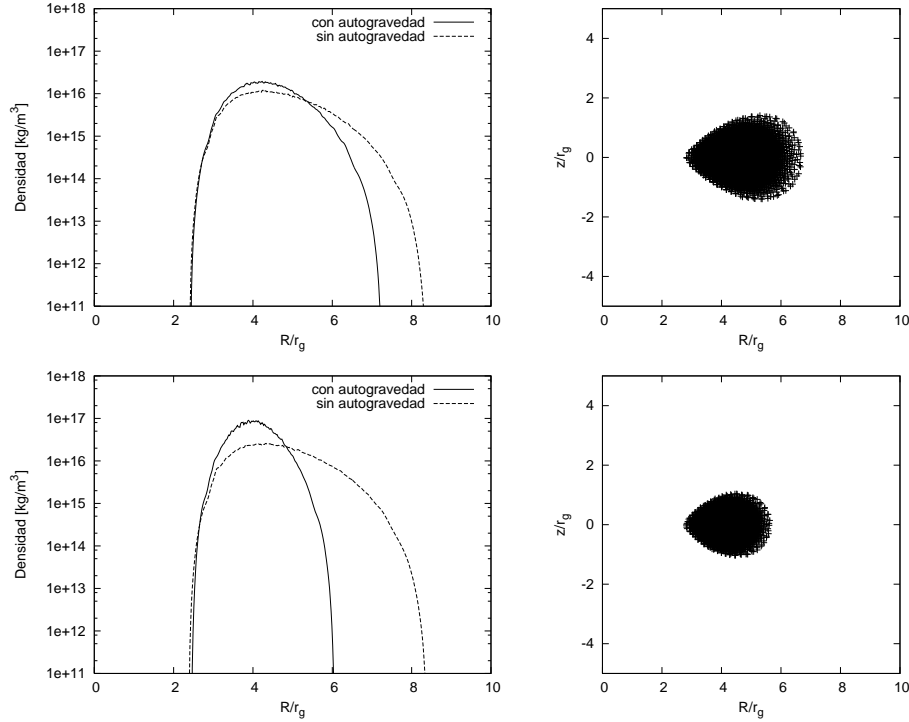


Figura 5.18: Lado izquierdo: Curvas de densidad en el plano $z = 0$ para los modelos d) y e) (orden descendente) con y sin autogravedad. Lado derecho: Disco de acreción autogravitante relajado que servirá como condición inicial. La masa de los discos corresponde a los modelos d) y e) (orden descendente).



5.5.1. Discos con $\alpha = 0.01$

Una vez obtenidas las condiciones iniciales, se evolucionaron los sistemas tomando en cuenta la autogravedad y la viscosidad del disco. En este caso se evolucionaron los discos con un parámetro de viscosidad $\alpha = 0.01$. Los discos con autogravedad más masivos mostraron que pueden alcanzar tasas de acreción mayores que los discos sin autogravedad. En la Figura 5.19 se observan las curvas de la tasa de acreción en función del tiempo para los discos con y sin autogravedad. Los efectos de la autogravedad son muy pequeños para los discos menos masivos, es decir para los modelos a), b) y c). Para los modelos d) y e) se observa un aumento en la tasa de acreción máxima, así como una disminución en el tiempo que se requiere para alcanzar dicha tasa de acreción máxima. En la Tabla 5.6 se enlistan los parámetros obtenidos para los discos con y sin autogravedad. Los discos sin autogravedad muestran un valor casi constante para $t_{\dot{M}_{max}}$ y $t_{\dot{M}_{10}}$ alrededor de 0.0043 y 0.0295, respectivamente, mientras que en el caso de los discos de acreción con autogravedad estos parámetros muestran una dependencia con la masa del disco. A mayor masa menor es el valor para estos tiempos.

La estructura del disco se ve modificada por la autogravedad que ejerce este sobre si mismo. Esto se puede apreciar en la Figura 5.20. De las graficas podemos ver que en las

Figura 5.19: Gráfica de la tasa de acreción en función del tiempo para diferentes masas con un valor de $\alpha = 0.01$. En la gráfica se muestran las curvas para discos con y sin autogravedad.

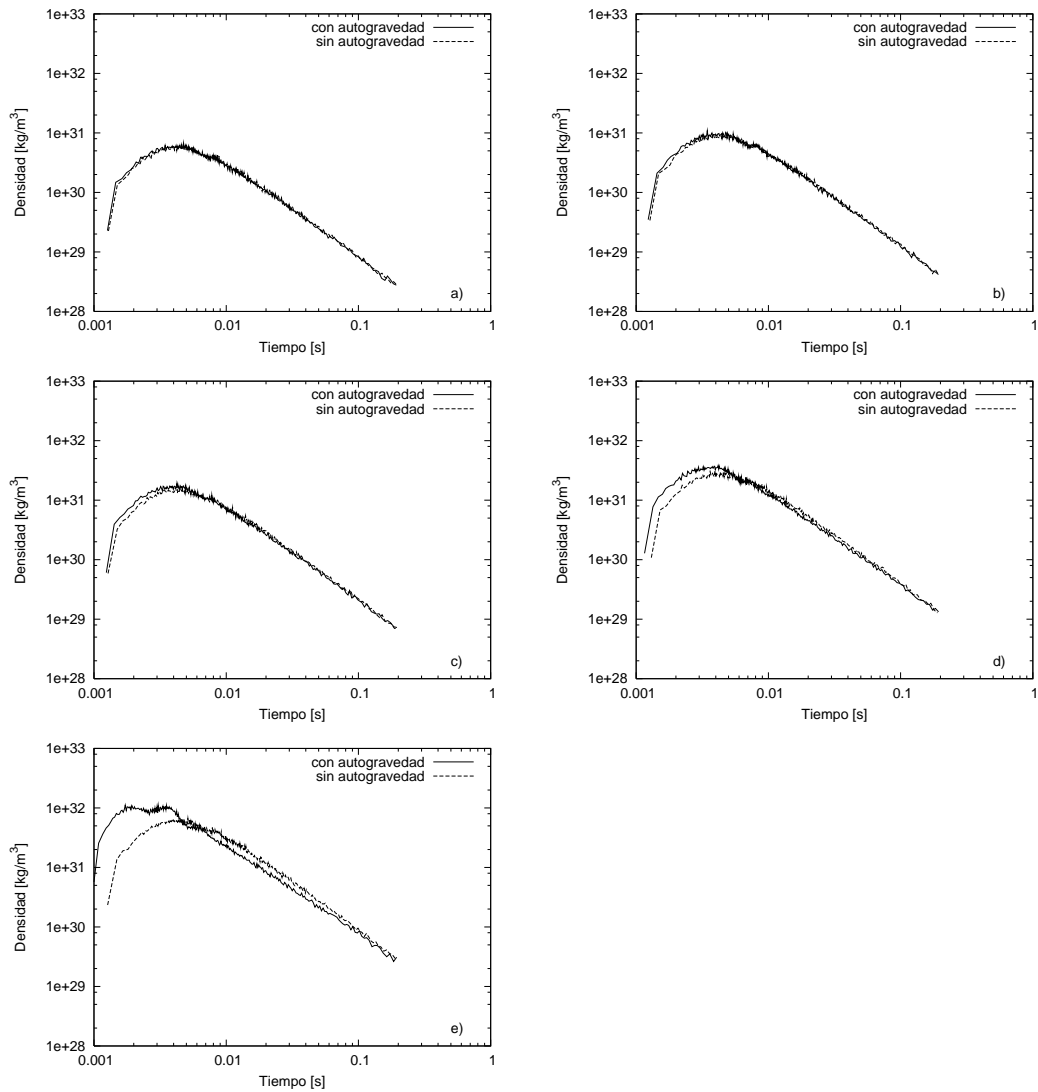


Tabla 5.6: Resultados para discos con y sin autogravedad utilizando un valor del parámetro de viscosidad $\alpha = 0.01$

Modelo	Con autogravedad			Sin autogravedad		
	\dot{M}_{max} $\times 10^{30}$ [kg/s]	$t_{\dot{M}_{max}}$ [s]	$t_{\dot{M}_{10}}$ [s]	\dot{M}_{max} $\times 10^{30}$ [kg/s]	$t_{\dot{M}_{max}}$ [s]	$t_{\dot{M}_{10}}$ [s]
a)	6.18	0.0044	0.0275	5.85	0.0043	0.0277
b)	9.93	0.0044	0.0255	8.94	0.0041	0.0293
c)	17.4	0.0042	0.0273	15.5	0.0045	0.0295
d)	36.4	0.0037	0.0234	29.0	0.0043	0.0315
e)	107	0.0026	0.0164	63.5	0.0045	0.0303

regiones más internas, el disco con autogravedad tiene un perfil de densidad similar al de un disco de igual masa pero sin tomar en cuenta la autogravedad. Este efecto se puede observar para todos los discos estudiados, sin embargo es más notorio para los modelos a), b) y c) en donde los efectos de la autogravedad aun no son tan fuertes. En todos los modelos también se observa que los discos con autogravedad se extienden más que en el caso sin autogravedad. Esta distribución más extendida de materia puede modificar el espectro del disco y proveer de evidencia observacional. En los modelos d) y e) con autogravedad se observa un decaimiento pronunciado en la media del disco (alrededor de $10r_g$). En esta región, para los modelos d) y e) la densidad se vuelve entre uno o hasta dos órdenes de magnitud (en el caso del modelo e)) más pequeña que en el caso de los discos sin autogravedad.

Así como en el estudio de la viscosidad se analizó el desplazamiento del centro de masa total en la dirección z , en este caso también fué posible observar como se comporta el centro de masa total del sistema y verificar si la simulación conserva ciertas cantidades. En la Figura 5.21 se puede observar el comportamiento del centro de masa total para un disco sin y con autogravedad a masas iguales. Podemos ver que para el disco con autogravedad el desplazamiento (en valor absoluto) del centro de masa total del sistema siempre esta por debajo de $0.0005 r_g$. El desplazamiento del centro de masa total en la dirección z para un disco sin autogravedad es ligeramente mayor que para el disco con autogravedad, pero se mantiene por debajo de $0.001 r_g$. Lo cual indica que ambos conservan en buena manera el momento lineal en la dirección z .

5.5.2. Discos con $\alpha = 0.1$

En este caso se evolucionaron los discos con un parámetro de viscosidad $\alpha = 0.1$. Aquí se observó un aumento en la tasa de acreción en los discos con autogravedad, muy ligero en el caso de los modelos a), b), c) y d) y mas pronunciado en el caso e), ver Figura 5.22. En la curva de la tasa de acreción para el modelo e) se puede apreciar una pequeña oscilación, sin embargo esto puede ser producido por un error numérico, en este estudio no se analizó el origen de esta perturbación. En la Tabla 5.7 se muestran

Figura 5.20: Perfil de densidad en el plano $z = 0$ para diferentes masas del disco con $\alpha = 0.01$. Las curvas pertenecen a discos con y sin autogravedad al tiempo $t_{M_{10}}$.

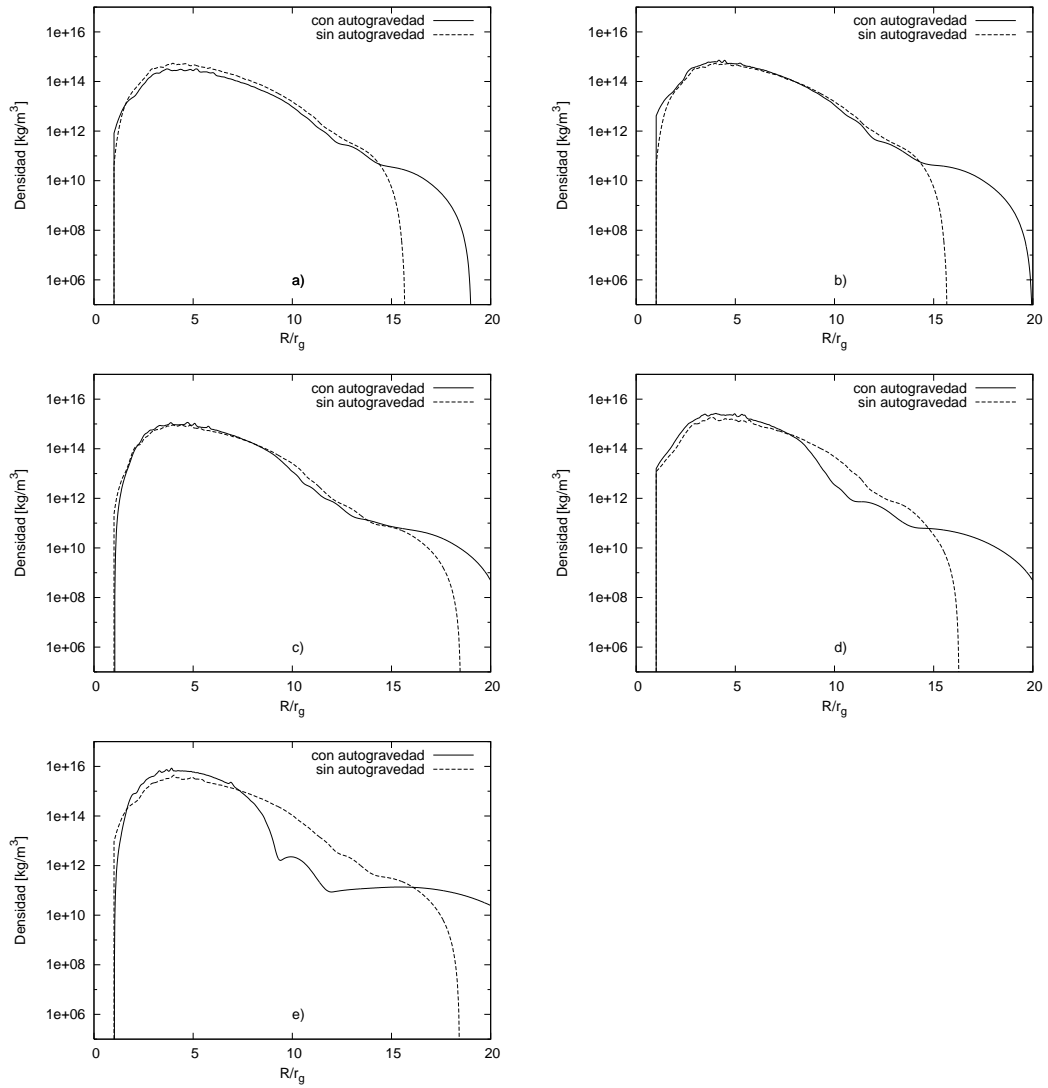


Figura 5.21: Evolución del centro de masa total en la dirección z para discos con y sin autogravedad a masas iguales con $\alpha = 0.01$.

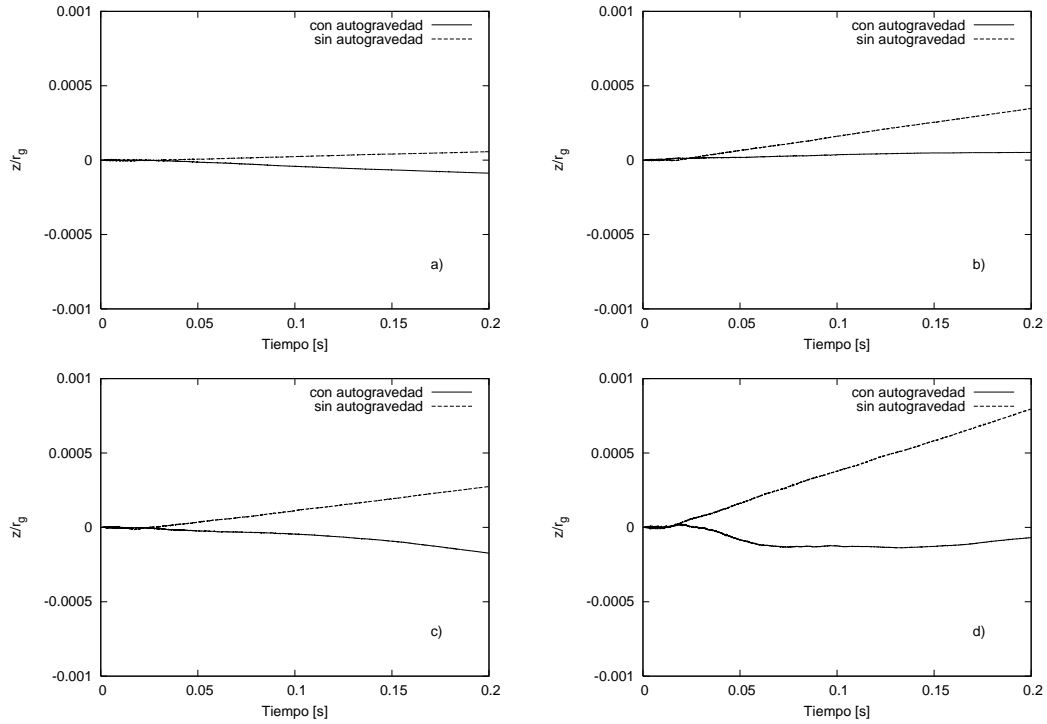


Tabla 5.7: Resultados para discos con y sin autogravedad utilizando un valor del parámetro de viscosidad $\alpha = 0.1$

Modelo	Con autogravedad			Sin autogravedad		
	\dot{M}_{max} $\times 10^{30}$ [kg/s]	$t_{\dot{M}_{max}}$ [s]	$t_{\dot{M}_{10}}$ [s]	\dot{M}_{max} $\times 10^{30}$ [kg/s]	$t_{\dot{M}_{max}}$ [s]	$t_{\dot{M}_{10}}$ [s]
a)	31.2	0.0010	0.0061	28.2	0.0011	0.0062
b)	48.8	0.0010	0.0062	44.1	0.0010	0.0067
c)	88.4	0.0009	0.0054	74.4	0.0010	0.0065
d)	203	0.0009	0.0046	140	0.0011	0.0061
e)	665	0.0007	0.0028	320	0.0010	0.0067

los parámetros obtenidos para los discos con y sin autogravedad utilizando un valor de $\alpha = 0.1$. Los discos sin autogravedad muestran un valor casi constante para $t_{\dot{M}_{max}}$ y $t_{\dot{M}_{10}}$ alrededor de 0.0010 y 0.0064, respectivamente. Los discos de acreción con autogravedad no muestran un comportamiento constante para estos parámetros, se puede ver de la Tabla 5.7 que a mayor masa del disco, mas pequeño se vuelve el valor de estos tiempos.

Para estas simulaciones podemos ver que la autogravedad tiene un efecto relativamente pequeño en la estructura de los discos de acreción al tiempo $t = t_{\dot{M}_{10}}$, Figura 5.23. En los modelos a), b) y c) el perfil de densidad prácticamente es el mismo que para un

Figura 5.22: Gráfica de la tasa de acreción en función del tiempo para diferentes masas con un valor de $\alpha = 0.1$. En la gráfica se muestran las curvas para discos con y sin autogravedad.

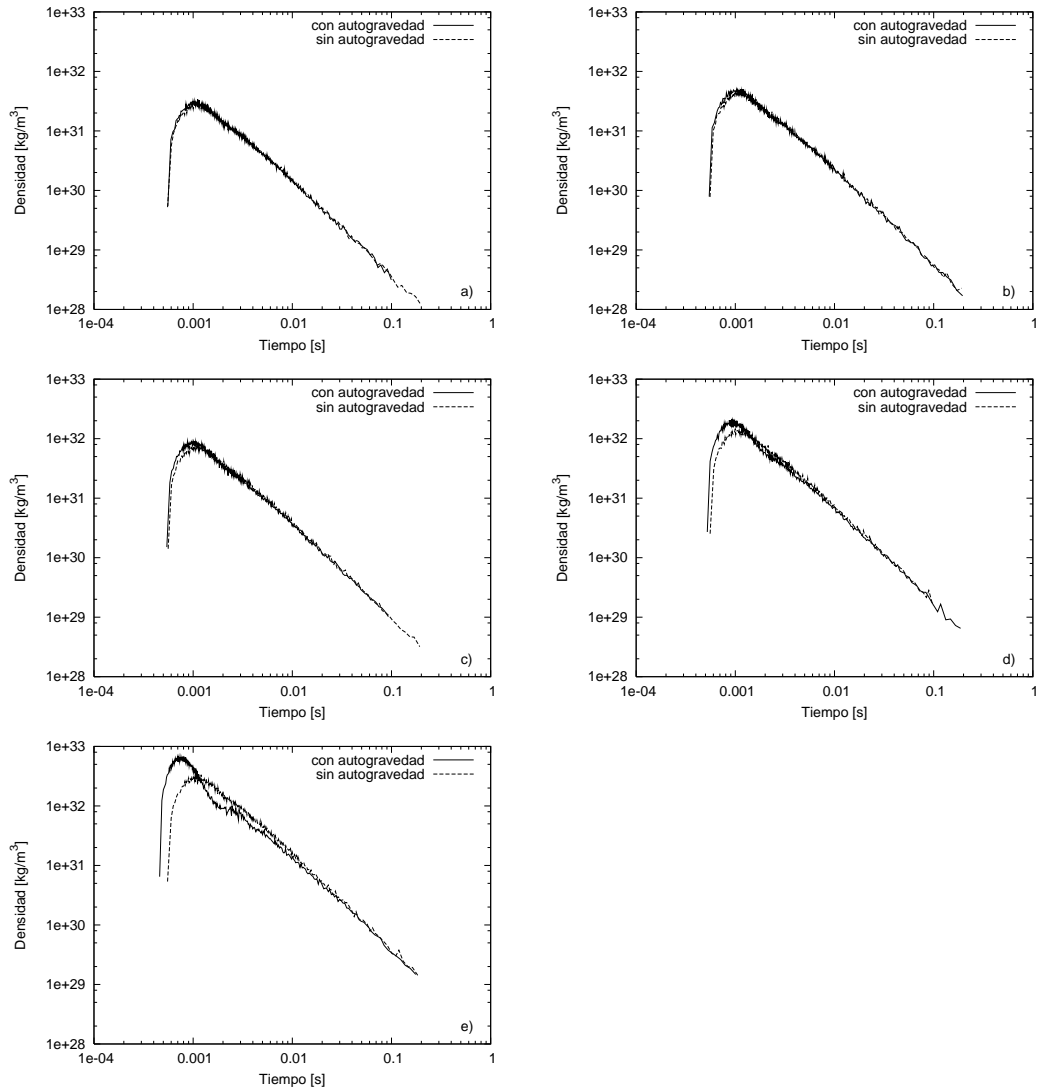
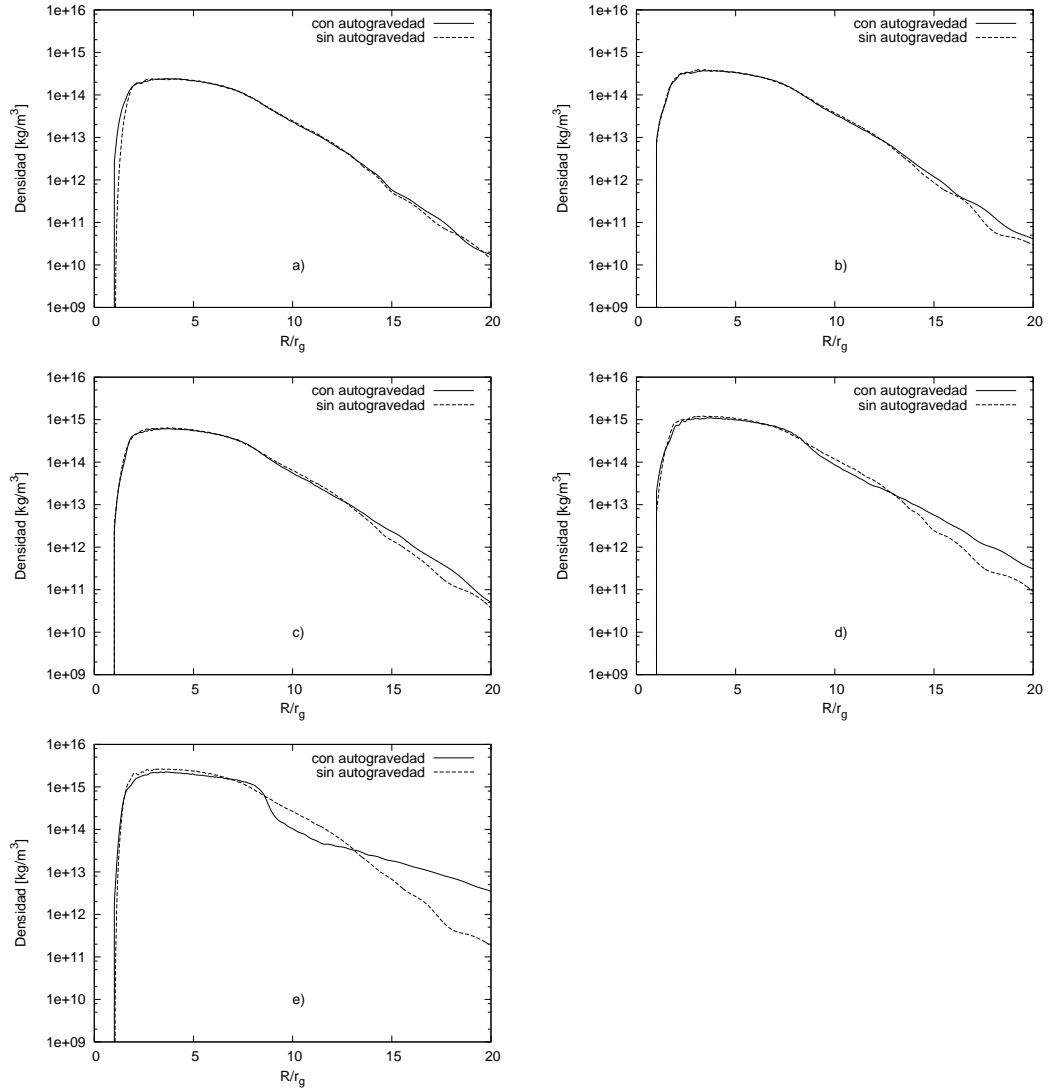


Figura 5.23: Perfil de densidad en el plano $z = 0$ para diferentes masas del disco con $\alpha = 0.1$. Las curvas pertenece a discos con y sin autogravedad al tiempo $t_{M_{10}}$.



disco sin autogravedad. En el caso d) se observa una densidad mayor en las regiones externas para el disco con autogravedad casi de $1/2$ orden de magnitud. La parte interna del disco se sigue comportando prácticamente como si el disco no tuviera incluida la autogravedad. En el caso e) la parte interna del disco se comporta similar al caso sin autogravedad, sin embargo en la parte central del disco se puede apreciar una caída en la densidad con respecto a la densidad del disco sin autogravedad. Posteriormente en la parte externa el disco con autogravedad muestra una mayor densidad que el disco sin autogravedad, lo que indica que el disco con autogravedad se extiende aún más que cuando no se incluye la autogravedad.

Capítulo 6

Análisis y conclusiones

Se ha presentado la evolución de estructuras toroidales de gas en rotación alrededor de agujeros negros ante diferentes prescripciones para la viscosidad (α y β). Para la simulación del disco utilizamos una aproximación pseudo-newtoniana, se despreció la autogravedad de los discos de acreción, y se utilizó una simetría axisimétrica. Hemos considerado únicamente discos gruesos ($R \propto H$) construidos con una ley de momento angular constante y bajo el potencial de Paczyński-Wiita, que simula los efectos de la gravedad fuerte producida por la presencia del agujero negro.

Además, se mostró la evolución de los discos de acreción tomando en cuenta la contribución en el potencial gravitacional producido por la autogravedad para diferentes masas del disco. En estas simulaciones también se utilizó el potencial de Paczyński-Wiita para simular los efectos de gravedad fuerte producidos por el agujero negro, se utilizó la prescripción α para la viscosidad y la simetría axisimétrica.

Antes de simular la evolución de estas estructuras toroidales se construyeron las condiciones iniciales bajo un equilibrio hidrostático para una distribución de momento angular constante. Para el estudio del comportamiento de la viscosidad en los discos de acreción únicamente se requirió de la generación de una estructura toroidal a una determinada masa. En el caso del estudio de la autogravedad se generaron estructuras toroidales en equilibrio hidrostático con diferentes masas. Se pudo observar que conforme aumentamos la masa del toro (disminuyendo el valor de la constante politrópica) la fuerza de gravedad que ejerce el disco sobre si mismo hace que este se vuelva mas compacto y la distribución del gas que lo conforma se encuentre más cerca del agujero negro. Encontramos que para un agujero negro de $2.5M_{\odot}$, la masa del disco más grande que es aun estable en una situación de equilibrio hidrostático es de aproximadamente 2.05×10^{30} kg. Los toros con una masa mayor a este límite son acretados (casi en su totalidad) por el agujero negro, por lo que podemos decir que son inestables”.

Para todas las evoluciones de los discos de acreción que se realizaron en este trabajo se obtuvieron tres parámetros con los que se hicieron las comparaciones: la tasa de

acreción máxima \dot{M}_{max} , el tiempo que tarda el disco en alcanzar el máximo de acreción $t_{\dot{M}_{max}}$ y el tiempo en el cual la tasa de acreción máxima a disminuido en un factor de 10, $t_{\dot{M}_{10}}$. En el estudio del comportamiento de los discos bajo diferentes prescripciones, se buscaron los parámetros de viscosidad α y β para los cuales los discos de acreción alcanzaran el mismo valor \dot{M}_{max} . Para una misma tasa de acreción máxima los valores $t_{\dot{M}_{10}}$ y $t_{\dot{M}_{max}}$ podrían servir como características que permitieran identificar entre una y otra prescripción, sin embargo lo que se encontró es que la diferencia que podría permitir esta identificación es muy pequeña pudiendo confundirse con algún error numérico o difícil de distinguir en el caso de observaciones. Para el caso de $t_{\dot{M}_{10}}$, por ejemplo, esta diferencia entre una y otra prescripción va de aproximadamente $10^{-2} - 10^{-4}$ segundos para el intervalo de α de 0.0005 a 0.1.

La estructura del disco no muestra tampoco alguna variación que nos pueda ayudar a identificar la naturaleza de la viscosidad, se pudo observar que los perfiles de densidad en el plano $z = 0$ son muy similares en todos los casos. Para parámetros de viscosidad mayores, se puede observar que la prescripción β provoca un mayor esparcimiento en la distribución de materia. Esto podría modificar el espectro de emisión del disco, ya que en estos sistemas la emisión varía con respecto al radio. Para sistemas que resultaran tener un parámetro de viscosidad grande, se podría distinguir una diferencia al observar el espectro del disco, con lo que podríamos distinguir entre una y otra prescripción.

Podemos concluir que tomando una tasa de acreción máxima fija, en general ambas prescripciones provocan un comportamiento similar en el disco de acreción. Los parámetros de tiempo, utilizados para la comparación, en este trabajo muestran diferencias muy pequeñas que probablemente en el contexto de las observaciones sean muy difíciles de verificar. Por lo que nuestra comparación realizada no muestra alguna diferencia que pueda ayudar a diferenciar entre alguna prescripción, y por lo tanto no nos ayuda a entender el mecanismo que esta detrás de la viscosidad.

Para los discos autogravitantes, como se mencionó anteriormente, pudimos observar que a mayor masa, la influencia del potencial gravitacional del disco se vuelve más relevante. En general, esta influencia es mayor en las regiones externas del disco, las cuales se encuentran más lejos del agujero negro. Los toros autogravitantes en un estado estacionario soportados únicamente por la rotación son más compactos a medida que su masa se vuelve más comparable a la del agujero negro. Los toros autogravitantes con una masa cada vez mayor tienden a tener un radio externo r_{ex} mucho más pequeño que los toros con una masa menor. Por lo que la extensión del disco disminuye más en la dirección radial que en la dirección vertical.

Para los toros con autogravedad también obtuvimos las curvas de las tasas de acreción en función del tiempo y los perfiles de densidad en el plano $z = 0$, así como los parámetros $t_{\dot{M}_{10}}$ y $t_{\dot{M}_{max}}$. Se observó que los discos sin autogravedad muestran un comportamiento similar para todas las masas (únicamente varían los valores de la densidad y la tasa de acreción pero el comportamiento es el mismo). Los tiempos $t_{\dot{M}_{max}}$ y $t_{\dot{M}_{10}}$ resultan ser los mismos para discos con masas diferentes.

En el caso de los discos autogravitantes, se observó una variación en los tiempos $t_{\dot{M}_{max}}$ y $t_{\dot{M}_{10}}$ para diferentes masas. Estos valores alcanzan a ser hasta la mitad de los valores mostrados en los discos sin autogravedad para el modelo con mayor masa simulado en este trabajo. Además los discos autogravitantes llegan a alcanzar una tasa de acreción máxima mayor que la que alcanzan los discos de acreción sin autogravedad. La autogravedad puede llegar a modificar de manera significativa el comportamiento de los discos de acreción con una masa de aproximadamente del 10 % de la masa del agujero negro.

La autogravedad también genera una modificación en la estructura del disco. De los perfiles de densidad mostrados, se pudo observar que para discos de acreción con un parámetro de viscosidad $\alpha = 0.01$, los discos autogravitantes llegan a ser más extendidos. Esto ocurre típicamente para todos los discos simulados en este trabajo. Además se observó que los discos más masivos tienen una caída en la densidad muy pronunciada, que divide a la región interna que tiene un comportamiento muy similar a la de un disco sin autogravedad y la región externa que es más aplanada y más extendida. Para un parámetro de viscosidad más grande, $\alpha = 0.1$ nuevamente se observó una variación en los tiempos característicos $t_{\dot{M}_{max}}$ y $t_{\dot{M}_{10}}$ para los discos autogravitantes. Pero los perfiles de densidad no resultan ser muy diferentes entre los discos autogravitantes y sin autogravedad. Esto es debido a que la distribución de momento angular actúa más rápido que la influencia provocada por la autogravedad. A pesar de esto para los discos más masivos aun se puede observar un cambio en la distribución de materia. Nuevamente podemos observar una caída en la densidad para discos muy masivos, además de ser más extensos.

Estos resultados obtenidos para la autogravedad, como ya se mencionó anteriormente, pueden ser importantes para discos con masas mayores al 10 % de la masa del agujero negro. Los efectos provocados por la autogravedad pueden modificar también el espectro emitido por los discos. Así que, de no tomar en cuenta la autogravedad del disco, podríamos estar cometiendo errores al comparar las observaciones con las simulaciones de los discos de acreción. Parámetros obtenidos de estas comparaciones podrían tener entonces errores significativos.

Bibliografía

- M. A. Abramowicz, M. Jaroszyński, M. Sikora. *A & A*, 63, 1978.
- S. A. Balbus J. F. Hawley. *ApJ*, 376, 214, 1991.
- S. A. Balbus, J. F. Hawley, J. M. Stone. *ApJ*, 467, 76, 1996.
- O. Blaes. *MNRAS*, 227, 975, 1987.
- H. Bondi. *MNRAS*, 112, 195, 1952.
- H. Bondi F. Hoyle. *MNRAS*, 103,273, 1944.
- J. K. Cannizzo. *ApJ*, 473, L41, 1996.
- P. Cassen A. Moosman. *Icarus*, 48, 353, 1981.
- B. Dubrulle. *A & A*, 266, 592, 1992.
- W. J. Duschl, P. A. Strittmatter, P. L. Biermann. *A & A*, 357, 2000.
- Juhan Frank, Andrew King, Derek Raine. *Accretion Power in Astrophysics*. Cambridge University Press, 2002.
- S. Fromang, S. A. Balbus, J.-P. De Villiers. *ApJ*, 2004.
- R. A. Gingold J. J. Monaghan. *MNRAS*, 181, 375, 1977.
- W. Glatzel. *MNRAS*, 225, 227, 1987.
- J. Goodman R. Narayan. *MNRAS*, 231, 97, 1988.
- L. J. Greenhill, C. R. Gwinn, R. Antonucci, R. Barvainis. *ApJ*, 472, L21, 1996.
- J. F. Hawley. *ApJ*, 356, 580, 1990.
- J. F. Hawley. *ApJ*, 381, 496, 1991.
- J. F. Hawley, C. F. Gammie, S. A. Balbus. *ApJ*, 440, 742, 1995.
- L. A. Hillenbrand, S. E. Strom, F. J. Vrba, J. Keene. *ApJ*, 397, 613, 1992.

- F. Hoyle R. A. Lyttleton. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 35, 405, 1939.
- J.-M. Huré. *A & A*, 395, L21, 2002.
- S. Kato A. Yoshizawa. *PASJ*, 49, 213, 1997.
- Y. 1986 Kojima. *Prog. Theor. Phys.*, 75, 251, 1986.
- G. Laughlin, V. Korchagin, F. Adams. *ApJ*, 477, 410, 1997.
- W. H. Lee E. Ramirez-Ruiz. *ApJ*, 577, 2002.
- G. Lodato G. Bertin. *A & A*, 398, 517, 2003.
- L. B. Lucy. *Astron. J.*, 82, 1013, 1977.
- D. Lynden-Bell. *Nature*, 223, 690, 1969.
- D. Lynden-Bell J. E. Pringle. *MNRAS*, 168, 603, 1974.
- L. Mayer, T. Quinn, J. Wadsley. *Science*, 298, 1756, 2002.
- J. E. McClintock, R. Narayan, S. W. Davis, L. Gou. *Classical and Quantum Gravity*, 22, 11, 2011.
- F. Meyer E. Meyer-Hofmeister. *A & A*, 132, 143, 1984.
- J. J. Monaghan R. A. Gingold. *J. Comput. Phys.*, 52, 374, 1983.
- J. J. Monaghan J. C. Lattanzio. *Astron. Astrophys*, 149, 135, 1985.
- R. Narayan. *Structure and Emission Properties of Accretion Discs*, IAU Coll. No. 129, 1991.
- R. Narayan, B. Paczyński, T. Piran. *ApJ*, 395, L83, 1992.
- I. D. Novikov K. S. Thorne. *Astrophysics of Black Hole*, pages 343–450, 1973.
- B. Paczyński P. J. Wiita. *A & A*, 88, 23, 1980.
- J. C. B. Papaloizou J. E. Pringle. *MNRAS*, 208, 31:721–750, 1984.
- B. Pickett, P. Cassen, R. Durisen, R. Link. *ApJ*, 529, 1034, 2000.
- B. Pickett, A. Mejia, R. Durisen, P. Cassen, D. Berry, R. Link. *ApJ*, 590, 1060, 2003.
- K. H. Prendergast G. R. Burbidge. *ApJ*, 151, L83, 1968.
- J. Pringle. *A & A*, 350, 694, 1981.
- J. P. Pringle M. J. Rees. *Astronomy Aph*, 21, 1, 1972.
- D. Richard J. P. Zahn. *A & A*, 347, 734, 1999.
- S. Rosswog. *New Astronomy Reviews*, 53:78–104, 2009.
- E. E. Salpeter. *ApJ*, 140:796–800, 1964.

- N. I. Shakura. *Astron. Zh.*, 49, 921, 1972.
- N. I. Shakura R. A. Sunyaev. *Astron. & Astrophys*, 24, 337, 1973.
- I. S. Shklovsky. *ApJ*, 148, L1, 1967.
- G. I. Taylor. *Proc. R. Soc. London*, 157, 546, 1936a.
- G. I. Taylor. *Proc. R. Soc. London*, 157, 565, 1936b.
- J. Tohline I. Hachisu. *ApJ*, 361, 194, 1990.
- A. Toomre. *ApJ*, 139, 1217, 1964.
- M. van der Klis. *ARA & A*, 38, 717, 2000.
- C. F. von Weizsacker. *Astrophys.*, 22, 319, 1943.
- F. Wendt. *Ingenieur-Archiv*, IV, 577, 1933.
- S. E. Woosley. *ApJ*, 405, 273, 1993.
- Ya. B. Zeldovich. *Doklady Acad. Sci.*, 155, 67, 1964.
- W. H. Zurek W. Benz. *ApJ*, 308, 123, 1986.

Índice de figuras

3.1. Familia de soluciones de la ecuación 3.6. El punto sónico tiene coordenadas (1,1). Las líneas sólidas tienen regiones en donde el fluido adquiere velocidades subsónicas y supersónicas, además que abarcan regiones que van desde la superficie de la estrella central hasta infinito. Las líneas punteadas únicamente tienen regiones ya sea supersónicas o subsónicas. Las otras líneas tienen regiones donde el gas pasa de supersónico a subsónico y viceversa, pero no abarcan todo el espacio.	34
3.2. Equipotenciales de un sistema binario. L_1 es el punto de Lagrange por donde ocurre el desbordamiento de materia. L_2 y L_3 son puntos de Lagrange inestables. Y L_4 y L_5 son puntos estables. El lóbulo de Roche es la equipotencial que encierra a cada uno de los objetos. Dentro del lóbulo de Roche la fuerza gravitacional que domina es la de la estrella a la cual le corresponde el lóbulo.	37
3.3. Sistema binario con la estrella secundaria de masa M_2 llenando su Lóbulo de Roche y transportando masa a través de L_1 hacia el lóbulo del objeto compacto con masa M_1	38
3.4. Geometría del sistema binario: R_1 y R_2 se definen como los radios de las esferas cuyo volumen sea igual al volumen correspondiente al lóbulo de Roche. b_1 es la distancia de objeto compacto al punto L_1	38

4.1. Comparación de la distribución del momento angular para el potencial de Paczyński-Wiita (línea continua) y el potencial Newtoniano (línea punteada)	61
4.2. Distribución de densidad para una Delta de Kronecker centrada en $r = 0.2$.	63
4.3. Potencial gravitacional encontrado utilizando Transformadas Rápidas de Fourier. La línea continua muestra la solución obtenida analíticamente, mientras que los asteriscos muestran la solución numérica.	65
5.1. En la figura los asteriscos muestran los puntos que corresponden a discos relajados estables, mientras que los triángulos representan los discos que han sido acretados durante el proceso de relajación, es decir inestables. Cada valor determinado de K permite generar un disco con una masa diferente.	76
5.2. Tasa de acreción en función del tiempo para discos de acreción con la prescripción α .	77
5.3. Curvas de densidad en función de la coordenada R para $z = 0$ en discos de acreción con la prescripción α a $t = t_{\dot{M}_{10}}$.	78
5.4. En esta grafica se muestra la posición en la coordenada z : del centro de masa total del sistema (línea continua), del centro de masa del disco (línea con guiones) y del centro de masa del agujero negro (línea punteada) para simulaciones de discos de acreción con diferentes valores de α , todas normalizadas a r_g . En la primer línea se muestran de izquierda a derecha, discos con $\alpha = 0.0005$ y $\alpha = 0.001$. En la segunda línea para $\alpha = 0.005$ y $\alpha = 0.01$. En la tercer línea $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.1$. Las variaciones en la componente z del centro de masa del agujero negro son muy similares a las variaciones de la componente en z del centro de masa total del sistema, es por esto que casi no se puede distinguir en las gráficas la línea punteada y de la continua.	79
5.5. Tasa de acreción en función del tiempo para discos de acreción con la prescripción β .	81

5.6. Curvas de densidad en función de la coordenada R para $z = 0$ en discos de acreción con la prescripción β a $t = t_{\dot{M}_{10}}$ 81

5.7. Evolución del centro de masa total (línea continua), centro de masa del disco (línea con guiones) y centro de masa del agujero negro (línea punteada) en la dirección z para los diferentes valores de β . En la primera línea se muestran de izquierda a derecha los parámetros para $\beta = 8.89 \times 10^{-6}$ y $\beta = 2.00 \times 10^{-5}$. En la segunda línea para $\beta = 1.15 \times 10^{-4}$ y $\beta = 2.39 \times 10^{-4}$. En la tercera línea $\beta = 1.26 \times 10^{-3}$ y $\beta = 2.90 \times 10^{-3}$. Nuevamente los desplazamientos en la dirección z del centro de masa total del sistema y del centro de masa del agujero negro son muy similares, por lo que son casi indistinguibles. . . 82

5.8. Relación entre la Tasa de acreción máxima y el parámetro de viscosidad. Para un mismo valor de \dot{M}_{max} se pueden crear discos de acreción con la prescripción α y β 83

5.9. Razón entre el parámetro de viscosidad α y β para un mismo valor de la Tasa de acreción máxima. Se puede observar un decaimiento para tasas de acreción más altas, aunque para todo propósito práctico es constante. . . . 84

5.10. Gráficas de la tasa de acreción en función del tiempo para diferentes valores de α y β . En cada gráfica se muestran las curvas para discos α y β que alcanzan un mismo valor para la tasa de acreción máxima. 85

5.11. En esta Figura se muestra la distribución de las partículas del SPH a un tiempo $t = t_{\dot{M}_{10}}$ para valores de $\beta = 8.89 \times 10^{-6}$, 2.00×10^{-5} , 1.15×10^{-4} y $\alpha = 0.0005$, 0.001 , 0.005 . Podemos ver que para estos valores de viscosidad, la diferencia no es muy notable entre discos con prescripción β y α 86

5.12. En esta Figura se muestra la distribución de las partículas del SPH a un tiempo $t = t_{\dot{M}_{10}}$ para valores de $\beta = 2.39 \times 10^{-4}$, 1.26×10^{-3} , 2.90×10^{-3} y $\alpha = 0.01$, 0.05 , 0.1 . Podemos ver que existe una diferencia más notable para valores grandes de α y β 87

- 5.13. Relación entre el tiempo $t_{\dot{M}_{max}}$ y la tasa de acreción máxima. El parámetro $t_{\dot{M}_{max}}$ es el tiempo para el cual el disco alcanza la tasa de acreción máxima. En la gráfica se puede apreciar una ligera diferencia entre los discos α y los discos β 88
- 5.14. Razón entre $t_{\dot{M}_{max}}$ obtenido para un disco α entre el $t_{\dot{M}_{max}}$ obtenido para un disco β para una misma tasa de acreción máxima. Esta razón es más o menos constante y oscila alrededor del valor 1.3. 88
- 5.15. Relación entre el tiempo $t_{\dot{M}_{10}}$ y la tasa de acreción máxima para discos α y β . El parámetro $t_{\dot{M}_{10}}$ es el tiempo para el cual la tasa de acreción máxima \dot{M}_{max} ha decaído en un factor de 10. El comportamiento es muy similar en los discos α y los discos β 89
- 5.16. Comparación de las curvas de densidad en el plano $z = 0$ en función de R para los discos α y discos β al tiempo $t = t_{\dot{M}_{10}}$. En cada gráfica se muestran las curvas de densidad para discos α y β con una misma tasa de acreción máxima. 90
- 5.17. Lado izquierdo: Curvas de densidad en el plano $z = 0$ para los modelos a), b) y c) (orden descendente) con y sin autogravedad. Lado derecho: Disco de acreción autogravitante relajado que servirá como condición inicial. La masa de los discos corresponde a los modelos a), b) y c) (orden descendente). 92
- 5.18. Lado izquierdo: Curvas de densidad en el plano $z = 0$ para los modelos d) y e) (orden descendente) con y sin autogravedad. Lado derecho: Disco de acreción autogravitante relajado que servirá como condición inicial. La masa de los discos corresponde a los modelos d) y e) (orden descendente). . 93
- 5.19. Gráfica de la tasa de acreción en función del tiempo para diferentes masas con un valor de $\alpha = 0.01$. En la gráfica se muestran las curvas para discos con y sin autogravedad. 94

5.20. Perfil de densidad en el plano $z = 0$ para diferentes masas del disco con $\alpha = 0.01$. Las curvas pertenecen a discos con y sin autogravedad al tiempo $t_{M_{10}}$ 96

5.21. Evolución del centro de masa total en la dirección z para discos con y sin autogravedad a masas iguales con $\alpha = 0.01$ 97

5.22. Gráfica de la tasa de acreción en función del tiempo para diferentes masas con un valor de $\alpha = 0.1$. En la gráfica se muestran las curvas para discos con y sin autogravedad. 98

5.23. Perfil de densidad en el plano $z = 0$ para diferentes masas del disco con $\alpha = 0.1$. Las curvas pertenece a discos con y sin autogravedad al tiempo $t_{M_{10}}$. 99

Índice de tablas

5.1. Condiciones iniciales para discos autogravitantes. En la tabla se muestran la letra asignada a cada modelo, la constante politrópica utilizada, la masa del disco que se genera y la razón entre la masa del disco y la masa del agujero negro.	75
5.2. Resultados para discos α	78
5.3. Resultados para discos β	83
5.4. Diferencias entre los discos α y β para $t_{\dot{M}_{10}} \cdot \Delta t_{\dot{M}_{10}} = t_{\dot{M}_{10,\alpha}} - t_{\dot{M}_{10,\beta}}$	89
5.5. Comparación entre condiciones iniciales con autogravedad y sin autogravedad. Donde r_{in} es el radio interno, r_{ex} es el radio exterior del disco y H lo tomaremos como la extensión del disco en la dirección z a un radio $r = r_0$ (con $r_0 = 4.25r_g$).	91
5.6. Resultados para discos con y sin autogravedad utilizando un valor del parámetro de viscosidad $\alpha = 0.01$	95
5.7. Resultados para discos con y sin autogravedad utilizando un valor del parámetro de viscosidad $\alpha = 0.1$	97