UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL PROBLEMA DE BASILEA

Reporte de Seminario

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

EDGAR MIGUELES PEREZ

TUTOR:

M.EN C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA

2008

Agradecimientos

Antes que todo quiero dar mi sincero agradecimiento a mi famila por el apoyo y paciencia brindados en todo momento a lo largo de mi existencia.

A mi universidad, **la Univesidad Nacional Autónoma de México** por ofrecerme la oportunidad de tener una excelente formación profesional.

A mi asesor, el profesor José Antonio Gómez Ortega por el tiempo, dedicación e interés que brindó en la realización de esta tesis, también por sus oportunos e indispensables consejos que me permitieron llevar acabo el presente proyecto, sin los cuales no se hubiera realizado nunca.

Finalmente, y no por ello menos importante, deseo manifestar mi agradecimiento a los profesores Erik Hernández y Guillermo Grabinsky cuyas eficaces revisiones mejoraron notablemente este trabajo.

Dedicatoria

A mis padres:

Este trabajo se los dedico a ustedes por ofrecerme la valiosa oportunidad de poder acceder y terminar una carrera profesional. Esto es una forma de agradecerles su enorme sacrificio, sin embargo nunca podría devolverles todo lo que he recibido de ambos.

A mis amigos:

A todos aquellos que durante el transcurso de mi vida universitaria me han favorecido con su amistad, a ustedes que vivieron conmigo la maravillosa e inolvidable experiencia de estudiar en la Facultad de Ciencias de la UNAM, sin ustedes no hubiera sido igual.

A mis profesores:

Este trabajo también está dedicado a todos aquellos profesores con los que tuve el privilegio de tomar clases ya que formaron parte de mi desarrollo personal y académico. A los profesores Eric Hernández, Guillermo Grabinsky, Alejandro Bravo y Agustin Ontiveros por su valiosa colaboración para corregir este trabajo. Al profesor Christopher Roman Silva por brindarme la oportunidad de impartir mi primer curso en la Facultad. A la profesora Asunción Preisser por sus excelentes cursos de Lógica, al profesor Angel Tamariz por su inigualable manera de impartir cátedra y también al profesor David Jacob por permitirme trabajar con el este semestre.

Finalmente a José Antonio Gómez por su paciencia y dedicación en la realización de este trabajo, el cual sin su valiosa ayuda nunca hubiera podido terminarse.

Índice general

Introducción

El estudio de las series ha sido parte fundamental para el desarrollo del Cálculo y las Matemáticas en general. Desde hace mucho tiempo, varios matemáticos se han dedicado a explorar sus propiedades, como por ejemplo a acotarlas, a compararlas, a decidir su convergencia o divergencia y por supuesto a darle solución a muchas de ellas. Sin embargo, también existen muchas series de las cuales, aunque se sabe que convergen, no se conoce su valor aún en nuestros días a pesar de toda la poderosa herramienta matemática que se posee en la actualidad.

Alrededor del mundo, matemáticos de gran fama y renombre tales como Euler y Bernoulli -por citar algunos- han encontrado resultados asombrosos e importantes dentro del estudio de las series, los cuales dan principio a pruebas o teoremas mucho más complejos e interesantes. Algunos de estos resultados demuestran que las series no solo están ligadas al Cálculo, sino también a diversas áreas de la Matemática como por ejemplo, la Variable Compleja y el Análisis de Fourier por mencionar sólo algunas. En estas áreas su uso es pieza fundamental para su desarrollo y también para probar muchos teoremas útiles.

Es por esto y muchas otras cosas que la investigación y los resultados novedosos en el estudio de las series no ha concluido, han sido muchos los años y por supuesto, muchos matemáticos que se han dedicado a hacer investigación sobre ellas, pero aún así, todavía faltan muchos años de trabajo los que se les tiene que invertir para descubrir todo lo relacionado a las series.

Tenemos que mencionar que las series son también usadas en otras áreas, no sólo en la Matemática, sino también son de uso frecuente en Física, en Química, en Actuaría, en Psicología, etc. para resolver problemas con planteamientos diferentes al que los matemáticos estamos acostumbrados a realizar.

Hemos mencionado ya la importancia de las series, pero este trabajo se enfoca a un problema muy famoso, el Problema de Basilea, así que a continuación resumiremos la estructura en general de esta tesis.

En el Capítulo 1 se expone el origen del Problema que le dió nombre a esta tesis, así como también, los trabajos que realizó el maestro de todos nosotros, es decir Euler, para aproximar y solucionar casos particular de dicho problema. En el Capítulo 2 se desarrollan varias pruebas para el primer caso particular del problema resuelto por Euler. Estas pruebas son recientes, en su planteamiento y solución se usan diversas ramas de la Matemática. Finalmente en el Capítulo 3 se soluciona el Problema de Basilea para todo número par y se encuentra una relación asombrosa entre la probabilidad y la serie del caso paticular de Basilea, así como también otros resultados interesantes. En el Apéndice se mencionan y se prueban resultados usados a lo largo de este trabajo, algunos teoremas solo los mencionamos ya que no se considera necesaria su prueba para la finalidad de este trabajo, sin embargo varios ejercicios que aquí se muestran son fundamentales para entender la idea principal de esta tesis.

En principio, esta tesis esta dirigida a alumnos y profesores como material de consulta, los conocimientos necesarios son los principios básicos de Variable Compleja y Análisis Matemático. Sin embargo, el capítulo 1 y algunas de las pruebas del Capítulo 2 sólo se utiliza Cálculo Diferencial e Integral y por esto también es recomendable para alumnos de los primeros semestres de cualquier carrera en donde se estudie esta Materia.

Capítulo 1

El problema de Basilea

1.1. El origen

Muchos han sido los matematicos que se han sumergido en el estudio de las series, ellos han encontrado y demostrado muchas de sus propiedades, sin embargo hoy en día existen problemas que no tienen solución convincente. El presente trabajo tendrá por objetivo ofrecer distintas formas de resolver un caso particular de un famoso problema, el cual, se le conoce desde hace mucho tiempo como "**El problema de Basilea**", y que en su tiempo no tuvo una solución que fuera satisfactoria.

Empecemos citando a un famoso matematico llamado **Jacob Bernoulli (1654-1705)**, este amante de las series resolvió con exactitud muchas de ellas, entre las cuales podemos mencionar algunas como:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}$$

A las cuales les dió un valor exacto, estos son 6 y 26 respectivamente (ver A del Apéndice).

Sin embargo, Bernoulli se encontró frente a una serie que en apariencia no tenía ningún problema para obtener su resultado exacto, tal serie era:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{k^p} + \cdots \tag{1.1}$$

Bernoulli ya había trabajado tiempo atrás con esta serie para el caso cuando $p = 1$, por que ya se sabía con exactitud que esta serie era divergente (ver B del Apéndice). Pero éste era un caso particular, entonces su siguiente objetivo fué el caso cuando $p = 2$ para así poder indagar en el caso general. El problema no era reciente en la época de Jacob: varias décadas antes, matemáticos destacados ya habían trabajado sobre este caso ($p = 2$), entre ellos podemos mencionar a **Leibniz**, pero ninguno de ellos logro resolverlo.

Entonces, retornando a Bernoulli, era su turno para tratar de obtener resultados positivos, y por supuesto que los obtuvo, sin embargo no fueron totales, solamente obtuvo progresos parciales, de tales progresos podemos mencionar los siguientes:

A partir de la desigualdad $2k^2 \geq k(k+1)$, Bernoulli utilizando propiedades básicas de las desigualdades encontró que:

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}$$

es decir:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \cdots \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} + \cdots$$

Donde ya sabemos que la segunda suma telescópica converge, mas aún, sabemos que 2 es el valor al que converge[1]. Bernoulli al notar esto, pensó acertadamente que este valor era una cota para el problema original, es decir,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$$

Y desde luego, esta serie es convergente por el criterio de comparación (ver C del Apéndice).
Como también tenemos que $\frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{k^2}$ para todo $p \geq 2$, entonces, el razonamiento anterior nos da la seguridad de que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ tambien converge para $p = 2, 3, \ldots,$.

Lo anterior nos da un claro ejemplo que desde hace mucho tiempo ya se usaba el criterio de comparación para la convergencia de series con mucha naturalidad, sin embargo, a pesar de utilizar esta herramienta tan útil, Bernoulli no pudo dar el valor exacto de la serie que estaba estudiando en esos días.

Entonces, retomando lo anterior, el problema era obtener el valor exacto de:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

[1] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)/2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} = \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3}\right) + \cdots = 2$

Bernoulli, al verse incapaz de resolverlo, escribió una célebre carta en donde pedía ayuda a toda la comunidad matemática del mundo, la cual produjo con ella un reto formidable. En la carta se leía:

> *"Grande sea nuestra gratitud si alguien encuentra y nos comunica lo que hasta ahora ha escapado a nuestros esfuerzos"*

1.2. Aparece Euler

En el año de 1731 un brillante joven matemático suizo trabajaba ya a los 24 años de edad con el famoso Problema de Basilea para el caso cuando $p = 2$, es decir, la ecuación (1.1). Este joven llamado **Leonhard Euler** (1707-1783) nació en Basilea al igual que su maestro, el hermano de Jacob Bernoulli.

A continuación haremos un resumen breve de los trabajos realizados por Euler acerca del famoso problema de Basilea, tal resumen abaca desde el inicio en el que aproxima el valo de la serie hasta llegar a explicar la forma en que encontró el valor exacto de dicha serie.

A Euler, como a muchos matemáticos, se le ocurrió primeramente aproximar el valor de la suma infinita $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ sumando algunos términos, lo cual sabemos que queda lejos de aproximarse al valor exacto. Como ejemplo, podemos poner los siguientes intentos:

$$1 + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{100} \approx 1.54977 \text{ (Esto con 10 sumandos).}$$

$$1 + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{10000} \approx 1.63498 \text{ (Esto con 100 sumandos).}$$

$$1 + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{1000000} \approx 1.64393 \text{ (Esto con 1000 sumandos).}$$

Para enfatizar la idea anterior, no importa lo grande que pueda ser el número de sumandos de la serie, el resultado no será exacto salvo las dos primeras cifras del número, en pocas palabras, las aproximaciones no servían de mucho para el fin que buscaba.

Sin embargo, Euler desarrolló otro método para dar una mejor aproximación de

(1.1), dicho método consiste básicamente en igualar dos expresiones previamente determinadas. El mérito de Euler fué proponer dichas expresiones, las cuales se derivan de la siguiente integral impropia:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{\log(1-t)}{t} dt \tag{1.2}$$

Entonces, el gran truco de Euler fué calcular esa integral de dos formas diferentes, método que usó para solucionar muchos problemas, así que separemos estos dos procedimientos:

(a) Para la primera forma, lo que hizo Euler fué sustituir $\log(1-t)$ en (1.2) por el desarrollo de su serie (ver E del Apéndice) para luego integrar término a término. Primero recordemos que el desarrollo de dicha serie es,

$$\log(1-t) = (-t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \cdots) \quad \text{para} \quad |t| < 1 \tag{1.3}$$

Entonces Euler al sustituir (1.3) en (1.2) e integrando término a término, obtuvo que:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{\log(1-t)}{t} dt = \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{-t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \cdots}{t} dt = \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{4} + \cdots) dt = \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} 1dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{2} dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{3} dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^3}{4} dt + \cdots \\
&= 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned} \tag{1.4}$$

A continuación explicaremos la otra forma que Euler utilizó para aproximar la serie estudiada.

(b) Lo que hizo Euler fué sustituir $z = (1-t)$ en (1.2), es decir

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{\log(1-t)}{t} dt = \\ &= \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\log\, z}{1-z} dz = \\ &= \int_1^{\frac{1}{2}} (1 + z + z^2 + z^3 + \cdots) \log\, z\, dz = \\ &= \int_1^{\frac{1}{2}} \log\, z\, dz + \int_1^{\frac{1}{2}} z \log z\, dz + \int_1^{\frac{1}{2}} z^2 \log\, z\, dz + \cdots \end{aligned}$$

esto ocurre por que previamente sabíamos que:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots \qquad |z| < 1$$

Ahora se integrará por partes cada integral, para cualquier n, se tiene que:

$$\int_1^{\frac{1}{2}} z^n \log\, z\, dz = \left[\frac{z^{n+1}}{n+1} \log\, z - \frac{z^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_1^{\frac{1}{2}}$$

Teniendo esta fórmula en su forma general, simplemente variamos la n, reagrupando los términos semejantes, factorizamos y tenemos:

$$\begin{aligned} I &= \left[(z \log\, z - z) + (\frac{z^2}{2} \log\, z - \frac{z^2}{4}) + (\frac{z^3}{3} \log\, z - \frac{z^3}{9}) + (\frac{z^4}{4} \log\, z - \frac{z^4}{16}) + \ldots \right]_1^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[(\log\, z) \left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \cdots \right) - \left(z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{9} + \frac{z^4}{16} + \cdots \right) \right]_1^{\frac{1}{2}} \qquad (*) \end{aligned}$$

esta expresión aún la podemos reducir más, de (1.3) sabemos que:

$$\log(1-z) = \left(-z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \cdots \right) \quad \text{para } |z| < 1$$

es decir:

$$-\log(1-z) = (z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \cdots) \quad \text{para } |z| < 1$$

sustituyendo esta igualdad en la identidad $(*)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} I &= \left[(\log\, z)\, (-\log(1-z)) - (z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{9} + \frac{z^4}{16} + \cdots) \right]_1^{\frac{1}{2}} \\ &= -\left(\log\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2 + (\log 1)\,(\log 0) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2^2}}{4} + \frac{\frac{1}{2^3}}{9} + \cdots \right) + \left(1 + \frac{1}{4} + \cdots \right) \end{aligned}$$

Llegamos a esta última expresión simplemente evaluando en los valores 1, $\frac{1}{2}$ y reagrupando. Como podemos darnos cuenta se puede simplificar mas aún, sabemos que:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

y también que

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2^2}}{4}+\frac{\frac{1}{2^3}}{9}+\frac{\frac{1}{2^4}}{16}+\cdots\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Así que nuestra expresión simplificada es:

$$I=-\left(\log\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{2}\right)^k+(\log 1)(\log 0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

Pero Euler descartó el producto $(\log 0)(\log 1)$ ya que suponía que cero era su valor, sin embargo esto lo podemos argumentar convincentemente utilizando el Cálculo Diferencial actual (ver E del Apéndice). Así, tenemos:

$$I=-\left(\log\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

Pero como $-\log(2)=\log\left(\frac{1}{2}\right)$ por las propiedades de los logaritmos, entonces finalmente tenemos que:

$$I=-(\log 2)^2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \tag{1.5}$$

Ya teniendo estos dos valores para I, podemos igualar las identidades (1.4) y (1.5), entonces nos queda que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{2}\right)^k=-(\log 2)^2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

Simplemente despejando tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{2}\right)^k+(\log 2)^2$$

Y finalmente, sustituyendo la igualdad anterior, Euler llegó a:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2 2^{k-1}}+(\log 2)^2 \tag{1.6}$$

Debemos aclarar que Euler no dió mucha importancia a varios detalles que debería haber tomado en cuenta y que usó para llegar a (1.6), así que trataremos de mostrar las hipótesis (de uno de ellos) que se deben cumplir para que funcionen perfectamente en el análisis que efectuó Euler. Uno de ellos al parecer el más importante, es la integración término a término de una serie infinita. Así que esto lo introduciremos como un paréntesis.

NOTA:
Como sabemos, para poder integrar una serie infinita es necesario que cada función f_n (no negativa) sea integrable sobre algún conjunto, digamos $J = [a, b]$, y si tambien $\sum f$ converge uniformemente a f entonces se cumple que: $\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$. Este resultado es muy conocido y usado en Analisis Real[2]

Así que como pudimos darnos cuenta, en el procedimiento anterior realizado por Euler, las series utilizadas cumplen[3] perfectamente las hipótesis antes mencionadas, pero **el maestro de todos los matemáticos** no podía argumentar esto ya que la noción de convergencia uniforme aparece tiempo después.

Entonces regresando a la expresión (1.6), Euler notó que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 2^{k-1}}$$

converge rápidamente, y esto se debe a la presencia del número 2^{k-1} en el denominador, además él también había calculado $(\log 2)^2$ con una aproximación de varias docenas de cifras de decimales, así que el resultado de Euler era:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \approx 1{,}644934$$

Este resultado era mucho más preciso que sumar muchos términos en la suma original, sin embargo, a pesar de la admirable capacidad de Euler para realizar laboriosos cálculos y toda la herramienta que usó, este resultado solo era una simple aproximación del valor exacto. Sin embargo, este resultado le ofreció nuevas herramientas con las cuales pudo hacer frente al problema original, el problema que desafiaba al mundo.

Pero Euler sorprendió al mundo matemático una vez más ya que cuatro años después, por el año de 1734, escribió con mucha felicidad lo siguiente:

---

[2] [2] pag. 406

[3] La serie geométrica no converge uniformemente en [-1,1] pero si en $[-a, a]\ \forall a \in (0, 1)$ fija. Lo mismo se puede decir de (1.3)

"Sin embargo, he encontrado y contra todo pronóstico, una expresión elegante de la suma de cuadrados perfectos, esta depende de la cuadratura del círculo... . He encontrado que seis veces la suma de esta serie es igual al cuadrado de la longitud de la circunferencia de un círculo cuyo diametro es 1"

Es decir, en notación moderna, Euler se refería a la fórmula:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Desde esa época, esta simple fórmula se ha considerado una de las expresiones matemáticas más maravillosas ya que involucra una simple suma de cuadrados perfectos y el número π. Al ver por primera vez esta expresión, muchos nos hemos sorprendido bastante por los elementos, que sin ninguna relación aparente, la igualdad relaciona. Pero Euler demostró esta maravilla, así que veamos su ingenioso razonamiento.

Antes de presentar su razonamiento, requerimos de dos observaciones importantes:

1. Si $P(x)$ es un polinomio de grado n con raíces $a_1, a_2, \ldots a_n$ distintas de cero y tal que $P(0) = 1$, entonces lo podemos factorizar de la siguiente manera,

$$P(x) = \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)\left(1 - \frac{x}{a_3}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)$$

2. Lo que sigue es recordar el desarrollo de la serie de potencias del $sen\, x$ alrededor del 0, el cual es:

$$sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

Estos eran los requisitos previos en el que se basaba la demostración de Euler, sin embargo, su intuición le llevó a creer que lo que se cumple para un polinomio ordinario, se cumple también para un polinomio con una infinidad de términos, es decir, supone que un polinomio con una infinidad de raíces puede descomponerse como un producto de factores al igual que un polinomio con un número finito de raíces. Cabe destacar que Euler nunca ofreció una demostración de esto, así que lo tomó como válido. Teniendo en cuenta esto, ya estamos preparados para conocer la primera prueba que dió Euler al problema de Basilea.

Teorema.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{1.7}$$

Demostración. Euler propuso lo siguiente:

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \cdots$$

y éste lo consideró como un polinomio infinito. Observemos que $P(0) = 1$.

Ahora, multipliquemos y dividamos a $P(x)$ por x, así tenemos:

$$\begin{aligned} P(x) &= x\left[\frac{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \cdots}{x}\right] = \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots}{x} = \\ &= \frac{sen\, x}{x} \end{aligned}$$

Si $P(x) = 0$, entonces necesariamente $\operatorname{sen} x = 0$, y por lo tanto, podemos deducir que $x = \pm\, k\pi$ para $k = 1, 2, \ldots$. Claramente $x = 0$ no es una raíz de $P(x)$ ya que $P(0) = 1$.

Teniendo presente lo anterior, lo que hizo Euler enseguida fué proceder por analogía para factorizar a $P(x)$ de la siguente manera:

$$\begin{aligned} P(x) &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-3\pi}\right)\cdots \\ &= \left[1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right]\left[1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right]\left[1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right]\left[1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right]\cdots \end{aligned} \tag{1.8}$$

Hemos llegado a obtener una fórmula muy importante ya que Euler escribió a $P(x)$ de dos formas diferentes y despues igualó las suma infinita con un producto infinito.

A continuación, lo más natural para Euler fué desarrollar el segundo miembro de (1.8), ya que solamente necesitaba conocer el coeficiente de x^2. Así, obtiene que:

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots=1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\frac{1}{16\pi^2}+\cdots\right)x^2+\cdots \quad (1.9)$$

Pero los coeficientes de potencias mayores a dos no sirven de mucho conocerlos (por ahora), más aún, en este momento son desconocidos para nosotros, sin embargo para obeservar esto, es necesario saber muy bien a donde nos dirigimos. Así que Euler al tener (1.9) simplemente igualó los coeficientes de x^2 y obtuvo que:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3!} &= -\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\frac{1}{16\pi^2}+\cdots\right)\\ &= -\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots\right)\end{aligned}$$

y para el final espectacular, de estas igualdades nos queda que:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

es decir:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6} \quad \triangleleft$$

Tal como había afirmado Euler, el problema de Basila había sido resuelto.

A pesar de las dudas que tenía Euler acerca de su demostración, estaba confiado de haber solucionado el problema. Incluso propuso tiempo después soluciones alternativas para demostrar este teorema, estas demostraciones más rigurosas según su criterio. Sin embargo hoy en día no cumplen enteramente las expectativas actuales. Para estar seguros del resultado, se han realizado demostraciones totalmente rigurosas que confirman el resultado de Euler.

Como todos sabemos, hay métodos o demostraciones de determinados teoremas o proposiciones, o incluso demostraciones que no llevan a la solución del problema pero que conducen a logros interesantes que se pueden utilizar para probar otros resultados. Así fué el caso de la demostración de Euler, veamos por qué:

En el año de 1665, el matemático inglés John Wallis (1616-1703), considerando un problema diferente y con un razonamiento deductivo diferente demostró que:

$$\frac{2}{\pi}=\frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots} \quad (1.10)$$

La ecuación (1.10) es conocida como *la fórmula de Wallis.*

Pero Euler, haciendo una sustitución en la ecuación (1.8) de su demostración obtuvo este mismo resultado. El procedimiento era sustituir $x = \frac{\pi}{2}$ por lo que:

$$P\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left[1 - \frac{(\frac{\pi^2}{2})^2}{\pi^2}\right]\left[1 - \frac{(\frac{\pi^2}{2})^2}{4\pi^2}\right]\left[1 - \frac{(\frac{\pi^2}{2})^2}{9\pi^2}\right]\left[1 - \frac{(\frac{\pi^2}{2})^2}{16\pi^2}\right]\cdots$$

Simplificando cada término llegamos a:

$$\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \left[1 - \frac{1}{4}\right]\left[1 - \frac{1}{16}\right]\left[1 - \frac{1}{36}\right]\left[1 - \frac{1}{64}\right]\cdots$$

Ya sabemos que $sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, simplificando el lado derecho de la igualdad anterior se tiene que:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{35}{36} \cdot \cdots.$$

Descomponiendo en factores los denominadores y numeradores se tiene que:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots} \tag{1.11}$$

Por lo tanto, la formula de Wallis, resultaba ser un corolario del razonamiento de Euler, así que esto reforzaba la credibilidad del razonamiento seguido por el maestro de todos los matemáticos.

Otra consecuencia inmediata del anterior método usado por Leonard Euler es la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Así que iniciemos su demostración. La serie de Maclaurin para la función coseno es:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R} \tag{1.12}$$

Procediendo de la misma forma, al lado derecho de (1.12) lo podemos factorizar si conocemos sus raíces y para hacer esto recordemos que:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, 3 \cdots$$

Así, al "polinomio" lo podemos expresar como producto de sus raíces, y tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{x}{\frac{\pi}{2}}\right)\left(1 - \frac{x}{-\frac{\pi}{2}}\right)\left(1 - \frac{x}{\frac{3\pi}{2}}\right)\left(1 - \frac{x}{\frac{-3\pi}{2}}\right)\left(1 - \frac{x}{\frac{5\pi}{2}}\right)\left(1 - \frac{x}{\frac{-5\pi}{2}}\right)\cdots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{\frac{\pi^2}{4}}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\frac{3^2\pi^2}{4}}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\frac{5^2\pi^2}{4}}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\frac{7^2\pi^2}{4}}\right)\cdots
\end{aligned} \tag{1.13}$$

si desarrollamos esta última expresión y los coeficientes de los términos cuadráticos los igualamos en (1.12) y (1.13), se llega a:

$$\frac{1}{2!} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{3^2\pi^2} + \frac{4}{5^2\pi^2} + \frac{4}{7^2\pi^2} + \cdots$$

es decir,

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{4}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right)$$

finalmente llegamos al sorprendente resultado, el cual dice que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Mas tarde, al no estar tan seguro de esta prueba, Euler lo demuestra de manera distinta. Esta segunda prueba es mucho más elaborada en la cual involucra varios resultados previos. A continuación veremos el trabajo de Euler, no sin antes enunciar y probar los resultados que usó.

Lema 1.

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen}^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{(\operatorname{sen}^{-1} x)^2}{2}$$

Demostración. Sea $u = \sin^{-1} t$ entonces se obtiene que $du/dt = 1/\sqrt{1-t^2}$

sustituyendo llegamos a: $\displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen}^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_0^x u\, du = \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^x = \frac{(\operatorname{sen}^{-1} x)^2}{2}.$ ◁

Lema 2.

$$\operatorname{sen}^{-1} x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots$$

Demostración. Sabemos que:

$$\operatorname{sen}^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2} dt \tag{1.14}$$

si usamos la serie binomial, se tiene lo siguiente:

$$(1-t^2)^{-1/2} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} t^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} t^6 + \cdots \tag{1.15}$$

Si sustituimos (1.15) en (1.14) e integramos término a término, lo siguiente se sigue:

$$\operatorname{sen}^{-1} x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots \qquad \triangleleft$$

Lema 3.

$$\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{n+1}{n+2} \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Demostración. Para poder usar integración por partes, lo siguiente es indispensable:
Sean $u = t^{n+1}$ y $dv = t/\sqrt{1-t^2}$, entonces, $du = (n+1)t^n \, dt$ y $v = -\sqrt{1-t^2}$, luego,

$$\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \left[-t^{n+1}\sqrt{1-t^2} \right]_0^1 + (n+1) \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt = (n+1) \int_0^1 \frac{t^n(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

De la anterior serie de igualdades de llega a:

$$(n+2) \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = (n+1) \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Entonces, despejando llegamos a lo que queríamos demostrar, es decir:

$$\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{n+1}{n+2} \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt \qquad \triangleleft$$

Teniendo en cuenta estos Lemas, estamos listos para probar lo siguiente:

Teorema.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Demostración.

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}^{-1}(1))^2 = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Por Lema 1 y 2, se tiene que:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left[t + \frac{1 \cdot t^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot t^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot t^5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots \right] dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt + \frac{1}{2 \cdot 3} \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \int_0^1 \frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}} dt + \cdots$$

Como $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = 1$ y usando el Lema 3 finalmente tenemos

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1\cdot 2}{2\cdot 3^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7^2} + \cdots +$$

es decir:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \qquad \triangleleft$$

Después del gran descubrimiento de Euler, su fama se extendió rápidamente por la comunidad matemática europea, sin embargo aún faltaba trabajo por realizar, así que sin más se puso manos a la obra.

Lo primero fué enfocar su atención a la búsqueda de la suma exacta de la serie para $p > 2$ en el problema de Basilea y se dió cuenta que afortunadamente se reducía en encontrar los coeficientes de x^4, x^6 y así sucesivamente en la identidad (1.9). Pero en esa época ya existían herramientas para poder hacer este trabajo, esas herramientas hoy en día se le conocen como *fórmulas de Newton*. Para darnos una idea de como era el resultado en palabras de su autor lo nombraremos tal cual:

"...el coeficiente del segundo término de una ecuación es, cambiando de signo, igual a la suma de todas las raíces con su propio signo; el del tercer término es igual a la suma de los productos restantes al multiplicar las raíces de dos en dos; el del cuarto, cambiando de signo, a la suma de los productos restantes de multiplicar las raíces de tres en tres; el del quinto igual a la suma de los productos que se obtienen al multiplicar las raíces de cuatro en cuatro; y así indefinidamente"

Siguendo los trabajos de Euler, nos inclinaremos a analizar la deducción de estas fórmulas a su manera, estas fórmulas relacionan raíces y coeficientes, además, utilizó técnicas de Cálculo diferencial para resolver este problema, que en realidad era del área del Algebra. Estas demostraciones datan de 1750.

Teorema. Si el polinomio de grado n, digamos $P(x) = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \cdots \pm N$ se descompone en factores de la forma $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$, entonces se cumple que:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k = A$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k^2 = A\sum_{k=1}^{n} r_k - 2B$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k^3 = A\sum_{k=1}^{n} r_k^2 - B\sum_{k=1}^{n} r_k + 3C$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k^4 = A\sum_{k=1}^{n} r_k^3 - B\sum_{k=1}^{n} r_k^2 + C\sum_{k=1}^{n} r_k - 4D$

5. ... y así sucesivamente

Demostración.

Señalemos que el objetivo de Euler era relacionar los coeficientes $A, B, C, \ldots, N$ y las raíces $r_1, r_2, \ldots, r_n$ del polinomio, así que no hay que perder la finalidad de este teorema. Entonces por hipótesis se tiene que:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

Una jugada maestra propia de Euler, y que sorprende sobremanera fué tomar logaritmos en ambas partes de la ecuación, es decir:

$$\log P(x) = \log(x - r_1) + \log(x - r_2) + \cdots + \log(x - r_n)$$

El siguiente paso fué todavía mas sorprendente: lo que hizo fué derivar ambas partes de la igualdad y lo que resultó fué:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{(x - r_1)} + \frac{1}{(x - r_2)} + \cdots + \frac{1}{(x - r_n)} \tag{1.16}$$

Esto demuestra que Euler tenía una gran capacidad analítica y una asombrosa manera de aplicar resultados previos en su análisis. Después, Euler transformó cada fracción de la igualdad (1.16) en una serie geométrica equivalente, es decir, para cada k se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x - r_k} &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 - \frac{r_k}{x}}\right) = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{r_k}{x} + \frac{r_k^2}{x^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{x} + \frac{r_k}{x^2} + \frac{r_k^2}{x^3} + \frac{r_k^3}{x^4} + \cdots
\end{aligned}$$

entonces, observando esto y aplicándolo para cada k en (1.16) obtiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{P'(x)}{P(x)} &= \frac{1}{(x - r_1)} + \frac{1}{(x - r_2)} + \cdots + \frac{1}{(x - r_n)} \\
&= \frac{n}{x} + \frac{1}{x^2}\left[\sum_{k=1}^{n} r_k\right] + \frac{1}{x^3}\left[\sum_{k=1}^{n} r_k^2\right] + \frac{1}{x^4}\left[\sum_{k=1}^{n} r_k^3 +\right] + \cdots \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

La parte importante de esta última ecuación es que $P'(x)/P(x)$ está escrita en función de las raíces del polinomio original.

Además, sabemos que

$$P(x) = x^n - Ax^{n+1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \cdots \pm N$$

así que

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{nx^{n-1} - A(n-1)x^{n-2} + B(n-2)x^{n-3} - C(n-3)x^{n-4} + \cdots}{x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \cdots \pm N} \tag{1.18}$$

Y esta expresión está también escrita en función de los coeficientes del polinomio. Así que una vez más Euler encuentra dos expresiones diferentes de una misma cantidad, esta estrategia ya la había utilizado antes, esto indica que sería muy conveniente tener presente esta estrategia para resolver problemas a futuro.

Igualando (1.17) y (1.18) y haciendo las operaciones necesarias llegamos a:

$$nx^{n-1} - A(n-1)x^{n-2} + B(n-2)x^{n-3} - C(n-3)x^{n-4} + \cdots$$

$$= \left(x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \cdots \pm N\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{n}{x} + \frac{1}{x^2}\left[\sum_{k=1}^{n} r_k +\right] + \frac{1}{x^3}\left[\sum_{k=1}^{n} r_k^2\right] + \frac{1}{x^4}\left[\sum_{k=1}^{n} r_k^3\right] + \cdots\right)$$

$$= nx^{n-1} + \left(-nA + \sum_{k=1}^{n} r_k\right) x^{n-2} + \left(nB - A\sum_{k=1}^{n} r_k + \sum_{k=1}^{n} r_k^2\right) x^{n-3} - \cdots$$

Claramente el paso que sigue es comparar los coeficientes de los términos con el mismo grado en ambos lados de la ecuación, ya que haciendo esto obtenemos las relaciones buscadas, en particular, igualando los coeficientes de x^{n-2} tenemos que:

$$-A(n-1) = -nA + \sum_{k=1}^{n} r_k$$

y por tanto se llega a lo siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} r_k = A$$

Ahora, si igualamos los coeficientes de x^{n-3} tenemos que:

$$B(n-2) = nB - A\sum_{k=1}^{n} r_k + \sum_{k=1}^{n} r_k^2$$

y por tanto obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} r_k^2 = A\sum_{k=1}^{n} r_k - 2B$$

Ahora igualando los coeficientes de x^{n-4} se llega a:

$$\sum_{k=1}^{n} r_k^3 = A\sum_{k=1}^{n} r_k^2 - B\sum_{k=1}^{n} r_k + 3C$$

Este procedimiento debe repetirse sucesivamente para encontrar las igualdades correspondientes que faltan donde cada suma se expresa a través de las anteriores. $\triangleleft$

Este resultado lo probó Euler con el fin de usarlo en la demostración del problema de Basilea para exponente pares mayores que 2. Pero la pregunta es obvia ¿Qué tienen que ver estas fórmula con la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$?.

Primero consideremos un polinomio cuyas potencias de x sólo sean múltiplos de 2 y lo descomponemos en factores tal como se muestra a continuación:

$$1 - Ax^2 + Bx^4 - \cdots \pm Nx^{2n} = (1 - r_1x^2)(1 - r_2x^2)\cdots(1 - r_nx^2) \tag{1.19}$$

Ahora, si sustituimos x^2 por $\frac{1}{y}$ en (1.19) se obtiene:

$$1 - A\left(\frac{1}{y}\right) + B\left(\frac{1}{y}\right)^2 - \cdots \pm N\left(\frac{1}{y}\right)^n = \left(1 - r_1\frac{1}{y}\right)\left(1 - r_2\frac{1}{y}\right)\cdots\left(1 - r_n\frac{1}{y}\right)$$

Si ahora multiplicamos ambos lados de esta ecuación por y^n obtenemos que:

$$y^n - Ay^{n-1} + By^{n-2} - Cy^{n-3} + \ldots \pm N = (y - r_1)(y - r_2)\ldots(y - r_n)$$

Esto, Euler ya lo había considerado antes, así que de (1.19) también se obtiene:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k = A,$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k^2 = A\sum_{k=1}^{n} r_k - 2B,$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k^3 = A\sum_{k=1}^{n} r_k^2 - B\sum_{k=1}^{n} r_k + 3C, \ldots$

Euler supuso que estas relaciones entre coeficientes y raíces eran válidas también en el caso cuando hay una infinidad de raíces, así que puso atención a una igualdad anteriormente encontrada por el, a saber:

$$\begin{aligned} P(x) &= 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots= \\ &= \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{-\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{-2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{x}{-3\pi}\right)\cdots \\ &= \left[1-\frac{x^2}{\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right]\cdots \end{aligned}$$

Esta última ecuación es la versión en modo infinito de (1.19) con:

$$A=\frac{1}{3!}\ ,\ B=\frac{1}{5!}\ ,\ C=\frac{1}{7!}\ ,\ldots \quad \text{y}$$

$$\sum_{k=1}^{n} r_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2\pi^2}\quad ,\quad \sum_{k=1}^{n} r_k^2=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2\pi^2}\right)^2\quad ,\ldots$$

Entonces, de 1 y lo anterior se tiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2}=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$$

y finalmente llegamos a lo siguiente:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Este es el resultado que había sido ya encontrado por Euler anteriormente, sin embargo de 2 y 3 se pueden deducir cosas nuevas e importantes por ejemplo:

De 2 y lo anterior se obtiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2\pi^2}\right)^2=A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2}-2B=\left(\frac{1}{3!}\right)^2-\frac{2}{5!}=\frac{1}{90}$$

y se llega a:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

ahora, de 3 y lo anterior se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2\pi^2}\right)^3 &= A\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2\pi^2}\right)^2-B\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2}+3C \\ &= \left(\frac{1}{3!}\right)\left(\frac{1}{90}\right)-\left(\frac{1}{5!}\right)\left(\frac{1}{6}\right)+3\left(\frac{1}{7!}\right)=\frac{1}{945} \end{aligned}$$

por lo tanto se tiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

Estos resultados son todavía más sorprendentes ya que no solamente resolvían un caso del problema de Basilea, sino que apuntaba a resolver muchos casos más. En el trabajo original de Euler, aparecía la solución de valores pares más grandes que 6, Euler calculó para $p = 8, 10$ y 12. En publicaciones posteriores, todavía llegó mas lejos, en su trabajo aparecía el cálculo para $p = 26$, desde luego éste es un cálculo con números muy grandes y por supuesto, el resultado no es un número pequeño. Mencionemos que para valores $p = 3, 5, 7 \ldots$, es decir valores impares, todavía no exisían avances significativos en ese tiempo.

Estos famosos trabajos de Euler daban comienzo a futuras investigaciones respecto a estas series, en particular, su relación con lo que en nuestros días conocemos como números de Bernoulli y la función zeta de Riemann.

Capítulo 2

Pruebas recientes

En este capítulo, analizaremos una variada lista de demostraciones de la célebre fórmula:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{2.1}$$

Estas pruebas involucran muchos resultados de diversas áreas de las matemáticas, trataremos de enunciar y explicar los distintos resultados usados para que este trabajo esté lo más completo posible. En muchas de las demostraciones se usan formas equivalencias de esta igualdad, las cuales veremos en la siguiente sección.

2.1. Una reducción del Problema de Basilea

Es claro que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

si despejando tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

entonces:

$$\left(\frac{3}{4}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

y finalmente se llega a que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ es equivalente a:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8} \tag{2.2}$$

Otra equivalencia de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ es la siguiente:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} &= \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \text{impar}}}\frac{(-1)^n}{n^2}+\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \text{par}}}\frac{(-1)^n}{n^2}\\ &= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}\\ &= -\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

Por lo que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ es equivalente a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12} \tag{2.3}$$

Así que en algunas pruebas que se desarrollarán a continuación se probarán alguna de las dos formas equivalentes que presentamos.

2.2. Pruebas

Notación. Hoy en día es usual tomar por notación a $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ para las series del Problema de Basilea. Esta notación es válida para todo número real $x>1$ ya que la serie es convergente para esos valores esto se sigue del Criterio de la Integral (ver C del Apéndice) y más aún, la serie como serie de funciones es uniformemente convergente para intervalos de la forma $[a, \infty)$ con $a > 1$. La función $\zeta(x)$ se conoce como la función ζ de Riemann evaluada en x. Cabe mencionar que esta función también tiene sentido cuando la variable x es una variable compleja (su contexto original).

Entonces comencemos con este gran despliegue de ingenio en la aplicación de los conocimientos teóricos de diferentes áreas para darle soluciones distintas a un mismo problema.

Prueba 1 (Debida a Ioannis Papadimitriou [17])

Teorema.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Demostración. Primero recordemos una importante desigualdad, la cual dice que para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ se cumple:

$$\operatorname{sen} x < x < \tan x$$

Ahora, como $x \neq 0$, entonces $\operatorname{sen} x \neq 0$ y por tanto $\tan x \neq 0$. También $1/\operatorname{sen}^2 x = 1+\cot^2 x$. Tomando el recíproco de la desigualdad, elevando al cuadrado y usando todo lo anterior, podemos deducir lo siguiente:

$$\cot^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \cot^2 x$$

Ahora, sea $x = k\pi/(2m+1)$, donde k y m son enteros con $1 \leq k \leq m$; evaluando y sumando sobre k obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{m} \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < m + \sum_{k=1}^{m} \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} \tag{2.4}$$

Supongamos por el momento la validez de la siguiente igualdad; más tarde la demostraremos:

$$\sum_{k=1}^{m} \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3} \tag{2.5}$$

sustituyendo (2.5) en (2.4) se llega a que:

$$\frac{m(2m-1)}{3} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < m + \frac{m(2m-1)}{3}$$

Ya sabíamos que $m \neq 0$ entonces podemos multiplicar esta última desigualdad por $\frac{\pi^2}{4m^2}$ y nos queda que:

$$\frac{\pi^2(2m-1)}{12m} < \frac{(2m+1)^2}{4m^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{4m} + \frac{\pi^2(2m-1)}{12m}$$

y reduciendo aún mas se tiene:

$$\frac{2\pi^2 m}{12m} - \frac{\pi^2}{12m} < \left(\frac{4m^2}{4m^2} + \frac{4m}{4m^2} + \frac{1}{4m^2}\right)\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{4m} + \frac{2\pi^2 m^2}{12m^2} - \frac{\pi^2 m}{12m^2}$$

y así, se obtiene:

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12m} < \left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{4m^2}\right)\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{4m} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12m} \tag{2.6}$$

si hacemos que $m \to \infty$ en (2.6), entonces se deduce que:

$$\frac{\pi^2}{6} \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$$

es decir

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

que es lo que queríamos demostrar. $\triangleleft$

Sin embargo, como no resulta tan obvia la igualdad (2.5) y para que no queden huecos la demostraremos. Entonces tenemos que probar la validez del siguiente:

Lema.

$$\sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}$$

Demostración. De la identidad de Moivre: $n \in \mathbb{Z}^+$, $(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta$ y de la identidad trigonométrica: $\cot\theta = \cos\theta/\operatorname{sen}\theta$, se deduce que:

$$\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \operatorname{sen}^n\theta(\cot\theta + i)^n \tag{2.7}$$

siguiendo con la ecuación (2.7) y del Teorema del Binomio se deduce:

$$\operatorname{sen}^n\theta(\cot\theta + i)^n = \operatorname{sen}^n\theta\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} i^k \cot^{n-k}\theta \tag{2.8}$$

finalmente, de las identidades (2.7) y (2.8) se llega a que:

$$\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta = \operatorname{sen}^n \theta \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \cot^{n-k} \theta$$

Igualando coeficientes y tomando en cuenta que el valor de las potencias de i son: $i^n = \pm 1$ si n es de la forma $4k$ o $4k+2$ respectivamente y además $i^n = \pm i$ si n es de la forma $4n+1$ o $4n+3$ respectivamente, entonces tenemos la siguiente igualdad:

$$\operatorname{sen} n\theta = \operatorname{sen}^n \theta \left[\binom{n}{1} \cot^{n-1} \theta - \binom{n}{3} \cot^{n-3} \theta + \binom{n}{5} \cot^{n-5} \theta - \cdots + \right] \tag{2.9}$$

si hacemos $n = 2m+1$, entonces (2.9) se escribe como:

$$\operatorname{sen}(2m+1)\theta = \operatorname{sen}^{2m+1} \theta P_m(\cot^2 \theta) \quad \textit{con } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \tag{2.10}$$

donde P_m es el polinomio de grado m dado por:

$$P_m(x) = \binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \binom{2m+1}{5} x^{m-2} - \cdots$$

Como $\operatorname{sen} \theta \neq 0$ para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, entonces de la ecuación (2.10) se deduce que $P_m(\cot^2 \theta) = 0$ si y sólo si $(2m+1)\theta = k\pi$ para algún entero k.

Por lo tanto $P_m(x)$ se hace cero para los puntos $x_k = \cot^2(\pi k/2m+1)$ con $k = 1, 2, 3, \ldots, m$.

Así que éstas son todas las raíces de $P_m(x)$ y su suma es:

$$\sum_{k=1}^{m} \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{m(2m-1)}{3} \qquad \triangleleft$$

Prueba 2 (Debida a Josef Hofbauer [19])

Teorema.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Demostración. Las siguientes son una serie de identidades que resultan de las igualdades trigonométricas $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ y $\operatorname{sen}((\pi/2) + x) = \cos x$, respectivamente

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}\right] \tag{2.11}$$

Si $x = \frac{\pi}{2}$ lo sustituimos en (2.11), entonces:

$$1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{3\pi}{4}}\right]$$

Ahora, si seguimos aplicando la identidad (2.11) a cada sumando y vamos haciendo la aplicación en cada par, tenemos la siguiente colección de identidades.

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{3\pi}{4}}\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{8}} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{3\pi}{8}} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{5\pi}{8}} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{7\pi}{8}}\right] \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} \\
&= \frac{2}{4^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene de que $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$, que se aplica varias veces a pares de sumandos.

Si hacemos tender $n \to \infty$ en (2.12) y usando que $\lim_{n\to\infty} 2^n \operatorname{sen}(x/2^n) = x$ con $x = \pi(2k+1)/2$, entonces $4^n \operatorname{sen}^2\left(\frac{\frac{(2k+1)}{2}}{2^n}\pi\right) \to \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2 \pi^2$ por lo que

$$1 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

es decir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

que es lo que se queríamos demostrar. $\triangleleft$

Sin embargo, hay un detalle en el último paso para llegar a (2.12), el cual es el intercambio de un límite con la suma, pero esto se garantiza por el Teorema de Tannery (ver H del Apéndice).

Prueba 3 (Debida a Daniel P. Giesy [23])

Teorema

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Demostración. Tomemos el Núcleo de Dirichlet

$$f_n(x) = 1/2 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx \tag{2.13}$$

entonces podemos afirmar que

$$f_n(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x/2}{\operatorname{sen}(x/2)}\right) \tag{2.14}$$

esto se demuestra usando identidades trigonométricas (Ver I del Apéndice).

Además notemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cos\, kx\, dx &= \left[\frac{x}{k} \operatorname{sen} kx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\, kx}{k} dx \\ &= \left[\frac{\cos\, kx}{k^2}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \end{aligned}$$

Entonces, de (2.13), integrando término a término y lo anterior se deduce que

$$E_n = \int_0^{\pi} x f_n(x) dx = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2}\right)$$

así,

$$\frac{1}{2} E_{2n-1} = \frac{\pi^2}{8} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} \tag{2.15}$$

Ahora, de (2.14), se calculará $E_{2n-1} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\frac{\operatorname{sen}[x(4n-1)/2]}{\operatorname{sen} x/2}\,dx$

y esta última integral se hará por partes, eligiendo

$$u = \frac{x/2}{\operatorname{sen} x/2} \qquad dv = \operatorname{sen}\frac{x(4n-1)}{2}$$

$$du = g(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x/2}{\operatorname{sen}(x/2)}\right) \qquad v = \frac{-\cos\frac{x(4n-1)}{2}}{\frac{4n-1}{2}}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
E_{2n-1} &= -\frac{\frac{x}{2}}{\frac{4n-1}{2}}\frac{\cos\frac{4n-1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\Bigg|_{\epsilon}^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\frac{g(x)\cos\frac{x(4n-1)}{2}}{4n-1}dx \\
&= \frac{1}{4n-1}\left[-2\frac{\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\cos\frac{4n-1}{2}x\right]_{\epsilon}^{\pi} + \frac{2}{4n-1}\int_0^{\pi} g(x)\cos\frac{4n-1}{2}x\,dx \\
&= \frac{1}{4n-1}2\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\frac{\epsilon}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\epsilon}{2}}\cos\frac{4n-1}{2}\epsilon + \frac{2}{4n-1}\int_0^{\pi} g(x)\cos\frac{4n-1}{2}x\,dx
\end{aligned}$$

Las anteriores integrales, son integrales impropias por lo que su cálculo requiere de técnicas de límites que se usaron en los pasos necesarios. Entonces, si usamos los teoremas sobre límites, el límite tiende a 1 cuando $\epsilon \to 0$ básicamente por que $\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\operatorname{sen}\epsilon/2}{\epsilon/2} = 1$. Si ahora factorizamos llegamos a lo siguiente

$$E_{2n-1} = \frac{2 + 2\displaystyle\int_0^{\pi} g(x)\cos\left(\frac{4n-1}{2}x\right)dx}{4n-1}$$

Una inspección en g' deduce que g es creciente en $[0,\pi]$ y por lo tanto g es acotada en $[0,\pi]$ y así, $\lim_{n\to\infty} E_{2n-1} = 0$. Por lo tanto, de (2.15) vemos que

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \qquad \triangleleft$$

Otra manera de probar que $E_{2n-1} \to 0$ se debe a E. L. Stark [**?**], en ella se utiliza el segundo Teorema del Valor Medio para Integrales [**?**], el cual dice que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es no decreciente o no creciente, entonces existe un número $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx$$

Entonces, tomemos como funciones a $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{4n-1}{2}x\right)$ y $g(x) = \frac{\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$, así, $g(0) = 1$, la función g es creciente pues se puede mostrar que $g'(x) > 0$

(bastará con usar el hecho de que $\tan x > x$ para $0 < x < \pi/2$). Entonces por el teorema mencionado, existe una $\xi \in [a, \pi]$ tal que

$$\begin{aligned}
E_{2n-1} &= \int_0^\pi \operatorname{sen}\left(\frac{4n-1}{2}x\right) \cdot \frac{\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\,dx \\
&= g(0)\int_0^\xi \operatorname{sen}\left(\frac{4n-1}{2}x\right)dx + g(\pi)\int_\xi^\pi \operatorname{sen}\left(\frac{4n-1}{2}x\right)dx \\
&= (1)\left[-\frac{\cos\left(\frac{4n-1}{2}x\right)}{\frac{4n-1}{2}}\right]_0^\xi + \frac{\pi}{2}\left[-\frac{\cos\left(\frac{4n-1}{2}x\right)}{\frac{4n-1}{2}}\right]_\xi^\pi \\
&= \left(\frac{1-\cos\left(\frac{4n-1}{2}\xi\right)}{\frac{4n-1}{2}}\right) + \frac{\pi}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{4n-1}{2}\xi\right)}{\frac{4n-1}{2}}\right) \\
&= \frac{2}{4n-1}\left(1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\cos\left(\frac{4n-1}{2}\xi\right)\right)
\end{aligned}$$

Y ahora, claramente se tiene que $\lim_{n\to\infty} E_{2n-1} = 0$ y entonces se concluye

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \triangleleft$$

Prueba 4 (Debida a Tom Apostol [13])

Teorema.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Demostración. Primero notemos que

$$\int_0^1\int_0^1 x^{n-1}y^{n-1}dxdy = \int_0^1 x^{n-1}dx \int_0^1 y^{n-1}dy = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

Usando el Teorema de Convergencia Monótona[1] se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy} = \int_0^1\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}(xy)^{n-1}dxdy \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\int_0^1 x^{n-1}y^{n-1}dxdy = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

[1] [3] pag. 318

Ahora calcularemos de manera diferente $I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy}$.

Consideremos el siguiente cambio de coordenadas:

$$(x, y) \longmapsto (u, v) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2} \right) \quad y \quad (u, v) \longmapsto (u - v, u + v)$$

y la fórmula de cambio de variable (Ver F del Apéndice).

Llamemos φ a $\varphi(u, v) = (u - v, u + v)$ que transforma el cuadrado T cuyos vértices son $(0, 0), (1/2, -1/2)$, $(1, 0)$ y $(1/2, 1/2)$ en el cuadrado S cuyos vértices son: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$.

Entonces, para esta transformación su Jacobiano, es:

$$|J\varphi(u, v)| = det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

teniendo este resultado, entonces se sigue del Teorema de Cambio de Variable lo siguiente:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1 - xy} = \int_T \frac{2dudv}{1 - (u - v)(u + v)} = 2 \int_T \frac{dudv}{1 - u^2 + v^2}$$

Pero por simetría del cuadrado T con respecto al eje u se sigue que:

$$I = 4 \int_0^{1/2} \int_0^u \frac{dvdu}{1 - u^2 + v^2} + 4 \int_{1/2}^1 \int_0^{1-u} \frac{dvdu}{1 - u^2 + v^2}$$

como $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$, entonces:

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{1/2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \tan^{-1} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \right]_0^u du + 4 \int_{1/2}^1 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \tan^{-1} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \right]_0^{1-u} du \\ &= 4 \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \tan^{-1} \left(\frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} \right) du + 4 \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \tan^{-1} \left(\frac{1 - u}{\sqrt{1 - u^2}} \right) du \end{aligned}$$

Ahora, si $u = \operatorname{sen} \theta$, como $0 \leq u \leq 1/2$, bastará tener que $0 \leq \theta \leq \pi/6$

Así, $\sqrt{1 - u^2} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} = \cos \theta$ y además, también se tiene que $u/\sqrt{1 - u^2} = \operatorname{sen} \theta / \cos \theta = \tan \theta$ por lo que $\tan^{-1}(u/\sqrt{1 - u^2}) = \theta$ y como $du = \cos \theta d\theta$, entonces

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \tan^{-1} \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} du = \int_0^{\pi/6} \frac{\theta}{\cos \theta} \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} \right)^2 \qquad (2.16)$$

Análogamente, si hacemos $u = \cos\theta$ con $1/2 \leq u \leq 1$ necesariamente ocurre que $0 \leq \theta \leq \pi/3$.

Así, $\sqrt{1-u^2} = \operatorname{sen}\theta$ y también se tiene que

$$\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1-(\cos^2\theta/2 - \operatorname{sen}^2\theta/2)}{2\operatorname{sen}\theta/2\cdot\cos\theta/2} = \frac{2\operatorname{sen}^2\theta/2}{2\operatorname{sen}\theta/2\cdot\cos\theta/2} = \tan\theta/2$$

por lo que $\tan^{-1}((1-u)/\sqrt{1-u^2}) = \theta/2$ y como $du = -\operatorname{sen}\theta d\theta$, entonces

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \tan^{-1}\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} du = \int_{\pi/3}^{0} \frac{-\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\theta}{2} d\theta = \int_{0}^{\pi/3} \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \quad (2.17)$$

Finalmente de (2.16) y (2.17) se tiene que

$$I = 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = \pi^2\left(\frac{2}{36}+\frac{1}{9}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

que es lo que se quería demostrar. $\triangleleft$

Prueba 5 (Debida a Dan Kalman [21])

Teorema.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Demostración. Esta prueba se reduce nuevamente a calcular de dos maneras diferentes una integral doble. Como en la prueba anterior se tiene

$$\frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \int_0^1 x^{2k} y^{2k} dx dy$$

sumando en ambos lados de la igualdad desde cero hasta infinito y aplicando teorema de la Convergencia Monótona[2] y también haciendo uso de las series geométricas se cumple lo que sigue:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{2k} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} ((xy)^2)^k \right) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{1 - x^2 y^2} \end{aligned}$$

[2] [2] pag. 289

Si hacemos el cambio de variable:

$$T(x,y)=\left(\tan^{-1}\left(x\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}\right),\tan^{-1}\left(y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}\right)\right)=(u,v)$$

se tiene que la inversa[3] es

$$\varphi(u,v)=\left(\frac{\operatorname{sen} u}{\cos v},\frac{\operatorname{sen} v}{\cos u}\right)=(x,y)$$

La transformación φ lleva el triángulo $T=\{(u,v):u>0,\ v>0,\ u+v<\pi/2\}$, al cuadrado unitario y su matriz jacobiana es:

$$J_\varphi=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{bmatrix}\cos u/\cos v & \operatorname{sen} u\operatorname{sen} v/\cos^2 v\\ \operatorname{sen} u\operatorname{sen} v/\cos^2 u & \cos v/\cos u\end{bmatrix}$$

y así,

$$det(J_\varphi)=1-\frac{\operatorname{sen}^2 u\operatorname{sen}^2 v}{\cos^2 u\cos^2 v}=1-x^2y^2$$

y por lo tanto

$$\int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{1-x^2y^2}=\iint_T\frac{1}{1-x^2y^2}(1-x^2y^2)dudv=\iint_T dudv$$

Pero el área del triángulo $T=\{(u,v):u>0,\ v>0,\ u+v<\pi/2\}$ es $\pi^2/8$ por lo que:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\iint_T dudv=\frac{\pi^2}{8}$$

que es lo que queríamos demostrar. $\triangleleft$

Prueba 6 (Debida a F. Goldscheider [26])

Teorema.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Demostración. Consideremos las siguientes integrales:

$$I=\int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{1-xy}\qquad\text{y}\qquad J=\int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{1+xy}$$

[3] $\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen} u}{\cos v}\sqrt{\frac{1-\frac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 v}}{1-\frac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 v}}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen} u}{\cos v}\sqrt{\frac{\cos^2 u-\operatorname{sen}^2 v}{\cos^2 v-\operatorname{sen}^2 u}}\right)=u\sqrt{\frac{(1-\operatorname{sen}^2 u)-(1-\cos^2 v)}{\cos^2 v-\operatorname{sen}^2 u}}=u$ y de manera análoga se verifica para las que faltan, por lo tanto es su inversa

entonces podemos hacer lo siguiente:

$$I - J = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{1-xy} - \frac{1}{1+xy} \right) dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2xy}{1-(xy)^2} dxdy$$

También, consideremos la siguiente función $\varphi(u,v) = (x,y) = (\sqrt{u}, \sqrt{v})$, entonces se tiene que

$$J\varphi = det \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{v}} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{uv}}$$

así se tiene que

$$\begin{aligned} I - J = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2xy}{1-(xy)^2} dxdy &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{2\sqrt{uv}}{1-uv} \right) \frac{1}{4\sqrt{uv}} dudv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{dudv}{1-uv} = \frac{I}{2} \end{aligned}$$

y por lo tanto, $I = 2J$.

Ahora calculemos la suma $I + J$,

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy} + \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1+xy} \\ &= \int_{-1}^0 \int_0^1 \frac{dxdy}{1+xy} + \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1+xy} \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1+xy} \end{aligned}$$

En la segunda igualdad se utilizó el cambio de variable $y \mapsto -y$.

Para calcular esta integral, apliquemos el cambio de variables, cuya función $\varphi : T \to S$, donde $S = T = [-1,1] \times [0,1]$, y

$$\varphi(u,v) = (x,y) = \left(u \ , \ \frac{-1 + \sqrt{1 + u(u+2v)}}{u} \right)$$

y su inversa[4] es $\varphi^{-1}(x,y) = \left(x, y + \frac{x(y^2-1)}{2} \right)$. Entonces tenemos que

$$det(J\varphi(u,v)) = det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{1}{\sqrt{1+u(u+2v)}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + u(u+2v)}}$$

[4] $\frac{-1+\sqrt{1+u(u+2v)}}{u} = \frac{-1+\sqrt{1+x(x+2y+x(y^2-1)}}{x} = \frac{-1+\sqrt{(1+xy)^2}}{x} = \frac{-1+(1+xy)}{x} = y$ con $u = x$ y $v = y + \frac{x(y^2-1)}{2}$, por tanto es su inversa

entonces sustituyendo obtenemos lo siguiente:

$$I+J = \iint_T \frac{1}{1+u\left(\frac{-1+\sqrt{1+u(u+2v)}}{u}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+u(u+2v)}} dudv = \int_{-1}^{1}\int_0^1 \frac{dudv}{1+2uv+u^2} \tag{2.18}$$

El problema se reduce en resolver (2.18), así que calcularemos primero la integral de adentro.

Si usamos que $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{du}{1+2uv+u^2} &= \int_0^1 \frac{du}{(1-v^2)(u+v)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tan^{-1} \frac{u+v}{\sqrt{1-v^2}} \Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left(\tan^{-1} \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} - \tan^{-1} \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \right) \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Ahora falta calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left(\tan^{-1} \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} - \tan^{-1} \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \right) dv$ y

para esto, usaremos el cambio de variable $v = \cos\phi$, así que lo siguiente se cumple[5]:

$$\begin{aligned}
\tan^{-1} \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} - \tan^{-1} \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} &= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}}{1 + \frac{v(1+v)}{1-v^2}} \right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}} \right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\phi}{\operatorname{sen}\phi} \right) \\
&= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\phi}{2} \right) = \frac{\phi}{2} \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

[5] Usaremos que $\tan^{-1}(a) - \tan^{-1}(b) = \tan^{-1}\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$

por lo tanto, si sustituimos (2.20) en (2.19) se llega a:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\tan^{-1}\frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}}-\tan^{-1}\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right)dv &= \int_{\pi}^{0}\frac{-\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\phi}\cdot\frac{\phi}{2}d\phi\\ &= \int_{0}^{\pi}\frac{\phi}{2}d\phi\\ &= \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

finalmente se tiene que $I+J=\pi^2/4$ y como $I=2J$, entonces $I=\pi^2/6$.

y por lo tanto,

$$\frac{\pi^2}{6}=I=\int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{1-xy}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

que es lo que se quería demostrar $\triangleleft$

Prueba 7 (Dedida a Boo Rim Choe [20])

Teorema.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

Demostración. Sabemos que para $|x|<1$, se tiene que:

$$\operatorname{sen}^{-1}x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^x(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}dt$$

Pero la serie binomial se define como

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \quad \text{para } |x|<1 \text{ con } \alpha\in\mathbb{R}$$

donde

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

si sustituimos entonces:

$$\int_0^x(1-t^2)^{-1/2}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-t^2)^n\right)dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \left(\int_0^x t^{2n} dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right)$$

y como

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} = \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}$$

$$= (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}$$

entonces

$$\operatorname{sen}^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(x^{2n+1})}{2 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+1)} \tag{2.21}$$

Ahora, si hacemos $x = \operatorname{sen} t$ y lo sustituimos en (2.21), obtenemos:

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(\operatorname{sen}^{2n+1} t)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+1)}$$

Para $|t| \leq \frac{\pi}{2}$. Ahora, si integramos de 0 a $\frac{\pi}{2}$ y usando (ver G del Apéndice) que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

llegamos a que

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{8} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(\operatorname{sen}^{2n+1} t)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1} x dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n)!(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. $\triangleleft$

Prueba 8 (Debida a Yoshio Matsuoka [18])

Teorema.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Demostración. Consideremos las siguientes integales

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx \qquad y \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x dx$$

Si integramos por partes a I_n (ver G del Apéndice) nos queda que:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{\pi}{2}$$

pero

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n)}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n)^2} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$$

por lo tanto podemos afirmar que

$$I_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

Integremos por partes a I_n de otra manera

$$\begin{aligned} I_n &= [x \cos^{2n} x]_0^{\pi/2} + 2n \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x \cos^{2n-1} x dx \\ &= n[x^2 \operatorname{sen} x \cos^{2n-1} x]_0^{\pi/2} - n \int_0^{\pi/2} x^2 (\cos^{2n} x - (2n-1) \operatorname{sen}^2 x \cos^{2n-2} x) dx \\ &= -n \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n} x dx + n(2n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) \cos^{2n-2} x dx \\ &= n(2n-1) J_{n-1} - 2n^2 J_n \end{aligned}$$

Así, tenemos la siguiente igualdad

$$\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2} = n(2n-1) J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

reacomodando términos se tiene lo siguiente

$$\frac{\pi}{4n^2} = \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!} J_{n-1} - \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$$

si sumamos desde $n = 1$ hasta N se tiene que

$$\frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = J_0 - \frac{4^N (N!)^2}{(2N)!} J_N \tag{2.22}$$

En la igualdad (2.22) hemos utilizamos que $\sum_{n=1}^{N} (a_k - a_{k-1}) = a_N - a_0$.

Pero como $J_0 = \frac{\pi^3}{24}$, bastará demostrar que $\lim_{N\to\infty} \frac{4^N (N!)^2}{(2N)!} J_N = 0$.

De la desigualdad: $x < \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, se concluye que:

$$J_N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2N} x dx \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x \cos^{2N} x dx = \frac{\pi^2}{4}(I_N - I_{N+1}) = \frac{\pi^2 I_N}{8(N+1)}$$

En la parte de las desigualdades en la ecuación anterior sólo se usó la monotonía de la integral y en la última igualdad se usó que $I_N - I_{N+1} = I_N/2(N+1)$.

Por lo tanto, de la última ecuación, simplificando y utilizando la definición de I_N se llega a:

$$0 < \frac{4^N (N!)^2}{(2N)!} J_N \leq \frac{\pi^3}{16(N+1)} \tag{2.23}$$

finalmente, teniendo en cuenta (2.23), si en (2.22) hacemos que $N \to \infty$ se llega a

$$\frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{24}$$

es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

que es lo que queríamos demostrar. $\triangleleft$

Prueba 9 (Debida a R. Chapman [14])

Teorema.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Primero, enunciemos tres resultados muy importantes que usaremos en la demostración[6].

(a) **Criterio de Dirichlet.** Sea $\{f_n : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ una sucesión de funciones con $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo tales que $s_n = \sum_{j=1}^{n} f_j$ son todas acotadas en J. Sea $\{\phi_n : J \to \mathbb{R}\}$ una sucesión decreciente de funciones las cuales convergen uniformemente en J. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\phi_n f_n)$ converge uniformemente en J.

(b) **Teorema**. Sea $\{f_n : J \to \mathbb{R}\}$ una sucesión de funciones derivables en J para cada $n \in \mathbb{N}$. Supóngase que la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n)$ converge puntualmente en

[6] Las demostraciónes de estos resultados se pueden encontrar en las pags. 352, 406 y 353 de [2] respectivamente.

J y que también la serie de derivadas $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n')$ convergen uniformemente en J. Entonces existe una función real f tal que $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n)$ converge uniformemente a f en J, y además, f tiene por derivada en J a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$.

(c) **Criterio M-Weierstrass.** Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es una serie de funciones definidas en el intervalo J y tal que:

i) $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in J, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en J.

Teniendo en cuenta estos resultados, estamos en condiciones para comenzar la prueba.

Demostración. Consideremos la serie:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2}$$

Esta serie converge uniformemente en $\mathbb{R}$, lo que se deduce simplemente de (c) con $M_n = 1/n^2$. Ahora, si $\epsilon > 0$, entonces para $t \in [\epsilon, 2\pi - \epsilon]$ se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{N} \operatorname{sen} nt = \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} = \frac{e^{it} - e^{i(N+1)t}}{2i(1-e^{it})} + \frac{1 - e^{-iNt}}{2i(1-e^{it})}$$

Hemos obtenido estas igualdades utilizando que: $\sum_{n=1}^{N} a^n = \frac{a - a^{N+1}}{1-a}$. Para saber como está acotada en valor absoluto, simplemente usamos la desigualdad del triángulo y operaciones elementales:

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{it} - e^{i(N+1)t}}{2i(1-e^{it})} + \frac{1 - e^{-iNt}}{2i(1-e^{it})} \right| &\leq \frac{1}{2\left|1-e^{it}\right|} \left(\left|e^{it}\right| + \left|-e^{i(N+1)t}\right| + 1 + \left|-e^{-iNt}\right| \right) \\ &\leq \frac{4}{2\left|1-e^{it}\right|} \end{aligned}$$

y así se tiene:

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \operatorname{sen} nt \right| \leq \frac{2}{\left|1-e^{it}\right|} = \frac{1}{\operatorname{sen} t/2}$$

es decir, se concluye que esta suma está acotada uniformemente en $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$.

Entonces, esta suma cumple las hipótesis del Criterio de Dirichlet, con la sucesión decreciente $\phi_n = 1/n$ la cual sabemos que converge uniformemente a la función cero. Entonces, podemos deducir que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nt}{n}$$

converge uniformemente en $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$. Aclaremos que se denotará como $Re\, z$, $Im\, z$ y $arg\, z$ a la parte real, la parte imaginaria y el argumento de un número complejo z respectivamente. Utilizando (b), ya que se tienen todas las hipótesis, se sigue que para $t \in (0, 2\pi)$ la función $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2}$ cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nt}{n} = -Im\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{n}\right) \\ &= Im(log(1 - e^{it})) = arg(1 - e^{it}) = \frac{t - \pi}{2} \end{aligned}$$

éstas igualdades la deducimos a partir de las siguientes propiedades:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} = log\left(\frac{1}{1-a}\right)$ para $|a| \leq 1$ y $a \neq 1$

ii) $log(\frac{1}{1-x}) = -log(1 - x)$ y

iii) $log\, z = log\, |z| + i\, Arg\, z$ con $-\pi < Arg\, z < \pi$.

Ahora, por el teorema fundamental del Cálculo se tiene que si integramos de ambos lados de la identidad $f'(t) = (t - \pi)/2$ llegamos a:

$$f(\pi) - f(0) = \int_0^{\pi} f'(t)dt = \int_0^{\pi} \frac{t - \pi}{2} dt = -\frac{\pi^2}{4}$$

pero claramente $f(0) = \zeta(2)$ y $f(\pi) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\zeta(2)}{2}$.

luego $\zeta(2) = \pi^2/6$, que es lo que se quería demostrar. $\triangleleft$

Prueba 10 (Ver R. Chapman [14])

Teorema.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Demostración. Como en la prueba anterior, consideremos $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2}$.

Ahora tomemos la siguiente serie de números complejos conocida como la función **dilogaritmo**:
$$D(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$
esta serie es uniformemente convergente en el disco cerrado $D = \{z \in \mathbf{C}; |z| \leq 1\}$, esto se debe al Criterio M-Weierstrass[7] ya que $|z^n/n^2| \leq 1/n^2$ para $|z| \leq 1$.

Pero las series de potencias definen funciones analíticas, entonces $D(z)$ es una función analítica para $|z| \leq 1$ y su derivada es:
$$D'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n} = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\frac{1}{z}\log(1-z)$$
pero
$$\begin{aligned} Re(D(e^{it})) &= Re\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{n^2}\right) = Re\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nt}{n^2} + i\frac{\operatorname{sen} nt}{n^2}\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2} = f(t) \end{aligned}$$
así que
$$\begin{aligned} f'(t) &= Re\left(D'(e^{it})ie^{it}\right) = Re\left(-\frac{1}{e^{it}}\log(1-e^{it})ie^{it}\right) \\ &= Re\left(-i\log(1-e^{it})\right) = arg(1-e^{it}) = \frac{t-\pi}{2} \end{aligned}$$
similar a la prueba anterior, si aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene:
$$f(\pi) - f(0) = \int_0^{\pi} \frac{t-\pi}{2}dt = -\frac{\pi^2}{4}$$

[7] ver prueba anterior

pero $f(0) = \zeta(2)$ y $f(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\zeta(2)}{2}$ entonces, si sustituimos finalmente llegamos a

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

que es lo que se quería demostrar. $\triangleleft$

Prueba 11 (Debida a James D. Harper [16])

Teorema.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Demostración. Resolviendo la siguiente integral doble se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)(x^2z^2+1)}dzdx &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\left[\tan^{-1} xz\right]_0^1 dx \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{x^2+1}dx \\
&= \frac{1}{2}(\tan^{-1} x)^2\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

Ahora calcularemos la anterior integral de otra manera, primero aplicando el teorema de Fubini[8] y después resolviendo la integral doble que resulte.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)(x^2z^2+1)}dzdx &= \int_0^1\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)(x^2z^2+1)}dxdz \\
&= \int_0^1\int_0^{\infty} \frac{1}{2(z^2-1)}\left[\frac{2xz^2}{(x^2z^2+1)} - \frac{2x}{x^2+1}\right]dxdz \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2(z^2-1)}\left[\log\left(\frac{x^2z^2+1}{x^2+1}\right)\right]_0^{\infty} dz \\
&= \int_0^1 \frac{\log z^2}{2(z^2-1)}dz \\
&= \int_0^1 \frac{\log z}{(z^2-1)}dz
\end{aligned}$$

[8] el cual es un caso particular del Teorema de Transformación de integrales ver pág. 335 de [2]

Ahora resolveremos esta última integral por partes con $u = \log z$ y $dv = dz/(z^2-1)$. Se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\log z}{(z^2-1)}dz &= \left[-\log z \tanh^{-1} z\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-\tanh^{-1} z}{z}dz \\ &= \int_0^1 \frac{\tanh^{-1} z}{z}dz\end{aligned}$$

usando la serie de McLaurin para la función inversa de la tangente hiperbólica ($\tanh^{-1} z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \cdots$) se sigue que:

$$\int_0^1 \frac{\tanh^{-1} z}{z}dz = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n+1}\right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{z^{2n}}{2n+1}dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Así que hemos encontrado dos valores para $\int_0^{\infty}\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)(x^2z^2+1)}dzdx$.

Entonces, si igualamos esos valores tenemos finalmente que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

que es lo se quería demostrar. $\triangleleft$

Prueba 12 (Debida a R. A. Kortram [25])

Teorema.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Demostración. Sea $m, n \in \mathbb{N}$, entonces de la relación

$$\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos x \cos nx$$

es inmediato que existe un polinomio[9] T_n de grado n tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $\cos nx = T_n(\cos x)$. En particular se tiene $\cos 2nx = T_n(\cos 2x) = T_n(1 - 2\,\mathrm{sen}^2(nx))$.

Lo anterior, junto con la relación

$$\mathrm{sen}(2m+1)x - \mathrm{sen}(2m-1)x = 2\,\mathrm{sen}\, x \cos(2mx)$$

[9] Este polinomio es conocido como el n-ésimo polinomio de Tchebyshev.

garantiza que existe un polinomio F_m de grado m tal que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen}(2m+1)x = \operatorname{sen} x F_m(\operatorname{sen}^2 x)$$

Dado que $\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)j\pi}{2m+1}\right) = 0$ para $j = 0, 1, 2, \ldots, m$ se tiene que F_m tiene ceros en $\operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{2m+1}\right)$ con $j = 0, 1, \ldots, m$. Estos ceros son todos distintos por lo que F_m no se anula en otro punto y entonces;

$$F_m(y) = F_m(0) = \prod_{j=1}^{m}\left(1 - \frac{y}{\operatorname{sen}^2 \frac{j\pi}{2m+1}}\right) \quad , \quad y \in \mathbb{R}$$

pero como

$$F_m(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2m+1)x}{\operatorname{sen} x} = 2m+1$$

llegamos a

$$\operatorname{sen}(2m+1)x = (2m+1)\operatorname{sen} x \prod_{j=1}^{m}\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 \frac{j\pi}{2m+1}}\right)$$

Sea $n = 2m+1$, entonces de la ecuación anterior se tiene que

$$\operatorname{sen} nx = n \operatorname{sen} x \prod_{j=1}^{m}\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi j}{n}\right)}\right)$$

Si comparamos los coeficientes de x^3 en la serie de MacLaurin de ambos lados de la igualdad llegamos a

$$-\frac{n^3}{6} = -\frac{n}{6} - n\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi j}{n}\right)}$$

y así,

$$\frac{1}{6} - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi j}{n}\right)} = \frac{1}{6n^2}$$

Tomemos a M fijo, y sea $m > M$, entonces,

$$\frac{1}{6} - \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{n^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi j}{n}\right)} = \frac{1}{6n^2} + \sum_{j=M+1}^{m} \frac{1}{n^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi j}{n}\right)}$$

como $0 < x < \pi/2$, entonces $\operatorname{sen} x > 2x/\pi$ y por tanto $0 < 1/\operatorname{sen} x < \pi/2x$, así, se cumple lo siguiente

$$\frac{1}{n^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi j}{n}\right)} < \frac{\pi^2}{n^2 4\left(\frac{\pi j}{n}\right)^2} = \frac{1}{4j^2}$$

y por tanto se tiene que

$$0 < \frac{1}{6} - \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{n^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi j}{n}\right)} < \frac{1}{6n^2} + \sum_{j=M+1}^{m} \frac{1}{4j^2}$$

cuando $m \to \infty$, también $n \to \infty$ y como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(j\pi)^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi j}{n}\right) = 1, \quad \text{se tiene que} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi j}{n}\right)} = \frac{1}{\pi^2 j^2}$$

y entonces

$$0 < \frac{1}{6} - \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{\pi^2 j^2} \leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{4j^2} \qquad \text{para } M$$

Como sabemos que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4j^2}$ es convergente, entonces, dado $\epsilon > 0$, existe M tal que $\sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{4j^2} < \epsilon$. Pero entonces $\lim_{M\to\infty} \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{\pi^2 j^2} = \frac{1}{6}$, por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

que es lo que se quería demostrar. $\triangleleft$

Prueba 13 (Debida a Dennis C. Russell [22])

Teorema.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Demostración. Consideremos la siguiente integral:

$$\int_0^{\pi/2} \log(2\cos x)dx$$

Usando que $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$, la anterior integral es igual a:

$$\int_0^{\pi/2} \log\left[e^{ix}(1 + e^{-2ix})\right] dx$$

y como $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ es válida para $|x| \leq 1$, $x \neq -1$, (ver D del Apéndice), entonces la anterior integral es igual a:

$$\int_0^{\pi/2} \left[ix + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-2nix}\right] dx$$

Separando la integral se tiene que la anterior es igual a:

$$i\frac{\pi^2}{8} + \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-2nix} \right) dx$$

Pero la segunda integral es impropia ya que $e^{-2i(\frac{\pi}{2})} = -1$. Por lo que debemos calcular $\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-2nix} \right) dx$.

Pero en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2} - \epsilon]$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-2nix}$ es uniformemente convergente por lo que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-2nix} \right) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} e^{-2nix}\, dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[\frac{e^{-2nix}}{-2ni} \right]_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n} \left[\frac{e^{-2ni(\frac{\pi}{2}-\epsilon)} - 1}{2ni} \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n} \left[\frac{(-1)^n e^{-2ni\epsilon} - 1}{2ni} \right]
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-2nix} dx &= \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n} \left[\frac{(-1)^n e^{-2ni\epsilon} - 1}{2ni} \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n} \left[\frac{(-1)^n - 1}{2ni} \right] \\
&= \frac{1}{i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, regresando a la cadena de igualdades, llegamos a que:

$$\int_0^{\pi/2} \log(2\cos x) dx = i \left[\frac{\pi^2}{8} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \right]$$

Pero el lado izquierdo de la anterior igualdad es un número real y la parte derecha es un número imaginario puro, por lo tanto ambas partes son iguales a cero[10], en

[10] Además se obtiene un resultado adicional, el cual es un ejercicio del libro de Ahlfors y que se prueba usando el TVM: $0 = \int_0^{\pi/2} \log(2\cos x)dx = \int_0^{\pi/2} \log 2dx + \int_0^{\pi/2} \log(\cos x)dx$ por lo tanto, $\int_0^{\pi/2} \log(\cos x)dx = -\frac{\pi}{2}\log(2)$

particular se cumple:

$$\frac{\pi^2}{8} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = 0$$

es decir:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \triangleleft$$

Prueba 14 (Ver Robin Chapman [14] o ejercicio de [2])

Teorema.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Demostración. En esta prueba se trabajará en el espacio de funciones $L^2[0,1]$ y también usaremos la identidad de Parseval , la cual establece que para $f \in L^2[0,1]$, se tiene que $\langle f, f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2$, donde $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$ (ver J del Apéndice).

Tomemos a $f(x) = x$ y calculemos sus coeficientes de Fourier $\langle f, e_n \rangle$.

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 f \cdot \bar{f} \, dx = \int_0^1 x \cdot \bar{x} \, dx = \int_0^1 x^2 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3} \ ,$$

$$\langle f, e_0 \rangle = \int_0^1 x \cdot \overline{e_0(x)} \, dx = \int_0^1 x \, dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2} \quad \text{y}$$

$$\langle f, e_n \rangle = \int_0^1 x \cdot \overline{e_n(x)} \, dx = \int_0^1 x \cdot e^{-2\pi i n x} \, dx$$

para calcular esta última integral por partes hacemos que

$$u = x \qquad dv = e^{-2\pi i n x}$$

$$du = dx \qquad v = -\tfrac{e^{-2\pi i n x}}{2\pi i n}$$

por lo tanto

$$\int_0^1 x \cdot e^{-2\pi i n x}\ dx = -\left.\frac{xe^{-2\pi i n x}}{2\pi i n}\right|_0^1 + \frac{1}{2\pi i n}\int_0^1 e^{-2\pi i n x} dx$$

$$= \ -\frac{e^{-2\pi i n}}{2\pi i n} + \frac{1}{2\pi i n}\left(-\left.\frac{e^{-2\pi i n x}}{2\pi i n}\right|_0^1\right)$$

$$= \ -\frac{e^{-2\pi i n}}{2\pi i n} + \frac{1}{2\pi i n}\left(-\frac{e^{-2\pi i n}}{2\pi i n} + \frac{1}{2\pi i n}\right)$$

Pero como $e^{\pi i} = -1$, entonces se tiene:

$$\int_0^1 x \cdot e^{-2\pi i n x}\ dx = -\frac{1}{2\pi i n} + \frac{1}{2\pi i n}\left(\frac{-1}{2\pi i n} + \frac{1}{2\pi i n}\right) = -\frac{1}{2\pi i n}$$

Por lo tanto, si sustituimos estos tres valores en la identidad de Parseval se tiene que:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \sum_{n\in Z, n\neq 0} \frac{1}{4\pi^2 n^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

luego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

que es lo que se quería demostrar $\triangleleft$

Prueba 15 (Ver Robin Chapman [14] o ejercicio de [2])

Teorema.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Demostración. La misma idea que la prueba anterior, pero usando la la función $g(x) = \chi_{[0,1/2]}(x)$, donde $\chi_{[0,1/2]}$ es la función caracteristica que esta definida de la siguiente manera en $[0, 1]$

$$\chi_{[0,1/2]} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1/2] \end{cases}$$

entonces necesitamos encontrar sus coeficientes de Fourier.

$$\langle g, g\rangle = \int_0^1 g(x)\cdot\overline{g(x)}\ dx = \int_0^1 g^2(x)\ dx = \int_0^{1/2} 1\ dx = x\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2}\ ,$$

$$\langle g, e_0\rangle = \int_0^1 g(x)\cdot\overline{e_0}\ dx = \int_0^1 g(x)\ dx = \int_0^{1/2} 1\ dx = x\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2}\quad \text{y}$$

$$\begin{aligned}\langle g, e_n\rangle &= \int_0^1 g(x)\cdot\overline{e_n(x)}\ dx = \int_0^1 \chi_{[0,1/2]}\cdot e^{-2\pi inx}\ dx = \int_0^{1/2} e^{-2\pi inx}\ dx \\ &= -\frac{e^{-2\pi inx}}{2\pi in}\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2\pi in}\left(1-e^{-\pi in}\right) = \frac{1}{2\pi in}(1-(-1)^n)\end{aligned}$$

Así,

$$\langle g, e_n\rangle = \begin{cases}\frac{1}{i\pi n} & \text{si } n \text{ es impar}\\ 0 & \text{si } n \text{ es par}\end{cases}$$

Por la identidad de Parseval se tiene que

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + 2\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \text{impar}}} \frac{1}{\pi^2 n^2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

luego

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

que es lo que se quería demostrar ◁

Prueba 16 (Ver Robin Chapman [14])

Teorema.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Demostración. Aquí usaremos el hecho de que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua de variación acotada, con $f(0) = f(1)$, entonces la serie de Fourier de f converge puntualmente a f, esto es $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle f, e_n(x)\rangle e_n(x)$.

Entonces tomemos como a f a la función $f(x) = x(1-x)$ y calculemos sus coeficientes de Fourier.

$$\langle f, e_0 \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot \bar{e}_0 \, dx = \int_0^1 x(1-x) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\langle f, e_n \rangle = \int_0^1 (x - x^2) \cdot e^{-2\pi i n x} \, dx = \int_0^1 x e^{-2\pi i n x} \, dx - \int_0^1 x^2 e^{-2\pi i n x} \, dx$$

Pero en la Prueba 14 se calculó que $\int_0^1 x e^{-2\pi i n x} \, dx = -\frac{1}{2\pi i n}$ para $n \neq 0$

Entonces, para calcular $\int_0^1 x^2 e^{-2\pi i n x} \, dx$ por partes hacemos

$$u = x^2 \qquad dv = e^{-2\pi i n x}$$

$$du = 2x dx \qquad v = -\tfrac{e^{-2\pi i n x}}{2\pi i n}$$

Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{-2\pi i n x} \, dx &= \left. \frac{-x^2 e^{-2\pi i n x}}{2\pi i n} \right|_0^1 + \frac{2}{2\pi i n} \int_0^1 x e^{-2\pi i n x} \, dx \\ &= \frac{-1}{2\pi i n} + \frac{1}{\pi i n} \left(\frac{-1}{2\pi i n} \right) = \frac{-1}{2\pi i n} + \frac{1}{2\pi^2 n^2} \end{aligned}$$

y finalmente tenemos:

$$\langle f, e_n \rangle = -\frac{1}{2\pi i n} - \left(\frac{-1}{2\pi i n} + \frac{1}{2\pi^2 n^2} \right) = \frac{-1}{2\pi^2 n^2}$$

Ahora, como $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e^{i2\pi n x}$, se tiene que

$$\begin{aligned} x(1-x) &= \frac{1}{6} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2} \left(e^{i2\pi n x} + e^{-i2\pi n x} \right) \\ &= \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{\pi^2 n^2} \qquad (2.24) \end{aligned}$$

Al hacer $x = 1/2$, se tiene

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{\pi^2 n^2} = \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \qquad \triangleleft$$

Notemos también que si hacemos $x = 0$ en (2.24) se tiene que

$$0 = \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2}$$

y por lo tanto llegamos a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Prueba 17 (Ver [8])

Teorema.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Esta prueba se basa en resultados de variable compleja, en ésta prueba usaremos el Teorema de la adición y una proposición, tales resultados dicen así:

Teorema de la adición. Sea f analítica en $\mathbf{C}$ excepto en un número finito de singularidades aisladas. Sea C_N un cuadrado cuyos vértices son $(N + 1/2) \times (\pm 1, \pm i)$ con $N = 1, 2, \ldots$. Suponga que $\int_{C_N} (\pi \cot \pi z) f(z) \to 0$ cuando $N \to \infty$, entonces se tiene la fórmula de la adición, esto es

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} [f(n) : n \text{ no es una singularidad de } f]$$

$$= \sum [\text{residuos de } \pi \cot \pi z f(z) \text{ en las singularidad de } f]$$

Si ninguna de las singularidades de f está en los enteros entonces $\lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} f(n)$ existe, es finito y además,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} f(n) = -\sum [\text{residuos de } \pi \cot \pi z f(z) \text{ en las singularidad de } f] .$$

Proposición. Sea f función analítica en $\mathbf{C}$ excepto para singularidades aisladas. Si existen constantes R y M tales que $|zf(z)| \leq M$ siempre que $|z| \geq R$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema de la Adición.

Comencemos con la demostración de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Demostración. Apliquemos la proposición mencionada anteriormente para $f(z) = 1/z^2$ que claramente satisface las hipótesis de la proposición anterior. Como $\tan z$ tiene un cero simple en $z = 0$, entonces $\cot z$ tiene un polo simple también ahí, así el desarrollo de Laurent de $\cot z$ es de la forma $\frac{b_1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) &= \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) \cdot \left(\frac{b_1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots\right) \\ &= b_1 + a_0 z + \left(a_1 - \frac{b_1}{3!}\right) z^2 + \left(a_2 - \frac{a_0}{3!}\right) z^3 + \cdots \end{aligned}$$

Si comparamos los coeficientes entonces resulta que $b_1 = 1$, $a_0 = 0$ y $a_1 = -1/3$. Entonces

$$\frac{\pi \cot \pi z}{z^2} = \frac{\pi \left(\frac{1}{\pi z} - \frac{\pi z}{3} + \cdots\right)}{z^2} = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{z} \cdot \frac{1}{3} + \cdots$$

por lo tanto se tiene que

$$Res\left(\frac{\pi \cot \pi z}{z^2}, 0\right) = -\frac{\pi^2}{3}$$

Como la única singularidad de f está en $z = 0$, entonces la fórmula de la adición nos garantiza que

$$\lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=-N}^{-1} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{3}$$

pero como $\frac{1}{(-n)^2} = \frac{1}{n^2}$, se tiene que

$$2 \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \triangleleft$$

Capítulo 3

Aplicaciones y Generalizaciones

En ese último capítulo presentaremos algunos resultados interesantes relacionados con el Problema de Basilea, entre ellos, encontramos algunos que con el tiempo se han consolidado como grandes pasos en la histórica carrera por resolver el problema original.

Es conveniente definir una nueva clase de números, ya que serán usados con frecuencia, a estos números se les conoce como **números de Bernoulli**. En la siguiente sección expondremos varias formas de definirlos.

3.1. Los números de Bernoulli

Los números de Bernoulli (de Jacob), pueden ser definidos de varias maneras, la primera que veremos es la que él mismo formuló. El trabaja en el problema de encontrar las sumas de las potencias k-ésimas de los primeros n números enteros no negativos

$$0^k + 1^k + 2^k + 3^k \cdots (n-1)^k$$

Parte de una tabla como la siguiente en donde el signo $*$ significa que los coeficientes son cero.

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^0 = n$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^1 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^4 = \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 \ * \ -\frac{1}{30}n$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^5 = \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 \ * \ -\frac{1}{12}n^2$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^6 = \frac{1}{7}n^7 - \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 \ * \ -\frac{1}{6}n^3 \ * \ +\frac{1}{42}n$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^7 = \frac{1}{8}n^8 - \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 \ * \ -\frac{7}{24}n^4 \ * \ +\frac{1}{12}n^2$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^8 = \frac{1}{9}n^9 - \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 \ * \ -\frac{7}{15}n^5 \ * \ +\frac{2}{9}n^3 \ * \ -\frac{1}{30}n$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^9 = \frac{1}{10}n^{10} - \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 \ * \ -\frac{7}{10}n^6 \ * \ +\frac{1}{2}n^4 \ * \ -\frac{3}{20}n^2$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^{10} = \frac{1}{11}n^{11} - \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 \ * \ -1 \cdot n^7 \ * \ 1 \cdot n^5 \ * \ -\frac{1}{2}n^3 \ * \ \frac{5}{66}n$$

Bernoulli notó la importancia de considerar los coeficientes de estos polinomios por columnas; por ejemplo en la primera columna, los coeficientes son los reciproccos de los enteros positivos, es decir 1, 1/2, 1/3, ..., la segunda columna son todos iguales a $-1/2$ y en la tercera columna, los coeficientes son

$$\frac{1}{6},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{12},\ \frac{1}{2},\ \frac{7}{12},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6}$$

sin embargo, todos estos números se pueden escribir con un denominador común, digamos así:

$$\frac{2}{12},\ \frac{3}{12},\ \frac{4}{12},\ \frac{5}{12},\ \frac{6}{12},\ \frac{7}{12},\ \frac{8}{12},\ \frac{9}{12},\ \frac{10}{12}$$

Observemos que en la cuarta columna los coeficientes de la tabla son cero.

En la quinta columna los coeficientes son

$$-\frac{1}{30},\ -\frac{1}{12},\ -\frac{1}{6},\ -\frac{7}{24},\ -\frac{7}{15},\ -\frac{7}{10},\ -1$$

y al escribirse con un denominador común, quedan así

$$-\frac{4}{120},\ -\frac{10}{120},\ -\frac{20}{120},\ -\frac{35}{120},\ -\frac{56}{120},\ -\frac{84}{120},\ -\frac{120}{120}$$

en la sexta columna, los coeficientes son todos ceros, pero los coeficientes de la séptima columna ya expresados con denominador común son

$$\frac{6}{252},\ \frac{21}{252},\ \frac{56}{252},\ \frac{126}{252},\ \frac{252}{252}$$

Así, observa que la tabla está relacionada con los coeficientes binomiales, pues los numeradores de los coeficientes de los número en las columnas cuando se escriben con un denominador común lo son, y lo más importante, es que los primeros números de cada columna de derecha a izquierda son claves para expresar la tabla, éstos número son:

$$B_0 = 1,\quad B_1 = -\frac{1}{2},\quad B_2 = \frac{1}{6},\quad B_3 = 0,\quad B_4 = -\frac{1}{30},\quad B_5 = 0,\quad B_6 = \frac{1}{42},\ldots$$

los cuales son los famosos números de Bernoulli.

Polinomios de Bernoulli

Bernoulli también observó en su tabla que las sumas $0^k + 1^k + 2^k + 3^k \cdots (n-1)^k$ dan como resultado un polinomio con variable n de grado $k+1$. Esto lo llevó a plantearse la pregunta de si existían polinomios, digamos, $P_k(x)$ de grado k que cumplieran,

$$0^k + 1^k + 2^k + 3^k \cdots (n-1)^k = \int_0^n P_k(x)\,dx \tag{3.1}$$

y que fueran recuperando los polinomios de la tabla. Resaltemos que el lado derecho de (3.1) da un polinomio con variable n de grado $k+1$.

Por ejemplo, para $k = 0$, se busca un polinomio $P_0(x)$ de grado cero, es decir, una constante tal que $n = \int_0^n P_0(x)\,dx$, y la única opción es $P_0(x) = 1$.

Como Bernoulli quería que $0^k + 1^k + 2^k + 3^k \cdots n^k = \int_0^{n+1} P_k(x)\,dx$ y $0^k + 1^k + 2^k + 3^k \cdots (n-1)^k = \int_0^n P_k(x)\,dx$, entonces por las propiedades de la integral se debe cumplir que $n^k = \int_n^{n+1} P_k(x)\,dx$ y tomando $n = 0$, los polinomios P_k deben satisfacer que $0 = \int_0^1 P_k(x)\,dx$.

Así, para determinar $P_1(x)$, sabemos que es un polinomio de grado 1, $P_1(x) = mx + b$ y que cumple que

$$0 = \int_0^1 P_1(x)\,dx = \int_0^1 (mx+b)dx = \frac{m}{2} + b$$

Luego, $b = -\frac{m}{2}$ y debe satisfacer también que

$$0^1 + 1^1 + 2^1 + 3^1 \cdots + (n-1)^1 = \int_0^n P_1(x)\,dx$$

pero haciendo cuentas, sustituyendo y resolviendo la integral se llega a:

$$0^1 + \cdots + (n-1)^1 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \quad \text{y} \quad \int_0^1 \left(mx - \frac{m}{2}\right) dx = m\left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right)$$

por lo que $m = 1$, y así, $P_1(x) = x - \frac{1}{2}$.

Ahora, para encontrar $P_2(x)$, sabemos primero que es de grado 2 , luego de la forma $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, se tiene que

$$0 = \int_0^1 P_2(x)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$$

luego se debe cumplir que $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$ y como

$$n^2 = \int_n^{n+1} P_2(x)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_n^{n+1} = an^2 + (a+b)n$$

entonces también cumple que $a = 1$ y $a + b = 0$, por lo que $P_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$.

Es claro que $P_2'(x) = 2x - 1 = 2P_1(x)$. Así, se planteó la cuestión de encontrar polinomios de grado $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ que cumplieran que

$$P_0(x) = 1$$

$$\int_0^1 P_k(x)dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$
$$\int_n^{n+1} P_k(x)dx = n^k, \quad k = 1, 2, \dots$$
$$P'_{k+1}(x)dx = (k+1)P_k(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Pero resulta que existe una única familia de polinomios que cumplen las condiciones anteriores, la familia es la formada por los Polinomios de Bernoulli, que los denotamos por $B_k(x),\ k = 1, 2, \dots$, y se van generando de acuerdo a la siguiente recursión:

$B_0(x) = 1.$

$B_1(x) = x - \frac{1}{2} = x + B_1$, con $B_1 = B_1(0) = -1/2.$

$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} = 2!\left(\frac{B_0}{0!}\cdot\frac{x^2}{2!} + \frac{B_1}{1!}\cdot\frac{x}{1!} + \frac{B_2}{2!}\cdot\frac{x^0}{0!}\right)$, con $B_2 = B_2(0) = 1/6.$

y en general, cumplen que

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}, \quad \text{con } B_k = B_k(0) \tag{3.2}$$

Los $B_k = B_k(0)$ son los números de Bernoulli.

Haremos la prueba por inducción. La base de inducción se tiene pués $B_0(x)$ y $B_1(x)$ coinciden con los polinomios $P_0(x)$ y $P_1(x)$ ya encontrados. Supongamos que $B_n(x)$ se ha determinado. Entonces, una de las condiciones dice que $\frac{B_{n+1}(x)}{n+1}$ es primitiva de $B_n(x)$. Así:

$$\frac{B_{n+1}(x)}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \frac{x^{n+1-k}}{n+1-k} + C$$

donde C en una constante que se tiene que determinar. Sin embargo de la última igualdad tenemos que

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)n!}{(n+1-k)(n-k)!k!} B_k x^{n+1-k} + C(n+1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k x^{n+1-k} + C(n+1) \end{aligned}$$

pero entonces $C(n+1) = B_{n+1}(0) = B_{n+1}$, así

$$B_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k x^{n+1-k}.$$

y ahora, $B_{n+1}(x)$ se ha encontrado implícitamente.

Notemos ahora lo siguiente, $0 = \int_0^1 B_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{B'_{n+1}(x)}{n+1}\,dx = \frac{1}{n+1}(B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0))$, entonces tenemos que $B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0) = B_{n+1}$. Y si hacemos $x = 1$ en la ecuación (3.2) se tiene que

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

que junto con $B_0 = 1$, resulta una ecuación recurrente para encontrar los números de Bernoulli.

Esta es una segunda definición formal de los números de Bernoulli, la primera es vía los polinomios de Bernoulli cuando definimos $B_n := B_n(0)$. Luego la recurrencia:

$$B_0 = 1 \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

caracteriza a los números de Bernoulli.

No es difícil probar por inducción que los polinomios de Bernoulli cumplen también que $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots,$ ya que basta considerar a $h(x) = B_n(1-x) - (-1)^n B_n(x)$ y las propiedades mencionadas anteriormente para tener que

$$\begin{aligned} h'(x) &= -B'_n(1-x) - (-1)^n B'_n(x) \\ &= -n(B_{n-1}(1-x) - (-1)^{n-1} B_{n-1}(x)) = 0 \end{aligned}$$

Así, $h(x)$ es constante y como se tiene que

$$\int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 B_n(1-x)\,dx - (-1)^n \int_0^1 B_n(x)\,dx = 0$$

necesariamente $h(x) \equiv 0$. Pero si $n = 2m+1$ es un número impar, entonces $B_{2m+1}(1-x) = -B_{2m+1}(x)$ y así $B_{2m+1} = 0$.

Finalmente probaremos dos afirmaciones más.

Proposición. Para todo número real x, $B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)x^n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

Demostración. Si $n = 0$, $B_1(x+1) - B_1(x) = (x+1-1/2) - (x-1/2) = 1 = x^0$.

Continuamos usando inducción matemática, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{B_{n+1}(x+1)-B_{n+1}(x)\} &= (n+1)B_n(x+1)-(n+1)B_n(x)\\ &= (n+1)(nx^{n-1}) = \frac{d}{dx}((n+1)x^n)\end{aligned}$$

Luego, $B_{n+1}(x+1)-B_{n+1}(x)-(n+1)x^n$ es constante, pero al evaluar en $x=0$, la constante es cero y por tanto el resultado se sigue. $\triangleleft$

Corolario. Para cada $k = 1, 2, 3, \ldots$, y $n = 1, 2, 3, \ldots$ se tiene que

$$0^k + 1^k + 2^k + 3^k \cdots (n-1)^k = \int_0^1 B_k(x)\,dx = \frac{1}{k+1}\{B_{k+1}(n) - B_{k+1}(0)\}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}0^k + 1^k + \cdots + (n-1)^k &= \int_0^1 B_k(x)\,dx + \int_1^2 B_k(x)\,dx + \cdots + \int_{n-1}^n B_k(x)\,dx\\ &= \int_0^n B_k(x)\,dx = \int_0^n \frac{B'_{k+1}(x)}{k+1}\,dx\\ &= \frac{1}{k+1}\{B_{k+1}(n) - B_{k+1}(0)\} \quad \triangleleft\end{aligned}$$

Los números de Bernoulli vía la exponencial

Una tercera forma para definir a los números de Bernoulli es a través de los números B_n que satisfacen la siguiente igualdad:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

esta ecuación es equivalente a

$$z = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n\right)(e^z - 1) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)$$

pero el producto de dos series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ se define como la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ donde $c_n = \sum_{n=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Así, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ donde $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!}$

Aquí hemos hecho $a_n = \frac{B_n}{n!}$ y $b_n = 1/n!$ para $n \geq 1$ y $b_0 = 0$ por lo que la suma solamente llega hasta $n-1$ y $c_0 = 0$.

Pero los coeficientes de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ deben se iguales también a $c_n = 0$ para $n \neq 1$ y $c_1 = 1$

Ahora, $1 = c_1 = \frac{B_0}{0!} \cdot \frac{1}{1!}$ nos asegura que $B_0 = 1$.

También, el que $0 = c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!}$ con $n > 1$ nos asegura que después de multiplicar las igualdades por $n!$ que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$$

y ya vimos que la recurrencia

$$B_0 = 1 \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

define los números de Bernoulli, con lo cual, hemos llegado a la tercera definición de estos números.

3.2. Evaluando $\zeta(2k)$

Tomemos la igualdad (ver M del Apéndice) como en el capitulo 1,

$$\operatorname{sen} z = z\left[1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right]\left[1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right]\left[1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right]\left[1 - \frac{z^2}{16\pi^2}\right]\cdots = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Aplicando el logaritmo de ambos lados de la igualdad y usando sus propiedades, la anterior igualdad es equivalente a:

$$\log \operatorname{sen} z = \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

derivando en ambos lados se tiene:

$$\cot z = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{n^2\pi^2}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)^{-1} \tag{3.3}$$

Hay que destacar que otra forma de llegar a (3.3) es vía Herglotz (ver K del Apéndice). Pero como

$$\begin{aligned} \frac{2z}{n^2\pi^2}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)^{-1} &= \frac{2z}{n^2\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)^k \\ &= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{n^{2k+2}\pi^{2k+2}} = \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k-1}}{n^{2k}\pi^{2k}} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Si sustituimos (3.4) en (3.3) se tiene:

$$\cot z = \frac{1}{z} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k-1}}{n^{2k}\pi^{2k}} = \frac{1}{z} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)z^{2k-1}}{\pi^{2k}}$$

y entonces:

$$z\cot z = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)z^{2k}}{\pi^{2k}} \tag{3.5}$$

La ecuación (3.5) es nada menos que la serie de Maclaurin para $z\cot z$.

Ahora compararemos (3.5) con un segundo desarrollo de $z\cot z$. Recordemos que $e^{iz} = \cos z + i\operatorname{sen} z$ y que

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

por lo que

$$z\cot z = iz\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = iz\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}$$

si ahora sustituimos $t = 2iz$, tenemos que

$$z\cot z = \frac{t}{2}\cdot\frac{e^t + 1}{e^t - 1} = \frac{t}{2} + \frac{t}{e^t - 1}$$

Ahora busquemos un desarrollo para $\frac{t}{e^t-1}$. Pero para esta función se cumple (ver sección 3.1) que

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n$$

donde B_n son los número de Bernoulli.

Luego

$$z\cot z = \frac{t}{2} + \frac{t}{e^t - 1} = \frac{2iz}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(2iz)^n$$

Pero $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, y $B_3 = B_5 = \ldots = 0$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} z\cot z &= iz + 1 - \frac{1}{2}(2iz) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(2iz)^{2k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k} z^{2k}}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k} z^{2k}}{(2k)!} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ahora, comparando los coeficientes entre (3.5) y (3.6) se concluye que

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!} \tag{3.7}$$

Entonces, finalmente hemos encontrado una fórmula general para calcular la función zeta de Riemann para todos los enteros pares, es decir, hemos encontrado el valor exacto de todas las sumas de los recíprocos elevados a una potencia par. Desde luego, este es un gran avance en el estudio del Problema de Basilea, de un solo desarrollo conocemos el valor exacto de una infinidad de sumas de recíprocos, veamos unos ejemplos:

Para $k = 1$ en (3.7):

$$\zeta(2) = \pi^2 B_2 = \pi^2 \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Para $k = 2$ en (3.7):

$$\zeta(4) = -\frac{\pi^4 B_4}{3} = -\frac{\pi^4}{3}\left(-\frac{1}{30}\right) = \frac{\pi^4}{90}$$

Para $k = 3$ en (3.7):

$$\zeta(6) = \frac{2\pi^6 B_6}{45} = \frac{2\pi^6}{45}\left(\frac{1}{42}\right) = \frac{\pi^6}{945}$$

y así sucesivamente.

Después de este gran paso en la solución al problema de Basilea, faltaría la solución para los números impares, pero en esta dirección son pocos lo avances que se tienen actualmente, por lo que hay muchas series a las que hay que dar el valor exacto de su suma.

3.3. Euler, las series y los números primos

Euler como todo matemático apasionado tenía un gran gusto por la Teoría de los Números, en particular le interesó conocer la familia completa de los números primos. En su trabajo de 1737 el cual se titula **Varie observationes circa series infinitas**, establecía una relación extraña pero sin duda maravillosa entre la serie armónica y los números primos.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdots}$$

El lado derecho de la anterior igualdad presenta en su numerador al producto de todos los números primos en orden creciente y su denominador es el producto de los números que resultan de restar a cada primo el número 1. El argumento de Euler para la identidad era mas o menos así:

Denotemos por H a la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, entonces se tiene que

$$\frac{H}{2} = H - \frac{H}{2} = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right] - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots\right] = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

en esta última expresión, todo denominador es impar.

Así, encontró que

$$\frac{1}{3}\left(\frac{H}{2}\right) = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\right] = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \cdots$$

Euler restó y llegó a lo siguiente

$$\frac{H}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{H}{2}\right) = \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\right] - \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \cdots\right]$$

es decir

$$\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} H = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots$$

en la parte derecha de esta igualdad no hay sumandos con denominador divisible entre los primeros dos números primos que conocemos, es decir 2 y 3.

Restando nuevamente se tiene que

$$\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}H - \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}H\right] = \left[1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots\right] - \left[\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{35}+\cdots\right]$$

es decir,

$$\frac{1\cdot 2\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 5}H = 1+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\cdots$$

en la parte derecha de esta igualdad no hay sumandos con denominador divisible entre los primeros tres números primos que conocemos, es decir 2, 3 y 5.

Euler continuó este procedimiento hasta terminar con todos los números primos, y llegó a

$$\frac{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 10\cdot 12\cdot\cdots}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot\cdots}H = 1$$

por lo que obtuvo

$$H = \frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot\cdots}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot\cdots}$$

Este procedimiento es matemáticamente incorrecto, pero sin duda alguna es muy admirable por la fascinante conexión entre las series y los números primos.

Para rescatar algo de provecho de este procedimiento, podemos trabajar con infinitos un poco más manejables, como por ejemplo, pensar en primera instancia en la suma de todos los inversos de aquellos números positivos cuyos únicos factores sean 2 y 3, esto es,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n 3^m}+\cdots$$

la suma se puede construir al hacer el producto de las dos series geométricas $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ y $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ y de hecho, hasta podemos conocer su valor, pues

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right) \\ &= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2} \end{aligned}$$

De igual manera, la suma de los inversos de números cuyos únicos factores primos son 2, 3 y 5 es:

$$
\begin{aligned}
& 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\cdots \\
= & \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right) \\
= & \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\right)=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

Se podría continuar este procedimiento recorriendo todos los primos, y como todos los enteros positivos se pueden descomponer de manera única como producto de potencias de primos, nos llevaría a que

$$
\begin{aligned}
& 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}\cdots \\
= & \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)\cdots\cdot \\
= & \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\right)\cdots\cdot
\end{aligned}
$$

es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)$$

donde $\mathbb{P}$ es el conjunto de los números primos.

Pero sabemos que la serie es divergente (ver L del Apéndice) y el producto también lo es, por lo que la anterior igualdad no es válida, sin embargo abre caminos para probar otros resultados.

Kronecker (1826-1891) en el año de 1876 probó que para $s>1$ se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right)$$

la prueba de este sorprendente resultado se verá con más detalle en la siguiente sección, por ahora seguiremos los pasos de Euler. La identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)$$

le permitía concluir que existía un número infinito de primos.

Su razonamiento era el siguiente: si existiera un número finito de primos, entonces $\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)$ es finito, pero esto contradice el hecho de que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es infinito.

En el mismo año, Euler se preguntó sobre el valor de la serie $\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p}$, y la forma en que lo encotró fué la siguiente.

Primero parte de su identidad $H=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)$ y toma logaritmos en ambos lados, es decir,

$$\log H=-\log\left(1-\frac{1}{2}\right)-\log\left(1-\frac{1}{3}\right)-\log\left(1-\frac{1}{5}\right)-\cdots$$

pero como $-\log(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$, llega a que

$$\begin{aligned}\log H &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots\\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots\\ &= \frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4+\cdots\\ &\vdots\end{aligned}$$

Euler sumó las columnas y obtuvo que

$$\log H=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots\right)+\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots\right)+\cdots$$

renombrando tenemos que

$$\log H=A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+\cdots$$

donde $A=\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p},\quad B=\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^2},\quad C=\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^3},\quad\cdots$

Para facilitar el entendimiento de los siguientes argumentos, haremos tres observaciones importantes.

Observación 1. Para $k \geq 2$, se cumple que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k-1}$.

En efecto, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{k-1}$.

Observación 2. $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^k} \leq \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^2} dx \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1$.

Observación 3. $\frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \cdots$ es un número finito.

En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \cdots &= \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{3}\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^3} + \frac{1}{4}\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^4} + \cdots \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \cdots \\
&\leq \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots = 1
\end{aligned}$$

Continuemos con el razonamiento de Euler para probar que $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ diverge. Como

$$\log H = A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \cdots$$

se tiene que,

$$H = \exp\left(A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \cdots\right) = \exp(A)\exp\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \cdots\right)$$

Como H es infinitamente grande, entonces también $\exp(A)\exp\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \cdots\right)$ debe serlo, pero $\exp\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \cdots\right)$ es finito, entonces necesariamente $\exp(A)$ es infinito, es decir $A = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ es infinito. ◁

Dos demostraciones formales y sencillas de la divergencia de la serie $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ son dadas en la parte L del Apéndice.

3.4. Evaluando $\zeta(s)$

Teorema. Si $s > 1$, entonces

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right) \tag{3.8}$$

donde el producto es sobre todos los primos p.

Demostración. El método consiste en considerar el producto $P_k(s)$ de los factores correspondientes a los primeros k primos y probar que $P_k(s) \to \zeta(s)$ cuando $k \to \infty$. Entonces, sean $p_1, p_2, \dots p_k$ los primeros k primos. Argumentando como en la sección anterior, observamos que si $s > 1$ (todas estas series geométricas convergen), se tiene que,

$$P_k(s) = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{1-p_i^{-s}}\right) = \prod_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_i^s} + \frac{1}{p_i^{2s}} + \frac{1}{p_i^{3s}} + \dots\right)$$

Si desarrollamos este producto, entonces el término general en la suma resultante es $1/n^s$, dónde $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$ con $e_i \geq 0$. El Teorema Fundamental de la Aritmética asegura que cada n de este tipo aporta solamente un término a $P_k(s)$, así

$$P_k(s) = \sum_{n\in A_k} \frac{1}{n^s}$$

donde $A_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k} \text{ con } e_i \geq 0\}$ es el conjunto de enteros n cuyos factores primos están entre $p_1, p_2, \dots, p_k$. Cada $n \notin A_k$ es divisible por algún primo $p > p_k$ y también cumple que $n > p_k$.

De lo anterior se deduce que si $s > 1$, entonces:

$$|P_k(s) - \zeta(s)| = \sum_{n\notin A_k} \frac{1}{n^s} \leq \sum_{n>p_k} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \sum_{n\leq p_k} \frac{1}{n^s}$$

Como $s > 1$, entonces las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ convergen a $\zeta(s)$, en particular

$$\sum_{n\leq p_k} \frac{1}{n^s} \to \zeta(s)$$

cuando $k \to \infty$. De hecho, la convergencia de $P_k(s)$ a $\zeta(s)$ es uniforme en todo intervalo de la forma $[a, \infty)$ con $a > 1$ ya que para $a > 1$ fijo, se cumple que $\sum_{n>p_k} \frac{1}{n^s} \leq \sum_{n>p_k} \frac{1}{n^a}$. Así, $|P_k(s) - \zeta(s)| \to 0$ cuando $k \to \infty$, y por lo tanto, $P_k(s) \to \zeta(s)$ cuando $k \to \infty$, es decir, se cumple (3.8) y esto es lo que se quería demostrar. $\lhd$

3.5. Teoría de Números y Probabilidad

Una aplicación del Problema de Basilea a la Teoría de Números es el siguiente problema que planteó E. Cesáro en 1881:

¿Cual es la probabilidad de que dos enteros positivos tomados al azar, cumplan que su máximo común divisor sea 1?.

Antes de ver la solución a este problema, haremos algunas observaciones y notaciones para facilitar la escritura de la prueba.

Para enteros c y n, la probabilidad de que un entero x sea congruente a c módulo n es $1/n$ y lo escribiremos de la siguiente manera:

$$Pr\{x \equiv c\,(mod\ n)\} = 1/n$$

La razón es que hay n clases de residuos módulo n y hay la misma probabilidad de que un entero esté en una de ellas.

El teorema Chino del Residuo[1] asegura que si $(m, n) = 1$, entonces el sistema de congruencias $x \equiv c\,(mod\ m)$, $x \equiv d\,(mod\ n)$ tiene solución. Además, si x_0 es una solución, entonces cualquier otra solución del sistema x es de la forma $x = x_0 + kmn$ para algún entero k. Y esta solución es única módulo mn.

Ahora, en términos de probabilidad, lo anterior nos dice que:

$$Pr\{x \equiv c\,(mod\ m) \quad \text{y} \quad x \equiv d\,(mod\ n)\} = \frac{1}{mn}$$

y también que:

$$Pr\{x \equiv c\,(mod\ m)\} \cdot Pr\{x \equiv d\,(mod\ n)\} = \frac{1}{mn}$$

Así, el par de congruencias son eventos independientes, es decir, la probabilidad de que ambas congruencias ocurran es igual al producto de las probabilidades de las congruencias por separado.

Ahora probaremos el siguiente teorema de tres formas diferentes.

[1] ver [6]

Teorema (de Cesáro). La probabilidad de que dos enteros positivos x, y sean primos relativos es $6/\pi^2$.

Llamemos $P = Pr\{(x, y) = 1\}$

Demostración 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$(x, y) = n \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 0 \ (mod\ n), \\ y \equiv 0 \ (mod\ n) \quad \text{y} \\ \left(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}\right) = 1 \end{cases}$$

Pero $Pr\{x \equiv 0 \ (mod\ n)\} = Pr\{y \equiv 0 \ (mod\ n)\} = 1/n$ y también sabemos que $Pr\{x \equiv 0 \ (mod\ n)$ y $y \equiv 0 \ (mod\ n)\} = Pr\{x \equiv 0 \ (mod\ n)\} \cdot Pr\{y \equiv 0 \ (mod\ n)\} = 1/n^2$.

Cuando ambas condiciones se han cumplido, podemos tomar a x/n, y/n como dos enteros elegidos al azar que serán primos relativos con probabilidad condicional P. Así, las tres condiciones se satisfacen simultáneamente con probabilidad P/n^2, luego

$$Pr((x, y) = n) = \frac{P}{n^2}$$

Ahora, como para cada x, y se tiene que (x, y) solo tiene un único valor $n \in \mathbb{N}$, la serie de todas estas probabilidades $Pr\{(x, y) = n\}$ debe ser iguala a 1, es decir:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} Pr((x, y) = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P}{n^2} = P \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = P\zeta(2)$$

y finalmente:

$$P = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}. \quad \triangleleft$$

Demostración 2. Notemos primero que

$$(x, y) = 1 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x \not\equiv 0 \ (mod\ p) \\ \text{ó} \\ y \not\equiv 0 \ (mod\ p) \end{cases} \qquad \text{para todo primo } p$$

Pero para cada primo p, las probabilidades $Pr\{x \equiv 0 \ (mod\ p)\}$ y $Pr\{y \equiv 0 \ (mod\ p)\}$ son cada una iguales a $1/p$. Por lo que $Pr\{x \equiv 0 \ (mod\ p)$ y $y \equiv 0 \ (mod\ p)\} = 1/p^2$. Entonces, $Pr\{x \not\equiv 0 \ (mod\ p)$ o $y \not\equiv 0 \ (mod\ p)\} = 1 - p^{-2}$.

Ahora, como las congruencias módulo dos primos distintos son independientes, podemos multiplicar todas estas probabilidades para todo primo p , entonces,

$$P = \prod_{p\in\mathbb{P}}(1 - p^{-2}) \quad \triangleleft$$

Demostración 3. Se partirá ahora de que

$$(x, y) > 1 \iff \begin{cases} x \equiv 0 \ (mod\ p) \\ \text{y} \\ y \equiv 0 \ (mod\ p) \end{cases} \qquad \text{para algún primo } p$$

Observemos que el evento $(x, y) > 1$ tiene probabilidad $1 - p$, y esta debe ser la probabilidad de que $x \equiv 0 \equiv y\,(mod\ p)$ para al menos un primo p.

Ahora, vamos a encontrar otra expresión para ésta probabilidad.

Para cada primo p el evento $x \equiv 0 \equiv y\ (mod\ p)$ tiene probabilidad $1/p^2$, la suma de todas las probabilidades para cada p da una contribución a $1-P$ de

$$S_1 = \sum_p \frac{1}{p}$$

Sin embargo, no es exactamente $1 - P$, ya que debemos de restar la suma doble

$$S_2 = \sum_{p<q} \frac{1}{(pq)^2}$$

la cual compensa el doble conteo en S_1 del caso en que tanto x como y sean divisibles por dos primos $p < q$.

Pero ahora se debe sumar la suma triple

$$S_3 = \sum_{p<q<r} \frac{1}{(pqr)^2}$$

Para corregir el excedente en S_2 cuando los enteros x, y sean divisibles entre tres primos. Y así sucesivamente. Ahora se pueda afirmar que

$$1 - P = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots$$

y en general, $S_k = \sum(p_1 \cdots p_k)^{-2}$ aquí, la suma varía sobre todas los arreglos de primos distintos tales que $p_1 < \cdots < p_k$. Ahora, si definimos $S_0 = 1$, podemos reescribir la probabilidad P de la siguiente forma

$$P = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k S_k$$

En ésta útima expresión, todo entero $n = p_1 \cdots p_k$ libre de cuadrados (es decir, que el número no es dividido por ningún número que sea un cuadrado perfecto) contribuye con el sumando $(-1)^k/n^2 = \mu(n)/n^2$ donde $\mu(n)$ es la función de Möbius que se define de la siguiente manera:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } m^2 \text{ divide a } n \text{ para algún } m > 1 \\ (-1)^r & \text{si } n = p_1 \cdots p_r,\ p_i \text{ primos distintos} \end{cases}$$

Por tanto, finalmente se llega a:

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2}.$$

Así que por las tres pruebas anteriores, se encontró la siguiente serie de igualdades:

$$P = \frac{1}{\zeta(2)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2}.$$

en donde el valor común es $6/\pi^2$. $\triangleleft$

Comentario. Las ideas anteriores se pueden extender para cualquier entero $s \geq 2$, es decir, para mostrar que la probabilidad $P(s)$ de que s enteros que se toman al azar tengan como máximo común divisor al 1 es igual a:

$$\frac{1}{\zeta(s)}\ , \qquad \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})\ , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

3.6. Otros ejemplos

En esta sección desarrollaremos tres resultados que involucran la función $\zeta(s)$, incluso en uno de ellos usaremos el valor de la función zeta evaluada en un punto, es decir $\zeta(3)$, recientemente se probó que su valor es un número irracional pero todavía no conocemos su valor exacto.

Ejemplo 1. Para $n = 1, 2, 3, \ldots,$ sea $H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots 1/n,$ encontrar el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n(n+1)}$$

Solución. Para un entero $N > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{H_n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{H_n}{n} - \frac{H_n}{n+1} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{H_n}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{H_{n-1}}{n} \\
&= H_1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{H_n - H_{n-1}}{n} - \frac{H_N}{N+1} \\
&= 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} - \frac{H_N}{N+1} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} - \frac{H_N}{N+1}
\end{aligned}$$

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{H_N}{N+1} = 0$ entonces se tendría que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Pero se sabe que si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$ (ver [3] pág 80, ejercicio 14). Luego, como sabemos que $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0,$ entonces se tiene que $\lim_{n\to\infty} H_n/n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/2+\cdots+1/n}{n} = 0$ y finalmente se encuentra que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 0 \cdot 1 = 0\,,$$

así, llegamos a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \triangleleft$$

Ejemplo 2. Encontrar el valor de

$$\sum_{\substack{m,n=1\\(m,n)=1}}^{\infty} \frac{1}{mn(m+n)}$$

.

Solución.

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn(m+n)} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn}\left(\int_0^1 x^{m+n-1}dx\right)\\
&= \int_0^1 \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)\frac{dx}{x}\\
&= \int_0^1 \frac{\log^2(1-x)}{x}dx\\
&= \int_0^{\infty} \frac{u^2e^{-u}}{1-e^{-u}}du \qquad (3.9)\\
&= \int_0^{\infty} u^2\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nu}\right)du\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} u^2e^{-nu}du\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = 2\zeta(3)
\end{aligned}$$

En (3.9) hicimos la sustitución de $x = 1 - e^{-u}$.

Resumiendo, se encontró que:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn(m+n)} = 2\zeta(3) \qquad (3.10)$$

Por otro lado se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn(m+n)} &= \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\substack{m,n=1 \\ (m,n)=d}}^{\infty} \frac{1}{mn(m+n)} \\
&= \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\substack{q,r=1 \\ (q,r)=1}}^{\infty} \frac{1}{d^3 qr(q+r)} \\
&= \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^3} \sum_{\substack{q,r=1 \\ (q,r)=1}}^{\infty} \frac{1}{qr(q+r)} \\
&= \zeta(3) \sum_{\substack{m,n=1 \\ (m,n)=1}}^{\infty} \frac{1}{mn(m+n)}
\end{aligned}$$

Luego, se encontró que:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn(m+n)} = \zeta(3) \sum_{\substack{m,n=1 \\ (m,n)=1}}^{\infty} \frac{1}{mn(m+n)} \tag{3.11}$$

sustituyendo (3.10) en (3.11) se obtiene finalmente el sorprendente resultado:

$$\sum_{\substack{m,n=1 \\ (m,n)=1}}^{\infty} \frac{1}{mn(m+n)} = 2 \quad \triangleleft$$

Ejemplo 3.

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \right)^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Primero notemos que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n}{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

y de manera similar se tiene

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

por lo que bastará probar lo siguiente:

$$\lim_{N\to\infty}\left[\left(\sum_{n=-N}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)^2-\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{(2n+1)^2}\right]=0$$

entonces, sean

$$a_N=\sum_{n=-N}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}\quad \text{y}\quad b_N=\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

así

$$\begin{aligned}
a_N^2-b_N &= \sum_{-N}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{-N}^{N}\frac{(-1)^m}{2m+1}-\sum_{-N}^{N}\frac{1}{(2n+1)^2}\\
&= \sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N}\frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)(2m+1)}-\sum_{-N}^{N}\frac{1}{(2n+1)^2}\\
&= \sum_{\substack{n,m=-N\\ n\neq m}}^{N}\frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)(2m+1)}\\
&= \sum_{\substack{n,m=-N\\ n\neq m}}^{N}\frac{(-1)^{n+m}}{2(m-n)}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2m+1}\right)\\
&= \sum_{\substack{n,m=-N\\ n\neq m}}^{N}\frac{(-1)^{m+n}}{(m-n)}\cdot\frac{1}{2n+1}\\
&= \sum_{n=-N}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{\substack{m=-N\\ m\neq n}}^{N}\frac{(-1)^m}{(m-n)}
\end{aligned}$$

sea

$$C_{n,N}=\sum_{\substack{m=-N\\ m\neq n}}^{N}\frac{(-1)^m}{(m-n)}=(-1)^{n+1}\sum_{\substack{m=-N\\ m\neq n}}^{N}\frac{(-1)^{m-n-1}}{(m-n)}$$

Observemos que $C_{-n,N}=C_{n,N}$ y también que $C_{0,N}=0$. Ahora, si $n>0$, entonces

$$C_{n,N}=(-1)^{n+1}\sum_{j=N-n+1}^{N+n}\frac{(-1)^j}{j}$$

pero $|C_{n,N}| \leq 1/(N-n+1)$ ya que es la magnitud del primer sumando en la suma alternante anterior. Así

$$\begin{aligned}
|a_M^2 - b_N| &\leq \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{(2n-1)(N-n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(N-n+1)}\right) \\
&= \frac{N}{2N+1}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{(2n-1)} + \frac{1}{(N-n+1)}\right)\right] \\
&+ \frac{N}{2N+3}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{(2n-1)} + \frac{1}{(N-n+1)}\right)\right]
\end{aligned}$$

pero sabemos que si $a_n \to a$ entonces $\frac{a_1+a_2+\cdots a_N}{N} \to a$, así, como

$$a_n = \left(\frac{2}{(2n-1)} + \frac{1}{(N-n+1)}\right) \to 0$$

se tiene que

$$\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{(2n-1)} + \frac{1}{(N-n+1)}\right)\right] \to 0$$

entonces se cumple que

$$\frac{N}{2N+1}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{(2n-1)} + \frac{1}{(N-n+1)}\right)\right] \to 1 \cdot 0 = 0$$

y también

$$\frac{N}{2N+3}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{(2n-1)} + \frac{1}{(N-n+1)}\right)\right] \to 1 \cdot 0 = 0$$

y así $a_N^2 - b_N \to 0$ cuando $N \to \infty$.

Un resultado que se desprende de lo anterior es el siguiente:

Corolario. (Prueba 18)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Demostración. Tenemos que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

aquí hemos usado la fórmula de Gregory, la cual dice que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \pi/4$.

además se tiene

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

por lo tanto

$$2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}.$$

Apéndice

A) Algunas series.

Para $|x| < 1$ se tiene que $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. Por lo que derivando dentro del intervalo de convergencia término a término obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{y entonces} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Si derivamos de nuevo la última serie, se tiene lo siguiente

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{(1-x)+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

luego se tiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \tag{1}$$

Si derivamos otra vez, entonces resulta que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^{k-1} &= \frac{(1-x)^3(1+2x) + 3x(1+x)(1-x)^2}{(1-x)^6} \\ &= \frac{(1-x)(1+2x) + 3x(1+x)}{(1-x)^4} = \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4} \end{aligned}$$

luego se sigue:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k = \frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4} \tag{2}$$

Si en (1) hacemos $x = 1/2$, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}} = 6$$

Si también en (2) hacemos $x = 1/2$, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{2}+\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{\frac{13}{8}}{\frac{1}{16}} = 26$$

B) Divergencia de la serie armónica.

Existen varias pruebas famosas de divergencia de la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. A Oresme (1350) se le debe la siguiente prueba: los términos de la serie los agrupa en grupos de $1, 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ términos, digamos así:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{32}\right)+\ldots$$

Y como cada grupo a partir del segundo tiene una suma superior a $1/2$, la serie armónica es superior a la suma de una infinidad de términos iguales a $1/2$, es decir, es divergente.

Otra prueba de la divergencia se debe a Johann Bernoulli, veamos como lo hacía:

El considera las siguientes series:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots \\
B &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots = \frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}\ldots \\
C &= \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\ldots \\
D &= \qquad \frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\ldots \\
E &= \qquad\qquad \frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\ldots \\
F &= \qquad\qquad\qquad \frac{1}{20}+\frac{1}{30}\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

y luego concluía que $C + D + E + \ldots = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right) + \ldots = \frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}\ldots = B = A$

Por otro lado sabía que

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\dots \\ &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}\dots \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)\dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

y entonces también conocía que,

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\dots = 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \\ E &= D-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3} \\ F &= E-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Luego, $A = C+D+E+F+\dots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\dots = 1+A$ por lo tanto, $A=1+A$, pero esto no es válido para números, por lo que A no existe.

Otro argumento para probar la divergencia de la serie armónica lo dio Jacob Bernoulli en 1686, procedió así:

Si $a<1$, entonces $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\dots+\frac{1}{a^2}>1$. Esto se debe a que:

$$\frac{1}{a+1}+\cdots+\frac{1}{a^2}>\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{a^2}=(a^2-a)\frac{1}{a^2}=1-\frac{1}{a}$$

Así,

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots &= 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{25}\right)+\left(\frac{1}{26}+\cdots+\frac{1}{26^2}\right)+\dots \\ &> 1+1+1+\dots \quad \text{esto asegura que la serie armónica diverge.} \end{aligned}$$

C) Criterios de convergencia para series.

Criterio de comparación ([?], pag 88). Si a_n y b_n son dos sucesiones de números reales tales que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo entero $n \geq 1$, entonces

1. $\sum a_n$ es convergente si $\sum b_n$ lo es.

2. $\sum b_n$ es divergente si $\sum a_n$ lo es.

3. Si $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq 1$, entonces $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergenten o divergen al mismo tiempo.

Criterio de la integral ([?], pag 112). Si f es una función monótona decreciente en $[1, \infty)$, entonces $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ converge.

D) El desarrollo en serie del logaritmo

Como para $|x| < 1$ se tiene que $\frac{d}{dx}\log(1-x) = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^\infty x^n$, entonces se cumple:

$$\begin{aligned}
\log(1-t) &= \int_0^t \frac{d}{dx}\log(1-x)dx = -\int_0^t \left(\sum_{n=0}^\infty x^n\right) dx \\
&= -\sum_{n=0}^\infty \int_0^t x^n dx = -\sum_{n=0}^\infty \frac{t^{n+1}}{n+1} \\
&= -\sum_{n=1}^\infty \frac{t^n}{n} \quad \text{para } |t| < 1
\end{aligned}$$

Así,

$$\log(1-t) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{t^n}{n} \quad \text{para } |t| < 1 \tag{3}$$

Si hacemos el cambio de variable $x = -t$ en (3), se tiene también que

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \text{para } |x| < 1 \tag{4}$$

y si hacemos $y = 1 + x$ en (4) entonces

$$\log(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(y-1)^n \quad \text{para } |y-1| < 1 \tag{5}$$

Notemos que las series también son válidas en los números complejos, si en cada una de (3), (4) y (5), las variables t, x y y se consideran como variables complejas. En tal caso, $|t|$, $|x|$, $|y|$ denotan el módulo de los números complejos correspondiente.

Como una observación adicional podemos mencionar la siguiente proposición:

Proposición. Si el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, con z un número complejo es 1, $c_0 \geq c_1 \geq \ldots \geq c_n \geq \cdots$ y además cumpla que $lim_{n\to\infty} c_n = 0$, entonces la serie converge en todo punto de la circunferencia $|z| = 1$ excepto quizá en $z = 1$.

La prueba de esta proposición queda fuera de los objetivos de este trabajo, pero se puede encontrar en [3] pág. 71.

Entonces, usando esta proposición, las series (3), (4) y (5) son convergentes en la circunferencia unitaria salvo para los valores $t = 1, x = -1$ y $y = 0$, respectivamente.

E) Verificando que $\lim_{x\to 0^+} \log x \log(1-x) = 0$.

Lema. $\lim_{x\to 0^+} \log x \log(1-x) = 0$ y $\lim_{x\to 1^-} \log x \log(1-x) = 0$

Demostración. Si hacemos el cambio de variable $y = 1-x$ en el segundo límite resulta que éste es igual a $\lim_{y\to 0^+} \log(1-y) \log y$ por lo que solo bastará encontrar el primer límite.

Entonces, como $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ para $|x| < 1$ (ver D del Apéndice),

se tiene para $0 < x < 1$ que:

$$x < -\log(1-x) < \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

si multiplicamos las desigualdades por $-\log x > 0$ se tiene:

$$-x\log x < \log(1-x)\log x < \frac{-x\log x}{1-x}$$

Ahora, por L'Hôpital se cumple que:

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

y finalmente llegamos a

$$\lim_{x\to 0^+} \log x \log(1-x) = 0$$

F) Cambio de Variable

En este inciso mencionaremos el teorema de Cambio de Variable, su demostración se puede encontrar en [2] pág. 335.

Teorema de Transformación de Integrales. Sean S y T subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ adecuados para integrar y sea $\varphi : T \to S$ una transformación biyectiva de clase C^1 con jacobiano $|J_\varphi(u,v)| = det(J_\varphi(u,v))$ diferente de 0 para $(u,v) \in T$. Entonces, para cualquier función continua $f : S \to \mathbb{R}$ se cumple que

$$\iint_S f(x,y)dx\,dy = \iint_T f(\varphi(u,v))|J_\varphi(u,v)|du\,dv$$

G) Evaluación de algunas integrales

Queremos encontrar el valor de $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx$ y para eso, calcularemos primero el valor de $\int \cos^m x dx$:

Para usar integración por partes hacemos

$$u = \cos^{m-1} x \qquad\qquad dv = \cos x dx$$

$$du = (m-1)\cos^{m-2} x(-\operatorname{sen} x)dx \qquad\qquad v = \operatorname{sen} x$$

por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned}
\int \cos^m x dx &= \cos^{m-1} x \ \operatorname{sen} x + \int (m-1) \cos^{m-2} x \ \operatorname{sen}^2 x dx \\
&= \cos^{m-1} x \ \operatorname{sen} x + (m-1) \int \cos^{m-2} x (1-\cos^2 x) dx \\
&= \cos^{m-1} x \ \operatorname{sen} x + (m-1) \int \cos^{m-2} x dx - (m-1) \int \cos^m x dx
\end{aligned}$$

es decir,

$$\int \cos^m x dx = \frac{1}{m} \cos^{m-1} x \ \operatorname{sen} x + \frac{(m-1)}{m} \int \cos^{m-2} x dx \tag{6}$$

Ahora, si los límites de integración son 0 y $\pi/2$ y además $m = 2n$ en la anterior igualdad, entonces

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} x dx$$

si otra vez aplicamos (6) para calcular $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} x dx$, y lo sustituimos entonces

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right) \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-3} x \, dx$$

Aplicando esto $2n-1$ veces tenemos

$$\begin{aligned}
I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx &= \frac{(2n-1)(2n-3) \cdot \ldots \cdot (2n-(2n-1))}{(2n)(2n-2)) \cdot \ldots \cdot (2n-(2n-2))} \int_0^{\pi/2} \cos^0 x dx \\
&= \frac{(2n-1)(2n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}{(2n)(2n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2} \left(\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

y este es el valor que hemos encontrado para I_n.

Ahora calcularemos $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x \, dx$ con procedimiento similar al anterior. Consideremos la integral $\int \operatorname{sen}^m x dx$ Para usar integración por partes hacemos

$$u = \operatorname{sen}^{m-1} x \qquad dv = \operatorname{sen} x dx$$

$$du = (m-1) \operatorname{sen}^{m-2} x (\cos x) dx \qquad v = -\cos x$$

por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^m x dx &= -\operatorname{sen}^{m-1} x \cos x + \int (m-1) \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^2 x dx \\
&= -\operatorname{sen}^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \operatorname{sen}^{m-2} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) dx \\
&= -\operatorname{sen}^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \operatorname{sen}^{m-2} x dx - (m-1) \int \operatorname{sen}^m x dx
\end{aligned}$$

es decir,

$$\int \operatorname{sen}^m x dx = \frac{1}{m} \operatorname{sen}^{m-1} x \cos x + \frac{(m-1)}{m} \int \operatorname{sen}^{m-2} x dx \tag{7}$$

Ahora, si los límites de integración son 0 y $\pi/2$ y además $m = 2n+1$ en la anterior igualdad, entonces

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-1} x dx$$

si otra vez aplicamos (7) para calcular $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-1} x dx$, y lo sustituimos entonces

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \left(\frac{2n}{2n+1}\right) \left(\frac{2n-2}{2n-1}\right) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-3} x\, dx$$

Aplicando esto $2n-1$ veces entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx &= \frac{(2n)(2n-2) \cdot \ldots \cdot (2n-(2n-2))}{(2n+1)(2n-1)) \cdot \ldots \cdot (2n-(2n-3))} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x dx \\
&= \frac{(2n)(2n-2) \cdot \ldots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3}.
\end{aligned}$$

y es el valor que hemos encontrado para la integral estudiada.

H) Teorema de Tannery

Teorema de Tannery. Si $s(n) = \sum_{k \geq 0} f_k(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ es una suma finita (o una serie convergente), y si

$$\lim_{n \to \infty} f_k(n) = f_k, \quad |f_k(n)| \leq M_k \quad \text{y} \quad \sum_{k \geq 0} M_k < +\infty$$

entonces, $\lim_{n\to\infty} s(n) = \sum_{k\geq 0} f_k$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $N = N(\epsilon)$ tal que $\sum_{k>N(\epsilon)} M_k < \epsilon/3$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $N_k(\epsilon)$ tal que:

$$|f_k(n) - f_k| < \frac{\epsilon}{3N(\epsilon)} \qquad \forall n \geq N_k(\epsilon)$$

Sea $\overline{N}(\epsilon) = \max\{N_1(\epsilon), \ldots, N_{N(\epsilon)}(\epsilon)\}$, entonces

$$|s(n) - \sum_{k\geq 0} f_k| \leq \sum_{k=0}^{N(\epsilon)} |f_k(n) - f_k| + \sum_{k\geq N(\epsilon)} |f_k(n)| + \sum_{k\geq N(\epsilon)} |f_k|$$

Como $|f_k(n)| \leq M_k$, entonces $|f_k| \leq M_k$

$$|s(n) - \sum_{k\geq 0} f_k| \leq N(\epsilon) \cdot \frac{\epsilon}{3N(\epsilon)} + 2 \sum_{k\geq N(\epsilon)} M_k < \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon$$

y esto se cumple para $n \geq \overline{N}(\epsilon)$.

Ejemplo. Usaremos este teorema para ver que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

.
Como

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} \quad \text{y} \quad \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} \to \frac{x^k}{k!}$$

cuando $n \to \infty$, entonces se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \triangleleft$$

I) El Núcleo de Dirichlet

Lema.

$$\sum_{k=0}^{n} \cos\, k\theta = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{1}{2} \qquad \theta \neq 2\pi n$$

Demostración. Sabemos que

$$\begin{aligned} 1 + e^{i\theta} + \ldots + e^{in\theta} &= \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \\ &= \frac{e^{i\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}\left(e^{i\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)} - e^{-i\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} \\ &= e^{i\left(\frac{n}{2}\theta\right)}\frac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$1 + \cos\theta + \ldots + \cos n\theta = Re(1 + e^{i\theta} + \ldots + e^{in\theta}) = \frac{\cos\frac{n}{2}\theta\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

pero como $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, al tomar $x = \frac{2n+1}{2}\theta$, $y = \frac{\theta}{2}$ se tiene:

$$2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\theta\cos\frac{n}{2}\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

por lo tanto llegamos a

$$\begin{aligned} 1 + \cos\theta + \ldots + \cos n\theta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right) \quad \triangleleft \end{aligned}$$

J) Un mínimo de Análisis de Fourier

En este apartado, mencionaremos algunas definiciones y propiedades importantes que se estudian en el área del análisis de Fourier, y que se usaron en el capítulo 2.

El espacio $L^2[0,1]$. Es el conjunto de todas las funciones $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ que son medibles en $[0,1]$ y cumplen que $\int_0^1 |f|^2 < \infty$.

En este espacio hay un producto interior que denotamos por $\langle \ , \ \rangle$ y se define de la siguiente manera: Si $f, g \in L^2[0,1]$, entonces
$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f\overline{g}$ donde $\overline{g}$ es la función conjugada de g.

Base Ortonormal en $L^2[0,1]$. Es un conjunto numerable $\beta \subset L^2[0,1]$ el cual cumple que

i) β es base de $L^2[0,1]$, es decir, $L = \{\sum_{j=1}^n a_j\beta_j : a_j \in \mathbb{C},\ \beta_j \in \beta,\ n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $L^2[0,1]$.

ii) Los elementos de β son ortonormales, es decir que para cualesquiera dos elementos $\beta_n, \beta_m \in \beta$, se cumple $\langle \beta_n, \beta_m\rangle = \delta_{mn}$, donde δ se define de la siguiente manera

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

Una base ortonormal de $L^2[0,1]$ es $\{e_n(x) = e^{2\pi inx} : n \in \mathbb{Z}\}$.

Series de Fourier. Si $f \in L^2[0,1]$, entonces la serie de Fourier para f se define como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n(x)\rangle e_n(x)$$

donde $e_n(x) = e^{2\pi inx}$.

Identidad de Parseval. Esta identidad útil en el Análisis de Fourier, asegura que si $f \in L^2[0,1]$, entonces es válida la identidad,

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, e_n\rangle|^2 \quad \text{donde} \quad e_n(x) = e^{2\pi inx}.$$

K) Cotangente y el truco de Herglotz

Una de las fórmulas más elegantes que involucra funciones elementales es la descubierta por Euler para la función cotangente, la cual dice que

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) \qquad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

Daremos un argumento debido a Gustav Herglotz (ver [11]) para justificar que

$$\pi \cot \pi x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}$$

El "truco de Herglotz " consiste en mostrar que las funciones $f(x) = \pi \cot \pi x$ y $g(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}$ tienen en común propiedades, y estas propiedades hacen que las funciones coincidan. Las propiedades son las siguientes:

(A) Las funciones f y g están definidas y son continuas en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Para la función $f(x) = \pi \cot \pi x = \pi \frac{\cos \pi x}{\operatorname{sen} \pi x}$ la afirmación es cierta, pues es una función que es cociente de dos funciones continuas y definidas en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Para la función $g(x)$, notemos primero que $\left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right) = -\frac{2x}{n^2-x^2}$ por lo que $g(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2-x^2}$. Entonces, bastará ver que para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2-x^2}$ converge uniformemente en una vecindad de x.

Pero observemos que para $n \geq 2$ y para cada $x^2 < 2n-1$ se tiene que $n^2 - x^2 > (n-1)^2 > 0$ por lo que

$$0 < \frac{1}{n^2-x^2} < \frac{1}{(n-1)^2}$$

Lo anterior es válido para x y puntos de una vecindad de x, y en esa vecindad se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2-x^2} \qquad \text{converge uniformemente}$$

(B) Las funciones f y g son periódicas de periodo 1, es decir, $f(x+1) = f(x)$ y $g(x+1) = g(x)$.

Tenemos que $\cot x$ es periódica con periodo π y por tanto, $f(x) = \pi \cot \pi x$ es también periódica de periodo 1. Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} g_N(x) &= \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n} \quad \text{y} \\ g_N(x+1) &= \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+1+n} = \sum_{n=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+n} \\ &= g_{N-1}(x) + \frac{1}{x+N} + \frac{1}{x+N+1} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$g(x+1) = \lim_{N\to\infty} g_N(x+1) = \lim_{N\to\infty} g_{N-1}(x) = g(x).$$

(C) Las funciones f y g son impares, es decir, $f(-x) = -f(x)$ y $g(-x) = -g(x)$.

La función $f(x) = \pi \cot \pi x$ es claramente impar.

Para $g(x)$ se tiene:

$$g_N(-x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{-x+n} = -\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x-n} = -\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n} = -g_N(x)$$

tenemos ahora que

$$g(-x) = \lim_{N\to\infty} g_N(-x) = \lim_{N\to\infty} -g_N(x) = -\lim_{N\to\infty} g_N(x) = -g(x)$$

(D) Las funciones f y g satisfacen la ecuación funcional $f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2}) = 2f(x)$.

Así, para f se tiene:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \pi \left[\frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}} + \frac{\cos \frac{\pi(x+1)}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi(x+1)}{2}} \right] \\ &= \pi \left[\frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}} - \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}} \right] \\ &= \pi \left[\frac{\cos^2 \frac{\pi x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} \cdot \cos \frac{\pi x}{2}} \right] \\ &= 2\pi \cdot \frac{\cos \pi x}{\operatorname{sen} \pi x} = 2f(x). \end{aligned}$$

Y para g se tiene:

$$\begin{aligned} g_N\left(\frac{x}{2}\right)+g_N\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\frac{x}{2}+n}+\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\frac{x+1}{2}+n} \\ &= \sum_{n=-N}^{N}\left(\frac{1}{\frac{x}{2}+n}+\frac{1}{\frac{x+1}{2}+n}\right) \\ &= \sum_{n=-N}^{N}2\left(\frac{1}{x+2n}+\frac{1}{x+2n+1}\right) \\ &= 2g_{2N}(x)+\frac{2}{x+2N+1} \end{aligned}$$

Luego, al hacer que $N\to\infty$ se tiene que

$$g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x+1}{2}\right)=2g(x)$$

Teniendo estas propiedades en cuenta, consideremos a la función $h(x)$ definida así:

$$h(x)=f(x)-g(x)=\pi\cot\pi x-\left(\frac{1}{x}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{n^2-x^2}\right)$$

Es claro que h es continua en $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ y que satisface las propiedades (B), (C) y (D). Notemos que $\lim_{x\to n}h(x)=0$, en efecto, como h es periódica de periodo 1 entonces bastará ver que $\lim_{x\to 0}h(x)=0$. Pero $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{n^2-x^2}$ converge a 0 cuando $x\to 0$ y se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\pi\cot\pi x-\frac{1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\pi x\cot\pi x-1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\pi x\cos\pi x-\operatorname{sen}\pi x}{x\operatorname{sen}\pi x}=0 \end{aligned}$$

la última igualdad se obtiene usando la regla de L'Hopital

Luego, podemos extender h al hacer $h(n)=0$ para $n\in\mathbb{Z}$ y entonces h es contina en $\mathbb{R}$ y tiene las propiedades (B), (C) y (D).

Finalmente, Herglotz finaliza su demostración con el siguiente Lema el cuál, es el toque final para su asombroso truco.

Lema de Herglotz. Si $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua con las propiedades (B), (C) y (D) y se anula en los enteros, entonces $h\equiv 0$ en $\mathbb{R}$.

Demostración. Como h es continua en $[0,1]$, entonces esta función tiene un máximo m en ese intervalo y entonces, por ser periódica es máximo en $\mathbb{R}$, además existe un punto, digamos $x_0 \in [0,1]$, tal que $h(x_0) = m$.

Entonces, por (D), $h(\frac{x_0}{2}) + h(\frac{x_0+1}{2}) = 2m$. Luego $h(\frac{x_0}{2}) = m$ y por inducción también tenemos que $h(\frac{x_0}{2^n}) = m$ para toda $n \in \mathbb{N}$, luego, por continuidad, $h(0) = m$, pero sabemos que $h(0) = 0$ por lo que $m = 0$, así $h(x) \leq 0$ para $x \in \mathbb{R}$. Ahora, como sabemos que h es impar, entonces $h(x) < 0$ es imposible y así, $h(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Después del Lema anterior y el análisis realizado, inmediatamente obtenemos la famosa identidad de Euler:

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

L) Divergencia de la serie $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$.

Probaremos el siguiente teorema de dos formas diferentes, donde $\mathbb{P}$ es el conjunto de los números primos.

Teorema. $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ es divergente.

Demostración 1 (de Niven, ver [11] ó [27]). Bastará probar que para todo $y \geq 2$, se cumple que

$$\sum_{p \leq y} \frac{1}{p} > \log(\log y) - 1$$

Entonces, sea $Y = \{n \in \mathbb{N} :$ los factores primos de n son menores que $y\}$. Recordando que $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = \prod_{p \leq y} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \right)$ como vimos en una sección del capítulo 3, entonces seguiremos el siguiente razonamiento:

Si $n \in \mathbb{N}$ y $n \leq y$, entonces $n \in Y$ y $\sum_{n \in Y} \frac{1}{n} \geq \sum_{n \leq y} \frac{1}{n}$.

Ahora, sea $N = [y]$ el mayor entero menor o igual a y, así $N \leq y < N+1$ y por tanto tenemos que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \int_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \log(N+1) > \log y$$

Enunciaremos y demostraremos a continuación un Lema que utilizaremos para poder terminar nuestro Teorema.

Lema. Para $0 \leq v \leq 1/2$, se tiene que $\exp(v+v^2) \geq 1/(1-v)$.

Demostración. Consideremos a $f(v) = (1-v)\exp(v+v^2)$, como $f(0)=1$, entonces será suficiente ver que f es creciente, pero

$$\begin{aligned} f'(v) &= (1-v)(1+2v)\exp(v+v^2) - \exp(v+v^2) \\ &= \exp(v+v^2)\cdot\{(1-v)(1+2v)-1\} \\ &= \exp(v+v^2)\cdot\{v(1-2v)\} \geq 0 \qquad \triangleleft \end{aligned}$$

Regresando a la prueba del Teorema, si ahora utilizamos el Lema con $v = 1/p$ se obtiene que

$$\exp\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) \geq \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

por lo tanto

$$\prod_{p\leq y} \exp\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) \geq \prod_{p\leq y}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right) = \sum_{n\in Y}\frac{1}{n} \geq \sum_{n\leq y}\frac{1}{n} > \log y$$

aplicando logaritmo en ambos lados, entonces

$$\sum_{p\leq y}\frac{1}{p} + \sum_{p\leq y}\frac{1}{p^2} > \log(\log\, y)$$

pero como $\sum_{p\leq y}\frac{1}{p^2} < 1$, entonces finalmente llegamos a que

$$\sum_{p\leq y}\frac{1}{p} > \log(\log\, y) - 1 \qquad \triangleleft$$

Demostración 2 (de Erdös, ver [?]). Escribamos los números primos en forma creciente, digamos $p_1, p_2, \ldots$ y supongamos que $\sum_{n\leq y}\frac{1}{p}$ es convergente.

Entonces, debe existir un k entero tal que

$$\sum_{i\geq k+1}\frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}$$

Llamemos a los números $p_1, p_2, \ldots p_k$ los "primos pequeños" y a $p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots$ los "primos grandes"

Entonces, para cualquier entero positivo N se tiene que $\displaystyle\sum_{i\geq k+1}\frac{N}{p_i} < \frac{N}{2}\ldots(*)$.

Sea N_g el número de enteros positivos $n \leq N$ que son divisibles por al menos un primo grande y sea N_p el número de enteros positivos $n \leq N$ que son divisibles por al menos un primo pequeño.

Lo que queremos es encontrar un N que cumpla $N_p + N_g < N$ y esto llevaría a una contradicción con la ecuación $N_p + N_g = N$ que claramente es válida.

Para acotar N_g, notemos que $\left[\frac{N}{p_i}\right]$ cuenta el número de enteros positivos $n \leq N$ que sean divisibles por p_i. Entonces, por $(*)$ obtenemos

$$N_g \leq \sum_{i\geq k+1}\left[\frac{N}{p_i}\right] < \frac{N}{2} \tag{8}$$

Ahora concentremonos en N_p. Escribamos a todo $n \leq N$ que tiene únicamente divisores primos pequeños en la forma $n = a_n b_n^2$ donde a_n es libre de cuadrado. Entonces, a_n es producto de primos pequeños diferentes y por supuesto, existen 2^k números diferentes que son libres de cuadrado.

Por otro lado,como $b_n \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{N}$, entonces existen a lo más $\sqrt{N}$ partes cuadradas b_n que son diferentes, luego

$$N_p \leq 2^k\sqrt{N}$$

Dado que (3.19) es verdadera para toda N, requerimos una N tal que

$$2^k\sqrt{N} \leq \frac{N}{2}$$

pero $2^{k+1} \leq \sqrt{N}$, por lo que $N = 2^{2k+2}$ funciona. $\triangleleft$

Utilizando lo anterior, es inmediato el siguiente resultado

Corolario. El número de primos es infinito.

Demostración. Un número finito de primos haría que la serie $\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p}$ fuera finita pero esto contradice el teorema anterior. $\triangleleft$

M) La función $\operatorname{sen} \pi z$ escrita como un producto.

Teorema.

$$\operatorname{sen} \pi z = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad \text{con} \quad z \in \mathbb{C}$$

Demostración. Par probar este resultado usaremos la derivada logarítmica y el desarrollo en fracciones parciales de la cotangente.

Sean

$$f_n(z) = 1 - \frac{z^2}{n^2} \qquad \text{y} \qquad f(z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

Como

$$\frac{f_n'(z)}{f_n(z)} = \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

se tiene que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

el lado derecho de la igualdad anterior es $\pi \cot \pi z$ (ver K del Apéndice), que a su vez es

$$\frac{(\operatorname{sen} \pi z)'}{\operatorname{sen} \pi z}$$

Luego $\log f(z) = \log(\operatorname{sen} \pi z) + c$, por lo que $f(z) = c \operatorname{sen} \pi z$ para alguna constante $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Y como

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{\pi z} = \lim_{z \to 0} \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) = 1 = \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z}$$

se tiene que $c = 1$ y así $f(z) = \operatorname{sen} \pi z$

Bibliografía

[1] **W. Dunham**. *Euler: El maestro de todos los matemáticos*, vol 6, Nivola, 2000.

[2] **R. G. Bartle**. *The elements of Real Analysis*, Wiley International Edition. 1964.

[3] **W. Rudin**. *Principles of Mathematical Analysis*, third ed., International Student Edition 1976.

[4] **R. A. Silverman**. *Introductory Complex Analysis*, Dover 1972.

[5] **Bagget and Fulks**. *Fourier Analysis*, api, 1979.

[6] **I. Niven, H.S. Zuckerman**. *An introduction to the Theory of Numbers* 3rd edition, John Wiley and Sons, New York. 1972.

[7] **M. Spivak**. *Calculus Infinitesimal*, Segunda edición, Reverté, 1988.

[8] **J. E. Marsden y M. J. Hoffman**. *Análisis Básico de Variable Compleja*, Trillas, 2005.

[9] **R. Young**. *Excursions in Calculus*, M. A. A. 1992.

[10] **Yu Takeuchi**. *Sucesiones y Series*, Tomo 1, Limusa, 1976.

[11] **M. Aigner, G. Ziegler**. *Proofs from The Book*, Springer, 2002.

[12] **G. Grabinsky**. Euler, el prestidigitador de las series, *Miscelánea Matemática*, Sociedad Matemática, No 45, pág. 55–66, 2007

[13] **T. Apostol**, A proof that Euler missed: evaluation $\zeta(2)$ the easy may, *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 5, No. 3, pág. 59–60, 1983

[14] **R. Chapman**, Evaluating $\zeta(2)$, 1999 (corrected 7 November 2002).

[15] **T. Apostol**, Another elementary proof of Euler formula for $\zeta(2n)$, *American Mathematical Monthly*, Vol. 80, No. 4, pág. 428–431, 1973.

[16] **J. D. Harper**, Another simple proof of $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$, *American Mathematical Monthly*, Vol. 110, No. 6, pág. 540–541, 2003.

[17] **I. Papadimitriou**, A simple proof of $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, *American Mathematical Monthly*, Vol. 80, No. 4, pág. 424–425, 1973.

[18] **Y. Matsuoka**, An elementary proof of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, *American Mathematical Monthly*, Vol. 68, pág. 486–487, 1961.

[19] **J. Hofbauer**, A simple proof of $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{6}$ and related identities, *American Mathematical Monthly*, Vol. 109, No 2, pág. 196–197.

[20] **B. R. Choe**, An elementary proof of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, *American Mathematical Monthly*, Vol. 94, No 7, pág. 662–663, 1987.

[21] **D. B. Zagier**, Zeta Functions in Number Theory, *American Mathematics Society*, 1989.

[22] **D. C. Russell**, Another Eulerian-type proof, *Mathematics Magazine*, Vol. 60, No. 5, pág. 349, 1991.

[23] **D. P. Giesy**, Still another elementary proof that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, *Mathematics Magazine*, Vol. 45, No. 3, pág. 148–149, 1972.

[24] **E. L. Stark**, Application of a mean value theorem for integrals to series summation, *American Mathematical Monthly*, Vol. 85, pág. 481–483, 1978.

[25] **R. A. Kortram**, Simple proofs for $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ and $\operatorname{sen} x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$, *Mathematics Magazine*, Vol 69, 1996.

[26] **F. Goldscheider**, *Arch. Math. Phsys*, Vol 20, pág. 323–324, 1913.

[27] **I. Niven**. A Proof of the Divergence of $\sum \frac{1}{p}$, *American Mathematical Monthly*, Vol. 78, No.3, pág. 272–273, 1971.

[28] **D. Kalman**, Six ways to sum a series, *College Math. Journal*, 24, pág. 402–421, 1993.

[29] **R. Ayoub**. Euler and the zeta function, *American Mathematical Monthly*, Vol. 81, No. 3, pág. 1067–1085, 1974.