



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
CAMPUS ARAGÓN

**FUNDAMENTOS DE ESTRUCTURAS
ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO CIVIL
P R E S E N T A
EDUARDO GABRIEL REZA CERVANTES**

ASESOR: ING. KARLA IVONNE GUTIÉRREZ VÁZQUEZ



MEXICO D.F.

FEBRERO 2011



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

2011

FUNDAMENTOS DE ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS



2011

" Los individuos que viven sometidos bajo el yugo de la vida exterior, la ideología de la política y la religión son seres que permanecen en las tinieblas de la mediocridad, se mantienen sin carácter, se dejan manipular por pensamientos mágicos al grado de la estupidez humana. Sólo aquellos que se mueven con objetividad en base a la razón, son los que pueden ver la verdad con claridad, y se rigen por pensamientos propios, para percibir que no hay problema que sea más grande que un cerebro humano".

Eduardo Gabriel Reza Cervantes



ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	A
SISTEMAS ESTRUCTURALES.....	1
1.1 Antecedentes históricos.....	1
1.2 Principios básicos.....	2
1.3 Tipos de estructuras.....	4
1.4 Tipos de cargas.....	9
1.5 Tipos de apoyos.....	12
1.6 Condiciones de isostaticidad.....	18
1.7 Elementos mecánicos.....	26
ANÁLISIS DE VIGAS.....	33
2.1 Procedimiento de análisis.....	33
2.2 Viga simplemente apoyada con carga concentrada al centro del claro.....	35
2.3 Viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida.....	43
2.4 Viga simplemente apoyada con carga repartida de forma triangular.....	48
2.5 Viga simplemente apoyada con carga concentrada y uniformemente distribuida.....	54
2.6 Viga empotrada con carga uniformemente distribuida y concentrada.....	61
2.7 Viga simplemente apoyada con un extremo en cantiliver carga uniformemente distribuida y carga concentrada.....	68
ANÁLISIS DE MARCOS.....	75
3.1 Procedimiento de análisis.....	75
3.2 Ejercicio 1: Determinar la variación de los elementos mecánicos.....	75
3.3 Ejercicio 2: Determinar la variación de los elementos mecánicos.....	85
3.4 Ejercicio 3: Determinar la variación de los elementos mecánicos.....	92
ANÁLISIS DE ARMADURAS.....	107
4.1 Armaduras.....	107
4.2 Método de los nodos.....	112
4.3 Método de las secciones.....	118
4.4 Método de la conservación de proyecciones.....	122
4.5 Método de la fuerza ficticia.....	128
ANÁLISIS DE ARCOS Y CABLES.....	136
5.1 Arcos.....	136
5.2 Arcos circulares.....	137
5.3 Arcos parabólicos.....	145
5.4 Arcos Elípticos.....	158
5.5 Cables.....	164
5.6 Clasificación de acuerdo con las solicitaciones que soportan.....	165
5.7 Cables de elementos rectilíneos.....	172
5.8 Cables Parabólicos.....	176
5.9 Cables Catenarios.....	179
CONCLUSIONES.....	B
BIBLIOGRAFÍA.....	C

INTRODUCCIÓN

Como ingenieros debemos ser observadores teniendo únicamente nuestro medio y razonar con objetividad, nos daríamos cuenta que podemos identificar diferentes estructuras como: Casas habitación, edificios, escuelas, puentes, aeropuertos, presas, carreteras, alcantarillado, líneas de distribución de agua potable, entre otras, todas ellas cumpliendo un propósito particular para lo que fueron diseñadas.

En la formación del ingeniero civil, para definir el concepto de estructura se encuentra referido a un conjunto de elementos que la conforman; Por lo tanto, al tratar de definir este concepto la respuesta puede darse un tanto subjetiva. Necesitamos definir muy bien el concepto de estructura

Esta tesis tiene como objetivo definir bien el concepto de estructura, el análisis de estructuras isostáticas; es base en la formación del ingeniero civil, por lo que, el lector debe tener como antecedentes del conocimiento científico, Álgebra, trigonometría, geometría analítica cálculo diferencial e integral, estática: Identificación y clasificación de fuerzas y sistema de fuerzas, momento de una fuerza respecto de un punto y de una línea, equivalencia y resultante de sistemas de fuerzas, equilibrio de sistemas de fuerzas, ejes y planos de simetría, centroides, momentos estáticos o de primer orden, momentos de inercia o de segundo orden, etc. Por ello, los conocimientos deben de tener una continuidad que ligen o conecten los previos con los nuevos que se pretenden adquirir.

Si retomamos la siguiente pregunta: ¿Qué es una estructura?, una estructura es una entidad física de carácter unitario, concebida como un ensamblaje de elementos geométricos dispuestos en el espacio con el fin de gravitar y transmitir hasta el suelo las cargas resultantes por medio de los apoyos que la integran, para conformar un cuerpo único y cuyo objetivo es darle solución a un problema civil determinado (puente, torre, edificio, estadio, etc.).

La respuesta en ocasiones la abordamos sin entender su comportamiento integralmente, sobre todo cuando se trata de identificar los elementos que la conforman, ya sea por su forma geométrica, por las cargas que soporta, por sus apoyos que la sustentan, y los materiales utilizados para lo que fue diseñada.

De ser aceptada la definición, el conjunto de elementos que integran una estructura debe de contener simultáneamente: Forma geométrica, sistema de cargas y sistema de apoyos, referencias que facilitan tener elementos de análisis para plantear una clasificación en función de su geometría, de sus apoyos y de sus cargas.

2011

SISTEMAS ESTRUCTURALES



SISTEMAS ESTRUCTURALES

1.1 Antecedentes históricos

La evolución de la ingeniería estructural, tal como lo conocemos hoy día, se debe gracias al esfuerzo de innumerables científicos e ingenieros por sus aportaciones en el curso de la historia. Durante ese tiempo, muchos tipos de estructuras, como son vigas, marcos, armaduras y arcos, se usaron en la construcción a lo largo de cientos o miles de años antes de que se desarrollaran para ellas métodos satisfactorios de análisis. Sin embargo los ingenieros manifestaron tener cierto entendimiento del comportamiento estructural, si bien ganado lo tienen sus exitosas construcciones, como, puentes, catedrales unas verdaderas obras de arte, un avance real en la evolución de lo que llamamos el análisis estructural.

Se dice que el escritor **Robert Louis Stevenson** estudió ingeniería estructural durante algún tiempo de su vida, pero aparentemente encontró que “la ingeniería mecánica de los esfuerzos y las deformaciones” no era su fuerte para su fértil y creativa imaginación, y por ello dedicó su vida a escribir prosa y poesía. (La isla del tesoro. Secuestrado, etc.), estarán de acuerdo conmigo hay quienes pensamos que la ingeniería estructural son temas muy interesantes.

El egipcio **Imhotep**, quien construyó la gran pirámide escalonada de Sokkara alrededor del año 3000 a.C., se considera a veces como el primer ingeniero estructural del mundo. Los egipcios y otros antiguos constructores contaban seguramente con algunas reglas empíricas obtenidas de la experiencia para determinar los tamaños de los miembros estructurales. Sin embargo, no contamos con pruebas de que hayan desarrollado alguna teoría de análisis estructural.

Arquímedes (287-212 a.C.) desarrolló algunos principios fundamentales de la estática e introdujo el término centro de gravedad. Los griegos construyeron algunas estructuras, sus contribuciones a la teoría estructural fueron muy escasas. **Pitágoras** (582-500 a.C.), de quien se dice que creó la palabra matemáticas, es famoso por el teorema geométrico que lleva su nombre. (Este teorema en realidad ya era conocido por los sumerios hacia 2000 a.C.)

Los **Romanos** fueron constructores extraordinarios y muy competentes en el uso de ciertas formas estructurales, como son los arcos semicirculares de mampostería y su gran obra maestra el Coliseo Romano. Ellos diseñaron la mayoría de sus obras desde un punto de vista más bien empírico y artístico.

Los Matemáticos **Hindúes** crearon en los siglos II y III a.C. un sistema de numeración del uno al nueve. Alrededor del año 600 d.C., los hindúes inventaron el símbolo *sunya* (que significa vacío), que ahora llamamos cero. (Al parecer, los mayas ya habían desarrollado el concepto de cero 300 años antes.)

En el siglo VIII d.C., los **Árabes** tomaron este sistema de numeración de los escritos científicos de los hindúes. En el siguiente siglo, un matemático persa escribió un libro que incluyó el sistema. Su libro fue traducido al latín algunos años después y llevado a Europa. Alrededor del año 1000 d.C., el papa Silvestre II decretó que los números hindú-arábigos deberían ser usados por los cristianos.

Un avance real en el análisis estructural fue necesario desarrollar la ciencia de la mecánica de los materiales. Un físico francés, **Charles Augustin de Coulomb**

(1736-1806), y un ingeniero-matemático francés, **Louis Marie Henri Navier** (1785-1836), ellos sentaron las bases de la mecánica de materiales digamos ya de un modo científico y no empírico como las culturas anteriores. Navier en 1826 publicó un texto en el que analizó las resistencias y las deflexiones de vigas, columnas, arcos, puentes colgantes y otras estructuras.

Se cree que fue **Andrea Palladio** (1518-1580), un arquitecto italiano, quien usó por primera vez las armaduras modernas. Sin embargo. Fue hasta 1847 que **Squire Whipple** (1804-1888) introdujo el primer método racional para el análisis de armaduras. Ésta fue la primera gran contribución de Estados Unidos a la teoría de las estructuras. Se dice que Whipple señaló el principio del análisis estructural moderno.

Varios métodos excelentes para calcular deflexiones fueron publicados entre 1860 y 1880, y éstos aceleraron el desarrollo del análisis estructural. Entre los más importantes investigadores y sus logros se cuentan: **James Clerk Maxwell** (1831-1879), de Escocia, y su teorema de las deflexiones recíprocas, publicado en 1864; **Otto Mohr** (1835-1918). De Alemania, y su método de los pesos elásticos, presentado en 1870; **Alberto Castigliano** (1847-1884), de Italia, y su teorema sobre el trabajo mínimo, y **Charles e. Greene** (1842-1903), de Estados Unidos, y sus teoremas de área-momento, publicados en 1873.

El teorema de los tres momentos fue dado a conocer en 1857 por el francés **B. P. E. Clapeyron** (1799-1864) y se usó para el análisis de muchos puentes de ferrocarril.

En Estados Unidos, dos grandes desarrollos en el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas fueron hechos por **G. A. Maney** (1888-1947) y **Hardy Cross** (1885-1959). En 1915 Maney presentó el método pendiente-deflexión, mientras que Cross introdujo la distribución de momentos en 1924.

Parece irónico que los estudiantes actuales puedan aprender en unos pocos meses las teorías y los principios del análisis estructural que a la humanidad le tomó miles de años desarrollar.

1.2 Principios básicos

Los principios fundamentales que se aplican en la ingeniería estructural son las leyes de Sir Isaac Newton que fueron publicados en el año de 1686 llamada "Philosophie Naturalis Principia Mathematica" que significa "Principios matemáticos de la filosofía natural"

LEX I

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vei movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Un cuerpo estará en estado de reposo o en estado de movimiento uniforme en línea recta, a menos que sea forzado a cambiar ese estado por fuerzas impuestas a él.

LEX II

Mutationem motus proportionalem esse vimotrice impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si un cuerpo se le aplica una fuerza desequilibrante el cuerpo adquirirá una aceleración directamente proporcional a la magnitud con la dirección y sentido de la resultante e inversamente proporcional a la masa del cuerpo.

LEX III

Actioni contrariam semper et aequalem esse rectionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Las fuerzas de acción y reacción entre cuerpos en contacto tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos.

En este texto trataremos con un tipo particular de equilibrio, llamado equilibrio estático, en el que el sistema no está acelerado. La ecuación de equilibrio toma entonces la forma $\Sigma F=0$

Ingeniería: Es la aplicación de las ciencias exactas y el arte de planificar el aprovechamiento de los recursos naturales, así como de proyectar, diseñar, construir y operar los sistemas y las maquinaria necesaria para llevar el plan a su término en beneficio de la sociedad. Arte que trata sobre la aplicación de los materiales y de las fuerzas de los materiales. Ingenio creador, flexible, independiente, logran objetivos, aprovecha cualquier hecho o teoría de la ciencia con tal de que contribuya a su arte.

Ingeniería Estructural: Describe el comportamiento de las estructuras para idealizar materiales de tal manera que soporten cargas que ignoramos y sin embargo que se comporten satisfactoriamente. Aunque la ingeniería estructural no es una ciencia, ella posee varios métodos. Estos métodos nos permiten analizar y diseñar estructuras de una manera estándar.

Ingeniero Estructural: Se encarga del análisis y diseño de las estructuras que gravitan sobre el suelo de tal manera que soporten satisfactoriamente las cargas colocadas sobre ellas, aplicando los conocimientos físicos y matemáticos, crea modelos, a los que aplica ecuaciones y puede por lo tanto planear, conocer y rectificar una estructura antes de ser construida.

Mecánica: Es la ciencia que se define por describir las condiciones de reposos y movimiento de los cuerpos bajo los efectos de acciones o fuerzas, y se convierte en la ciencia básica de la ingeniería estructural. En ella podemos distinguir tres ramas, la mecánica de cuerpos rígidos (estática-dinámica), la de cuerpos deformables (mecánica de materiales) y la mecánica de los fluidos (hidráulica)

1.3 Tipos de estructuras

Estructura: Entidad física de carácter unitario, concebida como un ensamblaje de elementos geométricos dispuestos en el espacio con el fin de gravitar y transmitir hasta el suelo las cargas resultantes por medio de los apoyos que la integran, para conformar un cuerpo único y cuyo objetivo es darle solución a un problema civil determinado (puente, torre, edificio, estadio, etc.).

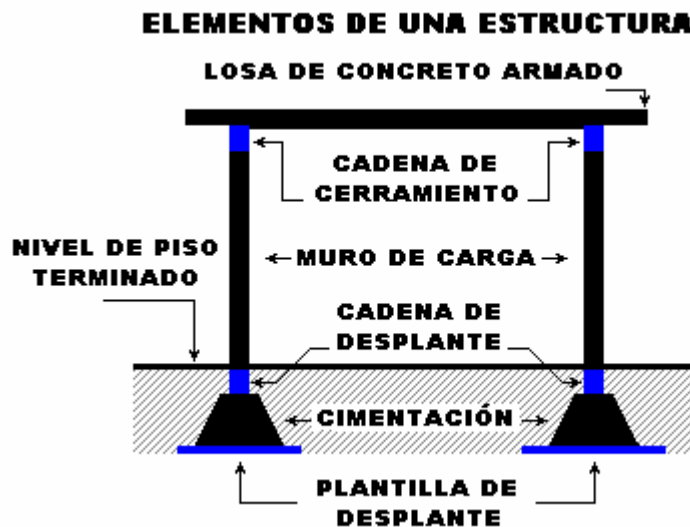


Figura 1.3.1

La primera clasificación de las estructuras, se da en función de la ubicación de sus elementos, que pueden estar localizados en el plano o en el espacio; en consecuencia, las estructuras se dividen en:

Estructuras planas: Es aquella cuyos elementos se encuentran en el plano o R^2 ; una representación de éstas se ejemplifica idealizando una viga que se encuentra localizada sobre el plano xy , como se muestra con la barra AB.

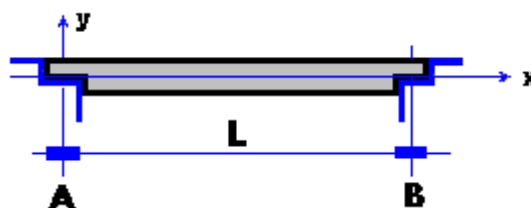


Figura 1.3.2

Estructuras en el espacio: Es aquella cuyos elementos se encuentran en el espacio o R^3 . Si se observa la figura, el marco AB-OE se encuentra en el plano xy; y perpendicular a éste, sobre el eje x se ubica el marco GH-KL resultando en consecuencia una estructura en el espacio.

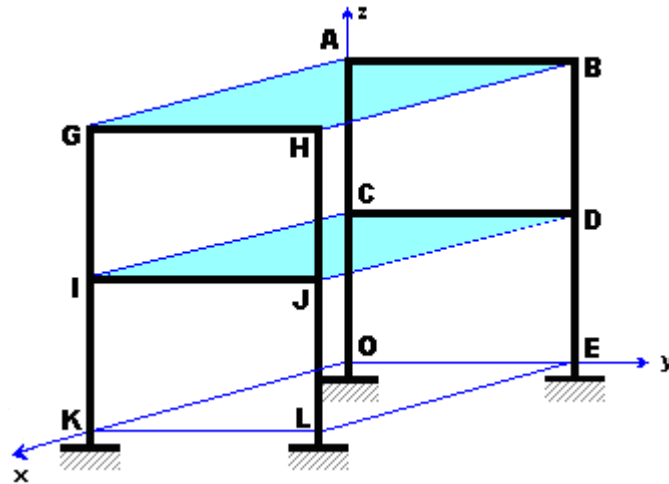


Figura 1.3.3

Las estructuras por su forma geométrica se clasifican en estructuras de eje recto, estructuras eje curvo y de superficie o contacto; para su identificación se indicarán en algunas las cargas y apoyos únicamente para su identificación, ya que para su definición se exponen en las siguientes secciones de éste capítulo.

Estructuras de eje recto: Vigas o traveses, columnas, marcos y armaduras:

Vigas y traveses: Son miembros sometidos a fuerzas de flexión. Casi siempre son miembros horizontales sometidos principalmente a fuerzas de gravedad, aunque también pueden trabajar en posición inclinada.

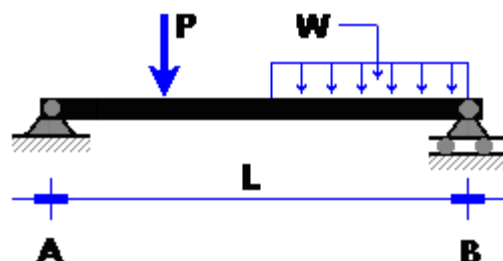


Figura 1.3.4

Columnas: Son miembros sometidos principalmente a fuerzas de compresión axial y también a fuerzas de flexión. Pueden ser verticales o inclinadas. Con la figura que se muestra se esquematiza una columna vertical AB con carga concentrada axial.

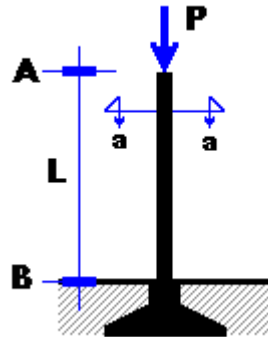


Figura 1.3.5

Tirantes: Son miembros sometidos sólo a fuerzas axiales de tensión. Un tirante no está cargado a lo largo de su longitud y no puede resistir fuerzas generadas por flexión.

Puntales: Son miembros sometidos sólo a fuerzas axiales de compresión. Al igual que un tirante, un puntal no está cargado a lo largo de su longitud y tampoco puede resistir fuerzas generadas por flexión.

Marcos: Están constituidos por un conjunto de elementos rectilíneos, horizontales, verticales y/o inclinados. Elementos que soportan cargas concentradas o distribuidas como se muestra en las siguientes figuras.

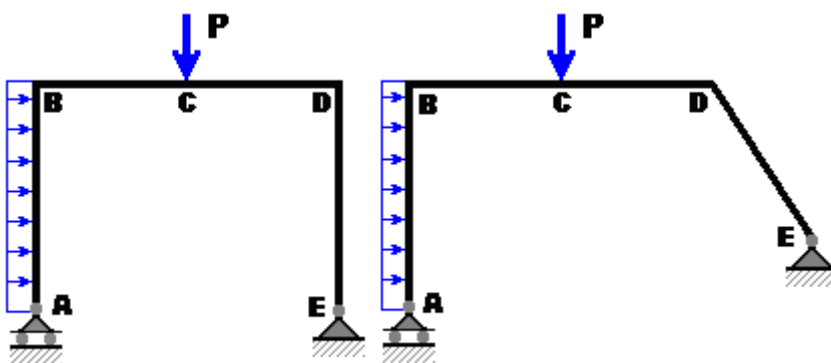


Figura 1.3.6

Armaduras: Las integran un conjunto de elementos rectilíneos relativamente esbeltos que está unidos rígidamente en forma triangular, sus extremos que soportan cargas concentradas directamente sobre las uniones o nodos como se muestra en la figura.

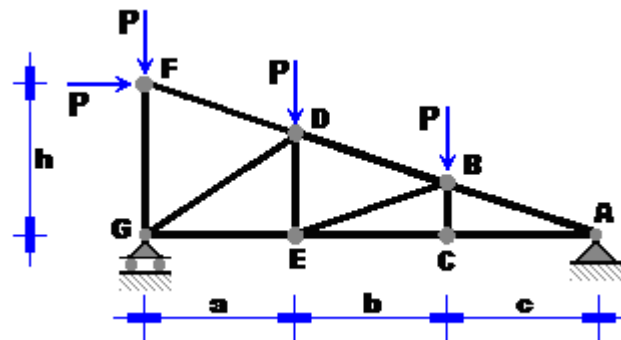


Figura 1.3.7

Estructuras de eje curvo

Arcos: Están integradas por un conjunto de elementos curvos de forma circular, elíptica o parabólica. Al respecto se muestran las siguientes figuras.

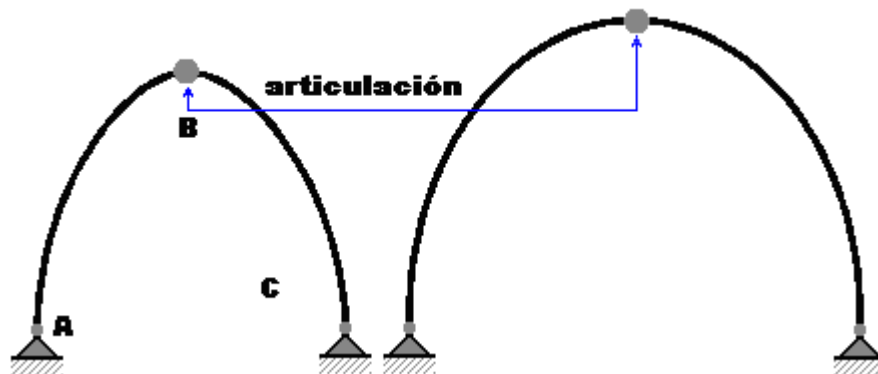


Figura 1.3.8

Cables: Rectilíneos en cuyos puntos de inflexión soportan cargas concentradas.

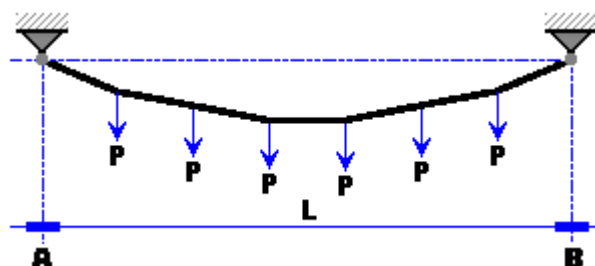


Figura 1.3.9

Cables parabólicos: que soportan cargas repartidas.

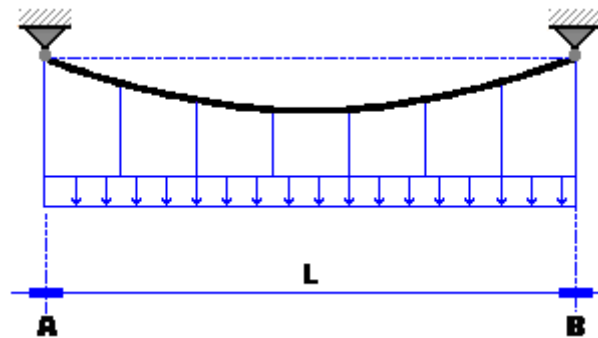


Figura 1.3.10

Cables: que soportan su peso propio.

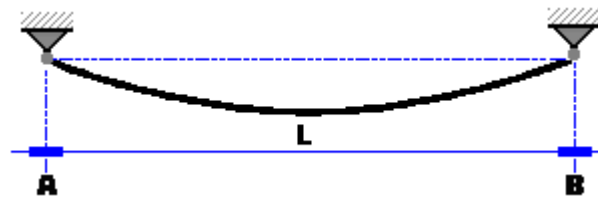


Figura 1.3.11

Estructuras de superficie o contacto: La figura que se muestra representa la idealización de un muro que soporta en su parte superior la losa de concreto; que a su vez éste se apoya sobre la corona de la cimentación; y ésta es previamente soportada por el terreno.

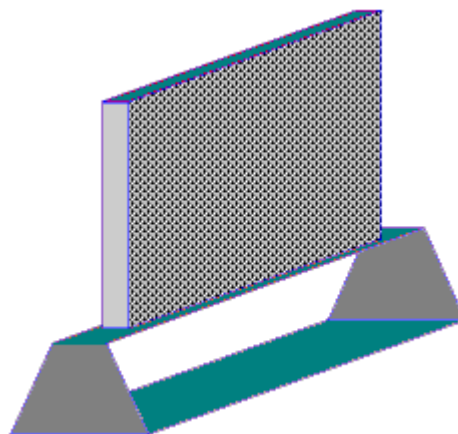


Figura 1.3.12

1.4 Tipos de cargas

Una primera clasificación de las estructuras por su sistema de cargas se identifica:

Fuerzas externas o cargas externas: Las que actúan sobre la superficie del elemento estructural.

Fuerzas internas o cargas internas: Las que actúan dentro del elemento estructural en respuesta de las fuerzas externas, (como es el caso de los elementos mecánicos).

Con base en lo anterior, cuando la estructura soporta un sistema de cargas externo se identifican:

- a) *Por el tipo de carga.*
- b) *Por su permanencia.*
- c) *Por la forma en que actúa.*

a) *Por el tipo de carga:*

Cargas concentradas: Son aquellas que tienen un solo punto de aplicación

Cargas Axiales: Son aquellas que están actuando en el centro geométrico de una sección transversal.

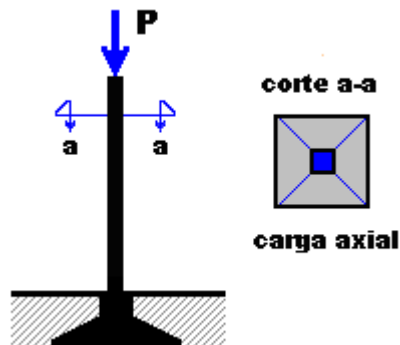


Figura 1.4.1

Cargas no axiales: Son aquellas que actúan fuera del centro geométrico de una sección transversal, generando una excentricidad (e).

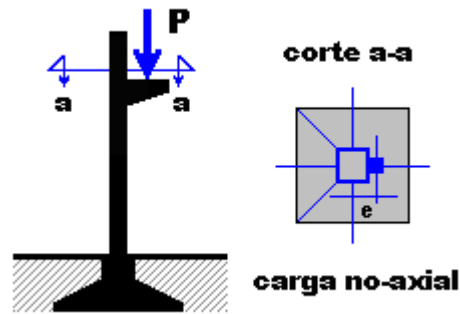


Figura 1.4.2

Cargas repartidas: Es un sistema de fuerzas que actúa sobre una unidad de longitud.

Carga uniformemente distribuida: La variación de la carga es constante sobre el claro "L" donde esta actuando como se observa en la figura:

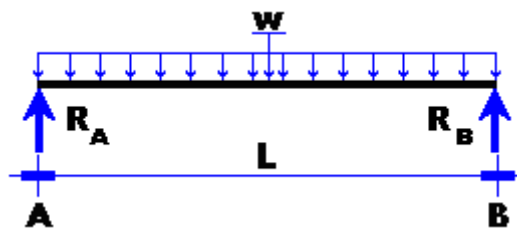


Figura 1.4.3

Carga no uniforme: La variación de la carga no es constante sobre el claro "L" donde esta actuando. Por ejemplo, en la figura que se muestra se distingue una carga de variación lineal sobre el tramo "a" y con una variación cuadrática sobre el tramo "b".

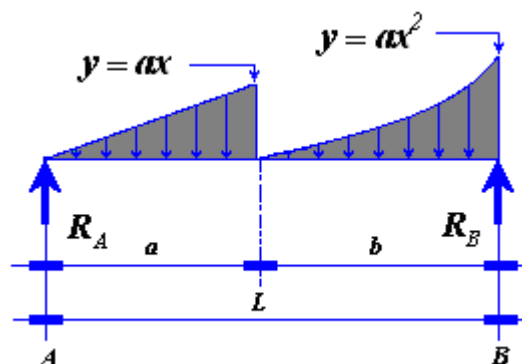


Figura 1.4.4

b) **Por su permanencia:** Las cargas vivas, las cargas muertas y las cargas accidentales.

Cargas vivas: Para una simple identificación y un tanto coloquial, se definen como aquellas que se mueven; por ejemplo en un salón de clases la carga viva esta representada por el peso de los alumnos que se expresan en unidades de longitud al cuadrado.

Cargas muertas: Están representadas por el peso propio del elemento estructural

Cargas accidentales: Son aquellas que están representadas por la fuerza sísmica, por la fuerza del viento, por el peso de la nieve, etc.

c) **Por la forma en que actúan:** Las cargas activas, las cargas reactivas y las cargas internas.

Cargas activas: Están representadas por el sistema de cargas externo ($y=ax$; $y=ax^2$) que están actuando sobre el elemento estructural.

Cargas reactivas: Están representadas por las componentes de cada uno de los apoyos que soportan al elemento estructural (R_A ; R_B) identificándose también como vínculos o reacciones.

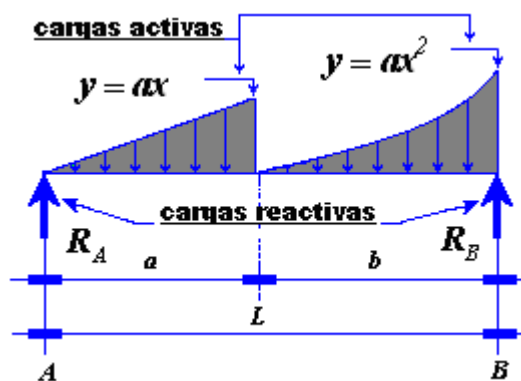


Figura 1.4.5

Cargas internas: Son las que actúan dentro del elemento estructural, mismas que se oponen a la acción de las cargas externas. Dentro de ésta clasificación se distinguen: La fuerza normal, es una fuerza interna que esta actuando perpendicularmente a la sección transversal del elemento estructural. La fuerza cortante, es una fuerza interna que esta actuando paralelamente a la sección transversal del elemento estructural. Por los efectos que generan éstas fuerzas internas, se les asocia con los elementos mecánicos del elemento estructural.

1.5 Tipos de apoyos

Apoyo: Es un elemento de sujeción entre la estructura y el sistema tierra, con el propósito de evitar desplazamientos.

Idealizando un elemento sometido a una fuerza externa "**F**" localizado en el origen del marco de referencia identificaremos los desplazamientos del elemento generados por la acción de la fuerza asociándole dos desplazamientos: Uno lineal con dos componentes; (una en la dirección horizontal δ_x y la otra en la dirección vertical δ_y) obteniéndose un desplazamiento resultante: δ_r . Y el otro angular en función del ángulo θ .

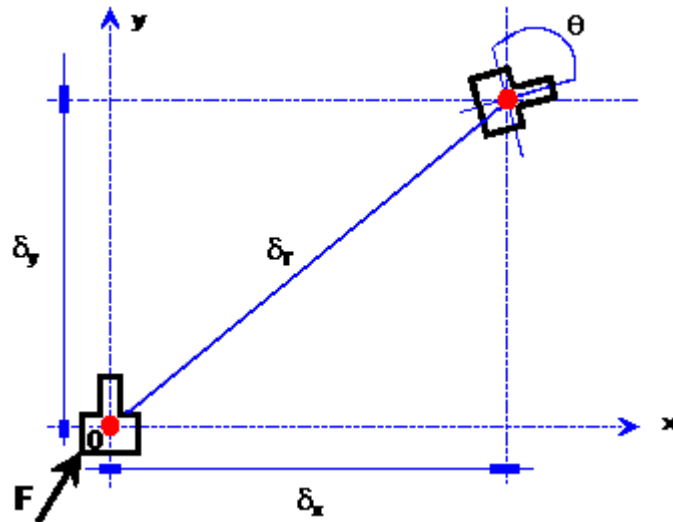


Figura 1.5.1

Los desplazamiento así entendidos, ahora veremos como los relacionamos con los apoyos en un elemento estructural. Para el efecto nuevamente habremos de idealizar un elemento estructural sometido a un sistema de fuerzas externo representado por una barra horizontal AB sobre la que esta actuando a una fuerza concentrada P con componentes en la dirección horizontal y vertical respectivamente y una carga uniformemente distribuida w como se muestra en la figura:

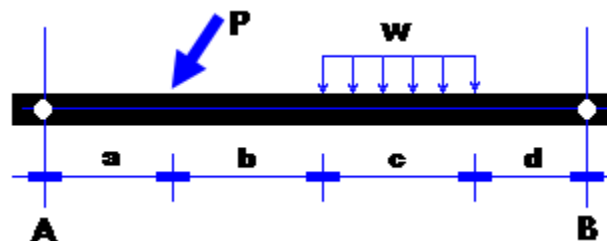


Figura 1.5.2

La barra así mostrada, es de suponerse que será necesario fijarla a través de los apoyos localizados en el punto A y B respectivamente. Por ejemplo, si se coloca el elemento restrictivo (1) en el punto B, la barra (mostrada únicamente sin esquematizar las cargas) tendrá un desplazamiento vertical:



Figura 1.5.3

El desplazamiento vertical que se observa en la figura anterior, se podrá restringir a través de otro elemento restrictivo 2 en el punto A:



Figura 1.5.4

Sin embargo, con éstos dos elementos si bien es cierto que se ha restringido el desplazamiento vertical, aparecerá ahora un desplazamiento horizontal generado por la fuerza componente en ésta dirección (horizontal) de la fuerza "P":

Ahora para evitar el desplazamiento horizontal, coloquemos el elemento restrictivo 3 en el punto B, por simple observación a la estructura se le ha restringido los desplazamientos vertical y horizontal respectivamente con los elementos 1, 2 y 3. ¿Pero que sucede ahora con la acción de las cargas externas en la dirección vertical? Para ello observa la siguiente figura:

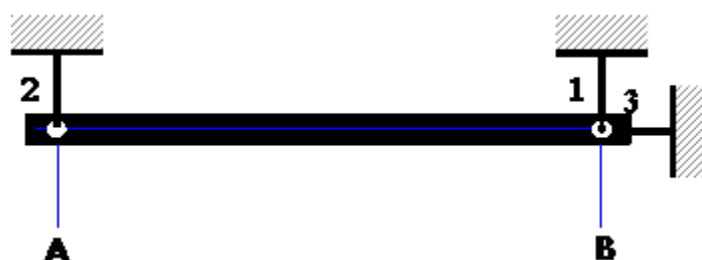


Figura 1.5.5

Los desplazamientos que genera la acción del sistema de fuerzas externo son dos; uno lineal (en la dirección vertical δ_y y en la dirección horizontal δ_x) y el otro, angular en función del ángulo θ que se presenta tanto en el apoyo A como en el apoyo B.

Identificados los desplazamientos que se presentan en un elemento estructural que son en respuesta a la acción de un sistema de fuerzas externo, ahora, el elemento 2 localizado en A se define como apoyo móvil, y los elementos 1 y 3 se definen como apoyo fijo mismo que se esquematizan en la siguiente figura:

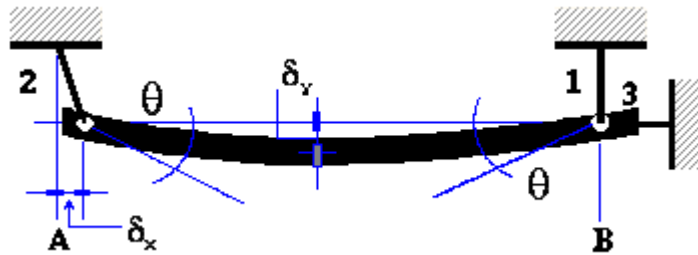


Figura 1.5.6

Con un diagrama de cuerpo libre de la barra, podremos identificar sobre los apoyos respectivos los conceptos de vínculo y grado de libertad como se muestra en la figura:

Apoyo móvil en A: Se le asocia un vínculo representado por la reacción R_2 y dos grados de libertad representados por el desplazamiento lineal horizontal y por el desplazamiento angular en función de θ .

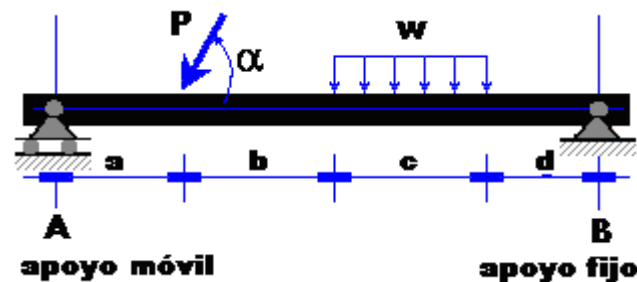


Figura 1.5.7

Apoyo fijo en B: Se le asocia dos vínculos representados por las reacciones R_1 y R_3 y un grado de libertad representado por el desplazamiento angular en función de θ .

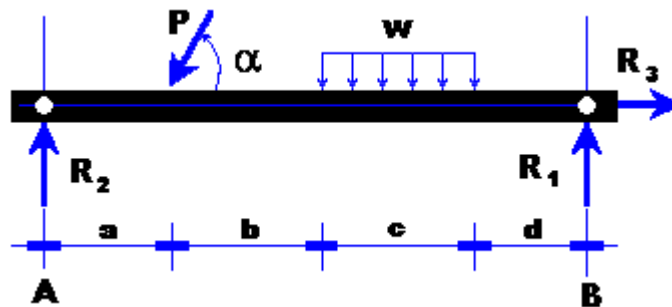


Figura 1.5.8

Con el análisis hecho, se tienen elementos de juicio para emitir las siguientes definiciones:

Grado de libertad: Es el número de posibilidades que se tienen en los desplazamientos independientes que no pueden ser restringidos.

Vínculos: Son las componentes reactivas o reacciones en los apoyos representados por los desplazamientos que son restringidos.

Finalmente, hace falta identificar el apoyo que permita restringir los desplazamientos lineales (en la dirección horizontal y en la dirección vertical) y el desplazamiento angular en forma simultánea; para ello tomemos de referencia la barra AB:

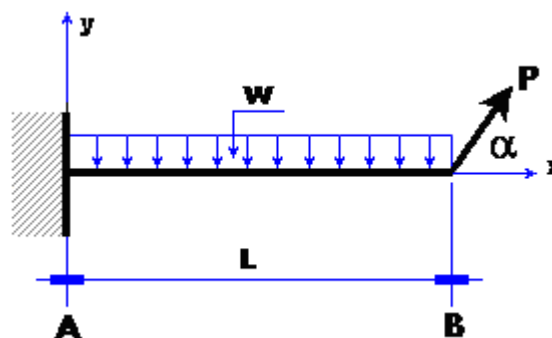


Figura 1.5.9

La barra que se muestra se define como una viga empotrada en A con carga uniformemente distribuida y carga concentrada. Para tener elementos de análisis, los efectos que produce el sistema de carga externo que se muestran a continuación, nos permite identificar los desplazamientos que pueden ser restringidos:

Por la acción de la componente de la fuerza P en la dirección horizontal representada por P_x ; existe un vínculo, una componente reactiva o simplemente una reacción en el apoyo A representado por R_1 , que restringe el desplazamiento lineal.

Por la acción de las cargas externas en la dirección vertical, en el apoyo A se restringe el desplazamiento lineal vertical al través del vínculo R_2 y el desplazamiento angular al través del vínculo M_A . En suma, el apoyo que restringe los desplazamientos que se presentan en un elemento estructural se define como empotramiento

Apoyo de empotramiento:

Está representado en el punto A, al que se le asocia tres vínculos; R_1 , R_2 y M_A , con cero grados de libertad

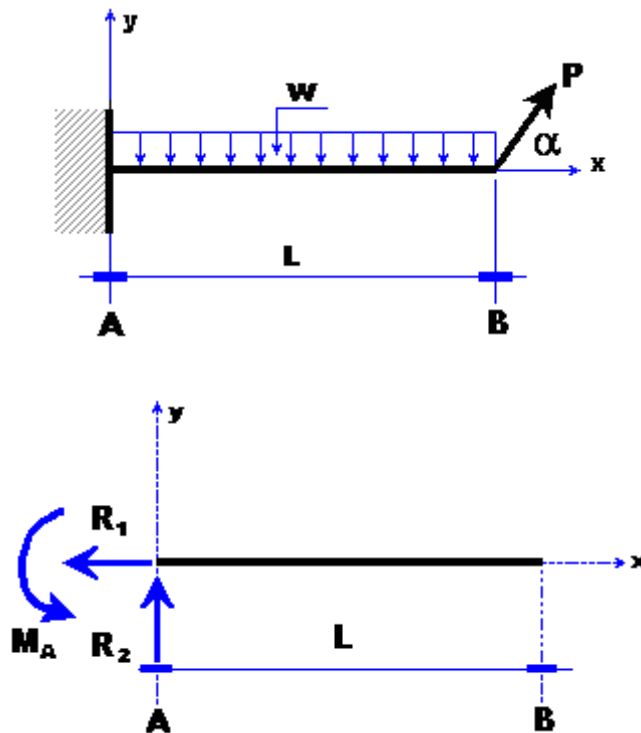


Figura 1.5.10

Finalmente, la variación del tipo de apoyos en una estructura plana, los vínculos y grados de libertad se identifican en la siguiente tabla:

Apoyo	Vínculos	Grados de Libertad	Diagrama de cuerpo libre
Móvil	Uno	Dos	<p>apoyo móvil</p>
Fijo o Articulación	Dos	Uno	<p>Apoyo fijo o articulación</p>
Empotramiento o Nodos elástico	Tres	Cero	<p>Empotramiento o Nodos elástico</p>

Figura 1.5.11

1.6 Condiciones de isostaticidad

En el contexto de la teoría de la estática, se dice que un sistema de fuerzas se encuentra en equilibrio cuando su resultante es igual a cero; esto es:

$$\sum F = F_R = 0 \text{ y } \sum M = M_R = 0$$

Entendiendo que el resultante está conformado por dos elementos: La fuerza y el momento resultante, por lo tanto, para que se cumpla lo anterior, ambos elementos deberán ser igual a cero simultáneamente (recuerda el concepto de equivalencia de sistemas de fuerzas el cual fue abordado en la asignatura de la estática).

En base de lo anterior, las condiciones de equilibrio para una estructura en el plano están representadas hasta por tres Ecuaciones, que al relacionarlas con el número de Incógnitas que contiene el sistema, el resultado que se obtenga se le define como condiciones de isostaticidad; las que se presentan en tres escenarios:

Primero:

Cuando el número de las Incógnitas que contiene el sistema de fuerzas en su conjunto es menor al número de las Ecuaciones de equilibrio que se le puede asociar: $I < E$; en éste contexto, se dice que es, una estructura hipostática; en consecuencia, no tiene solución con los principios de la estática para el efecto, observemos las siguientes figuras:

Idealizando una viga recta horizontal simplemente apoyada en **A** y **D** con carga concentrada **P** y uniformemente distribuida **w**, las condiciones de isostaticidad, se identifican con las cargas activas **P** y **w** y las cargas reactivas representadas por los vínculos o reacciones en cada apoyo.

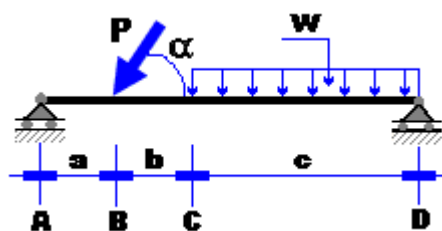


Figura 1.6.1

Identificación de las cargas activas:

Están representadas por las fuerzas externas que actúan sobre la estructura; esto es: $P \operatorname{sen} \alpha$ como la componente vertical de la fuerza P ; y $P \operatorname{cos} \alpha$ como la componente horizontal; en forma análoga, $F = wc$ es la fuerza resultante equivalente a la carga uniformemente distribuida que actúa sobre el tramo "CD" con magnitud igual al área bajo la forma de la carga (rectángulo).

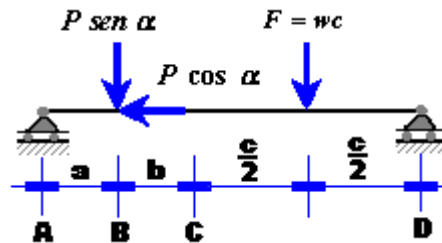


Figura 1.6.2

Identificación de las cargas reactivas:

Están representadas por los vínculos o reacciones que contienen los apoyos en A y D respectivamente. Y dado que en ambos puntos se encuentran apoyos móviles, éstos contienen un vínculo y dos grados de libertad cada uno de ellos; por lo tanto, las cargas reactivas están definidas por R_1 y R_2 , tal como se muestran en la siguiente figura:

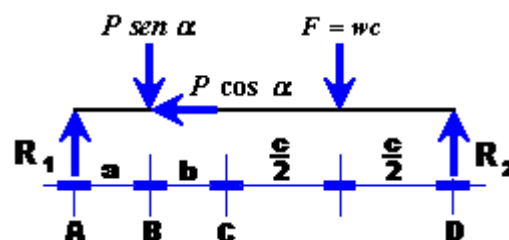


Figura 1.6.3

Identificación del sistema de fuerzas en su conjunto:

Esta integrado por un sistema de fuerzas generales en el plano compuesto por tres cargas activas $P \operatorname{sen} \alpha$, $P \operatorname{cos} \alpha$ y F y dos cargas reactivas R_1 y R_2 .

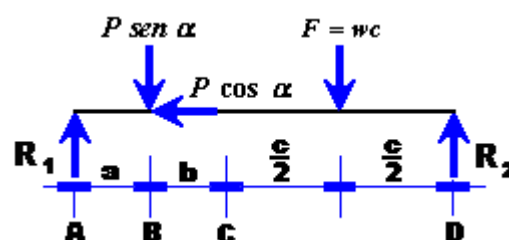


Figura 1.6.4

En base de lo anterior, en el sistema de fuerzas generales en el plano se identifica:

Número de Ecuaciones de equilibrio: $E = 3$; representadas por:

- Suma de las fuerzas en la dirección del eje X: $\sum F_x = 0$
- Suma de las fuerzas en la dirección del eje Y: $\sum F_y = 0$
- Suma de los momentos en la dirección del eje Z: $\sum M_z = 0$

Número de Incógnitas que contiene el sistema: $I = 2$; representadas por:

- La reacción o vínculo en el apoyo A: R_1
- La reacción o vínculo en el apoyo D: R_2

Condiciones de isostaticidad:

Tomando en consideración el número de incógnitas ($I = 2$) y el número de las ecuaciones de equilibrio estático ($E = 3$) que contiene el sistema en su conjunto, las condiciones de isostaticidad están representadas por la relación que existe entre ambos números, esto es: $I < E$; con ésta relación, la estructura se define como una estructura hipostática, en consecuencia no tiene solución; veamos porqué:

Si la diferencia entre las ecuaciones de equilibrio estático y las incógnitas que contiene el sistema de fuerzas en su conjunto de la estructura que se analiza, se le define como grado de libertad de la estructura ($E - I = G.L.E. = 3 - 2 = 1$) igual a 1, nos indica que la estructura en la dirección horizontal el desplazamiento no podrá ser restringido, siendo generado por la componente horizontal de la fuerza externa actuando en B ($P \cos \alpha$) y por el tipo de los apoyos (móviles) que se localizan en A y D, a los que se les asocia un vínculo (en la dirección vertical) y dos grados de libertad (en la dirección horizontal y angular). Para ello, identifíquelos en la siguiente figura:

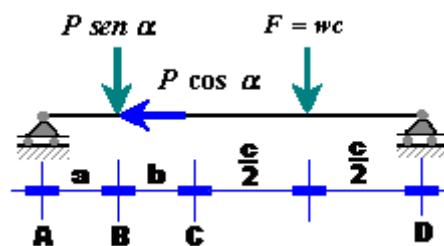


Figura 1.6.5

El efecto anterior se demuestra al aplicar la condición de equilibrio en la dirección horizontal: $\sum F_x = 0$, que, al sustituir las fuerzas horizontales que actúan en el sistema, se obtiene una ecuación con la fuerza externa $P \cos \alpha$ únicamente; por lo tanto no se logra el equilibrio, en consecuencia la estructura no tiene solución. Resultado que permite identificar a la estructura como una estructura inestable.

Segundo:

Cuando el número de las Incógnitas que contiene el sistema de fuerzas en su conjunto es igual al número de las Ecuaciones de equilibrio; la relación entre ellos es: $I = E$; en éste contexto, se dice que es una estructura isostática; estructura que para su análisis tiene una única solución. Para demostrar lo anterior tomaremos de referencia la misma estructura que se utilizó para el apartado anterior considerando ahora en A un apoyo libre:

La viga que se muestra es una estructura simplemente apoyada en A y D con un apoyo fijo y móvil respectivamente. Con el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la siguiente figura se identifican las cargas activas y las cargas reactivas:

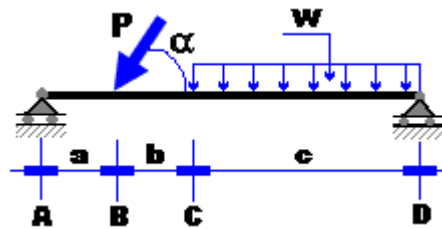


Figura 1.6.6

Cargas activas: Son tres, dos en la dirección vertical ($P \sin \alpha$ y F_w) y una en la dirección horizontal ($P \cos \alpha$)

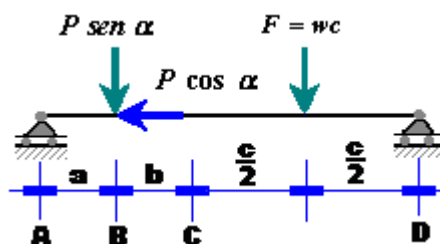


Figura 1.6.7

Cargas reactivas: Son tres; dos en la dirección vertical R_1 , R_3 , representadas por los vínculos del apoyo en A y en D respectivamente que equilibran la acción de las dos cargas activas verticales; y una en la dirección horizontal R_2 , representada por el vínculo del apoyo en A que equilibra la acción de la carga activa horizontal.

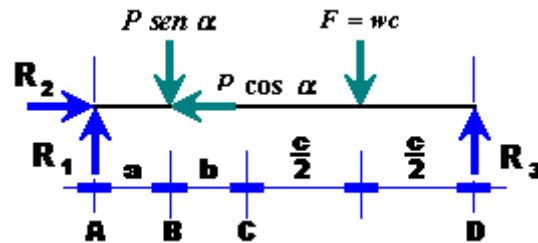


Figura 1.6.8

Identificación del sistema de fuerzas: Sistema de fuerzas generales en el plano, conformado por las cargas activas y las cargas reactivas; a este sistema se le asocian tres ecuaciones de equilibrio estático, y tres incógnitas representadas por las componentes reactivas de los apoyos.

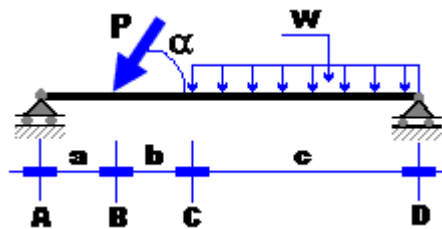


Figura 1.6.9

En base de lo anterior, se tiene:

Sistema de fuerzas: Generales en el plano.

Ecuaciones de equilibrio: Tres, representadas por: $\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum M_z = 0$

Número de incógnitas que contiene el sistema: Tres; R_1 ; R_2 ; y R_3 que están representadas por los vínculos o reacciones en los apoyos.

Condiciones de isostaticidad: $I = E$, sustituyendo resulta $3 = 3$ por lo tanto tiene una única solución; para el efecto, si se aplica la sumatoria de ecuaciones en la dirección del eje "X" se determina la reacción R_2 ; con suma de momentos respecto al punto A, se determina la reacción R_3 en B; y finalmente con suma de fuerzas en la dirección del eje "Y", se determina la reacción R_1 en A.

En base de lo anterior se dice que es una estructura isostática

Tercero:

Cuando el número de las Incógnitas que contiene el sistema de fuerzas en su conjunto es mayor al número de las Ecuaciones de equilibrio; la relación entre ellos es: $I > E$; en éste contexto, se dice que es una estructura hiperestática; estructura que para su análisis tiene varias soluciones. Para demostrar lo anterior tomaremos de referencia la misma estructura que se utilizó para el apartado anterior considerando ahora en A un apoyo de empotramiento:

La estructura que se muestra se define como una viga empotrada en A y apoyada en D respectivamente, la que soporta un sistema de cargas externo compuesto por una carga concentrada e inclinada en B y una carga uniformemente distribuida actuando sobre el tramo CD.

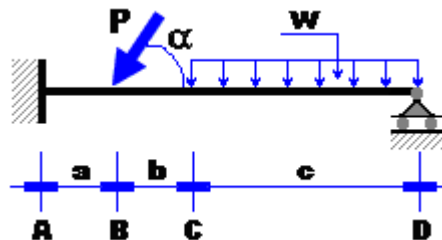


Figura 1.6.10

Un diagrama de cuerpo libre nos permite identificar las cargas activas y los vínculos de cada uno de los apoyos los que se definen también como cargas reactivas. Para ello observa la figura.

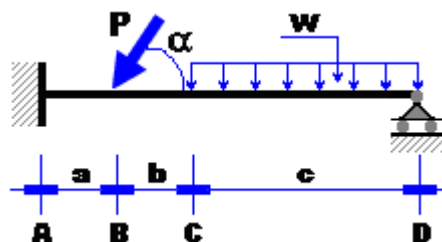


Figura 1.6.11

Del diagrama de cuerpo libre que se observa, éste conforma un sistema de fuerzas generales en el plano, conteniendo cuatro incógnitas representadas por R_1 , R_2 , R_3 , y M_A al que se le asocia tres ecuaciones de equilibrio estático; en consecuencia las condiciones de isostaticidad serán:

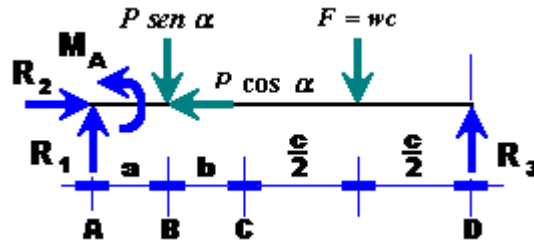


Figura 1.6.12

Condiciones de isostaticidad: $I > E$ por lo tanto la estructura se define como estructura hiperestática o estructura estáticamente indeterminada en consecuencia tiene varias soluciones. Por otro lado, la diferencia entre el número de las incógnitas y el número de las ecuaciones $I - E = 4 - 3 = 1$ se define como grado de isostaticidad.

De lo anteriormente expuesto, se ha podido demostrar los tres escenarios que se pueden presentar en el análisis de una estructura para determinar las condiciones de isostaticidad, que a manera de resumen se expone a continuación:

Condiciones de isostaticidad:	Diferencia entre las incógnitas y ecuaciones de equilibrio	Tipo de estructura
$I < E$	$E - I =$ grado de libertad de la estructura	HIPOSTÁTICA o estructura inestable
$I = E$	CERO	ISOSTÁTICA o estáticamente determinada
$I > E$	$I - E =$ grado de isostaticidad de la estructura	HIPERESTÁTICA o estáticamente indeterminada

Figura 1.6.13

Procedimiento de análisis:

Para poder determinar las condiciones de isostaticidad, se sugiere el siguiente procedimiento: A partir de la estructura que se pretende analizar, se traza un diagrama de cuerpo libre para identificar:

- Cargas activas, representadas por el sistema de fuerzas externo actuando sobre la estructura
- Cargas reactivas, representadas por los vínculos o reacciones de los apoyos que sustentan a la estructura
- Sistema de fuerzas, que podrá ser un sistema de fuerzas paralelas en el plano o un sistema de fuerzas generales en el plano.
- El número de las incógnitas que contiene el sistema (vínculos o reacciones)
- El número de las ecuaciones de equilibrio que se le asocia al sistema de fuerzas definido
- Con la relación que exista entre las incógnitas y el número de las ecuaciones de equilibrio se podrá identificar las condiciones de isostaticidad.
- Con el resultado anterior se tiene elementos de análisis para definir el grado de libertad de la estructura o el grado de isostaticidad
- Y finalmente se define el tipo de estructura que podrá ser, hipostática, isostática o hiperestática.

1.7 Elementos mecánicos

Si idealizamos un elemento estructural que se encuentra en equilibrio bajo la acción del sistema de fuerzas externo representados por las cargas "P"; como se muestra en la figura, ¿Que sucede, si sobre el plano de corte imaginario separamos el cuerpo?

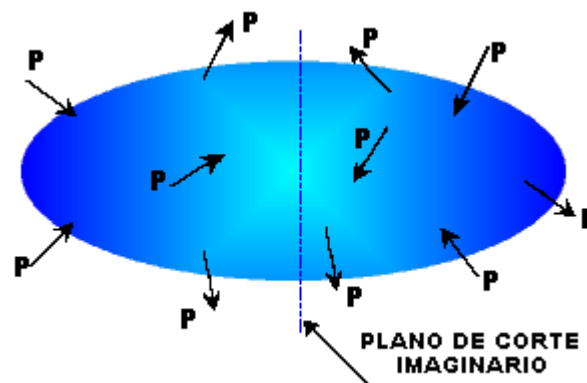


Figura 1.7.1

¿Estaría de acuerdo en aceptar que el efecto que se genera al separar el cuerpo sobre el plano de corte imaginario es el rompimiento del equilibrio externo?, si es así, entonces no se cumple el principio de que "si un cuerpo bajo la acción de un sistema de fuerzas externo se encuentra en equilibrio, cualquier porción del cuerpo también deberá de encontrarse en equilibrio"; por lo tanto, será necesario equilibrar la porción izquierda y derecha a través de un **sistema resultante interno** localizado en el centroide de la sección transversal que sea equivalente a la acción del sistema de fuerzas externo de cada porción. Para lo anterior observe la figura:

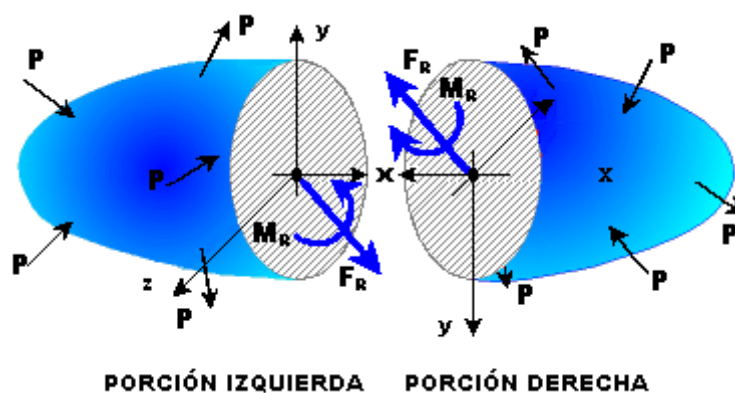


Figura 1.7.2

Porción izquierda: Sobre el centroide de la sección transversal se localiza un sistema resultante interno integrado por la fuerza resultante F_R y por el momento resultante interno M_R , equivalente a la acción del sistema de fuerzas externo que actúa en la misma porción izquierda.

Porción derecha: En forma análoga y sobre el centroide de la sección transversal, se localiza un sistema resultante interno equivalente a la acción de las fuerzas externas que actúan sobre la porción derecha; distinguiéndose éste sistema resultante interno, por tener sentido contrario al de la porción izquierda para que exista el equilibrio interno entre ambas secciones.

En base de lo anterior y dado que estamos abordando el concepto de resultante, es de suponerse que éste tiene sus componentes en la dirección de los ejes X, Y, y Z respectivamente, tanto para la fuerza como para el momento resultante; tomando como referente la porción izquierda, las componentes se observan en la siguiente figura:

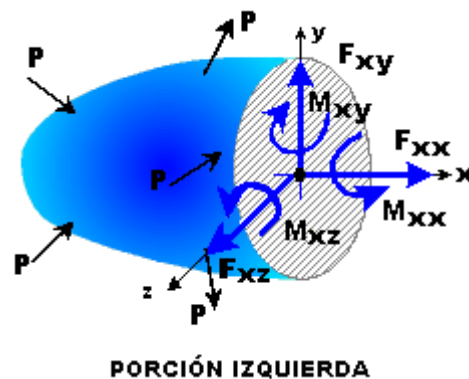


Figura 1.7.3

En consecuencia, las componentes del resultante interno (tres fuerzas componentes internas y tres momentos componentes internos); se les define como elementos mecánicos; que por sus efectos se identifican:

Fuerza normal (N): F_{xx} Fuerza componente interna que actúa perpendicular a la sección transversal; se identifica por dos efectos: tensión o compresión.

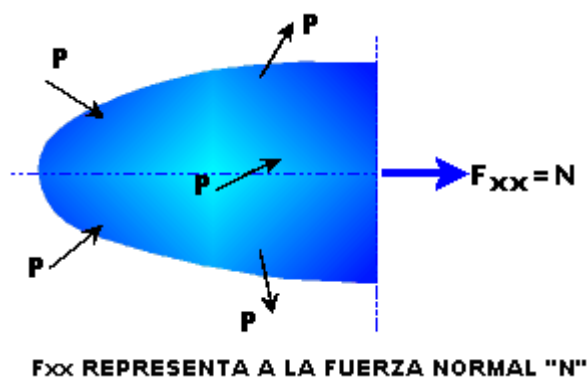


Figura 1.7.4

Fuerza cortante (V): F_{xy} F_{xz} componentes internas que actúan paralelamente a la sección transversal; se identifican por su efecto de corte.

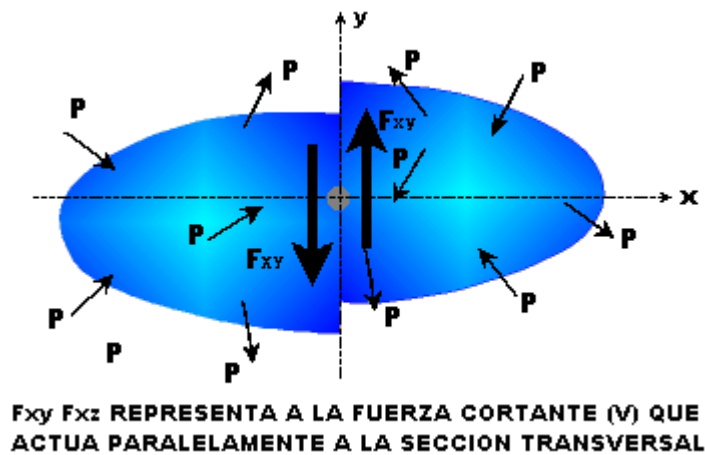


Figura 1.7.5

Momento flexionante (M): M_{xy} M_{xz} momentos componentes internos que actúan paralelamente al eje longitudinal, que se les asocia un efecto de flexión.

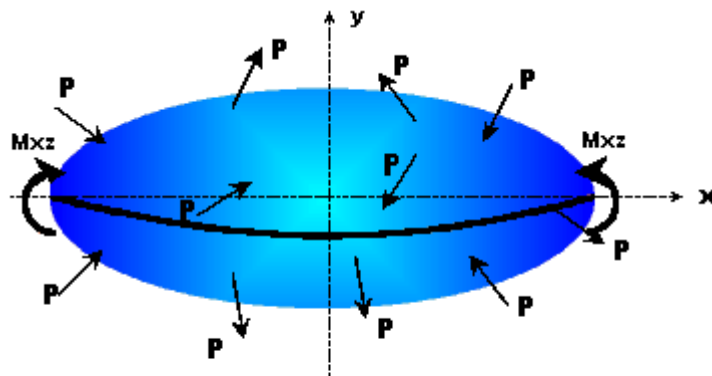


Figura 1.7.6

Momento torsionante (T): M_{xx} momento componente interno que actúa perpendicular a la sección transversal; se le identifica por su efecto de torsión al eje longitudinal del elemento estructural.

Convención de signos para los elementos mecánicos por sus efectos: Respecto al signo que se le asocia a un elemento mecánico, éste será de acuerdo al efecto que genera sobre el elemento estructural. Para ello, consideremos una viga simplemente apoyada con carga concentrada al centro del claro como se muestra en la figura.

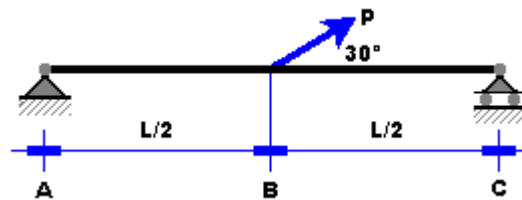


Figura 1.7.7

Con un diagrama de cuerpo libre, nos permitirá identificar el sistema activo y el sistema reactivo

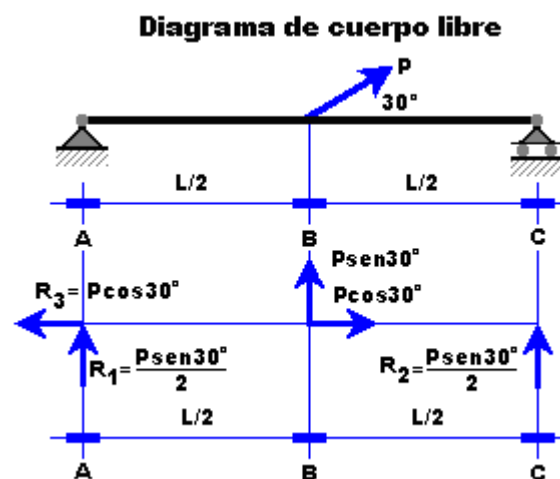


Figura 1.7.8

Tomando de referencia el diagrama de cuerpo libre, sobre el tramo AB se localiza una sección perpendicular al eje longitudinal a una distancia X del eje A, la porción izquierda de la estructura se observa en la figura:

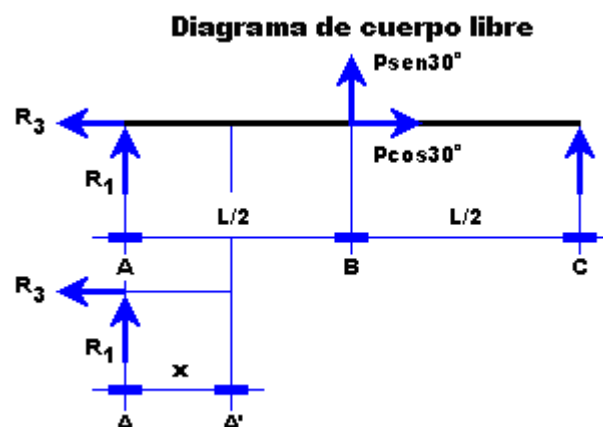


Figura 1.7.9

En base de lo anterior, la porción izquierda no se encuentra en equilibrio; por lo que, para equilibrarla se requiere un sistema interno integrado por diferentes elementos mecánicos, esto es: La acción de R_1 genera una fuerza interna vertical que actúa paralelamente a la sección transversal la que se define como fuerza cortante $V_{A'}$; asimismo, la fuerza externa R_1 , y la interna $V_{A'}$ producen un giro a la porción de la estructura generando un par interno representado por $M_{A'}$, que se define como momento flexionante; finalmente, la acción de la fuerza externa R_3 genera una fuerza interna perpendicular a la sección transversal $N_{A'}$, que se define como la fuerza normal; lo anterior se representa en la siguiente figura:

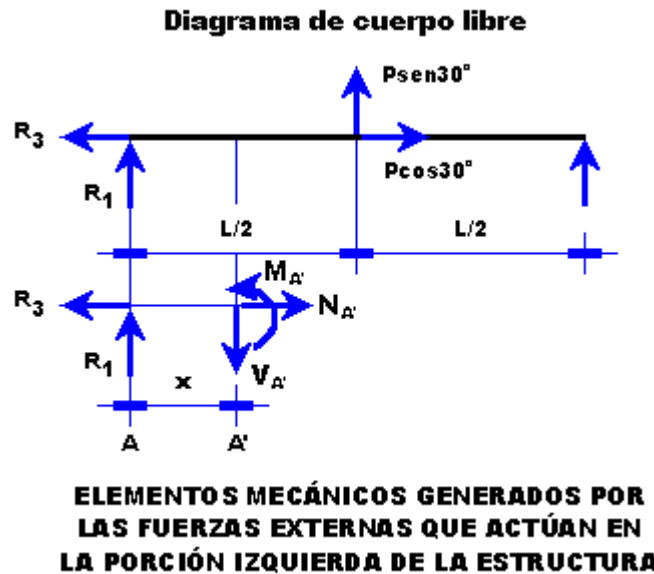


Figura 1.7.10

De lo anterior se deduce que los elementos mecánicos generados por el sistema externo que actúa sobre la porción derecha de la estructura, se equilibran con los generados en la porción izquierda; esto es:

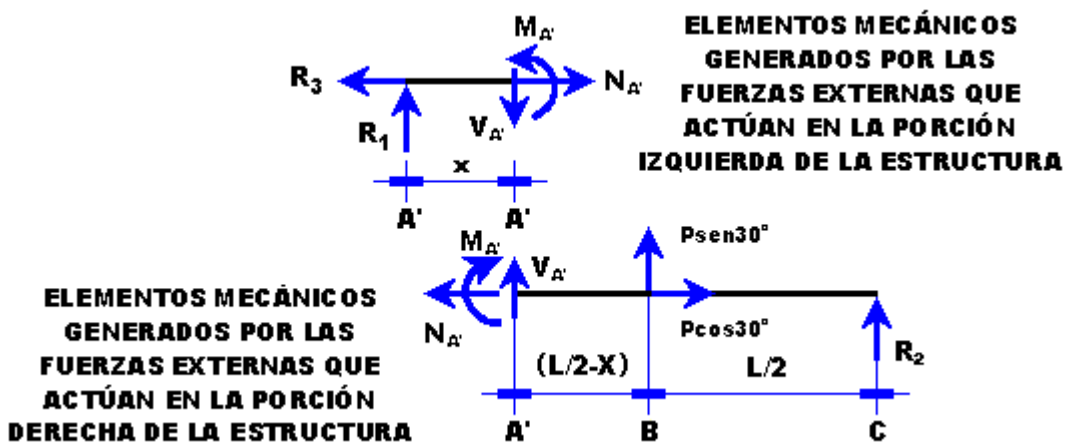


Figura 1.7.11

Idealizando sobre la sección A' un elemento de longitud dx , los elementos mecánicos generados por el sistema externo de cada porción se muestra en la siguiente figura:

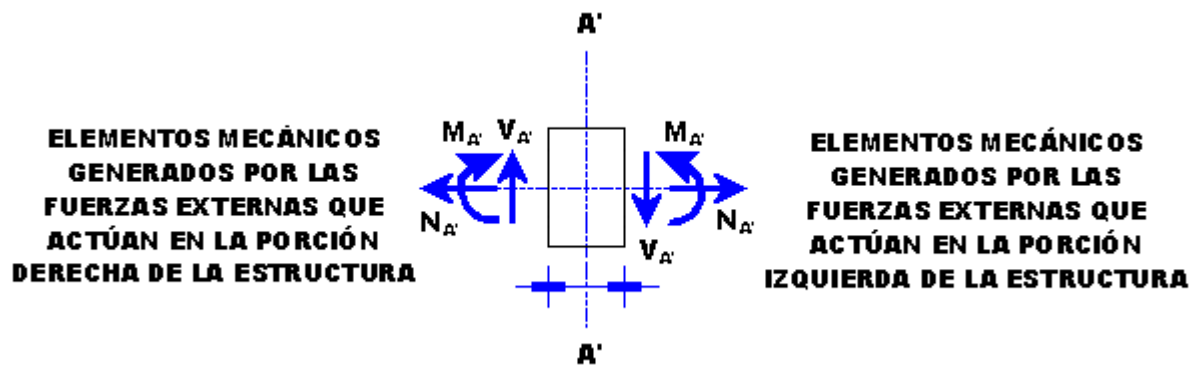


Figura 1.7.12

A continuación abordaremos cada uno de los elementos mecánicos para visualizar sus efectos que nos permitan asociarle el signo correspondiente:

Fuerza normal:

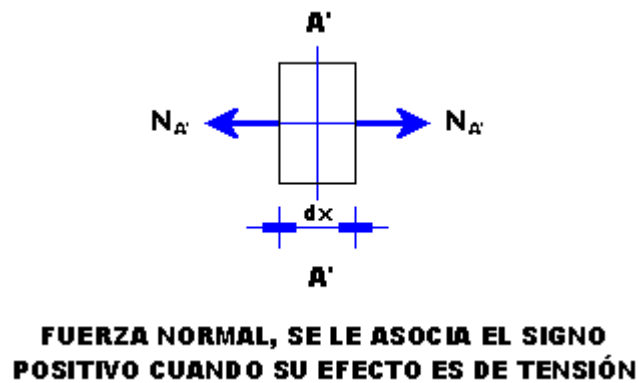
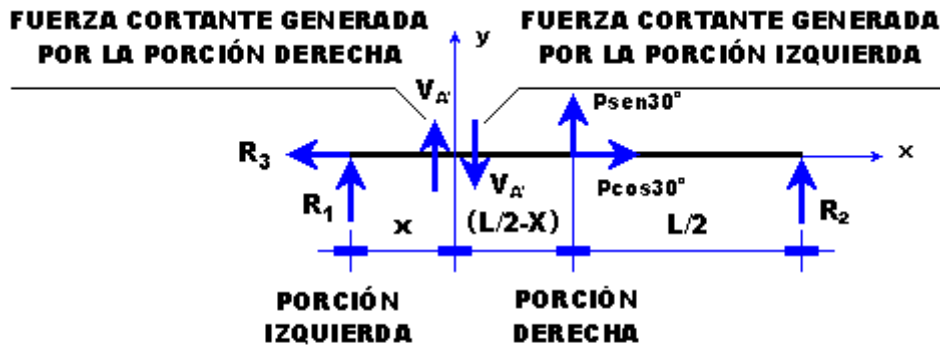
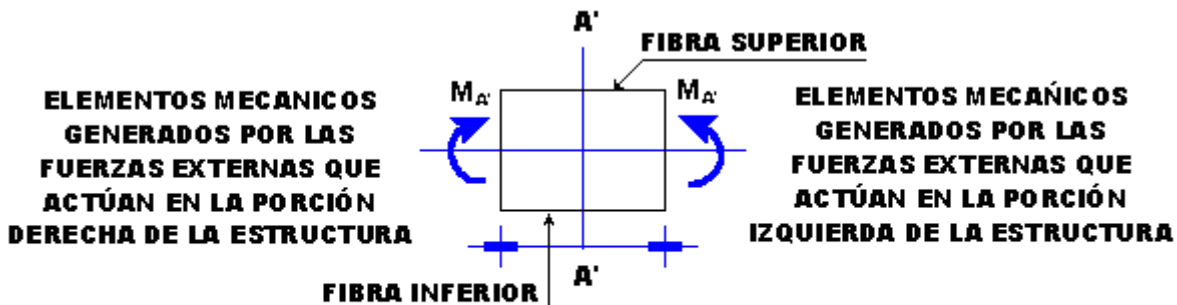


Figura 1.7.13

Fuerza cortante:

LA FUERZA CORTANTE SE LE ASOCIA EL SIGNO POSITIVO CUANDO LA CARGA EXTERNA QUE ACTÚA SOBRE LA PORCIÓN IZQUIERDA DE LA ESTRUCTURA TIENE UNA DIRECCIÓN VERTICAL EN SENTIDO ASCENDENTE

Figura 1.7.14

Momento flexionante:

MOMENTO FLEXIONANTE SE LE ASOCIA EL SIGNO POSITIVO CUANDO EL EFECTO EN LA FIBRA SUPERIOR ES DE COMPRESIÓN

Figura 1.7.15

2011

ANÁLISIS DE VIGAS



ANÁLISIS DE VIGAS

2.1 Procedimiento de análisis

Los elementos mecánicos son generados por la acción de un sistema de fuerzas externo que actúa en una estructura, en éste capítulo plantearemos el procedimiento de análisis para trazar los diagramas de variación correspondiente, contemplando para ello dos procedimientos; la deducción de las funciones de los elementos mecánicos (método de las secciones o análisis funcional) y la relación de la carga externa con la fuerza cortante y la fuerza cortante con el momento flexionante (método de suma de áreas o análisis relacional). Para ello, y tomando de base la aplicación de una carga concentrada, de una carga uniformemente distribuida y de una carga distribuida de forma triangular sobre una estructura (viga o barra), identificaremos la variación de la fuerza cortante, la fuerza normal y el momento flexionante expresándola en su respectivo diagrama.

Análisis funcional: Tiene como objetivo encontrar la magnitud de los elementos mecánicos que se presentan en una estructura isostática a través de la deducción de sus funciones respectivas en el contexto de un parámetro definido; en consecuencia, el análisis para determinar éstas funciones está limitado por la variación de las cargas externas que actúan en la estructura. Para demostrar lo anterior proponemos:

PRIMERO: A partir de la estructura planteada, se construye un diagrama de cuerpo libre para identificar:

El sistema de fuerzas: Dado que se analizan estructuras planas, el sistema de fuerzas en su conjunto podrá ser un sistema de fuerzas paralelo o un sistema de fuerzas generales en el plano.

El número de ecuaciones de equilibrio estático: En consecuencia de lo anterior, el número de las ecuaciones de equilibrio estático para el sistema de fuerzas en su conjunto, se identificarán DOS para el sistema de fuerzas paralelo o TRES para el sistema de fuerzas generales en el plano.

El número de incógnitas: Están representadas por las componentes reactivas (o vínculos) en cada uno de los apoyos de la estructura y considerando su sistema de apoyos se podrá identificar: UNA incógnita representada por la componente reactiva de un apoyo móvil; DOS incógnitas representadas por las componentes reactivas en un apoyo fijo; y TRES incógnitas cuando se tiene un apoyo identificado como empotramiento.

Las condiciones de isostaticidad: Identificado el número de las incógnitas y el número de las ecuaciones de equilibrio estático que contiene el sistema en su conjunto, se tendrán elementos de análisis para abordar estructuras cuando las condiciones de isostaticidad sean iguales; esto es: $I = E$.

El tipo de estructura: Con el resultado anterior, estaremos en condiciones para abordar el análisis de una estructura que se define como Isostática.

SEGUNDO: Aplicando las condiciones de equilibrio sobre el diagrama de cuerpo libre, se determinan las reacciones para encontrar el equilibrio externo.

TERCERO: Analizando la estructura de izquierda a derecha se identifican los tramos que presenten cambios de forma en la carga externa, para que, sobre cada uno de ellos, se

construya un diagrama de cuerpo libre indicando la acción de las cargas externas (que actúan sobre la porción izquierda) las que se habrán de equilibrar con un resultante interno, identificando en éste, las componentes que definen a los elementos mecánicos que actúan en el tramo respectivo.

CUARTO: Aplicando las condiciones del equilibrio estático se deducen las funciones de los elementos mecánicos que se presentan en cada tramo, y al sustituir en éstas los parámetros de variación de la distancia X se obtienen las magnitudes respectivas.

QUINTO: Con el resultado del punto anterior se procederá a trazar el diagrama de variación para cada elemento mecánico considerando:

Línea base de la fuerza normal, fuerza cortante o momento flexionante: A partir de un marco de referencia, sobre el eje horizontal se traza la línea base sobre la que se indicarán los parámetros de variación de la distancia " X "; que se relacionarán sobre el eje vertical en el que se localizarán las magnitudes de los elementos mecánicos respectivos.

Trazo de la variación de los elementos mecánicos: Con los puntos encontrados del resultado anterior, se une punto a punto obteniéndose la variación que estará definida por las funciones de los elementos mecánicos, identificándose en éstas, las siguientes características:

Para cuando la **carga externa es nula**, la función del diagrama de la fuerza cortante es una línea horizontal y paralela al eje longitudinal a través de una ecuación de la forma " $y =$ " y la del diagrama del momento flexionante se representa por una línea inclinada que obedece a una ecuación de la forma " $y = ax + b$ ".

Para cuando la **carga externa es uniformemente distribuida** la función del diagrama de la fuerza cortante se representa por una línea inclinada por estar condicionada a una ecuación de la forma " $y = ax + b$ " y la del diagrama del momento flexionante por una línea curva de segundo grado mediante una ecuación de la forma " $y = ax^2 + bx + c$ ".

Para cuando la **carga externa es repartida de forma triangular**, la función del diagrama de la fuerza cortante se representa por una línea curva de segundo grado por contener una ecuación de la forma " $y = ax^2 + bx + c$ " y la del diagrama del momento flexionante por una línea curva de tercer grado con una ecuación " $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ".

Valores críticos: En cada diagrama de variación de los elementos mecánicos como resultado del punto anterior, se habrá de identificar el **valor máximo** (positivo y negativo), **mínimo** y **cero** todos, referidos a la línea base respectiva; en éste supuesto se tiene: Cuando la fuerza cortante pase por cero, se asocia en el diagrama del momento flexionante un valor máximo que puede ser positivo o negativo; y cuando el momento flexionante pase por cero el punto se define como punto de inflexión.

2.2 Viga simplemente apoyada con carga concentrada al centro del claro

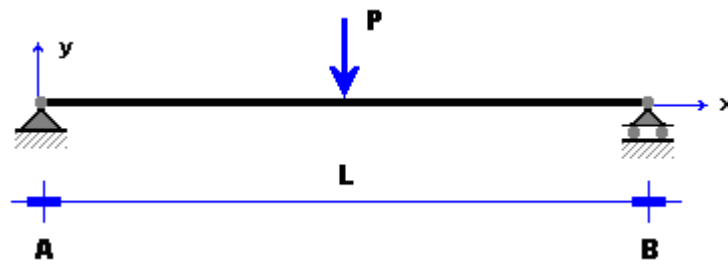


Figura 2.2.1

Diagrama de cuerpo libre:

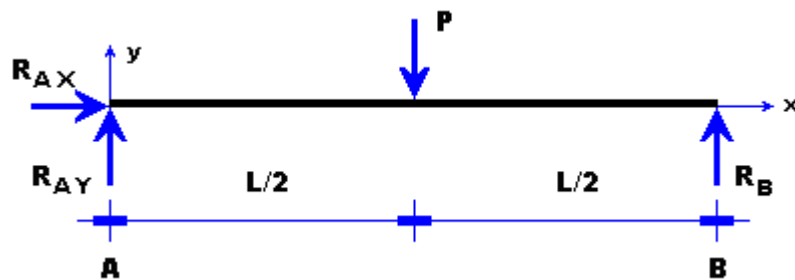


Figura 2.2.2

Cargas activas: Representadas por las cargas externas que actúan sobre la estructura

Cargas reactivas: Representadas por los vínculos de cada apoyo

Sistema de fuerzas: Paralelas en el plano

Número de ecuaciones de equilibrio: TRES

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_A = 0$$

Número de incógnitas: Tres; R_{AX} , R_{AY} y R_B , donde $R_{AX}=0$, es nula ya que no existe ninguna componente en la dirección del eje longitudinal

Condiciones de Isostaticidad: Incógnitas = 3, Ecuaciones = 3, Incógnitas = Ecuaciones

Tipo de estructura: Isostática

Cálculo de reacciones: Se obtienen aplicando las condiciones de equilibrio sobre el diagrama de cuerpo libre

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad R_{AX} = 0 \quad \downarrow \\ \sum M_A = 0 \quad P \frac{L}{2} - R_B L = 0 \quad \therefore R_B = \frac{P}{2} \quad \downarrow \\ \sum F_y = 0 \quad R_{AY} - P + \frac{P}{2} = 0 \quad \therefore R_{AY} = \frac{P}{2} \quad \downarrow \end{aligned}$$

La estructura equilibrada por la acción de la carga externa será:

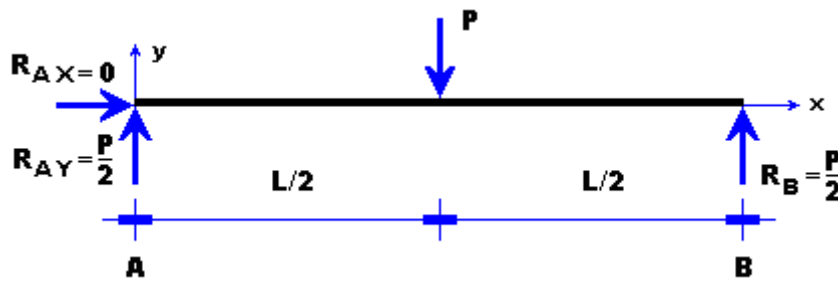


Figura 2.2.3

Cálculo de los elementos mecánicos: Considerando la viga equilibrada:

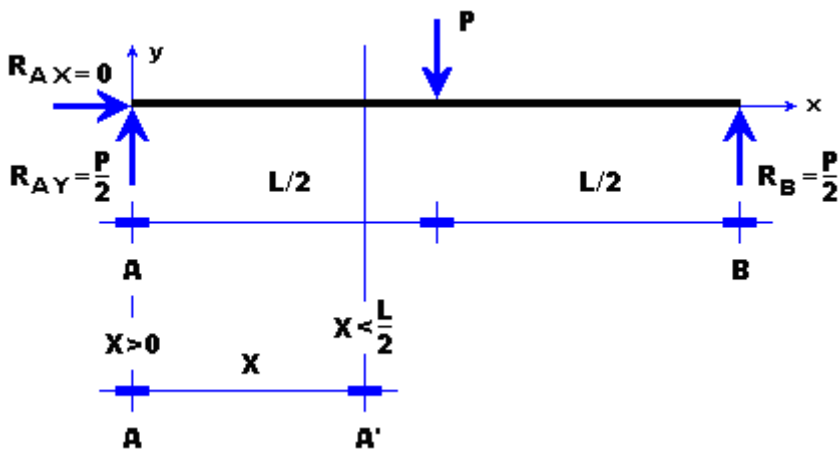


Figura 2.2.4

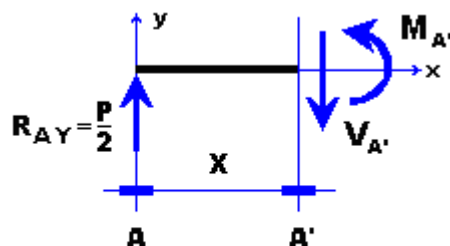
El efecto que genera la acción del sistema de fuerzas externo son los elementos mecánicos, en consecuencia la variación de éstos, estará en función de las cargas externas.

Si se observa la estructura, a partir de un elemento diferencial (**cuando $X > 0$**) del punto A , la carga externa que esta actuando es la reacción en A

Por otro lado, desde $X > 0$ hasta un elemento diferencial antes de B cuando $X < L/2$ no existe carga externa

Por lo anterior, los elementos mecánicos que genera la reacción en A , se obtienen a través del análisis del tramo AA' en función de una distancia X

El diagrama de cuerpo libre del tramo AA' a partir de una sección perpendicular localizada a una distancia X de A , se presenta en la siguiente figura:



Porción izquierda de la estructura

Figura 2.2.5

Para equilibrar la acción de la reacción en A se requiere de una fuerza interna vertical y paralela a la sección transversal, que se define como **fuerza cortante**.

Ahora por la acción de la reacción y de la fuerza cortante, que generan un par, para equilibrarlo se necesita un momento interno que se define como **momento flexionante**.

Aplicando las condiciones de equilibrio estático sobre el diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la estructura, se obtienen las ecuaciones que definen a los elementos mecánicos que se presentan sobre el tramo AA':

Fuerza cortante:

$$\sum F_Y = 0 \quad \frac{P}{2} - V_{A'} = 0 \quad \therefore V_{A'} = \frac{P}{2} \quad \downarrow$$

La ecuación que determina la fuerza cortante en A', se define como la **función de la fuerza cortante** representada por una línea horizontal paralela al eje longitudinal.

$$\sum M_{A'} = 0 \quad \frac{P}{2}X - M_{A'} = 0 \quad \therefore M_{A'} = \frac{P}{2}X \quad \downarrow$$

La ecuación del momento en A' que se obtuvo, se define como la **función del momento flexionante** representada por una línea inclinada.

Parámetros de la variable "X":

$$0 \leq X \leq \frac{L}{2}$$

Los elementos mecánicos que se presentan en el tramo AA', se obtienen al sustituir en las funciones correspondientes los parámetros de X.

$$\text{Si } X > 0 \quad V_{A'} = \frac{P}{2} \quad \downarrow$$

$$\text{Si } X = 0 \quad M_{A'} = 0 \quad \downarrow$$

$$\text{Si } X < L/2 \quad V_{A'} = \frac{P}{2} \quad \downarrow$$

$$\text{Si } X = \frac{L}{2} \quad M_{A'} = \frac{P}{2} \frac{L}{2} \quad \therefore M_{A'} = \frac{PL}{4} \quad \downarrow$$

Parámetro de "X"	Función de la fuerza cortante	Función del momento flexionante
$X = 0$	$\frac{P}{2}$	0
$X = \frac{L}{4}$	$\frac{P}{2}$	$\frac{PL}{8}$
$X = \frac{L}{2}$	$\frac{P}{2}$	$\frac{PL}{4}$

Tomando de referencia un elemento diferencial entre $X < L/2$ y $X > L/2$ actúa la carga P ; en consecuencia la magnitud de la fuerza cortante que se obtuvo del lado izquierdo y del lado derecho será de $-P/2$ la que se mantiene constante hasta $X < L$; lo anterior nos conduce a analizar el tramo AB' en función de una distancia X que en términos de un diagrama de cuerpo libre se muestra en la siguiente figura.

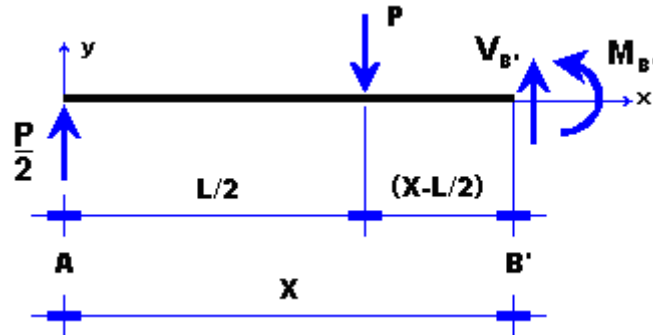


Figura 2.2.6

Aplicando las condiciones de equilibrio:

$$\sum F_Y = 0 \quad \frac{P}{2} - P + V_{B'} = 0 \quad \therefore V_{B'} = \frac{P}{2}$$

La ecuación de la fuerza cortante en B' , es la **función de la fuerza cortante** para el tramo AB'

$$\begin{aligned} \sum M_{B'} = 0 \quad \frac{P}{2}X - P\left(X - \frac{L}{2}\right) - M_{B'} = 0 \\ M_{B'} = \frac{PL}{2} - \frac{P}{2}X \quad \downarrow \end{aligned}$$

La ecuación del momento flexionante en B' es la **función del momento flexionante** para el tramo AB' .

Parámetros de la variable X :

$$\frac{L}{2} \leq X \leq L$$

Sustituyendo en las funciones de la fuerza cortante y del momento flexionante, se obtiene la magnitud de los elementos mecánico sobre el tramo AB' :

$$\begin{aligned} \text{Si } X > \frac{L}{2} \quad V_B = \frac{P}{2} \quad \downarrow \\ \text{Si } X = \frac{L}{2} \quad M_B = \frac{PL}{2} - \frac{P}{2} \frac{L}{2} = \frac{2PL - PL}{4} \quad \therefore M_B = \frac{PL}{4} \quad \downarrow \\ \text{Si } X < L \quad V_C = \frac{P}{2} \quad \downarrow \\ \text{Si } X = L \quad M_C = \frac{PL}{2} - \frac{P}{2}L \quad \therefore M_C = 0 \quad \downarrow \end{aligned}$$

Parámetro de "X"	Función de la fuerza cortante	Función del momento flexionante
$X = \frac{L}{2}$	$-\frac{P}{2}$	$\frac{PL}{4}$
$X = \frac{3L}{4}$	$-\frac{P}{2}$	$\frac{PL}{8}$
$X = L$	$-\frac{P}{2}$	0

La magnitud de los elementos mecánicos que se han determinado en los puntos A y B respectivamente, a continuación se traza su respectivo diagrama.

Fuerza cortante:

Tomando de referencia la viga equilibrada:

Línea base de la fuerza cortante:

Se traza un marco de referencia compuesto por un eje horizontal "X" y un eje vertical "Y"; de tal forma que sobre el primero se ubica la distancia que se relacionará con la magnitud de la fuerza cortante sobre el eje vertical.

Si $x > 0$ y considerando un elemento diferencial sobre el eje "X" se dice que la fuerza cortante es en A con una magnitud igual a la reacción:

$$V_A = \frac{P}{2}$$

La magnitud **+P/2** en A, en el tramo antes de $X < L/2$, la fuerza cortante se mantiene constante, en consecuencia la fuerza cortante del lado izquierdo será **V = + P/2**.

En $X < L/2$ a $X > L/2$, actúa la carga externa "P" la cual genera un cambio violento de la fuerza cortante de **+P/2** a **-P/2**, por lo tanto ésta última, la fuerza cortante del lado derecho: **V = -P/2**.

Donde $X > L/2$ hasta un elemento diferencial antes de $X < L$, la magnitud de la fuerza cortante se mantiene constante paralela al eje longitudinal.

Finalmente y considerando un elemento diferencial antes de $X < L$ la fuerza cortante es de **-P/2** y cuando $X = L$, la fuerza cortante será igual a cero al actuar la reacción en A.

Valores críticos en el diagrama de variación de la fuerza cortante:

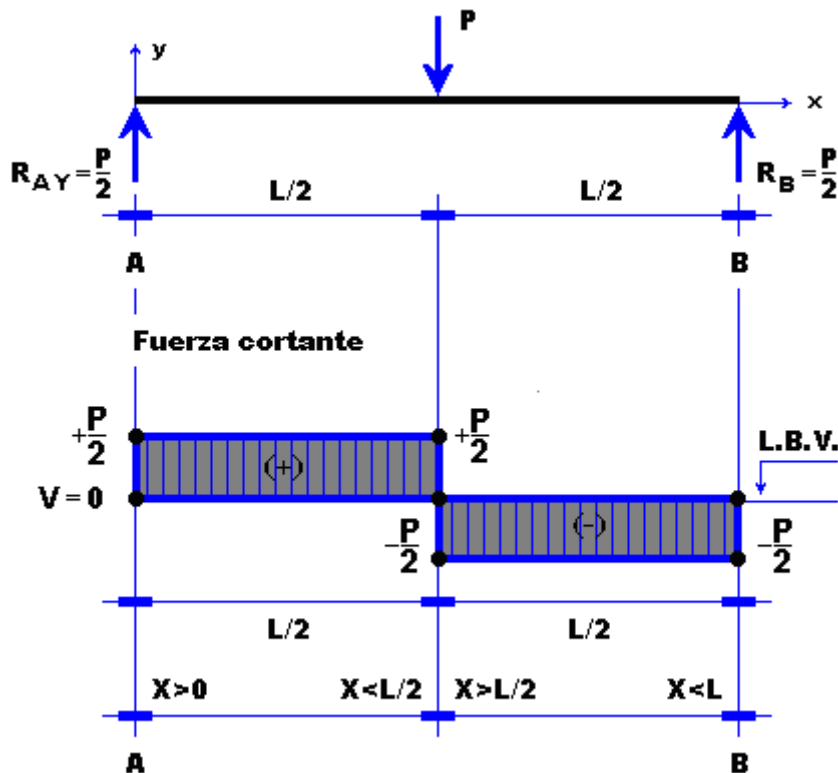


Figura 2.2.7

Fuerza cortante máxima:

Por la acción de la reacción en el punto A, ésta genera una **fuerza cortante máxima con efecto positivo**, magnitud que se mantiene constante del lado izquierdo en virtud de que en el tramo AA' no existe carga externa que la modifique.

Por la acción de la carga P , ésta genera un cambio violento de la fuerza cortante; por lo tanto del lado derecho alcanza una **magnitud máxima con efecto negativo** la que se mantiene hasta B por no existir carga externa que modifique dicho estado.

Y en el punto B , la fuerza cortante es generada por la reacción en B

Fuerza cortante cero:

Se presenta cuando la distancia X se localiza al centro del claro de la viga, que si se observa el diagrama, coincide con la acción de la fuerza externa P . Por lo tanto se deduce que el cambio violento de la fuerza cortante, es generada por la acción de una carga externa concentrada o puntual.

Función de la fuerza cortante:

De acuerdo a los resultados que se obtuvieron en el análisis funcional de los tramos AA' y AB' , la ecuación de la función para cada tramo, esta representada por una línea horizontal.

En base de lo anterior se concluye; cuando no existe carga externa sobre la estructura, la función de la fuerza cortante, esta representada por una línea horizontal.

Momento flexionante:

Se toma de referencia la viga equilibrada.

Se traza sobre el eje horizontal la línea base del momento flexionante en la que se localiza la distancia "X" que se habrá de relacionar con la magnitud del momento flexionante sobre el eje vertical.

$$\begin{aligned} \text{Cuando } X = 0 \quad M_A &= 0 \\ \text{Cuando } X = \frac{L}{2} \quad M_{A'} &= \frac{PL}{4} \\ \text{Cuando } X = L \quad M_B &= 0 \end{aligned}$$

Valores críticos en el diagrama de variación del momento flexionante

Momento flexionante máximo; se presenta al centro del claro de la estructura, punto que coincide cuando la fuerza cortante pasa por cero.

Momento flexionante cero, se presenta en los apoyos

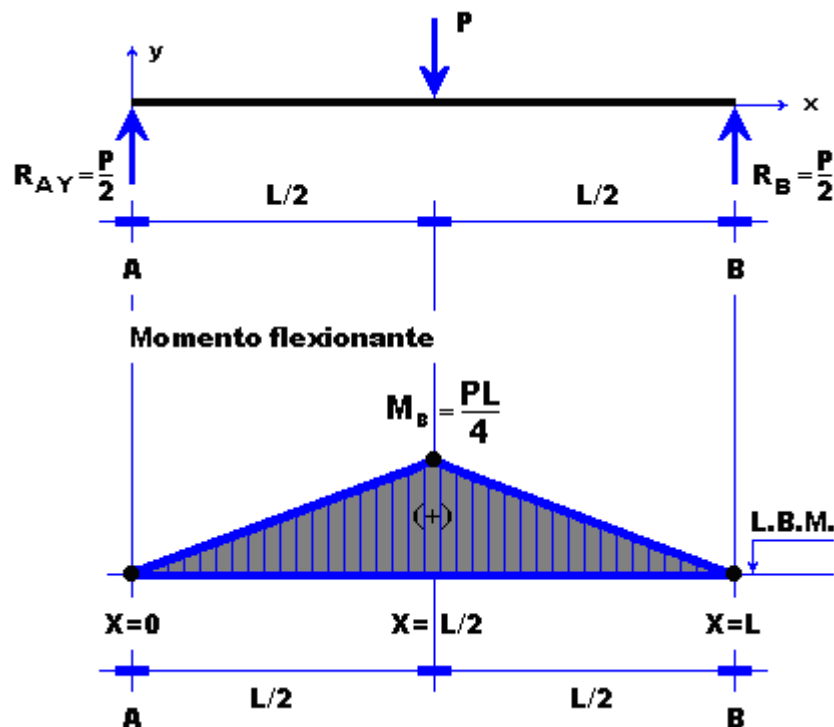


Figura 2.2.8

Función del momento flexionante:

De acuerdo a los resultados que se obtuvieron en el análisis de los tramos AA' y AB', la ecuación de la función para cada tramo, esta representada por una línea INCLINADA.

En base de lo anterior se concluye; cuando no existe carga externa sobre la estructura, la función de la fuerza cortante esta representada por una línea HORIZONTAL paralela al eje longitudinal y la del momento flexionante por una línea INCLINADA.

Diagrama de fuerza cortante y momento flexionante:

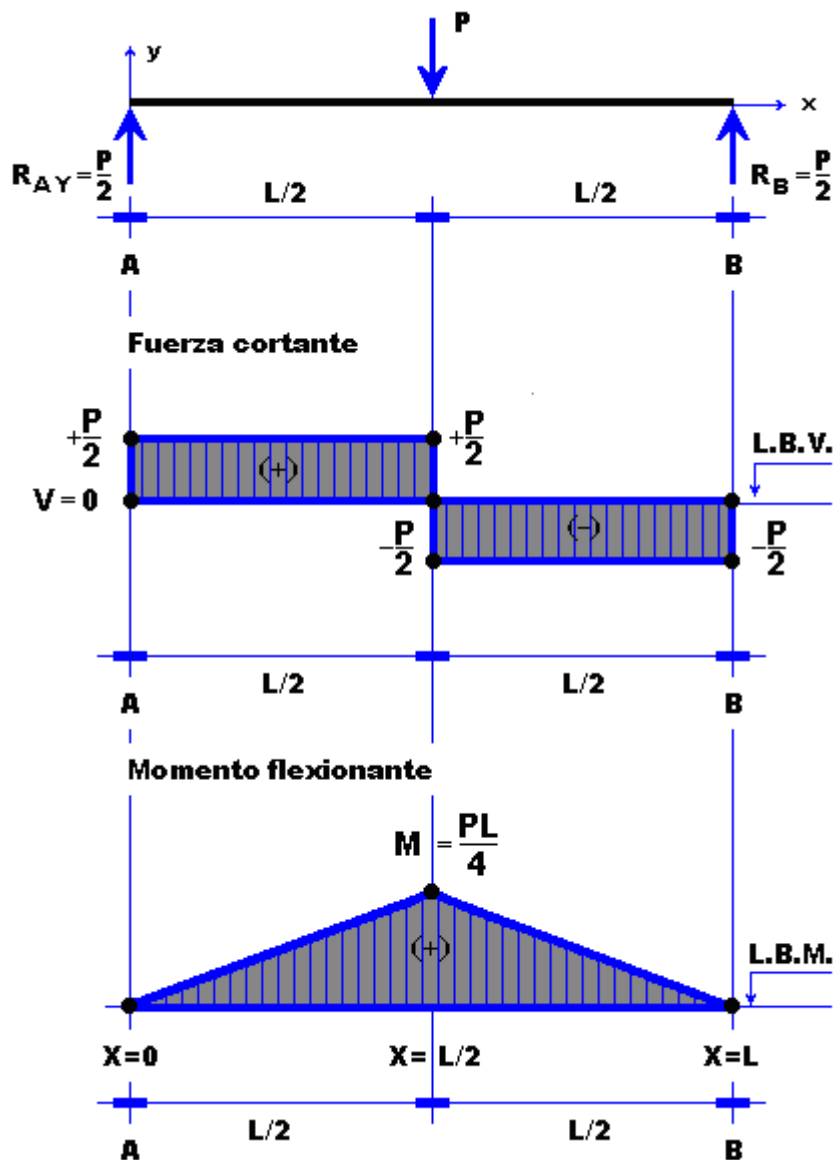


Figura 2.2.9

2.3 Viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida

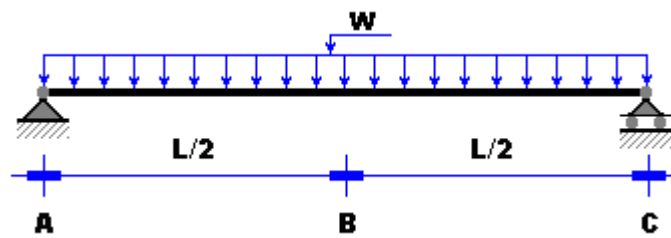


Figura 2.3.1

Diagrama de cuerpo libre

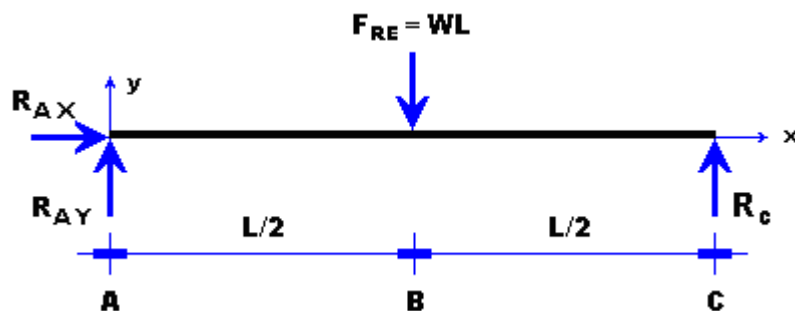


Figura 2.3.2

Cargas activas; Representadas por una carga uniformemente distribuida “W” que actúan sobre la estructura

Cargas reactivas: Representadas por los vínculos de cada apoyo

Sistema de fuerzas: Paralelo en el plano.

Número de ecuaciones de equilibrio: TRES

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_A = 0$$

Número de incógnitas: Tres; R_{AX} , R_{AY} y R_C , donde $R_{AX}=0$, es nula ya que no existe ninguna componente en la dirección del eje longitudinal.

Condiciones de Isostaticidad: Incógnitas = 3, Ecuaciones = 3, Incógnitas = Ecuaciones

Tipo de estructura: Isostática

Cálculo de reacciones: Se obtienen aplicando sobre el diagrama de cuerpo libre, las ecuaciones del equilibrio estático.

$$\sum M_A = 0 \quad WL \times \frac{L}{2} - R_C \times L = 0 \quad \therefore R_C = \frac{WL}{2}$$

Sustituyendo R_C y aplicando suma de fuerzas en "Y", se obtiene la reacción en A:

$$\sum F_Y = 0 \quad R_A - WL + R_C = 0$$

$$R_A = WL - \frac{WL}{2} \quad \therefore \quad R_A = \frac{WL}{2} \quad \downarrow$$

La estructura equilibrada es:

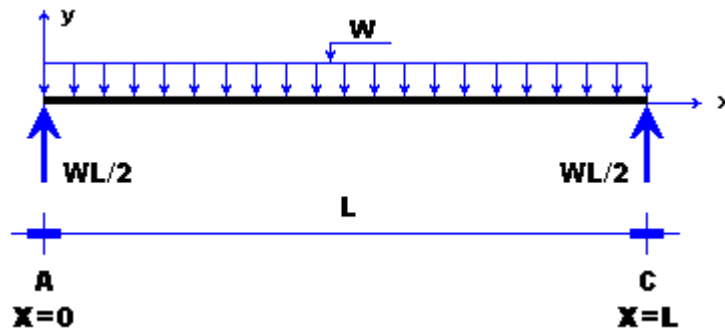


Figura 2.3.3

Considerando que la carga distribuida se mantiene constante sobre el claro de la viga, las funciones de los elementos mecánicos se obtienen analizando una sección limitada desde $X > 0$ hasta $X < L$:

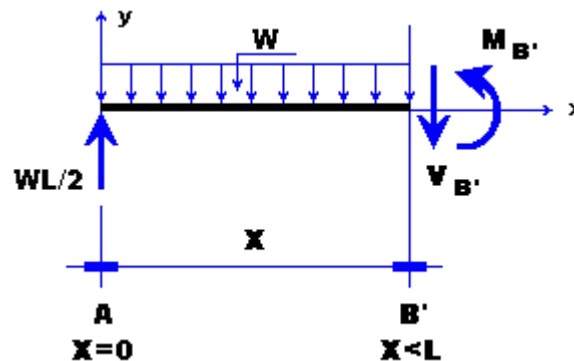


Figura 2.3.4

La acción de la carga distribuida W sobre el claro X , y de la reacción $WL/2$ en A , generan la fuerza cortante $V_{B'}$.

Asimismo, la acción de las cargas externas (W , $WL/2$) y la fuerza interna ($V_{B'}$) generan un par que se equilibra con el momento flexionante $M_{B'}$.

Función de los elementos mecánicos: Se obtienen aplicando las ecuaciones del equilibrio estático:

Fuerza Cortante:

$$V_{B'} = \frac{WL}{2} - WX \quad \downarrow$$

Momento Flexionante:

$$M_{B'} = \frac{WL}{2}X - WX \frac{X}{2} \quad \therefore \quad M_{B'} = \frac{WL}{2}X - \frac{WX^2}{2} \quad \downarrow$$

Sustituyendo los parámetros de la variable "X" desde cero hasta L, en las funciones de la fuerza cortante y del momento flexionante respectivamente, se obtiene la variación de los elementos mecánicos desde A hasta C.

Variación de la Fuerza Cortante:

$$\text{Si } X = 0 \quad V_A = \frac{WL}{2} - W(0) \quad \therefore \quad V_A = \frac{WL}{2} \quad \downarrow$$

$$\text{Si } X = L \quad V_C = \frac{WL}{2} - W(L) = \frac{WL - 2WL}{2} \quad \therefore$$

$$V_C = -\frac{WL}{2} \quad \downarrow$$

Se observa que cuando $X = 0$, la fuerza cortante tiene un efecto positivo, y cuando $X = L$ negativo.

Por lo anterior se deduce que la fuerza cortante de A hasta C, sobre algún punto habrá de pasar por cero; en consecuencia, la distancia donde ocurre lo anterior, la función de la fuerza cortante, se iguala a cero para determinarla; esto es:

$$V_{B'} = \frac{WL}{2} - WX = 0 \quad \therefore \quad WX = \frac{WL}{2} \quad \therefore$$

$$X = \frac{L}{2}$$

Trazo del diagrama de la Fuerza Cortante:

Línea base de la fuerza cortante: Se traza un marco de referencia compuesto por un eje horizontal "X" y un eje vertical "Y".

Sobre el eje horizontal se localiza los parámetros de la variable "X":

Sobre el eje vertical se localiza la magnitud de la fuerza cortante para cada parámetro de la variable "X":

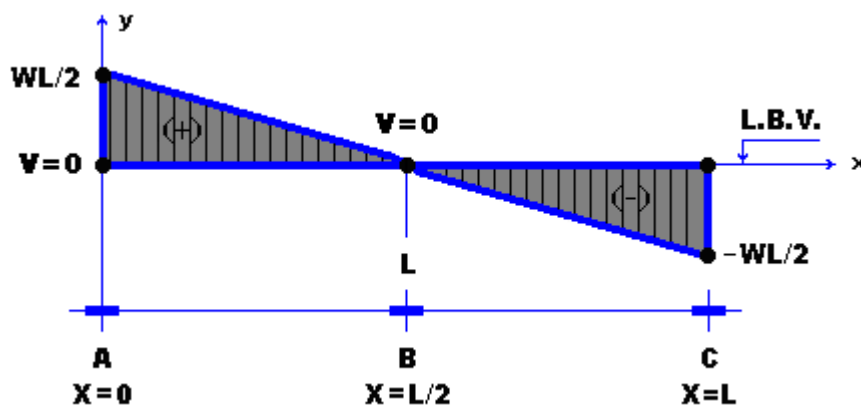


Figura 2.3.5

Uniéndose los puntos desde A con $X=0$ y $V=0$ hasta C, resulta la variación de la fuerza cortante que obedece a la función que se obtuvo.

Valores Críticos:

Fuerza cortante máxima; se presenta en los apoyos cuando $X=0$ con signo positivo, y cuando $X=L$ con signo negativo; en ambos casos con una magnitud de $WL/2$

Fuerza cortante cero; se presenta al centro del claro de la viga; punto que, en el diagrama del momento flexionante es un valor máximo.

Función de la fuerza cortante:

Para una carga uniformemente distribuida se identifica a través de una línea inclinada.

Variación del momento flexionante:

Sustituyendo en la función del momento flexionante los parámetros de la variable "X":

$$\text{Si } X=0 \quad M_A=0 \quad \downarrow$$

$$\text{Si } X=\frac{L}{2} \quad M_B=\frac{WL}{2}\frac{L}{2}-\frac{W}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2=\frac{WL^2}{4}-\frac{WL^2}{8} \quad \therefore M_B=\frac{WL^2}{8} \quad \downarrow$$

$$\text{Si } X=L \quad M_C=\frac{WL}{2}L-\frac{W}{2}L^2 \quad \therefore M_C=0 \quad \downarrow$$

Trazo del diagrama del momento flexionante:

Línea base del momento flexionante:

Se traza un marco de referencia compuesto por un eje horizontal "X" y un eje vertical "Y".

Sobre el eje horizontal se localiza los parámetros de la variable "X":

Sobre el eje vertical se localiza la magnitud del momento flexionante para cada parámetro de la variable "X":

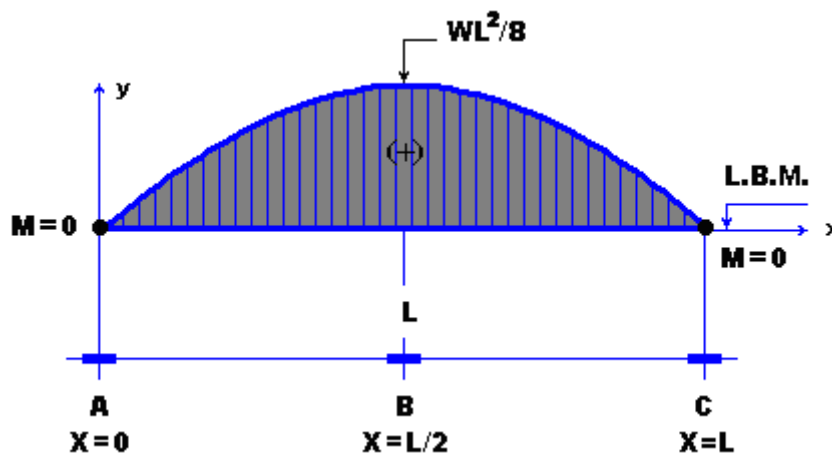


Figura 2.3.6

Uniéndose los puntos desde $X=0$ hasta $X=L$, resulta la variación del momento flexionante que obedece a la función que se obtuvo.

Valores críticos:**Momento flexionante cero:**

Se presenta en los apoyos respectivos.

Momento flexionante máximo:

Se presenta al centro del claro con un efecto positivo (la fibra superior esta sometida a un efecto de compresión) punto que, en el diagrama de la fuerza cortante, ésta pasa por cero;

Función de la fuerza cortante:

Para una carga uniformemente distribuida está representada por una curva de segundo grado.

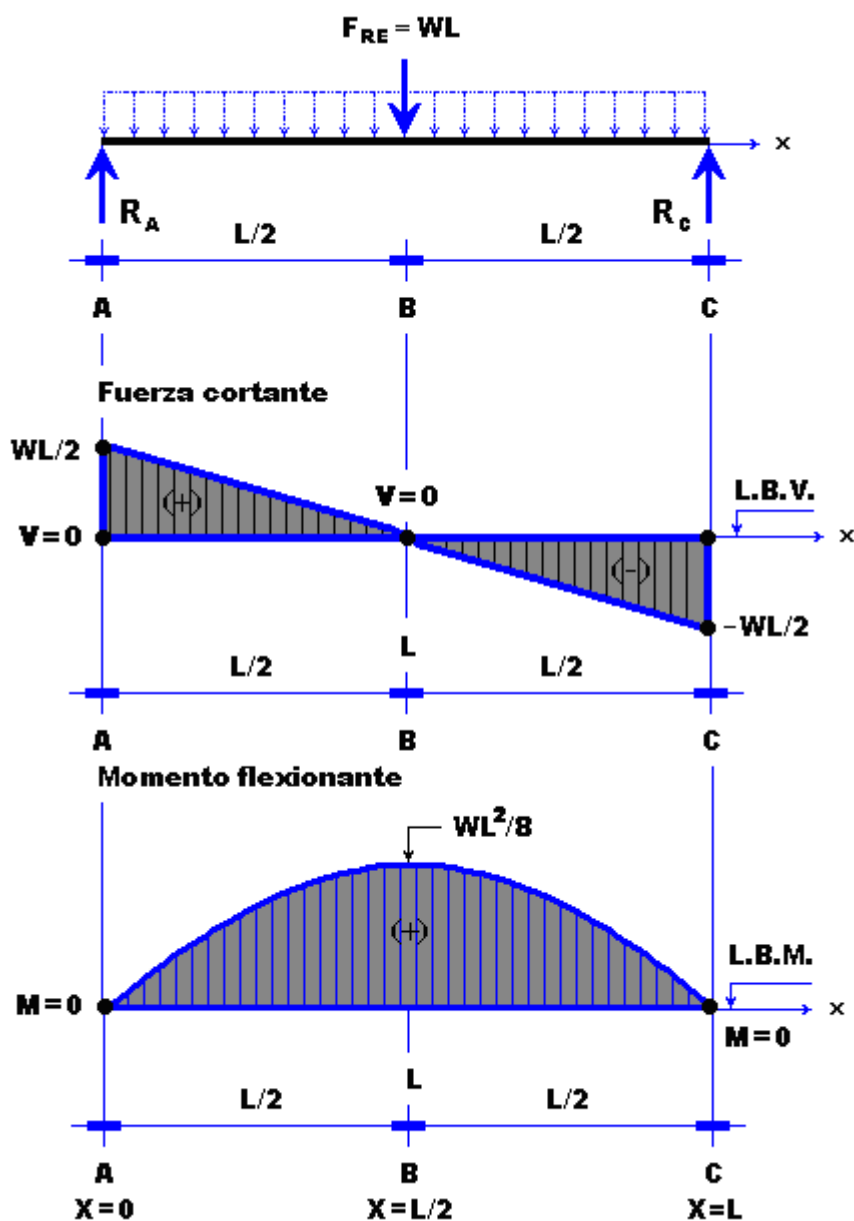
Diagrama de fuerza cortante y momento flexionante:

Figura 2.3.7

2.4 Viga simplemente apoyada con carga repartida de forma triangular

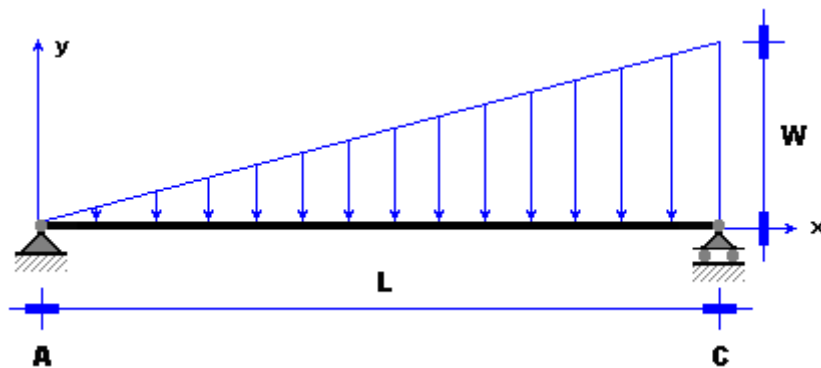


Figura 2.4.1

Diagrama de cuerpo libre:

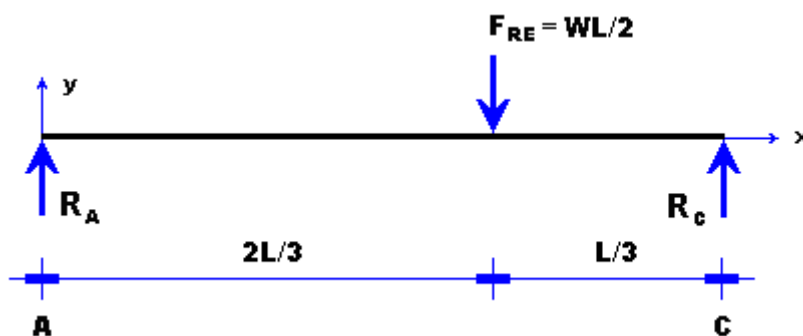


Figura 2.4.2

Cargas activas: Representadas por las cargas externas; en la viga que se muestra, la fuerza resultante equivalente es igual al área bajo la forma de la carga

Cargas reactivas: Representadas por las reacciones en los apoyos.

Sistema de fuerzas: Paralelo en el plano.

Condiciones de equilibrio: Tres.

Número de incógnitas: Tres; R_{AX} , R_{AY} y R_C , donde $R_{AX}=0$, es nula ya que no existe ninguna componente en la dirección del eje longitudinal.

Condiciones de isostaticidad: Incógnitas = 3, Ecuaciones = 3, Incógnitas = Ecuaciones

Tipo de estructura: Isostática

Cálculo de reacciones: Se obtienen aplicando las condiciones de equilibrio estático sobre el diagrama de cuerpo libre.

$$\sum M_A = 0 \quad \frac{2}{3}L \frac{WL}{2} - R_C L = 0 \quad \therefore R_C = \frac{WL}{3} \quad \downarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad R_A - \frac{WL}{2} + R_C = R_A - \frac{WL}{2} + \frac{WL}{3} = 0 \quad \therefore R_A = \frac{WL}{6} \quad \downarrow$$

La viga equilibrada es:

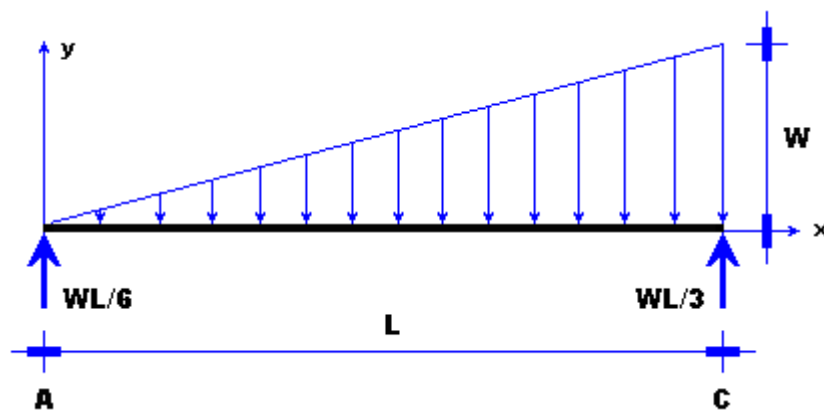


Figura 2.4.3

Como la carga que actúa sobre la viga tiene una variación lineal, los elementos mecánicos que genera se obtienen analizando una sección limitada de $X > 0$ a $X < L$; esto es:

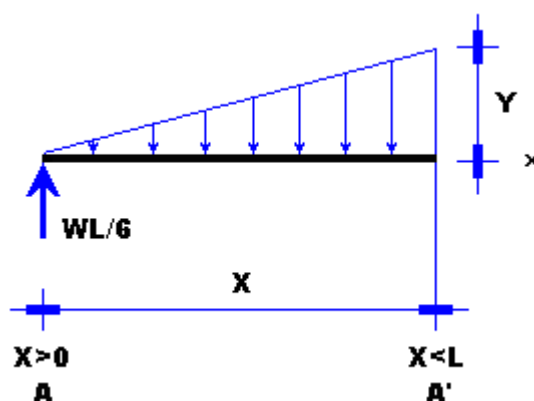


Figura 2.4.4

Aplicando las condiciones de equilibrio:

Función de la fuerza cortante:

$$V_{A'} = \frac{WL}{6} - Y \frac{X}{2} \quad \downarrow$$

Por triángulos semejantes, se determina a "Y" en función de la carga "W", el claro "L" y la distancia "X":

$$\frac{W}{L} = \frac{Y}{X} \quad \therefore \quad Y = \frac{W}{L} X \quad \downarrow$$

Sustituyendo en la función de la fuerza cortante referida al punto A':

$$V_{C'} = \frac{WL}{6} - \frac{W}{L} X \frac{X}{2} \quad \therefore \quad V_{C'} = \frac{WL}{6} - \frac{WX^2}{2L} \quad \downarrow$$

Variación de la fuerza cortante: se obtiene al sustituir los parámetros de "X" en la función de la fuerza cortante:

Cuando X = 0, se obtiene la magnitud de la fuerza cortante en A:

$$V_A = \frac{WL}{6} \quad \downarrow$$

Cuando X = L, se obtiene la fuerza cortante en C:

$$V_C = \frac{WL}{6} - \frac{WL^2}{2L} = \frac{WL - 3WL}{6} \quad \therefore \quad V_C = -\frac{WL}{3} \quad \downarrow$$

Del resultado obtenido se observa: cuando X = 0 la magnitud de la fuerza cortante en A es de signo positivo, y cuando X = L, la magnitud tiene un signo negativo.

De lo anterior se deduce que la fuerza cortante sobre el eje horizontal en algún punto pasa por cero; por lo tanto para determinar la distancia donde ocurre, de la función de la fuerza cortante se iguala a cero para encontrar el valor de "X":

$$\frac{WL}{6} - \frac{WX^2}{2L} = 0 \quad \therefore \quad X^2 = \frac{WL}{6} \frac{2L}{W} = \frac{1}{3} L^2 \quad X = \frac{\sqrt{3}}{3} L$$

$$X = 0.577L \quad \downarrow$$

Trazo de la variación de la fuerza cortante:

Línea base de la fuerza cortante: Sobre el eje horizontal se localizan los parámetros de la variable "X", para que, sobre el eje vertical se relacione con la magnitud de la fuerza cortante respectiva:

Para X = 0 se tiene la fuerza cortante en A:

Para X = L se obtiene la fuerza cortante en C:

Para X = 0.577 L, se obtiene la fuerza cortante igual a cero:

Uniendo los puntos que se han señalado, se obtiene gráficamente la variación de la fuerza cortante representada por una línea curva de segundo grado:

Fuerza cortante máxima: Se presenta cuando $X = L$ con una magnitud de $WL / 3$.

Fuerza cortante mínima: Se presenta cuando $X = 0$ con una magnitud de $WL / 6$

Fuerza cortante cero: Se presenta cuando $X = 0.577 L$; distancia que se asocia en el diagrama del momento flexionante con un valor máximo de éste.

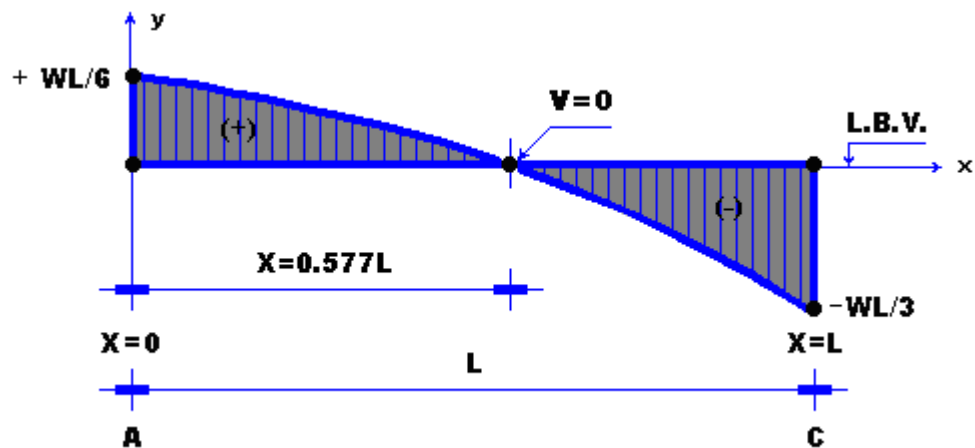


Figura 2.4.5

Función del momento flexionante:

Aplicando las condiciones de equilibrio estático sobre el diagrama de cuerpo libre de la sección y sustituyendo el valor de la ordenada "Y" se tiene:

$$M_{A'} = \frac{WL}{6} X - Y \frac{X}{2} \frac{1}{3} X = \frac{WL}{6} X - \frac{W}{L} X \frac{X}{2} \frac{1}{3} X \quad \therefore$$

$$M_{A'} = \frac{WL}{6} X - \frac{WX^3}{6L} \quad \downarrow$$

Variación del momento flexionante:

Se obtiene sustituyendo en la función del momento flexionante el valor de los parámetros de la variable "X":

Cuando $X = 0$: Se obtiene el momento en A.

$$M_A = \frac{WL}{6} (0) - \frac{W(0)^3}{6L} = 0 \quad \downarrow$$

Cuando $X = 0.57L$: Se obtiene el momento cuando la fuerza cortante pasa por cero

$$M_A = \frac{WL}{6} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} L \right) - \frac{W \left(\frac{\sqrt{3}}{3} L \right)^3}{6L} = \frac{\sqrt{3}WL^2}{18} - \frac{\sqrt{3}WL^2}{54} = \frac{\sqrt{3}WL^2}{27} \quad \downarrow$$

$$M_A = 0.064WL^2 \quad \downarrow$$

Cuando $X = L$: Se obtiene el momento en C.

$$M_A = \frac{WL}{6} (L) - \frac{W(L)^3}{6L} = 0 \quad \downarrow$$

Trazo de la variación del momento flexionante:

Línea base del momento flexionante:

Cuando $X = 0$ se obtiene el momento en A:

Cuando $X = 0.57L$, se obtiene el momento máximo flexionante:

Cuando $X = L$, se obtiene el momento en C:

Uniéndolos puntos que se determinaron, se obtiene el diagrama de variación del momento flexionante representada por una curva de tercer grado:

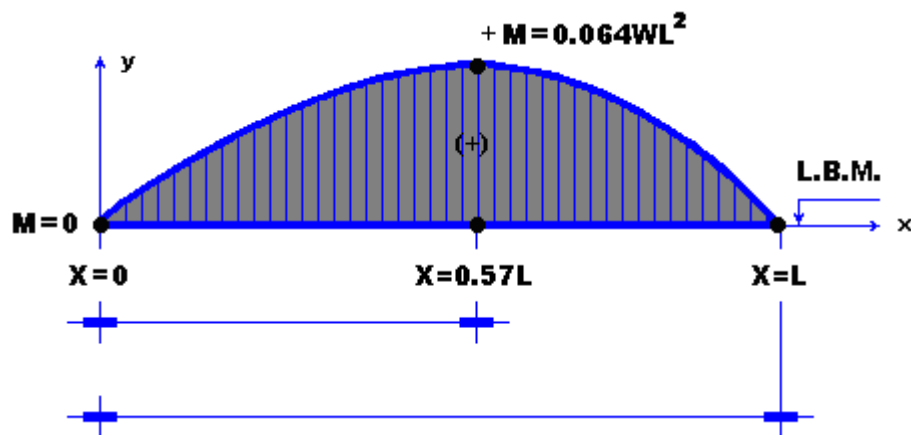


Figura 2.4.6

Momento flexionante máximo:

Ocurre cuando $X = 0.57L$ distancia que en el diagrama de la fuerza cortante, ésta pasa por cero.

Momento flexionante cero:

Se presenta en los apoyos, cuando $X = 0$ y cuando $X = L$.

A continuación se muestra el trazo de los diagramas de la fuerza cortante y del momento flexionante en una sola presentación:

Diagrama de fuerza cortante y momento flexionante:

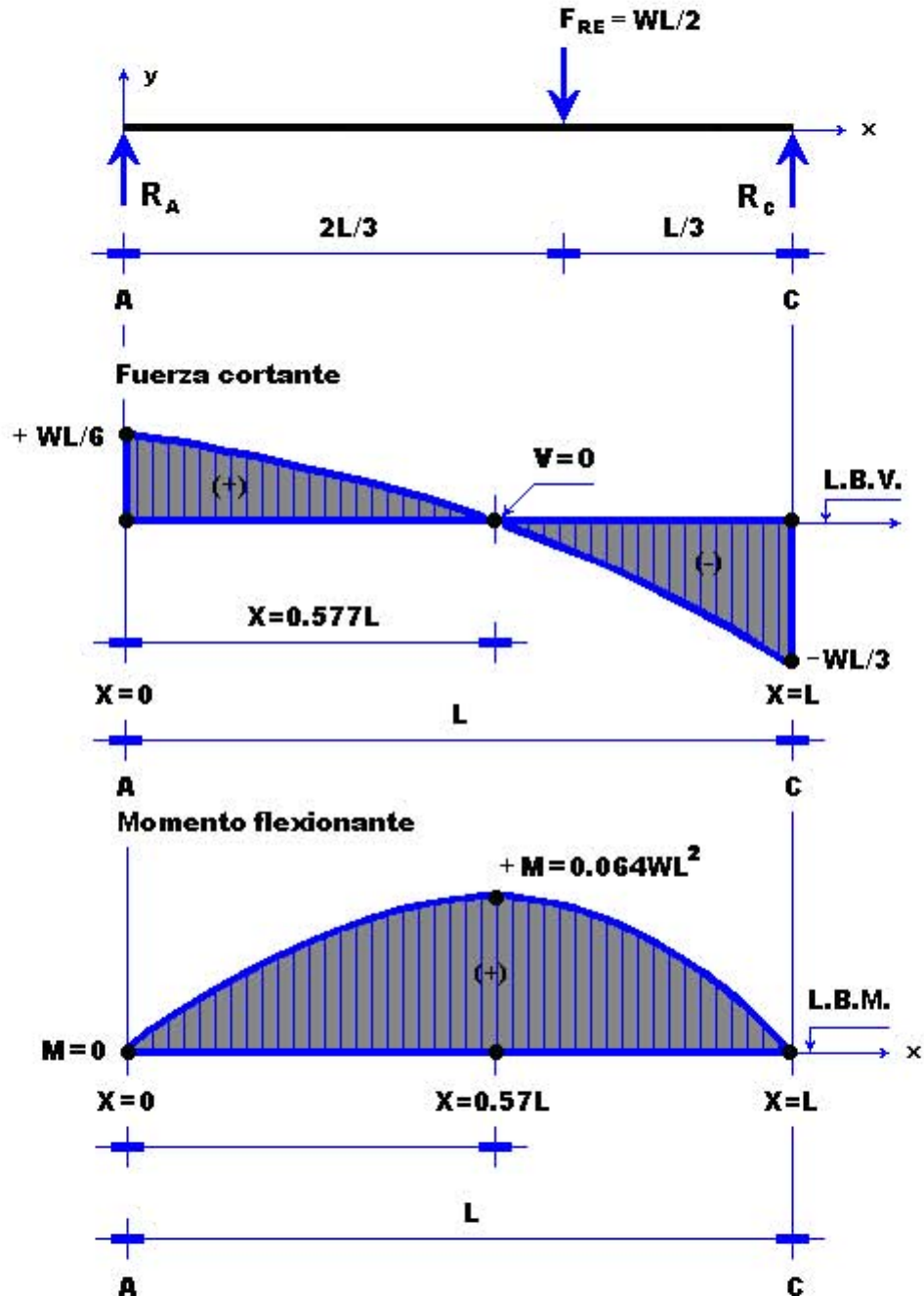


Figura 2.4.7

2.5 Viga simplemente apoyada con carga concentrada y uniformemente distribuida

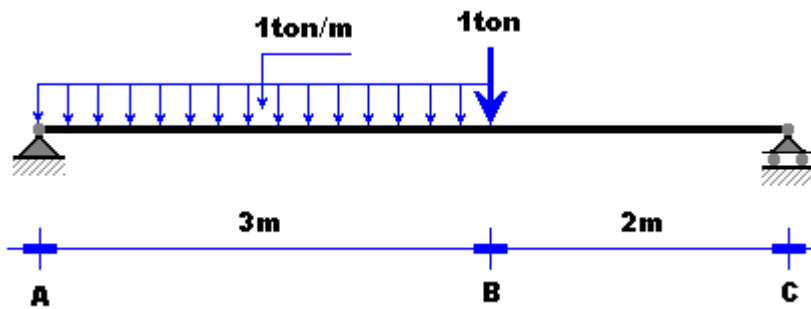


Figura 2.5.1

Diagrama de cuerpo libre

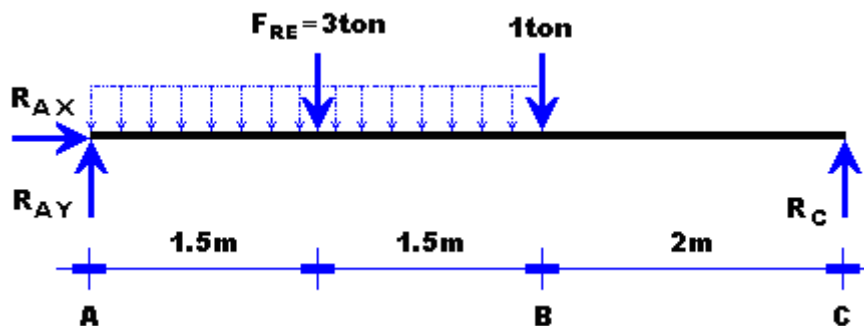


Figura 2.5.2

Cargas activas: Representadas por las cargas externas que actúan sobre la estructura

Cargas reactivas: Representadas por los vínculos de cada apoyo

Sistema de fuerzas: Paralelas en el plano.

Número de ecuaciones de equilibrio: Tres

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_A = 0$$

Número de incógnitas: Tres; R_{AX} , R_{AY} y R_C , donde $R_{AX} = 0$, es nula ya que no existe ninguna componente en la dirección del eje longitudinal.

Condiciones de isostaticidad: El número de incógnitas y el número de las ecuaciones de equilibrio estático en el sistema, son iguales, esto es: $I = E$, por lo tanto:

Tipo de estructura: Isostática

Cálculo de reacciones: Aplicando las condiciones de equilibrio sobre el diagrama de cuerpo libre.

$$\sum M_A = 0 \quad 1.5 \times 3 + 3 \times 1 - 5R_C = 0 \quad \therefore$$

$$R_C = 1.5 \text{ ton.} \quad \downarrow$$

$$\sum M_C = 0 \quad -2 \times 1 - 3.5 \times 3 + 5R_A = 0 \quad \therefore$$

$$R_A = 2.5 \text{ ton.} \quad \downarrow$$

La estructura equilibrada: bajo la acción del sistema de fuerzas externo se muestra en la siguiente figura:

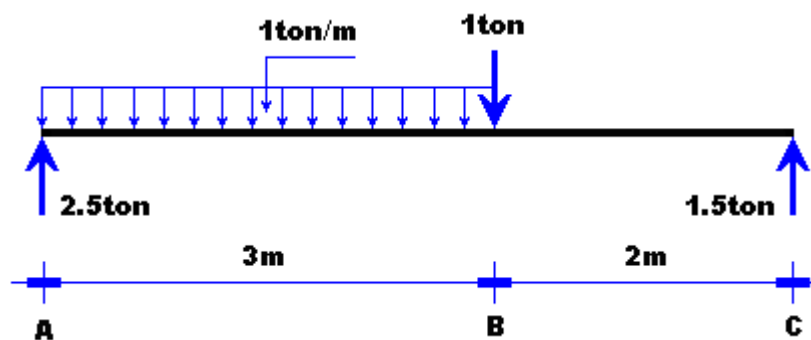


Figura 2.5.3

Tomando de referencia la estructura equilibrada:

Sobre el tramo AB, la carga externa que actúa es la reacción en A y la carga uniformemente distribuida; carga que se mantiene constante desde $X = 0$ hasta $X = 3\text{m}$.

Por lo anterior, una sección que se encuentre limitada entre los parámetros referidos será:

Tramo AB:

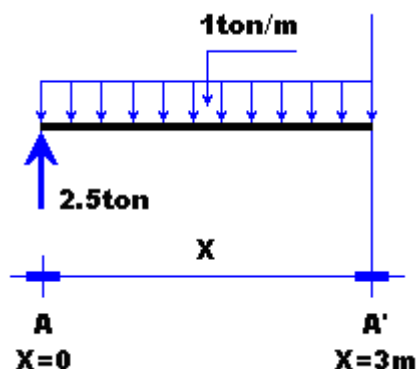


Figura 2.5.4

Aplicando las condiciones de equilibrio estático sobre la sección, se obtendrán las funciones de los elementos mecánicos que generan las cargas externas sobre el tramo BC:

Función de la fuerza cortante:

$$V_{A'} = 2.5 - 1X \quad \downarrow$$

Variación de la fuerza cortante:

Se obtiene sustituyendo los parámetros de "X" en la función de la fuerza cortante:

Cuando X = 0: $V_A = 2.5 \text{ ton} \quad \downarrow$

Cuando X = 3m: $V_B = 2.5 - 1(3) \quad \therefore \quad V_B = -0.5 \text{ ton.} \quad \downarrow$

Del resultado obtenido se observa que la fuerza cortante de A hasta B, cambia de signo; lo que hace suponer que sobre algún punto, la fuerza cortante pasa por cero. La distancia donde ocurre lo anterior, se obtiene igualando a cero la función de la fuerza cortante:

$$2.5 - X = 0 \quad \therefore \quad X = 2.5 \text{ m.} \quad \downarrow$$

Considerando un elemento diferencial de longitud desde $X < 3 \text{ m.}$ a $X > 3 \text{ m.}$ se observa que en B actúan la carga externa de 1 ton.; en consecuencia, genera un cambio en los elementos mecánicos.

Con base en lo anterior, y con una sección sobre el tramo BC los elementos mecánicos que se presentan se obtienen a partir de la siguiente figura:

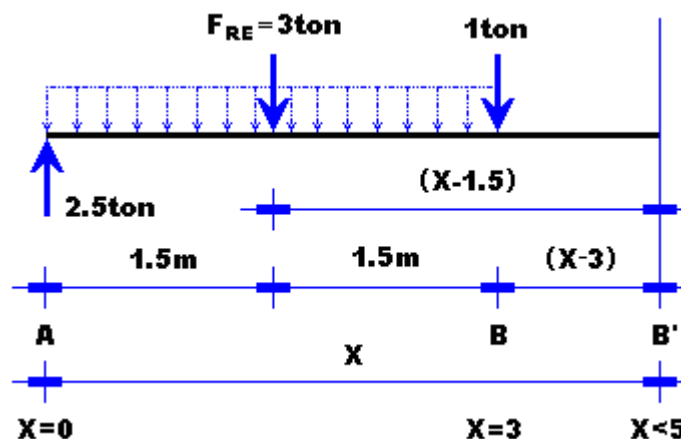
Tramo BC:

Figura 2.5.5

Aplicando las condiciones de equilibrio estático sobre el diagrama del tramo BC:

Función de la fuerza cortante:

Con la suma de fuerzas verticales:

$$V_{B'} = 2.5 - 3 - 1 \quad \therefore \quad V_{B'} = -1.5 \text{ ton.} \quad \downarrow$$

Variación de la fuerza cortante:

Sustituyendo los parámetros de "X" en la función de la fuerza cortante y considerando un elemento diferencial:

Cuando $X > 3m$. $V_{B \text{ lado derecho}} = -1.5 \text{ ton.}$ ↙

Cuando $X < 5m$. $V_{C \text{ lado izquierdo}} = -1.5 \text{ ton.}$ ↙

Cuando $X = 5m$., la fuerza cortante es igual a cero.

Trazo de la variación de la fuerza cortante:**Línea base de la fuerza cortante:**

Tomando de referencia un sistema de ejes coordenados, sobre el horizontal se localiza el parámetro de la distancia "X"; y sobre el eje vertical se anotan las magnitudes de la fuerza cortante que se obtuvieron en los tramos AB y BC respectivamente:

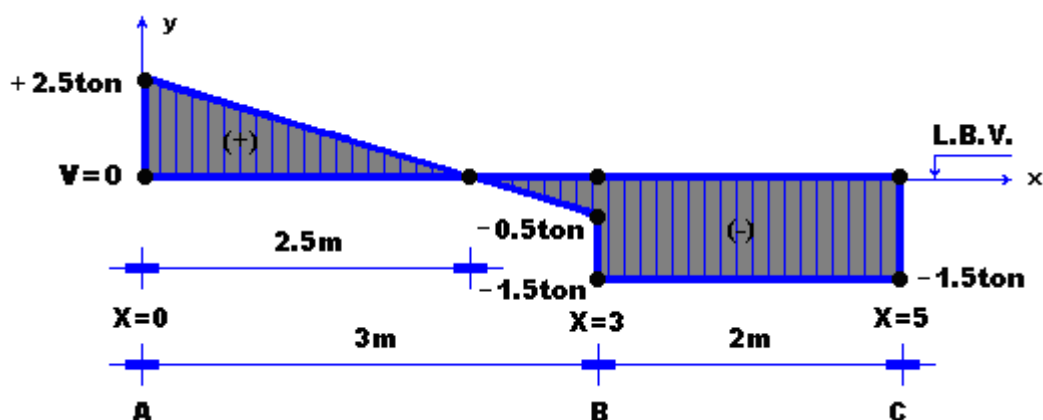


Figura 2.5.6

Uniendo los puntos que se obtuvieron, resultará el trazo de la variación de la fuerza cortante, representada por una línea inclinada en el tramo AB y por una línea horizontal sobre el tramo BC:

Fuerza cortante cero:

Se presenta sobre el tramo AB a una distancia de 2.5 m., punto donde ocurre un valor máximo en el diagrama del momento flexionante.

Fuerza cortante mínima:

Se presenta en B del lado izquierdo cuando $X = 3m$., con una magnitud de 0.5ton

Fuerza cortante máxima:

Se presenta en A cuando $X = 0$ con una magnitud de 2.5 ton.

Función del momento flexionante:

Con suma de momentos respecto al punto A':

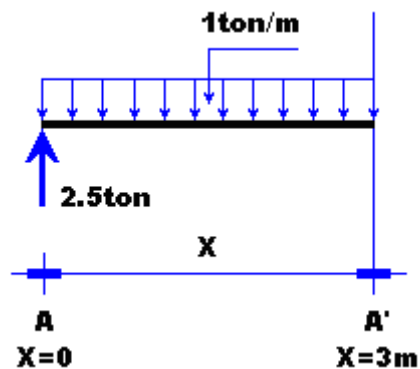
Tramo AA':

Figura 2.5.7

$$M_{A'} = 2.5X - 1X \frac{X}{2} \quad \therefore \quad M_{A'} = -0.5X^2 + 2.5X \quad \downarrow$$

Sustituyendo los parámetros de "X" se obtiene la magnitud del momento flexionante sobre el tramo AB:

Cuando $X = 0$: $M_A = 0 \quad \downarrow$

Cuando $X = 2.5 \text{ m}$, se obtiene un valor máximo del momento flexionante que coincide cuando la fuerza cortante pasa por cero:

$$M_{X=2.5} = -0.5(2.5)^2 + 2.5(2.5)$$

$$M_{X=2.5} = -3.125 + 6.25$$

$$M_{X=2.5} = 3.125 \text{ ton-m.} \quad \downarrow$$

Cuando $X = 3 \text{ m}$.

$$M_B = -0.5(3)^2 + 2.5(3) = -4.5 + 7.5 \quad \therefore$$

$$M_B = +3.0 \text{ ton-m.} \quad \downarrow$$

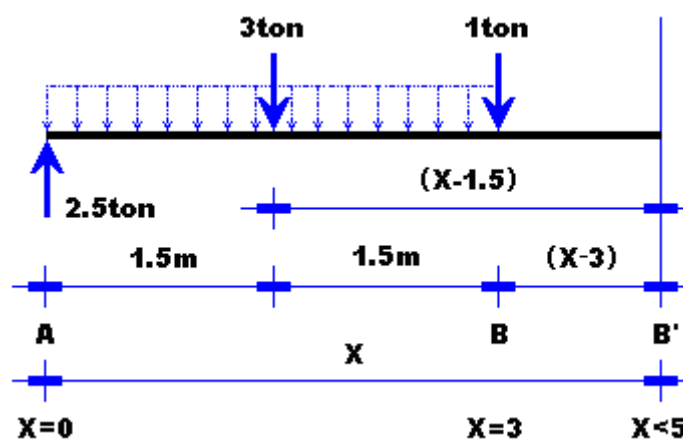
Tramo AB':

Figura 2.5.8

Función del momento flexionante:

Con momentos respecto al punto B':

$$M_{B'} = 2.5(X) - 3(X - 1.5) - 1(X - 3)$$

$$M_{B'} = 2.5X - 3X + 4.5 - X + 3$$

$$M_{B'} = -1.5X + 7.5 \quad \downarrow$$

Sustituyendo los parámetros de "X", se obtiene la magnitud del momento flexionante sobre el tramo BC:

Cuando $X = 3m$:

$$M_B = -1.5(3) + 7.5 \quad \therefore$$

$$M_B = +3.0 \text{ ton-m.} \quad \downarrow$$

Cuando $X = 5m$:

$$M_C = -1.5(5) + 7.5 \quad \therefore \quad M_C = 0 \quad \downarrow$$

Trazo de la variación del momento flexionante:

Línea base del momento flexionante:

Tomando de referencia un sistema de ejes coordenados, sobre el horizontal se localiza el parámetro de la distancia "X"; y sobre el eje vertical se anotan las magnitudes del momento flexionante que se obtuvieron en los tramos AB y BC respectivamente:

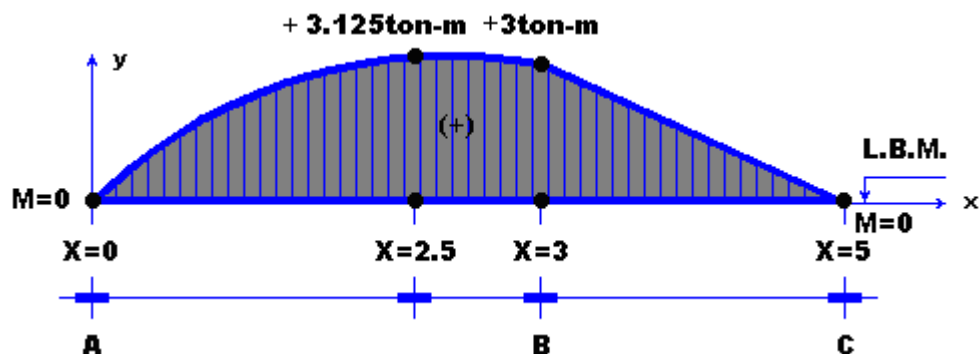


Figura 2.5.9

Uniendo los puntos determinados, se obtiene el diagrama de variación del momento flexionante, el que está representado por una curva de segundo grado sobre el tramo AB y una línea recta inclinada sobre el tramo BC:

Momento flexionante cero:

Ocurre en los apoyos respectivos cuando $X = 0$ y $X = 5\text{m}$

Momento flexionante máximo:

Ocurre cuando $X = 2.5\text{ m.}$, que coincide en el diagrama de la fuerza cortante cuando ésta pasa por cero.

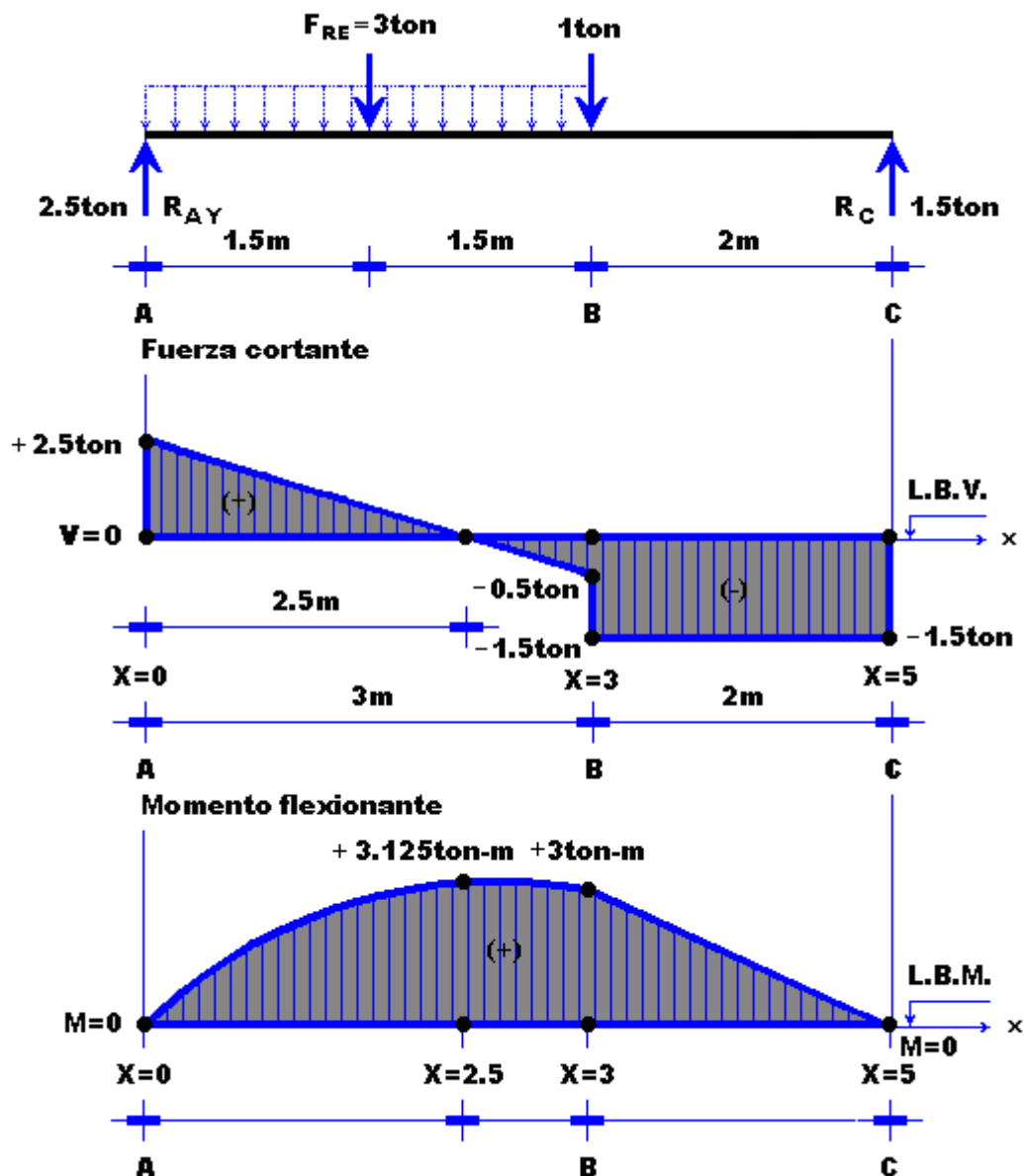
Diagrama de fuerza cortante y momento flexionante:

Figura 2.5.10

2.6 Viga empotrada con carga uniformemente distribuida y concentrada

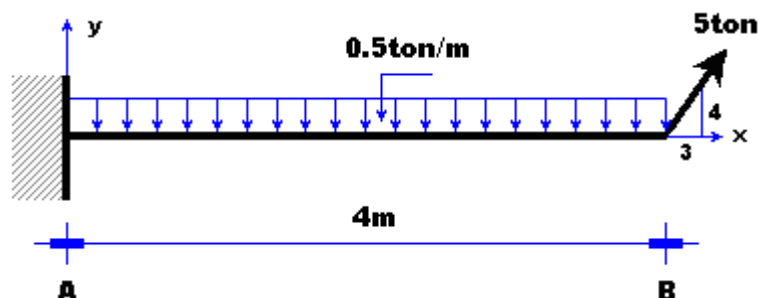


Figura 2.6.1

CARGAS ACTIVAS:

Representadas por las cargas externas que actúan sobre la viga:

Carga uniformemente distribuida:

De 0.5ton/m, representándola por la fuerza resultante equivalente de magnitud igual al área bajo la forma de la carga: $F_{RE} = 2\text{ton}$, que se localiza al centro del claro de la viga.

Carga concentrada:

De 5 ton, representándola con sus componentes rectangulares la horizontal $F_x = (3/5) 5 = 3 \text{ ton}$; y la vertical $F_y = (4/5) 5 = 4 \text{ ton}$.

Diagrama de cuerpo libre:

Se traza un marco de referencia:

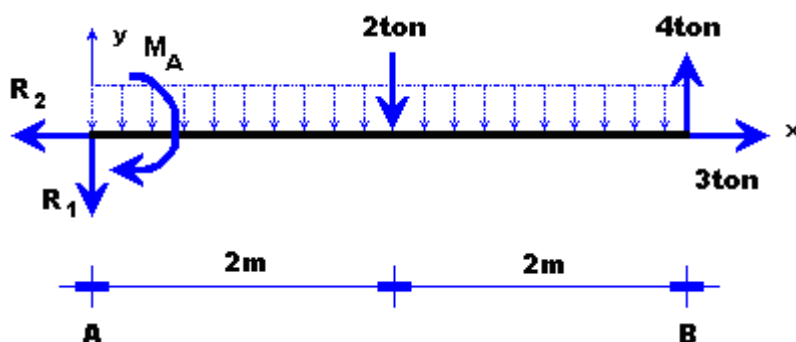


Figura 2.6.2

CARGAS REACTIVAS:

Están representadas por las componentes reactivas del apoyo en A, que se caracteriza por tener tres vínculos o reacciones:

R₁, es la componente reactiva del apoyo que habrá de equilibrar a las cargas activas verticales.

R₂, es la componente reactiva horizontal que habrá de equilibrar a las cargas activas también horizontales.

M_A. Es la componente reactiva que habrá de equilibrar el par generado por las cargas externas verticales respecto al apoyo en A.

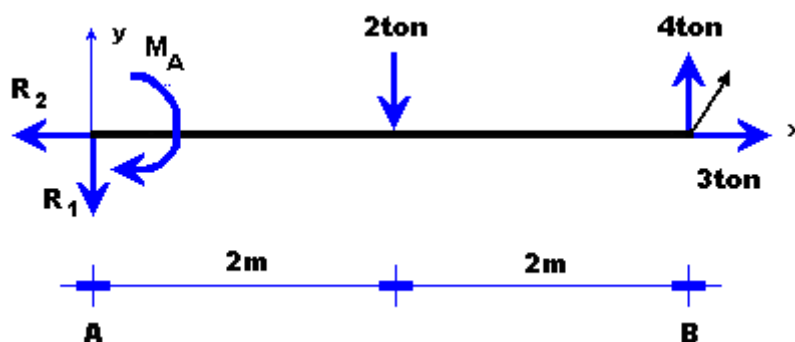


Figura 2.6.3

Sobre el diagrama de cuerpo libre se identifica:

Sistema de fuerzas: Generales en el plano.

Número de ecuaciones de equilibrio en el sistema: TRES; Suma de fuerzas horizontales, suma de fuerzas verticales y suma de momentos todas ellas igual a cero para que el sistema se encuentre en equilibrio externo.

Número de incógnitas del sistema: TRES, **R₁**, **R₂** y **M_A** representadas por las reacciones en el apoyo

Condiciones de isostaticidad: Incógnitas = 3; Ecuaciones = 3; en consecuencia: Incógnitas = Ecuaciones

Tipo de estructura: Isostática.

Cálculo de reacciones:

Se obtienen aplicando las condiciones de equilibrio sobre el diagrama de cuerpo libre

$$\sum F_x = 0 \quad -R_2 + 3 = 0 \quad \therefore R_2 = 3 \text{ ton.} \quad \swarrow$$

$$\sum F_y = 0 \quad -R_1 - 2 + 4 = 0 \quad \therefore R_1 = 2 \text{ ton.} \quad \swarrow$$

$$\sum M_A = 0 \quad M_A + 2(2) - 4(4) = M_A + 4 - 16 = 0$$

$$M_A = 12 \text{ ton-m.} \quad \swarrow$$

La estructura equilibrada por la acción del sistema de fuerzas externo es:

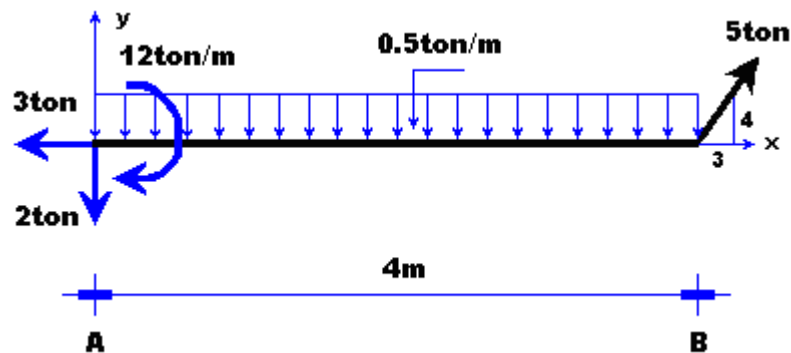


Figura 2.6.4

Tomando de referencia la viga equilibrada, se observa que sobre el tramo AB, la carga externa se mantiene sin ninguna variación desde $X = 0$ hasta un elemento diferencial con $X < 4\text{m}$.

En consecuencia de lo anterior, el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la siguiente figura, al aplicar las condiciones de equilibrio estático se podrá determinar los elementos mecánicos que se presentan sobre el tramo AB:

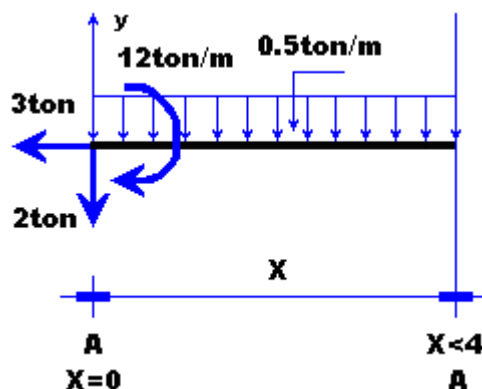


Figura 2.6.5

Función de la fuerza normal:

Con suma de fuerzas horizontales en la dirección de "X":

$$N_{A'} = 3 \text{ ton.} \quad \swarrow \text{ Positiva por tener un efecto de tensión}$$

Función de la fuerza cortante:

Con suma de fuerzas verticales en la dirección del eje "Y":

$$V_{A'} = -2 - 0.5X \quad \swarrow$$

Función del momento flexionante:

Con suma de momentos respecto al punto A':

$$M_{A'} = 12 - 2X - 0.5X \frac{X}{2} \quad \therefore$$

$$M_{A'} = -0.25X^2 - 2X + 12 \quad \swarrow$$

Elementos mecánicos:

Se obtienen sustituyendo en las funciones respectivas los parámetros de la variable "X":

Cuando X = 0:

$$N_A = 3 \text{ ton.} \quad \swarrow$$

$$V_A = -2 - 0.5(0) = -2 \text{ ton.} \quad \swarrow$$

$$M_A = -0.25(0)^2 - 2(0) + 12 = 12 \text{ ton-m.} \quad \swarrow$$

Cuando X = 4 m:

$$N_B = 3 \text{ ton.} \quad \swarrow$$

$$V_B = -2 - 0.5(4) = -2 - 2 = -4 \text{ ton.} \quad \swarrow$$

$$M_B = -0.25(4)^2 - 2(4) + 12 = -4 - 8 + 12 = 0 \quad \swarrow$$

Diagrama de variación de la fuerza normal:**Línea base de la fuerza normal:**

Se traza un marco de referencia compuesto por un sistema de ejes coordenados. Sobre el eje horizontal, se localizan los parámetros de la variable "X"; desde X = 0 hasta X=4m puntos que serán relacionados con el eje vertical. Sobre el vertical se habrá de localizar la magnitud de la fuerza normal que sea relativa a la distancia anotada sobre el eje horizontal; esto es: Para cuando X = 0 con 3 ton., y para X = 4m, con 3 ton.

Con los puntos localizados, estos se unen en el orden que se registraron de tal forma que el resultado que se obtiene es el diagrama de variación de la fuerza normal que se presenta en la viga.

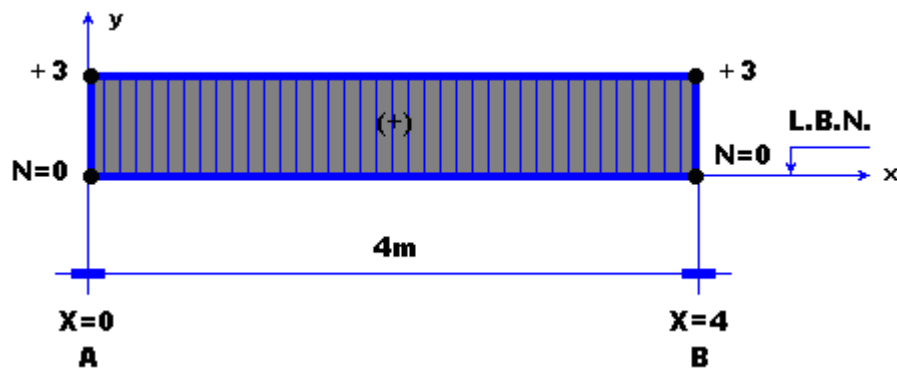


Figura 2.6.6

Finalmente, se observa que la variación de la fuerza normal sobre la viga, se distingue por ser una magnitud constante desde A hasta B.

Diagrama de variación de la fuerza cortante:

Línea base de la fuerza cortante:

Se construye con el mismo procedimiento que se expuso para el caso de la fuerza normal; para ello, observe la figura como se va conformando:

Uniendo los puntos que se obtuvieron, resulta el diagrama de variación de la fuerza cortante que se presenta en la viga:

Fuerza cortante máxima:

Se presenta cuando $X = 4$ m, con una magnitud de 4 ton.

Fuerza cortante mínima:

Se presenta cuando $X = 0$, con una magnitud de 2 ton.

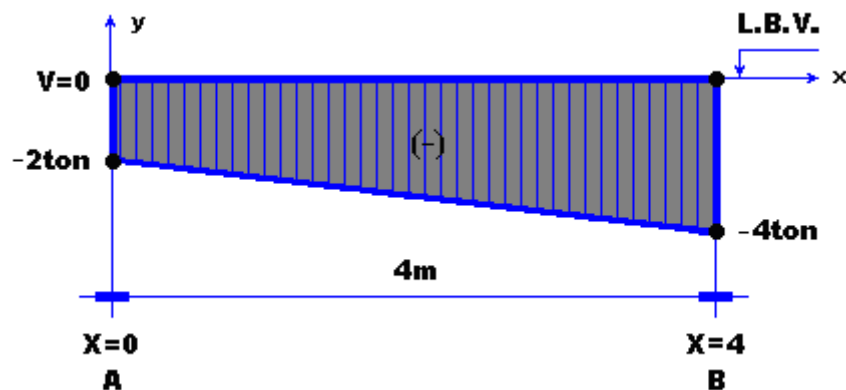


Figura 2.6.7

Diagrama de variación del momento flexionante:**Línea base del momento flexionante:**

Se construye tomando de referencia un sistema de ejes rectangulares, de tal forma que: Sobre el eje horizontal se localiza el parámetro de la distancia "X": cuando $X = 0$ y $X = 4$ m.

Sobre el eje vertical se anotan las magnitudes del momento flexionante referidos a las distancias sobre el eje horizontal.

Con los puntos encontrados, se unen de tal forma que se obtendrá el diagrama de variación del momento flexionante representado por una línea curva de segundo orden; observe la figura:

Momento flexionante cero:

Se presenta cuando $X = 4$ m

Momento flexionante máximo:

Se presenta en el apoyo "A" con una magnitud de 12 ton-m

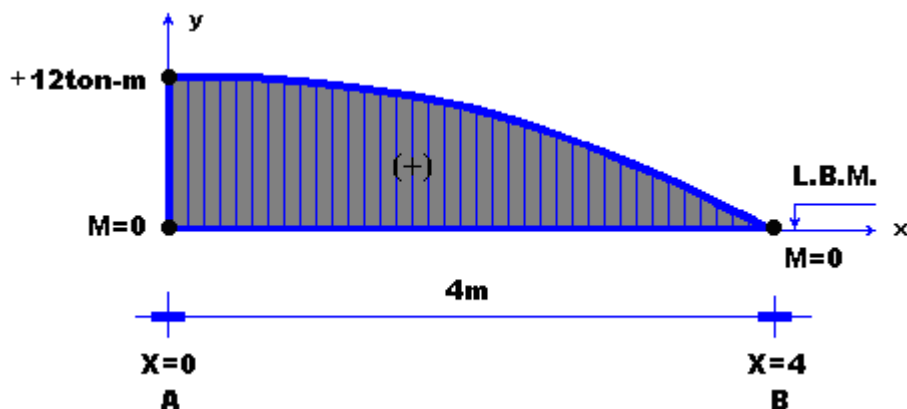


Figura 2.6.8

Diagrama de fuerza cortante, momento flexionante y fuerza normal

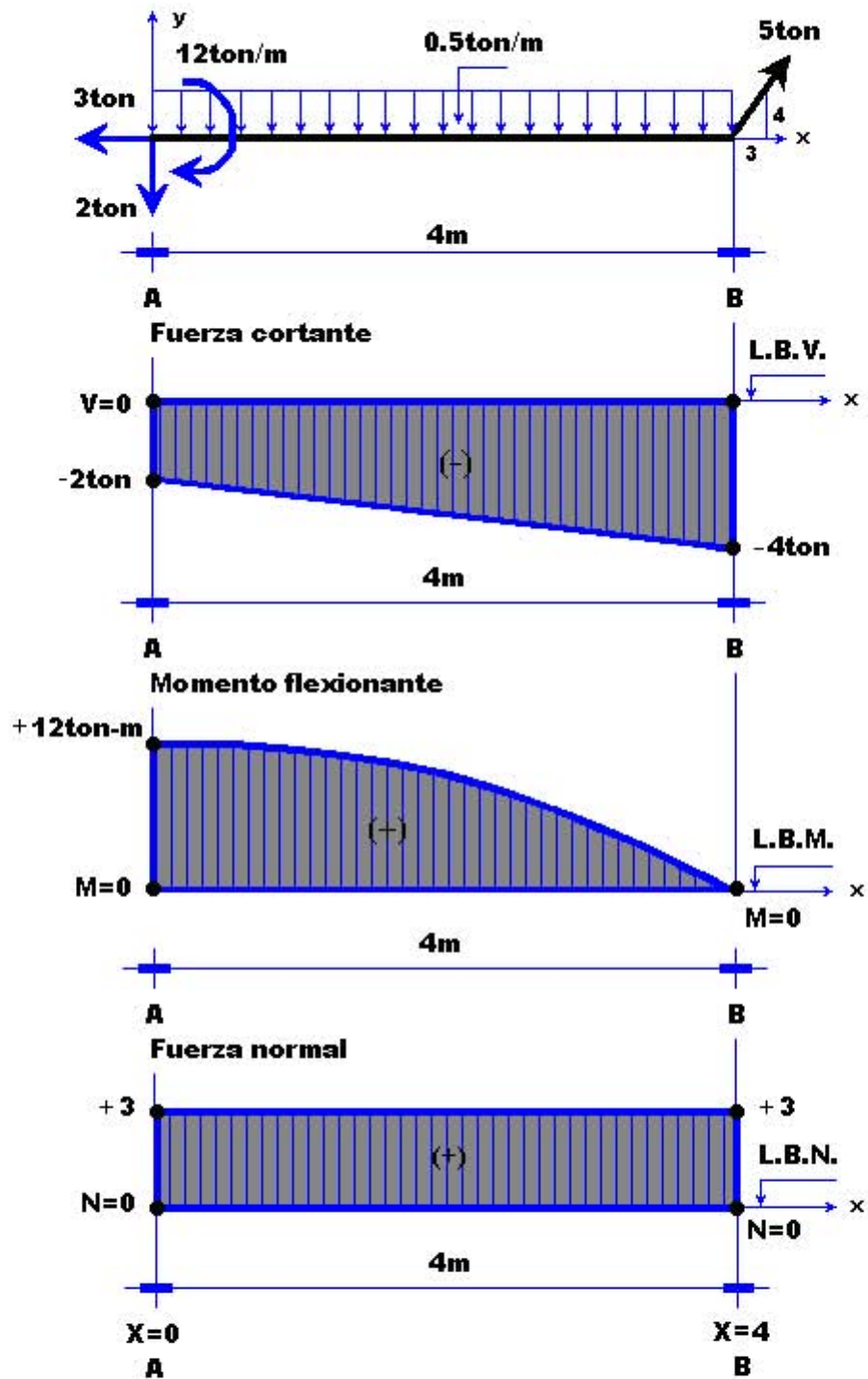


Figura 2.6.9

2.7 Viga simplemente apoyada con un extremo en cantiliver carga uniformemente distribuida y carga concentrada

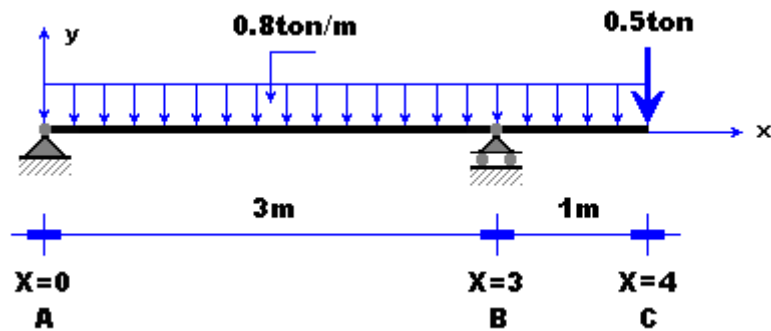


Figura 2.7.1

Diagrama de cuerpo libre:

Cargas activas:

Cargas reactivas:

Cálculo de reacciones:

Se obtienen aplicando las ecuaciones de equilibrio estático sobre el diagrama de cuerpo libre que esta integrado por un sistema de fuerzas paralelo en el plano

$$\sum M_A = 0 \quad 2(3.2) - 3R_B + 4(0.5) = 0 \quad \therefore$$

$$R_B = 2.8 \text{ ton} \quad \swarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad R_A - 3.2 + R_B - 0.5 = R_A - 3.2 + 2.8 - 0.5 = 0$$

$$R_A = 3.7 - 2.8 = 0.9 \text{ ton} \quad \swarrow$$

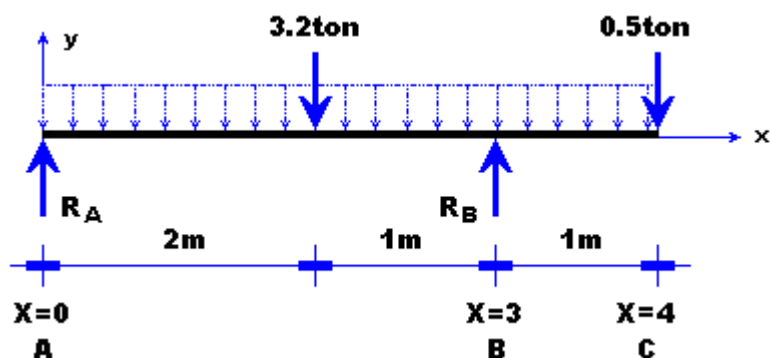


Figura 2.7.2

En base de lo anterior, la viga equilibrada es:

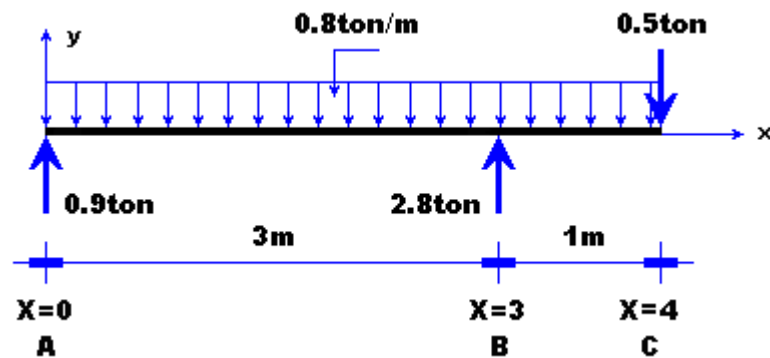


Figura 2.7.3

Si se observa la figura, desde $X = 0$ hasta un elemento diferencial antes de $X = 3$, las cargas externas se mantienen constante.

En consecuencia, con una sección perpendicular al eje longitudinal en el parámetro referido, podremos determinar los elementos mecánicos que se presentan:

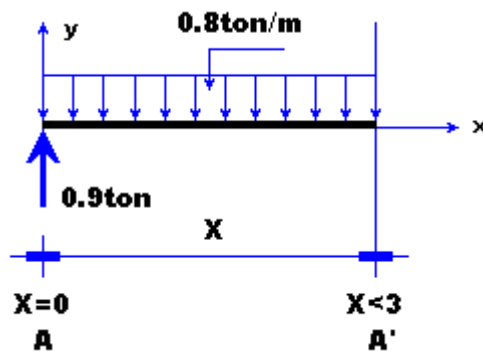


Figura 2.7.4

Aplicando las ecuaciones de equilibrio estático sobre la sección:

Función de la fuerza cortante:

Con suma de fuerzas verticales:

$$V_{A'} = 0.9 - 0.8(X) \quad \downarrow$$

Función del momento flexionante:

Con suma de momentos en A' :

$$M_{A'} = 0.9(X) - 0.8(X) \frac{x}{2} \quad \therefore$$

$$M_{A'} = -0.4(X)^2 + 0.9(X) \quad \downarrow$$

Sustituyendo los parámetros de "X" en la función de la fuerza cortante y del momento flexionante respectivamente:

Para la **Fuerza cortante**:

$$\text{Cuando } X = 0 \quad V_A = 0.9 - 0.8(0) = 0.9 \text{ ton.} \quad \downarrow$$

$$\text{Cuando } X = 3: \quad V_B = 0.9 - 0.8(3) = -1.5 \text{ ton.} \quad \downarrow$$

De los resultados anteriores se observa que la magnitud de la fuerza cortante en A de 0.9 ton, tiene signo positivo y en B de -1.5 ton, signo negativo; por lo tanto es de suponer que sobre el tramo AB en algún punto la fuerza cortante pasa por cero.

La distancia donde ocurre lo anterior se obtiene igualando a cero la función de la fuerza cortante:

$$V_A = 0.9 - 0.8(X) = 0 \quad \therefore \quad X = \frac{0.9}{0.8} = 1.125 \text{ m.} \quad \downarrow$$

Distancia que en el diagrama de variación del momento flexionante se le asocia un valor máximo.

Para el **Momento flexionante**:

$$\text{Cuando } X = 0: \quad M_A = -0.4(0)^2 + 0.9(0) = 0 \quad \downarrow$$

Cuando $X = 1.125$ la fuerza cortante pasa por cero; por lo tanto a ésta distancia le corresponde un valor máximo en el momento flexionante.

$$M_{X=1.125} = -0.4(1.125)^2 + 0.9(1.125)$$

$$M_{X=1.125} = 0.50625 \text{ ton-m} \quad \downarrow$$

$$\text{Cuando } X = 3: \quad M_B = -0.4(3)^2 + 0.9(3) = -0.9 \text{ ton-m} \quad \downarrow$$

Del resultado anterior, cuando $X = 1.125$ m, la magnitud del momento es positiva, y cuando $X = 3$ m negativa; en consecuencia, en algún punto sobre el tramo AB el momento pasa por cero.

Para determinar la distancia cuando $M = 0$, se obtiene igualando a cero la función del momento flexionante:

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$X = \frac{-0.9 \pm \sqrt{(0.9)^2 - 4(-0.4)(0)}}{2(-0.4)} = \frac{-0.9 \pm 0.9}{-0.8} \quad \therefore$$

$$X = 2.25 \text{ m.} \quad \downarrow$$

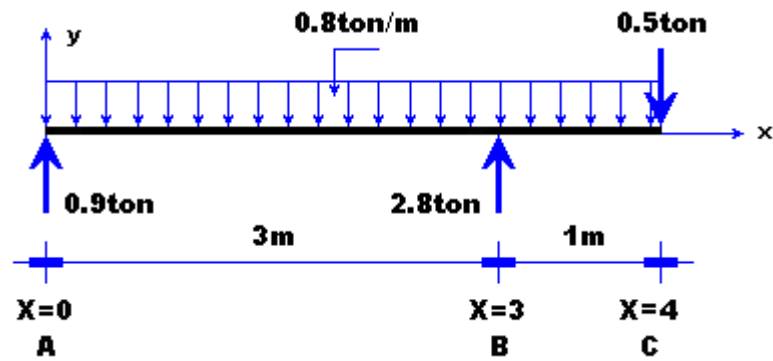


Figura 2.7.5

Considerando un elemento diferencial antes de $X = 3$ y después de $X > 3$, la fuerza externa que actúa es la reacción en B, generando cambios en los elementos mecánicos sobre el tramo BC; que, para evaluarlos, tomemos de referencia la sección que se muestra a continuación:

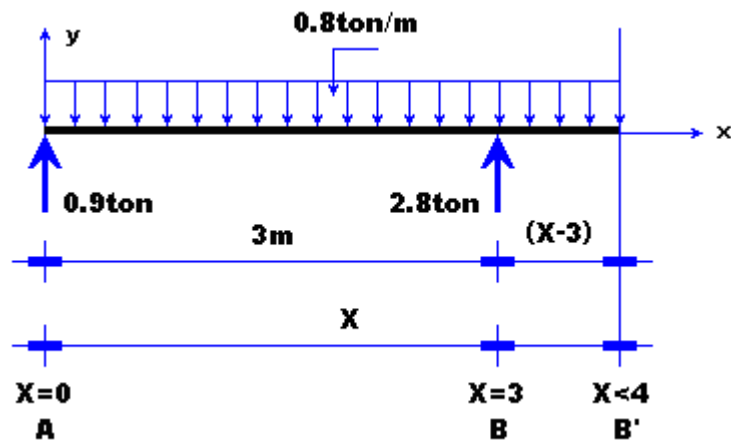


Figura 2.7.6

Aplicando las ecuaciones de equilibrio estático sobre la sección se obtiene:

Función de la fuerza cortante:

Aplicando suma de fuerzas verticales.

$$V_{B'} = 0.9 - 0.8(X) + 2.8 = 3.7 - 0.8(X) \quad \swarrow$$

Función del momento flexionante:

Aplicando suma de momentos en B':

$$M_{B'} = 0.9(X) - 0.8(X) \frac{X}{2} + 2.8(X - 3)$$

$$M_{B'} = 0.9(X) - 0.4(X)^2 + 2.8(X) - 8.4$$

$$M_{B'} = -0.4(X)^2 + 3.7(X) - 8.4 \quad \swarrow$$

Sustituyendo los parámetros de "X":

$$\text{Cuando } X = 3: V_B = 3.7 - 0.8(3) = 1.3 \text{ ton. } \downarrow$$

$$M_{B'} = -0.4(3)^2 + 3.7(3) - 8.4 = -0.9 \text{ ton-m } \downarrow$$

$$\text{Cuando } X = 4: V_C = 3.7 - 0.8(4) = 0.5 \text{ ton } \downarrow$$

$$M_{B'} = -0.4(4)^2 + 3.7(4) - 8.4 = 0 \downarrow$$

Con los valores encontrados para la fuerza cortante y para el momento flexionante, sobre los tramos AB y BC se procede a trazar el diagrama de variación correspondiente:

Trazo del diagrama de variación de la fuerza cortante:

Línea base de la fuerza cortante:

Sobre el eje horizontal se relacionan los parámetros de la distancia "X"; y sobre el eje vertical la magnitud de la fuerza cortante respectiva:

Uniendo los puntos que se obtuvieron, resultará el diagrama de variación de la fuerza cortante:

Fuerza cortante cero:

Se presenta en el tramo AB cuando $X = 1.125 \text{ m}$.

Fuerza cortante mínima:

Se presenta en el punto "C" con magnitud de 0.5 ton.

Fuerza cortante máxima:

Se presenta en el punto B lado izquierdo con magnitud de 1.5 ton

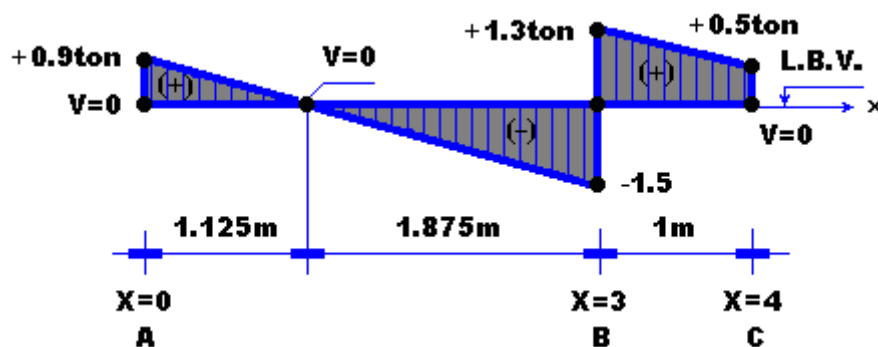


Figura 2.7.7

Trazo del diagrama de variación del momento flexionante:**Línea base del momento flexionante:**

Sobre el eje horizontal se localizan los parámetros de "X", y sobre el vertical las magnitudes del momento que le corresponden

Uniendo los puntos obtenidos resulta el diagrama de variación del momento flexionante:

Momento flexionante cero:

Se presenta en el punto A y C; y sobre el tramo AB a una distancia de 2.25m

Momento flexionante máximo:

Se presenta en B y a una distancia de $X = 1.125$ sobre el tramo AB.

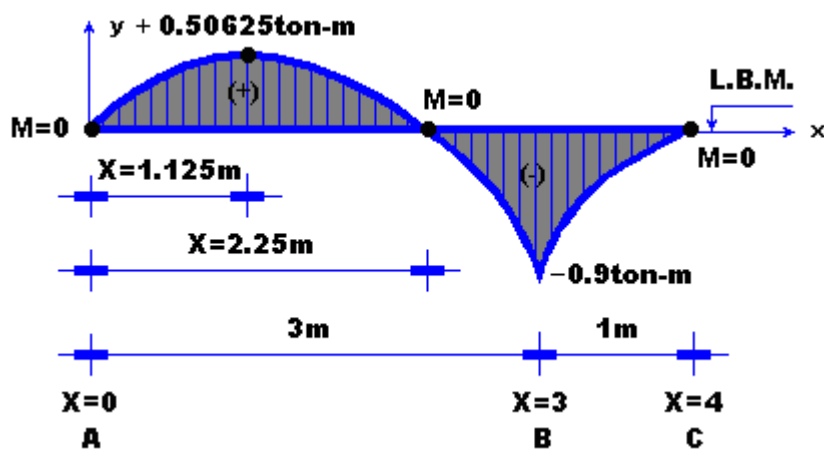


Figura 2.7.8

Diagrama de fuerza cortante y momento flexionante

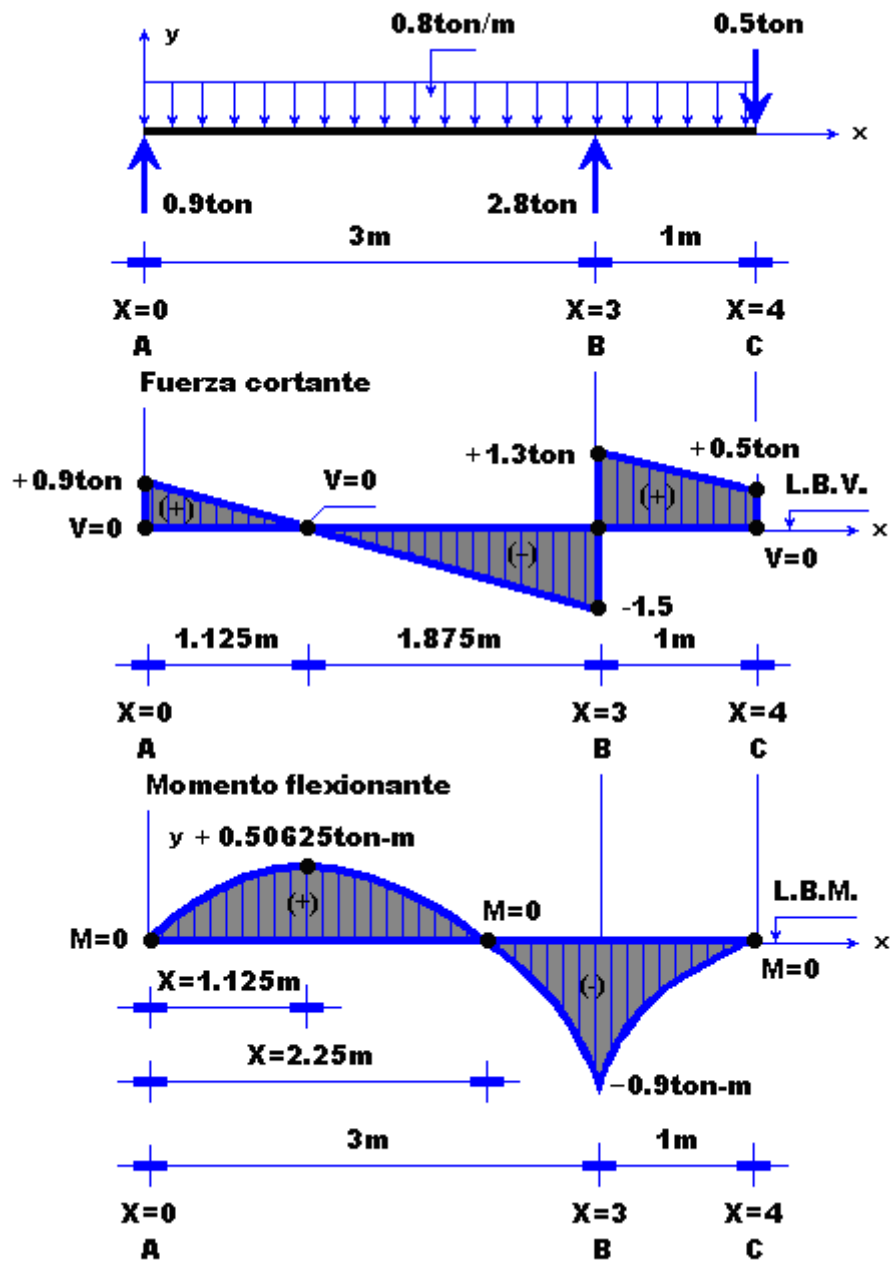


Figura 2.7.9

2011

ANÁLISIS DE MARCOS



ANÁLISIS DE MARCOS

3.1 Procedimiento de análisis

Los criterios de análisis para determinar el diagrama de variación de los elementos mecánicos que se presentan en una estructura en el contexto geométrico de un marco, son similares a los que se aplicaron en los apartados del capítulo 2 respectivamente; es decir, utilizando el análisis en estructuras en forma de viga, por lo tanto, es importante señalar dos variantes más que se utilizan para ello:

Primera: Se define un marco de referencia general en el contexto de la estructura, integrado por dos ejes rectangulares: uno horizontal: X y el otro vertical: Y, teniendo como origen el nodo A tal como se muestra en la figura.

Segunda: El análisis de los elementos que integran la estructura (tramo AB, tramo BC, tramo CD, y tramo DE), se abordan considerando un sentido de recorrido por la parte interna de la estructura y de izquierda a derecha definiéndole a cada uno de ellos un marco de referencia particular; por ejemplo, para el tramo BC, su origen está localizado en el nodo B de tal manera que en el sentido de B a C, se identifica el eje horizontal positivo X; y en el sentido vertical a partir de B el eje Y.

Con base en lo anterior y para que seamos más objetivos, procederemos a analizar el marco que se muestra en la siguiente figura:

3.2 Ejercicio 1: Determinar la variación de los elementos mecánicos

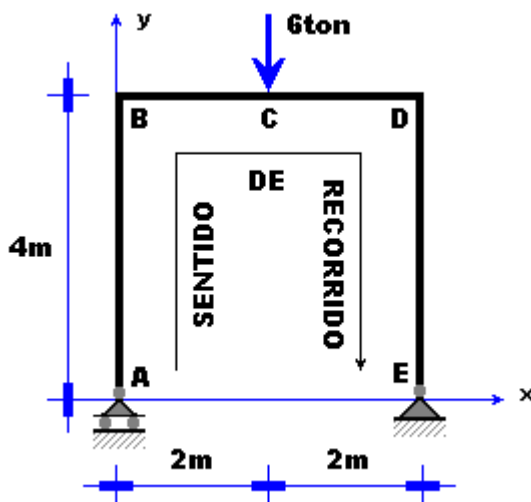


Figura 3.2.1

Diagrama de cuerpo libre: Nos permite identificar, Las cargas activas y las cargas reactivas. El sistema de fuerzas que se asocia con la estructura. El número de las ecuaciones de equilibrio para el sistema de fuerzas determinado. El número de las incógnitas que contiene el sistema. Las condiciones de isostaticidad para determinar el tipo de estructura que se está analizando.

Considerando como origen el punto A, se construirá un marco de referencia integrado por los ejes rectangulares en R^2

- Eje horizontal +X
- Eje vertical +Y

Identificación de cargas:

Cargas Activas: Generadas por las cargas externas

- Se identifica la carga puntual de 6 ton. Actuando en el punto C.

Cargas Reactivas: Generadas por los vínculos en los apoyos.

- En A el apoyo móvil que contiene una componente reactiva en la dirección vertical RA.
- En E, el apoyo fijo, que contiene dos componentes reactivas; una, en la dirección vertical y la otra, en la dirección horizontal, pero, dado que no existe carga externa en ésta dirección, la componente es igual a cero.

Sistema de fuerzas sobre la estructura:

- Paralelo en el plano.

Número de las ecuaciones (E) del equilibrio estático que se le asocia al sistema: Tres.

- Suma de fuerzas horizontales en la dirección del eje X, $\sum F_x = 0$
- Suma de fuerzas verticales en la dirección del eje Y, $\sum F_y = 0$
- Suma de Momentos en la dirección perpendicular al plano XY, $\sum M_z = 0$

Número de incógnitas en el sistema: Tres;

- La reacción horizontal en E, R_{EX} , donde $R_{EX} = 0$
- La reacciones verticales en A, R_{AY} , y en E, R_{EY}

Condiciones de isostaticidad:

- Si el número de incógnitas es $I=3$
- Y el número de ecuaciones de equilibrio es $E=3$
- Las condiciones de isostaticidad son iguales $I=E$

Por lo tanto:

- El tipo de estructura es Isostática, teniendo una única solución

Diagrama de cuerpo libre:

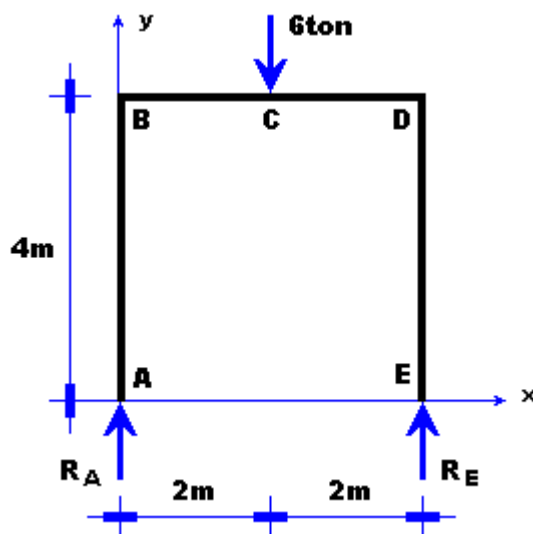


Figura 3.2.2

Cálculo de reacciones: Aplicando las condiciones de equilibrio estático sobre el diagrama de cuerpo libre:

Cálculo de la reacción en E:

$$\sum M_A = 0 \quad 6(2) - 4R_E = 0 \quad \therefore R_E = 3\text{ton} \quad \downarrow$$

Cálculo de la reacción en A:

$$\sum M_E = 0 \quad -6(2) + 4R_A = 0 \quad \therefore R_A = 3\text{ton} \quad \downarrow$$

La estructura equilibrada es:

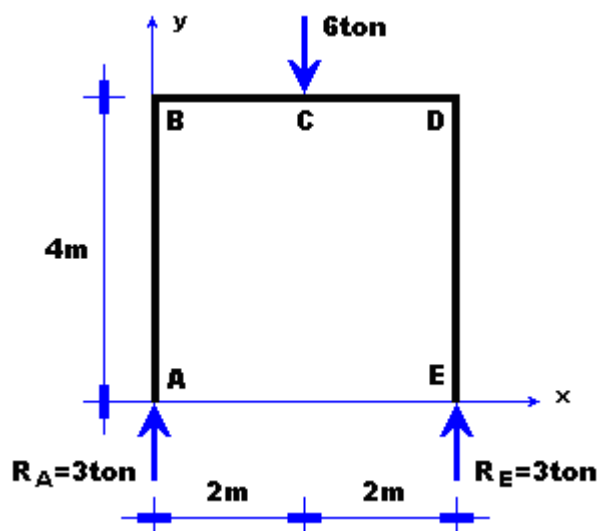


Figura 3.2.3

Análisis del tramo AB: Tomando como referencia el análisis funcional, las funciones de los elementos mecánicos se obtienen aplicando sobre el diagrama de cuerpo libre del tramo, las condiciones de equilibrio del sistema de fuerzas que se le asocia en su conjunto. Para demostrar lo anterior tomemos como referencia la figura que a continuación se muestra.

Aplicando las condiciones de equilibrio para el sistema de fuerzas identificado, se obtiene la función de la fuerza normal:

$$\sum F_Y = 0 \quad 3 - N_{A'} = 0 \quad \therefore N_{A'} = 3 \text{ ton} \quad \curvearrowright$$

La función de la fuerza normal $N_{A'} = 3 \text{ ton}$ es la magnitud constante en el tramo AB entonces: Si $X=0 \Rightarrow N_A = 3 \text{ ton}$ y Si $X=4 \Rightarrow N_A = 3 \text{ ton}$

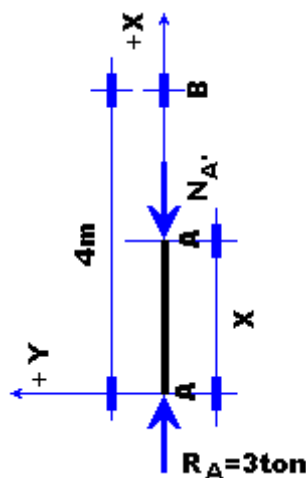


Figura 3.2.4

Por lo tanto la magnitud de la fuerza normal de 3 ton, se le asocia con el signo negativo por el efecto de compresión que le está generando al tramo AB.

Análisis del tramo BC: Para el efecto, tomaremos como referencia la estructura equilibrada:

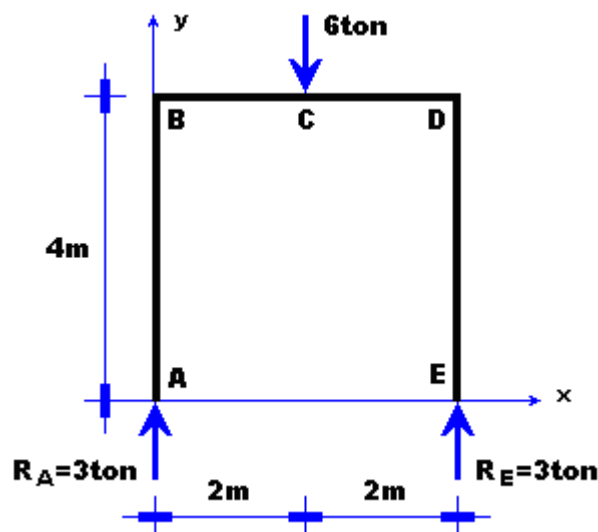


Figura 3.2.5

El diagrama de cuerpo libre para el tramo BC se muestra a continuación:

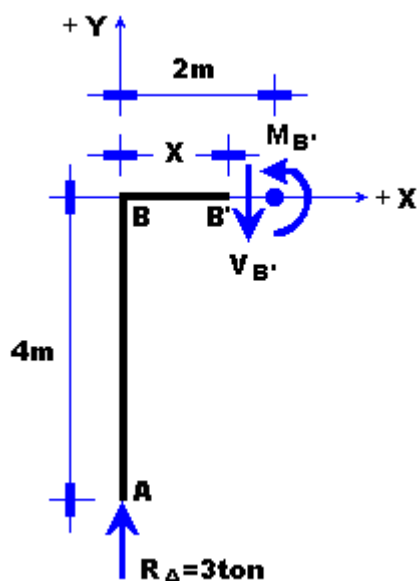


Figura 3.2.6

Considerando el marco de referencia particular para el tramo BC y con origen en el punto B, el sistema de fuerzas que se integra en el diagrama de cuerpo libre es paralelo en la dirección del eje Y incluyendo pares.

Tomando como referencia el diagrama de cuerpo libre, y aplicando sobre éste las condiciones de equilibrio estático para un sistema de fuerzas paralelo, se obtienen las funciones de los elementos mecánicos que se presentan en el tramo BC, que al sustituir en éstas los parámetros de la distancia X, resulta en consecuencia la magnitud de cada uno de los elementos mecánicos que se presentan en el tramo:

Funciones de los elementos mecánicos:

Fuerza cortante: $V_{B'} = 3\text{ton}$

Momento flexionante: $M_{B'} = 3X \text{ ton-m}$

Parámetros de la distancia "X":

Sustituyendo los parámetros correspondientes en cada una de las funciones:

Considerado un elemento diferencial cuando X es mayor que cero se obtiene la fuerza cortante en B: $V_{B'} = 3 \text{ ton}$.

Considerando un elemento diferencial cuando $X=2$, se obtiene la fuerza cortante en C del lado izquierdo: $V_{C'} \text{ LADO IZQUIERDO} = 3 \text{ ton}$.

Cuando $X=0$, se obtiene el momento flexionante en B: $M_{B'} = 3(0)=0$

Cuando $X=2$, se obtiene el momento flexionante en C: $M_{C'} = 3(2)=6 \text{ ton-m}$

Análisis del tramo CD: Tomaremos como referencia de inicio la estructura equilibrada:

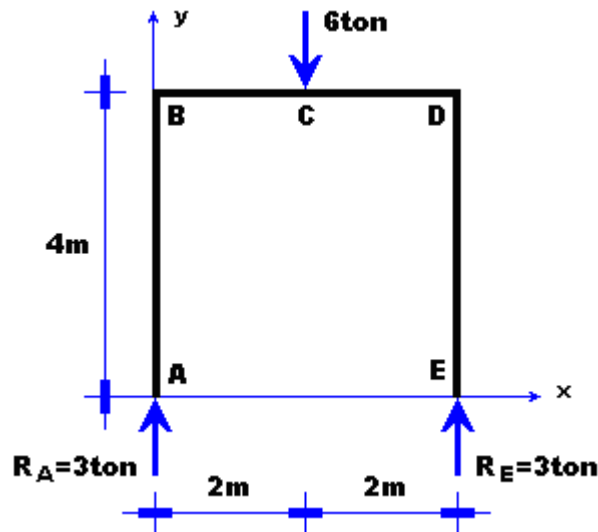


Figura 3.2.7

El diagrama de cuerpo libre para el tramo CD es:

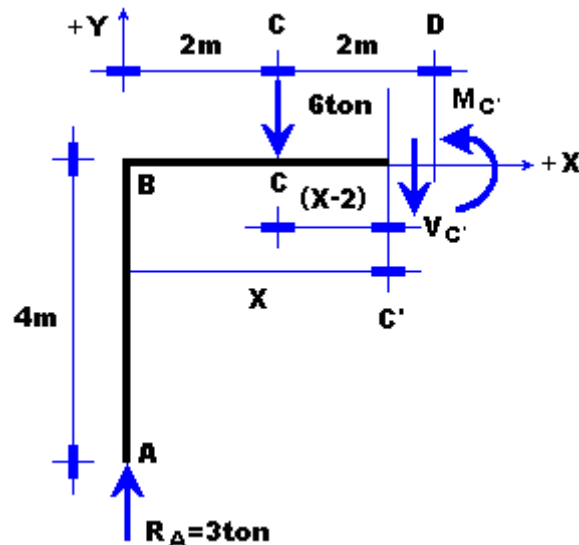


Figura 3.2.8

Función de los elementos mecánicos:

Si el diagrama de cuerpo libre integra un sistema de fuerzas paralelo en el plano incluyendo pares, las funciones de la fuerza cortante y del momento flexionante se determinan aplicando las condiciones de equilibrio sustituyendo en las funciones respectivas, los parámetros de la distancia X:

Fuerza Cortante: $V_C = -3\text{ton}$, Momento Flexionante: $M_C = -3X + 12$

Parámetros de X: $2 \leq X \leq 4$

Sustituyendo el parámetro de la distancia X en las funciones de la fuerza cortante y del momento flexionante:

Cuando $X=2$, se obtienen: $V_{\text{C LADO DER}} = -3\text{ton}$
 Cuando $X=2$, se obtienen: $V_D = -3\text{ton}$
 Cuando $X=2$, se obtiene: $M_C = -3(2)+12 = 6 \text{ ton}\cdot\text{m}$
 Cuando $X=4$, se obtiene: $M_D = -3(4)+12 = 0$

Análisis del tramo DE: Nuevamente tomaremos como referencia el diagrama de la estructura equilibrada, para que a partir de ésta, se defina un diagrama de cuerpo libre del tramo; esto es:

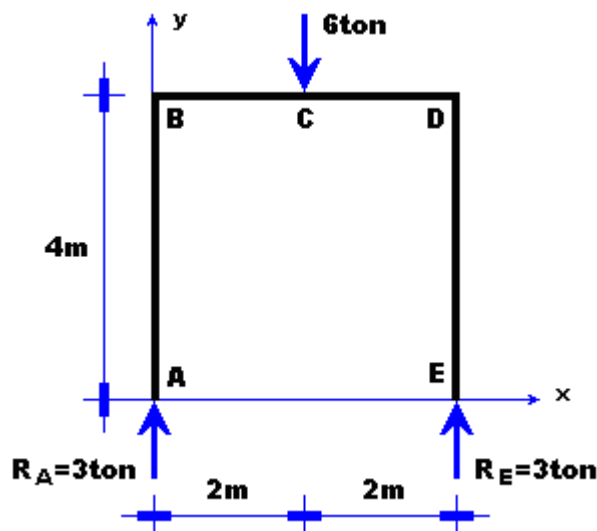


Figura 3.2.9

De la figura anterior, el diagrama de cuerpo libre para el tramo DE es:

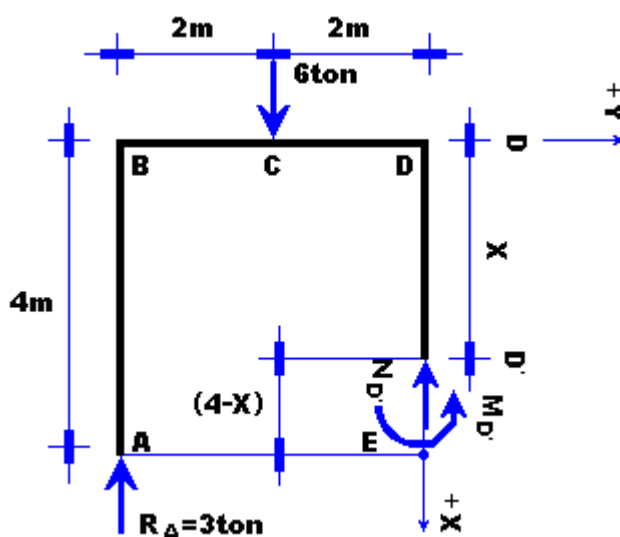


Figura 3.2.10

Funciones de los elementos mecánicos: Considerando que el diagrama de cuerpo libre que se obtuvo esta integrado por un sistema de fuerzas paralelo en el plano que incluye pares, las funciones de los elementos mecánicos, se obtienen al aplicar las condiciones de equilibrio. Con base en lo anterior y tomando como referencia los parámetros de la distancia X , la magnitud de los elementos mecánicos se determinan al sustituir respectivamente en las funciones la distancia X :

Funciones de los elementos mecánicos en DE:

Fuerza normal: $N_{D'} = 3 \text{ ton}$, Momento flexionante: $M_{D'} = 0$

Parámetros de la distancia X: $0 \leq X \leq 4$

Sustituyendo los parámetros de la distancia X, se obtiene la magnitud de los elementos mecánicos.

Cuando $X=0$: $N_D=3\text{ton}$

Cuando $X=4$: $N_E=3\text{ton}$

Cuando $X=0$: $M_D=0$

Cuando $X=4$: $M_E=0$

La magnitud de la fuerza normal por el efecto de compresión que genera, se asocia con un signo negativo.

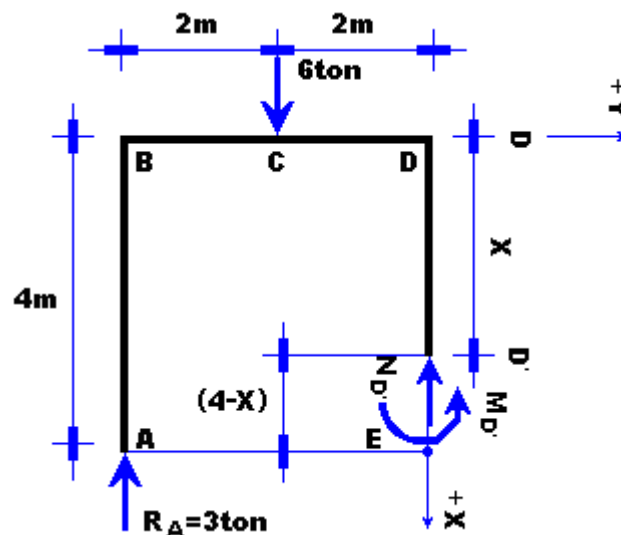


Figura 3.2.11

Función de la fuerza normal:

$$\sum F_x = 0 \quad N_{D'} = -3 + 6 \quad \therefore N_{D'} = 3 \text{ ton} \quad \leftarrow$$

Función del momento flexionante:

$$\sum M_{D'} = 0 \quad M_{D'} = 3(4) - 6(2) \quad \therefore M_{D'} = 0 \quad \leftarrow$$

Finalmente, en la tabla que a continuación se muestra, se registran los valores de los elementos mecánicos que se obtuvieron para cada tramo de la estructura.

TRAMO	PARAMETROS DE X		FUERZA CORTANTE		MOMENTO FLEXIONANTE		FUERZA NORMAL	
AB	0	4	0	0	0	0	NA=-3	NB=-3
BC	0	2	VB=3	VC=-3	0	MC=6	0	0
CD	2	4	VC=-3	VD=-3	MC=6	0	0	0
DE	0	4	0	0	0	0	ND=-3	NE=-3

Fuerza cortante:

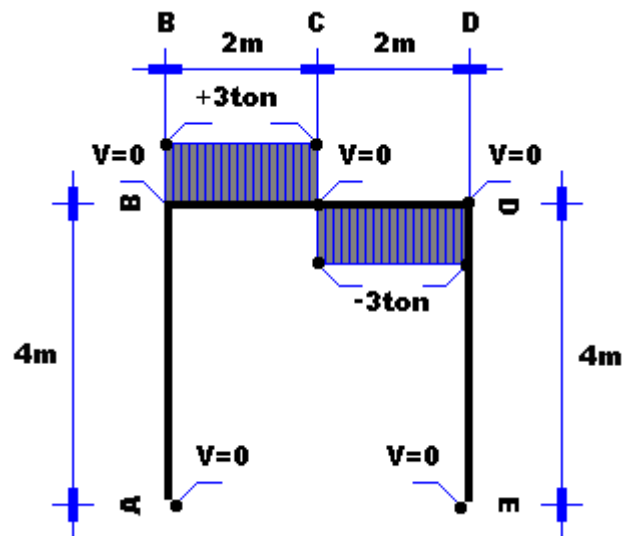


Figura 3.2.12

Momento flexionante:

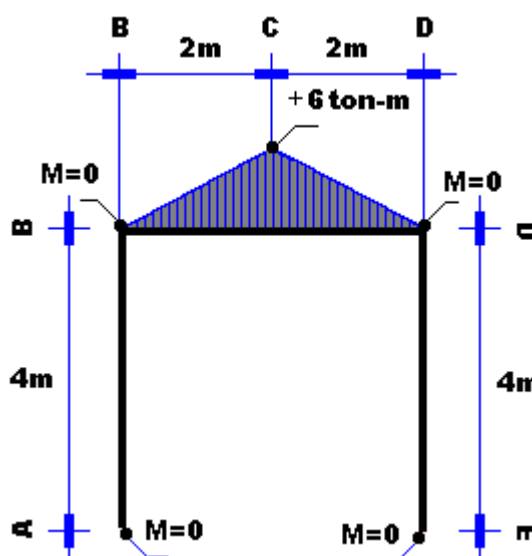


Figura 3.2.13

Fuerza normal:

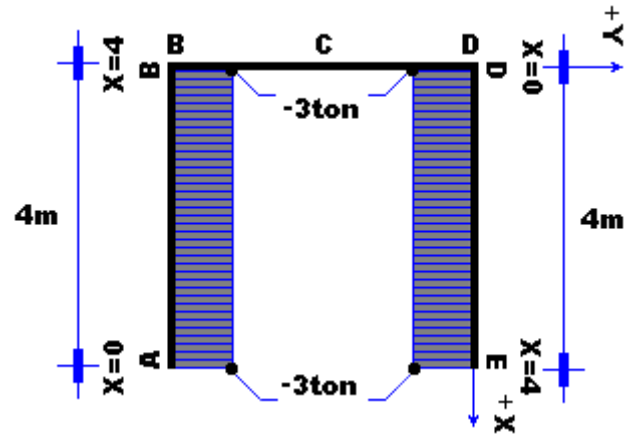


Figura 3.2.14

3.3 Ejercicio 2: Determinar la variación de los elementos mecánicos

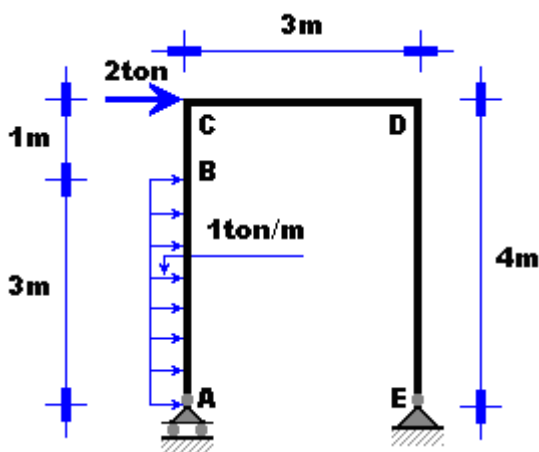


Figura 3.3.1

Procedimiento de análisis: Aplicaremos el análisis relacional para determinar los elementos mecánicos.

Primero: Se construye un diagrama de cuerpo libre de la estructura, para identificar las cargas activas y las cargas reactivas, de tal forma que nos permita identificar el sistema de fuerzas en su conjunto; el número de ecuaciones de equilibrio que se le asocie; el número de incógnitas que contenga el sistema en general; las condiciones de isostaticidad para verificar si la estructura se puede analizar como isostática; esto es:

Diagrama de cuerpo libre:

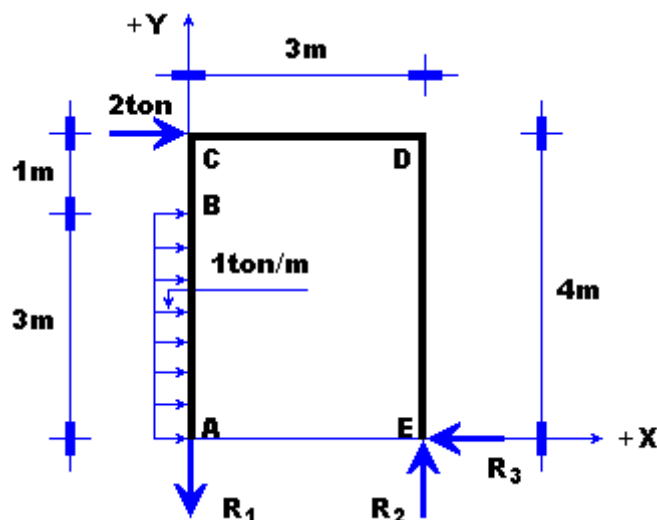


Figura 3.3.2

Considerando como origen el punto A, se construirá un marco de referencia integrado por los ejes rectangulares en R^2

- Eje horizontal +X
- Eje vertical +Y

Identificación de cargas:**Cargas Activas:** generadas por las cargas externas

- Carga puntual de 2 ton. Actuando en el punto C
- Carga uniformemente distribuida de 1 ton/m, que actúa en el tramo AB.

Cargas Reactivas: generadas por los vínculos en los apoyos.

- Apoyo A: Móvil, con un vínculo representado por la reacción R_1
- Apoyo E: Fijo, con dos vínculos representados por la reacción R_2 y R_3

Identificación del sistema de fuerzas que integra el diagrama de cuerpo libre:

- Generales en el plano

Número de las ecuaciones (E) del equilibrio estático que se le asocia al sistema: Tres.

- Suma de fuerzas en la dirección del eje X, $\sum F_x = 0$
- Suma de fuerzas en la dirección del eje Y, $\sum F_y = 0$
- Suma de Momentos en la dirección perpendicular al plano XY, $\sum M_z = 0$

Numero de incógnitas (I) que contiene el sistema: Tres.

- Reacción R_1 , R_2 y R_3

Condiciones de isostaticidad:

- Si el número de incógnitas es $I=3$
- Y el número de ecuaciones de equilibrio es $E=3$
- Las condiciones de isostaticidad son iguales $I=E$

Por lo tanto:

- El tipo de estructura es **Isostática**

Segundo: Cálculo de reacciones; se obtienen aplicando sobre el diagrama de cuerpo libre las condiciones de equilibrio:

Con suma de fuerzas en la dirección del eje X, se obtiene la reacción horizontal en E:

$$\sum F_x = 0 \quad 2+3-R_3 = 0 \quad \therefore R_3 = 5\text{ton}$$

Aplicando las condiciones de equilibrio sobre el diagrama de cuerpo libre: Con suma de momento en A, se obtiene la reacción vertical en E:

$$\sum M_A = 0 \quad 1.5(3)+4(2)-3R_2 = 0 \quad \therefore R_2 = 4.17\text{ton}$$

Con suma de momentos en E, se obtiene la reacción vertical en A:

$$\sum M_E = 0 \quad 1.5(3) + 4(2) - 3R_1 = 0 \quad \therefore R_1 = 4.17 \text{ ton}$$

Tercero: Con el valor de las reacciones, se define la estructura equilibrada tal como se muestra en la siguiente figura:

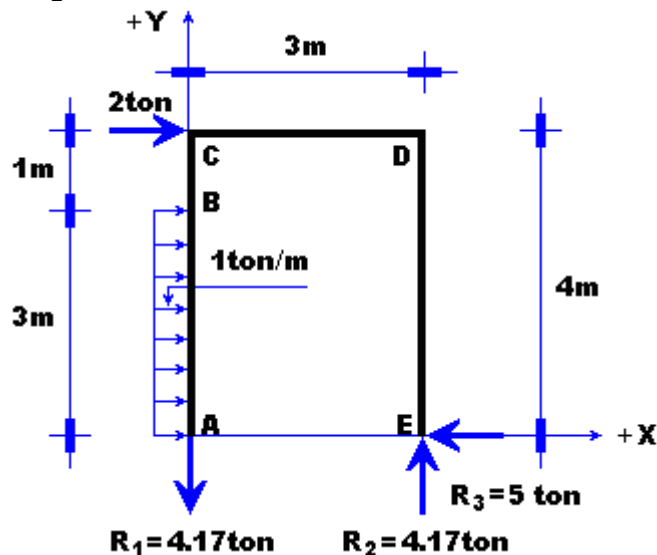


Figura 3.3.3

Diagrama de variación de la fuerza cortante sobre el tramo AC:

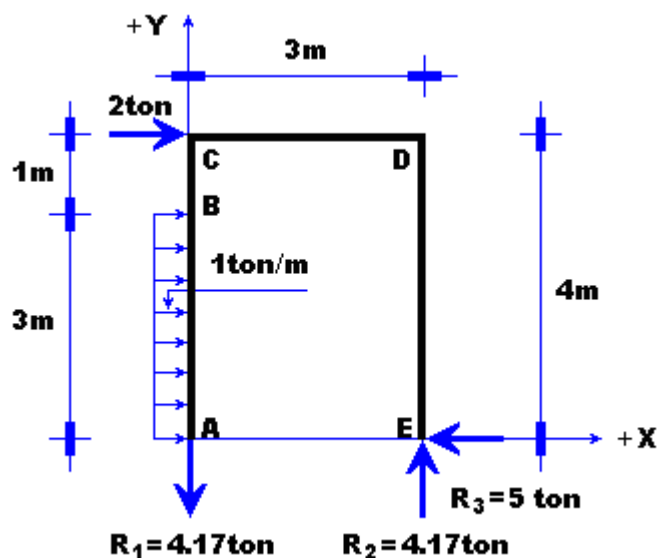


Figura 3.3.4

Se observa que de las fuerzas que están actuando, la carga uniformemente distribuida en el tramo AB, es la que genera la fuerza cortante en el tramo AC.

Aplicando el análisis relacional sobre el tramo:

Fuerza cortante en A: $V_A = 0$

Fuerza cortante en B:

$$V_B = V_A + (\text{área de la carga externa de A a B})$$

$$V_B = 0 + (-1 \times 3) = -3 \text{ ton}$$

Fuerza cortante en C:

$$V_C = V_B + (\text{área de la carga externa de B a C})$$

$$V_C = -3 + (0) = -3 \text{ ton.}$$

Trazo del diagrama de la fuerza cortante:

Tomando como origen el punto A, se define un marco de referencia particular que contenga:

- Un eje +X, para localizar los parámetros de la distancia X.
- Un eje +Y, para registrar los valores de la fuerza cortante referidos a la distancia X respectiva.

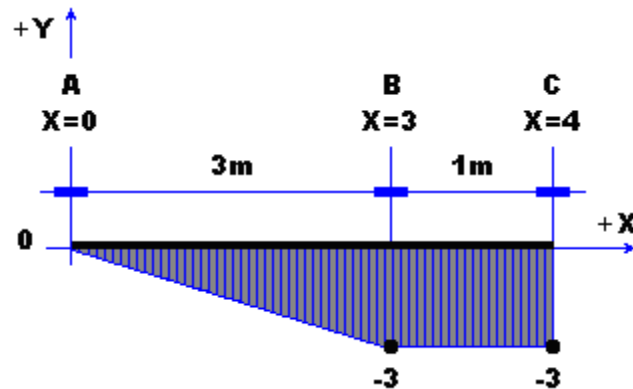


Figura 3.3.5

Uniando los puntos en el orden que se determinaron, resultará el trazo del diagrama de la fuerza cortante sobre el tramo.

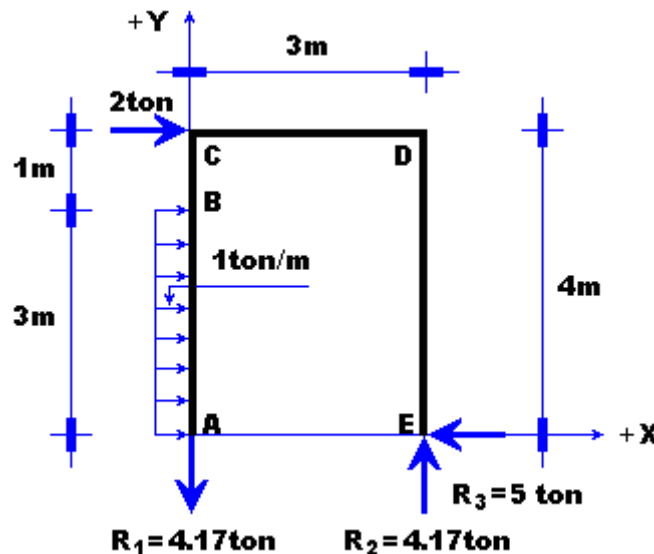
Diagrama de variación de la fuerza cortante sobre el tramo CD:

Figura 3.3.6

Las cargas que generan la fuerza cortante sobre el tramo CD, están representadas por las reacciones verticales en los apoyos respectivos:

La fuerza cortante en C, se determina considerando un elemento diferencial después de $X > 0$; por lo tanto:

$$V_A = -4.17 \text{ ton}$$

En forma análoga, la fuerza cortante en D, se determina considerando un elemento diferencial antes de $X = 3$; de tal forma que:

$$V_D = -4.17 \text{ ton}$$

Construcción del diagrama de variación de la fuerza cortante sobre el tramo CD:

Tomando como origen el punto C, se construye un marco de referencia particular que contenga:

- Un eje +X, para anotar los parámetros de la distancia X.
- Un eje +Y, para anotar los valores de la fuerza cortante referidos a la distancia X respectiva:

Uniendo los puntos en el orden que se determinaron, se obtiene el trazo del diagrama de la fuerza cortante:

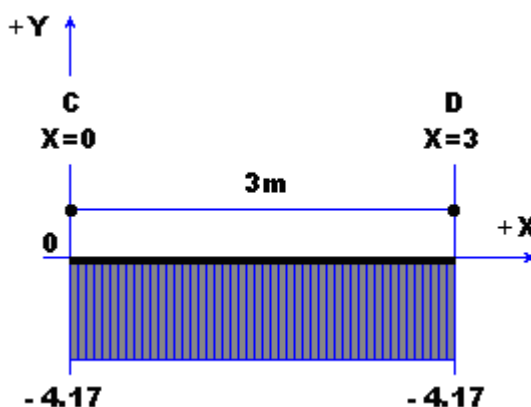


Figura 3.3.7

Diagrama de variación de la fuerza cortante sobre el tramo DE:

Tomando de referencia el punto D, las cargas que habrán de generar la fuerza cortante son las que están actuando perpendicularmente al tramo DE desde el punto D hasta el punto A; siendo estas:

- La carga uniformemente distribuida que actúa sobre el tramo AB con una magnitud de 3 ton. Como la fuerza resultante equivalente, y;
- La carga de 2 ton. que actúa en el punto C.

Con base en lo anterior, y considerando un elemento diferencial después de $X = 0$, la fuerza cortante en D es:

$V_D = + 5 \text{ ton}$

En forma análoga para la fuerza cortante en E, se determina considerando un elemento diferencial antes de $X = 4$; por lo tanto:

$V_E = + 5 \text{ ton}$.

Tomando como origen el punto D, se construye un marco de referencia particular para el tramo, integrado por:

- Eje +X, para anotar los parámetros de X.
- Eje +Y, para anotar los valores de la fuerza cortante referidos a la distancia X.

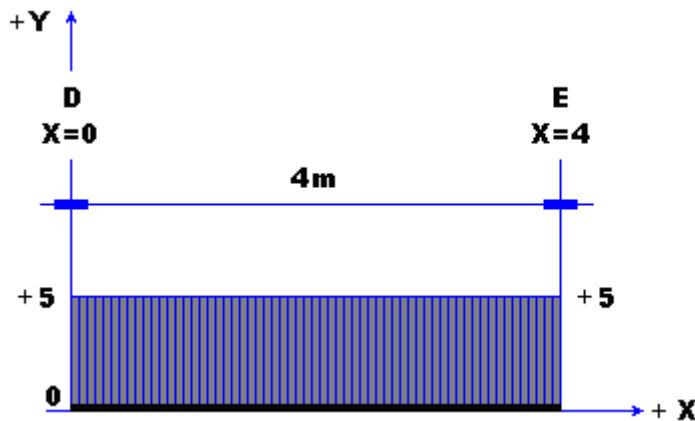


Figura 3.3.9

Uniendo los puntos en el orden que se determinaron, resulta el trazo del diagrama de la fuerza cortante para el tramo DE.

Cuarto: Aplicando el análisis y tomando como referencia la estructura equilibrada, se determinarán los diagramas de variación de la fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante:

Trazo del diagrama de variación de la fuerza normal:

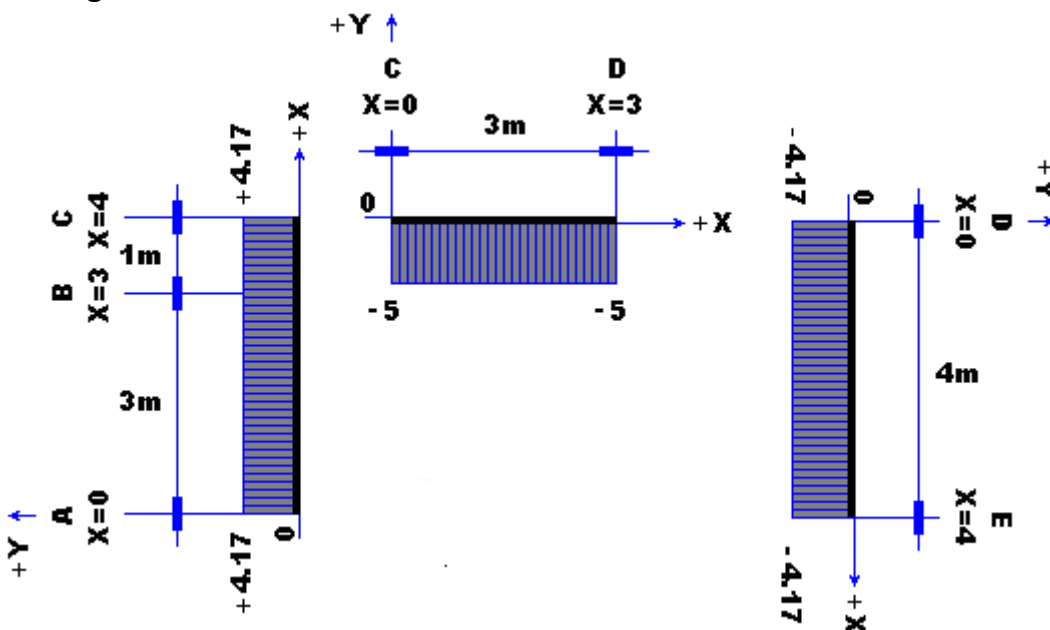


Figura 3.3.10

Trazo del diagrama de variación de la fuerza cortante:

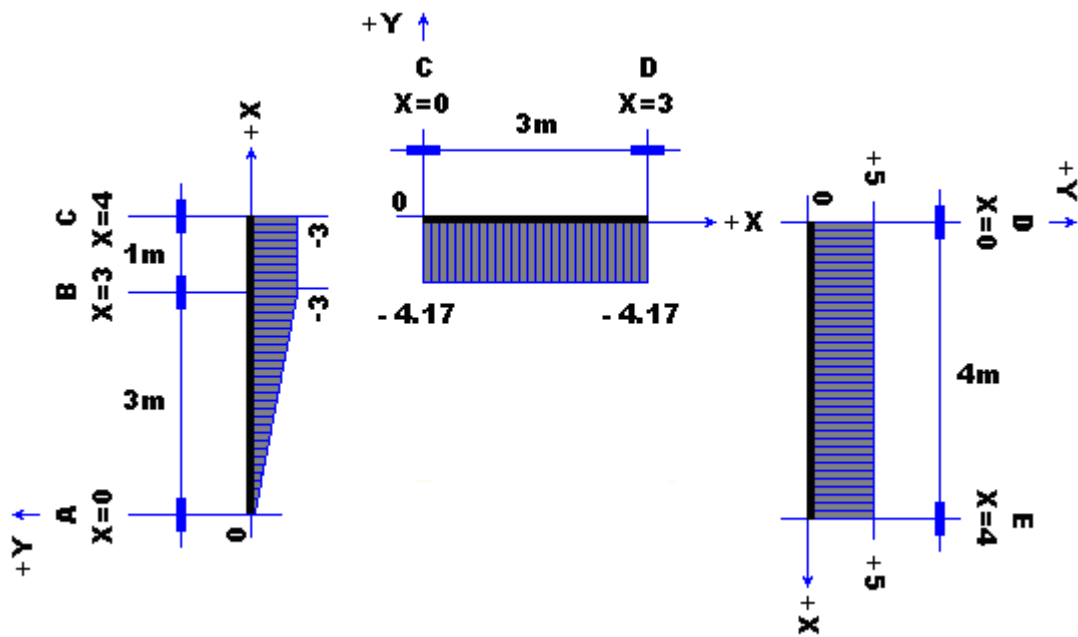


Figura 3.3.11

Trazo del diagrama de variación del momento flexionante:

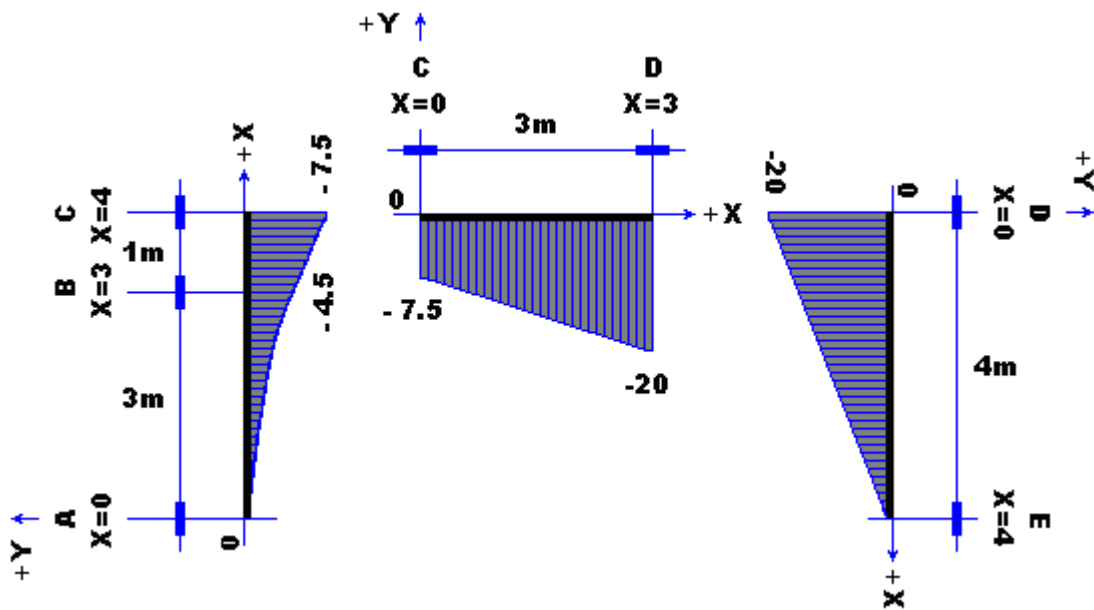


Figura 3.3.12

3.4 Ejercicio 3: Determinar la variación de los elementos mecánicos

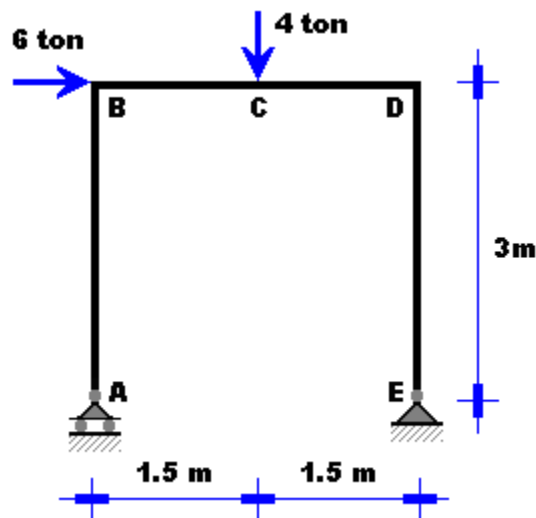


Figura 3.4.1

Procedimiento de análisis: Para determinar los diagramas de variación de los elementos mecánicos, se utiliza la deducción de los elementos mecánicos para cada tramo de la estructura.

Considerando como origen el punto A, se construirá un marco de referencia integrado por los ejes rectangulares en R^2

- Eje horizontal +X
- Eje vertical +Y

Identificación de cargas:

Cargas activas: generadas por las cargas externas

- Carga puntual de 6 ton. Actuando en el punto B
- Carga puntual de 4 ton. Actuando en el punto C

Reactivas: generadas por los vínculos en los apoyos.

- Apoyo A: Móvil, con un vínculo representado por la reacción R_1
- Apoyo E: Fijo, con dos vínculos representados por la reacción R_2 y R_3

Identificación del sistema de fuerzas que integra el diagrama de cuerpo libre:

- Generales en el plano

Número de las ecuaciones (E) del equilibrio estático que se le asocia al sistema: Tres.

- Suma de fuerzas en la dirección del eje X, $\sum F_x = 0$
- Suma de fuerzas en la dirección del eje Y, $\sum F_y = 0$
- Suma de Momentos en la dirección perpendicular al plano XY, $\sum M_z = 0$

Numero de incógnitas (I) que contiene el sistema: Tres.

- Reacción R_1 , R_2 y R_3

Condiciones de isostaticidad:

- Si el número de incógnitas es $I=3$
- Y el número de ecuaciones de equilibrio es $E=3$
- Las condiciones de isostaticidad son iguales $I=E$

Por lo tanto:

- El tipo de estructura es **Isostática**

El diagrama de cuerpo libre de la estructura equilibrada se muestra a continuación:

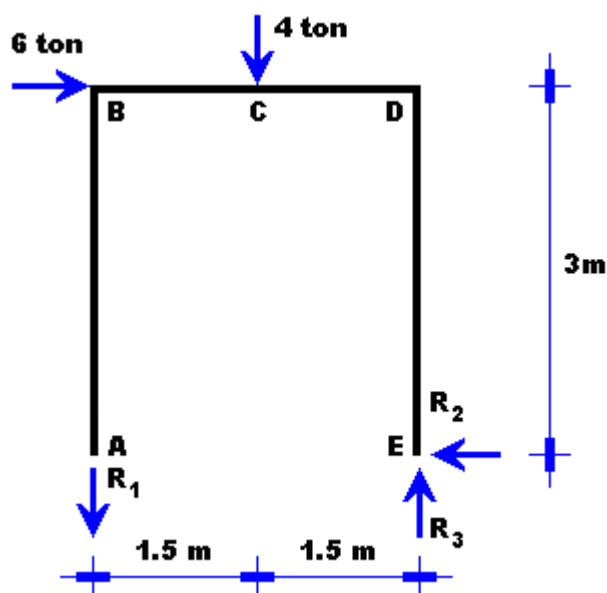


Figura 3.4.2

Cálculo de reacciones: Aplicando las ecuaciones de equilibrio estático sobre el diagrama de cuerpo libre de la estructura equilibrada:

Suma de fuerzas horizontales se obtiene la reacción R_2 :

$$\sum F_x = 0 \quad 6 - R_2 = 0 \quad \therefore R_2 = 6 \text{ ton}$$

Suma de momentos respecto al punto A, se obtiene la reacción R_3 :

$$\sum M_A = 0 \quad 6(3) + 4(1.5) - 3R_3 = 0 \quad \therefore R_3 = 8 \text{ ton}$$

Suma de fuerza verticales y sustituyendo el valor de R_3 , se obtendrá la reacción R_1

$$\sum F_y = 0 \quad -R_1 - 4 + R_3 = 0 \quad \therefore R_1 = 4 \text{ ton}$$

Estructura equilibrada:

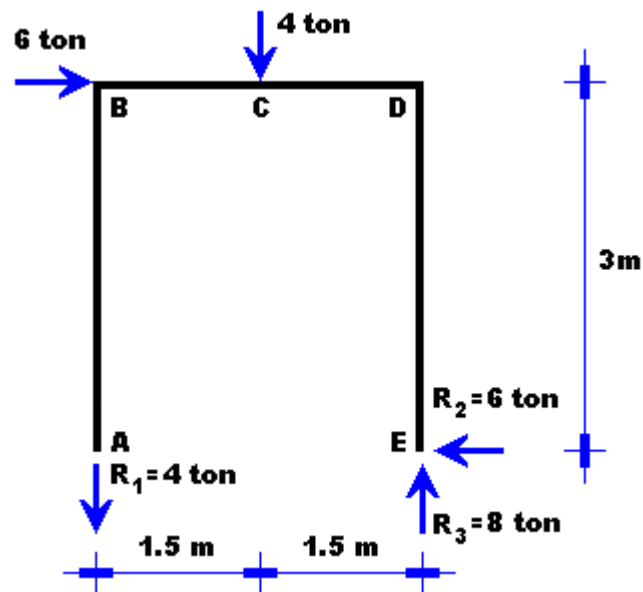


Figura 3.4.3

Tramo AB: El diagrama de cuerpo libre se representa en la siguiente figura:

Se localiza una sección perpendicular sobre el tramo AB limitada por distancia X , desde el punto A hasta el punto A'.

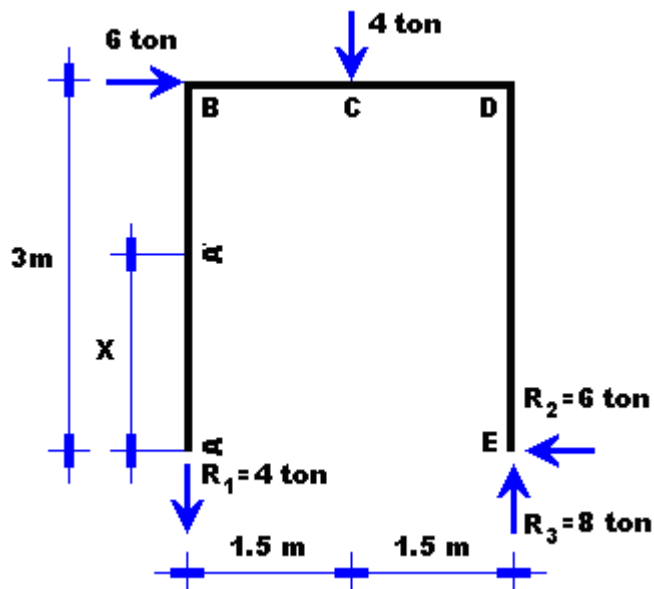


Figura 3.4.4

Separando la estructura desde A hasta A'

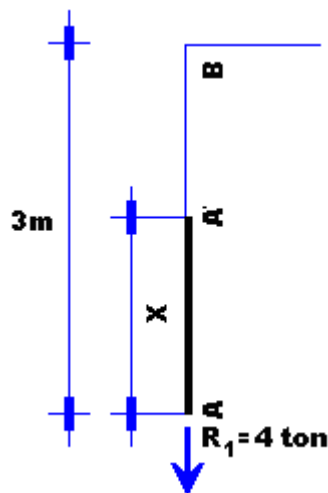


Figura 3.4.5

Se define un marco de referencia particular para el tramo integrado por:

- Un eje X, para anotar los parámetros de X.
- Un eje Y, para anotar los valores de los elementos mecánicos que se presentan.

En el diagrama de cuerpo libre del tramo AB, la carga externa R_1 de 4 ton. Se equilibra con una fuerza interna perpendicular a la sección; siendo esta última la fuerza normal que se presenta desde $X=0$ hasta $X=3$

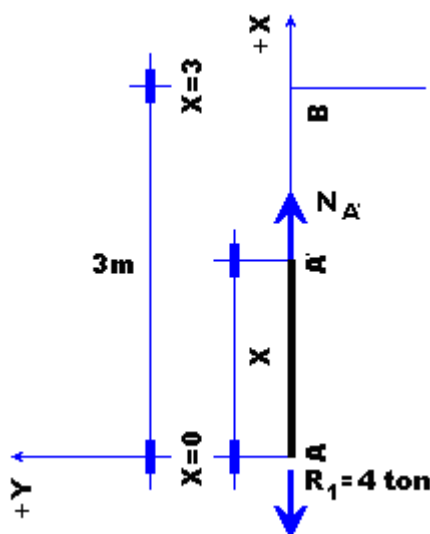


Figura 3.4.6

Deducción de las funciones de los elementos mecánicos en AB: Sobre el tramo se observa que únicamente existe la fuerza normal; por lo tanto, con suma de fuerzas en la dirección del eje X se obtiene la función de la fuerza normal:

NA = 4 ton ; a esta magnitud se le asocia el signo positivo por el efecto de tensión que le genera al tramo.

Cuando $X = 0$, se obtiene: **NA = + 4 ton**

Cuando $X = 3$, se obtiene: **NB = + 4 ton**

Tramo BC: El diagrama de cuerpo libre se muestra a continuación:

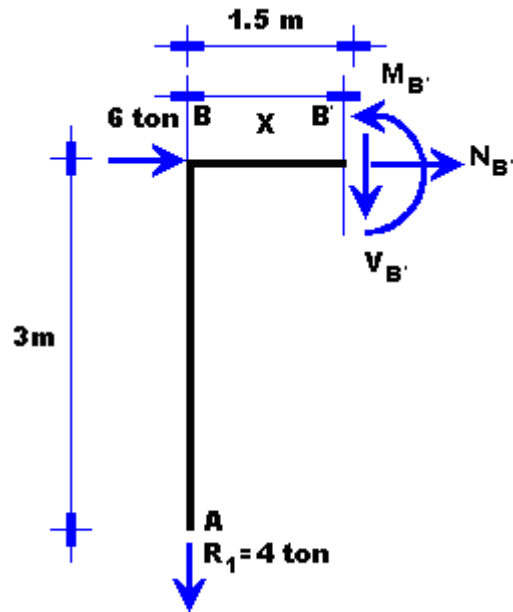


Figura 3.4.7

Tomando de referencia la estructura equilibrada, se traza una sección perpendicular al tramo BC, localizada a una distancia X, y limitada por los puntos B y B'.

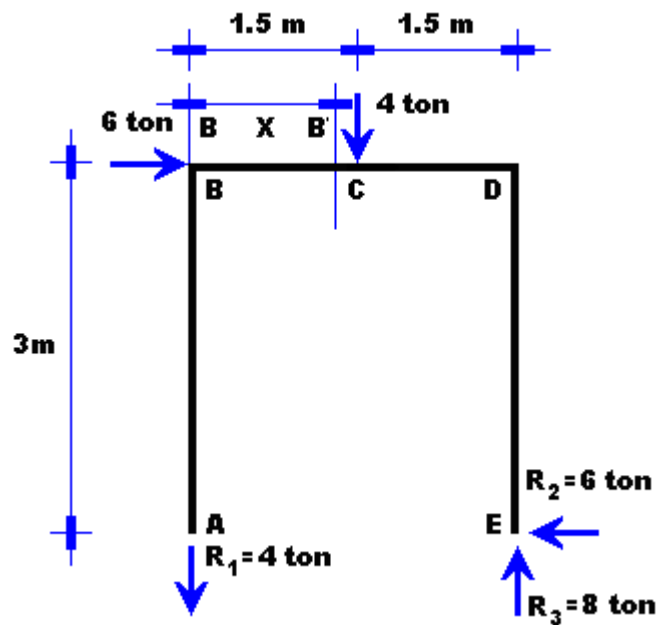


Figura 3.4.8

Separando de la estructura la porción desde el punto B' hasta el punto A:

La carga de 4 ton. en A, se equilibra con una fuerza interna paralela a la sección en B', fuerza cortante, que se traza considerando el efecto positivo.

La carga de 6 ton. de B, se equilibra con fuerza interna perpendicular a la sección en B', fuerza normal, que se traza considerando el efecto positivo

Las fuerzas verticales generan un giro; que se equilibra con un par interno en B', momento flexionante que se traza considerando el efecto positivo

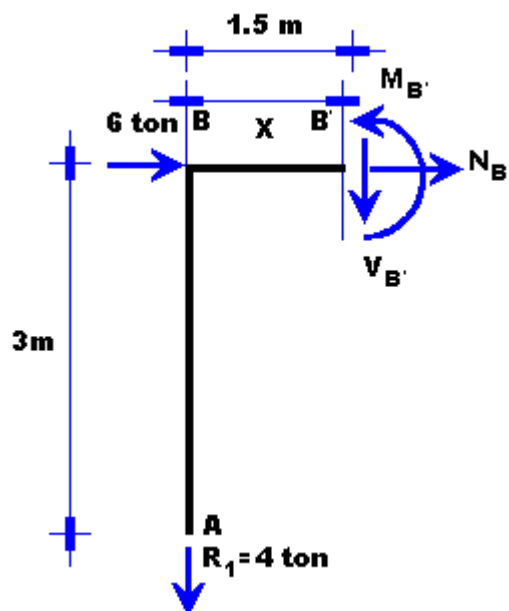


Figura 3.4.9

Función de los elementos mecánicos sobre el tramo BC: Estas se obtienen aplicando las condiciones del equilibrio estático sobre el diagrama de cuerpo libre que esta integrado por un sistema de fuerzas generales en el plano:

Suma de fuerzas horizontales se obtiene la función de las fuerzas normal:

$$\sum F_x = 0 \quad 6 + N_{B'} = 0 \quad \therefore N_{B'} = -6 \text{ ton}$$

Suma de fuerzas verticales, se obtiene la función de fuerza cortante:

$$\sum F_y = 0 \quad -4 - V_{B'} = 0 \quad \therefore V_{B'} = -4 \text{ ton}$$

Suma de momento en B', se obtiene la función del momento flexionante:

$$\sum M_{B'} = 0 \quad -4(X) - M_{B'} = 0 \quad \therefore M_{B'} = -4X \text{ ton} - m$$

El signo negativo de la fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante es por el efecto que generan las cargas externas.

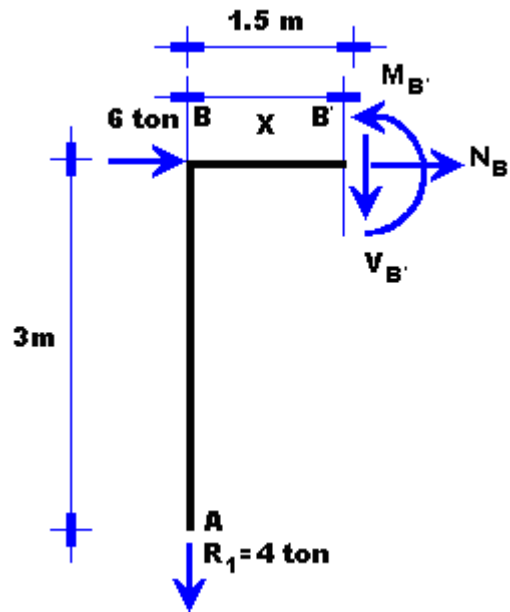


Figura 3.4.10

La magnitud de la fuerza normal, fuerza cortante y del momento flexionante en el tramo BC, se obtienen al sustituir en las funciones respectivas, los parámetros desde $X = 0$ hasta $X = 1.5$ m:

TRAMO BC	$X=0$	$X=1.5$
FUERZA NORMAL $N_B = -6$ ton	$N_B = -6$ ton	$N_C = -6$ ton
FUERZA CORTANTE $V_B = -4$ ton	$V_B = -4$ ton	$V_C = -4$ ton
MOMENTO FLEXIONANTE $M_B = -4X$	$M_B = 0$	$M_C = 0$

Tramo CD: El diagrama de cuerpo libre se ilustra en la siguiente figura:

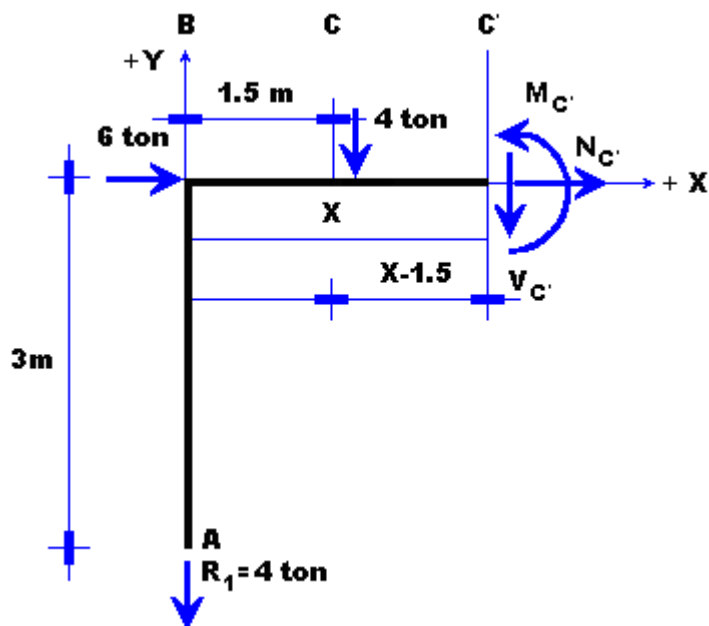


Figura 3.4.11

Tomando de referencia la estructura equilibrada, se traza una sección perpendicular al tramo CD, localizada a una distancia X respecto al punto B:

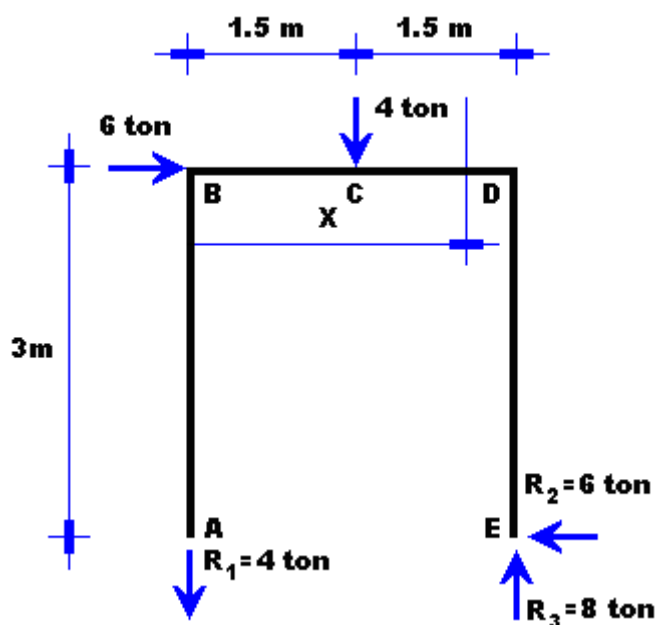


Figura 3.4.12

Separando de la estructura la sección de C' hasta el punto A:

Las cargas verticales de 4 ton. que actúan en A y C respectivamente, se equilibran con una fuerza interna paralela a la sección en C', fuerza cortante que se traza con el efecto positivo.

La carga de 6 ton. en B, se equilibra con una fuerza interna perpendicular a la sección en C', fuerza normal que se traza con el efecto positivo.

Las cargas verticales generan un giro que se equilibra con un par interno en B', momento flexionante que se traza con el efecto positivo.

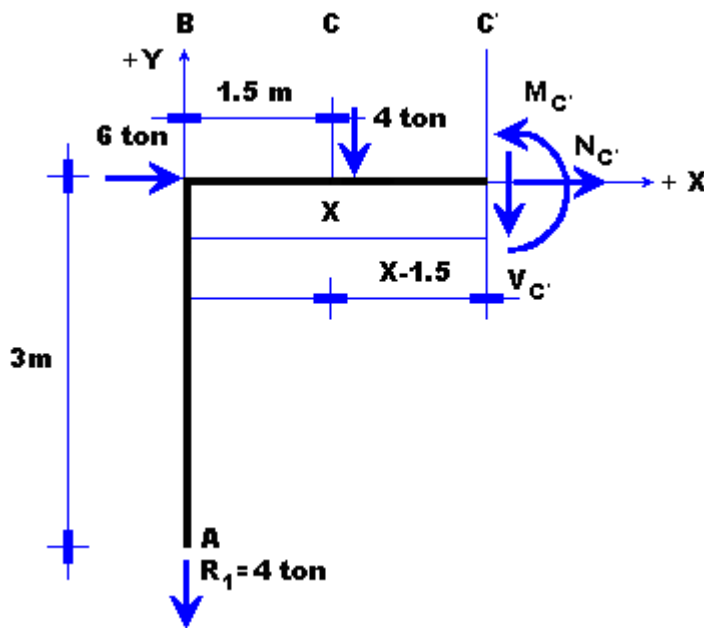


Figura 3.4.13

Funciones de los elementos mecánicos en el tramo CD: Se obtienen aplicando las condiciones de equilibrio sobre el diagrama de cuerpo libre de CD.

Suma de fuerzas horizontales se obtiene la función de la fuerza normal

$$\sum F_x = 0 \quad 6 + N_{C'} = 0 \quad \therefore N_{C'} = -6 \text{ ton}$$

Suma de fuerzas verticales se obtiene la función de la fuerza cortante

$$\sum F_y = 0 \quad -4 - 4 - V_{C'} = 0 \quad \therefore V_{C'} = -8 \text{ ton}$$

Suma de momentos en C', se obtienen la función del momento flexionante

$$\sum M_{C'} = 0 \quad -4(X) - 4(X - 1.5) - M_{C'} = 0 \quad \therefore M_{C'} = -8X + 6 \text{ ton} - m$$

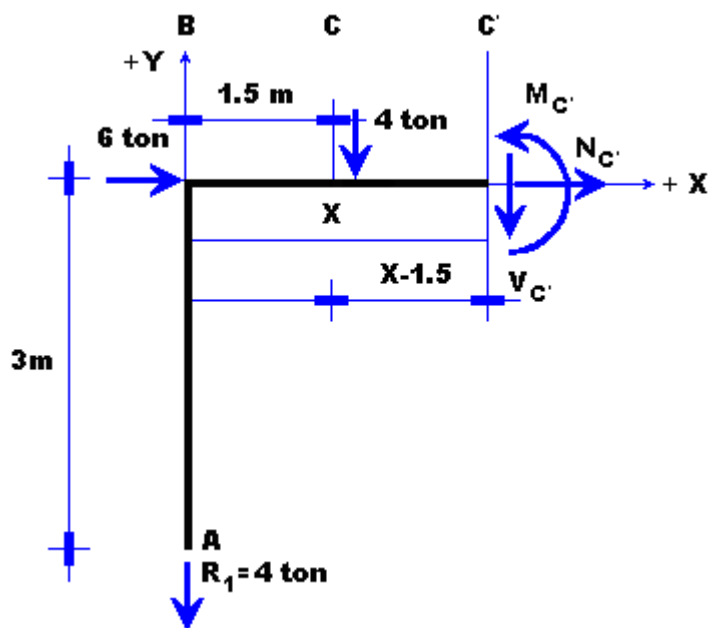


Figura 3.4.14

Las magnitudes de la fuerza normal, fuerza cortante y del momento flexionante en función de la distancia X sobre el tramo CD son:

TRAMO CD	$X=0$	$X=1.5$
FUERZA NORMAL: $N_C = -6$ TON	$N_C = -6$ TON	$N_D = -6$ TON
FUERZA CORTANTE: $V_C = -4$ TON	$V_C = -8$ TON	$V_D = -8$ TON
MOMENTO FLEXIONANTE $M_C = -8X + 6$	$M_C = -6$ TON-M	$M_D = -18$ TON-M

Tramo DE: El diagrama de cuerpo libre para analizar el tramo, se observa en la siguiente figura:

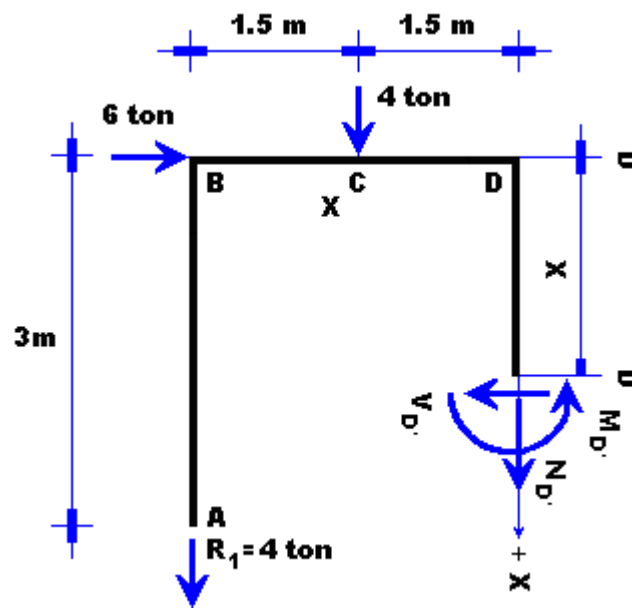


Figura 3.4.15

Tomando como referencia la estructura equilibrada, se traza una sección perpendicular al tramo DE, localizada a una distancia X y limitada por el punto D y el punto D'

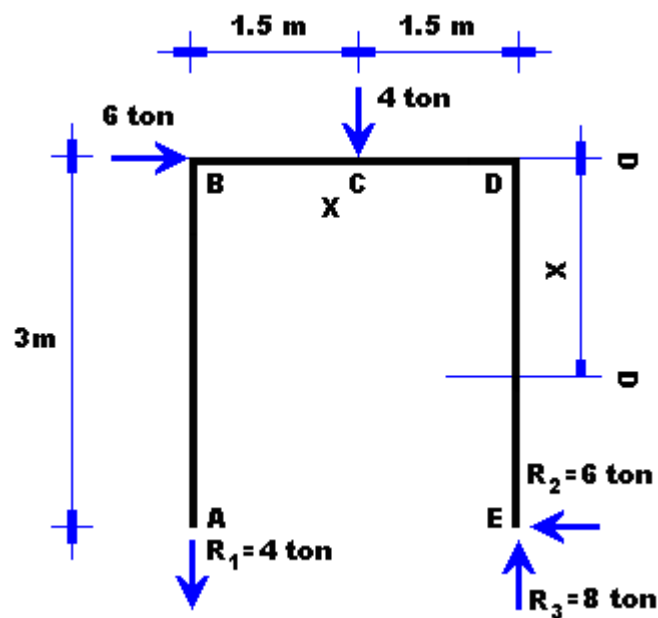


Figura 3.4.16

Separando la sección desde D' hasta A:

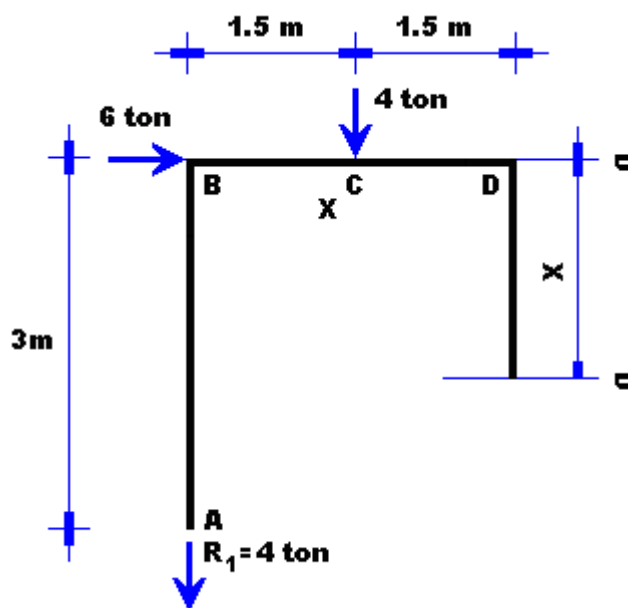


Figura 3.4.17

Los elementos mecánicos que generan las cargas externas sobre la sección D' son:

Tomando como origen el punto D' , se construyen un marco de referencia particular del tramo:

Las cargas de 4 ton. en A y C, genera la fuerza normal en B' que se traza con su efecto positivo.

La carga de 6 ton. en B, genera la fuerza cortante en D' que se traza con efecto positivo.

Las cargas de 4 ton. en A y C, y la de 6 ton en B, generan un giro en D' , que se equilibra con un par interno que se traza con su efecto positivo.

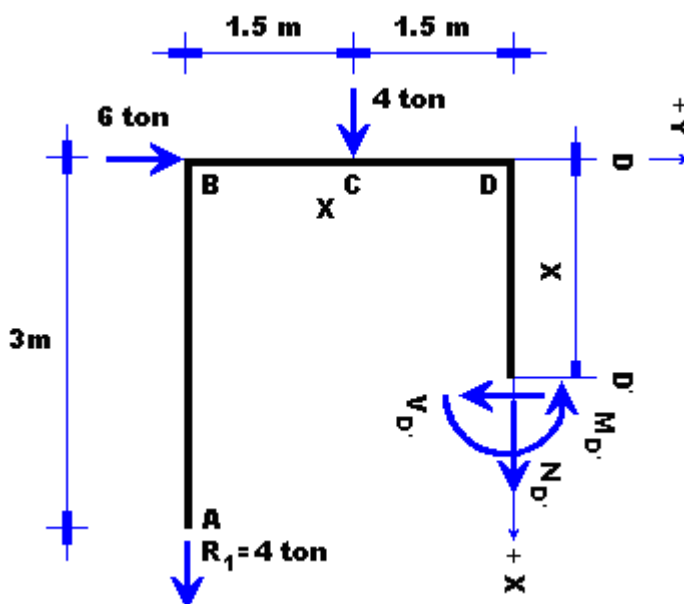


Figura 3.4.18

Funciones de los elementos mecánicos sobre el tramo DE: Tomando de referencia el diagrama de cuerpo libre de DE, y al aplicarle las condiciones de equilibrio para un sistema de fuerzas generales en el plano, se obtienen las funciones de los elementos mecánicos:

Suma de fuerzas en X, se obtiene la función de la fuerza normal.

$$\sum F_X = 0 \quad 4 + 4 + N_{D'} = 0 \quad \therefore N_{D'} = -8 \text{ ton}$$

Suma de fuerzas en Y, se obtiene la función de la fuerza cortante.

$$\sum F_Y = 0 \quad 6 - V_{D'} = 0 \quad \therefore V_{D'} = -6 \text{ ton}$$

Suma de momentos en D', se obtiene la función del momento flexionante.

$$\sum M_{D'} = 0 \quad -4(3) + 6(X) - 4(1.5) - M_{D'} = 0 \quad \therefore M_{D'} = -8X + 6 \text{ ton-m}$$

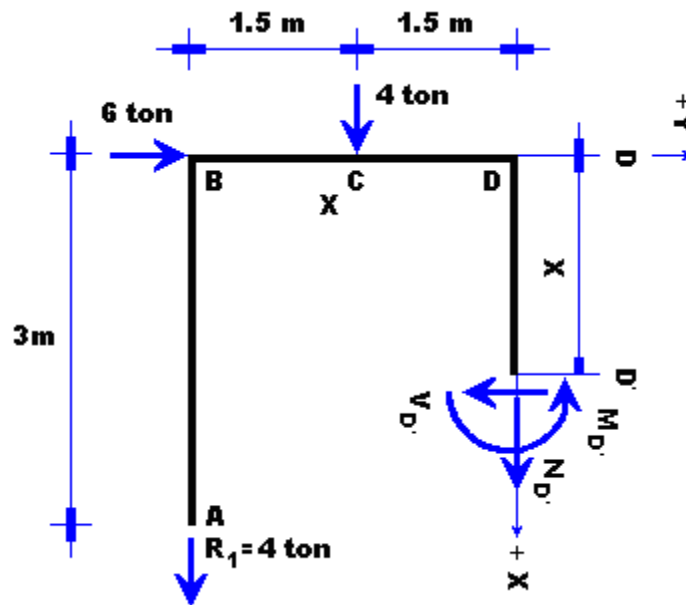


Figura 3.4.19

Sustituyendo en las funciones de los elementos mecánicos los parámetros de la distancia X, se obtienen las magnitudes de la fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante:

TRAMO "DE"	X=0	X=3
FUERZA NORMAL: $N_D = -8 \text{ TON}$	$N_D = -8 \text{ TON}$	$N_D = -8 \text{ TON}$
FUERZA CORTANTE: $V_D = -6 \text{ TON}$	$V_D = -6 \text{ TON}$	$V_D = -6 \text{ TON}$
MOMENTO FLEXIONANTE $M_D = -18 + 6X$	$M_D = -18 \text{ TON-M}$	$M_D = 0$

Tomando como referencia los valores encontrados para cada tramo del marco, se procederá a construir los diagramas de variación de la fuerza normal, fuerza cortante y del momento flexionante:

Trazo del diagrama de variación de la fuerza normal:

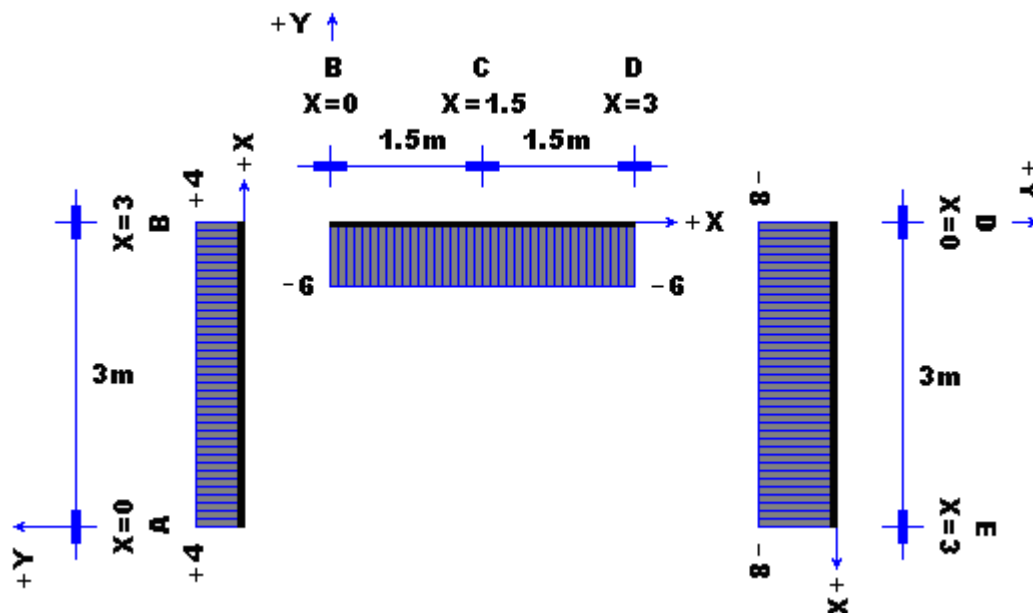


Figura 3.4.20

Trazo del diagrama de variación de la fuerza cortante:

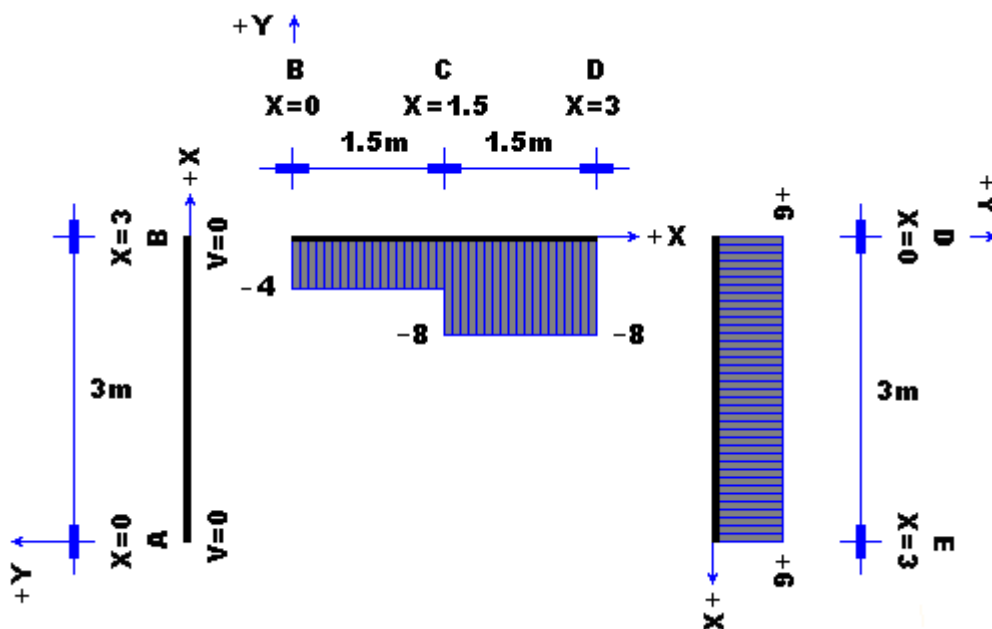


Figura 3.4.21

Trazo del diagrama de variación del momento flexionante:

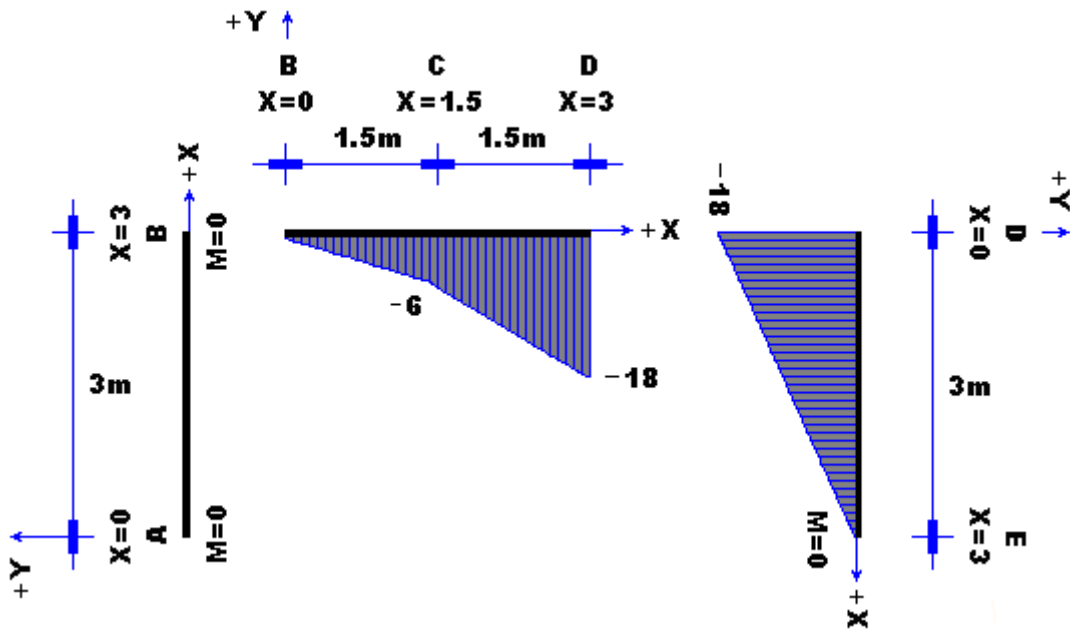


Figura 3.4.22

2011

ANÁLISIS DE ARMADURAS



ANÁLISIS DE ARMADURAS

4.1 Armaduras

Las armaduras son estructuras formadas por barras que se articulan en puntos llamados nodos, de tal manera que se determine una retícula conformación triangulada que permite la rigidez de la estructura.

Al suponer que las cargas actúan en los nodos, el peso de cada una de las barras de una armadura debe repartirse, por mitad, en cada uno de sus nodos extremos. Igualmente, al considerar que las barras están articuladas, la soldadura o los remaches deben ubicarse lo más cercanos al nodo a fin de evitar que se presenten fuerzas internas que provoquen momentos flexionantes.

En una armadura debemos distinguir cuatro tipos de barras como son:

- Cuerda superior: Es el conjunto de barras que conforman la parte más elevada de la estructura. Para solicitaciones de tipo gravitacional, normalmente son piezas que trabajan a compresión.
- Cuerda inferior: Es el conjunto de barras que forman la parte más baja de la estructura. Para solicitaciones gravitacionales generalmente trabajan a tensión.
- Montantes: Denominamos así a las barras verticales de una armadura.
- Diagonales: Son piezas que, como su nombre lo indica, tienen posición inclinada.

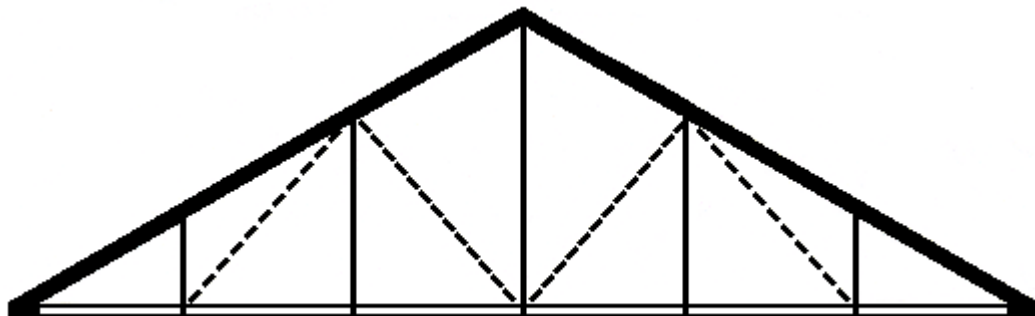






Figura 4.1.1

	• Cuerda superior
	• Cuerda inferior
	• Montantes
	• Diagonales

Existen varios tipos de arreglos geométricos para las armaduras y ello permite hacer distinciones. Algunos de los tipos más comunes los describimos a continuación, y por lo; general se respeta que los ángulos de las diagonales tengan un valor comprendido entre 30° y 60° .

Armaduras tipo Howe son aquellas que se caracterizan porque sus diagonales trabajan a compresión y los montantes lo hacen a tensión. Las armaduras tipo Pratt tienen sus montantes con fuerzas de compresión, mientras que las diagonales trabajan a tensión. Cuando se necesita cubrir claros más o menos pequeños es ideal el tipo Fink, que contiene una serie de barras cortas que trabajan a compresión. Si el sistema de

cargas es móvil y por ello las barras pueden trabajar tanto a tensión como a compresión, las armaduras tipo Warren son las más adecuadas. En el caso que se haga necesario el paso de la luz a través de la estructura de techo, como es usual en las industrias, lo más común es el uso de las armaduras diente de sierra. Otros tipos pueden ser el de tijeras, tipo K, armaduras triarticulada o bases para torres de alta tensión o tanques de almacenamiento. Las armaduras también pueden ser especiales, pero en este libro sólo se pretende analizar armaduras planas

HOWE: Diagonales trabajando a compresión y montantes a tensión.

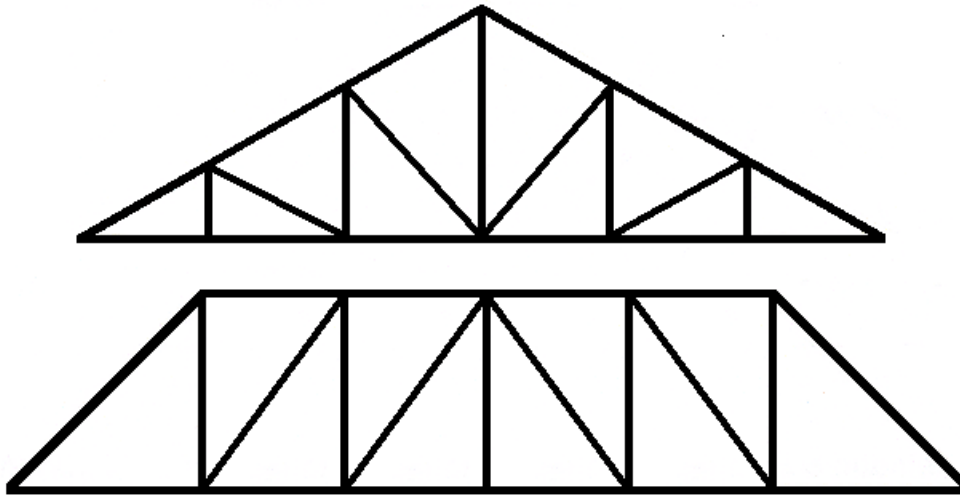


Figura 4.1.2

PRATT: Diagonales trabajando a tensión y montantes a compresión.

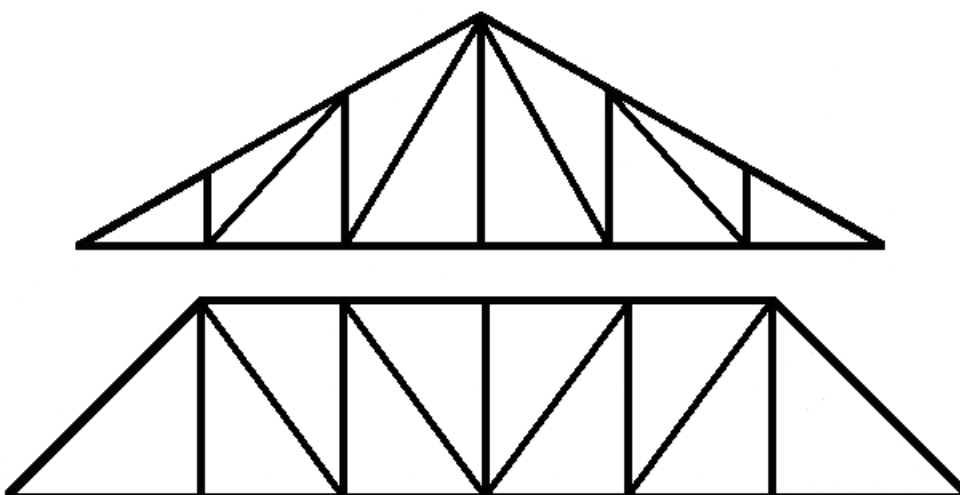


Figura 4.1.3

FINK: Las barras a compresión son las más pequeñas

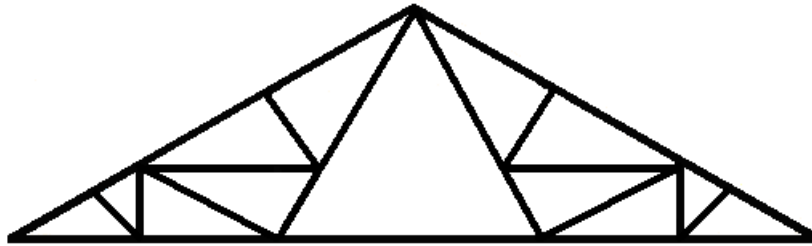


Figura 4.1.4

WARREN: Ideales para cargas móviles, como en los puentes

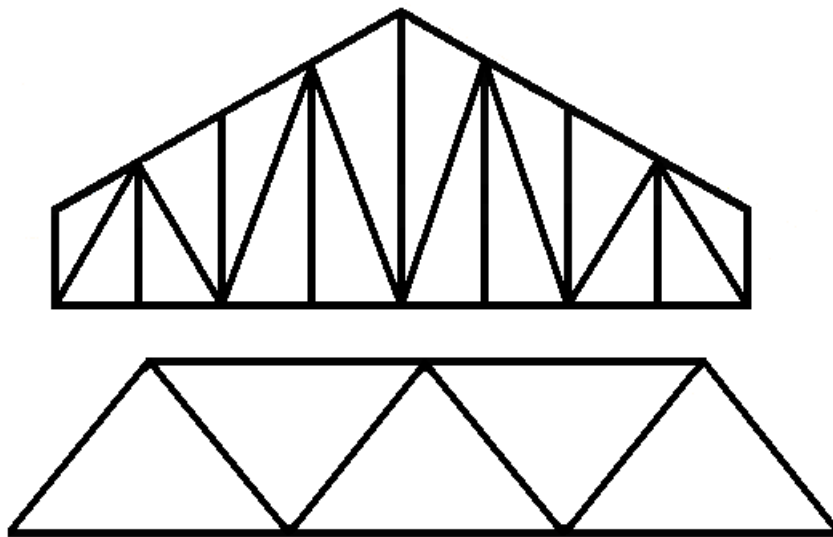
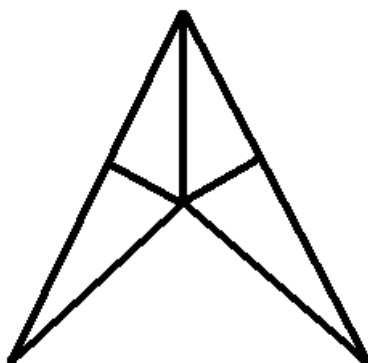


Figura 4.1.5



Tijera



Diente de Sierra

Figura 4.1.6

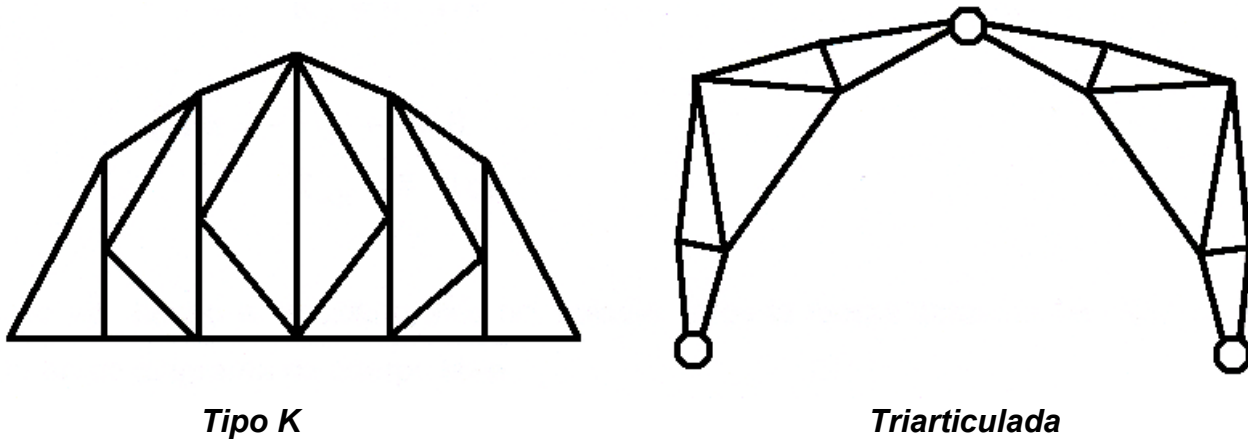


Figura 4.1.7

Armadura: Es una estructura plana constituida por un conjunto de barras articuladas en forma triangulada, cuyo sistema de carga está integrado por fuerzas concentradas que actúan en las articulaciones, llamadas también nodos, y que se ubican en el mismo plano de la armadura. En estas condiciones las barras de una armadura sólo resisten fuerzas axiales (normales).

Analicemos ahora la estaticidad de una armadura constituida por b barras y n nodos articulados. El número de ecuaciones disponibles será:

- Ecuaciones de barra $3b$
- Ecuaciones de nodo (articulación) $2n$

Por su parte el número de incógnitas será:

- Sistema interno (barra articulada) $4b$
- Sistema externo (reacciones) R .

La armadura será isostática cuando el número de incógnitas corresponda con el número de ecuaciones, de tal manera que se cumpla:

- $3b + 2n = 4b + R$

O sea:

- $2n = R + b$

La expresión anterior es la condición de isostaticidad, según la cual el doble del número de nodos tiene que ser igual al número de reacciones más el número de barras de la armadura.

Ejemplo: en cada una de las armaduras analizar su estaticidad

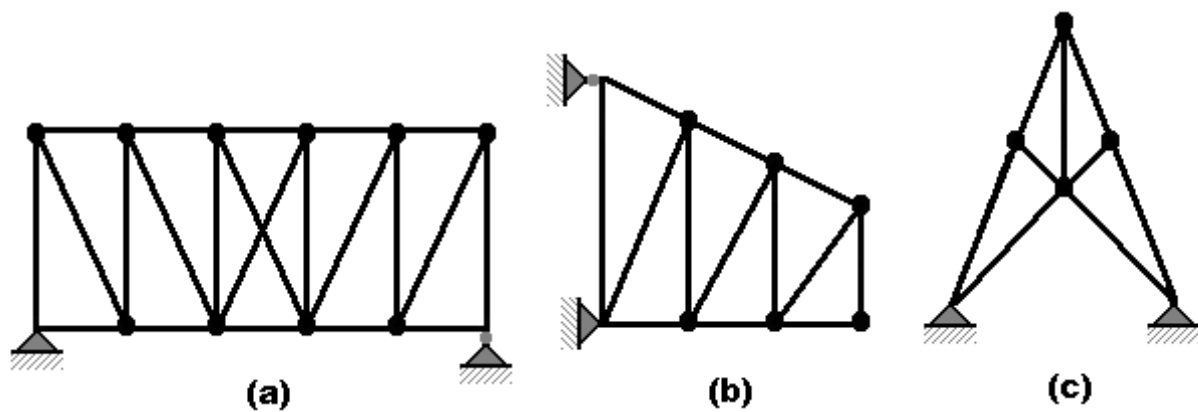


Figura 4.1.8

Solución: en cada una de las estructuras tenemos:

(a)	(b)	(c)
$n = 12$	$n = 8$	$n = 7$
$b = 22$	$b = 13$	$b = 9$
$R = 3$	$R = 3$	$R = 2$
$2(12) \neq 22 + 3$	$2(8) = 13 + 3$	$2(6) \neq 9 + 2$
$E < I$	$E = I$	$E > I$

- La armadura (a), es hiperestática debido a las barras que se cruzan en la crujía central.
- La armadura (b), es isostática por cumplir con la condición para tal efecto,
- La armadura (c), por disponer de mayor número de ecuaciones que de incógnitas; como tiene ambos apoyos simples, resulta ser hipostática

4.2 Método de los nodos

Este procedimiento de cálculo consiste en analizar todas y cada una de las articulaciones de la armadura, haciendo un diagrama de cuerpo libre en cada caso, presentándose un sistema de fuerzas concurrentes, según el número de barras que incidan en dicho nodo. En cada nodo, por lo tanto, se deben cumplir dos ecuaciones de equilibrio: una de proyecciones horizontales y otra de proyecciones verticales

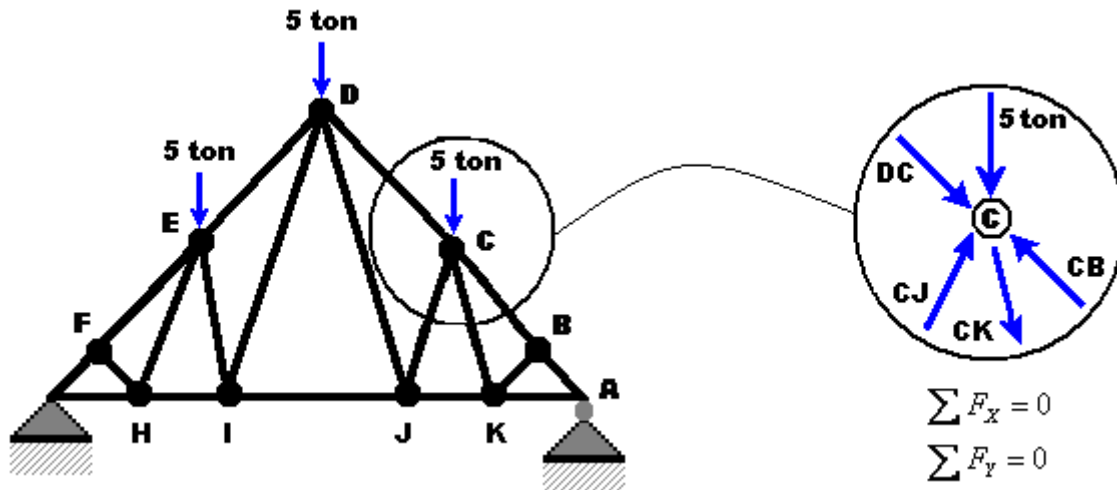


Figura 4.2.1

Mostremos este método con un ejemplo. Resolvamos por el método de los nodos la armadura tipo *Pratt* que se muestra en la figura.

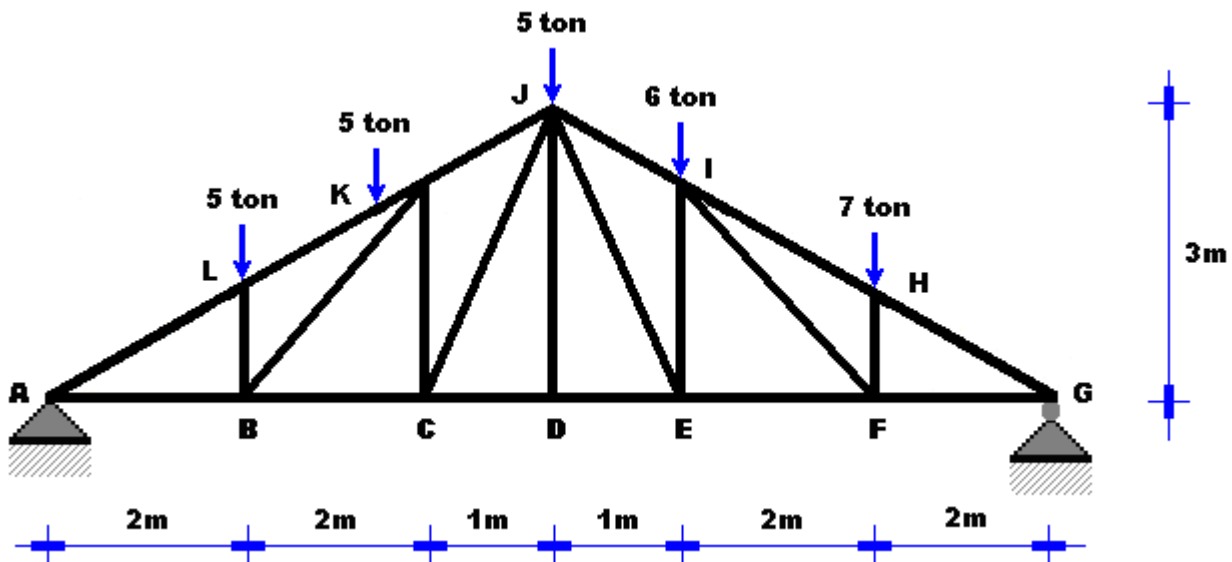


Figura 4.2.2

En primer lugar, debemos calcular todos los elementos geométricos que serán necesarios en el transcurso del procedimiento. También se requiere calcular las reacciones en los apoyos. Los elementos geométricos se anotan en la siguiente figura.

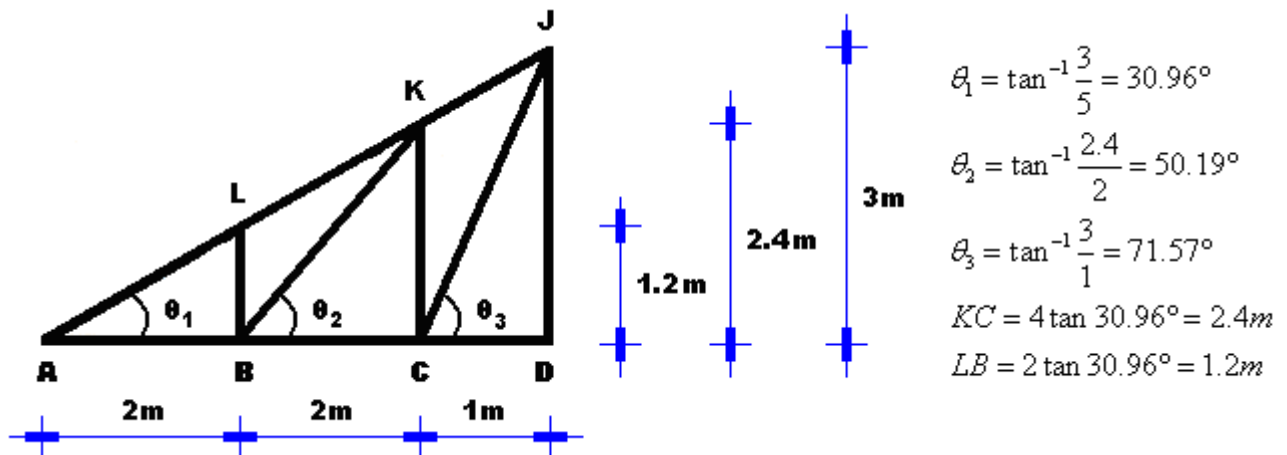


Figura 4.2.3

Las reacciones se calculan así:

$$\sum M_A = 0$$

$$10R_G = 5(2) + 5(4) + 5(5) + 6(6) + 7(8)$$

$$R_G = \frac{10 + 20 + 25 + 36 + 56}{10} = 14.7 \text{ ton}$$

$$\sum M_G = 0$$

$$10R_A = 7(2) + 6(4) + 5(5) + 5(6) + 5(8)$$

$$R_A = \frac{14 + 24 + 25 + 30 + 40}{10} = 13.3 \text{ ton}$$

El método de los nodos lo iniciaremos por uno de los apoyos, digamos que sea A. En este punto dibujamos el diagrama de cuerpo libre y representamos las fuerzas de compresión como vectores que llegan al nodo y las fuerzas de tensión como vectores que salen del nodo.

$$\sum F_y = 0$$

$$13.3 - AL \sin 30.96^\circ = 0$$

$$AL = 25.85 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$AB - AL \cos 30.96^\circ = 0$$

$$AB = 22.17 \text{ ton}$$

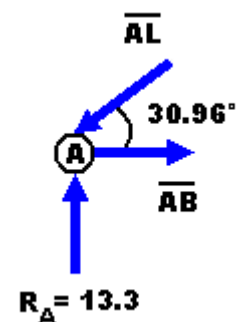


Figura 4.2.4

De igual manera, recorramos nodo tras nodo para efectuar los cálculos, en el entendimiento que no pueden existir más de dos incógnitas en cada caso.

NODO L

$$\sum F_x = 0$$

$$25.85 \cos 30.96^\circ - LK \cos 30.96^\circ = 0$$

$$LK = 25.85 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$LB = 25.85 \sin 30.96^\circ - 5 - LK \sin 30.96^\circ = 0$$

$$LB = 5 \text{ ton}$$

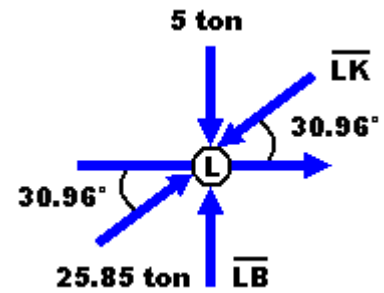


Figura 4.2.5

NODO B

$$\sum F_y = 0$$

$$BK \sin 63.43^\circ - 5 = 0$$

$$BK = 5.59 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$BC - BK \cos 63.43^\circ - 22.17 = 0$$

$$BC = 19.67 \text{ ton}$$

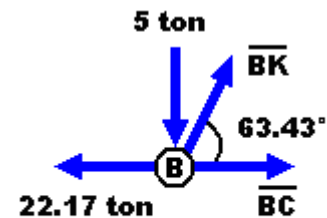


Figura 4.2.6

NODO K

$$\sum F_x = 0$$

$$25.85 \cos 30.96^\circ - 5.59 \cos 63.43^\circ - KJ \cos 30.96^\circ = 0$$

$$KJ = 22.93 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$KC - KJ \sin 30.96^\circ - 5.59 \sin 63.43^\circ + 25.85 \sin 30.96^\circ = 0$$

$$KC = 8.50 \text{ ton}$$

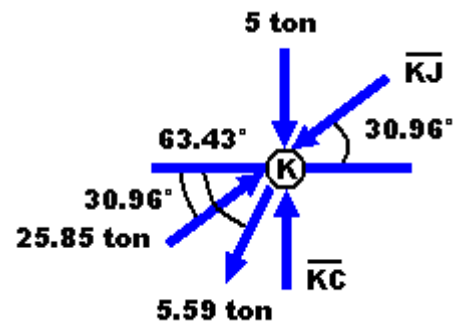


Figura 4.2.7

NODO C

$$\sum F_y = 0$$

$$CJ \sin 71.57^\circ - 8.50 = 0$$

$$CJ = 8.96 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$CD - 19.67 - CJ \cos 71.57^\circ = 0$$

$$CD = 22.50 \text{ ton}$$

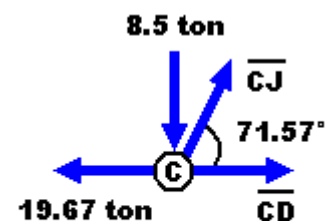


Figura 4.2.8

NODO D

$$\sum F_x = 0$$

$$DE - 22.50 = 0$$

$$DE = 22.50 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$DJ = 0$$

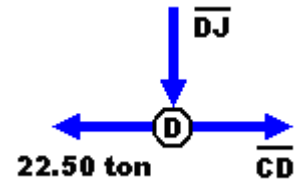


Figura 4.2.9

NODO J

$$\sum F_x = 0$$

$$22.93 \cos 30.96^\circ - 8.96 \cos 71.57^\circ + JE \cos 71.57^\circ -$$

$$-JI \cos 30.96^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$22.93 \text{ sen } 30.96^\circ - 8.96 \text{ sen } 71.57^\circ + JE \text{ sen } 71.57^\circ -$$

$$-JI \text{ sen } 30.96^\circ - 5 = 0$$

Simultáneamente

$$JE = 11.06 \text{ ton} \quad JI = 23.70 \text{ ton}$$

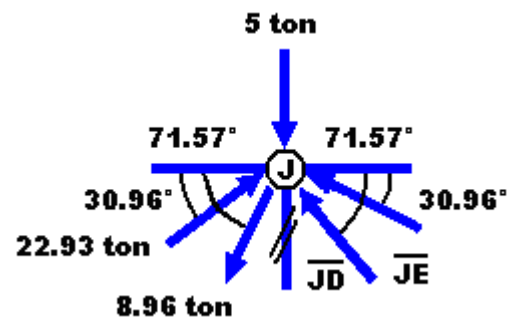


Figura 4.2.10

NODO E

$$\sum F_x = 0$$

$$EF - 22.50 - 11.06 \cos 71.57^\circ = 0$$

$$EF = 26 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$11.06 \text{ sen } 71.57^\circ - EI = 0$$

$$EI = 10.49 \text{ ton}$$

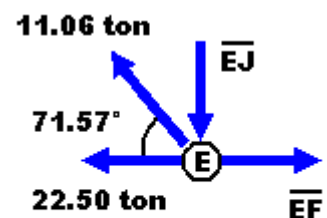


Figura 4.2.11

NODO I

$$\sum F_x = 0$$

$$23.70 \cos 30.96^\circ + FI \cos 63.43^\circ - HI \cos 30.96^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$10.49 + HI \text{ sen } 30.96^\circ - FI \text{ sen } 63.43^\circ - 23.70 \text{ sen } 30.96^\circ = 0$$

Simultáneamente

$$HI = 27.44 \text{ ton} \quad FI = 7.17 \text{ ton}$$

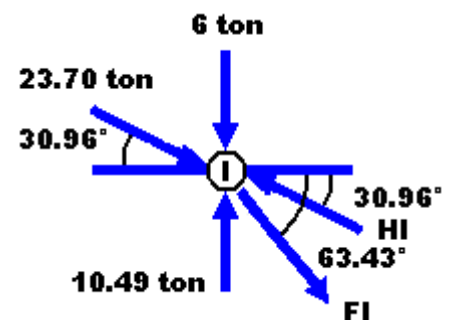


Figura 4.2.12

NODO F

$$\sum F_y = 0$$

$$7.17 \text{ sen } 63.43^\circ - HF = 0$$

$$HF = 6.41 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$FG - 26 - 7.17 \text{ cos } 63.43^\circ = 0$$

$$FG = 29.21 \text{ ton}$$

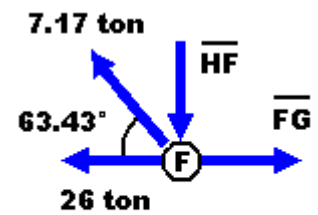


Figura 4.2.13

NODO H

$$\sum F_y = 0$$

$$6.41 + HG \text{ sen } 30.96^\circ - 7 - 27.44 \text{ sen } 30.96^\circ = 0$$

$$HG = 28.58 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$27.44 \text{ cos } 30.96^\circ - HG \text{ cos } 30.96^\circ = 0$$

Se cumple

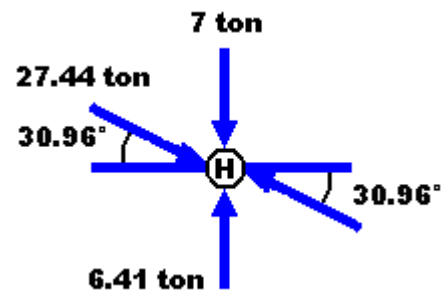


Figura 4.2.14

NODO G

$$\sum F_y = 0$$

$$-28.58 \text{ sen } 30.96^\circ + 14.7 = 0$$

Se cumple

$$\sum F_x = 0$$

$$28.58 \text{ cos } 30.96^\circ - 29.21 = 0$$

Se cumple

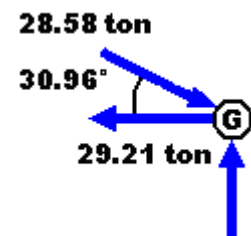


Figura 4.2.15

Como podemos observar, las tres últimas ecuaciones se cumplen ya que al inicio de la solución habíamos calculado las tres reacciones.

Es costumbre ofrecer en una tabla los resultados calculados, anotando si la fuerza es de tensión (+) o de compresión (-), tal como se presenta en la tabla.

	IDENTIFICACIÓN	FUERZA(TON)	TENSIÓN/COMPRESIÓN
CUERDA SUPERIOR	AL	25.85	-
	LK	25.85	-
	KJ	22.93	-
	JI	23.70	-
	IH	27.44	-
	HG	28.58	-
CUERDA INFERIOR	AB	22.17	+
	BC	19.67	+
	CD	22.50	+
	DE	22.50	+
	EF	26.00	+
	FG	29.21	+
MONTANTES	LB	5.00	-
	KC	8.50	-
	JD	0.00	NO TRABAJA
	IE	10.49	-
	HF	6.41	-
DIAGONALES	BK	5.59	+
	CJ	8.96	+
	JE	11.06	+
	IF	7.17	+

En resumen, podemos enumerar los siguientes pasos para calcular una armadura por el método de los nodos:

- Calculamos las reacciones de la estructura.
- Escogemos los nodos tomando en consideración que no deben existir más de dos incógnitas en cada uno.
- Elegimos los sentidos de las fuerzas incógnitas.
- Planteamos dos ecuaciones de fuerzas en cada nodo donde se involucran las dos incógnitas y resolvemos el sistema.
- El último nodo nos servirá para verificar los cálculos.
- Una equivocación en alguno de los nodos acarrearía errores en los siguientes nodos; pues el método depende de los resultados de nodos anteriores.

4.3 Método de las secciones

Muchas veces es preciso conocer las fuerzas internas de algunas barras, para lo cual no es necesario calcular la armadura nodo por nodo.

En estos casos se secciona la estructura cortando tres de sus barras. En cada sección se presenta un sistema de fuerzas cualesquiera que, al contar con tres incógnitas, requiere tres ecuaciones de equilibrio: dos de proyecciones y una de momentos.

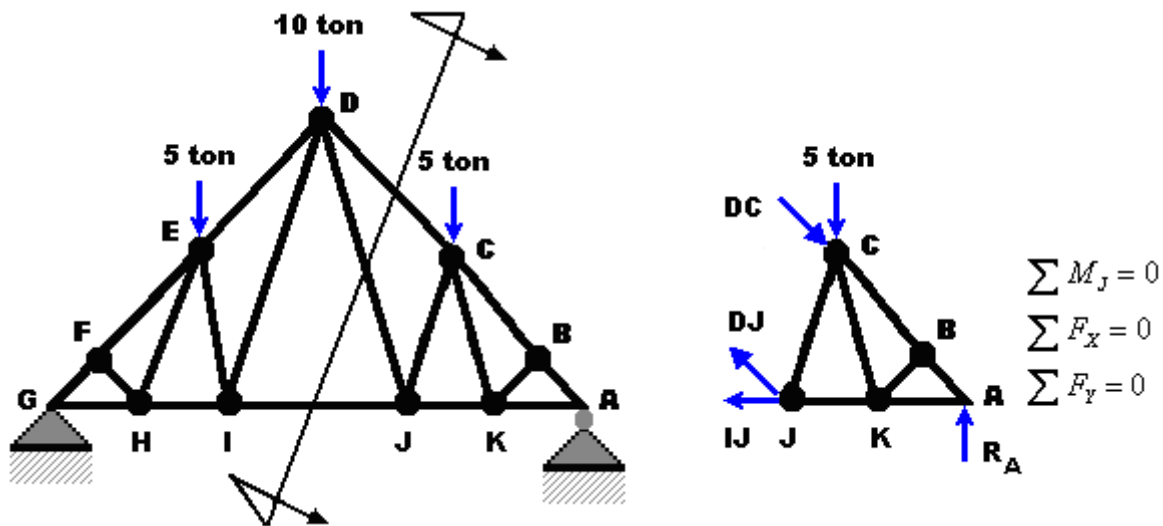


Figura 4.3.1

Para comprender mejor este procedimiento de cálculo, resolveremos la siguiente armadura tipo **HOWE**:

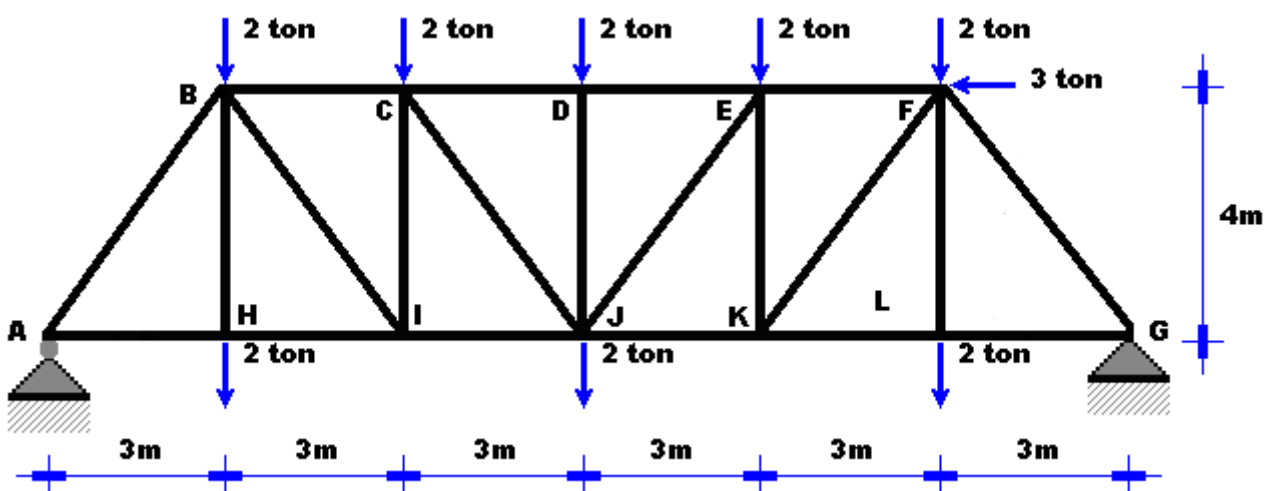


Figura 4.3.2

Calculemos sus reacciones y sus elementos geométricos necesarios:

$$\sum M_A = 0 \quad R_G = \frac{4(3+9+15) + 2(6+12) - 3(4)}{18} = 7.33 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0 \quad R_{AH} = 3 \text{ ton} \quad \theta = \tan^{-1}(4/3) = 53.13^\circ$$

$$\sum F_y = 0 \quad R_{AV} = 2(8) - 7.33 = 8.67 \text{ ton}$$

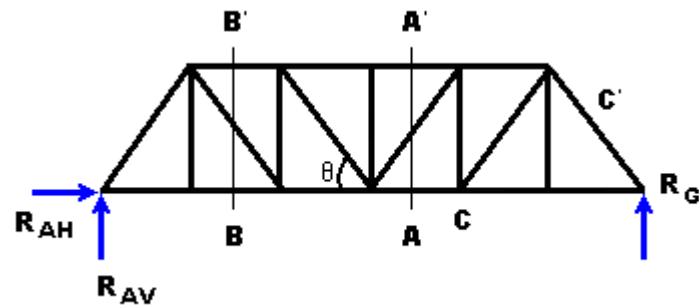


Figura 4.3.3

Determinamos las secciones que vamos a considerar como aparecen en la figura anterior y empezamos el cálculo por la sección A'A, tomando la parte derecha de la armadura:

$$\sum M_E = 0$$

$$JK = \frac{7.33(6) - 4(3)}{4} = 8 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$EJ = \frac{7.33 - 6}{\text{sen} 53.13^\circ} = 1.66 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$DE = 3 + 8 + EJ \cos 53.13^\circ = 12 \text{ ton}$$

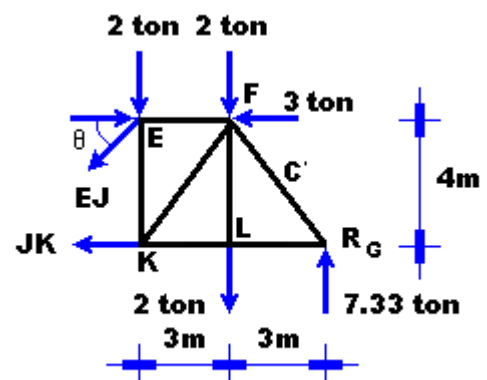


Figura 4.3.4

De manera similar, analizamos las demás secciones cerciorándonos que no puede haber más de tres incógnitas en cada corte o sección.

$$\sum M_B = 0$$

$$HI = \frac{3(8.67) - 4(3)}{4} = 3.5 \text{ ton}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$BI = \frac{8.67 - 4}{\text{sen}53.13^\circ} = 5.84 \text{ ton}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$BC = 3 + 3.50 + 5.84 \cos 53.13^\circ$$

$$BC = 10 \text{ ton}$$

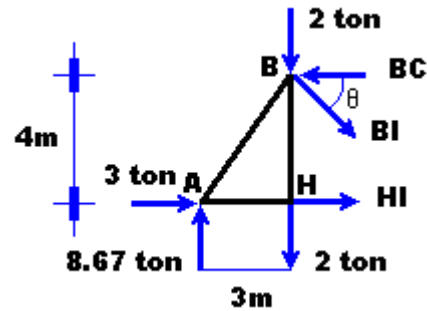


Figura 4.3.5

$$\sum M_C = 0$$

$$FG = \frac{3(7.33)}{3 \text{sen}53.13^\circ} = 9.16 \text{ ton}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$FI = 2 + 9.16 \text{sen}53.13^\circ - 7.33$$

$$FI = 2 \text{ ton}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$KL = 9.16 \cos 53.13^\circ = 5.5 \text{ ton}$$

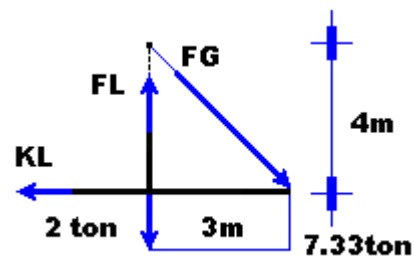


Figura 4.3.6

De manera análoga, podemos seleccionar otras secciones y las fuerzas de las barras las incluimos en la tabla.

Concluimos que para resolver una armadura por el método de las secciones se requiere:

- Calcular las reacciones.
- Seleccionar las secciones más apropiadas de manera que no haya más de tres incógnitas; tomando la parte de la armadura (izquierda o derecha) que facilite más el cálculo.
- Plantear tres ecuaciones que contengan a las tres incógnitas que define el corte o sección, y resolver el sistema.
- Algunas secciones sólo podrán calcularse una vez resucita otra que permita definir fuerzas.
- La última sección nos permite comprobar los cálculos.

	IDENTIFICACIÓN	FUERZA(TON)	TENSIÓN/COMPRESIÓN
CUERDA SUPERIOR	AB	10.84	-
	BC	10.0	-
	CD	12.0	-
	DE	12.0	-
	EF	11.0	-
	FG	9.16	-
CUERDA INFERIOR	AH	3.5	+
	HI	3.5	+
	IJ	6.0	+
	JK	8.0	+
	KL	5.5	+
	LG	5.5	+
MONTANTES	BH	2.0	+
	CI	4.0	-
	DJ	2.0	-
	EK	3.33	-
	FL	2.0	+
DIAGONALES	BI	5.84	+
	CJ	3.33	+
	EJ	1.66	+
	FK	4.17	+

4.4 Método de la conservación de proyecciones

Existen algunos tipos de armaduras cuyas barras, en gran proporción, son diagonales y tienen diferentes inclinaciones. En estos casos el método de conservación de proyecciones puede ser el más adecuado a fin de evitar los cálculos con los diferentes ángulos. Al aplicar este procedimiento nos basamos en el principio de triángulos semejantes. Cada barra inclinada tendrá definido un triángulo rectángulo cuyos catetos son proporcionales a los datos geométricos de la estructura (triángulo escalar). Asociado al primero, se define otro triángulo rectángulo cuyos catetos son las proyecciones de la fuerza interna de la barra (triángulo vectorial).

Los catetos del triángulo escalar son proporcionales a los catetos del triángulo vectorial.

Este método se basa en el concepto de fuerzas concurrentes en cada nodo; por ello se debe recorrer la armadura nodo por nodo como ya es conocido.

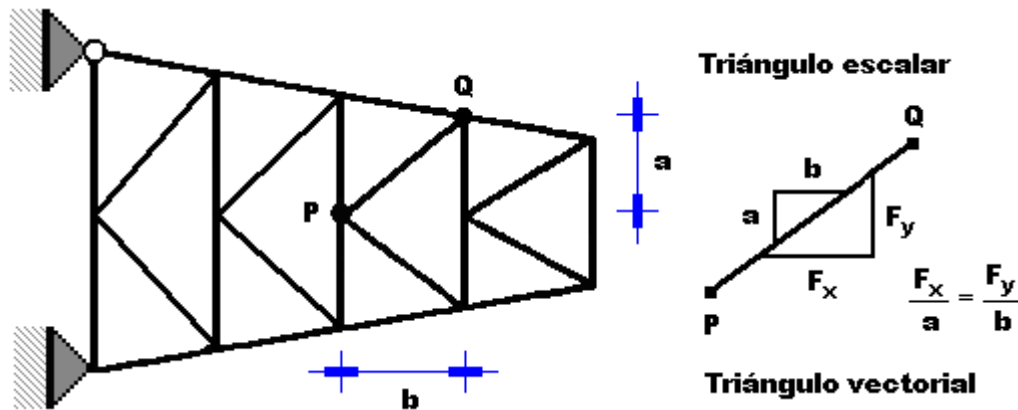


Figura 4.4.1

Analicemos por este método la armadura de la figura siguiente.

Como ya es costumbre, calculamos las reacciones en los apoyos. Posteriormente, de acuerdo a la geometría de la armadura, definimos los triángulos escalares correspondientes a las barras inclinadas.

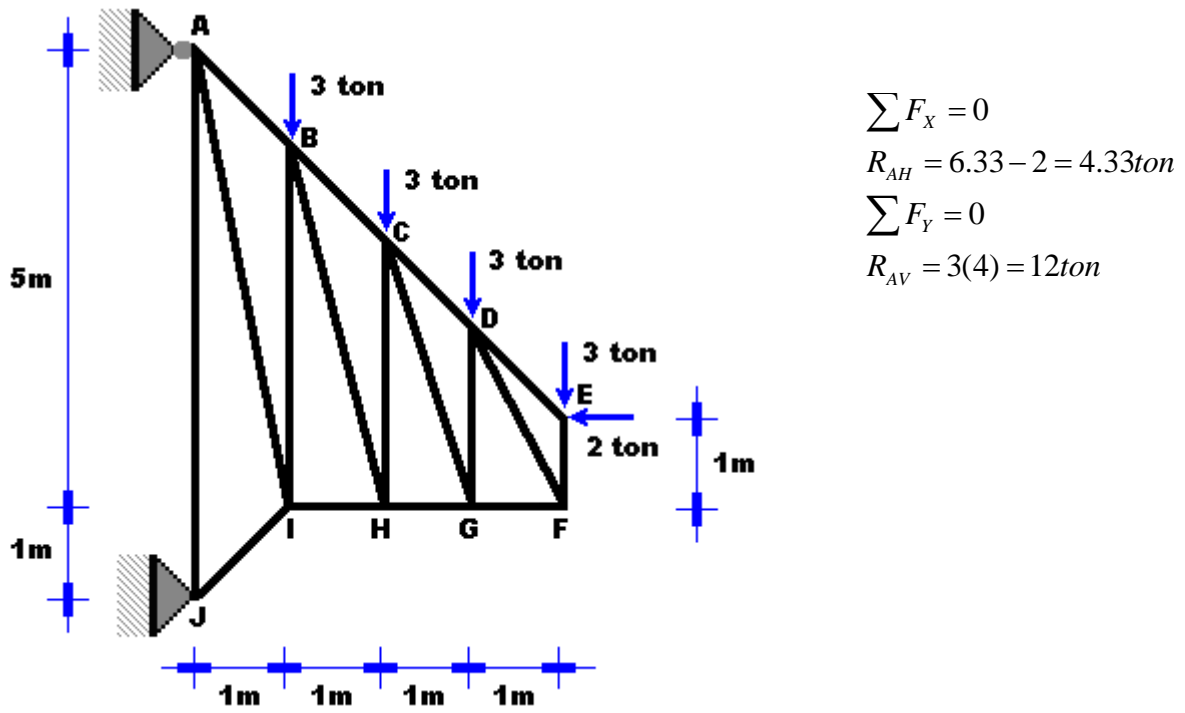


Figura 4.4.2

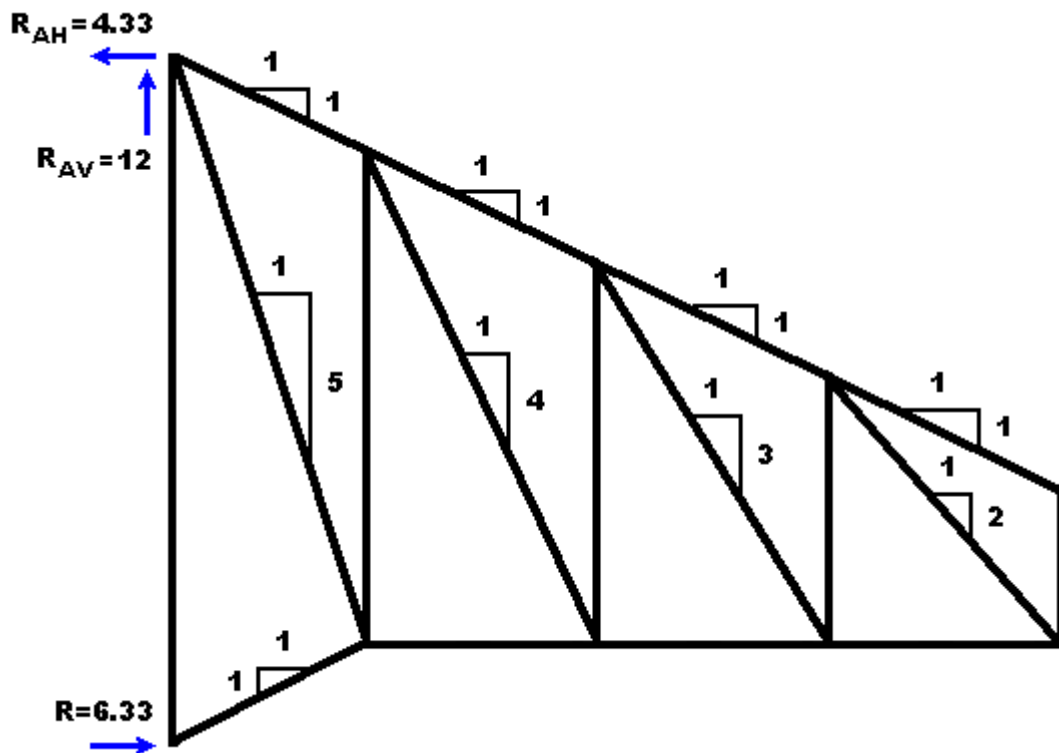


Figura 4.4.3

Empezamos nuestra secuencia con la barra DE, considerando la concurrencia de fuertes en el nodo E de acuerdo a los siguientes pasos

- La proyección horizontal del triángulo vectorial debe ser igual a la fuerza de 2 ton para que se cumpla la ecuación $\sum F_x = 0$
- Realizamos la proporción entre los catetos de ambos triángulos para calcular la proyección vertical ($y = 2$ Ton).
- Después de conocer la proyección vertical en el triángulo vectorial, la fuerza de la barra EF debe cumplir con la ecuación $\sum F_y = 0$

$$EF = 3 + 2 = 5 \text{ ton (-)}$$

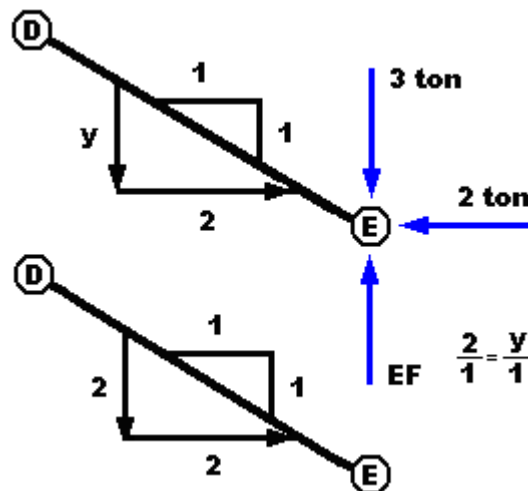


Figura 4.4.4

- Como el triángulo vectorial posee únicamente las proyecciones horizontal y vertical la fuerza total de la barra DE se calcula así:

$$DE = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2.83 \text{ ton (-)}$$

A continuación nos ubicamos en el nodo F y seguimos el mismo razonamiento.

- Para que se cumpla la ecuación $\sum F_y = 0$, proyección vertical del triángulo vectorial debe ser igual a 5 Ton.
- Con base en la proporcionalidad de los triángulos vectorial y escalar se calcula la proyección horizontal ($x = 2.5$ Ton).
- Al conocer la proyección horizontal del triángulo vectorial se aplica la ecuación $\sum F_x = 0$ para conocer el valor FG, y se calcula la fuerza en la barra DF:

$$FG = 2.5 \text{ Ton (-)}$$

$$DF = \sqrt{5^2 + 2.5^2} = 5.59 \text{ ton (+)}$$

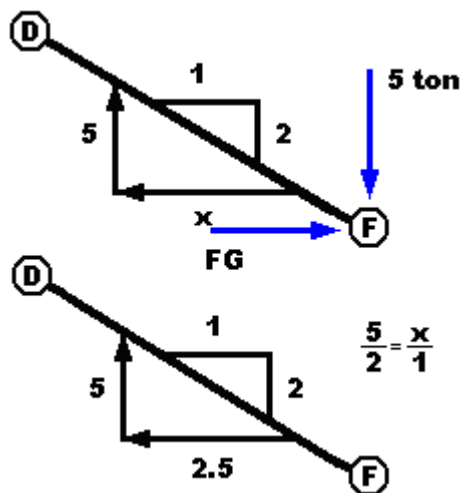


Figura 4.4.5

Ahora, nos trasladamos al nodo D y realizamos el mismo procedimiento:

- Al considerar las proyecciones horizontales en los triángulos vectoriales es posible conocer la proyección correspondiente a la barra CD; esto es $CD = 0.5 \text{ ton}$.
- Por la proporcionalidad de los triángulos resulta $y = 0.5$.
- Considerando la ecuación $\sum F_y = 0$ podemos calcular el valor de la fuerza en la barra DG. Asimismo, es posible hallar el valor de la fuerza en la barra CD:

$$DG = 3 - 2 + 5 - 0.5 = 5.5 \text{ ton}(-)$$

$$CD = \sqrt{0.5^2 + 0.5^2} = 0.71 \text{ ton}(+)$$

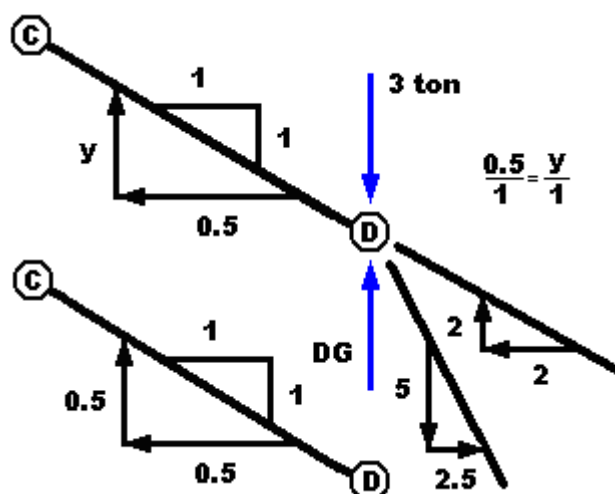


Figura 4.4.6

Lo anterior se expuso con objeto de comprender cada paso del razonamiento en el método de conservación de proyecciones. En realidad, todos estos pasos se realizan en esquemas que se dibujan dentro de la misma armadura, teniendo en cuenta las proyecciones horizontales y verticales tanto en el triángulo escalar como en el vectorial para cada barra inclinada, como se indica en la figura siguiente. Posteriormente se calculan las fuerzas en dichas barras y se dan todos los valores en una tabla como ya sabemos.

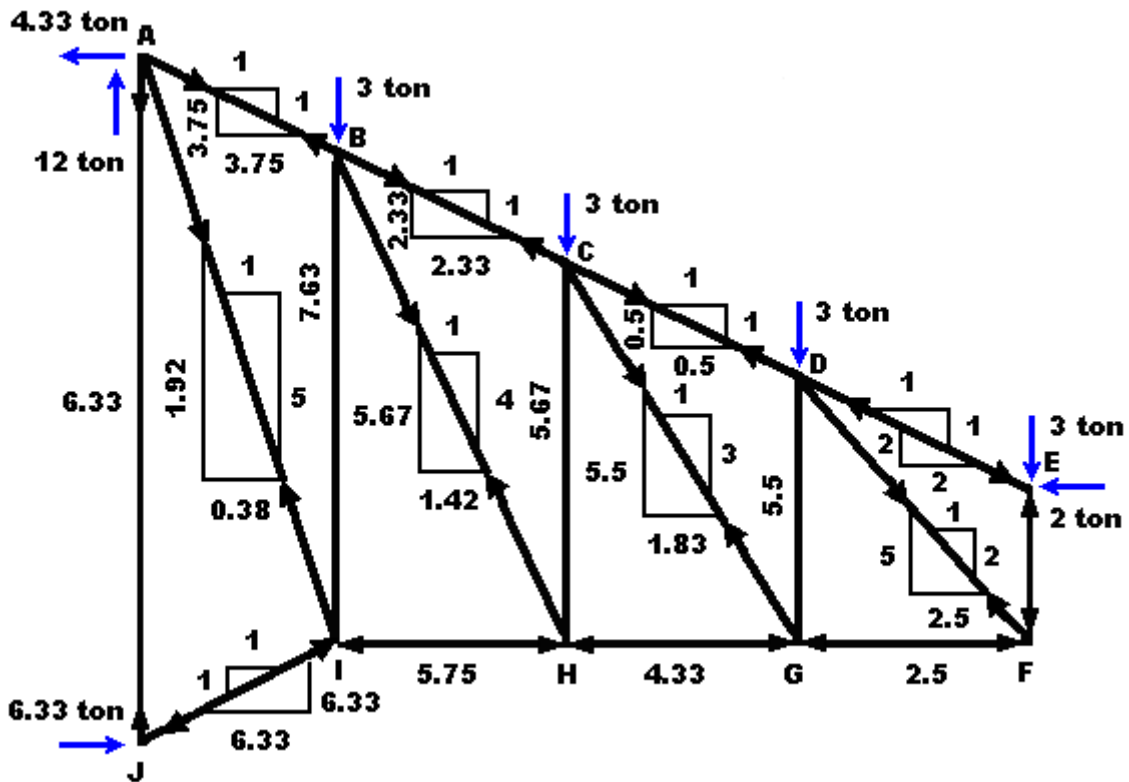


Figura 4.4.7

	IDENTIFICACIÓN	FUERZA(TON)	TENSIÓN/COMPRESIÓN
CUERDA SUPERIOR	AB	2.83	-
	BC	0.71	+
	CD	3.30	+
	DE	5.30	+
CUERDA INFERIOR	FG	2.5	-
	GH	4.33	-
	HI	5.75	-
	IJ	8.95	-
MONTANTES	EF	5.0	-
	DG	5.5	-
	CH	5.67	-
	BI	7.63	-
	AJ	6.33	+
DIAGONALES	DF	5.59	+
	CG	5.8	+
	BH	5.85	+
	AI	1.96	+

NOTA: En el nodo I no se cumplen las ecuaciones con exactitud debido al redondeo de las cifras.

Es conveniente calcular la armadura anterior con la barra IJ colineal a la cuerda inferior, de manera que la barra AJ se acortará un metro, y comparar estos resultados con los de la tabla anterior.

En resumen, para utilizar el método de conservación de proyecciones es necesario:

- Calcular las reacciones de la armadura.
- Definir los triángulos escalares en las barras inclinadas.
- Aplicar las ecuaciones $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ en cada nodo, trabajando con las proyecciones de las fuerzas en los triángulos vectoriales.
- Aplicar la proporcionalidad de los triángulos semejantes en cada barra inclinada para hallar el valor de la otra proyección.
- Con las proyecciones de cada barra se calcula así la fuerza axial que soporta cada una de ellas:

$$F = \sqrt{0.5_x^2 + 0.5_x^2}$$

- En el último nodo es posible verificar nuestros cálculos.

4.5 Método de la fuerza ficticia

Existen armaduras en que, al resolverse por alguno de los métodos antes descritos, se llega a una zona de la estructura donde se presenta Momentáneamente, una Incógnita adicional a las que permite la estática. Esta incógnita se resuelve posteriormente debido a que la armadura es isostática. A esta incógnita momentánea la llamamos fuerza ficticia.

En estas ocasiones se utiliza el método de la fuerza ficticia, consistente en asignarle un valor literal a la incógnita momentáneamente adicional y evaluar en función de esta variable los resultados de las demás barras, hasta que se presente la oportunidad de darle valor numérico a la fuerza ficticia.

El método de la fuerza ficticia permite seguir calculando la armadura hasta llegar a una zona de la misma, donde las propias condiciones hacen posible dar valor numérico a la fuerza ficticia, ya que la estructura es isostática y en la función de la fuerza ficticia calcular los valores de las fuerzas que permanecen.

Con la idea de aprender el uso de la fuerza ficticia, resolvamos por el método de los nodos la armadura de la figura, en la cual las tres barras centrales no forman un nodo, sólo se cruzan.

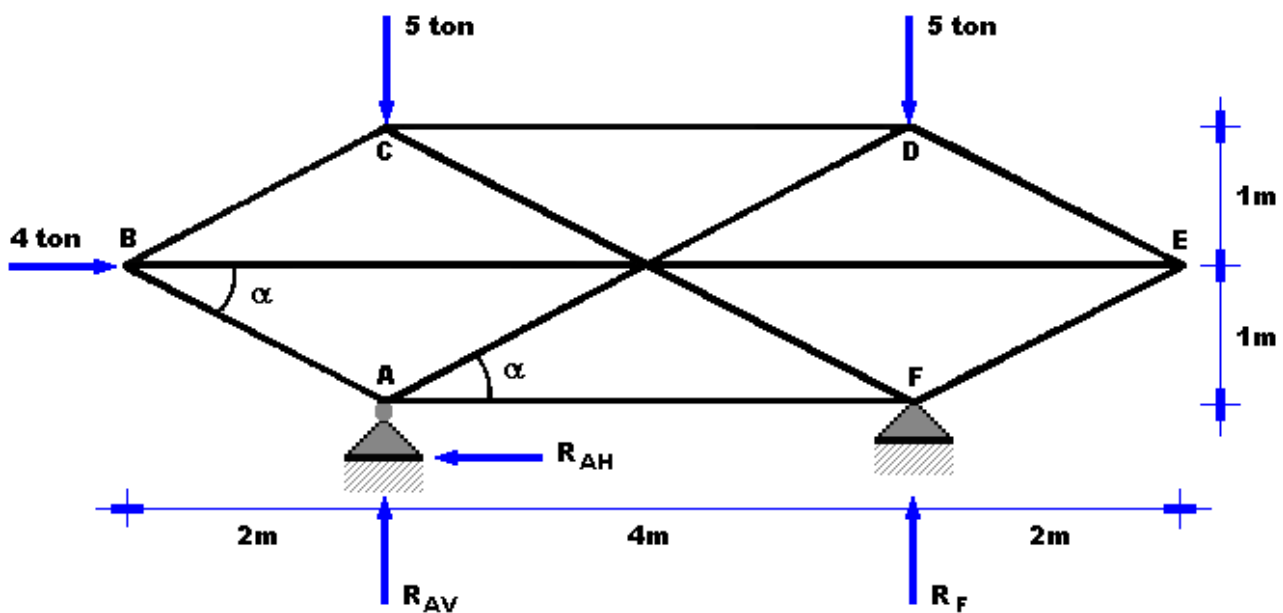


Figura 4.5.1

Las reacciones y los elementos geométricos de la estructura son:

$$\sum F_x = 0 \quad R_{AH} = 4\text{ton}$$

$$\sum M_A = 0 \quad R_F = 6\text{ton}$$

$$\sum F_y = 0 \quad R_{AV} = 4\text{ton}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(1/2) = 26.56^\circ$$

Ahora calculemos nodo por nodo, comenzando por el nodo A. Notemos que por cualquier nodo que elijamos siempre tendremos tres incógnitas, y ello nos obliga a tomar una barra con fuerza ficticia (sea $AB = f$)

$$\sum F_y = 0 \quad 4 = f \operatorname{sen} \alpha + AD \operatorname{sen} \alpha$$

$$AD = \frac{4 - f \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\sum F_x = 0 \quad 4 + AD \cos \alpha = f \cos \alpha + AF$$

$$AF = 4 + (4 - f \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{ctg} \alpha - f \cos \alpha$$

$$AF = 4 + 4 \operatorname{ctg} \alpha - 2f \cos \alpha$$

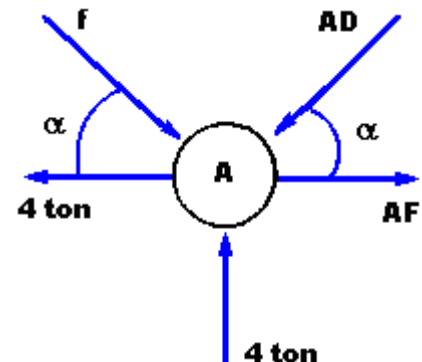


Figura 4.5.2

Como observamos, los valores de las barras AD y A F están en función de la fuerza ficticia f . Pasemos al nodo B, y nuevamente las barras BC y BE estarán en función de f .

$$\sum F_y = 0 \quad BC \operatorname{sen} \alpha = f \operatorname{sen} \alpha$$

$$BC = f$$

$$\sum F_x = 0 \quad 4 + BE = BC \cos \alpha + f \cos \alpha$$

$$BE = 2f \cos \alpha - 4$$

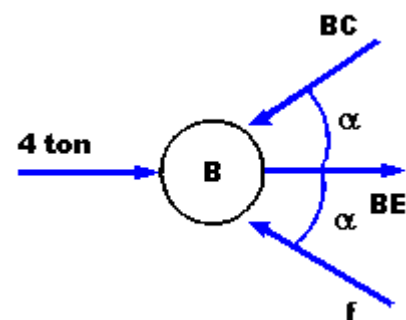


Figura 4.5.3

De igual manera recorreremos los nodos siguientes

$$\sum F_y = 0 \quad 5 = f \operatorname{sen} \alpha + CF \operatorname{sen} \alpha$$

$$CF = \frac{5 - f \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\sum F_x = 0 \quad f \cos \alpha + CD = CF \cos \alpha$$

$$f \cos \alpha + CD = \frac{5 - f \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \cos \alpha$$

$$CD = 5 \operatorname{ctg} \alpha - 2f \cos \alpha$$

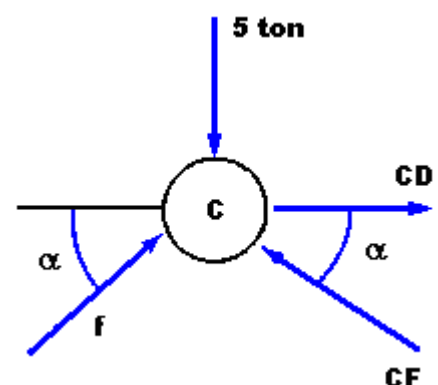


Figura 4.5.4

En el nodo D tendremos sólo una barra desconocida, por lo cual, al disponer de dos ecuaciones estáticas, es probable que podamos conocer el valor de f.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad & 5 \operatorname{ctg} \alpha - 2f \cos \alpha + DE \cos \alpha = \frac{4 - f \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \cos \alpha \\ & 5 \operatorname{ctg} \alpha - f \cos \alpha + DE \cos \alpha = 4 \operatorname{ctg} \alpha - f \cos \alpha \\ & \operatorname{ctg} \alpha + DE \cos \alpha - f \cos \alpha = 0 \\ \sum F_y = 0 \quad & 5 = DE \operatorname{sen} \alpha + \frac{4 - f \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \operatorname{sen} \alpha \\ & 5 = DE \operatorname{sen} \alpha + 4 - f \operatorname{sen} \alpha \\ & 1 - DE \operatorname{sen} \alpha + f \operatorname{sen} \alpha = 0 \end{aligned}$$

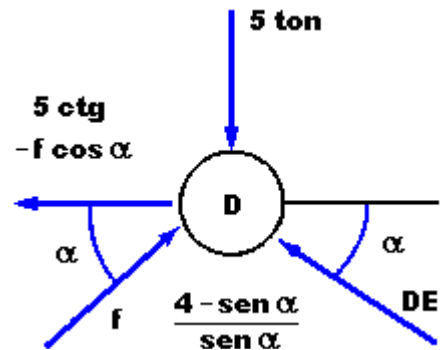


Figura 4.5.5

Resolviendo el sistema advertimos que las ecuaciones son redundantes y por ello todavía no es posible obtener el valor de f. Analicemos un nodo más: el nodo E.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad & 2f \cos \alpha - 4 = \frac{f \cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}{\cos \alpha} \cos \alpha \\ & f = 2.236 \operatorname{ton} \\ \sum F_y = 0 \quad & EF \operatorname{sen} \alpha = \frac{f \cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}{\cos \alpha} \operatorname{sen} \alpha \\ & EF = \frac{f - \operatorname{ctg} \alpha}{\cos \alpha} = 0.26 \operatorname{ton} \end{aligned}$$

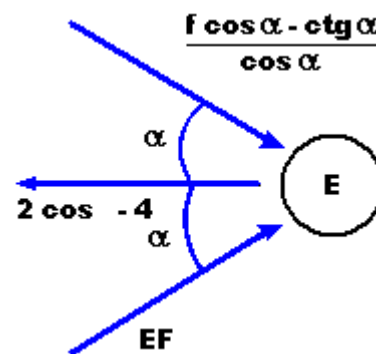


Figura 4.5.6

Una vez calculando el valor de la fuerza ficticia f, podemos hallar las fuerzas en las demás barras, que incluimos en la siguiente tabla.

	IDENTIFICACIÓN	FUERZA(TON)	TENSIÓN/COMPRESIÓN
CUERDA SUPERIOR	AB	2.236	-
	BC	2.236	-
	CD	6.0	+
	DE	0.26	-
	EF	0.26	-
CUERDA INFERIOR	AF	8.0	+
DIAGONALES	CF	8.94	-
	AD	6.71	-
	BE	0.0	NO TRABAJA

Esta misma estructura la resolvemos por el método de conservación de proyecciones, tal como se muestra en la siguiente figura.

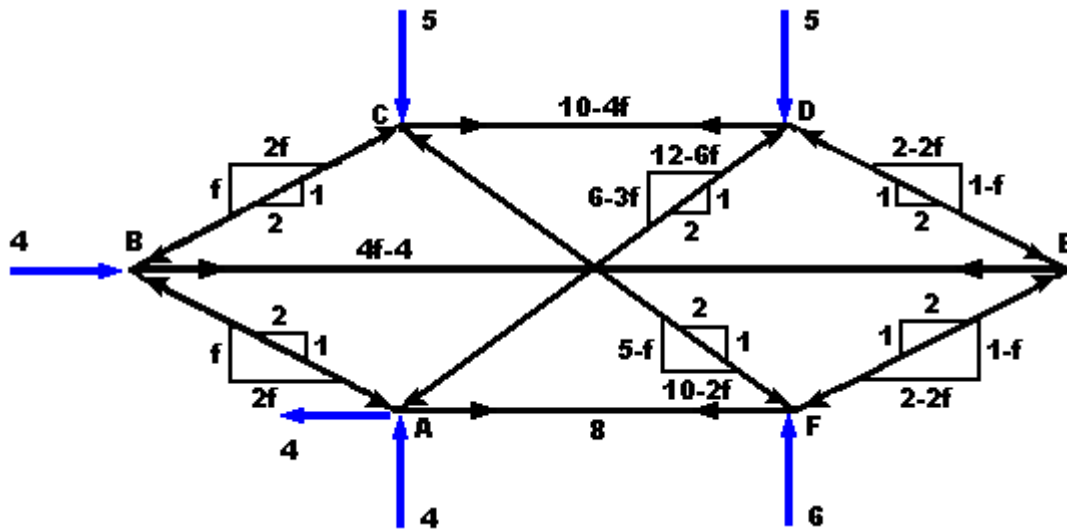


Figura 4.5.7

Explicemos el cálculo del diagrama:

- Iniciamos en el nodo A y asignamos la fuerza ficticia f a la proyección vertical de la barra AB. Por la proporción de triángulos la proyección horizontal vale $2f$.
- Pasamos al nodo B donde la proyección vertical de la barra BC debe ser f para satisfacer la ecuación $\sum F_y = 0$. Su proyección horizontal con base en la proporción de triángulos vale $2f$. Finalmente, para que se cumpla la ecuación $\sum F_x = 0$, la barra BE vale $4f - 4$.
- Consideramos ahora el nodo C y la proyección vertical de la barra CF vale $5 - f$ para que sea cierta la ecuación $\sum F_y = 0$. Por la semejanza de los triángulos rectángulos de la barra CF, la proyección horizontal de ésta vale $10 - 2f$. Por último, la barra CD tiene por valor $10 - 4f$ para que se verifique la ecuación $\sum F_x = 0$.
- En el nodo F comenzamos con la ecuación $\sum F_y = 0$, por lo cual la proyección vertical de la barra FE es $1 - f$. La semejanza entre los triángulos escalar y vectorial nos lleva al valor de la proyección horizontal, que es $2 - 2f$. Al plantear la ecuación $\sum F_x = 0$, la barra AF adquiere un valor de 8 Ton.
- Analizando el nodo E, el valor de la proyección vertical de la barra DE es $1 - f$ para que se cumpla la ecuación $\sum F_y = 0$. Por la proporcionalidad de los triángulos, la proyección horizontal es $2 - 2f$.

- En el nodo D, al plantear la ecuación $\sum F_x = 0$ obtenemos la proyección horizontal de la barra AD, cuyo valor es $12-6f$. Al efectuar la proporcionalidad de los triángulos, la proyección horizontal vale $6-3f$.
- Por último, el nodo A nos permite calcular el valor de f al plantear las dos ecuaciones de equilibrio.

$$\sum F_x = 0 \quad 2f + 8 = 12 - 6f + 4 \quad f = 1$$

$$\sum F_y = 0 \quad 4 = f + 6 - 3f \quad f = 1$$

- Una vez conocido el valor de $f=1$, podemos calcular el valor numérico de las demás barras.

$$AB = \sqrt{f^2 + (2f)^2} = 2.236 \text{ ton}$$

$$BC = \sqrt{f^2 + (2f)^2} = 2.236 \text{ ton}$$

$$CD = 10 - 4f = 6.0 \text{ ton}$$

$$DE = \sqrt{(1-f)^2 + (2-2f)^2} = 0.0 \text{ ton}$$

$$EF = \sqrt{(1-f)^2 + (2-2f)^2} = 0.0 \text{ ton}$$

$$AF = 8.0 \text{ ton}$$

Podemos observar que los resultados obtenidos, salvo errores de aproximación, son los mismos que calculamos por el método de nodos.

Por último, estudiamos la misma armadura por el método de las secciones, para apreciar cómo se aplica el concepto de la fuerza ficticia.

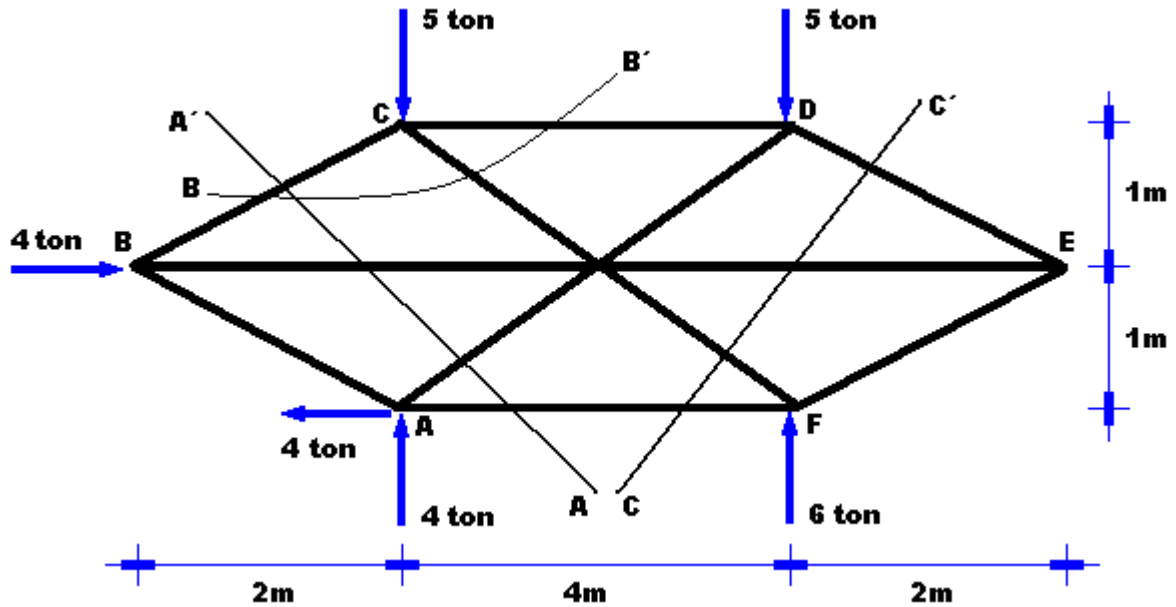


Figura 4.5.8

Empecemos por la sección A'A. Para no tener excesivos problemas geométricos momento de evaluar los momentos, es más conveniente trabajar con las proyecciones de las barras inclinadas. Además, tomaremos el valor a como la fuerza ficticia:

$$\sum F_y = 0 \quad 4 - b - a = 0$$

$$b = 4 - a$$

$$\sum M_B = 0 \quad 2(4 - a) - 1(4 - 2a - AF) = 0$$

$$AF = 4a - 4$$

$$\sum F_x = 0 \quad 4 - 4 - 2b - 2a + BE + AF = 0$$

$$BE = 12 - 4a$$

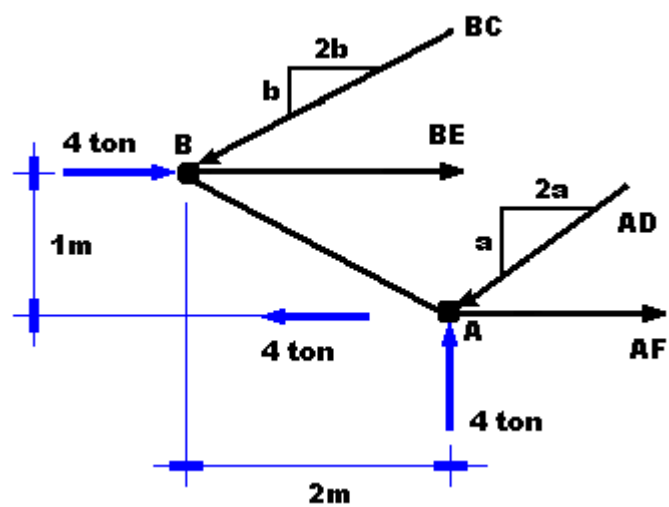


Figura 4.5.9

Pasemos ahora a la sección B'B y a continuación evaluemos las fuerzas en función del valor a hasta que éste pueda ser calculado.

$$\begin{aligned} \sum F_Y = 0 \quad & 5 = b + d \\ & d = 1 + a \quad (A) \\ \sum F_X = 0 \quad & 2b + DC = 2d \\ & DC = 4a - 6 \end{aligned}$$

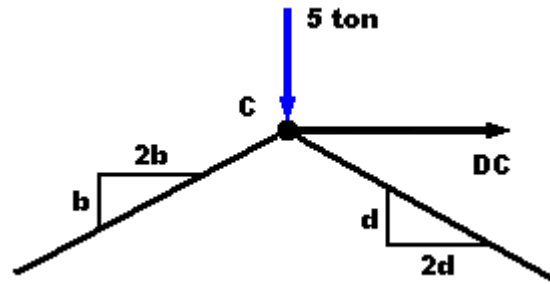


Figura 4.5.10

Continuamos ahora con la sección C'C

$$\begin{aligned} \sum M_F = 0 \quad & 1(12 - 4a) = 1(2c) + 2(c) \\ & C = 3 - a \\ \sum F_X = 0 \quad & 2d + 2c = 12 - 4a + 4a - 4 \\ & d = 2a - 2 \quad (B) \end{aligned}$$

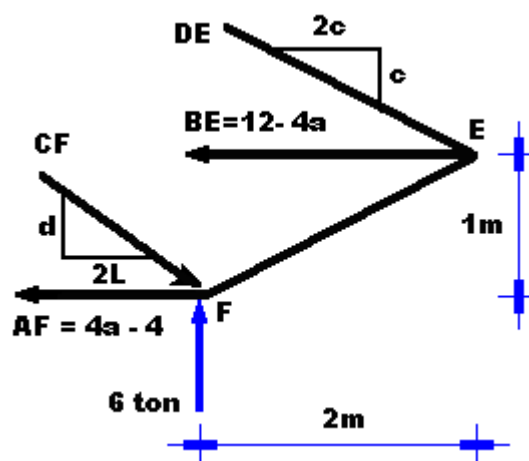


Figura 4.5.11

Resolviendo las ecuaciones (A) y (B) obtenemos el valor de la fuerza ficticia $a = 3$ ton, y a partir de este valor es posible calcular las demás fuerzas que están en función ella.

$$a = 3\text{ton}$$

$$b = 4 - a = 1\text{ton}$$

$$c = 3 - a = 4\text{ton}$$

$$AF = 4a - 4 = 8\text{ton}$$

$$BE = 12 - 4a = 0\text{ton}$$

$$DC = 4a - 6 = 6\text{ton}$$

$$AD = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = 6.71\text{ton}$$

$$CF = \sqrt{d^2 + (2d)^2} = 8.94\text{ton}$$

$$BC = \sqrt{b^2 + (2b)^2} = 2.236\text{ton}$$

$$DE = \sqrt{c^2 + (2c)^2} = 0\text{ton}$$

Si calculamos las secciones D' D y E' E obtendremos los valores en las barras AB, que serán, respectivamente:

$$AB = 2.236 \text{ Ton} \quad EF = 0 \text{ Ton}$$

Advertimos que volvemos a tener los mismos valores que los hallados por el método de nodos y el de conservación de proyecciones.

A estas alturas podemos afirmar que, para la utilización del método de la fuerza ficticia, es necesario basarse en algún otro método de los ya estudiados. Aunque el lector; se haya percatado de ello, conviene señalar que es posible combinar todos los métodos al momento de resolver una armadura.

2011

ANÁLISIS DE ARCOS Y CABLES



ANÁLISIS DE ARCOS Y CABLES

5.1 Arcos

Las estructuras de eje curvo han sido, a través de la historia, las que más han contribuido al ornato de las edificaciones. Los romanos construyeron muchos puentes y acueductos donde usaban el arco de medio punto (arco circular).

El arco de herradura, que también es circular, es otro claro ejemplo de belleza arquitectónica en palacios y mezquitas árabes.

Los arcos elípticos tuvieron gran aceptación en palacios y castillos europeos como el Escorial, en España, que tiene un gran salón donde su bóveda en forma elíptica permite oír de un lado a otro por el reflejo de las ondas sonoras en la elipse.

En el Medievo fue notorio el arco gótico, compuesto por dos partes de arco circular, de especial belleza en las catedrales de la época.

Hoy en día llama la atención el arco parabólico, tan usado en estructuras que soportan cascarones de doble curvatura o que sirven de pórticos a edificaciones donde hay concentraciones de gente.

La geometría que guarda el eje de una estructura curva puede ser muy variada, y en ocasiones resulta ser compuesta; pero los arcos más usados son los circulares, parabólicos y elípticos:

- En los arcos circulares es conveniente elegir un marco de referencia que tenga su origen en el centro del círculo y calcular con las ecuaciones paramétricas.
- En los arcos elípticos también es conveniente ubicar el origen del sistema de referencia en el centro de la elipse y recurrir a las ecuaciones paramétricas.
- Cuando se presenta un arco parabólico, la mejor ubicación del origen es el vértice de la parábola; uno de los ejes cartesianos debe coincidir con el eje de la parábola y se realizan los cálculos recordando la ecuación de la parábola.

Existen otros tipos de arcos menos usados y que enumerarnos a continuación:

- El arco carpanel consiste en tres trazos circulares,
- El arco catalán se utiliza en zonas bajo escaleras; se logra con dos trazos circulares.

Otros tipos de arcos son:

- El equilátero
- Escarzano
- Canopial
- Herradura.

Por sus apoyos los arcos pueden ser: simples, triarticulados o en cantiliver:

- El simple es aquella estructura curva que posee un apoyo libre y el otro articulado.
- Un arco triarticulado tiene ambos apoyos articulados y ello obliga, por isostaticidad, a poseer una tercera articulación dentro de su eje.
- Cuando hay una estructura curva empotrada en un extremo y libre en el otro, se tiene un arco en cantiliver.

5.2 Arcos circulares

El arco circular fue el primero en utilizarse y se le aprovechó en varios tipos por distintos pueblos de la humanidad; aún hoy día sigue teniendo una gran aceptación.

En nuestro medio es fácil apreciar las construcciones españolas coloniales en iglesias y edificios de gobierno, y es el arco circular el que privó en las arquerías de los pórticos.

Entre los rasgos sobresalientes del estilo colonial mexicano está el arco de medio punto. En esta sección conoceremos cuál es su tratamiento analítico a fin de conocer sus elementos mecánicos.

Cuando calculábamos marcos definíamos los intervalos donde tenía vigencia una función, y en ellos se mantenía la dirección del cortante y de la normal por ser estructuras de eje recto.

En estructuras de eje curvo esto ya no se cumple porque punto a punto cambia la dirección del cortante y de la normal.

En el tramo BC del marco de la figura observamos que los puntos P y Q tienen la dirección BC como la línea de acción de la fuerza normal, y en dirección perpendicular actúa la fuerza cortante (líneas punteadas).

En cambio en el arco, el punto R tiene una dirección para el cortante distinta a la del punto S (líneas punteadas) y lo mismo sucede con las direcciones de acción de la fuerza normal (líneas de punto y raya). Esto es propio de la configuración curva de los arcos y por ello debemos definir una función que represente la dirección de la fuerza normal y fuerza cortante positivas.

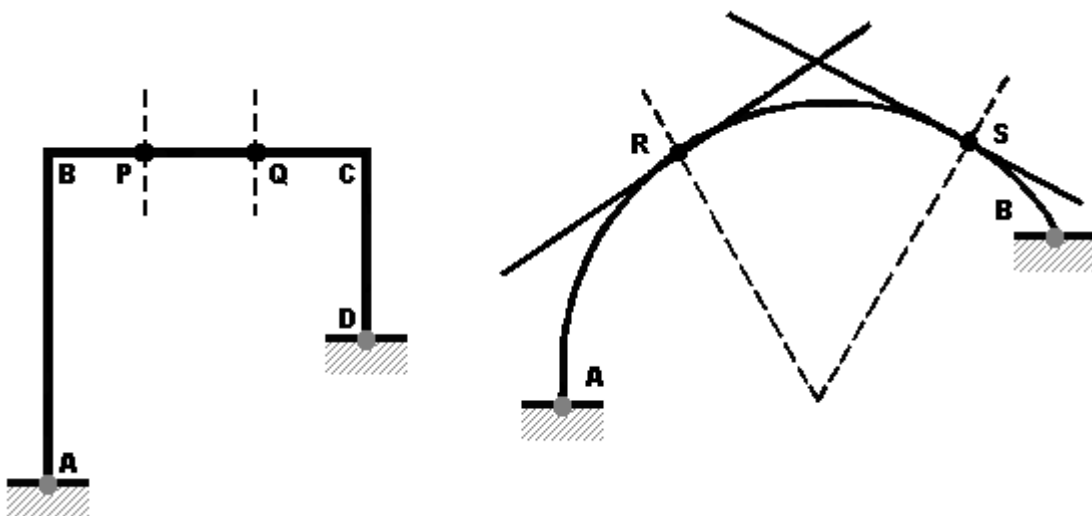


Figura 5.2.1

Lo anterior lo lograremos analizando un arco circular.

Primero ubicamos el sistema de referencia con el origen en el centro de la circunferencia. Fijamos un punto P cualquiera del arco, cuyo radio vector forma un ángulo θ con el eje x.

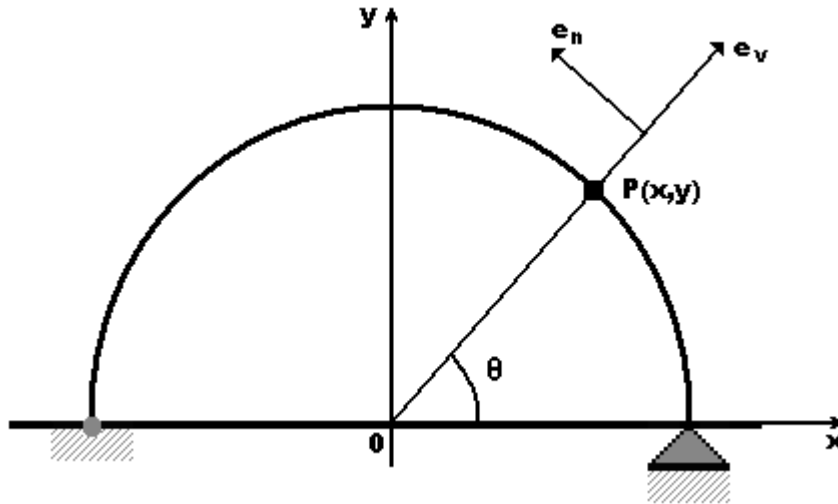


Figura 5.2.2

En el punto P dibujaremos dos vectores unitarios que llamaremos:

- Vector unitario en la dirección del cortante, y se simboliza por \bar{e}_v
- Vector unitario en la dirección de la normal, simbolizado por \bar{e}_N

Los sentidos de los vectores se han tomado en el supuesto de entrar por la izquierda en la estructura mencionada.

Como \bar{e}_v lleva la dirección del radio vector, OP sus coordenadas son:

$$\bar{e}_v = [\cos \theta, \sin \theta]$$

Como el vector es unitario se verifica que:

$$|\bar{e}_v| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

De igual forma tenemos que:

$$\bar{e}_N = [-\sin \theta, \cos \theta]$$

$$|\bar{e}_N| = \sqrt{(-\sin \theta)^2 + \cos^2 \theta} = 1$$

Por otro lado, sabemos que el producto interno de dos vectores nos permite calcular las proyecciones de uno sobre el otro; así:

$$Proy_a \bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\bar{a}}$$

Ahora bien, si conocemos un vector unitario en la dirección del cortante \bar{e}_v , como ya vimos, y conocemos un vector \bar{R} de todas las fuerzas activas y reactivas a la izquierda de la sección, podemos escribir.

$$Proy_{e_v} \bar{R} = \frac{\bar{e}_v \cdot \bar{R}}{|\bar{e}_v|} = \bar{e}_v \cdot \bar{R}$$

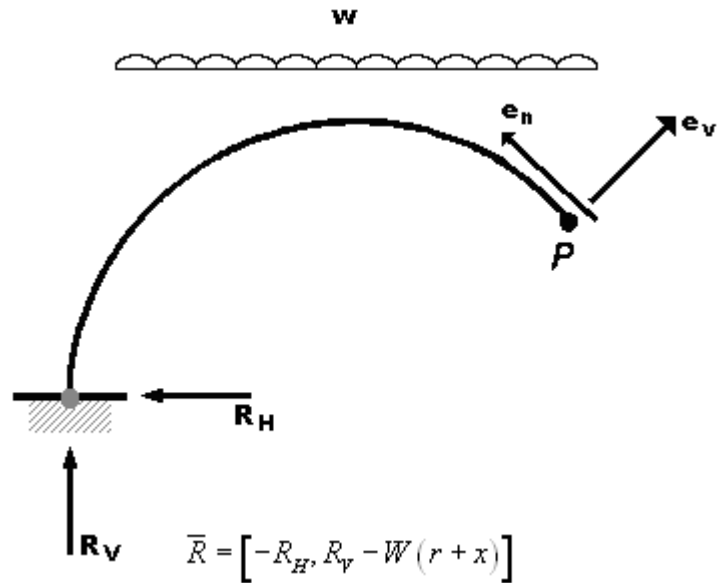


Figura 5.2.3

Pero, por definición, la proyección de todas las fuerzas a la izquierda de la sección \bar{R} sobre la dirección de \bar{e}_v es la fuerza cortante. Por tanto:

$$v = \bar{e}_v \cdot \bar{R}$$

De igual manera podemos afirmar que:

$$N = \bar{e}_N \cdot \bar{R}$$

En resumen, podemos aceptar que:

$$v = \bar{e}_v \cdot \bar{R}$$

$$N = \bar{e}_N \cdot \bar{R}$$

Donde:

v = Fuerza cortante

N = Fuerza normal

\bar{e}_v = Vector unitario en dirección cortante

\bar{e}_N = Vector unitario en dirección normal

\bar{R} = Resultante de todas las fuerzas activas y reactivas a la izquierda de la sección.

En arcos circulares, cuando se toma el centro del círculo como origen, se tiene:

$$\bar{e}_v = [\cos \theta, \sin \theta]$$

$$\bar{e}_N = [-\sin \theta, \cos \theta]$$

Donde θ es la segunda coordenada polar del punto P .

Teniendo el arco circular triarticulado que se muestra en la figura, encontramos los diagramas de elementos mecánicos.

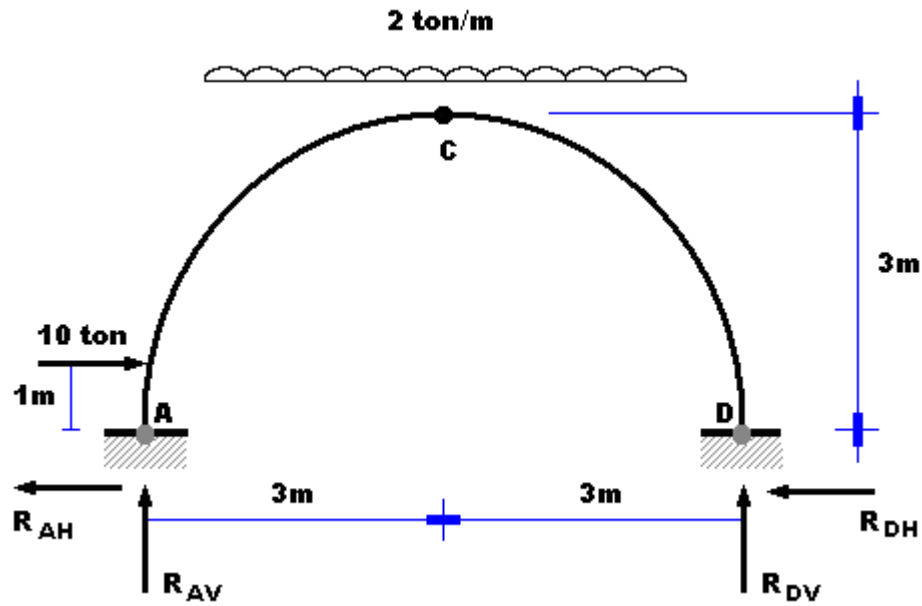


Figura 5.2.4

Cálculo de las reacciones, procedemos tal como calculamos las reacciones en marcos triarticulados.

Por $\sum M_A = 0$ De todo el arco:

$$6R_{DV} = 10(1) + 2(6)(3)$$

$$R_{DV} = 7.67 \text{ ton}$$

Por $\sum M_C = 0$ Del tramo DC:

$$7.67(3) = R_{DH}(3) + 6(1.5)$$

$$R_{DH} = 4.67 \text{ ton}$$

Por $\sum F_Y = 0$

$$R_{AV} = 2(6) - 7.67$$

$$R_{AV} = 4.33 \text{ ton}$$

Por $\sum F_X = 0$

$$R_{AH} = 10 - 4.67$$

$$R_{AH} = 5.33 \text{ ton}$$

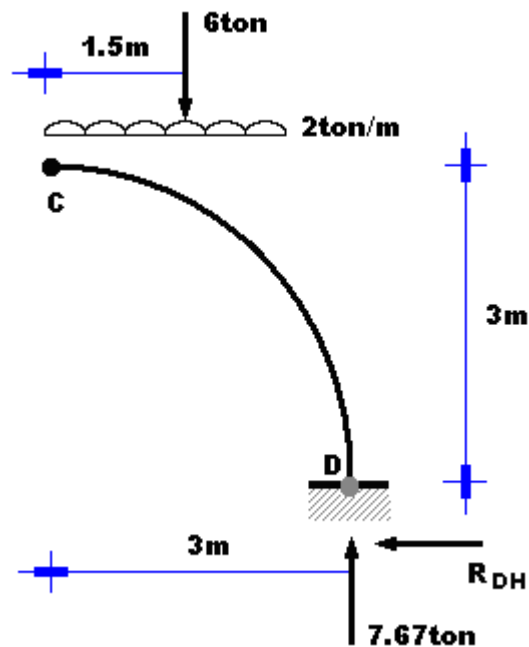


Figura 5.2.5

Por facilidad, colocamos el origen coordenado al centro del arco.

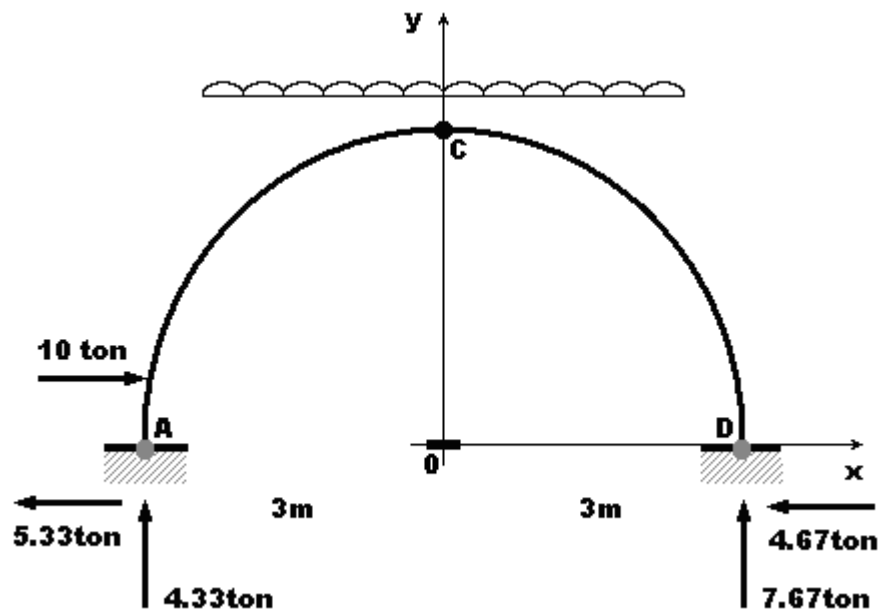


Figura 5.2.6

Para el cálculo de los elementos mecánicos tendremos:

Definimos los intervalos:

$$AB \quad 180^\circ \geq \theta \geq \tan^{-1} - \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$-3 \leq x \leq -\sqrt{8} \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$180^\circ \geq \theta \geq 160.53^\circ$$

$$BD \quad 160.53^\circ \geq \theta \geq 0^\circ$$

$$-\sqrt{8} \leq x \leq 3; \quad 1 \leq y \leq 3 \quad 3 \geq y \geq 0$$

Para el primer intervalo:

$$AB \quad 180^\circ \geq \theta \geq 160.53^\circ$$

De las ecuaciones del círculo conocemos:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta = 3 \operatorname{sen} \theta$$

$$x = r \cos \theta = 3 \cos \theta$$

$$S = r + x$$

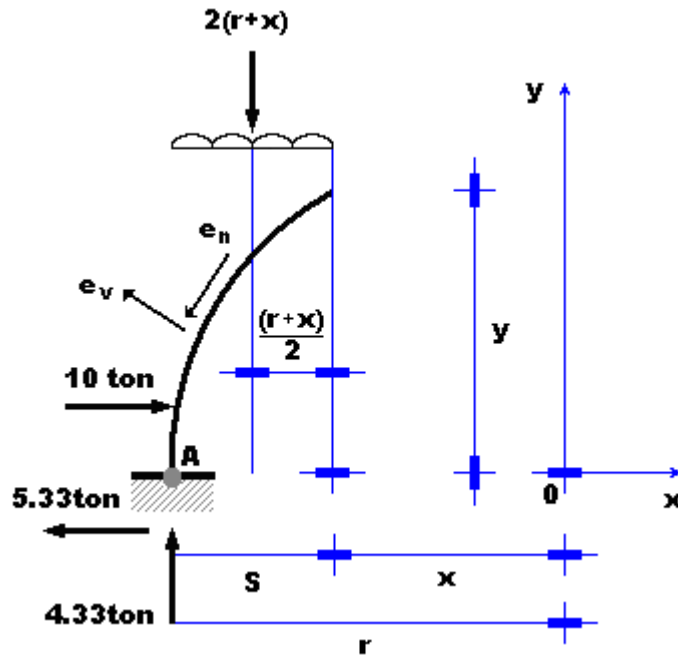


Figura 5.2.7

$$M = 4.33(r+x) + 5.33y - 2(r+x) \frac{r+x}{2}$$

$$M = 4.33(3+3\cos\theta) + 5.33(3\sin\theta) - (3+3\cos\theta)^2$$

$$M = 12.99 + 12.99\cos\theta + 15.99\sin\theta - 9 - 18\cos\theta - 9\cos^2\theta$$

$$M = 3.99 - 5.01\cos\theta + 15.99\sin\theta - 9\cos^2\theta$$

Para las ecuaciones de fuerza cortante y fuerza normal obtenemos los vectores unitarios correspondientes:

$$\bar{e}_v = [\cos\theta, \sin\theta]$$

$$\bar{e}_N = [-\sin\theta, \cos\theta]$$

Y la resultante que corresponde al intervalo a la izquierda de la sección:

$$\bar{R} = [-5.33, 4.33 - 2(r+x)]$$

$$\bar{R} = [-5.33, 4.33 - 2(3+3\cos\theta)]$$

$$\bar{R} = [-5.33, 4.33 - 6 - 6\cos\theta]$$

$$\bar{R} = [-5.33, -1.67 - 6\cos\theta]$$

Efectuando el producto puntual de vectores obtenemos las ecuaciones:

$$V = \bar{R} \cdot \bar{e}_v$$

$$V = -5.33\cos\theta + 1.67\sin\theta - 6\sin\theta\cos\theta$$

$$N = \bar{R} \cdot \bar{e}_N$$

$$N = 5.33\sin\theta - 1.67\cos\theta - 6\cos^2\theta$$

Para el segundo intervalo tenemos

$$BD \ 160.53^\circ \geq \theta \geq 0^\circ$$

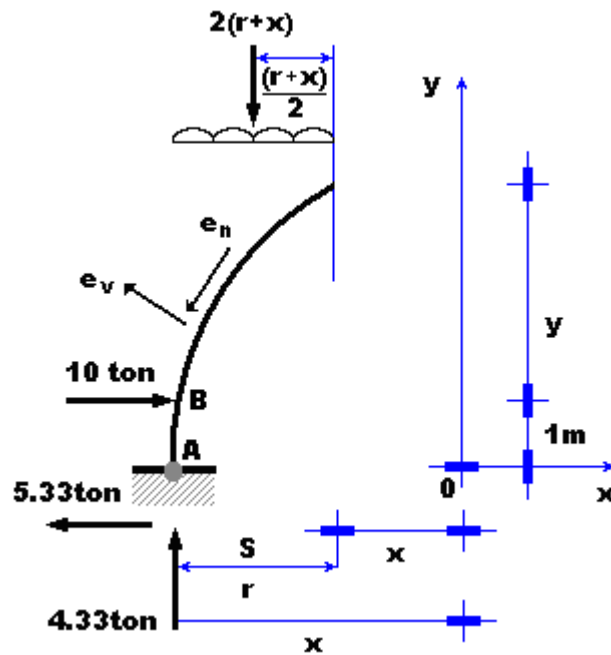


Figura 5.2.8

$$M = 4.33(r+x) + 5.33(y) - 10(y-1) - (r+x)^2$$

$$M = 4.33(3+3\cos\theta) + 5.33(3\text{sen}\theta) - 10(3\text{sen}\theta-1) - (3+3\cos\theta)^2$$

$$M = 12.99 + 12.99\cos\theta + 15.99\text{sen}\theta - 30\text{sen}\theta + 10 - 9 - 18\cos\theta - 9\cos^2\theta$$

$$M = 13.99 - 5.01\cos\theta - 14.01\text{sen}\theta - 9\cos^2\theta$$

Para las fuerzas cortante y normal procedemos igual que para el primer intervalo:

$$\bar{e}_v = [\cos\theta, \text{sen}\theta]$$

$$\bar{e}_N = [-\text{sen}\theta, \cos\theta]$$

$$\bar{R} = [-5.33 + 10, 4.33 - 2(r+x)]$$

$$\bar{R} = [4.67, 4.33 - 6 - 6\cos\theta]$$

$$\bar{R} = [4.67, -1.67 - 6\cos\theta]$$

$$V = \bar{R} \cdot \bar{e}_v$$

$$V = 4.67\cos\theta - 1.67\text{sen}\theta - 6\cos\theta\text{sen}\theta$$

$$N = \bar{R} \cdot \bar{e}_N$$

$$N = -4.67\text{sen}\theta - 1.67\cos\theta - 6\cos^2\theta$$

Por último, calculamos el valor de las funciones para diferente ángulo, según intervalo en que nos encontramos.

Por facilidad tabulamos como se aprecia en la siguiente tabla.

θ	$\cos\theta$	$\text{sen}\theta$	$\cos^2\theta$	$\frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}$	M	V	N
180	-1.000	0.000	1.000	0.000	0.000	5.330	-4.330
170	-0.985	0.174	0.970	-0.171	2.972	5.985	-3.249
160.53	-0.943	0.333	0.889	-0.314	6.043	6.354	-1.982
140	-0.766	0.643	0.587	-0.492	3.541	-1.183	-5.243
120	-0.500	0.866	0.250	-0.433	2.112	-1.183	-4.709
100	-0.174	0.985	0.030	-0.171	0.791	-1.430	-4.490
90	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	-1.670	-4.670
80	0.174	0.985	0.030	0.171	-0.949	-1.860	-5.070
60	0.500	0.866	0.250	0.433	-2.898	-1.709	-6.379
40	0.766	0.643	0.587	0.492	-4.135	-0.450	-7.802
20	0.940	0.342	0.883	0.321	-3.457	1.889	-8.465
0	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000	4.670	-7.670

Para dibujar los diagramas de elementos mecánicos utilizados los valores tabulados anteriormente, teniendo en cuenta que nuestro sistema de referencia es polar.

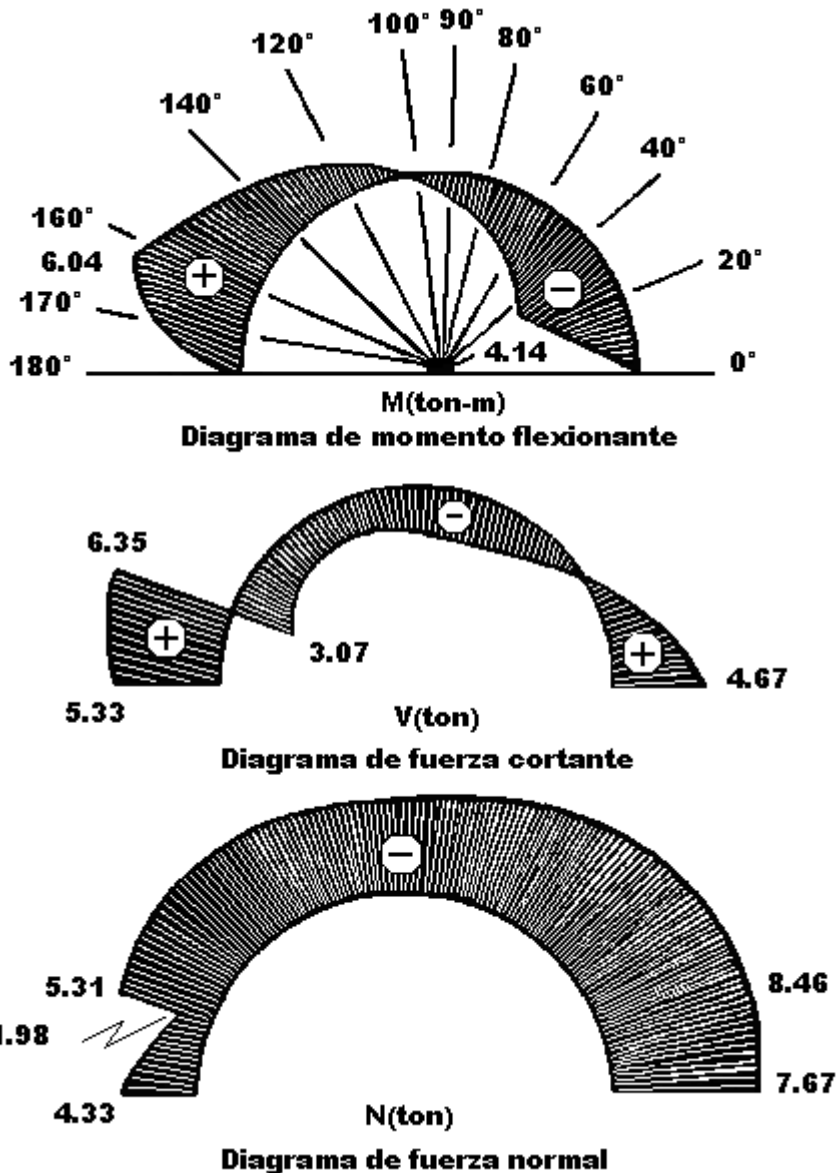


Figura 5.2.9

El proceso para el cálculo de arcos circulares consiste en:

- Calcular reacciones.
- Elegir marco de referencia con su origen en el centro del círculo.
- Definir los intervalos de utilidad para las funciones de elementos mecánicos.
- Calcular la función de momento flexionante en función de x y y . Convertir la función de momento flexionante como función de θ .
- Calcular los vectores unitarios en la dirección cortante y normal \bar{e}_v y \bar{e}_N
- Calcular para cada intervalo la resultante de todas las fuerzas activas y reactivas a la izquierda o a la derecha de la sección.

Calcular las funciones de las fuerzas cortante ($\bar{R} \cdot \bar{e}_v$) y normal ($\bar{R} \cdot \bar{e}_N$)

- Tabular los valores de las funciones de elementos mecánicos para ciertos valores de la variable θ .
- Dibujar, con los valores anteriores, los diagramas de elementos mecánicos (diagramas radiales).

5.3 Arcos parabólicos

El hecho de haberse utilizado el arco con tanta frecuencia se debe a que esta estructura trabaja a compresión, lo cual se observa si analizamos la variación de la fuerza normal cuando el arco es sometido a cargas verticales.

La piedra, que era un elemento constructivo fundamental, resiste perfectamente este tipo de fuerza, y prueba de ello son las grandes construcciones de la antigüedad.

Con toda seguridad ya nos percatamos de lo dicho arriba al analizar los arcos circulares; pero será mayor nuestra admiración al concluir que un arco parabólico triarticulado simétrico, con carga uniformemente distribuida y que actúa verticalmente, no presenta momentos flexionante ni fuerza cortante. Sólo trabaja con fuerza normal.

Consideremos el arco triarticulado en forma de parábola que se muestra, soportando una carga vertical uniformemente distribuida en todo su claro.

Cálculo de reacciones:

$$\sum M_A = 0$$

$$8R_{cv} = 4(16)$$

$$R_{cv} = 8\text{ton}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$R_{AV} + 8 = 16$$

$$R_{AV} = 8\text{ton}$$

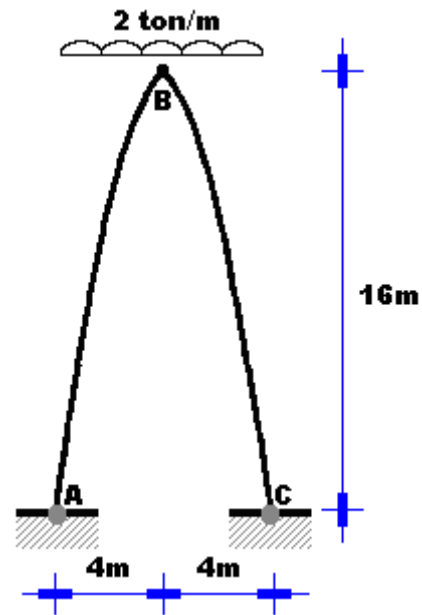


Figura 5.3.1

$$\sum M_B = 0 \text{ (Del tramo BC)}$$

$$4R_{cv} = 16R_{ch} + 8(2)$$

$$4(8) = 16R_{ch} + 16$$

$$R_{ch} = 1\text{ton}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$R_{AH} = R_{CH}$$

$$R_{AH} = 1\text{ton}$$

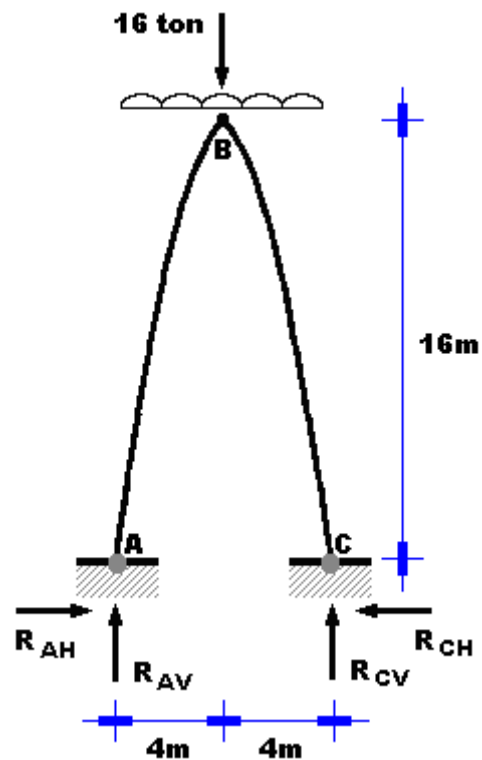


Figura 5.3.2

Ubicamos el origen coordenado en el vértice de la parábola y en cuyo caso la ecuación de la curva es:

$$y = \frac{-4h}{b^2} x^2$$

o sea:

$$y = \frac{-4(16)}{64} x^2$$

$$y = -x^2$$

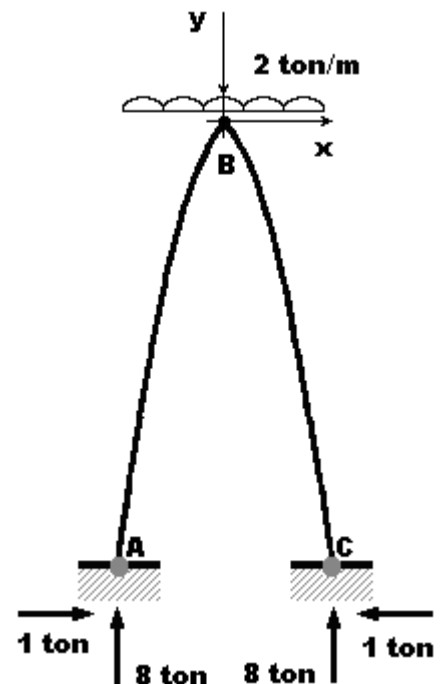


Figura 5.3.3

Nuestra estructura presenta un intervalo de A a C, es decir:

$$-4 \leq x \leq 4$$

$$-16 \leq y \leq 0 \text{ y } 0 \geq y \geq -16$$

Los elementos mecánicos entrando por la izquierda y comenzando por el momento flexionante son como siguen:

$$M = 8(4+x) - (16+y) - 2(4+x) \frac{(4+x)}{2}$$

$$M = 8(4+x) - 16 + x^2 - (4+x)^2$$

$$M = 32 + 8x - 16 + x^2 - 16 - 8x - x^2$$

$$M = 0$$

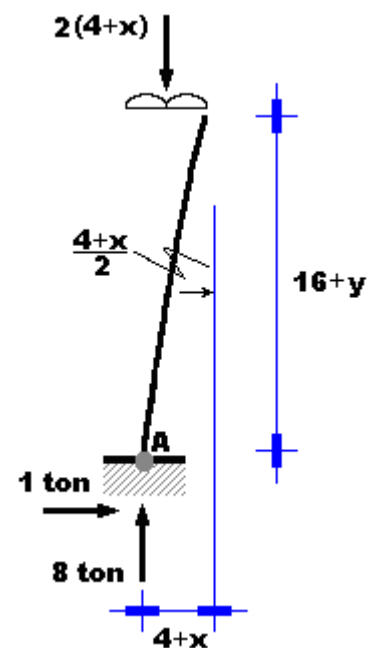


Figura 5.3.4

El momento es nulo para cualquier sección.

Para calcular la fuerza cortante se necesitan el vector unitario en dirección cortante y la resultante a la izquierda de la sección. Éstos son:

$$\bar{e}_v = [-\text{sen}\theta, \cos\theta]$$

$$\bar{R} = [1, 8 - 2(4 + X)]$$

pero $\tan\theta \frac{dy}{dx}$ es decir:

$$\tan\theta = -2x$$

Y por tanto, según la figura tenemos:

$$\bar{e}_v = \left[\frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} \right]$$

Efectuando el producto interno:

$$V = \bar{R} \cdot \bar{e}_v = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}} - \frac{8 - 2(4 - x)}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

Es decir

$$V=0$$

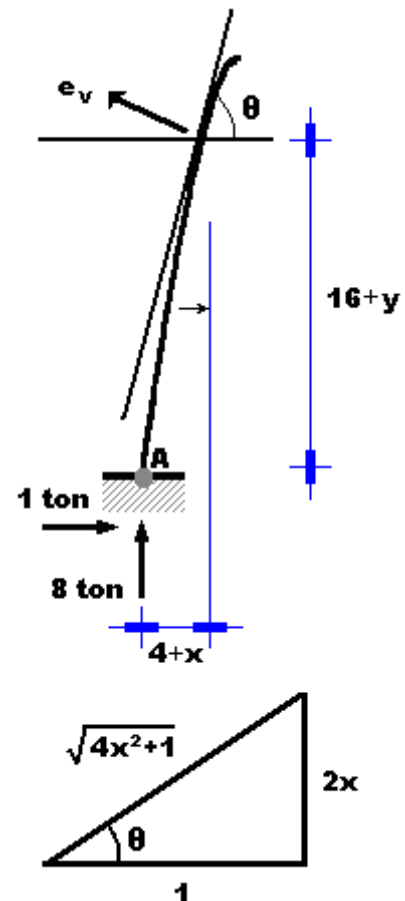


Figura 5.3.5

La fuerza cortante también es nula en cualquier sección. Sólo nos falta calcular la fuerza normal

$$N = \bar{e}_N \cdot \bar{R}$$

Como:

$$\bar{e}_N = [-\cos\theta, -\text{sen}\theta]$$

$$\bar{e}_N = \left[-\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} + \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}} \right]$$

Entonces:

$$N = -\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} + \frac{2x[8-2(4+x)]}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$N = \frac{-1+2x(-2x)}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$N = \frac{-4x^2-1}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$N = -\sqrt{4x^2+1}$$

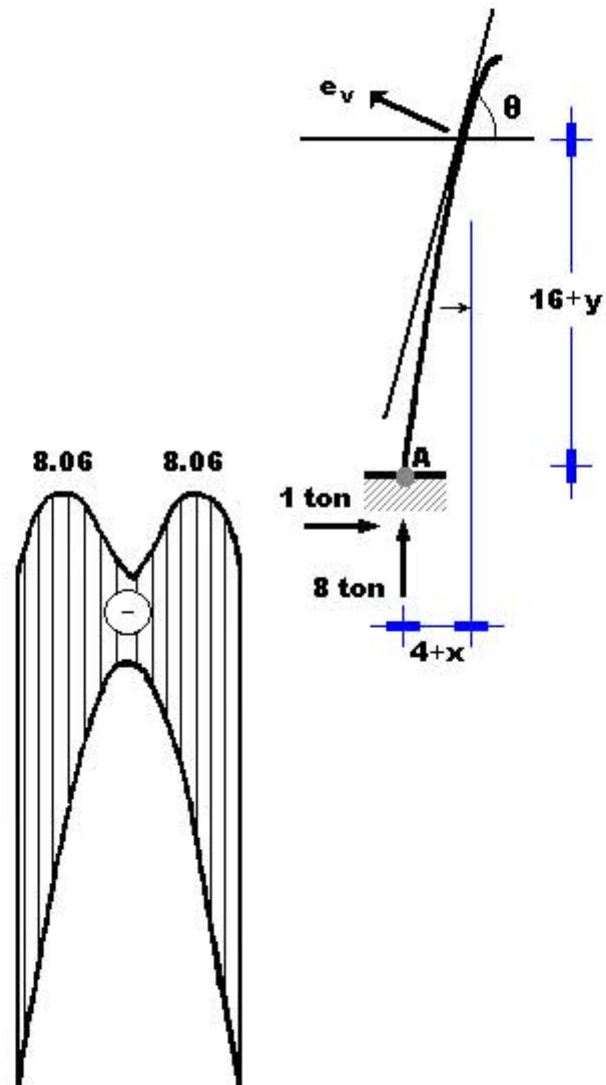


Figura 5.3.6

El análisis anterior nos hace ver que el arco parabólico sólo trabaja a fuerza normal de compresión (negativa) en todas sus secciones.

Tabulando para distintos valores de la variable x tenemos.

x	-4	-3	-1	0	1	2	3	4
N	-8.06	-6.08	-4.12	-1	-2.24	-4.12	-6.08	-8.06

Los diagramas de elementos mecánicos se reducen a solo el de fuerza normal.

Consideremos ahora un arco parabólico simple con cargas repartidas horizontal y verticalmente, y hagamos los cálculos necesarios hasta encontrar los diagramas de elementos mecánicos.

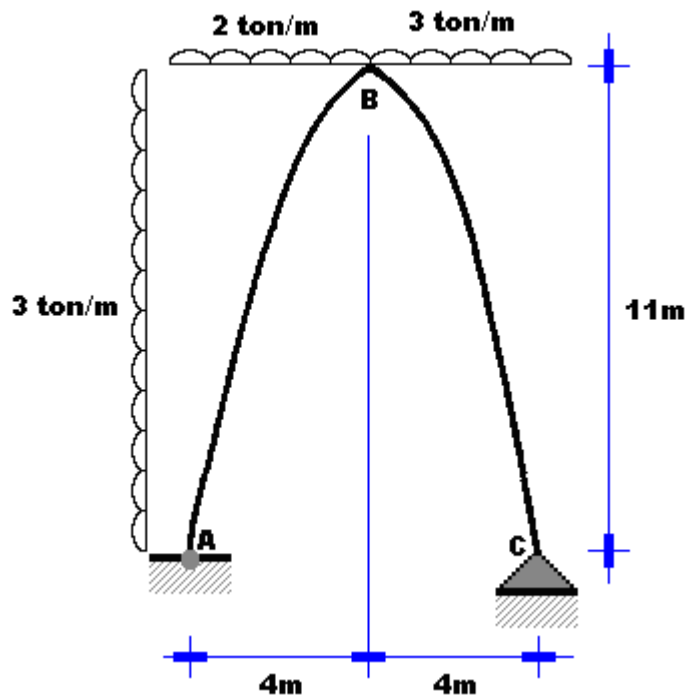


Figura 5.3.7

Cálculos de las reacciones.

Por $\sum M_A = 0$

$$33(5.5) + 8(2) + 12(6) = 8R_{cv}$$

$$R_{cv} = 33.69 \text{ ton}$$

Por $\sum F_Y = 0$

$$8 + 12 - 33.69 = R_{AV}$$

$$R_{AV} = -13.69 \text{ ton}$$

Por $\sum F_X = 0$

$$R_{AH} = 33 \text{ ton}$$

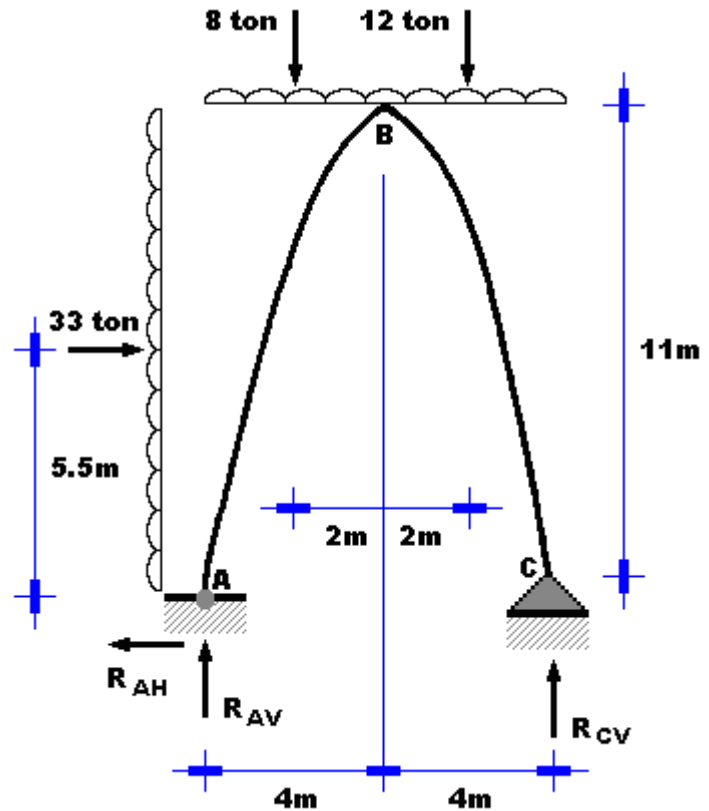


Figura 5.3.8

Colocamos el origen de los ejes cartesianos en el vértice de la parábola.
Conocemos la ecuación de la parábola:

$$x^2 = \frac{b^2}{4h} y$$

Que para nuestro caso

$$x^2 = \frac{8^2}{4(11)} y$$

$$x^2 = -1.455 y$$

$$y = -0.6875 x^2$$

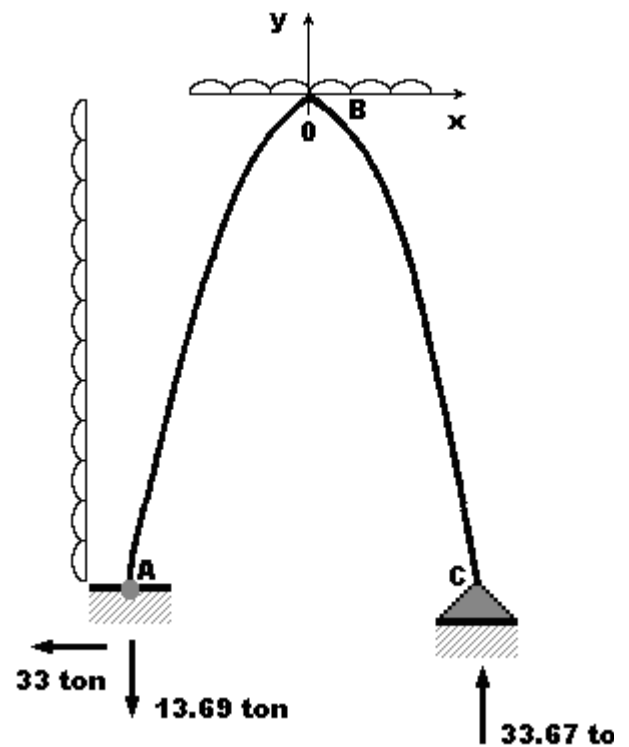


Figura 5.3.9

Para el cálculo de los elementos mecánicos definimos los intervalos en los que no existe cambio de carga:

$$-4 \leq x \leq 0$$

$$-11 \leq y \leq 0$$

$$BC \quad 0 \leq x \leq 4$$

$$0 \geq y \geq -11$$

Para el primer intervalo

$$AB \quad -4 \leq x \leq 0$$

$$-11 \leq y \leq 0$$

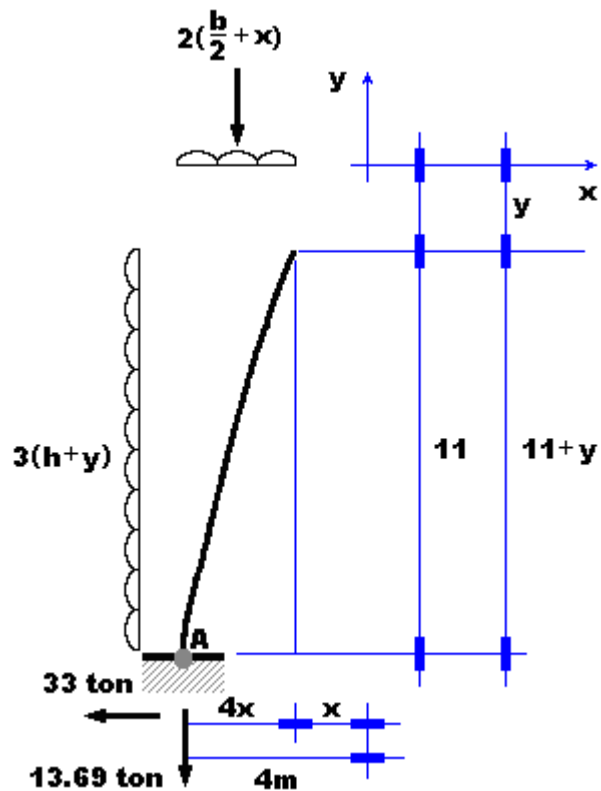


Figura 5.3.10

El momento flexionante será:

$$M = -13.69 \left(\frac{b}{2} + x \right) + 33(h+y) - 3(h+y) \left(\frac{h+y}{2} \right) - 2 \left(\frac{b}{2} + x \right) \left(\frac{\frac{b}{2} + x}{2} \right)$$

$$M = -13.69(4+x) + 33(11+y) - \frac{3}{2}(11+y)^2 - (4+x)^2$$

$$M = -54.76 - 13.69x + 363 + 33y - 1.5(121 + 22y + y^2) - (16 + 8x + x^2)$$

$$M = 308.24 - 13.69x + 33(-0.687x^2) - 181.5 - 33(-0.6875x^2) - 1.5(-0.6875x^2)^2$$

$$M = 110.74 - 21.69x - x^2 - 0.709x^4$$

$$M = (-4) = 0$$

$$M = (0) = 110.74 \text{ ton/m}$$

Para calcular el valor máximo del momento flexionante:

$$\frac{dy}{dx} = -21.69 - 2x - 2.836x^3 = 0$$

$$x = -1.851$$

$$M(-1.851) = 139.139 \text{ ton/m}$$

Para las ecuaciones de fuerza cortante y fuerza normal obtenemos los vectores unitarios correspondientes.

$$\bar{e}_v = [-s \operatorname{sen} \theta, \cos \theta]$$

$$\bar{e}_N = [-\cos \theta, -s \operatorname{sen} \theta]$$

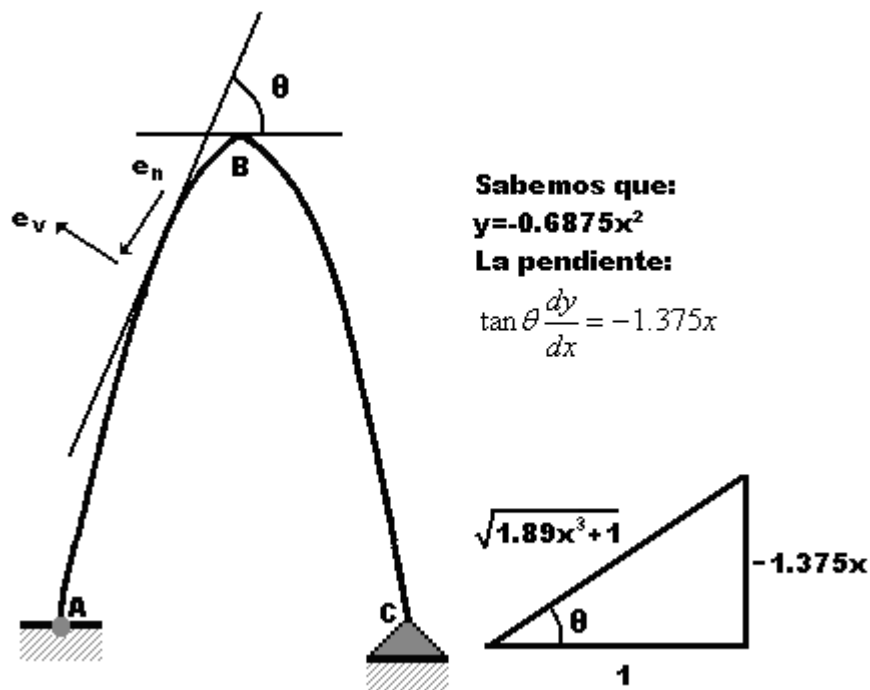


Figura 5.3.11

Conocemos:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1.891x^2 + 1}}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1.375x}{\sqrt{1.891x^2 + 1}}$$

$$\bar{e}_v = \left[\frac{1.375x}{\sqrt{1.891x^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{1.891x^2 + 1}} \right]$$

$$\bar{e}_N = \left[\frac{1}{\sqrt{1.891x^2 + 1}}, \frac{1.375x}{\sqrt{1.891x^2 + 1}} \right]$$

$$\bar{R} = \left[-33 + 3(h+y), -13.69 - 2\left(\frac{b}{2} + x\right) \right]$$

$$\bar{R} = \left[-33 + 3(-0.6875x^2), -13.69 - 2(4+x) \right]$$

$$\bar{R} = \left[-2.063x^2, -21.69 - 2x \right]$$

$$V = \bar{R} \cdot \bar{e}_v = -\frac{2.837x^3}{\sqrt{1.891x^2 + 1}} - \frac{21.69}{\sqrt{1.891x^2 + 1}} - \frac{2x}{\sqrt{1.891x^2 + 1}}$$

$$N = \bar{R} \cdot \bar{e}_N = -\frac{2.063x^2}{\sqrt{1.891x^2 + 1}} - \frac{29.824x^2}{\sqrt{1.891x^2 + 1}} - \frac{2.75x^2}{\sqrt{1.891x^2 + 1}}$$

$$N = \frac{0.687x^2}{\sqrt{1.891x^2 + 1}} - \frac{29.824x}{\sqrt{1.891x^2 + 1}}$$

Para el segundo intervalo

$$0 \leq x \leq 4$$

$$0 \geq y \geq -11$$

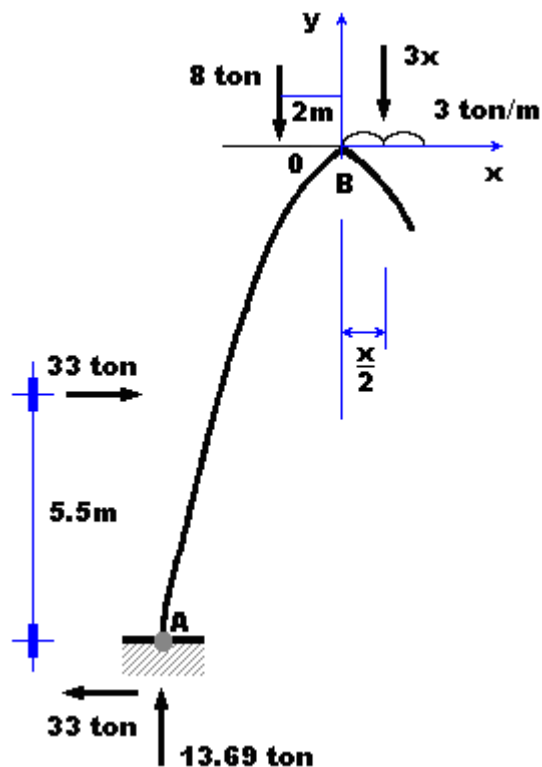


Figura 5.3.12

El momento flexionante resulta:

$$M = -13.69(4+x) + 33(11+y) - 33(11+y-5.5) - 8(x+2) - \frac{3x^2}{2}$$

$$M = -13.69(4+x) + 33(11-0.6875x^2) - 33(5.5-0.6875x^2) - 8(4+2) - \frac{3x^2}{2}$$

$$M = -54.76 - 13.69x + 363 - 22.688x^2 - 181.5 + 22.688x^2 - 8(x+2) - \frac{3x^2}{2}$$

$$M = 110.74 - 21.69x - 1.5x^2$$

Analicemos cual es el máximo valor del momento:

$$\frac{dM}{dx} = -21.69 - 3x = 0$$

$x = -7.23$ No existe máximo por estar fuera del intervalo

Para el cálculo de fuerzas cortante y normal

$$\bar{e}_v = \left[\frac{1.375x}{\sqrt{1.891x^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{1.891x^2 + 1}} \right]$$

$$\bar{e}_N = \left[\frac{1}{\sqrt{1.891x^2 + 1}}, \frac{1.375x}{\sqrt{1.891x^2 + 1}} \right]$$

La resultante de las fuerzas a la izquierda de la sección es:

$$\bar{R} = [-33 + 33, -13.69 - 8 - 3x]$$

$$\bar{R} = [0, -21.69 - 3x]$$

$$V = -\frac{21.69}{\sqrt{1.891x^2 + 1}} - \frac{3x}{\sqrt{1.891x^2 + 1}}$$

$$N = -\frac{29.82x^2}{\sqrt{1.891x^2 + 1}} - \frac{2.75x^2}{\sqrt{1.891x^2 + 1}}$$

Tabulando los valores como en los ejemplos anteriores es posible tener los valores mostrados en la tabla siguiente.

x	M	v	N
-4.0	0.000	30.028	19.372
-3.5	68.011	21.756	19.523
-3.0	109.381	14.349	19.621
-2.5	131.020	7.719	19.626
-2.0	128.776	1.711	19.443
-1.5	137.436	-3.976	18.841
-1.0	130.721	-9.912	17.136
-0.5	121.291	-16.757	12.146
0.0	110.740	-21.690	0.000
0.5	99.520	-19.109	-13.137
1.0	87.550	-14.521	-19.967
1.5	74.830	-11.425	-23.564
2.0	61.360	-9.462	-26.021
2.5	47.140	-8.153	-28.026
3.0	32.170	-7.230	-29.823
3.5	16.450	-6.548	-31.514
4.0	0.000	-6.026	-33.144

Dibujando los diagramas de los elementos mecánicos obtenemos.

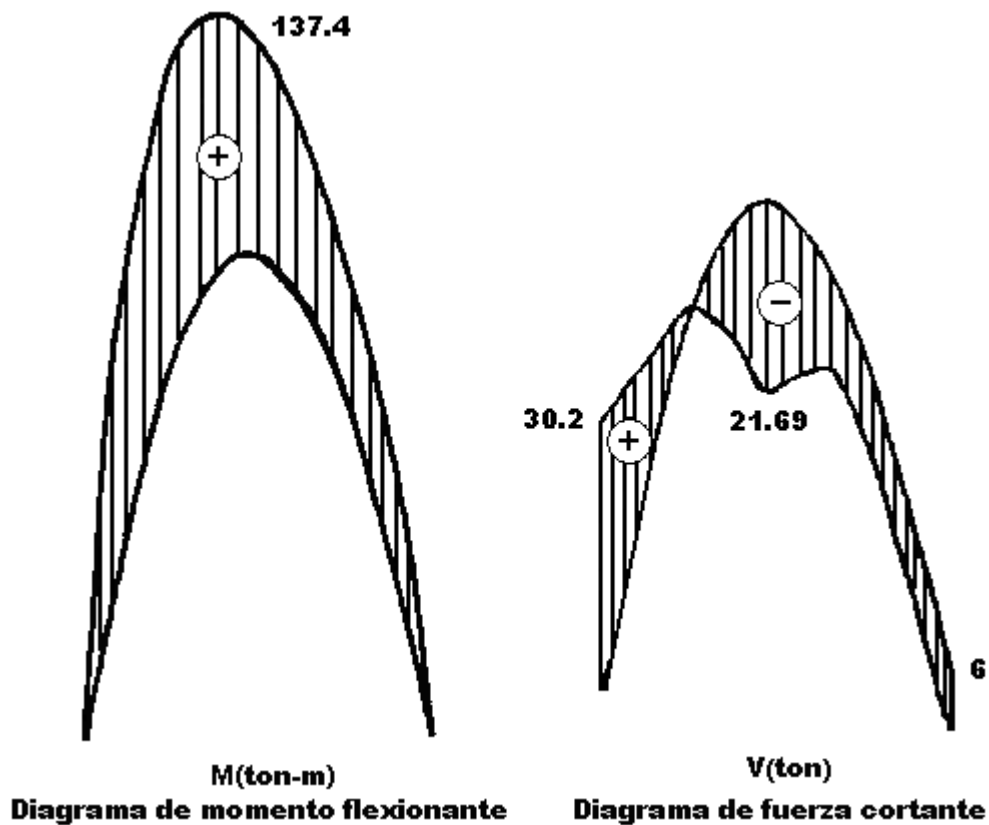


Figura 5.3.13

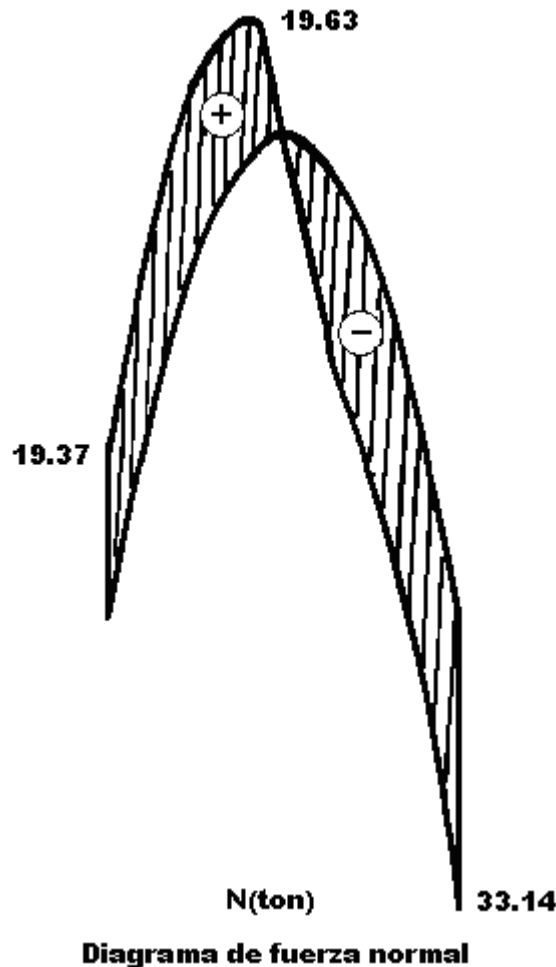


Figura 5.3.14

Resumen:

La secuencia de cálculo para arcos parabólicos es similar a la seguida en arcos circulares, teniendo en cuenta que la ubicación de los ejes coordenados debe hacerse colocando el origen en el vértice de la parábola y un eje coincidente con el de la parábola. Ello nos hace trabajar con coordenadas cartesianas teniendo como variable la x . Además el ángulo θ es una función de x , así:

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx}$$

Y finalmente los diagramas de elementos mecánicos los dibujamos con rayado vertical por considerar como variable a x .

5.4 Arcos Elípticos

Seguramente, durante el desarrollo de esta unidad, nos hemos dado cuenta que un arco triarticulado al momento de sustentar cargas verticales no sólo presenta reacciones verticales, sino también reacciones horizontales. Estas reacciones evitan el fenómeno del "coceo", es decir, la tendencia que un arco presenta de abrirse hacia los lados. Para evitar el "coceo" en un arco, muchas veces se recurre a colocar un tensor en sus apoyos que impide que el arco se "abra".

En el caso de un arco parabólico, las reacciones horizontales llegan a ser relativamente pequeñas, pero en los arcos elípticos pueden ser más importantes. De ello nos daremos cuenta en el ejemplo de esta secuencia.



Figura 5.4.1

Consideraremos a continuación un arco elíptico cuyo claro es mayor que el peralte, soportando una carga uniformemente repartida a lo largo de todo el claro con sus dos apoyos articulados, además de poseer articulación en la cumbre del arco donde soporta una carga concentrada.

Como siempre, nuestra meta será dibujar los diagramas de elementos mecánicos.

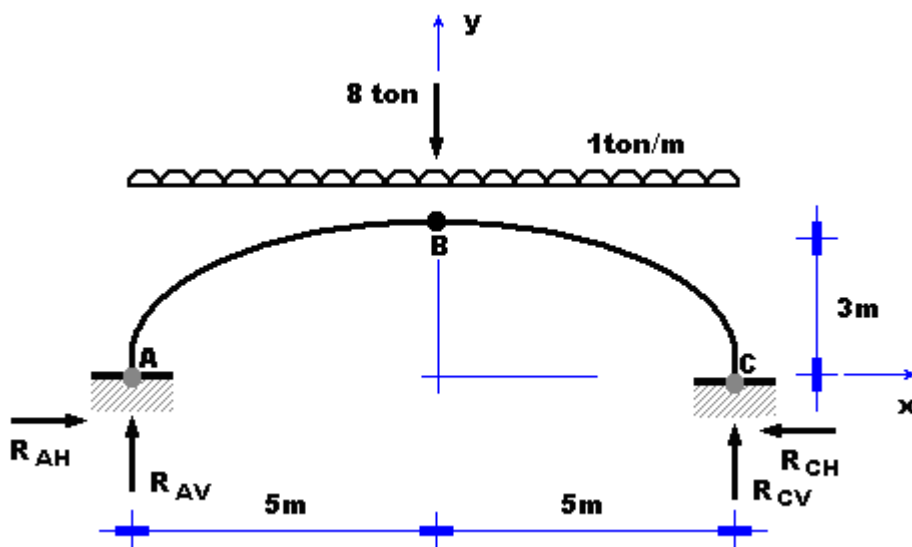


Figura 5.4.2

Calculo de las reacciones

Por $\sum M_A = 0$ De todo el arco

$$10R_{CV} = 8(5) + 1(10)(5)$$

$$R_{CV} = 9\text{ton}$$

Por $\sum M_B = 0$ Del tramo BC

$$9(5) = R_{CH}(3) + 1(5)(2.5)$$

$$R_{CH} = 10.83\text{ton}$$

Por $\sum F_Y = 0$

$$R_{AV} = 8 + 1(10) - 9$$

$$R_{AV} = 9\text{ton}$$

$\sum F_X = 0$

$$R_{AH} = 10.83\text{ton}$$

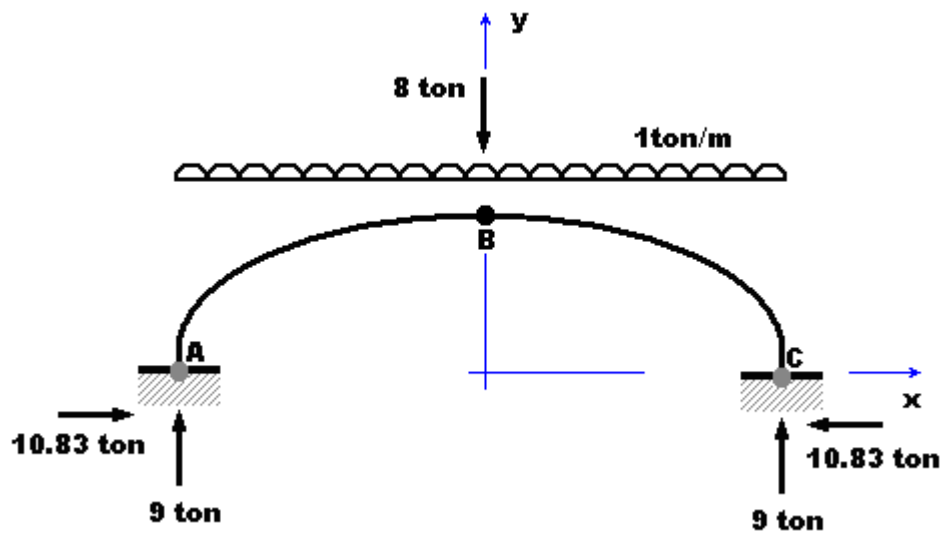


Figura 5.4.3

Para el cálculo de los elementos mecánicos definimos los intervalos:

$$180^\circ \geq \theta \geq 90^\circ \quad -5 \leq x \leq 0 \quad 0 \leq y \leq 3$$

$$90^\circ \geq \theta \geq 0^\circ \quad 0 \leq x \leq 5 \quad 3 \geq y \geq 0$$

Para el primer intervalo:

$$180^\circ \geq \theta \geq 90^\circ \quad -5 \leq x \leq 0 \quad 0 \leq y \leq 3$$

Sabemos que:

$$x = 5 \cos \theta$$

$$y = 3 \operatorname{sen} \theta$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

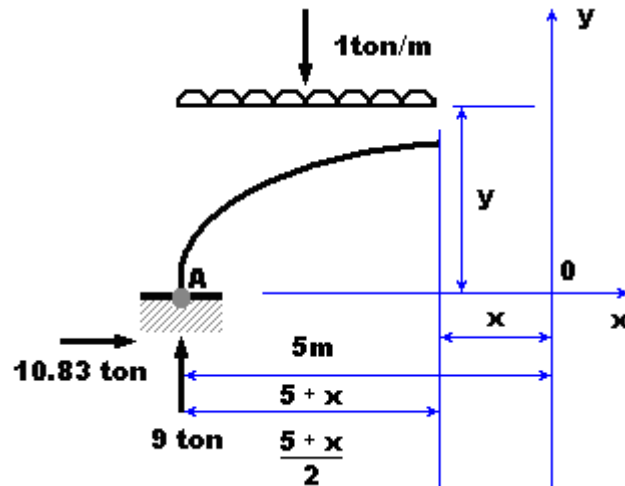


Figura 5.4.4

El momento flexionante valdrá:

$$M = 9(5+x) - 10.83y - \frac{1}{2}(5+x)^2$$

$$M = 9(5+5 \cos \theta) - 10.83(3 \operatorname{sen} \theta) - \frac{1}{2}(5+5 \cos \theta)^2$$

$$M = 32.5 + 45 \cos \theta - 32.5 \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2}(25 + 50 \cos \theta + 25 \cos^2 \theta)$$

$$M = 32.5 + 20 \cos \theta - 32.5 \operatorname{sen} \theta - 12.5 \cos^2 \theta$$

Para el cálculo de la fuerza de la parte a la izquierda de la sección considerada.

$$\bar{e}_v = [\cos \theta, \operatorname{sen} \theta]$$

$$\bar{e}_N = [-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta]$$

Y la resultante de todas las fuerzas de la parte a la izquierda de la sección considerada.

$$\bar{R} = [10.83, 9 - (5+x)]$$

$$\bar{R} = [10.83, 4 - 5 + \cos \theta]$$

Del producto puntual de los vectores obtenemos las ecuaciones:

$$V = \bar{R} \cdot \bar{e}_v = 10.83 \cos \theta + 4 \operatorname{sen} \theta - 5 \cos \theta \operatorname{sen} \theta$$

$$N = \bar{R} \cdot \bar{e}_N = -10.83 \operatorname{sen} \theta + 4 \cos \theta - 5 \cos^2 \theta$$

Para el segundo intervalo:

$$90^\circ \geq \theta \geq 0^\circ \quad 0 \leq x \leq 5 \quad 3 \geq y \geq 0$$

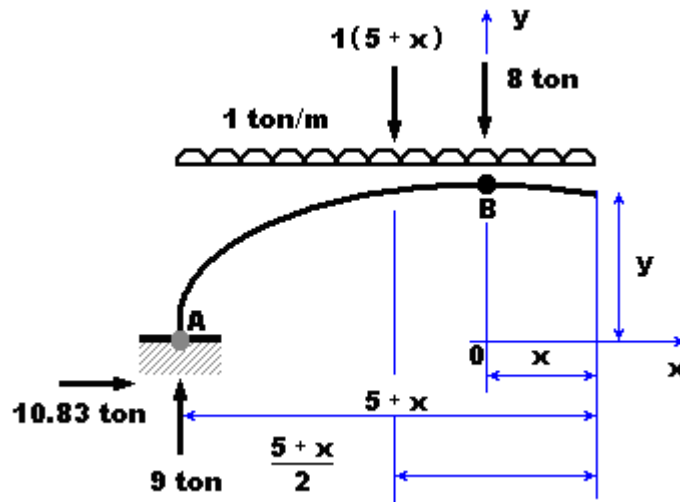


Figura 5.4.5

El momento flexionante es:

$$M = 9(5+x) - 10.83y - \frac{1}{2}(5+x)^2 - 8x$$

$$M = 32.5 + 20 \cos \theta - 32.5 \operatorname{sen} \theta - 12.5 \cos^2 \theta - 8(5 \cos \theta)$$

$$M = 32.5 - 20 \cos \theta - 32.5 \operatorname{sen} \theta - 12.5 \cos^2 \theta$$

Los vectores unitarios son:

$$\bar{e}_v = [\cos \theta, \operatorname{sen} \theta]$$

$$\bar{e}_N = [-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta]$$

La resultante a la izquierda de la sección vale:

$$\bar{R} = [10.83, 9 - (5+x) - 8]$$

$$\bar{R} = [10.83, -4 - 5 \cos \theta]$$

Y la fuerza cortante y normal es:

$$V = 10.83 \cos \theta - 4 \operatorname{sen} \theta - 5 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

$$N = -10.83 \operatorname{sen} \theta - 4 \cos \theta - 5 \cos^2 \theta$$

θ	$\cos \theta$	$\operatorname{sen} \theta$	$\cos^2 \theta$	$\frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$	M	V	N
180	-1.000	0.000	1.000	0.000	0.000	-10.833	-9.000
160	-0.940	0.342	0.883	-0.321	-8.447	-7.202	-11.878
140	-0.766	0.643	0.587	-0.492	-11.047	-3.263	-12.960
120	-0.500	0.866	0.250	-0.433	-8.771	0.214	-12.629
100	-0.174	0.985	0.030	-0.171	-3.356	2.914	-11.511
90	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	4.000 -4.000	-10.830 -10.830
80	0.174	0.985	0.030	0.171	-3.356	-2.914	-11.511
60	0.500	0.866	0.250	0.433	-8.771	-0.214	-12.629
40	0.766	0.643	0.587	0.492	-11.047	3.263	-12.960
20	0.940	0.342	0.883	0.321	-8.447	7.202	-11.878
0	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	10.833	-9.000

Los diagramas de los elementos mecánicos son, de acuerdo con la tabla anterior.

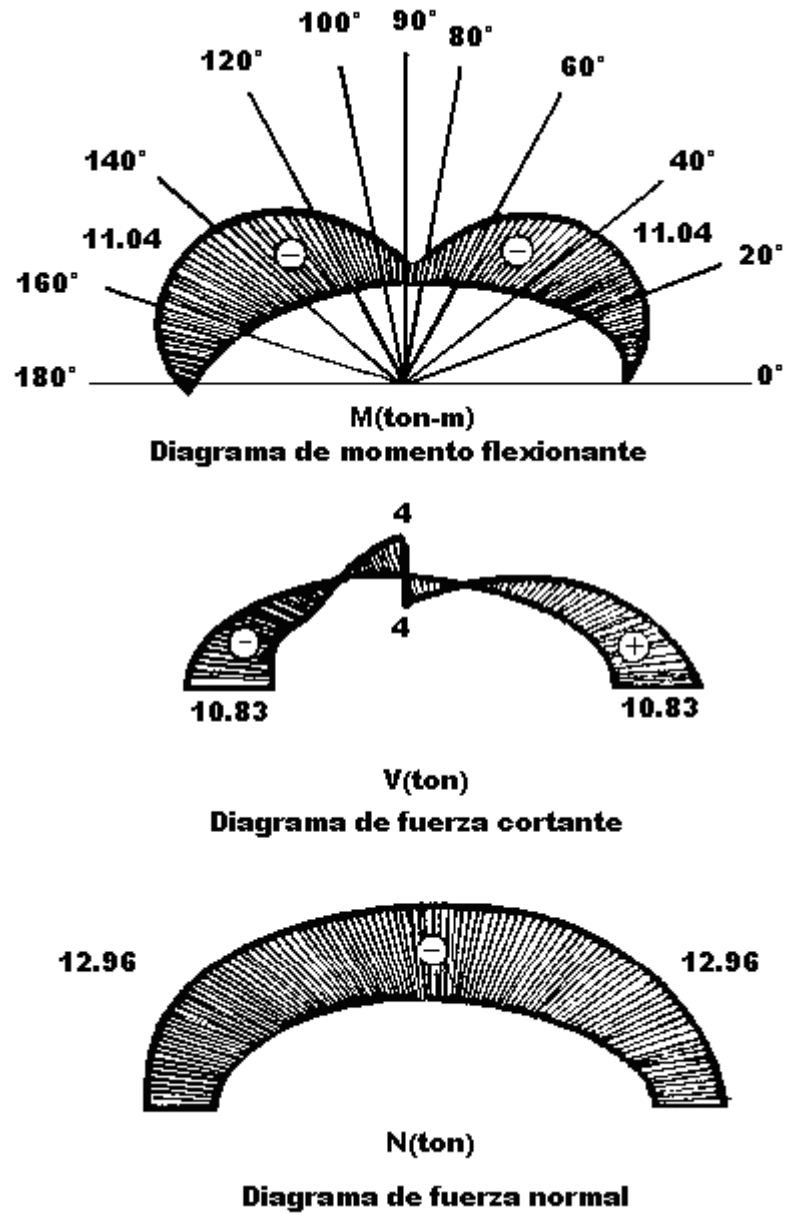


Figura 5.4.6

5.5 Cables

Para salvar un claro sobre un río se utilizan los puentes; existen diferentes alternativas para diseñarlos, pero una de ellas es proyectar un puente colgante. Para ello se requiere el conocimiento de los cables. Los cables se usan también para sostener techumbres o en la construcción de líneas de conducción eléctrica.

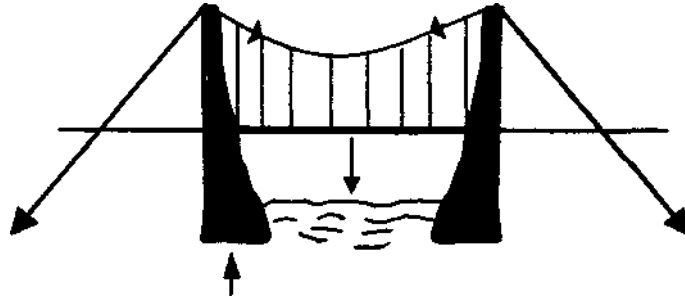


Figura 5.5.1

Los elementos tipo Cable, No poseen rigidez para soportar esfuerzos de flexión, compresión o cortantes. Al someter a cargas a un cable este cambia su geometría de tal manera que las cargas son soportadas por esfuerzos de tensión a lo largo del elemento. Siempre encontraremos que cuando aplicamos una fuerza el cable tendrá otra geometría.

Los cables se fabrican de varios materiales, pero los metálicos son los de mayor uso. Los cables se encuentran como elementos aislados o como parte de sistemas mecánicos o estructurales.

En nuestro caso, consideraremos cables flexibles, que no se alargan como son flexibles no resisten la flexión, y por ello el momento flexionante en cualquier sección transversal es nulo. Lo mismo sucede con la fuerza cortante, de tal manera que el único elemento mecánico que se presenta es la fuerza normal positiva, o sea una fuerza de tensión.

5.6 Clasificación de acuerdo con las solicitaciones que soportan

Cables de elementos rectilíneos: este tipo de cables mantiene cargas verticales concentradas en puntos llamados nodos, y por ello la conformación geométrica del mismo es de tipo recto o poligonal.

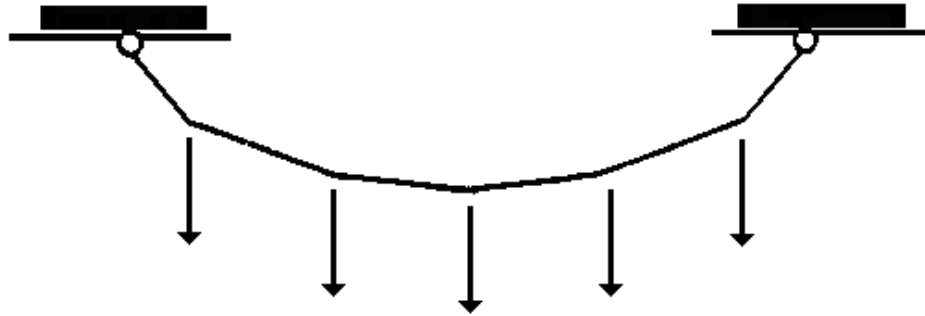


Figura 5.6.1

Cables parabólicos: en estas estructuras la carga se presenta repartida uniformemente según un eje horizontal y por ello la forma que adopta el cable es parabólica.

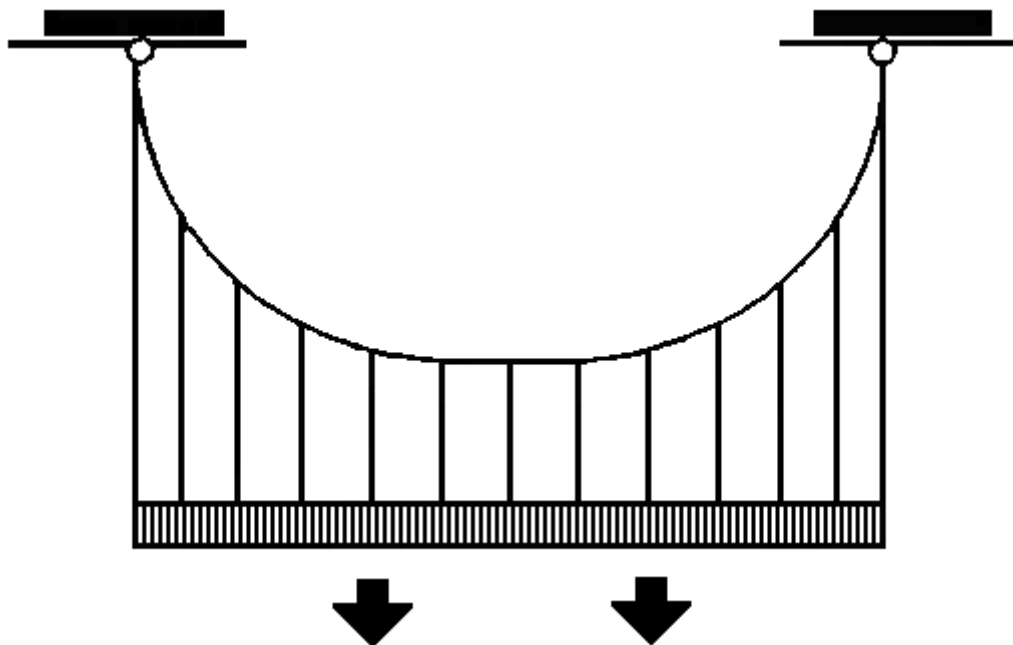


Figura 5.6.2

Cables catenarios: el cable que mantiene su propio peso de manera uniformemente distribuida según su eje va adquiriendo una forma tipo cadena, de donde toma su nombre



Figura 5.6.3

Cables elípticos: cuando un cable soporta cargas repartidas en forma uniformemente creciente hacia los extremos, alcanza una conformación elíptica estos cables son poco usuales.

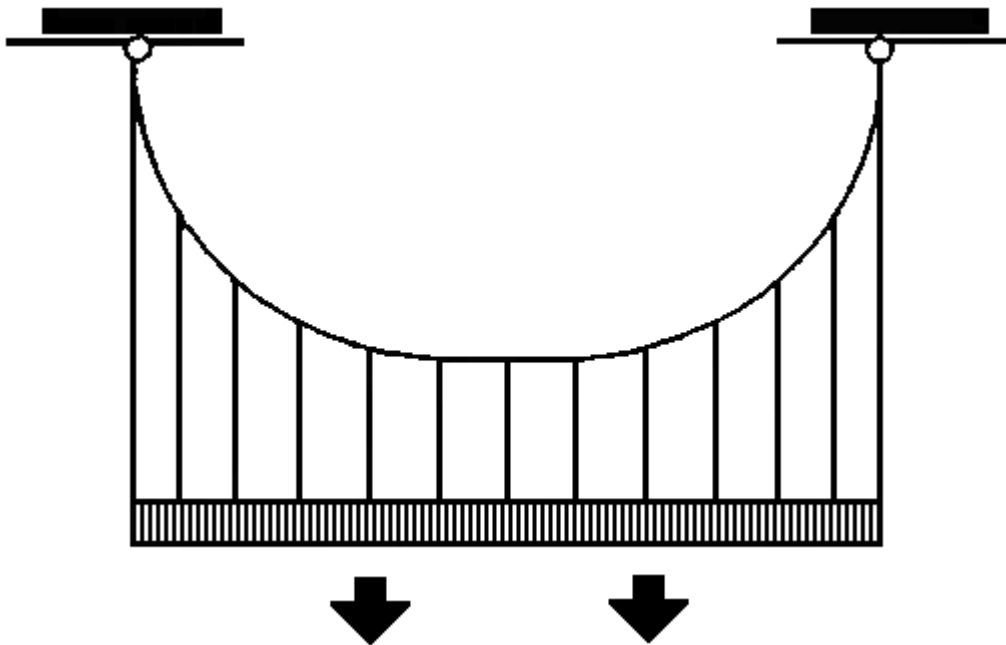


Figura 5.6.4

Hagamos el análisis de un cable sujeto a cualquier tipo de carga. Para ello, consideremos los soportes A y B sobre los cuales está suspendido el cable que tiene una distribución de carga $Q(x)$ y que actúa verticalmente sobre el mismo plano del cable.

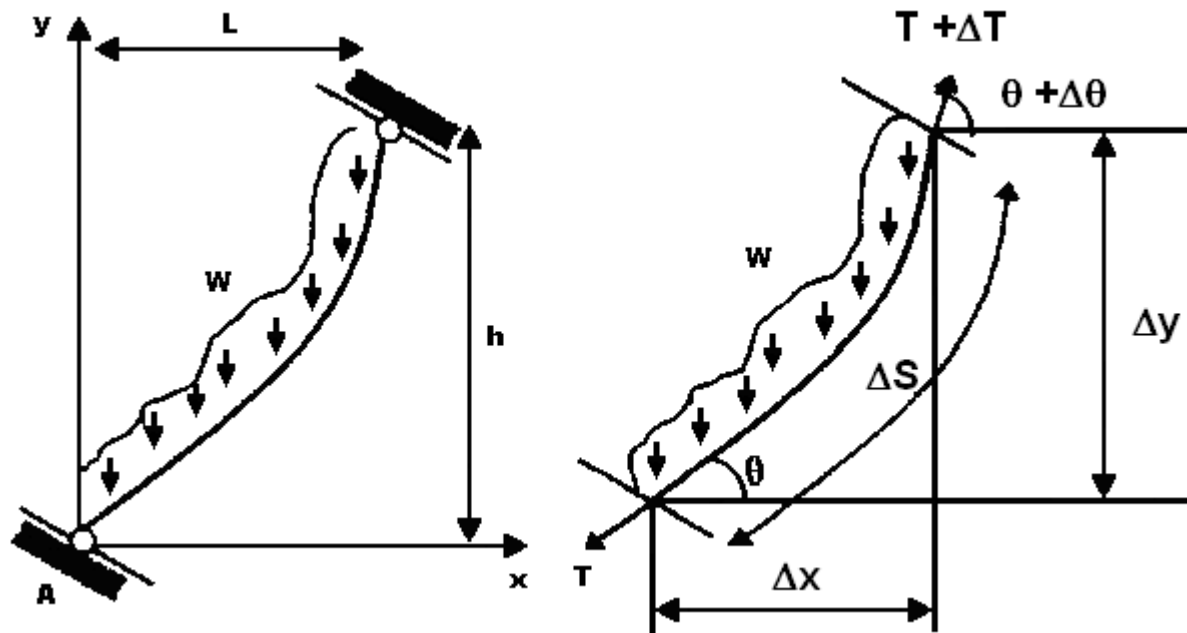


Figura 5.6.5

Tomemos como diagrama de cuerpo libre un elemento de longitud ΔS . las fuerzas T y $T + \Delta T$ tienen componentes horizontales y verticales. Formulando las ecuaciones de equilibrio tenemos:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ -T \cos \theta + (T + \Delta T) \cos(\theta + \Delta \theta) &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ -T \operatorname{sen} \theta + (T + \Delta T) \operatorname{sen}(\theta + \Delta \theta) - Q \Delta x &= 0 \end{aligned}$$

Dividamos las dos expresiones por Δx y tomemos el límite cuando Δx tiende a cero:

$$\begin{aligned} \frac{d(T \cos \theta)}{dx} &= 0 \dots \dots \dots A^\circ \\ \frac{d(T \operatorname{sen} \theta)}{dx} &= Q(x) \dots \dots \dots B^\circ \end{aligned}$$

Para que la ecuación (A°) se cumpla, es necesario que:

$$T \cos \theta = \text{constante} = H$$

donde H representa la componente horizontal a lo largo del cable. Esto es indicativo de que, en cualquier punto del cable, la componente horizontal de la tensión tendrá el mismo valor.

Integramos la ecuación (B°)

$$T \operatorname{sen} \theta = Q(x) dx + C_1$$

La ecuación $(C)T = H/\cos\theta$, al sustituirla en la ecuación anterior, permite un mejor desarrollo:

$$\frac{H}{\cos\theta} \operatorname{sen}\theta = \int Q(x) dx + C_1$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{H} \int Q(x) dx + C_1$$

$$\text{Pero } \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

$$\text{sustituyendo } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} \int Q(x) dx + C_1$$

Integramos nuevamente:

$$Y = \int \left[\frac{1}{H} \int Q(x) dx + C_1 \right] dx + C_2$$

$$Y = \frac{1}{H} \int [Q(x) dx] dx + C_1 x + C_2$$

La expresión anterior es la ecuación general de la curva de deflexión de un cable con sistema de carga $Q(x)$, donde las constantes C_1 y C_2 se determinan en cada caso de acuerdo a las condiciones de los soportes A y B.

Para calcular la longitud del cable tenemos:

$$L = \int_0^L ds \quad \text{siendo} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Despejando y sustituyendo:

$$ds = \sqrt{\frac{(dx^2 + dy^2) dx^2}{dx^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$L = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

La igualdad anterior nos permite calcular la longitud de un cable desde el punto mas bajo del mismo, hasta uno de sus apoyos.

Si ahora consideramos una porción del cable procurando que un extremo coincida con la parte mas baja del mismo y tomamos en cuenta la expresión, llegamos a las siguientes proposiciones, de acuerdo con la figura donde Q representa la carga total del cable en el tramo considerado.

Las igualdades anteriores sirven para calcular la tensión en un punto dado del cable y la relación de la carga total, respecto a la carga horizontal que ejerce el cable en su punto mas bajo.

Resumen

Un cable es una estructura flexible que solo soporta fuerzas de tensión. De acuerdo con su carga se clasifican así:

- Rectilíneos (cargas concentradas).
- Parabólicos (Carga uniforme horizontal).
- Catenarios (Carga uniforme según el cable).
- Elípticos (Carga creciente hacia los extremos).

La componente horizontal de la tensión en cualquier punto del cable siempre se mantiene constante

La ecuación del lugar geométrico de los puntos que pertenecen al cable es:

$$L = \frac{1}{H} \int \left[\int Q(x) dx \right] dx + C_1 + C_2$$

La longitud del cable se calcula con la expresión:

$$L = \frac{1}{H} \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

En un cable, la tensión que soporta en un punto dado se calcula de acuerdo con la carga total que actúa desde este punto hasta la parte mas baja del cable, con las siguientes igualdades:

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H} \quad T = \sqrt{H^2 + Q^2}$$

Resolvamos ahora el siguiente problema: el cable de un puente colgante está apoyado en dos pilares separados entre sí una distancia de 250 m. la carga que soporta esta repartida uniformemente en forma horizontal a razón de 4 Ton/m. calcular las reacciones en los apoyos, la longitud del cable y su ecuación de deflexión.

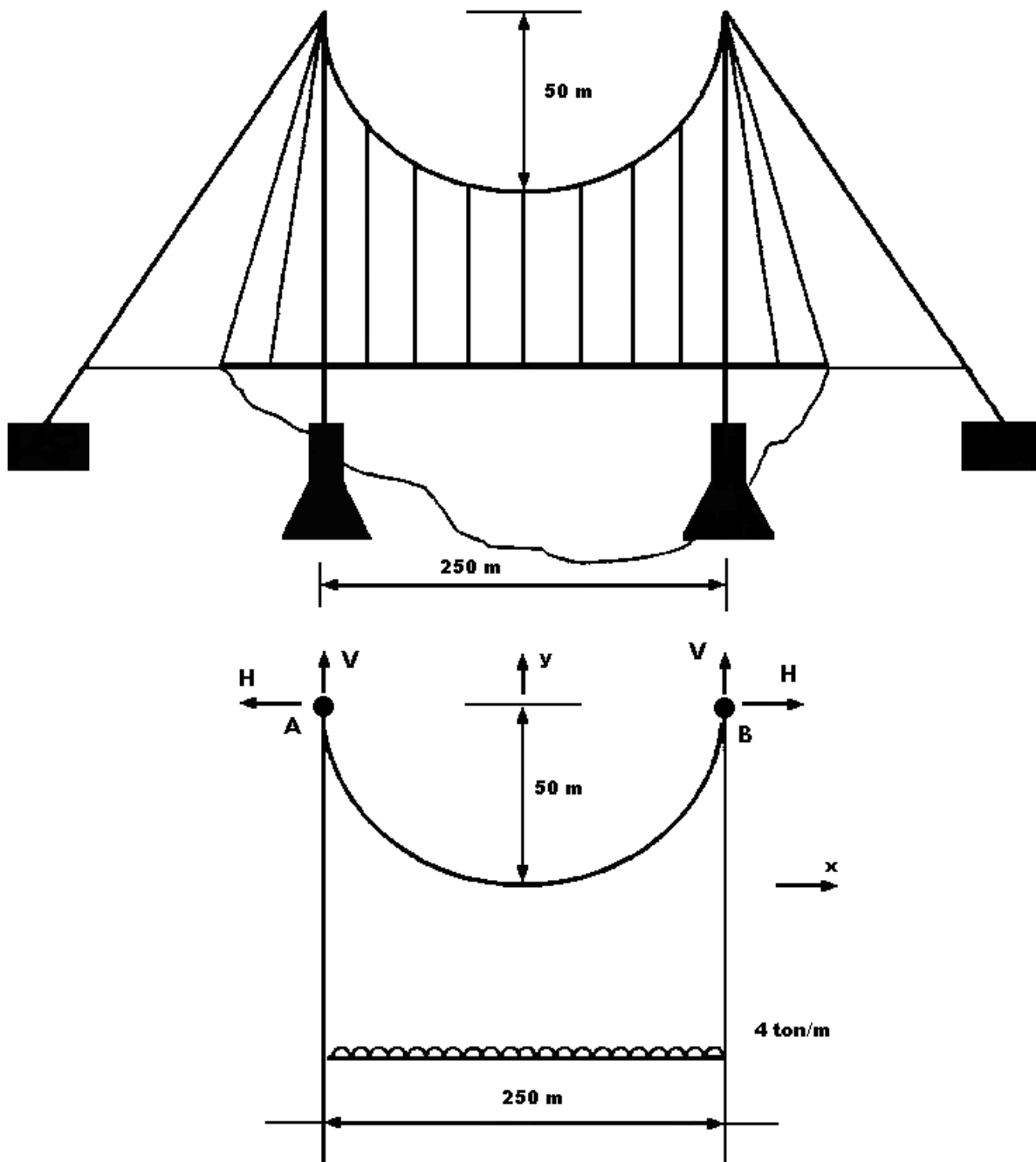


Figura 5.6.6

En primer lugar calculemos sus reacciones, considerando que la estructura es simétrica:

$$\sum M_A = 0 \quad ; \quad V(250) = 4(250)(125) \quad ; \quad V = 500 \text{ ton}$$

$$\sum M_C = 0 \quad ; \quad H(50) + 4(125)(62.5) = V(125) \quad ; \quad H = 625 \text{ ton}$$

La ecuación de deflexión es la siguiente:

$$Y = \frac{1}{625} \int \left[\int 4dx \right] dx + C_1x + C_2$$

$$Y = \frac{1}{625} \int 4x dx + C_1x + C_2$$

$$Y = \frac{1}{625} \cdot \frac{4x^2}{2} + C_1x + C_2$$

$$Y = \frac{2x^2}{625} C_1x + C_2$$

En la ecuación anterior se cumple que:

$$\text{Si } x = y = 0 \text{ entonces } C_2 = 0$$

$$\text{Si } x = 125 \text{ } y = 50 \text{ entonces } C_1 = 0$$

De esta manera la ecuación de deflexión es:

$$Y = \frac{2x^2}{625}$$

La longitud del cable la evaluamos con la expresión:

$$L = 2 \int_0^{125} \sqrt{1 + \left(\frac{4x}{625} \right)^2} dx$$

La solución de esta integral es de tipo logarítmico de difícil aplicación práctica, pero desarrollándola como una serie infinita resulta.

$$L = 250 \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{50}{625} \right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{50}{625} \right)^4 + \dots \right]$$

Tomando solo los tres primeros términos obtenemos:

$$L = 274.11m$$

La expresión que se aplica para calcular la longitud, en función del claro a y de la flecha f , es

$$L = a \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f}{a} \right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{f}{a} \right)^4 + \dots \right]$$

Si deseáramos calcular la longitud del cable en función de las coordenadas de uno de sus apoyos $A(x, y)$ utilizaríamos la forma:

$$L = x \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y}{x} \right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{y}{x} \right)^4 + \dots \right]$$

5.7 Cables de elementos rectilíneos

Es común que cuando se desea colocar una techumbre que abarque un claro más o menos grande sin tener columnas intermedias, se recurra a cables sustentadores de tal forma que soporten cargas concentradas como se aprecia en la ilustración. Esta condición de cargas hace posible que el lugar geométrico del cable sea una poligonal, es decir, que existan elementos rectilíneos entre carga y carga.

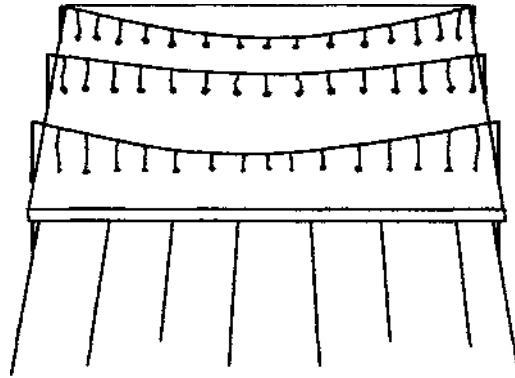


Figura 5.7.1

Cuando el peso del cable es despreciable en comparación a las cargas concentradas que soporta, estamos en presencia de un cable de elementos rectilíneos o de cargas concentradas. Para resolver este tipo de cables basta calcular las reacciones en los apoyos y posteriormente conformar sistemas de fuerzas concurrentes en cada nodo o punto de acción de las cargas.

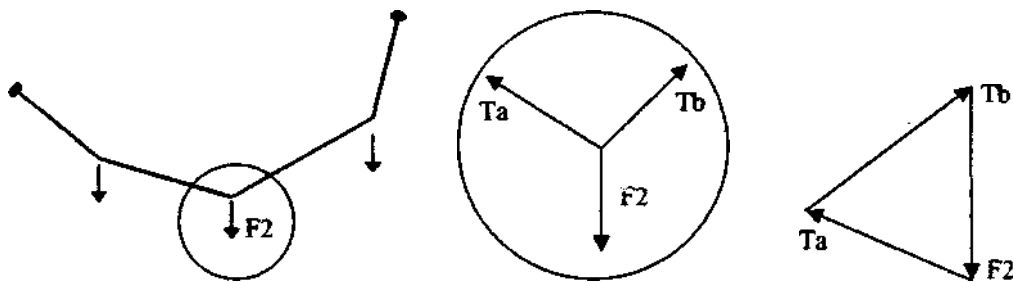


Figura 5.7.2

Los nodos o puntos de concurrencia deben tener definida alguna de sus coordenadas (generalmente la horizontal) para que el problema sea determinado, y uno de ellos debe quedar definido en ambas coordenadas.

Cables de elementos rectilíneos: Es un cable que soporta cargas concentradas en puntos llamados nodos, por lo cual su geometría es una poligonal. Para su solución se requiere conocer la posición de tres de los nodos y al menos una coordenada de todos los demás.

Para hacer mas claros los conceptos y el procedimiento de calculo, resolvamos el siguiente problema: el cable A, B, C, D, E. sostiene tres cargas concentradas en los nodos B, C y D, de 3,6 y 2 toneladas respectivamente, teniendo sus apoyos desnivelados 4 metros como se observa en el diagrama de la figura.

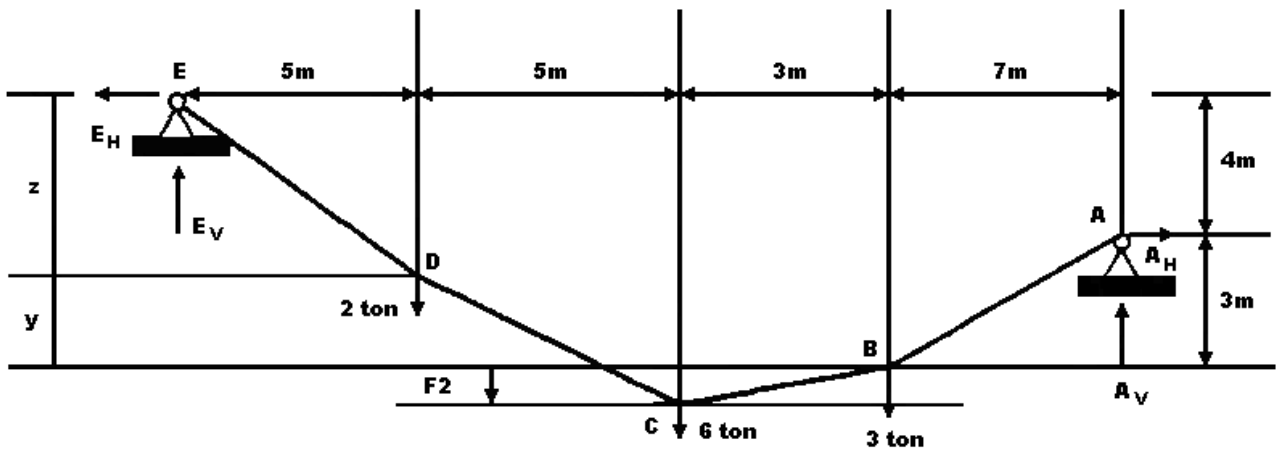


Figura 5.7.3

Primero calculamos las reacciones:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 & ; E_V(20) = E_H(4) + 2(15) + 6(10) + 3(7) \\ \sum M_B = 0 (\text{tramo EB}) & E_V(13) = E_H(7) + 2(8) + 6(3) \\ \sum F_y = 0 & E_V + A_V = 2 + 6 + 3 \\ \sum F_x = 0 & E_H + A_H \end{aligned}$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (a) (b) obtenemos:

$$\begin{aligned} 20E_V &= 4E_H + 11 \\ 13E_V &= 7E_H + 34 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_V &= 7.28 \text{ ton} \\ E_H &= 8.67 \text{ ton} \end{aligned}$$

Llevando estos valores a las expresiones (c) y (d) concluimos:

$$\begin{aligned} A_V &= 3.72 \text{ ton} \\ A_H &= 8.67 \text{ ton} \end{aligned}$$

Una vez calculadas las reacciones, formamos un sistema de ecuaciones en cada nodo como se aprecia en los diagramas de cuerpo libre de la figura.

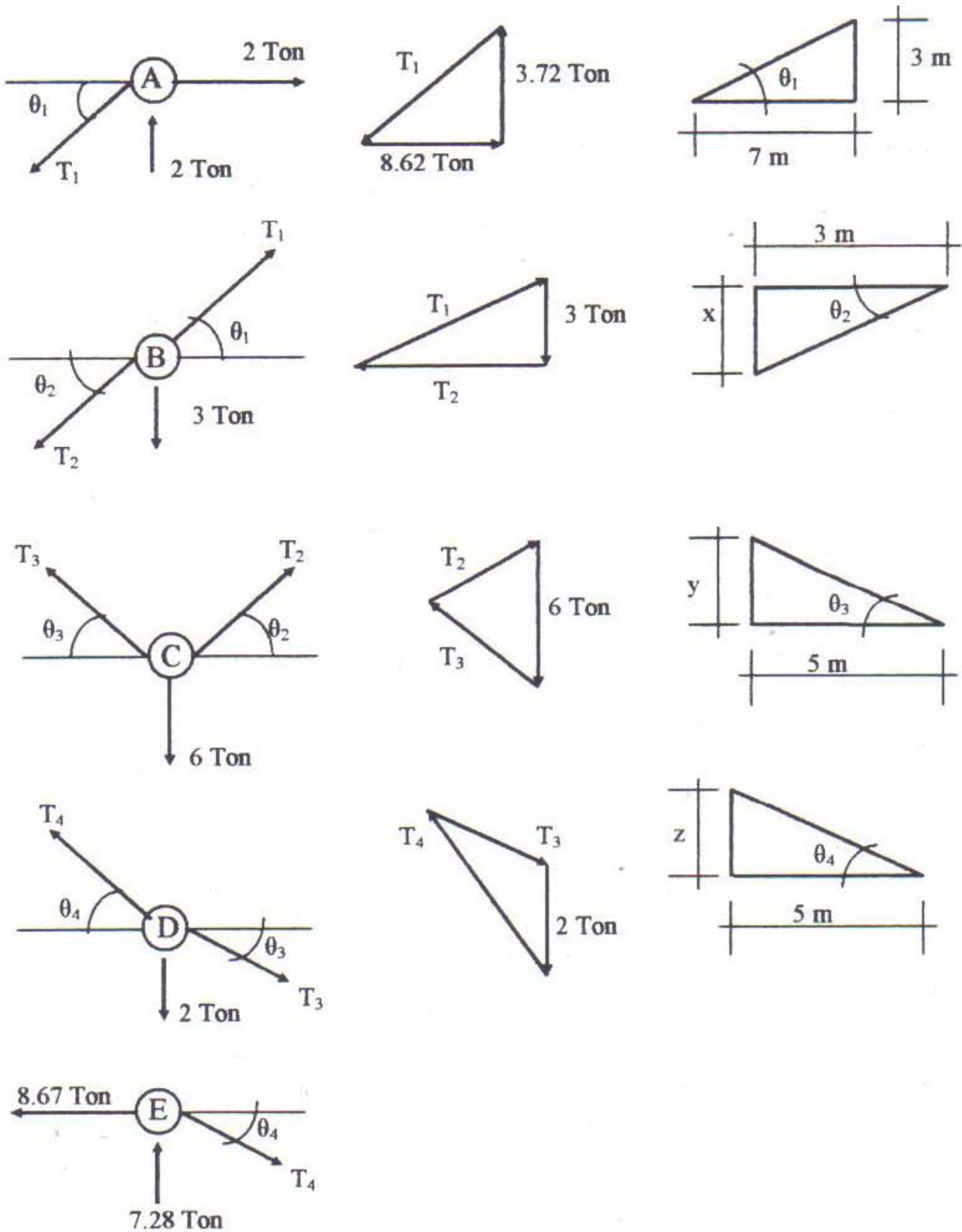


Figura 5.7.4

$$\begin{aligned}
 \text{Nodo A} \quad \sum F_x = 0 \quad & 8.67 = T_1 \cos \theta_1 \quad & T_1 = 9.43 \text{ton} \\
 \quad \quad \quad \sum F_y = 0 \quad & 3.72 = T_1 \sin \theta_1 \quad & \theta_1 = 23.22^\circ \\
 \text{Nodo B} \quad \sum F_x = 0 \quad & 9.43 \cos 23.22^\circ = T_2 \cos \theta_2 \quad & T_2 = 8.70 \text{ton} \\
 \quad \quad \quad \sum F_y = 0 \quad & 9.43 \sin 23.22^\circ = T_2 \sin \theta_2 + 3 \quad & \theta_2 = 4.74^\circ \\
 \text{Nodo C} \quad \sum F_x = 0 \quad & 8.70 \cos 4.74^\circ = T_3 \cos \theta_3 \quad & T_3 = 10.15 \text{ton} \\
 \quad \quad \quad \sum F_y = 0 \quad & 8.70 \sin 4.74^\circ = T_3 \sin \theta_3 = 6 \quad & \theta_3 = 31.34^\circ \\
 \text{Nodo D} \quad \sum F_x = 0 \quad & 10.15 \cos 31.34^\circ = T_4 \cos \theta_4 \quad & T_4 = 11.32 \text{ton} \\
 \quad \quad \quad \sum F_y = 0 \quad & 2 + 10.15 \sin 31.34^\circ = T_4 \sin \theta_4 \quad & \theta_4 = 40.02^\circ
 \end{aligned}$$

El nodo E sirve de verificación:

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 \quad & 8.67 = 11.32 \cos 40.02^\circ \\
 \sum F_y = 0 \quad & 7.28 = 11.32 \sin 40.02^\circ
 \end{aligned}$$

Los desniveles de los nodos son:

$$X = 3 \tan 4.74^\circ = 0.25 \text{m}$$

$$Y = 5 \tan 31.34^\circ = 3.04 \text{m}$$

$$Z = 5 \tan 40.02^\circ = 4.20 \text{m}$$

Queda al lector comprobar que todas las proyecciones horizontales de las fuerzas son iguales.

5.8 Cables Parabólicos

Cuando debe tenderse una tubería de uno a otro edificio de una industria, para soportarla se utiliza un cable. Este tipo de cable sostiene cada tramo de tubo a través de cables verticales que, al estar tan cerca uno del otro, se considera que la carga transmitida al cable curvo es una carga uniformemente distribuida. El cable tiene un peso despreciable en comparación a la tubería, y su configuración es parabólica tal como se observa en la figura.

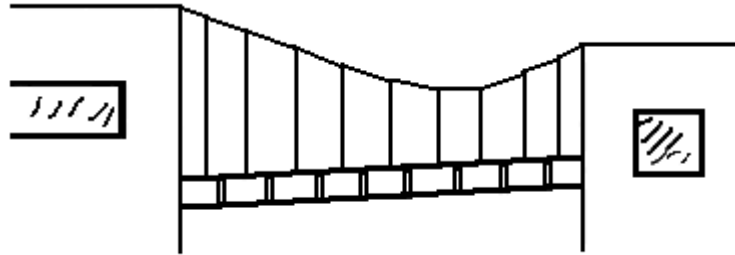


Figura 5.8.1

Si consideramos el cable parabólico, donde conocemos la carga uniformemente repartida W , el claro del mismo L y la ubicación de los apoyos, es posible calcular la ecuación del cable y la fuerza máxima que soporta.

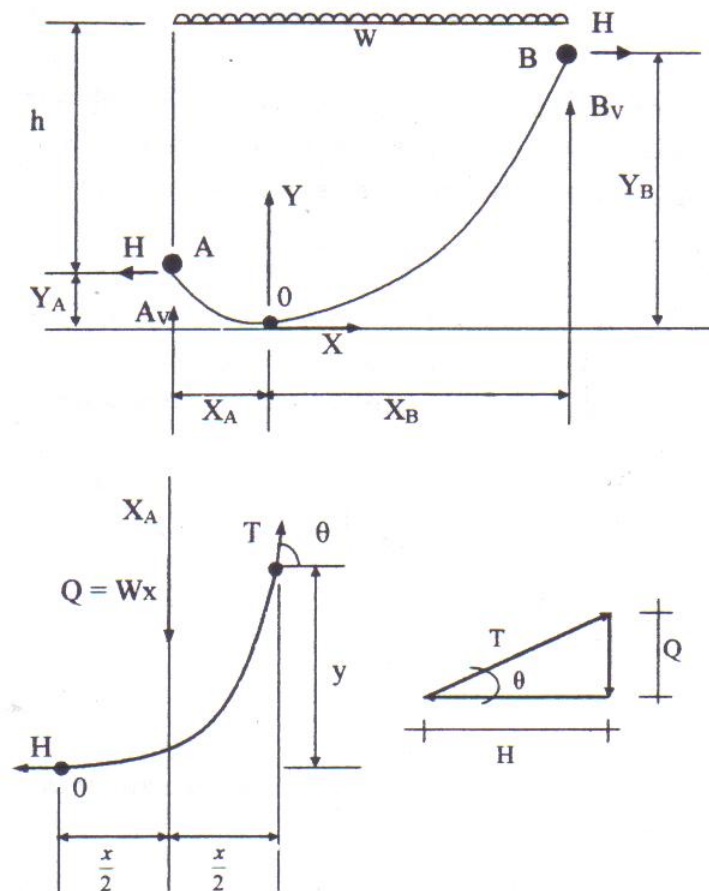


Figura 5.8.2

Ubicamos el sistema de referencia en el punto mas bajo del cable para facilitar su análisis. La carga que soporta Q y la tensión máxima T son:

$$Q = Wx$$

$$T = \sqrt{H^2 + Q^2} = \sqrt{H^2 + W^2 X^2}$$

$$\tan \theta = \frac{Q}{H} = \frac{WX}{H}$$

Haciendo una suma de momentos en el punto P tenemos:

$$\sum M_p = 0 \quad Wx \frac{x}{2} - Hy = 0$$

Despejando

$$Y = \frac{Wx^2}{2H}$$

Esta es la ecuación de una parábola con eje vertical y vértice en el origen.

Cable parabólico: Es un cable que soporta carga uniformemente distribuida en forma horizontal, por lo que su geometría es la de una parábola. Para resolver un cable de este tipo se necesita conocer una de las coordenadas de un punto y la posición de los apoyos.

Ejemplo: Se tiene un cable con apoyos desnivelados 1.5m librando un claro de 20m, como se aprecia en el diagrama. Calcular las reacciones en los apoyos, la ecuación del cable y el valor máximo de la tensión al soportar una carga horizontalmente uniforme de 2 Ton/m.

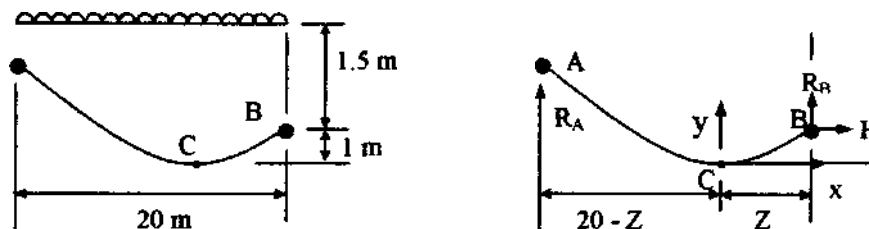


Figura 5.8.3

En primer término calculemos las reacciones:

$$\sum M_A = 0 \quad 20R_B + 1.5H = \frac{2(20)^2}{2}$$

$$20R_B + 1.5H = 400$$

$$\sum M_C = 0 \quad (\text{Tramo CB}) \quad ZR_B = H(1) + \frac{20Z^2}{2}$$

$$ZR_B - H = 10Z^2$$

$$\sum M_B = 0 \quad 20R_A = H(1.5) + \frac{2(20)^2}{2}$$

$$20R_A - 1.5H = 400$$

$$Y = \frac{Wx^2}{2H} \quad (\text{Punto B}) \quad 1 = \frac{2Z^2}{2H}$$

$$H = Z^2$$

Resolviendo las ecuaciones (a),(b),(c) y (d) obtenemos la solución:

$$R_A = 20.24\text{ton} \quad H = 3.20\text{ton}$$

$$R_B = 19.76\text{ton} \quad Z = 1.79\text{m}$$

La ecuación del cable es:

$$Y = \frac{20x^2}{2(3.2)} \quad ; \quad Y = 3.125x^2$$

La tensión máxima que soporta el cable es:

$$T = \sqrt{3.2^2 + 2^2(18.21)^2} = 36.56\text{ton} \quad (\text{en A})$$

5.9 Cables Catenarios

Al sostener una cadena por sus dos extremos sin tensarla, su conformación se denomina catenaria.



Figura 5.9.1

Cuando un cable sostiene únicamente su propio peso, presenta una deflexión tipo cadena y por ello se denomina cable catenario. Son cables catenarios todas las líneas de conducción del fluido con o los alambres telefónicos o telegráficos que soportan exclusivamente su peso. Este peso es uniforme por unidad de longitud del cable.

Consideremos un cable que soporta su propio peso y tomemos una porción del mismo como se muestra en la figura.

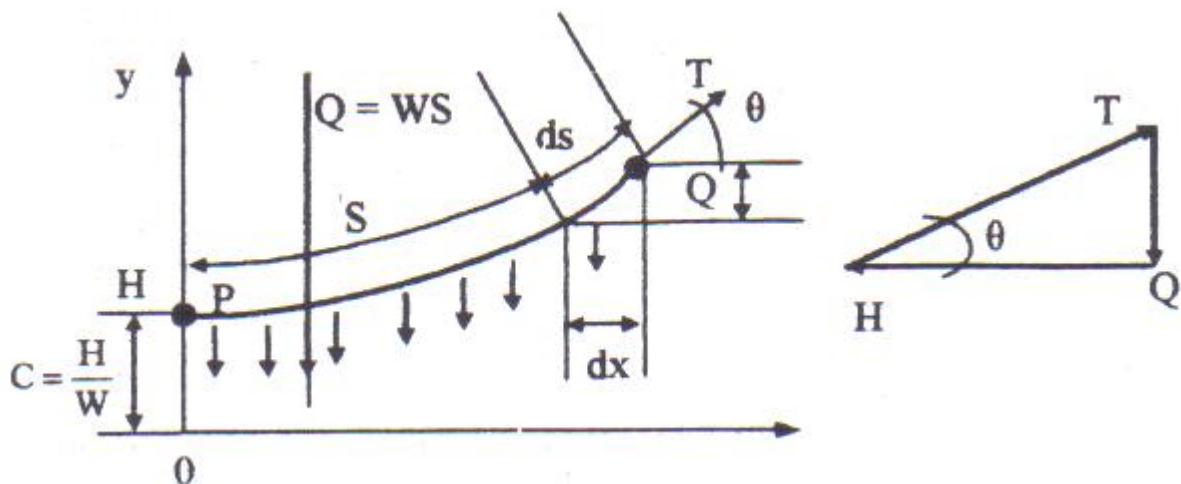


Figura 5.9.2

De acuerdo con la fórmula general:

$$T = \sqrt{H^2 + W^2 X^2}$$

Consideremos la constante $C = H / W$ y tendremos que:

$$H = WC \quad Q = WS \quad T = W\sqrt{C^2 + S^2}$$

La proyección horizontal de una pequeña longitud del cable es:

$$dx = ds \cos \theta = \frac{H}{T} ds$$

Sustituyendo H y T por sus valores

$$dx = \frac{WCds}{W\sqrt{C^2 + S^2}} = \frac{ds}{\sqrt{1+(S/C)^2}}$$

Integremos desde P hasta Q la expresión anterior:

$$X = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+(S/C)^2}} = C \operatorname{senh}^{-1} \frac{s}{c}$$

Lo anterior se puede escribir así:

$$S = C \operatorname{senh} \frac{x}{c}$$

Sustituyamos el valor de C

$$S = \frac{H}{W} \operatorname{senh} \frac{WX}{H}$$

La igualdad anterior permite conocer la longitud de una catenaria en función de su carga (W) y de la proyección horizontal de la fuerza de tensión (H).

Por otra parte, sabemos que:

$$\tan \theta = \frac{Q}{H} = \frac{dy}{dx}$$

De donde

$$dy = \frac{Q}{H} dx = \frac{WSdx}{WC} = \frac{s}{c} dx$$

Pero (s/C) = senh (X/C), quedando:

$$dy = \operatorname{senh} \frac{x}{c} dx$$

Integrando desde P hasta Q la expresión anterior:

$$y - C = \int_0^x \operatorname{senh} \frac{x}{c} dx = c \left[\cosh \frac{x}{c} \right]_0^x = C \left[\cosh \frac{x}{c} - 1 \right]_0^x$$

$$y - C = C \cosh \frac{x}{c} - C$$

Sustituyendo el valor de C:

$$Y = \frac{H}{W} \cosh \frac{Wx}{H}$$

La ecuación anterior es la de una catenaria con eje vertical.

Elevando ambos miembros de las ecuaciones (a) y (b) al cuadrado y restando una de otra obtenemos:

$$Y^2 - S^2 = \frac{H^2}{W^2} \left[\cosh^2 \frac{Wx}{H} - \operatorname{senh}^2 \frac{Wx}{H} \right]$$

Teniendo en cuenta la identidad $\cosh^2 A - \operatorname{senh}^2 A = 1$

$$Y^2 - S^2 = \frac{H^2}{W^2} = C^2$$

Despejamos S^2 y sustituimos este valor en T.

$$S^2 = Y^2 - \left[\frac{H}{W} \right]^2$$

$$T = W \sqrt{C^2 + S^2} = W \sqrt{\left(\frac{H}{W} \right)^2 + \left[Y^2 - \left(\frac{H}{W} \right)^2 \right]}$$

$$T = WY$$

La relación anterior indica que la tensión máxima se tendrá en el punto del cable que posea mayor valor de su ordenada

Cable catenaria: es un cable que sostiene su propio peso adoptando una geometría de cadena.

La proyección horizontal de la tensión siempre es constante en cualquier punto del cable ($H = WC$).

La proyección vertical de la tensión tendrá mayores valores hacia los apoyos ($Q = WS$).

La tensión total depende de la altura en que se encuentra el punto considerado, siendo los apoyos el lugar donde se presentan los valores máximos ($T = WY$).

En los cálculos hay que tomar en cuenta las siguientes expresiones:

$$S = C \sinh \frac{x}{c}$$

$$Y = C \cosh \frac{x}{c}$$

$$Y^2 + C^2 = S^2$$

Ejemplo:

Un cable catenaria tiene un peso de 10 kg/m por unidad de longitud, y esta suspendido en dos puntos ubicados en el mismo plano horizontal. Calcúlese la flecha que debe tener para que la tensión en los apoyos sea de 2 ton. Calcúlese también el claro que libra el cable, si su longitud total es de 180 m y las reacciones en los apoyos.

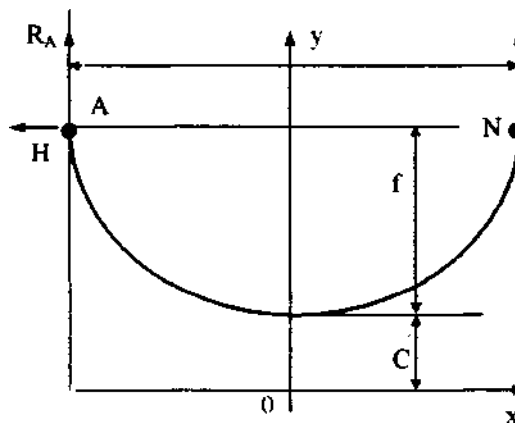


Figura 5.9.3

De la expresión $T=WY$ despejemos $Y = \frac{T}{W} = \frac{2000}{10} = 200m$

Calculemos ahora el parámetro C

$$C = \sqrt{Y^2 + S^2} = \sqrt{200^2 - 90^2} = 178.61m$$

La flecha será igual a:

$$f = Y - C = 200 - 178.61 = 21.39m$$

Analicemos el claro que libra a través de la ecuación

$$dx = \int_0^S \frac{ds}{\sqrt{1+(S/C)^2}} \ln \left[(S/C) + \sqrt{(S/C)^2 + 1} \right]$$

$$X + K = \ln \frac{S + \sqrt{S^2 + C^2}}{C}$$

Calculemos el valor de la constante K:

Para $X=0$ y $S=0$ entonces $K=C \ln C$

Quedando la expresión:

$$X = C \ln \frac{S + \sqrt{S^2 + C^2}}{C}$$

Sustituyendo los datos del problema:

$$\frac{L}{2} = 178.61 \ln \frac{90 + \sqrt{90^2 + 178.61^2}}{178.61}$$

$$L = 357.22 \ln 1.6237 = 173.14m$$

La solución a nuestro problema arroja los siguientes resultados flecha de 21.39 m y claro de 173.14m. Ahora calculamos las reacciones en los apoyos:

$$H = WC = 10(178.61) = 1786.10Kg$$

$$RA = RB = \frac{Q}{2} = \frac{WS}{2} = \frac{10(180)}{2} = 900kg.$$

CONCLUSIONES

La intención de esta tesis es de que sirva como apoyo académico y que el alumno comprenda el concepto de estructuras isostática, si el alumno no cuenta con una base sólida de conocimientos básicos tales como matemáticas y mecánica básica sería como resolver un encrucijada y es por eso la deserción de esta materia y de materias de estructuras con mayor grado de complejidad

El alumno deberá comprender el concepto de fuerza interna ya que estas fuerzas, son respuesta de las fuerzas externas, dichas fuerzas internas que llamaremos elementos mecánicos que son: fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante estos conceptos quedaron bien definidos en el primer capítulo de esta tesis

Con esta tesis el alumno comprenderá el concepto de estructura y podrá resolver los diferentes tipos de estructuras y su comportamiento debido a las cargas que soporta ya sea una viga, marco, armadura, cable o arco, esta tesis se apega al programa vigente de la unam de la materia de estructuras isostáticas

Lo que me llevo hacer esta tesis es que me gusto mucho la materia de estructuras isostáticas, ya que es base para comprender materias como análisis estructural, mecánica de materiales y otras materias de la misma rama de la ingeniería estructural.

Espero que este esfuerzo contribuya de alguna manera al mejoramiento académico de las futuras generaciones, como mencione en el capítulo de sistemas estructurales parece irónico que los estudiantes actuales puedan aprender en unos pocos meses las teorías y los principios del análisis estructural que a la humanidad le tomó miles de años desarrollar.

BIBLIOGRAFÍA

- Ignacio Lizárraga Gaudry, “Estructuras Isostáticas”; Editorial McGraw-Hill, México, 1990.
- Antonio Murrieta Necoechea “Aplicaciones de la Estática”; Editorial Limusa, México, 1978.
- Jaime Martínez y Jorge Solar González “Estática Básica para Ingenieros”, UNAM Facultad de Ingeniería, México, 2002.
- Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston Jr. “Mecánica Vectorial para Ingenieros Estática”, Editorial McGraw-Hill
- Luis Herrejón de la Torre “Apuntes de Estructuras Isostáticas”, UNAM, Facultad de Ingeniería, México.
- Fernando Monroy Miranda “Ejemplos de Estructuras Isostáticas”, UNAM, Facultad de Ingeniería, México.
- Julio Cesar Ochoa Jiménez, Tesis, “Apuntes de Estructuras Isostáticas”, UNAM, Enep Aragón, 2004.
- Carlos J Carmona González, “Introducción al Análisis de Estructuras Isostáticas”, IPN, México, 2001.
- Alfonso Tovar Santana, “Estructuras II”, IPN, México, 1999.
- José Luís Camba C., Francisco Chacon G. y Francisco Pérez “Apuntes de Análisis Estructural 1”, UNAM, Facultad de Ingeniería, México, 2002.
- Oscar m. González Cuevas, “Análisis Estructural”, Editorial Limusa, México, 2002.
- Russel c. Hibbeler “Análisis Estructural” Editorial Prentice Hall, México, 1997.
- Jack c. McCormac “Análisis de Estructuras”, Editorial Alfaomega, México, 2002.
- Ferdinand I. Singer; “Resistencia de Materiales”; Editorial Harla ; México 1971.
- Fitzgerald; “Mecánica de Materiales”; Editorial Alfaomega; México 1990
- Gere y Timoshenko; “Mecánica de Materiales”; Editorial International Thomson Editores; México 1997.
- H. Wrner Rosenthal; “La Estructura”; Editorial Blume; España; 1975
- H.h. West; “Análisis de Estructuras”; Editorial Cecsá; México 1989