



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**Transporte ondulatorio en sistemas con absorción**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

PRESENTA:

**Angel Marbel Martínez Argüello**

DIRECTORES DE TESIS: Dr. Rafael Alberto Méndez Sánchez  
Dr. Moisés Martínez Mares

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: Dr. Thomas Henry Seligman Schurch



posgrado en ciencias físicas  
u n a m

MÉXICO, D.F.

2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**Dedicado a:**

*Lizbeth, mi chula  
y Sami, mi torito!*



# Agradecimientos

En estas líneas quiero expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que me ayudaron en esta etapa de mi vida, a aquellas de las que tuve que valerme para la realización de este trabajo y a quienes me ayudaron a mejorarlo.

Un agradecimiento especial a mi familia, mis padres y mis hermanos, quienes me dieron la fortaleza y el apoyo para culminarlo.

En deuda estoy con el Dr. Rafael Alberto Méndez Sánchez a quien no sabría como pagar los años en los que me transmitió sus conocimientos, experiencia y entusiasmo al dirigir esta Tesis. También, agradezco al Dr. Moisés Martínez Mares quien fungió como Cotutor; le agradezco sus valiosas contribuciones y las provechosas discusiones que tuvimos en gran parte de este trabajo. No existen palabras para expresarles lo agradecido que les estoy.

Agradezco a los Dres. José Antonio Méndez Bermúdez, Jorge Flores Valdés y a la Dra. María Gabriela Báez Juaréz, por revisar minuciosamente el manuscrito y que con sus valiosos comentarios me ayudaron a mejorar la Tesis. También agradezco a los Dres. Felix Izrailev y Eleuterio Castaño quienes aceptaron amablemente formar parte del sínodo sin llegar a ser elegidos. Agradezco al Dr. Christof F. Jung Kohl por invitarme a participar y apoyarme con su proyecto de CONACYT 79988.

Sería inaceptable no incluir en estas líneas a mis amigos: Cinthia Lizbeth, José Alonso, Samuel, Verónica, Dalia, Sayab, Juan Carlos, Mauricio, Karel, Jesús, Aurora, Rafael V., quienes me permitieron robarles parte de su tiempo y con su amistad me hicieron la vida más agradable.

Finalmente, quiero agradecer al Instituto de Ciencias Físicas de la UNAM por su hospitalidad y sobre todo por el excelente ambiente de trabajo, a la DGAPA y al CONACyT por el apoyo económico durante la realización de esta Tesis, a la UAM-Iztapalapa por brindarme un espacio donde se realizó gran parte de este trabajo.



# Resumen

En los últimos años ha habido un intenso estudio de las propiedades de transporte o de dispersión a través de cavidades caóticas clásicas. Esto se debe a que los sistemas clásicos sirven como análogos de sistemas cuánticos, como los llamados puntos cuánticos caóticos, además del interés que en sí tienen por sus aplicaciones. Los sistemas clásicos inevitablemente presentan disipación de energía al intentar confinar las ondas; es decir, las paredes de confinamiento absorben dicha energía. Este fenómeno lo conocemos como absorción.

La investigación en los últimos años se ha centrado en observar el efecto de la absorción en las propiedades de dispersión. Un modelo para ésta en mecánica cuántica consiste en agregar una parte imaginaria al potencial. En este trabajo proponemos un sistema simple con absorción y lo estudiamos vía el formalismo de la matriz de dispersión: una cavidad en una dimensión formada por un potencial delta de Dirac de intensidad imaginaria, enfrente de un potencial infinito. Este problema permite estudiar las propiedades analíticas de la matriz de dispersión en presencia de absorción en una forma similar al caso no absorbente ya considerado en la literatura.

En el caso no absorbente la matriz de dispersión es un número complejo de módulo uno; es decir, se puede describir por una fase que varía entre 0 y  $2\pi$  cuando se varía la energía, pero que visita esos puntos en forma no uniforme. De hecho la fase está distribuída de acuerdo a lo que se conoce como el kernel de Poisson. En el caso absorbente la matriz de dispersión es subunitaria y se describe por su módulo y fase, los cuales no están distribuídos de manera uniforme. Demostramos que, en un sistema de referencia particular, el módulo es un número real fijo menor que la unidad, y la fase se distribuye como el kernel de Poisson subunitario. Este es un resultado interesante no conocido anteriormente y que nos permite determinar la distribución de la matriz de dispersión en el caso absorbente. El acuerdo de la teoría con los

resultados numéricos es excelente. Una parte de los resultados se publicaron en las memorias del *IV Mexican Meeting on Mathematical and Experimental Physics* llevado a cabo en la Ciudad de México en el 2010.

Los resultados obtenidos en esta Tesis nos permiten profundizar en el entendimiento del efecto de la absorción en cavidades de microondas, donde las antenas que las alimentan están acopladas de manera imperfecta y que dan lugar a una respuesta rápida del sistema. En ese caso una generalización del kernel de Poisson (kernel de Poisson al cuadrado) describe la distribución de la matriz de dispersión.

# Abstract

In recent years there has been intense study on the transport or scattering properties through classical chaotic cavities. This is because classical systems serve as analogues of quantum systems such as chaotic quantum dots, besides its intrinsic interest. Classical systems exhibit energy dissipation inevitably when we attempt to confine the waves, i.e. containment walls absorb that energy. This phenomenon is known as absorption.

In recent years the research has focused on observing the effect of absorption on the scattering properties. A model for this in quantum mechanics is to add an imaginary part to the potential. We propose a simple system with absorption and we studied it via the formalism of the scattering matrix: a cavity formed in one dimension by a Dirac delta potential whose intensity is imaginary, in front of an infinite potential well. This problem allows to study the analytic properties of the scattering matrix in the presence of absorption in a similar way to that of non-absorbing case already considered in the literature.

For the non-absorbing case the scattering matrix is a complex number of modulus one, i.e. can be described by a phase that varies between 0 and  $2\pi$  when the energy is varied, but it visits these points in a non-uniform way. In fact, the phase is distributed according to what is known as Poisson's kernel. In the absorbing case the scattering matrix is subunitary and it is described by its module and phase, which are not distributed uniformly. We show that, in a particular reference system, the module is a fixed real number less than unity, and the phase is distributed according to subunitary Poisson's kernel. This is an interesting result not previously known and it allows us to determine the distribution of the scattering matrix in the absorbing case. The agreement of the theory with the numerical results is excellent. Some of the results were published in the Proceedings of the IV Mexican Meeting on Mathematical and Experimental Physics held in Mexico City in 2010.

The results of this Thesis allow us a deeper understanding of the effect of absorption in microwave cavities, where the antenna that feeds them are imperfectly coupled and that give rise to a prompt response of the system. In this case a generalization of the Poisson kernel (Poisson's kernel squared) describes the distribution of the scattering matrix.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Dispersión de ondas . . . . .	1
1.2. Absorción en la dispersión de ondas . . . . .	1
1.3. Panorama sobre absorción . . . . .	2
1.4. Estructura de la Tesis . . . . .	4
<b>2. La matriz de dispersión</b>	<b>7</b>
2.1. Definición de la matriz $S$ . . . . .	7
2.2. Propiedades de simetría de la matriz $S$ . . . . .	8
2.2.1. Conservación de flujo . . . . .	8
2.2.2. Reversibilidad temporal . . . . .	9
2.2.3. Simetría de reflexión . . . . .	9
2.3. Modelo de absorción . . . . .	9
<b>3. Cavity unidimensional sin absorción</b>	<b>15</b>
3.1. Cavity sin absorción . . . . .	15
3.2. Estructura analítica de la matriz $S$ . . . . .	20
3.3. Distribución de la matriz $S$ . . . . .	24
<b>4. Cavity unidimensional con absorción</b>	<b>27</b>
4.1. Cavity con absorción . . . . .	27
4.2. Estructura analítica de la matriz $\tilde{S}$ . . . . .	31
4.3. Kernel de Poisson para un anillo . . . . .	34
4.4. Traslación de la matriz $\tilde{S}$ . . . . .	36
4.5. Distribuciones marginales . . . . .	39
4.5.1. Distribución marginal radial . . . . .	40
4.5.2. Distribución marginal angular . . . . .	41

XII

<b>5. Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>A. La función delta de Dirac</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>49</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Dispersión de ondas

Mucho del conocimiento que tenemos acerca de la estructura de la materia a nivel microscópico se extrae de experimentos de dispersión de ondas o partículas. En el experimento se envía un haz de partículas hacia un blanco específico que se quiere estudiar, y mediante un detector se cuenta el número de ellas dispersadas en un cierto ángulo. El número de partículas dispersadas por elemento de ángulo sólido es proporcional al flujo incidente y a la sección eficaz de dispersión. En mecánica cuántica una partícula se representa por un paquete de ondas, que es una superposición de ondas planas. Idealmente, en ausencia de algún potencial dispersor podemos tratarlas como ondas planas. Sin embargo, cuando una onda incide sobre un blanco, ésta se dispersará en general con una amplitud y dirección diferente al de la onda incidente, la cual se conoce como *amplitud de dispersión*. En la figura 1.1 se muestra de manera esquemática la dispersión de una onda plana debido a un blanco. Las amplitudes de las ondas planas dispersadas pueden expresarse en términos de las amplitudes de las ondas planas incidentes mediante una cantidad que las relaciona conocida como *matriz de dispersión*,  $S$ , de manera que  $S$  contiene toda la información sobre el blanco dispersor [1].

### 1.2. Absorción en la dispersión de ondas

Debido al alcance como herramienta teórica y experimental, la dispersión de ondas ha motivado gran interés en muchas áreas de la física, tales como

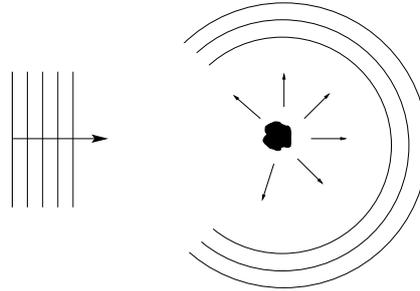


Figura 1.1: Dispersión de una onda plana por un blanco dispersor.

física nuclear y física atómica y molecular [2], sistemas mesoscópicos cuánticos, como son los puntos y gráficos cuánticos [3], y mesoscópicos clásicos como cavidades y gráficos de microondas [4, 5], acústicas [6] y sistemas ópticos [7] y elásticos [8]. Estos últimos presentan disipación o pérdidas de energía de la onda en las paredes que la confina, este fenómeno se conoce como *absorción*. Es por esto que el efecto de las pérdidas ha sido estudiado en los últimos años (para una revisión actual ver la Ref. [9] y las referencias ahí contenidas).

En la siguiente sección daremos una revisión sobre algunos resultados tanto teóricos como experimentales que existen sobre el tema de sistemas ondulatorios con absorción.

### 1.3. Panorama sobre absorción

Entre los trabajos iniciales sobre dispersión de ondas en cavidades que presentan pérdidas está el de Doron, Smilansky y Frenkel [4], quienes midieron la reflexión en el billar de Sinai en el rango de frecuencias de microondas. En este experimento se contruye una cavidad plana que permite un modo transversal y que se alimenta por medio de una antena con un modo propagante (o *canal* en el lenguaje de la física nuclear). Con el experimento ellos verifican la hipótesis de que las fluctuaciones de la matriz  $S$  como función de la frecuencia se pueden describir en términos de los parámetros que caracterizan la dispersión clásica caótica. Sus resultados también muestran el efecto de la absorción de energía en la cavidad, mismo que explican al agregar un término imaginario en la frecuencia. En mecánica cuántica esto es equivalente a usar un modelo de potencial complejo.

Stöckmann y Stein [11] muestran que las resonancias en cavidades con forma de estadios o billares de Sinai están determinadas mediante absorción de microondas, donde para rangos de frecuencias de 0 - 18.74 GHz las cavidades se pueden considerar como bidimensionales. En este caso las condiciones de frontera electromagnéticas y cuánticas son equivalentes y, el espectro de resonancias se normaliza como el espectro de eigenvalores en mecánica cuántica.

Lewenkopf, Müller y Doron [10], explican la absorción en el experimento de Doron, Smilansky y Frenkel, a través de un modelo de *canales parásitos* (debido a las diferentes excitaciones de la pared absorbente). Esto significa que la matriz  $S$  del sistema con absorción es de dimensión mayor que uno. Brouwer y Beenakker [12] demostraron que un modelo con un potencial imaginario es equivalente al de los canales parásitos cuando el número de estos tiende al infinito pero el acoplamiento de estos canales a la cavidad tiende a cero, mientras que el producto de estas cantidades se mantiene constante. Esta cantidad da una medida de la absorción.

Otra manera de cuantificar la absorción es a través del concepto de *fidelidad de dispersión*, que es una forma de medir la dispersión en cavidades de microondas con dinámica clásicamente caótica. Para sistemas perturbados mediante pequeños cambios en su geometría, la fidelidad se define en términos de las funciones de correlación paramétricas de los elementos de la matriz  $S$  [13]. Otra cantidad física que se ha estudiado en la dispersión de ondas, es la matriz de impedancia  $Z$  cuyas fluctuaciones son universales [14]. También se han estudiado las pérdidas óhmicas localizadas en el contorno de la cavidad [15]. De hecho, se han desarrollado modelos que muestran dos mecanismos por los que se presentan dichas pérdidas: uno referido al amortiguamiento a lo largo de la propagación de la onda y otro a la absorción en el contorno de la cavidad [16]. Además, se han realizado mediciones del coeficiente de reflexión en redes de microondas con geometría tetrahedral, donde se obtienen resultados soportados por estudios teóricos que usan la teoría de matrices aleatorias [17, 18].

Una expresión analítica para la distribución del coeficiente de reflexión en presencia de absorción se conoce tanto en el límite de absorción débil [19] como en el de absorción fuerte [20, 21], así como expresiones exactas [19] y aproximadas [21], en ausencia y presencia simetría de reversibilidad temporal, respectivamente, para todo valor de la absorción. El resultado exacto en presencia de esa simetría ha sido obtenida por Savin, Sommers y Fyodorov en la referencia [22]. Una revisión más amplia sobre la reflexión en sistemas ondulatorios caóticos con absorción se encuentra en las referencias [23, 24].

Trabajos recientes muestran que la distribución de probabilidad del coeficiente de reflexión, obtenida mediante la teoría de matrices aleatorias, da predicciones teóricas que tienen muy buen acuerdo con experimentos en cavidades de microondas [25]. Sin embargo, se debe tener cuidado con el acoplamiento de la antena con la cavidad, el cual nunca es perfecto y puede dar una apreciación incorrecta en el valor de la intensidad de la absorción [25, 26]. Desde el punto de vista teórico, el acoplamiento imperfecto da realidad física a procesos de dispersión de respuesta rápida, antes de sufrir una dispersión múltiple, conocidos como *procesos directos* [27]. Ahora se sabe que la distribución de la matriz  $S$  satisface una generalización del kernel de Poisson (el kernel de Poisson al cuadrado), que describe sistemas con pérdidas y acoplamiento imperfecto con un acuerdo excelente con el experimento [27]. En referencia [9], se da una fórmula semianalítica para determinar la intensidad de la absorción que toma en cuenta el acoplamiento imperfecto.

En investigaciones más recientes, el problema de dispersión caótica de ondas en presencia de procesos directos, se puede transformar al caso en que no se tienen dichos procesos, para el problema de dispersión de un número arbitrario de canales. El Jacobiano de esta transformación es el kernel de Poisson al cuadrado [28].

Lo expuesto en los dos párrafos anteriores, parece indicar que en los sistemas ondulatorios clásicos, es decir, en presencia de absorción y procesos directos implican que el kernel de Poisson al cuadrado es el término que modula la distribución de probabilidad de la matriz de dispersión. Veremos que esto no es cierto en general.

## 1.4. Estructura de la Tesis

En este trabajo estudiaremos las propiedades de dispersión de un sistema cuántico unidimensional que presenta tanto absorción como procesos directos. El sistema que consideramos consiste en una cavidad simple formada con un potencial delta de Dirac, cuya intensidad es imaginaria, enfrente de un potencial impenetrable.

En nuestro estudio determinaremos la probabilidad de estadía de la matriz  $S$  en una cierta región de su espacio. En el caso sin absorción esta probabilidad está dada por el kernel de Poisson. La pregunta que surge de manera natural es si en el caso con absorción esa probabilidad también está dada por el kernel de Poisson o alguna variante el él, o si es el kernel de Poisson al

cuadrado que se encuentra en sistemas caóticos.

En nuestro modelo con absorción estudiaremos la matriz de dispersión que se puede parametrizar en dos variables: su fase y su módulo, dado por el coeficiente de reflexión. De manera equivalente al problema sin absorción considerado en las referencias [1, 3, 29], analizaremos las propiedades de analiticidad y ergodicidad de la matriz  $S$ , y las usaremos para determinar la probabilidad de estadía de una matriz de dispersión subunitaria  $\tilde{S}$ . Ésta nos permitirá determinar la distribución de probabilidad de la matriz de dispersión de nuestro modelo, y se comparará con el resultado del experimento numérico.

La estructura de la Tesis se describe a continuación. En el próximo capítulo daremos un resumen de algunos conceptos y propiedades básicas generales sobre la matriz de dispersión, entre ellas la conservación de flujo. Resolveremos la ecuación de Schrödinger para el caso particular de un pozo de potencial delta cuya intensidad es imaginaria. En este caso la matriz  $S$  es subunitaria y no se satisface la propiedad de conservación de flujo, por lo que el pozo imaginario representa un modelo para la absorción. En capítulo 3 reproducimos resultados previos sobre las propiedades analíticas de la matriz  $S$ , el caso de una cavidad unidimensional sin absorción, una barrera delta real enfrente de una potencial impenetrable [1, 3, 29]; y se obtiene el kernel de Poisson como distribución de probabilidad de la matriz  $S$ . En el capítulo 4 se estudiará el caso con absorción siguiendo el mismo procedimiento del capítulo 3; se analizan las propiedades analíticas de una matriz  $S$  subunitaria y se obtiene el kernel de Poisson subunitario. Este resultado permitirá obtener la distribución de probabilidad de la matriz  $S$  del problema y compararlo con los resultados del experimento numérico. Las conclusiones se presentan en el capítulo 5.



# Capítulo 2

## La matriz de dispersión

En este capítulo definimos la *matriz de dispersión*,  $S$ , asociada a un potencial en mecánica cuántica; presentamos de manera general sus propiedades de simetría y la condición de conservación del flujo para el caso de potenciales reales. Para mostrar la violación de esta condición, presentamos un problema particular de dispersión que consiste en un potencial delta de Dirac en una dimensión cuya intensidad es un número imaginario puro. El caso del potencial delta real se recupera fácilmente al hacer los cambios adecuados.

### 2.1. Definición de la matriz $S$

En general, un problema de dispersión de ondas se puede describir por medio de la matriz de dispersión  $S$ . Por definición, para un problema estacionario, la matriz  $S$  relaciona las amplitudes de las ondas salientes con las de las ondas entrantes en un potencial de alcance finito.

Consideremos un potencial real  $V(x)$  en una dimensión, como se muestra en la Fig. 2.1. Fuera de la región del potencial la solución a la ecuación de Schrödinger son ondas planas, que se mueven a la derecha e izquierda, respectivamente. Es decir, la solución se puede escribir como

$$\psi(x) = \begin{cases} ae^{ikx} + be^{-ikx} & \text{I} \\ A\phi(x) + B\xi(x) & \text{II} \\ a'e^{-ikx} + b'e^{ikx} & \text{III} \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $\phi(x)$  y  $\xi(x)$  representan dos soluciones en la región del potencial,  $A$  y  $B$  son las correspondientes amplitudes;  $a$  y  $a'$  representan las amplitudes de

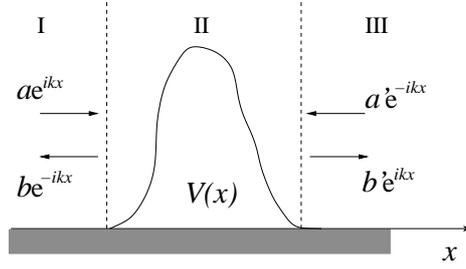


Figura 2.1: Potencial unidimensional, real, arbitrario y asimétrico, en el que entran y salen ondas planas  $e^{ikx}$  y  $e^{-ikx}$ . Las amplitudes de las ondas entrantes son  $a$  y  $a'$ , y las de las ondas salientes son  $b$  y  $b'$ , para incidencia por la izquierda y derecha, respectivamente.

las ondas entrantes, mientras que las de las ondas salientes se denotan por  $b$  y  $b'$ , cuando la incidencia es por la izquierda y por la derecha, respectivamente. Por definición se tiene que

$$\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

donde  $S$  resulta ser una matriz de  $2 \times 2$ . En general, para potenciales arbitrarios en ausencia de cualquier simetría, la matriz  $S$  tiene la estructura dada por

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

donde  $r$  y  $r'$  ( $t$  y  $t'$ ) son las amplitudes de reflexión (transmisión) al incidir por la izquierda y la derecha, respectivamente.

## 2.2. Propiedades de simetría de la matriz $S$

### 2.2.1. Conservación de flujo

Para potenciales reales la matriz  $S$  debe ser compatible con la conservación de flujo. Esto se manifiesta por la propiedad de unitariedad. Es decir,

$$SS^\dagger = S^\dagger S = I, \quad (2.4)$$

donde  $I$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

La ecuación (2.4) se obtiene de la ecuación de continuidad que expresa la conservación local de la probabilidad.

### 2.2.2. Reversibilidad temporal

Si además, en el problema de potencial se tiene invariancia ante reversibilidad temporal, la matriz  $S$  debe ser simétrica; es decir,  $t' = t$  o bien

$$S = S^T. \quad (2.6)$$

En ese caso, la matriz  $S$  tiene la siguiente estructura

$$S = \begin{pmatrix} r & t \\ t & r' \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

### 2.2.3. Simetría de reflexión

Si el potencial correspondiente fuera simétrico especularmente con respecto a una línea que pasa por en medio de él, la matriz  $S$  satisface nuevas restricciones que dan lugar a la siguiente estructura

$$S = \begin{pmatrix} r & t \\ t & r \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

es decir,  $r = r'$ .

## 2.3. Modelo de absorción

En mecánica cuántica los potenciales imaginarios representan fuentes o sumideros de ondas. En estos casos la matriz  $S$  ya no satisface la condición de conservación de flujo dada en la Ec. (2.4), y por tanto pueden usarse para modelar las pérdidas que ocurren en los dispositivos ondulatorios clásicos por medio de un sumidero.

En lo que sigue nos concentraremos en la matriz de dispersión para un pozo de potencial delta imaginario como se muestra en la Fig. 2.2. Es decir, el potencial es de la forma

$$V(x) = -iv \delta(x), \quad (2.9)$$

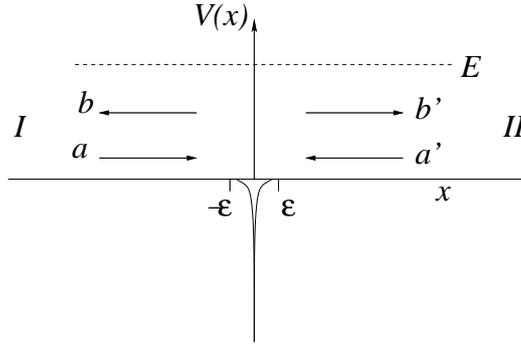


Figura 2.2: Pozo de potencial imaginario tipo función delta de Dirac colocado en el origen y de intensidad dada por  $v > 0$ :  $V(x) = -iv\delta(x)$ .

donde  $v > 0$ , es la intensidad de potencial y  $\delta(x)$  es la función delta de Dirac. En forma explícita, la ecuación de Schrödinger queda como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} - iv\delta(x) \psi(x) = E \psi(x), \quad (2.10)$$

donde  $E$  es la energía de incidencia de la partícula sujeta a este potencial.

En las regiones libres de potencial, I y II, la función  $V(x) = 0$ , y por lo tanto las soluciones están dadas por

$$\psi_I(x) = a e^{ikx} + b e^{-ikx}, \quad (2.11)$$

$$\psi_{II}(x) = b' e^{ikx} + a' e^{-ikx}, \quad (2.12)$$

donde  $a$  y  $a'$  son las amplitudes de las ondas entrantes por la izquierda y derecha, respectivamente;  $b$  y  $b'$  son las correspondientes amplitudes de las ondas salientes;  $k$  es el número de onda

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (2.13)$$

La matriz  $S$  del problema se obtiene de satisfacer las condiciones en la frontera con las soluciones (2.11) y (2.12) en las diferentes regiones. La primera es la continuidad de la función de onda, que se obtiene de integrar la Ec. (2.10)

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0); \quad (2.14)$$

la segunda condición es una discontinuidad en la derivada de la función de onda debido al potencial delta en el origen. Ésta se obtiene al integrar directamente la Ec. (2.10) en un intervalo de tamaño  $2\epsilon$  centrado en cero, para luego tomar el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  al final del cálculo. Es decir,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d}{dx} \left[ \frac{d\psi(x)}{dx} \right] dx - iv \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x)\psi(x)dx = E \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi(x)dx. \quad (2.15)$$

Dado que  $\psi(x)$  es una función integrable en el intervalo  $[-\epsilon, \epsilon]$  podemos aplicar el teorema del valor medio, de manera que la integral del lado derecho de la Ec. (2.15) da como resultado

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi(x) dx = 2\epsilon \psi(0). \quad (2.16)$$

Realizamos la integrales correspondientes del lado izquierdo de la Ec. (2.15) con ayuda del teorema del valor medio. Así, obtenemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{d\psi(x)}{dx} \Big|_{x=\epsilon} - \frac{d\psi(x)}{dx} \Big|_{x=-\epsilon} \right] - iv\psi(0) = 2\epsilon E\psi(0). \quad (2.17)$$

En el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  la ecuación anterior se escribe como

$$\psi'_{II}(0) - \psi'_I(0) = -i\alpha \psi_{II}(0), \quad (2.18)$$

donde  $\alpha = \frac{2mv}{\hbar^2}$  y la prima en las funciones significa la derivada con respecto de  $x$ .

Entonces, las condiciones en la frontera dadas por las Ecs. (2.14) y (2.18), nos conducen a

$$a + b = a' + b', \quad (2.19)$$

$$(b' - a') - (a - b) = -\frac{\alpha}{k} (a' + b'), \quad (2.20)$$

las cuales se pueden reescribir como

$$b = -\frac{\alpha/2k}{1 + \alpha/2k} a + \frac{1}{1 + \alpha/2k} a', \quad (2.21)$$

$$b' = \frac{1}{1 + \alpha/2k} a - \frac{\alpha/2k}{1 + \alpha/2k} a'. \quad (2.22)$$

En forma matricial estas ecuaciones se pueden escribir como

$$\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix} = \tilde{S} \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

donde

$$\tilde{S} = \frac{1}{1 + \alpha/2k} \begin{pmatrix} -\alpha/2k & 1 \\ 1 & -\alpha/2k \end{pmatrix}; \quad (2.24)$$

$\tilde{S}$  es la matriz de dispersión asociada al problema del pozo de potencial delta imaginario.

Notemos que  $\tilde{S}$  es de la forma dada por la Ec. (2.8), es decir  $t = t'$  debido a la simetría de reversibilidad temporal y  $r = r'$  debido a la simetría especular del potencial usado. Cuando  $\frac{\alpha}{2k} \rightarrow 0$ , tenemos que  $r \rightarrow 0$  y  $t \rightarrow 1$ , es decir, la onda es transmitida por completo y, cuando  $\frac{\alpha}{2k} \rightarrow \infty$  tenemos que  $r \rightarrow -1$  y  $t \rightarrow 0$ , y la onda completa es reflejada por el potencial.

La tilde en  $\tilde{S}$  denota que en este caso no hay conservación de flujo y por tanto no es unitaria. Al calcular  $\tilde{S}\tilde{S}^\dagger$  obtenemos

$$\tilde{S}\tilde{S}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\alpha/k}{(1+\alpha/2k)^2} & -\frac{\alpha/k}{(1+\alpha/2k)^2} \\ -\frac{\alpha/k}{(1+\alpha/2k)^2} & 1 - \frac{\alpha/k}{(1+\alpha/2k)^2} \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

que es no unitaria, como puede verse al escribirla en la siguiente forma

$$\tilde{S}\tilde{S}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\alpha/k}{(1 + \alpha/2k)^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Es decir,  $\tilde{S}$  no satisface la condición de conservación de flujo dada por la Ec. (2.4). De hecho, no sólo es no unitaria sino subunitaria como puede verse si el módulo de alguno de los eigenvalores de  $\tilde{S}\tilde{S}^\dagger$  es menor que la unidad. Para obtener los eigenvalores de  $\tilde{S}\tilde{S}^\dagger$  resolvemos la ecuación secular

$$\det(\tilde{S}\tilde{S}^\dagger - \lambda I) = 0, \quad (2.27)$$

donde  $\lambda$  es un valor propio. La ecuación (2.27) da dos valores para  $\lambda$ , los cuales son

$$\lambda_- = 1, \quad (2.28)$$

$$\lambda_+ = 1 - \frac{4\alpha/2k}{(1 + \alpha/2k)^2}. \quad (2.29)$$

Por tanto, un pozo imaginario representa las pérdidas de potencia, debido a la absorción, en sistemas clásicos.

Por otro lado, notemos que la matriz de dispersión asociada al pozo delta real se obtiene de  $\tilde{S}$  al cambiar  $\alpha$  por  $-i\alpha$ ; en ese caso

$$S = \frac{1}{1 + \alpha/2ik} \begin{pmatrix} -\alpha/2ik & 1 \\ 1 & -\alpha/2ik \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

donde se satisface que

$$SS^\dagger = I; \quad (2.31)$$

es decir,  $S$  es unitaria y por lo tanto, el flujo se conserva.



# Capítulo 3

## Cavidad unidimensional sin absorción

Un sistema de dispersión simple e interesante consiste de un pozo de potencial delta real colocado a una cierta distancia de una pared impenetrable. Con este modelo se puede simular una cavidad resonante en una dimensión que permite entender de manera simple las propiedades de dispersión que ocurre en cavidades en dos dimensiones [1, 3, 29]. En particular, interesa la distribución de probabilidad de la matriz de dispersión en una región de su espacio. El estudio de las resonancias de la cavidad ayuda a conocer dicha distribución.

### 3.1. Cavidad sin absorción

Consideremos una partícula que únicamente puede moverse en el eje positivo  $x$  debido a la existencia de una pared impenetrable en  $x = 0$ , y que adicionalmente siente la presencia de una barrera en forma de un potencial delta en  $x = x_0$  (esta situación se muestra en la figura 3.1). La partícula incide desde la derecha, transmitiéndose entre el potencial delta y la pared impenetrable y sufre una dispersión múltiple hasta que es reflejada de regreso a la región  $x > x_0$ .

Para este caso, conocemos las soluciones a la ecuación de Schrödinger en las regiones I y II las cuales son de la forma

$$\psi_I(x) = b_0 e^{ikx} + a_0 e^{-ikx}, \quad (3.1)$$

$$\psi_{II}(x) = b e^{ikx} + a e^{-ikx}. \quad (3.2)$$

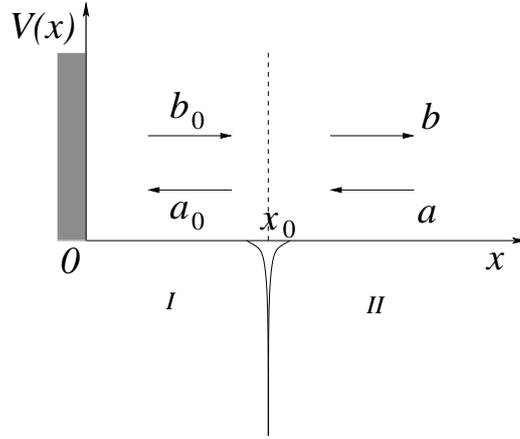


Figura 3.1: Cavity unidimensional formada de una pared impenetrable y un pozo de potencial imaginario tipo función delta colocado en  $x = x_0$ .

Sabemos que la matriz de dispersión  $S_0$  asociada al pozo delta relaciona las amplitudes de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} a_0 e^{-ikx_0} \\ b e^{ikx_0} \end{pmatrix} = S_0 \begin{pmatrix} b_0 e^{ikx_0} \\ a e^{-ikx_0} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

donde  $S_0$  está dada en la ecuación (2.30); es decir

$$S_0 = \begin{pmatrix} r_0 & t_0 \\ t_0 & r_0 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

con  $r_0$  y  $t_0$  dados por

$$r_0 = -\frac{\alpha/2ik}{1 + \alpha/2ik}, \quad (3.5)$$

$$t_0 = \frac{1}{1 + \alpha/2ik}. \quad (3.6)$$

Así, la Ec. (3.3) nos conduce a las siguientes ecuaciones

$$a_0 e^{-ikx_0} = r_0 b_0 e^{ikx_0} + t_0 a e^{-ikx_0}, \quad (3.7)$$

$$b e^{ikx_0} = t_0 b_0 e^{ikx_0} + r_0 a e^{-ikx_0}. \quad (3.8)$$

Una de las condiciones de frontera es que la función de onda debe anularse en  $x = 0$ , por lo que

$$b_0 = -a_0. \quad (3.9)$$

De esta última ecuación y la Ec. (3.7) obtenemos

$$b_0 = -\frac{t_0 e^{-ikx_0}}{e^{-ikx_0} + r_0 e^{ikx_0}} a, \quad (3.10)$$

que al sustituirla en la ecuación (3.8) nos da

$$b e^{ikx_0} = S a e^{-ikx_0}, \quad (3.11)$$

donde

$$S = r_0 - t_0 \frac{1}{1 + r_0 e^{2ikx_0}} e^{2ikx_0} t_0, \quad (3.12)$$

es la matriz de dispersión asociada al sistema del pozo de potencial delta y la barrera impenetrable.<sup>1</sup>

La Ec. (3.12) puede interpretarse de la siguiente manera. Primero, tenemos una onda que viaja libre hacia la izquierda hasta que al alcanzar la cavidad incide sobre el pozo delta, donde parte de la onda se refleja con una amplitud  $r_0$ , mientras otra parte se transmite con una amplitud  $t_0$  hacia el interior. Esta onda transmitida sufre una dispersión múltiple entre el pozo delta y el potencial infinito hasta que se transmite hacia el exterior con amplitud  $t_0$  por medio del pozo delta. Esta situación se muestra en la figura 3.2 y puede verse si hacemos un desarrollo en serie de la Ec. (3.12), que en forma explícita es

$$\begin{aligned} S &= r_0 - t_0 e^{2ikx_0} t_0 + t_0 (r_0 e^{2ikx_0}) e^{2ikx_0} t_0 \\ &- t_0 (r_0 e^{2ikx_0})^2 e^{2ikx_0} t_0 + \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

Podemos verificar dos casos límite. Cuando la intensidad del potencial delta es muy grande ( $\alpha \rightarrow \infty$ ) las ecuaciones (3.5) y (3.6) se reducen a  $r_0 \rightarrow -1$  y  $t_0 \rightarrow 0$ , respectivamente, por lo que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} S = -1; \quad (3.14)$$

---

<sup>1</sup>Debido a la barrera impenetrable la matriz de dispersión  $S$  asociada a este sistema es de  $1 \times 1$ , es decir, una función. Nos referiremos a esta función como matriz  $S$ .

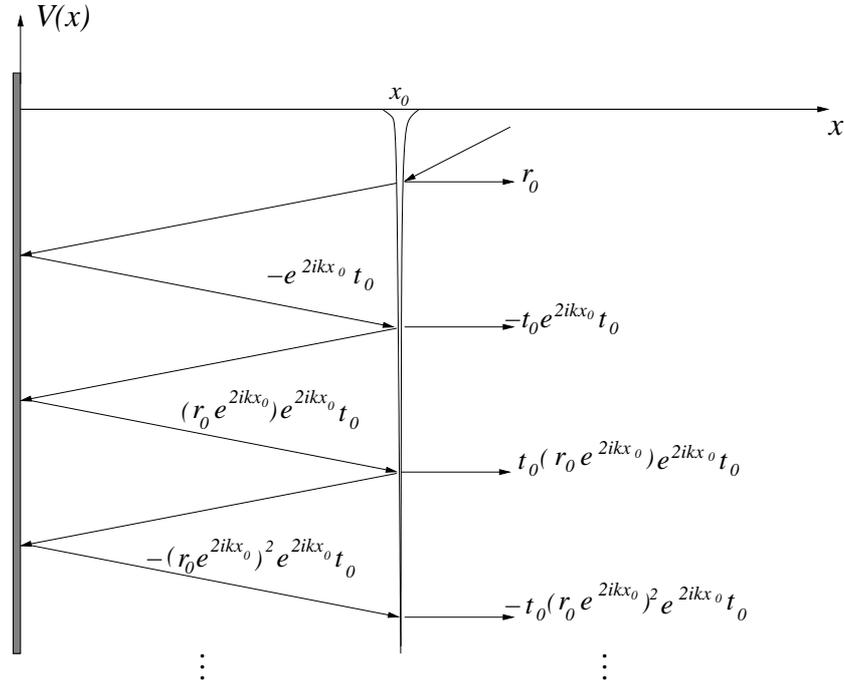


Figura 3.2: Esquema de las múltiples reflexiones que ocurren cuando una onda incide hacia el interior de la cavidad.

es decir, la onda ve el potencial delta como una barrera impenetrable y es reflejada por completo en  $x = x_0$ . Cuando la intensidad del potencial es muy débil ( $\alpha \rightarrow 0$ ),  $r_0 \rightarrow 0$  y  $t_0 \rightarrow 1$ ; en ese caso

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} S = -e^{2ikx_0} \quad (3.15)$$

y la onda es reflejada con un doble cambio de fase, debido al camino recorrido desde el pozo delta hasta la pared impenetrable y después regresar al pozo delta, para después salir.

Realizamos la operación correspondiente y comprobamos que  $SS^\dagger = 1$ ; es decir, el flujo se conserva. Además, en este caso unidimensional podemos parametrizar la matriz  $S$  en la forma

$$S = e^{i\theta}, \quad (3.16)$$

donde  $\theta$  es 2 veces el corrimiento de fase más  $\pi$ , y puede obtenerse despejándola de la ecuación (3.12). De esa manera podemos ver que  $\theta$  depende de la

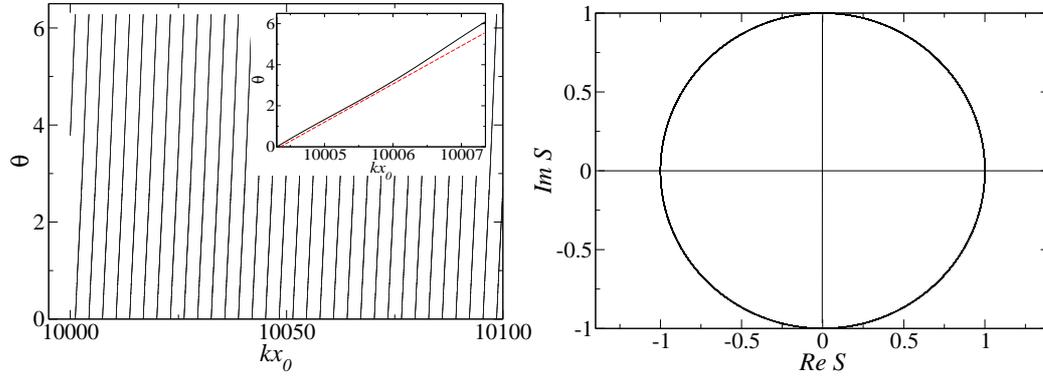


Figura 3.3: Dependencia de  $S$  (Ec. 3.12) como función de la energía. Del lado izquierdo se muestra  $\theta$  como función de  $kx_0$ . Conforme  $kx_0$  varía  $S$  se mueve en el círculo de radio 1 como se muestra en el diagrama de Argand en la gráfica del lado derecho. En el recuadro se muestra una ampliación de la fase; la línea discontinua es una recta para mostrar que la fase no es uniforme.

energía a través de  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ , además de los parámetros del potencial y  $x_0$ .

Es ilustrativo ver el movimiento de  $S$  ó  $\theta$  como función de  $k$ . Conforme  $k$  aumenta  $S$  describe un círculo de radio uno, centrado en el origen, cuando la graficamos en el plano de Argand. Lo interesante de este problema es la existencia de energías particulares en donde la onda permanece por un largo tiempo dentro de la región  $0 < x < x_0$ ; estas energías se conocen como energías de resonancia [1]. La dependencia de  $\theta$  como función de la energía se muestra en la gráfica del lado izquierdo de la figura 3.3, donde se pueden observar las resonancias que ocurren en el sistema. Para los resultados numéricos mostrados en las figuras 3.3 y 3.4 se usaron los siguientes datos:  $\alpha x_0 = 10^3$  y  $kx_0$  desde  $10^4$  hasta completar alrededor de 35 resonancias.

De la gráfica del lado izquierdo en la figura 3.3 vemos que  $\theta$  visita de una manera no uniforme el intervalo de 0 a  $2\pi$ . Por tanto, es interesante observar un histograma de  $\theta$ . Se sabe que la distribución  $P(\theta)$  de  $\theta$  está dada por lo que se conoce como el kernel de Poisson, a saber [1, 29, 30]

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |\langle S \rangle|^2}{|S - \langle S \rangle|^2}, \quad (3.17)$$

donde  $\langle S \rangle$  es el promedio de  $S$ . En la sección 3.3 repetiremos el cálculo presentado en las Refs. [1, 3] para obtener el kernel de Poisson.

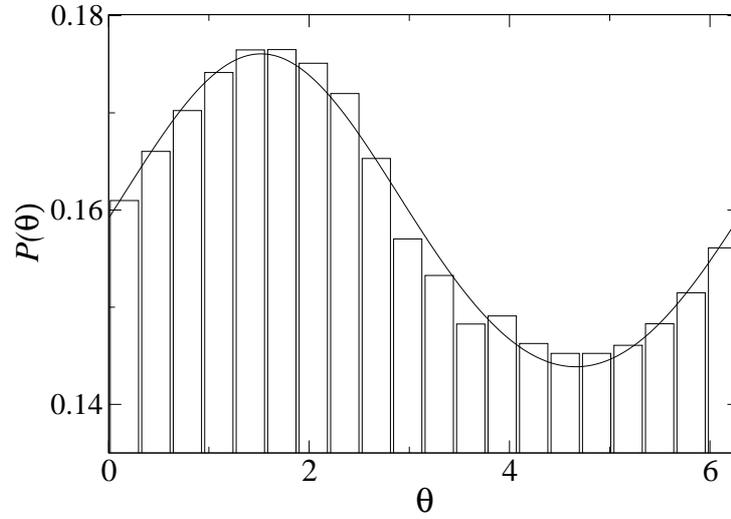


Figura 3.4: Distribución  $P(\theta)$ . El histograma obtenido con los datos numéricos coincide con el kernel de Poisson (curva continua), Ec. (3.17). Nótese que el kernel de Poisson sólo depende del promedio de la matriz  $S$ . El valor de  $\langle S \rangle$  usado en la curva continua se obtuvo de los datos numéricos.

En la figura 3.4 se compara el histograma, con 20 celdas obtenido del conjunto de  $10^5$  datos que incluyen alrededor de 35 resonancias, con el kernel de Poisson (curva continua) donde se usó el promedio de los datos numéricos. Como se observa, el acuerdo es excelente.

## 3.2. Estructura analítica de la matriz $S$

En el caso unidimensional mostrado en la figura 3.1 la matriz de dispersión  $S$  asociada a este sistema, Ec. (3.12), puede escribirse de la siguiente manera

$$S = -\frac{(\sin kx_0 - \frac{k}{\alpha} \cos kx_0) - i\frac{k}{\alpha} \sin kx_0}{(\sin kx_0 - \frac{k}{\alpha} \cos kx_0) + i\frac{k}{\alpha} \sin kx_0}, \quad (3.18)$$

donde hemos usado las Ecs. (3.5) y (3.6). La Ec. (3.18) muestra que  $S$  es un número complejo con módulo uno. Esta propiedad, conocida como *unitariedad*, asegura la conservación de flujo; es decir que ambos, tanto el flujo incidente como el saliente, son iguales.

Ahora, sabemos que al incidir una onda a nuestro sistema, parte de ella se reflejará con una cierta amplitud y otra parte se transmitirá al interior, entre el potencial delta y la barrera impenetrable, donde ocurrirán múltiples reflexiones, y habrá ciertas energías para las cuales el sistema entrará en resonancia. Estas resonancias son vistas como los polos de la matriz  $S$  en el plano  $k$  [1].<sup>2</sup> Para encontrarlos buscamos los ceros del denominador de la ecuación (3.18)

$$\left( \sin kx_0 - \frac{k}{\alpha} \cos kx_0 \right) + i \frac{k}{\alpha} \sin kx_0 = 0, \quad (3.19)$$

la cual puede escribirse como

$$\tan kx_0 = \frac{\frac{k}{\alpha}}{1 + i \frac{k}{\alpha}}. \quad (3.20)$$

Esta última ecuación no se puede resolver en forma exacta, pero se puede hacer una aproximación en el caso límite  $\alpha \rightarrow \infty$ . En ese límite

$$\tan kx_0 = 0, \quad (3.21)$$

lo cual implica que  $k$  toma los valores  $k_n$  dados por

$$k_n x_0 = n\pi, \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

Es decir, en el límite  $\alpha \rightarrow \infty$  los polos están cerca de los valores de  $k_n$  dados por la ecuación (3.22), los cuales a su vez corresponden con los estado ligados del sistema.

Ahora si tomamos  $\frac{k}{\alpha} \ll 1$ , la ecuación (3.20) puede desarrollarse para dar

$$\tan kx_0 \simeq \frac{k}{\alpha} - i \left( \frac{k}{\alpha} \right)^2 - \dots, \quad (3.23)$$

donde hemos usado la siguiente relación conocida

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad (3.24)$$

---

<sup>2</sup>Esta es una extensión de  $k$  al plano complejo, donde los polos de  $S$  corresponden a las resonancias.

con  $x = \frac{ik}{\alpha}$ . Dado que sabemos que los polos de la matriz  $S$  se encuentran cerca de  $n\pi$  y además  $\frac{k}{\alpha} \ll 1$ , escribimos  $kx_0 = n\pi + \epsilon$  con  $\epsilon \ll 1$ ; así

$$\tan \epsilon = \frac{n\pi + \epsilon}{\alpha x_0} - i \left( \frac{n\pi + \epsilon}{\alpha x_0} \right)^2 + \dots \quad (3.25)$$

además,

$$\tan \epsilon = \epsilon + \frac{\epsilon^3}{3} + \dots \quad (3.26)$$

Entonces, tenemos que

$$\epsilon - \frac{n\pi + \epsilon}{\alpha x_0} + i \left( \frac{n\pi + \epsilon}{\alpha x_0} \right)^2 + \dots = 0, \quad (3.27)$$

de donde

$$\begin{aligned} \epsilon \simeq & \left( \frac{n\pi}{\alpha x_0} \right) \left( 1 - \frac{1}{\alpha x_0} + i \frac{2n\pi}{(\alpha x_0)^2} \right)^{-1} \\ & - i \left( \frac{n\pi}{\alpha x_0} \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{\alpha x_0} + i \frac{2n\pi}{(\alpha x_0)^2} \right)^{-1} + \dots \end{aligned} \quad (3.28)$$

Hacemos una vez más un desarrollo en serie y obtenemos

$$\begin{aligned} \epsilon \simeq & \frac{n\pi}{\alpha x_0} \left[ 1 + \frac{1}{\alpha x_0} - i \frac{2n\pi}{(\alpha x_0)^2} + \left( -\frac{1}{\alpha x_0} + i \frac{2n\pi}{(\alpha x_0)^2} \right)^2 + \dots \right] \\ & - i \left( \frac{n\pi}{\alpha x_0} \right)^2 \left[ 1 + \frac{1}{\alpha x_0} - i \frac{2n\pi}{(\alpha x_0)^2} + \left( -\frac{1}{\alpha x_0} + i \frac{2n\pi}{(\alpha x_0)^2} \right)^2 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Finalmente obtenemos el valor de  $\epsilon$  dado por

$$\epsilon \simeq \frac{n\pi}{\alpha x_0} + \frac{n\pi}{(\alpha x_0)^2} + \dots - i \left( \frac{n\pi}{\alpha x_0} \right)^2 + \dots, \quad (3.30)$$

luego los valores aproximados de  $k$  para  $k/\alpha \ll 1$ , están dados por

$$k_n x_0 = k'_n x_0 - i\gamma_n, \quad (3.31)$$

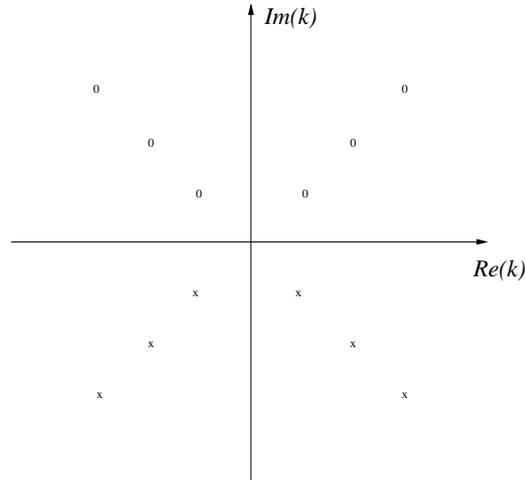


Figura 3.5: Estructura analítica de la matriz  $S$  en el plano  $k$ . Los polos de  $S$  se encuentran en el semiplano inferior, por lo que la matriz  $S$  será analítica en el semiplano superior del plano  $k$ .

donde

$$k'_n x_0 = n\pi + \frac{n\pi}{\alpha x_0} + \frac{n\pi}{(\alpha x_0)^2} - \dots, \quad (3.32)$$

y

$$\gamma_n = \left( \frac{n\pi}{\alpha x_0} \right)^2 + \dots \quad (3.33)$$

Tenemos así que los polos de la matriz  $S$ , que corresponden a las resonancias, se encuentran en el semiplano inferior del plano complejo para  $k$  y los ceros en las posiciones conjugadas, con lo cual se asegura la unitariedad de  $S$ . De esta manera la matriz  $S$  es analítica en el semiplano superior del plano complejo (ver figura 3.5). Este es un resultado importante dado que ello nos permite obtener una expresión para el promedio de  $S$  con respecto a la energía, que denotaremos por  $\langle S \rangle$ .

El promedio de la  $m$ -ésima potencia de  $S$ ,  $\langle S^m(E) \rangle$ , pesada por facilidad con una función de peso Lorentziana, centrada en alguna energía  $E_0$  y de anchura  $I$  es [1]

$$\langle S^m(E) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S^m(E) \frac{\frac{I}{\pi}}{(E - E_0)^2 + I^2} dE$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} S^m(E) \frac{\frac{I}{\pi}}{[E - (E_0 - iI)][E - (E_0 + iI)]} dE \\
&= \frac{I}{\pi} \oint \frac{S^m(E)}{[E - (E_0 - iI)][E - (E_0 + iI)]} dE \\
&= S^m(E_0 + iI).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Donde para resolver la integral hemos usado el teorema integral de Cauchy. Finalmente del último resultado se tiene que

$$\langle S^m(E) \rangle = \langle S(E) \rangle^m. \tag{3.35}$$

Es decir, el promedio de la  $m$ -ésima potencia de  $S$  coincide con la  $m$ -ésima potencia del promedio de  $S$ . Este resultado se conoce como condición de analiticidad porque depende de la estructura analítica y ergodicidad porque hace promedios sobre la energía.

### 3.3. Distribución de la matriz $S$

En esta sección estamos interesados en saber cuál es la probabilidad con que la matriz  $S = e^{i\theta}$  visita un intervalo cualquiera entre  $\theta$  y  $\theta + d\theta$ .

Por un lado sabemos que como consecuencia de la unitariedad y por tratarse de un número complejo, la matriz  $S$  puede representarse en forma paramétrica como

$$S = e^{i\theta}. \tag{3.36}$$

Aunque la integral (3.34) es sobre  $E$ , puede ser convertida en una integral sobre la parte angular  $\theta$  de tal manera que el promedio de la  $m$ -ésima potencia de  $S$  es

$$\langle S^m \rangle = \int_0^{2\pi} P(\theta) e^{im\theta} d\theta. \tag{3.37}$$

La distribución de probabilidad  $P(\theta)$  es periódica, ya que vive en un círculo, por lo tanto, podemos proponer dicha distribución como una serie de Fourier; es decir

$$P(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\theta}. \tag{3.38}$$

Ahora, para que la distribución propuesta sea una distribución de probabilidad debe satisfacer que

$$P(\theta) = P^*(\theta); \tag{3.39}$$

es decir,  $P(\theta)$  es un número real. Entonces

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^* e^{-im\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{-m}^* e^{im\theta}, \quad (3.40)$$

de donde obtenemos la condición que nos garantiza que la distribución  $P(\theta)$  es un número real

$$c_m = c_{-m}^*. \quad (3.41)$$

Además,  $P(\theta)$  también debe estar normalizada, por lo que se debe satisfacer

$$\int_0^{2\pi} P(\theta) d\theta = 1, \quad (3.42)$$

de donde tenemos que

$$1 = \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m \left( \int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta \right) + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \left( \int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta \right) + 2\pi c_0. \quad (3.43)$$

Así, de la condición de normalización, Ec. (3.42), obtenemos

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}. \quad (3.44)$$

Por otro lado, los coeficientes  $c_m$  estarán dados por

$$c_{-m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\theta) e^{im\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \langle S \rangle^m. \quad (3.45)$$

Además, como  $\langle S^m \rangle = \langle S \rangle^m$ , tenemos que

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \langle S \rangle^{*m} S^m \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \langle S \rangle^{*m} S^m + \sum_{m=0}^{\infty} \langle S \rangle^m S^{*m} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Luego, identificamos la serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}, \quad (3.47)$$

y de esta manera  $P(\theta)$  puede escribirse como

$$\begin{aligned}
P(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{1 - S\langle S \rangle^*} + \frac{1}{1 - S^*\langle S \rangle} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{(1 - S^*\langle S \rangle) + (1 - S\langle S \rangle^*) - (1 - S\langle S \rangle^*)(1 - S^*\langle S \rangle)}{(1 - S\langle S \rangle^*)(1 - S^*\langle S \rangle)} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |\langle S \rangle|^2}{(S - \langle S \rangle)(S^* - \langle S \rangle^*)}. \tag{3.48}
\end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos la distribución de probabilidad de la fase de la matriz  $S$ , dada por

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |\langle S \rangle|^2}{|S - \langle S \rangle|^2}. \tag{3.49}$$

Así, tenemos que la ecuación (3.37) nos conduce a la solución única para  $P(\theta)$  dada por la ecuación (3.49) la cual es conocida como *kernel de Poisson* [30]. En este caso, podemos interpretar el kernel de Poisson como la probabilidad de encontrar a la matriz  $S$  en un intervalo entre  $\theta$  y  $\theta + d\theta$  cuando la energía  $E$  va de  $-\infty$  a  $\infty$ .

# Capítulo 4

## Cavidad unidimensional con absorción

En este capítulo estudiaremos los efectos de la absorción en las propiedades de dispersión. Para ello, proponemos un modelo similar al del capítulo anterior, pero ahora el potencial es complejo, de hecho, imaginario puro negativo para que simule las pérdidas que ocurren en cavidades [31]. Con este modelo estudiaremos las resonancias que ocurren dentro de la cavidad y obtendremos la distribución de la matriz de dispersión en una región de su espacio, en presencia de absorción. Este capítulo es la contribución principal de esta Tesis, donde seguiremos un procedimiento similar al del capítulo 3: las propiedades de analiticidad y ergodicidad nos permitirá obtener la distribución de la matriz de dispersión no unitaria.

### 4.1. Cavidad con absorción

Supongamos ahora que el pozo delta de nuestra cavidad unidimensional tiene una intensidad dada por un número imaginario puro cuya parte imaginaria es negativa para que simule absorción en el sistema. De esta manera la parte imaginaria del potencial es similar al de la figura 3.1.

La matriz de dispersión del potencial delta imaginario es una matriz subunitaria, que denotaremos por  $\tilde{S}_0$  y que tiene la estructura [ver Ec. (2.24)]

$$\tilde{S}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{r}_0 & \tilde{t}_0 \\ \tilde{t}_0 & \tilde{r}_0 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

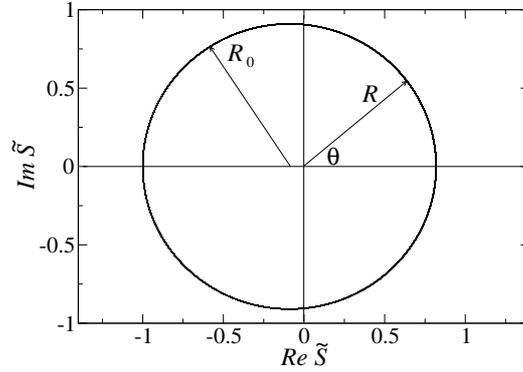


Figura 4.1: Movimiento de  $\tilde{S} = \sqrt{R}e^{i\theta}$  en el plano de Argand como función de  $kx_0$ ;  $\tilde{S}$  describe un círculo de radio menor que uno y cuyo centro está desplazado del origen.

donde

$$\tilde{r}_0 = -\frac{\alpha/2k}{1 + \alpha/2k}, \quad (4.2)$$

$$\tilde{t}_0 = \frac{1}{1 + \alpha/2k}. \quad (4.3)$$

De manera similar a lo realizado en el capítulo 3, la condición de que la función de onda se anule en  $x = 0$  combinada con la dispersión en el pozo delta imaginario, da como resultado que la matriz de dispersión del sistema tiene la misma forma que en la ecuación (3.12), pero ahora es subunitaria (esto se verá en la siguiente sección). Denotaremos por  $\tilde{S}$  la matriz de dispersión del sistema, de manera que

$$\tilde{S} = \tilde{r}_0 - \tilde{t}_0 \frac{1}{1 + \tilde{r}_0 e^{2ikx_0}} e^{2ikx_0} \tilde{t}_0. \quad (4.4)$$

Si realizamos la operación correspondiente podemos ver que  $SS^* < 1$ ; es decir, ahora el flujo no se conserva. En este caso unidimensional la matriz  $\tilde{S}$  se puede parametrizar en la forma

$$\tilde{S} = \sqrt{R}e^{i\theta}, \quad (4.5)$$

donde  $R < 1$ , es el coeficiente de reflexión;  $R$  y  $\theta$  se pueden obtener de la Ec. (4.4).

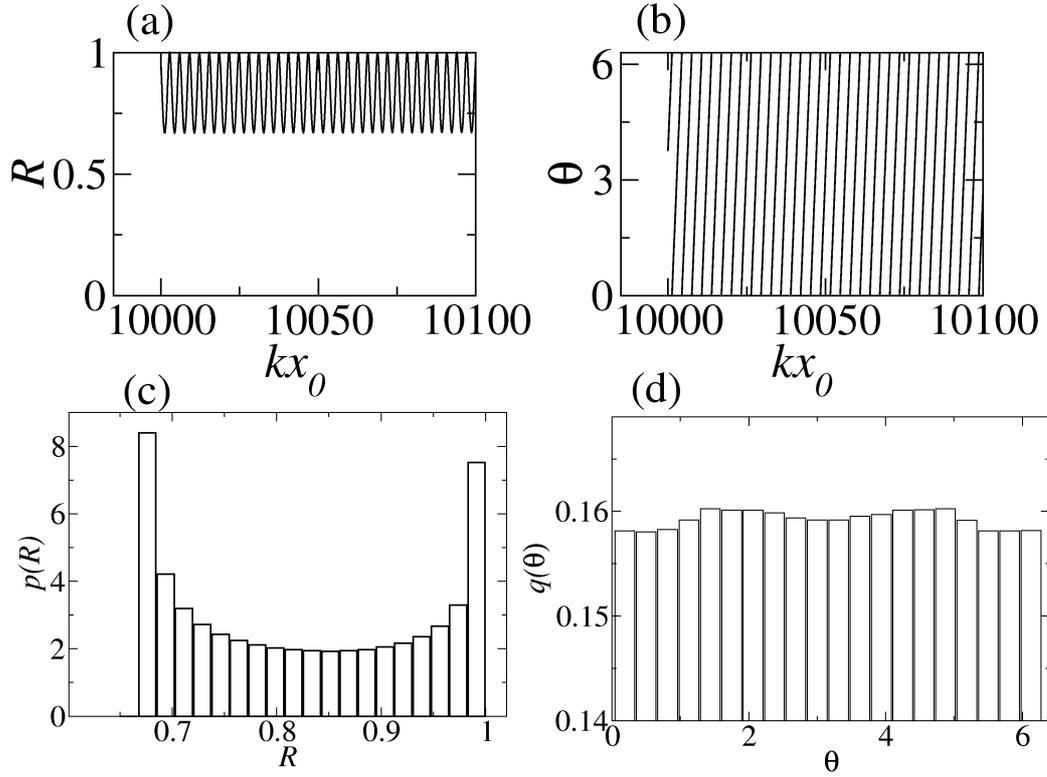


Figura 4.2: Comportamiento de (a)  $R$  y (b)  $\theta$  como función de  $kx_0$ . Las distribuciones marginales de  $R$  y  $\theta$  se muestran en (c) y (d), respectivamente. Las distribución marginal  $P(R)$  se obtienen de integrar  $P(R, \theta)$  sobre  $\theta$ . Por otro lado, para obtener  $P(\theta)$  integramos  $P(R, \theta)$  sobre  $R$ .

Ahora, de la Ec. (4.4) podemos ver que tanto  $R$  como  $\theta$  dependen de la energía a través de  $k$  y de los parámetros del potencial y de  $x_0$ . El movimiento de  $\tilde{S}$  como función de  $k$  debe observarse en las dos variables  $R$  y  $\theta$ . Aquí podemos realizar el mismo procedimiento que en el caso sin absorción; es decir, calculamos  $\tilde{S}$  de manera numérica como función de  $kx_0$  con los mismos valores para los parámetros del potencial.

El resultado para  $\tilde{S}$  en el plano de Argand se muestra en la figura 4.1, donde se observa que debido a la absorción,  $\tilde{S}$  vive en un anillo de radio interior  $R_{\min} = 0.6695$  y radio exterior  $R_{\max} = 1$  (los valores de  $R_{\min}$  y  $R_{\max}$  se obtienen del cálculo numérico). Por tanto, el coeficiente de reflexión  $R$

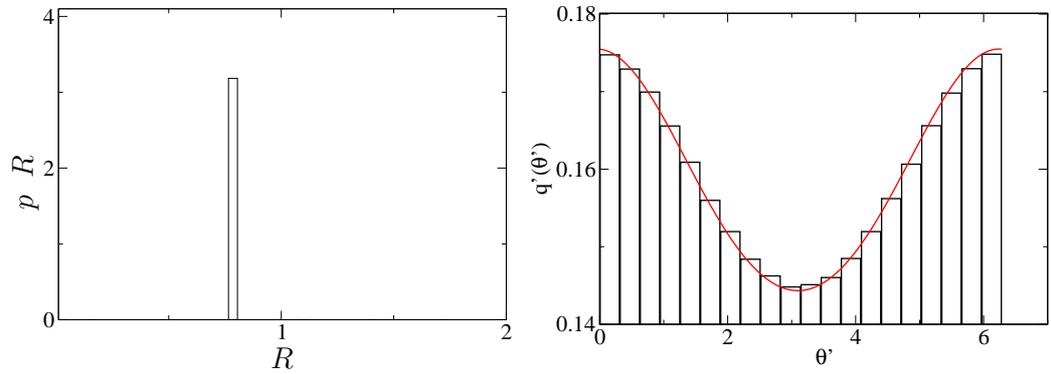


Figura 4.3: Distribuciones marginales del coeficiente de reflexión y de la fase vistas desde el origen desplazado. Puede notarse que desde este origen la distribución del coeficiente de reflexión es una delta centrada en  $R_0 = 0,8347$ . La distribución de la fase coincide con el kernel de Poisson subunitario con  $\langle \tilde{S}' \rangle$  y  $R_0$  tomados del cálculo numérico.

oscila entre  $R_{\min}$  y  $R_{\max}$ . Esto se observa claramente en la gráfica de  $R$  como función de  $kx_0$  que se muestra en la figura 4.2(a). Muy ilustrativo, también, resulta el histograma de  $R$ , que nos dice cómo la matriz  $\tilde{S}$  se distribuye en una banda circular [ver figura 4.2(c)]. La probabilidad de encontrar una  $R$  cerca de los extremos es mayor que en el centro de la banda; es decir, la matriz  $\tilde{S}$  está con mayor frecuencia en estos valores de  $R$ . El comportamiento de  $\theta$  es equivalente al del caso sin absorción, como puede observarse de la figura 4.2(b). El histograma da información más detallada sobre los valores de  $\theta$  que la matriz  $\tilde{S}$  visita con más frecuencia. La distribución de  $\theta$  se puede ver en la figura 4.2(d).

El movimiento de  $\tilde{S}$  describe un círculo pero cuyo centro está desplazado del origen y de radio menor que uno, debido a la absorción. El cálculo numérico muestra que el radio es  $R_0 = 0.8347$  (el subíndice “0” indica que se mide desde el centro del círculo). En la figura 4.3 graficamos las distribuciones de la fase y del coeficiente de reflexión vistas desde el origen desplazado. Es notable que la distribución de la fase coincide con el kernel de Poisson subunitario (ver más abajo, Ec. 4.41).

## 4.2. Estructura analítica de la matriz $\tilde{S}$

En esta sección estudiaremos la ubicación de las resonancias que ocurren cuando hay transmisión de ondas al interior de la cavidad en presencia de absorción. Para ello escribimos la matriz  $\tilde{S}$  de la siguiente manera

$$\tilde{S} = -\frac{\frac{k}{\alpha} \cos kx_0 - i \left(1 - \frac{k}{\alpha}\right) \sin kx_0}{\frac{k}{\alpha} \cos kx_0 - i \left(1 + \frac{k}{\alpha}\right) \sin kx_0}. \quad (4.6)$$

De esta expresión es claro que  $\tilde{S}$  es subunitaria, por lo que puede escribirse en forma paramétrica como en la Ec. (4.5).

Por otro lado, sabemos que las resonancias que ocurren al interior de la cavidad son vistas como los polos de la matriz  $\tilde{S}$  [1, 3], que son los ceros del denominador de la (4.6);

$$\frac{k}{\alpha} \cos kx_0 - i \left(1 + \frac{k}{\alpha}\right) \sin kx_0 = 0, \quad (4.7)$$

la cual puede escribirse como

$$\frac{k}{\alpha} - i \left(1 + \frac{k}{\alpha}\right) \tan kx_0 = 0. \quad (4.8)$$

Esta última ecuación no puede resolverse analíticamente en forma exacta. En forma similar al caso sin absorción buscaremos los polos en el límite  $\alpha \gg k$ . Así, para  $k/\alpha \rightarrow 0$ , a primera aproximación tenemos que

$$\tan kx_0 = 0. \quad (4.9)$$

Los valores de  $k$  que satisfacen esta ecuación son

$$k_n x_0 = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.10)$$

Entonces, en el siguiente orden en la aproximación tenemos que

$$\tan kx_0 = \frac{\frac{k}{i\alpha}}{1 + \frac{k}{\alpha}} \simeq \frac{k}{i\alpha} - \frac{1}{i} \left(\frac{k}{\alpha}\right)^2 + \dots, \quad (4.11)$$

donde hemos usado que

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n. \quad (4.12)$$

Entonces

$$\tan kx_0 \simeq \frac{kx_0}{i\alpha x_0} - \frac{1}{i} \left( \frac{kx_0}{\alpha x_0} \right)^2 + \dots \quad (4.13)$$

Sabemos que los polos de la matriz  $\tilde{S}$  se encuentran cerca de  $n\pi$  ya que  $\frac{k}{\alpha} \ll 1$ ; entonces, escribimos  $kx_0 = n\pi + \epsilon$  con  $\epsilon \ll 1$ , y

$$\tan \epsilon = -i \frac{n\pi + \epsilon}{\alpha x_0} + i \left( \frac{n\pi + \epsilon}{\alpha x_0} \right)^2 + \dots \quad (4.14)$$

Además, como  $\epsilon \ll 1$ , hacemos

$$\tan \epsilon \simeq \epsilon + \frac{\epsilon^3}{3} + \dots, \quad (4.15)$$

y tenemos

$$\epsilon + i \frac{n\pi + \epsilon}{\alpha x_0} - i \left( \frac{n\pi + \epsilon}{\alpha x_0} \right)^2 + \dots = 0, \quad (4.16)$$

de donde

$$\begin{aligned} \epsilon \simeq & -i \left( \frac{n\pi}{\alpha x_0} \right) \left( 1 + i \frac{1}{\alpha x_0} - i \frac{2n\pi}{(\alpha x_0)^2} \right)^{-1} \\ & + i \left( \frac{n\pi}{\alpha x_0} \right)^2 \left( 1 + i \frac{1}{\alpha x_0} - i \frac{2n\pi}{(\alpha x_0)^2} \right)^{-1} - \dots \end{aligned} \quad (4.17)$$

Una vez más el desarrollo en serie de esta última ecuación nos da

$$\begin{aligned} \epsilon \simeq & -i \frac{n\pi}{\alpha x_0} \left[ 1 - i \frac{1}{\alpha x_0} + i \frac{2n\pi}{(\alpha x_0)^2} + \left( i \frac{1}{\alpha x_0} - i \frac{2n\pi}{(\alpha x_0)^2} \right)^2 - \dots \right] \\ & + i \left( \frac{n\pi}{\alpha x_0} \right)^2 \left[ 1 - i \frac{1}{\alpha x_0} + i \frac{2n\pi}{(\alpha x_0)^2} + \left( i \frac{1}{\alpha x_0} - i \frac{2n\pi}{(\alpha x_0)^2} \right)^2 - \dots \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Finalmente obtenemos el valor de  $\epsilon$  dado por

$$\epsilon \simeq -i \frac{n\pi}{\alpha x_0} - \frac{n\pi}{(\alpha x_0)^2} + \dots + i \left( \frac{n\pi}{\alpha x_0} \right)^2 + \dots, \quad (4.19)$$

y ahora, los valores de  $k$  correspondientes a los polos están dados por

$$k_n x_0 = k'_n x_0 - i\gamma_n, \quad (4.20)$$

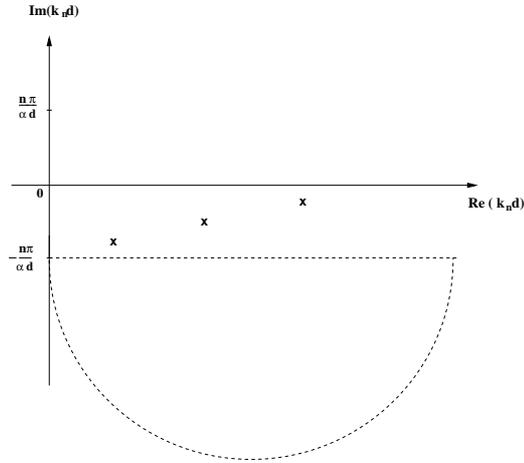


Figura 4.4: Estructura analítica de la matriz  $\tilde{S}$  en el plano  $k$ .

donde

$$k'_n x_0 = n\pi - \frac{n\pi}{(\alpha x_0)^2} + \dots, \quad (4.21)$$

y

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{\alpha x_0} - \left( \frac{n\pi}{\alpha x_0} \right)^2 + \dots. \quad (4.22)$$

De la figura 4.4, vemos la región en donde se encuentran los polos de  $\tilde{S}$ , es claro que podemos hacer una transformación que traslade el eje real por una cantidad  $w = -\frac{n\pi}{\alpha x_0}$ . Así,  $\tilde{S}$  será analítica en la parte inferior del plano complejo para  $k$  bajo esa transformación. En ese caso tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(E) \frac{\frac{I}{\pi}}{(E - E_0)^2 - I^2} dE &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(E + iw) \frac{\frac{I}{\pi}}{(E + iw - E_0)^2 - I^2} dE \\ &= \tilde{S}(E_0 + iI). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Finalmente del último resultado se tiene que

$$\langle \tilde{S}^m(E + iw) \rangle = \langle \tilde{S}(E + iw) \rangle^m. \quad (4.24)$$

Es decir, también para el caso de matrices subunitarias se satisface la condición de analiticidad y ergodicidad.

### 4.3. Kernel de Poisson para un anillo

En lo que sigue nos concentraremos en estudiar la distribución de  $\tilde{S}$  para el caso en que el coeficiente de reflexión  $R$  permanece constante.

De acuerdo con la Ec. (4.5), la matriz de dispersión puede parametrizarse como

$$\tilde{S} = \sqrt{R}e^{i\theta}. \quad (4.25)$$

Por lo tanto, el promedio de la  $m$ -ésima potencia de  $\tilde{S}$  es, por definición

$$\langle \tilde{S}^m \rangle = \int_0^{2\pi} P(\theta) R^{m/2} e^{im\theta} d\theta, \quad (4.26)$$

además se tiene que

$$\langle \tilde{S}^m \rangle^* = \int_0^{2\pi} P(\theta) R^{m/2} e^{-im\theta} d\theta. \quad (4.27)$$

Como en el caso unitario, la distribución  $P(\theta)$ <sup>1</sup> es periódica si consideramos  $R < 1$  pero fijo; por lo tanto, podemos proponer dicha distribución como una serie de Fourier dada por

$$P(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\theta}. \quad (4.28)$$

Sabemos que  $P(\theta)$ , por ser una distribución de probabilidad, debe ser un número real, por lo que debe satisfacer

$$P(\theta) = P^*(\theta). \quad (4.29)$$

Además, también debe satisfacer la condición de normalización dada por

$$\int_0^{2\pi} P(\theta) d\theta = 1. \quad (4.30)$$

De la condición (4.29) obtenemos

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^* e^{-im\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{-m}^* e^{im\theta}; \quad (4.31)$$

---

<sup>1</sup>Aunque usamos para esta distribución el mismo nombre que se usó para el kernel de Poisson unitario, son dos funciones distintas y no se deben confundir.

en esta última igualdad cambiamos  $m$  por  $-m$  de donde tenemos que

$$c_m = c_{-m}^*. \quad (4.32)$$

La condición (4.32) nos garantiza que la distribución  $P(\theta)$  propuesta es un número real, tal como deberíamos esperar para cualquier distribución de probabilidad.

Luego de la condición de normalización dada por la Ec. (4.30) se tiene

$$\sum_{m=-\infty}^{-1} c_m \int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta + 2\pi c_0 = 1, \quad (4.33)$$

y entonces obtenemos

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}. \quad (4.34)$$

Ahora, de la distribución propuesta por la Ec. (4.28) podemos determinar los coeficientes  $c_{-n}$  como

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} P(\theta) e^{in\theta} d\theta &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_0^{2\pi} e^{i(m+n)\theta} d\theta \\ &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \delta_{m,-n} \\ &= 2\pi c_{-n}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde podemos escribir

$$R^{m/2} c_{-m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\theta) R^{m/2} e^{im\theta} d\theta. \quad (4.36)$$

Esta última ecuación puede ser escrita de forma más conveniente como

$$c_{-m} = \frac{1}{2\pi} \frac{\langle \tilde{S} \rangle^m}{R^{m/2}}. \quad (4.37)$$

Luego, para obtener el coeficiente  $c_n$  hacemos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} P(\theta) e^{-in\theta} d\theta &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta \\ &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \delta_{m,n} \\ &= 2\pi c_n, \end{aligned} \quad (4.38)$$

y así tenemos que

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \frac{\langle \tilde{S} \rangle^{*m}}{R^{m/2}}, \quad (4.39)$$

de donde vemos que ambos coeficientes dados por las Ecs. (4.37) y (4.39) cumplen con la condición (4.32).

Así podemos realizar la sumatoria para obtener

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\theta} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} e^{-im\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{im\theta} + c_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{R}{|\tilde{S}^*|^2} \frac{R - |\langle \tilde{S} \rangle|^2}{|\tilde{S} - \langle \tilde{S} \rangle|^2}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Finalmente, la distribución de la matriz de dispersión subunitaria  $\tilde{S}$  de módulo al cuadrado  $R < 1$ , está dada por

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{R - |\langle \tilde{S} \rangle|^2}{|\tilde{S} - \langle \tilde{S} \rangle|^2}, \quad (4.41)$$

con  $R = R_0$ . Notemos que cuando  $R = 1$  se tiene que  $\tilde{S} = S$  y recuperamos el kernel de Poisson para el caso unitario, tal como se podría esperar. En el caso límite se verifica entonces la Ec. (4.41).

#### 4.4. Traslación de la matriz $\tilde{S}$

De la figura 4.1 observamos que  $\tilde{S}$  vive en un círculo de radio menor que uno y cuyo centro está desplazado del origen. Por tanto, es interesante saber cuál es la distribución de  $\tilde{S}$  vista desde el origen y fuera de él. Para ello, consideremos la figura 4.5, de donde tenemos las siguientes relaciones

$$\theta = \pi - \alpha, \quad (4.42)$$

$$\theta' = \pi - \alpha', \quad (4.43)$$

y obtenemos

$$\cos \alpha = -\cos \theta, \quad (4.44)$$

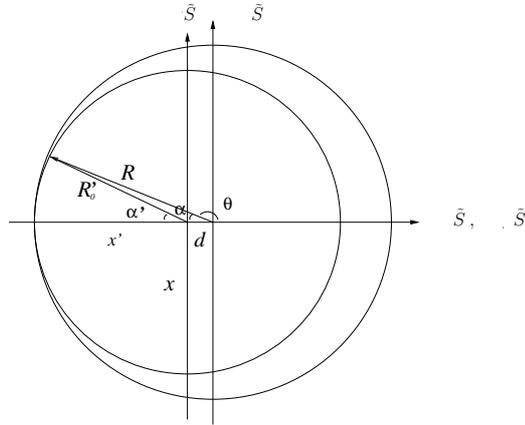


Figura 4.5: Traslación de la matriz  $\tilde{S}$ .

$$\cos \alpha' = -\cos \theta', \quad (4.45)$$

$$\sin \alpha = \sin \theta, \quad (4.46)$$

$$\sin \alpha' = \sin \theta'. \quad (4.47)$$

La matriz de dispersión en las coordenadas primadas y en las no primadas la escribimos como

$$\tilde{S} = \sqrt{R}e^{i\theta}, \quad (4.48)$$

$$\tilde{S}' = \sqrt{R'}e^{i\theta'}. \quad (4.49)$$

Por un lado, sabemos que la distribución de  $\tilde{S}'$  esta dada por la Ec. (4.41) con  $R = R'$ ,  $\tilde{S} = \tilde{S}'$  y  $\theta = \theta'$ ; sin embargo, estamos interesados en saber cuál es la distribución de la matriz de dispersión vista desde las coordenadas no primadas. Para ello hacemos la siguiente transformación

$$P(R, \theta)dRd\theta = P'(R', \theta')dR'd\theta' \quad (4.50)$$

$$P(R, \theta) = JP'(R', \theta'). \quad (4.51)$$

Esta última transformación es un simple cambio de variable de  $P'(R', \theta')$  a

$P(R, \theta)^2$ , donde  $J$  es el Jacobiano de dicha transformación, y está dado por

$$J = \left| \frac{\partial(R', \theta')}{\partial(R, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial R'}{\partial R} & \frac{\partial R'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial R} & \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \end{vmatrix}. \quad (4.52)$$

Ahora, la relación entre las matrices de dispersión  $\tilde{S}$  y  $\tilde{S}'$  es

$$\tilde{S} = x + iy = (x' - d) + iy' = \sqrt{R'}e^{i\theta'} - d, \quad (4.53)$$

es decir

$$\tilde{S} = \tilde{S}' - d, \quad (4.54)$$

o de manera equivalente

$$\sqrt{R'}e^{i\theta'} = \sqrt{R}e^{i\theta} + d. \quad (4.55)$$

Si multiplicamos la Ec. (4.55) por su conjugado obtenemos

$$R' = R + d^2 + 2\sqrt{R}d \cos \theta. \quad (4.56)$$

La diferencial de estas dos últimas ecuaciones son

$$\frac{1}{2}R'^{-1/2}e^{i\theta'}dR' + iR'^{1/2}e^{i\theta'}d\theta' = \frac{1}{2}R^{-1/2}e^{i\theta}dR + iR^{1/2}e^{i\theta}d\theta, \quad (4.57)$$

$$dR' = dR + R^{-1/2}d \cos \theta dR - 2R^{1/2}d \sin \theta d\theta, \quad (4.58)$$

las cuales nos permiten obtener las siguientes derivadas parciales

$$\frac{\partial R'}{\partial R} = 1 + R^{-1/2}d \cos \theta, \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial R'}{\partial \theta} = -2R^{1/2}d \sin \theta, \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial R} = \frac{1}{2iR^{1/2}e^{i\theta'}} \left[ R^{-1/2}e^{i\theta} - R'^{-1/2}e^{i\theta'} (1 + R^{-1/2}d \cos \theta) \right], \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = \frac{1}{iR^{1/2}e^{i\theta'}} \left( iR^{1/2}e^{i\theta} + R'^{-1/2}R^{1/2}de^{i\theta'} \sin \theta \right). \quad (4.62)$$

---

<sup>2</sup>Aunque usamos para esta distribución el mismo nombre que se usó para el kernel de Poisson unitario y en un anillo de las secciones anteriores, la que usamos aquí depende de dos variables y no se debe confundir con las anteriores.

Al realizar las operaciones correspondientes obtenemos el Jacobiano de la transformación dado por

$$J = 1, \quad (4.63)$$

por lo que la expresión que relaciona las distribuciones en las coordenadas primadas con las no primadas es

$$P(R, \theta) = P'(R', \theta'). \quad (4.64)$$

Es decir, la distribución vista desde las coordenadas primadas es sólo la debida a una traslación, y por lo tanto, el área se preserva.

## 4.5. Distribuciones marginales

Un caso de interés en el área experimental, es el de cavidades de microondas donde se miden tanto la fase como el coeficiente de reflexión. Por ello, es importante saber cuál es la distribución tanto para la parte angular como para el coeficiente de reflexión cuando hay incidencia de ondas al interior de la cavidad. Por este motivo en esta sección estudiaremos y obtendremos una expresión analítica para ambas distribuciones. La definición precisa de distribución marginal se da más abajo.

Si tomamos en cuenta el resultado del Jacobiano de la transformación, la distribución queda como

$$P(R, \theta) = P'(R', \theta') = p'(R')q'(\theta'); \quad (4.65)$$

es decir, como hipótesis asumimos que en el sistema primado, las distribuciones  $p'(R')$  y  $q'(\theta')$  son independientes. Por otro lado, de la sección anterior tenemos las siguientes relaciones

$$q'(\theta') = \frac{1}{2\pi} \frac{R' - |\langle \tilde{S}' \rangle|^2}{|\tilde{S}' - \langle \tilde{S}' \rangle|^2}, \quad (4.66)$$

$$p'(R') = \delta(R' - R'_0), \quad (4.67)$$

$$\tilde{S}' = \sqrt{R'} e^{i\theta'}, \quad (4.68)$$

$$\tilde{S}' = \tilde{S} + d, \quad (4.69)$$

$$R' = |\tilde{S} + d|^2, \quad (4.70)$$

$$\langle \tilde{S}' \rangle = \langle \tilde{S} \rangle + d. \quad (4.71)$$

Así, la distribución en términos de las variables no primadas es

$$P(R, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \tilde{S} + d \right|^2 - \left| \langle \tilde{S} \rangle + d \right|^2}{\left| \tilde{S} - \langle \tilde{S} \rangle \right|^2} \delta(R' - R'_0), \quad (4.72)$$

donde esta última expresión puede interpretarse como el probabilidad de permanencia de que la matriz  $\tilde{S}$  en una región entre  $R$  y  $R + dR$  y,  $\theta$  y  $\theta + d\theta$ , cuando la energía va de  $-\infty$  a  $\infty$ .

### 4.5.1. Distribución marginal radial

La distribución marginal para la parte radial  $p(R)$  se puede calcular como

$$p(R) = \int_0^{2\pi} P(R, \theta) d\theta, \quad (4.73)$$

donde para realizar la integral anterior se requiere escribir la función delta  $\delta(R' - R'_0)$  en términos de los ceros en la variable  $\theta$  a través de la Ec. (4.56). Dicha transformación podemos realizarla en una dimensión utilizando la siguiente expresión conocida [32]

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_r} \frac{\delta(x - x_r)}{|f'(x)|_{x=x_r}}, \quad f(x_r) = 0. \quad (4.74)$$

En este caso, la integral es sobre la parte angular, por lo que para hacer la transformación consideramos que el radio es una constante. Así

$$f(\theta) = R' - R'_0, \quad (4.75)$$

de donde

$$R' = \left| \tilde{S} + d \right|^2 = R + d^2 + 2\sqrt{R}d \cos \theta, \quad (4.76)$$

es decir, tenemos que

$$f(\theta) = R + d^2 + 2\sqrt{R}d \cos \theta - R'_0, \quad (4.77)$$

cuya derivada respecto a  $\theta$  es

$$\frac{df}{d\theta} = f'(\theta) = -2\sqrt{R}d \sin \theta. \quad (4.78)$$

Ahora, los ceros de la función (4.77) los encontramos resolviendo la siguiente ecuación

$$f(\theta_{\pm}) = 0, \quad (4.79)$$

o bien

$$\left| \sqrt{R}e^{i\theta_{\pm}} + d \right|^2 = R'_0, \quad (4.80)$$

lo que da como resultado que

$$e^{i\theta_{\pm}} = -\alpha \pm i\sqrt{1-\alpha^2}, \quad (4.81)$$

donde hemos definido  $\alpha$  como

$$\alpha = \frac{R + d^2 - R'_0}{2\sqrt{R}d}. \quad (4.82)$$

Así, la transformación de la función delta queda entonces como

$$\delta(R' - R'_0) = \frac{\delta(\theta - \theta_+)}{|f'(\theta_+)|} + \frac{\delta(\theta - \theta_-)}{|f'(\theta_-)|}, \quad (4.83)$$

con

$$|f'(\theta_+)| = |f'(\theta_-)| = 2\sqrt{R}d \left| \sqrt{1-\alpha^2} \right|. \quad (4.84)$$

Entonces, la distribución marginal para la parte radial es

$$p(R) = \frac{1}{4\pi} \frac{R'_0 - |\langle \tilde{S} \rangle + d|^2}{d\sqrt{R} \left| \sqrt{1-\alpha^2} \right|} \left( \frac{1}{\left| \sqrt{R}e^{i\theta_+} - \langle \tilde{S} \rangle \right|^2} + \frac{1}{\left| \sqrt{R}e^{i\theta_-} - \langle \tilde{S} \rangle \right|^2} \right). \quad (4.85)$$

La comparación de este resultado analítico con el experimento numérico se muestra en la figura 4.6. El experimento se realizó para  $\alpha x_0 = 10^3$  y  $kx_0 = 10^4$  hasta completar 35 resonancias. Como veremos el acuerdo es excelente.

### 4.5.2. Distribución marginal angular

La distribución marginal para la parte angular podemos calcularla usando la siguiente expresión

$$q(\theta) = \int_0^1 P(R, \theta) dR. \quad (4.86)$$

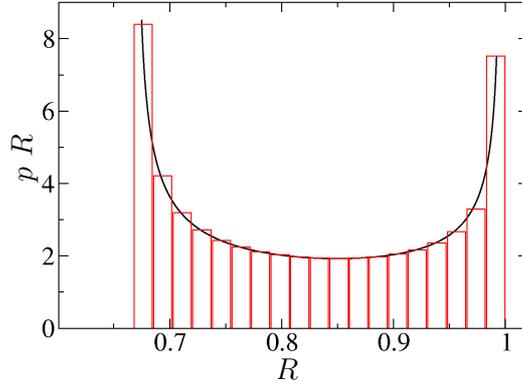


Figura 4.6: Distribución marginal para la parte radial. La gráfica muestra la comparación entre el resultado numérico y el cálculo analítico (en línea continua). Los resultados muestran un excelente acuerdo.

Dado que esta última integral es sobre  $R$ , sólo debemos considerar la transformación de la delta como la transformación de una función de  $R$ , en ese caso

$$\delta(f(R)) = \delta(R' - R'_0), \quad (4.87)$$

$$f(R) = R' - R'_0 = R + b\sqrt{R} + c, \quad (4.88)$$

donde

$$b = 2d \cos \theta, \quad (4.89)$$

$$c = d^2 - R'_0, \quad (4.90)$$

y, cuya derivada está dada por

$$\frac{df}{dR} = f'(R) = 1 + \frac{b}{2\sqrt{R}}. \quad (4.91)$$

Ahora, buscamos las raíces de  $f(R)$ , es decir el valor  $R_0$  tal que  $f(R_0) = 0$

$$R_0 + b\sqrt{R_0} + c = 0. \quad (4.92)$$

Para resolver esta última ecuación hacemos el siguiente cambio de variable

$$x = \sqrt{R_0}, \quad (4.93)$$

$$x^2 = R_0, \quad (4.94)$$

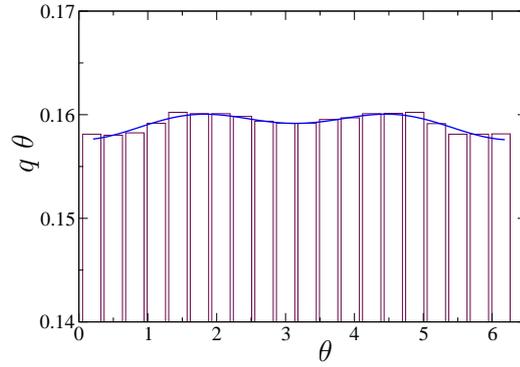


Figura 4.7: Distribución marginal para la parte angular. La gráfica muestra la comparación entre el resultado numérico y el calculo analítico (en línea continua). Los resultados muestran un excelente acuerdo.

y podemos escribir

$$x^2 + bx + c = 0, \quad (4.95)$$

cuyas soluciones son

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \left( -b \pm \sqrt{b^2 - 4c} \right), \quad (4.96)$$

$$x_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left( b^2 - 2c \mp b\sqrt{b^2 - 4c} \right); \quad (4.97)$$

es decir

$$\sqrt{R_{0\pm}} = \frac{1}{2} \left( -b \pm \sqrt{b^2 - 4c} \right), \quad (4.98)$$

$$R_{0\pm} = \frac{1}{2} \left( b^2 - 2c \mp b\sqrt{b^2 - 4c} \right). \quad (4.99)$$

Ahora, sabemos que  $\sqrt{R_{0\pm}}$  debe ser una cantidad positiva, es decir, sólo tomamos  $R_{0+}$  y  $\sqrt{R_{0+}}$ . De manera que la transformación de la delta queda como

$$\delta(R' - R'_0) = \frac{\delta(R - R_{0+})}{|f'(R_{0+})|}, \quad (4.100)$$

y la distribución marginal para la parte angular es:

$$q(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|f'(R_{0+})|} \frac{|\sqrt{R_{0+}}e^{i\theta} + d|^2 - |\langle \tilde{S} \rangle + d|^2}{|\sqrt{R_{0+}}e^{i\theta} - \langle \tilde{S} \rangle|^2}. \quad (4.101)$$

Nuevamente en la figura 4.7 se compara el cálculo analítico con el experimento numérico, realizado para  $\alpha x_0 = 10^3$  y  $kx_0 = 10^4$  hasta completar 35 resonancias. También aquí el acuerdo es excelente.

De las Ecs. (4.85) y (4.101) vemos que tanto la distribución marginal radial como la angular dependen de la energía a través de  $k$ , de los parámetros del potencial y de la distancia  $d$  que se desplaza el círculo subunitario. Para obtener las gráficas de las distribuciones marginales calculamos la matriz  $\tilde{S}$  de manera numérica como función de  $kx_0$  de la Ec. (4.4), observamos que a medida que  $kx_0$  aumenta,  $\tilde{S}$  describe un círculo de radio  $R < 1$ , debido al fenómeno de absorción (ver el capítulo 4). Calculamos un histograma tanto para  $R$  como para  $\theta$  con los siguientes datos:  $\alpha x_0 = 10^3$  y  $kx_0 = 10^4$  hasta completar 35 resonancias para luego comparar con el resultado analítico. Los resultados de las distribuciones marginales (comparado el resultado numérico con el analítico) tanto para la parte radial como para la parte angular se muestran en las figuras 4.6 y 4.7 respectivamente.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En esta Tesis hemos obtenido las propiedades de la matriz de dispersión para un sistema unidimensional que simula una cavidad unidimensional en presencia de pérdidas o disipación de energía, como ocurre en cavidades de microondas, resonadores acústicos o elásticos, entre otros. Primero analizamos el caso de una cavidad unidimensional que consiste en una pared impenetrable con un pozo de potencial delta real, para el cual se cumple la propiedad de conservación de flujo, es decir, no presenta disipación de energía en la región de confinamiento de las ondas. Se compara luego con el caso de un potencial delta imaginario en donde la propiedad de conservación de flujo no se satisface y por tanto, existen pérdidas. Nuestro resultado principal muestra que para el caso en que se tienen pérdidas se mantiene una de las propiedades importantes para matrices unitarias: la propiedad de analiticidad y ergodicidad. Esta propiedad nos permite hacer una generalización del kernel de Poisson, aunque ahora para matrices no unitarias. Demostramos que aunque en el sistema considerado se tienen tanto absorción como procesos directos la distribución de probabilidad de la matriz de dispersión en una región de su espacio *no es el kernel de Poisson al cuadrado* como sucede en cavidades de microondas. En su lugar se satisface el kernel de Poisson subunitario. Esto puede deberse a que tanto la absorción como los procesos directos se deben al pozo localizado en un punto. Esto recuerda la diferencia entre la absorción volumétrica [12] y la superficial [33]. La comparación de los resultados numéricos con los analíticos muestra un acuerdo excelente. Cabe mencionar que algunos de los resultados se publicaron en las memorias del *IV Mexican Meeting on Mathematical and Experimental Physics* que se llevó a cabo en la Ciudad de Mexico en junio de 2010 [31].

Una variante de este problema consiste de la pared impenetrable y la barrera delta real pero en el interior de la cavidad unidimensional formada el potencial es constante pero imaginario puro cuya parte imaginaria es negativa. Este problema es más próximo a lo que se tiene en cavidades de microondas bidimensionales y se espera que la matriz de dispersión se distribuya, en una región de su espacio, de acuerdo con el kernel de Poisson al cuadrado. Esperamos continuar con este trabajo en el futuro cercano

Finalmente, es claro que el procedimiento realizado puede generalizarse al estudio de sistemas con amplificación en lugar de absorción [31] o hacer una extensión al caso en el que se tienen dos o más canales. Esto forma también parte de un proyecto futuro.

# Apéndice A

## La función delta de Dirac

La función delta de Dirac [32] es una función generalizada y está definida en términos de sus propiedades

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx, \quad (\text{A.2})$$

donde  $f(x)$  es una función bien portada y la integración incluye el origen. Como un caso especial de la ecuación (A.1) tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1. \quad (\text{A.3})$$

De la ecuación (A.2),  $\delta(x)$  debe ser infinitamente alta e infinitamente delgada en  $x = 0$ . El problema es que dicha función no existe en el sentido estricto de función. Sin embargo, la importante propiedad de la ecuación (A.2) puede ser desarrollada rigurosamente como el límite de una secuencia de funciones, es decir, como una distribución.



# Bibliografía

- [1] P. A. Mello y N. Kumar, *Quantum Transport in Mesoscopic Systems: Complexity and Statistical Fluctuations* (Oxford University Press, New York, 2005).
- [2] H. Feshbach, C. E. Porter y V. F. Weisskopf, *Phys. Rev.* **96**, 448 (1954).
- [3] *Mesoscopic Quantum Physics*, editado por E. Akkermans, G. Montambaux, J.-L. Pichard y J. Zinn-Justin (North Holland, Amsterdam, 1996).
- [4] E. Doron, U. Smilansky y A. Frenkel, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3072 (1990).
- [5] O. Hul, O. Tymoshchuk, S. Bauch, P. M. Koch y L. Sirko, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 10489 (2005).
- [6] K. Schaadt y A. Kudrolli, *Phys. Rev. E* **60**, R3479 (1999).
- [7] V. Doya, O. Legrand y F. Mortessagne, *Opt. Lett.* **26**, 872 (2001).
- [8] L. Gutiérrez, A. Díaz-de-Anda, J. Flores, R. A. Méndez-Sánchez, G. Monsivais y A. Morales, *AIP Conference Proceedings* **1319**, 73 (2010). Editado por M. Martínez-Mares y J. A. Moreno-Razo (Melville, New York, 2010).
- [9] G. Báez, M. Martínez-Mares y R. A. Méndez-Sánchez, *Phys. Rev. E* **78**, 036208 (2008).
- [10] C. H. Lewenkopf, A. Müller y E. Doron, *Phys. Rev. A* **45**, 2635 (1992).
- [11] H.-J. Stöckmann y J. Stein, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2215 (1990).
- [12] P. W. Brouwer y C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. B* **55**, 4695 (1997).

- [13] R. Schäfer, H.-J. Stöckmann, T. Gorin y T. H. Seligman, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 184102 (2005).
- [14] X. Zheng, S. Hemmady, T. M. Antonsen, Jr., S. M. Anlage y E. Ott, *Phys. Rev. E* **73**, 046208 (2006).
- [15] D. V. Savin, O. Legrand y F. Mortessagne, *Europhys. Lett.* **76**, 774 (2006).
- [16] J. Barthelemy, O. Legrand y F. Mortessagne, *Phys. Rev. E* **71**, 016205 (2005).
- [17] O. Hul, S. Bauch, P. Pakoński, N. Savytskyy, K. Zyczkowski y L. Sirko, *Phys. Rev. E* **69**, 056205 (2004).
- [18] O. Hul, O. Tymoshchuk, S. Bauch, P. M. Koch y L. Sirko, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 10489 (2005).
- [19] C. W. J. Beenakker y P. W. Brouwer, *Physica E* **9**, 463 (2001).
- [20] E. Kogan, P. A. Mello y He Liqun, *Phys. Rev. E* **61**, R17 (2000).
- [21] M. Martínez-Mares y R. A. Méndez-Sánchez, *J. Phys. A: Math Gen.* **38**, 10873 (2005).
- [22] D. V. Savin, H.-J. Sommers y Y. V. Fyodorov, *JETP Lett.* **82**, 544 (2005).
- [23] U. Kuhl, H.-J. Stöckmann y R. Weaver, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 10433 (2005).
- [24] Y. V. Fyodorov, D. V. Savin, y H.-J. Sommers, *J. Phys. A* **38**, 10731 (2005).
- [25] R. A. Méndez-Sánchez, U. Kuhl, M. Barth, C. H. Lewenkopf y H.-J. Stöckmann, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 174102 (2003).
- [26] R. A. Méndez-Sánchez, G. Báez y M. Martínez-Mares, *AIP Conference Proceedings* **1319**, 82 (2010). Editado por M. Martínez-Mares y J. A. Moreno-Razo (Melville, New York, 2010).
- [27] U. Kuhl, M. Martínez-Mares, R.A. Méndez-Sánchez y H.-J. Stöckmann, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 144101 (2005).

- [28] V. A. Gopar, M. Martínez-Mares y R. A. Méndez-Sánchez, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 015103 (2008).
- [29] V. A. Gopar, Tesis Doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México (1999).
- [30] G. López, P. A. Mello y T. H. Seligman, *Zeit. Phys. A* **302** 351 (1981).
- [31] A. M. Martínez-Argüello, M. Martínez-Mares y R. A. Méndez-Sánchez, *AIP Conference Proceedings* **1319**, 90 (2010).
- [32] G. B. Arfken, *Mathematical Methods For Physicists*, Fifth Edition. Harcourt, Academic Press.
- [33] M. Martínez-Mares y P. A. Mello, *Phys. Rev. E* **72**, 026224 (2005).