UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

ANÁLISIS SEMICLÁSICO EN LA n ESFERA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA

ERIK IGNACIO DÍAZ ORTÍZ

DIRECTOR DE TESIS: **DR. CARLOS VILLEGAS BLAS**

MÉXICO,D.F. JUNIO 2011

Agradecimientos.

Quiero agradecer al Dr. Carlos Villegas Blas por su ayuda y colaboración en la realización de esta tesis. También agradezco a los sinodales Dr. Stephen Sontz, Dr. Salvador Pérez Esteva, Dr. Gregor Weingart y al Dr. Yury Vorobev por su interés y comentarios. Agradezco a Dr. Brian Hall por su sugerencia para encontrar el operador de aniquilación en $L^2(S^n)$, al CONACyT y a los proyectos PAPPIT-UNAM IN103208 y IN109610-2 por su apoyo económico para la realización de mis estudios de doctorado.

A DIOS
Que me diste la oportunidad de vivir y de regalarme una familia maravillosa.

A mis padres, Ignacio y Verónica.
Por su amor y apoyo incondicional. Por sus consejos, sus valores y la motivación que me han permitido ser una persona de bien. Por enseñarme desde pequeño a luchar por lo que quiero y nunca darme por vencido.

A mis hermanos, Hadya y Alberto.
Por soportarme y estar siempre dispuestos a ayudarme. Por estar conmigo y apoyarme siempre.

A mi esposa, Daisy.
Quien me brindó su amor, cariño, estímulo y apoyo constante. Gracias por darle a nuestro hijo el tiempo que yo no pude y que me permitió terminar este trabajo.

A mi hijo, Eliel.
Quien me prestó el tiempo que le pertenecia para terminar. Quien con su sonrisa, alegría e inocencia me daba animos para continuar y seguir adelante en los momentos que no me salian las cosas. Tu eres lo mas valioso que tengo en esta vida.

Resumen.

En el presente trabajo introduciré una transformada de Bargmann $\mathbf{B}_n$ para $L^2(S^n)$, $n \geq 2$. Aquí S^n denota la n esfera en $\mathbb{R}^{n+1}$. Dicha transformada la voy a introducir utilizando el espacio de funciones analíticas en la cuádrica nula considerado inicialmente por Bargmann y Todorov [4]. Probaré que el operador $\mathbf{B}_n$ es unitario y estudiaré las propiedades semiclásicas de los estados coherentes asociados. En particular probaré un teorema tipo Egorov que relaciona el símbolo de Berezin con el símbolo principal de un operador pesudo-diferencial sobre $L^2(S^n)$.

La definición de $\mathbf{B}_n$ es motivada en base a las transformadas de Bargmann para $L^2(\mathbb{R}^n)$, $L^2(S^2)$, $L^2(S^n)$ $n = 3, 5$ introducidas por Bargmann [3], Thomas/Wassell [29] y Villegas-Blas [31, 32, 33] respectivamente.

Contenido

Introducción.

En 1961 V. Bargmann [3] introdujo una transformación unitaria $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$, del espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ a un espacio de Hilbert $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ de funciones analíticas (en n variables complejas) de cuadrado integrable respecto a una medida gaussiana $v_n^\hbar$. A dicha transformación se le conoce como transformada de Bargmann.

Bargmann introdujo los espacios $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ con el propósito de dar un espacio de Hilbert donde los operadores $b_j^\dagger$ de multiplicación por z_j y $b_j = \hbar\partial/\partial z_j$ (con $\hbar$ la constante de Planck) $j = 1, 2, \ldots, n$ fuesen adjuntos uno del otro. La importancia de este hecho radica en que dichos operadores dan una representación de las relaciones canónicas de conmutacion (RCC).

La transformada de Bargmann $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ tiene la propiedad que intercambia los operadores $\mathbf{b}^\dagger = (b_1^\dagger, \ldots, b_n^\dagger)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ con la representación usual $\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{X} + \imath\hbar\mathbf{P})$ y $\mathbf{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{X} - \imath\hbar\mathbf{P})$ de las RCC sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$, con $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_n)$, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ donde X_j, P_j son los operadores de multiplicación por x_j y $-\imath\hbar\partial/\partial x_j$ respectivamente.

Se puede mostrar [31] que $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ es un operador integral, cuyo núcleo integral A_n cumple tres propiedades relevantes:

1. El conjunto de funciones $\{\overline{A_n(\cdot, \mathbf{z})} \mid \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n\}$ (etiquetados por elementos del espacio fase $\mathbb{R}^{2n} \approx \mathbb{C}^n$ de una partícula moviendose en $\mathbb{R}^n$) es igual al sistema canónico de estados coherentes para el oscilador armónico introducido por E. Schrödinger [26].

2. Para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, el núcleo reproductor se puede expresar por $A_n(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (\pi\hbar)^{-n/4} \exp(\frac{\imath}{\hbar}\Phi_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{z}))$, con $\Phi_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ la función generadora de la transformación canónica $\mathcal{C}_n : (T^*\mathbb{R}^n, \mathrm{d}\mathbf{x} \wedge \mathrm{d}\mathbf{p}) \to (\mathbb{C}^n, -\imath \mathrm{d}\mathbf{z} \wedge \mathrm{d}\overline{\mathbf{z}})$, enviando $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{z}, \overline{\mathbf{z}})$ con $\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} - \imath\mathbf{p})$. Es por ello que $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ se puede ver como la cuantización de la transformación canónica $\mathcal{C}_n$.

3. La transformada de Bargmann de $\overline{A_n(\cdot, \mathbf{z})}$ evaluada en $\mathbf{w}$ es igual al núcleo reproductor $K_n(\mathbf{w}, \mathbf{z})$ del espacio $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$.

La transformada de Bargmann $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ corresponde al estudio de una partícula moviendose en $\mathbb{R}^n$. Es natural preguntarse por una representación de funciones analíticas y una transformada de Bargmann para cuando la partícula se mueve en una variedad diferente de $\mathbb{R}^n$.

En [29] Thomas/Wassell, y posteriormente en [31, 32, 33] Villegas-Blas introducen una transformada de Bargmann $\mathbf{B}_{S^n}$ para una partícula moviendose sobre la n esfera en $\mathbb{R}^{n+1}$, S^n, con $n=2$ y $n=3,5$ respectivamente.

Más especificamente, una transformación unitaria de $L^2(S^n)$ sobre un subespacio $\mathcal{F}_m$ de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^m}$, $m=2,4,8$, de funciones que son invariantes bajo $\mathbb{Z}_2$, S^1 y $\mathrm{SU}(2)$ respectivamente.

Las dimensiones particulares $n=2,3,5$ proceden del hecho físico que, para energía fija negativa, sólo en estas dimensiones hay una correspondencia entre el problema de Kepler n dimensional y $m=2,4,8$ osciladores isotrópicos clásicos respectivamente.

Villegas-Blas definió la transformada de Bargmann para $L^2(S^n)$, $n=2,3,5$ basado en la cuantización de una transformación canónica no biyectiva que relaciona dos diferentes cuantizaciones del problema de Kepler n dimensinal. Dicha transformación $\mathcal{C}_{(n,m)}$ relaciona el haz cotangente de la esfera $T^*S^n-\{0\}$ (ésto es T^*S^n con la sección cero removida) para $n=2,3,5$, con $\mathbb{C}^m-\{0\}$, $m=2,4,8$ respectivamente. Es decir, Villegas-Blas consideró $\mathbf{B}_{S^n}$ como un operador integral cuyo núcleo integral es una serie de potencias de una función generadora $\vartheta_{(n,m)}(\mathbf{z},\mathbf{x})$, de la transformación canónica $\mathcal{C}_{(n,m)}$.

La transformación canónica $\mathcal{C}_{(n,m)}$ a su vez es la composición de una función $\rho_{(n,m)}$ de $\mathbb{C}^m-\{0\}$ sobre $\mathbb{Q}^n-\{0\}$ y una función σ_n que identifica $\mathbb{Q}^n-\{0\}$ con $T^*S^n-\{0\}$. La cuádrica nula $\mathbb{Q}^n$ es definada como el conjunto de elementos en $\mathbb{C}^{n+1}$ con la propiedad que la suma de los cuadrados de sus componentes es igual a cero.

Basado en ésto introduciré una transformada de Bargmann $\mathbf{B}_n$ para $L^2(S^n)$, $n\geq 2$. Consideraré el rango de $\mathbf{B}_n$ como el espacio de Hilbert $\mathcal{E}_n$ de funciones holomorfas sobre la cuádrica nula $\mathbb{Q}^n$, introducido por Bargmann-Todorov en [4].

En base a los casos $n=2,3,5$ [31, 33], propondré a $\mathbf{B}_n$ como un operador integral cuyo núcleo integral es una serie de potencias en $\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{y}/\hbar$, $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Q}^n$, $\mathbf{y}\in S^n$. Es decir, el núcleo integral de $\mathbf{B}_n$ es $\mathrm{K}(\mathbf{y},\boldsymbol{\alpha})=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{y}}{\hbar}\right)^k$. Los coeficientes c_k que aparecen en la serie son calculados tal que $\mathbf{B}_n$ es una isometría.

Cabe mencionar que para los casos $(n.m)=(2,2),(3,4),(5,8)$ se puede identificar el espacio $\mathcal{E}_n$ con $\mathcal{F}_m$ por medio de un operador unitario $\mathfrak{U}_{(n,m)}$, el cual es definido a través de la función $\rho_{(n,m)}$ mencionada arriba. Por tal motivo la transformada de Bargman $\mathbf{B}_{S^n}$ es un caso particular de la transformada $\mathbf{B}_n$.

Basado en la definición de estados coherentes para $L^2(\mathbb{R}^n)$, propondré los estados coherentes $\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}$ (etiquetados por elementos $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Q}^n$) para $L^2(S^n)$ como el complejo conjugado de $\mathrm{K}(\mathbf{y},\boldsymbol{\alpha})$.

La definición que propongo de los estados coherentes es en términos de una serie infinita, no expresable (al menos de manera inmediata) en términos de funciones especiales conocidas. Por lo que podría parecer difícil trabajar con éstos. Sin embargo basado en el trabajo de L. Thomas y S. Wassell [29], mostraré que la asintótica principal de los estados coherentes (como de sus derivadas) es practicamente una función exponencial (ver apéndice C). Usando ésto probaré propiedades semiclásicas de los estados coherentes.

Además mostraré que el conjunto $\mathcal{K} = \{\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n\}$ de estados coherentes para $L^2(S^n)$ satisfacen todas las propiedades (abajo mencionadas) que se puedieran esperar. Es decir satisfacen propiedades similares a las cumplidas por los estados coherentes del oscilador armónico.

Finalmente estableceré un teorema tipo Egorov que relacione el símbolo principal de un operador pseudodiferencial $A_\hbar$ actuando sobre un subconjunto denso de $L^2(S^n)$, $n \geq 2$ (la cuantización de una partícula clásica moviendose en S^n) con el límite semiclásico del símbolo de Berezin del operador correspondiente $\mathbf{B}_n A_\hbar (\mathbf{B}_n)^{-1}$.

Cabe mencionar que se han realizado otras generalizaciones de la transformada de Bargmann para el caso cuando la partícula se mueve en la esfera. Entre estas mencionamos el trabajo de B. Hall [8] y M. Stenzel [27] para cuando la partícula se mueve en un grupo de Lie compacto y un espacio simétrico de tipo compacto, respectivamente.

Más aún Hall y Mitchell en [11] definen una transformada de Bargmann y estados coherentes para la n esfera. Sin embargo éstos son diferentes a la dados aquí ya que ellos utiliza la cuádrica no nula.

Para el caso de las esferas S^1 y S^2, K. Kowalski y Rembielinski [16] introducen una transformada de Bargmann relacionada con la de B. Hall a través de la introducción de operadores de creación y aniquilación adecuados y argumentación física.

J. Rawnsley [23] introdujo una especie de transformada de Bargmann para la esfera S^n siguiendo ideas de cuantización geométrica. Sin embargo, dicha transformada resulta ser no unitaria.

K. Ii y R. Wada, [15] y [34] introducen una transformada de Bargmann unitaria para la n esfera con rango un espacio de funciones holomorfas en la cuádrica nula $\mathbb{Q}^n$. Esta transformación es diferente a la mostrada aquí ya que Ii y Wada fuerzan desde un principio al núcleo integral que define su transformada, a ser la exponencial de la función $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x})$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n$.

Odzijewicz y Horowski [14] introducen un conjunto de estados coherentes utilizando la cuádrica $\mathbb{Q}^3$. Sin embargo el rango que ellos utilizan y el núcleo reprodctor que obtienen no es el mismo al obtenido en este trabajo.

Este trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera.

En el primer capítulo, se revisan algunos aspectos básicos sobre espacios de funciones analíticas y un espacio en particular: el espacio de Bargmann, considerando la constante de Planck $\hbar$.

También se define la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$. Se muestra que es un operador unitario y se encuentra su inversa. Este material es conocido (ver [9]) y sólo se presentan aquí para completez de este trabajo y referencia posterior.

En el capítulo dos se da la definición de los estados coherentes sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$, a la vez de que se mencionan las cinco propiedades que cumplen. Finalmente doy una prueba rigurosa de un teorema tipo Egorov que relaciona (a través de la transformación canónica $\mathcal{C}_n$) el símbolo principal de un operador pseudo-diferencial A sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ con el límite semiclásico del símbolo de Berezin del operador $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n} A(\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n})^{-1}$.

En el capítulo tres se da una introducción a las transformadas de Bargmann para $L^2(S^2)$ y $L^2(S^3)$ introducidas por Thomas/Wassell [29] y Villegas-Blas [31] respectivamente. Los cuales lo probaron utilizando un cambio de base.

Motivado por la transformada de Bargmann sobre $L^2(S^2)$ y $L^2(S^3)$. En el capítulo cuatro definiré una transformada de Bargmann $\mathbf{B}_n$ sobre el espacio de Hilbert $L^2(S^n)$, $n \geq 2$. Mostraré que dicho operador es unitario y encontraré su inversa.

Además mostraré de forma rigurosa que la transformada de Bargmann de Thomas/Wassell y Villegas-Blas $\mathbf{B}_{S^n}$ (mencionada en el capítulo tres) es unitaria. Cabe aclarar que se da una demostración diferente a la dada por ellos ya que utilizo los operadores unitarios $\mathfrak{U}_{(n,m)}$ y $\mathbf{B}_n$ mencionados arriba.

En el capítulo cinco definiré los estados coherentes para $L^2(S^n)$, $n \geq 2$ y mostraré que cumplen propiedades similares a las satisfechas por los estados coherentes sobre $L^2(\mathbb{R}^k)$. Explicitamente dichos estados coherentes satisfacen:

i) Dan una resolución de la identidad.

ii) Son temporalmente estables bajo la evolución del tiempo de un operador que es básicamente la raíz cuadrada del Laplaciano sobre S^n.

iii) Existe un operador de aniquilación tal que los estados coherentes son funciones propias de éste.

iv) Satisfacen de manera óptima el principio de incertidumbre de Heisenberg.

v) Cumplen propiedades de concentración.

   (a) La función de densidad de probabilidad $\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}/\|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\|$ se concentra en $\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})/|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|$ para $\hbar$ pequeña.

   (b) La función de densidad de probabilidad $F_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}$ asociada a $\mathbf{B}_n\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}$ se concentra alrededor del punto $\boldsymbol{\alpha}$ para $\hbar$ pequeña. La función $F_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}$ incluye la función de peso de la medida sobre $\mathbb{Q}^n$ introducida por Bargmann y Todorov [4].

En el capítulo seis pruebo el teorema tipo Egorov anteriormente descrito. Además utilizando ésto pruebo otro teorema tipo Egorov para símbolo principal de operadores pseudo-diferenciales $A_\hbar$ sobre $L^2(S^n)$, $n = 2, 3, 5$ y símbolo de Berezin de $\mathbf{B}_{S^n} A_\hbar(\mathbf{B}_{S^n})^{-1}$.

Finalmente también se tienen tres apéndices.

En el apéndice A se muestra como obtiene Villegas-Blas [33] la transformación canónica $\mathcal{C}_{(n,m)}$.

En el apéndice B se da una breve introducción a operadores pseudo-diferenciales sobre $\mathbb{R}^n$ y variedades.

En el apéndice C (basado en el trabajo de Thomas/Wassell) se muestra la asintótica de las derivadas del núcleo integral. Dichas asintóticas son utilizadas para poder dar una prueba rigurosa del teorema tipo Egorov mencionado en el capítulo cuatro.

Capítulo 1

Transformada de Bargmann.

En este capítulo se desarrollarán las herramientas necesarias para poder definir la transformada de Bargmann en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Se discutirán las nociones básicas de núcleo reproductor y relaciones canónicas de conmutación.

Además se introduce el espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, y un operador unitario, llamado transformada de Bargmann, y denotado por $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$. Este operador tiene como dominio $L^2(\mathbb{R}^n)$ y toma valores en $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$.

1.1 Preliminares.

Antes de introducir el espacio de Bargmann, mencionaremos algunos teoremas conocidos que utilizaremos frecuentemente.

El contenido de esta sección (excepto el teorema 1.9) se tomó del artículo de Brian Hall [9]. De dicha referencia se sigue la presentación y enunciado de los teoremas. El teorema 1.9 aparece en el artículo de Bargmann [3]. Aquí solo se van a presentar discuciones de las ideas matemáticas principales de las demostraciones. Para más detalles ver [9].

1.1.1 Espacio de funciones holomorfas.

Sea U un conjunto abierto no vacío de $\mathbb{C}^n$ y α una función continua, estrictamente positiva sobre U.

Definición 1.1 *Una función $f : U \to \mathbb{C}$ es **holomorfa** si es continua y analítica en cada variable con las otras variables fijas. Esto es, si f satisface*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(\mathbf{z}) = 0 \qquad \textit{para} \quad 1 \leq j \leq n, \quad \mathbf{z} \in U \,.$$

Una función entera f se puede expresar como una serie de potencias

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^n} a_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}} \tag{1.1}$$

donde $\mathbf{z}^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}$ y $\mathbb{Z}_+$ es el conjunto de enteros no negativos. Dicha serie converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}^n$.

Denotemos por $\mathcal{H}(U)$ al espacio de funciones holomorfas sobre U. Sea $L^2(U,\alpha)$ el espacio de Hilbert con producto interior

$$\langle f,g\rangle_{L^2(U,\alpha)} = \int_U f(\mathbf{z})\overline{g}(\mathbf{z})\alpha(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}}$$

de funciones de valores complejos de cuadrado integrable respecto al peso α, donde $\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}}$ es la medida de Lebesgue $2n$-dimensional sobre $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$.

Definición 1.2 *Sea $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ el espacio de funciones holomorfas de cuadrado integrable respecto al peso α, es decir*

$$\mathcal{H}L^2(U,\alpha) = \left\{ f\in\mathcal{H}(U) \mid \int_U |f(\mathbf{z})|^2\alpha(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}} < \infty \right\}.$$

Teorema 1.3 *1. Para toda $\mathbf{z}\in U$, existe una constante $c_{\mathbf{z}}$ tal que*

$$|F(\mathbf{z})|^2 \le c_{\mathbf{z}}\|F\|^2_{L^2(U,\alpha)}$$

para toda $F\in\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$.

2. $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ es un subespacio cerrado de $L^2(U,\alpha)$. Así es un espacio de Hilbert.

Demostración.

1. Sea $\mathbf{z} = (z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$, y $F\in\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$. Definamos $P_s(\mathbf{z})$ por

$$P_s(\mathbf{z}) = \{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^n : |v_k - z_k| < s, k = 1,\dots,n\}. \tag{1.2}$$

Si $\mathbf{z}\in U$, escojamos a s tal que $\overline{P_s(\mathbf{z})}\subset U$. Ahora aseveramos que

$$F(\mathbf{z}) = (\pi s^2)^{-n}\int_{P_s(\mathbf{z})} F(\mathbf{w})\mathrm{d}\mathbf{w}\mathrm{d}\overline{\mathbf{w}}. \tag{1.3}$$

La igualdad anterior se prueba primero para $n=1$. Para ello se hace uso de la expansión en serie de Taylor de F centrada en $\mathbf{z}$, y el hecho de que dicha serie converge uniformemente a F en cualquier compacto, en especial $\overline{P_s(\mathbf{z})}$. Para probar el caso $n>1$ simplemente se integra una variable a la vez y se utiliza lo demostrado cuando $n=1$.

Sea $\chi_{P_s(\mathbf{z})}$ la función característica de $P_s(\mathbf{z})$. Entonces de (1.3)

$$F(\mathbf{z}) = (\pi s^2)^{-n} \int_U \chi_{P_s(\mathbf{z})} \frac{1}{\alpha(\mathbf{w})} F(\mathbf{w})\alpha(\mathbf{w}) \mathrm{d}\mathbf{w}\mathrm{d}\overline{\mathbf{w}} \,.$$

Expresando el lado derecho de la última igualdad como un producto interno en $L^2(U,\alpha)$ y utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se prueba 1, con $c_{\mathbf{z}} = (\pi s^2)^{-2n} \|\chi_{P_s(\mathbf{z})}/\alpha\|^2_{L^2(U,\alpha)}$.

2. Sea $\mathbf{z} \in U$, por el punto 1 existe una vecindad $V = P_s(\mathbf{z})$ de $\mathbf{z}$ y una constante $c_{\mathbf{z}}$ tal que

$$|F(\mathbf{z})|^2 \leq c_{\mathbf{z}} \|F\|^2_{L^2(U,\alpha)} \qquad \forall\, F \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha) \,.$$

Sea $\mathbf{w} \in V$, tomemos s' tal que $\overline{P_{s'}(\mathbf{w})} \subset P_s(\mathbf{z}) \subset U$. Como $|\chi_{P_{s'}(\mathbf{z})}/\alpha| \leq |\chi_{P_s(\mathbf{z})}/\alpha|$ entonces $c_{\mathbf{w}} \leq c_{\mathbf{z}}$. De aquí que

$$|F(\mathbf{w})|^2 \leq c_{\mathbf{w}} \|F\|^2_{L^2(U,\alpha)} \leq c_{\mathbf{z}} \|F\|^2_{L^2(U,\alpha)} \,, \qquad \begin{array}{l} \forall\, F \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha) \,, \\ \forall\, \mathbf{w} \in V \,. \end{array} \tag{1.4}$$

Para mostrar que $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ es cerrado, sea $\{F_m\} \subset \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$, y $F \in L^2(U,\alpha)$ tal que $F_m \to F$ en $L^2(U,\alpha)$. Nótese que $\{F_m\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(U,\alpha)$. Por (1.4) se puede probar que $\{F_m\}$ converge uniformemente de manera local a alguna función, la cual debe ser F (si el límite en norma y el límite puntual existen entonces estos deben ser iguales).

Dado que el límite uniforme localmente de funciones analíticas es analítica, se tiene que $F \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$. Por lo cual $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ es cerrado.

■

Observación 1.4 *Sea* $\mathbf{z} \in U$. *Por el punto 1 del teorema 1.3 el funcional de evaluación* $\varphi_{\mathbf{z}} : \mathcal{H}L^2(U,\alpha) \to \mathbb{C}^n$ *definido por* $\varphi_{\mathbf{z}}(F) = F(\mathbf{z})$ *es continuo.*

Al igual que en el punto 1, podemos acotar $\left|\frac{\partial}{\partial z_k} F\right|$, para $F \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$.

Teorema 1.5 *Para* $F \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ *se tiene*

$$\left|\frac{\partial}{\partial z_k} F\right| \leq \|F\|^2 (|\mathbf{z}|^2 + 1) e^{\,|\mathbf{z}|^2} \,.$$

Demostración.

Sea $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n_+$. Consideremos la notación $\mathbf{m}^{[\ell]}_{[\pm k]} = \mathbf{m} \pm \ell \hat{\mathbf{e}}_k$, donde $\hat{\mathbf{e}}_k \in \mathbb{Z}^n_+$ cuyas entradas son cero excepto la k-ésima que es igual a uno.

Expresemos a F en su serie potencias (ver ecuación (1.1)). Entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial z_k}F\right| &\leq \left(\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n}|a_{\mathbf{m}}|^2\right)\left(\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n}\frac{m_k^2|\mathbf{z}|^{2\mathbf{m}_{[-k]}^{[1]}}}{\mathbf{m}!}\right)\\ &= \|F\|^2\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n}\left[\frac{1}{(\mathbf{m}_{[-k]}^{[2]})!}+\frac{1}{(\mathbf{m}_{[-k]}^{[1]})!}\right]|\mathbf{z}|^{2\mathbf{m}_{[-k]}^{[1]}}\\ &= \|F\|^2(|\mathbf{z}|^2+1)\exp(|\mathbf{z}|^2)\ .\end{aligned}$$

■

Teorema 1.6 (Núcleo reproductor) *Sea* $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ *como arriba. Existe una función* $K(\mathbf{z},\mathbf{w})$, $\mathbf{z},\mathbf{w}\in U$, *que tiene las siguientes propiedades:*

1. $K(\mathbf{z},\mathbf{w})$ *es holomorfa en* $\mathbf{z}$, *anti-holomorfa en* $\mathbf{w}$ *y satisface*

$$K(\mathbf{z},\mathbf{w})=\overline{K(\mathbf{w},\mathbf{z})}.$$

2. *Para cada* $\mathbf{z}\in U$, $K(\mathbf{z},\mathbf{w})$ *es de cuadrado integrable en* $\alpha(\mathbf{w})\mathrm{d}\mathbf{w}\mathrm{d}\overline{\mathbf{w}}$, *y*

$$f(\mathbf{z})=\int_U K(\mathbf{z},\mathbf{w})f(\mathbf{w})\alpha(\mathbf{w})\mathrm{d}\mathbf{w}\mathrm{d}\overline{\mathbf{w}}\ ,\quad \forall\ f\in\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$$

3. *Sea* $P:L^2(U,\alpha)\to\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ *la proyección ortogonal, entonces*

$$Pf(\mathbf{z})=\int_U K(\mathbf{z},\mathbf{w})f(\mathbf{w})\alpha(\mathbf{w})\mathrm{d}\mathbf{w}\mathrm{d}\overline{\mathbf{w}}\ ,\quad \forall f\in L^2(U,\alpha)$$

4. *Para toda* $\mathbf{z},\mathbf{u}\in U$

$$\int_U K(\mathbf{z},\mathbf{w})K(\mathbf{w},\mathbf{u})\alpha(\mathbf{w})\mathrm{d}\mathbf{w}\mathrm{d}\overline{\mathbf{w}}=K(\mathbf{z},\mathbf{u}).$$

5. *Para toda* $\mathbf{z}\in U$ *y* $f\in\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$

$$|f(\mathbf{z})|^2\leq K(\mathbf{z},\mathbf{z})\|f\|^2$$

y la constante $K(\mathbf{z},\mathbf{z})$ *es óptima en el sentido de que para cada* $\mathbf{z}\in U$ *existe* $f_{\mathbf{z}}\in\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ *no nula para la cual la igualdad se cumple.*

6. *Dada* $\mathbf{z}\in U$, *si* $\beta_{\mathbf{z}}(\cdot)\in\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ *satisface*

$$f(\mathbf{z})=\int_U\overline{\beta_{\mathbf{z}}(\mathbf{w})}f(\mathbf{w})\alpha(\mathbf{w})\mathrm{d}\mathbf{w}\mathrm{d}\overline{\mathbf{w}}$$

para toda $f\in\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$, *entonces* $\overline{\beta_{\mathbf{z}}(\mathbf{w})}=K(\mathbf{z},\mathbf{w})$.

Demostración.

Sea $\mathbf{z} \in U$, y $\varphi_{\mathbf{z}} : \mathcal{H}L^2(U,\alpha) \to \mathbb{C}$ definido por $\varphi_{\mathbf{z}}(f) = f(\mathbf{z})$. Por la observación 1.4 y el teorema de representación de Riesz, existe $\phi_{\mathbf{z}} \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ tal que

$$f(\mathbf{z}) = \varphi_{\mathbf{z}}(f) = \langle f, \phi_{\mathbf{z}} \rangle_{L^2(U,\alpha)} = \int_U f(\mathbf{w})\overline{\phi_{\mathbf{z}}(\mathbf{w})}\alpha(\mathbf{w})d\mathbf{w}d\overline{\mathbf{w}} .$$

Definamos $K(\mathbf{z},\mathbf{w}) = \overline{\phi_{\mathbf{z}}(\mathbf{w})}$. No es difícil mostrar que esta función cumple los seis puntos deseados.

■

Definición 1.7 *A la función $K(\mathbf{z},\mathbf{w})$ mostrada en el teorema anterior se le llama* ***núcleo reproductor****.*

El núcleo reproductor nos sirve para poder tener información acerca del espacio de funciones holomorfas. El siguiente resultado nos da una manera de como calcular éste.

Teorema 1.8 *Sea $\{e_j\}$ base ortonormal de $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$. Para toda $\mathbf{z},\mathbf{w} \in U$*

$$\sum_j |e_j(\mathbf{z})\overline{e_j(\mathbf{w})}| < \infty , \qquad y \qquad K(\mathbf{z},\mathbf{w}) = \sum_j e_j(\mathbf{z})\overline{e_j(\mathbf{w})} .$$

Demostración.

Sean $\mathbf{z},\mathbf{w} \in U$. Mostremos que $\sum_j e_j(\mathbf{z})\overline{e_j(\mathbf{w})}$ satisface los puntos 1 y 2 del teorema 1.6. Así por el punto 6 del mismo teorema tendríamos el resultado.

Del teorema de Parseval y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\sum_j |\langle f, e_j\rangle\langle e_j, g\rangle| \leq \|f\|\,\|g\|, \qquad \forall\, f, g \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha). \tag{1.5}$$

Sean $\phi_{\mathbf{z}} = \overline{K(\mathbf{z},\cdot)}$, $f = \phi_{\mathbf{w}}$, $g = \phi_{\mathbf{z}}$. Del punto 2 del teorema 1.6 y (1.5) se tiene

$$\sum_j \left| e_j(\mathbf{z})\overline{e_j(\mathbf{w})} \right| \leq \|\phi_{\mathbf{z}}\|\,\|\phi_{\mathbf{w}}\| < \infty .$$

De aquí que la suma es absolutamente convergente para cada $\mathbf{z}$ y $\mathbf{w}$. Además

$$\sum_j \|e_j(\mathbf{z})\overline{e_j(\mathbf{w})}\|^2_{L^2(U,\alpha(\mathbf{w}))} = \sum_j |\langle e_j, \phi_{\mathbf{z}}\rangle|^2 = \|\phi_{\mathbf{z}}\|^2 < \infty .$$

Por lo cual la serie es L^2 convergente como función de $\mathbf{w}$ con $\mathbf{z}$ fijo. Luego es anti holomorfa como función de $\mathbf{w}$ para cada $\mathbf{z}$ fijo. De manera análoga, la suma es holomorfa como función de $\mathbf{z}$ para cada $\mathbf{w}$ fija. Por lo cual la suma satisface el punto 1 del teorema 1.6.

Por otro lado, sea $f \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$. Utilizando el hecho que f es la suma de las proyecciones sobre los elementos de la base ortonormal $\{e_j\}$, y que la suma

$\sum_j e_j(\mathbf{z})\overline{e_j(\mathbf{w})}$ converge en L^2, se muestra que

$$f(\mathbf{z}) = \sum_j \langle e_j, \phi_{\mathbf{z}}\rangle\langle f, e_j\rangle = \int_U \left[\sum_j e_j(\mathbf{z})\overline{e_j(\mathbf{w})}\right] f(\mathbf{w})\alpha(\mathbf{w})\mathrm{d}\mathbf{w}\mathrm{d}\overline{\mathbf{w}} \ .$$

■

Para finalizar esta sección enunciaremos un resultado que se necesitará más adelante para demostrar que la transformada de Bargmann con dominio los espacios $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(S^n)$, $n \geq 2$, se encuentra bien definida.

Teorema 1.9 *Sea $S = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$, con b_k real no negativo, y consideremos γ_{k_i}, $i = 1, 2, \ldots$ tales que*

$$0 \leq \gamma_{k_i} \leq 1 \ , \quad y \quad \lim_{i\to\infty} \gamma_{k_i} = 1 \ .$$

Sean $S_i = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k_i} b_k$. Entonces S converge si y sólo si los S_i están uniformemente acotados, y en ese caso $S = \lim_{i\to\infty} S_i$.

Demostración.
$\Rightarrow$) Como $\gamma_{k_i} b_k \leq b_k$ para toda i y k, entonces $S_i \leq S$.
$\Leftarrow$) Sea $N \in \mathbb{Z}_+$ y M una constante tal que $S_i \leq M$ para toda i. Entonces

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{N} b_k \leq \lim_{i\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k_i} b_k + \sum_{k=1}^{N} (1 - \gamma_{k_i}) b_k \right) \leq M \ .$$

De aquí que $S = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} b_k$ es convergente. Por otro lado como $\gamma_{k_i} b_k \leq b_k$ y $\{b_k\} \subset L^1(\mathbb{N})$, del teorema de convergencia dominada se tiene

$$\lim_{i\to\infty} S_i = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k_i} b_k = S \ .$$ ■

1.2 Relaciones canónias de conmutación.

Consideremos el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$, y los dos operadores lineales sobre este, denotados por X, P y definidos por

$$Xf(x) = xf(x) \ , \qquad Pf(x) = -\imath\hbar \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \ .$$

Aquí $\hbar$ es la constante de Planck. Nótese que X y P no están definidos sobre todo $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$, dado que las funciones L^2 no necesariamente son diferenciables, y que $xf(x)$ puede no estar en L^2 aún cuando f lo esté.

Propiamente hablando X y P están definidos sobre cierto dominio, el cual es denso en L^2. Es posible hacer un estudio en detalle de los dominios adecuados de X, P tales que resulten ser autoadjuntos sobre $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$. Sin embargo no nos involucraremos en cuestiones de dominios ya que solamente daremos las ideas básicas.

Calculando el conmutador de X con P obtenemos

$$[X, P] = \imath\hbar\mathbf{I}$$

donde $\mathbf{I}$ es el operador identidad. La relación anterior es llamada la **relación canónica de conmutación (RCC)**. El operador X es llamado el **operador de posición** y el operador P es llamado el **operador de momento**.

Los operadores de posición y de momento en $L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}\mathbf{x})$, X_k y P_k, $k = 1, \ldots, n$ son definidos por

$$X_k f(\mathbf{x}) = x_k f(\mathbf{x}) \ , \qquad P_k f(\mathbf{x}) = -\imath\hbar \frac{\partial f}{\partial x_k} \ ,$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Las relaciones canónicas de conmutación en n dimensiones son

$$[X_k, X_l] = 0 \ , \qquad [P_k, P_l] = 0 \ , \qquad [X_k, P_l] = \imath\hbar\delta_{k,l}\mathbf{I}$$

donde $\delta_{k,l}$ es la delta de Kronecker.

Es conveniente re-escribir las RCC en términos de los llamados **operadores de aniquilación** y **creación** definidos por

$$a_k = \frac{X_k + \imath P_k}{\sqrt{2}} \ , \qquad a_k^\dagger = \frac{X_k - \imath P_k}{\sqrt{2}} \ . \tag{1.6}$$

Dado que X_k y P_k son autoadjuntos, $a_k^\dagger$ es el adjunto de a_k. Se puede probar que $[a_k, a_l] = 0$ y $[a_k, a_l^\dagger] = \hbar\delta_{k,l}\mathbf{I}$. Así las RCC toman la forma

$$[a_k, a_l] = 0 \ , \qquad [a_k^\dagger, a_l^\dagger] = 0 \ , \qquad [a_k, a_l^\dagger] = \hbar\delta_{k,l}\mathbf{I} \ .$$

El caracter fundamental de las RCC está respaldado por el teorema de Stone von Neuman, el cual establece la equivalencia entre diferentes representaciones irreducibles de dichas relaciones.

Teorema 1.10 (Stone von Neumann) *Sea $\tilde{\mathcal{H}}$ un espacio de Hilbert, $b_1, \ldots, b_n$ operadores no necesariamente acotados sobre $\tilde{\mathcal{H}}$, y $b_1^\dagger, \ldots, b_n^\dagger$ los adjuntos de los $b_k{}'s$. Supongamos que*

1. (RCC) *Para todo k, l, $[b_k^\dagger, b_l^\dagger] = 0$, $[b_k, b_l^\dagger] = \hbar\delta_{k,l}\mathbf{I}$, y*
2. (Irreducibilidad) *Si V es un subespacio cerrado de $\tilde{\mathcal{H}}$ invariante bajo todos los $b_k{}'s$ y $b_k^{\dagger\prime}s$, debe de ocurrir que $V = \{0\}$ o $V = \tilde{\mathcal{H}}$.*

Entonces existe un operador unitario, $U : \tilde{\mathcal{H}} \to L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}\mathbf{x})$ tales que

$$U b_k U^{-1} = a_k \ , \qquad y \qquad U b_k^\dagger U^{-1} = a_k^\dagger \ . \tag{1.7}$$

Donde a_k, $a_k^\dagger$ *están definidos en* (1.6).

Hay que hacer notar que la presentación 1.10 del teorema de Stone von Neumann (usualmente utilizada en física) no es totalmente rigurosa al ignorar cuestiones de dominios de operadores (ver ejemplo 2 del capítulo VIII.5 de [24] para un contraejemplo). Sin embargo no mencionaremos la versión rigurosa de este teorema, ya que solo lo mencionamos para mostrar la idea de porque existe la transformada de Bagmann en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

1.3 Espacio de Bargmann, $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$.

Consideremos ahora el caso de las RCC cuando $n = 1$. Consideremos los operadores Z y $\hbar\mathrm{d}/\mathrm{d}z$ definidos sobre el espacio $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, donde Z denota multiplicación por z. En 1928 Fock observó que

$$\left[\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}, \mathrm{Z}\right] = \hbar\mathbf{I}.$$

Así $\hbar\mathrm{d}/\mathrm{d}z$ y Z cumplen las mismas relaciones que la de los operadores de creación y aniquilación (ver (1.6) para definición de estos operadores).

Sin embargo para que los operadores Z y $\mathrm{d}/\mathrm{d}z$ constituyan una representación de las RCC se requiere de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ en donde estos operadores sean el adjunto uno del otro. En esta sección definiremos tal espacio, incluyendo la constante de Planck $\hbar$, el cual fue introducido por Bargmann [3] en 1961, cuando $\hbar = 1$. A dicho espacio lo llamaremos espacio de Bargmann y lo denotaremos por $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$.

El material de esta sección sigue la presentación de B. Hall [9], excepto la proposición 1.15 y el criterio 1.18, los cuales fueron tomados de [3].

Para $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ en $\mathbb{C}^n$, escribiremos $\overline{\mathbf{z}} = (\overline{z}_1, \overline{z}_2, \ldots, \overline{z}_n)$ donde $\overline{z}_j$ es el conjugado usual en $\mathbb{C}$, $|\mathbf{z}|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2$ y $\mathbf{z}\cdot\mathbf{w} = z_1\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2 + \ldots + z_n\overline{w}_n$. Para $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots k_n)$ en $\mathbb{Z}_+^n$ (donde $\mathbb{Z}_+$ denota el conjunto de enteros no negativos) escribiremos $\mathbf{k}! = k_1!k_2!\ldots k_n!$, $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ y $\mathbf{z}^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n}$.

Definición 1.11 *El* ***espacio de Bargmann****,* $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$*, es el espacio de funciones holomorfas* $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, v_n^\hbar)$*, donde* $v_n^\hbar(\mathbf{z}) = (\hbar\pi)^{-n} e^{-|\mathbf{z}|^2/\hbar}$*. Esto es,*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n} = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) | \int_{\mathbb{C}^n} |f(\mathbf{z})|^2 \mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z}) < \infty \right\}$$

con $\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z}) = v_n^\hbar(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}} = (\hbar\pi)^{-n} e^{-|\mathbf{z}|^2/\hbar}\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}}$.

Por el teorema 1.3 el espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}} = \int_{\mathbb{C}^n} \overline{g(\mathbf{z})} f(\mathbf{z}) \mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z}), \qquad f, g \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}.$$

Comentario 1.12 *Bargmann encontró la función real positiva $v_n^\hbar$ (con $\hbar = 1$) requiriendo que los operadores Z_k (multiplicación por z_k) y $\partial/\partial z_k$ son el adjunto uno del otro. Es decir*

$$\langle \mathrm{Z}_k f, g\rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, v_n^\hbar)} = \left\langle f, \frac{\partial g}{\partial z_k}\right\rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, v_n^\hbar)}, \qquad f, g \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, v_n^\hbar) .$$

Lo cual sugiere que $v_n^\hbar$ debe de cumplir $\frac{\partial v_n^\hbar}{\partial z_k} = -z_k v_n^\hbar$, cuya solución (normalizada) es $v_n^\hbar(\mathbf{z}) = (\pi\hbar)^{-n} e^{-|\mathbf{z}|^2/\hbar}$.

Calculemos el núcleo reproductor de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ usando el teorema 1.8. Para ello necesitamos una base ortonormal de dicho espacio. Asi tenemos el siguiente

Lema 1.13 $\left\{\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^\hbar(\mathbf{z}) = \dfrac{\mathbf{z}^{\mathbf{k}}}{\sqrt{\hbar^{|\mathbf{k}|}\mathbf{k}!}}\right\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^n}$ *es base ortonormal de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$.*

Demostración.

Consideremos la función

$$g_\sigma(\mathbf{z}) = \overline{\mathbf{z}}^{\boldsymbol{\ell}}\mathbf{z}^{\mathbf{m}}\chi_{B(0,\sigma)}(\mathbf{z}) \qquad \mathbf{m}, \boldsymbol{\ell} \in \mathbb{Z}_+^n .$$

Entonces $g_\sigma(\mathbf{z}) \to \overline{\mathbf{z}}^{\boldsymbol{\ell}}\mathbf{z}^{\mathbf{m}}$ de manera puntual, si $\sigma \to \infty$. Además $|g_\sigma(\mathbf{z})| \leq |\overline{\mathbf{z}}^{\boldsymbol{\ell}}\mathbf{z}^{\mathbf{m}}|$. Como $\mathbf{z}^{\boldsymbol{\ell}}$ y $\mathbf{z}^{\mathbf{m}}$ están en $L^2(\mathbb{C}^n, v_n^\hbar)$, por la desigualdad de Hölder se tiene que $\overline{\mathbf{z}}^{\boldsymbol{\ell}}\mathbf{z}^{\mathbf{m}} \in L^1(\mathbb{C}^n, v_n^\hbar)$. Luego por el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{\sigma\to\infty}\int_{\mathbb{C}^n} g_\sigma(\mathbf{z})\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{C}^n}\lim_{\sigma\to\infty} g_\sigma(\mathbf{z})\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z}) . \tag{1.8}$$

Realizemos la prueba en dos pasos

Paso 1. Mostremos que $\{\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^\hbar\}$ es ortonormal. Sean $\mathbf{m}, \boldsymbol{\ell} \in \mathbb{Z}_+^n$. Usando (1.8) y coordenadas polares tenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{e}_{\mathbf{m}}^\hbar, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\ell}}^\hbar\right\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}} &= \frac{(\hbar\pi)^{-n}}{\sqrt{\hbar^{|\boldsymbol{\ell}|+|\mathbf{m}|}\boldsymbol{\ell}!\mathbf{m}!}}\lim_{\sigma\to\infty}\prod_{j=1}^n\int_0^\sigma \frac{r_j^{\ell_j+m_j+1}}{e^{r_j^2/\hbar}}\int_0^{2\pi} e^{\imath(m_j-\ell_j)\theta_j}\mathrm{d}\theta_j\mathrm{d}r_j \\
&= \frac{\delta_{\boldsymbol{\ell},\mathbf{m}}}{\mathbf{m}!}\prod_{j=1}^n\lim_{\sigma\to\infty}\int_0^\sigma \frac{2r_j}{\hbar}\left(\frac{r_j^2}{\hbar}\right)^{m_j} e^{-r_j^2/\hbar}\mathrm{d}r_j \\
&= \frac{\delta_{\boldsymbol{\ell},\mathbf{m}}}{\mathbf{m}!}\prod_{j=1}^n m_j!\lim_{\sigma\to\infty}(-e^{-u})\Big|_0^{\sigma^2/\hbar} = \delta_{\boldsymbol{\ell},\mathbf{m}} ,
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado el cambio de variable $u = r_j^2/\hbar$.

Paso 2. Probemos que $\{\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^\hbar\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^n}$ es un conjunto completo. Para ello supongamos que para alguna $f \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ se tiene $\langle \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^\hbar, f\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}} = 0$ para toda $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n$, entonces queremos mostrar que $f = 0$. Por un argumento similar al dado al principio de la demostración

$$\left\langle f, \mathbf{e}^{\hbar}_{\mathbf{k}} \right\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}} = \frac{1}{\sqrt{\hbar^{|\mathbf{k}|}\mathbf{k}!}} \lim_{\sigma\to\infty} \int_{B(0,\sigma)} \overline{\mathbf{z}}^{\mathbf{k}} f(\mathbf{z}) \mathrm{d}v^{\hbar}_{n}(\mathbf{z}) \; .$$

Expresemos a f en su serie de potencias, ver ecuación (1.1). Como dicha serie converge uniformemente en $B(0,\sigma)$, podemos intercambiar la suma con la integral obteniendo

$$\left\langle f, \mathbf{e}^{\hbar}_{\mathbf{k}} \right\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}} = \lim_{\sigma\to\infty} \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n_+} \frac{a_{\mathbf{m}}}{\sqrt{\hbar^{|\mathbf{k}|}\mathbf{k}!}} \int\limits_{B(0,\sigma)} \overline{\mathbf{z}}^{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{m}} \mathrm{d}v^{\hbar}_{n}(\mathbf{z}) \qquad = a_{\mathbf{k}} \sqrt{\hbar^{|\mathbf{k}|}\mathbf{k}!} \; , \tag{1.9}$$

donde se utilizó que $\{\mathbf{e}^{\hbar}_{\mathbf{k}}\}$ es ortonormal. De aquí que $a_{\mathbf{k}}\sqrt{\hbar^{|\mathbf{k}|}\mathbf{k}!} = 0$ para toda $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n_+$, lo cual implica que $f = 0$.

∎

Teorema 1.14 *Para $n \geq 1$, el núcleo reproductor del espacio $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ es*

$$K_n(\mathbf{z},\mathbf{w}) = e^{\,\mathbf{z}\cdot\overline{\mathbf{w}}/\hbar} \; .$$

En particular se obtiene, para cada $F \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, la cota puntual

$$|F(\mathbf{z})|^2 \leq e^{\,|\mathbf{z}|^2/\hbar} ||F||^2, \qquad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \; . \tag{1.10}$$

Demostración.

Sean $\mathbf{z},\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$. Del lema 1.13 $\{\mathbf{e}^{\hbar}_{\mathbf{k}}\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$. Entonces por el teorema 1.8

$$K_n(\mathbf{z},\mathbf{w}) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \mathbf{e}^{\hbar}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})\overline{\mathbf{e}^{\hbar}_{\mathbf{k}}(\mathbf{w})} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!\hbar^s} \sum_{|\mathbf{k}|=s} \frac{s!}{\mathbf{k}!} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}\overline{\mathbf{w}^{\mathbf{k}}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{\mathbf{z}\cdot\overline{\mathbf{w}}}{\hbar} \right)^s \; .$$

∎

Como habíamos mencionado anteriormente, para que los operadores Z_k y $\mathrm{R}_k = \hbar\partial/\partial z_k$ constituyan una representación de las RCC se necesita un espacio de Hilbert en donde sean el adjunto uno del otro. Aseveramos que dicho espacio es $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, lo cual se muestra en la siguiente

Proposición 1.15 *Sean Z_k y R_k, $k = 1,\ldots,n$, los operadores de multiplicación por z_k y $\hbar\partial/\partial z_k$, respectivamente, definidos sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$. Entonces*

1. *Z_k y R_k son operadores cerrados.*

2. *Los dominios $\mathrm{D}(\mathrm{Z}_k)$ y $\mathrm{D}(\mathrm{R}_k)$ coinciden, donde*

$$\mathrm{D}(\mathrm{B}_k) = \{g \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n} \mid \mathrm{B}_k g \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}\} \; , \qquad \textit{con} \quad \mathrm{B}_k = \mathrm{Z}_k, \mathrm{R}_k \; .$$

3. $\mathrm{Z}_k^\dagger = \mathrm{R}_k$ *y* $\mathrm{R}_k^\dagger = \mathrm{Z}_k$.

Demostración.

Sea $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_+^n$, y consideremos la notación $\mathbf{m}_{[\pm k]} = \mathbf{m} \pm \hat{\mathbf{e}}_k$, donde $\hat{\mathbf{e}}_k \in \mathbb{Z}_+^n$ cuyas entradas son cero excepto la k-ésima que es igual a uno.

1. Sea $\{f_j\} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ que converge a g en norma. Consideremos la sucesión $\{z_k f_j\}$ que converge a una función h. Por (1.10) no es difícil ver que convergencia en norma implica convergencia puntual, así $h(\mathbf{z}) = z_k g(\mathbf{z})$. Por lo cual Z_k es cerrado. De manera análoga, utilizando el teorema 1.5 se muestra que R_k es cerrado.

2. Sea $F \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$. Dado que $\{\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^\hbar\}$ es una base de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, consideremos a F de la forma

$$F(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n} c_{\mathbf{m}} \mathbf{e}_{\mathbf{m}}^\hbar(\mathbf{z}) \ , \quad \text{entonces} \quad \|F\|^2 = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n} |c_{\mathbf{m}}|^2 \ .$$

Luego

$$\|z_k F\|^2 = \hbar \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n} |c_{\mathbf{m}}|^2 (m_k + 1) = \left\| \hbar \frac{\partial F}{\partial z_k} \right\|^2 + \|F\|^2 \ .$$

Así ambos lados de esta ecuación son infinitos o finitos. Por lo que los dominios de Z_k y R_k coinciden.

3. Sea $\mathrm{D}(\mathrm{Z}_k^\dagger) = \{g \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n} \mid \exists!\ h_g \text{ tal que } \langle \mathrm{Z}_k f, g\rangle = \langle f, h_g\rangle\ \forall f \in \mathrm{D}(\mathrm{Z}_k)\}$ y $g \in \mathrm{D}(\mathrm{Z}_k^\dagger)$. Nótese que para

$$g = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n} a_{\mathbf{m}} \mathbf{e}_{\mathbf{m}}^\hbar \ , \qquad h_g = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n} b_{\mathbf{m}} \mathbf{e}_{\mathbf{m}}^\hbar \ , \qquad f = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n} c_{\mathbf{m}} \mathbf{e}_{\mathbf{m}}^\hbar$$

se tiene

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n} c_{\mathbf{m}} \overline{b_{\mathbf{m}}} = \langle f, h_g\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}} = \langle z_k f, g\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}} = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n} \sqrt{\hbar(m_k+1)}\, c_{\mathbf{m}} \overline{a_{\mathbf{m}_{[+k]}}}.$$

Si $f = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n} \mathbf{e}_{\mathbf{m}}^\hbar$, entonces $b_{\mathbf{m}} = \sqrt{\hbar(m_k+1)}\, a_{\mathbf{m}_{[+k]}}$. Por otro lado

$$\mathrm{R}_k g = \hbar \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n} a_{\mathbf{m}} \frac{m_k}{\sqrt{\hbar m_k}} \mathbf{e}_{\mathbf{m}_{[-k]}}^\hbar = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n} \sqrt{\hbar(m_k+1)}\, a_{\mathbf{m}_{[+k]}} \mathbf{e}_{\mathbf{m}}^\hbar = h_g \ .$$

Por lo que $\mathrm{Z}_k^\dagger \subset \mathrm{R}_k$. Por otro lado sean $f \in \mathrm{D}(\mathrm{Z}_k)$ y $g \in \mathrm{D}(\mathrm{R}_k)$, Por lo anterior se tiene que $\langle z_k f, g\rangle = \left\langle f, \frac{\partial g}{\partial z_k} \right\rangle$. Es decir $g \in \mathrm{D}(\mathrm{Z}_k^\dagger)$, con $h_g = \frac{\partial g}{\partial z_k}$.

■

Para finalizar esta sección vamos a mostrar un criterio, dado por Bargmann [3], que nos permite decir cuando una función F holomorfa está en $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$. Mas adelante utilizaremos dicho criterio para mostrar que la transformada de Bargmann se encuentra bien definida.

Definición 1.16 *Sea $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. Para $0 < \lambda < 1$ definamos*

$$F_\lambda(\mathbf{z}) = F(\lambda \mathbf{z}).$$

Observación 1.17 *Si $F \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, entonces F_λ es holomorfa. Además por el teorema 1.14, $F_\lambda \in L^2(\mathbb{C}^n, v_n)$ para $0 < \lambda < 1$ porque*

$$|F_\lambda(\mathbf{z})|^2 \leq ||F||^2_{L^2(\mathbb{C}^n, v_n^\hbar)} e^{\lambda^2 |\mathbf{z}|^2/\hbar} .$$

De aquí que $F_\lambda \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ para $0 < \lambda < 1$.

Criterio 1.18 *Sea $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. Entonces*

$$F \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n} \Leftrightarrow F_\lambda \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n} \text{ y existe } M \text{ tal que } ||F_\lambda|| \leq M \quad \forall\, 0 < \lambda < 1.$$

En este caso F_λ converge a F en el espacio $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ cuando $\lambda \to 1$.

Demostración.

Supongamos que $F \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, por la observación 1.17, $F_\lambda \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$. Dado que $\{\mathbf{e}^\hbar_{\mathbf{k}}\}$ es una base de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, consideremos a F de la forma

$$F(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n_+} c_{\mathbf{m}} \mathbf{e}^\hbar_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) \ , \quad \text{entonces} \quad F_\lambda(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n_+} c_{\mathbf{m}} \lambda^{|\mathbf{m}|} \mathbf{e}^\hbar_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) \ . \tag{1.11}$$

Luego por la identidad de Parseval y (1.11)

$$||F_\lambda||^2 = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n_+} |\langle \mathbf{e}^\hbar_{\mathbf{m}}, F_\lambda \rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}}|^2 = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n_+} |c_{\mathbf{m}}|^2 \lambda^{2|\mathbf{m}|} \leq \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n_+} |c_{\mathbf{m}}|^2 = ||F||^2.$$

Demostremos ahora la otra dirección. Dado que F es analítica

$$F(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n_+} a_{\mathbf{m}} \mathbf{z}^{\mathbf{m}}.$$

Por la identidad de Perseval y (1.9), la norma de F en $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ tiene la siguiente expresión

$$||F||^2 = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n_+} |a_{\mathbf{m}}|^2 \hbar^{|\mathbf{m}|} \mathbf{m}!.$$

Probemos que la suma anterior es convergente. Por hipótesis $||F_\lambda||^2$ están acotadas uniformemente para $0 < \lambda < 1$. Consideremos la sucesión $\{\lambda_i\}$ tal que $0 < \lambda_i < 1$ y $\lambda_i \to 1$ cuando $i \to \infty$. Sea

$$S_i = ||F_{\lambda_i}||^2 = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n_+} |a_{\mathbf{m}}|^2 \lambda_i^{2|\mathbf{m}|} \hbar^{|\mathbf{m}|} \mathbf{m}!.$$

Por el teorema 1.9, $\{S_i\}$ converge a $\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n_+} |a_{\mathbf{m}}|^2 \hbar^{|\mathbf{m}|} \mathbf{m}! = ||F||^2$. Por lo que

$\|F\|^2 < \infty$. Además por la identidad de Parseval

$$||F - F_\lambda||^2 = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n} |\langle \mathbf{e}_{\mathbf{m}}^{\hbar}, (F - F_\lambda)\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}}|^2 = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n} |a_{\mathbf{m}}|^2 (1 - \lambda^{|\mathbf{m}|})^2 \, .$$

Dado que $|a_{\mathbf{m}}|^2(1-\lambda^{|\mathbf{m}|})^2 \le |a_{\mathbf{m}}|^2$ y $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n} |a_{\mathbf{m}}|^2$ es finita, entonces obtenemos utilizando el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{\lambda\to 1} ||F - F_\lambda||^2 = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n} \lim_{\lambda\to 1} |a_{\mathbf{m}}|^2 (1 - \lambda^{|\mathbf{m}|})^2 = 0.$$

■

1.4 La Transformada de Bargmann, $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$.

En la proposición 1.15 se muestra que los operadores Z_k (multiplicación por z_k) y $\mathrm{R}_k = \hbar\partial/\partial z_k$, $k = 1, \ldots, n$, cumplen las RCC y además que

$$(\mathrm{Z}_k)^\dagger = \hbar\frac{\partial}{\partial z_k} \qquad \text{en el espacio de Bargmann } \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n} \, .$$

Si asumimos la irreducibilidad de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, por el teorema del Stone-von Neumann (teorema 1.10) existe un operador unitario $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n} : L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ (llamado **transformada de Bargmann**) que envía el operador de creación y aniquilación (1.6) en el operador Z_k y R_k, respectivamente.

En esta sección daremos la definición de la transformada de Bargmann, incluyendo la constante de Planck. La definición de dicha transformada fue introducida por Bargmann en [3] con $\hbar = 1$. Probaremos su unitaridad y se darán dos versiones de su transformada inversa, una de las cuales sólo es presentada en [3].

Definición 1.19 *Para $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, definamos*

$$A_n(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (\hbar\pi)^{-n/4} e^{-\frac{1}{2\hbar}(\mathbf{z}^2 + \mathbf{x}^2 - 2\sqrt{2}\mathbf{z}\cdot\mathbf{x})} \tag{1.12}$$

donde $\mathbf{z}^2 = z_1^2 + \ldots + z_n^2$, $\mathbf{x}^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, $\mathbf{z}\cdot\mathbf{x} = z_1x_1 + \ldots + z_nx_n$.

Lema 1.20 *Para $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, $A_n(\cdot, \mathbf{z}) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ con $\|A_n(\cdot, \mathbf{z})\|^2 = e^{|\mathbf{z}|^2/\hbar}$. Más aún*

$$\langle A_n(\cdot, \mathbf{z}), A_n(\cdot, \mathbf{w})\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = e^{\frac{1}{\hbar}\mathbf{z}\cdot\overline{\mathbf{w}}} \, .$$

Demostración.

Sean $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ y $P_r(\mathbf{z})$ definido en (1.2). De la expresión de $A_n(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ tenemos

$$A_n(\mathbf{x}, \mathbf{z})\overline{A_n(\mathbf{x}, \mathbf{w})} = \frac{1}{(\pi\hbar)^{n/2}} e^{\mathbf{z}\cdot\overline{\mathbf{w}}/\hbar} e^{-(\mathbf{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{z}+\overline{\mathbf{w}}))^2/\hbar}$$

luego

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})\overline{A_n(\mathbf{x},\mathbf{w})}\mathrm{d}\mathbf{x} &= \frac{e^{\mathbf{z}\cdot\mathbf{w}/\hbar}}{(\hbar\pi)^{n/2}} \lim_{r\to\infty}\int_{P_r(\mathbf{0})} e^{-(\mathbf{x}-\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{z}+\overline{\mathbf{w}}))^2/\hbar}\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \frac{e^{\mathbf{z}\cdot\mathbf{w}/\hbar}}{(\hbar\pi)^{n/2}} \prod_{j=1}^{n} \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} e^{-u^2/\hbar}\mathrm{d}u \\ &= e^{\mathbf{z}\cdot\mathbf{w}/\hbar}.\end{aligned}$$

Si $\mathbf{z}=\mathbf{w}$, entonces $\|A_n(\cdot,\mathbf{z})\|^2 = e^{\frac{|\mathbf{z}|^2}{\hbar}}$. De aquí que $A_n(\cdot,\mathbf{z}) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

■

Definición 1.21 *La* ***transformada de Bargmann*** $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n} : L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ *es definida por*

$$\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{R}^n} A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})\psi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} \ , \qquad \psi \in L^2(\mathbb{R}^n) \ , \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \ .$$

La función $A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})$ es llamada ***núcleo integral*** *del operador integral $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$.*

El operador $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ esta bien definido ya que $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y por el lema 1.20 $A_n(\cdot,\mathbf{z}) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para toda $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. Luego utilizando la desigualdad de Hölder obtenemos que $A_n(\cdot,\mathbf{z})\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Comentario 1.22 *Bargmann propuso la transformación $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$, con $\hbar = 1$, como un operador integral cuyo núcleo integral es $A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})$. Para obtener la expresión dada en la definición 1.19 de $A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})$ utilizó que $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ debe de cumplir* (1.7)*, es decir*

$$\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\ \frac{\partial}{\partial z_k}\ (\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n})^{-1} = a_k \ , \qquad \mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\ \mathrm{Z}_k\ (\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n})^{-1} = a_k^{\dagger}$$

donde a_k, $a_k^{\dagger}$ están definidos en (1.6)*.*

Teorema 1.23 *$\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ es un operador unitario de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$.*

Demostración.

La prueba se realizará en cuatro pasos.

1. $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi$ es analítica para toda $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
2. $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ y $\|\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi\|_{L^2(\mathbb{C}^n,v_n^{\hbar})} = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ para toda $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ continua de soporte compacto.
3. $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi \in L^2(\mathbb{C}^n, v_n^{\hbar})$ para toda $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ es una isometría.
4. $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ es unitario.

Paso 1. $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi$ es analítica para toda $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Para probar la analiticidad de $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi$ vamos a utilizar el teorema de Morera, para el cual vamos a utilizar los siguientes comentarios

(a) Sea $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, donde γ_j es una curva planar cerrada en $\mathbb{C}$. Utilizando la desigualdad de Hölder y el lema 1.20 se puede probar que $A_n(\mathbf{x}, \mathbf{z})\psi(\mathbf{x}) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \gamma)$.

(b) Sean $\{\mathbf{z}_m\}$, $\mathbf{z}_0$ en $\mathbb{C}^n$ con $\mathbf{z}_m \to \mathbf{z}_0$, y $g(\mathbf{s}) = e^{-\frac{1}{2\hbar}((\mathbf{z}_0+\mathbf{s})^2 - 2\sqrt{2}(\mathbf{z}_0+\mathbf{s})\cdot\mathbf{x})}$. Por la fórmula integral de Cauchy

$$g(\mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_\gamma \frac{g(\mathbf{y})}{\mathbf{y}-\mathbf{s}}\mathrm{d}\mathbf{y}\ , \tag{1.13}$$

donde γ es cualquier curva cerrada. Como $\{\mathbf{z}_m\}$ converge a $\mathbf{z}_0$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m \geq N$, $|\mathbf{s}| = |\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_0| \leq 1/2$. Entonces de (1.13) con γ la curva cerrada en el origen de radio uno se tiene

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{2\hbar}} &\left| e^{-\frac{1}{2\hbar}(\mathbf{z}_m^2 - 2\sqrt{2}\mathbf{z}_m\cdot\mathbf{x})} - e^{-\frac{1}{2\hbar}(\mathbf{z}_0^2 - 2\sqrt{2}\mathbf{z}_0\cdot\mathbf{x})}\right| \\ &\leq \frac{e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{2\hbar}}}{2\pi}\oint_\gamma |g(\mathbf{y})|\frac{|\mathbf{s}|}{|\mathbf{y}-\mathbf{s}||\mathbf{y}|}\mathrm{d}|\mathbf{y}| \\ &\leq e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{2\hbar}}\max_{\mathbf{y}\in\gamma}\{|g(\mathbf{y})|\} \in L^1(\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

esto último es porque $|\mathbf{y}| = 1$ y $|\mathbf{y}-\mathbf{s}| \geq 1/2$.

Probemos primero que $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi$ es continua. Sean $\{\mathbf{z}_m\}$ y $\mathbf{z}_0$ en $\mathbb{C}^n$ tal que $\mathbf{z}_m \to \mathbf{z}_0$. Por (b) y el hecho de que la función exponencial es continua se tiene

$$\begin{aligned} &\lim_{m\to\infty}|\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi(\mathbf{z}_m) - \mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi(\mathbf{z}_0)| \\ &\quad\leq \int_{\mathbb{R}^n}|\psi(\mathbf{x})|\frac{e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{2\hbar}}}{(\hbar\pi)^{\frac{n}{4}}}\lim_{m\to\infty}\left|e^{-\frac{1}{2\hbar}(\mathbf{z}_m^2 - 2\sqrt{2}\mathbf{z}_m\cdot\mathbf{x})} - e^{-\frac{1}{2\hbar}(\mathbf{z}_0^2 - 2\sqrt{2}\mathbf{z}_0\cdot\mathbf{x})}\right|\mathrm{d}\mathbf{x} = 0. \end{aligned}$$

Por lo cual $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi$ es continua. Además por (a) podemos aplicar Fubini en la siguiente integral

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}} &= \int_\gamma\int_{\mathbb{R}^n} A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})\psi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}} \\ &= (\hbar\pi)^{-n/4}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathbf{x}^2/2\hbar}\psi(\mathbf{x})\int_\gamma e^{-\frac{1}{2\hbar}(\mathbf{z}^2 - 2\sqrt{2}\mathbf{z}\cdot\mathbf{x})}\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}}\mathrm{d}\mathbf{x}\ . \end{aligned}$$

Como la última exponencial es una gausseana, y es analítica, por el teorema de Cauchy dicha integral es cero. Aplicando el teorema de Morera tenemos $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi$ es analítica.

Paso 2. $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ Y $\|\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi\|_{L^2(\mathbb{C}^n, v_n^\hbar)} = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ PARA TODA $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ CONTINUA DE SOPORTE COMPACTO.

Sea $0 < \lambda < 1$ y $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz y el lema 1.20

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} &\left|A_n(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{z})\psi(\mathbf{x})\overline{A_n(\mathbf{y}, \lambda\mathbf{z})\psi(\mathbf{y})}\right| \mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y} \\
&\leq ||A_n(\cdot, \lambda\mathbf{z})||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}||\psi||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= e^{\lambda^2|\mathbf{z}|^2/\hbar}||\psi||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty \,. \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

Además de (1.14)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}} &\left|A_n(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{z})\psi(\mathbf{x})\overline{A_n(\mathbf{y}, \lambda\mathbf{z})\psi(\mathbf{y})}\right| \mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z}) \\
&\leq (\hbar\pi)^{-n}||\psi||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{C}^n} e^{\lambda^2|\mathbf{z}|^2/\hbar}e^{-|\mathbf{z}|^2/\hbar}\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}} < \infty \qquad (1.15)
\end{aligned}$$

ya que $\lambda < 1$.

Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Por el paso 1, $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. Sea $(\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi)_\lambda$ como en la definición 1.16. Utilicemos el criterio 1.18 para probar que $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$. Para ello encontremos una cota uniforme para $||(\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi)_\lambda||_{L^2(\mathbb{C}^n, v_n^\hbar)}$. De (1.14), (1.15) y el teorema de Fubini se puede mostrar que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}^n} &(\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi)_\lambda(\mathbf{z})\overline{(\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi)_\lambda(\mathbf{z})}\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \psi(\mathbf{x})\overline{\psi(\mathbf{y})}\int_{\mathbb{C}^n} A_n(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{z})\overline{A_n(\mathbf{y}, \lambda\mathbf{z})}\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Supongamos que ψ es una función continua de soporte compacto, ésto es: $\psi = 0$ fuera de la esfera B_r centrada en el origen y de radio r. Nótese que si integramos en $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ sobre B_r, entonces la integral anterior es absolutamente convergente, lo cual se demuestra de manera análoga a (1.14).

Por otro lado, para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}^n} &A_n(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{z})\overline{A_n(\mathbf{y}, \lambda\mathbf{z})}\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z}) \\
&= \left[\hbar\pi(1-\lambda^4)\right]^{-n/2} e^{-\frac{1}{4\hbar}\left[\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2]+\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2\right]} =: \sigma_n(\lambda^2, \mathbf{x}, \mathbf{y}).
\end{aligned}$$

de aquí que

$$\int_{\mathbb{C}^n} (\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi)_\lambda(\mathbf{z})\overline{(\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi)_\lambda(\mathbf{z})}\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \psi(\mathbf{x})\overline{\psi(\mathbf{y})}\sigma_n(\lambda^2, \mathbf{x}, \mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y} \,.$$

Realizemos el cambio de variable

$$\epsilon = \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^{1/2}, \qquad \mathbf{s} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y}), \qquad \mathbf{t} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

nótese que $\epsilon \to 0$ cuando $\lambda \to 1$. Luego

$$\sigma_n(\lambda^2, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (1+\epsilon^2)^n e^{-\epsilon^2 \mathbf{s}^2/\hbar}[2\epsilon(\hbar\pi)^{1/2}]^{-n} e^{-\mathbf{t}^2/\epsilon^2\hbar}.$$

Dado que $\mathbf{y} = \mathbf{s} - \mathbf{t}$, $\mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$, y como la convergencia es absoluta en B_r, el rango de $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$ es B_r. Por lo cual

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{C}^n} (\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi)_\lambda(\mathbf{z})\overline{(\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi)_\lambda(\mathbf{z})}\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z}) \\
&= (1+\epsilon^2)^n \int\limits_{|\mathbf{s}|\leq r} e^{-\epsilon^2\mathbf{s}^2/\hbar}[\epsilon(\hbar\pi)^{1/2}]^{-n} \int\limits_{|\mathbf{t}|\leq r} e^{-\mathbf{t}^2/\epsilon^2\hbar}\psi(\mathbf{s}+\mathbf{t})\overline{\psi(\mathbf{s}-\mathbf{t})}\mathrm{d}\mathbf{t}\mathrm{d}\mathbf{s} \\
&= (1+\epsilon^2)^n \int_{B_r} e^{-\epsilon^2\mathbf{s}^2/\hbar} N_\epsilon(\mathbf{s})\mathrm{d}\mathbf{s} \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

donde utilizamos el cambio de variable $\mathbf{t}' = \mathbf{t}/\epsilon$, y

$$N_\epsilon(\mathbf{s}) = (\hbar\pi)^{-n/2}\int e^{-(\mathbf{t}')^2/\hbar}\psi(\mathbf{s}+\epsilon\mathbf{t}')\overline{\psi(\mathbf{s}-\epsilon\mathbf{t}')}\mathrm{d}\mathbf{t}'.$$

Dado que $\left|e^{-(\mathbf{t}')^2/\hbar}\psi(\mathbf{s}+\epsilon\mathbf{t}')\overline{\psi(\mathbf{s}-\epsilon\mathbf{t}')}\right| \leq e^{-(\mathbf{t}')^2/\hbar}||\psi||_\infty^2$, entonces

$$\lim_{\epsilon\to 0} N_\epsilon(\mathbf{s}) = (\hbar\pi)^{-n/2}\int e^{-(\mathbf{t}')^2/\hbar}|\psi(\mathbf{s})|^2\mathrm{d}\mathbf{t}' = |\psi(\mathbf{s})|^2 . \qquad (1.17)$$

Con esto se demuestra que $N_\epsilon(\mathbf{s})$ converge uniformemente a $|\psi(\mathbf{s})|^2$ cuando $\epsilon \to 0$. Por lo cual de (1.16) y (1.17)

$$\lim_{\lambda\to 1}\int_{\mathbb{C}^n}(\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi)_\lambda(\mathbf{z})\overline{(\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi)_\lambda(\mathbf{z})}\mathrm{d}v_n(\mathbf{z}) = \int_{B_r}|\psi(\mathbf{s})|^2\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathbb{R}^n}|\psi(\mathbf{s})|^2\mathrm{d}\mathbf{s}.$$

De aquí que las normas $||(\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi)_\lambda||_{L^2(\mathbb{C}^n, v_n^\hbar)}$ están acotadas uniformemente. Por lo tanto por el criterio 1.18, $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ y además

$$||\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi||^2_{L^2(\mathbb{C}^n, v_n^\hbar)} = \lim_{\lambda\to 1}||(\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi)_\lambda||_{L^2(\mathbb{C}^n, v_n^\hbar)} = ||\psi||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \qquad (1.18)$$

Así $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ es una isometría sobre las funciones continuas de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$.

Paso 3. $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi$ pertenece a $L^2(\mathbb{C}^n, v_n^\hbar)$ para $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ es una isometría.

Sea $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dado que el conjunto de funciones continuas con soporte compacto es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$, sea $\{\psi_j\}$ sucesión de estas funciones que convergen a ψ_0 en norma.

Sea $f_0 = \mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi_0$ y $f_j = \mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi_j$. Por (1.18), la sucesión $\{f_j\}$ es de Cauchy en $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$. Entonces existe $g \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ tal que $f_j \to g$ en norma. Sea $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, por (1.10) se tiene que

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi_0(\mathbf{z}) - g(\mathbf{z})| &\leq |f_0(\mathbf{z}) - f_j(\mathbf{z})| + |f_j(\mathbf{z}) - g(\mathbf{z})| \\ &\leq e^{\frac{1}{2\hbar}|\mathbf{z}|^2}\left[\|\psi_0 - \psi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|f_j - g\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}}\right] . \end{aligned}$$

Lo cual implica que $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi_0(\mathbf{z}) = g(\mathbf{z})$ para toda $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. Además de (1.18)

$$\begin{aligned} ||\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi_0||_{L^2(\mathbb{C}^n,v_n^\hbar)} &= \lim_{j\to\infty} ||\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi_j||_{L^2(\mathbb{C}^n,v_n^\hbar)} \\ &= \lim_{j\to\infty} ||\psi_j||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\psi_0||_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Lo cual establece que $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ es una isometría sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Paso 4. $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ ES UN OPERADOR UNITARIO.

Debido a que $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ es una isometría, entonces es inyectiva. Demostremos que es sobre. Para ello probemos que el rango de $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$, denotado por Ran $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$, es denso en $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$.

Dado que el espacio $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ es de Hilbert se puede ver como

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n} = \overline{(\text{Ran }\ \mathbf{B}_{\mathbb{R}^n})} \oplus (\text{Ran }\ \mathbf{B}_{\mathbb{R}^n})^\perp.$$

Demostremos que $(\text{Ran }\ \mathbf{B}_{\mathbb{R}^n})^\perp = \{0\}$. Para ello, sea $F \in (\text{Ran }\ \mathbf{B}_{\mathbb{R}^n})^\perp$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$. Del lema 1.20, el núcleo reproductor del espacio de Bargmann, $K_n(\cdot, \mathbf{w}) = e^{(\cdot)\cdot\mathbf{w}/\hbar}$, está en el rango de $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$. De hecho

$$(\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}A_n(\cdot, \overline{\mathbf{w}}))(\mathbf{z}) = (\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\overline{A_n(\cdot, \mathbf{w})})(\mathbf{z}) = e^{\mathbf{z}\cdot\mathbf{w}/\hbar} = K_n(\mathbf{z}, \mathbf{w}) . \tag{1.19}$$

Luego de la propiedad 2 del teorema 1.6

$$0 = \langle F, K_n(\cdot, \mathbf{w})\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}} = \left\langle F, \overline{K_n(\mathbf{w}, \cdot)}\right\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}} = F(\mathbf{w}) . \qquad \blacksquare$$

Observación 1.24 *Como* $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ *es un operador unitario, de* (1.19) *y el lema 1.20 se tiene que*

$$\|K_n(\cdot, \mathbf{w})\|^2 = \|\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}A_n(\cdot, \overline{\mathbf{w}})\|^2 = e^{|\mathbf{w}|^2/\hbar} , \qquad \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n .$$

Del lema 1.13 una base de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ es $\{\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^\hbar\}$. Dado que $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ es unitario, nos gustaria encontrar las funciones $\phi_{\mathbf{k}}^\hbar$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ que cumplan

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^\hbar(\mathbf{z}) = \left(\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\phi_{\mathbf{k}}^\hbar\right)(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{R}^n} A_n(\mathbf{x}, \mathbf{z})\phi_{\mathbf{k}}^\hbar(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} , \qquad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n .$$

Por el lema 1.20

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{\hbar}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) &= \left(\frac{\hbar^{|\mathbf{k}|}}{\mathbf{k}!}\right)^{1/2} \frac{\partial^{k_1}\dots\partial^{k_n}}{\partial b_1^{k_1}\dots\partial b_n^{k_n}} e^{\,\mathbf{b}\cdot\overline{\mathbf{z}}/\hbar}\Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} \\
&= \left(\frac{\hbar^{|\mathbf{k}|}}{\mathbf{k}!}\right)^{1/2} D^{\mathbf{k}}_{\mathbf{b}} \int_{\mathbb{R}^n} A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})A_n(\mathbf{x},\mathbf{b})\mathrm{d}\mathbf{x}\Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} .
\end{aligned}$$

Si suponemos que podemos intercambiar la derivada con la integral y utilizando el hecho que $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ es unitario, sean

$$\begin{aligned}
\phi^{\hbar}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) &:= \left(\frac{\hbar^{|\mathbf{k}|}}{\mathbf{k}!}\right)^{1/2} D^{\mathbf{k}}_{\mathbf{b}} A_n(\mathbf{x},\mathbf{b})\Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} \\
&= \frac{(\hbar\pi)^{-n/4}}{\sqrt{\mathbf{k}!}2^{|\mathbf{k}|/2}} e^{\,-\mathbf{x}^2/2\hbar} D^{\mathbf{k}}_{\mathbf{b}'} e^{\,-\mathbf{b}'^2+2\mathbf{b}'\cdot\mathbf{x}/\sqrt{\hbar}}\Big|_{\mathbf{b}'=0} ,
\end{aligned}$$

donde se a considerado el cambio de variable $\mathbf{b}' = \mathbf{b}/\sqrt{2\hbar}$.

Nótese que si $\hbar = 1$, $e^{\,-\mathbf{b}'^2+2\mathbf{b}'\cdot\mathbf{x}}$ es la función generadora de los polinomios de Hermite $H_n(\mathbf{x})$. No es difícil probar que $\phi^{\hbar}_{\mathbf{k}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dado que $\{\mathbf{e}^{\hbar}_{\mathbf{k}}\}$ es base ortonormal, tambien lo debe ser $\{\phi^{\hbar}_{\mathbf{k}}\}$.

1.4.1 La inversa de la transformada de Bargmann.

Para finalizar esta sección daremos dos fórmulas de inversión de la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$.

En una dimensión. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$. Debido a que $A_1(x,z)$ es analítica en z, podemos considerarlo como

$$A_1(x,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial z^m} A_1(x,z)\Big|_{z=0} \cdot z^m = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(x)\mathbf{e}^{\hbar}_m(z).$$

Para $n > 1$

$$A_n(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_+} \phi^{\hbar}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\mathbf{e}^{\hbar}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) , \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n , \mathbf{z}\in\mathbb{C}^n$$

Sean $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. Entonces

$$(\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi)(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{R}^n} A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})\psi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_+} \mathbf{e}^{\hbar}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})\overline{\phi^{\hbar}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})}\psi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} .$$

Si $\psi = \phi^{\hbar}_{\mathbf{m}}$. Entonces de manera informal tenemos

$$(\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\phi^{\hbar}_{\mathbf{m}})(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_+}\mathbf{e}^{\hbar}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})\overline{\phi^{\hbar}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})}\phi^{\hbar}_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{e}^{\hbar}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}).$$

Lo cual nos sugiere, para $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ fijo que

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}^{-1}_{\mathbb{R}^n}f)(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{C}^n}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_+}\overline{\mathbf{e}^{\hbar}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})}\phi^{\hbar}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})f(\mathbf{z})\mathrm{d}v^{\hbar}_n(\mathbf{z})\\ &= \int_{\mathbb{C}^n}\overline{A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})}f(\mathbf{z})\mathrm{d}v^{\hbar}_n(\mathbf{z}) =: (W_nf)(\mathbf{x})\ .\end{aligned}$$

Sin embargo Bargmann mostro que $A_n(\mathbf{x},\cdot)\notin L^2(\mathbb{C}^n, v^{\hbar}_n)$. Por lo cual se debe de definir la inversa $\mathbf{B}^{-1}_{\mathbb{R}^n}$de otra manera. Para ello, dada $f\in\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, consideremos $\{f_\lambda\}$, $0<\lambda<1$, dadas como en la definición 1.16. De (1.10)

$$|f_\lambda(\mathbf{z})| \le \|f\| e^{\lambda^2|\mathbf{z}|^2/2\hbar}\ . \tag{1.20}$$

Aseveramos que W_nf_λ está bien definido. En efecto para $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{z}\in\mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned}|\overline{A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})}f_\lambda(\mathbf{z})|v^{\hbar}_n(\mathbf{z}) &\le \|f\|(\hbar\pi)^{-\frac{5n}{4}}\left|e^{-\frac{1}{2\hbar}(\overline{\mathbf{z}}^2+\mathbf{x}^2-2\sqrt{2}\overline{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{x})}\right| e^{-\frac{2-\lambda^2}{2\hbar}|\mathbf{z}|^2}\\ &= \frac{\|f\|}{(\hbar\pi)^{\frac{5n}{4}}}e^{\left(-\frac{1}{2\hbar}\left[(3-\lambda^2)\mathbf{p}^2+(1-\lambda^2)\mathbf{q}^2+\mathbf{x}^2\right]+\frac{\sqrt{2}}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)}.\end{aligned} \tag{1.21}$$

Esto último es tomando $\mathbf{z}=\mathbf{p}+\imath\mathbf{q}$. Ahora sea $\psi = W_nf_\lambda$, probemos que $\psi\in L^2(\mathbb{R}^n)$. De (1.21)

$$\begin{aligned}|\psi(\mathbf{x})| &\le \|f\|(\hbar\pi)^{-\frac{5n}{4}}e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{2\hbar}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\left[\frac{3-\lambda^2}{2\hbar}\right]\mathbf{p}^2+\frac{\sqrt{2}}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\left[\frac{1-\lambda^2}{2\hbar}\right]\mathbf{q}^2}\mathrm{d}\mathbf{q}\mathrm{d}\mathbf{p}\ .\\ &= \frac{\|f\|(\hbar\pi)^{-\frac{3n}{4}}2^{\frac{n}{2}}}{(1-\lambda^2)^{n/2}}e^{-\left(\frac{1-\lambda^2}{2\hbar(3-\lambda^2)}\mathbf{x}^2\right)}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{1}{\hbar}\left[\left(\frac{3-\lambda^2}{2}\right)^{1/2}\mathbf{p}-\frac{1}{(3-\lambda^2)^{1/2}}\mathbf{x}\right]^2}\mathrm{d}\mathbf{p}\ .\end{aligned}$$

Ésto último es tomando el cambio de variable $\mathbf{r}=(1-\lambda^2)^{1/2}\mathbf{q}/\sqrt{2\hbar}$. Consideremos ahora el cambio de variable $\mathbf{s}=\left(\frac{3-\lambda^2}{2\hbar}\right)^{1/2}\mathbf{p}-\left(\frac{1}{(3-\lambda^2)\hbar}\right)^{1/2}\mathbf{x}$. Entonces

$$\begin{aligned}|\psi(\mathbf{x})| &\le \frac{\|f\|(\pi\hbar)^{-3n/4}2^n\hbar^{n/2}}{[(1-\lambda^2)(3-\lambda^2)]^{n/2}}e^{-\left(\frac{1-\lambda^2}{2\hbar(3-\lambda^2)}\right)\mathbf{x}^2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\mathbf{s}^2}\mathrm{d}\mathbf{s}\\ &= \frac{\|f\|(\pi\hbar)^{-n/4}2^n}{[(1-\lambda^2)(3-\lambda^2)]^{n/2}}\exp\left(-\frac{1-\lambda^2}{2\hbar(3-\lambda^2)}\mathbf{x}^2\right).\end{aligned}$$

Así $\psi\in L^2(\mathbb{R}^n)$. Más aún se tiene que la función es entera. Ahora probemos que $\mathbf{B}^{-1}_{\mathbb{R}^n}f_\lambda = W_nf_\lambda$ o bien que $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}(W_nf_\lambda)=f_\lambda$. Antes de probar esto, tenemos de las definiciones de $v_n^\hbar$, $A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})$ y (1.20), la siguiente cota

$$\begin{aligned}
&\left|A_n(\mathbf{x},\mathbf{w})\overline{A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})}f_\lambda(\mathbf{z})\right|v_n^\hbar(\mathbf{z}) \\
&\quad\le \frac{\|f\|}{(\pi\hbar)^{3n/2}}\left|e^{-\frac{1}{2\hbar}(\mathbf{w}^2+\mathbf{x}^2-2\sqrt{2}\mathbf{w}\cdot\mathbf{x})}e^{-\frac{1}{2\hbar}(\overline{\mathbf{z}}^2+\mathbf{x}^2-2\sqrt{2}\overline{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{x})}\right|e^{\frac{1}{2\hbar}\lambda^2|\mathbf{z}|^2}e^{-\frac{1}{\hbar}|\mathbf{z}|^2} \\
&\quad\le \frac{\|f\|e^{-\frac{1-\lambda^2}{2\hbar}(\mathbf{p}^2+\mathbf{q}^2)}}{(\pi\hbar)^{3n/2}}\left|e^{\frac{1}{2\hbar}(\mathbf{v}^2-\mathbf{u}^2+2\sqrt{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})}e^{-\frac{1}{\hbar}(\mathbf{x}^2+\mathbf{p}^2-2\sqrt{2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}\right|. \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

En la última desigualdad se esta tomando $\mathbf{w}=\mathbf{u}+i\mathbf{v}$ y $\mathbf{z}=\mathbf{p}+i\mathbf{q}$. De aquí que podemos utilizar Fubini en

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}(W_nf_\lambda)(\mathbf{w}) &= \int_{\mathbb{R}^n}A_n(\mathbf{x},\mathbf{w})\int_{\mathbb{C}^n}\overline{A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})}f_\lambda(\mathbf{z})\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{C}^n}f_\lambda(\mathbf{z})\int_{\mathbb{R}^n}A_n(\mathbf{x},\mathbf{w})\overline{A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})}\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z}) \\
&= f_\lambda(\mathbf{w}).
\end{aligned}$$

Ésto último es por el lema 1.20 y propiedades del núcleo reproductor (en particular el punto 2 del teorema 1.6).

Definamos $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}^{-1}f$, para $f\in\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ por

$$\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}^{-1}f=\lim_{\lambda\to1}\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}^{-1}f_\lambda=\lim_{\lambda\to1}\int_{\mathbb{C}^n}\overline{A_n(\cdot,\mathbf{z})}f(\lambda\mathbf{z})\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z}).$$

Otra versión de la inversa se enuncia en el siguiente

Teorema 1.25 *Sea $f\in\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$. La inversa de la transformada de Bargmann de f es dada por*

$$\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}^{-1}f=\lim_{\sigma\to\infty}\int_{|z_m|\le\sigma}\overline{A_n(\cdot,\mathbf{z})}f(\mathbf{z})\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z}), \qquad (1.23)$$

con $m=1,2,\ldots,n$.

Demostración.

Antes de probar (1.23), comprobemos que esta bien definida acotando la integral para cada $\sigma>0$. Para ello, sea $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ fijo y $\sigma>0$. Afirmamos que $A_n(\mathbf{x},\cdot)\in L^2_{loc}(\mathbb{C}^n,v_n^\hbar)$. En efecto de la definición de $A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})$, con $\mathbf{z}=\mathbf{q}+i\mathbf{p}$ se tiene

$$\int\limits_{|\mathbf{z}|\le\sigma}|A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})|^2\mathrm{d}v_n(\mathbf{z})=\frac{e^{-\mathbf{x}^2/\hbar}}{(\pi\hbar)^{3n/2}}\int\limits_{|\mathbf{z}|\le\sigma}e^{-\frac{1}{\hbar}(2\mathbf{q}^2-2\sqrt{2}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})}\mathrm{d}\mathbf{q}\mathrm{d}\mathbf{p}<\infty\,. \qquad (1.24)$$

Además como $f\in L^2(\mathbb{C}^n,v_n^\hbar)$, entonces $f\in L^2_{loc}(\mathbb{C}^n,v_n^\hbar)$. Así aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left| \int\limits_{|z_m|\leq\sigma} \overline{A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})} f(\mathbf{z}) \mathrm{d}v_n^{\hbar}(\mathbf{z}) \right|^2 \leq \int\limits_{|z_m|\leq\sigma} \left|\overline{A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})}\right|^2 \mathrm{d}v_n^{\hbar}(\mathbf{z}) \int\limits_{|z_m|\leq\sigma} |f(\mathbf{z})|^2 \mathrm{d}v_n^{\hbar}(\mathbf{z})$$

De aquí que el lado derecho de (1.23) se encuentra bien definido.

Por otro lado, sea $f \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ y consideremos, para cada $\sigma > 0$, las funciones

$$\psi_\sigma(\mathbf{x}) = \int\limits_{|z_m|\leq\sigma} \overline{A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})} f(\mathbf{z}) \mathrm{d}v_n^{\hbar}(\mathbf{z}).$$

Por lo anterior, ψ_σ está bien definido. Además aseveramos que $\psi_\sigma \in L^2(\mathbb{R}^n)$. En efecto

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\psi_\sigma(\mathbf{x})|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{|z_m|\leq\sigma} |A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})|^2 \mathrm{d}v_n^{\hbar}(\mathbf{z}) \int\limits_{|z_m|\leq\sigma} |f(\mathbf{z})|^2 \mathrm{d}v_n^{\hbar}(\mathbf{z}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\leq ||f||^2_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{|z_m|\leq\sigma} |A_n(\mathbf{x},\mathbf{z})|^2 \mathrm{d}v_n^{\hbar}(\mathbf{z}) \mathrm{d}\mathbf{x}\end{aligned}$$

por Fubini (el cual se puede aplicar por (1.24)) y el lema 1.20 tenemos

$$\begin{aligned}&= ||f||^2_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}} \int\limits_{|z_m|\leq\sigma} e^{\,|\mathbf{z}|^2/\hbar} \mathrm{d}v_n^{\hbar}(\mathbf{z}) \\ &= C||f||^2_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}} < \infty,\end{aligned}$$

con C constante que depende de σ. Aplicando a ψ_σ la transformada $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$

$$\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi_\sigma(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{R}^n} A_n(\mathbf{x},\mathbf{z}) \int\limits_{|w_m|\leq\sigma} \overline{A_n(\mathbf{x},\mathbf{w})} f(\mathbf{w}) \mathrm{d}v_n^{\hbar}(\mathbf{w}) \mathrm{d}\mathbf{x}\,. \tag{1.25}$$

Sea $\mathbf{z} = \mathbf{q} + i\mathbf{p}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$. De manera análoga a como se obtuvo (1.22) se tiene

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{|w_m|\leq\sigma} \left| A_n(\mathbf{x},\mathbf{z}) \overline{A_n(\mathbf{x},\mathbf{w})} f(\mathbf{w}) \right| \mathrm{d}v_n^{\hbar}(\mathbf{w}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\qquad \leq C(\mathbf{z}) \int_{\mathbb{R}^n} e^{\,-\mathbf{x}^2/\hbar} \int\limits_{|w_m|\leq\sigma} e^{\,-\frac{1}{\hbar}(\mathbf{a}^2 - \sqrt{2}(\mathbf{q}+\mathbf{a})\cdot\mathbf{x})} \mathrm{d}\mathbf{a}\mathrm{d}\mathbf{b}\mathrm{d}\mathbf{x},\end{aligned}$$

con $C(\mathbf{z})$ constante que depende de $\mathbf{z}$. De aquí que podemos aplicar Fubini en (1.25) y obtener

$$\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi_\sigma(\mathbf{z}) = \int\limits_{|w_m|\leq\sigma} f(\mathbf{w})e^{\,\mathbf{z}\cdot\mathbf{w}/\hbar}\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{w})\ .$$

Calculemos que tan cerca están los $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi_\sigma$ de f cuando $\sigma\to\infty$

$$\begin{aligned}
&||f-\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi_\sigma||^2_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}}\\
&=\int_{\mathbb{C}^n}\int\limits_{|w_m|\geq\sigma} f(\mathbf{w})e^{\,\frac{1}{\hbar}\mathbf{z}\cdot\mathbf{w}}\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{w})\int\limits_{|\eta_m|\geq\sigma}\overline{f(\boldsymbol{\eta})e^{\,\frac{1}{\hbar}\mathbf{z}\cdot\boldsymbol{\eta}}}\mathrm{d}v_n^\hbar(\boldsymbol{\eta})\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z})\ .\\
&=\int\limits_{|\eta_m|\geq\sigma}\int\limits_{|w_m|\geq\sigma} f(\mathbf{w})\overline{f(\boldsymbol{\eta})}\int\limits_{\mathbb{C}^n}\overline{e^{\,\mathbf{z}\cdot\boldsymbol{\eta}/\hbar}}e^{\,\mathbf{z}\cdot\mathbf{w}/\hbar}\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z})\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{w})\mathrm{d}v_n^\hbar(\boldsymbol{\eta}) \qquad (1.26)\\
&=\int\limits_{|\eta_m|\geq\sigma}\int\limits_{|w_m|\geq\sigma} f(\mathbf{w})\overline{f(\boldsymbol{\eta})}\langle K_n(\cdot,\mathbf{w}),K_n(\cdot,\boldsymbol{\eta})\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}}\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{w})\mathrm{d}v_n^\hbar(\boldsymbol{\eta}) \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

en donde se está utilizando Fubini en (1.26) ya que $f,\ e^{\,\mathbf{z}\cdot(\cdot)}\in L^2(\mathbb{C}^n,v_n^\hbar)$, luego

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{C}^n}\int\limits_{|w_m|\geq\sigma}\int\limits_{|\eta_m|\geq\sigma}\left|f(\mathbf{w})\overline{f(\boldsymbol{\eta})}e^{\,\mathbf{z}\cdot\mathbf{w}/\hbar}\overline{e^{\,\mathbf{z}\cdot\boldsymbol{\eta}/\hbar}}\right|\mathrm{d}v_n^\hbar(\boldsymbol{\eta})\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{w})\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z})\\
&\qquad\leq\int\limits_{|\eta_m|\geq\sigma}|f(\boldsymbol{\eta})|^2\mathrm{d}v_n^\hbar(\boldsymbol{\eta})\int\limits_{|w_m|\geq\sigma}|e^{\,\mathbf{z}\cdot\mathbf{w}/\hbar}|^2\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{w})\int_{\mathbb{C}^n}\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z})<\infty.
\end{aligned}$$

Utilizando (1.19), el hecho que $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ es unitaria y el lema 1.20 en (1.27) obtenemos

$$\|f-\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi_\sigma\|^2_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}}=\int\limits_{|\eta_m|\geq\sigma}\int\limits_{|w_m|\geq\sigma} f(\mathbf{w})\overline{f(\boldsymbol{\eta})}e^{\,\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{w}}\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{w})\mathrm{d}v_n^\hbar(\boldsymbol{\eta}).$$

Nótese que si $\overline{f(\boldsymbol{\eta})}f(\mathbf{w})e^{\,\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{w}}$ es integrable sobre todo $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$, entonces lo anterior es cero cuando $\sigma\to\infty$. Como $K_n(\boldsymbol{\eta},\mathbf{w})=e^{\,\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{w}/\hbar}$ es el núcleo reproductor de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$, del punto 2 del teorema 1.6 se tiene

$$\int_{\mathbb{C}^n}\int_{\mathbb{C}^n}\overline{f(\boldsymbol{\eta})}f(\mathbf{w})e^{\,\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{w}}\mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{w})\mathrm{d}v_n^\hbar(\boldsymbol{\eta})=\int_{\mathbb{C}^n}\overline{f(\boldsymbol{\eta})}f(\boldsymbol{\eta})\mathrm{d}v_n^\hbar(\boldsymbol{\eta})=||f||^2_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}}.$$

Por lo tanto $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi_\sigma\to f$, cuando $\sigma\to\infty$, en la norma de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$. Dado que $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ es unitario, existe $\psi\in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi=f$. Luego

$$\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi_\sigma\to\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}\psi.$$

Y como la transformada inversa de $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ existe y es continua

$$\psi_\sigma \to \mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}^{-1} f.$$

Que es lo que se queria demostrar (ecuación (1.23)).

$\blacksquare$

Capítulo 2

Estados coherentes para $L^2(\mathbb{R}^n)$.

En este capítulo se muestra como la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$, definida en el capítulo anterior, se puede ver como la cuantización de una transfromación canónica. Además se presentan las propiedades que cumplen los estados coherentes para el oscilador armónico.

Finalmente se demuestra un teorema tipo Egorov que relaciona el símbolo principal de un operador pseudo-diferencial A definido en $L^2(\mathbb{R}^n)$ con el límite semiclásico del símbolo de Berezin del operador $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n} A (\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n})^{-1}$.

2.1 Transformación canónica de una partícula moviendose en $\mathbb{R}^n$.

En esta sección describiremos la relación que existe entre la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ y una transformación canónica, la cual juega el papel del análogo clásico. Esta sección se tomo del artículo de Villegas-Blas [31].

Siguiendo a Graffi y Parmeggiani [10] consideremos la función

$$\Phi_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -\imath \left(-\frac{1}{2} [\mathbf{z}^2 + \mathbf{x}^2 - 2\sqrt{2}\mathbf{z} \cdot \mathbf{x}] \right) , \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n .$$

Nótese que la función anterior aparece en el argumento de la exponencial del núcleo integral de $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ (ver definición 1.21 y (1.12)).

Consideremos una partícula moviendose en $\mathbb{R}^n$. Cuyo espacio fase es $T^*\mathbb{R}^n$ con coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ y forma simpléctica $\omega_n = \sum_{j=1}^n \mathrm{d}q_j \wedge \mathrm{d}p_j$.

Tomemos la función $\Phi_{\mathbb{R}^n}$ como una función generadora de una transformación canónica que mapea las variables $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ a las variables $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in T^*\mathbb{C}^n$ a través de

$$\left.\begin{aligned} p_j &= -\frac{\partial \Phi_{\mathbb{R}^n}}{\partial q_j} \,, \\ w_j &= \imath \, \frac{\partial \Phi_{\mathbb{R}^n}}{\partial z_j} \,, \end{aligned}\right. \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Nótese que considerando estas ecuaciones se garantiza que

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}q_j \wedge \mathrm{d}p_j = -\imath \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}w_j \,.$$

Además las expresiones de $(\mathbf{z}, \mathbf{w})$ en términos de $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ son

$$z_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_j - \imath p_j) \,, \qquad w_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_j + \imath p_j) \,.$$

De aquí que podemos ver a w_j como el complejo conjugado de z_j. Lo cual nos sugiere considerar la siguiente subvariedad de $T^*\mathbb{C}^n$

$$\mathcal{D}_n = \left\{(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in \mathbb{C}^{2n} \mid \mathbf{w} = \overline{\mathbf{z}}\right\} \,.$$

Tenemos que $T^*\mathbb{C}^n$ es una variedad simpléctica con forma simpléctica $\kappa_n = -\imath \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}w_j$. De aquí que podemos considerar a $\mathcal{D}_n$ como una variedad simpléctica con forma simpléctica τ_n dada por la restricción de κ_n a $\mathcal{D}_n$. Note que $(\mathcal{D}_n, \tau_n)$ se puede ver como la variedad simpléctica $(\mathbb{C}^n, \mu_n)$, donde $\mu_n = -\imath \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j$ y $(\mathbf{z}, \overline{\mathbf{z}}) \to (\mathbf{z})$ es el simplectomorfismo entre $(\mathcal{D}_n, \tau_n)$ y $(\mathbb{C}^n, \mu_n)$.

Teorema 2.1 *La función $\Phi_{\mathbb{R}^n}$ es la función generadora de una transformación lineal canónica, que es un simplectomorfismo $\mathcal{C}_n$ de $(T^*\mathbb{R}^n, \omega_n)$ sobre $(\mathbb{C}^n, \mu_n)$ definida por*

$$\mathcal{C}_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{q} - \imath \mathbf{p}) \,, \qquad (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in T^*\mathbb{R}^n \,. \tag{2.1}$$

Dicha transformación lleva el Hamiltoniano $\mathbf{H} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} q_j^2 + p_j^2$ al Hamiltoniano $\mathbf{H}' = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{z_j}$.

Observación 2.2 *El teorema anterior da el análogo clásico de la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ en el sentido que $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ es un operador unitario de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sobre el espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ que lleva el Hamiltoniano cuántico del oscilador armónico $\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(-\partial^2/\partial^2 q_j + q_j^2) - n/2$ al operador $\hat{\mathbf{H}}' = \sum_{j=1}^{n} z_j(\partial/\partial z_j)$.*

Por tal motivo, la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ puede verse como la cuantización de la transfromación canónica $\mathcal{C}_n$.

2.2 Estados coherentes para $L^2(\mathbb{R}^n)$.

La teoria cuántica es mas básica que la teoria clásica. Por lo que si un sistema cuántico es la cuantización de un clásico, ciertos aspectos clásicos se deben mostrar en el régimen de mecánica cuántica. Dicho régimen es caracterizado tomando una escala donde el valor de la constante de Planck se ve muy pequeño, esto es llamado el régimen semiclásico. Una de las motivaciones básicas detrás de la consideración del conjunto de estados coherentes para un sistema cuántico es para manifestar la mecánica cuántica en un regimen semiclásico.

En esta sección describiremos el conjunto de estados coherentes introducidos en 1926 por E. Schrödinger [26] para el oscilador armónico. Aunque se ha modificado la definición por un factor para que sean igual al complejo conjugado del núcleo integral de la transformada de Bargmann.

Definición 2.3 *Para* $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^k$ *definamos la función*

$$\Psi_{\mathbf{z},\hbar}(\mathbf{x}) = \overline{A_k(\mathbf{x},\mathbf{z})}\ , \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k\ ,$$

donde $A_k(\mathbf{x},\mathbf{z})$*es definido en* (1.12). *El conjunto* $\mathrm{S} = \{\Psi_{\mathbf{z},\hbar} \mid \mathbf{z} \in \mathbb{C}^k\} \subset L^2(\mathbb{R}^k)$ *es conocido como el conjunto de* ***estados coherentes canónicos*** *del oscilador armónico cuántico k dimensinal* $\hat{H} = \sum_{j=1}^k a_j^\dagger a_j$, *con* a_j *y* $a_j^\dagger$ *definidos en* (1.6).

Nótese que S es un conjunto de elementos de $L^2(\mathbb{R}^k)$ indexados por elementos del espacio fase $T^*\mathbb{R}^k \simeq \mathbb{C}^k$ de una partícula moviendose en $\mathbb{R}^k$.

El conjunto S tiene las siguientes propiedades

i) Resolución de la identidad. Para $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^k)$

$$\Psi(\mathbf{x}) = \lim_{R\to\infty} \int_{|\mathbf{z}|\le R} \langle \Psi, \Psi_{\mathbf{z},\hbar}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, \Psi_{\mathbf{z},\hbar}(\mathbf{x}) \mathrm{d}v_n^\hbar(\mathbf{z})\ .$$

A la igualdad anterior se le conoce como resolución de la identidad.

ii) Los estados coherentes son funciones propias del operador de aniquilación. Sea $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^k$ y a_j el operador definido en (1.6). Entonces

$$a_j\Psi_{\mathbf{z},\hbar}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j\Psi_{\mathbf{z},\hbar}(\mathbf{x}) + \hbar\frac{\partial\Psi_{\mathbf{z},\hbar}(\mathbf{x})}{\partial x_j}) = \overline{z}_j\Psi_{\mathbf{z},\hbar}(\mathbf{x}).$$

Por lo cual el estado coherente $\Psi_{\mathbf{z},\hbar}$ es función propia del operador de aniquilación a_j con valor propio $\overline{z}_j$.

iii) Estabilidad bajo evolución temporal. Si dejamos actuar el operador de evolución temporal del sistema sobre los estados coherentes se tiene

$$\exp\left(\frac{-\imath t\hat{H}}{\hbar}\right)\Psi_{\mathbf{z},\hbar} = \Psi_{e^{\imath t}\mathbf{z},\hbar}\ , \qquad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^k\ .$$

Es decir, los estados coherentes siguen el flujo clásico del oscilador armónico clásico k dimensional.

iv) COTA ÓPTIMA EN EL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE DE HEISENBERG. Sean $\mathbf{\Delta x}$ y $\mathbf{\Delta p}$ la desviación estándard de las distribuciones de densidad de probabilidad $\frac{1}{||\Psi_{\mathbf{z},\hbar}||^2}|\Psi_{\mathbf{z},\hbar}|^2$ y $\frac{1}{||\mathcal{F}\Psi_{\mathbf{z},\hbar}||^2}|\mathcal{F}\Psi_{\mathbf{z},\hbar}|^2$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^k$ (donde $\mathcal{F}$ denota la transformada de Fourier). Entonces

$$(\Delta\mathbf{x})(\Delta\mathbf{p}) = \frac{\hbar}{2} \ .$$

v) CONCENTRACIÓN.

a) **Concentración de los estados coherentes.** Sea $\mathbf{z} = (\mathbf{q} - \imath\mathbf{p})/\sqrt{2}$ con $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^k$. Las funciones Gausseanas $\Psi_{\mathbf{z},\hbar}$ y $\mathcal{F}\Psi_{\mathbf{z},\hbar}$ se concentran en una vecindad alrededor de $\mathbf{q} = \sqrt{2}\ \mathrm{Re}(\mathbf{z})$ y $\mathbf{p} = \sqrt{2}\ \mathrm{Im}(\mathbf{z})$ respectivamente para $\hbar$ pequeño (tomando $\hbar$ como un parámetro real).

Con concentración nos referimos a que la función se parece a la delta de Dirac. Es decir, definamos las funciones de densidad de probabilidad

$$F_{\mathbf{z},\hbar}(\mathbf{x}) = \frac{|\Psi_{\mathbf{z},\hbar}(\mathbf{x})|}{||\Psi_{\mathbf{z},\hbar}||^2} \ \text{y} \ G_{\mathbf{z},\hbar}(\mathbf{x}) = \frac{|\mathcal{F}\Psi_{\mathbf{z},\hbar}(\mathbf{x})|}{||\mathcal{F}\Psi_{\mathbf{z},\hbar}||^2} \ , \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \ .$$

Entonces para cualquier $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ se tiene

$$\lim_{\hbar\to 0} \int_{\mathbb{R}^k} F_{\mathbf{z},\hbar}(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \phi(\sqrt{2}\ \mathrm{Re}(\mathbf{z})) \ ,$$
$$\lim_{\hbar\to 0} \int_{\mathbb{R}^k} G_{\mathbf{z},\hbar}(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \phi(\sqrt{2}\ \mathrm{Im}(\mathbf{z})) \ .$$

b) **Concentración de la transformada de Bargmann de los estados coherentes.** Para $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^k$, la transformada de Bargmann de los estados coherentes se concentran en una vecindad alrededor de $\mathbf{w}$. Es decir, al igual que en a) definamos la función de densidad de probabilidad

$$H_{\mathbf{w},\hbar}(\mathbf{z}) = \frac{|\mathbf{B}_{\mathbb{R}^k}\Psi_{\mathbf{w},\hbar}(\mathbf{z})|^2}{||\mathbf{B}_{\mathbb{R}^k}\Psi_{\mathbf{w},\hbar}||^2}\frac{1}{(\pi\hbar)^k}\exp\left(-\frac{|\mathbf{z}|^2}{\hbar}\right) \ , \qquad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^k \ .$$

Entonces para cualquier $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2k})$ se tiene

$$\lim_{\hbar\to 0} \int_{\mathbb{C}^k} H_{\mathbf{w},\hbar}(\mathbf{z})\phi(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}} = \phi(\mathbf{w}). \tag{2.2}$$

Para probar (2.2) se utiliza que $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^k}\Psi_{\mathbf{w},\hbar}(\mathbf{z}) = e^{\frac{1}{\hbar}\mathbf{z}\cdot\mathbf{w}} = K_k(\mathbf{z},\mathbf{w})$ (ver

(1.14), (1.19) y el teorema 1.14) y que $||K_k(\cdot, \mathbf{w})||^2 = e^{|\mathbf{w}|^2/\hbar}$ (ver observación 1.24) para mostrar que $H_{\mathbf{w},\hbar}(\mathbf{z}) = (\pi\hbar)^{-k} \exp\big(-\frac{|\mathbf{z}-\mathbf{w}|^2}{\hbar}\big)$.
Luego la ecuación (2.2) se sigue de la última igualdad y el método de la fase estacionaria (teorema 7.7.5 de [13]).

Método de la fase estacionaria. Sean f y ϕ funciones suaves a valores complejos definidas sobre $\mathbb{R}^d$ con d un entero positivo. Asumamos que ϕ tiene soporte compacto, $\mathrm{Im}(f) \geq 0$, f tiene un punto critico en $\mathbf{x}_0$ y que $f'(\mathbf{x}) \neq 0$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ (donde f' denota el gradiente de f). Además supongamos que $\mathrm{Im}(f(\mathbf{x}_0)) = 0$ y $\det(f''(\mathbf{x}_0)) \neq 0$, (donde $f''(\mathbf{x}_0)$ denota la matríz Hessiana de f evaluada en el punto critico $\mathbf{x}_0$). Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{\imath}{\hbar} f(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} = e^{\frac{\imath}{\hbar} f(\mathbf{x}_0)} \left[\det\left(\frac{f''(\mathbf{x}_0)}{2\pi\imath\hbar} \right) \right]^{-1/2} \phi(\mathbf{x}_0) + \mathrm{O}(\hbar^{1+d/2}) \tag{2.3}$$

con $\mathrm{d}\mathbf{x}$ la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^d$.

Recordemos que si tenemos un sistema diferente que el del oscilador armónico, uno podría introducir un sistema de estados coherentes para éste. Sin embargo, en general no se van a tener las cinco propiedades mencionadas arriba. Por lo cual uno escoge las propiedades que quiera mantener y entonces tratar de encontrar el conjunto de estados que satisfagan esas propiedades.

Observación 2.4 *Nótese que para $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^k)$ y $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^k$*

$$\mathbf{B}_{\mathbb{R}^k} \Psi(\mathbf{z}) = \langle \Psi, \Psi_{\mathbf{z},\hbar} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^k)} \ .$$

Por lo cual $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^k}$ es también llamada ***transformada de estados coherentes****.*

2.3 Teorema tipo Egorov.

En esta sección se probará, de manera rigurosa, un teorema tipo Egorov que relaciona el símbolo principal de un operador pseudo-diferencial A definido en $L^2(\mathbb{R}^n)$ con el límite semiclásido del símbolo de Berezin del operador $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n} A (\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n})^{-1}$, a través de la transformación canónica $\mathcal{C}_n$ definida en (2.1).

Este teorema es conocido en la literatura de análisis semiclásico. Del ejemplo 1 del capítulo 5 del libro de Zworski y Evans [35] se puede obtener una prueba formal.

Definición 2.5 *Sea $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\mathfrak{A})$ el espacio de Hilbert de funciones a valores complejos sobre el conjunto $\mathfrak{A}$. Supongamos que $\mathfrak{H}$ tiene un núcleo reproductor $k_{\boldsymbol{\lambda}}$ con $\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}$. Sea* M *un operador lineal acotado sobre $\mathfrak{H}$. Entonces el* ***símbolo de Berezin*** *de* M *(denotado por $\widetilde{\mathrm{M}}$) es definido por*

$$\widetilde{\mathrm{M}}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\langle \mathrm{M} k_{\boldsymbol{\lambda}}, k_{\boldsymbol{\lambda}} \rangle_{\mathfrak{H}}}{\langle k_{\boldsymbol{\lambda}}, k_{\boldsymbol{\lambda}} \rangle_{\mathfrak{H}}} \ , \qquad \boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A} \ ,$$

Antes de probar el teorema tipo Egorov mencionado arriba voy a dar un resultado necesario para su demostración.

Proposición 2.6 *Sean $G \in C^\infty(\mathbb{C})$, $\mathfrak{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ función que tiene derivadas de todos los órdenes y*

$$\mathrm{M} = \sum_{k=1}^{n} a_k(\mathbf{p}) \frac{\partial}{\partial x_k}\,, \qquad a_k \text{ constantes independientes de } \mathbf{x}\,.$$

Entonces para cualquier entero no negativo q

$$\mathrm{M}^q G(\mathfrak{g}(\mathbf{x})) = \sum_{d=1}^{q} G^{(d)}(\mathfrak{g}(\mathbf{x})) \sum \frac{q!}{p_1! \ldots p_\ell!} \left(\frac{\mathrm{M}^1 \mathfrak{g}(\mathbf{y})}{1!}\right)^{p_1} \cdots \left(\frac{\mathrm{M}^\ell \mathfrak{g}(\mathbf{y})}{\ell!}\right)^{p_\ell}$$

donde la segunda suma corre sobre el conjunto de enteros no negativos que satisfacen $p_1 + 2p_2 + \ldots + \ell p_\ell = q$, $\quad d = p_1 + p_2 + \ldots + p_\ell$.

Demostración.

Se obtiene de la regla de Leibniz y la fórmula de Faà di Bruno (generalización de la regla de la cadena) (ver [30]). ■

Teorema 2.7 *Sea $a \in \mathrm{S}_{2n}(\langle \boldsymbol{\xi} \rangle^m)$ un símbolo clásico, $t \in [0,1]$ y $A = \mathrm{Op}_\hbar^t(a)$ operador pseudo-diferencial con dominio en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces para $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$*

$$\lim_{\hbar \to 0} \frac{\big\langle \mathbf{B}_{\mathbb{R}^n} A (\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n})^{-1} K_n(\cdot, \mathbf{w}), K_n(\cdot, \mathbf{w}) \big\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}}}{\langle K_n(\cdot, \mathbf{w}), K_n(\cdot, \mathbf{w}) \rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}}} = \wp(A) \circ \mathcal{C}_n^{-1}(\mathbf{w})\,,$$

donde $\wp(A)$ es el símbolo principal de A (ver definición B.5) y $\mathcal{C}_n$ es definido en (2.1).

Demostración.

Sea $\mathrm{A}_{\mathbf{B}} := \mathbf{B}_{\mathbb{R}^n} A (\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n})^{-1}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$. De (1.19), $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n} \Psi_{\mathbf{w},\hbar}(\mathbf{z}) = K_n(\mathbf{z}, \mathbf{w})$, donde $\Psi_{\mathbf{w},\hbar}$ son los estados coherentes en $L^2(\mathbb{R}^n)$ (ver definición 2.3).

De la observación 1.24, el hecho de que $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ es un operador unitario y la definición B.4 de operador pseudo-diferencial se tiene

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{A}_{\mathbf{B}}}(\mathbf{w}) &= \langle A \Psi_{\mathbf{w},\hbar}, \Psi_{\mathbf{w},\hbar} \rangle\, e^{-|\mathbf{w}|^2/\hbar} \\
&= \frac{e^{-|\mathbf{w}|^2/\hbar}}{(2\pi\hbar)^n} \int \overline{\Psi_{\mathbf{w},\hbar}(\mathbf{x})} \int e^{\imath(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\xi}/\hbar} \\
&\qquad \left(\frac{1 + \hbar \mathrm{M}}{1 + |\boldsymbol{\xi}|^2}\right)^k \big[a_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}; \hbar) \Psi_{\mathbf{w},\hbar}(\mathbf{y})\big] \mathrm{d}\mathbf{y} \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \mathrm{d}\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

con $m + n < k$ y

$$\mathrm{M} = \frac{1}{\imath} \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial y_j}\,.$$

Note que en el lado derecho de (2.4) tenemos

$$(1+\hbar\mathrm{M})^k(a_t\Psi_{\mathbf{w},\hbar}) = \sum_{s=0}^{k}\sum_{q=0}^{s}\binom{k}{s}\binom{s}{q}\hbar^s\left[\mathrm{M}^{s-q}a_t\right]\left[\mathrm{M}^q\Psi_{\mathbf{w},\hbar}\right] . \tag{2.5}$$

De la proposición 2.6, la acción del operador M^q sobre $\Psi_{\mathbf{w},\hbar}(\mathbf{y}) = (\pi\hbar)^{-\frac{n}{4}}e^{-\frac{1}{2\hbar}\mathfrak{g}(\mathbf{y})}$, con $\mathfrak{g}(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2}(\overline{\mathbf{w}}^2+\mathbf{y}^2)+\sqrt{2}\overline{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{y}$ es

$$\mathrm{M}^q\Psi_{\mathbf{w},\hbar}(\mathbf{y}) = \sum_{d=1}^{q}F_{d,q}(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi})\frac{1}{\hbar^d}\Psi_{\mathbf{w},\hbar}(\mathbf{y}) \tag{2.6}$$

donde

$$F_{d,q}(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi}) = \sum\frac{q!}{p_1!\ldots p_\ell!}\left(\frac{\mathrm{M}^1\mathfrak{g}(\mathbf{y})}{1!}\right)^{p_1}\left(\frac{\mathrm{M}^2\mathfrak{g}(\mathbf{y})}{2!}\right)^{p_2}\cdots\left(\frac{\mathrm{M}^\ell\mathfrak{g}(\mathbf{y})}{\ell!}\right)^{p_\ell}$$

con la suma corriendo sobre el conjunto de enteros no negativos que satisfacen $p_1+2p_2+\ldots+\ell p_\ell = q, \quad d = p_1+p_2+\ldots+p_\ell$. Nótese que

$$\begin{aligned}\mathrm{M}^1\mathfrak{g}(\mathbf{y}) &= \imath\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{y}-\imath\sqrt{2}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{w}\\ \mathrm{M}^2\mathfrak{g}(\mathbf{y}) &= |\boldsymbol{\xi}|^2\end{aligned}$$

para $r>2$. Luego

$$F_{d,q}(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi}) = \frac{q!}{(2d-q)!(q-d)!}\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{2}\right)^{q-d}(\imath\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{y}-\imath\sqrt{2}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{w})^{2d-q} \tag{2.7}$$

con $d\geq\left\lceil\frac{q}{2}\right\rceil$, donde $\left\lceil\frac{q}{2}\right\rceil$ denota el entero más grande o igual a $\frac{q}{2}$.

Por otro lado tenemos

$$e^{-|\mathbf{w}|^2/\hbar}\overline{\Psi_{\mathbf{w},\hbar}(\mathbf{x})}\Psi_{\mathbf{w},\hbar}(\mathbf{y})e^{\imath(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{(\pi\hbar)^{n/2}}\exp\left(\imath\frac{1}{\hbar}f(\mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\xi})\right) \tag{2.8}$$

donde

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\xi}) = \frac{\imath}{2}\left[(\mathbf{x}-\sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}))^2+(\mathbf{y}-\sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}))^2\right]+(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(\boldsymbol{\xi}+\sqrt{2}\mathrm{Im}(\mathbf{w}))$$

Como $a\in\mathrm{S}_{2n}(\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^m)$ es símbolo clásico, existe una sucesión $(a^{(j)})\subset\mathrm{S}_{2n}(\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^m)$ tal que si $N>3n/2$ y

$$\Psi_N(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\boldsymbol{\xi}};\hbar) = \sum_{\ell=0}^{N}\hbar^\ell a^{(\ell)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) ,$$

entonces para cualquier $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}_+^n$, existe $\hbar_{N,\mathbf{b}} > 0$ y $C_{N,\mathbf{b}}$ tales que

$$\left|\partial^{\mathbf{b}} \left(a - \Psi_N\right)\right| \leq C_{N,\mathbf{b}}\, \hbar^N \langle \boldsymbol{\xi} \rangle^m \tag{2.9}$$

uniformemente sobre $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \hbar) \in \mathbb{R}^{2n} \times [0, \hbar_{N,\mathbf{b}})$.

De las ecuaciones (2.4) - (2.8) tenemos

$$\widetilde{\mathrm{A}_{\mathbf{B}}}(\mathbf{w}) = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 \tag{2.10}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_1 = \frac{(\pi\hbar)^{-n/2}}{(2\pi\hbar)^n} \int \exp\left(\frac{\imath}{\hbar} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})\right) \sum_{s=0}^{k} \sum_{q=0}^{s} \sum_{d=\lceil \frac{q}{2} \rceil}^{q} \binom{k}{s} \binom{s}{q} \frac{\hbar^{s-d}}{(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^k} \\
F_{d,q}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \mathrm{M}^{s-q} \left[(a - \Psi_N)_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}; \hbar)\right] \mathrm{d}\mathbf{y} \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \mathrm{d}\mathbf{x}\ , \\
\mathfrak{I}_2 = \frac{(\pi\hbar)^{-n/2}}{(2\pi\hbar)^n} \int \exp\left(\frac{\imath}{\hbar} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})\right) \sum_{s=0}^{k} \sum_{q=0}^{s} \sum_{d=\lceil \frac{q}{2} \rceil}^{q} \binom{k}{s} \binom{s}{q} \frac{\hbar^{s-d}}{(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^k} \\
F_{d,q}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \mathrm{M}^{s-q} \left[(\Psi_N)_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}; \hbar)\right] \mathrm{d}\mathbf{y} \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \mathrm{d}\mathbf{x}\ .
\end{aligned}$$

Analicemos $\mathfrak{I}_1$, de (2.7) y (2.9)

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{I}_1| \leq \frac{C}{\hbar^{3n/2}} \int e^{-\frac{1}{2\hbar}\left[(\mathbf{x}-\sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}))^2 + (\mathbf{y}-\sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}))^2\right]} \langle \boldsymbol{\xi} \rangle^{-2k} \\
\sum_{s=0}^{k} \sum_{q=0}^{s} \sum_{d=\lceil \frac{q}{2} \rceil}^{q} \hbar^{s-d} \hbar^N \langle \boldsymbol{\xi} \rangle^q \langle \boldsymbol{\xi} \rangle^{s-q} \langle \boldsymbol{\xi} \rangle^m |G_{d,q}(\mathbf{y})| \mathrm{d}\mathbf{y} \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \mathrm{d}\mathbf{x}
\end{aligned}$$

para algún polinomio $G_{d,q}$ que sólo depende de $\mathbf{y}$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C\hbar^N}{\hbar^{3n/2}} \int e^{-\left[(\mathbf{x}-\sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}))^2 + (\mathbf{y}-\sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}))^2\right]} \langle \boldsymbol{\xi} \rangle^{m-k} \\
&\qquad \sum_{s=0}^{k} \sum_{q=0}^{s} \sum_{d=\lceil \frac{q}{2} \rceil}^{q} |G_{d,q}(\mathbf{y})| \mathrm{d}\mathbf{y} \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\leq C\hbar^{N-3n/2}\ .
\end{aligned}$$

ésto último es porque $m + n < k$. De aquí que

$$\lim_{\hbar \to 0} \mathfrak{I}_1 = 0\ . \tag{2.11}$$

Analicemos ahora $\mathfrak{I}_2$. Sea $\mathfrak{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{3n})$ tales que $\mathfrak{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) = 1$ para $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})$ en una vecindad $\mathcal{A}$ de $(\sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}), \sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}), -\sqrt{2}\mathrm{Im}(\mathbf{w}))$ y $0 \leq \mathfrak{b} \leq 1$.

Sean $\mathfrak{I}_{2,1}$ y $\mathfrak{I}_{2,2}$ igual al lado derecho de $\mathfrak{I}_2$, sólo que el integrando es multiplicado por $1 - \mathfrak{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})$ y $\mathfrak{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})$ respectivamente.

Nótese que $\mathfrak{I}_2 = \mathfrak{I}_{2,1} + \mathfrak{I}_{2,2}$. Afirmamos que $\lim_{\hbar\to 0} \mathfrak{I}_{2,1} = 0$. En efecto de manera análoga a como se obtuvo (2.11)

$$|\mathfrak{I}_{2,1}| \leq \frac{C}{\hbar^{3n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{3n}-\mathcal{A}} e^{-\frac{1}{2\hbar}\left[(\mathbf{x}-\sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}))^2+(\mathbf{y}-\sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}))^2\right]} \langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{-2k}$$
$$\sum_{s=0}^{k}\sum_{q=0}^{s}\sum_{d=\lceil\frac{q}{2}\rceil}^{q} \hbar^{s-d}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{q}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{s-q}\sum_{j=1}^{N}\hbar^{j}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{m}|G_{d,q,j}(\mathbf{y})|\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\mathrm{d}\mathbf{x}$$

para algún polinomio $G_{d,q,j}$ que sólo depende de $\mathbf{y}$. Dado que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \notin \mathcal{A}$, existe $\mu > 0$ tal que $(\mathbf{x} - \sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}))^2 \geq \mu$. Así

$$\leq C\frac{1}{\hbar^{3n/2}}e^{-\frac{1}{\hbar}\mu}\int e^{-\left[(\mathbf{x}-\sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}))^2+(\mathbf{y}-\sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}))^2\right]}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{m-k}$$
$$\sum_{s=0}^{k}\sum_{q=0}^{s}\sum_{d=\lceil\frac{q}{2}\rceil}^{q}\sum_{j=1}^{N}|G_{d,q,j}(\mathbf{y})|\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$\leq C\frac{1}{\hbar^{3n/2}}e^{-\frac{1}{\hbar}\mu} .$$

Por lo cual

$$\lim_{\hbar\to 0}\mathfrak{I}_{2,1} = 0. \tag{2.12}$$

Finalmente utilicemos el método de la fase estacionaria (ver (2.3)) para obtener $\mathfrak{I}_{2,2}$. Primero tenemos

$$\mathrm{Im}(f) = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{x} - \sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}))^2 + (\mathbf{y} - \sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}))^2\right] \geq 0 .$$

Además para $j = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \imath x_j - \imath\sqrt{2}\mathrm{Re}(w_j) + \sqrt{2}\mathrm{Im}(w_j) + \xi_j$$
$$\frac{\partial f}{\partial y_j} = \imath y_j - \imath\sqrt{2}\mathrm{Re}(w_j) - \sqrt{2}\mathrm{Im}(w_j) - \xi_j$$
$$\frac{\partial f}{\partial \xi_j} = x_j - y_j .$$

Así el único punto crítico de f es

$$(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\xi}_0) = (\sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}), \sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}), -\sqrt{2}\mathrm{Im}(\mathbf{w})) .$$

También se puede mostrar que

$$\begin{aligned}\det f''(\mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\xi}) &= \det\begin{pmatrix} \imath\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{0}_n & \imath\mathbf{I}_n & -\mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & -\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix} \\ &= \imath^n\,\imath^n\,(2\imath)^n\ ,\end{aligned}$$

donde $\mathbf{I}_n$ ($\mathbf{0}_n$) es la matríz identidad (matríz con entradas 0) de n filas y n columnas. De aquí que

$$\left[\det\left(\frac{f''(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0,\boldsymbol{\xi}_0)}{2\pi\imath\hbar}\right)\right]^{-1/2} = \left[\frac{\imath^{3n}2^n}{(2\pi\imath\hbar)^{3n}}\right]^{-1/2} = 2^n\pi^{3n/2}\hbar^{3n/2}\ .$$

Por lo tanto aplicando el método de la fase estacionaria a $\mathfrak{I}_{2,2}$ obtenemos

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_{2,2} &= \frac{(\pi\hbar)^{-n/2}}{(2\pi\hbar)^n}\int \exp\left(\frac{\imath}{\hbar}f(\mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\xi})\right)\sum_{s=0}^{k}\sum_{q=0}^{s}\sum_{d=\lceil\frac{q}{2}\rceil}^{q}\binom{k}{s}\binom{s}{q}\frac{\hbar^{s-d}}{(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^k} \\ &\qquad \mathfrak{b}(\mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\xi})F_{d,q}(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi})\mathrm{M}^{s-q}\left[(\Psi_N)_t(\mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\xi};\hbar)\right]\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \sum_{\ell=0}^{N}\sum_{s=0}^{k}\sum_{q=0}^{s}\sum_{d=\lceil\frac{q}{2}\rceil}^{q}\binom{k}{s}\binom{s}{q}\frac{\hbar^{s-d+\ell}}{(1+|\boldsymbol{\xi}_0|^2)^k}\mathfrak{b}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0,\boldsymbol{\xi}_0)F_{d,q}(\mathbf{y}_0,\boldsymbol{\xi}_0) \\ &\qquad \mathrm{M}^{s-q}\left[(a^{(\ell)})_t(\mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\xi})\right]\Big|_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\xi})=(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0,\boldsymbol{\xi}_0)} + \mathrm{O}(\hbar) \\ &= \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}a^{(0)}(\sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}),-\sqrt{2}\mathrm{Im}(\mathbf{w}))\frac{F_{s,s}(\mathbf{y}_0,\boldsymbol{\xi}_0)}{(1+|\boldsymbol{\xi}_0|^2)^k} + \mathrm{O}(\hbar)\end{aligned}$$

De (2.7) $F_{s,s}(\mathbf{y}_0,\boldsymbol{\xi}_0) = (|\boldsymbol{\xi}_0|^2)^s$. Luego

$$\mathfrak{I}_{2,2} = a^{(0)}(\sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}),-\sqrt{2}\mathrm{Im}(\mathbf{w})) + \mathrm{O}(\hbar)\ . \tag{2.13}$$

Por lo tanto de (2.10), (2.11), (2.12) y (2.13) tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{\hbar\to 0}\widetilde{\mathrm{A}_{\mathbf{B}}}(\mathbf{w}) &= \lim_{\hbar\to 0}\left[\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_{2,1} + \mathfrak{I}_{2,2}\right] \\ &= a^{(0)}(\sqrt{2}\mathrm{Re}(\mathbf{w}),-\sqrt{2}\mathrm{Im}(\mathbf{w})) \\ &= \wp(A)\circ\mathcal{C}_n^{-1}(\mathbf{w})\ .\end{aligned}$$

■

Capítulo 3

Transformada de Bargmann para $L^2(S^n)$, $n = 2, 3$. Motivación e ideas principales.

En este capítulo se presenta la transformada de Bargmann sobre $L^2(S^n)$, para los casos $n = 2, 3$, denotada por $\mathbf{B}_{S^n}$, sobre cierto subespacio cerrado del espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^m}$, $m = 2, 4$ respectivamente.

Ésto fue desarrollado por Thomas/Wassell [29] (para el caso $n = 2$) y por Villegas-Blas en [31] (para $n = 3$). Sólo se darán las ideas principales de como obtuvieron dichas transformaciones. Ya que éstas nos permitirán dar una idea de como definir la transformada de Bargmann sobre $L^2(S^n)$, $n \geq 2$.

La descripción estricta de la transformada de Bargmann para $L^2(S^n)$, $n = 2, 3, 5$ se da en el capítulo 5.

Además mostraremos la relación que existe entre la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_{S^n}$ y una transformación canónica que juega el papel del análogo clásico.

Primero definamos el espacio $L^2(S^n)$, con $n \geq 2$.

Definición 3.1 *Sea n un entero no negativo y $\mathrm{d}S_n$ la medida de superficie normalizada sobre S^n. Denotemos por $L^2(S^n)$ al espacio de funciones Lebesgue medibles integrables sobre S^n que son de cuadrado integrable respecto a la medida $\mathrm{d}S_n$.*

El espacio $L^2(S^n)$ es de Hilbert con producto interno

$$\langle F, G\rangle_{S^n} = \int_{S^n} F(\mathbf{x})\overline{G(\mathbf{x})}\mathrm{d}S_n(\mathbf{x}) \,, \qquad F, G \in L^2(S^n).$$

3.1 Transformada de Bargmann para $L^2(S^2)$.

En [29] Thomas y Wassell introdujeron la trasformada de Bargmann para el caso $n = 2$. Su idea fue basada en el hecho de que el grupo SU(2) (el grupo cubriente de SO(3)) tiene una representación como un grupo de operadores actuando en el espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^2}$.

Antes de definir la transformada de Bargmann para $L^2(S^2)$, recordaremos algunos hechos conocidos acerca de dos diferentes representaciones de SO(3), el grupo de rotaciones de $\mathbb{R}^3$.

Consideremos el operador Laplaciano normalizado sobre la esfera S^2, denotado por Δ_{S^2}. El espectro de este operador es $\{(\ell + 1/2)^2 \mid \ell = 0, 1, \ldots\}$.

Las coordenadas esféricas de S^2, con $0 < \theta < \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, son

$$x_1 = \operatorname{sen}(\theta)\cos(\phi), \qquad x_2 = \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi), \qquad x_3 = \cos(\theta).$$

La expresión de Δ_{S^2} en estas coordenadas es

$$\Delta_{S^2} = -\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{4}\ .$$

Se puede probar que

$$\Delta_{S^2} = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + \frac{1}{4},$$

donde L_j, $j = 1, 2, 3$, son los generadores de las rotaciones en $\mathbb{R}^3$ a través del plano perpendicular al eje x_j. De hecho

$$\begin{aligned}
L_1 &= \imath\operatorname{sen}(\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \imath\cot(\theta)\cos(\phi)\frac{\partial}{\partial\phi},\\
L_2 &= -\imath\cos(\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \imath\cot(\theta)\operatorname{sen}(\phi)\frac{\partial}{\partial\phi},\\
L_3 &= -\imath\frac{\partial}{\partial\phi}.
\end{aligned}$$

Los operadores L_j actuan sobre un subespacio denso de $L^2(S^2)$ y proveen una representación del álgebra de Lie so(3) de SO(3). De hecho, estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación canónica

$$[L_j, L_k] = \imath\epsilon_{jk\ell}L_\ell, \qquad j, k, \ell = 1, 2, 3$$

donde $\{j, k, \ell\}$ es una permutación de $\{1, 2, 3\}$. Si la permutación es par (impar), entonces $\epsilon_{jk\ell} = 1$ ($\epsilon_{jk\ell} = -1$).

Es conocido que las funciones propias del Laplaciano Δ_{S^2} son una base de $L^2(S^2)$. Más aún, si $\mathcal{V}_\ell$ denota el espacio propio del Laplaciano Δ_{S^2} asociado al valor propio $(\ell + 1/2)^2$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$, entonces

$$L^2(S^2) = \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{V}_\ell\ .$$

El grupo SO(3) actúa sobre $L^2(S^2)$ de la siguiente manera. Dada $R \in \mathrm{SO}(3)$, definimos $T_R : L^2(S^2) \to L^2(S^2)$ por

$$T_R\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(R^{-1}(\mathbf{x})), \qquad \Psi \in L^2(S^n)\ ,\ \mathbf{x} \in S^2.$$

Una base particular de $L^2(S^2)$ es tomanda por las funciones propias normalizadas tanto de Δ_{S^2}, como de L_3 (estos dos operadores conmutan). Dichas funciones son conocidas como **esféricos armónicos** y los denotaremos por

$$\mathrm{Y}_{\ell,m} \ \text{ con } \ \ell = 0, 1, 2, \ldots \ \text{ y } \ m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell.$$

Más aún, si tomamos la acción del grupo $\{T_R \mid R \in \mathrm{SO}(3)\}$ sobre el espacio

$$\mathcal{V}_\ell = \mathrm{span}\{\mathrm{Y}_{\ell,m} \mid m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell\} \qquad \ell \in \mathbb{Z}_+\ ,$$

se obtienen todas las representaciones irreducibles de SO(3).

Por otro lado, se pueden obtener las representaciones irreducibles de SO(3) en base a las representaciones irreducibles de SU(2) (el grupo de matrices unitarias de dos por dos con entradas complejas y determinante uno). Una importante representación del grupo SU(2) es obtenida al dejar actuar dicho grupo sobre el espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^2}$ de forma similar a la acción del grupo SO(3) sobre $L^2(S^2)$.

Sea $\mathbf{S} = \{r/2 \mid r \in \mathbb{Z}_+\}$. Dado $s \in \mathbf{S}$, sea

$$\mathcal{W}_s = \{p \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^2} \mid p \text{ es polinomio homogeneo de grado } 2s\}.$$

Una base ortonormal de $\mathcal{W}_s$ es dada por los monomios

$$\mathrm{y}_{s,m} = \frac{z_1^{s+m} z_2^{s-m}}{\sqrt{(s+m)!(s-m)!}}\ , \qquad m = -s, -s+1, \ldots, s.$$

Cuando se restringe la acción de SU(2) a los espacios $\mathcal{W}_s$, se obtienen todas las representaciones irreducibles de SU(2). En particular cuando s es un entero no negativo, se obtienen todas las representaciones irreducibles de SO(3).

De las dos representaciones de SO(3), descritas arriba, se define la siguiente asignación

$$\mathrm{Y}_{\ell,m} \to \mathrm{y}_{\ell,m}\ , \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots \quad m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell.$$

Thomas y Wassel definen la **transformada de Bargmann $\mathbf{B}_{S^2}$** para $L^2(S^2)$ como la extensión lineal de dicha asignación. Nótese que $\mathbf{B}_{S^2}$ es un operador unitario de $L^2(S^2)$ sobre el subespacio cerrado $\mathcal{F}_2$ de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^2}$ generado por monomios de grado par. Ésto es

$$\mathcal{F}_2 = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{W}_\ell\ .$$

Definición 3.2 *La **transformada de Bargmann** $\mathbf{B}_{S^2} : L^2(S^2) \to \mathcal{F}_2$ es definida* *por el operador integral*

$$\mathbf{B}_{S^2}\Psi(\mathbf{z}) = \int_{\mathbf{x}\in S^2} K_{S^2}(\mathbf{x},\mathbf{z})\Psi(\mathbf{x})\mathrm{d}S_2(\mathbf{x}) \ , \qquad \Psi \in L^2(S^2) \ , \ \mathbf{z}\in\mathbb{C}^2$$

donde el núcleo integral de $\mathbf{B}_{S^2}$ *es*

$$K_{S^2}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{\mathrm{Y}_{\ell,m}}(\mathbf{x})\mathrm{y}_{\ell,m}(\mathbf{z}) \ , \qquad \mathbf{x}\in S^2 \ , \ \mathbf{z}\in\mathbb{C}^2 \ .$$

Otra forma de expresar el núcleo integral es por la siguiente serie de potencias

$$K_{S^2}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2\ell+1}}{\ell!}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\ell} (\vartheta_{S^2}(\mathbf{x},\mathbf{z}))^{\ell} \ ,$$

donde

$$\begin{aligned} \vartheta_{S^2}(\mathbf{x},\mathbf{z}) &= \sum_{m=-1}^{1} \overline{\mathrm{Y}}_{1,m}(\mathbf{x})\mathrm{y}_{1,m}(\mathbf{z}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[-\mathrm{sen}(\theta)e^{-\imath\phi}z_1^2 + 2\cos(\theta)z_1z_2 + \mathrm{sen}(\theta)e^{\imath\phi}z_2^2\right] \ . \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.2 Transformada de Bargmann para $L^2(S^3)$.

En analogía con el caso $L^2(S^2)$, Villegas-Blas [31] considero el Laplaciano normalizado sobre la esfera S^3, denotado por Δ_{S^3}.

Las coordenadas esféricas de S^3, con $0<\theta,\lambda<\pi$ y $0\le\phi\le 2\pi$, son

$$\begin{aligned} x_1 &= \mathrm{sen}(\lambda)\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi) \ , & x_2 &= \mathrm{sen}(\lambda)\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi) \ , \\ x_3 &= \mathrm{sen}(\lambda)\cos(\theta) \ , & x_4 &= \cos(\lambda) \ ,. \end{aligned}$$

La expresión para Δ_{S^3} en estas coordenadas es

$$\Delta_{S^3} = -\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} - 2\cot(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{\Delta_{S^2}-\frac{1}{4}}{\mathrm{sen}^2(\lambda)} + 1 \ .$$

Nótese que el espectro de Δ_{S^3} es el conjunto $\{n^2 \mid n\in\mathbb{Z}_+\}$.

Consideremos los generadores de las rotaciones en el plano (k,j), con $k,j = 1,2,3,4$, dado por las restricciones a S^3 de los siguientes operadores

$$\mathbf{E}_{k,j} = \frac{1}{\imath}\left(x_k\frac{\partial}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial}{\partial x_k}\right) \ .$$

Hay seis operadores linealmente independientes entre los operadores $\mathbf{E}_{k,j}$. Dichos operadores son $\mathbf{L}_1 = \mathbf{E}_{2,3}$, $\mathbf{L}_2 = \mathbf{E}_{3,1}$, $\mathbf{L}_3 = \mathbf{E}_{1,2}$, $\mathbf{A}_j = \mathbf{E}_{4,j}$, $j=1,2,3$, los cuales proveen una representación del álgebra de Lie so(4).

Sean $\mathbf{L}^2 = \mathbf{L}_1^2 + \mathbf{L}_2^2 + \mathbf{L}_3^2$ y $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3^2$. Se puede probar que

$$\Delta_{S^3} = \mathbf{L}^2 + \mathbf{A}^2 + 1 \; .$$

Como Δ_{S^3}, $\mathbf{L}^2$ y $\mathbf{L}_3$ conmutan, podemos encontrar funciones propias normalizadas en común de estos operadores. Dichas funciones son conocidas por **armónicos hiperesféricos** y los denotaremos por

$$\mathrm{Y}_{n\ell m} \quad \text{con} \;\; n = 1, 2, \ldots, \;\; \ell = 0, 1, \ldots, n-1 \; , \;\; m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell \; .$$

Para cada n, se tienen n^2 armónicos hiperesféricos linealmente independientes. Si tomamos la acción del grupo $\{T_R \mid R \in \mathrm{SO}(4)\}$ sobre el espacio n^2 dimensional generado por $\mathrm{Y}_{n\ell m}$ obtenemos todas las representaciones irreducibles de SO(4).

Encontremos el espacio de Hilbert de funciones analíticas relacionadas a $L^2(S^3)$. Para ello notemos que las RCC satisfechas por $\mathbf{L}$, $\mathbf{A}$ son

$$[\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j] = \imath\epsilon_{ijk}\mathbf{L}_k \; , \quad [\mathbf{L}_i, \mathbf{A}_j] = \imath\epsilon_{ijk}\mathbf{A}_k \; , \quad [\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j] = \imath\epsilon_{ijk}\mathbf{L}_k \; .$$

Definamos los operadores

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{L} + \mathbf{A}}{2} \qquad \mathbf{D} = \frac{\mathbf{L} - \mathbf{A}}{2} \; .$$

Las relaciones de conmutación de estos operadores son

$$[\mathbf{C}_i, \mathbf{C}_j] = \imath\epsilon_{ijk}\mathbf{C}_k \; , \quad [\mathbf{D}_i, \mathbf{D}_j] = \imath\epsilon_{ijk}\mathbf{D}_k \; , \quad [\mathbf{C}_i, \mathbf{D}_j] = 0 \; .$$

Así obtenemos que $\mathrm{so}(4) = \mathrm{su}(2) \times \mathrm{su}(2)$.

Dado que $\mathbf{L} \cdot \mathbf{A}\Psi = (\mathbf{L}_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{L}_2\mathbf{A}_2 + \mathbf{L}_3\mathbf{A}_3)\Psi = 0$ se tiene que

$$\mathbf{C}^2\Psi = \mathbf{D}^2\Psi = \left(\frac{\mathbf{L}^2 + \mathbf{A}^2}{4}\right)\Psi \; .$$

Tenemos que los valores propios de $\mathbf{C}^2$ y $\mathbf{D}^2$ son de la forma $u(u+1)$ y $v(v+1)$ respectivamente (con $u, v \in \mathbf{S}$). Además como $\Delta_{S^3} = \mathbf{L}^2 + \mathbf{A}^2 + 1$ se puede probar que $u = v = (n-1)/2$.

Consideremos el espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4} = \mathcal{B}_{\mathbb{C}^2} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{C}^2}$ de funciones analíticas de cuatro variables complejas (z_1, z_2, z_3, z_4). Para cada entero n, también consideremos el subespacio n^2 dimensional $\mathcal{M}_n$ de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$ dado por

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{W}_{(n-1)/2} \otimes \mathcal{W}_{(n-1)/2} \; ,$$

con $\mathcal{W}_{(n-1)/2}$ el espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado $n-1$ en dos variables complejas. Una base del espacio $\mathcal{M}_n$ es dada por los monomios

$$y_{nm_1m_2} = \frac{z_1^{\frac{n-1}{2}+m_1} z_2^{\frac{n-1}{2}-m_1} z_3^{\frac{n-1}{2}+m_2} z_4^{\frac{n-1}{2}-m_2}}{\left[\left(\frac{n-1}{2}+m_1\right)!\left(\frac{n-1}{2}-m_1\right)!\left(\frac{n-1}{2}+m_2\right)!\left(\frac{n-1}{2}-m_2\right)!\right]^{\frac{1}{2}}}$$

con $-(n-1)/2 \leq m_1, m_2 \leq (n-1)/2$.

Se desea asignar a una función analítica (de cuatro variables complejas) un armónico hiperesférico $\mathrm{Y}_{n\ell m}$. Recordemos que $\mathrm{Y}_{n\ell m}$ es una función propia tanto de Δ_{S^3}, como de $\mathbf{L}^2$ y $\mathbf{L}_3$. Por tal motivo le asignamos a cada $\mathrm{Y}_{n\ell m}$ una función propia de la representación de los operadores Δ_{S^3}, $\mathbf{L}^2$ y $\mathbf{L}_3$ en el espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$. Dicha función es

$$\mathrm{y}_{n\ell m}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \sum_{m_1+m_2=m} C\left(\frac{n-1}{2}, m_1, \frac{n-1}{2}, m_2; \ell, m\right) y_{n,m_1m_2} \ ,$$

donde $C\left(\frac{n-1}{2}, m_1, \frac{n-1}{2}, m_2; \ell, m\right)$ son los coeficientes de Clebsch-Gordan [25].

Siguiendo a Thomas/Wassell, Villegas-Blas definió la transformada de Bargmann para $L^2(S^3)$ como la extención lineal de la anterior asignación.

Definición 3.3 *La **transformada de Bargmann** $\mathbf{B}_{S^3} : L^2(S^3) \to \mathcal{F}_4$, donde $\mathcal{F}_4$ es el subespacio cerrado de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$ generado por los espacios $\mathcal{M}_n$ (es decir $\mathcal{F}_4 = \oplus_{\ell=1}^{\infty}\mathcal{M}_\ell$). Es definida por el operador integral*

$$\mathbf{B}_{S^3}\Psi(\mathbf{z}) = \int_{\mathbf{x}\in S^3} K_{S^3}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\Psi(\mathbf{x})\mathrm{d}S_3(\mathbf{x}) \ , \qquad \Psi \in L^2(S^3) \ , \ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^4$$

donde el núcleo integral de $\mathbf{B}_{S^3}$ es

$$K_{S^3}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{\mathrm{Y}}_{n\ell m}(\mathbf{x})\mathrm{y}_{n\ell m}(\mathbf{z}) \ , \qquad \mathbf{x} \in S^3 \ , \ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^4 \ .$$

Al igual que en el caso de la esfera S^2, K_{S^3} puede escribirse en potencias de la función

$$\vartheta_{S^3}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{\ell=0}^{1}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{\mathrm{Y}}_{2\ell m}(\mathbf{x})\mathrm{y}_{2\ell m}(\mathbf{z})$$

De hecho

$$K_{S^3}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\ell+1}}{\ell!}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\ell} \left(\vartheta_{S^3}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\right)^{\ell} \ , \tag{3.2}$$

donde $\vartheta_{S^3}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ tiene la siguiente expresión explícita

$$\begin{aligned}\vartheta_{S^3}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) =& \sqrt{2}\big(z_1z_4\left[\cos(\lambda) - \imath\cos(\theta)\mathrm{sen}(\lambda)\right] - z_2z_3\left[\cos(\lambda) + \imath\cos(\theta)\mathrm{sen}(\lambda)\right] \\ &+ \imath z_1z_3\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\lambda)e^{-\imath\phi} - \imath z_2z_4\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\lambda)e^{\imath\phi}\big) \ .\end{aligned} \tag{3.3}$$

3.3 El núcleo de la transformada de Bargmann y transformaciones canónicas

En esta sección se describirá como las transformadas de Bargmann $\mathbf{B}_{S^2}$, $\mathbf{B}_{S^3}$ se pueden ver como una cuantización de una transformación canónica. Para ello utilizaremos que el núcleo reproductor de la transformada de Bargman es una serie de potencias en cierta función. Esta función va a ser la función generadora de la transformación canónica mencionada arriba.

Para mas detalles ver el artículo de Villegas-Blas [31]. Primero analizemos el caso de la esfera S^2.

3.3.1 Transformación canónica de un partícula moviendose en S^2.

La descripción para una partícula moviendose en $\mathbb{R}^n$ (ver sección 2.1) sugiere considerar la función $(-\imath/\sqrt{3})\vartheta_{S^2}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ como la función generadora de una transformación canónica $\mathcal{C}^{-1}_{(2,2)}$ que mapea el espacio fase $T^*S^2 - \{0\}$ (T^*S^2 menos la sección cero) sobre una subvariedad de $T^*\mathbb{C}^2$.

Consideremos

$$p_\theta = -\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{-\imath}{\sqrt{3}}\vartheta_{S^2} , \qquad p_\phi = -\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{-\imath}{\sqrt{3}}\vartheta_{S^2} ,$$
$$w_j = \imath\frac{\partial}{\partial z_j}\frac{-\imath}{\sqrt{3}}\vartheta_{S^2} , \qquad j = 1, 2.$$

De lo anterior y (3.1) se tienen las siguientes expresiones explícitas

$$\begin{aligned}
p_\theta &= -\frac{\imath}{2}[\cos(\theta)e^{-\imath\phi}z_1^2 + 2\mathrm{sen}(\theta)z_1z_2 - \cos(\theta)e^{\imath\phi}z_2^2] , \\
p_\phi &= -\frac{1}{2}[\mathrm{sen}(\theta)e^{-\imath\phi}z_1^2 + \mathrm{sen}(\theta)e^{\imath\phi}z_2^2] , \\
w_1 &= -\mathrm{sen}(\theta)e^{-\imath\phi}z_1 + \cos(\theta)z_2 , \\
w_2 &= \cos(\theta)z_1 + \mathrm{sen}(\theta)e^{\imath\phi}z_2 .
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Para identificar la subvariedad de $T^*\mathbb{C}^2$ que es la imagen de $T^*S^2 - \{0\}$, se necesita encontrar la relación que existe entre las variables (w_1, w_2) y (z_1, z_2).

Utilizando las dos primeras ecuaciones de (3.4) y el hecho de que las variables $\theta, \phi, p_\theta, p_\phi$ son reales se obtienen expresiones para $\mathrm{sen}(\theta)$, $\cos(\theta)$ y $\exp(\imath\phi)$ en términos de las variables z_1, z_2. A partir de ésto se puede mostrar que

$$w_1 = \pm\bar{z}_1 , \qquad w_2 = \pm\bar{z}_2 .$$

Nos restringiremos a considerar el signo positivo, es decir $(w_1, w_2) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$. Nótese que si (z_1, z_2) es solución de (3.4), también lo es $(-z_1, -z_2)$. Por tal motivo necesitamos identificar (z_1, z_2) con $-(z_1, z_2)$. Así $\mathcal{C}^{-1}_{(2,2)}$ debe tomar valores en la siguiente subvariedad de $T^*\mathbb{C}^2$.

$$\mathcal{D}_2 = \{(z_1, z_2, w_1, w_2) \in \mathbb{C}^4 \mid w_1 = \overline{z}_1 \ , w_2 = \overline{z}_2\}/\{1, -1\} \ .$$

Nóte que la variedad $(\mathcal{D}_2, \tau_2)$ (con τ_2 la restricción de la forma simpléctica $-\imath \sum_{j=1}^2 \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}w_j$ a $\mathcal{D}_2$) puede ser considerada como $\tilde{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{C}^2/\{1, -1\}$ con forma simpléctica $\mu_2 = -\imath(\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\overline{z}_1 + \mathrm{d}z_2 \wedge \mathrm{d}\overline{z}_2)$.

También podemos expresar p_θ, p_ϕ en términos de $(z_1, z_2, \overline{z}_1, \overline{z}_2)$:

$$p_\theta = \left(\frac{z_1 z_2 - \overline{z}_1 \overline{z}_2}{2\imath}\right)\left(\frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{z_1^2 - \overline{z}_2^2}\right) \ , \qquad p_\phi = \frac{1}{2}\left(|z_1|^2 - |z_2|^2\right) \ ,$$
$$H = p_\theta^2 + \frac{1}{\mathrm{sen}^2(\theta)} p_\phi^2 = \left(\frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{2}\right)^2 .$$

Por otro lado, la función generadora $(-\imath/\sqrt{3})\vartheta_{S^2}$ de la transformación canónica $\mathcal{C}_{(2,2)}^{-1}$ puede ser escrita por el producto interno

$$\frac{-\imath}{\sqrt{3}}\vartheta_{S^2}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -\imath(\rho_{(2,2)}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{x}) \ , \tag{3.5}$$

donde

$$\mathbf{x} = (\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi), \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi), \cos(\theta))$$
$$\rho_{(2,2)}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\left(z_2^2 - z_1^2 \ , \ \imath z_1^2 + \imath z_2^2 \ , \ 2z_1 z_2\right) \ , \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^2 \ .$$

Nótese que $\rho_{(2,2)}(\mathbf{z})$ se encuentra en la cuádrica nula de $\mathbb{C}^2$, definida por

Definición 3.4 *Sea k un entero positivo, definamos la cuádrica nula compleja por*

$$\mathbb{Q}^k = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^{k+1} \mid \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_{k+1}^2 = 0\},$$

Nótese que

$$\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^k \Leftrightarrow |\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})| = |\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})| \ \text{ y } \ \mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}) = 0, \tag{3.6}$$

con $\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})$ y $\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})$ denotando la parte real e imaginaria de $\boldsymbol{\alpha}$ respectivamente.

Por (3.6) la cuádrica nula (con el origen removido) puede ser identificada con el haz cotagente de la esfera T^*S^n (con la sección cero removida) a través de la siguiente función

$$\begin{aligned} &\sigma_n : \mathbb{Q}^n - \{0\} \to T^*S^n - \{0\} \ , \\ &\sigma_n(\boldsymbol{\alpha}) = \left(\frac{\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})}{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}, -\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})\right) . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Por tal motivo, la transformación canónica $\mathcal{C}_{(2,2)}$ hace que el siguiente triángulo conmute

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathbb{C}}^2 - \{0\} \arrow[r, "\mathcal{C}_{(2,2)}"] \arrow[d, "\rho_{(2,2)}"'] & T^*S^2 - \{0\} \\ \mathbb{Q}^2 - \{0\} \arrow[ur, "\sigma_2"'] & \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

Observación 3.5 *De la definición 3.2, y de las ecuaciones (3.1), (3.5) se tiene que otra expresión de la transformada de Bargmann para $L^2(S^2)$ es*

$$\mathbf{B}_{S^2}\Psi(\mathbf{z}) = \int_{\mathbf{x}\in S^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2\ell+1}}{\ell!} \left(\rho_{(2,2)}(\mathbf{z})\cdot\mathbf{x}\right)^{\ell} \Psi(\mathbf{x}) \mathrm{d}S_2(\mathbf{x}) \ , \qquad \Psi \in L^2(S^2) \ , \ \mathbf{z}\in\mathbb{C}^2 \tag{3.9}$$

3.3.2 Transformación canónica de un partícula moviendose en S^3.

En analogía con los espacios $\mathbb{R}^n$ y S^2, consideremos la función $-\frac{\imath}{\sqrt{2}}\vartheta_{S^3}$ como la función generadora de una transformación canónica. La cual va a ser definida a través de las siguientes ecuaciones

$$\begin{gathered} p_\theta = -\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{-\imath}{\sqrt{2}}\vartheta_{S^3} \ , \qquad p_\phi = -\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{-\imath}{\sqrt{2}}\vartheta_{S^3} \ , \qquad p_\lambda = -\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{-\imath}{\sqrt{2}}\vartheta_{S^3} \ , \\ w_j = \imath\frac{\partial}{\partial z_j}\frac{-\imath}{\sqrt{2}}\vartheta_{S^3} \ , \qquad j = 1,2,3,4. \end{gathered} \tag{3.10}$$

De (3.3) y el hecho de que θ, ϕ, λ, p_θ, p_ϕ, p_λ son variables reales podemos expresar el $\mathrm{sen}(\theta)$, $\cos(\theta)$, $\mathrm{sen}(\lambda)$ y $\cos(\lambda)$ en términos de las variables $z_j, \overline{z}_j$, $j = 1,2,3,4$. A partir de lo cual obtenemos que

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = \pm(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3, \overline{z}_4) \ .$$

Escojamos el signo positivo. A partir de ésto y las expresiones previamente obtenidas de $\mathrm{sen}(\theta)$, $\cos(\theta)$, $\mathrm{sen}(\lambda)$ y $\cos(\lambda)$ se puede mostrar que

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2 + |z_4|^2.$$

Además nótese que si (z_1, z_2, z_3, z_4) es solución de (3.10), entonces también lo debe de ser $(z_1 e^{\imath\psi}, z_2 e^{\imath\psi}, z_3 e^{-\imath\psi}, z_4 e^{-\imath\psi})$, para cualquier $\psi \in \mathbb{R}$. Por lo cual, definamos la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{C}^4$

$$\begin{gathered} (z_1, z_2, z_3, z_4) \sim (z_1', z_2', z_3', z_4') \quad \text{si existe} \quad \psi\in\mathbb{R} \quad \text{tal que} \\ (z_1', z_2', z_3', z_4') = (z_1 e^{\imath\psi}, z_2 e^{\imath\psi}, z_3 e^{-\imath\psi}, z_4 e^{-\imath\psi}) \ . \end{gathered}$$

Por lo cual, la transformación canónica debe de tomar valores en

$$\tilde{\mathbb{C}}^4 = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2 + |z_4|^2\}/\sim \ .$$

Al igual que en el caso de S^2, se puede probar que

$$\frac{-\imath}{\sqrt{2}} \vartheta_{S^3}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -\imath \rho_{(3,4)}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{x} \ , \tag{3.11}$$

donde $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^4$ y

$$\begin{aligned} \rho_{(3,4)}(\mathbf{z}) &= (z_1 z_3 + z_2 z_4 \ , \ \imath(z_1 z_3 - z_2 z_4) \ , \ \imath(z_1 z_4 + z_2 z_3) \ , \ z_1 z_4 - z_2 z_3) \ . \\ \mathbf{x} &= (\operatorname{sen}(\lambda)\operatorname{sen}(\theta)\cos(\phi) \ , \ \operatorname{sen}(\lambda)\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi) \ , \ \operatorname{sen}(\lambda)\cos(\theta) \ , \ \cos(\lambda)) \ . \end{aligned}$$

Nótese que para cualquier $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^4$, el vector $\rho_{(3,4)}(\mathbf{z}) \in \mathbb{Q}^3$. Por cual la transformación canónica se puede ver como la siguiente composición

$$\mathcal{C}_{(3,4)} = \rho_{(3,4)} \circ \sigma_3 \ .$$

Observación 3.6 *De la definición 3.3, y de las ecuaciones (3.2), (3.11) se tiene que otra expresión de la transformada de Bargmann para $L^2(S^3)$ es*

$$\mathbf{B}_{S^3}\Psi(\mathbf{z}) = \int\limits_{\mathbf{x}\in S^3} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\ell+1}}{\ell!} \left(\rho_{(3,4)} \cdot \mathbf{x}\right)^{\ell} \Psi(\mathbf{x}) \mathrm{d}S_3(\mathbf{x}) \ , \qquad \Psi \in L^2(S^3) \ , \ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^4 \ . \tag{3.12}$$

Observación 3.7 *En analogía con lo que pasa en $\mathbb{R}^n$: las transformadas de Bargmann $\mathbf{B}_{S^2}$ y $\mathbf{B}_{S^3}$ son operadores integrales cuyo núcleo integral es una serie de potencias en $\vartheta_{(n,m)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) := -\imath\rho_{(n,m)}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{x}$, con $(n, m) = (2, 2), (3, 4)$ respectivamente para $\mathbf{x} \in S^n$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m$.*

Además de que la función $\vartheta_{(n,m)}$ tiene la propiedad de ser la función generadora de una transformación canónica $\mathcal{C}_{(n,m)}$. Por tal motivo, las transformadas de Bargmann $\mathbf{B}_{S^2}$ y $\mathbf{B}_{S^3}$ pueden verse como la cuantización de la transformación canónica $\mathcal{C}_{(n,m)}$.

Capítulo 4

Transformada de Bargmann para la n esfera.

Es este capítulo introduciremos un espacio de Hilbert $\mathcal{E}_n$, de funciones analíticas definidas sobre la cuádrica nula $\mathbb{Q}^n$. Además de definir la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_n$, que lleva una función de $L^2(S^n)$, $n \geq 2$, a una función de dicho espacio.

También se deducen de manera estricta las transformadas de Bargmann $\mathbf{B}_{S^n}$ para $L^2(S^n)$, con $n = 2, 3, 5$ sobre cierto subespacio cerrado del espacio de Bargmann $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}^m}$, $m = 2, 4, 8$ respectivamente. En el capítulo 3 ya se mencionaron las ideas principales de como dedujeron Thomas/Wassell y Villegas-Blas las transformadas de Bargmann sobre $L^2(S^2)$ y $L^2(S^3)$ respectivamente. Sin embargo vamos a dar demostraciones diferentes a las dadas por ellos. Las cuales van a utilizar el operador $\mathbf{B}_n$.

Cabe mencionar que podemos relacionar los espacios $\mathcal{F}_m$ $(m = 2, 4, 8)$ con $\mathcal{E}_n$ $(n = 2, 3, 5)$ respectivamente a través de la función $\rho_{(n,m)}$ (ver (A.21), (A.22), (A.23)).

4.1 Espacio de Bargmann-Todorov, $\mathcal{E}_n$.

En esta sección daremos una descripción del espacio $\mathcal{E}_n$ introducido por V. Bargman e I. T. Todorov [4], el cual llamaremos espacio de Bargmann-Todorov.

Consideremos la siguiente medida $\mathrm{d}m^{\hbar}_{n+1}$ sobre $\mathbb{C}^{n+1}$

$$\mathrm{d}m^{\hbar}_{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2^{n-1}\hbar^{2(n-1)}}\mathfrak{F}\left(\frac{|\boldsymbol{\alpha}|^2}{2\hbar^2}\right)\delta(\boldsymbol{\alpha}^2)\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\alpha}}\,,$$

con $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$, $|\boldsymbol{\alpha}|^2 = |\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_{n+1}|^2$, $\delta(\boldsymbol{\alpha}^2)$ denotando la distribución delta de Dirac sobre la cuádrica nula $\mathbb{Q}^n$ (ver [6] para definición de delta de Dirac). $\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ denota la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ y la función $\mathfrak{F}$ es definida por

$$\mathfrak{F}(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \frac{(16t)^{\frac{3-n}{4}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \mathrm{K}_{\frac{n-3}{2}}(2\sqrt{t}) \,, \qquad t \in \mathbb{R}^+ \,, \tag{4.1}$$

donde $\mathrm{K}_{\frac{n-3}{2}}$ y Γ denotan las funciones de Macdonald Bessel y Gamma respectivamente (ver [7] secciones 8.4 y 8.5 para definición y expresión de estas funciones especiales). En la proposición 4.8 se muestra una expresión de la medida $\mathrm{d}m^{\hbar}_{n+1}$ sin la función delta de Dirac $\delta(\boldsymbol{\alpha}^2)$.

Cabe remarcar que la medida $\mathrm{d}m^{\hbar}_{n+1}$ es la medida considerada por Bargmann-Todorov [4] pero reescalada por un factor $\frac{1}{\sqrt{2}\hbar}$.

Más aún, la medida $\mathrm{d}m^{\hbar}_{n+1}$ es invariante bajo el grupo de rotaciones $\mathrm{SO}(n+1)$. La acción de $\mathrm{SO}(n+1)$ sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ que estamos considerando es la siguiente: para $R \in \mathrm{SO}(n+1)$ definimos la función $T_R : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ por $T_R(\mathbf{z}) = R\mathrm{Re}(\mathbf{z}) + \imath R\mathrm{Im}(\mathbf{z})$ con $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1}$ y $R\mathrm{Re}(\mathbf{z})$, $R\mathrm{Im}(\mathbf{z})$ son dados por la acción usual de $\mathrm{SO}(n+1)$ sobre $\mathbb{R}^{n+1}$.

Nótese que la cuádrica nula $\mathbb{Q}^n$ es invariante bajo la acción mencionada arriba. A continuación citaremos algunos resultados, sin demostración, dados por Bargmann-Todorov. Ver [4] para detalles de las demostraciones.

Definición 4.1 *El **espacio de Bargmann-Todorov** $\mathcal{E}_n$, es definido como el completamiento (respecto al producto escalar topologico) de*

$$\bigoplus_{\ell=0}^{\infty} W_\ell \,.$$

Donde W_ℓ el espacio de polinomios homogéneos de grado ℓ en $n+1$ variables complejas vistos como elementos de la cuádrica nula $\mathbb{Q}^n$.

Observación 4.2 *Note que dos diferentes polinomios de grado ℓ definidos inicialmente sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ podrían ser el mismo elemento en W_ℓ.*

De hecho Bargmann y Todorov [4] muestran que

Proposición 4.3 *El espacio $\mathcal{E}_n$ es un espacio de Hilbert con producto interno*

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{E}_n} = \int f(\boldsymbol{\alpha})\overline{g(\boldsymbol{\alpha})}\mathrm{d}m^{\hbar}_{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) \,, \qquad f, g \in \mathcal{E}_n \,. \tag{4.2}$$

Para $j = 1, \ldots, n+1$, sea $\mathbf{X}_j$ el operador de multiplicación por la coordenada α_j actuando sobre $\mathcal{E}_n$. Se puede mostrar que en el espacio $\mathcal{E}_n$, el adjunto del operador $\mathbf{X}_j$ tiene la siguiente expresión

$$\mathbf{D}_j = 2\hbar^2 \left(\mathbf{X}_k \frac{\partial}{\partial \alpha_k} + \frac{n-1}{2}\right) \frac{\partial}{\partial \alpha_j} - \hbar^2 \mathbf{X}_j \Delta \,, \tag{4.3}$$

donde $\Delta = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_k^2}$ y asumiendo sumas sobre índices repetidos.

Comentario 4.4 *Bargmann y Todorov [4] encontraron la medida* $\mathrm{d}m^{\hbar}_{n+1}$ *requiriendo que los operadores* $\mathbf{X}_j$ *y* $\mathbf{D}_j$ *son adjunto uno del otro.*

El espacio $\mathcal{E}_n$ tiene la propiedad de tener un núcleo reproductor como se muestra en la siguiente

Proposición 4.5 *El núcleo reproductor del espacio* $\mathcal{E}_n$*, denotado para* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{Q}^n$ *por* $\mathbf{T}_n = \mathbf{T}_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$*, es dado por*

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell! \left(\frac{n-1}{2}\right)_\ell} \left(\frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}}{2\hbar^2}\right)^\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbf{T}_n^{(\ell)}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \end{aligned} \tag{4.4}$$

con $(a)_\ell = \Gamma(a+\ell)/\Gamma(a)$ *(símbolo de Pochhammer), y* $\mathbf{T}_n^{(\ell)}$ *el núcleo reproductor del espacio* W_ℓ*. Más aún utilizando la fórmula 9.6.10 de [2], este núcleo reproductor puede ser escrito de la forma*

$$\mathbf{T}_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \left(\frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}}{2\hbar^2}\right)^{\frac{3-n}{4}} \mathrm{I}_{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{\sqrt{2\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}}}{\hbar}\right) \tag{4.5}$$

con I_k *denotando la función modificada de Bessel de primer tipo de orden* k *(ver [2] sección 8.4 y 8.5 para definición y expresión de esta función especial).*

Comentario 4.6 *Cabe aclarar que para que el lado derecho de* (4.5) *tenga sentido tenemos que hablar de ramas de la función raíz cuadrada* $\sqrt{z} = |z|^{1/2} \exp(\imath\theta/2)$*, con* $\theta = \arg(z)$*. Dicha rama dependera de donde se encuentra el* $\arg(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})$*.*

De hecho la rama que se considerará va a ser en donde $-\pi < \theta < \pi$*. En el caso de que* $\arg(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}) = \pi$ *entonces la rama estará definida en donde* $0 < \theta < 2\pi$*.*

Por otro lado, por la expresión de $\mathrm{d}m^{\hbar}_{n+1}$ (ya que incluye la función $\delta(\boldsymbol{\alpha}^2)$), la evaluación directa del producto interno de dos elementos de $\mathcal{E}_n$ podría ser complicado, incluso cuando se trate de polinomios. Sin embargo, podemos evaluar el producto interno de elementos de W_ℓ como se muestra en la siguiente (ver [4] para mas detalles)

Proposición 4.7 *Sea* ℓ *entero no negativo. El producto interno de dos elemento de* W_ℓ *es proporcional a su producto interno considerados como elementos del espacio de Bargmann* $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^{n+1}}$*. Es decir, para* $f, g \in W_\ell$ *se tiene*

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{E}_n} = (2\hbar)^\ell \left(\frac{n-1}{2}\right)_\ell \langle f, g \rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^{n+1}}} .$$

Sin embargo cuando muestre la concentración de la transformada de Bargmann de los estados coherentes (los cuales van a ser definidos posteriormente) voy a necesitar la evaluación del producto interno de dos elementos cualquiera (no sólo de elementos en W_ℓ) en $\mathcal{E}_n$. Por lo cual en la siguiente proposición doy una expresión explícita de la función $\delta(\boldsymbol{\alpha}^2)$ en ciertas coordenadas adecuadas y con ello una expresión para $\mathrm{d}m^{\hbar}_{n+1}$ que no involucra la delta de Dirac. Cabe mencionar que Bargmann y Todorov no mencionan esta expresión de la medida.

Proposición 4.8 *La expresión de la medida del espacio de Bargmann - Todorov es*

$$\mathrm{d}m^{\hbar}_{n+1}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{2^{n+1}\hbar^{2(n-1)}}\mathfrak{F}\left(\frac{r^2}{\hbar^2}\right) r^{2n-3}\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega_n(\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}\Omega_{n-1}(\boldsymbol{\eta}) \tag{4.6}$$

donde $\mathrm{d}\Omega_k$ *denota la medida de superficie de la esfera* S^k*. De aquí que para* $f, g \in \mathcal{E}_n$

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{E}_n} = \int\limits_{r>0}\int\limits_{\boldsymbol{\theta}\in S^n}\int\limits_{\boldsymbol{\eta}\in S^{n-1}} f(r(\boldsymbol{\theta}+\imath\boldsymbol{\eta}))\overline{g(r(\boldsymbol{\theta}+\imath\boldsymbol{\eta}))}$$
$$\frac{r^{2n-3}}{2^{n+1}\hbar^{2(n-1)}}\mathfrak{F}\left(\frac{r^2}{\hbar^2}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega_n(\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}\Omega_{n-1}(\boldsymbol{\eta})\ .$$

Demostración.

Primero daremos coordenadas específicas a $\mathbb{Q}^n - \{0\}$. Para hacer ésto veamos a $\boldsymbol{\beta}$ como un elemento de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Note que $\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\beta}} = \mathrm{d}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{\beta}))\mathrm{d}(\mathrm{Im}(\boldsymbol{\beta}))$, con $\mathrm{d}(\mathrm{Re}(\boldsymbol{\beta}))$ y $\mathrm{d}(\mathrm{Im}(\boldsymbol{\beta}))$ denotando la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{n+1}$. Consideremos coordenadas esféricas para $\mathrm{Re}(\boldsymbol{\beta})$, es decir

$$\mathrm{Re}(\boldsymbol{\beta}) = r\boldsymbol{\theta}\ , \qquad r > 0\ ,\ \boldsymbol{\theta}\in S^n\ .$$

Como $\mathrm{Re}(\boldsymbol{\beta}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, descompongamos $\mathrm{Im}(\boldsymbol{\beta})$ en las direcciones paralelas y ortogonales a $\mathrm{Re}(\boldsymbol{\beta})/|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\beta})|$

$$\mathrm{Im}(\boldsymbol{\beta}) = \mu\frac{\mathrm{Re}(\boldsymbol{\beta})}{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\beta})|} + \rho\boldsymbol{\eta}\ , \qquad \mu\in\mathbb{R}\ ,\ \rho > 0\ , |\boldsymbol{\eta}| = 1\ \text{ y }\ \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\eta} = 0\ .$$

Nótese que el vector $\rho\boldsymbol{\eta}$ es ortogonal a $\frac{\mathrm{Re}(\boldsymbol{\beta})}{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\beta})|}$. Por tal motivo lo podemos considerar como un elemento de $\mathbb{R}^n$ con $\boldsymbol{\eta}\in S^{n-1}$. Así se tiene que

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\beta}} = r^n\rho^{n-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\Omega_n(\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}\Omega_{n-1}(\boldsymbol{\eta})$$

donde $\mathrm{d}\Omega_k$ es la medida de superficie de la esfera S^k.

Tomemos estas coordenadas para $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$. Se puede probar que $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{Q}^n - \{0\}$ (ver (3.6)) si y sólo si $\mu = 0$ y $r^2 - \rho^2 = 0$.

Consideremos el cambio de coordenadas $(r, \boldsymbol{\theta}, \mu, \rho, \boldsymbol{\eta}) \mapsto (P_1, P_2, r, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})$ con

$$P_1 = r^2 - (\rho^2 + \mu^2)\ ,$$
$$P_2 = 2r\mu\ .$$

Entonces $\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\beta}}$ tiene la siguiente expresión en las nuevas coordenadas

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\beta}} = \mathrm{d}P_1\mathrm{d}P_2\frac{1}{4}r^{n-1}\left[r^2 - P_1 - \frac{P_2^2}{4r^2}\right]^{\frac{n-2}{2}} \mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega_n(\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}\Omega_{n-1}(\boldsymbol{\eta}) \, .$$

De la definición de delta de Dirac (ver [6], capítulo III, sección 2.1) y tomando $\boldsymbol{\beta} = r(\boldsymbol{\theta} + \imath\boldsymbol{\eta})$ se obtiene (4.6).

■

Siguiendo [3], introducimos la siguiente proposición (similar al criterio 1.18) que va a ser utilizada en la siguiente sección para probar que la transformada de Bargmann de $L^2(S^n)$ es una isometría.

Proposición 4.9 *Sea F función analítica de $n+1$ variables complejas. Para $0 < \lambda < 1$, definamos $F_\lambda(\mathbf{z}) = F(\lambda\mathbf{z})$. Entonces*

$$F \in \mathcal{E}_n \Leftrightarrow F_\lambda \in \mathcal{E}_n \;\; \textit{y sus normas } ||F_\lambda||_{\mathcal{E}_n} \;\; \textit{son uniformemente acotadas.}$$

En este caso F_λ converge a F en el espacio $\mathcal{E}_n$ cuando $\lambda \to 1$.

Demostración.

Sean ℓ entero no negativo y d_ℓ la dimensión del espacio W_ℓ. Sea $\{\mathbf{e}_{\ell k}\}$, $k = 1, \ldots, d_\ell$ una base ortonormal de W_ℓ respecto al producto interno definido en (4.2). Note que $\mathbf{e}_{\ell k}$ es un polinomio homogéneo de grado ℓ.

Sea F función analítica de $n+1$ variables complejas. No es difícil ver que la restricción de F a la cuádrica nula (que también la llamaremos F) puede ser escrita como la serie de potencias convergente

$$F(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_\ell} A_{\ell k}\mathbf{e}_{\ell k}(\boldsymbol{\alpha}) \, , \qquad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n \tag{4.7}$$

para algunos coeficientes $A_{\ell k}$. Luego

$$F \in \mathcal{E}_n \;\text{ si y sólo si }\; \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_\ell} |A_{\ell k}|^2 < \infty \, .$$

De (4.7) se tiene

$$F_\lambda(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_\ell} A_{\ell k}\mathbf{e}_{\ell k}(\lambda\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_\ell} A_{\ell k}\lambda^{\ell}\mathbf{e}_{\ell k}(\boldsymbol{\alpha}) \, .$$

Supongamos que $F \in \mathcal{E}_n$. Como

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_\ell} \lambda^{2\ell}|A_{\ell k}|^2 \leq \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{d_\ell} |A_{\ell k}|^2$$

entonces $F_\lambda \in \mathcal{E}_n$. Además las normas de F_λ, $0 < \lambda < 1$ son uniformemente acotadas por $||F||_{\mathcal{E}_n}$.

Supongamos ahora que $F_\lambda \in \mathcal{E}_n$ y que existe una constante C tal que $||F_\lambda||_{\mathcal{E}_n} \leq C$ para toda $0 < \lambda < 1$. Sea $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de números en el intervalo $(0,1)$ que convergen a 1. Definamos $\gamma_{\ell j} = \lambda_j^{2\ell}$ y $b_\ell = \sum_{k=1}^{d_\ell} |A_{\ell k}|^2$. Los números $\sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma_{\ell j} b_\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_\ell} \lambda_j^{2\ell} |A_{\ell k}|^2 = \|F_{\lambda_j}\|_{\mathcal{E}_n}^2$ son uniformemente acotados por C. Por el teorema 1.9, la serie $\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_\ell} |A_{\ell k}|^2$ es finita. Por lo cual F pertenece a $\mathcal{E}_n$. Más aún

$$||F - F_\lambda||^2 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_\ell} (1-\lambda^\ell)^2 |A_{\ell k}|^2 .$$

Dado que $\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_\ell} |A_{\ell k}|^2$ es finita. Entonces del teorema de convergencia dominada de Lebesgue tenemos

$$\lim_{\lambda \to 1} ||F - F_\lambda||^2 = 0 . \qquad \blacksquare$$

4.2 Transformada de Bargmann para $L^2(S^n)$, $\mathbf{B}_n$.

Motivados en la definición de transformada de la Bargmann para $L^2(S^n)$, $n = 2, 3$, (ver ecuaciones (3.9) y (3.12)) es natural definir la transformada de Bargmann de $\Psi \in L^2(S^n)$, $n \geq 2$ por

$$\mathbf{B}_n \Psi(\boldsymbol{\alpha}) = \int_{S^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} \left(\frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}}{\hbar} \right)^k \Psi(\mathbf{x}) \mathrm{d}S_n(\mathbf{x}) , \qquad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n . \tag{4.8}$$

Donde $\mathrm{d}S_n(\mathbf{x})$ es la medida de superficie normalizada sobre S^n. Los coeficientes c_k son calculados requiriendo que $\mathbf{B}_n$ sea una isometría. Para poder calcular estos coeficientes hacemos uso de la siguiente

Proposición 4.10 *Sean $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ dos elementos de la cuádrica nula $\mathbb{Q}^n$ y ℓ un entero no negativo. Definamos $\Phi_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\ell)}(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x})^\ell$, $\mathbf{x} \in S^n$. Entonces*

$$\left\langle \Phi_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\ell)}, \Phi_{\boldsymbol{\beta}}^{(\ell)} \right\rangle_{S^n} = \frac{(n-1)!!(2\ell)!!}{2^\ell (2\ell + n - 1)!!} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})^\ell .$$

Donde para un número entero no negativo k par (impar) se define $k!!$ como el producto de todos los números pares (impares) menores o iguales a k.

Demotración.

Dado $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n$, existe $R \in \mathrm{SO}(n+1)$ tal que $\boldsymbol{\alpha} = |\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})| R(\hat{\mathbf{e}}_1 - \imath \hat{\mathbf{e}}_2)$, con $\hat{\mathbf{e}}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$ vectores unitarios en $\mathbb{R}^{n+1}$. Luego

$$\left\langle \Phi_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\ell)}, \Phi_{\boldsymbol{\beta}}^{(\ell)} \right\rangle_{S^n} = |\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|^\ell \int_{\mathbf{y} \in S^n} ((\hat{\mathbf{e}}_1 - \imath \hat{\mathbf{e}}_2) \cdot \mathbf{y})^\ell \overline{(R^{-1} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{y})^\ell} \mathrm{d}S_n(\mathbf{y}) ,$$

donde se utilizó el cambio de variable $\mathbf{y} = R^{-1}\mathbf{x}$. Sean $\boldsymbol{\gamma} = \overline{R^{-1}\boldsymbol{\beta}}$ y $\lambda = |\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|$. Introduzcamos coordenadas esféricas para la variable $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{n+1}) \in S^n$

$$\begin{aligned} y_1 &= \prod_{j=2}^{n} \mathrm{sen}(\theta_j)\cos(\theta_1) \quad , \qquad y_2 = \prod_{j=2}^{n} \mathrm{sen}(\theta_j) \\ y_s &= \prod_{j=s}^{n} \mathrm{sen}(\theta_j)\cos\theta_{s-1} \quad , \qquad y_{n+1} = \cos(\theta_n) \end{aligned} \tag{4.9}$$

con $s = 3, \ldots, n$, $\theta_1 \in (-\pi, \pi)$ y $\theta_2, \ldots, \theta_n \in (0, \pi)$. Luego

$$\begin{aligned} \left\langle \Phi^{(\ell)}_{\boldsymbol{\alpha}}, \Phi^{(\ell)}_{\boldsymbol{\beta}} \right\rangle_{S^n} = \lambda^\ell \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} &(\mathrm{sen}(\theta_n)\ldots\mathrm{sen}(\theta_2))^\ell\, e^{-\imath\ell\theta_1} \\ &(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{y}(\theta_1,\ldots,\theta_n))^\ell \mathrm{sen}^{n-1}(\theta_n)\ldots\mathrm{sen}(\theta_2)\frac{\mathrm{d}\theta_n\ldots\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{Vol}(S^n)} \ . \end{aligned}$$

Integremos la ecuación de arriba respecto a θ_1. Utilizando las identidades $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{\imath\theta} + e^{-\imath\theta})$, $\mathrm{sen}(\theta) = \frac{1}{2\imath}(e^{\imath\theta} - e^{-\imath\theta})$ y que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath\theta k}\mathrm{d}\theta = 2\pi\delta_{k,0}$ se puede probar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\imath\ell\theta}\cos^k(\theta)\mathrm{sen}^s(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{\imath^{\ell-k}2^\ell}\delta_{\ell,s+k} \ . \tag{4.10}$$

Luego por el teorema multinomial y (4.10)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\imath\ell\theta_1}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{y})^\ell\mathrm{d}\theta_1 &= \sum_{|\mathbf{m}|=\ell} C_{\mathbf{m}}\gamma_1^{m_1}\gamma_2^{m_2}\prod_{j=3}^{n+1}(\gamma_j y_j)^{m_j}[\mathrm{sen}(\theta_{j-1})]^{m_1+m_2} \\ &\qquad \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\imath\ell\theta_1}[\cos(\theta_1)]^{m_1}[\mathrm{sen}(\theta_1)]^{m_2}\mathrm{d}\theta_1 \\ &= \sum_{k=0}^{\ell} C_{(k,\ell-k,0,\ldots,0)}\frac{2\pi}{\imath^{\ell-k}2^\ell}\left(\mathrm{sen}(\theta_n)\ldots\mathrm{sen}(\theta_2)\right)^\ell\gamma_1^k\gamma_2^{\ell-k} \ , \end{aligned}$$

donde $C_{\mathbf{m}} = \frac{\ell!}{\mathbf{m}!}$. Por lo tanto, utilizando ésto se tiene

$$\begin{aligned} \left\langle \Phi^{(\ell)}_{\boldsymbol{\alpha}}, \Phi^{(\ell)}_{\boldsymbol{\beta}} \right\rangle_{S^n} &= \lambda^\ell \sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}\frac{2\pi}{\imath^{\ell-k}2^\ell}\frac{\gamma_1^k\gamma_2^{\ell-k}}{\mathrm{Vol}(S^n)}\prod_{j=2}^{n}\int_0^{\pi}[\mathrm{sen}(\theta_j)]^{2\ell+j-1}\mathrm{d}\theta_j \\ &= \lambda^\ell(\gamma_1 - \imath\gamma_2)^\ell\frac{(2\ell)!!(n-1)!!}{(2\ell+n-1)!!}\frac{1}{2^\ell} \\ &= \lambda^\ell(\overline{R^{-1}\boldsymbol{\beta}}\cdot(\mathbf{e}_1 + \imath\mathbf{e}_2))^\ell\frac{(2\ell)!!(n-1)!!}{(2\ell+n-1)!!}\frac{1}{2^\ell} \\ &= (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})^\ell\frac{(2\ell)!!(n-1)!!}{(2\ell+n-1)!!}\frac{1}{2^\ell} \ . \end{aligned}$$

■

Ahora obtengamos los coeficientes c_k (de manera formal) que aparecen en (4.8). Posteriormente probaremos que la definición que proponememos de transfromada de Bargmann esta bien definida.

Sean $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{Q}^n$, $k \in \mathbb{Z}_+$ y $\Psi_{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\overline{\Phi_{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}}}{||\Phi_{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}||_{S^n}} \in L^2(S^n)$, donde $\Phi_{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x})^k$, $\mathbf{x} \in S^n$. Tomemos $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n$ y $\ell \in \mathbb{Z}_+$. De la ortogonalidad de $\Phi_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\ell)}$ con $\Phi_{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}$y la proposición 4.10

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_n\Psi_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\alpha}) &= \int\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{c_\ell}{\ell!} \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}\right)^{\ell} \frac{\overline{(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x})^k}}{||(\boldsymbol{\beta}\cdot(\cdot))^k||_{S^n}} \mathrm{d}S_n(\mathbf{x}) \\
&= \frac{c_k}{\hbar^k k!} \left(\frac{(n-1)!!(2k)!!}{2^k(2k+n-1)!!}\right)^{1/2} \frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})^k}{(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta})^{k/2}} .
\end{aligned}$$

Consideremos el caso particular $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{e}_1 - \imath\mathbf{e}_2$. Como deseamos que $\mathbf{B}_n$ sea unitaria, de la proposición 4.7 se debe de tener que

$$\begin{aligned}
1 &= \|\mathbf{B}_n(\Psi_{\boldsymbol{\beta}})\|_{\mathcal{E}_n}^2 \\
&= (2\hbar)^k \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2}+k)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{|c_k|^2}{\hbar^{2k}k!} \frac{(n-1)!!}{2^{2k}(2k+n-1)!!} \|(\alpha_1+\imath\alpha_2)^k\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^{n+1}}}^2 \\
&= |c_k|^2 \frac{(n-1)}{(2k+n-1)} . \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Lo última igualdad es porque $\mathbf{e}_{\boldsymbol{\ell}}^{\hbar}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\ell}}/(\sqrt{\hbar^{|\boldsymbol{\ell}|}\boldsymbol{\ell}!})$ es base ortonormal de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^{n+1}}$ (ver lema 1.13).

Comentario 4.11 *Nótese que de (4.11) se sigue*

$$c_k = e^{\imath\theta_k}\left(\frac{2k+n-1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} , \quad \textit{para algunas constantes } 0 \le \theta_k < 2\pi ,$$

y no necesariamente $\theta_k = \theta_\ell$ para $k \neq \ell$. Sin embargo, por simplicidad vamos a tomar $\theta_k = 0$ para toda k. Ésto es porque cuando definamos estados coherentes sobre $L^2(S^n)$ va a ser más sencillo obtener el operador de aniquilación del cual dichos estados son funciones propias (subsección 5.1.3). Además de que la asintótica del núcleo integral del operador $\mathbf{B}_n$ obtenida en el apéndice C no es tan complicada, lo cual va a ser utilizado para mostrar concentración de los estados coherentes.

Por lo tanto, al menos formalmente tenemos que para $\Psi \in L^2(S^n)$

$$\mathbf{B}_n\Psi(\boldsymbol{\alpha}) = \int_{S^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2k+n-1}}{k!\sqrt{n-1}} \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}\right)^k \Psi(\mathbf{x})\mathrm{d}S_n(\mathbf{x}) , \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n . \qquad (4.12)$$

Mostremos ahora que $\mathbf{B}_n$ se encuentra bien definida y que es una isometría.

Lema 4.12 *Sea $\Psi \in L^2(S^n)$. Entonces*

i) $\mathbf{B}_n\Psi(\boldsymbol{\alpha})$ *es una función analítica considerada como una función en $\mathbb{C}^{n+1}$ (en cada componente de $\boldsymbol{\alpha}$ manteniendo todas las demás fijas).*

ii) $\mathbf{B}_n\Psi$ *es de cuadrado integrable respecto a la medida $\mathrm{d}m_{n+1}^{\hbar}$.*

iii) $\mathbf{B}_n$ *es una isometría.*

Demostración.

Denotemos el núcleo integral del operador $\mathbf{B}_n$ por

$$\mathrm{K}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2k+n-1}}{k!\sqrt{n-1}} \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}\right)^k , \qquad \mathbf{x} \in S^n , \ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n . \tag{4.13}$$

Sea $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n$ fijo, entonces

$$|\mathrm{K}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2k+n-1}}{k!\sqrt{n-1}} \left(\frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{\hbar}\right)^k < \infty \quad \forall \mathbf{x} \in S^n . \tag{4.14}$$

Así $\mathrm{K}(\cdot,\boldsymbol{\alpha}) \in L^2(S^n)$. Luego de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $\mathbf{B}_n\Psi(\boldsymbol{\alpha})$ se encuentra bien definido.

Sea $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la siguiente función

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2k+n-1}}{k!\sqrt{n-1}} z^k , \qquad z \in \mathbb{C} .$$

Por el criterio de la razón, la serie g es convergente para todo z, luego es analítica. Por lo cual el núcleo integral $\mathrm{K}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha}) = g(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}/\hbar)$ es analítico en cada componente del vector $\boldsymbol{\alpha}$ dejando las otras fijas (con $\mathbf{x} \in S^n$ fijo).

PRUEBA DE i). Sean $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^{n+1}$ y $1 \leq j \leq n+1$ entero. Fijemos todos los componentes de $\boldsymbol{\alpha}$ excepto el j-ésimo. Probemos la analiticidad de $\mathbf{B}_n\Psi(\boldsymbol{\alpha})$ (en la variable α_j) utilizando el teorema de Morera. Para ello sea γ una curva en $\mathbb{C}$. De (4.14) y el hecho de que $\Psi \in L^1(S^n)$ se tiene que

$$\int_\gamma \int_{\mathbf{x}\in S^n} |\mathrm{K}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})\Psi(\mathbf{x})| \mathrm{d}S_n(\mathbf{x}) \mathrm{d}\alpha_j < \infty .$$

Luego podemos aplicar Fubini en la siguiente integral

$$\int_\gamma \mathbf{B}_n\Psi(\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}\alpha_j = \int_{\mathbf{x}\in S^n} \Psi(\mathbf{x}) \int_\gamma \mathrm{K}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}\alpha_j \mathrm{d}S_n(\mathbf{x}) .$$

Como $\mathrm{K}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})$ es analítico en la variable α_j (para cada $\mathbf{x} \in S^n$), por el teorema de Cauchy la integral anterior es cero. Además por la continuidad de $\mathrm{K}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})$ en la variable α_j y el teorema de convergencia dominada se sigue que $\mathbf{B}_n\Psi(\boldsymbol{\alpha})$ es continua en la variable α_j.

Prueba de ii) Utilicemos la proposición 4.9 para probar que $\mathbf{B}_n\Psi \in \mathcal{E}_n$. Sea $0 < \lambda < 1$. Por i) sólo necesitamos mostrar que $(\mathbf{B}_n\Psi)_\lambda \in \mathcal{E}_n$, y que $\|(\mathbf{B}_n\Psi)_\lambda\|_{\mathcal{E}_n}$ son uniformemente acotadas.

Para probar que $(\mathbf{B}_n\Psi)_\lambda \in \mathcal{E}_n$ estudiemos las siguientes integrales

$$\begin{aligned} I_\lambda &:= \int \mathbf{B}_n\Psi(\lambda\boldsymbol{\alpha})\overline{\mathbf{B}_n\Psi(\lambda\boldsymbol{\alpha})}\mathrm{d}m^{\hbar}_{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) \\ &= \int \int\limits_{S^n\times S^n} \mathrm{K}(\mathbf{x},\lambda\boldsymbol{\alpha})\overline{\mathrm{K}(\mathbf{y},\lambda\boldsymbol{\alpha})}\Psi(\mathbf{x})\overline{\Psi(\mathbf{y})}\mathrm{d}S_n(\mathbf{x})\mathrm{d}S_n(\mathbf{y})\mathrm{d}m^{\hbar}_{n+1}(\boldsymbol{\alpha}). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Para intercambiar el orden de integración en (4.15), mostremos que la integral iterada del valor absoluto del integrando de (4.15) es finita. La razón por la que se estudia $(\mathbf{B}_n\Psi)_\lambda$ en lugar de estudiar $\mathbf{B}_n\Psi$ directamente, es que esta integral no es finita cuando $\lambda = 1$.

Nótese que

$$|\mathrm{K}(\mathbf{x},\lambda\boldsymbol{\alpha})| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2k+n-1}}{k!\sqrt{n-1}} \left(\frac{\lambda|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}{\hbar}\right)^k \left|\frac{\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})\cdot\mathbf{x}}{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|} + \imath\frac{\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})\cdot\mathbf{x}}{|\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})|}\right|^k .$$

Además dado que $\left|\frac{\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})\cdot\mathbf{x}}{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|} + \imath\frac{\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})\cdot\mathbf{x}}{|\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})|}\right| \leq 1$,

$$\begin{aligned} J_\lambda &:= \int \int\limits_{S^n\times S^n} \left|\mathrm{K}(\mathbf{x},\lambda\boldsymbol{\alpha})\overline{\mathrm{K}(\mathbf{y},\lambda\boldsymbol{\alpha})}\Psi(\mathbf{x})\overline{\Psi(\mathbf{y})}\right| \mathrm{d}S_n(\mathbf{x})\mathrm{d}S_n(\mathbf{y})\mathrm{d}m^{\hbar}_{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) \\ &\leq \|\Psi\|^2_{L^1(S^n)} \int \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2k+n-1}}{k!\sqrt{n-1}}\lambda^{\frac{k}{2}} \left(\frac{\sqrt{\lambda}|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}{\hbar}\right)^k\right)^2 \mathrm{d}m^{\hbar}_{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\,. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Note también que si k es suficientemente grande,

$$\frac{\sqrt{2k+n-1}}{\sqrt{n-1}}\lambda^{k/2} = \frac{\sqrt{2k+n-1}}{\sqrt{n-1}}\exp\left(\frac{k}{2}\ln(\lambda)\right) \leq 1\,.$$

Así de (4.16)

$$J_\lambda \leq \|\Psi\|^2_{L^1(S^n)} \int P(|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|)\exp\left(\frac{2\sqrt{\lambda}|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}{\hbar}\right)\mathrm{d}m^{\hbar}_{n+1}(\boldsymbol{\alpha})$$

donde $P(|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|)$ es un polinomio en $|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|$.

De la proposición 4.8 se puede mostrar que

$$\int f(|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|)\mathrm{d}m^{\hbar}_{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{A_{n-1}A_n\hbar^{\frac{1-3n}{2}}}{\pi^n 2^{n-2}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int\limits_0^{\infty} f(r) r^{\frac{3n-3}{2}} \mathrm{K}_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{2r}{\hbar}\right)\mathrm{d}r \tag{4.17}$$

donde $r = |\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|$ y A_n denota el área de la esfera unitaria S^n. Además de la fórmula 6.621-3 de [7] tenemos: para $\mathrm{Re}\,\mu > |\mathrm{Re}\,\nu|$ y $\mathrm{Re}(b+c) > 0$

$$\int_0^\infty r^{\mu-1} e^{-br} \mathrm{K}_\nu(cr) \mathrm{d}r = \frac{\sqrt{\pi}(2c)^\nu}{(b+c)^{\mu+\nu}} \frac{\Gamma(\mu+\nu)\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}$$
$$F\left(\mu+\nu, \nu+\frac{1}{2}; \mu+\frac{1}{2}; \frac{b-c}{b+c}\right). \tag{4.18}$$

con $F(\cdot\,,\,\cdot\,;\,\cdot\,;\,\cdot)$ la serie hipergeométrica (ver 9.1 de [7]).

Así de (4.17) y (4.18) se sigue que J_λ es finita (esto es porque $b = -\frac{2\sqrt{\lambda}}{\hbar}$ y $c = \frac{2}{\hbar}$ luego $\frac{b-c}{b+c} = \frac{-1-\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}} < 1$ y por 9.102 de [7] la serie hipergeométrica es finita).

De aquí que podemos aplicar el teorema de Fubini a (4.15) y obtener

$$I_\lambda = \int_{S^n \times S^n} \int \sum_{\ell,k} \frac{\sqrt{2\ell+n-1}}{\ell!\sqrt{n-1}} \frac{\sqrt{2k+n-1}}{k!\sqrt{n-1}} \left(\frac{\lambda\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}\right)^\ell \overline{\left(\frac{\lambda\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{y}}{\hbar}\right)^k}$$
$$\cdot\, \Psi(\mathbf{x})\overline{\Psi(\mathbf{y})} \mathrm{d}m^\hbar_{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) \mathrm{d}S_n(\mathbf{x}) \mathrm{d}S_n(\mathbf{y})\ .$$

Usando nuevamente el teorema de Fubini y el hecho de que para $\ell \neq k$, $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x})^\ell$ y $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{y})^k$ son ortogonales como funciones en la variable $\boldsymbol{\alpha}$

$$I_\lambda = \sum_{\ell=0}^\infty \lambda^{2\ell} \int_{S^n} \left[\int_{S^n} H_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})\Psi(\mathbf{x})\mathrm{d}S_n(\mathbf{x})\right] \overline{\Psi(\mathbf{y})} \mathrm{d}S_n(\mathbf{y})\ , \tag{4.19}$$

donde
$$H_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{2\ell+n-1}{(\ell!)^2(n-1)} \int \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}\right)^\ell \overline{\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{y}}{\hbar}\right)^\ell} \mathrm{d}m^\hbar_{n+1}(\boldsymbol{\alpha})\ .$$

Es conocido que $L^2(S^n)$ es igual a la suma directa de los espacios propios $\mathcal{V}_\ell$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ del Laplaciano sobre S^n (de hecho $\mathcal{V}_\ell$ es el espacio de armónicos esféricos de orden l, es decir, el espacio de restricciones a S^n de polinomios armónicos homogéneos de orden ℓ en $n+1$ variables reales).

Sea P_ℓ el proyector ortonormal sobre $\mathcal{V}_\ell$. En el lema 4.13 (que se prueba después), se muestra que la función H_ℓ es el núcleo de Schwartz del proyector P_ℓ. Por lo cual de (4.19)

$$\|(\mathbf{B}_n\Psi)_\lambda\|^2_{\mathcal{E}_n} = I_\lambda = \sum_{\ell=0}^\infty \lambda^{2\ell} \left\langle P_\ell\Psi, \Psi\right\rangle_{S^n} = \sum_{\ell=0}^\infty \lambda^{2\ell} \|P_\ell\Psi\|^2_{S^n}\ . \tag{4.20}$$

Finalmente, como $\sum_{\ell=0}^\infty \|P_\ell\Psi\|^2_{S^n} = \|\Psi\|^2_{S^n} < \infty$ se concluye de la proposición 4.9 que $\mathbf{B}_n\Psi \in \mathcal{E}_n$. Además de que $(\mathbf{B}_n\Psi)_\lambda$ convergen a $\mathbf{B}_n\Psi$ cuando $\lambda \to 1$ en $\mathcal{E}_n$.

En particular
$$\lim_{\lambda\to 1}\|(\mathbf{B}_n\Psi)_\lambda\|_{\mathcal{E}_n} = \|\mathbf{B}_n\psi\|_{\mathcal{E}_n} \ . \tag{4.21}$$

Prueba de iii) La isometría de $\mathbf{B}_n$ se sigue de (4.20) y (4.21) ya que

$$\|\mathbf{B}_n\psi\|^2_{\mathcal{E}_n} = \lim_{\lambda\to 1}\|(\mathbf{B}_n\Psi)_\lambda\|^2_{\mathcal{E}_n} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\|P_\ell\Psi\|^2_{S^n} = \|\Psi\|^2_{S^n} \ . \qquad \blacksquare$$

Lema 4.13 *Sea ℓ un entero no negativo. Para toda $\Psi \in L^2(S^n)$*

$$P_\ell\Psi(\mathbf{y}) = \int_{S^n} H_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})\Psi(\mathbf{x})\mathrm{d}S_n(\mathbf{x}) \ , \qquad \mathbf{y}\in S^n \ . \tag{4.22}$$

Demostración.

Notemos primero que para $\mathbf{y}$ fijo, $H_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})$ pertenece al espacio $\mathcal{V}_\ell$. Para ver esto consideremos a $\mathbf{x}$ como un elemento de $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces $H_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})$ es un polinomio homogéneo de orden ℓ como función de $\mathbf{x}$. Además utilizando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue (el cual se puede usar porque la integral que aparece en (4.17) es finita cuando $f(|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|)$ es un polinomio sobre $|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|$) se puede mostrar que $H_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})$ es una función armónica (dado $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Q}^n$, el Laplaciano en $\mathbb{R}^{n+1}$ de la función $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x})^\ell$ es cero).

Si $\Psi\in\mathcal{V}_\ell^\perp$, entonces ambos lados de (4.22) son cero. Por lo cual solo necesitamos probar este lema para $\Psi\in\mathcal{V}_\ell$.

Sea $\Psi\in\mathcal{V}_\ell$. El lado derecho de (4.22) (como función de $\mathbf{y}$) pertenece a $\mathcal{V}_\ell$. Definamos el operador $S_\ell:\mathcal{V}_\ell\to\mathcal{V}_\ell$ por

$$S_\ell\Psi(\mathbf{y}) = \int_{S^n} H_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y})\Psi(\mathbf{x})\mathrm{d}S_n(\mathbf{x}) \ , \qquad \Psi\in\mathcal{V}_\ell \ , \ \mathbf{y}\in S^n \ .$$

Probemos que S_ℓ es el operador identidad a través del lema de Schur.

Definamos la acción de $\mathrm{SO}(n+1)$ sobre $L^2(S^n)$ por: dada $R\in\mathrm{SO}(n+1)$, sea $T_R : L^2(S^n)\to L^2(S^n)$ definido como $T_R\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(R^{-1}\mathbf{x})$.

Como la medida $\mathrm{d}m^\hbar_{n+1}$ es $\mathrm{SO}(n+1)$ invariante, entonces se puede probar que para cualquier $R\in\mathrm{SO}(n+1)$, $H_\ell(\mathbf{x},\mathbf{y}) = H_\ell(R^{-1}\mathbf{x},R^{-1}\mathbf{y})$. De aquí que

$$S_\ell T_R\Psi = T_R S_\ell\Psi \ , \qquad \forall\ \Psi\in L^2(S^n) \ .$$

Es conocido que el espacio $\mathcal{V}_\ell$ es irreducible bajo la acción de $\mathrm{SO}(n+1)$ mencionada arriba. El lema de Schur implica que $S_\ell = c_\ell\mathbf{I}$, con $c_\ell\in\mathbb{R}$ un número real e $\mathbf{I}$ el operador identidad en $\mathcal{V}_\ell$.

Mostremos que $c_\ell = 1$. Para ello sea $\Psi(\mathbf{x}) = ((\hat{\mathbf{e}}_1+\imath\hat{\mathbf{e}}_2)\cdot\mathbf{x})^\ell$, con $\hat{\mathbf{e}}_1 = (1,0,\ldots,0)$ y $\hat{\mathbf{e}}_2 = (0,1,\ldots,0)$ elementos en $\mathbb{R}^{n+1}$. Usando el teorema de Fubini se tiene

$$\begin{aligned}&c_\ell((\hat{\mathbf{e}}_1+\imath\hat{\mathbf{e}}_2)\cdot\mathbf{y})^\ell \\ &\quad= \frac{2\ell+n-1}{(\ell!\hbar^\ell)^2(n-1)}\int\left\langle(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x})^\ell,((\hat{\mathbf{e}}_1-\imath\hat{\mathbf{e}}_2)\cdot\mathbf{x})^\ell\right\rangle_{S^n}\overline{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{y})^\ell}\mathrm{d}m^\hbar_{n+1}(\boldsymbol{\alpha}).\end{aligned}$$

Tomemos a $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{e}}_1$. Del hecho de que $\{\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{k}}/\sqrt{\hbar^{|\mathbf{k}|}\mathbf{k}!}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^{n+1}}$ es base ortonormal de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^{n+1}}$ (ver lema 1.13) y las proposiciones 4.10 y 4.7 se tiene

$$c(\ell) = \frac{2\ell+n-1}{\ell!^2\hbar^\ell(n-1)}\frac{(n-1)!!(2\ell)!!}{(2\ell+n-1)!!}\left(\frac{n-1}{2}\right)_\ell \ell!\hbar^\ell = 1\ .$$

Esto último es porque $\left(\frac{n-1}{2}\right)_\ell = \frac{(2\ell+n-3)!!}{2^\ell(n-3)!!}$ para $n \geq 4$ y $\left(\frac{n-1}{2}\right)_\ell = \frac{(2\ell+n-3)!!}{2^\ell}$ si $n = 2, 3$.

■

En (1.19) se muestra que la transformada de Bargmann en $L^2(\mathbb{R}^n)$ del conjugado de su núcleo integral es igual al núcleo reproductor del espacio $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$. En analogía con ésto mostremos en el siguiente lema que la función $\mathrm{K}(\cdot,\overline{\boldsymbol{\alpha}})$ (núcleo integral de $\mathbf{B}_n$, ver (4.13)) tiene la propiedad de que su transformada de Bargmann es igual al núcleo reproductor del espacio de Bargmann-Todorov $\mathcal{E}_n$.

Lema 4.14 *Para toda $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{Q}^n$ se tiene*

$$(\mathbf{B}_n\mathrm{K}(\cdot,\overline{\boldsymbol{\alpha}}))(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{T}_n(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})\ .$$

Demostración.

En el lema 4.12 se muestra que $\mathrm{K}(\cdot,\overline{\boldsymbol{\alpha}}) \in L^2(S^n)$. Del teorema de convergencia domina de Lebesgue y la ortogonalidad de los espacios $\mathcal{V}_\ell$ se tiene

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}_n\mathrm{K}(\cdot,\overline{\boldsymbol{\alpha}}))(\boldsymbol{\beta}) &= \int_{S^n}\mathrm{K}(\mathbf{x},\boldsymbol{\beta})\mathrm{K}(\mathbf{x},\overline{\boldsymbol{\alpha}})\mathrm{d}S_n(\mathbf{x})\\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{2\ell+n-1}{(\ell!\hbar^\ell)^2(n-1)}\frac{(n-1)!!(2\ell)!!}{2^\ell(2\ell+n-1)!!}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha})^\ell \qquad (4.23)\\ &= \mathbf{T}_n(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})\ . \qquad (4.24)\end{aligned}$$

(4.23) y (4.24) se obtienen de la proposición 4.10 y (4.4) respectivamente.

■

Para finalizar esta sección, mostraremos que $\mathbf{B}_n$ es un operador unitario.

Teorema 4.15 *La transformada de Bargmann $\mathbf{B}_n : L^2(S^n) \to \mathcal{E}_n$ es un operador unitario*

Demostración.

Del lema 4.12 iii), la trasformada de Bargmann $\mathbf{B}_n$ es una isometría, por lo cual es inyectiva. Además, de la identidad de polarización $\mathbf{B}_n$ preserva producto interno. Así sólo necesitamos mostrar que $\mathbf{B}_n$ es sobre.

Dado que el espacio de Bargman-Todorov es de Hilbert,

$$\mathcal{E}_n = \overline{\mathrm{Ran}(\mathbf{B}_n)} \oplus (\mathrm{Ran}(\mathbf{B}_n))^\perp\ .$$

Con $\mathrm{Ran}(\mathbf{B}_n)$ denotando el rango de $\mathbf{B}_n$. De hecho utilizando que $\mathbf{B}_n$ es una isometría y que $L^2(S^n)$ es de Hilbert se puede probar que $\overline{\mathrm{Ran}(\mathbf{B}_n)} = \mathrm{Ran}(\mathbf{B}_n)$.

Además del lema 4.14 y por propiedades del núcleo reproductor no es dificil ver que $(\mathrm{Ran}(\mathbf{B}_n))^{\perp} = 0$. El resultado se sigue de ésto.

■

4.2.1 Inversa de la transformada de Bargmann, $\mathbf{B}_n^{-1}$

En la sección anterior se muestra que $\mathbf{B}_n$ es un operador unitario, sin embargo no se da una expresión explícita de su inversa. Motivados por la expresión de la inversa de la transformada de Bargmann introducida en [8] para $L^2(K)$ con K un grupo de Lie compacto, daremos una fórmula de inversión para la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_n$. Así establecemos el siguiente

Teorema 4.16 *Sea* $\{E_q \mid q \in \mathbb{N}\}$ *una sucesión creciente de conjuntos medibles acotados en* $\mathbb{Q}^n$ *tal que* $\bigcup_{q\in\mathbb{N}} E_q = \mathbb{Q}^n$. *Sea* $G \in \mathcal{E}_n$, *entonces la transformada inversa de Bargmann de* G *es dada por*

$$\mathbf{B}_n^{-1}G(\mathbf{x}) = \lim_{q\to\infty} \int_{E_q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2k+n-1}}{k!\sqrt{n-1}} \left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}}{\hbar}\right)^k G(\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}m_{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) \tag{4.25}$$

donde el límite en (4.25) *es en el sentido de* $L^2(S^n)$.

Demostración.

Consideremos la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_n$ como un operador lineal de $L^2(S^n)$ en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{Q}^n, \mathrm{d}m_{n+1}^{\hbar})$ de funciones de cuadrado integrable respecto a la medida $\mathrm{d}m_{n+1}^{\hbar}$. Como $\mathbf{B}_n$ es un operador acotado, su adjunto $\mathbf{B}_n^*$ es un operador lineal acotado de $L^2(\mathbb{Q}^n, \mathrm{d}m_{n+1}^{\hbar})$ en $L^2(S^n)$.

Sean F una función en $L^2(\mathbb{Q}^n, \mathrm{d}m_{n+1}^{\hbar})$ y χ_{E_q} la función característica del conjunto E_q. Para cada $\Psi \in L^2(S^n)$ se tiene

$$\left\langle \mathbf{B}_n\Psi, F\chi_{E_q}\right\rangle_{\mathcal{E}_n} = \int\int_{\mathbf{x}\in S^n} \mathrm{K}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})\Psi(\mathbf{x})\overline{F(\boldsymbol{\alpha})\chi_{E_q}(\boldsymbol{\alpha})}\mathrm{d}S_n(\mathbf{x})\mathrm{d}m_{n+1}^{\hbar}(\boldsymbol{\alpha})\,.$$

Note que podemos utilizar el teorema de Fubini en la integral anterior porque el valor absoluto del integrando está acotado por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2k+n-1}}{k!\sqrt{n-1}} \left(\frac{r_q}{\hbar}\right)^k |\Psi(\mathbf{x})|\,|F(\boldsymbol{\alpha})\chi_{E_q}(\boldsymbol{\alpha})| \leq C|\Psi(\mathbf{x})|\,|F(\boldsymbol{\alpha})\chi_{E_q}(\boldsymbol{\alpha})|$$

donde r_q es una cota superior del valor absoluto de los elementos de E_q y C es una constante finita. Como $\Psi \in L^1(S^n)$ y $F\chi_{E_q} \in L^1(\mathbb{Q}^n, \mathrm{d}m_{n+1}^{\hbar})$

$$\left\langle \mathbf{B}_n\Psi, F\chi_{E_q}\right\rangle_{\mathcal{E}_n} = \left\langle \Psi, \mathbf{B}_n^*(F\chi_{E_q})\right\rangle_{S^n}$$

donde

$$\mathbf{B}_n^*(F\chi_{E_q})(\mathbf{x}) = \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2k+n-1}}{k!\sqrt{n-1}} \left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}}{\hbar}\right)^k F(\boldsymbol{\alpha})\chi_{E_q}(\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}m_{n+1}^{\hbar}(\boldsymbol{\alpha}) \, .$$

Además como $F\chi_{E_q} \to F$ si $q \to \infty$ en $L^2(\mathbb{Q}^n, \mathrm{d}m_{n+1}^{\hbar})$ y $\mathbf{B}_n^*$ es continuo

$$\mathbf{B}_n^*(F\chi_{E_q}) \to \mathbf{B}_n^* F \, .$$

Finalmente como $\mathbf{B}_n$ es un operador unitario en $\mathcal{E}_n$, entonces para $G \in \mathcal{E}_n$ se tiene $\mathbf{B}_n^{-1}G = \mathbf{B}_n^* G$. Así obtenemos (4.25).

■

4.3 Transformada de Bargmann para $L^2(S^n)$, $n = 2, 3, 5$. Unitaridad y fórmula de inversión.

En esta sección mostraremos como la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_{S^n}$ para $L^2(S^n)$ $n = 2, 3, 5$ obtenida por Thomas/Wassell (caso $n = 2$) y Villegas-Blas (caso $n = 3$) (ver capítulo tres para detalles) es un caso particular de la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_n$ definida en la sección anterior.

Notemos que el método mostrado en el capítulo tres es complicado generalizarse para el caso $n = 5$. Sin embargo en el apéndice A se muestra que la función generadora de la transformación canónica $\mathcal{C}_{(n,m)} : \widetilde{\mathbb{C}}^m \to L^2(S^n)$ es la función $\Phi_{(n,m)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -\imath\rho_{(n,m)}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{x}$, donde $(n, m) = (2, 2), (3, 4), (5, 8)$.

Basados en esto último y las ecuaciones (3.9) y (3.12), mostremos de forma rigurosa que la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_{S^n} : L^2(S^n) \to \mathcal{B}_{\mathbb{C}^m}$ definido por

$$\mathbf{B}_{S^n}\Psi(\mathbf{z}) = \int_{S^n} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{\rho_{(n,m)}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{x}}{\hbar}\right)^k \Psi(\mathbf{x})\mathrm{d}S_n(\mathbf{x}), \qquad \Psi \in L^2(S^n) \, , \ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m \tag{4.26}$$

se encuentra bien definida. Nótese que se ha introducido la constante de Planck $\hbar$ como un parámetro. Los coeficientes c_k de la serie de potencias pueden ser calculados requiriendo que $\mathbf{B}_{S^n}$ sea una isometría. De hecho

$$c_k = \frac{\sqrt{2k+n-1}}{k!\sqrt{n-1}} \, .$$

Cabe aclarar que estos resultados ya fueron obtenidos por Thomas/Wassell y Villegas-Blas. Sin embargo en esta sección doy una forma diferente de como demostrar que la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_{S^n}$ es unitaria.

Antes de analizar $\mathbf{B}_{S^n}$, definamos un operador $\mathfrak{U}_{(n,m)} : \mathcal{E}_n \to \mathcal{B}_{\mathbb{C}^m}$ por la asignación

$$\mathfrak{U}_{(n,m)}F(\mathbf{z}) = F(\rho_{(n,m)}(\mathbf{z})) \, , \qquad F \in \mathcal{E}_n \, , \ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m \, . \tag{4.27}$$

La definición del operador $\mathfrak{U}_{(n,m)}$ se basa en el hecho de que podemos identificar la cuádrica nula $\mathbb{Q}^n - \{0\}$ con $\tilde{\mathbb{C}}^m - \{0\}$, con $n = 2, 3, 5$, $m = 2, 4, 8$ respectivamente. Ésto es a través de la función $\rho_{(n,m)} : \tilde{\mathbb{C}}^m - \{0\} \to \mathbb{Q}^n - \{0\}$ (ver ecuaciones $(A.21)$, $(A.22)$, $(A.23)$). Además de que la función $\rho_{(n,m)}$ es invariante bajo la acción del grupo $\mathcal{G}_m = \mathbb{Z}^2, S^1, \mathrm{SU}(2)$, con $m = 2, 4, 8$ respectivamente (es decir $\rho_{(n,m)}(\mathbf{T}(g)(\mathbf{z})) = \rho_{(n,m)}(\mathbf{z})$ para toda $g \in \mathcal{G}_m$ y $\mathbf{T}(g)$ definida por (A.17), (A.18), (A.19)).

Nótese que de (4.12), (4.27) y (4.26) se tiene que

$$\mathbf{B}_{S^n} = \mathfrak{U}_{(n,m)} \circ \mathbf{B}_n \,. \tag{4.28}$$

Además el operador $\mathfrak{U}_{(n,m)}$ tiene las siguientes propiedades

Proposición 4.17 *Sean $F, G \in \mathcal{E}_n$. Entonces*

i) *La función $\mathfrak{U}_{(n,m)}F$, definida en (4.27), es analítica en $\mathbb{C}^m$.*

ii) $\left\langle \mathfrak{U}_{(n,m)}F, \mathfrak{U}_{(n,m)}G \right\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^m}} = \langle F, G \rangle_{\mathcal{E}_n}$. *Luego $\mathfrak{U}_{(n,m)}$ es una isometría.*

Demostración.

La prueba de i) es inmediata ya que $\rho_{(n,m)}$ es analítica. Por otro lado, de la definición 4.1 sólo es necesario probar ii) para $F, G \in \mathcal{E}_n$ polinomios.

Sean $F, G \in \mathcal{E}_n$ dos polinomios de diferentes grados. Entonces éstos son ortogonales en $\mathcal{E}_n$ y también sus imagenes en $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^m}$. Por lo cual solo necesitamos mostrar ii) para $F, G \in W_\ell$ y $\ell \in \mathbb{Z}_+$. Más aún utilizando que el núcleo reproductor del espacio W_ℓ es $\mathbf{T}_n^{(\ell)}$ (ver (4.4) para definición) se puede mostrar que el complemento ortogonal de $\mathrm{span}\{\Phi_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\ell)}(\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\alpha})^\ell \mid \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n\}$ en W_ℓ es el $\{0\}$. De aquí que es suficiente probar ii) para $F = \Phi_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\ell)}$ y $G = \Phi_{\boldsymbol{\beta}}^{(\ell)}$, donde $\boldsymbol{\alpha} = \rho_{(n,m)}(\mathbf{z})$, $\boldsymbol{\beta} = \rho_{(n,m)}(\mathbf{w})$ con $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^m$.

Sea

$$\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^\ell(\mathbf{x}) = C_{\ell,n}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\alpha})^\ell \,, \quad \text{con} \quad C_{\ell,n} = \frac{2^\ell(2\ell+n-1)!!}{(n-1)!!(2\ell)!!} \frac{\ell!\hbar^\ell\sqrt{n-1}}{\sqrt{2\ell+n-1}} \,, \ \mathbf{x} \in S^n \,.$$

Nótese que $\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^\ell \in L^2(S^n)$. Además de (4.12), el teorema de convergencia dominada, la ortogonalidad de los espacios V_ℓ y la proposición 4.10 se tiene que para $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{Q}^n$

$$\mathbf{B}_n\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^\ell(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{2^\ell(2\ell+n-1)!!}{(n-1)!!(2\ell)!!} \left\langle (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{x})^\ell, (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x})^\ell \right\rangle_{S^n} = (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha})^\ell = F(\boldsymbol{\gamma}) \,.$$

Luego de lo mostrado arriba, la unitaridad de $\mathbf{B}_n$ y la proposición 4.10

$$\langle F, G \rangle_{\mathcal{E}_n} = \left\langle \Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^\ell, \Psi_{\boldsymbol{\beta}}^\ell \right\rangle_{S^n} = \frac{(2\ell+n-1)!!}{(n-1)!!} \frac{\ell!\hbar^{2\ell}(n-1)}{2\ell+n-1} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})^\ell \,.$$

Por otro lado, sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^m$. Usando la expresión de $\rho_{(n,m)}$ (ver ecuaciones

(A.21), (A.22) y (A.23)) se puede probar que

$$\begin{aligned}
&\rho_{(2,2)}(\mathbf{u}) \cdot \rho_{(2,2)}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2. \\
&\rho_{(3,4)}(\mathbf{u}) \cdot \rho_{(3,4)}(\mathbf{v}) = 2(u_1\overline{v}_1 + u_2\overline{v}_2)(u_3\overline{v}_3 + u_4\overline{v}_4). \\
&\rho_{(5,8)}(\mathbf{u}) \cdot \rho_{(5,8)}(\mathbf{v}) = 2\varrho(\mathbf{u}, \mathbf{v})
\end{aligned} \tag{4.29}$$

con

$$\begin{aligned}
\varrho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = &[u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + u_3\overline{v_3} + u_4\overline{v_4}][u_5\overline{v_5} + u_6\overline{v_6} + u_7\overline{v_7} + u_8\overline{v_8}] \\
&+ [u_7\overline{v_1} - u_8\overline{v_2} + u_5\overline{v_3} - u_6\overline{v_4}][u_2\overline{v_8} - u_3\overline{v_5} + u_4\overline{v_6} - u_1\overline{v_7}].
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Nótese que $\mathfrak{U}_{(n,m)}F(\mathbf{u}) = \left(\rho_{(n,m}(\mathbf{u}) \cdot \rho_{(n,m)}(\mathbf{z})\right)^{\ell}$. Utilizando la proposición 1.15 y (4.29) se puede mostrar que

$$\left\langle \mathfrak{U}_{(n,m)}F, \mathfrak{U}_{(n,m)}G \right\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^m}} = \langle F, G \rangle_{\mathcal{E}_n} \ . \qquad \blacksquare$$

Ahora vamos a darnos una idea de como es el rango de $\mathbf{B}_{S^n}$. Para ello recordemos que la función $\rho_{(n,m)}$ es invariante bajo la acción del grupo $\mathcal{G}_m = \mathbb{Z}^2, S^1, \mathrm{SU}(2)$, con $m = 2, 4, 8$ respectivamente (es decir $\rho_{(n,m)}(\mathbf{T}(g)(\mathbf{z})) = \rho_{(n,m)}(\mathbf{z})$ para toda $g \in \mathcal{G}_m$ y $\mathbf{T}(g)$ definida por (A.17), (A.18), (A.19)). De aquí que

$$\mathrm{Ran}\,\mathbf{B}_{S^n} \subset \mathcal{F}_m = \{f \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^m} \mid f(\mathbf{T}(g)(\mathbf{z})) = f(\mathbf{z}) \ \forall\, g \in \mathcal{G}_m\}.$$

De hecho vamos a mostrar que Ran $\mathbf{B}_{S^n} = \mathcal{F}_m$. Pero antes hagamos un análisis de este conjunto.

4.3.1 Los espacios $\mathcal{F}_m$.

Primero mostremos que los espacios $\mathcal{F}_m$ son de Hilbert para $m = 2, 4, 8$. Luego probemos que el núcleo reproductor del espacio $\mathcal{F}_m$ es el promedio del núcleo reproductor del espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^m}$, respecto a la acción y medida de Haar de los grupos $\mathbb{Z}_2$, S^1, SU(2) para los casos $m = 2, 4, 8$, respectivamente. Los resultados de esta subsección (excepto el teorema 4.20) son mostrados por Villegas-Blas en [33].

Antes de demostrar que $\mathcal{F}_m$ es de Hilbert definamos los siguientes subconjuntos de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^m}$

(i) **Para $\mathbf{m = 2}$**. Sea $\tilde{\mathcal{F}}_2 \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}^2}$ el espacio generado por los monomios $z_1^{a_1} z_2^{a_2}$ con $a_1 + a_2$ un entero par no negativo.

(ii) **Para $\mathbf{m = 4}$**. Sea $\tilde{\mathcal{F}}_4 \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$ el núcleo del operador

$$\mathcal{L} = z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2} - z_3\frac{\partial}{\partial z_3} - z_4\frac{\partial}{\partial z_4}. \tag{4.31}$$

El núcleo de $\mathcal{L}$ es definido por $\tilde{\mathcal{F}}_4 = \{f \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^4} \mid \mathcal{L}f = 0\}$.

(iii) **Para $\mathbf{m = 8}$**. Sea $\tilde{\mathcal{F}}_8 \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}^8}$ la intersección del núcleo de los siguientes operadores

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &= z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2} + z_3\frac{\partial}{\partial z_3} + z_4\frac{\partial}{\partial z_4} - z_5\frac{\partial}{\partial z_5} - z_6\frac{\partial}{\partial z_6} - z_7\frac{\partial}{\partial z_7} - z_8\frac{\partial}{\partial z_8},\\
\mathcal{R}_2 &= z_7\frac{\partial}{\partial z_1} - z_8\frac{\partial}{\partial z_2} + z_5\frac{\partial}{\partial z_3} - z_6\frac{\partial}{\partial z_4} - z_3\frac{\partial}{\partial z_5} + z_4\frac{\partial}{\partial z_6} - z_1\frac{\partial}{\partial z_7} + z_2\frac{\partial}{\partial z_8},\\
\mathcal{R}_3 &= z_7\frac{\partial}{\partial z_1} - z_8\frac{\partial}{\partial z_2} + z_5\frac{\partial}{\partial z_3} - z_6\frac{\partial}{\partial z_4} + z_3\frac{\partial}{\partial z_5} - z_4\frac{\partial}{\partial z_6} + z_1\frac{\partial}{\partial z_7} - z_2\frac{\partial}{\partial z_8},
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Las definiciones de los operadores $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}_a$ es motivado por la cuantización de las restricciones, al nivel de mecánica clásica, de la regularización de Kustaanheimo-Stifiel y Davtyan del problema de Kepler 3, 5 dimensional respectivamente [33].

Dado que los operadores $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_3$ son cerrados (ver proposición 1.15), los espacios $\tilde{\mathcal{F}}_4$, $\tilde{\mathcal{F}}_8$ son en realidad de Hilbert.

Proposición 4.18 *Para $m = 2, 4, 8$, se tiene que $\tilde{\mathcal{F}}_m = \mathcal{F}_m$.*

Demostración.

Caso $\mathbf{n = 2}$. Del lema 1.13, los monomios $\left\{\frac{\mathbf{z}^{\mathbf{a}}}{\sqrt{\hbar^{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}!}}\right\}_{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}_+^2}$ son una base ortonormal de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^2}$, entonces el caso $n = 2$ es inmediato.

Caso $\mathbf{n = 3}$. Consideremos la base $\{\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{\hbar}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^4}$ para el espacio $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}$ (ver lema 1.13). Se puede mostrar que $f \in \tilde{\mathcal{F}}_4$ si y sólo si f es una combinación lineal de monomios $z_1^{a_1}z_2^{a_2}z_3^{a_3}z_4^{a_4}$ con $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$. Utilizando ésto se tiene que $f \in \mathcal{F}_4$.

Inversamente sea $f \in \mathcal{F}_4$. Consideremos la expansión de f en términos de los mononios $z_1^{a_1}z_2^{a_2}z_3^{a_3}z_4^{a_4}$ con $a_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, 2, 3, 4$. Como f es invariante bajo S^1 entonces $\exp((-a_1 - a_2 + a_3 + a_4)\psi) = 1$, $\forall \psi \in \mathbb{R}$. Lo cual es posible sólo si $a_1 + a_2 - a_3 - a_4 = 0$. Por lo cual $f \in \tilde{\mathcal{F}}_4$.

Caso $\mathbf{n = 5}$. Sea $f \in \mathcal{F}_8$. Entonces f satisface

$$f(\mathbf{T}(g(\theta,\alpha,\beta))(\mathbf{z})) = f(\mathbf{z}) \quad \forall\, g \in \mathrm{SU}(2)\,, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^8\,. \tag{4.33}$$

Consideremos la siguiente parametrización para $g \in \mathrm{SU}(2)$

$$g(\theta,\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\exp(-\imath\alpha) & -\mathrm{sen}(\theta)\exp(\imath\beta) \\ \mathrm{sen}(\theta)\exp(-\imath\beta) & \cos(\theta)\exp(\imath\alpha) \end{pmatrix}\,, \qquad \begin{matrix} \theta \in (0,\pi/2), \\ \alpha,\beta \in (-\pi,\pi). \end{matrix} \tag{4.34}$$

Si obtenemos la derivada parcial en ambos lados de (4.33) respecto a α y evaluamos la ecuación resultante en $(\theta,\alpha,\beta) = (0,0,0)$, se obtiene que f pertenece al núcleo del operador $\mathcal{R}_1$. De forma similar, se puede probar que f está en el núcleo de los operadores $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_3$. En estos casos se considera la derivada parcial respecto a θ y β, respectivamente (de hecho en el último caso se debe de tomar el límite cuando $\theta \to 0$).

Supongamos ahora que $f \in \tilde{\mathcal{F}}_8$. Definamos $G(\theta,\alpha,\beta) = f(\mathbf{T}(g(\theta,\alpha,\beta))(\mathbf{z})) - f(\mathbf{z})$ para $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^8$ fijo. Considerando la transformación inversa de (A.19) se puede probar que el gradiente de G respecto a las variables θ, β, α es igual a cero. Luego como $G(0,0,0) = 0$, entonces $G(\theta, \alpha, \beta) = 0$ para toda θ, α, β. De aquí que f es invariante bajo la acción de SU(2). Por lo cual $f \in \mathcal{F}_8$.

■

De la proposición anterior se tiene que $\mathcal{F}_m$ es de Hilbert. Además utilizando que $\exp(\mathbf{z} \cdot \mathbf{w}/\hbar)$, con $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ es el núcleo reproductor del espacio $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^m}$ se puede dar una expresión del núcleo reproductor de $\mathcal{F}_m$ como se muestra en el siguiente

Teorema 4.19 *Los espacios de Hilbert $\mathcal{F}_m$, $m = 2, 4, 8$, tienen los siguientes núcleos reproductores*

$$\mathbf{Q}_2^{(\hbar)}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}\left(\exp\left(\frac{z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2}}{\hbar}\right) + \exp\left(\frac{-z_1\overline{w_1} - z_2\overline{w_2}}{\hbar}\right)\right),$$

$$\mathbf{Q}_4^{(\hbar)}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{1}{\hbar}\,\mathbf{z} \cdot \mathbf{T}(g(\psi))\mathbf{w}\right) \mathrm{d}\psi,$$

$$\mathbf{Q}_8^{(\hbar)}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\alpha=0}^{2\pi}\int_{\beta=0}^{2\pi} \exp\left(\frac{1}{\hbar}\,\mathbf{z} \cdot \mathbf{T}(g(\theta, \alpha, \beta))\mathbf{w}\right) \mathrm{d}m(\theta, \alpha, \beta).$$

donde $\mathbf{T}(g)$ es dada por la acción de $\mathcal{G}_m$ sobre $\mathbb{C}^m$ indicada en (A.18) y (A.19). Aquí se está usando la notación $g = g(\psi) = \exp(\imath\psi) \in S^1$ para el caso $m = 4$. Y $g = g(\theta, \alpha, \beta) \in \mathrm{SU}(2)$ (ver (4.34)) para el caso $m = 8$.

La medida $\mathrm{d}m(\theta, \alpha, \beta)$ es la medida de Haar de SU(2) bajo la parametrización indicada en (4.34). De hecho $\mathrm{d}m(\theta, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$.

Para finalizar esta subsección mostremos un resultado que nos permitirá probar que el operador $\mathfrak{U}_{(n,m)}$ es unitario.

Teorema 4.20 *Sean $(n, m) = (2, 2), (3, 4), (5, 8)$, $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^m$ y $\boldsymbol{\beta} = \rho_{(n,m)}(\mathbf{w})$. Entonces*

$$\left[\mathfrak{U}_{(n,m)}\mathbf{T}_n(\cdot, \boldsymbol{\beta})\right](\mathbf{z}) = \mathbf{Q}_m^{(\hbar)}(\mathbf{z}, \mathbf{w}), \qquad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m \tag{4.35}$$

donde $\mathbf{T}_n(\cdot, \boldsymbol{\beta})$ es definido en la proposición 4.5.

Demostración.

Sean $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^m$ y $\boldsymbol{\alpha} = \rho_{(n,m)}(\mathbf{z})$, $\boldsymbol{\beta} = \rho_{(n,m)}(\mathbf{w})$. Como $\left[\mathfrak{U}_{(n,m)}\mathbf{T}_n(\cdot, \boldsymbol{\beta})\right](\mathbf{z}) = \mathbf{T}_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$. De (4.4) y (4.29) se tiene que

$$\mathbf{T}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!\hbar^{2k}}(z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2})^{2k},$$

$$\mathbf{T}_3(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2\hbar^{2k}}(z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2})^{k}(z_3\overline{w_3} + z_4\overline{w_4})^{k}, \tag{4.36}$$

$$\mathbf{T}_5(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!\hbar^{2k}}\left(\varrho(\mathbf{z}, \mathbf{w})\right)^{k},$$

con $\varrho(\mathbf{z},\mathbf{w})$ definido en (4.30).

Usando la expansión de Taylor de la función exponencial en la expresión de $\mathbf{Q}_m^{(\hbar)}(\mathbf{z},\mathbf{w})$ (ver teorema 4.19) se obtiene la expresión de $\mathbf{T}_n(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ dada en (4.36), para los casos $m=2,4$.

El último caso $m=8$, se debe de integrar primero respecto a α y después respecto a β. Para realizar la integración respecto a θ se utiliza la identidad $\int_0^{\pi/2}[\mathrm{sen}(\theta)]^{2(k-\ell)+1}[\cos(\theta)]^{2\ell+1}\mathrm{d}\theta = (k+\ell)!/2(k+1)!$.

■

4.3.2 Unitaridad de la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_{S^n}$.

Finalmente probemos que $\mathbf{B}_{S^n}$ es un operador unitario de $L^2(S^n)$ sobre $\mathcal{F}_m$, con $(n,m)=(2,2),(3,4),(5,8)$. De (4.28) sólo necesitamos probar que Ran $\mathfrak{U}_{(n,m)} = \mathcal{F}_m$ y que el operador $\mathfrak{U}_{(n,m)}:\mathcal{E}_n\to\mathcal{F}_m$ es unitario. Lo cual se demuestra en el siguiente

Teorema 4.21 *Sean $(n,m)=(2,2),(3,4),(5,8)$ y $F\in\mathcal{E}_n$. Entonces*

i) *La función $\mathfrak{U}_{(n,m)}F$ está en $\mathcal{F}_m$.*

ii) *El operador $\mathfrak{U}_{(n,m)}:\mathcal{E}_n\to\mathcal{F}_m$ es unitario.*

Demostración.

Prueba de i). El caso $(n,m)=(2,2)$ es inmediato ya que la función $\rho_{(2,2)}$ es homogénea de grado 2 en las variables (z_1,z_2). Los casos $(n,m)=(3,4),(5,8)$ son consecuencia de la regla de la cadena y el hecho de que las componentes de la función $\rho_{(n,m)}(\mathbf{z})$ están en el núcleo de los correspondientes operadores que definen a $\mathcal{F}_m$ (ver proposición 4.18, (4.31) y (4.32)). Es decir

$$\mathcal{L}\left(\rho_{(3,4)}(\mathbf{z})\right)_k = 0\ ; \qquad \mathcal{R}_j\left(\rho_{(5,8)}(\mathbf{z})\right)_k = 0\ , \qquad \begin{array}{l} k=1,\ldots,m, \\ j=1,2,3. \end{array}$$

Prueba de ii). De ii) de la proposición 4.17 lo único que debemos de probar es que $\mathfrak{U}_{(n,m)}$ es sobre. Es decir que Ran $\mathfrak{U}_{(n,m)}$ es denso en $\mathcal{F}_m$.

Dado que $\mathcal{F}_m$ es un espacio de Hilbert

$$\mathcal{F}_m = \overline{(\mathrm{Ran}\,\mathfrak{U}_{(n,m)})} \oplus (\mathrm{Ran}\,\mathfrak{U}_{(n,m)})^{\perp}\ .$$

Del teorema 4.19, el teorema 4.20 y propiedades del núcleo reproductor no es difícil ver que $(\mathrm{Ran}\,\mathfrak{U}_{(n,m)})^{\perp}=\{0\}$.

■

Una consecuencia inmediata de (4.28), el teorema 4.21 y el teorema 4.15 es el siguiente

Teorema 4.22 *La transformada de Bargmann $\mathbf{B}_{S^n}$, $n=2,3,5$, es un operador unitario de $L^2(S^n)$ sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{F}_m$, $m=2,4,8$ respectivamente.*

Capítulo

5

Estados coherentes para $L^2(S^n)$, $n \geq 2$.

En este capítulo se definirán los estados coherentes sobre $L^2(S^n)$ y se mostrará que éstos cumplen propiedades similares a las cumplidas por los estados coherentes sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ (ver sección 2.2).

5.1 Estados coherentes en la n esfera, S^n.

En esta sección se introducirá un sistema de estados coherentes para $L^2(S^n)$, $n \geq 2$. Además de que se estudiarán las propiedades de satisfacen éstos.

Sea $\mathcal{K} = \{\mathrm{K}(\cdot, \overline{\boldsymbol{\alpha}}) \mid \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n - \{0\}\} \subset L^2(S^n)$. De la definición de σ_n en (3.7) los elementos de $\mathcal{K}$ son etiquetados por puntos del haz cotangente de la n-esfera (con la sección cero removida).

Más aún nótese que la acción de la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_n$ sobre una función $\Psi \in L^2(S^n)$ es otra función en $\mathcal{E}_n$, que evaluada en $\boldsymbol{\alpha}$, es igual al producto interno en $L^2(S^n)$ de Ψ con $\mathrm{K}(\cdot, \overline{\boldsymbol{\alpha}})$. Es decir

$$\mathbf{B}_n\Psi(\boldsymbol{\alpha}) = \langle \Psi, \mathrm{K}(\cdot, \overline{\boldsymbol{\alpha}})\rangle_{S^n} \ , \qquad \Psi \in L^2(S^n) \ , \ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n \ .$$

Estas dos propiedades de $\mathrm{K}(\cdot, \overline{\boldsymbol{\alpha}})$ nos sugiere considerar el conjunto $\mathcal{K}$ como un sistema de estados coherentes para $L^2(S^n)$.

Definición 5.1 *Para $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n - \{0\}$, $n \geq 2$, definimos los estados coherentes sobre $L^2(S^n)$ por*

$$\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{x}) = \mathrm{K}(\mathbf{x}, \overline{\boldsymbol{\alpha}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2k+n-1}}{k!\sqrt{n-1}} \left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}}}{\hbar}\right)^k \ , \qquad \mathbf{x} \in S^n \ .$$

Observación 5.2 *Nótese que al igual que en $L^2(\mathbb{R}^k)$, estamos definiendo los estados coherentes sobre $L^2(S^n)$ como el complejo conjugado del núcleo integral de la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_n$ (ver definiciones 1.21 y 2.3).*

Los estados coherentes $\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}$ sobre $L^2(S^n)$ cumplen propiedades similares a las cumplidas por los estados coherentes sobre $L^2(\mathbb{R}^k)$ (ver éstas después de la definición 2.3). La demostración de tales propiedades usan una estimación de la norma de $\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}$. La cual es consecuencia de la siguiente estimación del producto interno de dos estados coherentes.

Proposición 5.3 *Sean $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{Q}^n - \{0\}$. Supongamos que $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} \neq 0$ y $|\arg(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})| < \pi$. Entonces si $\hbar \to 0$*

$$\langle \Phi_{\boldsymbol{\beta},\hbar}, \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\rangle = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{\hbar^2}{2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}\right)^{\frac{n-2}{4}} \frac{2^{\frac{n-4}{2}}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{\sqrt{2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}}{\hbar}\right)[1+\mathrm{O}(\hbar)] \,.$$

Demostración.

Dado que la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_n$ es unitaria y $\mathbf{B}_n\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}$ es igual al núcleo reproductor $\mathbf{T}_n(\cdot,\boldsymbol{\alpha})$, de $\mathcal{E}_n$ (ver lema 4.14 y definición 5.1), se tiene

$$\langle \Phi_{\boldsymbol{\beta},\hbar}, \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\rangle_{S^n} = \langle \mathbf{T}_n(\cdot,\boldsymbol{\beta}), \mathbf{T}_n(\cdot,\boldsymbol{\alpha})\rangle_{\mathcal{E}_n} = \mathbf{T}_n(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \,. \tag{5.1}$$

Como $\arg(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}) < \pi$, entonces $\arg(\sqrt{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}) < \frac{\pi}{2}$. De la expresión de $\mathbf{T}_n(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ dada en (4.5) y por la fórmula 9.7.1 de [2] tenemos que para $\hbar$ suficientemente pequeño

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_n(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) &= \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{2\hbar^2}\right)^{\frac{3-n}{4}} \frac{\sqrt{\hbar}\exp(\frac{\sqrt{2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}}{\hbar})}{\sqrt{2\pi}(2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})^{1/4}}[1+\mathrm{O}(\hbar)] \\ &= \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{\hbar^2}{2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}\right)^{\frac{n-2}{4}} \frac{2^{\frac{n-4}{2}}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{\sqrt{2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}}{\hbar}\right)[1+\mathrm{O}(\hbar)] \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Comentario 5.4 *En el caso de que $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = 0$. Entonces por (5.1) y (4.4) tenemos que $\langle \Phi_{\boldsymbol{\beta},\hbar}, \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\rangle_{S^n} = 1$. En el caso de que $\arg(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}) = \pi$. Entonces utilizamos la rama de la función raíz cuadrada $\sqrt{z} = |z|^{1/2}\exp(\imath\theta/2)$, con $\theta = \arg(z)$, $0 < \theta < 2\pi$ (ver comentario 4.6). Luego de (5.1) y la fórmula 8.451-5 de [7] se puede probar que para $\hbar$ suficientemente pequeño*

$$\mathbf{T}_n(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{\hbar^2}{2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}\right)^{\frac{n-2}{4}} \frac{2^{\frac{n-4}{2}}}{\sqrt{\pi}}\left[e^{\frac{1}{\hbar}\sqrt{2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}} + \imath^{n-2}e^{-\frac{1}{\hbar}\sqrt{2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}}\right][1+\mathrm{O}(\hbar)]$$

Sea $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q} - \{0\}$. De la proposición 5.3, la relación $|\boldsymbol{\alpha}|^2 = 2|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|^2$ (ya que $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n$) y tomando en cuenta que $\mathrm{Vol}(S^n) = 2\pi^{\frac{n+1}{2}}/\Gamma(\frac{n+1}{2})$, podemos dar una estimación de la norma de los estados coherentes $\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}$.

$$\|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\|^2_{S^n} = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{\hbar^2}{2|\boldsymbol{\alpha}|^2}\right)^{\frac{n-2}{4}} \frac{2^{\frac{n-4}{2}}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{\sqrt{2}|\boldsymbol{\alpha}|}{\hbar}\right)[1+\mathrm{O}(\hbar)] \tag{5.2}$$

$$= \frac{2\pi^{n/2}}{\mathrm{Vol}(S^n)}\left[\frac{\hbar}{|\mathrm{Re}\boldsymbol{\alpha}|}\right]^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{n-1}\exp\left(\frac{2|\mathrm{Re}\boldsymbol{\alpha}|}{\hbar}\right)[1+\mathrm{O}(\hbar)]. \tag{5.3}$$

En las siguientes subsecciones probaremos que los estados coherentes en $L^2(S^n)$, cumplen propiedades similares a las cumplidas por los estados coherentes en $L^2(\mathbb{R}^k)$ (ver sección 2.2).

5.1.1 Resolución de la identidad.

Sean $\Psi \in L^2(S^n)$ y $\{E_q | \ q \in \mathbb{N}\}$ una sucesión creciente de conjuntos medibles acotados en $\mathbb{Q}^n$ tal que $\bigcup_{q\in\mathbb{N}} E_q = \mathbb{Q}^n$. Como $\mathbf{B}_n$ es unitario y $\mathbf{B}_n\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar} = \mathbf{T}_n(\cdot,\boldsymbol{\alpha})$ para toda $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n$ (ver lema 4.14 y definición 5.1). Entonces

$$\mathbf{B}_n\Psi(\boldsymbol{\alpha}) = \langle \mathbf{B}_n\Psi, \mathbf{T}_n(\cdot,\boldsymbol{\alpha})\rangle_{\mathcal{E}_n} = \langle \mathbf{B}_n\Psi, \mathbf{B}_n\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar})\rangle_{\mathcal{E}_n} = \langle \Psi, \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\rangle_{S^n} \ .$$

Tomando transformada inversa $\mathbf{B}_n^{-1}$ (ver (4.25) para expresión de ésta)

$$\Psi(\mathbf{x}) = \lim_{q\to\infty} \int_{E_q} \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{x}) \, \langle \Psi, \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\rangle_{S^n} \, \mathrm{d}m_{n+1}^{\hbar}(\boldsymbol{\alpha}) \ , \qquad \mathbf{x} \in S^n \ .$$

Observación 5.5 *Recordemos que $L^2(S^n) = \bigoplus \mathcal{V}_\ell$, donde $\mathcal{V}_\ell$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ es el espacio propio del Laplaciano sobre S^n. Sea $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{Q}^n$ y $\Phi_{\boldsymbol{\beta}}^{(\ell)}(\mathbf{x}) := (\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x})^\ell$ para $\mathbf{x} \in S^n$.*

Por lo mostrado arriba el conjunto $\{\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n - \{0\}\}$ dan una resolución de la identidad en $L^2(S^n)$. A partir de ésto se puede probar que el complemento ortogonal de $\mathrm{span}\{\Phi_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\ell)} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n)\}$ en $\mathcal{V}_\ell$ es el $\{0\}$. Por lo cual el conjunto $\{\Phi_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\ell)} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n\}$ es sobre completo en $\mathcal{V}_\ell$. Éste es un resultado conocido, por ejemplo ver [12].

5.1.2 Estabilidad bajo evolución temporal.

Denotemos por $\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}$ al operador Laplaciano sobre $\mathbb{R}^{n+1}$. Se puede mostrar que en coordenadas esféricas, $\mathbf{y} = r\mathbf{x}$, con $r > 0$ real y $\mathbf{x} \in S^n$

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Delta_{S^n} \tag{5.4}$$

con Δ_{S^n} un operador que no depende de la coordenada radial r. Dicho operador es llamado el Laplaciano esférico.

Sea $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n$ y $k \in \mathbb{Z}_+$. Aseveramos que los estados $\Phi_{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)}(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x})^k$, $\mathbf{x} \in S^n$, son funciones propias del Laplaciano esférico normalizado (denotado por $\tilde{\Delta}_{S^n}$ y definido por $\tilde{\Delta}_{S^n} = \Delta_{S^n} + (\frac{n-1}{2})^2$) con valor propio $(k + \frac{n-1}{2})^2$.

Para probar ésto, sea $\tilde{\Phi}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)}(\mathbf{y}) = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{y})^k$ con $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Dado que $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n$, entonces $\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}\tilde{\Phi}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)}(\mathbf{y}) = 0$. Además si $\mathbf{y} = r\mathbf{x}$ con $r > 0$ y $\mathbf{x} \in S^n$ entonces $\tilde{\Phi}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)}(r\mathbf{x}) = r^k\Phi_{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)}(\mathbf{x})$. Luego de (5.4) se puede probar que

$$\tilde{\Delta}_{S^n}\Phi_{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)} = \left[\Delta_{S^n} + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right]\Phi_{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)} = \left(k + \frac{n-1}{2}\right)^2\Phi_{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)} \ . \tag{5.5}$$

Sea
$$\mathbf{N} = \hbar \left(\sqrt{\tilde{\Delta}_{S^n}} - \frac{n-1}{2} \right) .$$
El espectro del operador $\mathbf{N}$ es el conjunto de múltiplos enteros no negativos de $\hbar$. De (5.5)
$$\tilde{\Delta}_{S^n}^{-1/2} \left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}}}{\hbar} \right)^k = \left(k + \frac{n-1}{2} \right)^{-1} \left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}}}{\hbar} \right)^k . \tag{5.6}$$
Como $\tilde{\Delta}_{S^n}^{-1/2}$ es un operador continuo
$$\tilde{\Delta}_{S^n}^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2k+n-1}}{k!\sqrt{n-1}} \left(k + \frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}}}{\hbar} \right)^k = \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{x}) .$$
Así de la ecuación anterior
$$\mathbf{N}\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{x}) = \hbar \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2k+n-1}}{k!\sqrt{n-1}} k \left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}}}{\hbar} \right)^k .$$
Lo que implica
$$\exp\left(-\frac{\imath s}{\hbar} \mathbf{N} \right) \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar} = \Phi_{\exp(\imath s)\boldsymbol{\alpha},\hbar} .$$

Por lo cual la evolución temporal de los estados coherentes después de un tiempo s respecto al Hamiltoniano $\mathbf{N}$ es otro estado coherente determinado por el flujo geodésico sobre S^n.

5.1.3 Los estados coherentes son funciones propias de un operador de aniquilación.

Sea $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n - \{0\}$. Notemos primero que los estados coherentes $\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}$ pueden ser escritos en términos de las funciones $\exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}/\hbar)$, $\mathbf{x} \in S^n$. Para ver ésto sea
$$\mathbf{M} = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \tilde{\Delta}_{S^n}^{1/4}$$
definido por cálculo funcional. Utilizando (5.5) se puede mostrar que
$$\mathbf{M}^{-1} (\overline{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}})^{\ell} = \left(\frac{2}{n-1} \ell + 1 \right)^{-1/2} (\overline{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}})^{\ell} . \tag{5.7}$$
Además como $\tilde{\Delta}_{S^n}^{-1/4}$ es un operador continuo
$$\mathbf{M}^{-1} \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{x}) = \exp\left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}}}{\hbar} \right)$$

considerando a $\exp(\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}/\hbar)$ como una función de S^n. Por lo tanto

$$\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}\exp\left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}}{\hbar}\right) , \qquad \mathbf{x}\in S^n . \tag{5.8}$$

Sean $\mathbf{E}_k$, $k=1,\ldots,n+1$, los siguientes operadores con dominio en $L^2(S^n)$

$$\mathbf{E}_k = -\imath\tilde{\mathbf{x}}_j\left[-\imath\hbar\tilde{\mathbf{L}}_{kj}\right] + \tilde{\mathbf{x}}_k\mathbf{N}$$

donde $\tilde{\mathbf{x}}_j$ es el operador en $L^2(S^n)$ que multiplica por la coordenada x_j y

$$\tilde{\mathbf{L}}_{kj} = \left.\left(y_k\frac{\partial}{\partial y_j} - y_j\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\right|_{S^n} , \qquad k,j = 1,2,\ldots,n+1$$

donde y_j, $j=1,\ldots,n+1$ denota coordenadas cartesianas para $\mathbb{R}^{n+1}$ y $()|_{S^n}$ la restricción a la n-esfera. Note que $\tilde{\Delta}_{S^n}$ es igual a $\tilde{\mathbf{L}}^2 + (\frac{n-1}{2})^2$ con $\tilde{\mathbf{L}}^2 = \sum_{k<j}\tilde{\mathbf{L}}_{kj}^2$.

Consideremos los operadores

$$\mathbf{L}_{kj} = y_k\frac{\partial}{\partial y_j} - y_j\frac{\partial}{\partial y_k} , \qquad k,j = 1,2,\ldots,n+1$$

actuando sobre funciones suaves definidas sobre $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$.

Introduzcamos coordenas esféricas $(r,\boldsymbol{\theta}) = (r,\theta_1,\ldots,\theta_n)$ para $\mathbb{R}^{n+1}$. Denotemos éstas con la ecuación $\mathbf{y} = T(r,\boldsymbol{\theta})$.

Sea $f(\mathbf{y})$, $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$, una función suave. Por la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{kj}f(\mathbf{y}) &= \mathbf{L}_{kj}(f\circ T\circ T^{-1})(\mathbf{y})\\ &= \sum_{p=1}^{n}\left[y_k\frac{\partial\theta_p}{\partial y_j} - y_j\frac{\partial\theta_p}{\partial y_k}\right]\frac{\partial f\circ T}{\partial\theta_p}(T^{-1}(\mathbf{y})) .\end{aligned}$$

Evaluando ambos lados de la ecuación anterior en $\mathbf{y} = T(r,\boldsymbol{\theta})$ y luego en $r=1$

$$(\mathbf{L}_{kj}f)(T(1,\boldsymbol{\theta})) = \tilde{\mathbf{L}}_{kj}(f(T(1,\boldsymbol{\theta}))) . \tag{5.9}$$

De (5.9) se obtiene en particular que

$$\tilde{\mathbf{L}}_{kj}\exp(\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}) = \frac{1}{\hbar}(x_k\overline{\alpha}_j - x_j\overline{\alpha}_k)\exp(\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}) , \qquad \mathbf{x}\in S^n . \tag{5.10}$$

Por otro lado, de (5.6) y el hecho que $\tilde{\Delta}_{S^n}^{-1/2}$ es un operador continuo

$$\tilde{\Delta}_{S^n}^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(k+\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}}{\hbar}\right)^k = \exp\left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}}{\hbar}\right) .$$

Luego de la ecuación anterior

$$\tilde{\Delta}^{1/2} \exp\left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}}{\hbar}\right) = \left[\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}}{\hbar} + \frac{n-1}{2}\right] \exp\left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}}{\hbar}\right) ,$$

lo cual implica que

$$\mathbf{N} \exp\left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}}{\hbar}\right) = (\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}) \exp\left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}}{\hbar}\right) , \qquad \mathbf{x} \in S^n . \tag{5.11}$$

Por lo tanto de (5.10) y (5.11)

$$\mathbf{E}_k \exp\left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}}{\hbar}\right) = \overline{\alpha}_k \exp\left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}}{\hbar}\right) , \qquad \mathbf{x} \in S^n . \tag{5.12}$$

Definamos el operador $\mathbf{A}_k$, $k = 1, \ldots, n+1$ por

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{M}\mathbf{E}_k\mathbf{M}^{-1} .$$

De (5.8) y (5.12) concluimos que los estados coherentes $\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}$ son funciones propias del operador $\mathbf{A}_k$, con valor propio $\overline{\alpha}_k$.

Por otro lado recordemos que $L^2(S^n) = \bigoplus \mathcal{V}_\ell$, donde $\mathcal{V}_\ell$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ es el espacio propio del Laplaciano sobre S^n. Afirmamos que el operador $\mathbf{A}_k$ manda el espacio $\mathcal{V}_\ell$ en $\mathcal{V}_{\ell-1}$, $\ell > 0$ y anula a los elementos de $\mathcal{V}_0$. De la observación 5.5 sólo es necesario ver que ocurre en las funciones $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x})^\ell$ para $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n$. Así de (5.7), (5.6) y (5.9) se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_k(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x})^\ell &= \mathbf{M}\mathbf{E}_k \left(\frac{2}{n-1}\ell + 1\right)^{-1/2} (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x})^\ell \\
&= \hbar\ell \left(\frac{2\ell+n-1}{n-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{M}\alpha_k(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x})^{\ell-1} \\
&= \hbar\ell \left(\frac{2(\ell-1)+n-1}{2\ell+n-1}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha_k(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x})^{\ell-1}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Es ésta la razón por la que al operador $\mathbf{A}_k$, $k = 1, \ldots, n+1$ se le llamará **operador de aniquilación de $\mathbf{L^2(S^n)}$**.

Observación 5.6 *Como* $\mathbf{D}_k\mathbf{T}_n(\cdot, \boldsymbol{\alpha}) = \overline{\alpha}_k\mathbf{T}_n(\cdot, \boldsymbol{\alpha})$ *para toda* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n - \{0\}$*, con* $\mathbf{D}_k$ *el operador definido en* (4.3)*. Entonces del lema 4.14 y la definición 5.1*

$$\mathbf{A}_k\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar} = \mathbf{B}_n^{-1}\mathbf{D}_k\mathbf{B}_n\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar} .$$

Más aún de (5.13) *se tiene que para cualquier* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n - \{0\}$ *y* $\ell \in \mathbb{Z}_+$

$$\mathbf{A}_k(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x})^\ell = \mathbf{B}_n^{-1}\mathbf{D}_k\mathbf{B}_n(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x})^\ell , \quad \mathbf{x} \in S^n .$$

Luego de la observación 5.5 se tiene que en un subconjunto denso de $L^2(S^n)$

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{B}_n^{-1}\mathbf{D}_k\mathbf{B}_n \ .$$

Sin embargo no puedo decir que los operadores $\mathbf{A}_k$ y $\mathbf{B}_n^{-1}\mathrm{D}_k\mathbf{B}_n$ son iguales, ya que debo de analizar los dominios de éstos y no es el objetivo en este trabajo.

5.1.4 Cota mínima en el principio de incertidumbre de Heisenberg

Sea $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n - \{0\}$. Probemos que los estados coherentes normalizados $\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\hbar} = \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}/\|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\|_{S^n}$ satisfacen el principio de incertidumbre de Heisenberg de manera óptima. Para ello definamos los siguientes operadores

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\dagger}}{\sqrt{2}} \ , \qquad \mathbf{P} = \frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^{\dagger}}{\sqrt{2}\imath} \ ,$$

con $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n+1})$ y la misma notación para $\mathbf{X}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{A}^{\dagger}$, donde $\mathbf{A}_j^{\dagger}$ denota el operador adjunto de $\mathbf{A}_j$. Los operadores $\mathbf{X}$ y $\mathbf{P}$ satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\mathbf{X}_j, \mathbf{P}_j] = \imath \mathbf{Y}_j$$

con $\mathbf{Y}_j = [\mathbf{A}_j, \mathbf{A}_j^{\dagger}]$ para $j = 1, \dots, n+1$. Nótese que los operadores $\mathbf{X}_j$, $\mathbf{P}_j$ y $\mathbf{Y}_j$ son autoadjuntos. Así $\mathbf{X}_j$ y $\mathbf{P}_j$ satisfacen el principio de incertidumbre de Heisenberg (ver [21]). Es decir para Ψ en un conjunto denso de $L^2(S^n)$ con $\|\Psi\|_{S^n} = 1$ se tiene

$$(\Delta\mathbf{X}_j)_{\Psi}(\Delta\mathbf{P}_j)_{\Psi} \geq \frac{1}{2}\left|\langle \mathbf{Y}_j\rangle_{\Psi}\right|$$

donde para un operador dado $\mathbf{Q}$ se define su valor esperado $\langle \mathbf{Q}\rangle_{\Psi}$ y su desviación estándard $(\Delta\mathbf{Q})_{\Psi}$ respecto al estado Ψ por

$$\langle \mathbf{Q}\rangle_{\Psi} = \langle \mathbf{Q}\Psi, \Psi\rangle_{S^n} \ , \qquad (\Delta\mathbf{Q})_{\Psi} = \sqrt{\left\langle \left(\mathbf{Q} - \langle \mathbf{Q}\rangle_{\Psi}\right)^2 \Psi, \Psi \right\rangle_{S^n}} \ .$$

Como los estados coherentes son funciones propias del operador de aniquilación $\mathbf{A}$ se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{P}_k - \imath\mathbf{X}_k\right)\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\hbar} &= -\imath\sqrt{2}\mathbf{A}_k\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\hbar} = -\imath\sqrt{2}\overline{\alpha}_k\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\hbar} \ , \\ \left(\langle\mathbf{P}_k\rangle_{\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\hbar}} - \imath\langle\mathbf{X}_k\rangle_{\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\hbar}}\right)\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\hbar} &= \left\langle \left(\mathbf{P}_k - \imath\mathbf{X}_k\right)\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\hbar}, \Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\hbar}\right\rangle_{S^n}\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\hbar} = -\imath\sqrt{2}\overline{\alpha}_k\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\hbar} \ . \end{aligned}$$

Luego

$$\left(\mathbf{P}_k - \langle\mathbf{P}_k\rangle_{\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\hbar}}\right)\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\hbar} = \imath\left(\mathbf{X}_k - \langle\mathbf{X}_k\rangle_{\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\hbar}}\right)\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\hbar} \ . \tag{5.14}$$

Lo cual implica

$$\begin{aligned}
(\Delta \mathbf{X}_k)^2_{\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}}(\Delta \mathbf{P}_j)^2_{\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}} &= \left\| (\mathbf{X}_k - \langle \mathbf{X}_k \rangle_{\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}})\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}} \right\|^2_{S^n} \left\| (\mathbf{P}_j - \langle \mathbf{P}_j \rangle_{\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}})\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}} \right\|^2_{S^n} \\
&= \left| \left\langle (\mathbf{X}_k - \langle \mathbf{X}_k \rangle_{\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}})\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}, (\mathbf{P}_k - \langle \mathbf{P}_k \rangle_{\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}})\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}} \right\rangle_{S^n} \right|^2 \\
&= \left| \left\langle \Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}, (\mathbf{X}_k - \langle \mathbf{X}_k \rangle_{\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}})(\mathbf{P}_k - \langle \mathbf{P}_k \rangle_{\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}})\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}} \right\rangle_{S^n} \right|^2 \\
&= \frac{1}{4} \left| \left\langle \Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{F}\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}} \right\rangle_{S^n} + \imath \left\langle \Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{G}\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}} \right\rangle_{S^n} \right|^2
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= (\mathbf{X}_k - \langle \mathbf{X}_k \rangle_{\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}})(\mathbf{P}_k - \langle \mathbf{P}_k \rangle_{\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}}) + (\mathbf{P}_k - \langle \mathbf{P}_k \rangle_{\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}})(\mathbf{X}_k - \langle \mathbf{X}_k \rangle_{\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}}) \ , \\
\mathbf{G} &= -\imath \Big((\mathbf{X}_k - \langle \mathbf{X}_k \rangle_{\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}})(\mathbf{P}_k - \langle \mathbf{P}_k \rangle_{\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}}) - (\mathbf{P}_k - \langle \mathbf{P}_k \rangle_{\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}})(\mathbf{X}_k - \langle \mathbf{X}_k \rangle_{\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}}) \Big)
\end{aligned}$$

De (5.14) se tiene que $\langle \Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{F}\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}} \rangle_{S^n} = 0$. Además como $\langle \Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{G}\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}} \rangle_{S^n} = \langle \Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}, -\imath \mathbf{Y}_j \Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}} \rangle_{S^n}$, concluimos que $\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}$ satisface el principio de incertidumbre de Heisenberg de manera óptima

$$(\Delta \mathbf{X}_j)_{\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}}(\Delta \mathbf{P}_j)_{\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}} = \frac{1}{2} \left| \langle \mathbf{Y}_j \rangle_{\Psi^\hbar_{\boldsymbol{\alpha}}} \right| \ .$$

5.1.5 Concentración.

- Concentración de los estados coherentes en la n esfera.

Usando el lema C.1 del apéndice C, con $z = \frac{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{\hbar}$ ($\mathbf{x} \in S^n$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n - \{0\}$) y $s = 0$, se obtiene la siguiente expresión asintótica

Proposición 5.7 *Sea C una constante positiva y $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n - \{0\}$. Entonces para $\hbar \mapsto 0$ y $\mathbf{x} \in S^n$ satisfaciendo $|\mathbf{x} \cdot \mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})| \leq C\mathbf{x} \cdot \mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})$, se tiene*

$$\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \left(\frac{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{\hbar} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{\hbar} \right) \left(1 + \frac{a_1 \hbar}{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}} + \frac{a_2 \hbar^2}{(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha})^2} + \dots \right) \ .$$

Sea $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n - \{0\}$. Definamos la función de densidad de probabilidad

$$\mathrm{F}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{x}) = \frac{|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{x})|^2}{||\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}||^2_{S^n}} \ , \qquad \mathbf{x} \in S^n \ . \tag{5.15}$$

Sea C alguna constante y consideremos la región de la n esfera donde se cumple $|\mathbf{x} \cdot \mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})| \leq C\mathbf{x} \cdot \mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})$. De la expansión asintótica de los estados coherentes (proposición 5.7) y la estimación de su norma (5.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{x}) &= \frac{|\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}|}{(\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}}\mathrm{Vol}(S^n)|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|^{\frac{n-2}{2}}\frac{|\exp(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}/\hbar)|^2}{\exp(2|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|/\hbar)}\frac{1+\mathrm{O}(\hbar)}{1+\mathrm{O}(\hbar)} \\
&= D_n|\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}|\exp\left(\frac{2|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}{\hbar}\left[\frac{\mathbf{x}\cdot\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})}{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}-1\right]\right)(1+\mathrm{O}(\hbar)) \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

donde

$$D_n = \frac{\mathrm{Vol}(S^n)}{(\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}}|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|^{\frac{n-2}{2}}\,. \qquad (5.17)$$

Nótese que la ecuación (5.16) muestra concentración de $\mathrm{F}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}$ en una pequeña vecindad alrededor de $\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})/|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|$. Además $\mathrm{F}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}$ se comporta parecido a la función delta de Dirac, como lo establece la siguiente

Proposición 5.8 *Sea $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Q}^n-\{0\}$ y ϕ una función suave sobre S^n (con suave nos referimos a que para cualquier carta (U_τ,τ) de S^n, con $\tau: V_\tau\subset\mathbb{R}^n\to U_\tau\subset S^n$ se tiene que $\phi\circ\tau$ es de clase C^∞). Entonces*

$$\lim_{\hbar\to 0}\int_{\mathbf{x}\in S^n}\mathrm{F}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}S_n(\mathbf{x}) = \phi\left(\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})/|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|\right).$$

Demostración.

Sea C una constante mas grande que uno. Definamos dos regiones en S^n

$$W=\left\{\mathbf{x}\in S^n \mid C\frac{\mathbf{x}\cdot\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})}{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}\geq 1\right\} \qquad \text{y} \qquad V=S^n-W.$$

Note que si $\mathbf{x}\in W$ entonces $|\mathbf{x}\cdot\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})|\leq|\mathbf{x}|\;|\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})|=|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|\leq C\mathbf{x}\cdot\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})$. Por lo que podemos usar la expresión asintótica de $\mathrm{F}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}$ dada en (5.16).

Sean

$$A=\int_{\mathbf{x}\in W}\mathrm{F}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}S_n(\mathbf{x})\,, \qquad B=\int_{\mathbf{x}\in V}\mathrm{F}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}S_n(\mathbf{x})\,.$$

De (C.2)

$$\begin{aligned}
|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{x})| &= \left|\frac{2\sqrt{n-1}}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{\hbar}\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}}\int_0^1\left[\frac{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{\hbar}\frac{2(1-w^2)}{n-1}+1\right]e^{-\frac{w^2}{\hbar}\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{m}(w)\mathrm{d}w\right| \\
&\leq C_1\,e^{\frac{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}{\hbar}}\int_0^1\left[\frac{|\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}|}{\hbar}\frac{2}{n-1}+1\right]|\mathsf{m}(w)| \\
&\qquad \exp\left(\frac{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}{\hbar}\left[\frac{\mathbf{x}\cdot\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})}{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}(1-w^2)-1\right]\right)\mathrm{d}w
\end{aligned}$$

con C_1 constante. Si $\mathbf{x} \in V$ entonces $\frac{\mathbf{x}\cdot\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})}{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}(1-w^2)-1 < -\mu = \frac{1}{C}-1 < 0$. Luego

$$|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{x})| \leq C_1\, e^{\frac{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}{\hbar}} e^{-\mu\frac{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}{\hbar}} \left[\frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{\hbar}\frac{2}{n-1}+1\right] .$$

Por lo cual si $\mathbf{x} \in V$, utilizando (5.3), lo anterior y que $|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{2}|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|$ (ver (3.6) ya que $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n - \{0\}$) se tiene que

$$|\mathrm{F}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{x})| \leq C_1\, \frac{1}{\hbar^{\frac{n-2}{2}}} e^{-2\mu\frac{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}{\hbar}} \left[\frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{\hbar}\frac{2}{n-1}+1\right]^2 (1+\mathrm{O}(\hbar))$$

De aqui se sigue que $B = \mathrm{O}(\hbar^\infty)$.

Por otro lado de (5.16) tenemos

$$A = \int_{\mathbf{x}\in W} D_n|\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}| \exp\left(\frac{2|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}{\hbar}\left[\frac{\mathbf{x}\cdot\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})}{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}-1\right]\right)(1+\mathrm{O}(\hbar))\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}S_n(\mathbf{x}).$$

Dado que para toda $\mathbf{x} \in V$ se cumple que $\frac{\mathbf{x}\cdot\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})}{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|} - 1 < \frac{1}{C} - 1 < 0$. Entonces podemos tomar la integral anterior sobre toda la esfera con un error $\mathrm{O}(\hbar^\infty)$.

Además como $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n - \{0\}$, existe una rotación $R \in \mathrm{SO}(n+1)$ tal que $\boldsymbol{\alpha} = |\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|\ R(\hat{\mathbf{e}}_1 + \imath\hat{\mathbf{e}}_2)$, con $\hat{\mathbf{e}}_1 = (1,0,\ldots,0)$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = (0,1,\ldots,0)$ vectores unitarios en $\mathbb{R}^{n+1}$. Así utilizado el cambio de variable $\mathbf{y} = R^{-1}\mathbf{x}$ tenemos

$$A = D_n|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})| \int_{\mathbf{y}\in S^n} |y_1 + \imath y_2| \mathrm{e}^{\frac{\imath}{\hbar}f(\mathbf{y})}\phi(R\mathbf{y})(1+\mathrm{O}(\hbar))\mathrm{d}S_n(\mathbf{y}) + \mathrm{O}(\hbar^\infty)$$

donde $f(\mathbf{y}) = -\imath 2|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|(y_1-1)$.

Introduzcamos coordenadas esféricas $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\ldots,\theta_n)$ para la variable $\mathbf{y} = (y_1,\ldots y_{n+1}) \in S^n$ (ver (4.9)). Nótese que $\imath f(\boldsymbol{\theta}) \leq 0$ para toda $\boldsymbol{\theta}$ en la región $\theta_1 \in (-\pi,\pi)$, $\theta_2,\ldots,\theta_n \in (0,\pi)$. Además de que $\imath f(\boldsymbol{\theta}) = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{\theta} = (0,\pi/2,\ldots,\pi/2)$. Por lo cual existe $\eta > 0$ tal que $\imath f(\boldsymbol{\theta}) \leq -\eta$ para toda $\boldsymbol{\theta}$ que satisfaga $\pi/2 < |\theta_1| < \pi$, $\theta_2,\ldots,\theta_n \in (0,\pi/4)\cup(3\pi/4,\pi)$. Así por un argumento similar al dado para demostrar que $B = \mathrm{O}(\hbar^\infty)$ se tiene

$$\begin{aligned} A = D_n|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdots \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} &\mathrm{sen}(\theta_n)\ldots\mathrm{sen}(\theta_2)\mathrm{e}^{\frac{\imath}{\hbar}f(\boldsymbol{\theta})}\phi(R\mathbf{y}(\boldsymbol{\theta}))(1+\mathrm{O}(\hbar)) \\ &\frac{\mathrm{sen}^{n-1}(\theta_n)\ldots\mathrm{sen}(\theta_2)}{\mathrm{Vol}(S^n)}\mathrm{d}\theta_1\ldots\mathrm{d}\theta_n + \mathrm{O}(\hbar^\infty) \end{aligned} \tag{5.18}$$

La función $f(\boldsymbol{\theta})$ sólo tiene un punto crítico en la región de integración. Éste es $\boldsymbol{\theta}_0 = (0,\pi/2,\ldots,\pi/2)$. Además, dado que

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_k\partial\theta_j}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} = \imath 2|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|\delta_{j,k} .$$

Entonces el determinante de la matríz Hessiana de la función f evaluada en el punto crítico $\boldsymbol{\theta}_0$ es igual a $(\imath 2|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|)^n$.

Aplicando el método de fase estacionaria (ver (2.3)) a (5.18) y (5.17)

$$A = \frac{D_n|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}{\mathrm{Vol}(S^n)}\left(\frac{2\pi\imath\hbar}{2\imath|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}\right)^{\frac{n}{2}}\phi(R\mathbf{y}(\boldsymbol{\theta}_0)) + \mathrm{O}(\hbar) = \phi(\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})/|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|) + \mathrm{O}(\hbar).$$

Por lo tanto

$$\lim_{\hbar\to 0}\int_{\mathbf{x}\in S^n}\mathrm{F}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}S_n(\mathbf{x}) = \lim_{\hbar\to 0}(A+B) = \phi\left(\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})/|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|\right). \qquad \blacksquare$$

- Concentración de la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_n$ de los estados coherentes sobre $\mathbb{Q}^n$.

Sea $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Q}^n-\{0\}$. Definamos la siguiente función de densidad de probabilidad

$$\mathrm{H}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{|\mathbf{B}_n\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\boldsymbol{\beta})|^2}{||\mathbf{B}_n\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}||^2_{\mathcal{E}_n}}\frac{\mathfrak{F}\left(\frac{|\boldsymbol{\beta}|^2}{2\hbar^2}\right)}{2^{n-1}\hbar^{2(n-1)}} = \frac{|\mathbf{T}_n(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})|^2\mathfrak{F}\left(\frac{|\boldsymbol{\beta}|^2}{2\hbar^2}\right)}{2^{n-1}\hbar^{2(n-1)}\|\mathbf{T}_n(\cdot,\boldsymbol{\alpha})\|^2}\ ,\quad \boldsymbol{\beta}\in\mathbb{Q}^n\ .$$

donde $\mathbf{T}_n(\cdot,\boldsymbol{\alpha})$ es el núcleo reproductor de $\mathcal{E}_n$ y $\mathfrak{F}$ es la función definida en (4.1).

Teorema 5.9 *Sea $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Q}^n-\{0\}$ y ϕ una función suave en $\mathbb{Q}^n$ (con suave nos referimos a que para cualquier carta (U_τ,τ) de $\mathbb{Q}^n$, con $\tau: V_\tau\subset\mathbb{C}^n\to U_\tau\subset\mathbb{Q}^n$ se tiene que $\phi\circ\tau$ es de clase C^∞ en cada variable dejando las otras fijas). Entonces*

$$\lim_{\hbar\to 0}\int \mathrm{H}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\boldsymbol{\beta})\phi(\boldsymbol{\beta})\delta(\boldsymbol{\beta}^2)\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\beta}} = \phi(\boldsymbol{\alpha})\ . \tag{5.19}$$

Demostración.

De la proposición 4.8 tenemos la siguiente expresión explícita de la integral que aparece en (5.19)

$$\begin{aligned}(\mathfrak{I}^\hbar\phi)(\boldsymbol{\alpha}) &:= \int \mathrm{H}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\boldsymbol{\beta})\phi(\boldsymbol{\beta})\delta(\boldsymbol{\beta}^2)\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\beta}} &(5.20)\\ &= \int_{r>0}\int_{\boldsymbol{\theta}\in S^n}\int_{\boldsymbol{\eta}\in S^{n-1}}(\mathrm{H}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\ \phi)(r(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\eta}))\frac{r^{2n-3}}{4}\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega_n(\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}\Omega_{n-1}(\boldsymbol{\eta})\ .\end{aligned}$$

De la expresión del núcleo reproductor $\mathbf{T}_n$ (ver (4.5)), la función $\mathfrak{F}$ (ver (4.1)), la aproximación de la norma $\|\mathbf{T}_n(\cdot,\boldsymbol{\alpha})\|_{\mathcal{E}_n} = \|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\|_{S^n}$ (ver (5.3)) y la expresión asintótica de la función modificada de Bessel y la función de Macdonald Bessel (ver fórmulas 9.7.1 y 9.7.2 de [2] respectivamente) se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{\hbar\to 0}(\mathfrak{I}^\hbar\phi)(\boldsymbol{\alpha}) = \lim_{\hbar\to 0}\frac{1}{2(\sqrt{2}\pi\hbar)^n}\int\left(\frac{|\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}|\ |\boldsymbol{\beta}|}{|\boldsymbol{\alpha}|}\right)^{1-\frac{n}{2}}\phi(\boldsymbol{\beta})\exp\left(\frac{1}{\hbar}f(\boldsymbol{\beta})\right)&\\ r^{2n-3}\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega_n(\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}\Omega_{n-1}(\boldsymbol{\eta})\ .&\qquad(5.21)\end{aligned}$$

Donde $\boldsymbol{\beta} = r(\boldsymbol{\theta} + \imath\boldsymbol{\eta})$ en la integral del lado derecho de (5.21) y

$$f(\boldsymbol{\beta}) = \sqrt{2}(\sqrt{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}} + \sqrt{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}} - |\boldsymbol{\alpha}| - |\boldsymbol{\beta}|) = \sqrt{2}(2\mathrm{Re}(\sqrt{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}}) - |\boldsymbol{\alpha}| - |\boldsymbol{\beta}|) \ .$$

Utilicemos el método de la fase estacionaria para obtener (5.19).

De la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene $f(\boldsymbol{\beta}) \leq -\sqrt{2}(\sqrt{|\boldsymbol{\alpha}|} - \sqrt{|\boldsymbol{\beta}|})^2 \leq 0$. Además $f(\boldsymbol{\beta}) = 0$ si y sólo si $|\boldsymbol{\beta}| = |\boldsymbol{\alpha}|$ y $0 = 2\mathrm{Re}(\sqrt{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}}) - |\boldsymbol{\alpha}| - |\boldsymbol{\beta}|$. Es decir si $\boldsymbol{\beta} = e^{\imath\gamma}\boldsymbol{\alpha}$ para algún $\gamma \in [0, 2\pi]$ y $0 = \mathrm{Re}(\sqrt{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}})$. Así $f(\boldsymbol{\beta}) = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$. Luego f es una función suave en una vecindad del punto crítico $\boldsymbol{\beta}_0 = \boldsymbol{\alpha}$.

Supongamos que $\boldsymbol{\alpha} = \lambda(\hat{\mathbf{e}}_1 + \imath\hat{\mathbf{e}}_2)$, con $\hat{\mathbf{e}}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$ vectores unitarios en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Obtengamos el determinante de la matríz Hessiana de la función f evaluada en el punto crítico $\boldsymbol{\beta}_0$. Para ello introduzcamos coordenadas esféricas para $\boldsymbol{\theta}$ y $\boldsymbol{\eta}$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(\theta_n)\ldots\mathrm{sen}(\theta_2)\mathrm{sen}(\theta_1) \\ \mathrm{sen}(\theta_n)\ldots\mathrm{sen}(\theta_2)\cos(\theta_1) \\ \vdots \\ \mathrm{sen}(\theta_n)\cos(\theta_{n-1}) \\ \cos(\theta_n) \end{pmatrix} , \tag{5.22}$$

con $\theta_1 \in (-\pi, \pi)$ y $\theta_j \in (0, \pi)$ para $j = 2, \ldots, n$. Y sea

$$\boldsymbol{\eta} = \mathfrak{M}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{v}(\boldsymbol{\gamma}) \ , \tag{5.23}$$

donde $\mathfrak{M}(\boldsymbol{\theta})$ es una matríz de $(n+1)\times n$ cuyos vectores columna $\mathbf{a}_j(\boldsymbol{\theta})$ son

$$\mathbf{a}_j(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{\left|\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\theta_j}\right|}\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\theta_j} = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_j)\mathrm{sen}(\theta_{j-1})\ldots\mathrm{sen}(\theta_2)\mathrm{sen}(\theta_1) \\ -\cos(\theta_j)\mathrm{sen}(\theta_{j-1})\ldots\mathrm{sen}(\theta_2)\cos(\theta_1) \\ \vdots \\ -\cos(\theta_j)\cos(\theta_{j-1}) \\ \mathrm{sen}(\theta_j) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{5.24}$$

y $\mathbf{v}(\boldsymbol{\gamma})$ es el vector columna de $n \times 1$

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{\gamma}) = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(\gamma_{n-1})\ldots\mathrm{sen}(\gamma_2)\mathrm{sen}(\gamma_1) \\ \mathrm{sen}(\gamma_{n-1})\ldots\mathrm{sen}(\gamma_2)\cos(\gamma_1) \\ \vdots \\ \mathrm{sen}(\gamma_{n-1})\cos(\gamma_{n-2}) \\ \cos(\gamma_{n-1}) \end{pmatrix} ,$$

con $\gamma_1 \in (-\pi, \pi)$ y $\gamma_k \in (0, \pi)$, $k = 2, \ldots, n-1$.

Nótese que el punto crítico $r_0(\boldsymbol{\theta}_0 + \imath\boldsymbol{\eta}_0) = \boldsymbol{\beta}_0 = \boldsymbol{\alpha}$ corresponde a $r_0 = \lambda$, $(\theta_0)_j = (\gamma_0)_j = \frac{\pi}{2}$ para todos los valores posibles de j, k.

Utilicemos la notación $\partial_s = \partial/\partial s$ y $(\cdot)|_{pc}$ para indicar la evaluación en el punto crítico $\boldsymbol{\beta}_0 = \boldsymbol{\alpha}$. Como $\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\eta} = 0$, entonces

$$0 = \partial_{\theta_j}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\eta}) = \partial_{\theta_j}(\boldsymbol{\theta})\cdot\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\theta}\cdot\partial_{\theta_j}(\boldsymbol{\eta}) \ , \qquad 0 = \partial_{\gamma_k}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\theta}\cdot\partial_{\gamma_k}(\boldsymbol{\eta}) \ . \quad (5.25)$$

Utilizando (5.25) y las expresiones de $\boldsymbol{\theta}$ (ver (5.22)) y $\boldsymbol{\eta}$ (ecuación (5.23)), podemos obtener

$$\begin{aligned}
\partial_{\theta_j}\partial_{\gamma_k} f\big|_{pc} &= \partial_{\theta_j}\partial_{\gamma_k}\boldsymbol{\eta}\big|_{pc}\cdot\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}) \\
&\quad + \frac{1}{4r}\partial_{\gamma_k}\boldsymbol{\eta}\cdot\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})\left[-\partial_{\theta_j}\boldsymbol{\theta}\cdot\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}) + \partial_{\theta_j}\boldsymbol{\eta}\cdot\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})\right]\Big|_{pc} = 0 \ , \\
\partial_{\theta_j}\partial_{\theta_r} f\big|_{pc} &= \Bigg[\frac{1}{4r}[\partial_{\theta_r}\boldsymbol{\eta}\cdot\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}) - \partial_{\theta_r}\boldsymbol{\theta}\cdot\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})][\partial_{\theta_j}\boldsymbol{\eta}\cdot\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}) - \partial_{\theta_j}\boldsymbol{\theta}\cdot\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})] \\
&\quad + \partial_{\theta_j}\partial_{\theta_r}\boldsymbol{\theta}\cdot\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}) + \partial_{\theta_j}\partial_{\theta_r}\boldsymbol{\eta}\cdot\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})\Bigg]\Bigg|_{pc} = -\lambda\delta_{jr} \ , \\
\partial_{\gamma_k}\partial_{\gamma_s} f\big|_{pc} &= \partial_{\gamma_k}\partial_{\gamma_s}\boldsymbol{\eta}\cdot\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})\Big|_{pc} = -\lambda\delta_{ks} \\
\partial_r\partial_r f\big|_{pc} &= -\frac{1}{\lambda} \\
\partial_r\partial_{\gamma_k} f\big|_{pc} &= \frac{1}{2r}\partial_{\gamma_k}\boldsymbol{\eta}\cdot\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})\Big|_{pc} = 0 \\
\partial_r\partial_{\theta_j} f\big|_{pc} &= \frac{1}{2r}[\partial_{\theta_j}\boldsymbol{\theta}\cdot\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}) + \partial_{\theta_j}\boldsymbol{\eta}\cdot\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})]\Big|_{pc} = 0 \ .
\end{aligned}$$

A partir de ésto se puede mostrar que $\det(f''(\boldsymbol{\alpha})) = (-1)^{2n}\frac{1}{\lambda}\lambda^{2n-1} = \lambda^{2n-2}$.

Por lo tanto, aplicando el método de la fase estacionaria a la integral del lado derecho de (5.21) se tiene

$$\begin{aligned}
&\int\left(\frac{|\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|}{|\boldsymbol{\alpha}|}\right)^{1-\frac{n}{2}}\phi(\boldsymbol{\beta})\exp\left(\frac{1}{\hbar}f(\boldsymbol{\beta})\right)r^{2n-3}\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega_n(\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}\Omega_{n-1}(\boldsymbol{\eta}) \\
&\qquad = (2\lambda^2)^{1-\frac{n}{2}}\phi(\boldsymbol{\alpha})\lambda^{2n-3}\left(\frac{\lambda^{2n-2}}{(2\pi\hbar)^{2n}}\right)^{-\frac{1}{2}} + \mathrm{O}(\hbar^{1+n}) \\
&\qquad = 2^{1+\frac{n}{2}}(\pi\hbar)^n\phi(\boldsymbol{\alpha}) + \mathrm{O}(\hbar^{1+n}) \ .
\end{aligned}$$

Lo cual implica

$$\lim_{\hbar\to 0}(\mathfrak{I}^\hbar\phi)(\boldsymbol{\alpha}) = \lim_{\hbar\to 0}\frac{(\sqrt{2}\pi\hbar)^{-n}}{2}\left[\frac{(\pi\hbar)^n}{2^{-1-\frac{n}{2}}}\phi(\boldsymbol{\alpha}) + \mathrm{O}(\hbar^{1+n})\right] = \phi(\boldsymbol{\alpha}) \ . \qquad (5.26)$$

Por lo tanto (5.19) se cumple para $\boldsymbol{\alpha} = \lambda(\hat{\mathbf{e}}_1 + \imath\hat{\mathbf{e}}_2)$. Para el caso general, sea

$\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n$, existe $R \in \mathrm{SO}(n+1)$ tal que $\boldsymbol{\alpha} = |\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})| R(\hat{\mathbf{e}}_1 + \imath\hat{\mathbf{e}}_2)$. Como la medida $\mathrm{d}m^{\hbar}_{n+1}$ es invariante bajo la acción del grupo $\mathrm{SO}(n+1)$ se tiene

$$(\mathfrak{I}^{\hbar}\phi)(\boldsymbol{\alpha}) = (\mathfrak{I}^{\hbar} T_{R^{-1}}\phi)(|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|(\hat{\mathbf{e}}_1 + \imath\hat{\mathbf{e}}_2)) \,, \tag{5.27}$$

donde $(T_{R^{-1}}\phi)(\boldsymbol{\beta}) = \phi(R\boldsymbol{\beta})$. Luego por (5.20), (5.27) y (5.26)

$$\lim_{\hbar\to 0} \int \mathrm{H}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\boldsymbol{\beta})\phi(\boldsymbol{\beta})\delta(\boldsymbol{\beta}^2)\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\beta}} = (T_{R^{-1}}\phi)(|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|(\hat{\mathbf{e}}_1 + \imath\hat{\mathbf{e}}_2)) = \phi(\boldsymbol{\alpha}) \,. \qquad \blacksquare$$

- CONCENTRACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE BARGMANN $\mathbf{B}_{S^n}$, $n = 2, 3, 5$ DE LOS ESTADOS COHERENTES SOBRE $\mathbb{C}^m$, $m = 2, 4, 8$.

De aquí hasta el final de capítulo (a menos que se digan los valores explícitamente) vamos a tomar a $n = 2, 3, 5$ y a $m = 2, 4, 8$ respectivamente.

Por el teorema 5.9, una pregunta que nos podriamos hacer es si la transformada de Bargmann $\mathbf{B}_{S^n}$ de los estados coherentes se concentran en $\mathbb{C}^m$. Éste resultado no es conocido en la literatura por lo que aquí doy una prueba de ello.

Primero necesitaremos un resultado similar al dado en (1.19) y el lema 4.14. Cabe aclarar que el siguiente lema ya fue demostrado por Villegas-Blas en [31], sin embargo aquí doy una prueba diferente utilizando el operador $\mathfrak{U}_{(n,m)}$.

Lema 5.10 *Sea $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^m$ y $\boldsymbol{\beta} = \rho_{(n,m)}(\mathbf{w})$. Entonces*

$$\mathbf{B}_{S^n}\Phi_{\boldsymbol{\beta},\hbar}(\cdot) = \mathbf{Q}^{(\hbar)}_m(\cdot, \mathbf{w}) \,,$$

donde $\mathbf{Q}^{(\hbar)}_m(\cdot, \mathbf{w})$ es el núcleo reproductor del espacio $\mathcal{F}_m$.

Demostración.

Del lema 4.14 y la definición 5.1 se tiene que $\mathbf{B}_n\Phi_{\boldsymbol{\beta},\hbar} = \mathbf{T}_n(\cdot, \boldsymbol{\beta})$. El resultado se sigue de (4.28) y teorema 4.20.

$\blacksquare$

También necesitaremos una estimación de la norma de los estados coherentes en términos de las variables en $\mathbb{C}^m$. Para ello sea $\boldsymbol{\alpha} = \rho_{(n,m)}(\mathbf{z})$ con $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m$, $\mathbf{z} \neq 0$. De (5.2) y la relación $\sqrt{2}|\boldsymbol{\alpha}| = |\mathbf{z}|^2$ tenemos la siguientes estimación

$$\|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\|^2 = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{\hbar}{|\mathbf{z}|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{2^{\frac{n-4}{2}}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{|\mathbf{z}|^2}{\hbar}\right)(1 + \mathrm{O}(\hbar)) \,. \tag{5.28}$$

Después de dar éstos resultados sea $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^m$ y $\boldsymbol{\alpha} = \rho_{(n,m)}(\mathbf{w})$. Definamos la siguiente función de densidad de probabilidad

$$\mathrm{H}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{z}) = \frac{|\mathbf{B}_{S^n}\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{z})|^2}{||\mathbf{B}_{S^n}\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}||^2} \frac{\exp(-|\mathbf{z}|^2/\hbar)}{(\pi\hbar)^m} = \frac{|\mathbf{Q}^{(\hbar)}_m(\mathbf{z}, \mathbf{w})|^2}{||\mathbf{Q}^{(\hbar)}_m(\cdot, \mathbf{w})||^2} \frac{\exp(-|\mathbf{z}|^2/\hbar)}{(\pi\hbar)^m} \,, \qquad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m.$$

donde $\mathbf{Q}^{(\hbar)}_m$ es el núcleo reproductor del espacio $\mathcal{F}_m$ (ver teorema 4.19).

Teorema 5.11 *Sea* $\boldsymbol{\alpha} = \rho_{(n,m)}(\mathbf{w})$ *con* $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^m$ *satisfaciendo las restricciones indicadas en* $(A.15)$, $(A.16)$ *para* $m = 4, 8$ *respectivamente. Entonces para cualquier función* ϕ *suave sobre* $\mathbb{C}^m$ *tenemos*

$$\lim_{\hbar \to 0} \int_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m} \mathrm{H}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{z}) \phi(\mathbf{z}) \mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}} = \phi_{prom}(\rho^{-1}_{(n,m)}(\boldsymbol{\alpha}))$$

con $\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}}$ *la medida de Lebesgue sobre* $\mathbb{C}^m \simeq \mathbb{R}^{2m}$ *y* $\phi_{prom}(\rho^{-1}_{(n,m)}(\boldsymbol{\alpha}))$ *denota el promedio de* ϕ *a lo largo de la imagen inversa de* $\boldsymbol{\alpha}$ *bajo la función* $\rho_{(n,m)}$.

Demostración.

Supongamos que $\mathbf{w} \neq 0$.

CASO $(n, m) = (2, 2)$. Del teorema 4.19 tenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{z}) &= \frac{\exp(-|\mathbf{z}-\mathbf{w}|^2/\hbar)}{2(\pi\hbar)^2(1+\exp(-2|\mathbf{w}|^2/\hbar))} + \frac{\exp(-|\mathbf{z}+\mathbf{w}|^2/\hbar)}{2(\pi\hbar)^2(1+\exp(-2|\mathbf{w}|^2/\hbar))} \\
&\quad + \frac{\cos(2\mathrm{Im}(\mathbf{z}\cdot\mathbf{w})/\hbar)\exp(-|\mathbf{z}|^2/\hbar)\exp(-|\mathbf{w}|^2/\hbar)}{(\pi\hbar)^2(1+\exp(-2|\mathbf{w}|^2/\hbar))}.
\end{aligned}$$

Nótese que el último término de la ecuación anterior es $\mathrm{O}(\hbar^\infty)$. Aplicando el método de la fase estacionaria

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^2} \mathrm{H}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{z})\phi(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}} &= \frac{1}{1+\exp(-\frac{2}{\hbar}|\mathbf{w}|^2)}\left[\int_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^2} \frac{\exp(-\frac{1}{\hbar}|\mathbf{z}-\mathbf{w}|^2)}{2(\hbar\pi)^2}\phi(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}}\right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^2} \frac{\exp(-|\mathbf{z}+\mathbf{w}|^2/\hbar)}{2(\hbar\pi)^2}\phi(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}} + \mathrm{O}(\hbar^\infty)\right] \\
&= \frac{1}{1+\exp(-2|\mathbf{w}|^2/\hbar)}\left[\frac{\phi(\mathbf{w})+\phi(-\mathbf{w})}{2} + \mathrm{O}(\hbar)\right].
\end{aligned}$$

Por lo cual

$$\lim_{\hbar\to 0}\int_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^2} \mathrm{H}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{z})\phi(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}} = \frac{\phi(\mathbf{w})+\phi(-\mathbf{w})}{2}.$$

CASO $(n, m) = (3, 4)$. Del teorema 4.19 y la estimación de la norma de un estado coherente (ecuación (5.28))

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^4} \mathrm{H}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{z})\phi(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}} &= \left[\frac{|\mathbf{w}|^2}{8\hbar^9\pi^{11}}\right]^{1/2} \int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^4}\int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{\imath}{\hbar} f(\mathbf{z},\overline{\mathbf{z}},\theta,\psi)\right) \\
&\quad \phi(\mathbf{z})[1+\mathrm{O}(\hbar)]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}}\mathrm{d}\psi. \qquad (5.29)
\end{aligned}$$

Donde la función fase f es

$$f(\mathbf{z},\overline{\mathbf{z}},\theta,\psi) = \imath\left(|\mathbf{z}|^2 + |\mathbf{w}|^2 - \mathbf{z}\cdot\mathbf{T}(g(\psi))\mathbf{w} - \overline{\mathbf{z}\cdot\mathbf{T}(g(\theta))\mathbf{w}}\right), \quad \text{con } g(\psi) = e^{\imath\psi}.$$

Veamos que se cumplen las hipótesis del método de la fase estacionaria.

Dado que para $j = 1, \ldots, 4$, $\mathrm{Re}(z_j \overline{w}_j e^{\imath\psi} + \overline{z}_j w_j e^{-\imath\theta}) \leq 2|z_j|\ |w_j|$ para toda θ, ψ, entonces

$$\mathrm{Im}(f(\mathbf{z}, \overline{\mathbf{z}}, \theta, \psi)) \geq \sum_{j=1}^{4} (|z_j| - |w_j|)^2 \geq 0 \ .$$

Por otro lado, por la regla de la cadena se puede mostrar que $\nabla_{\mathbf{x},\mathbf{y},\theta} f = 0$ es equivalente a $\nabla_{\mathbf{z},\overline{\mathbf{z}},\theta} f = 0$, donde $\mathrm{Re}(z_j) = x_j$, $\mathrm{Im}(z_j) = y_j$. Luego $\nabla_{\mathbf{z},\overline{\mathbf{z}},\theta} f$ es igual a cero si y sólo si

$$0 = \frac{\partial f}{\partial z_j} = \imath(\overline{z}_j - \overline{w}_j e^{\imath\psi}) \ , \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = \imath(z_j - w_j e^{-\imath\theta}) \ , \qquad j = 1, 2$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial z_j} = \imath(\overline{z}_j - \overline{w}_j e^{-\imath\psi}) \ , \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = \imath(z_j - w_j e^{\imath\theta}) \ , \qquad j = 3, 4$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\overline{z}_1 w_1 e^{-\imath\theta} - \overline{z}_2 w_2 e^{-\imath\theta} + \overline{z}_3 w_3 e^{\imath\theta} + \overline{z}_4 w_4 e^{\imath\theta} \ .$$

Realizando los cálculos se obtiene que el único punto donde el gradiente de f es cero es $\theta_0 = \psi$, $z_{j_0} = w_j \exp(-\imath\psi)$, $j = 1, 2$ y $z_{j_0} = w_j \exp(\imath\psi)$, $j = 3, 4$ (nótese que con estas condiciones $\mathbf{z}_0 = (z_{10}, z_{20}, z_{30}, z_{40}) = \mathbf{T}(g(\psi))\mathbf{w}$). Para que la igualdad $0 = \partial f / \partial \theta$ se cumpla se utiliza la condición $|w_1|^2 + |w_2|^2 - |w_3|^2 - |w_4|^2 = 0$.

Obtengamos el determinante de la matríz Hessiana de f respecto a las variables $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, θ evaluado en el punto crítico $\mathbf{x}_0 + \imath\mathbf{y}_0 = \mathbf{z}_0 = \mathbf{T}(g(\psi))\mathbf{w}$, $\theta_0 = \psi$. Para ello, nótese que

$$\begin{aligned} f_{x_j x_k}(\mathbf{z}_0, \theta_0) &= (f_{z_j z_k} + f_{z_j \overline{z}_k} + f_{\overline{z}_j z_k} + f_{\overline{z}_j \overline{z}_k})(\mathbf{z}_0, \theta_0) = \imath(2\delta_{j,k}) \\ f_{x_j y_k}(\mathbf{z}_0, \theta_0) &= \imath(f_{z_j z_k} - f_{z_j \overline{z}_k} + f_{\overline{z}_j z_k} - f_{\overline{z}_j \overline{z}_k})(\mathbf{z}_0, \theta_0) = 0 \\ f_{y_j y_k}(\mathbf{z}_0, \theta_0) &= (-f_{z_j z_k} + f_{z_j \overline{z}_k} + f_{\overline{z}_j z_k} - f_{\overline{z}_j \overline{z}_k})(\mathbf{z}_0, \theta_0) = \imath(2\delta_{j,k}) \ . \end{aligned} \tag{5.30}$$

Además para $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} f_{x_j \theta}(\mathbf{z}_0, \theta_0) &= (f_{z_j \theta} + f_{\overline{z}_j \theta})(\mathbf{z}_0, \theta_0) = -w_j e^{-\imath\psi} \ , \\ f_{y_j \theta}(\mathbf{z}_0, \theta_0) &= \imath(f_{z_j \theta} - f_{\overline{z}_j \theta})(\mathbf{z}_0, \theta_0) = \imath w_j e^{-\imath\psi} \ . \end{aligned}$$

De manera análoga para $j = 3, 4$

$$f_{x_j \theta}(\mathbf{z}_0, \theta_0) = w_j e^{\imath\psi} \ , \qquad f_{y_j \theta}(\mathbf{z}_0, \theta_0) = -\imath w_j e^{\imath\psi}$$

y finalmente $f_{\theta\theta}(\mathbf{z}_0, \theta_0) = \imath|\mathbf{w}|^2$.

Recordemos ahora que si A, B, C, D son matrices $\ell \times \ell$, $\ell \times s$, $s \times \ell$, $s \times s$ respectivamente, entonces

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B) \ . \tag{5.31}$$

Utilicemos la notación $f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$, $f_{\mathbf{x},\theta}$ para indicar la matríz de 4×4, 4×1 cuyas entradas son $f_{x_j y_k}$, $f_{x_j \theta}$ respectivamente. De (5.30) y (5.31) tenemos (tomando a $D = f_{\theta,\theta}$)

$$\det(f''(\mathbf{x}_0, \theta_0)) = \det \begin{pmatrix} f_{\mathbf{x},\mathbf{x}} & f_{\mathbf{x},\mathbf{y}} & f_{\mathbf{x},\theta} \\ f_{\mathbf{y},\mathbf{x}} & f_{\mathbf{y},\mathbf{y}} & f_{\mathbf{y},\theta} \\ f_{\theta,\mathbf{x}} & f_{\theta,\mathbf{y}} & f_{\theta,\theta} \end{pmatrix} = (2\imath)^8 \imath |\mathbf{w}|^2 \ .$$

Por lo tanto podemos aplicar el método de la fase estacionaria a (5.29) y obtener

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^4} \mathrm{H}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{z})\phi(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}} &= \left[\frac{|\mathbf{w}|^2}{8\hbar^9\pi^{11}}\right]^{\frac{1}{2}} \Bigg[\int_0^{2\pi}\Bigg(\frac{(2\pi\imath\hbar)^{\frac{9}{2}}}{(\imath|\mathbf{w}|^2(2\imath)^8)^{\frac{1}{2}}}\phi(\mathbf{z}_0)[1+\mathrm{O}(\hbar)] \\ &\qquad + \mathrm{O}(\hbar^{1+\frac{9}{2}})\Bigg)\mathrm{d}\psi\Bigg] \\ &= \int_0^{2\pi} \phi(w_1 e^{-\imath\psi}, w_2 e^{-\imath\psi}, w_3 e^{\imath\psi}, w_4 e^{\imath\psi})\frac{\mathrm{d}\psi}{2\pi} + \mathrm{O}(\hbar). \end{aligned}$$

De aquí que

$$\lim_{\hbar\to 0}\int_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^4} \mathrm{H}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{z})\phi(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(w_1 e^{-\imath\psi}, w_2 e^{-\imath\psi}, w_3 e^{\imath\psi}, w_4 e^{\imath\psi})\mathrm{d}\psi \ .$$

CASO $(n, m) = (5, 8)$. Éste es similar al caso $(n, m) = (3, 4)$, solo que los cálculos son mas complicados. Del teorema 4.19 y la estimación de la norma de un estado coherente (ecuación (5.28)) se tiene que

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^8} \mathrm{H}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{z})\phi(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}} &= \frac{|\mathbf{w}|^3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\hbar^{3/2}(\pi\hbar)^8}\int\limits_{\theta,\alpha,\beta}\int\limits_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^4}\int\limits_{\tilde\theta,\tilde\alpha,\tilde\beta} e^{\frac{\imath}{\hbar}f(\mathbf{z},\overline{\mathbf{z}},\tilde\theta,\tilde\alpha,\tilde\beta,\theta,\alpha,\beta)}\phi(\mathbf{z}) \\ &\qquad [1+\mathrm{O}(\hbar)]\mathrm{d}m(\tilde\theta,\tilde\alpha,\tilde\beta)\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}}\mathrm{d}m(\theta,\alpha,\beta) \ . \end{aligned} \tag{5.32}$$

Donde la función fase f es

$$f(\mathbf{z},\overline{\mathbf{z}},\tilde\theta,\tilde\alpha,\tilde\beta,\theta,\alpha,\beta) = \imath(|\mathbf{w}|^2 + |\mathbf{z}|^2 - \mathbf{z}\cdot\mathbf{T}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{w} - \overline{\mathbf{z}\cdot\mathbf{T}(g(\tilde\theta,\tilde\alpha,\tilde\beta))\mathbf{w}})$$

con $g = g(\theta, \alpha, \beta) \in \mathrm{SU}(2)$ dada por (4.34). Veamos que se cumplen las hipótesis del método de fase estacionaria.

Para θ, α, β fijos, $\theta \in (0, \pi/2)$ y $\alpha, \beta \in (-\pi, \pi)$, las siguientes ecuaciones se cumplen

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial z_j} = \imath(\overline{z}_j - (\overline{\mathbf{T}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{w}})_j) \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = \imath(z_j - (\mathbf{T}(g(\tilde\theta,\tilde\alpha,\tilde\beta))\mathbf{w})_j) \end{aligned} \tag{5.33}$$

si y sólo si $\mathbf{z} = \mathbf{T}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{w} = \mathbf{T}(g(\tilde\theta,\tilde\alpha,\tilde\beta))\mathbf{w}$. Lo cual implica, utilizando (A.19), (A.20) y (A.7) que

$$\mathbf{L}^\dagger \mathbf{V}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{L}\mathbf{w} = \mathbf{L}^\dagger \mathbf{V}(g(\tilde{\theta},\tilde{\alpha},\tilde{\beta}))\mathbf{L}\mathbf{w} \; .$$

Lo que es equivalente a

$$\mathbf{V}(g^{-1}(\tilde{\theta},\tilde{\alpha},\tilde{\beta})g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{L}\mathbf{w} = \mathbf{L}\mathbf{w} \; . \tag{5.34}$$

Dado que $\mathbf{w} \neq 0$, entonces $\mathbf{L}\mathbf{w} \neq 0$. Por lo cual la ecuación (5.34) implica que $g^{-1}(\tilde{\theta},\tilde{\alpha},\tilde{\beta})g(\theta,\alpha,\beta)$ es la matriz identidad. Considerando la parametrización de $g \in \mathrm{SU}(2)$ como en (4.34) se obtiene que $(\tilde{\theta},\tilde{\alpha},\tilde{\beta}) = (\theta,\alpha,\beta)$.

Mostremos que se cumple que

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \tilde{\theta}}\right|_{pc} = \left.\frac{\partial f}{\partial \tilde{\alpha}}\right|_{pc} = \left.\frac{\partial f}{\partial \tilde{\beta}}\right|_{pc} = 0 \tag{5.35}$$

donde $\left.\frac{\partial f}{\partial \tilde{\theta}}\right|_{pc}$ denota $\frac{\partial f}{\partial \tilde{\theta}}$ evaluada en $\mathbf{z} = \mathbf{T}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{w}$ y $(\tilde{\theta},\tilde{\alpha},\tilde{\beta}) = (\theta,\alpha,\beta)$ (la misma notación para las derivadas parciales respecto a $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$).

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial \tilde{\theta}}\right|_{pc} &= -\imath \left.\overline{\mathbf{z}\cdot \mathbf{L}^\dagger \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \mathbf{V}(g(\tilde{\theta},\tilde{\alpha},\tilde{\beta}))\mathbf{L}\mathbf{w}}\right|_{pc} \\
&= -\imath \mathbf{L}^\dagger \frac{\partial}{\partial \theta}\mathbf{V}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{L}\mathbf{w}\cdot \mathbf{L}^\dagger \mathbf{V}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{L}\mathbf{w} \\
&= -\imath \mathbf{V}(g^{-1}(\theta,\alpha,\beta))\frac{\partial}{\partial \theta}\mathbf{V}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{L}\mathbf{w}\cdot\mathbf{L}\mathbf{w} \; .
\end{aligned} \tag{5.36}$$

De manera análoga

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial \tilde{\alpha}}\right|_{pc} &= -\imath \mathbf{V}(g^{-1}(\theta,\alpha,\beta))\frac{\partial}{\partial \alpha}\mathbf{V}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{L}\mathbf{w}\cdot\mathbf{L}\mathbf{w} \; , \\
\left.\frac{\partial f}{\partial \tilde{\beta}}\right|_{pc} &= -\imath \mathbf{V}(g^{-1}(\theta,\alpha,\beta))\frac{\partial}{\partial \beta}\mathbf{V}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{L}\mathbf{w}\cdot\mathbf{L}\mathbf{w} \; .
\end{aligned}$$

De la expresión de $g = g(\theta,\alpha,\beta)$ dada en (4.34) podemos obtener que

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial \tilde{\theta}}\right|_{pc} &= -2\mathrm{Im}\left(e^{\imath\alpha+\imath\beta}[w_7\overline{w}_1 + w_5\overline{w}_3 - w_6\overline{w}_4 - w_8\overline{w}_2]\right) \; , \\
\left.\frac{\partial f}{\partial \tilde{\alpha}}\right|_{pc} &= -\cos^2(\theta)[w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 - w_5^2 - w_6^2 - w_7^2 - w_8^2] \\
&\quad + 2\mathrm{Re}\left(\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)e^{\imath\alpha+\imath\beta}[w_5\overline{w}_3 - w_6\overline{w}_4 + w_7\overline{w}_1 - w_8\overline{w}_2]\right) \; ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial\tilde\beta}\right|_{pc} &= -\mathrm{sen}^2(\theta)(w_1^2+w_2^2+w_3^2+w_4^2-w_5^2-w_6^2-w_7^2-w_8^2)\\ &\quad - 2\mathrm{Re}\left(e^{\imath\alpha+\imath\beta}\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)[w_5\overline{w}_3-w_6\overline{w}_4+w_7\overline{w}_1-w_8\overline{w}_2]\right)\ .\end{aligned}$$

Dado que $\mathbf{w}$ satisface las restricciones (A.16), las escuaciones (5.35) se cumplen. De aquí que $\nabla f_{\mathbf{z},\overline{\mathbf{z}},\tilde\theta,\tilde\alpha,\tilde\beta}=0$ si y sólo si

$$\mathbf{z}=\mathbf{T}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{w} \quad y \quad (\tilde\theta,\tilde\alpha,\tilde\beta)=(\theta,\alpha,\beta)\ .$$

Es decir $(\mathbf{z}_0,\tilde\theta_0,\tilde\alpha_0,\tilde\beta_0)=(\mathbf{T}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{w},\theta,\alpha,\beta)$ es el único punto crítico de f.

Por otro lado

$$\begin{aligned}\mathbf{z}\cdot\mathbf{T}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{w} &= e^{-\imath\alpha}\cos(\theta)(z_5\overline{w}_5+z_6\overline{w}_6+z_7\overline{w}_7+z_8\overline{w}_8)\\ &\quad + e^{\imath\alpha}\cos(\theta)(z_1\overline{w}_1+z_2\overline{w}_2+z_3\overline{w}_3+z_4\overline{w}_4)\\ &\quad - e^{-\imath\beta}\mathrm{sen}(\theta)(z_3\overline{w}_5-z_4\overline{w}_6+z_1\overline{w}_7-z_2\overline{w}_8)\\ &\quad - e^{\imath\beta}\mathrm{sen}(\theta)(z_6\overline{w}_4-z_5\overline{w}_3-z_7\overline{w}_1+z_8\overline{w}_2)\ .\end{aligned}$$

Luego

$$\mathrm{Re}\left(\mathbf{z}\cdot\mathbf{T}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{w}+\overline{\mathbf{z}\cdot\mathbf{T}(g(\tilde\theta,\tilde\alpha,\tilde\beta))}\right)\le 2\sum_{j,k=1}^{8}|z_j|\,|w_k|\ .$$

De aquí que

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= |\mathbf{w}|^2+|\mathbf{z}|^2-\mathrm{Re}\left(\mathbf{z}\cdot\mathbf{T}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{w}+\overline{\mathbf{z}\cdot\mathbf{T}(g(\tilde\theta,\tilde\alpha,\tilde\beta))\mathbf{w}}\right)\\ &\ge \left(\sum_{j=1}^{8}(|z_j|-|w_j|)\right)^2\ge 0\ .\end{aligned}$$

Obtengamos ahora el determinante de la matríz Hessiana de f respecto a las variables $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\tilde\theta$, $\tilde\alpha$, $\tilde\beta$ (donde $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\imath\mathbf{y}$) evaluada en el punto crítico $\mathbf{x}_0+\mathbf{y}_0=\mathbf{z}_0=\mathbf{T}(g(\theta,\alpha,\beta))$, $(\tilde\theta_0,\tilde\alpha_0,\tilde\beta_0)=(\theta,\alpha,\beta)$.

De (5.30) y (5.33)

$$f_{x_j,x_k}(\mathbf{z}_0,\tilde\theta_0,\tilde\alpha_0,\tilde\beta_0)=f_{y_j,y_k}(\mathbf{z}_0,\tilde\theta_0,\tilde\alpha_0,\tilde\beta_0)=\imath(2\delta_{j,k})\ ,\qquad f_{x_j,y_k}(\mathbf{z}_0,\tilde\theta_0,\tilde\alpha_0,\tilde\beta_0)=0\ .$$

Además para $\vartheta=\theta,\alpha,\beta$

$$\begin{aligned}f_{x_j,\tilde\vartheta}(\mathbf{z}_0,\tilde\theta_0,\tilde\alpha_0,\tilde\beta_0) &= -\imath(\mathbf{L}^\dagger\frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathbf{V}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{L}\mathbf{w})_j\ ,\\ f_{y_j,\tilde\vartheta}(\mathbf{z}_0,\tilde\theta_0,\tilde\alpha_0,\tilde\beta_0) &= -(\mathbf{L}^\dagger\frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathbf{V}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{L}\mathbf{w})_j\ .\end{aligned}$$

De forma similar a (5.36)

$$f_{\tilde{\vartheta},\tilde{\varsigma}}(\mathbf{z}_0, \tilde{\theta}_0, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0) = -\imath \mathbf{V}(g^{-1}(\theta,\alpha,\beta)) \frac{\partial^2}{\partial\vartheta\partial\varsigma} \mathbf{V}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{L}\mathbf{w} \cdot \mathbf{L}\mathbf{w}$$

con $\vartheta, \varsigma = \theta,\ \alpha,\ \beta$. De hecho

$$f_{\tilde{\theta},\tilde{\theta}}\Big|_{pc} = \imath|\mathbf{w}|^2\ , \qquad\qquad f_{\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}}|_{pc} = \imath\cos^2(\theta)|\mathbf{w}|^2\ ,$$
$$f_{\tilde{\beta},\tilde{\beta}}\Big|_{pc} = \imath\mathrm{sen}^2(\theta)|\mathbf{w}|^2\ , \qquad\qquad f_{\tilde{\vartheta},\tilde{\varsigma}} = 0\ , \quad \text{si } \vartheta \neq \varsigma.$$

Nótese que

$$\begin{aligned}\left[f_{\mathbf{x},\tilde{\vartheta}} \cdot f_{\mathbf{x},\tilde{\varsigma}} + f_{\mathbf{y},\tilde{\vartheta}} \cdot f_{\mathbf{y},\tilde{\varsigma}}\right]\Big|_{pc} &= -(\mathbf{L}^\dagger \frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathbf{V}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{L}\mathbf{w}) \cdot (\mathbf{L}^\dagger \frac{\partial}{\partial\varsigma}\mathbf{V}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{L}\mathbf{w}) \\ &\quad + (\mathbf{L}^\dagger \frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathbf{V}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{L}\mathbf{w}) \cdot (\mathbf{L}^\dagger \frac{\partial}{\partial\varsigma}\mathbf{V}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{L}\mathbf{w}) \\ &= 0\ .\end{aligned}$$

Así utilizando (5.31) obtenemos que

$$\det(f''(\mathbf{z}_0, \tilde{\theta}_0, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0)) = (2\imath)^{16}\imath^3|\mathbf{w}|^6\cos^2(\theta)\mathrm{sen}^2(\theta).$$

Por lo tanto, de (5.32) y el método de la fase estacionaria finalmente tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^8} \mathrm{H}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{z})\phi(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}} &= \frac{|\mathbf{w}|^3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\hbar^{3/2}(\pi\hbar)^8}\Bigg[\int_{\theta,\alpha,\beta}\Bigg(\frac{(2\pi\imath\hbar)^{\frac{19}{2}}\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)}{2\pi^2[(2\imath)^{16}\imath^3|\mathbf{w}|^6\cos^2(\theta)\mathrm{sen}^2(\theta)]^{\frac{1}{2}}} \\ &\qquad \phi(\mathbf{T}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{w})[1+\mathrm{O}(\hbar)] + \mathrm{O}(\hbar^{1+\frac{19}{2}})\Bigg)\mathrm{d}m(\theta,\alpha,\beta)\Bigg] \\ &= \int_{\theta,\alpha,\beta}\phi(\mathbf{T}(g(\theta,\alpha,\beta))\mathbf{w})\mathrm{d}m(\theta,\alpha,\beta) + \mathrm{O}(\hbar)\ .\end{aligned}$$

De lo cual concluimos que

$$\lim_{\hbar\to 0}\int_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^8} \mathrm{H}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{z})\phi(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}\overline{\mathbf{z}} = \int_{\theta,\alpha,\beta}\phi(\mathbf{T}(g(\theta,\alpha,\beta)))\mathrm{d}m(\theta,\alpha,\beta)\ .$$

Supongamos ahora que $|\mathbf{w}| = 0$, entonces $\boldsymbol{\alpha} = \rho_{(n,m)}(\mathbf{w}) = 0$. Luego el estado coherente etiquetado por $\boldsymbol{\alpha} = 0$ es la función constante uno en toda la esfera con norma $L^2(S^n)$ igual a uno.

De aquí que $\mathrm{H}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{z}) = \exp(-|\mathbf{z}|^2/\hbar)/(\pi\hbar)^m$. Y por el método de la fase estacionaria se concluye que

$$\lim_{\hbar\to 0}\int_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^8} \mathrm{H}_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{z})\phi(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z} = \phi(0)\ . \qquad \blacksquare$$

Capítulo 6

Teorema tipo Egorov.

En esta capítulo probaré un teorema tipo Egorov que relaciona el símbolo principal de un operador pseudo-diferencial $A_\hbar$ definido en $L^2(S^n)$, $n \geq 2$ con el límite semiclásico del símbolo de Berezin del operador $\mathbf{B}_n A_\hbar (\mathbf{B}_n)^{-1}$.

6.1 Teorema tipo Egorov.

En esta sección se probará que se puede relacionar (a través de la transformación σ_n, definida en (3.7) en el régimen semiclásico) el símbolo principal de un operador pseudo-diferencial $A_\hbar$ con dominio en $L^2(S^n)$ (ver apéndice B para definición del operador pseudo-diferencial en la esfera) con el símbolo de Berezin del operador $\mathbf{B}_n A_\hbar (\mathbf{B}_n)^{-1}$ (ver definición 2.5).

Teorema 6.1 *Sea $A_\hbar$ operador pseudo-diferencial con dominio en $L^2(S^n)$, $n \geq 2$. Entonces para cada $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n - \{0\}$ se tiene*

$$\lim_{\hbar \to 0} \frac{\left\langle \mathbf{B}_n A_\hbar (\mathbf{B}_n)^{-1} \mathbf{T}_n(\cdot, \boldsymbol{\alpha}), \mathbf{T}_n(\cdot, \boldsymbol{\alpha}) \right\rangle_{\mathcal{E}_n}}{\left\langle \mathbf{T}_n(\cdot, \boldsymbol{\alpha}), \mathbf{T}_n(\cdot, \boldsymbol{\alpha}) \right\rangle_{\mathcal{E}_n}} = \wp(A_\hbar) \circ \sigma_n(\boldsymbol{\alpha}) \ ,$$

donde $\wp(A_\hbar)$ es el símbolo principal del operador $A_\hbar$ (ver definición B.7 y comentario B.8), σ_n es la función que identifica $\mathbb{Q}^n - \{0\}$ con el haz cotangente $T^*S^n - \{0\}$ (ver (3.7)*) y $\mathbf{T}_n(\cdot, \boldsymbol{\alpha})$ es el núcleo reproductor del espacio $\mathcal{E}_n$ (ver proposición 4.5).*

Demostración.

Sea $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n$ y $\mathrm{M}_\hbar := \mathbf{B}_n A_\hbar (\mathbf{B}_n)^{-1}$. Por el lema 4.14, $\mathbf{B}_n \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\cdot) = \mathbf{T}_n(\cdot, \boldsymbol{\alpha})$, donde $\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}$ son los estados coherentes en $L^2(S^n)$ (ver definición 5.1). Luego de la definición 2.5 y el hecho de que $\mathbf{B}_n$ es un operador unitario

$$\widetilde{\mathrm{M}_\hbar}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\langle A_\hbar \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}, \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar} \rangle_{S^n}}{\|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\|^2} \ . \qquad (6.1)$$

La idea básica de la prueba es obtener una expanción asintótica de los estados coherentes y de sus derivadas, para así poder usar el método de la fase estacionaria. Para éste fin, sea C una contante mayor que uno. Definamos dos regiones disjuntas en S^n

$$W = \left\{ \mathbf{x} \in S^n \mid C \frac{\mathbf{x} \cdot \mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})}{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|} \geq 1 \right\} \qquad \text{y} \qquad V = S^n - W.$$

Tomemos las coordenadas locales $(U_{\mathfrak{c}}, \kappa_{\mathfrak{c}})$ de S^n, con $U_{\mathfrak{c}} = \kappa_{\mathfrak{c}}^{-1}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{c} = 1, 2, \ldots, n$, donde

$$\mathfrak{A} = \left\{ (\theta, v_3 \ldots, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \mid -\pi < \theta < \pi, \ \sum_{q=3}^{n+1} v_q^2 < 1 - \frac{1}{4(n-1)} \right\}$$

y $\kappa_{\mathfrak{c}}^{-1} : \mathfrak{A} \to U_{\mathfrak{c}}$, definidas por

$$\begin{aligned} \kappa_1^{-1}(\theta, \mathbf{v}) &= (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta), \mathbf{v}) \ , \\ \kappa_{\mathfrak{a}}^{-1}(\theta, \mathbf{v}) &= \mathcal{R}_{\mathfrak{a}} \kappa_1^{-1}(\theta, \mathbf{v}) \ , \end{aligned} \qquad r = \left(1 - \sum_{q=3}^{n+1} v_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

con $\mathbf{v} = (v_3, \ldots, v_{n+1})$, $\mathfrak{a} = 2, \ldots, n$ y $\mathcal{R}_{\mathfrak{a}} \in \mathrm{SO}(n+1)$ la matríz que rota 180 grados en el plano x_1, x_2 y 90 grados en el plano x_2, $x_{\mathfrak{a}+1}$. Es decir

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{a}} = (-\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_{\mathfrak{a}+1}, \hat{\mathbf{e}}_3, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_{\mathfrak{a}}, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_{\mathfrak{a}+2}, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_{n+1})$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_j$ es el vector columna unitario en $\mathbb{R}^{n+1}$ cuyas entradas son cero, excepto la j-ésima que es igual a uno. Nótese que $\hat{\mathbf{e}}_1 \notin U_{\mathfrak{a}}$ para $\mathfrak{a} = 2, \ldots n$. Además afirmamos que $S^n = \cup_{\mathfrak{c}=1}^n U_{\mathfrak{c}}$. Para probar ésto primero observemos que

$$S^n = \left\{ (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta), \mathbf{v}) \mid -\pi < \theta \leq \pi, |\mathbf{v}|^2 \leq 1, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}, r^2 = 1 - |\mathbf{v}|^2 \right\} \tag{6.2}$$

Sea $\mathbf{x} \in S^n$, expresemoslo de la forma dada en (6.2). Supongamos que $\mathbf{x} \notin U_1$. Sea $v_j = \max\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ y $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{n-1}$ tal que $\tilde{v}_i = v_i$, $i \neq j$ y $\tilde{v}_j = r\mathrm{sen}(\theta)$. Dado que

$$\left(-\frac{r}{\tilde{r}} \cos(\theta) \right)^2 + \left(\frac{v_j}{\tilde{r}} \right)^2 = 1 \ , \qquad \text{donde } \ \tilde{r}^2 = 1 - |\tilde{\mathbf{v}}|^2 = r^2\cos^2(\theta) + v_j^2 > 0.$$

Entonces existe $-\pi < \tilde{\theta} < \pi$ que satisface $\cos(\tilde{\theta}) = -\frac{r}{\tilde{r}}\cos(\theta)$, $\mathrm{sen}(\tilde{\theta}) = \frac{v_j}{\tilde{r}}$. A partir de ésto no es difícil ver que $(\tilde{\theta}, \tilde{\mathbf{v}}) \in \mathfrak{A}$ y que $\mathbf{x} = \kappa_{j+1}^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{\mathbf{v}}) \in U_{j+1}$.

Sea $\{\mathfrak{t}_{\mathfrak{c}}\}$ una partición de la unidad de S^n subordinada a la cubierta $\{U_{\mathfrak{c}}\}$. Como $\hat{\mathbf{e}}_1$ sólo está en U_1, se tiene que $\mathfrak{t}_1(1, 0, \ldots, 0) = 1$. Consideremos otro conjunto de funciones $\{\varrho_{\mathfrak{c}}\}$ con $\varrho_{\mathfrak{c}} \in C_0^\infty(U_{\mathfrak{c}})$ y $\mathfrak{t}_{\mathfrak{c}}\varrho_{\mathfrak{c}} = \mathfrak{t}_{\mathfrak{c}}$ para toda $\mathfrak{c} = 1, \ldots, n$.

Nótese que

$$A_\hbar = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \left[\mathfrak{t}_{\mathfrak{c}} A_\hbar \varrho_{\mathfrak{c}} + \mathfrak{t}_{\mathfrak{c}} A_\hbar (1 - \varrho_{\mathfrak{c}}) \right] \ .$$

Además como $\mathrm{sop}(\mathfrak{t}_\mathfrak{c}) \cap \mathrm{sop}(1-\varrho_\mathfrak{c}) = \varnothing$ y $A_\hbar$ es un operador pseudo-diferencial se tiene

$$\frac{\langle \mathfrak{t}_\mathfrak{c} A_\hbar (1-\varrho_\mathfrak{c})\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}, \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\rangle_{S^n}}{\|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\|^2} = \mathrm{O}(\hbar^\infty)\ , \quad \mathfrak{c} = 1,\ldots,n\ . \tag{6.3}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\langle \mathfrak{t}_\mathfrak{c} A_\hbar \varrho_\mathfrak{c}\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}, \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\rangle_{S^n} = \int_{S^n} \mathfrak{t}_\mathfrak{c} A_\hbar \varrho_\mathfrak{c}\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{w})\overline{\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\mathbf{w})}\mathrm{d}S_n(\mathbf{w})$$

donde $\mathrm{d}S_n$ es la medida de superficie normalizada de S^n. Como $\mathrm{sop}(\mathfrak{t}_\mathfrak{c}) \subset U_\mathfrak{c}$, utilizando el cambio de variable $\kappa_\mathfrak{c}^{-1} : \mathfrak{A} \to U_\mathfrak{c}$ se tiene

$$= \int_{(\theta,\mathbf{v})\in\mathfrak{A}} \mathfrak{t}_\mathfrak{c} A_\hbar \varrho_\mathfrak{c}\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\kappa_\mathfrak{c}^{-1}(\theta,\mathbf{v}))\overline{\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\kappa_\mathfrak{c}^{-1}(\theta,\mathbf{v}))} \frac{J(\theta,\mathbf{v})}{\mathrm{Vol}(S^n)}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\mathbf{v} \tag{6.4}$$

donde $J(\theta,\mathbf{v})$ es el Jacabiano del cambio de variable mencionado arriba (de hecho $J(\theta,\mathbf{v}) = 1$).

Luego de (6.4) y la definición de operador pseudo-diferencial (ver apéndice B) existe $m \in \mathbb{R}$, un entero no negativo k tal que $m+n < k$ y símbolos clásicos $a_{\kappa_\mathfrak{c}} \in \mathrm{S}_{2n}(\langle p_\theta, p_\mathbf{v}\rangle^m)$ tales que

$$\begin{aligned}\frac{\left\langle \mathfrak{t}_\mathfrak{c} A_\hbar \varrho_\mathfrak{c}\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}, \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\right\rangle_{S^n}}{\|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\|^2} = \frac{(2\pi\hbar)^{-n}}{\|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\|^2} \int_{(\theta,\mathbf{v})\in\mathfrak{A}} \int_{(\tilde\theta,\tilde{\mathbf{v}})\in\mathfrak{A}} \int_{(p_\theta,p_\mathbf{v})\in\mathbb{R}^n} \frac{(\overline{\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}}\mathfrak{t}_\mathfrak{c})(\kappa_\mathfrak{c}^{-1}(\theta,\mathbf{v}))}{\mathrm{Vol}(S^n)} \\ (\overline{\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}}\mathfrak{t}_\mathfrak{c})(\kappa_\mathfrak{c}^{-1}(\theta,\mathbf{v}))\exp\left(\frac{\imath}{\hbar}[(\theta,\mathbf{v}) - (\tilde\theta,\tilde{\mathbf{v}})]\cdot(p_\theta,p_\mathbf{v})\right)\left(\frac{1+\hbar\mathrm{M}}{1+p_\theta^2+p_\mathbf{v}^2}\right)^k \\ \Big((a_{\kappa_\mathfrak{c}})_t(\theta,\mathbf{v},\tilde\theta,\tilde{\mathbf{v}},p_\theta,p_\mathbf{v};\hbar)\,(\varrho_\mathfrak{c}\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar})\,(\kappa_\mathfrak{c}^{-1}(\tilde\theta,\tilde{\mathbf{v}}))\Big)\,\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\mathbf{v}\mathrm{d}\tilde\theta\mathrm{d}\tilde{\mathbf{v}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\mathbf{v}\end{aligned} \tag{6.5}$$

con el operador M es definido por

$$\mathrm{M} = \frac{1}{\imath}\left(p_\theta\frac{\partial}{\partial\tilde\theta} + p_{v_j}\frac{\partial}{\partial\tilde v_j}\right)\ , \tag{6.6}$$

donde se está tomando la suma sobre índice repetidos.

Note que en el lado derecho de (6.5) tenemos

$$(1+\hbar\mathrm{M})^k((a_{\kappa_\mathfrak{c}})_t\varrho_\mathfrak{c}\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}) = \sum_{s=0}^{k}\sum_{q=0}^{s}\binom{k}{s}\binom{s}{q}\hbar^s\mathrm{M}^{s-q}\left[(a_{\kappa_\mathfrak{c}})_t\varrho_\mathfrak{c}\right]\mathrm{M}^q\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\ . \tag{6.7}$$

De la proposición 2.6, la acción del operador M^q sobre $\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}$ es

$$\mathrm{M}^q\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}(\kappa_{\mathfrak{c}}^{-1}(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}})) = \mathrm{M}^q g\left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\tilde{\mathbf{x}}_{\mathfrak{c}}}}{\hbar}\right) = \sum_{d=1}^{q} F^{\mathfrak{c}}_{d,q}(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}})\frac{1}{\hbar^d}g^{(d)}\left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\tilde{\mathbf{x}}_{\mathfrak{c}}}}{\hbar}\right) \tag{6.8}$$

donde g es definida por (C.1), $\tilde{\mathbf{x}}_{\mathfrak{c}} = \tilde{\mathbf{x}}_{\mathfrak{c}}(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}}) = \kappa_{\mathfrak{c}}^{-1}(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}})$ y

$$F^{\mathfrak{c}}_{d,q}(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}}) = \sum \frac{q!}{p_1!...p_\ell!}\left(\frac{\mathrm{M}^1\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\tilde{\mathbf{x}}_{\mathfrak{c}}}}{1!}\right)^{p_1}\left(\frac{\mathrm{M}^2\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\tilde{\mathbf{x}}_{\mathfrak{c}}}}{2!}\right)^{p_2}...\left(\frac{\mathrm{M}^\ell\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\tilde{\mathbf{x}}_{\mathfrak{c}}}}{\ell!}\right)^{p_\ell} \tag{6.9}$$

Con la suma corriendo sobre el conjunto de números que satisfacen las condiciones: $p_1 + 2p_2 + \ldots + \ell p_\ell = q, \quad d = p_1 + p_2 + \ldots + p_\ell$.

Por otro lado si $\mathbf{x} \in W$ entonces $|\mathbf{x}\cdot\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})| \leq |\mathbf{x}|\,|\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})| = |\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})| \leq C\mathbf{x}\cdot\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})$. Por lo que para $\mathbf{x}\in W$ podemos usar la expresión asintótica de los estados coherentes $\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}$ (ver proposción 5.7), la estimación de su norma (ecuación (5.3)) y la expresión asintótica de cualquier derivada de g (ver lema C.1).

Por tal motivo, consideremos de manera separada la integración en las variables $(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}})$ en (6.5), en las regiones $\kappa_{\mathfrak{c}}(W\cap U_{\mathfrak{c}})$ y $\kappa_{\mathfrak{c}}(V\cap U_{\mathfrak{c}})$. Llamemosle a dichas integrales $\mathfrak{I}_{W,\mathfrak{c}}$ e $\mathfrak{I}_{V,\mathfrak{c}}$ respectivamente. Así tenemos

$$\frac{\left\langle \mathfrak{t}_{\mathfrak{c}}A_\hbar\varrho_{\mathfrak{c}}\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar},\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\right\rangle_{S^n}}{\|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\|^2} = \mathfrak{I}_{W,\mathfrak{c}} + \mathfrak{I}_{V,\mathfrak{c}}\ .$$

Supongamos que $\boldsymbol{\alpha} = \lambda(\hat{\mathbf{e}}_1 + \imath\hat{\mathbf{e}}_2)$. Mostremos que $\mathfrak{I}_{V,\mathfrak{c}} = \mathrm{O}(\hbar^\infty)$. Sea $(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}}) \in \kappa_{\mathfrak{c}}(V\cap U_{\kappa_{\mathfrak{c}}})$ y $\tilde{\mathbf{x}}_{\mathfrak{c}} = \kappa_{\mathfrak{c}}^{-1}(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}})$. De (C.2)

$$\left|g^{(b)}\left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\tilde{\mathbf{x}}_{\mathfrak{c}}}}{\hbar}\right)\right| = \left|\int_0^1\left[P_1(w)\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\tilde{\mathbf{x}}_{\mathfrak{c}}}}{\hbar} + P_2(w)\right]e^{\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\tilde{\mathbf{x}}_{\mathfrak{c}}}}{\hbar}(1-w^2)}\mathsf{m}(w)\mathrm{d}w\right|$$

con P_1 y P_2 polinomios en la variable w

$$\begin{aligned}
&\leq e^{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|/\hbar}\int_0^1\left|P_1(w)\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\tilde{\mathbf{x}}_{\mathfrak{c}}}}{\hbar} + P_2(w)\right||\mathsf{m}(w)| \\
&\qquad\exp\left(\frac{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}{\hbar}\left[\frac{\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})\cdot\tilde{\mathbf{x}}_{\mathfrak{c}}}{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}(1-w^2) - 1\right]\right)\mathrm{d}w \\
&\leq \frac{C_1}{\hbar}e^{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|/\hbar}e^{\mu|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|/\hbar}
\end{aligned} \tag{6.10}$$

para alguna constante C_1 y $\mu = \frac{1}{C} - 1 < 0$. Esto último es porque $\tilde{\mathbf{x}}_{\mathfrak{c}} = \kappa_{\mathfrak{c}}^{-1}(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}}) \in V$.

De la definición del operador M (ver (6.6)), se puede mostrar que

$$\left|\mathrm{M}^b\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\tilde{\mathbf{x}}_{\mathfrak{c}}}\right| \leq (1 + p_\theta^2 + p_{\mathbf{v}}^2)^{\frac{b}{2}}\left|\mathrm{N}^b\,\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\tilde{\mathbf{x}}_{\mathfrak{c}}}\right|, \tag{6.11}$$

donde $\mathrm{N} = \frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}} + \sum_{j=3}^{n+1} \frac{\partial}{\partial\tilde{v}_j}$. Nótese que la acción de las potencias del operador N sobre $\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\tilde{\mathbf{x}}_{\mathfrak{c}}}$ involucra potencias inversas de $\tilde{r} = (1-\tilde{v}_3^2 - \ldots - \tilde{v}_{n+1}^2)^{1/2}$. Dichas potencias son acotadas en el soporte de $\varrho_{\mathfrak{c}}$, por lo que no tenemos singularidades. De hecho

$$\left|\mathrm{N}^b\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\tilde{\mathbf{x}}_{\mathfrak{c}}}\right| \leq C_1\tilde{r}^{-b} \leq C_1(2\sqrt{n-1})^b$$

para alguna constante C_1. Luego de lo anterior y (6.11)

$$\left|F^{\mathfrak{c}}_{d,q}(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}})\right| \leq C_1\langle(p_\theta,p_{\mathbf{v}})\rangle^d(2\sqrt{n-1})^d\ , \quad \forall\, \kappa^{-1}(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}}) \in \mathrm{sop}(\varrho_{\mathfrak{c}})\ . \tag{6.12}$$

Por otro lado de (6.11) y el hecho de que $a_{\kappa_{\mathfrak{c}}} \in S_{2n}(\langle(p_\theta,p_{\mathbf{v}})\rangle^m)$

$$\left|\mathrm{M}^b\left[(a_{\kappa_{\mathfrak{c}}})_t\varrho_{\mathfrak{c}}\right]\right| \leq \langle(p_\theta,p_{\mathbf{v}})\rangle^b\left|\mathrm{N}^b\left[(a_{\kappa_{\mathfrak{c}}})_t\varrho_{\mathfrak{c}}\right]\right| \leq C_1\langle(p_\theta,p_{\mathbf{v}})\rangle^{b+m}\ . \tag{6.13}$$

Luego de (6.5), (6.7), (6.8)

$$\begin{aligned}|\mathfrak{I}_{V,\mathfrak{c}}| \leq{}& \frac{C_1}{\hbar^n\|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\|^2}\int\limits_{(\theta,\mathbf{v})\in\mathfrak{A}}\ \int\limits_{(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}})\in\kappa_{\mathfrak{c}}(V\cap U_{\mathfrak{c}})}\ \int\limits_{(p_\theta,p_{\mathbf{v}})\in\mathbb{R}^n}\frac{\left|(\overline{\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}}\mathfrak{t}_{\mathfrak{c}})(\kappa_{\mathfrak{c}}^{-1}(\theta,\mathbf{v}))\right|}{(1+p_\theta^2+p_{\mathbf{v}}^2)^k}\\ &\sum_{s=0}^{k}\sum_{q=0}^{s}\hbar^s\left|\mathrm{M}^{s-q}\left[(a_{\kappa_{\mathfrak{c}}})_t(\theta,\mathbf{v},\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}},p_\theta,p_{\mathbf{v}};\hbar)\ \varrho_{\mathfrak{c}}(\kappa_{\mathfrak{c}}^{-1}(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}}))\right]\right|\\ &\sum_{d=1}^{q}\left|F^{\mathfrak{c}}_{d,q}(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}})\right|\frac{1}{\hbar^d}\left|g^{(d)}\left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\kappa_{\mathfrak{c}}^{-1}(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}})}}{\hbar}\right)\right|\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_{\mathbf{v}}\mathrm{d}\tilde{\theta}\mathrm{d}\tilde{\mathbf{v}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\mathbf{v}\ .\end{aligned}$$

Utilizando lo obtenido en (6.10), (6.12) y (6.13)

$$\begin{aligned}|\mathfrak{I}_{V,\mathfrak{c}}| \leq{}& C_1\frac{e^{\mu|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|/\hbar}}{\hbar^n\|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\|^2}\int\limits_{(\theta,\mathbf{v})\in\mathfrak{A}}\ \int\limits_{(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}})\in\kappa_{\mathfrak{c}}(V\cap U_{\mathfrak{c}})}\ \int\limits_{(p_\theta,p_{\mathbf{v}})\in\mathbb{R}^n}\frac{\left|(\overline{\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}}\mathfrak{t}_{\mathfrak{c}})(\kappa_{\mathfrak{c}}^{-1}(\theta,\mathbf{v}))\right|}{(1+p_\theta^2+p_{\mathbf{v}}^2)^k}\\ &\sum_{s=0}^{k}\sum_{q=0}^{s}\sum_{d=1}^{q}\frac{(2\sqrt{n-1})^d e^{\frac{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}{\hbar}}}{(1+p_\theta^2+p_{\mathbf{v}}^2)^{\frac{1}{2}(q-s-m-d)}}\frac{\hbar^s}{\hbar^{d+1}}\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_{\mathbf{v}}\mathrm{d}\tilde{\theta}\mathrm{d}\tilde{\mathbf{v}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\mathbf{v}\ .\end{aligned}$$

De la aproximación de $\|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\|$ obtenida en (5.3) se tiene

$$\begin{aligned}|\mathfrak{I}_{V,\mathfrak{c}}| &\leq C_1\frac{e^{\mu|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|/\hbar}}{\hbar^{\frac{5n+2}{4}}\|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\|}\int\limits_{(\theta,\mathbf{v})\in\mathfrak{A}}\ \int\limits_{(p_\theta,p_{\mathbf{v}})\in\mathbb{R}^n}\frac{\left|(\overline{\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}}\mathfrak{t}_{\mathfrak{c}})(\kappa_{\mathfrak{c}}^{-1}(\theta,\mathbf{v}))\right|}{(1+p_\theta^2+p_{\mathbf{v}}^2)^{\frac{k-m}{2}}}\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_{\mathbf{v}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\mathbf{v}\\ &\leq C_1\frac{e^{\mu|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|/\hbar}}{\hbar^{\frac{5n+2}{4}}}\ .\end{aligned}$$

La última desigualdad es obtenida por la desigualdad de Cauchy Schwartz y el hecho de que $n < k - m$. De aquí que $\mathfrak{I}_{V,\mathfrak{c}} = \mathrm{O}(\hbar^\infty)$. O bien

$$\lim_{\hbar\to 0} \mathfrak{I}_{V,\mathfrak{c}} = 0 \ , \quad \mathfrak{c} = 1, \ldots, n. \tag{6.14}$$

Para analizar la integral $\mathfrak{I}_{W,\mathfrak{c}}$, nótese que $\mathbf{x}_\mathfrak{c} = \kappa_\mathfrak{c}^{-1}(\theta, \mathbf{v})$ y $\tilde{\mathbf{x}}_\mathfrak{c} = \kappa_\mathfrak{c}^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{\mathbf{v}})$ pertenecen a W. Luego $|\mathbf{x}_\mathfrak{c} \cdot \mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})| \leq C\mathbf{x}_\mathfrak{c} \cdot \mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})$ y $|\tilde{\mathbf{x}}_\mathfrak{c} \cdot \mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})| \leq C\tilde{\mathbf{x}}_\mathfrak{c} \cdot \mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})$. Así del lema C.1, la proposición 5.7, (5.3), (6.5), (6.7) y (6.8) tenemos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_{W,\mathfrak{c}} = {} & \frac{\hbar|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|^{\frac{n}{2}-1}(n-1)}{2(\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}(2\pi\hbar)^n e^{\frac{2|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}{\hbar}}} \int\limits_{(\theta,\mathbf{v})\in\kappa_\mathfrak{c}(W\cap U_\mathfrak{c})} \int\limits_{(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}})\in\kappa_\mathfrak{c}(W\cap U_\mathfrak{c})} \int\limits_{(p_\theta,p_\mathbf{v})\in\mathbb{R}^n} \left(\frac{2\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}_\mathfrak{c}}{\hbar(n-1)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \mathfrak{t}_\mathfrak{c}(\mathbf{x}_\mathfrak{c}) \exp\left(\frac{\imath}{\hbar}[(\theta,\mathbf{v}) - (\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}})]\cdot(p_\theta,p_\mathbf{v})\right) \exp\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}_\mathfrak{c}}{\hbar}\right) \sum_{s=0}^{k}\sum_{q=0}^{s}\sum_{d=1}^{q} \binom{k}{s}\binom{s}{q} \\
& \frac{\hbar^{s-d}}{(1+p_\theta^2+p_\mathbf{v}^2)^k}\, \mathrm{M}^{s-q}\left[(a_{\kappa_\mathfrak{c}})_t \varrho_\mathfrak{c}\right] F_{d,q}^\mathfrak{c}(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}}) \left(\frac{2\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\tilde{\mathbf{x}}_\mathfrak{c}}}{\hbar(n-1)}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\overline{\boldsymbol{\alpha}\cdot\tilde{\mathbf{x}}_\mathfrak{c}}}{\hbar}\right) \\
& \big[1+\mathrm{O}(\hbar)\big] \mathrm{d}p_\theta \mathrm{d}p_\mathbf{v} \mathrm{d}\tilde{\theta} \mathrm{d}\tilde{\mathbf{v}} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\mathbf{v}\ .
\end{aligned}$$

Como se está tomando el caso particular $\boldsymbol{\alpha} = \lambda(\hat{\mathbf{e}}_1 + \imath\hat{\mathbf{e}}_2)$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_{W,\mathfrak{c}} = {} & \frac{\lambda^{\frac{n}{2}-1}}{(2\pi\hbar)^n(\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{(\theta,\mathbf{v})\in\kappa_\mathfrak{c}(W\cap U_\mathfrak{c})} \int\limits_{(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}})\in\kappa_\mathfrak{c}(W\cap U_\mathfrak{c})} \int\limits_{(p_\theta,p_\mathbf{v})\in\mathbb{R}^n} \mathfrak{t}_\mathfrak{c}(\kappa_\mathfrak{c}^{-1}(\theta,\mathbf{v})) \\
& \exp\left(\frac{\imath}{\hbar}\mathfrak{f}_\mathfrak{c}(\theta,\mathbf{v},\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}},p_\theta,p_\mathbf{v})\right) \left(\lambda\mathfrak{f}^\mathfrak{c}(-\tilde{\theta},-\tilde{\mathbf{v}}\right)^{\frac{1}{2}} (\lambda\mathfrak{f}^\mathfrak{c}(\theta,\mathbf{v}))^{\frac{1}{2}} \sum_{s=0}^{k}\sum_{q=0}^{s}\sum_{d=1}^{q} \\
& \binom{k}{s}\binom{s}{q} \frac{\hbar^{s-d}}{(1+p_\theta^2+p_\mathbf{v}^2)^k} \mathrm{M}^{s-q}\left[(a_{\kappa_\mathfrak{c}})_t(\theta,\mathbf{v},\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}},p_\theta,p_\mathbf{v})\varrho_\mathfrak{c}(\kappa_\mathfrak{c}^{-1}(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}}))\right] \\
& F_{d,q}^\mathfrak{c}(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}})\big[1+\mathrm{O}(\hbar)\big] \mathrm{d}p_\theta \mathrm{d}p_\mathbf{v} \mathrm{d}\tilde{\theta} \mathrm{d}\tilde{\mathbf{v}} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\mathbf{v}\ .
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Donde

$$\mathfrak{f}_\mathfrak{c}(\theta,\mathbf{v},\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}},p_\theta,p_\mathbf{v}) = 2\imath\lambda + p_\theta(\theta-\tilde{\theta}) + p_\mathbf{v}(\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}) - \imath\lambda[\mathfrak{f}^\mathfrak{c}(\theta,\mathbf{v}) + \mathfrak{f}^\mathfrak{c}(-\tilde{\theta},-\tilde{\mathbf{v}})]\ ,$$

con

$$\mathfrak{f}^\mathfrak{c}(\theta,\mathbf{v}) = \begin{cases} re^{\imath\theta}, & \mathfrak{c} = 1\ , \\ -r\cos(\theta) + \imath v_{\mathfrak{c}+1}\ , & \mathfrak{c} = 2,\ldots,n\ . \end{cases}$$

Afirmamos que $\lim_{\hbar\to 0}\mathfrak{I}_{W,\mathfrak{c}} = 0$ para $\mathfrak{c} = 2,\ldots,n$. Para ver ésto tenemos de (6.15), (6.12) y (6.13) que

$$\begin{aligned}|\mathfrak{I}_{W,\mathfrak{c}}| \leq \frac{C_1}{\hbar^{3n/2}} & \int_{(\theta,\mathbf{v})\in\kappa_{\mathfrak{c}}(W\cap U_{\mathfrak{c}})}\int_{(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}})\in\kappa_{\mathfrak{c}}(W\cap U_{\mathfrak{c}})}\int_{(p_\theta,p_{\mathbf{v}})\in\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{\lambda}{\hbar}(2+r\cos(\theta)+\tilde{r}\cos(\tilde{\theta}))}}{\langle(p_\theta,p_{\mathbf{v}})\rangle^{2k}} \\ & \sum_{s=0}^{k}\sum_{q=0}^{s}\sum_{d=1}^{q}\frac{\hbar^{s-d}(2\sqrt{n-1})^d}{\langle(p_\theta,p_{\mathbf{v}})\rangle^{q-s-m-d}}[1+\mathrm{O}(\hbar)]\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_{\mathbf{v}}\mathrm{d}\tilde{\theta}\mathrm{d}\tilde{\mathbf{v}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\mathbf{v} \\ \leq & \frac{C_1}{\hbar^{3n/2}}\exp\left(-\frac{2\lambda}{\hbar}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{n-1}}\right)\right)[1+\mathrm{O}(\hbar)]\ .\end{aligned}$$

De aquí que

$$\lim_{\hbar\to 0}\mathfrak{I}_{W,\mathfrak{c}} = 0\ , \qquad \mathfrak{c} = 2,\ldots,n\ . \tag{6.16}$$

Analicemos ahora $\mathfrak{I}_{W,1}$. Dado que $a_{\kappa_1}\in \mathrm{S}_{2n}(\langle(p_\theta,p_{\mathbf{v}})\rangle^m)$ es un símbolo clásico, existe una sucesión $(a_\kappa^{(j)})\subset \mathrm{S}_{2n}(\langle(p_\theta,p_{\mathbf{v}})\rangle^m)$ (que no depende de $\hbar$, ver definición B.3) tal que si $N > 3n/2$ y

$$\Psi_N = \sum_{\ell=0}^{N}\hbar^\ell a_\kappa^{(\ell)}\ .$$

Entonces para cualquier $\mathbf{b}\in\mathbb{Z}_+^n$, existe $\hbar_{N,\mathbf{b}} > 0$ y $C_{N,\mathbf{b}}$ tales que

$$\left|\partial^{\mathbf{b}}\left(a_{\kappa_1}-\Psi_N\right)\right| \leq C_{N,\mathbf{b}}\ \hbar^N\langle(p_\theta,p_{\mathbf{v}})\rangle^m \tag{6.17}$$

uniformemente en $\mathbb{R}^{2n}\times(0,\hbar_{N,\mathbf{b}})$.

Prosigamos con el análisis de $\mathfrak{I}_{W,1}$. Sean $\mathfrak{I}_{W,1}^1$ e $\mathfrak{I}_{W,1}^2$ igual al lado derecho de (6.15) (con $\mathfrak{c} = 1$) solo que en lugar de poner a_{κ_1} se pone $a_{\kappa_1}-\Psi_N$ y Ψ_N respectivamente. Nótese que $\mathfrak{I}_{W,1} = \mathfrak{I}_{W,1}^1+\mathfrak{I}_{W,1}^2$. Afirmamos que $\lim_{\hbar\to 0}\mathfrak{I}_{W,1}^1 = 0$. En efecto de (6.15), (6.12), (6.13) y (6.17)

$$\begin{aligned}\left|\mathfrak{I}_{W,1}^1\right| \leq \frac{C_1}{\hbar^{3n/2}} & \int_{(\theta,\mathbf{v})\in\kappa_1(W\cap U_1)}\int_{(\tilde{\theta},\tilde{\mathbf{v}})\in\kappa_1(W\cap U_1)}\int_{(p_\theta,p_{\mathbf{v}})\in\mathbb{R}^n} \frac{e^{\frac{\lambda}{\hbar}(r\cos(\theta)+\tilde{r}\cos(\tilde{\theta})-2)}}{\langle(p_\theta,p_{\mathbf{v}})\rangle^{2k}} \\ & \sum_{s=0}^{k}\sum_{q=0}^{s}\sum_{d=1}^{q}\frac{\hbar^{s-d}\hbar^N(2\sqrt{n-1})^d}{\langle(p_\theta,p_{\mathbf{v}})\rangle^{q-s-m-d}}[1+\mathrm{O}(\hbar)]\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_{\mathbf{v}}\mathrm{d}\tilde{\theta}\mathrm{d}\tilde{\mathbf{v}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\mathbf{v} \\ \leq & C_1\hbar^{N-3n/2}[1+\mathrm{O}(\hbar)]\ .\end{aligned}$$

De aquí que

$$\lim_{\hbar\to 0}\mathfrak{I}_{W,1}^1 = 0\ . \tag{6.18}$$

Finalmente utilicemos el método de fase estacionaria (ver (2.3)) para calcular $\mathfrak{I}^2_{W,1}$. Primero tenemos que

$$\mathrm{Im}(\mathfrak{f}_1) = -\lambda r \cos(\theta) - \lambda \tilde{r} \cos(\tilde{\theta}) + 2\lambda \geq 0 \ .$$

Además

$$\frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial \theta} = p_\theta + \lambda r \mathrm{e}^{\imath\theta} \quad , \qquad \frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial \tilde{\theta}} = -p_\theta - \lambda \tilde{r} \mathrm{e}^{-\imath\tilde{\theta}} \quad , \qquad \frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial p_\theta} = \theta - \tilde{\theta} \quad ,$$
$$\frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial v_b} = p_{v_b} + \frac{\imath\lambda}{r} v_b \mathrm{e}^{\imath\theta}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial \tilde{v}_b} = -p_{v_b} + \frac{\imath\lambda}{\tilde{r}} \tilde{v}_b \mathrm{e}^{-\imath\tilde{\theta}}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial p_{v_b}} = v_b - \tilde{v}_b \ .$$

Así el único punto crítico (que contribuye) de $\mathfrak{f}_1$ es

$$\boldsymbol{\vartheta}_0 := (\theta_0, \mathbf{v}_0, \tilde{\theta}_0, \tilde{\mathbf{v}}_0, p_{\theta_0}, p_{\mathbf{v}_0}) = (0, \mathbf{0}, 0, \mathbf{0}, -\lambda, \mathbf{0}) \ .$$

También se puede mostrar que

$$\det \mathfrak{f}_1''(\boldsymbol{\vartheta}_0) = \det \begin{pmatrix} \imath\lambda & 0 & \mathbf{0}_{1,n-1} & \mathbf{0}_{1,n-1} & 1 & \mathbf{0}_{1,n-1} \\ 0 & \imath\lambda & \mathbf{0}_{1,n-1} & \mathbf{0}_{1,n-1} & -1 & \mathbf{0}_{1,n-1} \\ \mathbf{0}_{n-1,1} & \mathbf{0}_{n-1,1} & \imath\lambda\mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{0}_{n-1} & \mathbf{0}_{n-1,1} & \mathbf{I}_{n-1} \\ \mathbf{0}_{n-1,1} & \mathbf{0}_{n-1,1} & \mathbf{0}_{n-1} & \imath\lambda\mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{0}_{n-1,1} & -\mathbf{I}_{n-1} \\ 1 & -1 & \mathbf{0}_{1,n-1} & \mathbf{0}_{1,n-1} & 0 & \mathbf{0}_{1,n-1} \\ \mathbf{0}_{n-1,1} & \mathbf{0}_{n-1,1} & \mathbf{I}_{n-1} & -\mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{0}_{n-1,1} & \mathbf{0}_{n-1} \end{pmatrix} = (-2\imath\lambda)^n \ ,$$

donde $\mathbf{0}_{b,c}$ es es la matríz de b filas y c columnas con entradas iguales a 0, $\mathbf{0}_{n-1} = \mathbf{0}_{n-1,n-1}$ e $\mathbf{I}_{n-1}$ es la matríz identidad de $n-1$ filas y columnas. De aquí que

$$\left[\det\left(\frac{\mathfrak{f}_1''(\boldsymbol{\vartheta}_0)}{2\pi\imath\hbar}\right)\right]^{-1/2} = \left[\frac{(-2\imath\lambda)^n}{(2\pi\imath\hbar)^{3n}}\right]^{-1/2} = \frac{2^n(\pi\hbar)^{3n/2}}{\lambda^{n/2}} \ .$$

Dado que $\mathfrak{f}_1(\theta_0, \mathbf{v}_0, \tilde{\theta}_0, \tilde{\mathbf{v}}_0, p_{\theta_0}, p_{\mathbf{v}_0}) = 0$ y $\mathfrak{t}_1(\kappa_1^{-1}(\theta_0, \mathbf{v}_0)) = \mathfrak{t}_1(\hat{\mathbf{e}}_1) = 1$. De (6.15) y el método de fase estacionaria

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}^2_{W,1} &= \sum_{\ell=0}^{N}\sum_{s=0}^{k}\sum_{q=0}^{s}\sum_{d=1}^{q} \binom{k}{s}\binom{s}{q} \frac{\hbar^{s-d+\ell}}{(1+\lambda^2)^k} F^1_{d,q}(\tilde{\theta}_0, \tilde{\mathbf{v}}_0) \\ &\qquad \mathrm{M}^{s-q}\left[(a^{(\ell)}_{\kappa_1})_t \varrho_1)\right]\Big|_{pc}\left[1 + \mathrm{O}(\hbar)\right] + \mathrm{O}(\hbar) \\ &= \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}\frac{F^1_{s,s}(\tilde{\theta}_0, \tilde{\mathbf{v}}_0)}{(1+\lambda^2)^k}(a^{(0)}_{\kappa_1})_t\big|_{pc}\, \varrho_1(\kappa_1^{-1}(\tilde{\theta}_0, \tilde{\mathbf{v}}_0)) + \mathrm{O}(\hbar) \end{aligned} \tag{6.19}$$

donde con $(\cdot)\big|_{pc}$ queremos decir la evaluación de $(\cdot)$ en el punto crítico $\boldsymbol{\vartheta}_0$.

Analicemos $F^1_{s,s}(\tilde{\theta}_0, \tilde{\mathbf{v}}_0)$. De la definición del operador M (ver (6.6)) tenemos

$$\mathrm{M}^r \overline{\boldsymbol{\alpha} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_1}\bigg|_{pc} = (\imath\lambda)^r \frac{\partial^r}{\partial \tilde{\theta}^r} \lambda e^{-\imath\tilde{\theta}}\bigg|_{\tilde{\theta}=\tilde{\theta}_0} = \lambda^{r+1} \ .$$

Además recordemos que $F^1_{s,s}$ es igual a una suma que corre en el conjunto de números que cumplen que $p_1 + \ldots + p_\ell = s = p_1 + 2p_2 + \ldots + \ell p_\ell$ (ver (6.9)). Por lo cual se debe de tener que $p_1 = s$ y $p_2 = \ldots = p_\ell = 0$. De aquí que

$$F^1_{s,s}(\tilde{\theta}_0, \tilde{\mathbf{v}}_0) = (\lambda^2)^s \ . \tag{6.20}$$

Así de (6.19), (6.20) y el hecho que $\varrho_1(\kappa_1^{-1}(\tilde{\theta}_0, \tilde{\mathbf{v}}_0)) = \varrho_1(\hat{\mathbf{e}}_1) = 1$, se obtiene

$$\mathfrak{I}^2_{W,1} = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} \frac{(\lambda^2)^s}{(1+\lambda^2)^k} a^{(0)}_{\kappa_1}(0, \mathbf{0}, -\lambda, \mathbf{0}) + \mathrm{O}(\hbar) \ .$$

De la definición de símbolo principal de $A_\hbar$ (ver (B.3))

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}^2_{W,1} &= \wp(A_\hbar)(\kappa_1^{-1}(0,\mathbf{0}), \kappa_1^*(-\lambda, \mathbf{0})) + \mathrm{O}(\hbar) \\ &= \wp(A_\hbar)\,(\hat{\mathbf{e}}_1, -\lambda\hat{\mathbf{e}}_2) + \mathrm{O}(\hbar) \ . \end{aligned} \tag{6.21}$$

Por lo tanto de (6.1), (6.3), (6.14), (6.16), (6.18) y (6.21)

$$\begin{aligned} \lim_{\hbar\to 0} \widetilde{\mathrm{M}}_\hbar(\lambda(\hat{\mathbf{e}}_1 + \imath\hat{\mathbf{e}}_2)) &= \lim_{\hbar\to 0} \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{\langle \mathfrak{t}_\mathfrak{c} A_\hbar \varrho_\mathfrak{c} \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}, \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\rangle_{S^n}}{\|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\|} \\ &= \lim_{\hbar\to 0} \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} [\mathfrak{I}_{V,\mathfrak{c}} + \mathfrak{I}_{W,\mathfrak{c}}] \\ &= \lim_{\hbar\to 0} [\mathfrak{I}^1_{W,1} + \mathfrak{I}^2_{W,1}] \\ &= \wp(A_\hbar)\,(\sigma_n(\lambda(\hat{\mathbf{e}}_1 + \imath\hat{\mathbf{e}}_2))) \ . \end{aligned} \tag{6.22}$$

Demostremos el caso general. Sea $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^n - \{0\}$, existe $R \in \mathrm{SO}(n+1)$ tal que $\boldsymbol{\alpha} = \lambda(R\hat{\mathbf{e}}_1 + \imath R\hat{\mathbf{e}}_2)$ con $\lambda = |\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|$. Sea $T_R : L^2(S^n) \to L^2(S^n)$ definido por

$$T_R\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(R^{-1}\mathbf{x}) \ , \quad \text{para} \ \ \Psi \in L^2(S^n) \ , \qquad \mathbf{x} \in S^n \ .$$

Por la invarianza del producto interno en $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar} = T_R \Phi_{\lambda(\hat{\mathbf{e}}_1 + \imath\hat{\mathbf{e}}_2),\hbar} \ .$$

Además de (6.1)

$$\widetilde{\mathrm{M}}_\hbar(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\langle A_\hbar \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}, \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\rangle_{S^2}}{\|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\|^2}$$
$$= \frac{\left\langle T_{R^{-1}} A_\hbar T_R \Phi_{\lambda(\hat{\mathbf{e}}_1 + \imath \hat{\mathbf{e}}_2),\hbar}, \Phi_{\lambda(\hat{\mathbf{e}}_1 + \imath \hat{\mathbf{e}}_2),\hbar}\right\rangle_{S^2}}{\|\Phi_{\lambda(\hat{\mathbf{e}}_1 + \imath \hat{\mathbf{e}}_2),\hbar}\|^2} \tag{6.23}$$

y la conclusión se sigue de la siguiente

Proposición 6.2 *Sean $R \in \mathrm{SO}(n+1)$ y $A_\hbar$ operador pseudo-diferencial sobre S^n. Entonces $T_{R^{-1}} A_\hbar T_R$ es un operador pseudo-diferencial sobre S^n con símbolo principal*

$$\wp(T_{R^{-1}} A_\hbar T_R)(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = \wp(A_\hbar)(R\mathbf{x}, (R^{-1})^* \boldsymbol{\eta}) \ , \qquad \forall\ (\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \in T^*(S^n).$$

Demostración.

Sean $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \in T^*(S^n)$ y (U_τ, τ) cualquier carta tal que $\mathbf{x} \in U_\tau$. Denotemos por $(U_{\tilde{\tau}}, \tilde{\tau})$ la carta definida por $U_{\tilde{\tau}} = RU_\tau$ y $\tilde{\tau} = \tau \circ R^{-1}$.

Sean $u \in C^\infty(S^n)$ y $\phi, \psi \in C_0^\infty(U_\tau)$. Denotemos por $\tilde{u} = T_R u$, $\tilde{\psi} = T_R \psi$ y $\tilde{\phi} = T_R \phi$. Nótese que $\tilde{\psi}, \tilde{\phi} \in C_0^\infty(U_{\tilde{\tau}})$. Dado que $A_\hbar$ es un operador pseudo-diferencial, se tiene de (B.1) que

$$\begin{aligned}(\psi T_{R^{-1}} A_\hbar T_R(\phi u))(\mathbf{x}) &= (\tilde{\psi} A_\hbar \tilde{\phi} \tilde{u})(R\mathbf{x}) \\ &= \left[\tilde{\psi}\ (\tilde{\tau})^* \mathrm{Op}_\hbar^t(a_{\tilde{\tau}})(\tilde{\tau}^{-1})^*(\tilde{\phi}\tilde{u})\right](R\mathbf{x}) \\ &= \left[\psi \tau^* \mathrm{Op}_\hbar^t(a_{\tilde{\tau}})(\tau^{-1})^*(\phi u)\right](\mathbf{x}) \ .\end{aligned}$$

Lo que implica que $T_{R^{-1}} A_\hbar T_R$ es un operador pseudo-diferencial sobre S^n, con símbolo principal (ver (B.3))

$$\begin{aligned}\wp(T_{R^{-1}} A_\hbar T_R)(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) &= a_{\tilde{\tau}}^{(0)}(\tau\mathbf{x}, (\tau^{-1})^* \boldsymbol{\eta}) \\ &= a_{\tilde{\tau}}^{(0)}(\tilde{\tau} R\mathbf{x}, (\tilde{\tau}^{-1})^*(R^{-1})^* \boldsymbol{\eta}) \\ &= \wp(A_\hbar)(R\mathbf{x}, (R^{-1})^* \boldsymbol{\eta}) \ .\end{aligned}$$

■

Prosiguiendo con la demostración del teorema, tenemos de (6.22), (6.23) y la proposición 6.2

$$\begin{aligned}\lim_{\hbar \to 0} \widetilde{\mathrm{M}}_\hbar(\boldsymbol{\alpha}) &= \wp(T_{R^{-1}} A_\hbar T_R)(\hat{\mathbf{e}}_1, -\lambda \hat{\mathbf{e}}_2)) \\ &= \wp(A_\hbar) \left(\frac{\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})}{|\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha})|}, -(R^{-1})^* \lambda \hat{\mathbf{e}}_2 \right) \\ &= \wp(A_\hbar)(\sigma_n(\boldsymbol{\alpha})) \ .\end{aligned}$$

■

Para finalizar este capítulo probaremos un teorema tipo Egorov que relaciona el símbolo principal de un operador pseudo-diferencial $A_\hbar$ con dominio en $L^2(S^n)$, $n = 2, 3, 5$ con el símbolo de Berezin del operador $\mathbf{B}_{S^n} A_\hbar (\mathbf{B}_{S^n})^{-1}$. Dicha relación es a través de la transformación $\mathcal{C}_{(n,m)}$ definida en (A.24).

Teorema 6.3 *Sea $A_\hbar$ operador pseudo-diferencial con dominio en $L^2(S^n)$, $n = 2, 3, 5$. Entonces para $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^m - \{0\}$, $m = 2, 4, 8$ respectivamente, se tiene*

$$\lim_{\hbar \to 0} \frac{\left\langle \mathbf{B}_{S^n} A_\hbar (\mathbf{B}_{S^n})^{-1} \mathbf{Q}_m^{(\hbar)}(\cdot, \mathbf{w}), \mathbf{Q}_m^{(\hbar)}(\cdot, \mathbf{w}) \right\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^m}}}{\left\langle \mathbf{Q}_m^{(\hbar)}(\cdot, \mathbf{w}), \mathbf{Q}_m^{(\hbar)}(\cdot, \mathbf{w}) \right\rangle_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}^m}}} = \wp(A_\hbar) \circ \mathcal{C}_{(n,m)}(\mathbf{w}) \ ,$$

donde $\wp(A_\hbar)$ es el símbolo principal del operador $A_\hbar$ (ver definición B.7 y comentario B.8), $\mathcal{C}_{(n,m)}$ es la transformación canónica que identifica $\mathbb{C}^m - \{0\}$ con el haz cotangente $T^*S^n - \{0\}$ (ver (A.24)) y $\mathbf{Q}_m^{(\hbar)}(\cdot, \mathbf{w})$ es el núcleo reproductor del espacio $\mathcal{F}_m$ (ver teorema 4.19).

Demostración.

Sea $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^m - \{0\}$, $\mathrm{M}_\hbar = \mathbf{B}_{S^n} A_\hbar (\mathbf{B}_{S^n})^{-1}$ y $\boldsymbol{\alpha} = \rho_{(n,m)}(\mathbf{w})$. De la definición 2.5, el lema 5.10 y el hecho de que $\mathbf{B}_{S^n}$ es un operador unitario tenemos

$$\widetilde{\mathrm{M}_\hbar}(\mathbf{w}) = \frac{\langle A_\hbar \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}, \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar} \rangle_{S^n}}{\|\Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar}\|^2} \ .$$

Nótese que el lado derecho de la igualdad anterior es igual al lado derecho de (6.1). Así por (6.1), el teorema 6.1 y (A.24)

$$\lim_{\hbar \to 0} \widetilde{\mathrm{M}_\hbar}(\mathbf{w}) = \wp(A_\hbar)(\sigma_n(\boldsymbol{\alpha})) = \wp(A_\hbar)(\mathcal{C}_{(n,m)}(\mathbf{w})) \ .$$

■

.

Apéndice A

Transformación canónica.

El problema de Kepler en dimensión $n = 2, 3, 5$ es definido como el movimiento de una partícula en $\mathbb{R}^n$ con posición $\mathbf{x}$ y momento $\mathbf{p} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$ bajo la acción de la fuerza radial $\mathbf{F} = -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$. Estamos asumiendo unidades en la cual los valores numéricos para la masa de la partícula y la constante que aparece en la expresión para la fuerza gravitacional son igual a uno.

La ecuación de Newton dada para la dinámica de este problema es

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}.$$

Note que la ecuación anterior tiene una singularidad en el origen. Dicha singularidad fue estudiada y regularizada de dos formas diferentes

a) Levi-Civita [19], Kustaanheimo y Stiefel [18] y Davtyan [5] estudiaron el caso $n = 2, 3, 5$ dimensional respectivamente. Ellos consideraron extensiones de las fibraciones de Hopf $S^1 \mapsto S^1$, $S^3 \mapsto S^2$, $S^7 \mapsto S^4$. Esta regularización será presentada en la sección A.1.

b) Considerando una extensión de la proyección estereográfica entre $\mathbb{R}^n$ y la n esfera S^n, Moser [22] regularizó el problema de Kepler para cualquier dimensión $n \geq 1$. Esta regularización va a ser presentada en la sección A.2

Nos restringiremos al caso de energía negativa $E = |\mathbf{p}|^2/2 - 1/|\mathbf{x}|$. En las dos regularizaciones se considera una reparametrización del tiempo. La intuición básica es la siguiente: dado que la energía es una cantidad conservada, cuando la partícula se mueve en una línea recta hacia el origen (órbita de colisión), la velocidad la partícula (momento $|\mathbf{p}|$) se debe de ir a infinito. Sin embargo, por la conservación de la energía, el producto $|\mathbf{x}|\ |\mathbf{p}|$ tiene un límite bien definido cuando la partícula se aproxima al origen:

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to 0} |\mathbf{x}|\ |\mathbf{p}| = \lim_{|\mathbf{x}|\to 0} |\mathbf{x}|\ \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}\right| = 0.$$

Así el nuevo parámetro del tiempo s es introducido vía la siguiente ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} = |\mathbf{x}|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}. \tag{A.1}$$

De aquí que la velocidad de la partícula (cuando ésta se aproxima al origen) es finita e igual a cero respecto al tiempo s.

A.1 Regularización del oscilador armónico

Sean $N = (T^*(\mathbb{R}^n - \{0\}), \omega)$ y $M = (T^*(\mathbb{R}^m - \{0\}), \nu)$ espacios simplécticos con formas simplécticas $\omega = \mathrm{d}\mathbf{p} \wedge \mathrm{d}\mathbf{x}$ y $\nu = 4\mathrm{d}\mathbf{v} \wedge \mathrm{d}\mathbf{u}$.

En esta sección mostremos una transformación canónica que lleva al sistema Hamiltoniano del problema de Kepler $n = 2, 3, 5$ dimensional $[N,\ H = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 - (1/|\mathbf{x}|)]$ en una adecuada reducción del sistema Hamiltoniano $[M,\ H' = (1/|\mathbf{u}|^2)(2|\mathbf{v}|^2 - 1)]$ con $m = 2, 4, 8$, respectivamente. Más aún, se mostrará que para energía negativa $H = E$ y después de la reparametrización del tiempo (A.1), el flujo Hamiltoniano de H es transformado en el flujo Hamiltoniano de la reducción de un oscilador armónico isotrópico $K = \frac{1}{2}(|\mathbf{v}|^2 + k|\mathbf{u}|^2)$ con fuerza $k = -E/2$ y obtenido del flujo Hamiltoniano H'. Como el flujo K no tiene singularidades, diremos que hemos logrado una regularización del problema de Kepler $n = 2, 3, 5$ dimensional.

Consideremos las siguientes transformaciones obtenidas como extensión de las fibraciones de Hopf

$$\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathbf{u})\mathbf{u}, \tag{A.2}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. En los casos $n = 3, 5$ se está tomando $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, 0)$ y $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5, 0, 0, 0)$ como elementos de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^8$ respectivamente para que (A.2) tenga sentido. La matriz $m \times m$ $\mathcal{A}(\mathbf{u})$ es dada por

Para el problema de Kepler 2-dimendsional.

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_2 & u_1 \\ u_1 & -u_2 \end{pmatrix}.$$

Para el problema de Kepler 3-dimendsional.

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ -u_4 & u_3 & u_2 & -u_1 \\ u_1 & u_2 & -u_3 & -u_4 \\ u_2 & -u_1 & u_4 & -u_3 \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

Para el problema de Kepler 5-dimendsional.

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ -u_6 & u_5 & -u_8 & u_7 & u_2 & -u_1 & u_4 & -u_3 \\ -u_7 & u_8 & u_5 & -u_6 & u_3 & -u_4 & -u_1 & u_2 \\ -u_8 & -u_7 & u_6 & u_5 & u_4 & u_3 & -u_2 & -u_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & -u_5 & -u_6 & -u_7 & -u_8 \\ u_2 & -u_1 & -u_4 & u_3 & u_6 & -u_5 & -u_8 & u_7 \\ u_3 & u_4 & -u_1 & -u_2 & u_7 & u_8 & -u_5 & -u_6 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 & u_8 & -u_7 & u_6 & -u_5 \end{pmatrix}. \tag{A.4}$$

Nótese que las filas (columnas) de la matriz $\mathcal{A}(\mathbf{u})$ son ortogonales entre ellas. Además de que se satisface la relación $\mathcal{A}(\mathbf{u})^t\mathcal{A}(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2\mathbf{I}$ (con $\mathcal{A}(\mathbf{u})^t$ la transpuesta de $\mathcal{A}(\mathbf{u})$ e $\mathbf{I}$ la matriz identidad). De aquí que $\mathcal{A}(\mathbf{u})$ es invertible con inversa $\mathcal{A}(\mathbf{u})^{-1} = \mathcal{A}(\mathbf{u})^t/|\mathbf{u}|^2$ cuando $|\mathbf{u}| \neq 0$.

Note también que la transformación $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{x}$ definida en (A.2) no es uno a uno. Dado $\mathbf{x} \neq 0$ en $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 5$, su imagen inversa tiene la siguiente propiedad: dado un elemento $\mathbf{u}$ de la fibra asociada de $\mathbf{x}$, se pueden obtener todos los elementos de la misma fibra dejando actuar el grupo $\mathcal{G}_m = \mathbb{Z}_2 \equiv \{1, -1\}$, S^1 o SU(2) sobre $\mathbf{u}$ para los casos $m = 2, 4, 8$ respectivamente.

La acción de $\mathcal{G}_m$ es definida por

$$\mathbf{u}' = \mathbf{T}(g)\mathbf{u}\ , \qquad g \in \mathcal{G}_m,$$

con $\mathbf{T}(g)$ dado por

Caso $m = 2$.

$$\mathbf{T}(g) = \pm 1.$$

Caso $m = 4$. Sea $g = \exp(\imath\psi) \in S^1$

$$\mathbf{T}(g) = \mathbf{C}^\dagger \mathbf{U}(g)\mathbf{C},$$

donde $\mathbf{C}^\dagger$ denota el adjunto de la siguiente matriz unitaria

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\imath & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\imath \\ 0 & 0 & 1 & \imath \\ -\imath & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.5}$$

y

$$\mathbf{U}(g) = \begin{pmatrix} \exp(-\imath\psi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-\imath\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\imath\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(\imath\psi) \end{pmatrix}.$$

Caso $m = 8$. Para $g \in \mathrm{SU}(2)$,

$$\mathbf{T}(g) = \mathbf{D}^{\dagger}\mathbf{V}(g)\mathbf{D},$$

con $\mathbf{D}$ es la siguiente matriz unitaria

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\imath & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\imath & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\imath & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\imath \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\imath \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \imath & -1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \imath & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\imath & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.6}$$

y

$$\mathbf{V}(g) = \begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g \end{pmatrix}, \tag{A.7}$$

donde todas entradas de $\mathbf{V}$ son matrices de 2×2.

El grupo $\mathcal{H}_m = \{\mathbf{T}(g) \mid g \in \mathcal{G}_m\}$ es una representación de $\mathcal{G}_m$ actuando sobre $\mathbb{R}^m$, con $m = 2, 4, 8$. Esta acción puede ser extendida a una acción simpléctica sobre $M = (T^*\mathbb{R}^m, \nu)$ (donde $\nu = 4\mathrm{d}\mathbf{v} \wedge \mathrm{d}\mathbf{u}$) en el siguiente sentido

$$(\mathbf{u}', \mathbf{v}') = (\mathbf{T}(g)\mathbf{u}, \mathbf{T}(g)\mathbf{v}) , \qquad g \in \mathcal{G}_m . \tag{A.8}$$

Dado que $\mathbf{T}(g)$ es una matriz ortogonal para toda $g \in \mathcal{G}_m$, entonces la acción $\mathbf{u}' = \mathrm{T}(g)\mathbf{u}$ es simpléctica.

Denotemos por g_m al algebra de Lie del grupo $\mathcal{G}_m$. Ésto es, g_4 es el espacio vectorial $\mathbb{R}$ y g_8 es el espacio vectorial real su(2).

Sea h_m el algebra de Lie de $\mathcal{H}_m$ y denotemos sus elementos por $\mathcal{T}(\xi)$ con $\xi \in g_m$. Mas precisamente para $m = 4$

$$\mathcal{T}(\xi) = \mathbf{C}^{\dagger}\mathcal{U}(\xi)\mathbf{C}, \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

donde $\mathbf{C}$ es dada por (A.5) y

$$\mathcal{U}(\xi) = \begin{pmatrix} -\imath\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\imath\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \imath\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \imath\xi \end{pmatrix} .$$

Y para el caso $m = 8$

$$\mathcal{T}(\xi) = \mathbf{D}^{\dagger}\mathcal{V}(\xi)\mathbf{D},$$

donde $\mathbf{D}$ es dada por (A.6) y $\mathcal{V}(\xi)$ por (A.7) con $\xi \in \mathrm{su}(2)$.

Introduzcamos el siguiente producto interno en h_m

$$\langle \mathcal{T}(\xi_1), \mathcal{T}(\xi_2) \rangle = \frac{1}{8}\mathrm{traza}(\mathcal{T}(\xi_1)\mathcal{T}(\xi_2)) = \frac{1}{2}\mathrm{traza}(\xi_1\xi_2)\ , \qquad \xi_1, \xi_2 \in g_m\ .$$

Sea $\tilde{h}_m$ la representación del algebra de Lie g_m dado por la matrices de la forma

$$\widetilde{\mathcal{T}}(\xi) = \begin{pmatrix} \mathcal{T}(\xi) & 0 \\ 0 & \mathcal{T}(\xi) \end{pmatrix}, \qquad \text{con } \ \mathcal{T}(\xi) \in h_m\ .$$

Consideremos el siguiente mapeo de momento $\mathcal{J}_m : M \to (\tilde{h}_m)^*$, donde $(\tilde{h}_m)^*$ denota el espacio vectorial dual de $\tilde{h}_m$, asociado a la acción de $\mathcal{G}_m$ descrita en (A.8). Dada $\xi \in g_m$ consideremos el campo vectorial Y_ξ determinado por la acción del grupo $\mathcal{G}_m$ y cuyo valor en el punto $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in M$ es

$$Y_\xi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \exp(s\widetilde{\mathcal{T}}(\xi)) \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

El campo vectorial Y_ξ es llamado el generador infinitesimal asociado a ξ.

El mapeo de momento da un Hamiltoniano H cuyo campo vectorial Hamiltoniano asociado X_{H} en el punto $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es igual a $Y_\xi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. El Hamiltoniano H evaluado en el punto $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es igual a la evaluación de $\mathcal{J}_m(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ en $\widetilde{\mathcal{T}}(\xi)$. Es decir, la siguiente ecuación se cumple

$$X_{\mathcal{J}_m(\mathbf{u}, \mathbf{v})\cdot\widetilde{\mathcal{T}}(\xi)} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \exp(s\widetilde{\mathcal{T}}(\xi)) \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \tag{A.9}$$

donde $\mathcal{J}_m(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es determinada por el teorema de representación de Riez. Aquí se dotó al algebra de Lie $\tilde{h}_m$ con el producto interno

$$\langle \widetilde{\mathcal{T}}(\xi_1), \widetilde{\mathcal{T}}(\xi_2) \rangle = \mathrm{traza}(\xi_1\xi_2), \qquad \text{con } \ \xi_1, \xi_2 \in g_m\ .$$

Por lo tanto la acción de $\mathcal{J}_m(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ en $\widetilde{\mathcal{T}}(\xi)$ debe de ser igual al producto interno de un elemento de $\tilde{h}_m$ (denotado por $\widetilde{\mathcal{T}}(\xi(\mathbf{u}, \mathbf{v})))$ con $\widetilde{\mathcal{T}}(\xi)$. Si pedimos que se satisfaga (A.9) entonces $\xi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in g_m$ debe de cumplir

Caso $m = 4$

$$\xi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -u_2v_1 + u_1v_2 - u_4v_3 + u_3v_4. \tag{A.10}$$

Caso $m = 8$

$$\xi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \imath\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \imath\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & -\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= -u_3v_1 - u_4v_2 + u_1v_3 + u_2v_4 - u_7v_5 - u_8v_6 + u_5v_7 + u_6v_8,\\ \lambda(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= u_2v_1 - u_1v_2 - u_4v_3 + u_3v_4 + u_6v_5 - u_5v_6 - u_8v_7 + u_7v_8,\\ \beta(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= u_4v_1 - u_3v_2 + u_2v_3 - u_1v_4 + u_8v_5 - u_7v_6 + u_6v_7 - u_5v_8.\end{aligned} \tag{A.11}$$

Las ecuaciones $\xi = 0$, $\lambda = \alpha = \beta = 0$ son conocidas en la literatura como las restricciones del problema de Kepler en las variables $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ para el problema de Kepler $n = 3$ [18] y $n = 5$ [5] dimensional.

Nos restringiremos a la subvariedad $\mathcal{J}_m^{-1}(0)$ de M. Como 0 es un valor regular de $\mathcal{J}_m$ el método de reducción de Marsden-Weinstein [1] implica que podemos tomar una reducción de M por la acción de $\mathcal{G}_m$. Así consideremos la variedad simpléctica $\mathcal{J}_m^{-1}(0)/\mathcal{G}_m$ con una forma simpléctica bien definida $\tilde{\nu}$ actuando sobre ésta y proveniente de la forma simpléctica inicial $\nu = 4\mathrm{d}\mathbf{v} \wedge \mathrm{d}\mathbf{u}$.

Consideremos la función $\mathcal{H}_{(n,m)} : \mathcal{J}_m^{-1}(0) \to N = (T^*\mathbb{R}^n, \omega)$ dado por

$$\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathbf{u})\mathbf{v}\ , \qquad \mathbf{p} = \frac{2}{|\mathbf{u}|^2}\mathcal{A}(\mathbf{u})\mathbf{v},$$

donde $\mathcal{A}(\mathbf{u})$ se encuentra definida en (A.3) y (A.4). Notese que si $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathcal{J}_m^{-1}(0)$ entonces $(\mathbf{v},\mathbf{u}) \in \mathcal{J}_m^{-1}(0)$. Además se tiene la siguiente propiedad

$$\mathcal{A}(\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathcal{A}(\mathbf{v})\mathbf{u}\ .$$

A partir de ésto se tiene que $\mathrm{d}\mathbf{x} = 2\mathcal{A}(\mathbf{u})\mathrm{d}\mathbf{u}$.

Como $\mathcal{A}^t(\mathbf{u})\mathcal{A}(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2\mathbf{I}$, entonces $\mathbf{p}\mathrm{d}\mathbf{x} = 4\mathbf{v}\mathrm{d}\mathbf{u}$. De aquí que $\mathcal{H}^*_{(n,m)}\omega = \nu$. Así obtenemos una transformación canónica $\widetilde{\mathcal{H}}_{(n,m)}$ de la variedad simpléctica $(\mathcal{J}_m^{-1}(0)/\mathcal{G}_m, \tilde{\nu})$ sobre la variedad simpléctica $(T^*\mathbb{R}^n, \omega)$.

De manera análoga, para el caso $m = 2$, la transformación canónica $\widetilde{\mathcal{H}}_{(2,2)}$ va de $(T^*(\mathbb{R}^2 - \{0\})/\mathbb{Z}_2, \tilde{\nu})$ sobre $(T^*(\mathbb{R}^2 - \{0\}), \omega)$.

Dado que el sistema hamiltoniano $(\mathcal{J}_m^{-1}(0), \nu,\ H' = (1/|\mathbf{u}|^2)(2|\mathbf{v}|^2 - 1))$ es invariante bajo la acción de $\mathcal{G}_m$. Las ecuaciones de movimiento del correspondiente sistema Hamiltoniano reducido asociado a $(\mathcal{J}_m^{-1}(0)/\mathcal{G}_m, \tilde{\nu}, \widetilde{H})$ (con $\widetilde{H}$ la restricción del Hamiltoniano H' sobre $\mathcal{J}_m^{-1}(0)/\mathcal{G}_m$) son determinados por las ecuaciones del movimiento de $(\mathcal{J}_m^{-1}(0), \nu, H')$. Las cuales son

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4}\frac{\partial H'}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2}\ , \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{4}\frac{\partial H'}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{2|\mathbf{u}|^4}(2|\mathbf{v}|^2 - 1)\ . \tag{A.12}$$

Así sobre cada superficie con energía negativa constante $H' = E$ y después de la reparametrización del tiempo (A.1), obtenemos las ecuaciones de movimiento de un oscilador armónico isotrópico (con fuerza $k = -E/2$)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}s} = \mathbf{v}\ , \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}s} = \frac{E}{2}\mathbf{u}\ .$$

El Hamiltoniano H' es llevado (a través de la transformación $\mathcal{H}_{(n,m)}$) al Hamiltoniano del problema de Kepler H. Ésto es $H' = H \circ \mathcal{H}_{(n,m)}$. Dado que $\mathcal{H}^*_{(n,m)}\omega = \nu$, las ecuaciones Hamiltonianas de H' (A.12), son llevadas a las ecuaciones Hamiltonianas del problema de Kepler

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{p}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\,. \tag{A.13}$$

Por lo cual, se concluye que para energía negativa fija $H = H' = E$. El flujo Hamiltoniano del problema de Kepler dado por las ecuaciones (A.13) es equivalente (después de una reparametrización del tiempo) a la reducción del flujo Hamiltoniano de un oscilador armónico isotrópico $K = \frac{1}{2}(|\mathbf{v}|^2 + k|\mathbf{u}|^2)$ con fuerza $k = -E/2$ bajo la acción correspondiente de $\mathbb{Z}_2$, S^1 o $\mathrm{SU}(2)$.

A.2 Regularización de Moser.

En esta sección, introduciremos la regularización de Moser para el problema de Kepler n-dimensional. Dicha regularización funciona para cualquier $n \geq 1$. Sin embargo, la función de Moser que describiremos abajo es asociada a la energía fija $E = -1/2$. Para otros valores de energía negativa se pueden considerar dilataciones. Por lo cual la expresión explicíta para la correspondiente transformación depende del nivel de energía que queramos considerar.

La regularización del oscilador armónico solo funciona para las dimensiones $n = 2, 3, 5$, pero la expresión para la transformación no depende explicitamente del nivel de energía. Ambas regularizaciones relacionan el flujo Hamiltoniano del problema de Kepler, con un nivel de energía fijo, con otro sistema Hamiltoniano cuyo flujo es periódico después de la reparametrización del tiempo indicada en (A.1). En el caso de la regularización de Moser, este sistema es el flujo geodésico sobre la esfera S^n.

La motivación intuitiva para entender la regularización de Moser es basado en lo siguiente: Las orbitas correspondientes a un momento angular no cero (donde los vectores de posición y de momento iniciales son linealmente independientes) son círculos cuando proyectamos en el espacio de momentos. Los cuales corresponden, bajo la proyección estereográfica $\mathbf{T}_n : \mathbb{R}^n \to S^n_0$ y energía fija $E = -1/2$, a grandes círculos sobre la esfera perforada S^n_0 (la esfera S^n con el polo norte removido).

Siguiendo a Moser [22] consideremos la proyección estereográfica entre el espacio de momentos $\mathbb{R}^n$ del problema de Kepler, y la esfera perforada S^n_0

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{|\mathbf{p}|^2 - 1}{|\mathbf{p}|^2 + 1}\,, \\ w_j &= \frac{2p_j}{|\mathbf{p}|^2 + 1}\,, \qquad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Extendamos la proyección estereográfica a una función $\mathcal{M}_n$ del espacio fase $T^*\mathbb{R}^n$

sobre el haz tangente $T^*S_0^n$, bajo la restricción

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \mathrm{d}\mathbf{w} = \mathbf{x} \cdot \mathrm{d}\mathbf{p} \ , \quad \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{w} = 0 \ , \quad \text{con } (\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}) \in T^*S_0^n \ .$$

Las ecuaciones explícitas de $\mathcal{M}_n$ son las siguientes:

$$\xi_j = \frac{|\mathbf{p}|^2 + 1}{2} x_j - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) p_j \ , \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\xi_{n+1} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = \sum_{j=1}^{n} x_j p_j .$$

Las ecuaciones de la transformada inversa son

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{w_j}{1 - w_{n+1}} \ , \\ x_j &= (1 - w_{n+1}) \xi_j + \xi_{n+1} w_j \ . \end{aligned} \qquad j = 1, \ldots, n \ .$$

La función de Moser es en realidad un simplectomorfismo del espacio fase $T^*\mathbb{R}^n$ (con la forma canónica simpléctica $\omega = \mathrm{d}\mathbf{p} \wedge \mathrm{d}\mathbf{x}$) sobre $T^*S_0^n$ (con la forma simpléctica $\kappa = \mathrm{d}\mathbf{w} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$, obtenida de la restricción a $T^*S_0^n$ de la forma canónica simpléctica del ambiente $T^*\mathbb{R}^{n+1}$).

Consideremos la reparametrización indicada en (A.1). Entonces se tiene la siguiente correspondencia para energía negativa fija $E = -1/2$:

- ▷ El flujo Hamiltoniano del problema de Kepler de dimensión n $[(\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}\mathbf{p} \wedge \mathrm{d}\mathbf{x}$, $H = (|\mathbf{p}|^2/2) - (1/|\mathbf{x}|)]$ es transformado en el flujo geodésico de la n esfera perforada con la sección cero removida [note que $|\boldsymbol{\xi}| = [(|\mathbf{p}|^2 + 1)/2]\mathbf{x}$ implica que $\boldsymbol{\xi} = 0$ si y solo si $\mathbf{x} = 0$].

- ▷ Las orbitas que colisionan (orbitas con momento angular cero) son enviadas a geodesicas que pasan a través del polo norte pero no incluyen al polo norte en si mismo.

El polo norte puede ser incluido en el siguiente sentido: se puede mostrar que, después de una reparametrización del tiempo, una orbita de colisión del problemade Kepler corresponde a una partícula moviendose sobre un segmento con uno de sus extremos en el origen y llegando al origen con velocidad cero. Asi, si tomamos la convención que después de la colisión con el centro de atracción la partícula retorna a su movimiento sobre el segmento, entonces tenemos un movimiento oscilatorio respecto al tiempo s.

Note que se ha incluido el punto $\mathbf{x} = 0$, Mas aún, como la energía total es conservada entonces $|\mathbf{x}| \to 0$ si y solo si $|\mathbf{p}| \to \infty$. Asi estamos incluyendo el caso $|\mathbf{p}| = \infty$ en la proyección estereográfica. Asignandole a $|\mathbf{p}| = \infty$ al polo norte de S^n. El movimiento oscilatorio corresponde a una geodesica pasando a través del polo norte e incluyendo a este punto.

Así decimos que para energía negativa fija $E = -1/2$, el flujo Hamiltoniano del problema de Kepler n dimensional es regularizado por el flujo geodesico de toda la n esfera S^n (después de una reparametrización del tiempo).

A.3 Relación entre las dos regularizaciones: Una transformación canónica.

En esta sección se describira la relación entre las regularizaciones del oscilador armónico y la de Moser descritas en las secciones A.1 y A.2 respectivamente. Dicha relación es basada en el trabajo de M. Kummer [17] quien estudio los casos $(n, m) = (2, 2),\ (3, 4)$.

Siguiendo a Kummer introduciremos una estructura compleja para el espacio fase $T^*\mathbb{R}^m$. Luego para los casos $(n, m) = (3, 4), (5, 8)$, consideraremos un grupo F que es invariante bajo el mapeo de momento $\mathcal{J}_m$. Además construiremos una función $\rho_{(n,m)}$ que toma valores en la cuadrica nula, la cual identificaremos con el espacio cotangente de la n esfera con la sección cero removida a través de una función σ_n. Finalmente consideraremos la función composición $\mathcal{C}_{(n,m)} = \sigma_n \circ \rho_{(n,m)}$.

La función $\mathcal{C}_{(n,m)}$ tiene dos propiedad notables: relaciona las dos regularizaciones del problema de Kepler descritas arriba y es una transformación canónica. Además identificaremos la función generadora de tal transformación, la cual es usada para definir la transformada de Bargmann sobre $L^2(S^n)$, $n = 2, 3, 5$. El caso $m = 2$ se llevará a cabo a mano sin una función de momento considerada (en este caso el grupo $\mathbb{Z}_2$ no es un grupo de Lie).

Siguiendo las ideas de Kummer [17], consideremos la siguiente estructura compleja para $T^*\mathbb{R}^m$. Sea $\mathcal{D}_m : T^*\mathbb{R}^m \to \mathbb{C}^m$ definida por

$$\mathbf{z} = \mathbf{M}\mathbf{u} + 2\imath\mathbf{M}\mathbf{v}, \tag{A.14}$$

con $\mathbf{M}$ la siguiente matriz unitaria

▷ Caso $m = 2$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\imath & -1 \\ -\imath & 1 \end{pmatrix},$$

▷ Caso $m = 4$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\imath & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\imath \\ 0 & 0 & 1 & \imath \\ -\imath & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

▷ Caso $m = 8$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\imath & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\imath & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \imath \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\imath \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\imath & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\imath & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las restricciones $\xi = 0$ en (A.10) y $\lambda = \beta = \alpha = 0$ en (A.11) para el problema de Kepler $n = 3, 5$ dimensional son

Para $(n, m) = (3, 4)$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2 + |z_4|^2 . \tag{A.15}$$

Para $(n, m) = (5, 8)$

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{4} |z_j|^2 = \sum_{j=1}^{4} |z_{j+4}|^2, \\ z_7\overline{z}_1 - z_8\overline{z}_2 + z_5\overline{z}_3 - z_6\overline{z}_4 = 0. \end{gathered} \tag{A.16}$$

Además, dado que $\mathbf{M}$ es unitaria, se tiene

$$\theta := -\imath \mathrm{d}\mathbf{z} \wedge \mathrm{d}\overline{\mathbf{z}} = 4\mathrm{d}\mathbf{v} \wedge \mathrm{d}\mathbf{u}.$$

La acción del grupo $\mathcal{G}_m$ sobre $\mathbb{C}^m$ (denotada por $\mathbf{T}(g)$, con $g \in \mathcal{G}_m$) puede ser obtenida de (A.14) y (A.8). Así $\mathbf{z}' = \mathbf{T}(g)\mathbf{z}$ tiene la siguiente expresión explícita

Caso $m = 2$.

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z} \quad \text{o} \quad \mathbf{z}' = -\mathbf{z}. \tag{A.17}$$

Caso $m = 4$. Para $\psi \in \mathbb{R}$, $\exp(\imath\psi) \in S^1$

$$\mathbf{z}' = \begin{pmatrix} \exp(-\imath\psi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-\imath\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\imath\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(\imath\psi) \end{pmatrix} \mathbf{z}. \tag{A.18}$$

Caso $m = 8$. Para $g \in \mathrm{SU}(2)$

$$\mathbf{z}' = \mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{V}(g)\mathbf{L}\mathbf{z}, \tag{A.19}$$

donde $\mathbf{V}(g)$ tiene la forma indicada en (A.7) y

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{A.20}$$

Definamos ahora $\rho_{(2,2)}$. En este caso tenemos la acción $\mathbf{z}' \mapsto \pm\mathbf{z}$ del grupo $\mathbb{Z}_2$ sobre la variedad compleja $\mathbb{C}^2$. El conjuto de monomios $\{z_1^2, z_2^2, z_1 z_2\}$ dan una base del espacio vectorial F de todos los polinomios homogeneos de grado 2 (todos los elementos de F son invariantes bajo la acción del grupo $\mathbb{Z}_2$). Definamos la función $\rho_{(2,2)}(\mathbf{z}) = (\rho_1(\mathbf{z}), \rho_2(\mathbf{z}), \rho_3(\mathbf{z}))$ por

$$\rho_1(\mathbf{z}) = (z_2^2 - z_1^2)/2\ , \qquad \rho_2(\mathbf{z}) = \imath(z_1^2 + z_2^2)/2\ , \qquad \rho_3(\mathbf{z}) = z_1 z_2\ . \tag{A.21}$$

Nótese que la función $\rho_{(2,2)}$ toma valores en la cuádrica nula $\mathbb{Q}^2$ y es sobre.

Para definir $\rho_{(n,m)}(\mathbf{z})$ para los casos $(n,m) = (3,4), (5,8)$ introduzcamos la variable $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta}_I, \boldsymbol{\eta}_{II})$, con $\boldsymbol{\eta}_I, \boldsymbol{\eta}_{II} \in \mathbb{C}^{m/2}$. Consideremos el siguiente cambio de variable de $\mathbf{z}$ a $\boldsymbol{\eta}$

$$\boldsymbol{\eta}_I = \mathbf{z}_I\ , \qquad \boldsymbol{\eta}_{II} = \overline{\mathbf{z}}_{II}.$$

Así la forma simpléctica θ escrita en términos de $\boldsymbol{\eta}$ es

$$\theta = -\imath(\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_I \wedge \mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\eta}}_I - \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_{II} \wedge \mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\eta}}_{II}).$$

Denotemos por $\mathcal{K}_m$ al mapeo de momento asociado a la acción del grupo $\mathcal{G}_m$ sobre $\mathbb{C}^m$ en términos de la variable $\boldsymbol{\eta}$. Es decir $\mathcal{K}_m = \mathcal{J}_m \circ \mathcal{D}_m^{-1}$. $\mathcal{K}_m$ escrito en términos de $\boldsymbol{\eta}$ y $\overline{\boldsymbol{\eta}}$ es determinada por las siguientes ecuaciones (ver (A.10), (A.11) y definición de $\mathcal{D}_m$ en (A.14)).

Caso $m = 4$.

$$\xi(\boldsymbol{\eta}, \overline{\boldsymbol{\eta}}) = \frac{1}{4}\boldsymbol{\eta}^\dagger \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\eta},$$

donde $\mathbf{I}_\ell$ denota la matriz identidad de $\ell \times \ell$ y $\boldsymbol{\eta}^\dagger$ el adjunto de $\boldsymbol{\eta}$.

Caso $m = 8$.

$$\alpha(\boldsymbol{\eta}, \overline{\boldsymbol{\eta}}) = -\frac{1}{4}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{\eta}^t \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{J} \\ \mathbf{J} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\eta}\right] ,$$

$$\beta(\boldsymbol{\eta}, \overline{\boldsymbol{\eta}}) = \frac{1}{4}\mathrm{Im}\left[\boldsymbol{\eta}^t \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{J} \\ \mathbf{J} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\eta}\right] ,$$

$$\lambda(\boldsymbol{\eta}, \overline{\boldsymbol{\eta}}) = -\frac{1}{4}\boldsymbol{\eta}^t \begin{pmatrix} \mathbf{I}_4 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_4 \end{pmatrix} \boldsymbol{\eta},$$

con $\mathbf{J}$ la matriz

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Sea F el grupo de Lie de matrices de $m \times m$ con entradas complejas y determinante uno que dejan el mapeo de momento $\mathcal{K}_m$ invariante. Para el caso $(n, m) = (3, 4)$ este es el grupo SU$(2, 2)$. Es decir, el grupo de matrices de 4×4, $\mathbf{S}$, que satisfacen

$$\mathbf{S}^\dagger \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & O \\ 0 & -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix} .$$

Para el caso $(n, m) = (5, 8)$, F es el subgrupo de SU$(4, 4)$ de matrices $\mathbf{S}$ que cumplen

$$\mathbf{S}^\dagger \begin{pmatrix} \mathbf{I}_4 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_4 & O \\ 0 & -\mathbf{I}_4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{S}^t \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{J} \\ \mathbf{J} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{J} \\ \mathbf{J} & 0 \end{pmatrix} ,$$

donde $\mathbf{S}^t$ denota la transpuesta de $\mathbf{S}$.

Se puede mostrar que la acción de F sobre $(\mathbb{C}^m, \theta)$ es simpléctica. Por lo cual podemos considerar el mapeo de momento asociado a esta acción. Escogiendo una base adecuada para el algebra de Lie $\mathcal{F}$ de F, se puede definir la parte real e imaginaria de los componentes de $\rho_{(n,m)}$ como los Hamiltonianos cuyo campo vectorial Hamiltoniano asociado es igual al generador infinitesimal asociado a los elementos de la base de $\mathcal{F}$. Luego $\rho_{(n,m)}$ va a tener la siguiente expresión (en términos de la variable $\mathbf{z}$)

$\rho_{(3,4)}$:

$$\begin{aligned} \rho_1(\mathbf{z}) &= z_1 z_3 + z_2 z_4 , & \rho_2(\mathbf{z}) &= \imath(z_1 z_3 - z_2 z_4) , \\ \rho_3(\mathbf{z}) &= \imath(z_1 z_4 + z_2 z_3) , & \rho_4(\mathbf{z}) &= z_1 z_4 - z_2 z_3 . \end{aligned} \tag{A.22}$$

$\rho_{(5,8)}$:

$$\begin{aligned} \rho_1(\mathbf{z}) &= \imath(-z_1 z_6 + z_3 z_8 + z_2 z_5 - z_4 z_7) , \\ \rho_2(\mathbf{z}) &= z_1 z_6 + z_3 z_8 + z_2 z_5 + z_4 z_7 , \\ \rho_3(\mathbf{z}) &= z_2 z_6 + z_3 z_7 - z_1 z_5 - z_4 z_8 , \\ \rho_4(\mathbf{z}) &= \imath(-z_1 z_5 + z_4 z_8 - z_2 z_6 + z_3 z_7) , \\ \rho_5(\mathbf{z}) &= \imath(-z_1 z_8 - z_2 z_7 - z_3 z_6 - z_4 z_5) , \\ \rho_6(\mathbf{z}) &= z_1 z_8 + z_2 z_7 - z_3 z_6 - z_4 z_5 . \end{aligned} \tag{A.23}$$

Definamos $\mathcal{C}_{(n,m)}$ por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^m - \{0\} \arrow[r, "\mathcal{C}_{(n,m)}"] \arrow[d, "\rho_{(n,m)}"'] & T^*S^n - \{0\} \\
\mathbb{Q}^n - \{0\} \arrow[ur, "\sigma_n"'] &
\end{tikzcd} \tag{A.24}$$

La transformación $\mathcal{C}_{(n,m)}$ es canonica que relaciona la forma simpléctica $\theta = -\imath \mathrm{d}\mathbf{z} \wedge \mathrm{d}\bar{\mathbf{z}}$ con la forma simpléctica de T^*S^n obtenida de su ambiente $T^*\mathbb{R}^{n+1}$.

Remarcamos el hecho de que la función

$$\vartheta_{(n,m)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \rho_{(n,m)}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{x} \, , \qquad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m \, , \; \mathbf{x} \in S^n \, ,$$

es la función generadora de la transformación canónica $\mathcal{C}_{(n,m)}$ (ver sección 3.3 y para más detalles [31] y [32]).

Apéndice

B

Operadores Pseudo Diferenciales.

En este apéndice vamos a dar una pequeña descripción del concepto operadores pseudo-diferencial sobre $\mathbb{R}^n$ y sobre variedades. Ver [20] y [35] para detalles de definiciones de operadores pseudo-diferenciales sobre $\mathbb{R}^n$ y en variedades respectivamente.

Definición B.1 *Sea $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$. Definamos*

$$\langle \boldsymbol{\eta} \rangle := \sqrt{1 + |\boldsymbol{\eta}|^2}$$

donde $|\boldsymbol{\eta}|^2 = \eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2$.

Definición B.2 *Sea $\hbar_0 > 0$ y $m \in \mathbb{R}$. Definamos el* ***espacio semiclásico de símbolos*** $\mathrm{S}_{2n}(\langle \boldsymbol{\xi} \rangle^m)$ *como el conjunto de funciones $p = p(\mathbf{b}, \boldsymbol{\xi}; \hbar)$, $\mathbf{b}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, $\hbar \in (0, \hbar_0]$ que junto con sus derivadas de cualquier órden son suaves en la variable $\mathbf{z} = (\mathbf{b}, \boldsymbol{\xi})$ y que para cualquier $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^{2n}$*

$$\partial^{\mathbf{k}} p(\mathbf{b}, \boldsymbol{\xi}; \hbar) = \mathrm{O}(\langle \boldsymbol{\xi} \rangle^m)$$

uniformemente respecto a $(\mathbf{z}, \hbar) \in \mathbb{R}^{2n} \times (0, \hbar_0]$.

Definición B.3 *Sea $m \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathrm{S}_{2n}(\langle \boldsymbol{\xi} \rangle^m)$. Consideremos $(a^{(j)})$ una sucesión de símbolos de $S_{2n}(\langle \boldsymbol{\xi} \rangle^m)$ independientes de $\hbar$, asumiendo que la función $a^{(0)}$ no es identicamente cero. Diremos que a es* ***asintóticamente equivalente*** *a la suma formal $\sum_{j=0}^{\infty} \hbar^j a^{(j)}$ en $\mathrm{S}_{2n}(\langle \boldsymbol{\xi} \rangle^m)$si para cada $N \in \mathbb{N}$ y cualquier $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n$, existe $\hbar_{N,\mathbf{k}} > 0$ y $C_{N,\mathbf{k}} > 0$ tales que*

$$\left| \partial^{\mathbf{k}} \left(a - \sum_{j=0}^{N} \hbar^j a^{(j)} \right) \right| \leq C_{N,\mathbf{k}} \hbar^N \langle \boldsymbol{\xi} \rangle^m$$

uniformemente sobre $\mathbb{R}^{2n} \times (0, \hbar_{N,\mathbf{k}}]$. *En el caso de que ocurra ésto al símbolo a se le llama* ***símbolo clásico****.*

Ahora daremos la definición de operador pseudo-diferencial en $\mathbb{R}^n$

Definición B.4 *Sean* $m \in \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{S}_{2n}(\langle \boldsymbol{\xi} \rangle^m)$ *y* $t \in [0,1]$. *Se define la acción de un operador pseudo-diferencial en* $\mathbb{R}^n$, *denotado por* $\mathrm{Op}^t_\hbar(a)$, *en una función suave* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *por*

$$\mathrm{Op}^t_\hbar(a) f(\mathbf{b}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int\limits_{\mathbf{c}\in\mathbb{R}^n} \int\limits_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\imath(\mathbf{b}-\mathbf{c})\cdot\boldsymbol{\xi}/\hbar} \big(\mathrm{L}(\boldsymbol{\xi}, \hbar \mathrm{D}_{\mathbf{c}})\big)^k \big(a_t(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\xi}; \hbar) f(\mathbf{c})\big) \mathrm{d}\mathbf{c}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \ ,$$

donde $a_t(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\xi}; \hbar) = a((1-t)\mathbf{b} + t\mathbf{c}, \boldsymbol{\xi}; \hbar)$, *k es cualquier entero no negativo tal que* $m + n < k$ *y*

$$\mathrm{L}(\boldsymbol{\xi}, \hbar \mathrm{D}_{\mathbf{c}}) = \frac{1 + \hbar\boldsymbol{\xi} \cdot \mathrm{D}_{\mathbf{c}}}{1 + |\boldsymbol{\xi}|^2} \ , \qquad \mathrm{D}_{\mathbf{c}} = \frac{1}{\imath} \left(\frac{\partial}{\partial c_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial c_n} \right) \ .$$

En la definición anterior, el operador $\mathrm{L}(\boldsymbol{\xi}, \hbar \mathrm{D}_{\mathbf{c}})$ es introducido para que tenga sentido la integral posiblemente indefinida

$$\int\limits_{\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n} \int\limits_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\imath(\mathbf{b}-\mathbf{c})\cdot\boldsymbol{\xi}/\hbar} a_t(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\xi}; \hbar) f(\mathbf{c}) \mathrm{d}\mathbf{c}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \ .$$

Hay que hacer notar que para los casos especiales $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$ y $t = 1$, $\mathrm{Op}^t_\hbar(a)$ es llamado cuantización izquierda, cuantización de Weyl y cuantización derecha, respectivamente.

Definición B.5 *Sean* $m \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$ *y* $a \in \mathrm{S}_{2n}(\langle \boldsymbol{\xi} \rangle^m)$. *Si asumimos que a es un símbolo clásico (ver definición B.3), a la función* $a^{(0)}$ *se le llama* ***símbolo principal*** *del operador pseudo-diferencial* $\mathrm{Op}^t_\hbar(a)$. *Éste será denotado por* $\wp(\mathrm{Op}^t_\hbar(a))$.

Ahora daremos una breve descripción del concepto de operador pseudo-diferenciales en S^n.

Definición B.6 *Sea* $A_\hbar : C^\infty(S^n) \to C^\infty(S^n)$ *operador lineal. Consideremos a* S^n *como una variedad suave. Diremos que* $A_\hbar$ *es un operador pseudo-diferencial si y sólo si existe* $m \in \mathbb{R}$ *y* $0 \leq t \leq 1$ *tal que en cada carta* (U_κ, κ) *de* S^n *existe un símbolo* $a_\kappa \in \mathrm{S}_{2n}(\langle \boldsymbol{\xi} \rangle^m)$ *tal que para todo* $u \in C^\infty(S^n)$ *se tiene*

$$\Phi A_\hbar(\Psi u) = \Phi \kappa^* \mathrm{Op}^t_\hbar(a_\kappa)(\kappa^{-1})^*(\Psi u) \ , \qquad \forall\ \Phi, \Psi \in C_0^\infty(U_\kappa) \ . \tag{B.1}$$

Además se requiere que si $\Phi_j \in C_0^\infty(S^n)$, $j = 1, 2$ *satisfacen*

$$\mathrm{sop}(\Phi_1) \cap \mathrm{sop}(\Phi_2) = \varnothing$$

entonces

$$\|\Phi_1\, A_\hbar \Phi_2 \Psi\|_{S^n} \leq \mathrm{O}(\hbar^\infty)\|\Psi\|_{S^n}\ , \quad \forall\ \Psi \in C^\infty(S^n)\ . \tag{B.2}$$

Con la condición (B.2) estamos diciendo que la diagonal del operador $A_\hbar$ es insignificante en $\hbar$ y regularizable.

Nótese que para que tenga sentido (B.1) se está extendiendo $(\kappa^{-1})^*(\Psi u)$ como cero fuera del conjunto V_κ y se esta usando la misma notación para la extensión.

Asumamos que a_κ es un símbolo clásico para toda carta. Se requiere que se cumpla lo siguiente: Dadas dos cartas (U_κ, κ), (U_ν, ν) tales que $U_\kappa \cap U_\nu \neq \emptyset$

$$a_\kappa^{(0)}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\xi}) = a_\nu^{(0)}((\nu \circ \kappa^{-1})\mathbf{b}, (\nu \circ \kappa^{-1})^* \boldsymbol{\xi})\ , \quad \forall (\mathbf{b}, \boldsymbol{\xi}) \in T^*(\kappa(U_\kappa \cap U_\nu))\ .$$

La condición anterior implica que podemos definir el símbolo principal $\wp(A_\hbar)$ del operador pseudo-diferencial $A_\hbar$ en todo el espacio T^*S^n de la siguiente manera

Definición B.7 *Sea $A_\hbar$ operador pseudo-diferencial sobre S^n. El símbolo principal de $A_\hbar$ es definido por*

$$\wp(A_\hbar)(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = a_\kappa^{(0)}(\kappa\mathbf{x}, (\kappa^{-1})^* \boldsymbol{\eta})\ , \quad \forall\ (\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \in T^*(S^n)\ , \tag{B.3}$$

donde (U_κ, κ) es cualquier carta tal que $\mathbf{x} \in U_\kappa$.

Comentario B.8 *De la definición B.3 se tiene que $\wp(A_\hbar)$ no depende de $\hbar$.*

Apéndice

C

Asintótica de las derivadas del núcleo integral.

En el presente apéndice se mostrará el comportamiento asintótico del núcleo integral

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2\ell+n-1}}{\ell!\sqrt{n-1}} \Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}\Big)^{\ell}$$

de la transformada de Bargmann para $L^2(S^n)$. Además del comportamiento asintótico de cualquier derivada de éste. Las ideas son seguidas de Thomas/Wassell (ver apéndice B de la referencia [29]). Este resultado nos dará como consecuencia una expresión asintótica de los estados coherentes, y de cualquier derivada de éstos, con $\hbar$ incluida.

Basado en la expresión del núcleo integral de la transformada de Bargmann, definamos la función $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2\ell+n-1}}{\ell!\sqrt{n-1}}\, z^{\ell}\ , \qquad z \in \mathbb{C}\ . \tag{C.1}$$

Lema C.1 *Sean* $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ *y* s *entero no negativo. Supongamos que* $\mathrm{Re}(z) > 0$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq C\mathrm{Re}(z)$ *con* C *una constante positiva y* $\mathrm{Re}(z) \to +\infty$*. Entonces la derivada* s*-ésima de* g *tiene la siguiente expansión asintótica*

$$\frac{\mathrm{d}^s g(z)}{\mathrm{d}z^s} = \left(\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} z^{1/2} \exp(z) \left[1 + \frac{a_{1,s}}{z} + \frac{a_{2,s}}{z^2} + \ldots + \frac{a_{N,s}}{z^N} + \mathrm{O}(z^{-(N+1)})\right]$$

con $a_{1,s}, a_{2,s}, \ldots, a_{N,s}$ *constantes.*

Demostración.

Usando que para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $\frac{1}{\sqrt{a\ell+1}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a\ell+1)t^2} \mathrm{d}t$ y la serie de Taylor de la exponencial se obtiene

$$
\begin{aligned}
g(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{2\ell+n-1}{\ell!(n-1)}z^{\ell}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{2\ell+n-1}{n-1}t^2}\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\frac{2}{n-1}z^{\ell}}{(\ell-1)!}e^{-\frac{2\ell+n-1}{n-1}t^2}\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{z^{\ell}}{\ell!}e^{-\frac{2}{n-1}\ell t^2}e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2e^{-t^2}}{n-1}ze^{-\frac{2t^2}{n-1}}\exp\left(ze^{-\frac{2t^2}{n-1}}\right)+\exp\left(ze^{-\frac{2t^2}{n-1}}\right)e^{-t^2}\right]\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\left[\frac{2z}{n-1}e^{-\frac{2t^2}{n-1}}+1\right]\exp(ze^{-\frac{2t^2}{n-1}})e^{-t^2}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Tomando el cambio de variable $e^{-\frac{2t^2}{n-1}}=1-w^2$, con $w\in[0,1]$

$$
g(z)=\frac{2\sqrt{n-1}}{\sqrt{2\pi}}e^{z}\int_0^1\left[\frac{2z}{n-1}(1-w^2)+1\right]e^{-zw^2}\mathsf{m}(w)\mathrm{d}w \tag{C.2}
$$

donde

$$
\mathsf{m}(w):=\frac{w(1-w^2)^{\frac{n-1}{2}-1}}{\sqrt{-\ln(1-w^2)}}\ .
$$

Para k entero positivo, analicemos la integral en la ecuación (C.2), y su k-ésima derivada respecto a z, en el intervalo $[1/2,1]$. Para ello sean

$$
\mathrm{I}(z)=\int_{1/2}^1\left[\frac{2z}{n-1}(1-w^2)+1\right]e^{-zw^2}\mathsf{m}(w)\mathrm{d}w\ ,
$$

$$
\mathrm{I}^{(k)}(z)=\frac{\mathrm{d}^k\mathrm{I}(z)}{\mathrm{d}z^k}\ .
$$

Aseveramos que $\mathrm{I}^{(k)}(z)$ es $\mathrm{O}(z^{-\infty})$. Para ver ésto observemos que

$$
\mathsf{m}(w)=\frac{w(1-w^2)^{\frac{n-2}{2}}}{[-(1-w^2)\ln(1-w^2)]^{1/2}}\ .
$$

Dado que $n\geq 2$, la función $(1-w^2)^{\frac{n-2}{2}}$ se encuentra acotado en el intervalo $[1/2,1]$. Además $-1/\ln(1-w^2)$ está acotado por $-1/\ln(3/4)$ en el mismo intervalo. Y como $\int_{1/2}^1 1/\sqrt{1-w^2}\mathrm{d}w<\infty$, entonces para cualquier número entero no negativo p se tiene

$$
\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}z^p} \left(\left[\frac{2z}{n-1}(1-w^2)+1 \right] e^{-zw^2} \mathsf{m}(w) \right) \right| \mathrm{d}w \\
&\quad \leq \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}z^r} \left[\frac{2z}{n-1}(1-w^2)+1 \right] \right| \left| \frac{\mathrm{d}^{p-r}}{\mathrm{d}z^{p-r}} e^{-zw^2} \right| |\mathsf{m}(w)| \mathrm{d}w \\
&\quad \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\left[2|z| \frac{1-w^2}{n-1} + 1 \right] (-w^2)^p + 2p \frac{1-w^2}{n-1} (-w^2)^{p-1} \right) \frac{|\mathsf{m}(w)|}{|e^{zw^2}|} \mathrm{d}w \\
&\quad \leq M e^{-\mathrm{Re}(z)/4} (|z|+1) < \infty \, , \qquad \text{(C.3)}
\end{aligned}
$$

con M una constante independiente de z. Por lo cual la derivada p ésima de $\mathfrak{f}(z,w) = \left[\frac{2}{n-1}z(1-w^2)+1\right] e^{-zw^2} \mathsf{m}(w)$ (respecto a la variable z) es Lebesgue integrable en w para toda $z \in \mathbb{C}$. Además

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{\mathrm{d}^{p+1}}{\mathrm{d}z^{p+1}} \mathfrak{f}(z,w) \right| &\leq (w^2)^p \left((p+1) \frac{2(1-w^2)}{n-1} + \left[|z| \frac{2(1-w^2)}{n-1} + 1 \right] w^2 \right) \frac{|\mathsf{m}(w)|}{|e^{zw^2}|} \\
&\leq M \mathfrak{g}(w)
\end{aligned}
$$

con $\mathfrak{g}(w) = (1-w^2)^{-1/2}$. Luego como $\mathfrak{g}(w)$ es integrable, del teorema de convergencia dominada se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}^{(k)}(z) &= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\left[\frac{2z}{n-1}(1-w^2)+1 \right] e^{-zw^2} \mathsf{m}(w) \right) \mathrm{d}w \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k} \left(\left[\frac{2z}{n-1}(1-w^2)+1 \right] e^{-zw^2} \mathsf{m}(w) \right) \mathrm{d}w.
\end{aligned}
$$

Así de lo anterior y (C.3)

$$
\left| z^r \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k} \mathrm{I}(z) \right| \leq M e^{-\mathrm{Re}(z)/4} |z|^r (|z|+1) \, , \quad \forall \, r \in \mathbb{N} \, .
$$

Luego como $|\mathrm{Im}(z)| \leq C\mathrm{Re}(z)$, tenemos $|z| \leq C_1 \mathrm{Re}(z)$. Por lo cual para $\mathrm{Re}(z) \to \infty$

$$
\left| z^r \mathrm{I}^{(k)}(z) \right| \leq M |\mathrm{Re}(z)|^{r+1} e^{-\mathrm{Re}(z)/4} < \infty
$$

Por lo tanto, cualquier derivada de $\mathrm{I}(z)$ es de $\mathrm{O}(z^{-r})$, para cualquier entero positivo r. Es decir

$$
\mathrm{I}^{(k)}(z) = \mathrm{O}(z^{-\infty}) \, , \quad \text{cuando} \quad \mathrm{Re}(z) \to \infty. \qquad \text{(C.4)}
$$

Analizemos ahora la integral en la ecuación (C.2), y su k-ésima derivada respecto a z, en el intervalo $[0,1/2]$. Para ello sean

$$\mathrm{J}(z) = \int_0^{1/2} \left[\frac{2z}{n-1}(1-w^2)+1\right] e^{-zw^2}\mathsf{m}(w)\mathrm{d}w \ ,$$
$$\mathrm{J}^{(k)}(z) = \frac{\mathrm{d}^k \mathrm{J}(z)}{\mathrm{d}z^k} \ .$$

Definamos $F:(0,1/2)\to\mathbb{R}$, por

$$F(w) = \frac{w}{[-\ln(1-w^2)]^{1/2}},$$

y $\widetilde{F}:(-1/2,1/2)\to\mathbb{R}$ por

$$\widetilde{F}(w) = \frac{1}{\sqrt{1-f(w)}} \ , \qquad f(w) = 1+\frac{\ln(1-w^2)}{w^2} \ .$$

Nótese que para $w\in(0,1/2)$, se cumple $F(w)=\widetilde{F}(w)$. Además de que f tiene serie de Taylor convergente en potencias pares en la variable w. Por lo cual $\widetilde{F}(w)\to 1$ cuando $w\to 0$.

Más aún dado que para todo número natural r, f tiene derivada r-ésima, entonces la derivada r-ésima de $\widetilde{F}$, $\widetilde{F}^{(r)}$, se encuentra bien definida en $(-1/2,1/2)$ y tiene límite cuando $w\to 0$. Así $\widetilde{F}^{(r)}$ es continua en $[-1/2,1/2]$.

De aquí que $\widetilde{F}$ tiene expansión asintótica en potencias pares de w. Luego F es par y tiene una extensión C^∞ al intervalo $(-1/2,1/2)$. Así pues, para $0\le w\le 1/2$

$$F(w) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j)!}F^{(2j)}(0^+)w^{2j} \ , \quad \text{donde} \quad F^{(2j)}(0^+) = \lim_{w\to 0^+}F^{(2j)}(w) \ .$$

Y para cualquier entero no negativo N

$$F(w) - \sum_{j=0}^{N}\frac{1}{(2j)!}F^{(2j)}(0^+)w^{2j} = \mathrm{O}(w^{2N+2}) \ , \quad w\in[0,1/2] \ .$$

Escribamos

$$\mathrm{J}^{(k)}(z) = \mathrm{G}^{(k)}(z)+\mathrm{H}^{(k)}(z), \tag{C.5}$$

con

$$\begin{aligned} \mathrm{G}(z) &= \int_0^{1/2} e^{-zw^2}\mathsf{m}(w)\mathrm{d}w &,\quad \mathrm{G}^{(k)}(z) = \frac{\mathrm{d}^k\mathrm{G}(z)}{\mathrm{d}z^k}\ ,\\ \mathrm{H}(z) &= \int_0^{1/2} \frac{2z}{n-1}(1-w^2)e^{-zw^2}\mathsf{m}(w)\mathrm{d}w &,\quad \mathrm{H}^{(k)}(z) = \frac{\mathrm{d}^k\mathrm{H}(z)}{\mathrm{d}z^k}\ . \end{aligned} \tag{C.6}$$

Estudiemos $\mathrm{G}^{(k)}$. Por el mismo argumento dado arriba se observa que $\mathsf{m}(w) =$

$(1-w^2)^{\frac{n-1}{2}-1}F(w)$ tiene una expansión asintótica en potencias pares en la variable w. De hecho existen números b_{2j}, $j=0,1,2,...$ tales que para $w\in(0,1/2)$

$$\mathsf{m}(w)-\sum_{j=0}^{N}b_{2j}w^{2j}=\mathrm{O}(w^{2N+2})\ ,\qquad b_0=\mathsf{m}(0)=1.$$

Sea

$$\mathrm{G}^{(k)}(z)=\mathrm{G}_1^{(k)}(z)+\mathrm{G}_2^{(k)}(z)\tag{C.7}$$

con

$$\mathrm{G}_1=\int_0^{1/2}e^{-zw^2}\sum_{j=0}^{N}b_{2j}w^{2j}\mathrm{d}w\qquad,\quad \mathrm{G}_1^{(k)}=\frac{\mathrm{d}^k\mathrm{G}_1(z)}{\mathrm{d}z^k}\ ,$$

$$\mathrm{G}_2=\int_0^{1/2}e^{-zw^2}\left(\mathsf{m}(w)-\sum_{j=0}^{N}b_{2j}w^{2j}\right)\mathrm{d}w\quad,\quad \mathrm{G}_2^{(k)}=\frac{\mathrm{d}^k\mathrm{G}_2(z)}{\mathrm{d}z^k}\ .$$

Probemos que $\mathrm{G}_2^{(k)}=\mathrm{O}(z^{-\frac{2N+2k+3}{2}})$. Para ello tenemos que para cualquier entero no negativo p

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2}&\left|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}z^p}e^{-zw^2}\left(\mathsf{m}(w)-\sum_{j=0}^{N}b_{2j}w^{2j}\right)\mathrm{d}w\right|\\ &\le\int_0^{1/2}|-w^2|^p|e^{-zw^2}|\left|\mathsf{m}(w)-\sum_{j=0}^{N}b_{2j}w^{2j}\right|\mathrm{d}w\\ &\le M\int_0^{1/2}e^{-\mathrm{Re}(z)w^2}w^{2N+2+2p}\mathrm{d}w\end{aligned}\tag{C.8}$$

para alguna constante M independiente de z

$$\le M\int_0^{1/2}w^{2N+2+2p}\mathrm{d}w<\infty\ .$$

Por lo cual la derivada p ésima de $\mathfrak{G}(z,w)=e^{-zw^2}\left(\mathsf{m}(w)-\sum_{j=0}^{N}b_{2j}w^{2j}\right)$ respecto a la variable z es integrable en w para toda $z\in\mathbb{C}$. Además

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}^{p+1}}{\mathrm{d}z^{p+1}}\mathfrak{G}(z,w)\right|&\le|w^2|^{p+1}|e^{-zw^2}|\left|\mathsf{m}(w)-\sum_{j=0}^{N}b_{2j}w^{2j}\right|\\ &\le M\mathfrak{g}(w)\end{aligned}$$

con $\mathfrak{g}(w)=w^{2N+4+2p}$. Luego como $\mathfrak{g}(w)$ es integrable, del teorema de convergencia dominada de Lebesgue y (C.8)

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{G}_2^{(k)}\right| &= \left|\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\mathfrak{G}(z,w)\mathrm{d}w\right| \\ &\leq M\int_0^{1/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(z)w^2} w^{2N+2+2k}\mathrm{d}w\end{aligned}$$

si $\eta = \sqrt{\mathrm{Re}(z)}w$

$$\begin{aligned}&= M\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Re(z)}}} \mathrm{e}^{-\eta^2} \frac{\eta^{2N+2k+2}}{(\mathrm{Re}(z))^{N+k+1}} \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{\mathrm{Re}(z)}} \\ &\leq \frac{M}{|\mathrm{Re}(z)|^{(2N+2k+3)/2}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\eta^2}\eta^{2N+2k+2}\mathrm{d}\eta \\ &\leq \frac{M}{|z|^{(2N+2k+3)/2}}\ .\end{aligned}$$

Por lo cual

$$\mathrm{G}_2^{(k)} = \mathrm{O}(z^{-\frac{1}{2}(2N+2k+3)})\ . \tag{C.9}$$

Por otro lado, por un argumento similar al de arriba podemos intercambiar derivada con integral en la expresión de $\mathrm{G}_1^{(k)}$ y obtener

$$\begin{aligned}\mathrm{G}_1^{(k)} &= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\left(\sum_{j=0}^N b_{2j}\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-zw^2}w^{2j}\mathrm{d}w\right) \\ &= \sum_{j=0}^N b_{2j}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-zw^2}w^{2j}(-w^2)^k\mathrm{d}w - \sum_{j=0}^N b_{2j}\int_{\frac{1}{2}}^\infty \mathrm{e}^{-zw^2}w^{2j}(-w^2)^k\mathrm{d}w\ .\end{aligned} \tag{C.10}$$

La integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-zw^2}w^{2(k+j)}\mathrm{d}w$ es igual a la integral a lo largo de la línea $\{t/\sqrt{z} \mid t\geq 0\}$ en el plano complejo. Es decir

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-zw^2}w^{2j}(-w^2)^k\mathrm{d}w &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\frac{t^{2j}}{(\sqrt{z})^{2j}}\frac{(-t^2)^k}{(\sqrt{z})^{2k}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{z}} \\ &= \frac{(-1)^k}{z^{k+j}\sqrt{z}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}t^{2(k+j)}\mathrm{d}t\ .\end{aligned}$$

Luego de (C.10)

$$\mathrm{G}_1^{(k)} = \sum_{j=0}^{N} (-1)^k b_{2j} \frac{d_{j+k}}{z^{k+j}\sqrt{z}} - \sum_{j=0}^{N} b_{2j} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \mathrm{e}^{-zw^2} w^{2j} (-w^2)^k \mathrm{d}w \tag{C.11}$$

con $d_r = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} t^{2r} \mathrm{d}t$. En particular $d_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Aseveramos que el segundo término de $\mathrm{G}_1^{(k)}$ (en la ecuación (C.11)) es $\mathrm{O}(z^{-\infty})$. Ésto es porque para cualquier número natural r

$$\begin{aligned} &\left| z^r \sum_{j=0}^{N} b_{2j} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \mathrm{e}^{-zw^2} w^{2(k+j)} \mathrm{d}w \right| \\ &\qquad \le M |\mathrm{Re}(z)|^r \sum_{j=0}^{N} |b_{2j}| \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(z) w^2} w^{2(k+j)} \mathrm{d}w \end{aligned}$$

si consideramos el cambio de variables $v = w - 1/2$

$$\begin{aligned} &\le M |\mathrm{Re}(z)|^r \sum_{j=0}^{N} |b_{2j}| \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(z)/4} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(z) v^2} (v + 1/2)^{2(k+j)} \mathrm{d}v \\ &= M |\mathrm{Re}(z)|^r \sum_{j=0}^{N} \frac{|b_{2j}| \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(z)/4}}{|\mathrm{Re}(z)|^{k+j+1/2}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} (t + \sqrt{\mathrm{Re}(z)}/2)^{2(k+j)} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

esto último es tomando el cambio de variable $t = \sqrt{\mathrm{Re}(z)} v$. Nótese que la integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} (t + \sqrt{\mathrm{Re}(z)}/2)^{2(k+j)} \mathrm{d}t$ son polinomios en la variable $\sqrt{\mathrm{Re}(z)}$. Entonces el lado derecho de la anterior desigualdad es acotada por una constante que depende de N, r y k. Por lo cual, el segunto término de $\mathrm{G}_1^{(k)}$ es $\mathrm{O}(z^{-r})$. Es decir

$$\mathrm{G}_1^{(k)} = \mathrm{O}(z^{-\infty}) \; . \tag{C.12}$$

Luego de (C.7), (C.9), (C.11) y (C.12)

$$\begin{aligned} \mathrm{G}^{(k)}(z) &= \sum_{j=0}^{N} (-1)^k b_{2j} \frac{d_{j+k}}{z^{k+j}\sqrt{z}} + \mathrm{O}(z^{-\frac{1}{2}(2N+2k+3)}) \\ &= (-1)^k \frac{\sqrt{z}}{z^{k+1}} \left[\sum_{j=0}^{N} \frac{d_{j+k}}{z^j} b_{2j} + \mathrm{O}(z^{-N-1}) \right] . \end{aligned} \tag{C.13}$$

Analicemos ahora $\mathrm{H}^{(k)}$, definida en (C.6). Nótese que $\mathrm{H}(z) = \frac{2z}{n-1}[\mathrm{G}(z) +$

$\mathrm{G}^{(1)}(z)]$. Luego

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^{(k)} &= \frac{2}{n-1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}z^j}z\frac{\mathrm{d}^{k-j}}{\mathrm{d}z^{k-j}}\left[\mathrm{G}(z)+\mathrm{G}^{(1)}(z)\right]\\
&= \frac{2z}{n-1}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\left[\mathrm{G}(z)+\mathrm{G}^{(1)}(z)\right]+\frac{2k}{n-1}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\left[\mathrm{G}(z)+\mathrm{G}^{(1)}(z)\right]\\
&= \frac{2}{n-1}\left[z\mathrm{G}^{(k)}(z)+z\mathrm{G}^{(k+1)}(z)+k\mathrm{G}^{(k-1)}(z)+k\mathrm{G}^{(k)}(z)\right].
\end{aligned}$$

De (C.13)

$$\begin{aligned}
z\mathrm{G}^{(k)}(z)+k\mathrm{G}^{(k-1)}(z) &= z(-1)^k\frac{\sqrt{z}}{z^{k+1}}\left[\sum_{j=0}^{N}\frac{d_{j+k}}{z^j}b_{2j}+\mathrm{O}(z^{-N-1})\right]\\
&\quad + z(-1)^{k-1}\frac{\sqrt{z}}{z^k}\left[\sum_{j=0}^{N}\frac{d_{j+k-1}}{z^j}b_{2j}+\mathrm{O}(z^{-N-1})\right]\\
&= (-1)^k\frac{\sqrt{z}}{z^k}\left[\sum_{j=0}^{N}\frac{b_{2j}}{z^j}(d_{j+k}-kd_{j+k-1})+\mathrm{O}(z^{-N-1})\right]
\end{aligned}$$

donde estamos tomando la convención que $kd_{k-1}=0$ si $k=0$. De manera análoga

$$z\mathrm{G}^{(k+1)}(z)+k\mathrm{G}^{(k)}(z) = \frac{(-1)^{k+1}}{z^{k+\frac{1}{2}}}\left[\sum_{j=0}^{N}\frac{b_{2j}}{z^j}(d_{j+k+1}-kd_{j+k})+\mathrm{O}(z^{-N-1})\right].$$

Por lo cual

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^{(k)}(z) = \frac{2}{n-1}(-1)^k\frac{\sqrt{z}}{z^k}\Bigg[&b_0(d_k-kd_{k-1})\\
&+\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{z^j}(b_{2j}-b_{2(j-1)})(d_{j+k}-kd_{j+k-1})+\mathrm{O}(z^{-N-1})\Bigg].
\end{aligned}\tag{C.14}$$

Por lo tanto de (C.2)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}z^s}g(z) &= \frac{2\sqrt{n-1}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}z^s}\left(\mathrm{e}^{\,z}\mathrm{J}(z)+\mathrm{e}^{\,z}\mathrm{I}(z)\right)\\
&= \frac{2\sqrt{n-1}}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}\frac{\mathrm{d}^{s-k}}{\mathrm{d}z^{s-k}}\mathrm{e}^{\,z}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}(\mathrm{J}(z)+\mathrm{I}(z))\\
&= \frac{2\sqrt{n-1}}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}\mathrm{e}^{\,z}(\mathrm{J}^{(k)}(z)+\mathrm{I}^{(k)}(z))
\end{aligned}$$

por (C.4), (C.5)

$$= \frac{2\sqrt{n-1}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} e^{z} \left(\mathrm{G}^{(k)}(z) + \mathrm{H}^{(k)}(z) \right) + e^{z} \mathrm{O}(z^{-\infty})$$

de (C.13) y (C.14)

$$= 2e^{z} \left(\frac{z(n-1)}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \frac{(-1)^k}{z^k} \left[\frac{2}{n-1} b_0 (d_k - k d_{k-1}) \right.$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{z^j} \left(\frac{2}{n-1} (b_{2j} - b_{2(j-1)})(d_{j+k} - k d_{j+k-1}) \right.$$
$$\left. \left. + b_{2(j-1)} d_{k+j-1} \right) + \mathrm{O}(z^{-N-1}) \right] .$$

De aquí que

$$\frac{\mathrm{d}^s g(z)}{\mathrm{d}z^s} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} z^{1/2} \exp(z) \left[1 + \frac{a_{1,s}}{z} + \frac{a_{2,s}}{z^2} + ... + \frac{a_{N,s}}{z^N} + \mathrm{O}(z^{-(N+1)}) \right]$$

para algunas constantes $a_{1,s}, a_{2,s}, ..., a_{N,s}$.

$\blacksquare$

Perspectivas

Como posibles proyectos futuros podemos mencionar

- En el contexto de la tesis obtener un sistema de estados coherentes y una transformada de Bargmann para el espacio de Hilbert de estados ligados del átomo de Hidrógeno.

- En la proposición 5.3 se muestra que para $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{Q}^n - \{0\}$ con $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} \neq 0$ y $|\arg(\boldsymbol{\cdot\beta})| < \pi$

$$\langle \Phi_{\boldsymbol{\beta},\hbar}, \Phi_{\boldsymbol{\alpha},\hbar} \rangle_{S^n} = C_1 \left(\frac{\hbar^2}{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right)^{\frac{n-2}{2}} \exp\left(\frac{\sqrt{2\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}}}{\hbar} \right) [1 + \mathrm{O}(\hbar)]$$

  donde C_1 es una constante. Quiero dar una interpretación geométrica de la fase que aparece en el término principal a través del área simpléctica asociada al triángulo geodésico en el espacio fase conteniendo los puntos $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ y algún origen.

- En [28] Twareque y Englis muestran que se puede obtener un producto estrella en base a operadores de Toeplitz. Basado en ésto quiero encontrar un producto estrella en $\mathbb{C}^n$ tomando operadores de Toeplitz en el espacio $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}^m}$ con $n = 2, 3, 5$ y $m = 2, 4, 8$ respectivamente.

- Encontrar el producto estrella en $\mathbb{Q}^n$ proveniente de operadores de Toeplitz en el espacio de Bargmann-Todorov $\mathcal{E}_n$.

- Sea T_ϕ operador de Toeplitz sobre $L^2(S^n)$, $n \geq 2$ con símbolo ϕ. Pretendo encontrar las condiciones necesarias y suficientes sobre ϕ para que $\mathbf{B}_n \mathrm{T}_\phi (\mathbf{B}_n)^{-1}$ sea un operador pseudo-diferencial sobre la esfera S^n.

Bibliografía

[1] Abraham, R., Marsden, J., *Foundations of Classical Mechanics*, Westviem Press, Cambridge, MA, 2nd ed, 1978.

[2] Abramowitz, M., Stegun,I. A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, New York 1972.

[3] Bargmann, V. *On a Hilbert Space of Analytic Functions and an Associated Integral Transform. Part I.* Comm. on Pure and Appl. Math., 14 , 1961,187-214.

[4] Bargmann, y V. Todorov, I. T. *Spaces of analytic functions on a complex cone as carries for the symmetric tensor representations of* $\mathrm{SO}(n)$, J. Math. Physics, Vol 18, No. 6, June 1977, 1141-1148.

[5] Davtyan, L., Mardoyan, G., Pogosyan, G., Sissakian, S., and Ter-Antonyan, V., *Generalized KS transformation: from five-dimensional hydrogen atom to eight-dimensional isotropic oscillator*, J. Phys. A 20, 6121âĂŞ6125 1987.

[6] Gel'fand, I. M. y Shilov, G. E., *Generalized functions*, Vol 1, Properties and Operators, Academic Press, New York and London, 1964.

[7] Gradshteyn, I.S. y Ryzhik, I.M. *Table of integrals, series, and products*, Fifth edition. Academic Pres, United Kingdom (1994), editado por Alan Jeffrey.

[8] Hall, B. *The Segal-Bargmann coherent states transform for compact Lie Groups*, J. Funct. Anal. 122, 103-151, 1994.

[9] Hall, B. *Holomorphic methods in analysis and mathematical physics*, Contemporary Mathematics, Vol 260, edited by S. Pérez-Esteva and C. Villegas-Blas , American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[10] Graffi, S y Parmeggiani, A. *Quantum evolution and classical flow in complex space*, Commun, Math. Phys, 128, 393-409 1990.

[11] Hall, B y Mitchell, J. *Coherent states on the sphere*, J. Math. Phys. 43, 1211-1236, 2002.

[12] Helgason, S. *Topics in Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*, Progress in Mathematics, Vol. 13, Birkhäuser, 1981.

[13] Hörmander, L. *The analysis of Linear Partial Differential Operators*, Vol I. Distribution Theory and Fourier Analysis, 2nd eds. Springer, Berlin, 1990.

[14] Horowski, Maciej y Odzijewicz, Anatol *Geometry of the Kepler system in coherent states approach*, Ann. Inst. H. PoincarÃľ Phys. ThÃľor. 59, no. 1, 69âĂŞ89, 1993.

[15] Ii, K. *On a Bargmann-type transform and a Hilbert space of holomorphic functions*, Tohoku Math. J. 38, 57-69, 1986.

[16] Kowalski, K y Rembielinski, J. *The Bargmann representation for the quantum mechanics on a sphere*, J. Math. Phys. 42, 4138-4147, 2001.

[17] Kummer, M. *On the regularization of the Kepler problem*, Commun. Math. Phys. 84, 133âĂŞ152 1982.

[18] Kustaanheimo, P., and Stiefel, E., *Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization*, J. Reine Angew. Math. 218, 204âĂŞ219 1965.

[19] Levi-Civita, T. *Sur la rÃľsolution qualitative du probleme restrÃľint des trois corps. In: Opere Matematiche*, Vol. Secondo. Zanichelli, Bologna, 1956.

[20] Martinez, André. *Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*, Springer-Verlag, 2002

[21] Merzbacher, E. *Quantum Mechanics.* John Wiley and Sons, Inc. 1998. Third edition.

[22] Moser, J. *Regularization of KeplerâĂŹs problem and the averaging method on a manifold*, Commun. Pure Appl. Math. 23, 609âĂŞ636 1970.

[23] Rawnsley, J. *A non unitary pairing of polarizations for the Kepler problem*, Trans. Am. Math. Soc., 250, 167-180, 1979.

[24] Reed, M y Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis*, Academic Press, New York, London, 1972.

[25] Rose, M. E. *Elementary Theory of Angular Momentum* Wiley, New York, 1957.

[26] Schrödinger, E. *Naturwissenschaften*, 14, 664, 1926.

[27] Stenzel, M. *The Segal-Bargmann transform on a symmetric space of compact type*, J. Funct. Anal. 165, 44-58, 1999.

[28] Tawareque, S. y Englis, M. *Berezin-Toeplitz Quantization over Matrix Domains*, Contributions in mathematical physics, 1âĂŞ36, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2007.

[29] Thomas, L., Wassell, S.. *Semiclassical approximation for Schroödinger Operators on a 2-sphere at high energy*, J. Math. Phys. 36, 5480-5505,1995.

[30] Tsoy-Wo Ma. *Higher Chain Formula proved by Combinatorics*, Electronic Journal of Combinatorics, Vol 16(1): N21, 2009.

[31] Villegas-Blas, C. *The Bargmann transform and canonical transformations*, J.Math. Phys. 43(5), 2249âĂŞ 2283 (2002)

[32] Villegas-Blas, C. *The Bargmann transform for $L^2(S^3)$ and regularization of the Kepler problem*, Mathematical results in quantum mechanics (Taxco, 2001), Contemporary Mathematics, vol. 307, 311âĂŞ318. American Mathematical Society, Providence 2002.

[33] Villegas Blas, C. *The Bargmann transform and the regularization of the 2, 3, 5-dimensional Kepler problem*, J. Math. Phys. 47(6), 062110 (2006)

[34] Wada, R. *On the Fourier-Borel transformation of analytic functionals on the complex-sphere*, Todoku Math, J., 38, 417-432, 1986.

[35] Zworski, M. y Evans, L.C. *Lectures on Semiclassical Analysis*, Lectures notes. http://math.berkeley.edu/ zworski/