



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**RELATIVIDAD EN VARIABLES DE CONEXIÓN**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**FÍSICO**

**P R E S E N T A:**

**JUAN JOSÉ VEGA VELA**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. JERÓNIMO ALONSO CORTEZ QUEZADA  
2011**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Relatividad en variables de conexión.

Juan José Vega Vela

Asesor: Dr. Jerónimo Alonso Cortez Quezada  
Facultad de Ciencias, U.N.A.M.  
(2011)



## AGRADECIMIENTOS:

Este trabajo no habría podido llevarse a cabo sin la supervisión de mi asesor, por esto, quiero agradecer profundamente al Dr. Jerónimo Cortez por haberme ayudado de manera incondicional en la tarea de adquirir nuevo conocimiento. Gracias por tu amistad y por tu tiempo, siempre lo valoraré.

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme brindado la oportunidad de aprender de los mejores, así como a los sinodales de este trabajo de tesis: el Dr. Darío Núñez, el Dr. Igor Peña, el Dr. Pablo Barberis, el Dr. Leonardo Patiño y a mi asesor el Dr. Jerónimo Cortez.

Quiero agradecer a todas las personas que me han brindado su amistad y que a lo largo de los años me han enseñado a valorar las cosas buenas de la vida. Gracias a:

Antonio, por ser parte de mi familia y tus buenos consejos.  
Gabriel, por los domingos de fútbol y los entrenamientos de box.  
Jan, por todas las olas que hemos surfado.  
José Luis, que te digo, gracias por todo.  
Lupita y Benito, gracias por estar ahí, los quiero.  
Paola, por revisar la ortografía y por ser parte importante de mi vida.  
Rodrigo, por los buenos tiempos y fiestas.  
Stephany, por hacerme reír y ser mi doctora.  
Xavier, también que te digo, gracias por todo.

Gracias a las familias: Auriolos, Barrial, Carrillo, Escalante, Herrera, Ponce, Rojas, Sancén, Vela, Valderrábano.

En Rancho Los Amigos, gracias a Manuel, Chabelita, Ana, Wicho y Bárbaro.

Finalmente quiero agradecer a mi familia por todo el apoyo que me han brindado a lo largo de toda mi vida, gracias por estar siempre ahí. Gracias papá y mamá, son los mejores padres del mundo, los amo. Gracias a mis hermanas, siempre voy a estar ahí, las amo.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Relatividad General.</b>	<b>5</b>
2.1. Origen de la Relatividad General . . . . .	5
2.2. Ecuaciones de Einstein . . . . .	7
2.3. Aplicaciones y predicciones de la Relatividad General. . . . .	10
2.3.1. Cosmología . . . . .	10
2.3.2. Ondas Gravitacionales . . . . .	13
2.4. Formulación Lagrangiana . . . . .	15
<b>3. Formulación Hamiltoniana de la Relatividad General</b>	<b>21</b>
3.1. Descomposición 3+1 del espacio-tiempo. . . . .	21
3.2. La Funcional de Acción en la formulación 3+1. . . . .	25
3.3. El Hamiltoniano de Relatividad General . . . . .	27
3.4. Ecuaciones de campo en forma Hamiltoniana. . . . .	29
3.5. Formulación canónica y constricciones . . . . .	35
<b>4. Relatividad General a la Palatini</b>	<b>39</b>
4.1. Haces vectoriales. . . . .	39
4.2. Conexión y curvatura en haces vectoriales. . . . .	43
4.3. Acción de Palatini . . . . .	46
<b>5. Relatividad General en Variables de Conexión</b>	<b>53</b>
5.1. Preámbulo . . . . .	53
5.2. Variables de conexión . . . . .	54
5.2.1. Extensión del espacio fase . . . . .	54
5.3. Transformación canónica . . . . .	57
<b>6. Discusión y comentarios adicionales</b>	<b>65</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>67</b>
A.1. Variedades y Análisis Tensorial . . . . .	67
A.1.1. Espacio topológico y variedad diferenciable . . . . .	67
A.1.2. Vectores, 1-formas y tensores . . . . .	69

A.1.3.	Mapeos inducidos . . . . .	72
A.1.4.	Derivada de Lie . . . . .	73
A.1.5.	Formas diferenciales . . . . .	74
A.2.	Geometría Riemanniana . . . . .	76
A.2.1.	Tensor métrico . . . . .	76
A.2.2.	Conexión afín . . . . .	77
A.2.3.	Transporte paralelo y geodésicas . . . . .	78
A.2.4.	Derivada covariante de campos tensoriales . . . . .	79
A.2.5.	Conexión métrica . . . . .	80
A.2.6.	Curvatura . . . . .	81
A.3.	Grupos y Álgebras de Lie . . . . .	83
A.3.1.	Grupos de Lie . . . . .	83
A.3.2.	Álgebras de Lie . . . . .	84
A.3.3.	Ecuaciones de estructura . . . . .	85
A.3.4.	Acción de grupos de Lie sobre variedades . . . . .	86
A.4.	Hipersuperficies . . . . .	87
A.4.1.	Hipersuperficies y 2-superficies . . . . .	87
A.4.2.	Cálculo en hipersuperficies . . . . .	89
A.4.3.	Ecuaciones de Gauss-Codazzi . . . . .	92

<b>Bibliografía</b>	<b>95</b>
---------------------	-----------

# Capítulo 1

## Introducción

Las teorías de Relatividad y Mecánica Cuántica revolucionaron a la física en el primer tercio del siglo XX y abrieron nuevas ventanas para explorar y entender a la naturaleza. Conceptos como tiempo, espacio y materia fueron reelaborados y cambiaron en forma radical. A lo largo de ocho décadas se han puesto a prueba estas teorías y siempre se ha corroborado su validez; sus predicciones se han concretado en hallazgos y en un gran avance para la ciencia. La teoría de relatividad es hoy en día la mejor teoría para describir la naturaleza del espacio-tiempo, en ella se “funden” espacio y tiempo en una sola entidad, *el espacio-tiempo*, y la noción de tiempo y espacio absolutos es eliminada. En su versión general, la relatividad nos dejó como lección central que *la geometría le dice a la materia como moverse y que la materia le dice a la geometría como debe ser su curvatura*; es decir, gravedad es geometría. Entre los logros más sonados de la teoría se encuentra la predicción exacta del corrimiento observado en la órbita del planeta Mercurio, la existencia de ondas gravitacionales y la formación de agujeros negros. Gracias a la relatividad se han desarrollado áreas como por ejemplo la cosmología moderna, que es el área a través de la cual se estudia y busca entender el génesis y evolución de nuestro Universo.

A pesar del cúmulo de éxitos y avances que la relatividad ha aportado, debe señalarse que el poder predictivo de la teoría está acotado y que éste es (esencialmente) nulo para describir fenómenos físicos de índole gravito-cuántica, como aquellos que presumiblemente se presentan en la era planckiana de nuestro Universo (i.e., a tiempos del orden de  $10^{-44}$  s) o en la etapa final de la evolución de agujeros negros, por citar un par de ejemplos. Para conseguir una imagen física de lo que ocurre en el mundo gravito-cuántico es necesario conciliar gravedad y mecánica cuántica en una sola teoría que nos permita acceder al régimen planckiano; la búsqueda por más de sesenta años de una teoría de gravedad cuántica ha sido, sin embargo, infructuosa y el mundo planckiano continúa siendo inaccesible. No hemos conseguido formular una teoría que incorpore Relatividad General y Mecánica Cuántica, pilares de la física moderna, y por consiguiente la gravedad se mantiene como la única de las cuatro fuerzas fundamentales que no tiene una descripción cuántica. La revolución

del siglo XX está inconclusa, el problema de la cuantización del campo gravitacional es, quizá, el problema teórico más importante en la física actual.

En contraste con el resto de las teorías clásicas de campo, donde el espacio-tiempo y los campos son dos entes bien separados y sin ninguna influencia entre sí, en relatividad no hay más que un ente fundamental: el campo, éste tiene la doble función de describir la dinámica gravitacional *y* la estructura del espacio tiempo. Esta dualidad es básicamente la responsable de que en el caso gravitacional falle el empleo de procedimientos que han tenido éxito para cuantizar otros campos.

Entre las varias líneas de investigación que se han desarrollado para cuantizar el campo gravitatorio se encuentra la llamada *Formulación Canónica de la Gravedad Cuántica*. En esta línea se prescindir de una métrica de fondo fija y se intenta construir una teoría cuántica en cuyo espacio de Hilbert los operadores correspondientes a toda la métrica sean adecuadamente representados. El programa comenzó en los cincuenta y corrió a cargo de Bergmann y Dirac. Posteriormente, entre finales de los años cincuenta y principios de los sesenta, Bergmann, Dirac, Peres, Arnowit, Deser y Misner exhibieron la estructura canónica de la relatividad. En los 70, época en la que buena parte de la comunidad estaba impresionada e influenciada por el formidable Modelo Estándar de Física de Partículas, la actividad en el campo de la gravedad cuántica tuvo una fuerte inclinación hacia aspectos de no renormalización de la teoría, supergravedad y teorías con derivadas de orden superior. La formulación canónica no tuvo mayor avance en esos años y fue hasta 1986 cuando se presentó un nuevo e importante resultado dentro de esta línea de investigación: A. Ashtekar dió a conocer la formulación de la Relatividad General en términos de variables de conexión [Ashtekar 1986, Ashtekar 1987]. El resultado sería el origen de la Gravedad Cuántica de Lazos [Ashtekar & Lewandowski 2004, Rovelli 2004, Thiemann 2007, Rovelli 2008], un nuevo camino en la búsqueda de una teoría cuántica de la gravedad.

En este trabajo de tesis se presenta en forma completa y consistente la reformulación de la Relatividad General en términos de variables de conexión que, como se mencionó anteriormente, es el punto de partida de la llamada Gravedad Cuántica de Lazos. La reformulación se presenta en forma constructiva y es una versión ligeramente distinta de la original planteada por Ashtekar, en tanto que se contemplan conexiones reales [Barbero 1995] y, por esto, no es necesario introducir condiciones de realidad. Cabe señalar que el entendimiento de la gravedad cuántica de lazos pasa necesariamente por una adecuada comprensión de la reformulación (“tipo Yang-Mills”) de la relatividad en variables de conexión, que es el terreno adecuado para realizar una cuantización independiente del fondo y en la cual se pueden considerar observables cuánticos tales como operadores de área y de volumen. El trabajo está estructurado de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 se presenta una breve introducción a la teoría de la Relatividad General así como algunas de sus predicciones y aplicaciones. En la parte final de este capítulo se introduce el formalismo Lagrangiano de la Relatividad General, inclu-

yendo términos de frontera. En el Capítulo 3 se estudia la formulación Hamiltoniana de la Relatividad General, donde también se consideran los términos de frontera. En este capítulo, basado en la presentación de [Poisson 2004], veremos por qué se dice que la Relatividad General es una teoría de constricciones. El Capítulo 4 toma como pretexto la formulación de la Relatividad General a la Palatini para introducir una serie de herramientas matemáticas necesarias para entender la formulación clásica de una teoría de norma y comprender, después, la formulación de la relatividad en variables de conexión. En este capítulo seguiremos a [Baez & Muniain 1994] y se verán conceptos como el de haz fibrado vectorial, triadas, tétradas, conexiones y curvatura para finalmente presentar a la relatividad en la formulación de Palatini, que es de gran importancia para tener una visión más clara de la formulación en conexiones (i.e., formulación a la Ashtekar). El Capítulo 5 está dedicado a presentar la reformulación de Relatividad General como una teoría de conexiones. En este capítulo se utilizarán los conceptos y herramientas matemáticas desarrollados en los anteriores capítulos. Por último, en el Capítulo 6 se presenta una breve discusión y se hacen algunos comentarios adicionales; en particular se discute la importancia física del parámetro de Immirzi en la teoría y se presentan algunos elementos que forman parte de los cimientos de la Gravedad Cuántica de Lazos. Por completez y para ayudar en la comprensión de este trabajo, al final se incluye un apéndice que contiene la mayor parte de las matemáticas necesarias para lograr un adecuado entendimiento.



# Capítulo 2

## Relatividad General.

En este capítulo daremos una introducción muy breve a la teoría de la Relatividad General (RG) formulada por A. Einstein en 1915. Suponemos que el lector está ya familiarizado con la teoría Especial de la Relatividad, así que no abundaremos en ésta. A lo largo del texto usaremos unidades en las cuales la velocidad de la luz es  $c = 1$  y la constante de la gravitación universal es  $G = 1$ .

### 2.1. Origen de la Relatividad General

A finales del siglo XIX, dos teorías físicas de las cuales se tenía buen conocimiento eran la mecánica newtoniana y el electromagnetismo. La primera es la que se encarga de describir la naturaleza mediante la aplicación de las leyes de Newton, la segunda consiste en los fenómenos físicos que se pueden describir mediante las ecuaciones de Maxwell<sup>1</sup>.

De las ecuaciones de Maxwell en el vacío podemos deducir que el campo eléctrico y el magnético deben satisfacer la ecuación de onda y que la velocidad con que se propagan es la velocidad de la luz en el vacío. H. Hertz en el año de 1887 confirmó lo anterior, generando y recibiendo ondas de radio. En esta época se creía que las ondas electromagnéticas necesitaban un medio para poder propagarse (éter), ya que la experiencia parecía indicarlo así, como en la propagación de ondas en el agua. Entonces, lo siguiente era buscar evidencia del medio sobre el cual se propagaba la luz, fue aquí donde el Principio de Relatividad entró en juego: Galileo había postulado que las leyes de la física deben ser las mismas para observadores que se mueven con velocidad constante unos respecto a otros. Observó que no tiene sentido decir que un observador está en estado de reposo o movimiento (absoluto) pues tales estados no pueden ser detectados mediante las leyes de la física; es decir, notó que no hay marcos de referencia privilegiados. Esto, a la postre se traduciría en que las leyes de Newton son invariantes (tienen la misma forma) en cualquier marco de

---

<sup>1</sup>James C. Maxwell fue quien construyó una teoría unificada de la electricidad y el magnetismo basándose fundamentalmente en los trabajos de M. Faraday.

referencia *inercial*.

La equivalencia entre marcos de referencia inerciales galileanos (i.e., referenciales inerciales conectados por transformaciones de Galileo) no se cumplía, sin embargo, cuando se consideraban ondas propagándose en un medio. La ecuación de onda, como sabemos, no es invariante bajo transformaciones de Galileo, lo que implica que el marco de referencia donde el medio se encuentra en reposo es un marco distinguido, privilegiado. Como la propagación de ondas electromagnéticas (luz) requería la presencia del éter, entonces sería posible medir el paso de la Tierra a través de éste, midiendo la velocidad de la luz en diferentes direcciones relativas al movimiento de la Tierra a través del éter. Este fue precisamente el propósito del experimento de Michelson-Morley, determinar la presencia del éter mediante la medición de la velocidad de la luz en diferentes direcciones mientras la Tierra viajaba alrededor del sol. El resultado del experimento fue que la velocidad de la luz no cambiaba, sugiriendo la eliminación del éter como medio de propagación para las ondas electromagnéticas.

Había pues un conflicto entre el experimento y las transformaciones de Galileo; si las leyes de la física habrían de ser las mismas en todo referencial inercial (Principio de Relatividad), entonces la ley de adición de velocidades galileana debería estar equivocada y por consiguiente también las transformaciones entre marcos inerciales. Ante la evidencia, Einstein fue el único que se atrevió a dar un brinco intelectual y supuso que deberían existir transformaciones más generales que permitieran la invarianza de las ecuaciones de Maxwell, tales transformaciones resultaron ser las de Lorentz (que ya habían sido descubiertas por H.A. Lorentz algún tiempo atrás), transformaciones que a bajas velocidades tienden a las de Galileo (de tal suerte que en el límite de bajas velocidades se recupera la teoría newtoniana). En el año de 1905, Einstein formuló la Relatividad Especial, teoría basada en los siguientes postulados:

1. **Principio de Relatividad.** Las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales.
2. **Constancia de la Velocidad de la Luz.** La velocidad de la luz (en el vacío) es la misma en todos los marcos de referencia inerciales y es independiente del movimiento de la fuente. (En otras palabras, Einstein postula que la velocidad de la luz *es una constante de la naturaleza*.)

Si la velocidad de la luz es independiente del movimiento de la fuente, entonces el tiempo y el espacio pierden su carácter newtoniano absoluto y se convierten en conceptos relativos (al observador). Algunas conclusiones implícitas en la teoría son:

1. **Relatividad de la Simultaneidad.** Dos eventos que ocurren al mismo tiempo pero en diferentes posiciones del espacio de acuerdo a un conjunto de observadores, no ocurren al mismo tiempo para cualesquiera otros observadores que se mueven con velocidad constante con respecto al primer conjunto.

2. **Dilatación del Tiempo.** El intervalo de tiempo entre dos eventos que ocurren en la misma posición, de acuerdo a un conjunto de observadores, es siempre más pequeño que el intervalo de tiempo entre estos mismos eventos, medidos por observadores que se mueven a velocidad constante relativa al primer conjunto.
3. **Contracción de la Longitud.** La longitud de un objeto medido por observadores en un marco en el cual éste se encuentra en reposo es siempre más grande que la longitud del mismo objeto medido por observadores para los cuales éste está en movimiento.

En la teoría de la relatividad especial se pone de manifiesto que la velocidad máxima con la que pueden propagarse las interacciones físicas es la velocidad de la luz en el vacío, esto indicaba que la teoría newtoniana de la gravitación es incompatible con la relatividad especial, pues en la gravitación newtoniana la velocidad de propagación de la interacción es infinita. Fue esta incompatibilidad la que llevó a Einstein a formular la teoría de la Relatividad General (RG). En la siguiente sección explicaremos brevemente cómo se construyó esta teoría.

## 2.2. Ecuaciones de Einstein

Einstein fue capaz de entender y darse cuenta de que el campo dinámico que origina la gravitación es un *tensor métrico* que describe la curvatura del espacio-tiempo. El principio físico detrás de esta idea es la universalidad de la interacción gravitacional<sup>2</sup>, que de manera precisa está dada por el *Principio de Equivalencia*. A continuación trataremos de justificar cómo es que este principio físico nos lleva a describir la gravedad como curvatura-geometría de una variedad pseudo-Riemanniana (el lector ajeno a la geometría diferencial puede consultar la sección (A.1) del apéndice para ver las definiciones de los conceptos matemáticos que se mencionarán a continuación).

El Principio de Equivalencia se puede enunciar de diferentes maneras, entre las cuales está el principio de equivalencia débil que dice lo siguiente: *el movimiento de partículas en caída libre es el mismo en un campo gravitacional que en un marco acelerado uniformemente, en regiones del espacio-tiempo lo suficientemente pequeñas.*

Einstein generalizó el principio de equivalencia débil y lo convirtió en lo que conocemos como el Principio de Equivalencia de Einstein (PEE) (o Principio de Equivalencia Fuerte) que dice: *en regiones del espacio-tiempo lo suficientemente pequeñas, las leyes de la física se reducen a las de la relatividad especial; es imposible detectar la existencia de un campo gravitacional mediante experimentos locales.* Es el

---

<sup>2</sup>Que la respuesta de la materia a un campo gravitacional es universal, es decir, que todos los objetos caen con la misma aceleración en un campo gravitacional independientemente de su composición, fue mostrado por Galileo mediante experimentos donde dejó rodar esferas por un plano inclinado.

PEE lo que nos indica que debemos atribuir la acción de la gravedad a la curvatura del espacio-tiempo. No hay objetos que sean gravitacionalmente neutros con respecto a los cuales podamos medir la aceleración debida a la gravedad. De hecho, un objeto “no acelerado” (*libre*) es aquél que se encuentra en caída libre (es un referencial inercial local). En consecuencia, la idea newtoniana de gravedad como una fuerza queda eliminada, pues una fuerza es algo que origina una aceleración y en el nuevo enfoque aceleración cero significa movimiento libre en la presencia de un campo gravitacional.

Es importante enfatizar que la no uniformidad (en general) de los campos gravitacionales cancela la posibilidad de construir un marco de referencia inercial global (como los de relatividad especial); en RG sólo hay referenciales inerciales locales, que corresponden a sistemas en caída libre en regiones acotadas del espacio-tiempo<sup>3</sup>. En RG ocurre que dos partículas que sean inicialmente paralelas, en general tendrán líneas de mundo que no lo serán cuando éstas caigan libremente por un campo gravitacional no uniforme. Esto nos dice que nuestro espacio-tiempo no es plano, ya que el axioma de las paralelas no se cumple y entonces tenemos que hablar de un espacio-tiempo con curvatura.

El nuevo paradigma renuncia pues a la idea de expresar a la gravedad como una fuerza que se propaga a través del espacio-tiempo, así como a tener marcos de referencia inerciales globales. La consistencia física y matemática con las nuevas ideas pasa ahora por considerar que el espacio-tiempo es curvo y que la gravitación es una manifestación de dicha curvatura. La estructura matemática apropiada para describir espacios con curvatura es la de *variedad Riemanniana* (o, para el caso relativista, la Pseudo-Riemanniana), que básicamente es un tipo de espacio que localmente es plano, pero globalmente puede tener una geometría muy distinta a la plana. Es importante destacar que no puede probarse que la gravedad sea curvatura del espacio-tiempo, lo que en realidad puede hacerse es proponer la idea, derivar sus consecuencias y ver si éstas se apegan o no a las observaciones.

A partir de la idea gravedad-curvatura se propone como modelo de espacio-tiempo a una variedad pseudo-Riemanniana<sup>4</sup>. Luego, la curvatura del espacio-tiempo se construye a partir de la conexión, que es la herramienta matemática que nos permite transportar paralelamente a los vectores. Si la conexión es simétrica y además es compatible con la métrica, entonces decimos que es una conexión de Levi-Civita, para la cual tenemos que los coeficientes de conexión (símbolos de Christoffel) están dados por<sup>5</sup>

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(\partial_{\mu}g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}). \quad (2.1)$$

La conexión permite definir la derivada covariante, que por decirlo de alguna manera es una generalización del concepto de derivada parcial.

---

<sup>3</sup>Para una discusión más detallada al respecto ver por ejemplo [Schutz 1993]

<sup>4</sup>Ver sección (A.2) en el apéndice

<sup>5</sup>Salvo que se especifique otra cosa, los índices griegos toman valores 0,1,2,3, mientras que los latinos toman valores 1,2,3.

Ahora bien, para motivar las ecuaciones del campo gravitacional (ecuaciones de Einstein) consideraremos la generalización de la ecuación de Poisson para el potencial newtoniano,

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho, \quad (2.2)$$

donde  $\nabla^2 = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$  es el Laplaciano y  $\rho$  es la distribución de la densidad de materia en el espacio. En el lado izquierdo de (2.2) tenemos un operador diferencial de segundo orden que actúa sobre el potencial gravitacional y en el lado derecho tenemos la manera en que está distribuida la materia (fuente de la gravitación). Un “análogo” relativista de esta ecuación debe ser en términos de una igualdad entre cantidades tensoriales, pues son estos los objetos que permiten establecer ecuaciones invariantes ante transformaciones de coordenadas<sup>6</sup>. El tensor que generaliza la densidad de materia es el tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  (la fuente ya no sólo es la materia, sino también la energía). En (2.2) dada la distribución  $\rho$  (fuente) se encuentra  $\Phi$  y el problema queda resuelto; ahora quisiéramos hallar, dada la fuente  $T_{\mu\nu}$ , la geometría. Puesto que la geometría (curvatura, conexión, geodésicas, etc.) está completamente determinada por la métrica, es natural considerar a ésta como la variable fundamental y reemplazar entonces al potencial gravitacional por ella. La ecuación que estamos buscando es una que de un lado de la igualdad tenga la fuente (i.e., al tensor de energía-momento) y del otro un tensor en términos de la variable fundamental (métrica) y sus derivadas (de segundo orden, máximo); es decir, algo de la forma

$$[\mathcal{O}g]_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

donde  $\kappa$  es una constante. Como  $T_{\mu\nu}$  es tipo  $(0, 2)$  y simétrico, entonces  $[\mathcal{O}g]_{\mu\nu}$  debe serlo también. Cuando consideramos una conexión de Levi-Civita, es inmediato ver que el tensor de curvatura Riemanniana o tensor de Riemann tendrá derivadas hasta de segundo orden en la métrica  $g$ , ya que este tensor está dado en función de los símbolos de Christoffel y de sus primeras derivadas. Como los símbolos Christoffel están dados en función de las primeras derivadas de la métrica, entonces,  $R_{\sigma\mu\nu}^{\rho}$  contiene derivadas de segundo orden de  $g_{\mu\nu}$ . El tensor de curvatura no tiene el número apropiado de índices, pero podemos contraerlo y así obtener el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ . Si consideramos entonces que  $[\mathcal{O}g]_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$ , tendríamos que

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Esta ecuación tiene el nada despreciable inconveniente de que  $T_{\mu\nu}$  no se conserva, pues

$$\nabla^{\mu}R_{\mu\nu} \neq 0. \quad (2.5)$$

---

<sup>6</sup>Intuitivamente es claro que un espacio-tiempo no debe depender de las coordenadas en que se le describa; de tal manera, debe tenerse una formulación independiente de las coordenadas. Por el PEE sabemos también que las leyes de la física tienen que ser de carácter tensorial.

Así, necesitamos encontrar un tensor  $(0, 2)$ , simétrico y que se conserve. El tensor que cumple con estos requerimientos es el tensor de Einstein<sup>7</sup>

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

en donde  $R$  es el escalar de curvatura dado por  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ . Con esto tenemos que si  $[\mathcal{O}g]_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}$ , entonces las ecuaciones de Einstein para el campo gravitacional están dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Puede verificarse que para  $\kappa = 8\pi$ , esta ecuación reproduce la ecuación de Poisson para el caso de campo débil.

## 2.3. Aplicaciones y predicciones de la Relatividad General.

La RG es la mejor teoría del espacio-tiempo con la que contamos hoy en día; nos ha permitido entender y explicar en forma exacta el corrimiento del perihelio de Mercurio, describir la deflexión de la luz, modelar objetos compactos (estrellas), predecir el corrimiento al rojo gravitacional, etc. Entre los logros más sonados de la teoría se encuentran la predicción de agujeros negros, ondas gravitatorias y el desarrollo de la cosmología moderna. En esta sección esbozaremos un poco sobre los dos últimos (el lector interesado en estos temas puede consultar esencialmente cualquier libro de relatividad general, como por ejemplo [Bergström & Goobar 2004], [Carroll 2004], [Schutz 1993] y [Wald 1984]).

### 2.3.1. Cosmología

La cosmología actual está fundamentada en RG más el llamado Principio Copernicano (o Principio Cosmológico), que nos dice que el Universo se ve casi igual en cualquier parte y dirección. Cabe mencionar que este principio sólo aplica a gran escala donde las variaciones de densidad son pequeñas respecto al tamaño.

El Principio Copernicano está relacionado con dos propiedades matemáticas que una variedad puede tener: isotropía y homogeneidad. La *isotropía* se aplica a algún punto específico en la variedad y establece que el espacio es igual en cualquier dirección que uno mire. La *homogeneidad* es la afirmación de que la métrica es invariante ante traslaciones espaciales. Así, el Universo es una variedad diferenciable, espacialmente isótropo y homogéneo, que evoluciona en el tiempo. Más aún, es un espacio

---

<sup>7</sup>Podría agregarse el término  $\Lambda g_{\mu\nu}$ , con  $\Lambda$  una constante; sin embargo, aquí consideraremos las ecuaciones como originalmente fueron planteadas y omitiremos la discusión en torno a la *constante cosmológica*  $\Lambda$ .

globalmente hiperbólico, lo que significa que puede ser foliado por hipersuperficies <sup>8</sup> tipo-espacio, donde cada hipersuperficie 3-dimensional es maximalmente simétrica (en virtud de la isotropía y homogeneidad). Es decir, el espacio-tiempo tiene la forma  $\mathbf{R} \times \Sigma$ , donde  $\mathbf{R}$  representa la componente temporal y  $\Sigma$  la espacial, que es una 3-variedad maximalmente simétrica. En un espacio-tiempo como éste, la métrica está dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\sigma^2, \quad (2.8)$$

donde  $t$  es la coordenada del tiempo,  $a(t)$  es una función sólo de  $t$ , denominada *factor de escala*, y  $d\sigma^2$  es el elemento de línea en  $\Sigma$ ,

$$d\sigma^2 = h_{ij}(y)dy^i dy^j, \quad (2.9)$$

donde  $(y^1, y^2, y^3)$  son las coordenadas en  $\Sigma$  y  $h_{ij}$  es la métrica 3-dimensional maximalmente simétrica.

El elemento de línea para una hipersuperficie 3-dimensional maximalmente simétrica  $\Sigma$  está dada por

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2, \quad (2.10)$$

donde  $r$  es la coordenada radial,  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  es el elemento de línea estándar de  $S^2$  y  $k$  está dada, en el caso 3-dimensional ( $n = 3$ ), por

$$k = \frac{{}^{(3)}R}{n(n-1)} = \frac{{}^{(3)}R}{6}. \quad (2.11)$$

En esta expresión  ${}^{(3)}R$  es el escalar de Ricci asociado a la métrica 3-dimensional  $h_{ij}$ . De la ecuación (2.11) podemos ver que el valor de  $k$  establece la curvatura. Es común elegir una normalización donde  $k$  toma los valores siguientes

$$k \in \{-1, 0, +1\}. \quad (2.12)$$

El caso  $k = -1$  corresponde a una curvatura constante negativa en  $\Sigma$  y el Universo es llamado *abierto*; el caso  $k = 0$  corresponde a una curvatura nula en  $\Sigma$  y el Universo es llamado *plano*; finalmente, el caso  $k = +1$  corresponde a una curvatura positiva en  $\Sigma$  y el Universo es llamado *cerrado*. La métrica (elemento de línea) para el Universo está dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.13)$$

que se conoce como *métrica de Robertson-Walker*.

Insertando la métrica de Robertson-Walker en las ecuaciones de Einstein se encuentran las ecuaciones de Friedmann, que proporcionan la relación entre factor de escala  $a(t)$  con el contenido de materia-energía del Universo. Si consideramos fluido perfecto como contenido de materia-energía, en el marco comóvil tendremos que

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p), \quad (2.14)$$

---

<sup>8</sup>Ver Sección A.4 en el apéndice.

donde  $\rho$  es la densidad de energía mientras que  $p$  es la presión del fluido. La traza está entonces dada por

$$T = T^\mu_\mu = -\rho + 3p. \quad (2.15)$$

Utilizando lo anterior y reescribiendo las ecuaciones de Einstein en la forma siguiente

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (2.16)$$

tenemos que la ecuación correspondiente a  $R_{00} = -3\ddot{a}/a$  es

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p). \quad (2.17)$$

Por otro lado, como  $R_{\mu\nu} = 0$  si  $\mu \neq \nu$  y

$$R_{ii} = \left( \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2 \frac{k}{a^2} \right) g_{ii},$$

entonces el resto de las ecuaciones son simplemente la ecuación

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2 \frac{k}{a^2} = 4\pi(\rho - p). \quad (2.18)$$

Utilizando (2.17) para eliminar las segundas derivadas en (2.18) encontramos

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (2.19)$$

A las ecuaciones (2.17) y (2.19) se les conoce como las *ecuaciones de Friedmann*. Dada la geometría (i.e., dada una  $k = -1, 0$  o  $+1$ ) y la ecuación de estado (i.e., la relación entre  $\rho$  y  $P$ ) se resuelve para  $a(t)$  y se obtiene la métrica del Universo correspondiente. En los modelos cosmológicos más sencillos se considera la ecuación de estado  $P = \omega\rho$ , donde  $\omega = 0$  para materia,  $\omega = 1/3$  para radiación y  $\omega = -1$  para la energía de vacío (que es una especie de constante cosmológica efectiva); de la conservación  $\nabla_\mu T^{\mu 0} = 0$  se sigue que

$$d(\rho a^3) = -p d(a^3),$$

de manera que si  $P = \omega\rho$ , entonces  $\rho \propto a^{-3(1+\omega)}$ . De esta última relación y (2.19) se sigue que

$$\dot{a}^2 = C a^{2-3(1+\omega)} - k.$$

En cosmología estándar se suelen considerar modelos con mezcla de radiación y materia, la primera dominando en el Universo temprano, mientras que la segunda gana terreno en el transcurso del tiempo y termina por dominar. En la actualidad, el modelo que parece reproducir mejor las observaciones tiene tres componentes:

radiación (en la etapa temprana), materia (que en la etapa de la última dispersión-formación de hidrógeno neutro- ya era dominante) y energía oscura (que se supone es la componente dominante hoy en día y que según algunos expertos podría deberse a una constante cosmológica proveniente de la energía de vacío); aparentemente el Universo es esencialmente plano  $k = 0$  con un contenido de  $\sim 27\%$  de materia oscura,  $\sim 3\%$  de materia bariónica y ¡cerca de  $70\%$ ! de energía oscura (ver por ejemplo [Perlmutter & Schmidt 2003]).

### 2.3.2. Ondas Gravitacionales

Cuando un campo gravitacional es débil, la métrica se puede descomponer en la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  más una pequeña perturbación  $h_{\mu\nu}$ , es decir como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

donde  $\|h_{\mu\nu}\| \ll 1$ . Para un sistema cuasi-Lorentziano como éste, podemos considerar transformaciones de Lorentz

$$x^{\alpha'} = \Lambda_{\beta}^{\alpha'} x^{\beta}. \quad (2.21)$$

Puesto que

$$g_{\alpha'\beta'} = \Lambda_{\alpha'}^{\mu} \Lambda_{\beta'}^{\nu} g_{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha'}^{\mu} \Lambda_{\beta'}^{\nu} \eta_{\mu\nu} + \Lambda_{\alpha'}^{\mu} \Lambda_{\beta'}^{\nu} h_{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

y dado que  $\eta_{\mu\nu}$  es invariante bajo Lorentz, entonces

$$\Lambda_{\alpha'}^{\mu} \Lambda_{\beta'}^{\nu} h_{\mu\nu} = h_{\alpha'\beta'}. \quad (2.23)$$

En otras palabras, bajo una transformación de Lorentz (que podemos pensar como la transformación natural asociada al “espacio-tiempo de fondo de Minkowski” que se tiene)  $h_{\mu\nu}$  se transforma como si fuera un tensor en relatividad especial. Sabemos, sin embargo, que no lo es, pues  $h_{\mu\nu}$  estrictamente es una parte del tensor  $g_{\mu\nu}$ . Puede verse entonces (aunque de manera *ficticia*) a  $h_{\mu\nu}$  como un tensor definido en un espacio-tiempo plano de fondo. Análogamente, puede pensarse a  $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$  y  $R_{\mu\nu}$ , que están dados en términos de  $h_{\mu\nu}$ , como campos en un fondo de Minkowski.

Para un sistema cuasi-Lorentziano, una transformación en las coordenadas (del fondo) dada por un vector  $\xi^{\alpha}$ , cuyas componentes son funciones de la posición, tiene la forma

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x^{\beta}). \quad (2.24)$$

Este cambio de coordenadas es una *transformación de norma* bajo el requerimiento de  $\xi$  y  $\|\partial_{\beta}\xi^{\alpha}\|$  pequeños; puesto que

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} = \delta_{\beta}^{\alpha} + \partial_{\beta}\xi^{\alpha}, \quad \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}} = \delta_{\beta'}^{\alpha} - \partial_{\beta'}\xi^{\alpha}, \quad (2.25)$$

entonces a primer orden se sigue que

$$g_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha}\xi_{\beta} - \partial_{\beta}\xi_{\alpha}. \quad (2.26)$$

El efecto de la transformación de norma es por tanto redefinir a  $h_{\mu\nu}$  como

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu. \quad (2.27)$$

Esta transformación establece la clase de equivalencia para las perturbaciones físicamente equivalentes (libertad de norma).

Ahora bien, un cálculo directo muestra que los símbolos de Christoffel a primer orden están dados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}(\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}). \quad (2.28)$$

En el mismo orden de aproximación, el Riemann es

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \eta_{\mu\lambda} R_{\nu\rho\sigma}^\lambda = \eta_{\mu\lambda}(\partial_\rho \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \partial_\sigma \Gamma_{\rho\nu}^\lambda) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\rho \partial_\nu h_{\sigma\mu} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\rho\mu} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\nu\sigma}). \end{aligned} \quad (2.29)$$

A partir del tensor de Riemann encontramos que el tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma \partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\sigma \partial_\mu h_\nu^\sigma - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}), \quad (2.30)$$

donde  $h = h^\mu{}_\mu$  y  $\square = \partial^\mu \partial_\mu$ . De igual manera tenemos que el escalar de Ricci o de curvatura es

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h. \quad (2.31)$$

Con los resultados anteriores tenemos que el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  en términos de  $h_{\mu\nu}$  está dado (a primer orden) por

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma \partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\sigma \partial_\mu h_\nu^\sigma - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda h^{\rho\lambda} + \eta_{\mu\nu} \square h). \quad (2.32)$$

Introduzcamos el tensor de *traza inversa* de  $h_{\mu\nu}$ ,

$$\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} h, \quad (2.33)$$

(el nombre se debe a que  $\bar{h} = \bar{h}^\mu{}_\mu = -h$ ). La ecuación inversa de (2.33), está dada por

$$h^{\mu\nu} = \bar{h}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} \bar{h}. \quad (2.34)$$

Reescribiendo a  $G_{\mu\nu}$  en términos de  $\bar{h}_{\mu\nu}$  y de  $\bar{h}$ , tenemos

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}[\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda \bar{h}^{\rho\lambda} - \partial_\sigma \partial_\nu \bar{h}_\mu^\sigma - \partial_\sigma \partial_\mu \bar{h}_\nu^\sigma]. \quad (2.35)$$

y utilizando la *norma de Lorentz*  $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$ , tenemos que  $G_{\mu\nu}$  se expresa como

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square \bar{h}_{\mu\nu}. \quad (2.36)$$

Las ecuaciones de campo en el vacío son entonces

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (2.37)$$

que resultan ser ecuaciones de onda para cada componente. Es decir, la perturbación de la métrica de Minkowski corresponde a ondas gravitacionales. ¡La RG predice la existencia de ondas gravitacionales! (el espacio-tiempo, literalmente, se deforma con el paso de la onda). La detección directa de ondas gravitacionales significará una corroboración más de la validez de la RG y abrirá nuevas ventanas en la observación del Universo; de lo contrario, en caso de no detectarse, la RG será puesta en duda. Aquí vale la pena destacar, sin embargo, que hay evidencia indirecta de la existencia de ondas gravitatorias; en efecto, en 1974 R. Hulse y J. Taylor detectaron pérdida de energía en el sistema binario PSR1913+16, dicha pérdida coincide con la predicha por emisión de radiación gravitacional (este descubrimiento hizo acreedores del premio Nobel de Física a Hulse y Taylor).

## 2.4. Formulación Lagrangiana

Después de haber presentado una importante aplicación (Cosmología) y una sorprendente predicción (Radiación Gravitacional) de la RG, volvamos a la teoría en toda su generalidad para obtener las ecuaciones de Einstein en la formulación Lagrangiana de la teoría vía el Principio de Mínima Acción. Adelantamos que bajo una transformación de Legendre se obtendrá la formulación Hamiltoniana de la RG en el siguiente capítulo. En la presente sección seguiremos esencialmente el tratamiento que se da en [Poisson 2004].

La funcional de acción de la RG se compone de dos partes:  $S_G[g]$ , que corresponde a la contribución debida al campo gravitacional  $g_{\alpha\beta}$ , y  $S_M[\phi; g]$ , que es la contribución debida a los campos de materia. La contribución correspondiente al campo gravitacional está formada, a su vez, por tres términos:  $S_{EH}[g]$ , que es el término de Einstein-Hilbert, un término de frontera  $S_B[g]$  y un término no dinámico  $S_0$  que sólo interviene en el valor numérico de la acción, pero que no contribuye a las ecuaciones de campo. En concreto,

$$S_G[g] = S_{EH}[g] + S_B[g] - S_0, \quad (2.38)$$

con

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{V}} R \sqrt{-g} d^4x, \quad S_B = \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\mathcal{V}} \varepsilon K \sqrt{|h|} d^3y, \quad S_0 = \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\mathcal{V}} \varepsilon K_0 \sqrt{|h|} d^3y \quad (2.39)$$

donde  $R$  es el escalar de Ricci,  $g$  el determinante de la métrica,  $\mathcal{V}$  es una región 4-dimensional del espacio-tiempo (i.e., un 4-volumen),  $K$  es la traza de la curvatura extrínseca<sup>9</sup> de  $\partial\mathcal{V}$  (la frontera de  $\mathcal{V}$ ),  $\varepsilon$  es el módulo del normal unitario a  $\partial\mathcal{V}$ , que

---

<sup>9</sup>La curvatura extrínseca  $K_{ij}$  de una variedad  $n$  dimensional,  $N$ , en una variedad  $m$  dimensional (pseudo-) Riemanniana  $M$ , con  $m > n$ , es la curvatura asociada al encaje de  $N$  en  $M$ .

es igual a +1 donde  $\partial\mathcal{V}$  es tipo-tiempo y  $-1$  donde  $\partial\mathcal{V}$  es tipo-espacio,  $K_0$  es la curvatura extrínseca de  $\partial\mathcal{V}$  encajada en el espacio-tiempo plano (como veremos más adelante) y, finalmente,  $h$  es el determinante de la métrica inducida  $h_{ij}$  en  $\partial\mathcal{V}$ . En la región  $\mathcal{V}$  del espacio-tiempo usaremos coordenadas  $x^\alpha$  y en la hipersuperficie  $\partial\mathcal{V}$  coordenadas  $y^a$ , de manera que la primera forma fundamental  $h_{ij}$  (métrica inducida) en  $\partial\mathcal{V}$  es  $h_{ij} = g_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu$ , donde  $e_i^\sigma = \partial x^\sigma / \partial y^i$ .

La funcional de acción para RG es, pues, la siguiente:

$$S[g; \phi] = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{V}} R \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\mathcal{V}} \varepsilon (K - K_0) \sqrt{|h|} d^3y + S_M[\phi; g_{\alpha,\beta}]. \quad (2.40)$$

Las primeras dos integrales corresponden a  $S_G$ , mientras que  $S_M$  es la parte correspondiente a la materia (depende del contenido material  $\phi$  que se considere  $y$  de la métrica). Por el momento nos ocuparemos del sector gravitacional e incorporaremos más adelante la contribución de materia.

Como condición de frontera en la variación tenemos que

$$\delta g_{\alpha\beta}|_{\partial\mathcal{V}} = 0. \quad (2.41)$$

Es decir, la métrica inducida  $h_{ij}$  en  $\partial\mathcal{V}$  se mantiene fija.

Antes de comenzar con la variación veamos un par de relaciones que nos serán de utilidad. Primero, puesto que  $g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta_\beta^\alpha$ , entonces

$$\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.42)$$

Segundo, dada una matriz  $A$ , la variación de  $\ln|\det A|$  es (por definición)

$$\delta \ln|\det A| = \ln|\det(A + \delta A)| - \ln|\det A|.$$

Usando las propiedades de la función  $\ln$  y del determinante, se sigue que el lado derecho de esta expresión puede escribirse como  $\ln\{\det(1 + A^{-1}\delta A)\}$ . Puesto que  $\det(1 + B) = 1 + \text{Tr} B$  y  $\ln[1 + \text{Tr} B] = \text{Tr} B$  para  $B$  “pequeña”, entonces

$$\delta \ln|\det A| = \text{Tr}(A^{-1}\delta A).$$

Así que,  $\delta \ln g = g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}$ . Usando (2.42) y que  $\delta \ln g = \delta g/g$  tenemos que

$$\delta g = -g(g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}). \quad (2.43)$$

Por consiguiente,

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}. \quad (2.44)$$

Comencemos ahora con la variación del término de Einstein-Hilbert:

$$\begin{aligned} (16\pi)\delta S_{EH} &= \int \delta(g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \sqrt{-g}) d^4x \\ &= \int (R_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} + R \delta \sqrt{-g} + g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \delta R_{\alpha\beta}) d^4x \\ &= \int \sqrt{-g} d^4x (R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}) \delta g^{\alpha\beta} + \int \sqrt{-g} d^4x g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Donde hemos utilizado (2.44) en el término  $R\delta\sqrt{-g}$ . Ahora bien, utilizando un marco local, se tiene que

$$\begin{aligned}\delta R_{\alpha\beta} &= \delta(\partial_\mu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\mu\alpha}^\mu) = \partial_\mu(\delta\Gamma_{\beta\alpha}^\mu) - \partial_\beta(\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\mu) \\ &= \nabla_\mu(\delta\Gamma_{\beta\alpha}^\mu) - \nabla_\beta(\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\mu).\end{aligned}\quad (2.46)$$

En el último renglón de (2.46) la derivada  $\nabla_\alpha$  es la derivada covariante compatible con la métrica de referencia  $g_{\alpha\beta}$  respecto a la cual se lleva a cabo la variación. Definiendo

$$\bar{\delta}v^\mu := g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\beta\alpha}^\mu - g^{\alpha\mu}\delta\Gamma_{\beta\alpha}^\beta \quad (2.47)$$

es claro que

$$g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = \nabla_\mu \bar{\delta}v^\mu. \quad (2.48)$$

La barra sobre la  $\delta$  se utiliza para enfatizar que  $\bar{\delta}v^\mu$  no debe entenderse como la variación de  $v^\mu$ . Usando (2.48), la última integral en (2.45) queda como sigue

$$\int \sqrt{-g}d^4x g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = \int \sqrt{-g}d^4x \nabla_\mu \bar{\delta}v^\mu = \oint \varepsilon \bar{\delta}v^\mu n_\mu \sqrt{|h|}d^3y, \quad (2.49)$$

donde hemos usado el teorema de Gauss y que el elemento de superficie es  $d\Sigma_\mu = \varepsilon n_\mu d\Sigma$  con  $d\Sigma = \sqrt{|h|}d^3y$ . Aquí,  $n_\mu$  es el normal unitario a  $\partial\mathcal{V}$  y  $\varepsilon$  (como ya dijimos) la norma,  $\varepsilon = n^\mu n_\mu = \pm 1$ .

De la condición de frontera,  $\delta g_{\alpha\beta} = \delta g^{\alpha\beta} = 0$  en  $\partial\mathcal{V}$ , se tiene que la variación de los Christoffel en  $\partial\mathcal{V}$  es

$$\delta\Gamma_{\beta\alpha}^\mu|_{\partial\mathcal{V}} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\beta\delta g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha\delta g_{\nu\beta} - \partial_\nu\delta g_{\beta\alpha}). \quad (2.50)$$

Sustituyendo en (2.47) se sigue que

$$n^\mu \bar{\delta}v_\mu|_{\partial\mathcal{V}} = n^\mu g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\delta g_{\mu\beta} - \partial_\mu\delta g_{\alpha\beta}). \quad (2.51)$$

Pero  $g^{\alpha\beta} = (\varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{\alpha\beta})$ , donde  $h^{\alpha\beta} = h^{ij}e_i^\alpha e_j^\beta$ . Dado que  $n^\alpha n^\mu(\partial_\alpha\delta g_{\mu\beta} - \partial_\mu\delta g_{\alpha\beta})$  es claramente cero, entonces

$$n^\mu \bar{\delta}v_\mu|_{\partial\mathcal{V}} = n^\mu h^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\delta g_{\mu\beta} - \partial_\mu\delta g_{\alpha\beta}). \quad (2.52)$$

Luego, como  $\delta g_{\mu\beta}$  se anula en todo  $\partial\mathcal{V}$ , las derivadas tangenciales  $e_j^\alpha\partial_\alpha(\delta g_{\mu\beta})$  deben anularse también. De esto se sigue que  $h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\delta g_{\mu\beta} = 0$  y por consiguiente

$$n^\mu \bar{\delta}v_\mu|_{\partial\mathcal{V}} = -n^\mu h^{\alpha\beta}\partial_\mu\delta g_{\alpha\beta}. \quad (2.53)$$

Esta igualdad es diferente de cero pues la derivada de  $\delta g_{\alpha\beta}$  a lo largo de la normal es (en general) distinta de cero.

En suma, la variación del término de Einstein-Hilbert es

$$(16\pi)\delta S_{EH} = \int \sqrt{-g}d^4x G_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} - \oint \varepsilon n^\mu h^{\alpha\beta}\partial_\mu\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{|h|}d^3y. \quad (2.54)$$

donde  $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}R/2$ . El término de frontera en (2.54) tendrá una contribución indeseada (si el espacio no es compacto) en las ecuaciones; sin embargo, como veremos a continuación, dicha contribución es cancelada por  $\delta S_B[g]$ , y ésta es justamente la razón por la cual se incluye el término de frontera  $S_B[g]$ . Veamos: puesto que la métrica inducida es fija en  $\partial\mathcal{V}$ , la única cantidad que varía es  $K$ , la traza de la curvatura extrínseca<sup>10</sup>. De la expresión que define a la curvatura extrínseca,

$$K_{ab} = \nabla_\alpha n_\beta e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (2.55)$$

se obtiene la traza

$$\begin{aligned} K &= h^{ab} K_{ab} = h^{ab} \nabla_\alpha n_\beta e_a^\alpha e_b^\beta \\ &= h^{\alpha\beta} \nabla_\alpha n_\beta = h^{\alpha\beta} (\partial_\alpha n_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma n_\gamma). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Luego, la variación de  $K$  es

$$\begin{aligned} \delta K &= -h^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma n_\gamma \\ &= -\frac{1}{2} h^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \delta g_{\beta\mu} + \partial_\beta \delta g_{\mu\alpha} - \partial_\mu \delta g_{\alpha\beta}) n^\mu \\ &= \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \partial_\mu \delta g_{\alpha\beta} n^\mu, \end{aligned} \quad (2.57)$$

donde hemos utilizado el hecho de que las derivadas tangenciales de  $\delta g_{\alpha\beta}$  se anulan sobre  $\partial\mathcal{V}$ . Con esto, la variación del término de frontera queda como sigue

$$(16\pi) \delta S_B = \oint \varepsilon n^\mu h^{\alpha\beta} \partial_\mu \delta g_{\alpha\beta} \sqrt{|h|} d^3 y. \quad (2.58)$$

Este es exactamente el término de frontera que aparece en (2.54), pero con el signo contrario, de manera que se anulan.

Veamos ahora el papel que juega el término  $S_0$ . Supongamos que consideramos una solución en vacío, así que  $R = 0$ . Si omitimos el término  $S_0$ , el valor numérico de la funcional de acción estará entonces dado por

$$S_G = \frac{1}{8\pi} \oint \varepsilon K \sqrt{|h|} d^3 y, \quad (2.59)$$

Al calcular esta integral en el espacio-tiempo plano nos encontramos con que ésta diverge (sin importar que  $\mathcal{V}$  esté acotado por dos hipersuperficies de  $t$  constante). Este problema prevalece en cualquier espacio-tiempo asintóticamente plano<sup>11</sup> y, por consiguiente, la funcional de acción (en ausencia de  $S_0$ ) para dichos espacios es una cantidad que no está bien definida. El término  $S_0$  se introduce entonces para conseguir una funcional de acción bien definido; la idea es la siguiente: se considera

<sup>10</sup>Para mayores detalles sobre la definición de este concepto y sobre la geometría de hipersuperficies consultese la Sección (A.4) en el Apéndice

<sup>11</sup>Cabe señalar que si el espacio-tiempo es espacialmente compacto no se presenta esta dificultad.

a  $S_0$  como la funcional de acción para el espacio-tiempo plano y puesto que  $S_B$  en espacios asintóticamente planos diverge como  $S_0$ , entonces la diferencia  $S_B - S_0$  estará bien definida y la funcional de acción para espacio-tiempos asintóticamente planos lo estará también. Esto es, la curvatura extrínseca  $K_0$  de  $\partial\mathcal{V}$  encajada en el espacio-tiempo plano cancela la divergencia.

Puesto que  $S_0$  depende solamente de la métrica inducida  $h_{ab}$  (a través del factor  $\sqrt{|h|}$  en la integral), la variación respecto a  $g_{\alpha\beta}$  es cero y, por tanto, no contribuye en las ecuaciones de movimiento. El propósito de  $S_0$  es el de regularizar la acción para espacios asintóticamente planos.

Como  $S_0$  es un término no dinámico, la variación de la funcional de acción para la componente gravitacional es

$$\delta S_G = \frac{1}{16\pi} \int G_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.60)$$

(pues recordemos que el término de frontera proveniente de  $S_{EH}$  se cancela con la variación de  $S_B$ ).

Vayamos, ahora sí, al término que corresponde a la materia. La acción para materia está dada por

$$S_M[\phi; g] = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x,$$

donde la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  depende de la métrica  $g_{\alpha\beta}$ , del campo de materia  $\phi$  y las derivadas de éste  $\partial_\alpha\phi$ . i.e.,  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\alpha\phi; g_{\alpha\beta})$ . La variación de  $S_M[\phi; g]$ , respecto a  $g_{\alpha\beta}$  (la variable fundamental de la teoría), es la siguiente:

$$\begin{aligned} \delta S_M &= \int \delta(\mathcal{L} \sqrt{-g}) d^4x \\ &= \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} + \mathcal{L} \delta \sqrt{-g} \right) d^4x \\ &= \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{1}{2} \mathcal{L} g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (2.61)$$

donde hemos usado (2.44). Definiendo el tensor de energía-esfuerzos como

$$T_{\alpha\beta} = -2 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{1}{2} \mathcal{L} g_{\alpha\beta} \right), \quad (2.62)$$

la expresión (2.61) queda de la siguiente forma

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int T_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.63)$$

De esta última expresión y la correspondiente a  $\delta S_G$  se tiene que

$$\delta S = \delta S_G + \delta S_M = \frac{1}{16\pi} \int G_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x - \frac{1}{2} \int T_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x.$$

Puesto que  $\delta S = 0$  (mínima acción) y las variaciones  $\delta g^{\alpha\beta}$  son arbitrarias, se sigue que

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}, \quad (2.64)$$

que son justamente las ecuaciones de Einstein para el campo gravitacional. De esta manera hemos visto que las ecuaciones de Einstein se pueden obtener por medio de un principio variacional, en forma lagrangiana, a partir de la funcional de acción (2.40). En vista de que esta funcional provee las ecuaciones del campo gravitacional, habremos de llamarla *funcional de acción para RG*.

# Capítulo 3

## Formulación Hamiltoniana de la Relatividad General

### 3.1. Descomposición 3+1 del espacio-tiempo.

Para especificar la formulación Hamiltoniana de la RG es necesario considerar una foliación del espacio-tiempo; esto es, debe hacerse una elección de hipersuperficies tipo-espacio que serán declaradas como las superficies de tiempo constante y que, en conjunto, forman el espacio-tiempo. Esto es lo que se conoce como la descomposición 3+1 del espacio-tiempo.

La idea de la descomposición es introducir un campo  $t(x^\alpha)$  con valores en los reales tal que “las superficies de nivel”  $\{t = \text{constante}\}$  corresponden a una familia de hipersuperficies tipo-espacio, que denotaremos por  $\Sigma_t$ , que no se intersectan. La *función de tiempo* es en realidad bastante arbitraria, las únicas condiciones que se imponen sobre ésta es que sea una función valuada simple de  $x^\alpha$  y que  $\partial_\alpha t$  sea un campo vectorial tipo tiempo ( $\partial_\alpha t$  definirá el normal  $n_\alpha$  a la superficie, que en tanto unitario será proporcional a  $\partial_\alpha t$  en cada punto). Para las hipersuperficies  $\Sigma_t$  emplearemos coordenadas  $y^a$ . Las hipersuperficies  $\Sigma_t$  son, evidentemente, topológicamente equivalentes y sus coordenadas pueden relacionarse de manera muy sencilla: Considérese la congruencia de curvas  $\gamma$  parametrizadas por la función de tiempo  $t$  y con tangente  $t^\alpha = dx^\alpha/dt$ . Evidentemente estas curvas intersectan (y no necesariamente a lo largo de la normal) a las hipersuperficies  $\Sigma_t$ ; además, las curvas pueden no ser geodésicas. Sea  $\gamma_{q_0}$  una curva de la congruencia que pasa por  $q_0$  en  $\Sigma_{t_0}$ ; entonces, siguiendo la curva tendremos que en  $\Sigma_{t_1}$  pasará por un punto  $q_1$ , en  $\Sigma_{t_2}$  por  $q_2$  y así sucesivamente. De esta manera vamos identificando puntos  $(q_0, q_1, q_2, \dots)$  de las diferentes hipersuperficies  $(\Sigma_{t_0}, \Sigma_{t_1}, \Sigma_{t_2}, \dots)$  con las curvas  $\gamma$  de la congruencia  $(\gamma_{q_0})$ . Para fijar las coordenadas de  $q_1$  y  $q_2$  dada la coordenada  $y^a(q_0)$  en  $\Sigma_{t_0}$  para  $q_0$ , imponemos la condición de que  $y^a(q_1) = y^a(q_2) = y^a(q_0)$ . De esta forma  $y^a$  se mantiene constante en cada curva perteneciente a la congruencia. La construcción define el sistema coordenado  $(t, y^a)$ , donde  $t = \text{cte}$  corresponde a la hipersuperficie

espacial  $\Sigma_{t=cte}$ .

Puesto que las coordenadas originales pueden expresarse en términos de las nuevas,  $x^\alpha = x^\alpha(t, y^a)$ , tenemos entonces que  $dx^\alpha = t^\alpha dt + e_b^\alpha dy^b$ , donde

$$t^\alpha = \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \right)_{y^a}, \quad e_b^\alpha = \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^b} \right)_t \quad (3.1)$$

son, respectivamente, el vector tangente a la curva de la congruencia y el tangente a  $\Sigma_t$ . Obviamente, la derivada de Lie de los vectores tangentes  $e_a^\alpha$  a lo largo de  $t^\alpha$  es nula; i.e.,

$$\mathbf{L}_t e_a^\alpha = 0. \quad (3.2)$$

Como adelantábamos arriba, la normal unitaria a las hipersuperficies es proporcional a  $\partial_\alpha t$  en cada punto (evidentemente  $e_b^\alpha \partial_\alpha t = 0$ ), así que

$$n_\alpha = -N \partial_\alpha t, \quad (3.3)$$

donde  $N$  es una función escalar, conocida bajo el nombre de *lapso*.  $N$  se introduce para garantizar que  $n_\alpha$  sea normal *unitario*. Por construcción,  $t^\alpha$  no es necesariamente paralelo a la normal a las superficies, de hecho la proyección de  $t^\alpha$  a lo largo de la normal es  $-N$ ,  $n_\alpha t^\alpha = -N$ , y puede tener una componente tangencial a la hipersuperficie  $N^a = e_a^\alpha t^\alpha$  llamada *corrimiento*; así que [ver figura 3.1]

$$t^\alpha = N n^\alpha + N^a e_a^\alpha. \quad (3.4)$$

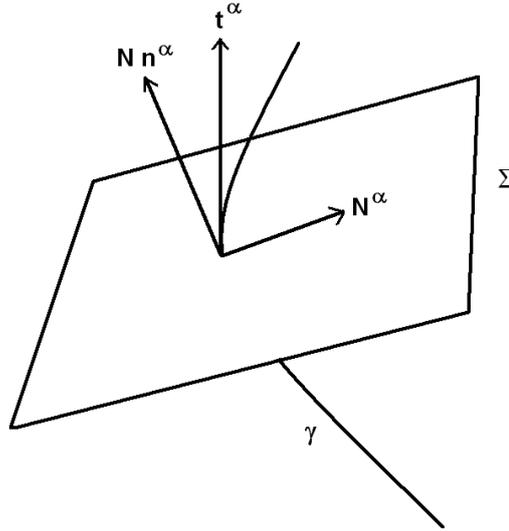


Figura 3.1: En este dibujo mostramos la descomposición del vector tangente  $t^\alpha$ .

Dado que  $dx^\alpha = t^\alpha dt + e_a^\alpha dy^a$ , utilizando (3.4) es sencillo ver que  $dx^\alpha = n^\alpha(Ndt) + e_a^\alpha(dy^a + N^a dt)$ . Por otro lado, la métrica inducida en  $\Sigma_t$  por la métrica de espacio-tiempo  $g_{\alpha\beta}$  está dada por  $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta$ ; es decir,  $g_{\alpha\beta} = -n_\alpha n_\beta + h_{\alpha\beta}$  y por tanto el elemento de línea es

$$ds^2 = (-n_\alpha n_\beta + h_{\alpha\beta})dx^\alpha dx^\beta = -N^2 dt^2 + h_{ab}(dy^a + N^a dt)(dy^b + N^b dt), \quad (3.5)$$

donde  $h_{ab} = h_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$ . Del elemento de línea es un ejercicio sencillo mostrar que  $g = -N^2 h$ , donde  $g$  es el determinante de la métrica de espacio-tiempo y  $h$  el determinante de la métrica inducida en  $\Sigma_t$ ; por consiguiente

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h}. \quad (3.6)$$

Bien, consideremos ahora una región  $\mathcal{V}$  del espacio-tiempo y una foliación de ésta por hipersuperficies  $\Sigma_t$  cuya frontera son superficies 2-dimensionales cerradas que denotaremos por  $S_t$  [ver figura 3.2]. La región  $\mathcal{V}$  está acotada por hipersuperficies tipo espacio  $\Sigma_{t_1}$  y  $\Sigma_{t_2}$ , y por la unión de las 2-superficies  $S_t$ , que forman la frontera  $\mathcal{B}$  tipo-tiempo.

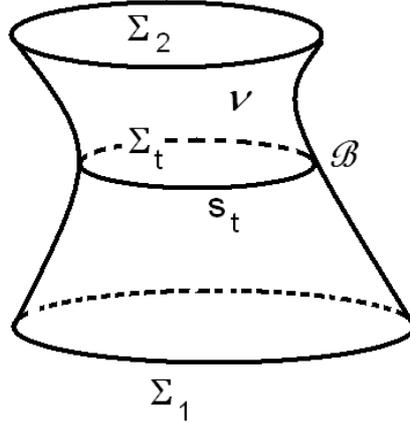


Figura 3.2: La región  $\mathcal{V}$  del espacio-tiempo foliada por  $\{\Sigma_t\}$ , con frontera  $\Sigma_{t_1} \cup \Sigma_{t_2} \cup \mathcal{B}$ .

Como antes, en  $\Sigma_t$  tenemos coordenadas  $\{y^a\}$ , métrica inducida  $h_{ab}$  y vectores tangentes  $e_a^\alpha$ . Sea  $\{\theta^A\}$  el conjunto de coordenadas para las 2-superficies  $S_t$ , que son la frontera de  $\Sigma_t$  y folían a  $\mathcal{B}$ , entonces  $S_t$  estará dada por relaciones paramétricas  $y^a(\theta^A)$ . El vector normal unitario  $r_a$  a  $S_t$  tiene como 4-vector asociado a  $r^\alpha = r^a e_a^\alpha$  ( $r^\alpha r_\alpha = 1$ ) que es, evidentemente, ortogonal al vector normal  $n^\alpha$  a  $\Sigma_t$ ; i.e.,  $r^\alpha n_\alpha = 0$ . Claramente los 3-vectores  $e_A^a = \partial y^a / \partial \theta^A$  son tangentes a  $S_t$  y, por consiguiente,  $r_a e_A^a = 0$ . Esto último, expresado en términos de 4-vectores, es  $r_\alpha e_A^\alpha = 0$ , donde

$$e_A^\alpha = e_a^\alpha e_A^a = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta^A}. \quad (3.7)$$

Así que la métrica inducida en  $S_t$ ,  $\sigma_{AB}$ , está dada por  $\sigma_{AB} = h_{ab}e_A^a e_B^b = g_{\alpha\beta}e_A^\alpha e_B^\beta$ . El elemento de línea en  $S_t$  es pues

$$ds^2 = \sigma_{AB}d\theta^A d\theta^B. \quad (3.8)$$

La inversa de  $h_{ab}$  puede escribirse como  $h^{ab} = r^a r^b + \sigma^{ab}$ , donde  $\sigma^{ab} = \sigma^{AB}e_A^a e_B^b$  con  $\sigma^{AB}$  la inversa de  $\sigma_{AB}$ . De forma análoga,  $g^{\alpha\beta} = -n^\alpha n^\beta + h^{\alpha\beta}$ , donde  $h^{\alpha\beta} = h^{ab}e_a^\alpha e_b^\beta$ . Por lo tanto,

$$g^{\alpha\beta} = -n^\alpha n^\beta + r^\alpha r^\beta + \sigma^{AB}e_A^\alpha e_B^\beta. \quad (3.9)$$

La curvatura extrínseca de  $S_t$  es

$$k_{AB} = e_A^\alpha e_B^\beta \nabla_\beta r_\alpha, \quad (3.10)$$

pues  $k_{AB} = e_A^\alpha e_B^\beta k_{\alpha\beta}$  donde (por definición de curvatura extrínseca)  $k_{\alpha\beta} = \nabla_\beta r_\alpha$ . La traza de la curvatura extrínseca de  $S_t$  es  $k = \sigma^{AB}k_{AB}$ .

Para relacionar las coordenadas  $\theta^A$  en las 2-superficies  $S_t$  llevamos a cabo un procedimiento análogo como el descrito con anterioridad, con la salvedad de que ahora pediremos que las curvas de la congruencia en  $\mathcal{B}$  vayan a lo largo de  $n^\alpha$  (i.e., las curvas intersectan a las 2-superficies  $S_t$  ortogonalmente). Ahora las coordenadas  $\theta^A$  no varían a lo largo de las curvas cuyo tangente  $t^\alpha = (\partial x^\alpha / \partial t)_{\theta^A}$  es proporcional a  $n^\alpha$ . En otras palabras, se impone que el corrimiento sea cero en  $S_t$ , y dado que  $t^\alpha = Nn^\alpha + N^a e_a^\alpha$ , entonces en la frontera  $\mathcal{B}$  se tiene que  $t^\alpha = Nn^\alpha$ ; i.e.,

$$n^\alpha = N^{-1} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \right)_{\theta^A}, \quad (3.11)$$

Por construcción,  $n^\alpha$  y  $e_A^\alpha$  son siempre ortogonales.

Sobre  $\mathcal{B}$  tenemos entonces coordenadas  $z^i = (t, \theta^A)$ . La métrica inducida en la frontera es  $\gamma_{ij} = g_{\alpha\beta}e_i^\alpha e_j^\beta$ , donde  $e_i^\alpha = \partial x^\alpha / \partial z^i$  son los vectores tangentes  $e_t^\alpha = t^\alpha = Nn^\alpha$  y  $e_A^\alpha = (\partial x^\alpha / \partial \theta^A)_t$ . Así que  $dx^\alpha = e_i^\alpha dz^i$  es

$$dx^\alpha = Nn^\alpha dt + e_A^\alpha d\theta^A. \quad (3.12)$$

Sustituyendo esta relación en el elemento de línea de la frontera,

$$ds_{\mathcal{B}}^2 = \gamma_{ij}dz^i dz^j = g_{\alpha\beta}(e_i^\alpha dz^i)(e_j^\beta dz^j), \quad (3.13)$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} ds_{\mathcal{B}}^2 &= g_{\alpha\beta}(Nn^\alpha dt + e_A^\alpha d\theta^A)(Nn^\beta dt + e_B^\beta d\theta^B) \\ &= (g_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta)N^2 dt^2 + (g_{\alpha\beta}e_A^\alpha e_B^\beta)d\theta^A d\theta^B. \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde en el segundo renglón se ha utilizado el hecho de que  $n_\alpha e_A^\alpha = 0$ . Puesto que  $g_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta = -1$  y  $g_{\alpha\beta}e_A^\alpha e_B^\beta = \sigma_{AB}$ , entonces

$$\gamma_{ij}dz^i dz^j = -N^2 dt^2 + \sigma_{AB}d\theta^A d\theta^B. \quad (3.15)$$

Un cálculo simple muestra que los determinantes de  $\gamma_{ij}$  y  $\sigma_{AB}$  se relacionan por  $\sqrt{-\gamma} = N\sqrt{\sigma}$ .

Dado que  $r^\alpha$  es normal unitario a las 2-superficies  $S_t$ , éste es también normal a  $\mathcal{B}$ . Por consiguiente, la curvatura extrínseca  $\mathcal{K}_{ij}$  de  $\mathcal{B}$  es

$$\mathcal{K}_{ij} = e_i^\alpha e_j^\beta \nabla_\alpha r_\beta, \quad (3.16)$$

cuya traza está dada por  $\mathcal{K} = \gamma^{ij}\mathcal{K}_{ij}$ .

## 3.2. La Funcional de Acción en la formulación 3+1.

La formulación Hamiltoniana de la RG consiste en realizar la descomposición 3+1 en la funcional de acción (2.40). Consideremos pues esta funcional en la componente gravitatoria,

$$(16\pi)S_G = \int_{\mathcal{V}} R\sqrt{-g}d^4x + 2 \oint_{\partial\mathcal{V}} \varepsilon K \sqrt{|h|}d^3y. \quad (3.17)$$

(Aquí hemos omitido a  $S_0$ , pero lo reincorporaremos más adelante). La frontera  $\partial\mathcal{V}$ , como antes, es  $\Sigma_{t_1} \cup \Sigma_{t_2} \cup \mathcal{B}$  [figura 3.2], así que la funcional de acción (3.17) queda como sigue

$$\begin{aligned} (16\pi)S_G &= \int_{\mathcal{V}} R\sqrt{-g}d^4x - 2 \int_{\Sigma_{t_2}} K\sqrt{h}d^3y + 2 \int_{\Sigma_{t_1}} K\sqrt{h}d^3y \\ &+ 2 \int_{\mathcal{B}} \mathcal{K}\sqrt{-\gamma}d^3z, \end{aligned} \quad (3.18)$$

(el signo en la integración sobre  $\Sigma_{t_1}$  se debe a que el normal debe estar dirigido hacia afuera).

El escalar de Ricci en  $\Sigma_t$  está dado por

$$R = {}^{(3)}R + K^{ab}K_{ab} - K^2 - 2\nabla_\alpha(n^\beta\nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha\nabla_\beta n^\beta), \quad (3.19)$$

donde  ${}^{(3)}R$  es el escalar de Ricci construido a partir de  $h_{ab}$  (ver Sección A.4 en el apéndice). De (3.6) se tiene que el elemento de volumen puede expresarse como  $\sqrt{-g}d^4x = N\sqrt{h}dt d^3y$ , así que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} R\sqrt{-g}d^4x &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma_t} ({}^{(3)}R + K^{ab}K_{ab} - K^2)N\sqrt{h}d^3y \\ &- 2 \oint_{\partial\mathcal{V}} (n^\beta\nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha\nabla_\beta n^\beta)d\Sigma_\alpha, \end{aligned} \quad (3.20)$$

en donde para obtener el último término hemos utilizado el teorema de Gauss. Esta integral sobre la frontera  $\partial\mathcal{V}$  se divide en integrales sobre  $\Sigma_{t_1}$ ,  $\Sigma_{t_2}$  y  $\mathcal{B}$ . En  $\Sigma_{t_2}$ , la integral da

$$2 \int_{\Sigma_{t_2}} \nabla_\beta n^\beta \sqrt{h} d^3y = 2 \int_{\Sigma_{t_2}} K \sqrt{h} d^3y. \quad (3.21)$$

mientras que sobre  $\Sigma_{t_1}$  da el negativo de esta expresión. Por tanto, los términos de frontera en  $\Sigma_{t_1}$  y  $\Sigma_{t_2}$  de (3.18) se cancelan. La integral sobre  $\mathcal{B}$ , donde  $d\Sigma_\alpha = r_\alpha \sqrt{-\gamma} d^3z$ , queda como

$$\begin{aligned} -2 \int_{\mathcal{B}} (n^\beta \nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha \nabla_\beta n^\beta) d\Sigma_\alpha &= -2 \int_{\mathcal{B}} (\nabla_\beta n^\alpha) n^\beta r_\alpha \sqrt{-\gamma} d^3z \\ &= 2 \int_{\mathcal{B}} (\nabla_\beta r_\alpha) n^\alpha n^\beta \sqrt{-\gamma} d^3z, \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde hemos usado que  $n^\alpha r_\alpha = 0$ . De los resultados anteriores se sigue que (3.18) queda como

$$\begin{aligned} (16\pi)S_G &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} ({}^{(3)}R + K^{ab}K_{ab} - K^2) N \sqrt{h} d^3y \\ &+ 2 \int_{\mathcal{B}} (\mathcal{K} + n^\alpha n^\beta \nabla_\beta r_\alpha) \sqrt{-\gamma} d^3z. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Utilizando la relación  $g^{\alpha\beta} = r^\alpha r^\beta + \gamma^{ij} e_i^\alpha e_j^\beta$  es sencillo mostrar que

$$\mathcal{K} = \gamma^{ij} \mathcal{K}_{ij} = (g^{\alpha\beta} - r^\alpha r^\beta) \nabla_\alpha r_\beta. \quad (3.24)$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \mathcal{K} + n^\alpha n^\beta \nabla_\alpha r_\beta &= (g^{\alpha\beta} - r^\alpha r^\beta + n^\alpha n^\beta) \nabla_\alpha r_\beta \\ &= (\sigma^{AB} e_A^\alpha e_B^\beta) \nabla_\alpha r_\beta \\ &= \sigma^{AB} k_{AB} = k \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde hemos usado (3.9). Utilizando esta última expresión y el elemento de volumen  $\sqrt{-\gamma} d^3z = N \sqrt{\sigma} dt d^2\theta$  llegamos a que (3.23) está dada por

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \int_{\Sigma_t} ({}^{(3)}R + K^{ab}K_{ab} - K^2) N \sqrt{h} d^3y + 2 \oint_{S_t} (k - k_0) N \sqrt{\sigma} d^2\theta \right]. \quad (3.26)$$

Nótese que hemos introducido el término correspondiente a  $S_0$ . La incorporación se realiza con base en lo siguiente: en el caso de espacio-tiempo plano, la integral sobre  $\Sigma_t$  se anula (al evaluar sobre la solución) y entonces la única contribución a  $S_G$  es la que proviene de la integral sobre  $S_t$ . La elección de  $k_0$  como la curvatura extrínseca de  $S_t$  encajada en el espacio plano evita que la integral diverja en el límite  $S_t \rightarrow \infty$ , asegurando que  $S_G$  se anule en el caso plano y que esté bien definida en el caso asintóticamente plano. Para el caso compacto, el término es nulo y no se presenta dificultad alguna.

### 3.3. El Hamiltoniano de Relatividad General

La descomposición  $3 + 1$  es una construcción del espacio-tiempo como una “trajectoria” de hipersuperficies  $\Sigma_t$  con métrica  $h_{ab}$ . En este contexto, es razonable considerar como variables fundamentales a  $h_{ab}$  y algún tipo de variable que nos refiera al cambio de ésta. Como veremos en la presente sección, en el formalismo Hamiltoniano las variables fundamentales son, en efecto, la métrica y su *momento canónicamente conjugado*.

Puesto que al pasar de la formulación Lagrangiana a la Hamiltoniana (transformación de Legendre), la acción queda expresada (en forma genérica) como

$$S = \int (\mathcal{P}\dot{Q} - \mathcal{H}),$$

entonces nos avocaremos a escribir (3.26) en términos de

$$\dot{h}_{ab} = \mathbb{L}_t h_{ab}, \quad (3.27)$$

donde  $t^\alpha = Nn^\alpha + N^\alpha$  es el campo vectorial “de flujo de tiempo”. Dado que  $h_{ab} = g_{\alpha\beta}e_a^\alpha e_b^\beta$  y  $\mathbb{L}_t e_a^\alpha = 0$ , entonces

$$\dot{h}_{ab} = \mathbb{L}_t(g_{\alpha\beta}e_a^\alpha e_b^\beta) = (\mathbb{L}_t g_{\alpha\beta})e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (3.28)$$

Por otro lado, la derivada de Lie de la métrica  $g_{\alpha\beta}$  es

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_t g_{\alpha\beta} &= \nabla_\alpha t_\beta + \nabla_\beta t_\alpha = \nabla_\alpha (Nn_\beta + N_\beta) + \nabla_\beta (Nn_\alpha + N_\alpha) \\ &= n_\beta \partial_\alpha N + n_\alpha \partial_\beta N + N(\nabla_\alpha n_\beta + \nabla_\beta n_\alpha) + \nabla_\alpha N_\beta + \nabla_\beta N_\alpha. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Sustituyendo esta expresión en (3.28) se obtiene

$$\dot{h}_{ab} = 2NK_{ab} + D_a N_b + D_b N_a, \quad (3.30)$$

donde hemos utilizado las definiciones de curvatura extrínseca, derivada covariante intrínseca ( $D_b A_a = e_a^\alpha e_b^\beta \nabla_\beta A_\alpha$ ) y que  $n_\sigma e_c^\sigma = 0$ . De la ecuación (3.30) podemos despejar a la curvatura extrínseca, entonces

$$K_{ab} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a). \quad (3.31)$$

Sustituyendo (3.31) en (3.26) -ignorando el término de frontera-

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \left( {}^{(3)}R + K^{ab} \frac{1}{2N} (\dot{h}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a) - K^2 \right) N \sqrt{h} d^3 y \quad (3.32)$$

Escribiendo  $K^2 = K(h^{ab}K_{ab}) = K(h^{ab}\dot{h}_{ab} - 2h^{ab}D_a N_b)/2N$  y sustituyendo en la anterior expresión para  $S_G$  se tiene que

$$\begin{aligned} S_G &= \frac{1}{16\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} d^3 y \left( \dot{h}_{ab} \frac{\sqrt{h}[K^{ab} - Kh^{ab}]}{2} - \mathcal{T} \right), \\ \mathcal{T} &= \left( -N\sqrt{h} {}^{(3)}R + \sqrt{h}[K^{ab} - Kh^{ab}]D_a N_b \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Al escribir el primer término de la integral como

$$\dot{h}_{ab} \frac{\sqrt{\bar{h}}[K^{ab} - Kh^{ab}]}{2} = \dot{h}_{ab} \sqrt{\bar{h}}[K^{ab} - Kh^{ab}] - \dot{h}_{ab} \frac{\sqrt{\bar{h}}[K^{ab} - Kh^{ab}]}{2}$$

se obtiene entonces que

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} d^3y \left( \dot{h}_{ab} \sqrt{\bar{h}}[K^{ab} - Kh^{ab}] - \left[ \dot{h}_{ab} \frac{\sqrt{\bar{h}}[K^{ab} - Kh^{ab}]}{2} + \mathcal{T} \right] \right) \quad (3.34)$$

De esta expresión se sigue inmediatamente que el momento canónico conjugado a  $h_{ab}$  es

$$(16\pi)p^{ab} = \sqrt{\bar{h}}(K^{ab} - Kh^{ab}). \quad (3.35)$$

y que la densidad Hamiltoniana  $\mathcal{H}_G$  es

$$16\pi\mathcal{H}_G = \left[ \dot{h}_{ab} \frac{\sqrt{\bar{h}}[K^{ab} - Kh^{ab}]}{2} + \mathcal{T} \right]. \quad (3.36)$$

Nótese que al contraer (3.35) con  $h_{ab}$  se obtiene que  $16\pi p = -2\sqrt{\bar{h}}K$ , donde  $p = p_a^a = h_{ab}p^{ab}$ , y por consiguiente

$$\sqrt{\bar{h}}K^{ab} = 16\pi \left( p^{ab} - \frac{1}{2}p h^{ab} \right). \quad (3.37)$$

De acuerdo a (3.35) y (3.36) la acción queda como

$$S_G = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} d^3y \left( \dot{h}_{ab} p^{ab} - \mathcal{H}_G \right),$$

que es la forma canónica de la acción en una formulación Hamiltoniana.

Sustituyendo (3.30) y  $\mathcal{T}$  [dado por (3.33)] en (3.36) es fácil ver que la densidad Hamiltoniana queda como sigue

$$\begin{aligned} 16\pi\mathcal{H}_G &= (K^{ab}K_{ab} - K^2 - {}^{(3)}R)N\sqrt{\bar{h}} + 2\sqrt{\bar{h}}(K^{ab} - Kh^{ab})D_a N_b \\ &= (K^{ab}K_{ab} - K^2 - {}^{(3)}R)N\sqrt{\bar{h}} + 2\sqrt{\bar{h}}D_a [(K^{ab} - Kh^{ab})N_b] \\ &\quad - 2N_b \sqrt{\bar{h}}D_a (K^{ab} - Kh^{ab}). \end{aligned} \quad (3.38)$$

La manera en que hemos obtenido la acción en forma canónica es equivalente a haber considerado  $p^{ab} := \partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_G)/\partial\dot{h}_{ab}$ , con  $\mathcal{L}_G$  el Lagrangiano gravitacional  $16\pi\sqrt{-g}\mathcal{L}_G = ({}^{(3)}R + K^{ab}K_{ab} - K^2)N\sqrt{\bar{h}}$ , y luego la transformación  $\mathcal{H}_G = p^{ab}\dot{h}_{ab} - \sqrt{-g}\mathcal{L}_G$ .

Ahora bien, el Hamiltoniano de relatividad es la integral de  $\mathcal{H}_G$  en  $\Sigma_t$  y el término de frontera; es decir

$$\begin{aligned} (16\pi)H_G &= \int_{\Sigma_t} (16\pi)\mathcal{H}_G d^3y - 2 \oint_{S_t} (k - k_0)N\sqrt{\sigma}d^2\theta \\ &= \int_{\Sigma_t} [N(K^{ab}K_{ab} - K^2 - {}^{(3)}R) - 2N_b D_a (K^{ab} - Kh^{ab})] \sqrt{\bar{h}}d^3y \\ &\quad + 2 \oint_{S_t} (K^{ab} - Kh^{ab})N_b dS_a - 2 \oint_{S_t} (k - k_0)N\sqrt{\sigma}d^2\theta. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Como  $dS_a = r_a \sqrt{\sigma} d^2\theta$ , entonces

$$(16\pi)H_G = \int_{\Sigma_t} [N(K^{ab}K_{ab} - K^2 - {}^{(3)}R) - 2N_b D_a(K^{ab} - Kh^{ab})] \sqrt{h} d^3y - 2 \oint_{S_t} [N(k - k_0) - N_b(K^{ab} - Kh^{ab})r_a] \sqrt{\sigma} d^2\theta. \quad (3.40)$$

### 3.4. Ecuaciones de campo en forma Hamiltoniana.

Para hallar las ecuaciones de campo de la RG en forma Hamiltoniana habremos de variar la funcional de acción

$$S_G = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \int_{\Sigma_t} p^{ab} \dot{h}_{ab} d^3y - H_G \right] \quad (3.41)$$

respecto a las variable independientes  $N$ ,  $N^b$ ,  $h_{ab}$ , y  $p^{ab}$ . Es decir, considerar

$$\delta S_G = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \int_{\Sigma_t} (\dot{h}_{ab} \delta p^{ab} - \dot{p}^{ab} \delta h_{ab}) d^3y - \delta H_G \right]. \quad (3.42)$$

Lo que debemos encontrar es, pues, la variación  $\delta H_G$  del Hamiltoniano.

*Variación respecto al lapso y el corrimiento:*

De (3.40) se sigue que la variación respecto a  $N$  y  $N^b$  (teniendo en cuenta las condiciones de frontera  $\delta N|_{S_t} = 0$  y  $\delta N^a|_{S_t} = 0$ ) es

$$(16\pi)\delta_N H_G = \int_{\Sigma_t} (-\hat{\mathcal{H}}\delta N - \hat{\mathcal{H}}_b \delta N^b) \sqrt{h} d^3y, \quad (3.43)$$

donde

$$\hat{\mathcal{H}} = {}^{(3)}R + K^2 - K^{ab}K_{ab}, \quad \hat{\mathcal{H}}_b = 2D_a(K_b^a - K\delta_b^a). \quad (3.44)$$

*Variación respecto a  $h_{ab}$  y  $p^{ab}$ :*

Para realizar la variación respecto a estas variables, debemos expresar a  $H_G$  en función de éstas. Es decir, utilizar (3.37) y  $\sqrt{h}K = -8\pi p$  para sustituir en (3.40) la curvatura extrínseca y su traza en términos de  $h_{ab}$  y  $p^{ab}$ . Realizando lo anterior, y considerando  $\hat{p}^{ab} := (16\pi)p^{ab}$ , obtenemos que<sup>1</sup>

$$(16\pi)H_G = \hat{H}_\Sigma + \hat{H}_S, \quad (3.45)$$

donde

$$\hat{H}_\Sigma = \int_{\Sigma_t} \left[ Nh^{-1/2}(\hat{p}^{ab}\hat{p}_{ab} - \frac{1}{2}\hat{p}^2) - Nh^{1/2}{}^{(3)}R - 2N_b h^{1/2} D_a(h^{-1/2}\hat{p}^{ab}) \right] d^3y \quad (3.46)$$

<sup>1</sup>Si hubiésemos escrito  $H_G = H_\Sigma + H_S$ , entonces  $\hat{H}_\Sigma = (16\pi)H_\Sigma$  y  $\hat{H}_S = (16\pi)H_S$ . En adelante, dada una cantidad  $A$ ,  $\hat{A}$  denotará  $\hat{A} = 16\pi A$ .

es el término de *volumen*, y

$$\hat{H}_S = -2 \oint_{S_t} [N(k - k_0) - N_b h^{-1/2} \hat{p}^{ab} r_a] \sqrt{\sigma} d^2 \theta \quad (3.47)$$

es el término de *frontera*.

Consideremos la variación de  $\hat{H}_G$  respecto a  $\hat{p}^{ab}$  y comencemos por el término de volumen:

$$\delta_p \hat{H}_\Sigma = \int_{\Sigma_t} N h^{-1/2} \delta_p (\hat{p}^{ab} \hat{p}_{ab} - \frac{1}{2} \hat{p}^2) d^3 y - 2 \delta_p \int_{\Sigma_t} N_b D_a (h^{-1/2} \hat{p}^{ab}) h^{1/2} d^3 y. \quad (3.48)$$

Como

$$\delta_p (\hat{p}^{ab} \hat{p}_{ab} - \frac{1}{2} \hat{p}^2) = 2(\hat{p}_{ab} - \frac{1}{2} \hat{p} h_{ab}) \delta \hat{p}^{ab} \quad (3.49)$$

(pues la variación es respecto a  $\hat{p}^{ab}$ ), sustituyendo en la primera integral y haciendo la segunda por partes se llega a

$$\delta_p \hat{H}_\Sigma = \int_{\Sigma_t} 2[N h^{-1/2} (\hat{p}_{ab} - \frac{1}{2} \hat{p} h_{ab}) + D_{(a} N_{b)}] \delta \hat{p}^{ab} d^3 y - 2 \oint_{S_t} N_b h^{-1/2} \delta \hat{p}^{ab} r_a \sqrt{\sigma} d^2 \theta. \quad (3.50)$$

Hagamos la variación del término de frontera respecto a  $\hat{p}^{ab}$ ; en este caso tenemos simplemente que

$$\delta_p \hat{H}_S = 2 \oint_{S_t} N_b h^{-1/2} \delta \hat{p}^{ab} r_a \sqrt{\sigma} d^2 \theta. \quad (3.51)$$

Este término cancela al término de frontera en  $\delta_p \hat{H}_\Sigma$ . Así que  $\delta_p \hat{H}_G = \delta_p \hat{H}_\Sigma + \delta_p \hat{H}_S$  es

$$\delta_p \hat{H}_G = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}_{ab} \delta \hat{p}^{ab} d^3 y, \quad (3.52)$$

donde

$$\mathcal{H}_{ab} = 2N h^{-1/2} \left( \hat{p}_{ab} - \frac{1}{2} \hat{p} h_{ab} \right) + 2D_{(a} N_{b)}. \quad (3.53)$$

Para realizar la variación de  $\hat{H}_G$  con respecto a  $h_{ab}$  nos basaremos en algunos cálculos llevados a cabo en la sección (2.4). Variando el término de volumen con respecto a  $h_{ab}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \delta_h \hat{H}_\Sigma &= \int_{\Sigma_t} \delta_h N (\hat{p}^{ab} \hat{p}_{ab} - \frac{1}{2} \hat{p}^2) h^{-1/2} d^3 y - \int_{\Sigma_t} \delta_h N^{(3)} R h^{1/2} d^3 y \\ &\quad - \int_{\Sigma_t} 2N_b \delta_h [h^{1/2} D_a (h^{-1/2} \hat{p}^{ab})] d^3 y. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Trabajando con la primera integral de (3.54), que llamaremos  $I_1$ , vemos que

$$I_1 = \int_{\Sigma_t} N \delta_h (\hat{p}^{ab} \hat{p}_{ab} - \frac{1}{2} \hat{p}^2) h^{-1/2} d^3 y + \int_{\Sigma_t} N (\hat{p}^{ab} \hat{p}_{ab} - \frac{1}{2} \hat{p}^2) \delta_h h^{-1/2} d^3 y. \quad (3.55)$$

Si usamos las siguientes igualdades

$$\delta_h h^{1/2} = \frac{1}{2} h^{1/2} h^{ab} \delta h_{ab} \quad (3.56)$$

y

$$\delta_h (\hat{p}^{ab} \hat{p}_{ab} - \frac{1}{2} \hat{p}^2) = 2(\hat{p}^a_c \hat{p}^{cb} - \frac{1}{2} \hat{p} \hat{p}^{ab}) \delta h_{ab} \quad (3.57)$$

la ecuación (3.55) se puede escribir como

$$\begin{aligned} I_1 = & - \int_{\Sigma_t} \frac{1}{2} N h^{-1/2} (\hat{p}^{cd} \hat{p}_{cd} - \frac{1}{2} \hat{p}^2) h^{ab} \delta h_{ab} d^3 y \\ & + 2 \int_{\Sigma_t} N h^{-1/2} (\hat{p}^a_c \hat{p}^{bc} - \frac{1}{2} \hat{p} \hat{p}^{ab}) \delta h_{ab} d^3 y. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Continuando con la segunda integral de (3.54), que denotaremos por  $I_2$ , podemos ver que

$$I_2 = \int_{\Sigma_t} N [(\delta_h h^{1/2}) h^{ab} R_{ab} + h^{1/2} (\delta h^{ab}) R_{ab} + h^{1/2} h^{ab} \delta_h R_{ab}] d^3 y. \quad (3.59)$$

Para la tercer integral de (3.59) tenemos que la variación de tensor de Ricci 3-dimensional está dada por

$$\begin{aligned} \delta_h R_{ab} &= \partial_c (\delta_h \Gamma_{ba}^c) - \partial_b (\delta_h \Gamma_{ca}^c) \\ &= D_c (\delta_h \Gamma_{ba}^c) - D_b (\delta_h \Gamma_{ca}^c), \end{aligned} \quad (3.60)$$

si ponemos  $\bar{\delta} v^c = h^{ab} \delta_h \Gamma_{ba}^c - h^{ac} \delta_h \Gamma_{ba}^b$  esta integral se puede escribir como

$$\int_{\Sigma_t} N h^{1/2} h^{ab} \delta_h R_{ab} d^3 y = \int_{\Sigma_t} N h^{1/2} D_c \bar{\delta} v^c d^3 y. \quad (3.61)$$

Por otro lado, utilizando que  $\delta h^{ab} = -h^{cb} h^{ad} \delta h_{dc}$ , la segunda integral en (3.59) es

$$\int_{\Sigma_t} N h^{1/2} R_{ab} \delta h^{ab} d^3 y = - \int_{\Sigma_t} N h^{1/2} R^{ab} \delta h_{ab} d^3 y. \quad (3.62)$$

Usando (3.56), la primer integral en (3.59) se puede reescribir como

$$\int_{\Sigma_t} N^{(3)} R \delta_h h^{1/2} d^3 y = \int_{\Sigma_t} \frac{1}{2} h^{1/2} N^{(3)} R h^{ab} \delta h_{ab} d^3 y. \quad (3.63)$$

Juntando las expresiones anteriores tenemos que  $I_2$  se puede expresar como

$$I_2 = \int_{\Sigma_t} \frac{1}{2} h^{1/2} N^{(3)} R h^{ab} \delta h_{ab} d^3 y - \int_{\Sigma_t} N h^{1/2} R^{ab} \delta h_{ab} d^3 y + \int_{\Sigma_t} N h^{1/2} D_c \bar{\delta} v^c d^3 y. \quad (3.64)$$

Ahora trabajaremos con la tercer integral de (3.54), que denotaremos por  $I_3$ . Integrando por partes,

$$\begin{aligned} I_3 &= 2\delta_h \oint_{S_t} N_b h^{-1/2} p^{ab} r_a \sqrt{\sigma} d^2\theta - \delta_h \int_{\Sigma_t} 2\hat{p}^{ab} D_a N_b d^3y \\ &= -\delta_h \int_{\Sigma_t} 2\hat{p}^{ab} D_a N_b d^3y \end{aligned} \quad (3.65)$$

pues  $h_{ab}$  es fija en  $S_t$ .

Reuniendo los resultados para  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  llegamos a la siguiente expresi3n para  $\delta_h \hat{H}_\Sigma$

$$\begin{aligned} \delta_h \hat{H}_\Sigma &= I_1 - I_2 - I_3 \\ &= -\int_{\Sigma_t} \frac{1}{2} N h^{-1/2} (\hat{p}^{cd} \hat{p}_{cd} - \frac{1}{2} \hat{p}^2) h^{ab} \delta h_{ab} d^3y \\ &\quad + 2 \int_{\Sigma_t} N h^{-1/2} (\hat{p}_c^a \hat{p}^{bc} - \frac{1}{2} \hat{p} \hat{p}^{ab}) \delta h_{ab} d^3y \\ &\quad - \int_{\Sigma_t} \frac{1}{2} h^{1/2} N^{(3)} R h^{ab} \delta h_{ab} d^3y + \int_{\Sigma_t} N h^{1/2} R^{ab} \delta h_{ab} d^3y \\ &\quad - \int_{\Sigma_t} N h^{1/2} D_c \bar{\delta} v^c d^3y + \delta_h \int_{\Sigma_t} 2\hat{p}^{ab} D_a N_b d^3y. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Si en (3.66) sustituimos las relaciones

$$G^{ab} = R^{ab} - \frac{1}{2} {}^{(3)}R h^{ab}, \quad \delta_h D_a N_b = \delta h_{bc} D_a N^c + h_{bc} N^d \delta_h \Gamma_{ad}^c \quad (3.67)$$

entonces

$$\begin{aligned} \delta_h \hat{H}_\Sigma &= \int_{\Sigma_t} \left[ -\frac{1}{2} N h^{-1/2} (\hat{p}^{cd} \hat{p}_{cd} - \frac{1}{2} \hat{p}^2) h^{ab} + 2N h^{-1/2} (\hat{p}_c^a \hat{p}^{bc} - \frac{1}{2} \hat{p} \hat{p}^{ab}) \right. \\ &\quad \left. + N h^{1/2} G^{ab} + 2\hat{p}^{c(b} D_c N^{a)} \right] \delta h_{ab} d^3y \\ &\quad + \int_{\Sigma_t} [-N h^{1/2} D_c \bar{\delta} v^c + 2\hat{p}_c^a N^d \delta_h \Gamma_{ad}^c] d^3y. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Integrando por partes el primer t3rmino de la segunda integral de (3.68) se obtiene que

$$\begin{aligned} I_4 &= -\int_{\Sigma_t} N h^{1/2} D_c \bar{\delta} v^c d^3y = \int_{\Sigma_t} h^{1/2} \bar{\delta} v^c \partial_c N d^3y - \oint_{S_t} N h^{1/2} \bar{\delta} v^c r_c \sqrt{\sigma} d^2\theta \\ &= \int_{\Sigma_t} h^{1/2} \bar{\delta} v^c \partial_c N d^3y + \oint_{S_t} N h^{ab} (\partial_c \delta h_{ab}) r^c \sqrt{\sigma} d^2\theta, \end{aligned} \quad (3.69)$$

donde hemos utilizado la versi3n 3-dimensional de la ecuaci3n (2.53). Para expresar la primer integral de  $I_4$  en t3rminos de  $\delta_h h_{ab}$  haremos lo siguiente, usando la relaci3n

$$\delta_h \Gamma_{ba}^c = \frac{1}{2} h^{cd} (D_b \delta h_{ad} + D_a \delta h_{db} - D_d \delta h_{ab}), \quad (3.70)$$

$\bar{\delta}v^c$  puede escribirse como

$$\bar{\delta}v^c = \frac{1}{2}(h^{ab}h^{cd} - h^{ac}h^{bd})[D_b\delta h_{ad} + D_a\delta h_{db} - D_d\delta h_{ab}] \quad (3.71)$$

y entonces es sencillo verificar que

$$\bar{\delta}v^c(\partial_c N) = -(h^{ab}\partial^d N - h^{bd}\partial^a N)D_d\delta h_{ab}. \quad (3.72)$$

Sustituyendo y llevando a cabo una segunda integración por partes en  $I_4$  tenemos

$$\begin{aligned} I_4 &= - \int_{\Sigma_t} (h^{ab}\partial^d N - h^{bd}\partial^a N)h^{1/2}D_d\delta h_{ab}d^3y + \oint_{S_t} Nh^{ab}(\partial_c\delta h_{ab})r^c\sqrt{\sigma}d^2\theta \\ &= \int_{\Sigma_t} (h^{ab}D_dD^dN - D^bD^aN)h^{1/2}\delta h_{ab}d^3y + \oint_{S_t} Nh^{ab}(\partial_c\delta h_{ab})r^c\sqrt{\sigma}d^2\theta \end{aligned} \quad (3.73)$$

donde hemos usado que  $\delta h_{ab}$  se anula en  $S_t$ . Regresemos a la segunda integral de (3.68) y consideremos el segundo término en ésta:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} 2\hat{p}_c^aN^d\delta_h\Gamma_{ad}^cd^3y &= \int_{\Sigma_t} \hat{p}_c^aN^d[h^{cb}(D_a\delta h_{db} + D_d\delta h_{ba} - D_b\delta h_{ad})]d^3y \\ &= \int_{\Sigma_t} h^{-1/2}\hat{p}^{ab}N^dD_d(\delta h_{ab})h^{1/2}d^3y. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Integrando por partes (y usando la condición de frontera,  $\delta h_{ab} = 0$  en  $S_t$ ),

$$\int_{\Sigma_t} 2\hat{p}_c^aN^d\delta_h\Gamma_{ad}^cd^3y = - \int_{\Sigma_t} D_d(h^{-1/2}\hat{p}^{ab}N^d)\delta h_{ab}h^{1/2}d^3y. \quad (3.75)$$

Tenemos ya la segunda integral de (3.68) en términos de  $\delta h_{ab}$ , así que juntando los resultados

$$\delta_h\hat{H}_\Sigma = \int_{\Sigma_t} \hat{\mathcal{P}}^{ab}\delta h_{ab}d^3y + \oint_{S_t} Nh^{ab}\partial_c(\delta h_{ab})r^c\sqrt{\sigma}d^2\theta, \quad (3.76)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}^{ab} &:= -\frac{1}{2}Nh^{-1/2}(\hat{p}^{cd}\hat{p}_{cd} - \frac{1}{2}\hat{p}^2)h^{ab} + 2Nh^{-1/2}(\hat{p}_c^a\hat{p}^{bc} - \frac{1}{2}\hat{p}\hat{p}^{ab}) \\ &+ Nh^{1/2}G^{ab} + 2\hat{p}^{c(b}D_cN^a) + h^{1/2}(h^{ab}D_cD^cN - D^bD^aN) \\ &- h^{1/2}D_c(h^{-1/2}\hat{p}^{ab}N^c). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Por otro lado, usando la versión 3-dimensional de la ecuación (2.57), obtenemos que la variación de  $\hat{H}_S$  es

$$\delta_h\hat{H}_S = - \oint_{S_t} 2N\delta_h k\sqrt{\sigma}d^2\theta = - \oint_{S_t} Nh^{ab}\partial_c(\delta h_{ab})r^c\sqrt{\sigma}d^2\theta. \quad (3.78)$$

Este término cancela la integral de frontera en (3.76), así que la variación del Hamiltoniano respecto a  $h_{ab}$ ,  $\delta_h \hat{H}_G = \delta_h \hat{H}_\Sigma + \delta_h \hat{H}_S$ , queda como

$$\delta_h \hat{H}_G = \int_{\Sigma_t} \hat{\mathcal{P}}^{ab} \delta h_{ab} d^3y, \quad (3.79)$$

con  $\hat{\mathcal{P}}^{ab}$  dado por (3.77).

Finalmente, de (3.43), (3.52) y (3.79) se tiene que la variación total del Hamiltoniano de RG es

$$\delta H_G = \int_{\Sigma_t} (\mathcal{P}^{ab} \delta h_{ab} + \mathcal{H}_{ab} \delta p^{ab} - \mathcal{H} \delta N - \mathcal{H}_b \delta N^b) d^3y. \quad (3.80)$$

En esta expresión hemos eliminado las variables con gorrito dividiendo entre  $(16\pi)$ . Con  $\delta H_G$  a la mano podemos hallar las ecuaciones de campo de la RG en forma Hamiltoniana. Recordemos que

$$\delta S_G = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \int_{\Sigma_t} (\dot{h}_{ab} \delta p^{ab} - \dot{p}^{ab} \delta h_{ab}) d^3y - \delta H_G \right], \quad (3.81)$$

entonces

$$\delta S_G = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \left[ (\dot{h}_{ab} - \mathcal{H}_{ab}) \delta p^{ab} - (\dot{p}^{ab} + \mathcal{P}^{ab}) \delta h_{ab} + \mathcal{H} \delta N + \mathcal{H}_b \delta N^b \right] d^3y. \quad (3.82)$$

De la condición  $\delta S_G = 0$  se siguen las ecuaciones de Einstein (en vacío) en forma Hamiltoniana. Esto es

$$\dot{h}_{ab} = \mathcal{H}_{ab}, \quad \dot{p}^{ab} = -\mathcal{P}^{ab}, \quad \mathcal{H} = 0, \quad \mathcal{H}_b = 0. \quad (3.83)$$

Las primeras dos ecuaciones nos dicen la forma en que las variables conjugadas  $h_{ab}$  y  $p^{ab}$  evolucionan. Las últimas dos ecuaciones son las ecuaciones de restricción *Hamiltoniana*  $\mathcal{H} = 0$  y de *momento o difeomorfismos*  $\mathcal{H}_b = 0$ . Nótese que el lapso y el corrimiento *no son* variables dinámicas.

En la formulación Hamiltoniana de la RG la situación es entonces la siguiente: De la descomposición 3 + 1 se tiene que el elemento de línea es

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ab} (dy^a + N^a dt)(dy^b + N^b dt), \quad (3.84)$$

dados el lapso y el corrimiento. Se eligen valores iniciales para los campos tensoriales  $h_{ab}$  y  $K_{ab}$  que satisfagan las constricciones

$${}^{(3)}R + K^2 - K^{ab} K_{ab} = 0, \quad D_a (K_b^a - K \delta_b^a) = 0, \quad (3.85)$$

y, entonces, se determina la evolución de los valores iniciales usando las ecuaciones Hamiltonianas

$$\dot{h}_{ab} = \mathcal{H}_{ab}, \quad \dot{p}^{ab} = -\mathcal{P}^{ab}. \quad (3.86)$$

Este método para encontrar soluciones de las ecuaciones de Einstein (construir el espacio-tiempo) es utilizado en relatividad numérica (aunque frecuentemente, y por conveniencia, con alguna transformación canónica de por medio).

### 3.5. Formulaci3n can3nica y constricciones

Consideremos un espacio-tiempo  $M = \mathbb{R} \times \Sigma$  donde  $\Sigma$  es una variedad 3-dimensional compacta. Entonces, la acci3n es s3lo la de Einstein-Hilbert,

$$S_G = S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int_M R \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.87)$$

Por la descomposici3n (3+1) tenemos que (ver ecuaci3n (3.19) y tomar en cuenta que no hay frontera)

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} ({}^{(3)}R + K^{ab}K_{ab} - K^2) N \sqrt{h} d^3y. \quad (3.88)$$

Recordando la ecuaci3n (3.31) podemos ver que  $S_G$  contiene derivadas temporales de la 3-m3trica  $h_{ab}$  por medio de los t3rminos que dependen de la curvatura extr3nseca, mientras que no hay derivadas temporales de la funci3n lapso ni del vector corrimiento. Esto nos dice que el Lagrangiano es singular<sup>2</sup> y entonces esperamos obtener constricciones primarias como veremos a continuaci3n.

En la formulaci3n can3nica el siguiente paso es definir los momentos conjugados. Habiendo hecho la descomposici3n (3+1) del espacio tiempo, tenemos que las variables independientes resultan ser  $N$ ,  $N^a$  y  $h_{ab}$ , que tienen como momentos conjugados respectivamente a

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{N}} = 0 \quad (3.89)$$

$$\Pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{N}^a} = 0 \quad (3.90)$$

$$p^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ab}} = \frac{\sqrt{h}}{16\pi} (K^{ab} - K h^{ab}), \quad (3.91)$$

donde hemos usado que  $(16\pi)\mathcal{L}_G = N\sqrt{h}({}^{(3)}R + K^{ab}K_{ab} - K^2)$ . El espacio fase, coordinado por  $(N, N^a, h_{ab}, \Pi, \Pi_a, p^{ab})$ , es entonces de dimensi3n 20 y est3 equipado con la siguiente estructura simpl3ctica

$$\{N(t, y), \Pi(t, y')\} = \delta(y, y'), \quad (3.92)$$

$$\{N^a(t, y), \Pi_b(t, y')\} = \delta_b^a(y, y'), \quad (3.93)$$

$$\{h_{ab}(t, y), p^{cd}(t, y')\} = \delta_{(a}^c \delta_{b)}^d \delta(y, y'), \quad (3.94)$$

y donde el resto de los *par3ntesis de Poisson* son nulos.

---

<sup>2</sup>El que un Lagrangiano sea singular nos indica que no todas las velocidades pueden ser invertidas de manera que sean funciones de las coordenadas generalizadas y de los momentos. Como consecuencia, no todos los momentos son independientes, de hecho algunas relaciones entre 3stos se ponen de manifiesto. Estas son llamadas *constricciones primarias*

De la definición para los momentos conjugados se obtienen las constricciones primarias siguientes

$$\mathcal{C} = \Pi \approx 0, \quad (3.95)$$

$$\mathcal{C}_a = \Pi_a \approx 0. \quad (3.96)$$

Aquí  $\approx$  denota igualdad débil, que significa que las cantidades en cuestión, en este caso  $\Pi$  y  $\Pi_a$ , están restringidas a ser cero pero no son idénticamente cero en todo el espacio fase. Cuando realizamos la formulación mediante los corchetes de Poisson de un teoría con constricciones, éstas deben ser introducidas sólo después de que hemos calculado todos los corchetes de Poisson, de otra manera podemos afectar la consistencia de la construcción. Esta es la razón por la cual usamos el símbolo  $\approx$ , para enfatizar el hecho de que las constricciones tienen que ser introducidas una vez que se ha hecho el análisis canónico. Las constricciones limitan la evolución del sistema a una región restringida del espacio fase; definen una superficie de restricción.

Debido a la presencia de las constricciones primarias, no todas las “velocidades” pueden ser reexpresadas como funciones de las variables originales de configuración y de los momentos canónicos conjugados, esto lo que nos dice es que el Hamiltoniano

$$H = p_i \dot{q}^i - \mathcal{L}, \quad (3.97)$$

(donde  $q^i$  y  $p_i$  son las coordenadas generalizadas en el espacio fase) no está determinado de manera única como función de las variables originales y sus momentos. El Hamiltoniano está bien definido sólo en una región restringida del espacio fase determinada por las constricciones. Para tener en cuenta la restricción del espacio fase debida a (3.95)-(3.96), se introducen multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  y  $\lambda^a$ , los cuales se varían en forma independiente en la acción. Tenemos que

$$S_G = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma_t} [p^{ab} \dot{h}_{ab} + \Pi \dot{N} + \Pi_a \dot{N}^a - N\mathcal{H} - N^a \mathcal{H}_a - \lambda \mathcal{C} - \lambda^b \mathcal{C}_b] d^3y, \quad (3.98)$$

donde  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}_a$  son la restricción Hamiltoniana y de difeomorfismos, respectivamente,

$$\mathcal{H} = - \left[ \frac{\sqrt{h}}{16\pi} ({}^{(3)}R + K^2 - K^{ab} K_{ab}) \right] \quad (3.99)$$

$$\mathcal{H}_a = -2h_{ac} D_b p^{bc}. \quad (3.100)$$

El Hamiltoniano canónico para el campo gravitacional, cuando el espacio es compacto, está dado por

$$H_G = \int_{\Sigma_t} [N\mathcal{H} + N^a \mathcal{H}_a + \lambda \mathcal{C} + \lambda^b \mathcal{C}_b] d^3y. \quad (3.101)$$

Realizando la variación de la acción, dada por la ecuación (3.98), respecto a los multiplicadores de Lagrange obtenemos las constricciones primarias (3.95) y (3.96). La consistencia dinámica-constricciones implica que éstas últimas deben conservarse bajo la evolución del sistema. Puesto que

$$\dot{\mathcal{C}}(t, y) = \{H_G, \mathcal{C}(t, y)\} = \mathcal{H}(t, y), \quad (3.102)$$

$$\dot{\mathcal{C}}_a(t, y) = \{H_G, \mathcal{C}_a(t, y)\} = \mathcal{H}_a(t, y), \quad (3.103)$$

entonces la consistencia dinámica-constricciones hace necesario imponer el conjunto de constricciones secundarias

$$\mathcal{H}(t, y) \approx 0 \quad (3.104)$$

$$\mathcal{H}_a(t, y) \approx 0. \quad (3.105)$$

Estas constricciones generan el álgebra<sup>3</sup>

$$\{\mathcal{H}_a(y), \mathcal{H}_b(y')\} = \mathcal{H}_a(y')\partial_b\delta(y, y') - \mathcal{H}_b(y)\partial'_a\delta(y', y) \quad (3.106)$$

$$\{\mathcal{H}_a(y), \mathcal{H}(y')\} = \mathcal{H}(y)\partial_a\delta(y, y') \quad (3.107)$$

$$\{\mathcal{H}(y), \mathcal{H}(y')\} = \mathcal{H}^b(y')\partial_b\delta(y, y') - \mathcal{H}^b(y)\partial'_b\delta(y', y). \quad (3.108)$$

Debido a que los paréntesis de Poisson entre todas las constricciones se anulan débilmente, podemos decir que  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}_a$  junto con las constricciones primarias forman un conjunto de constricciones de primera clase.

Para  $N$  y  $N^a$  se tiene que

$$\dot{N}(t, y) = \lambda(t, y) \quad (3.109)$$

$$\dot{N}^a(t, y) = \lambda^a(t, y), \quad (3.110)$$

por lo que el lapso y el vector de corrimiento son arbitrarios. Así, la descripción del sistema en el espacio fase tiene como variables fundamentales a  $h_{ab}$  y  $p^{ab}$ , mientras que la función lapso y el vector de corrimiento son considerados como multiplicadores de Lagrange. El Hamiltoniano en el caso compacto es una combinación de constricciones  $\mathcal{H}_G = N\mathcal{H} + N^a\mathcal{H}_a$ , lo que significa que la dinámica es pura norma en este caso.

---

<sup>3</sup>Para ver cómo se obtiene esta álgebra puede consultarse [Doná & Speziale 2010]



# Capítulo 4

## Relatividad General a la Palatini

En esta sección veremos una tercera forma en que las ecuaciones del campo gravitacional pueden obtenerse a partir de una funcional de acción. Se introducirá una serie de conceptos que serán de gran relevancia más adelante, cuando presentemos a la relatividad en variables de conexión. Para comenzar, haremos una breve presentación sobre haces vectoriales. Después definiremos conexión y curvatura en un haz vectorial. Finalmente daremos la acción de Palatini, que es una funcional a partir de la cual también se derivan las ecuaciones del campo gravitacional.

### 4.1. Haces vectoriales.

Antes de definir un haz *vectorial*, empezaremos por definir lo que se entiende por un *haz*. Un haz es una estructura que consiste de una variedad<sup>1</sup>  $E$ , llamada *espacio total*, una variedad  $M$ , llamada *espacio base*, y una proyección  $\pi : E \rightarrow M$  del espacio total al base. Para cada punto  $p \in M$ , el espacio

$$E_p = \{q \in E : \pi(q) = p\} \quad (4.1)$$

es la *fibra (de  $E$ ) sobre  $p$* . El espacio total  $E$  no es más que la unión de todas la fibras,

$$E = \bigcup_{p \in M} E_p. \quad (4.2)$$

Cuando nos refiramos a un haz lo haremos algunas veces como el haz  $\pi : E \rightarrow M$  o simplemente como el haz  $E$  (si requerimos enfatizar el espacio base, entonces diremos que  $E$  es un haz sobre  $M$ ).

Un ejemplo sencillo de haz es el *haz tangente* de una variedad  $M$ . En tal caso, el espacio total  $E = TM$  es simplemente la unión de los espacios tangentes a  $M$ :

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M. \quad (4.3)$$

---

<sup>1</sup>Para una discusión detallada sobre variedades ver Sección A.1 en el Apéndice.

La proyección  $\pi : TM \rightarrow M$  mapea a cada vector tangente  $v \in T_pM$  a  $p \in M$ . La fibra en cada  $p \in M$  es el espacio tangente  $T_pM$ .

Dadas las variedades  $M$  y  $F$ , el haz trivial sobre  $M$  con fibra estándar  $F$  está dado por el producto cartesiano  $E = M \times F$ , con el mapeo proyección dado por

$$\pi(p, f) = p \tag{4.4}$$

para todo  $(p, f) \in M \times F$ . En el haz trivial, la fibra sobre  $p$  es

$$E_p = \{p\} \times F, \tag{4.5}$$

y por consiguiente las fibras son difeomorfas a la estándar  $F$ . Diremos que un haz es localmente trivial si en una vecindad lo suficientemente pequeña de cualquier punto en la base éste es trivial.

Sean  $E$  y  $E'$  dos haces con base  $M$  y  $M'$ , respectivamente. Un morfismo de haces es un par de mapeos  $\psi : E \rightarrow E'$  y  $\phi : M \rightarrow M'$  tales que  $\psi$  mapea cada fibra  $E_p$  hacia la fibra  $E'_{\phi(p)}$ . Decimos que un morfismo es un isomorfismo si tanto  $\phi$  como  $\psi$  son difeomorfismos.

Dado un haz  $E$  con base  $M$  y una subvariedad  $S \subseteq M$ , la restricción a  $S$  tiene como espacio total a

$$E|_S = \{q \in E : \pi(q) \in S\}, \tag{4.6}$$

a  $S$  como espacio base y  $\pi$  (restringido a  $E|_S$ ) es la proyección. Así, un haz es *localmente trivial* con fibra estándar  $F$ , si para cada punto  $p \in M$  existe una vecindad  $U$  de  $p$  y un isomorfismo de haces

$$\phi : E|_U \rightarrow U \times F \tag{4.7}$$

que manda cada fibra  $E_p$  a la fibra  $\{p\} \times F$ . Al mapeo  $\phi$  se le conoce bajo el nombre de *trivialización local*.

Una vez introducidos algunos conceptos básicos, podemos dar ahora la definición de haz vectorial. Un *haz vectorial*  $n$ -dimensional es un haz localmente trivial  $E$  sobre  $M$  tal que cada fibra  $E_p$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Además, requerimos que para cada punto  $p \in M$ , exista una vecindad  $U$  de  $p$  y una trivialización local

$$\phi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n \tag{4.8}$$

que mande cada fibra  $E_p$  a la fibra  $\{p\} \times \mathbb{R}^n$  *linealmente*. Esto es equivalente a requerir que la trivialización sea lineal en las fibras.

Un *morfismo de haces vectoriales* es un morfismo de haces  $\psi : E \rightarrow E'$  cuya restricción a cada fibra  $E_p$  de  $E$  es lineal.

Definimos una *sección* en un haz  $\pi : E \rightarrow M$  como una función  $s : M \rightarrow E$  que asigna a cada punto en el espacio base un vector en la fibra sobre ese punto,  $s(p) \in E_p$ . Así, tenemos que un campo vectorial sobre  $M$  no es otra cosa sino una sección del haz tangente de  $M$ .

Notemos que si  $E = M \times F$  es un haz trivial con fibra estándar  $F$ , una sección de  $E$  es solamente una manera complicada de hablar acerca de una función de  $M$  a  $F$ . En otras palabras, si tenemos una sección  $s : M \rightarrow E$ , existe una función  $f : M \rightarrow F$  tal que

$$s(p) = (p, f(p)) \in E_p. \quad (4.9)$$

Análogamente, si tenemos una función  $f : M \rightarrow F$ , la fórmula anterior define una sección.

Denotemos al conjunto de todas las secciones de  $E$  por  $\Gamma(E)$ . Claramente,

$$(s + s')(p) = s(p) + s'(p), \quad (4.10)$$

$$(fs)(p) = f(p)s(p) \quad (4.11)$$

pertenecen a  $\Gamma(E)$  para toda  $s, s' \in \Gamma(E)$  y toda función  $f \in C^\infty(M)$ . Dado un haz vectorial  $E$ , decimos que las secciones  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $E$  forman una *base de secciones* de  $E$  si cualquier sección  $s \in \Gamma(E)$  puede escribirse de manera única como la suma

$$s = s^i e_i, \quad (4.12)$$

donde  $s^i \in C^\infty(M)$ . Puesto que un haz vectorial es trivial localmente, siempre es posible trabajar con una base de secciones sobre cualquier vecindad de un punto en el espacio base.

Podemos ahora utilizar el concepto de haz vectorial para construir nuevos haces vectoriales. Dado un haz vectorial  $E$  sobre  $M$ , definimos el *haz vectorial dual*  $E^*$  sobre  $M$  como sigue: puesto que cada fibra  $E_p$  de  $E$  es un espacio vectorial, entonces tiene un dual  $E_p^*$ , que es también un espacio vectorial; el espacio total  $E^*$  lo consideramos como la unión de los espacios vectoriales  $E_p^*$  para todo  $p \in M$  y a la proyección  $\pi : E^* \rightarrow M$  como el mapeo que a cada  $E_p^*$  lo manda al correspondiente  $p \in M$  (i.e., la fibra sobre  $p \in M$  es  $E_p^*$ ). Un ejemplo sencillo de haz dual es el *haz cotangente*  $T^*M$  de una variedad. En tal caso, la fibra  $T_p^*M$  es el espacio cotangente en  $p$  (es decir, el dual a  $T_pM$ ). Una sección de  $T^*M$  es un campo de 1-formas en  $M$ .

Sean  $E$  y  $E'$  dos haces vectoriales con el mismo espacio base  $M$ . Definimos la *suma directa de haces vectoriales*  $E \oplus E'$  sobre  $M$  como el haz cuya fibra sobre  $p$  es el espacio vectorial  $E_p \oplus E'_p$ . De manera similar, el *producto tensorial de haces vectoriales*  $E \otimes E'$  sobre  $M$  tiene fibra  $E_p \otimes E'_p$  sobre  $p$ .

Otra forma de construir haces vectoriales es mediante el “pegado” de haces vectoriales triviales (aquí entra en juego la teoría de grupos, sobre la cual se puede aprender un poco en la Sección (A.3) del Apéndice). La idea es la siguiente:

Sea  $M$  una variedad y  $\{U_\alpha\}$  una cubierta de  $M$  mediante conjuntos abiertos. Sea  $V$  un espacio vectorial y  $\rho$  una representación de algún grupo  $G$  en  $V$ . Pegaremos los haces triviales  $U_\alpha \times V$  para obtener un haz vectorial  $\pi : E \rightarrow M$  usando las *funciones de transición*  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ . Para obtener el espacio total  $E$ , empezamos con la unión disjunta

$$\bigcup_{\alpha} U_\alpha \times V \quad (4.13)$$

e identificaremos dos puntos  $(p, v) \in U_\alpha \times V$  y  $(p, v') \in U_\beta \times V$  como iguales si

$$v = \rho(g_{\alpha\beta}(p))v'. \quad (4.14)$$

En adelante simplificaremos notación y en lugar de escribir  $\rho(g_{\alpha\beta}(p))$  escribiremos simplemente  $g_{\alpha\beta}$ . Así, tenemos que el pegado está dado por

$$v = g_{\alpha\beta}v'. \quad (4.15)$$

Debemos, sin embargo, ser cuidadosos. El procedimiento nos dará un haz vectorial sólo si las funciones de transición satisfacen ciertas condiciones de consistencia. Por ejemplo, según la receta dada  $p \in U_\alpha$  tenemos que identificar a  $(p, v) \in U_\alpha \times V$  con  $(p, g_{\alpha\alpha}v) \in U_\alpha \times V$ . Si  $g_{\alpha\alpha}$  fuese diferente de la identidad, entonces estaríamos identificando dos puntos diferentes en el mismo haz trivial  $U_\alpha \times V$ , y eso es algo que evidentemente no queremos. Por consiguiente, un primer requerimiento es que

$$g_{\alpha\alpha} = 1 \quad \text{en } U_\alpha. \quad (4.16)$$

Análogamente, si  $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$  tendremos que requerir

$$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1 \quad \text{en } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma. \quad (4.17)$$

El haz vectorial que se obtiene con el pegado satisfaciendo estas condiciones de consistencia es denominado un *G-haz*, donde  $G$  es el *grupo de norma* del haz y  $V$  es la *fibra estándar*<sup>2</sup>. Evidentemente el nombre *grupo de norma* no es gratuito. Sea  $\pi : E \rightarrow M$  un haz vectorial. Una transformación de norma es una transformación  $E_p \rightarrow E_p$  lineal inyectiva que varía suavemente en  $p \in M$ . Para el caso en que  $E$  es un  $G$ -haz, la transformación pertenece a  $G$ .

Consideremos el conjunto de todos los endomorfismos de un espacio vectorial  $V$ ,  $End(V)$  (un endomorfismo de  $V$  es una función lineal de  $V$  en sí mismo). Es fácil probar que  $End(V)$  es un espacio vectorial; más aún, respecto al producto

$$End(V) \times End(V) \rightarrow End(V), \quad (ST)(v) := S(T(v)), \quad (4.18)$$

$End(V)$  es un álgebra. i.e., el producto es, en efecto, bilineal y satisface la ley asociativa.

Veamos ahora que existe un isomorfismo entre  $V \otimes V^*$  y  $End(V)$ . En efecto, al elemento  $v \otimes f \in V \otimes V^*$  le asociamos la función lineal

$$w \mapsto f(w)v \quad (4.19)$$

para todo  $w \in V$ . Así, podemos considerar que  $End(V)$  es “igual” a  $V \otimes V^*$ . Como las ideas en espacios vectoriales se generalizan a haces vectoriales, entonces el *haz de endomorfismos* de un haz vectorial  $E$ ,  $End(E)$ , es el haz  $E \otimes E^*$ . La fibra de  $End(E)$

---

<sup>2</sup>En teorías de norma, los campos físicos corresponden a secciones en un determinado  $G$ -haz.

sobre cualquier punto  $p \in M$  es lo mismo que  $End(E_p)$  (pues la fibra corresponde a  $E_p \otimes E_p^*$  que es  $End(E_p)$ ), los endomorfismos de  $E_p$ . Así, una sección  $T$  de  $End(E)$  define el mapeo  $E_p \ni v \rightarrow T(p)v \in E_p$  (de  $E$  en sí mismo) que es un morfismo de haces vectoriales. Ahora es claro que una sección  $T$  de  $End(E)$  actuando sobre una sección  $s$  de  $E$  da como resultado una nueva sección  $Ts$  de  $E$ ,

$$(Ts)(p) = T(p)s(p). \quad (4.20)$$

En otras palabras,  $T$  determina una función

$$T : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E), \quad (4.21)$$

donde  $\Gamma(E)$  es el conjunto de todas las secciones de  $E$ . Esta función es  $C^\infty(M)$ -lineal; es decir,

$$T(fs) = fT(s) \quad (4.22)$$

para todas las funciones  $f$  y secciones  $s$  de  $E$ . El inverso también es cierto; i.e., todos los mapeos  $C^\infty(M)$ -lineales

$$T : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \quad (4.23)$$

corresponden a secciones de  $End(E)$ .

Ahora supongamos que  $\pi : E \rightarrow M$  es un  $G$ -haz, donde el grupo de norma  $G$  es algún grupo de Lie, y consideremos  $T \in End(E)$ . Hemos visto que  $T(p) \in End(E_p)$ . El mapeo  $T(p)$  está en  $G$  si es de la forma  $(p, v) \rightarrow (p, \rho(g)v)$ , donde  $\rho$  es una representación de  $G$ . Por otro lado,  $T$  está en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ , si  $T(p)$  es de la forma  $(p, v) \rightarrow (p, d\rho(a)v)$  para  $a \in \mathfrak{g}$ . Si  $T(p)$  está en  $G$  para toda  $p \in M$ , entonces diremos que  $T$  es una transformación de norma (como se mencionó con anterioridad). Si  $T(p)$  está en  $\mathfrak{g}$  para todo  $p \in M$  diremos que  $T \in \mathfrak{g}$ .

## 4.2. Conexión y curvatura en haces vectoriales.

Para poder hacer cálculo diferencial en haces vectoriales es necesario introducir la idea de *conexión*, pues ésta permite, por ejemplo, comparar espacios tangentes en distintos puntos y provee una manera de diferenciar secciones de un haz vectorial. Sea  $\pi : E \rightarrow M$  un haz vectorial y  $\Gamma(E)$  el conjunto de todas las secciones de  $E$ . Una *conexión*  $D$  en  $M$  es un objeto que asigna a un campo vectorial  $v$  en  $M$  ( $v \in \mathcal{X}(M)$ , donde  $\mathcal{X}(M)$  denota el conjunto de campos vectoriales en  $M$ ) una función  $D_v : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  que satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} D_v(\alpha s) &= \alpha D_v s \quad , \quad D_v(s + t) = D_v s + D_v t, \\ D_v(fs) &= v[f]s + f D_v s \quad , \quad D_{v+ws} = D_v s + D_w s \quad , \quad D_{fv} = f D_v s \end{aligned} \quad (4.24)$$

para todo escalar  $\alpha$ ,  $f \in C^\infty(M)$ ,  $v, w \in \mathcal{X}(M)$  y  $s, t \in \Gamma(E)$ . A  $D_v s$  se le conoce como *derivada covariante* de  $s$  en dirección  $v$ .

En términos de un sistema coordenado local  $\{x^\mu\}$  en un abierto  $U \subseteq M$ , se tiene que la derivada covariante de la sección  $s = s^i e_i$  (donde  $e_i$  es la base de secciones de  $E$ ) a lo largo de  $v = v^\mu \partial_\mu$  está dada por (usaremos la notación  $D_\mu = D_{\partial_\mu}$ )

$$\begin{aligned} D_v s &= D_{v^\mu \partial_\mu} s = v^\mu D_\mu (s^i e_i) = v^\mu ((\partial_\mu s^i) e_i + A_{\mu i}^j s^i e_j) \\ &= v^\mu (\partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j) e_i = v^\mu (D_\mu s)^i e_i, \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde en la última igualdad del primer renglón hemos definido al *potencial vectorial*  $A_{\mu i}^j$  como

$$D_\mu e_i = A_{\mu i}^j e_j. \quad (4.26)$$

Nótese que el término que hace discrepar a la derivada covariante de la derivada parcial, es decir el término

$$A_{\mu i}^j v^\mu s^i e_j, \quad (4.27)$$

es una sección. Claramente, si en lugar de  $v$  (o  $s$ ) consideramos  $fv$  (o  $fs$ ), donde  $f$  es una función, tendremos que (4.27) estará multiplicada por  $f$ . Así, concluimos que el potencial vectorial “se come” un campo vectorial y una sección de  $E$  y da como resultado una nueva sección de  $E$ , esto de una manera  $C^\infty(U)$ -lineal.

Ahora bien, recordemos que los mapeos  $C^\infty(U)$ -lineales  $T : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  corresponden a secciones de  $End(E)$  y que los objetos que se comen a los campos vectoriales son las 1-formas, entonces podemos pensar al potencial vectorial como una *1-forma valuada en  $End(E)$*  sobre  $U$ , es decir, como una sección del haz

$$End(E|_U) \otimes T^*U. \quad (4.28)$$

Revisemos esto con mayor cuidado. El *potencial vectorial*  $A$  se puede escribir como

$$A = A_{\mu i}^j e_j \otimes dx^\mu \otimes e^i. \quad (4.29)$$

Al actuar sobre un campo vectorial  $v$  da

$$A(v) = A_{\mu i}^j e_j \otimes dx^\mu(v) \otimes e^i = A_{\mu i}^j v^\mu (e_j \otimes e^i),$$

que no es más que una sección de  $End(E)$  sobre  $U$ . Si ahora actúa sobre una sección  $s$  de  $E$ , tendremos

$$A(v)s = A_{\mu i}^j v^\mu (e_j \otimes e^i)s = A_{\mu i}^j v^\mu s^i e_j \quad (4.30)$$

que es de nuevo una sección de  $E$  sobre  $U$  con componentes  $\bar{s}^j = A_{\mu i}^j v^\mu s^i$ . Evidentemente

$$A(v) : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E). \quad (4.31)$$

Puesto que  $A(v) \in End(E)$ , para el caso de un  $G$ -haz  $A(v)$  está en  $G$  o en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . De hecho, ocurre que  $A(v)$  está en  $\mathfrak{g}$  y entonces hablamos de  $A$  como una *1-forma valuada en el álgebra de Lie*. Decimos que  $D$  es una  $G$ -conexión si en coordenadas locales las componentes  $A_\mu \in End(E)$  están en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .

Nótese que mientras que para el espacio base  $M$  utilizamos índices griegos, para los objetos relacionados con  $E \otimes E^* = \text{End}(E)$  usamos índices internos  $i, j$ .

Dada una conexión, digamos  $D^0$  en  $E$ ,  $D = D^0 + A$ , es decir

$$D_v s = D_v^0 s + A(v)s, \quad (4.32)$$

es también una conexión. Más aún, cualquier conexión  $D$  puede escribirse como  $D^0 + A$ . Cuando se consideran coordenadas locales y una trivialización de  $E$ , la conexión que se considera es la conexión plana estándar

$$D_v^0 = v(s^j)e_j, \quad (4.33)$$

de tal manera que cualquier conexión  $D$  está dada por

$$D_v s = [v(s^i) + A_{\mu j}^i v^\mu s^j] e_i. \quad (4.34)$$

Consideremos un haz vectorial  $E$  sobre  $M$  con una conexión  $D$ . Sean  $v, w \in \mathcal{X}(M)$  (i.e., dos campos vectoriales en  $M$ ), definimos a la *curvatura*  $F(v, w)$  como el operador sobre secciones de  $E$  tal que

$$F(v, w)s = [D_v, D_w]s - D_{[v, w]}s. \quad (4.35)$$

Evidentemente la conexión estándar plana es tal que la curvatura es nula. De hecho, el adjetivo *plana* proviene de este hecho. En general, diremos que si una conexión tiene curvatura nula,  $F(v, w)s = 0$  para todo  $v, w \in \mathcal{X}(M)$  y secciones  $s$ , entonces es una conexión plana.

Nótese que el operador de curvatura

$$F(v, w) = [D_v, D_w] - D_{[v, w]}, \quad (4.36)$$

es antisimétrico,  $F(v, w) = -F(w, v)$ . Además, la curvatura es lineal sobre  $C^\infty(M)$  en cada uno de los argumentos; i.e.,

$$F(fv, w)s = F(v, fw)s = F(v, w)fs = fF(v, w)s. \quad (4.37)$$

De la definición de  $D$  se tiene que dados  $v$  y  $w$ ,  $F(v, w)$  define un mapeo  $\Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ ; de hecho, por la última igualdad en la anterior expresión tenemos que dicho mapeo es  $C^\infty(M)$ -lineal. Esto implica que  $F(v, w)$  corresponde a una sección de  $\text{End}(E)$ .

En coordenadas locales  $x^\mu$  para un abierto  $U$  de  $M$  las componentes de la curvatura son

$$F_{\mu\nu} := F(\partial_\mu, \partial_\nu) = [D_\mu, D_\nu] - D_{[\partial_\mu, \partial_\nu]} = [D_\mu, D_\nu]. \quad (4.38)$$

Así que

$$F(v, w) = v^\mu w^\nu F_{\mu\nu} \quad (4.39)$$

para cualesquiera campos vectoriales  $v, w$  en  $U$ .

Dado que  $F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$ , entonces podemos calcular la acción de  $F_{\mu\nu}$  sobre una base local  $\{e_i\}$  de secciones para  $E$  sobre  $U$ ; después de un poco de álgebra se obtiene que

$$F_{\mu\nu}e_i = [(\partial_\mu A_{\nu i}^j) - (\partial_\nu A_{\mu i}^j) + A_{\mu k}^j A_{\nu i}^k - A_{\nu k}^j A_{\mu i}^k] e_j. \quad (4.40)$$

Hemos dicho que  $F(v, w)$  corresponde a una sección en  $End(E)$ , así que claramente  $F_{\mu\nu} = F(\partial_\mu, \partial_\nu)$  corresponde a una sección en  $End(E)$ . Puesto que  $e_j \otimes e^i$  son una base local para las secciones de  $End(E)$ , entonces podemos escribir

$$F_{\mu\nu} = F_{i\mu\nu}^j e_j \otimes e^i, \quad (4.41)$$

donde  $F_{i\mu\nu}^j$  son las componentes de la sección en la base considerada. A tales componentes se les denomina como componentes de la curvatura. Claramente

$$F_{\mu\nu}e_i = F_{i\mu\nu}^j e_j, \quad (4.42)$$

de esta expresión y (4.40) se obtiene que las componentes de la curvatura son

$$F_{i\mu\nu}^j = \partial_\mu A_{\nu i}^j - \partial_\nu A_{\mu i}^j + A_{\mu k}^j A_{\nu i}^k - A_{\nu k}^j A_{\mu i}^k. \quad (4.43)$$

Si suprimimos los índices internos asociados a las bases de secciones de  $E$  sobre  $U$ , la fórmula anterior adquiere la conocida forma

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (4.44)$$

Hemos reunido ya la herramienta necesaria y suficiente para presentar la formulación a la Palatini de la RG.

### 4.3. Acción de Palatini

La formulación de Palatini de la RG es una manera de reescribir la acción de Einstein-Hilbert

$$S_{EH}[g] = \frac{1}{16\pi} \int_M R \sqrt{-g} d^4x, \quad (4.45)$$

en la cual la métrica *ya no es la variable fundamental*, sino que ahora las variables fundamentales son una conexión y un campo de marcos.

Veamos primero qué es un campo de marcos. Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional, orientada y difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . El haz  $TM$  es entonces trivial, pues el haz tangente a  $\mathbb{R}^n$  es trivial. Recordemos que una trivialización es un isomorfismo de haces, por tanto una trivialización de  $TM$  es un isomorfismo

$$e : M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM \quad (4.46)$$

tal que a cada fibra  $\{p\} \times \mathbb{R}^n$  del haz trivial  $M \times \mathbb{R}^n$  la manda al correspondiente espacio tangente  $T_pM$ . A esta trivialización de  $TM$  se le conoce como un *campo de*

marcos, pues para cada  $p \in M$  se mapea la base estándar de  $\mathbb{R}^n$  a una base para  $T_p M$ . El inverso de  $e$  es

$$e^{-1} : TM \longrightarrow M \times \mathbb{R}^n, \quad (4.47)$$

así que  $e$  y  $e^{-1}$  nos permiten pasar de  $M \times \mathbb{R}^n$  a  $TM$  y viceversa. Para los casos en que  $M$  es 3-dimensional y 4-dimensional al campo de marcos se le suele llamar *triada* y *tétrada*, respectivamente.

En el formalismo de Palatini se trabaja fundamentalmente con el haz  $M \times \mathbb{R}^n$ . En éste, la base natural de secciones claramente es

$$\xi_0(p) = (1, 0, 0, \dots), \quad \xi_1(p) = (0, 1, 0, \dots), \quad \dots, \quad \xi_{n-1}(p) = (0, 0, \dots, 1). \quad (4.48)$$

Por tanto, cualquier sección  $s \in \Gamma(M \times \mathbb{R}^n)$  se puede escribir como  $s = s^I \xi_I$ . A  $\mathbb{R}^n$ , que es la fibra del haz, le llamaremos *espacio interno*. Así, las letras mayúsculas latinas  $I, J, \dots$  denotan índices internos asociados a la base de secciones  $\xi_I$ . Por otro lado, emplearemos letras griegas para denotar a los índices del espacio-tiempo  $M$  (que es el espacio base) asociados a una base coordenada  $\partial_\mu$  dada por una carta en  $M$ .

Como  $e : M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM$ , entonces  $e$  define un mapeo de secciones en el haz  $M \times \mathbb{R}^n$  a campos vectoriales en  $M$ . Si denotamos a dicho mapeo también por  $e$  (aunque debemos tener presente que en realidad es una restricción de  $e$ ), entonces tenemos

$$e : \Gamma(M \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow \Gamma(TM). \quad (4.49)$$

Con  $e$  y la base de secciones  $\{\xi_I\}$  definimos entonces una base de campos vectoriales  $\{e(\xi_I)\}$  sobre  $M$ . Dada una carta en  $M$ , escribimos a  $e(\xi_I)$  en coordenadas como

$$e_I := e(\xi_I) = e_I^\alpha \partial_\alpha, \quad (4.50)$$

donde las componentes  $e_I^\alpha$  son, evidentemente, funciones sobre  $M$ . Puesto que los campos vectoriales  $e_I$  (o, equivalentemente, las componentes  $e_I^\alpha$ ) determinan el campo de marcos, es común llamar a  $e_I$  (o a  $e_I^\alpha$ ) campo de marcos (triada si  $n = 3$ , tétrada, si  $n = 4$ ).

Equiparemos ahora al espacio interno  $\mathbb{R}^n$  con la métrica natural, a saber la de Minkowski  $\eta$ , y nos referiremos a ella como la métrica interna. Dadas dos secciones  $s, s' \in \Gamma(M \times \mathbb{R}^n)$ , su producto interno es entonces

$$\eta(s, s') = \eta_{IJ} s^I s'^J. \quad (4.51)$$

Como mencionamos anteriormente,  $M$  es el espacio-tiempo y, por consiguiente, tiene una métrica  $g$ . Así que el producto interno de campos vectoriales sobre  $M$  está dado por

$$g(v, v') = g_{\alpha\beta} v^\alpha v'^\beta. \quad (4.52)$$

Si el campo de marcos  $e$  es ortonormal,

$$g(e_I, e_J) = \eta_{IJ}, \quad (4.53)$$

entonces para cualesquiera secciones  $s, s' \in \Gamma(M \times \mathbb{R}^n)$  tenemos que

$$\begin{aligned} g(e(s), e(s')) &= g(e(s^I \xi_I), e(s'^J \xi_J)) = s^I s'^J g(e(\xi_I), e(\xi_J)) \\ &= s^I s'^J g(e_I, e_J) = \eta_{IJ} s^I s'^J = \eta(s^I \xi_I, s'^J \xi_J) \\ &= \eta(s, s'). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Por tanto, con la inversa  $e^{-1}$  tendremos que

$$g(v, v') = \eta(e^{-1}(v), e^{-1}(v')). \quad (4.55)$$

Ahora bien, como  $\eta_{IJ} = g(e_I, e_J)$  y  $e_K = e_K^\mu \partial_\mu$ , entonces

$$\eta_{IJ} = g_{\alpha\beta} e_I^\alpha e_J^\beta, \quad (4.56)$$

relación de la cual se sigue directamente que

$$\delta_J^I = e_I^\alpha e_J^\alpha. \quad (4.57)$$

A  $e_\alpha^I$  se le denomina campo de co-marcos (co-triada o co-tetrada si las dimensiones son 3 y 4, respectivamente).

Como dada  $s \in \Gamma(M \times \mathbb{R}^n)$  tenemos un  $v \in \Gamma(TM)$ ,  $v = e(s)$ , entonces

$$v = v^\alpha \partial_\alpha = e(s) = e(s^I \xi_I) = s^I e_I^\alpha \partial_\alpha,$$

lo que indica que  $v^\alpha = s^I e_I^\alpha$  y si contraemos esta igualdad con  $e_\alpha^J$  encontramos que  $s^I = v^\alpha e_\alpha^I$ . Como  $s = e^{-1}(v)$ , entonces

$$s^I \xi_I = v^\alpha e_\alpha^I \xi_I = e^{-1}(v^\alpha \partial_\alpha) = v^\alpha e^{-1}(\partial_\alpha) \quad (4.58)$$

y por tanto  $e^{-1}(\partial_\alpha) = e_\alpha^I \xi_I$ . Las componentes de  $g$ ,  $g_{\alpha\beta} := g(\partial_\alpha, \partial_\beta)$ , quedan entonces como sigue:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g(\partial_\alpha, \partial_\beta) = \eta(e^{-1}(\partial_\alpha), e^{-1}(\partial_\beta)) \\ &= \eta(e_\alpha^I \xi_I, e_\beta^J \xi_J) = \eta_{IJ} e_\alpha^I e_\beta^J. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Relación de la cual se sigue que

$$\delta_\beta^\alpha = e_\beta^I e_I^\alpha. \quad (4.60)$$

En el haz  $M \times \mathbb{R}^n$  consideraremos una conexión de Lorentz (i.e., compatible con  $\eta$ ). La elección natural es la conexión plana estándar

$$D_v^0 s = v(s^I) \xi_I \quad (4.61)$$

que, por supuesto, es una conexión de Lorentz. Luego, cualquier conexión  $D$  en el haz  $M \times \mathbb{R}^n$  se puede escribir como  $D^0 + A$ , con  $A$  una 1-forma valuada en  $End(\mathbb{R}^n)$ .

Aquí vale la pena señalar que una conexión de Lorentz es una conexión  $SO(n-1, 1)$ . En efecto, una conexión es de Lorentz si es compatible con  $\eta$ , es decir si

$$v\eta(s, s') = \eta(D_v s, s') + \eta(s, D_v s').$$

Aplicando esta relación a las bases de vectores y secciones se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \eta(\xi_I, \xi_J) &= \eta(D_\alpha \xi_I, \xi_J) + \eta(\xi_I, D_\alpha \xi_J) \\ 0 &= \eta(A_{\alpha I}^K \xi_K, \xi_J) + \eta(\xi_I, A_{\alpha J}^K \xi_K) \\ 0 &= A_{\alpha I}^K \eta_{KJ} + A_{\alpha J}^K \eta_{IK} \\ 0 &= A_{\alpha JI} + A_{\alpha IJ} \\ 0 &= A_\alpha^{JI} + A_\alpha^{IJ}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

i.e.,  $A_\alpha^{IJ} = -A_\alpha^{JI}$  y por consiguiente las componentes  $A_\alpha$  están en el álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(n-1, 1)$ ; esto es, una conexión de Lorentz es una  $SO(n-1, 1)$ -conexión.

Acorde a lo presentado en la Sección 4.2,  $D_v$  actúa sobre  $s$  como sigue

$$D_v s = [v(s^J) + A_{\mu I}^J v^\mu s^I] \xi_J \quad (4.63)$$

y la curvatura está dada por

$$F_{\alpha\beta}^{IJ} = F_{\alpha\beta}^{IJ} = \partial_\alpha A_{\beta}^{IJ} - \partial_\beta A_{\alpha}^{IJ} + [A_\alpha, A_\beta]^{IJ}. \quad (4.64)$$

Ahora bien, el campo de marcos  $e$  y la conexión de Lorentz  $D$  definen una conexión  $\tilde{\nabla}_\alpha \partial_\beta = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma$  en el haz tangente  $TM$  con

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = A_{\alpha I}^J e_\beta^I e_J^\gamma. \quad (4.65)$$

Los símbolos  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$  son una imitación de los Christoffel a partir de los cuales se construye una imitación del Riemann

$$\tilde{R}_{\gamma\alpha\beta}^\rho = \partial_\alpha \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\rho - \partial_\beta \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\rho + \tilde{\Gamma}_{\alpha\sigma}^\rho \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\sigma - \tilde{\Gamma}_{\beta\sigma}^\rho \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\sigma, \quad (4.66)$$

que se puede reescribir usando (4.65) como

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\gamma\alpha\beta}^\rho &= (\partial_\alpha A_{\beta J}^I - \partial_\beta A_{\alpha J}^I - A_{\alpha K}^I A_{\beta J}^K - A_{\beta K}^I A_{\alpha J}^K) e_I^\rho e_\gamma^J \\ &= F_{J\alpha\beta}^I e_I^\rho e_\gamma^J, \end{aligned} \quad (4.67)$$

donde para obtener la segunda línea hemos usado (4.64). Análogamente construimos una imitación del Ricci

$$\tilde{R}_{\gamma\beta} = \tilde{R}_{\gamma\rho\beta}^\rho = F_{J\rho\beta}^I e_I^\rho e_\gamma^J, \quad (4.68)$$

y del escalar de Ricci

$$\tilde{R} = F_{\alpha\beta}^{IJ} e_I^\alpha e_J^\beta. \quad (4.69)$$

La *acción de Palatini* es la acción de Einstein-Hilbert *pero con las imitaciones*; es decir

$$S_P[A, e] = \frac{1}{16\pi} \int_M \tilde{R} e \, d^4x = \frac{1}{16\pi} \int_M e_I^\alpha e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} e \, d^4x, \quad (4.70)$$

donde  $e := \sqrt{-g}$  con dependiente del campo de marcos. Para hallar las ecuaciones de campo debemos variar la acción respecto a las variables independientes,  $e_k^\mu$  y  $A$ , e imponer la condición  $\delta S_P = 0$ .

Empecemos con la variación respecto a  $e_k^\mu$  (i.e.,  $\delta A = 0$ ):

$$\delta S_P = \frac{1}{16\pi} \int_M \left[ (\delta e_I^\alpha) e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} e + e_I^\alpha (\delta e_J^\beta) F_{\alpha\beta}^{IJ} e + e_I^\alpha e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} (\delta e) \right] d^4x. \quad (4.71)$$

De (2.44), (4.59), y la inversa de ésta última, se obtiene que

$$\delta e = -e_\gamma^K (\delta e_K^\gamma) e. \quad (4.72)$$

Sustituyendo en (4.71) y usando la antisimetría de  $F$  en los índices internos y en los índices de espacio-tiempo se llega a

$$\delta S_P = \frac{1}{8\pi} \int_M \left[ e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} - \frac{1}{2} e_\alpha^I e_K^\gamma e_J^\beta F_{\gamma\beta}^{KJ} \right] (\delta e_I^\alpha) e \, d^4x. \quad (4.73)$$

De la condición  $\delta S_P = 0$  (y la independencia con la variación de  $A$ ) tenemos que para una variación del campo de marcos arbitraria se cumple

$$e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} - \frac{1}{2} e_\alpha^I e_K^\gamma e_J^\beta F_{\gamma\beta}^{KJ} = 0. \quad (4.74)$$

Nótese que  $e_K^\gamma e_J^\beta F_{\gamma\beta}^{KJ}$  es la imitación del escalar de Ricci. Así que tenemos  $e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} - (e_\alpha^I \tilde{R})/2 = 0$ . Al contraer esta última expresión con  $e_{\rho I}$  y haciendo uso de la imitación del Ricci encontramos lo siguiente

$$\begin{aligned} 0 &= e_{\rho I} (e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} - \frac{1}{2} e_\alpha^I \tilde{R}) \\ &= F_{\alpha\beta}^{IJ} e_J^\beta e_{\rho I} - \frac{1}{2} (e_{\rho I} e_\alpha^I) \tilde{R} \\ &= \tilde{R}_{\rho\alpha} - \frac{1}{2} g_{\rho\alpha} \tilde{R}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Estas ecuaciones son la imitación de las de Einstein *y son las de Einstein* cuando la conexión  $\tilde{\nabla}$  es la conexión  $\nabla$ ; es decir, cuando  $\tilde{\nabla}$  es compatible con  $g_{\alpha\beta} = \eta_{IJ} e_\alpha^I e_\beta^J$ . Como veremos, es la variación respecto a  $A$  la que proporciona la compatibilidad y, por tanto, que las ecuaciones de campo en la formulación de Palatini sean en efecto las de Einstein en el vacío.

La variación respecto a la conexión es

$$\delta S_P = \frac{1}{16\pi} \int_M \delta \tilde{R} e \, d^4x = \frac{1}{16\pi} \int_M g^{\alpha\beta} (\delta \tilde{R}_{\alpha\beta}) e \, d^4x. \quad (4.76)$$

De (2.46), tenemos que

$$\delta\tilde{R}_{\alpha\beta} = 2\tilde{\nabla}_{[\mu}\delta\tilde{\Gamma}_{\beta]\alpha}^{\mu}. \quad (4.77)$$

Como  $\tilde{\nabla}$  y  $\nabla$  son conexiones en  $TM$ , entonces podemos escribir

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} + C_{\alpha\beta}^{\gamma}, \quad (4.78)$$

donde  $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$  es el objeto que mide la discrepancia entre las conexiones. Como  $\nabla$  no depende de la conexión de Lorentz,

$$\delta\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \delta C_{\alpha\beta}^{\gamma}. \quad (4.79)$$

Así que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta\tilde{R} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\delta\tilde{R}_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_{[\mu}\delta\tilde{\Gamma}_{\beta]\alpha}^{\mu} = g^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_{[\mu}\delta C_{\beta]\alpha}^{\mu} \\ &= g^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_{[\mu}\delta C_{\beta]\alpha}^{\mu} = g^{\alpha\beta}[\tilde{\nabla}_{\mu}\delta C_{\alpha\beta}^{\mu} - \tilde{\nabla}_{\beta}\delta C_{\mu\alpha}^{\mu}] \\ &= g^{\alpha\beta}\left(\partial_{\mu}\delta C_{\beta\alpha}^{\mu} - \tilde{\Gamma}_{\mu\beta}^{\sigma}\delta C_{\sigma\alpha}^{\mu} - \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\sigma}\delta C_{\beta\sigma}^{\mu} + \tilde{\Gamma}_{\mu\sigma}^{\mu}\delta C_{\beta\alpha}^{\sigma}\right) \\ &\quad - g^{\alpha\beta}\left(\partial_{\beta}\delta C_{\mu\alpha}^{\mu} - \tilde{\Gamma}_{\beta\mu}^{\sigma}\delta C_{\sigma\alpha}^{\mu} - \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\sigma}\delta C_{\mu\sigma}^{\mu} + \tilde{\Gamma}_{\beta\sigma}^{\mu}\delta C_{\mu\alpha}^{\sigma}\right). \end{aligned} \quad (4.80)$$

Ahora utilizamos que  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} + C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ , entonces llegamos a que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta\tilde{R} &= g^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_{[\mu}\delta C_{\beta]\alpha}^{\mu} \\ &= g^{\alpha\beta}\left(\nabla_{[\mu}\delta C_{\beta]\alpha}^{\mu}\right) \\ &\quad + g^{\alpha\beta}\left(C_{\mu\sigma}^{\mu}\delta C_{\beta\alpha}^{\sigma} + C_{\beta\alpha}^{\sigma}\delta C_{\mu\sigma}^{\mu} - C_{\mu\beta}^{\sigma}\delta C_{\sigma\alpha}^{\mu} - C_{\mu\alpha}^{\sigma}\delta C_{\beta\sigma}^{\mu}\right). \end{aligned} \quad (4.81)$$

El primer término en la última igualdad es una divergencia y por tanto no contribuirá a las ecuaciones. Por otro lado,  $\delta C = \delta\tilde{\Gamma}$  y como  $\delta e = 0$  (pues estamos variando respecto a  $A$ ) entonces  $\delta\tilde{\Gamma}$  va como  $\delta A$ ; es decir,  $\delta C$  va como  $\delta A$ . Con esto y un examen cuidadoso del segundo término en (4.81) se obtiene que  $C_{\beta\alpha}^{\mu} = 0$  deben ser nulos, lo que implica que  $\Gamma = \tilde{\Gamma}$  y, por tanto, que  $\tilde{\nabla} = \nabla$ . Así, tenemos que las ecuaciones de campo en la formulación de Palatini son las ecuaciones de Einstein.

En el siguiente capítulo presentaremos otra manera adicional de formular a la RG y haremos uso de varias de las ideas que hemos introducido en este capítulo por lo que es recomendable que el lector esté ya bien familiarizado con lo que se ha introducido hasta ahora.



# Capítulo 5

## Relatividad General en Variables de Conexión

### 5.1. Preámbulo

La historia de la formulación de la RG en variables de conexión podemos decir que se inició cuando A. Sen [Sen 1982a, Sen 1982b] construyó una derivada covariante para los espinores  $SL(2, \mathbb{C})$  utilizando como fuente de inspiración la prueba espinorial de la positividad del teorema de energía de la RG. Pero fue A. Ashtekar [Ashtekar 1986, Ashtekar 1987] quien se dió cuenta que una ligera modificación a la conexión introducida por Sen daría como resultado una nueva formulación canónica de la RG en términos de la conexión modificada y de su momento canónico conjugado. El descubrimiento resultó importante pues, por ejemplo, en la nuevas variables la forma de las constricciones se simplifica y con ello la promoción de éstas a operadores. En las nuevas variables, la estructura matemática de la RG se asemeja a una teoría de Yang-Mills, lo que permite aplicar técnicas de cuantización para teorías de norma y ha permitido avanzar en la búsqueda de una teoría cuántica de la RG.

En la formulación original de Ashtekar las variables fundamentales son complejas, esto genera dificultades que tienen que ver con la implementación de las *condiciones de realidad*. Para sortear este problema, se propuso entonces una conexión real a mediados de los noventa como variable fundamental de configuración [Barbero 1995], llamada en algunos textos como de Ashtekar-Barbero. La relación entre las variables reales y complejas es en cierta medida clarificada por la presencia del parámetro de Immirzi<sup>1</sup>  $\beta$  en las nuevas variables: éstas corresponden a las (anti)autoduales para  $\beta = \pm i$  y a las reales para cualquier  $\beta \in \mathbb{R}$  [Immirzi 1997, Rovelli & Thiemann 1998].

---

<sup>1</sup>Más adelante haremos una breve discusión sobre este parámetro.

## 5.2. Variables de conexión

A continuación se presentará la formulación de la RG en variables de conexión, en ésta extenderemos el espacio fase mediante el uso de triadas. Cabe señalar que el uso de las triadas simplifica la formulación original de Ashtekar (basada en el cálculo espinorial  $SL(2, \mathbb{C})$ ) y permite ver de manera más clara la equivalencia entre la nueva formulación y la formulación 3+1 (i.e., la formulación ADM). La construcción será en dos etapas, primero se llevará a cabo una extensión del espacio fase de 3 + 1 (i.e., de ADM) y después se realizará una transformación canónica en el espacio fase extendido.

### 5.2.1. Extensión del espacio fase

Empecemos considerando un campo de co-triadas  $e_a^i$  sobre la 3-variedad espacial  $\Sigma$ , los índices espaciales  $a, b, \dots$  y los internos  $i, j, k, \dots$  toman valores 1, 2, 3. En forma análoga a lo que vimos en el anterior capítulo, la 3-métrica en  $\Sigma$ ,  $h_{ab}$ , se puede expresar en términos de  $e_a^i$

$$h_{ab} = \delta_{jk} e_a^j e_b^k. \quad (5.1)$$

Es sencillo mostrar la invariancia bajo transformaciones  $SO(3)$ ; i.e.,  $\delta_{jk} e_a^{j'} e_b^{k'} = \delta_{jk} e_a^j e_b^k$  donde  $e_a^{i'} = O_j^i e_a^j$ , con  $O_j^i$  elementos de matriz de  $SO(3)$ .

Sea  $K_a^i$  la 1-forma en  $\Sigma$  tal que la curvatura extrínseca está dada por

$$K_{ab} = K_a^i e_b^i, \quad (5.2)$$

aquí  $K_a^i e_b^i$  denota suma sobre el índice interno  $i$ . Como la curvatura extrínseca  $K_{ab}$  es un tensor simétrico, entonces se tiene la constricción

$$G_{ab} = K_{[a}^i e_{b]}^i = 0. \quad (5.3)$$

Consideremos ahora a las triadas *densitizadas*

$$E_j^a = \sqrt{h} e_j^a. \quad (5.4)$$

De la constricción  $G_{ab} = 0$  se sigue inmediatamente que  $G_{ab} e_j^a e_k^b = 0$ . Dado que,

$$\begin{aligned} G_{ab} e_j^a e_k^b &= \frac{1}{2} (K_a^i e_b^i - K_b^i e_a^i) e_j^a e_k^b = \frac{1}{2} (K_a^i e_j^a \delta_k^i - K_b^i e_k^b \delta_j^i) \\ &= \frac{1}{2} (K_a^k e_j^a - K_b^j e_k^b) = K_{a[k} e_{j]}^a, \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde hemos usado que  $e_c^k e_m^c = \delta_m^k$  y que además los índices internos se suben y bajan con la métrica Euclideana. Así, tenemos que

$$K_{a[k} e_{j]}^a = 0.$$

También sabemos que  $e_k^a = h^{-1/2}E_k^a$ , entonces podemos escribir  $h^{-1/2}K_{a[j}E_{k]}^a = 0$ . Es decir, de forma equivalente tenemos que la constricción  $G_{ab}$  puede ser escrita como

$$G_{jk} = K_{a[j}E_{k]}^a = 0. \quad (5.6)$$

Como  $E_j^a = \sqrt{h}e_j^a$ , entonces el inverso es la co-triada densitizada  $E_a^k = e_a^k/\sqrt{h}$ .

Lo que sigue es reexpresar las variables canónicas  $h_{ab}$  y  $p^{ab}$  de la formulación ADM en términos de las nuevas variables  $E_a^i$  y  $K_a^j$ . Dado que  $h_{ab} = \delta_{jk}e_a^j e_b^k$ , entonces en términos de  $E_a^k = e_a^k/\sqrt{h}$  se tiene que

$$h_{ab} = E_a^k E_b^k |det(E)|, \quad (5.7)$$

donde  $det(E)$  expresa el determinante de  $h_{ab}$  en términos de las  $E^i$ s; es decir,  $h = detE$ . Por su parte

$$p^{ab} = \sqrt{h} (K^{ab} - Kh^{ab}) = \sqrt{h} (K_i^a e_i^b - K_i^a e_a^i h^{ab}).$$

Usando la relación entre (co-)triadas y (co-)triadas densitizadas, así como el inverso de  $h_{ab} = E_a^k E_b^k |det(E)|$  (i.e.,  $h^{ab} = E_k^a E_k^b |det(E)|^{-1}$ ) y que  $h = detE$ ,

$$p^{ab} = 2|det(E)|^{-1} E_k^a E_k^d K_{[d}^j \delta_{c]}^b E_j^c. \quad (5.8)$$

Con las expresiones anteriores podemos reescribir las constricciones Hamiltoniana y de difeomorfismos, (3.99) y (3.100) respectivamente, como

$$\mathcal{H} = \frac{-1}{16\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{detE}} (K_a^i K_b^j - K_a^j K_b^i) E_i^a E_j^b + \sqrt{detE} {}^{(3)}R \right] \quad (5.9)$$

$$\mathcal{H}_a = -2 D_b [K_a^j E_j^b - \delta_a^b K_c^j E_j^c], \quad (5.10)$$

donde  ${}^{(3)}R$  es considerado como una función de las triadas densitizadas  $E_j^a$ .

Notemos que en la formulación Hamiltoniana, el espacio fase consta de 6 variables de configuración  $h_{ab}$  y sus 6 respectivos momentos canónicos. Es decir, 12 grados de libertad. Además, tenemos 4 constricciones; a saber: las constricciones Hamiltoniana (una) y de difeomorfismos (tres). Puesto que<sup>2</sup> 2 (número de grados de libertad físicos) = (número de variables canónicas) - 2 (número de constricciones de primera clase), entonces el número de grados físicos de libertad es:

$$2(\text{núm. de grados físicos de libertad}) = 12 - 2(4) = 4$$

i.e., (número de grados físicos de libertad)=2.

Ahora bien, nuestras nuevas variables son  $(K_a^i, E_j^b)$ ; en lugar de 12 grados de libertad tenemos ahora 18. El espacio fase ha sido extendido; sin embargo, el número

---

<sup>2</sup>Ver [Henneaux & Teitelboim 1992] para consultar el conteo de grados físicos de libertad en teorías con constricciones.

de grados de libertad físicos sigue siendo el mismo, pues a las constricciones Hamiltoniana y de difeomorfismos hay que agregar las 3 constricciones  $G_{jk} = 0$ ; así el número de grados de libertad físicos es:  $[18 - 2(4 + 3)]/2 = 4/2 = 2$ , como debe ser.

En el espacio fase extendido  $(K_a^i, E_j^b)$  la estructura simpléctica (i.e., paréntesis de Poisson) es

$$\{E_i^a(y), K_b^j(y')\} = \frac{1}{2}\delta_b^a\delta_i^j\delta(y, y') \quad (5.11)$$

$$\{E_j^a(y), E_k^b(y')\} = \{K_a^j(y), K_b^k(y')\} = 0. \quad (5.12)$$

Ahora veamos explícitamente que la reducción con la nueva restricción  $G_{ij} = 0$  del sistema extendido nos lleva a la descripción ADM (i.e., 3 + 1). Consideremos para ello la restricción en la siguiente forma

$$G(\Lambda) = \int_{\Sigma} \Lambda^{jk} K_{aj} E_k^a d^3y, \quad (5.13)$$

donde  $\Lambda^{jk}$  es una función matricial antisimétrica que genera rotaciones  $SO(3)$ . De los paréntesis de Poisson (5.11)-(5.12) se sigue que

$$\{G(\Lambda), G(\Lambda')\} = \frac{1}{2}G([\Lambda, \Lambda']), \quad (5.14)$$

que resulta ser igual al álgebra de rotaciones espaciales  $SO(3)$ . Cualquier corchete de Poisson entre  $G(\Lambda)$  y las variables canónicas ADM se anula, debido que estas últimas son invariantes bajo  $SO(3)$ . Veamos que los corchetes de Poisson entre  $h_{ab}$  y  $p^{ab}$ , considerados como funciones de  $K_a^i$  y  $E_j^b$  en el espacio fase extendido [relaciones (5.7) y (5.8)], nos dan los corchetes de Poisson del espacio fase ADM cuando se cumple  $G_{jk} = 0$ . Como  $h_{ab}$  es sólo función de  $E_a^j$ , entonces se tiene que  $\{h_{ab}(y), h_{cd}(y')\} = 0$ . El cálculo para los paréntesis de los momentos entre sí mismos da

$$\{p^{ab}(y), p^{cd}(y')\} = - \left( \frac{\det(E)}{4} [h^{bc}G^{ad} + h^{bd}G^{ac} + h^{ac}G^{bd} + h^{ad}G^{bc}] \right) \Big|_y \delta(y, y'), \quad (5.15)$$

que se anula cuando  $G_{ab} = G_{jk}e_a^j e_b^k = 0$ . Por último, se verifica que  $\{h_{ab}(y), p^{cd}(y')\} = -\delta_{(a}^c \delta_{b)}^d \delta(y, y')$  (el cambio de signo se debe a que  $\{E_j^a, K_b^i\}$  va como  $\delta$  y por tanto  $\{K_b^i, E_j^a\}$  va como  $-\delta$ ). Entonces, podemos decir que cuando se satisface la condición  $G_{ij} = 0$ , las variables canónicas ADM escritas como funciones de las variables  $(K_a^i, E_i^a)$  del espacio fase extendido, generan los mismos corchetes de Poisson.

La acción canónica en términos de nuestras nuevas variables es

$$S_G[K, E] = \frac{1}{16\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} \left[ 2\dot{K}_a^j E_j^a - (\Lambda^{jk} G_{jk} + N^a \mathcal{H}_a + N \mathcal{H}) \right] d^3y \quad (5.16)$$

donde las constricciones están dadas por (5.6), (5.9) y (5.10). Por lo que hemos discutido ya, esta acción es equivalente a la de 3 + 1 siempre y cuando se satisfaga la restricción  $G_{ij} = 0$ . Nótese que el 2 en el término  $\dot{K}_a^j E_j^a$  se debe a que el paréntesis de Poisson entre las variables  $K_a^j$  y  $E_j^a$  tiene un factor de 1/2.

### 5.3. Transformación canónica

Para formular a la relatividad en variables de conexión (a la Ashtekar) necesitamos realizar una transformación canónica en el espacio fase extendido  $(K_a^i, E_b^j)$  para obtener las nuevas variables fundamentales: la conexión (variable de configuración) y su momento conjugado. Antes debemos introducir la *conexión de espín*  $\omega$ , que es una extensión con índices internos en el álgebra  $\mathfrak{so}(\mathbf{3})$  de la derivada covariante espacial  $D_a$  en  $\Sigma$ . Definimos entonces la acción de  $D_a$  sobre un objeto  $v_j$  con índices internos  $j$ , como

$$D_a v_j = \partial_a v_j + \omega_{ajk} v_k, \quad (5.17)$$

(aquí  $\omega_{ajk} v_k$  denota suma sobre el índice interno  $k$ , pues la métrica interna es  $\delta_{ij}$ ) de manera que la acción sobre las triadas  $e_j^b$  está dada por

$$D_a e_j^b = \partial_a e_j^b + \Gamma_{ad}^b e_j^d + \omega_{ajk} e_k^b. \quad (5.18)$$

Es decir, una parte es la conexión sobre índices espaciales  $a, b, c, \dots$  y la otra sobre índices internos  $i, j, k, \dots$ . El potencial  $\omega_{ajk}$  es una una forma de conexión valuada en el álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(\mathbf{3})$ ; i.e.,  $\omega_{ajk} y^a \in \mathfrak{so}(\mathbf{3})$ , donde  $y^a \in \mathcal{X}(\Sigma)$ .

Ahora bien, sabemos que  $e_j^b e_b^k = \delta_j^k$ , de esta igualdad se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= D_a (e_j^b e_b^k) \\ &= (D_a e_j^b) e_b^k + e_j^b (D_a e_b^k), \end{aligned} \quad (5.19)$$

entonces

$$e_j^b (D_a e_b^k) = -(D_a e_j^b) e_b^k. \quad (5.20)$$

Si contraemos con  $e_c^j$  obtenemos que

$$D_a e_c^k = -(D_a e_c^j) e_c^j e_b^k. \quad (5.21)$$

Ahora introduciremos la ecuación (5.18) en la expresión anterior con lo cual tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} D_a e_c^k &= -(\partial_a e_j^b + \Gamma_{ad}^b e_j^d + \omega_{ajk} e_k^b) e_c^j e_b^k \\ &= -(\partial_a e_j^b) e_c^j e_b^k - \Gamma_{ad}^b e_j^d e_c^j e_b^k - \omega_{ajm} e_m^b e_c^j e_b^k \\ &= -(\partial_a e_j^b) e_c^j e_b^k - \Gamma_{ad}^b \delta_c^d e_b^k - \omega_{ajm} e_c^j \delta_m^k \\ &= -(\partial_a e_j^b) e_c^j e_b^k - \Gamma_{ac}^b e_b^k - \omega_{ajk} e_c^j. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Veamos que las siguientes igualdades  $\partial_a (e_c^k) = \partial_a (e_j^b e_c^j e_b^k) = (\partial_a e_j^b) e_c^j e_b^k + e_j^b \partial_a (e_c^j e_b^k)$ , nos permiten escribir que

$$\begin{aligned} -(\partial_a e_j^b) e_c^j e_b^k &= -\partial_a (e_c^k) + e_j^b \partial_a (e_c^j e_b^k) \\ &= -\partial_a (e_c^k) + e_j^b e_c^j \partial_a (e_b^k) + e_j^b e_b^k \partial_a (e_c^j) \\ &= -\partial_a (e_c^k) + \delta_c^b \partial_a (e_b^k) + \delta_j^k \partial_a (e_c^j) \\ &= -\partial_a (e_c^k) + \partial_a (e_c^k) + \partial_a (e_c^k) = \partial_a (e_c^k). \end{aligned} \quad (5.23)$$

De manera que el primer término en la ecuación (5.22) es simplemente  $\partial_a e_c^k$ , con lo cual ésta se puede escribir como sigue

$$D_a e_c^k = \partial_a e_c^k - \Gamma_{ac}^b e_b^k - \omega_{ajk} e_c^j. \quad (5.24)$$

De esta expresión deducimos que

$$D_a v^k = \partial_a v^k - \omega_{ajk} v^j. \quad (5.25)$$

Como la métrica interna es  $\delta_{ij}$ , entonces podemos sustituir  $v_j = \delta_{jk} v^k$  en la ecuación (5.17), de esto se sigue que

$$D_a \delta_{jk} v^k = \partial_a \delta_{jk} v^k + \omega_{ajk} \delta_{km} v^m = \partial_a \delta_{jk} v^k + \omega_{ajm} v^m. \quad (5.26)$$

Debido a que  $\omega_{ajm} v^m = \delta_{jk} \omega_{akm} v^m$ , tenemos entonces que

$$D_a v^k = \partial_a v^k + \omega_{akm} v^m. \quad (5.27)$$

Al comparar esta última expresión con (5.25) llegamos a la siguiente relación

$$\omega_{ajk} v^j = -\omega_{akm} v^m. \quad (5.28)$$

Pero como  $m$  es un índice mudo, podemos escribir  $\omega_{akm} v^m = \omega_{akj} v^j$  y por tanto tendremos que la condición anterior es equivalente a

$$(\omega_{ajk} + \omega_{akj}) v^j = 0 \quad (5.29)$$

para toda  $v^j$ ; por lo tanto  $\omega_{ajk} = -\omega_{akj}$ . Es decir

$$\omega_{a(jk)} = 0, \quad (5.30)$$

lo que muestra que la 1-forma  $\omega_a$ , en efecto, toma valores en el álgebra  $\mathfrak{so}(\mathbf{3})$ .

Ahora trataremos de escribir a la constricción  $G_{jk}$  como una constricción tipo Gauss; es decir, trataremos de escribir a  $G_{jk}$  como  $(\partial_a E^a + [A_a, E^a])_{jk}$  donde  $A$  es alguna conexión con valores en  $\mathfrak{so}(\mathbf{3})$ . Para ello consideraremos la anunciada transformación canónica; ésta consiste en un rescalamiento y una transformación afín.

Para  $\beta$  cualquier número *real* no nulo, considérese el rescalamiento

$$(K_a^j, E_j^a) \mapsto (\tilde{K}_a^j = \beta K_a^j, \tilde{E}_j^a = E_j^a / \beta), \quad (5.31)$$

que claramente es una transformación canónica. A  $\beta$  se le conoce como el parámetro de Immirzi<sup>3</sup>. Las constricciones  $G_{kl}$  son, como hemos dicho, tres constricciones; para

---

<sup>3</sup>En algunos textos también se le conoce como el parámetro de Barbero-Immirzi. Como se mencionó antes, si se considera a  $\beta$  como un imaginario puro entonces se obtienen las variables originales (complejas) de Ashtekar.

enfaticar esto, es útil escribir las constricciones como  $G_j = \epsilon_{jkl} K_a^k E_l^a$ ; claramente  $G_j$  es invariante ante el rescalamiento y queda como

$$G_j = \epsilon_{jkl} \tilde{K}_a^k \tilde{E}_l^a, \quad (5.32)$$

Veamos ahora cómo está dada la transformación afín.

Sabemos que  $D_a e_j^b = 0$ , pues  $D_a$  debe ser compatible con  $h_{ab}$ , así que  $D_a \sqrt{h} = 0$  y por tanto

$$\sqrt{h} D_a e_j^b = D_a E_j^b = 0. \quad (5.33)$$

Ahora construiremos la divergencia de la triada densitizada  $E_j^a$ , para esto, empezaremos por considerar la expresión genérica para la triada

$$D_a e_j^a = \partial_a e_j^a + \Gamma_{ad}^a e_j^d + \omega_{ajk} e_k^a, \quad (5.34)$$

que si la multiplicamos por  $\sqrt{h}$ , nos da sencillamente que

$$D_a E_j^a = \sqrt{h} \partial_a e_j^a + \Gamma_{ad}^a E_j^d + \omega_{ajk} E_k^a. \quad (5.35)$$

Teniendo en cuenta que  $\Gamma_{ad}^a$  se puede escribir como<sup>4</sup>

$$\Gamma_{ad}^a = \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_a \sqrt{h}, \quad (5.36)$$

llegamos a la expresión para la divergencia de las triadas densitizadas

$$\begin{aligned} D_a E_j^a &= \sqrt{h} \partial_a e_j^a + \frac{1}{\sqrt{h}} (\partial_a \sqrt{h}) E_j^d + \omega_{ajk} E_k^a \\ &= \partial_a (\sqrt{h} e_j^a) + \omega_{ajk} E_k^a \\ &= \partial_a E_j^a + \omega_{ajk} E_k^a \end{aligned} \quad (5.37)$$

Ahora bien, de  $D_a e_b^j = 0$  tenemos que la conexión de espín se puede escribir como

$$\omega_{ajk} = -e_k^b (\partial_a e_b^j - \Gamma_{ab}^c e_c^j). \quad (5.38)$$

Recordando que

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} h^{cd} (\partial_a h_{bd} + \partial_b h_{ad} - \partial_d h_{ab}) \quad (5.39)$$

y que  $h_{ab}$  se puede escribir en función de las triadas como

$$h_{ab} = \delta_{mn} e_a^m e_b^n \quad \text{y} \quad h^{ab} = \delta^{rs} e_r^a e_s^b, \quad (5.40)$$

se escribe a  $\Gamma_{ab}^c$  como función de las triadas y sus derivadas y al sustituir en (5.38) se llega a la relación

$$\omega_{ajk} = 2e^{d[j} \partial_{[a} e_{d]}^k + e_a^r e_j^d e_k^b \partial_{[b} e_{d]}^r. \quad (5.41)$$

---

<sup>4</sup>Ver por ejemplo [Wald 1984].

Trabajando con el primer término del lado derecho de la última expresión, tenemos que

$$2e^{d[j}\partial_{[a}e_{d]}^{k]} = e^{d[j}\partial_a e_d^{k]} - e^{d[j}\partial_d e_a^{k]} = e^{d[k}\partial_d e_a^{j]} - e^{d[k}\partial_a e_d^{j]}. \quad (5.42)$$

Por otro lado, considerando la parte  $e_j^d e_k^b \partial_{[b} e_{d]}^r$  del segundo término, podemos ver que

$$e_j^d e_k^b \partial_{[b} e_{d]}^r = \frac{1}{2} e_j^d e_k^b \partial_b e_d^r - \frac{1}{2} e_j^d e_k^b \partial_d e_b^r = \frac{1}{2} e_j^d e_k^b \partial_b e_d^r - \frac{1}{2} e_j^b e_k^d \partial_b e_d^r = e_{[j}^d e_{k]}^b \partial_b e_d^r, \quad (5.43)$$

y así el segundo término se puede escribir como

$$e_a^r e_j^d e_k^b \partial_{[b} e_{d]}^r = e_{[j}^d e_{k]}^b e_a^r \partial_b e_d^r. \quad (5.44)$$

Sustituyendo (5.42) y (5.44) en (5.41) llegamos a que

$$\omega_{ajk} = e^{d[k}\partial_d e_a^{j]} - e^{d[k}\partial_a e_d^{j]} + e_{[j}^d e_{k]}^b e_a^r \partial_b e_d^r. \quad (5.45)$$

Utilizando las identidades

$$A_{[j} B_{k]} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{imn} A_m B_n \quad (5.46)$$

$$C^{[k} D^{j]} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{imn} C^n D^m, \quad (5.47)$$

donde  $\epsilon_{ijk} \epsilon^{imn} = \delta_j^m \delta_k^n - \delta_k^m \delta_j^n$ , tenemos que los dos primeros términos de la ecuación (5.45) se pueden escribir como

$$e^{d[k}\partial_d e_a^{j]} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{imn} e^{dn} \partial_d e_a^m \quad (5.48)$$

$$e^{d[k}\partial_a e_d^{j]} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{imn} e^{dn} \partial_a e_d^m, \quad (5.49)$$

y el tercer término de (5.45) queda como

$$e_{[j}^d e_{k]}^b e_a^r \partial_b e_d^r = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{imn} e_m^d e_n^b e_a^r \partial_b e_d^r \quad (5.50)$$

Por lo tanto la expresión (5.45) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \omega_{ajk} &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{imn} (e^{dn} \partial_d e_a^m - e^{dn} \partial_a e_d^m + e_m^d e_n^b e_a^r \partial_b e_d^r) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{imn} e^{dn} (\partial_d e_a^m - \partial_a e_d^m + e_m^b e_a^r \partial_d e_b^r). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Definamos

$$\omega_a^i := -\frac{1}{2} \epsilon^{imn} e_n^d (\partial_d e_a^m - \partial_a e_d^m + e_m^b e_a^r \partial_d e_b^r), \quad (5.52)$$

entonces la ecuación (5.51) estará dada de la siguiente manera

$$\omega_{ajk} = -\epsilon_{ijk} \omega_a^i \quad (5.53)$$

Sustituyendo (5.53) en (5.37) se obtiene

$$D_a E_j^a = \partial_a E_j^a - \epsilon_{ijk} \omega_a^i E_k^a. \quad (5.54)$$

Usando que  $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$ , la expresión anterior se puede escribir como

$$D_a E_j^a = \partial_a E_j^a + \epsilon_{jkl} \omega_a^k E_l^a. \quad (5.55)$$

Si expresamos a la ecuación (5.52) como función de las  $E$ 's se obtiene  $\omega_a^i$  como función de las  $E$ 's

$$\begin{aligned} -\omega_a^i &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} E_k^b [\partial_b E_a^j - \partial_a E_b^j + E_j^c E_a^l \partial_b E_c^l] \\ &+ \frac{1}{4 \det(E)} \epsilon^{ijk} E_k^b [2E_a^j \partial_b (\det(E)) - E_b^j \partial_a (\det(E))], \end{aligned} \quad (5.56)$$

No es difícil verificar que si se calcula  $\omega_a^i$  para el rescalado se obtiene que es invariante; es decir, se cumple que

$$\tilde{\omega}_a^j = \omega_a^j(\tilde{E}) = \omega_a^j(E) \quad (5.57)$$

Evidentemente, de  $D_a(E_j^b) = 0$  se sigue que  $D_a(E_j^a) = 0$  y que  $D_a(\tilde{E}_j^a) = 0$ , pues  $\beta$  es una constante. Por tanto, de (5.55) tendremos

$$0 = \partial_a \tilde{E}_j^a + \epsilon_{jkl} \omega_a^k \tilde{E}_l^a$$

Con esto podemos escribir a la constricción  $G_j = 0$  como sigue

$$G_j = \epsilon_{jkl} \tilde{K}_a^k \tilde{E}_l^a = \partial_a(\tilde{E}_j^a) + \epsilon_{jkl} [\omega_a^k + \tilde{K}_a^k] \tilde{E}_l^a \quad (5.58)$$

Ésta es justamente la forma que buscábamos; es decir, es de la forma

$$G_j = \partial_a \tilde{E}_j^a + \epsilon_{jkl} \tilde{A}_a^k \tilde{E}_l^a \quad (5.59)$$

con

$$\tilde{A}_a^j = \omega_a^j + \beta K_a^j, \quad (5.60)$$

que es la conexión de Ashtekar-Barbero. La transformación es pues el rescalado más la transformación  $\tilde{A}_a^j = \omega_a^j + \beta K_a^j$ . Asociada a la conexión  $\tilde{A}$  tenemos la derivada covariante  $\tilde{D}_a$ :

$$\tilde{D}_a v_j = \partial_a v_j + \epsilon_{jkl} \tilde{A}_a^k v_l \quad (5.61)$$

$$\tilde{D}_a u_b = D_a u_b. \quad (5.62)$$

La constricción tiene ahora la forma  $G_j = \tilde{D}_a \tilde{E}_j^a$ , que es análoga a la constricción de Gauss de una teoría de norma  $SU(2)$ , y es por esto que a esta constricción se le llama constricción de Gauss.

Si reemplazamos el par canónico  $(K_a^i, E_j^b)$  por el nuevo par

$$\begin{aligned} (K_a^i, E_j^b) &\rightarrow (\tilde{K}_a^i = \beta K_a^i, \tilde{E}_j^b = E_j^b / \beta) \\ &\rightarrow (\tilde{A}_a^i = \omega_a^i + \tilde{K}_a^i, \tilde{E}_j^b), \end{aligned} \quad (5.63)$$

los paréntesis de Poisson entre las nuevas variables se obtienen utilizando el paréntesis de Poisson entre el par canónico  $\tilde{K}_a^i$  y  $\tilde{E}_j^b$ , y entre  $\tilde{K}_a^i$  con  $\omega_a^j(\tilde{E}) = \omega_a^j(E)$  [utilizando (5.56)]; el resultado es

$$\{\tilde{A}_a^j(y), \tilde{A}_b^k(y')\} = \{\tilde{E}_j^a(y), \tilde{E}_k^b(y')\} = 0, \quad (5.64)$$

$$\{\tilde{E}_j^a(y), \tilde{A}_b^k(y')\} = \frac{1}{2} \delta_b^a \delta_j^k \delta(y, y'). \quad (5.65)$$

Es decir, las nuevas variables son, en efecto, variables canónicas conjugadas.

Para completar la formulación de la RG en variables de conexión queda todavía expresar la constricción Hamiltoniana y la constricción de difeomorfismos en términos de las nuevas variables  $(\tilde{A}_a^j, \tilde{E}_j^a)$ . Para realizar esto, introducimos las curvaturas asociadas a  $\omega_b^j$  y a  $\tilde{A}_b^j$ , respectivamente

$$R_{ab}^j = 2\partial_{[a}\omega_{b]}^j + \epsilon_{jkl}\omega_a^k\omega_b^l \quad (5.66)$$

$$\tilde{F}_{ab}^j = 2\partial_{[a}\tilde{A}_{b]}^j + \epsilon_{jkl}\tilde{A}_a^k\tilde{A}_b^l. \quad (5.67)$$

Sustituyendo en  $\tilde{F}_{ab}^j$  la forma explícita de  $\tilde{A}_b^j$  en términos de  $\omega_b^j$  y  $K_b^j$  (i.e.,  $\tilde{A}_b^j = \omega_b^j + \beta K_b^j$ ) se obtiene que

$$\tilde{F}_{ab}^j = R_{ab}^j + 2\beta D_{[a}K_{b]}^j + \beta^2 \epsilon_{jkl}K_a^k K_b^l. \quad (5.68)$$

Si contraémos con  $\tilde{E}_j^b$  se obtiene que

$$\tilde{F}_{ab}^j \tilde{E}_j^b = \frac{1}{\beta} R_{ab}^j E_j^b + 2D_{[a}(K_{b]}^j E_j^b) + \beta K_a^k G_k, \quad (5.69)$$

donde hemos usado que  $G_k = \epsilon_{klj}K_b^l E_j^b$ . Trabajando un poco el primer término es posible mostrar que éste es nulo<sup>5</sup>, así se tiene que

$$\tilde{F}_{ab}^j \tilde{E}_j^b = 2D_{[a}(K_{b]}^j E_j^b) + \beta K_a^j G_j. \quad (5.70)$$

Pero la constricción de difeomorfismos es  $\mathcal{H}_a = -2D_{[b}(K_{a]}^j E_j^b)$  [ecuación (5.10)], así que

$$\tilde{F}_{ab}^j \tilde{E}_j^b = \mathcal{H}_a + \tilde{K}_a^j G_j. \quad (5.71)$$

Teniendo en cuenta la constricción de Gauss se tiene que

$$\mathcal{H}_a = \tilde{F}_{ab}^j \tilde{E}_j^b.$$

---

<sup>5</sup>Ver por ejemplo [Thiemann 2007].

Análogamente, usando la contracción  $\tilde{F}_{ab}^j \epsilon_{jkl} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_l^b$  y que  $G_j = 0$ , se verifica que

$$\mathcal{H} = \left[ \beta^2 \tilde{F}_{ab}^j - (\beta^2 - 1) \epsilon_{jmn} \tilde{K}_a^m \tilde{K}_b^n \right] \frac{\epsilon_{jkl} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_l^b}{\sqrt{|\det(\tilde{E}\beta)|}}$$

En suma, las constricciones en términos de las nuevas variables son

$$G_j = \tilde{D}_a \tilde{E}_j^a = \partial_a \tilde{E}_j^a + \epsilon_{jkl} \tilde{A}_a^k \tilde{E}_l^a \quad (5.72)$$

$$\mathcal{H}_a = \tilde{F}_{ab}^j \tilde{E}_j^b \quad (5.73)$$

$$\mathcal{H} = \left[ \beta^2 \tilde{F}_{ab}^j - (\beta^2 - 1) \epsilon_{jmn} \tilde{K}_a^m \tilde{K}_b^n \right] \frac{\epsilon_{jkl} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_l^b}{\sqrt{|\det(\tilde{E}\beta)|}}. \quad (5.74)$$

Con lo anterior, la funcional de acción de RG en variables de conexión está dado por

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} \left[ 2\dot{\tilde{A}}_a^i \tilde{E}_i^a - (\Lambda^j G_j + N^a \mathcal{H}_a + N \mathcal{H}) \right] d^3y. \quad (5.75)$$

Un aspecto importante de esta formulación es que es *independiente del fondo*, esta característica ha permitido considerar a la formulación en variables de conexión como el punto de partida para llevar a cabo una cuantización independiente de la métrica. Cabe señalar que a nivel clásico esta formulación no presenta ninguna ventaja respecto a la formulación usual (con la 4-métrica como variable fundamental) o la formulación  $3 + 1$ .



## Capítulo 6

# Discusión y comentarios adicionales

Hemos presentado la formulación de la RG en variables de conexión reales; sin embargo, es importante mencionar que la formulación original en términos de variables complejas no está del todo descartada como posibilidad y, de hecho, hay quienes sostienen (ver por ejemplo [Penrose 2007]) que puede tener un importante contenido físico: las variables originales de Ashtekar son asimétricas respecto al tratamiento de las partes dextrógira y levógira del gravitón, lo que para algunos es indicativo de que hay algo profundamente asimétrico izquierda/derecha en la naturaleza. La línea argumentativa de quienes apoyan la idea de considerar a las variables originales como fundamentales se apoya en que éste tipo de asimetría se presenta en las interacciones débiles y en que el electromagnetismo también tiene restos de esta asimetría cuando se considera la teoría unificada electrodébil. Por otro lado, está la postura pragmática de quienes ven en las condiciones de realidad una desventaja y se inclinan por eliminar el aspecto quiral de la teoría mediante la elección del parámetro de Immirzi  $\beta$  como un número real.

Una cuestión importante que surge al considerar el parámetro de Immirzi es que los diferentes valores de  $\beta$  dan lugar a teorías cuánticas que, en general, son unitariamente inequivalentes. Esto es una ambigüedad asociada a que no todas las transformaciones canónicas se implementan unitariamente a nivel cuántico. El parámetro  $\beta$  aparece en el espectro de los observables más importantes de la teoría de gravedad cuántica de lazos, como lo son los operadores de área y de volumen, dando como resultado una familia (parametrizada por  $\beta$ ) de observables. La pregunta que surge es ¿qué  $\beta$  debe considerarse? la naturaleza es una y debe buscarse un criterio físico para seleccionar el  $\beta$  adecuado. Entre las propuestas está la idea de que el parámetro de Immirzi se puede ver de manera análoga al ángulo- $\theta$  del sector topológico de las teorías de Yang-Mills [Mercuri 2008]. Esta idea, inicialmente propuesta por Gambini, Obregón y Pullin [Gambini et al 1999], ha sido reconsiderada últimamente para proponer una generalización de la funcional de acción para la RG [Mercuri 2006].

En diversas ocasiones se ha mencionado que la formulación de la RG en variables

de conexión (a la Ashtekar) ha dado lugar al desarrollo de la Gravedad Cuántica de Lazos. El apelativo de lazos proviene de la siguiente cuestión: a principios de los 80's R. Gambini y A. Trias se percataron de la utilidad de las funciones de lazo de Wilson en la construcción de una cuantización canónica para una teoría de Yang-Mills [Gambini & Trias 1980]. Dado un lazo (trayectoria cerrada)  $\gamma$  en  $\Sigma$  y una  $G$ -conexión  $A$  para algún grupo de norma  $G$ , podemos considerar la holonomía de  $A$  a lo largo de  $\gamma$ ,

$$h_\gamma(A) = \mathcal{P} \exp \oint_\gamma A, \quad (6.1)$$

donde  $\mathcal{P}$  denota el producto de trayectorias ordenadas. Las funciones de lazo de Wilson son

$$T_\gamma(A) = \text{tr}(h_\gamma(A)). \quad (6.2)$$

La importancia de las funciones de lazo de Wilson es que, al menos para grupos compactos, éstas engloban toda la información invariante de norma de la conexión. Justamente la reformulación de la RG en variables de conexión permite considerar a la teoría como una teoría tipo Yang-Mills y gracias a este hecho fue que Jacobson, Rovelli y Smolin pudieron utilizar las ideas de Gambini y Trias para comenzar la construcción de una teoría cuántica de lazos para la RG a partir de la formulación en conexiones [Jacobson & Smolin 1988, Rovelli & Smolin 1990]. En el camino una de las cosas que se deben tener presentes es que los corchetes de Poisson entre los campos fundamentales  $A_a$  y  $E^a$  son singulares, así que deben ser en cierta forma regularizados. Para ello es necesario tener en cuenta la naturaleza tensorial de los campos, por un lado la triada densitizada en una 2-forma así que ésta es regularizada de forma natural por una superficie,

$$E_i(S) = \int_S r_a E_i^a d^2\sigma, \quad (6.3)$$

donde  $r_a$  es la normal a la superficie. A  $E_i(S)$  se le denomina el “flujo” a través de  $S$ . Por otro lado, la conexión  $A$  es una 1-forma y por tanto es natural regularizarla a lo largo de una trayectoria, es decir, considerar justamente la holonomía. La regularización de los campos  $A$  y  $E$  mediante trayectorias y superficies da como resultado el álgebra regularizada de holonomías y flujos  $h_\gamma(A)$  y  $E_i(S)$ . Este es el punto del cual parte el desarrollo de la gravedad cuántica de lazos. Esta teoría está actualmente en construcción y, junto con la teoría de cuerdas [Polchinski 1998], parece ser un sólido candidato para lograr describir el mundo gravito-cuántico. Por construcción, la teoría es independiente del fondo y no considera más que cuatro dimensiones, aunque se han tenido importantes avances en el desarrollo de la gravedad cuántica de lazos todavía no hay ningún resultado que pueda tomarse como definitivo y tampoco se tiene alguna observación que confirme alguna predicción concreta.

# Apéndice A

## Apéndice

### A.1. Variedades y Análisis Tensorial

El concepto de variedad diferenciable es la generalización de lo que entendemos por curvas e (hiper)superficies diferenciables encajadas en un espacio ambiente a objetos diferenciables que *no* están encajados en ningún espacio ambiente. Una variedad  $m$ -dimensional es un espacio topológico *localmente* homeomorfo a  $\mathbb{R}^m$ ; ésta puede diferir *globalmente* de  $\mathbb{R}^m$ . El homeomorfismo local permite asignarle a un abierto de la variedad coordenadas locales. Si la variedad es globalmente homeomorfa a  $\mathbb{R}^m$ , entonces el abierto corresponde a toda la variedad y las coordenadas son globales; si no es el caso, entonces se necesita introducir un conjunto de coordenadas locales que cubran a la variedad (en tal situación hay puntos en la variedad que pueden tener dos o más representaciones coordenadas) y la transición de un sistema de coordenadas a otro debe ser suave. Como veremos, esto permite utilizar el cálculo diferencial e integral en  $\mathbb{R}^m$  y generalizarlo a variedades.

#### A.1.1. Espacio topológico y variedad diferenciable

**Definición A.1** *Sea  $X$  un conjunto arbitrario no vacío. Una topología para  $X$  es una colección  $\tau$  de subconjuntos de  $X$  que tiene las siguientes propiedades:*

1.  $\emptyset \in \tau$  y  $X \in \tau$ .
2. Si  $U_\alpha \in \tau$  para cada  $\alpha \in \mathcal{A}$  ( $\mathcal{A}$  es un conjunto de índices numerable), entonces  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \tau$ .
3. Si  $U_1, \dots, U_k$  están en  $\tau$ , entonces  $U_1 \cap \dots \cap U_k \in \tau$ .

El par  $(X, \tau)$ , es decir el conjunto  $X$  dotado con una topología  $\tau$ , es llamado un espacio topológico. Los elementos de  $\tau$  son llamados conjuntos abiertos de  $(X, \tau)$ , o simplemente abiertos en  $X$ .

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Un subconjunto  $C$  de  $X$  es *cerrado* si su complemento en  $X$  es un conjunto abierto, es decir, si  $X - C \in \tau$ .

A cada elemento  $x \in X$  se le llamará punto.

Si  $(X, \tau)$  y  $(Y, \tau')$  son ambos espacios topológicos, entonces decimos que un mapeo  $f : X \rightarrow Y$  es continuo si  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$  (i.e.,  $f^{-1}(U) \in \tau$ ) siempre que  $U$  es abierto en  $Y$  (i.e.,  $U \in \tau'$ ).

Para simplificar notación, en lo que sigue denotaremos a los espacios topológicos  $(X, \tau)$  sólo por  $X$ . De tal manera que si tenemos dos espacios topológicos  $(X, \tau)$  y  $(Y, \tau')$ , nos referiremos a ellos simplemente como los espacios topológicos  $X$  y  $Y$ .

Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Un mapeo continuo e inyectivo  $h$  de  $X$  sobre  $Y$ , tal que  $h^{-1} : Y \rightarrow X$  también es continuo, es llamado un homeomorfismo. Si tal mapeo existe, decimos que  $X$  y  $Y$  son homeomorfos o topológicamente equivalentes y escribimos  $X \cong Y$ .

Un espacio topológico  $X$  se dice que es *Hausdorff* si para cualesquiera  $x$  y  $y$  puntos distintos de  $X$  siempre existen conjuntos abiertos  $U_x$  y  $U_y$  en  $X$ , con  $x \in U_x$ ,  $y \in U_y$ , tales que  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

Habiendo mencionado los conceptos topológicos preliminares, ahora ya podemos dar la definición de variedad diferenciable.

**Definición A.2**  *$M$  es una variedad diferenciable  $m$ -dimensional (o  $m$ -variedad) si:*

1.  *$M$  es un espacio topológico;*
2.  *$M$  está provisto con una familia de parejas  $\{(U_i, \psi_i)\}$ , donde  $\{U_i\}$  es una familia de conjuntos abiertos que cubren a  $M$ , esto es  $\bigcup_i U_i = M$  y  $\psi_i : U_i \subset M \rightarrow U'_i \subset \mathbb{R}^m$  es un homeomorfismo de  $U_i \subset M$  con  $U'_i \subset \mathbb{R}^m$ ; y*
3. *Dados  $U_i$  y  $U_j$  tales que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , el mapeo  $\psi_{ij} = \psi_i \circ \psi_j^{-1}$  de  $\psi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^m$  hacia  $\psi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^m$  es infinitamente diferenciable ( $C^\infty$ ).*

Diremos que la pareja  $(U_i, \psi_i)$  es *una carta* y que toda la familia  $\{(U_i, \psi_i)\}$  es *un atlas*. Al subconjunto  $U_i$  lo nombraremos como la vecindad coordinada, mientras que a  $\psi_i$  como la función de coordenadas, o simplemente, las coordenadas. El homeomorfismo  $\psi_i$  está representado por  $m$  funciones  $x^1(p), \dots, x^m(p)$ , con  $p \in U_i$ . Es decir,  $\psi_i(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p)) \in \mathbb{R}^m$ . El conjunto  $\{x^\mu(p)\}$  representa las coordenadas de  $p$  asociadas al homeomorfismo  $\psi_i$ .

Si  $U_i$  y  $U_j$  se traslapan, dos sistemas de coordenadas son asignados a los puntos en  $U_i \cap U_j$ . Por la condición (3) sabemos que la transición de un sistema de coordenadas a otro debe ser diferenciable ( $C^\infty$ ). El mapeo  $\psi_i$  asigna  $m$  valores coordinados  $x^\mu$  ( $1 \leq \mu \leq m$ ) a  $p \in U_i \cap U_j$ , mientras  $\psi_j$  le asigna  $y^\nu$  ( $1 \leq \nu \leq m$ ), la transición de  $y$  hacia  $x$ ,  $x^\mu = x^\mu(y^\nu)$ , está dada entonces por  $m$  funciones de  $m$  variables. Las funciones de transformación de coordenadas  $x^\mu = x^\mu(y^\nu)$  son la forma explícita del mapeo  $\psi_{ij} = \psi_i \circ \psi_j^{-1}$ .

Si la unión de dos atlas  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  y  $\{(V_j, \psi_j)\}$  es de nuevo un atlas, entonces se dice que éstos son atlas *compatibles*. La compatibilidad es una relación de equivalencia, la clase de equivalencia generada por la compatibilidad es llamada la *estructura diferenciable*.

Sea  $f : M \rightarrow N$  un mapeo de una variedad  $m$ -dimensional  $M$  hacia una variedad  $n$ -dimensional  $N$ ; i.e.,  $M \ni p \mapsto f(p) \in N$ . Consideremos las cartas  $(U, \varphi)$  en  $M$  y  $(V, \psi)$  en  $N$  tales que  $p \in U$  y  $f(p) \in V$ , entonces  $f$  tiene la siguiente representación coordenada

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (\text{A.1})$$

Si escribimos  $\varphi(p) = \{x^\mu\}$  y  $\psi(f(p)) = \{y^\alpha\}$ ,  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  no es más que la función vectorial usual  $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$  de  $m$  variables. En la igualdad vectorial  $y = f(x)$ ,  $f$  debe entenderse como la función  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ; la igualdad  $y = f(x)$  expresada en componentes es  $y^\alpha = f^\alpha(x^\mu)$ , donde  $f^\alpha$  son las componentes de la función  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Si  $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ , o simplemente  $y^\alpha = f^\alpha(x^\mu)$ , es  $C^\infty$  en  $x^\mu(p)$  [i.e., en  $x = \varphi(p)$ ] se dice que  $f$  es diferenciable en  $p$ . Si  $f$  es diferenciable en  $p$ , para todo  $p \in M$ , entonces  $f$  es diferenciable, suave o  $C^\infty$ .

Consideremos el caso particular en que  $N$  es  $\mathbb{R}$ ; i.e., funciones sobre  $M$  a los reales,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . En la carta  $(U, \varphi)$  la representación coordenada de  $f$  está dada por  $f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . La función de  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable si  $f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  es  $C^\infty$ . Al conjunto de funciones diferenciables sobre  $M$  lo denotaremos por  $C^\infty(M)$ .

**Definición A.3** Sea  $f : M \rightarrow N$  un homeomorfismo y sean  $\varphi$  y  $\psi$  funciones coordenadas como se definió previamente. Si  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  es invertible (esto es, existe un mapeo  $\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}$ ) y tanto  $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$  como  $x = \varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(y)$  son  $C^\infty$ , entonces se dice que  $f$  es un difeomorfismo y que  $M$  es difeomorfo a  $N$  y viceversa,  $M \equiv N$ .

### A.1.2. Vectores, 1-formas y tensores

A un vector en una variedad  $M$  podemos considerarlo como el vector tangente a una cierta curva en  $M$ . Para definir un vector tangente necesitamos una curva  $c : (a, b) \rightarrow M$  y una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $t \in (a, b)$  el parámetro de la curva y supongamos que  $t = 0$  está contenido en nuestro intervalo abierto  $(a, b)$ . Es importante destacar que la suposición  $t = 0 \in (a, b)$  es sólo por sencillez, pues el análisis puede hacerse con cualquier  $t_0$  fijo en el intervalo  $(a, b)$ .

Definimos el vector tangente en  $c(0)$  como la derivada direccional de una función  $f(c(t))$  a lo largo de la curva  $c(t)$  en  $t = 0$ . La razón de cambio de  $f(c(t))$  en  $t = 0$  a lo largo de la curva es

$$\left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0}. \quad (\text{A.2})$$

En términos de las coordenadas locales, ésta se convierte en

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0} \quad (\text{A.3})$$

[La derivada  $\partial f/\partial x^\mu$  realmente significa  $\partial(f \circ \varphi^{-1}(x))/\partial x^\mu$ .] En otras palabras,  $df(c(t))/dt$  en  $t = 0$  se obtiene aplicando el operador diferencial

$$\mathbf{X} = X^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right), \left( X^\mu = \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right) \quad (\text{A.4})$$

a  $f$  y evaluar en  $t = 0$ . Esto es,

$$\left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0} = X^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) f|_{t=0} \equiv \mathbf{X}[f]|_{t=0}. \quad (\text{A.5})$$

A  $\mathbf{X}|_{t=0} = X^\mu|_{t=0} \partial/\partial x^\mu$  lo definimos como un vector tangente a  $M$  en el punto  $p = c(0)$ . Este vector es tangente a la curva  $c(t)$  en  $t = 0$ .

Para ser más formales, introducimos una clase de equivalencia de curvas en  $M$ . Si dos curvas  $c_1(t)$  y  $c_2(t)$  satisfacen

1.  $c_1(0) = c_2(0) = p$
2.  $\left. \frac{dx^\mu(c_1(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dx^\mu(c_2(t))}{dt} \right|_{t=0}$

$c_1(t)$  y  $c_2(t)$  dan el mismo operador diferencial  $\mathbf{X}$  en  $p$ , en tal caso definimos  $c_1(t) \sim c_2(t)$ . Claramente  $\sim$  es una relación de equivalencia y ésta define a las clases de equivalencia. Identificamos el *vector tangente*  $\mathbf{X}$  con la *clase de curvas equivalentes*

$$[c(t)] = \left\{ \tilde{c}(t) \mid \tilde{c}(0) = c(0), \left. \frac{dx^\mu(\tilde{c}(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0} \right\}. \quad (\text{A.6})$$

Todas las clases de equivalencia de curvas en  $p \in M$ , es decir, todos los vectores tangentes en  $p$ , forman un espacio vectorial llamado el *espacio tangente* a  $M$  en  $p$  y que denotaremos por  $T_p M$ . Evidentemente,  $e_\mu = \partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$  ( $1 \leq \mu \leq m$ ) son los vectores base de  $T_p M$  y  $\dim T_p M = \dim M$ . El conjunto  $\{e_\mu\}$  es llamado la base coordenada; si un vector  $\mathbf{V} \in T_p M$  está escrito como  $\mathbf{V} = V^\mu e_\mu$ , los números  $V^\mu$  son llamados las componentes de  $\mathbf{V}$  con respecto a  $e_\mu$ .

Asociado al espacio vectorial  $T_p M$  existe un espacio vectorial dual,  $T_p^* M$ , cuyos elementos son funciones lineales de  $T_p M$  en  $\mathbb{R}$ . El espacio dual  $T_p^* M$  es llamado *espacio cotangente a  $M$  en  $p$* . A los elementos  $\omega \in T_p^* M$ ,  $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , se les conoce como vectores duales, vectores cotangentes o, en el contexto de formas diferenciales, como 1-formas. El ejemplo más sencillo de una 1-forma es la diferencial  $df$  de una función  $f \in C^\infty(M)$ , definida por la siguiente acción sobre vectores  $\mathbf{V}$ :

$$\langle df, \mathbf{V} \rangle = \mathbf{V}[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.7})$$

donde hemos usado que  $\mathbf{V} = V^\mu \partial/\partial x^\mu$ . Claramente  $\langle df, \mathbf{V} \rangle$  es  $\mathbb{R}$ -lineal tanto en  $\mathbf{V}$  como en  $f$ .

Puesto que  $df$  se expresa en términos de las coordenadas  $x = \varphi(p)$  como  $df = (\partial f / \partial x^\mu) dx^\mu$ , es natural considerar a  $\{dx^\mu\}$  como una base de  $T_p^*M$ . De (A.7) se sigue que esta base satisface que

$$\left\langle dx^\nu, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\rangle = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\nu. \quad (\text{A.8})$$

A las bases de vectores y 1-formas que cumplen la anterior relación se les llama bases duales. Por consiguiente,  $\{\partial/\partial x^\mu\}$  y  $\{dx^\nu\}$  son bases duales. En la base  $\{dx^\alpha\}$  una 1-forma arbitraria  $\omega$  se escribe como

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu, \quad (\text{A.9})$$

donde las  $\omega_\mu$  son las componentes de  $\omega$ . Dado un vector  $\mathbf{V} = V^\mu \partial/\partial x^\mu$  y una 1-forma  $\omega = \omega_\mu dx^\mu$  cualesquiera, definimos el producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p^*M \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\langle \omega, \mathbf{V} \rangle = \omega_\mu V^\nu \left\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle = \omega_\mu V^\nu \delta_\nu^\mu = \omega_\mu V^\mu. \quad (\text{A.10})$$

Nótese que  $\langle \omega, \mathbf{V} \rangle = \omega(\mathbf{V}) = \mathbf{V}(\omega)$ .

Un tensor tipo  $(q, r)$  es un objeto multilinear que mapea  $q$  elementos de  $T_p^*M$  y  $r$  elementos de  $T_pM$  en los reales.  $\mathcal{T}_{r,p}^q M$  denota el conjunto de tensores tipo  $(q, r)$  en  $p \in M$ . Un elemento de  $\mathcal{T}_{r,p}^q M$  se escribe en términos de las bases descritas anteriormente como

$$T = T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_q} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_r}. \quad (\text{A.11})$$

Claramente esto es una función lineal de  $\otimes^q T_p^*M \otimes^r T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $V_i = V_i^\mu \partial/\partial x^\mu$  ( $1 \leq i \leq r$ ) y  $\omega_i = \omega_{i\mu} dx^\mu$  ( $1 \leq i \leq q$ ). La acción de  $T$  sobre ellos nos da un número:

$$T(\omega_1 \dots \omega_q; V_1 \dots V_r) = T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_q} \omega_{1\mu_1} \dots \omega_{q\mu_q} V_1^{\nu_1} \dots V_r^{\nu_r}. \quad (\text{A.12})$$

Si un vector es asignado suavemente a cada punto de  $M$ , esto es llamado un campo vectorial sobre  $M$ . En otras palabras,  $\mathbf{V}$  es un campo vectorial si  $\mathbf{V}[f] \in C^\infty(M)$  para cualquier  $f \in C^\infty(M)$ . El conjunto de campos vectoriales sobre  $M$  es denotado como  $\chi(M)$ . Un campo vectorial  $\mathbf{X}$  en  $p \in M$  es denotado por  $\mathbf{X}|_p$ , el cual es un elemento de  $T_p(M)$ . Similarmente, definimos un campo tensorial de tipo  $(q, r)$  como la asignación suave de un elemento de  $\mathcal{T}_{r,p}^q(M)$  en cada punto de  $p \in M$ . El conjunto de campos tensoriales de tipo  $(q, r)$  sobre  $M$  es denotado por  $\mathcal{T}_r^q(M)$ . Por ejemplo,  $\mathcal{T}_1^0$  es el conjunto de campos vectoriales duales, el cual también es denotado por  $\Omega^1(M)$  en el contexto de formas diferenciales;  $\mathcal{T}_0^0(M) = C^\infty(M)$  es el conjunto de funciones continuas y suaves sobre  $M$ , que en el contexto de formas diferenciales se escribe como  $\Omega^0(M)$ .

### A.1.3. Mapeos inducidos

Un mapeo suave  $f : M \rightarrow N$  induce naturalmente una función  $f_*$  llamado *mapeo diferencial*,

$$f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N. \quad (\text{A.13})$$

La forma explícita de  $f_*$  se obtiene a partir de la definición de vector tangente como una derivada direccional a lo largo de una curva. Si  $g \in C^\infty(N)$ , entonces  $g \circ f \in C^\infty(M)$ . Un vector  $\mathbf{V} \in T_p M$  actúa sobre  $g \circ f$  para dar un número  $\mathbf{V}[g \circ f]$ . Ahora definimos  $f_* \mathbf{V} \in T_{f(p)}(N)$  por

$$f_* \mathbf{V}[g] = \mathbf{V}[g \circ f] \quad (\text{A.14})$$

o, en términos de las cartas  $(U, \varphi)$  sobre  $M$  y  $(V, \psi)$  sobre  $N$ ,

$$(f_* \mathbf{V})[g \circ \psi^{-1}(y)] = \mathbf{V}[g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)] \quad (\text{A.15})$$

donde  $x = \varphi(p)$  y  $y = \psi(f(p))$ . Sean  $\mathbf{V} = V^\mu \partial / \partial x^\mu$  y  $f_* \mathbf{V} = W^\alpha \partial / \partial y^\alpha$ . Entonces (A.15) nos da

$$W^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} [g \circ \psi^{-1}(y)] = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} [g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)]. \quad (\text{A.16})$$

Si tomamos  $g = y^\alpha$ , obtenemos la relación entre  $W^\alpha$  y  $V^\mu$ ,

$$W^\alpha = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} y^\alpha(x). \quad (\text{A.17})$$

Note que la matriz  $(\partial y^\alpha / \partial x^\mu)$  no es otra cosa sino el Jacobiano del mapeo  $f : M \rightarrow N$ . El mapeo diferencial  $f_*$  se extiende naturalmente a tensores del tipo  $(q, 0)$ ,  $f_* : \mathcal{T}_{0,p}^q(M) \rightarrow \mathcal{T}_{0,f(p)}^q(N)$ .

Un mapeo  $f : M \rightarrow N$  también induce una función

$$f^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M. \quad (\text{A.18})$$

Note que  $f_*$  va en la misma dirección que  $f$ , mientras que  $f^*$  va en el sentido contrario, por tanto el nombre de *pullback* (mapeo retroceso). Si tomamos  $\mathbf{V} \in T_p M$  y  $\omega \in T_{f(p)}^* N$ , el pullback de  $\omega$  por  $f^*$  está definido por

$$\langle f^* \omega, \mathbf{V} \rangle = \langle \omega, f_* \mathbf{V} \rangle. \quad (\text{A.19})$$

La expresión en componentes de  $f^*$  está dada por la matriz Jacobiana  $(\partial y^\alpha / \partial x^\mu)$ : la 1-forma  $W_\alpha dy^\alpha$  en  $T_{f(p)}^* N$  es mapeada a la 1-forma  $V_\mu dx^\mu$  en  $T_p^* M$  según  $V_\mu = W_\alpha \partial y^\alpha / \partial x^\mu$ . El pullback  $f^*$  se extiende naturalmente a tensores del tipo  $(0, r)$ ,  $f^* : \mathcal{T}_{r,f(p)}^0(N) \rightarrow \mathcal{T}_{r,p}^0(M)$ .

Antes de terminar daremos la definición de subvariedad de una variedad. También daremos el significado de incrustación (o encaje).

**Definición A.4** (*Inmersión, subvariedad, incrustación*) Sea  $f : M \rightarrow N$  un mapeo suave en donde  $\dim M \leq \dim N$ .

1. El mapeo  $f$  es llamado una *inmersión* de  $M$  sobre  $N$  si  $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  es *inyectivo* (1:1), esto es, si  $\text{rangof}_* = \dim M$ .

2. El mapeo  $f$  es llamado una *incrustación* si  $f$  es *inyectivo* y además es una *inmersión*. La imagen  $f(M)$  es llamada una *subvariedad* de  $N$ .

Si  $f$  es una *inmersión*,  $f_*$  mapea a  $T_p M$  isomórficamente hacia un subespacio vectorial de  $T_{f(p)} N$  ya que  $\text{rangof}_* = \dim M$ .

#### A.1.4. Derivada de Lie

A continuación daremos la definición de derivada de Lie. Sean  $\sigma(t, x)$  y  $\tau(t, x)$  dos flujos generados por los campos vectoriales  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Y}$  que satisfacen,

$$\frac{d\sigma^\mu(s, x)}{ds} = X^\mu(\sigma(s, x)) \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{d\tau^\mu(t, x)}{dt} = Y^\mu(\tau(t, x)). \quad (\text{A.21})$$

Ahora evaluemos el cambio del campo vectorial  $\mathbf{Y}$  a lo largo de  $\sigma(s, x)$ . Para hacer esto, tenemos que comparar el vector  $\mathbf{Y}$  en un punto  $x$  con éste en otro punto cercano  $x' = \sigma_\varepsilon(x)$ . Esto no se puede hacer tomando simplemente las diferencias entre las componentes de  $\mathbf{Y}$  en los distintos puntos ya que estos pertenecen a diferentes espacios tangentes  $T_x M$  y  $T_{\sigma_\varepsilon(x)} M$ ; la diferencia entre vectores en puntos diferentes aún no se ha definido. Para definir una derivada que tenga sentido, primero debemos mapear  $\mathbf{Y}|_{\sigma_\varepsilon(x)}$  hacia  $T_x M$  mediante  $(\sigma_{-\varepsilon})_* : T_{\sigma_\varepsilon(x)} M \rightarrow T_x M$ , después de esto, tomamos la diferencia entre los vectores  $(\sigma_{-\varepsilon})_* \mathbf{Y}|_{\sigma_\varepsilon(x)}$  y  $\mathbf{Y}|_x$ , que pertenecen a  $T_x M$ . La *derivada de Lie* del campo vectorial  $\mathbf{Y}$  a lo largo del flujo  $\sigma$  de  $\mathbf{X}$  está definida por

$$\mathbf{L}_\mathbf{X} \mathbf{Y} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [(\sigma_{-\varepsilon})_* \mathbf{Y}|_{\sigma_\varepsilon(x)} - \mathbf{Y}|_x] \quad (\text{A.22})$$

que también puede escribirse como

$$\mathbf{L}_\mathbf{X} \mathbf{Y} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\mathbf{Y}|_{\sigma_\varepsilon(x)} - (\sigma_\varepsilon)_* \mathbf{Y}|_x]. \quad (\text{A.23})$$

Sea  $(U, \varphi)$  una carta con coordenadas  $x$  y sean  $\mathbf{X} = X^\mu \partial / \partial x^\mu$  y  $\mathbf{Y} = Y^\mu \partial / \partial x^\mu$  dos campos vectoriales definidos en  $U$ . Entonces  $\sigma_\varepsilon(x)$  tiene las coordenadas  $x^\mu + \varepsilon X^\mu(x)$  y

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}|_{\sigma_\varepsilon(x)} &= Y^\mu(x^\nu + \varepsilon X^\nu(x)) e_\mu|_{x+\varepsilon \mathbf{X}} \\ &= [Y^\mu(x) + \varepsilon X^\lambda(x) \partial_\lambda Y^\mu(x)] e_\mu|_{x+\varepsilon \mathbf{X}}, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

donde  $\{e_\mu\} = \{\partial / \partial x^\mu\}$  es la base coordenada y  $\partial_\nu = \partial / \partial x^\nu$ . Si mapeamos este vector definido en  $\sigma_\varepsilon(x)$  hacia  $x$  mediante  $(\sigma_{-\varepsilon})_*$ , obtenemos

$$\begin{aligned} &[Y^\mu(x) + \varepsilon X^\lambda(x) \partial_\lambda Y^\mu(x)] \partial_\mu [x^\nu - \varepsilon X^\nu(x)] e_\nu|_x \\ &= [Y^\mu(x) + \varepsilon X^\lambda(x) \partial_\lambda Y^\mu(x)] [\delta_\mu^\nu - \varepsilon \partial_\mu X^\nu(x)] e_\nu|_x \\ &= Y^\mu(x) e_\mu|_x + \varepsilon [X^\mu(x) \partial_\mu Y^\nu(x) - Y^\mu(x) \partial_\mu X^\nu(x)] e_\nu|_x + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

A partir de (A.22) y (A.25), encontramos que

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_X \mathbf{Y} &= (X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu) e_\nu \\ &= [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

donde el paréntesis  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X}$  recibe el nombre de *paréntesis de Lie*. Geométricamente, el paréntesis de Lie muestra la no-conmutatividad de dos flujos.

### A.1.5. Formas diferenciales

Antes de definir lo que son las formas diferenciales, examinaremos la propiedad de simetría de los tensores. La operación de simetría sobre un tensor  $\omega \in \mathcal{T}_{r,p}^0(M)$  está definida por

$$P\omega(V_1, \dots, V_r) = \omega(V_{P(1)}, \dots, V_{P(r)}) \quad (\text{A.27})$$

donde los  $V_i \in T_p M$  y  $P$  es un elemento de  $S_r$ , el *grupo simétrico* de orden  $r$ . Consideremos una base coordenada  $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ . La componente de  $\omega$  en esta base es

$$\omega(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_r}) = \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}. \quad (\text{A.28})$$

Las componentes de  $P\omega$  se obtienen a partir de la ecuación (A.27), entonces

$$P\omega(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_r}) = \omega_{\mu_{P(1)} \mu_{P(2)} \dots \mu_{P(r)}}. \quad (\text{A.29})$$

Para un tensor general de tipo  $(q, r)$ , las operaciones de simetría están definidas para  $q$  índices y  $r$  índices separadamente.

La operación de simetrización  $\mathcal{S}$  de  $\omega \in \mathcal{T}_{r,p}^0(M)$  está definido por

$$\mathcal{S}\omega = \frac{1}{r!} \sum_{P \in S_r} P\omega, \quad (\text{A.30})$$

mientras que la operación de antisimetrizar  $\mathcal{A}$  es

$$\mathcal{A}\omega = \frac{1}{r!} \sum_{P \in S_r} \text{sgn}(P) P\omega, \quad (\text{A.31})$$

donde  $\text{sgn}(P) = 1$  para permutaciones pares y  $-1$  para permutaciones impares.  $\mathcal{S}\omega$  es totalmente simétrico (esto es,  $P\mathcal{S}\omega = \mathcal{S}\omega$  para cualquier  $P \in S_r$ ) y  $\mathcal{A}\omega$  es totalmente antisimétrico ( $P\mathcal{A}\omega = \text{sgn}(P)\mathcal{A}\omega$ ).

**Definición A.5** Una forma diferencial de orden  $r$  o  $r$ -forma es un tensor totalmente antisimétrico de tipo  $(0, r)$ .

Definimos el producto cuña  $\wedge$  de  $r$  1-formas como el producto tensorial totalmente antisimétrico

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \sum_{P \in S_r} \text{sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \otimes dx^{\mu_{P(2)}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{P(r)}}. \quad (\text{A.32})$$

Por ejemplo,

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu &= dx^\lambda \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu + dx^\nu \otimes dx^\lambda \otimes dx^\mu \\ &+ dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes dx^\lambda - dx^\lambda \otimes dx^\nu \otimes dx^\mu \\ &- dx^\nu \otimes dx^\mu \otimes dx^\lambda - dx^\mu \otimes dx^\lambda \otimes dx^\nu. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

El producto cuña satisface que:

1.  $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = 0$  si algún índice  $\mu$  aparece al menos dos veces.
2.  $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \text{sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \wedge dx^{\mu_{P(2)}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{P(r)}}$ .
3.  $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$  es lineal en cada  $dx^\mu$ .

Si denotamos el espacio vectorial de las  $r$ -formas en  $p \in M$  por  $\Omega_p^r(M)$ , el conjunto de  $r$ -formas (A.32) forma una base para  $\Omega_p^r(M)$  y un elemento  $\omega \in \Omega_p^r(M)$  se expande como

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}, \quad (\text{A.35})$$

donde  $\omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}$  son totalmente antisimétricos.

También se puede definir el *producto exterior* de una  $q$ -forma y una  $r$ -forma  $\wedge : \Omega_p^q(M) \times \Omega_p^r(M) \rightarrow \Omega_p^{q+r}(M)$ . Sean  $\omega \in \Omega_p^q(M)$  y  $\xi \in \Omega_p^r(M)$  por ejemplo; la acción de la  $(q+r)$ -forma  $\omega \wedge \xi$  sobre  $(q+r)$  vectores está definida por

$$(\omega \wedge \xi)(V_1, \dots, V_{q+r}) = \frac{1}{q!r!} \sum_{P \in S_{q+r}} \text{sgn}(P) \omega(V_{P(1)}, \dots, V_{P(q)}) \xi(V_{P(q+1)}, \dots, V_{P(q+r)}), \quad (\text{A.36})$$

donde los  $V_i \in T_p M$ . Si  $(q+r) > m$ , donde  $m$  es la dimensión de la variedad  $M$  entonces, el producto cuña  $\omega \wedge \xi$  se anula.

**Definición A.6** La derivada exterior  $d_r$  es un mapeo  $\Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$  cuya acción sobre una  $r$ -forma

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$$

está definida por

$$d_r \omega = \frac{1}{r!} \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (\text{A.37})$$

Una expresión que resulta útil para la derivada exterior se obtiene como sigue. Consideremos  $\mathbf{X} = X^\mu \partial / \partial x^\mu$ ,  $\mathbf{Y} = Y^\nu \partial / \partial x^\nu \in \chi(M)$  y  $\omega = \omega_\mu dx^\mu \in \Omega^1(M)$ . Entonces se puede ver que la combinación

$$\mathbf{X}[\omega(\mathbf{Y})] - \mathbf{Y}[\omega(\mathbf{X})] - \omega([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu} (X^\nu Y^\mu - X^\mu Y^\nu) \quad (\text{A.38})$$

es igual a  $d\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ; es decir

$$d\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}[\omega(\mathbf{Y})] - \mathbf{Y}[\omega(\mathbf{X})] - \omega([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]). \quad (\text{A.39})$$

## A.2. Geometría Riemanniana

### A.2.1. Tensor métrico

En geometría euclideana, el producto interno entre dos vectores  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  está dado por  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \sum_{i=1}^m U_i V_i$  donde  $U_i$  y  $V_i$  son las componentes de los vectores en  $\mathbb{R}^m$ . En una variedad  $M$ , el producto interno en cada  $p \in M$  está definido en el correspondiente espacio tangente  $T_p M$  a través de una métrica.

**Definición A.7** *Sea  $M$  una variedad diferenciable. Una métrica Riemanniana  $g$  en  $M$  es un campo tensorial de tipo  $(0, 2)$  en  $M$  que satisface lo siguiente en cada punto  $p \in M$ :*

1.  $g_p(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = g_p(\mathbf{V}, \mathbf{U})$
2. si  $g_p(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = 0$  para cualquier  $\mathbf{U} \in T_p M$ , entonces  $\mathbf{V} = 0$
3.  $g_p(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \geq 0$ , donde la igualdad se cumple sólo cuando  $\mathbf{U} = 0$ .

Aquí  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in T_p M$  y  $g_p = g|_p$ . Resumiendo,  $g_p$  es una forma bilineal simétrica, no degenerada y positiva definida.

Un campo tensorial  $g$  de tipo  $(0, 2)$  es una métrica pseudo-Riemanniana si ésta satisface (1) y (2).

En la sección anterior hemos definido el producto interno entre un vector  $\mathbf{V} \in T_p M$  y un vector dual  $\omega \in T_p^* M$  como un mapeo  $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p^* M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ . Si existe una métrica  $g$ , definimos el producto interno entre dos vectores  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in T_p M$  como  $g_p(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ . Dado que  $g_p$  es un mapeo de  $T_p M \otimes T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces podemos definir un mapeo lineal  $g_p(\mathbf{U}, \cdot) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{V} \mapsto g_p(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ . Entonces  $g_p(\mathbf{U}, \cdot)$  es identificado con una 1-forma  $\omega_U \in T_p^* M$ . Análogamente,  $\omega \in T_p^* M$  induce  $\mathbf{V}_\omega \in T_p M$  mediante  $\langle \omega, \mathbf{U} \rangle = g(\mathbf{V}_\omega, \mathbf{U})$ . Entonces, la métrica  $g_p$  nos brinda un isomorfismo entre  $T_p M$  y  $T_p^* M$ .

Sea  $(U, \psi)$  una carta en  $M$  y  $\{x^\mu\}$  las coordenadas. Como  $g \in T_2^0(M)$ , ésta se expande en términos de  $dx^\mu \otimes dx^\nu$  como

$$g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (\text{A.40})$$

Es común considerar  $(g_{\mu\nu})$  como una matriz cuya entrada  $(\mu, \nu)$  es  $g_{\mu\nu}$ . Como la matriz  $(g_{\mu\nu})$  tiene rango maximal, ésta tiene una inversa denotada por  $(g^{\mu\nu})$  y por tanto  $g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = g^{\lambda\nu}g_{\nu\mu} = \delta_\mu^\lambda$ . El determinante  $\det(g_{\mu\nu})$  lo denotaremos por  $g$ . Claramente el determinante de la inversa está dado por  $\det(g^{\mu\nu}) = g^{-1}$ . El isomorfismo entre  $T_pM$  y  $T_p^*M$  a través de la métrica es expresado por:

$$\omega_\mu = g_{\mu\nu}U^\nu, \quad U^\mu = g^{\mu\nu}\omega_\nu. \quad (\text{A.41})$$

También tenemos la anticuada definición de métrica como una distancia infinitesimal al cuadrado. Tomemos un desplazamiento infinitesimal  $dx^\mu\partial/\partial x^\mu \in T_pM$  y metámoslo en  $g$  para obtener

$$ds^2 = g \left( dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, dx^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = dx^\mu dx^\nu g \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{A.42})$$

A la cantidad  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  se le suele llamar elemento de línea y, en algunas ocasiones, métrica (a pesar de que en un sentido estricto la métrica es un *tensor*  $g_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu$ ). Como  $(g_{\mu\nu})$  es una matriz simétrica, los eigenvalores son reales. Si  $g$  es Riemanniana, todos los eigenvalores son estrictamente positivos y si  $g$  es pseudo-Riemanniana, algunos de ellos pueden ser negativos. Si hay  $j$  eigenvalores positivos e  $i$  eigenvalores negativos, el par  $(i, j)$  es llamado el índice de la métrica. Si  $i = -1$ , la métrica es llamada una *métrica de Lorentz*.

Si una variedad diferenciable  $M$  es dotada de una métrica Riemanniana  $g$ , el par  $(M, g)$  es llamado una *variedad Riemanniana*. Si  $g$  es una métrica pseudo-Riemanniana,  $(M, g)$  es llamada una *variedad pseudo-Riemanniana*. Si  $g$  es Lorentziana,  $(M, g)$  es una *variedad Lorentziana*.

## A.2.2. Conexión afín

**Definición A.8** Una *conexión afín*  $\nabla$  es un mapeo  $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$  o  $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$  que satisface las siguientes condiciones:

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \quad (\text{A.43})$$

$$\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \quad (\text{A.44})$$

$$\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y \quad (\text{A.45})$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y \quad (\text{A.46})$$

donde  $f \in C^\infty(M)$  y  $X, Y, Z \in \chi(M)$ .

Consideremos una carta  $(U, \varphi)$  con coordenadas  $x = \varphi(p)$  en  $M$ , y definamos  $m^3$  funciones  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ , llamados los coeficientes de conexión, como sigue

$$\nabla_\nu e_\mu = \nabla_{e_\nu} e_\mu = e_\lambda \Gamma_{\nu\mu}^\lambda, \quad (\text{A.47})$$

donde  $\{e_\mu\} = (\partial/\partial x^\mu)$  es la base coordenada en  $T_pM$ . Los coeficientes de conexión especifican como los vectores base cambian de un punto a otro. Una vez que la acción de  $\nabla$  sobre los vectores base está definida, podemos calcular la acción de  $\nabla$  sobre cualesquiera vectores. Sean  $V = V^\mu e_\mu$  y  $W = W^\nu e_\nu$  elementos de  $T_pM$ . Entonces

$$\begin{aligned}
\nabla_V W &= \nabla_{V^\mu e_\mu} (W^\nu e_\nu) \\
&= V^\mu \nabla_{e_\mu} (W^\nu e_\nu) \\
&= V^\mu (e_\mu [W^\nu] e_\nu + W^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu) \\
&= V^\mu \left( \frac{\partial W^\nu}{\partial x^\mu} e_\nu + W^\nu e_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) \\
&= V^\mu \left( \frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + W^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) e_\lambda.
\end{aligned} \tag{A.48}$$

Por definición,  $\nabla$  mapea los vectores  $V$  y  $W$  a un nuevo vector  $\nabla_V W$ , cuya  $\lambda$ -ésima componente es  $V^\mu \nabla_\mu W^\lambda$  donde

$$\nabla_\mu W^\lambda = \frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + W^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda. \tag{A.49}$$

Note que  $\nabla_\mu W^\lambda$  es la  $\lambda$ -ésima componente de un vector  $\nabla_\mu W = \nabla_\mu W^\lambda e_\lambda$ .

### A.2.3. Transporte paralelo y geodésicas

Dada una curva en una variedad  $M$ , podemos definir el transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva. Sea  $c : (a, b) \rightarrow M$  una curva en  $M$ . Por simplicidad, asumimos que la imagen está cubierta por una sola carta  $(U, \varphi)$  cuyas coordenadas son  $x = \varphi(p)$ . Sea  $\mathbf{X}$  un campo vectorial definido a lo largo de  $c(t)$

$$\mathbf{X}|_{c(t)} = X^\mu(c(t)) e_\mu|_{c(t)}, \tag{A.50}$$

donde  $e_\mu = \partial/\partial x^\mu$ . Si  $\mathbf{X}$  satisface la condición

$$\nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{X} = 0 \quad \text{para cualquier } t \in (a, b), \tag{A.51}$$

donde  $\mathbf{V} = d/dt = dx^\mu(c(t))/dt e_\mu|_{c(t)}$  es el vector tangente a  $c(t)$ , se dice que  $\mathbf{X}$  es transportado paralelamente a lo largo de  $c(t)$ . La condición (A.51) en términos de las componentes es

$$\frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} X^\nu = 0. \tag{A.52}$$

Si el mismo vector tangente  $\mathbf{V}(t)$  es transportado paralelamente a lo largo de  $c(t)$ , es decir, si

$$\nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{V} = 0, \tag{A.53}$$

entonces la curva  $c(t)$  es llamada una *geodésica*. En una representación coordenada, la ecuación de la geodésica (A.53) está dada por

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0, \quad (\text{A.54})$$

donde  $\{x^\mu(t)\}$  son las coordenadas de  $c(t)$ . Es decir, una geodésica es una curva que transporta paralelamente a su vector tangente.

#### A.2.4. Derivada covariante de campos tensoriales

Como  $\nabla_{\mathbf{X}}$  tiene el significado de una derivada, es natural definir la derivada covariante de  $f \in C^\infty(M)$  como la derivada direccional  $\mathbf{X}[f]$ ; es decir:

$$\nabla_{\mathbf{X}} f = \mathbf{X}[f]. \quad (\text{A.55})$$

Partiendo de que la ecuación (A.46) es similar a la regla de Leibniz para la derivada de un producto de funciones, esto es

$$\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = \mathbf{X}[f]\mathbf{Y} + f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \quad (\text{A.56})$$

ahora generalizamos para el caso de un producto de tensores:

$$\nabla_{\mathbf{X}}(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_{\mathbf{X}}T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_{\mathbf{X}}T_2), \quad (\text{A.57})$$

donde  $T_1$  y  $T_2$  son campos tensoriales de tipo arbitrario. La regla de Leibniz es válida también para cualquier contracción de los índices; así, tendremos por ejemplo que  $\nabla_{\mathbf{X}}(\omega_\mu Y^\mu) = \nabla_{\mathbf{X}}(\omega_\mu)Y^\mu + \omega_\mu \nabla_{\mathbf{X}}(Y^\mu)$ . Con estos requerimientos, calculamos la derivada covariante de una 1-forma  $\omega \in \Omega^1(M)$ . Como  $\langle \omega, \mathbf{Y} \rangle \in C^\infty(M)$  para  $\mathbf{Y} \in \chi(M)$ , se cumple que

$$X[\langle \omega, Y \rangle] = \nabla_X[\langle \omega, Y \rangle] = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle. \quad (\text{A.58})$$

Escribiendo ambos lados de la ecuación anterior en términos de las componentes encontramos

$$(\nabla_X \omega)_\nu = X^\mu \partial_\mu \omega_\nu - X^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda. \quad (\text{A.59})$$

En particular, para  $\mathbf{X} = e_\mu$ , tenemos

$$(\nabla_\mu \omega)_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda. \quad (\text{A.60})$$

Para  $\omega = dx^\mu$ , obtenemos (cf(A.47))

$$\nabla_\mu dx^\nu = -\Gamma_{\mu\lambda}^\nu dx^\lambda. \quad (\text{A.61})$$

A partir de los resultados anteriores podemos generalizar la derivada covariante a tensores de cualquier tipo:

$$\begin{aligned} \nabla_\nu T_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= \partial_\nu T_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} + \Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda_1} T_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\kappa \lambda_2 \dots \lambda_p} + \dots + \Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda_p} T_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_{p-1} \kappa} \\ &\quad - \Gamma_{\nu\mu_1}^\kappa T_{\kappa \mu_2 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} - \dots - \Gamma_{\nu\mu_q}^\kappa T_{\mu_1 \dots \mu_{q-1} \kappa}^{\lambda_1 \dots \lambda_p}. \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

### A.2.5. Conexión métrica

Si a una variedad diferenciable la dotamos con una métrica, entonces podemos restringir las posibles conexiones requiriendo que si dos vectores  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Y}$  son transportados paralelamente a lo largo de una curva cualquiera, entonces el producto interno entre ellos,  $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ , permanezca constante bajo el transporte paralelo. Sea  $\mathbf{V}$  un vector tangente a una curva suave arbitraria a lo largo de la cual los vectores son transportados paralelamente. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_V [g(X, Y)] = V^\kappa [(\nabla_\kappa g)(X, Y) + g(\nabla_\kappa X, Y) + g(X, \nabla_\kappa Y)] \\ &= V^\kappa X^\mu Y^\nu (\nabla_\kappa g)_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

donde hemos utilizado que  $V^\kappa \nabla_\kappa X = V^\kappa \nabla_\kappa Y = 0$  (por la definición de transporte paralelo). Como esto debe cumplirse para cualquier curva y vectores que transportemos paralelamente a lo largo de ella, entonces

$$(\nabla_\kappa g)_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.64})$$

que usando (A.62) para el caso de tensores tipo (0, 2) queda como

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa g_{\kappa\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa g_{\kappa\mu} = 0. \quad (\text{A.65})$$

Si se satisface la ecuación (A.64), la conexión afín  $\nabla$  se dice que es *compatible con la métrica* o simplemente una *conexión métrica*. Permutaciones cíclicas de los índices  $(\lambda, \mu, \nu)$  nos dan

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^\kappa g_{\kappa\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa g_{\kappa\nu} = 0 \quad (\text{A.66})$$

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa g_{\kappa\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\kappa g_{\kappa\lambda} = 0. \quad (\text{A.67})$$

La combinación -(A.65)+(A.66)+(A.67) nos da

$$-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} + T_{\lambda\mu}^\kappa g_{\kappa\nu} + T_{\lambda\nu}^\kappa g_{\kappa\mu} - 2\Gamma_{(\mu\nu)}^\kappa g_{\kappa\lambda} = 0, \quad (\text{A.68})$$

donde  $T_{\lambda\mu}^\kappa = 2\Gamma_{[\lambda\mu]}^\kappa = \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa - \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$  y  $\Gamma_{(\mu\nu)}^\kappa = \frac{1}{2}(\Gamma_{\nu\mu}^\kappa + \Gamma_{\mu\nu}^\kappa)$ . El tensor  $T_{\lambda\nu}^\kappa$  es antisimétrico con respecto a los índices inferiores (i.e.,  $T_{\lambda\nu}^\kappa = -T_{\nu\lambda}^\kappa$ ) y es llamado el *tensor de torsión*. El tensor de torsión se estudiará en detalle en la próxima subsección. La ecuación (A.68) se puede resolver para  $\Gamma_{(\mu\nu)}^\kappa$  lo cual nos da

$$\Gamma_{(\mu\nu)}^\kappa = \{\mu\nu\}^\kappa + \frac{1}{2}(T_{\nu\mu}^\kappa + T_{\mu\nu}^\kappa), \quad (\text{A.69})$$

donde  $\{\mu\nu\}^\kappa$  son los *símbolos de Christoffel* definidos por

$$\{\mu\nu\}^\kappa = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (\text{A.70})$$

Finalmente, el coeficiente de conexión  $\Gamma$  está dado por

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} &= \Gamma_{(\mu\nu)}^{\kappa} + \Gamma_{[\mu\nu]}^{\kappa} \\ &= \{\kappa_{\mu\nu}\} + \frac{1}{2}(T_{\nu\mu}^{\kappa} + T_{\mu\nu}^{\kappa} + T_{\mu\nu}^{\kappa}).\end{aligned}\quad (\text{A.71})$$

El segundo término en (A.71) es llamado la contorsión, ésta se denota por  $K_{\mu\nu}^{\kappa}$ :

$$K_{\mu\nu}^{\kappa} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu}^{\kappa} + T_{\mu\nu}^{\kappa} + T_{\nu\mu}^{\kappa}).\quad (\text{A.72})$$

Una conexión  $\nabla$  es llamada una *conexión simétrica* si el tensor de torsión se anula. En la base coordenada, los coeficientes de conexión de una conexión simétrica satisfacen

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}.\quad (\text{A.73})$$

**Teorema A.1** (El teorema fundamental de la geometría (pseudo-)Riemanniana). *En una variedad (pseudo-)Riemanniana  $(M, g)$ , existe una única conexión simétrica que es compatible con la métrica  $g$ . Esta conexión es llamada conexión de Levi-Civita<sup>1</sup>.*

La conexión de Levi-Civita es la conexión que se usa en la teoría de la RG. Los coeficientes  $\Gamma$  de la conexión de Levi-Civita  $\nabla$  son los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} = \{\kappa_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(\partial_{\mu}g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}).\quad (\text{A.74})$$

Esto nos indica que si partimos de una conexión de Levi-Civita, entonces los coeficientes de conexión, es decir los símbolos de Christoffel, quedarán determinados de manera única por la métrica.

## A.2.6. Curvatura

Antes de entrar de lleno a los temas que se estudiarán en esta sección, daremos una forma equivalente de ver a los tensores.

Como se recordará de la subsección (A.1.2), un tensor es un mapeo  $\otimes^q T_p^* M \otimes^r T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir, un objeto multilineal que mapea  $q$  elementos de  $T_p^* M$  y  $r$  elementos de  $T_p M$  en los reales; sin embargo, podemos interpretar a un tensor también como un objeto lineal, que al actuar sobre un vector (o una 1-forma) nos devuelve un tensor.

Por ejemplo, el tensor  $\mathbf{F} : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  podemos verlo como el mapeo lineal  $\mathbf{F} : T_p M \rightarrow T_p^* M$ , donde  $\mathbf{F}(\vec{v})$  no es más que la 1-forma  $\mathbf{F}(\vec{v}, \cdot)$ ; i.e.,  $\mathbf{F}(\vec{v}) = \mathbf{F}(\vec{v}, \cdot)$  para todo  $\vec{v}$  en  $T_p M$ .

---

<sup>1</sup>Para ver la demostración de este teorema consultar [Nakahara 2003]

**Definición A.9** Definimos el tensor de torsión  $\mathbf{T} : \chi(M) \otimes \chi(M) \rightarrow \chi(M)$  y el tensor de curvatura Riemanniana (o tensor de Riemann)  $\mathbf{R} : \chi(M) \otimes \chi(M) \otimes \chi(M) \rightarrow \chi(M)$  por:

$$\mathbf{T}(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (\text{A.75})$$

$$\mathbf{R}(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (\text{A.76})$$

Es común escribir  $\mathbf{R}(X, Y)Z$  en lugar de  $\mathbf{R}(X, Y, Z)$ , para que  $\mathbf{R}$  parezca como un operador que actúa sobre  $Z$ .  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{R}$  satisfacen:

$$\mathbf{T}(X, Y) = -\mathbf{T}(Y, X), \quad \mathbf{R}(X, Y)Z = -\mathbf{R}(Y, X)Z. \quad (\text{A.77})$$

Ya que  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{R}$  son tensores, necesitamos saber cómo actúan sobre cualesquiera vectores dados, esto se logra una vez que la acción de éstos sobre los vectores base es conocida. Con respecto a la base coordenada  $\{e_\mu\}$  y a la base dual  $\{dx^\mu\}$ , las componentes de estos tensores están dadas por:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^\lambda &= \langle dx^\lambda, T(e_\mu, e_\nu) \rangle = \langle dx^\lambda, \nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu - [e_\mu, e_\nu] \rangle \\ &= \langle dx^\lambda, \nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu \rangle = \langle dx^\lambda, \Gamma_{\mu\nu}^\eta e_\eta - \Gamma_{\nu\mu}^\eta e_\eta \rangle = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

y

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu}^\kappa &= \langle dx^\kappa, R(e_\mu, e_\nu)e_\lambda \rangle = \langle dx^\kappa, \nabla_\mu \nabla_\nu e_\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu e_\lambda - \nabla_{[\mu, \nu]} e_\lambda \rangle \\ &= \langle dx^\kappa, \nabla_\mu \nabla_\nu e_\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu e_\lambda \rangle = \langle dx^\kappa, \nabla_\mu (\Gamma_{\nu\lambda}^\eta e_\eta) - \nabla_\nu (\Gamma_{\mu\lambda}^\eta e_\eta) \rangle \\ &= \langle dx^\kappa, (\partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\eta) e_\eta + \Gamma_{\nu\lambda}^\xi \Gamma_{\mu\eta}^\xi e_\xi - (\partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\eta) e_\eta - \Gamma_{\mu\lambda}^\xi \Gamma_{\nu\eta}^\xi e_\xi \rangle \\ R_{\lambda\mu\nu}^\kappa &= \langle dx^\kappa, R(e_\mu, e_\nu)e_\lambda \rangle = \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + \Gamma_{\nu\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\eta}^\kappa - \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\kappa. \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

No es difícil verificar que:

$$T_{\nu\mu}^\lambda = -T_{\mu\nu}^\lambda, \quad R_{\lambda\mu\nu}^\kappa = -R_{\lambda\nu\mu}^\kappa. \quad (\text{A.80})$$

Es importante notar que cuando utilizamos la conexión de Levi-Civita, el tensor de curvatura Riemanniana, quedará determinado de manera única por la métrica. Es decir, dada una métrica, la geometría de nuestro espacio-tiempo estará completamente determinada.

Considerando el tensor de curvatura Riemanniana, podemos construir nuevos tensores mediante la contracción de índices. El tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  es un tensor definido por

$$R_{\mu\nu} = \langle dx^\lambda, R(e_\lambda, e_\nu)e_\mu \rangle = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda, \quad (\text{A.81})$$

es decir, mediante la contracción de primer índice con el tercer índice en el tensor de curvatura Riemanniana. Ahora, si tomamos el tensor de Ricci y lo contraemos con la métrica  $g_{\mu\nu}$  obtenemos el *escalar de curvatura*, que está dado por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.82})$$

Utilizando el tensor de Ricci y el escalar de curvatura, podemos definir el *tensor de Einstein* como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (\text{A.83})$$

Este tensor es de gran importancia en la teoría de la RG, ya que éste relaciona a la geometría del espacio-tiempo con el tensor de energía-momento.

## A.3. Grupos y Álgebras de Lie

Un grupo de Lie es una variedad en la cual las operaciones del grupo, producto e inverso, están definidas. Los grupos de Lie tienen una vasta aplicación en física. A continuación daremos los aspectos geométricos de los grupos de Lie y las álgebras de Lie.

### A.3.1. Grupos de Lie

**Definición A.10** *Un grupo de Lie  $G$  es una variedad diferenciable dotada con una estructura de grupo tal que las operaciones de grupo*

$$1. \cdot : G \times G \rightarrow G, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$$

$$2. {}^{-1} : G \rightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

*son diferenciables.*

Por simplicidad omitiremos el símbolo del producto; así que a  $g_1 \cdot g_2$  lo escribiremos como  $g_1g_2$ . Denotaremos con la letra  $e$  a la identidad en  $G$ . La dimensión del grupo no es más que la dimensión de la variedad que lo representa.

Un ejemplo de grupo de Lie es el grupo general lineal  $GL(n, \mathbb{R})$ ; i.e. el grupo de las matrices reales de  $n \times n$  con determinante no nulo. El producto de elementos del grupo es simplemente la multiplicación de matrices y la matriz identidad es el elemento identidad del grupo. Las coordenadas de  $GL(n, \mathbb{R})$  están dadas por las  $n^2$  entradas de  $M = \{x_{ij}\}$  en  $GL(n, \mathbb{R})$  que, genéricamente, son independientes y, por tanto, el grupo tiene dimensión real  $n^2$ . El grupo  $GL(n, \mathbb{R})$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

Interesantes subgrupos de  $GL(n, \mathbb{R})$  son el *grupo ortogonal*  $O(n)$ , el *grupo especial lineal*  $SL(n, \mathbb{R})$  y el *grupo especial ortogonal*  $SO(n)$  los cuales se definen como:

$$O(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid M M^t = M^t M = I_n\} \quad (\text{A.84})$$

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det M = 1\} \quad (\text{A.85})$$

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R}), \quad (\text{A.86})$$

donde el superíndice  ${}^t$  denota la transpuesta de una matriz.

La relatividad especial no escapa a la presencia de grupos de Lie; por ejemplo, está el *grupo de Lorentz*  $O(1, 3)$ , que es el grupo de isometrías del espacio de Minkowski, es decir, el conjunto de matrices

$$L = \{M \in GL(4, \mathbb{R}) \mid \langle Mx, My \rangle = \langle x, y \rangle\}, \quad (\text{A.87})$$

donde  $x$  y  $y$  son vectores en el espacio de Minkowski. La métrica del espacio de Minkowski está dada por  $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . En notación matricial  $\langle x, y \rangle = x^t \eta y$  y entonces

$$x^t \eta y = (Mx)^t \eta (My) = x^t M^t \eta M y \quad (\text{A.88})$$

requiere que  $M^t \eta M = \eta$ .

El grupo  $GL(n, \mathbb{C})$  es el conjunto de transformaciones lineales no-singulares en  $\mathbb{C}^n$ , las cuales son representadas por matrices no-singulares de  $n \times n$  con entradas complejas. Subgrupos de  $GL(n, \mathbb{C})$  son el *grupo unitario*  $U(n)$ , el *grupo especial lineal*  $SL(n, \mathbb{C})$  y el *grupo especial unitario*  $SU(n)$ :

$$U(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) \mid M M^\dagger = M^\dagger M = I_n\} \quad (\text{A.89})$$

$$SL(n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \det M = 1\} \quad (\text{A.90})$$

$$SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C}), \quad (\text{A.91})$$

donde  $\dagger$  es la conjugada Hermitiana de una matriz.

### A.3.2. Álgebras de Lie

**Definición A.11** Sean  $a$  y  $g$  elementos de un grupo de Lie  $G$ . La *traslación-derecha*  $R_a : G \rightarrow G$  y la *traslación-izquierda*  $L_a : G \rightarrow G$  de  $g$  por  $a$  están definidas por

$$R_a g = ga \quad (\text{A.92})$$

$$L_a g = ag. \quad (\text{A.93})$$

Los mapeos  $L_a$  y  $R_a$  son difeomorfismos de  $G$  en  $G$ , de manera que inducen mapeos  $L_{a*} : T_g G \rightarrow T_{ag} G$  y  $R_{a*} : T_g G \rightarrow T_{ga} G$ . En adelante, sólo consideraremos traslaciones izquierdas (el análisis basado en las traslaciones derechas puede realizarse de una manera similar al que se hará con traslaciones izquierdas).

**Definición A.12** Sea  $\mathbf{X}$  un campo vectorial sobre un grupo de Lie  $G$ . Se dice que  $\mathbf{X}$  es un campo vectorial invariante-izquierdo si  $L_{a*} \mathbf{X}|_g = \mathbf{X}|_{ag}$ .

Un vector  $\mathbf{V} \in T_e G$  define un único campo vectorial invariante-izquierdo  $\mathbf{X}_{\mathbf{V}}$  en todo  $G$  según

$$\mathbf{X}_{\mathbf{V}}|_g = L_{g*} \mathbf{V}, \quad g \in G. \quad (\text{A.94})$$

De hecho, puede verificarse que  $\mathbf{X}_{\mathbf{V}}|_{ag} = L_{ag*} \mathbf{V} = (L_a L_g)_* \mathbf{V} = L_{a*} L_{g*} \mathbf{V} = L_{a*} \mathbf{X}_{\mathbf{V}}|_g$ .

El inverso de lo anterior es cierto también: un campo vectorial invariante-izquierdo  $\mathbf{X}$  define un único vector  $\mathbf{V} = \mathbf{X}|_e \in T_e G$ . Denotemos el conjunto de campos vectoriales invariantes-izquierdos en  $G$  por  $\mathfrak{g}$ . El mapeo  $T_e G \rightarrow \mathfrak{g}$  definido por  $\mathbf{V} \mapsto \mathbf{X}_{\mathbf{V}}$  es un isomorfismo y se sigue que el conjunto de campos vectoriales invariantes-izquierdos es un espacio vectorial isomorfo a  $T_e G$ . En particular tenemos que  $\dim \mathfrak{g} = \dim G$ .

Como  $\mathfrak{g}$  es un conjunto de campos vectoriales, éste es un subconjunto de  $\chi(G)$  y entonces en  $\mathfrak{g}$  también está definido el paréntesis de Lie. El conjunto  $\mathfrak{g}$  es cerrado bajo el paréntesis de Lie: Dados  $g$  y  $ag = L_a g$  en  $G$ , si aplicamos  $L_{a*}$  al paréntesis de Lie  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  tenemos que

$$L_{a*}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]|_g = [L_{a*}\mathbf{X}|_g, L_{a*}\mathbf{Y}|_g] = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]|_{ag}, \quad (\text{A.95})$$

donde hemos utilizado la relación  $f_*[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = [f_*\mathbf{X}, f_*\mathbf{Y}]$  y que  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Y}$  son campos vectoriales invariantes-izquierdos.<sup>2</sup>

**Definición A.13** *El conjunto de campos vectoriales invariantes-izquierdos  $\mathfrak{g}$  con el paréntesis de Lie  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  es llamada un álgebra de Lie de un grupo de Lie  $G$ .*

Denotaremos el álgebra de Lie de un cierto grupo de Lie mediante las mismas letras del grupo sólo que con minúsculas y negritas. Por ejemplo,  $\mathfrak{so}(\mathfrak{n})$  es el álgebra de Lie del grupo  $SO(n)$ .

### A.3.3. Ecuaciones de estructura

Sea el conjunto de  $n$  vectores  $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_n\}$  una base de  $T_e G$  donde  $n = \dim G$ . Asumiremos que el número  $n$  es finito. La base define un conjunto de  $n$  campos vectoriales invariantes-izquierdos linealmente independientes  $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n\}$  en cada punto  $g \in G$  mediante  $\mathbf{X}_\mu|_g = L_{g*}\mathbf{V}_\mu$ . Nótese que el conjunto  $\{\mathbf{X}_\mu\}$  es un marco base en todo  $G$ . Como  $[\mathbf{X}_\mu, \mathbf{X}_\nu]|_g$  también es un elemento de  $\mathfrak{g}$ , entonces

$$[\mathbf{X}_\mu, \mathbf{X}_\nu] = c_{\mu\nu}^\lambda \mathbf{X}_\lambda, \quad (\text{A.96})$$

donde los coeficientes  $c_{\mu\nu}^\lambda$  son llamados las *constantes de estructura* del grupo de Lie  $G$ . Si  $G$  es, por ejemplo, un grupo de matrices, entonces el lado izquierdo de (A.96) en  $g = e$  es precisamente el conmutador de las matrices  $\mathbf{V}_\mu$  y  $\mathbf{V}_\nu$ . Localmente, las constantes de estructura determinan por completo a un grupo de Lie.

Introduzcamos una base dual a  $\{\mathbf{X}_\mu\}$  y denotémosla por  $\{\theta^\mu\}$ ;  $\langle \theta^\mu, \mathbf{X}_\nu \rangle = \delta_\nu^\mu$ . El conjunto  $\{\theta^\mu\}$  es una base para las 1-formas invariantes-izquierdas. La base dual satisface las *ecuaciones de estructura de Maurer-Cartan*,

$$d\theta^\mu = -\frac{1}{2}c_{\nu\lambda}^\mu \theta^\nu \wedge \theta^\lambda. \quad (\text{A.97})$$

---

<sup>2</sup>Estas relaciones pueden encontrarse en [Isham 1999].

Esto puede verse directamente a partir de la ecuación (A.39); en efecto:

$$\begin{aligned} d\theta^\mu(\mathbf{X}_\nu, \mathbf{X}_\lambda) &= \mathbf{X}_\nu[\theta^\mu(\mathbf{X}_\lambda)] - \mathbf{X}_\lambda[\theta^\mu(\mathbf{X}_\nu)] - \theta^\mu([\mathbf{X}_\nu, \mathbf{X}_\lambda]) \\ &= \mathbf{X}_\nu[\delta_\lambda^\mu] - \mathbf{X}_\lambda[\delta_\nu^\mu] - \theta^\mu(c_{\nu\lambda}^\kappa \mathbf{X}_\kappa) = -c_{\nu\lambda}^\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.98})$$

La *1-forma canónica* o *forma de Maurer-Cartan* en  $G$  es la 1-forma  $\theta : T_g G \rightarrow T_e G$  valuada en el álgebra de Lie:

$$\theta : \mathbf{X} \mapsto (L_{g^{-1}})_* \mathbf{X} = (L_g)^{-1} \mathbf{X} \quad \mathbf{X} \in T_g G. \quad (\text{A.99})$$

**Teorema A.2** 1. La 1-forma canónica  $\theta$  puede expandirse como

$$\theta = \mathbf{V}_\mu \otimes \theta^\mu \quad (\text{A.100})$$

donde  $\{\mathbf{V}_\mu\}$  es la base de  $T_e G$  y  $\{\theta^\mu\}$  es la base dual de  $T_e^* G$ .

2. La 1-forma canónica  $\theta$  satisface

$$d\theta + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta] = 0 \quad (\text{A.101})$$

donde  $d\theta = \mathbf{V}_\mu \otimes d\theta^\mu$  y  $[\theta \wedge \theta] = [\mathbf{V}_\mu, \mathbf{V}_\nu] \otimes \theta^\mu \wedge \theta^\nu$ .

La demostración de este teorema se puede ver en [Nakahara 2003].

### A.3.4. Acción de grupos de Lie sobre variedades

En física, un grupo de Lie a menudo aparece como el conjunto de transformaciones que actúan sobre una variedad. Por ejemplo,  $SO(3)$  es el grupo de rotaciones en  $\mathbb{R}^3$ , mientras el grupo de Poincaré es el conjunto de transformaciones que actúan sobre el espacio de Minkowski. Para poder estudiar casos más generales, daremos la forma en que un grupo de Lie actúa sobre una variedad  $M$ .

**Definición A.14** Sea  $G$  un grupo de Lie y  $M$  una variedad. La acción de  $G$  sobre  $M$  es un mapeo diferenciable  $\sigma : G \times M \rightarrow M$  que satisface las siguientes condiciones:

1.  $\sigma(e, p) = p$  para cualquier  $p \in M$
2.  $\sigma(g_1, \sigma(g_2, p)) = \sigma(g_1 g_2, p)$ .

[Para simplificar notación, con frecuencia se denota  $\sigma(g, p)$  simplemente por  $gp$ . La condición (2) de la definición anterior se escribe entonces como  $g_1(g_2 p) = (g_1 g_2)p$ .]

**Definición A.15** Sea  $G$  un grupo de Lie que actúa sobre una variedad  $M$  mediante  $\sigma : G \times M \rightarrow M$ . La acción de  $\sigma$  se dice que es:

1. *transitiva* si, para cualesquiera  $p_1, p_2 \in M$ , existe un elemento  $g \in G$  tal que  $\sigma(g, p_1) = p_2$ ,
2. *libre* si, todo elemento no-trivial  $g \neq e$  de  $G$  no tiene un punto fijo en  $M$ ; esto es, si existe un elemento  $p \in M$  tal que  $\sigma(g, p) = p$ , entonces  $g$  debe ser el elemento unidad  $e$ ; y
3. *efectiva* si, el elemento unidad  $e \in G$  es el único elemento que define la acción trivial en  $M$ , i.e. si  $\sigma(g, p) = p$  para todo  $p \in M$ , entonces  $g$  debe ser el elemento unidad  $e$ .

Dado un punto  $p \in M$ , la acción de  $G$  sobre  $p$  lleva a éste hacia diferentes puntos en  $M$ . La *órbita* de  $p$  bajo la acción de  $\sigma$  es el subconjunto de  $M$  definido por

$$Gp = \{\sigma(g, p) | g \in G\}. \quad (\text{A.102})$$

Si la acción de  $G$  sobre  $M$  es transitiva, la órbita de cualquier  $p \in M$  es  $M$ . La acción de  $G$  sobre cualquier órbita  $Gp$  es transitiva.

**Definición A.16** *Sea  $G$  un grupo de Lie que actúa sobre una variedad  $M$ . El grupo de isotropía de  $p \in M$  es un subgrupo de  $G$  definido por*

$$H(p) = \{g \in G | \sigma(g, p) = p\}, \quad (\text{A.103})$$

$H(p)$  también es llamado el estabilizador de  $p$ .

## A.4. Hipersuperficies

En esta sección debemos tener en cuenta que los índices griegos  $\alpha, \beta \dots$  toman valores en el espacio-tiempo, mientras que los índices latinos sólo toman valores en la parte espacial.

### A.4.1. Hipersuperficies y 2-superficies

En una variedad espacio-tiempo 4-dimensional, una *hipersuperficie* es una sub-variedad 3-dimensional que puede ser tipo-espacio, tipo-tiempo o nula. Se puede seleccionar una hipersuperficie  $\Sigma$  poniendo una restricción en las coordenadas como

$$\Phi(x^\alpha) = 0, \quad (\text{A.104})$$

o mediante el uso de ecuaciones paramétricas de la forma siguiente

$$x^\alpha = x^\alpha(y^a), \quad (\text{A.105})$$

donde  $y^a$  ( $a=1,2,3$ ) son las coordenadas intrínsecas a la hipersuperficie. Nótese que las relaciones  $x^\alpha(y^a)$  describen curvas que están contenidas en  $\Sigma$ .

Sabemos que el valor de  $\Phi$  cambia solamente en la dirección ortogonal a  $\Sigma$ , entonces el vector  $\partial_\alpha \Phi$  es normal a la hipersuperficie. Con ayuda de este vector normal, podemos definir una *normal unitaria*  $n_\alpha$  si la hipersuperficie es no nula. Ésta está definida de tal manera que

$$n^\alpha n_\alpha = \varepsilon, \quad (\text{A.106})$$

y requerimos que  $n^\alpha$  apunte en la dirección en la que  $\Phi$  crece, es decir  $n^\alpha \partial_\alpha \Phi > 0$ . Cuando la hipersuperficie es tipo-espacio o tipo-tiempo, la normal unitaria está dada por

$$n_\alpha = \frac{\varepsilon \partial_\alpha \Phi}{|g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi|^{1/2}}. \quad (\text{A.107})$$

La métrica intrínseca a la hipersuperficie  $\Sigma$  se obtiene cuando restringimos la métrica a desplazamientos confinados a la hipersuperficie. Recordando las ecuaciones paramétricas  $x^\alpha = x^\alpha(y^a)$ , tenemos que los vectores

$$e_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \quad (\text{A.108})$$

son tangentes a las curvas contenidas en  $\Sigma$ . Esto implica que  $e_a^\alpha n_\alpha = 0$  en el caso no-nulo. Para desplazamientos dentro de  $\Sigma$  tenemos que

$$\begin{aligned} ds_\Sigma^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} dy^a \right) \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} dy^b \right) \\ &= h_{ab} dy^a dy^b, \end{aligned} \quad (\text{A.109})$$

donde

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \quad (\text{A.110})$$

es la *métrica inducida* o *primera forma fundamental*, de la hipersuperficie. Ésta es un escalar con respecto a las transformaciones de coordenadas  $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$  del espacio-tiempo, pero se comporta como un tensor bajo las transformaciones de coordenadas  $y^a \rightarrow y^{a'}$  de la hipersuperficie. Nos referiremos a tales objetos como 3-tensores. Podemos dar una expresión<sup>3</sup> para la métrica inversa en el caso no-nulo, ésta es la siguiente

$$g^{\alpha\beta} = \varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (\text{A.111})$$

donde  $h^{ab}$  es la inversa de la métrica inducida.

Si la hipersuperficie  $\Sigma$  es no-nula, entonces

$$d\Sigma = |h|^{1/2} d^3y, \quad (\text{A.112})$$

donde  $h = \det[h_{ab}]$  es un elemento de volumen 3-dimensional invariante en la hipersuperficie. Nos referiremos a  $d\Sigma$  como el *elemento de superficie*, para evitar confundirlo con el elemento de volumen 4-dimensional  $\sqrt{-g} d^4x$ . Si utilizamos la normal

---

<sup>3</sup>A este tipo de relaciones se les llama relaciones de completez

unitaria, podemos construir el elemento de superficie dirigido  $n_\alpha d\Sigma$  que apunta en la dirección en la cual  $\Phi$  aumenta. Entonces podemos poner que el elemento de superficie dirigido está dado por

$$d\Sigma_\alpha = \varepsilon n_\alpha d\Sigma \quad (\text{A.113})$$

cuando la hipersuperficie es no-nula.

Ahora consideraremos una 2-superficie metida en una hipersuperficie  $\Sigma$  tipo-espacio 3-dimensional. La hipersuperficie está descrita mediante una ecuación de la forma  $\Phi(x^\alpha) = 0$ , y por las relaciones paramétricas  $x^\alpha(y^a)$ ;  $n_\alpha \propto \partial_\alpha \Phi$  es la normal unitaria dirigida hacia el futuro y los vectores  $e_a^\alpha = \partial x^\alpha / \partial y^a$  son tangentes a la hipersuperficie. La métrica inducida en  $\Sigma$  a partir de  $g_{\alpha\beta}$  es  $h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$  y las relaciones de completéz están dadas por  $g^{\alpha\beta} = -n^\alpha n^\beta + h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta$ . La 2-superficie  $S$  como una subvariedad de  $\Sigma$  está descrita por una ecuación de la forma  $\psi(y^a) = 0$  y mediante las relaciones paramétricas  $y^a(\theta^A)$  en las cuales  $\theta^A$  son las coordenadas intrínsecas a  $S$ ;  $r_a \propto \partial_a \psi$  es la normal unitaria en la dirección saliente y los 3-vectores  $e_A^a = \partial y^a / \partial \theta^A$  son tangentes a la 2-superficie  $S$ . La métrica inducida en  $S$  a partir de  $h_{ab}$  es  $\sigma_{AB} = h_{ab} e_A^a e_B^b$  y las relaciones de completéz están dadas por  $h^{ab} = r^a r^b + \sigma^{AB} e_A^a e_B^b$ .

Podemos ver que combinando las relaciones paramétricas  $y^a(\theta^A)$  y  $x^\alpha(y^a)$  podemos obtener las relaciones  $x^\alpha(\theta^A)$ , que describen la manera en que  $S$  está metida en el espacio-tiempo 4-dimensional. Los vectores

$$e_A^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta^A} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \frac{\partial y^a}{\partial \theta^A} = e_a^\alpha e_B^a \quad (\text{A.114})$$

son tangentes a  $S$  y

$$r^\alpha = r^a e_a^\alpha, \quad r_\alpha n^\alpha = 0 \quad (\text{A.115})$$

es normal a  $S$ . El vector  $n^\alpha$  también es normal a  $S$  y tenemos que la 2-superficie admite dos vectores normales: una normal tipo-tiempo  $n^\alpha$  y una normal tipo-espacio  $r^\alpha$ .

#### A.4.2. Cálculo en hipersuperficies

Habiendo introducido el concepto de hipersuperficie  $\Sigma$ , se puede pensar en campos tensoriales  $A^{\alpha\beta\dots}$  que están definidos solamente en  $\Sigma$  y los cuales son tangentes a la hipersuperficie. Tales tensores se pueden descomponer como

$$A^{\alpha\beta\dots} = A^{ab\dots} e_a^\alpha e_b^\beta \dots, \quad (\text{A.116})$$

donde los vectores  $e_a^\alpha = \partial x^\alpha / \partial y^a$  forman una base en  $\Sigma$ . La ecuación (A.116) implica que  $A^{\alpha\beta\dots} n_\alpha = A^{\alpha\beta\dots} n_\beta = \dots = 0$ , lo cual confirma que  $A^{\alpha\beta\dots}$  es tangente a la hipersuperficie. Es importante notar que siempre un tensor arbitrario  $T^{\alpha\beta\dots}$  puede ser proyectado hacia la hipersuperficie de tal manera que sólo sus componentes

tangenciales sobrevivan. El objeto con el que podemos realizar la proyección es  $h^{\alpha\beta} = h^{ab}e_a^\alpha e_b^\beta = g^{\alpha\beta} - \varepsilon n^\alpha n^\beta$ , entonces  $h_\mu^\alpha h_\nu^\beta \dots T^{\mu\nu\dots}$  será tangente a la hipersuperficie  $\Sigma$ .

Las proyecciones

$$A_{\alpha\beta\dots} e_a^\alpha e_b^\beta \dots = A_{ab\dots} = h_{am} h_{bn} \dots A^{mn\dots} \quad (\text{A.117})$$

dan el 3-tensor  $A^{ab\dots}$  asociado con  $A^{\alpha\beta\dots}$ ; los índices latinos se pueden bajar y subir mediante el uso de  $h_{ab}$  y  $h^{ab}$  respectivamente. Con las ecuaciones (A.116) y (A.117) podemos ver la manera en que los campos tensoriales  $A^{\alpha\beta\dots}$  están relacionados de manera equivalente a sus 3-tensores  $A^{ab\dots}$ . Es importante notar que mientras  $A^{ab\dots}$  se comporta como un tensor bajo una transformación de coordenadas  $y^a \rightarrow y^{a'}$  intrínsecas a  $\Sigma$ , éste es un escalar bajo la transformación de coordenadas  $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$  del espacio-tiempo.

De la geometría Riemanniana sabemos como derivar campos tensoriales de una manera general. Ahora debemos ver cómo es posible derivar campos tensoriales tangentes a la hipersuperficie. Lo que haremos será relacionar la derivada covariante de  $A^{\alpha\beta\dots}$  (con respecto a la conexión que es compatible con la métrica del espacio-tiempo  $g_{\alpha\beta}$ ) con la derivada covariante de  $A^{ab\dots}$ , definida en términos de una conexión que es compatible con la métrica inducida  $h_{ab}$ . Restringiremos nuestro análisis al caso de un campo vectorial tangente  $A^\alpha$ , tal que

$$A^\alpha = A^a e_a^\alpha, \quad A^\alpha n_\alpha = 0, \quad A_a = A_\alpha e_a^\alpha. \quad (\text{A.118})$$

La generalización a 3-tensores de rangos más altos será obvia.

Definiremos a la *derivada covariante intrínseca* de un 3-vector  $A_b$  como la proyección de  $\nabla_\alpha A_\beta$  sobre la hipersuperficie:

$$D_a A_b = \nabla_\alpha A_\beta e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (\text{A.119})$$

Se puede demostrar que de la manera en que hemos definido  $D_a A_b$ , ésta no es sino la derivada covariante de  $A_b$  definida de la manera usual en términos de una conexión  $\Gamma_{ab}^c$  que es compatible con la métrica  $h_{ab}$ , entonces

$$D_a A_b = \partial_a A_b - \Gamma_{ab}^c A_c. \quad (\text{A.120})$$

Debido a que la conexión es compatible con la métrica  $h_{ab}$ , ésta se puede expresar como

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} h^{cd} (\partial_a h_{bd} + \partial_b h_{da} - \partial_d h_{ab}). \quad (\text{A.121})$$

Por construcción, sabemos que las cantidades  $D_a A_b = \nabla_\alpha A_\beta e_a^\alpha e_b^\beta$  son las componentes tangenciales del vector  $\nabla_\alpha A^\beta e_a^\alpha$ . Ahora trataremos de resolver la pregunta acerca de cuándo este vector tendrá una componente normal, ya que su solución

nos llevará al concepto de *curvatura extrínseca*. Entonces, reescribamos  $\nabla_\alpha A^\beta e_a^\alpha$  como  $g_\mu^\beta \nabla_\alpha A^\mu e_a^\alpha$  y descompongamos la métrica en sus partes normales y tangenciales, como en la ecuación (A.111). Esto nos da

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha A^\beta e_a^\alpha &= (\varepsilon n^\beta n_\mu + h^{bm} e_b^\beta e_{m\mu}) \nabla_\alpha A^\mu e_a^\alpha \\ &= \varepsilon (n_\mu \nabla_\alpha A_\mu e_a^\alpha) n^\beta + h^{bm} (\nabla_\alpha A_\mu e_m^\mu e_a^\alpha) e_b^\beta\end{aligned}\quad (\text{A.122})$$

y de esta ecuación podemos ver que el primer término corresponde a una dirección normal a la hipersuperficie mientras que el segundo término está en la dirección tangente a ésta. Teniendo en cuenta que  $A^\mu$  es ortogonal a  $n^\mu$  y usando la ecuación (A.119) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha A^\beta e_a^\alpha &= -\varepsilon (\nabla_\alpha n_\mu A^\mu e_a^\alpha) n^\beta + h^{bm} D_a A_m e_b^\beta \\ &= D_a A^b e_b^\beta - \varepsilon A^b (\nabla_\alpha n_\mu e_b^\mu e_a^\alpha) n^\beta.\end{aligned}\quad (\text{A.123})$$

Ahora podemos definir a la *curvatura extrínseca* o *segunda forma fundamental* de la hipersuperficie  $\Sigma$  como el 3-tensor dado por

$$K_{ab} = \nabla_\alpha n_\beta e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (\text{A.124})$$

Reescribiendo en términos de la curvatura extrínseca obtenemos

$$\nabla_\alpha A^\beta e_a^\alpha = D_a A^b e_b^\beta - \varepsilon A^b K_{ab} n^\beta \quad (\text{A.125})$$

de lo cual podemos ver que  $D_a A^b$  representa la parte tangencial del campo vectorial, mientras que  $-\varepsilon A^b K_{ab}$  representa la componente normal. De esta forma podemos responder a nuestra pregunta: La componente normal se anula si y sólo si la curvatura extrínseca también se anula.

Si en la ecuación (A.125) ponemos  $e_b^\beta$  en lugar de  $A^\beta$ , entonces  $A^c = \delta_b^c$  y la versión 3-dimensional de la derivada covariante implican

$$\nabla_\alpha e_b^\beta e_a^\alpha = \Gamma_{ba}^c e_c^\beta - \varepsilon K_{ab} n^\beta. \quad (\text{A.126})$$

Ésta es conocida como la ecuación de *Gauss-Weingarten*.

La curvatura extrínseca tiene la propiedad de ser un 3-tensor simétrico, es decir  $K_{ab} = K_{ba}$ , el cual nos dice la manera en que la hipersuperficie está metida en el espacio-tiempo. La traza de la curvatura extrínseca es

$$K = h^{ab} K_{ab} = \nabla_\alpha n^\alpha. \quad (\text{A.127})$$

$K$  es igual a la expansión de una congruencia de geodésicas que intersectan a la hipersuperficie ortogonalmente (tal que su vector tangente es igual a  $n^\alpha$  en la hipersuperficie). A partir de este resultado podemos concluir que la hipersuperficie es *convexa* si  $K > 0$  (la congruencia diverge), o *cóncava* si  $K < 0$  (la congruencia converge).

### A.4.3. Ecuaciones de Gauss-Codazzi

Una vez que hemos presentado la métrica inducida y su derivada covariante intrínseca asociada, podemos definir un tensor de curvatura intrínseco de la forma siguiente

$$D_a D_b A^c - D_b D_a A^c = R_{dab}^c A^d, \quad (\text{A.128})$$

donde  $R_{dab}^c$  es la versión 3-dimensional del tensor de Riemman y está dado por

$$R_{dab}^c = \partial_a \Gamma_{bd}^c - \partial_b \Gamma_{ad}^c + \Gamma_{am}^c \Gamma_{bd}^m - \Gamma_{bm}^c \Gamma_{ad}^m. \quad (\text{A.129})$$

A continuación encontraremos una forma de expresar esta versión 3-dimensional en términos del tensor de Riemann  $R_{\delta\alpha\beta}^\gamma$  (que es la versión 4-dimensional) evaluado en  $\Sigma$ .

Empezaremos por la siguiente igualdad

$$\nabla_\gamma (\nabla_\alpha e_b^\beta e_a^\alpha) e_c^\gamma = \nabla_\gamma (\Gamma_{ab}^d e_d^\beta - \varepsilon K_{ab} n^\beta) e_c^\gamma, \quad (\text{A.130})$$

que se sigue de la ecuación (A.126) Desarrollando el lado izquierdo tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla_\gamma (\nabla_\alpha e_b^\beta e_a^\alpha) e_c^\gamma &= \nabla_\gamma \nabla_\alpha e_b^\beta e_a^\alpha e_c^\gamma + \nabla_\alpha e_b^\beta \nabla_\gamma e_a^\alpha e_c^\gamma \\ &= \nabla_\gamma \nabla_\alpha e_b^\beta e_a^\alpha e_c^\gamma + \nabla_\alpha e_b^\beta (\Gamma_{ca}^d e_d^\alpha - \varepsilon K_{ca} n^\alpha) \\ &= \nabla_\gamma \nabla_\alpha e_b^\beta e_a^\alpha e_c^\gamma + \Gamma_{ca}^d (\Gamma_{db}^e e_e^\beta - \varepsilon K_{db} n^\beta) \\ &\quad - \varepsilon K_{ca} \nabla_\alpha e_b^\beta n^\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.131})$$

Ahora, si trabajamos el lado derecho obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \nabla_\gamma (\Gamma_{ab}^d e_d^\beta - \varepsilon K_{ab} n^\beta) e_c^\gamma &= \nabla_\gamma (\Gamma_{ab}^d e_d^\beta) e_c^\gamma - \nabla_\gamma (\varepsilon K_{ab} n^\beta) e_c^\gamma \\ &= \partial_c \Gamma_{ab}^d e_d^\beta + \Gamma_{ab}^d \nabla_\gamma e_d^\beta e_c^\gamma - \varepsilon \partial_c K_{ab} n^\beta - \varepsilon K_{ab} \nabla_\gamma n^\beta e_c^\gamma \\ &= \partial_c \Gamma_{ab}^d e_d^\beta + \Gamma_{ab}^d (\Gamma_{cd}^e e_e^\beta - \varepsilon K_{cd} n^\beta) - \varepsilon \partial_c K_{ab} n^\beta \\ &\quad - \varepsilon K_{ab} \nabla_\gamma n^\beta e_c^\gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.132})$$

Igualando las ecuaciones obtenidas en (A.131), (A.132) y despejando el término correspondiente a  $\nabla_\gamma \nabla_\alpha e_b^\beta e_a^\alpha e_c^\gamma$  obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla_\gamma \nabla_\alpha e_b^\beta e_a^\alpha e_c^\gamma &= \partial_c \Gamma_{ab}^d e_d^\beta + \Gamma_{ab}^d (\Gamma_{cd}^e e_e^\beta - \varepsilon K_{cd} n^\beta) - \Gamma_{ca}^d (\Gamma_{db}^e e_e^\beta - \varepsilon K_{db} n^\beta) \\ &\quad - \varepsilon \partial_c K_{ab} n^\beta + \varepsilon K_{ca} \nabla_\alpha e_b^\beta n^\alpha - \varepsilon K_{ab} \nabla_\gamma n^\beta e_c^\gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.133})$$

Realizando de manera similar los cálculos anteriores para la ecuación

$$\nabla_\alpha (\nabla_\gamma e_b^\beta e_c^\gamma) e_a^\alpha = \nabla_\alpha (\Gamma_{cb}^d e_d^\beta - \varepsilon K_{cb} n^\beta) e_a^\alpha, \quad (\text{A.134})$$

encontramos que

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla_\gamma e_b^\beta e_c^\gamma e_a^\alpha &= \partial_a \Gamma_{cb}^d e_d^\beta + \Gamma_{cb}^d (\Gamma_{ad}^e e_e^\beta - \varepsilon K_{ad} n^\beta) - \Gamma_{ac}^d (\Gamma_{db}^e e_e^\beta - \varepsilon K_{db} n^\beta) \\ &\quad - \varepsilon \partial_a K_{cb} n^\beta + \varepsilon K_{ac} \nabla_\gamma e_b^\beta n^\gamma - \varepsilon K_{cb} \nabla_\alpha n^\beta e_a^\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.135})$$

A continuación haremos la diferencia entre la ecuación (A.133) y la ecuación (A.135), esto nos dará la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
R_{\mu\gamma\alpha}^{\beta} e_b^{\mu} e_a^{\alpha} e_c^{\gamma} &= \nabla_{\gamma} \nabla_{\alpha} e_b^{\beta} e_a^{\alpha} e_c^{\gamma} - \nabla_{\alpha} \nabla_{\gamma} e_b^{\beta} e_c^{\gamma} e_a^{\alpha} \\
&= (\partial_c \Gamma_{ab}^d - \partial_a \Gamma_{cb}^d) e_d^{\beta} + (\Gamma_{ab}^d \Gamma_{cd}^e - \Gamma_{cb}^d \Gamma_{ad}^e) e_e^{\beta} \\
&\quad + \varepsilon (\Gamma_{cb}^d K_{ad} - \Gamma_{ab}^d K_{cd}) n^{\beta} + \varepsilon (\partial_a K_{cb} - \partial_c K_{ab}) n^{\beta} \\
&\quad + \varepsilon (K_{cb} \nabla_{\alpha} n^{\beta} e_a^{\alpha} - K_{ab} \nabla_{\gamma} n^{\beta} e_c^{\gamma}) + \varepsilon (\Gamma_{ca}^d K_{db} - \Gamma_{ac}^d K_{db}) n^{\beta} \\
&= R_{bca}^d e_d^{\beta} + \varepsilon n^{\beta} (D_a K_{cb} - D_c K_{ab}) \\
&\quad + \varepsilon (K_{cb} \nabla_{\alpha} n^{\beta} e_a^{\alpha} - K_{ab} \nabla_{\gamma} n^{\beta} e_c^{\gamma}). \tag{A.136}
\end{aligned}$$

Si en (A.136) cambiamos  $\beta \leftrightarrow \mu$ , y proyectamos a lo largo de  $e_{e\mu}$  obtenemos que la relación entre el tensor de Riemann 3-dimensional y el 4-dimensional está dada por

$$R_{\rho\beta\gamma\alpha} e_d^{\rho} e_b^{\beta} e_c^{\gamma} e_a^{\alpha} = R_{dbca} + \varepsilon K_{cb} K_{ad} - \varepsilon K_{ab} K_{cd}. \tag{A.137}$$

Si ahora proyectamos a lo largo de  $n_{\mu}$ , encontramos que

$$R_{\mu\beta\gamma\alpha} e_b^{\beta} e_c^{\gamma} e_a^{\alpha} n^{\mu} = D_a K_{cb} - D_c K_{ab}. \tag{A.138}$$

A las ecuaciones (A.137) y (A.138), se les conoce como las ecuaciones de *Gauss-Codazzi*.

Ahora obtendremos el escalar de Ricci evaluado en la hipersuperficie  $\Sigma$ . Tenemos que el tensor de Ricci para el espacio-tiempo está dado por

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} \\
&= (\varepsilon n^{\mu} n^{\nu} + h^{mn} e_m^{\mu} e_n^{\nu}) R_{\mu\alpha\nu\beta} \\
&= \varepsilon R_{\mu\alpha\nu\beta} n^{\mu} n^{\nu} + h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^{\mu} e_n^{\nu}, \tag{A.139}
\end{aligned}$$

luego contraemos con  $g^{\alpha\beta}$  para obtener el escalar Ricci, entonces

$$\begin{aligned}
R &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \\
&= (\varepsilon n^{\alpha} n^{\beta} + h^{ab} e_a^{\alpha} e_b^{\beta}) (\varepsilon R_{\mu\alpha\nu\beta} n^{\mu} n^{\nu} + h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^{\mu} e_n^{\nu}) \\
&= 2\varepsilon h^{ab} R_{\mu\alpha\nu\beta} n^{\mu} e_a^{\alpha} n^{\nu} e_b^{\beta} + h^{ab} h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^{\mu} e_a^{\alpha} e_n^{\nu} e_b^{\beta}. \tag{A.140}
\end{aligned}$$

Ahora trabajaremos con el primer término del lado izquierdo de la ecuación (A.140). Desarrollando obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
2\varepsilon h^{ab} R_{\mu\alpha\nu\beta} n^{\mu} e_a^{\alpha} n^{\nu} e_b^{\beta} &= 2\varepsilon (g^{\alpha\beta} - \varepsilon n^{\alpha} n^{\beta}) R_{\mu\alpha\nu\beta} n^{\mu} n^{\nu} \\
&= 2\varepsilon R_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu}, \tag{A.141}
\end{aligned}$$

donde hemos usado que  $R_{\mu\alpha\nu\beta} n^{\mu} n^{\alpha} n^{\nu} n^{\beta} = 0$ . Recordando la definición del tensor de Riemann, lo anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned}
2\varepsilon R_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} &= (2\varepsilon) (g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} n^{\mu} n^{\nu}) \\
&= (2\varepsilon) (\nabla_{\beta} \nabla_{\nu} n^{\beta} n^{\nu} - \nabla_{\nu} \nabla_{\beta} n^{\beta} n^{\nu}) \\
&= (2\varepsilon) [\nabla_{\beta} (\nabla_{\nu} n^{\beta} n^{\nu}) - \nabla_{\nu} (\nabla_{\beta} n^{\beta} n^{\nu}) + \nabla_{\beta} n^{\beta} \nabla_{\nu} n^{\nu} \\
&\quad - \nabla_{\nu} n^{\beta} \nabla_{\beta} n^{\nu}]. \tag{A.142}
\end{aligned}$$

Reescribiendo el término  $\nabla_\nu n^\beta \nabla_\beta n^\nu$  tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\nabla_\nu n^\beta \nabla_\beta n^\nu &= g^{\alpha\beta} g^{\sigma\nu} \nabla_\nu n_\alpha \nabla_\beta n_\sigma \\
&= (\varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{\alpha\beta})(\varepsilon n^\sigma n^\nu + h^{\sigma\nu})(\nabla_\nu n_\alpha \nabla_\beta n_\sigma) \\
&= h^{\alpha\beta} h^{\sigma\nu} (\nabla_\nu n_\alpha \nabla_\beta n_\sigma) \\
&= h^{ab} h^{mn} (\nabla_\nu n_\alpha e_n^\nu e_a^\alpha) (\nabla_\beta n_\sigma e_b^\beta e_m^\sigma) \\
&= h^{ab} h^{mn} K_{na} K_{bm} \\
&= K^{na} K_{na}.
\end{aligned} \tag{A.143}$$

Regresando a la ecuación (A.140), tenemos que el segundo término en ésta se puede escribir, mediante el uso de (A.137), como

$$\begin{aligned}
h^{ab} h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^\mu e_a^\alpha e_n^\nu e_b^\beta &= h^{ab} h^{mn} (R_{manb} + \varepsilon(K_{na} K_{bm} - K_{ba} K_{nm})) \\
&= {}^{(3)}R + \varepsilon(K^{na} K_{na} - K^2).
\end{aligned} \tag{A.144}$$

Finalmente si juntamos los cálculos realizados, el escalar de Ricci (4-dimensional) evaluado en a hipersuperficie  $\Sigma$ , está dado por

$$R = {}^{(3)}R + \varepsilon(K^2 - K^{ab} K_{ab}) + 2\varepsilon \nabla_\alpha (\nabla_\beta n^\alpha n^\beta - n^\alpha \nabla_\beta n^\beta). \tag{A.145}$$

# Bibliografía

- [Ashtekar 1986] A. Ashtekar 1986 *New variables for classical and quantum gravity*. Phys. Rev. Lett. 57, 2244.
- [Ashtekar 1987] A. Ashtekar 1987 *New Hamiltonian formulation of general relativity*. Phys. Rev. D36, 1587.
- [Ashtekar & Lewandowski 2004] A. Ashtekar and J. Lewandowski 2004 *Background independent quantum gravity: A status report*. Class. Quant. Grav. 21, R53.
- [Baez & Muniain 1994] J. Baez and J. Muniain 1994 *Gauge Fields, Knots and Gravity*. (World Scientific).
- [Barbero 1995] F. Barbero 1995 *Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space-times*. Phys. Rev. D51, 5507.
- [Bergström & Goobar 2004] L. Bergström and A. Goobar 2004 *Cosmology and Particle Astrophysics*. (Springer).
- [Carroll 2004] S. Carroll 2004 *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. (Addison Wesley).
- [Doná & Speziale 2010] P. Doná and S. Speziale 2010 *Introductory lectures to loop quantum gravity*. arXiv:1007.0402v2 [gr-qc].
- [Gambini et al 1999] R. Gambini, O. Obregon and J. Pullin 1999 *Yang-Mills analogues of the Immirzi ambiguity*. Phys. Rev. D59, 047505
- [Gambini & Trias 1980] R. Gambini and A. Trias 1980 *Second quantization of the free electromagnetic field as quantum mechanics in the loop space*. Phys. Rev. D22, 1380.
- [Henneaux & Teitelboim 1992] M. Henneaux and C. Teitelboim 1992 *Quantization of Gauge Systems* (Princeton University Press)
- [Immirzi 1997] G. Immirzi 1997 *Quantum gravity and Regge calculus*. Nucl. Phys. Proc. Suppl. 57, 65.

- [Isham 1999] C. J. Isham 1999 *Modern Differential Geometry for Physicists* (World Scientific)
- [Jacobson & Smolin 1988] T. Jacobson and L. Smolin 1988 *Nonperturbative quantum geometries*. Nucl. Phys. B 299, 295.
- [Mercuri 2006] S. Mercuri 2006, *Fermions in the Ashtekar-Barbero connection formalism for arbitrary values of the Immirzi parameter*. Phys. Rev. D73, 084016.
- [Mercuri 2008] S. Mercuri 2008, *From the Einstein-Cartan to the Ashtekar-Barbero canonical constraints, passing through the Nieh-Yan functional*. Phys. Rev. D77, 024036.
- [Nakahara 2003] M. Nakahara 2003 *Geometry, Topology and Physics*. (IOP)
- [Penrose 2007] R. Penrose 2007 *El camino a la realidad*. (Debate)
- [Perlmutter & Schmidt 2003] S. Perlmutter and B.P. Schmidt 2003 *Measuring Cosmology with Supernovae*. Lect. Notes Phys 598, 195.
- [Poisson 2004] E. Poisson 2004 *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. (Cambridge University Press).
- [Polchinski 1998] J. Polchinski 1998 *String Theory. Volume I: An introduction to the bosonic string* (Cambridge University Press); *String Theory. Volume II: Superstring theory and beyond* (Cambridge University Press).
- [Rovelli & Smolin 1990] C. Rovelli and L. Smolin 1990 *Loop space representation of quantum general relativity*. Nucl. Phys. B 331, 80.
- [Rovelli 2004] C. Rovelli 2004 *Quantum Gravity*. (Cambridge University Press).
- [Rovelli 2008] C. Rovelli 2008 *Loop Quantum Gravity*. Living Rev. Relativity 11, 5.
- [Rovelli & Thiemann 1998] C. Rovelli and T. Thiemann 1998 *Immirzi parameter in quantum general relativity*. Phys. Rev. D57, 1009.
- [Schutz 1993] B.F. Schutz 1993 *A first course in general relativity*. (Cambridge University Press).
- [Sen 1982a] A. Sen 1982 *Gravity as a spin system*. Phys. Lett B119, 89.
- [Sen 1982b] A. Sen *Quantum theory of spin 3/2-field in Einstein spaces*. Int. J. Theor. Phys. 21, 1.
- [Thiemann 2007] T. Thiemann. 2007 *Modern Canonical Quantum General Relativity*. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- [Wald 1984] R. M. Wald 1984 *General Relativity*. (The University of Chicago Press).