



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

ÁLGEBRAS DE CONGLOMERADO PROVENIENTES DE SUPERFICIES TRIANGULADAS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

ALFREDO NÁJERA CHÁVEZ

DIRECTOR DE LA TESINA: DR. CHRISTOF GEISS HAHN

MÉXICO, D.F.

Noviembre, 2010



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Álgebras de conglomerado provenientes de superficies trianguladas

Alfredo Nájera Chávez

ÍNDICE

Introducción	1
1. Superficies marcadas y laminaciones	2
2. Geometría hiperbólica y coordenadas lambda	6
3. Construcción de álgebras de conglomerado a partir de superficies	10
4. Bases positivas y canónicas	17
Referencias	21

INTRODUCCIÓN

Las álgebras de conglomerado son una clase de anillos conmutativos que cuentan con un conjunto distinguido de generadores, llamados variables de conglomerado, los cuales están agrupados en conjuntos no ajenos de la misma cardinalidad, llamados conglomerados, los conglomerados están relacionados mediante una estructura combinatoria adicional. Las álgebras de conglomerado fueron introducidas alrededor del año 2001 por S. Fomin y A. Zelevinsky [7] como una herramienta algebraica para el estudio de positividad total y bases canónicas en grupos de Lie semisimples. En los años subsecuentes, fueron descubiertas construcciones que involucran álgebras de conglomerado en varios contextos de las matemáticas, incluyendo uno geométrico, desarrollado por S. Fomin, M. Shapiro y D. Thurston en [5] y por S. Fomin y D. Thurston en [6]. En diciembre del año 2008, durante el taller del Congreso Internacional sobre Álgebras de Conglomerado y Temas Relacionados (ICONCART por sus siglas en inglés) celebrado en Morelia, D. Thurston impartió el curso *Triangulated surfaces* en el que se abordó los principales aspectos sobre la construcción de álgebras de conglomerado a partir de superficies trianguladas. El presente trabajo esta basado en dicho curso y es mi manera de entender el contenido. A continuación, se explica el contenido de las secciones de la presente tesina:

En la primera sección, se introduce el concepto de laminación en una

superficie marcada, así como las relaciones combinatorias que se obtienen a partir de una laminación y las triangulaciones de la superficie. En la segunda sección, se usa la relación entre la geometría de la superficie y la combinatoria dentro del espacio de Teichmüller decorado para obtener una realización positiva de un álgebra de conglomerado. En la tercera sección, se definen complejos simpliciales asociados a superficies marcadas y se enuncian algunas de las propiedades de las álgebras de conglomerado que provienen de superficies. La cuarta y última sección, consta de algunos resultados relacionados con la descripción de las bases de las álgebras de conglomerado construidas.

1. SUPERFICIES MARCADAS Y LAMINACIONES

En esta sección se introducen los conceptos que nos servirán como base para obtener álgebras de conglomerado (de tipo de mutación finito) a partir de objetos geométricos, de igual modo, se presentan resultados clásicos sobre laminaciones de superficies punteadas que servirán como motivación (“tropical”) para obtener álgebras de conglomerado de tipo geométrico, es decir, con coeficientes principales en algún vértice.

Definición 1.1. Una **superficie punteada** es una pareja (S, M) , donde S es una superficie de Riemann compacta, orientada, conexa, con frontera ∂S (posiblemente vacía) y M es un subconjunto finito no vacío de puntos distinguidos de S que intersecta a cada componente conexa de ∂S . Llamaremos **pinchaduras** a los puntos de M que pertenezcan al interior de S .

Definición 1.2. Un **arco** (ordinario) γ en (S, M) es una curva en S , tal que

- los puntos extremos de γ son puntos de M ;
- γ no se autointersecta, o se autointersecta únicamente en puntos extremos;
- a excepción de sus puntos extremos, γ es ajena a M y a ∂S ;
- γ no puede ser deformada a un punto de M o en una curva en ∂S .

Cada arco γ es considerado salvo isotopía dentro de la clase de dichas curvas. Denotaremos al conjunto de arcos en (S, M) por $A^\circ(S, M)$.

Nota 1.3. Llamaremos **segmentos de la frontera** a las curvas en ∂S que conectan a dos puntos marcados adyacentes en ∂S . Denotaremos al conjunto de arcos en la frontera por $B(S, M)$; la cardinalidad de $B(S, M)$, denotada por c , es igual al número de puntos marcados en ∂S .

Definición 1.4. Decimos que dos arcos en (S, M) son **compatibles** si hay representantes en sus clases de isotopía que no se intersectan en el interior de (S, M) .

Definición 1.5. Una **triangulación ideal** T de (S, M) es una colección maximal de arcos compatibles, distintos dos a dos.

Nota 1.6. Los arcos de una triangulación dividen a una superficie en regiones llamadas triángulos ideales. Los tres lados de dichas regiones no necesariamente son distintos como se muestra en la Figura 1. Usando la fórmula de Euler, se puede ver que cada triangulación consiste de

$$n = 6g + 3b + 3p + c - 6$$

arcos, donde g es el género de S , b es el número de componentes de la frontera, p es el número de puntos marcados y c es el número de puntos marcados en la frontera. Esta notación permanecerá a lo largo del presente trabajo.

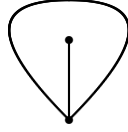


FIGURA 1. Triángulo doblado.

Nota 1.7. Llamaremos triángulos ordinarios a los triángulos cuyos tres lados son distintos.

Nota 1.8. Consideraremos únicamente superficies punteadas con al menos una triangulación sin triángulos doblados.

Nota 1.9. Con la convención hecha arriba, hemos excluido solamente a las siguientes superficies punteadas:

- una esfera con una o dos pinchaduras;
- Un disco sin pinchaduras con uno o dos puntos marcados en su frontera.

Nota 1.10. Por razones técnicas que serán explicadas más adelante, supondremos también que (S, M) no es una esfera con tres pinchaduras.

Definición 1.11. Un **flip** de un arco γ de una triangulación T , es una transformación de T que remueve al arco γ y lo reemplaza por un (único) arco diferente γ' , que junto con los otros arcos de T forman una nueva triangulación ideal $\mu_\gamma(T) = T'$.

Observación 1.12. No es posible realizar un flip en un arco que pertenezca a un triángulo doblado.

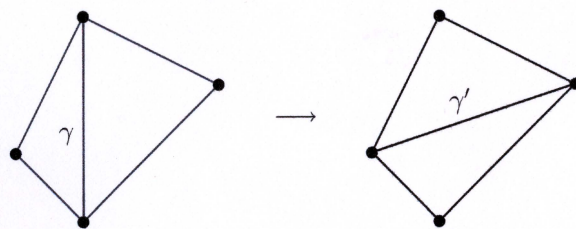


FIGURA 2. Flip en el arco γ .

Proposición 1.13. *Dada una triangulación ideal T y γ un arco de T , se tienen que $\mu_{\gamma'}(T') = T$, más aún, cualesquiera dos triangulaciones T y T' de (S, M) están relacionadas por una sucesión de flips.*

La proposición anterior muestra que las triangulaciones junto con lo flips, tienen un comportamiento análogo al de las semillas de un álgebra de conglomerado junto con las mutaciones.

Definición 1.14. *Una **laminación** L en una superficie punteada (S, M) , es una colección finita de curvas que no se intersectan a sí mismas ni se intersectan dos a dos, salvo isotopía relativa a M , sujetas a las siguientes restricciones. Cada curva debe ser alguna de las siguientes:*

- una curva cerrada, que no es frontera de un disco con una o sin pinchaduras;
- una curva que conecta a dos puntos de $\partial S \setminus M$, que no es isotópica a una curva en ∂S que no contiene o contiene solo un punto marcado;
- una curva que comienza en un punto de $\partial S \setminus M$ y que en su otro extremo converge a modo de espiral a un punto de M ;
- una curva cuyos extremos convergen a modo de espiral a puntos de M (no necesariamente distintos).

Definición 1.15. *Una laminación L en una superficie (S, M) define una “medida” en el conjunto de todos los arcos en (S, M) dada por:*

$$(1) \quad \mu_L(\gamma) = \text{mín} |\{\gamma \cap L\}|,$$

donde el mínimo está considerado sobre todos los representantes en las clases de isotopía.

Lema 1.16. *Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in A^\circ(S, M) \cup B(S, M)$ arcos o segmentos de la frontera (no necesariamente distintos) que forman un cuadrilátero; asumimos que los lados del cuadrilátero, en listados en orden cíclico, son $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Sean η y θ las diagonales del cuadrilátero.*

Entonces la siguiente identidad se satisface:

$$\mu_L(\eta) + \mu_L(\theta) = \text{máx}\{\mu_L(\alpha) + \mu_L(\gamma), \mu_L(\beta) + \mu_L(\delta)\}$$

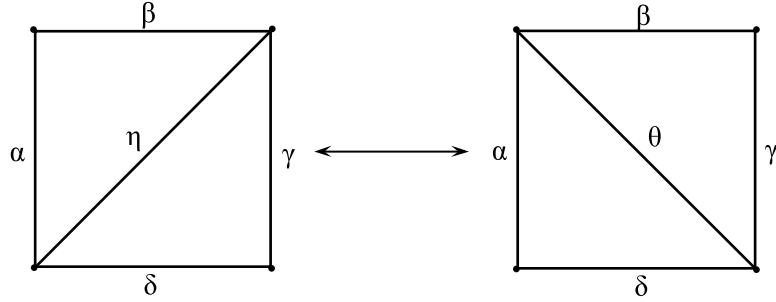


FIGURA 3. Cuadriláteros relacionados por un flip.

Podemos introducir coordenadas a una laminación en una superficie punteada (S, M) , utilizando la noción de *coordenadas de corte* (Shear coordinates) introducida por W. Thurston.

Definición 1.17. Sea L una laminación en una superficie punteada (S, M) y sea T una triangulación ideal sin triángulos doblados, para cada arco γ en T , la correspondiente **coordenada de corte** de L con respecto a T , denotada por $b_L(\gamma; T)$, se define como la suma de las contribuciones de todas las intersecciones de curvas en L con el arco γ ; cada intersección contribuye con $+1$ (resp., -1) a $b_L(\gamma; T)$ si el correspondiente segmento de curva en L corta al cuadrilátero rodeando a γ por la izquierda (S es orientable), como se muestra en la Figura 4 (resp., por la derecha). Es importante notar que aún en el caso en que un arco de L converja a modo de espiral, el número de intersecciones que contribuyen al cálculo de $b_L(\gamma, T)$ es finito. Un ejemplo en un hexágono punteado se muestra en la Figura 5.

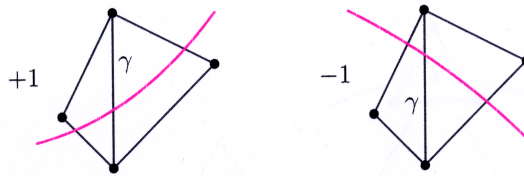


FIGURA 4. Posibles intersecciones que contribuyen a $b_L(\gamma; T)$.

A continuación presentamos dos resultados importantes relacionados con las coordenadas de corte. El primero, de W. Thurston, muestra que las coordenadas de corte guardan, de algún modo, toda la información de una laminación; el segundo, relaciona las coordenadas de corte de triangulaciones relacionadas mediante un flip con las mutaciones de matrices.

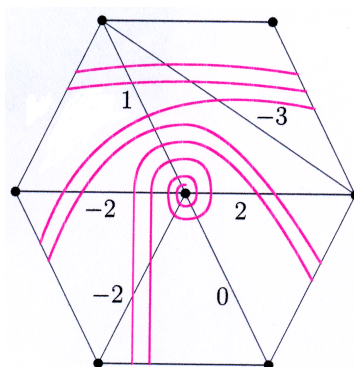


FIGURA 5. Coordenadas de corte de una triangulación de un hexágono con una pinchadura.

Proposición 1.18. *Dada una superficie punteada (S, M) y una triangulación ideal $T = (A_i)_{i=1}^n$, las coordenadas de corte $b_L(A_i; T)$ determinan a L salvo añadir o remover curvas alrededor de puntos de M , sujetas a la condición: si A_1, \dots, A_k son arcos alrededor de un punto marcado, contando multiplicidades, entonces $\sum_{i=1}^k b_L(A_i; T) = 0$.*

Lema 1.19. (Ver [5, Lemma 9.20] o [4, Section 3.1]) *Dados dos cuadriláteros como en la Figura 3, se tiene que*

$$\begin{aligned}
 b_L(\theta, T') &= -b_L(\eta; T) \\
 b_L(\alpha, T') &= b_L(\alpha; T) + \max(b_L(\eta; T), 0) \\
 (2) \quad b_L(\beta, T') &= b_L(\beta; T) + \max(b_L(\eta; T), 0) \\
 b_L(\gamma, T') &= b_L(\gamma; T) + \max(b_L(\eta; T), 0) \\
 b_L(\delta, T') &= b_L(\delta; T) + \max(b_L(\eta; T), 0)
 \end{aligned}$$

2. GEOMETRÍA HIPERBÓLICA Y COORDENADAS LAMBDA

A fin de obtener una realización positiva de un álgebra de conglomerado normalizada de tipo geométrico, es necesario dotar a nuestras superficies de una estructura hiperbólica.

Definición 2.1. *Dada una superficie punteada (S, M) , el **espacio de Teichmüller** $\mathcal{T}(S, M)$ es el espacio de métricas en $S \setminus M$ con las siguientes propiedades:*

- son **hiperbólicas**, es decir, tienen curvatura constante igual a -1 ;
- tienen **frontera geodésica** en la $\partial S \setminus M$;
- $S \setminus M$ es completo y tiene área finita.

A los puntos $\sigma \in \mathcal{T}(S, M)$ los llamaremos estructuras hiperbólicas.

Nota 2.2. Las métricas de $\mathcal{T}(S, M)$ tienen cúspides en los puntos de M , que en este contexto llamaremos puntos ideales. Nuestras restricciones acerca de (S, M) (ver Nota 1.8) garantizan que $\mathcal{T}(S, M)$ es no vacío y tiene más de un punto.

Definición 2.3. Dada una estructura hiperbólica en $S \setminus M$, un **horociclo** alrededor de un punto ideal p es una curva ortogonal a cada geodésica que pasa por p . Si bien un punto ideal se encuentra infinitamente lejos de cualquier punto en la superficie, podemos pensar a un horociclo como un conjunto de puntos que equidista de un punto ideal (ver Figura 6).

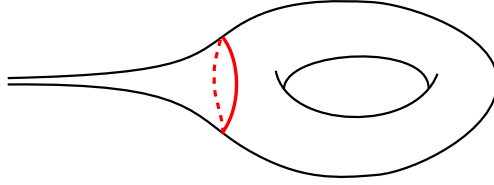


FIGURA 6. Un horociclo al rededor de un punto ideal.

Nota 2.4. Los horociclos al rededor de puntos ideales que provienen de pinchaduras, son curvas cerradas simples (ver [4, p.p. 664, 665]).

Definición 2.5. El **espacio de Teichmüller decorado** $\tilde{\mathcal{T}}(S, M)$ de (S, M) es una estructura hiperbólica en $\mathcal{T}(S, M)$ junto con una elección de horociclos, uno alrededor de cada punto ideal.

Definición 2.6. (Penner) Para un arco γ en (S, M) , o un segmento de la frontera en $B(S, M)$ (ver Nota 1.3), y una estructura hiperbólica $\sigma \in \tilde{\mathcal{T}}(S, M)$ la **longitud** $l_\sigma(\gamma)$ de γ con respecto a σ es la distancia entre las intersecciones de γ_σ y los horociclos alrededor de los extremos de γ , donde γ_σ es la representación geodésica de γ (relativa a σ). La distancia es positiva si los horociclos no se intersectan, de lo contrario es negativa.

La **longitud lambda** $\lambda(\gamma) = \lambda_\sigma(\gamma)$ de γ se define como

$$(3) \quad \lambda(\gamma) = \exp(l(\gamma)/2)$$

Definición 2.7. Sea \mathcal{A} un álgebra de conglomerado de tipo geométrico de rango n sobre un semicampo $\text{Trop}(q_i : i \in I)$, sea E la gráfica n -regular subyacente y sean $\mathbf{x}(t) = (x_i(t))_{i=1}^n$ los conglomerados para $t \in E$. Una **realización positiva** de \mathcal{A} es un espacio topológico \mathcal{T} junto con una colección de funciones $\tilde{x}_j(t) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ (resp., $\tilde{q}_j : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$) representando cada variable de conglomerado $x_i(t)$ (resp., cada coeficiente q_i) tales que:

- las funciones satisfacen las relaciones de intercambio apropiadas;

- para cada $t \in E$, el mapeo

$$(4) \quad \prod_{j=1}^n \tilde{x}_j(t) \times \prod_{i \in I} \tilde{q}_i : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}^{n+|I|}$$

es un homeomorfismo.

Para cualquier arco o segmento de la frontera γ podemos ver a la longitud λ

$$\lambda(\gamma) : \sigma \longrightarrow \lambda_\sigma(\gamma)$$

como una función real valuada del espacio de Teichmüller decorado $\tilde{\mathcal{T}}(S, M)$, más aún, se tienen los siguientes resultados.

Teorema 2.8. (Ver [10, Theorems 5.8, 5.10]) Para cualquier tirangulación ideal T de (S, M) sin triángulos doblados, el mapeo

$$\prod_{\gamma \in T \cup B(S, M)} \lambda(\gamma) : \tilde{\mathcal{T}}(S, M) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}^{n+c}$$

es un homeomorfismo.

Lema 2.9. (Relación de Ptolomeo [9, Proposition 2.6(a)]) Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in A^\circ(S, M) \cup B(S, M)$ arcos o segmentos de la frontera (no necesariamente distintos) que forman un cuadrilátero; asumimos que los lados del cuadrilátero, en listados en orden cíclico, son $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Sean η y θ las diagonales del cuadrilátero; ver Figura 3. Entonces, las correspondientes longitudes λ satisfacen la relación de Ptolomeo

$$(5) \quad \lambda(\eta)\lambda(\theta) = \lambda(\alpha)\lambda(\gamma) + \lambda(\beta)\lambda(\delta).$$

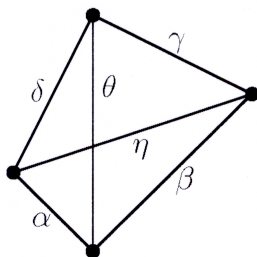


FIGURA 7. Relación de Ptolomeo.

Observación 2.10. Con base en los últimos dos resultados y la Proposición 1.13 estamos cerca de obtener una realización positiva de un álgebra de conglomerado: podemos pensar a las triangulaciones como las semillas, a los flips como mutaciones, al semicampo tropical \mathbb{P} generado por las longitudes λ de los segmentos en la frontera como semicampo de coeficientes, al campo generado sobre \mathbb{P} por las longitudes λ de los arcos en una triangulación inicial sin triángulos doblados como

campo base, a las longitudes lambda de los segmentos en la frontera y de los arcos de cada triangulación como coeficientes y variables de conglomerado, respectivamente. Aún es necesario obtener una matriz de intercambio, así como adaptar nuestros resultados a las triangulaciones con triángulos doblados; esto lo realizaremos en la siguiente sección.

A continuación introducimos las coordenadas de corte para un arcos usando el espacio de Teichmüller decorado, en este caso, los números que obtendremos serán reales, no necesariamente números naturales, como en la sección anterior, más aún, dichas coordenadas serán interpretadas como los coeficientes, pues se verá que cumplen con la regla de mutación de coeficientes de un álgebra de conglomerado renormalizada (Ver [6, Section 17]).

Definición 2.11. Sea $\sigma \in \mathcal{T}(S, M)$ una estructura hiperbólica y sean α, β, γ y δ los lados de un cuadrilátero ideal y sea η una de sus diagonales como se muestra en la Figura 8, la **coordenada de corte** de η con respecto a σ , es la razón cruzada siguiente:

$$(6) \quad \mathcal{T}_\sigma(\eta) = \frac{\lambda_{\sigma'}(\alpha)\lambda_\sigma(\gamma)}{\lambda_{\sigma'}(\beta)\lambda_{\sigma'}(\delta)}$$

para cualquier $\sigma' \in \tilde{\mathcal{T}}(S, M)$ que levante a σ (\mathcal{T}_σ esta bien definida, ver [6, Section 9]). Usaremos la notación $\mathcal{T}_\sigma(\eta; T)$ cuando los arcos considerados pertenecen a una triangulación fija T de (S, M) .

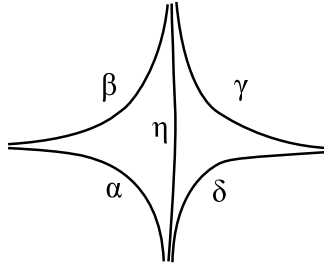


FIGURA 8. Cuadrilátero ideal con una diagonal.

Lema 2.12. Dada una triangulación $T = (A_i)_{i=1}^t$ de una superficie marcada (S, M) , sea T' la triangulación de (S, M) que se obtiene mediante un flip en el arco η , reemplazándolo por el arco θ , entonces las coordenadas de corte de un cuadrilátero como el de la Figura 8, con

respecto a T y T' están relacionadas como sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\sigma(\theta; T') &= \mathcal{T}_\sigma(\eta; T)^{-1} \\ \mathcal{T}_\sigma(\alpha; T') &= \mathcal{T}_\sigma(\alpha; T)(1 + \mathcal{T}_\sigma(\eta; T)) \\ \mathcal{T}_\sigma(\beta; T') &= \mathcal{T}_\sigma(\beta; T)(1 + \mathcal{T}_\sigma(\eta; T)^{-1})^{-1} \\ \mathcal{T}_\sigma(\gamma; T') &= \mathcal{T}_\sigma(\gamma; T)(1 + \mathcal{T}_\sigma(\eta; T)) \\ \mathcal{T}_\sigma(\delta; T') &= \mathcal{T}_\sigma(\delta; T)(1 + \mathcal{T}_\sigma(\eta; T)^{-1})^{-1}\end{aligned}$$

Podemos hacer la siguiente comparación del contexto tropical y del contexto geométrico:

<i>Tropical</i>	<i>Geométrica</i>
Laminaciones sin lazos rodeando puntos marcados coordenadas de corte	Espacio de Teichmüller $\mathcal{T}(S, M)$ coordenadas de corte
Laminaciones longitudes usuales	Espacio de Teichmüller decorado $\tilde{\mathcal{T}}(S, M)$ longitudes λ

3. CONSTRUCCIÓN DE ÁLGEBRAS DE CONGLOMERADO A PARTIR DE SUPERFICIES

En esta sección se construyen álgebras de conglomerado a partir de superficies. Estas álgebras resultarán ser independientes de la elección de coeficientes y de clase de mutación finita; así mismo clasificamos a los complejos de conglomerado correspondientes por su crecimiento (polinomial o exponencial). Dicha construcción se presenta en [5].

Definición 3.1. *El **complejo de arcos** $\Delta(S, M)$ de (S, M) es el complejo simplicial cuyos vértices son los arcos en (S, M) ; los simplejos son colecciones de arcos compatibles (distintos); sus simplejos máximos son las triangulaciones ideales.*

Observación 3.2. *Las aristas (1-simplejos) de $\Delta^\circ(S, M)$ conectan pares de arcos compatibles.*

Definición 3.3. *La **gráfica de triangulaciones** $E^\circ(S, M)$ de (S, M) es la gráfica dual de $\Delta^\circ(S, M)$.*

Observación 3.4. *Los vértices de $E^\circ(S, M)$ son triangulaciones de (S, M) , las aristas conectan triangulaciones relacionadas por un flip.*

Ejemplo 3.5. *En la Figura 9 y Figura 10 mostramos el complejo de arcos de un pentágono sin pinchaduras y un triángulo con una pinchadura, respectivamente.*

Ejemplo 3.6. En la Figura 11 y Figura 12 mostramos la gráfica de triangulaciones de un pentágono sin pinchaduras y un triángulo con una pinchadura, respectivamente.

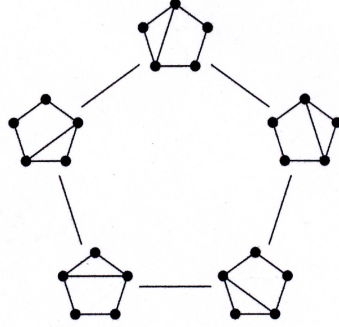


FIGURA 9. $\Delta^\circ(S, M)$ de un pentágono sin pinchaduras.

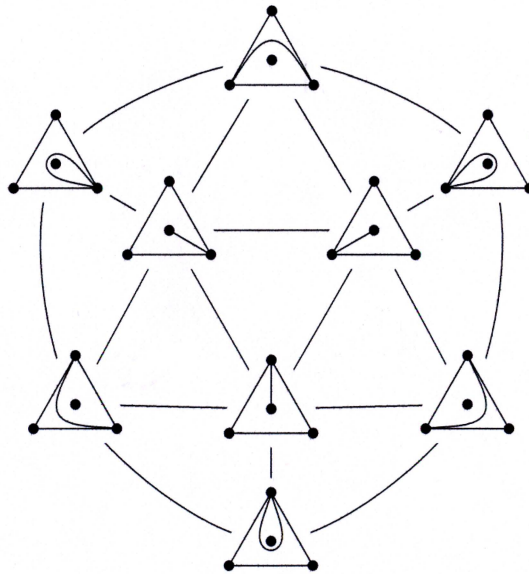


FIGURA 10. $\Delta^\circ(S, M)$ de un triángulo con una pinchadura.

Ejemplo 3.7. En la Figura 13 se muestran el complejo de arcos y la gráfica de triangulaciones para un disco con dos puntos marcados en la frontera y una pinchadura.

A continuación presentamos dos resultados estructurales de $\Delta^\circ(S, M)$.

Teorema 3.8. (Ver [5, Theorem 7.9]) *El complejo de arcos $\Delta^\circ(S, M)$ es una pseudo-variedad con frontera, es decir, cada $(n-1)$ -simplejo esta*

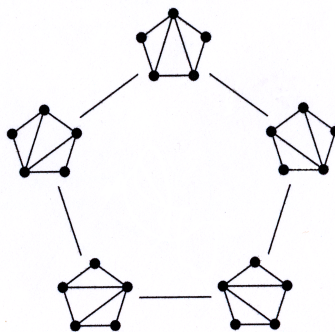


FIGURA 11. $E^o(S, M)$ de un pentágono sin pinchaduras.

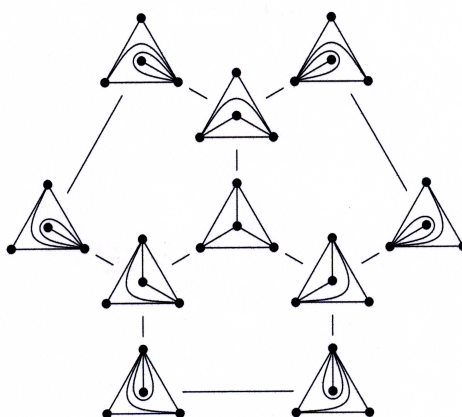


FIGURA 12. $E^o(S, M)$ de un triángulo con una pinchadura.

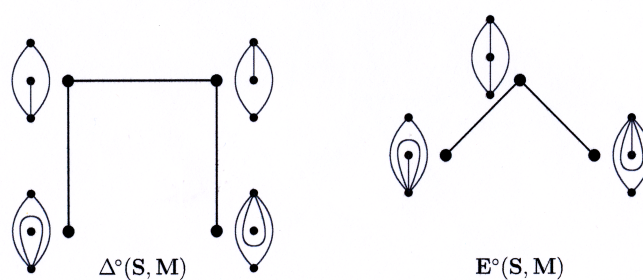


FIGURA 13. $\Delta^o(S, M)$ y $E^o(S, M)$ de un disco con dos puntos marcados en la frontera y una pinchadura.

contenido en uno o dos n -simplejos, donde n es la máxima dimensión de un simplejo.

Teorema 3.9. (Ver [8]) *El complejo de arcos $\Delta^o(S, M)$ es contraíble si (S, M) no es un polígono, es decir S no es un disco o $M \not\subseteq \partial S$.*

Definición 3.10. Para una triangulación T de una superficie punteada (S, M) , denotamos por Γ_T al **carcaj asociado** a T , que se obtiene de dicha triangulación mediante el siguiente algoritmo:

- numeramos los arcos (ordinarios) de T con los números $1, \dots, n$;
- colocamos un vértice en Γ_T por cada arco (ordinario) en T , numeramos a los vértices de igual modo que a los arcos;
- si i y j son arcos de un triángulo ordinario en T , colocamos una flecha del vértice i al vértice j si el arco j es inmediato al arco i en sentido de las manecillas del reloj;
- si los arcos i y j son lados de un triángulo doblado, e i esta rodeado por el lazo j , entonces, por cada flecha $k \rightarrow j$ colocamos una flecha $k \rightarrow i$, y para cada flecha $j \rightarrow k$ colocamos una flecha $i \rightarrow k$;
- eliminamos los 2-ciclos.

En la Figura 14 se muestra el carcaj asociado de algunas triangulaciones, relacionadas mediante flips, de un triángulo con una pinchadura.

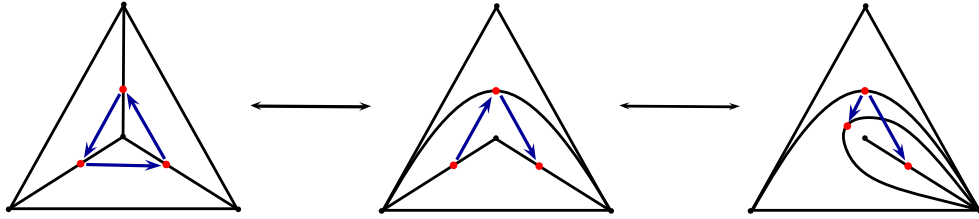


FIGURA 14. El carcaj asociado a triangulaciones de un triángulo con una pinchadura.

Lema 3.11. (Ver [6, Lemma 6.6]) Sean $\alpha, \beta, \gamma, \eta, \theta \in A^\circ(S, M) \cup B(S, M)$ como se muestran en la Figura 3, es decir, α y β son frontera de un disco con una pinchadura p y dos puntos marcados en la frontera; θ y γ conectan a p con los puntos marcados en la frontera; η es un lazo que encierra a γ . Entonces

$$(7) \quad \lambda(\eta)\lambda(\theta) = \lambda(\alpha)\lambda(\gamma) + \lambda(\beta)\lambda(\gamma).$$

Definición 3.12. Para $\sigma \in \mathcal{T}(S, M)$ una estructura hiperbólica para (S, M) , $p \in M$ una pinchadura y h un horociclo al rededor de p , sea $L(h)$ la **longitud de horociclo**, es decir, la longitud de h como curva.

Definición 3.13. Dos horociclos h, h' al rededor de un punto ideal p son **conjugados** si $L(h)L(h') = 1$.

Lema 3.14. (Ver [10, Lemma 4.4]) Dadas $\sigma \in \mathcal{T}(S, M)$ una estructura hiperbólica, sean $a, b, c \in M$ puntos ideales, sean $\alpha, \beta, \gamma \in A^\circ(S, M) \cup B(S, M)$ que conectan a los puntos ideales, α es opuesto a a , β a b y

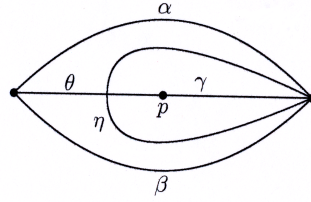


FIGURA 15. Arcos en un disco con dos puntos marcados en la frontera y una pinchadura.

γ a c , y sea h_a un horociclo al rededor de a , entonces se satisface la siguiente identidad:

$$(8) \quad L(h_a) = \frac{\lambda(\alpha)}{\lambda(\beta)\lambda(\gamma)}.$$

Corolario 3.15. En un disco con un punto marcado en la frontera y una pinchadura p , sea α un arco que conecta a los puntos marcados y β el lazo que es frontera del disco, ver Figura 16. Entonces

$$(9) \quad L(h_p) = \left(\frac{\lambda(\alpha)^2}{\lambda(\beta)} \right)^{-1}.$$

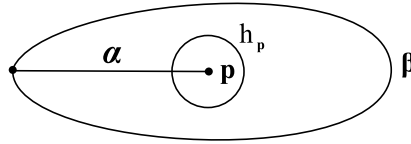


FIGURA 16. Un horociclo al rededor p .

Corolario 3.16. En la misma situación que el lema anterior, sea h'_p un horociclo al rededor de p conjugado a h_p , denotamos por $\lambda(\alpha')$ a la longitud lambda del arco α con respecto a h'_p , entonces:

$$(10) \quad \lambda(\beta) = \lambda(\alpha)\lambda(\alpha').$$

Demostración. Por el Corolario 3.15 que $L(h_p)^{-1} = \frac{\lambda(\alpha)^2}{\lambda(\beta)}$ y $L(h'_p)^{-1} = \frac{\lambda(\alpha')^2}{\lambda(\beta)}$, multiplicando las ecuaciones obtenemos que

$$1 = L(h_p)^{-1}L(h'_p)^{-1} = \frac{\lambda(\alpha)^2\lambda(\alpha')^2}{\lambda(\beta)^2}$$

como todas las longitudes lambda son positivas se sigue el resultado. \square

Definición 3.17. Un **arco etiquetado** en (S, M) es un arco γ con uno o sus dos extremos decorados por una etiqueta tal que:

- γ no es un lazo que es frontera de un disco con un punto marcado en la frontera y una pinchadura;
- si los dos extremos de γ coinciden, entonces ambos extremos están etiquetados o ninguno está etiquetado;
- los extremos de arcos que terminan en la frontera no están etiquetados.

Denotamos al conjunto de arcos etiquetados como $A^\times(S, M)$

Definición 3.18. Dado un arco γ en (S, M) lo representamos por un nuevo arco $\tau(\gamma)$, como sigue. Si γ no es un lazo que es frontera de un disco con un punto marcado en la frontera con una pinchadura, entonces $\tau(\gamma)$ es γ , en caso contrario, sea a el punto base del lazo γ , sea b , ver Figura 17; dado que hemos asumido que (S, M) no es una esfera con tres pinchaduras (Nota 1.10), hay un único disco con esta propiedad. Sea β el único arco conectando a con b compatible con γ . Entonces $\tau(\gamma)$ se obtiene de β al etiquetar en el extremo que termina en a .



FIGURA 17. Representando un lazo que es frontera de un disco con una pinchadura por un arco etiquetado.

Definición 3.19. Decimos que dos arcos etiquetados α y β **son compatibles** si:

- si sus versiones sin etiqueta son compatibles;
- en caso de que α y β compartan un punto extremo p , entonces la etiqueta en p de α es la misma que la de β .

Definición 3.20. Una **triangulación etiquetada** de (S, M) es una colección maximal de arcos etiquetados compatibles, distintos dos a dos.

Definición 3.21. El **complejo de arcos etiquetado** $\Delta^\times(S, M)$ es el complejo simplicial que tiene como vértices a los arcos etiquetados y como simplejos a colecciones de arcos etiquetados compatibles. Así mismo la **gráfica de triangulaciones etiquetadas** $E^\times(S, M)$ es la gráfica dual de $\Delta^\times(S, M)$.

Ejemplo 3.22. A continuación, en la figura 18, mostramos el complejo de arcos etiquetado y la gráfica de triangulaciones para un disco con dos puntos marcados en la frontera y una pinchadura.

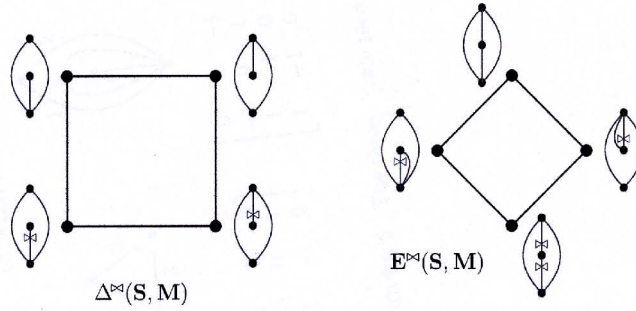


FIGURA 18. $\Delta^\infty(S, M)$ y $E^\infty(S, M)$ para un disco con dos puntos marcados en la frontera y una pinchadura.

Teorema 3.23. (Ver [5, Theorem 7.11]) Si S no es una superficie cerrada con una o dos pinchaduras, entonces hay álgebras de conglomerado $\mathcal{A}(S, M)$ con gráfica de intercambio $E^\infty(S, M)$, semillas las triangulaciones, mutaciones los flips, B -matriz la matriz $B(T)$ y complejo de conglomerado $\Delta^\infty(S, M)$.

Teorema 3.24. (Ver [5, Theorems 10.1, 10.2]) El complejo de arcos $\Delta^\infty(S, M)$ es contractible, a excepción de que S sea una superficie cerrada, en cuyo caso $\Delta^\infty(S, M) \cong \mathbb{S}^{|M|-1}$, la esfera de dimensión $|M| - 1$, o (S, M) es de tipo finito. En particular $\Delta^\infty(S, M)$ conexo o simplemente conexo, a excepción de que S sea cerrada y $|M|$ sea 1 o 2, respectivamente.

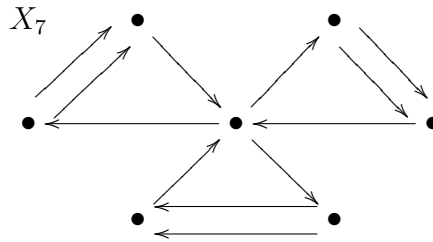
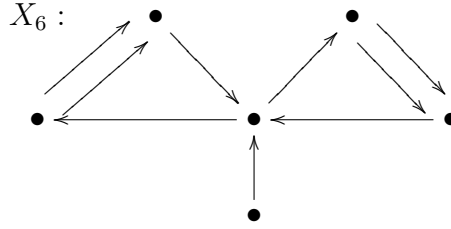
Teorema 3.25. (Ver [3, Theorem 6.1]) Todas, salvo un número finito, las álgebras de conglomerado con una matriz de intercambio de tipo de mutación finito son:

- de rango dos;
- provenientes de una superficie puntada.

Las excepciones son las siguientes:

- los diagramas de Dynkin E_6, E_7, E_8 ;
- los diagramas de Dynkin afines $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$;
- los diagramas de Dynkin afines extendidos $\tilde{E}_6^{(1,1)}, \tilde{E}_7^{(1,1)}, \tilde{E}_8^{(1,1)}$;

- los siguientes diagramas:



Definición 3.26. Un álgebra de conglomerado tiene **crecimiento polinomial** si el número de semillas distintas que se pueden obtener a partir de una semilla inicial fija componiendo a lo más k mutaciones, está acotado superiormente por una función polinomial de k ; si dicha función es lineal, cuadrática o cúbica se dirá que el crecimiento es lineal, cuadrático o cúbico, respectivamente. Un álgebra de conglomerado tiene **crecimiento exponencial** si el número de semillas distintas que se pueden obtener a partir de una semilla inicial fija componiendo a lo más k mutaciones, está acotado inferiormente por una función exponencial de k .

Teorema 3.27. (Ver [5, Proposition 11.1]) Si $\mathcal{A}(S, M)$ es de crecimiento polinomial entonces (S, M) es de la siguiente forma:

- un polígono de $n+3$ lados sin pinchaduras, en cuyo caso el álgebra es de tipo finito A_n ;
- un polígono de n lados con una pinchadura, en cuyo caso el álgebra es de tipo finito D_n ;
- un anillo sin pinchaduras, en cuyo caso el álgebra tiene crecimiento lineal, es de tipo $\tilde{A}_{n,m}$;
- un anillo con una pinchadura, en cuyo caso el álgebra tiene crecimiento lineal, es de tipo \tilde{D}_n ;
- el caso en que el crecimiento es cuadrático o cúbico se puede en listar explícitamente;

En cualquier otro caso el crecimiento es exponencial.

4. BASES POSITIVAS Y CANÓNICAS

Hemos logrado asociar a cada superficie punteada (S, M) un álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(S, M)$, así como una realización positiva de $\mathcal{A}(S, M)$

en el anillo de coordenadas $\tilde{\mathcal{T}}(S, M)$. En esta sección se obtendrá más información del álgebra $\mathcal{A}(S, M)$ a partir de la geometría de la superficie. Según comunicación privada con Dylan Thurston, el material de ésta sección será incluida en una futura versión del trabajo de S. Fomin y D. Thurston.

Definición 4.1. Una **multi-curva** C en (S, M) es una colección de círculos e intervalos mapeados en S tales que

- los extremos de los intervalos yacen en M ;
- la imagen del interior de los intervalos son ajenos a M y a ∂S .

Nota 4.2. En la definición anterior se permiten las intersecciones; en caso de que las curvas se intersecten llamamos a la multi-curva simple.

Ejemplo 4.3. A continuación mostramos una superficie punteada, junto con una multi-curva.

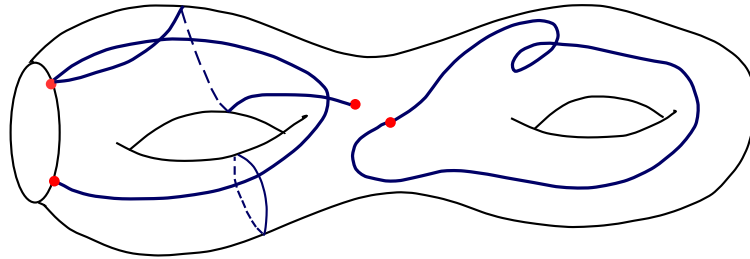


FIGURA 19. Multi-curva.

Definición 4.4. La **longitud lambda** de una multi-curva C con respecto a una métrica hiperbólica decorada $\sigma \in \tilde{\mathcal{T}}(S, M)$ se define como sigue:

- si C es la imagen de un intervalo, entonces

$$\lambda_{\sigma}(C) = \exp^{l_{\Sigma}(C)/2}$$

(longitud l_{sigma} entre las intersecciones con los horociclos ver 2.6);

- si C es la imagen de una circunferencia, entonces

$$\lambda_{\sigma}(C) = \exp^{l_{\sigma}(C)/2} + \exp^{-l_{\sigma}(C)/2}$$

(longitud l_{σ} del representante geodésico);

- si $C = \bigcup_{i=1}^k C_i$, donde cada C_i es la imagen de un intervalo o una circunferencia, entonces

$$\lambda_{\sigma}(C) = \prod_{i=1}^k \lambda_{\sigma}(C_i).$$

Notación 4.5. Dada una multi-curva C_0 con un cruce en un punto p_0 , denotamos por C_+ y por C_- a las multi-curvas que se obtienen de C_0 al remover dicho cruce como se muestra en la Figura 20, diremos que C_+ y C_- suavizan a C_0

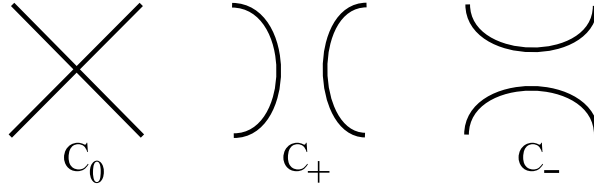


FIGURA 20. Un cruce suavizado.

Lema 4.6. Dada una multi-curva C_0 con un cruce en un punto p_0 , se tiene que

$$(11) \quad \lambda(C_0) = \pm\lambda(C_+) \pm \lambda(C_-)$$

donde C_+ y C_- suavizan a C_0 en dicho cruce.

Ejemplo 4.7. (Relación de Ptolomeo) En un cuadrilátero con aristas α , β , γ , y δ y diagonales η y θ (ver Figura 3) se tiene que $\lambda(\eta)\lambda(\theta) = \lambda(\alpha)\lambda(\gamma) + \lambda(\beta)\lambda(\delta)$. Esto se sigue de aplicar el lema 4.6, al cruce entre las diagonales del cuadrilátero.

Ejemplo 4.8. Consideremos una superficie de género 2 con dos curvas cerradas como se muestra en la Figura 21. Suavizando a la curva $A^{(2)}$ tenemos que

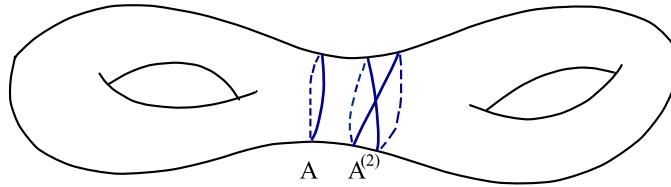


FIGURA 21. Superficie de genero 2 con multi-curva.

$$\lambda(A^{(2)}) = \lambda(\text{diagrama}) = \lambda(\text{diagrama}) - \lambda(\text{diagrama}) = \lambda(A)^2 - 2$$

Nota 4.9. En general se tiene que $\lambda(A^{(k)}) = 2T_k(\lambda(A)/2)$, donde T_k es el k -ésimo polinomio de Chebyshev de primer tipo.

Los siguientes dos resultados motivan el estudio de las multi-curvas para obtener una base de un álgebra de conglomerado.

Proposición 4.10. Para cualquier multi-curva C , se tiene que

$$\lambda(C) = \sum_i C_i,$$

donde cada C_i es una multi-curva simple.

Teorema 4.11. El conjunto $\{\lambda(C_i) : C_i \text{ es una multi-curva simple}\}$ es linealmente independiente.

Hemos conseguido una base para algún anillo, sin embargo, dicha base no necesariamente es positiva como se muestra en el Ejemplo 4.8 ($\lambda(A^{(2)}) = \lambda(A)^2 - 2$). Es por ello que introducimos las siguientes definiciones.

Definición 4.12. La *longitud lambda con signo* $\lambda^\pm(C)$ de una multi-curva C , es la función que está determinada por los siguientes axiomas:

- si C es un círculo contraíble, $\lambda^\pm(\bigcirc) = -2$,
- si C es un lazo contraíble, $\lambda^\pm(\bigcirclearrowleft) = 0$,
- si C es un rizo contraíble, $\lambda^\pm(\mathcal{R}) = -\lambda^\pm(\frown)$,
- si C no cae en alguno de estos casos, entonces $\lambda^\pm(C) = \lambda(C)$.

Definición 4.13. Una multi-curva es **compatible** (con signo misma) si:

- las componentes conexas son ajenas dos a dos,
- cada componente es simple, o es la potencia de algún círculo,
- no existen dos componentes conexas que sean potencias del mismo círculo.

Conjetura 4.14. El conjunto $\{\lambda^\pm(C) : C \text{ es una multi-curva compatible}\}$ es una base positiva.

Ejemplo 4.15. Consideremos el álgebra de conglomerado que proviene de un anillo con un punto distinguido en cada componente de la frontera (álgebra de conglomerado de tipo $\tilde{A}_{1,1}$). Consideremos las siguientes multi-curvas A_i y C_j como se muestra en la Figura 22 y en la Figura 23, respectivamente.

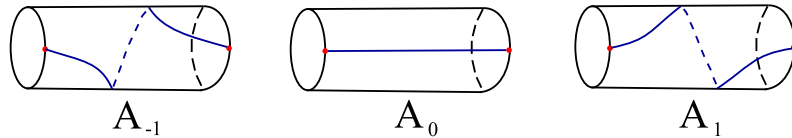


FIGURA 22. Multi-curvas A_{-1} , A_0 y A_1 .

Declaramos las variables y_i y z_j como sigue:

$$\begin{aligned} y_i &= \lambda(A_i) \\ z_j &= \lambda(C_j) \end{aligned}$$

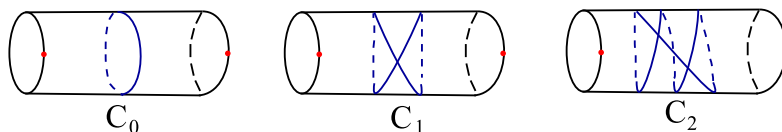


FIGURA 23. Multi-curvas C_0 , C_1 y C_2 .

Se tiene el siguiente resultado de Sherman y Zelevinsky:

Proposición 4.16. (Ver [11]) *El conjunto $\{y_i, z_j\}_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ es una base para el cono positivo del álgebra de conglomerado de tipo $\tilde{A}_{1,1}$.*

REFERENCIAS

- [1] A. F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlag, 1983.
- [2] L. Chekhov and R. C. Penner, *On quantizing Teichmüller and Thurston theories*, en: Handbook of Teichmüller theory, vol. 1, 579-645, Europ. Math. Soc., 2007.
- [3] A. Felikson, M. Shapiro, P. Tumarkin, *Skew-symmetric cluster algebras of finite mutation type*, eprint, arXiv:0811.1703, 2008.
- [4] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *Dual Teichmüller and lamination spaces*, in: Handbook of Teichmüller theory, vol. 1, 647-684, Europ. Math. Soc., 2007; math.DG/0510312.
- [5] S. Fomin, M. Shapiro, D. Thurston, *Cluster algebras and triangulated surfaces. Part I: Cluster complexes*, Acta Math. **201**(2008), 83-146.
- [6] S. Fomin, D. Thurston, *Cluster algebras and triangulated surfaces. Part II: Lambda lengths*. Versión preliminar.
- [7] S. Fomin y A. Zelevinsky, *Clusters algebras I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15**(2), (2002), 497-529.
- [8] A. Hatcher, *On triangulations of surfaces*, Topology appl. **40** (1991), 189-194.
- [9] R. C. Penner, *The decorated Teichmüller space of punctured surfaces*, Comm. Math. Phys. **113** (1987), 299-339.
- [10] R. C. Penner, *Lambda lengths*, lecture notes from CTQM Master Class taught at Aarhus University in August 2006, <http://www.ctqm.au.dk/research/MCS/lambdalengths.pdf>.
- [11] P. Sherman, A. Zelevinsky, *Positivity and canonical bases in rank 2 cluster algebras of finite and affine types*, Moscow Math. J. **4** (2004), 947-974.
- [12] *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque, 66-67. Société Mathématique de France, Paris, 1979; reprinted in 1991.
- [13] W. P. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **19** (1988), no. 2, 417-431.