Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Variedades Algebraicas y Esquemas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
RUBÉN ALEJANDRO ÁGUEDA ALTÚZAR

DIRECTOR DE TESIS:
DR. E. JAVIER ELIZONDO HUERTA

2011

Hoja de datos del Jurado

1. Datos del alumno

Apellido paterno:	Águeda
Apellido materno:	Altúzar
Nombre(s):	Rubén Alejandro
Teléfono:	5550 8396
Universidad:	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad:	Facultad de Ciencias
Carrera:	Matemáticas
Número de cuenta:	404057424

2. Datos del tutor

Grado:	Dr.
Nombre(s)	Enrique Javier
Apellido paterno:	Elizondo
Apellido materno:	Huerta

3. Datos del Sinodal 1

Grado:	Dr.
Nombre(s):	Pedro Luis
Apellido paterno:	del Ángel
Apellido materno:	Rodríguez

4. Datos del Sinodal 2

Grado:	Dr.
Nombre(s):	Felipe de Jesús
Apellido paterno:	Zaldívar
Apellido materno:	Cruz

5. Datos del Sinodal 3

Grado:	Dr.
Nombre(s):	Adriana
Apelido paterno:	Ortiz
Apellido materno:	Rodríguez

6. Datos del Sinodal 4

Grado:	M. en C.
Nombre(s):	Francisco
Apellido paterno:	Barrios
Apellido materno:	Paniagua

7. Datos del trabajo escrito

Título:	Variedades algebraicas y esquemas
Subtítulo:	Una introducción a la Geometría Algebraica
Número de páginas:	123 p
Año:	2011

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNMA DE
MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
Secretaría General
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

DR. ISIDRO ÁVILA MARTÍNEZ
Director General
Dirección General de Administración Escolar
P r e s e n t e

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Variedades algebraicas y esquemas

realizado por **Águeda Altúzar Rubén Alejandro** con número de cuenta **4-0405742-4** quien ha decidido titularse mediante la opción de **tesis** en la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario	Dr. Pedro Luis del Ángel Rodríguez	
Propietario	Dr. Felipe de Jesús Zaldívar Cruz	
Propietario Tutor	Dr. Enrique Javier Elizondo Huerta	Javier Elizondo
Suplente	Dra. Adriana Ortiz Rodríguez	Adriana
Suplente	M. en C. Francisco Barrios Paniagua	

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D. F., a 24 de mayo de 2011
EL JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.
MAG/CZS/eigs

Rubén Águeda

Variedades Algebraicas y Esquemas

Una introducción a la Geometría Algebraica

Rubén Alejandro Águeda Altúzar

ruben.agueda@ciencias.unam.mx

Depto. de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM

Para mis padres:
porque nuestros sueños han conservado sus alas, a pesar de los huesos rotos, los bolsillos vacíos y los parches en el corazón.

Prólogo

Estamos haciendo un libro,
testimonio de lo que no decimos.
Reunimos nuestro tiempo, nuestros dolores,
nuestros ojos, las manos que tuvimos,
los corazones que ensayamos;
nos traemos al libro,
y quedamos, no obstante,
más grandes y más miserables que el libro.
El lamento no es el dolor.
El canto no es el pájaro.
El libro no soy yo, ni es mi hijo,
ni es la sombra de mi hijo.
El libro es sólo el tiempo,
un tiempo mío entre todos mis tiempos,
un grano en la mazorca,
un pedazo de hidra.

Jaime Sabines. *Tarumba, 1956.*

Prefacio

La memoria que ahora tiene entre manos pretende dar una introducción a la así llamada Geometría Algebraica Abstracta. Puesto que la empresa es ya de por sí ambiciosa (el material es amplísimo y los enfoques muy diversos), centramos nuestros esfuerzos en desarrollar la noción de Esquema y en discutir por qué es la generalización correcta a la noción de Variedad Algebraica.

Esquemas: hacia una historia del concepto

Hágase cualquier pregunta sobre la situación actual de una disciplina, seguramente encontrará, si no una respuesta precisa, variadas pistas para responderla si se ocupa en hurgar en el pasado. Si su disciplina son las Matemáticas, las cosas no son muy diferentes.[1]

Los fundamentos

Es prudente hablar de los fundamentos de la Geometría Algebraica Clásica con Hilbert y sus sucesores: Noether, Krull, van der Waerden; basándose ésta en la teoría de ideales de polinomios, cuyos resultados más importantes han sido recopilados por M. Gröbner en su *Moderne Algebraische Geometrie,* de 1949. Después de la aparición en 1946 del libro de A. Weil, *Foundations of Algebraic Geometry,* la teoría de valuaciones y de campos jugó un papel importante y fueron los "fundamentos" comúnmente aceptados en su tiempo. Weil introduce nuevos objetos de estudio: las variedades algebraicas abstractas, entendidas como conjuntos algebraicos sobre campos arbitrarios, así como el lenguaje de los "puntos genéricos". Pero es con O. Zariski y su escuela (P. Samuel, Cohen, etc.) que los métodos del álgebra conmutativa son aplicados a la geometría algebraica, en particular, se introduce el álgebra local, como puede verse en el libro de P. Samuel *Méthodes d'Algèbre Abstraite en Géométrie Algébrique,* de 1955.

Así las cosas, el artículo [Fac] de J. P. Serre sobre *gavillas algebraicas coherentes* es el detonante para un proceso subsecuente de reorganización de los fundamentos. En él se introduce los métodos del Álgebra Homológica y se extiende

[1] Esta sección está basada en [Die], [Cil] y, principalmente, en [Dol].

la noción de variedad algebraica a la noción de *espacio algebraico* de Serre. Sin embargo, otros puntos de vista son desarrollados por C. Chevalley (los *esquemas* de Chevalley) en *Fondements de la Géométrie Algébrique*, de 1958 y por M. Nagata en *A general theory of Algebraic Geometry over Dedekind domains* (Amer. J. Math., 78, No. 1, 78-116) de 1956.

Es A. Grothendieck, en 1958, quien desarrolla y generaliza las ideas de Serre, introduciendo el lenguaje de la Teoría de Categorías a la Geometría Algebraica, que le permite generalizar la noción de variedad algebraica y sentar las bases de la Teoría de Esquemas. Con la publicación del tratado [EGA I-IV] (en colaboración con J. Dieudonné), sus nuevas ideas preparan terreno firme para el desarrollo subsecuente y son ahora comúnmente aceptadas. Esta teoría ha permitido el regreso a los problemas no resueltos de generaciones anteriores, así como las conexiones entre ésta y otras áreas de la Matemática, en virtud de su orden y de una mejor visualización geométrica.

La noción de Variedad Algebraica

Varias construcciones, como lo son la variedad de Jacobi, el esquema de Poincaré, entre otras, estimularon el desarrollo de la noción de variedad algebraica, comenzando por las *variedades algebraicas abstractas*, de Weil, hasta la noción de *espacio algebraico* de Artin y Moishezon.

La definición clásica de variedad algebraica fue empleada para referirse a subconjuntos cerrados (en la topología de Zariski) de un espacio afín o proyectivo sobre un campo k. Pero la idea de tratar de manera análoga a las variedades algebraicas como se hace con variedades diferenciales se debe también a Weil. En su libro de 1946 (que ya citamos arriba), Weil define una variedad algebraica abstracta como un sistema de variedades algebraicas afines $\{V_\alpha\}$, en cada una de las cuales son elegidos subconjuntos abiertos $W_{\alpha\beta} \subseteq V_\alpha$ isomorfos con las elecciones de los abiertos $W_{\beta\alpha}$ de cualquier otra variedad afin V_β del sistema. Es entonces que Weil tiene éxito en extender, a sus *variedades*, todos los conceptos fundamentales de la Geometría Algebraica.

Por otro lado, en 1950 Jean Leray introduce en [Le5] la noción de *gavilla* sobre un espacio topológico, y es el seminario de 1950/51 de H. Cartan en donde se desarrolla la teoría de gavillas, misma que permite definir las variedades diferenciales o analíticas desde un nuevo punto de vista, considerándose como espacios topológicos anillados.

En 1955, con [Fac], Serre descubre que una definición similar es aplicable a la Geometría Algebraica. Un espacio anillado, localmente isomorfo a una variedad afín con una gavilla de gérmenes de funciones regulares en ella, será para Serre una variedad algebraica (un *espacio algebraico*, usando su terminología). La estructura adicional de espacio anillado en una variedad algebraica, permite no solamente la simplificación de varias construcciones, sino también la introducción en su estudio de los métodos del Álgebra Homológica, en conexión con los métodos de la teoría de gavillas.

En 1958, en el congreso de Edimburgo, Grothendieck presenta *The cohomology theory of abstract algebraic varieties.*[2] En él, Grothendieck da un esbozo de la (en ése entonces) posible generalización de la noción de variedad algebraica, en conexión con la teoría de esquemas. La primera definición de esquema es presentada en su reporte al seminario Bourbaki de 1959 *Géométrie formelle et géométrie algébrique.*[3] Independientemente, la idea del esquema afín fue enunciada también por Cartier, aunque no publicada, y por Kähler en su *Geometria aritmetica.*[4]

Sea X una variedad algebraica afín sobre un campo arbitrario k, cuyo anillo de coordenadas es $k[X]$. Los puntos de X (en el sentido clásico) están en correspondencia biyectiva con el conjunto de morfismos $\{f : k[X] \to \overline{k}\}$, donde $\overline{k}$ es la cerradura algebraica de k. De este modo, por cada f se tiene un ideal $J_f := \text{Núc}\, f$ máximo en $k[X]$, es decir, se tiene una correspondencia biyectiva entre los puntos de $X(\overline{k})$ (con coordenadas en $\overline{k}$) y $\text{Specm}\,(k[X])$ (ideales máximos de $k[X]$), por lo que la topología de Zariski en $X(\overline{k})$ corresponde a la topología en $\text{Specm}\,(k[X])$. Y al revés, cada k-álgebra de generación finita sin elementos nilpotentes puede ser vista como el anillo de coordenadas de una variedad. De este modo, la correspondencia entre k-álgebras de ése tipo A y espectros máximos $\text{Specm}\, A$ es biyectiva. Grothendieck generaliza esta correspondencia en dos sentidos importantes.

Primero, observa que dicha correspondencia podría definir un funtor con valores en una categoría de espacios anillados: dado el morfismo de k-álgebras afines $\varphi : A \to B$, la única manera razonable de inducir un morfismo $\text{Specm}\, B \to \text{Specm}\, A$ es asociando a cada ideal máximo $\mathfrak{m} \subset B$, su preimagen bajo φ, $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) \subset A$, pero este último ideal podría no ser máximo, aunque sí primo. Entonces, Grothendieck sugiere reemplazar a $\text{Specm}\, A$ por $\text{Spec}\, A$, los ideales primos de A, con una topología análoga a la de $\text{Specm}\, A$ y estructura de espacio topológico anillado. Se tiene entonces la asignación funtorial $A \to \text{Spec}\, A$, que es el análogo a la idea de Weil de considerar los puntos de una variedad X con coordenadas en una extensión arbitraria de campo F de k.

La segunda consideración de Grothendieck fue tomar no solamente k-álgebras de generación finita sin elementos nilpotentes, sino cualquier anillo conmutativo (en algunos casos, de Noether). De este modo, reemplazamos al campo k por cualquier subanillo B de A. Esta generalización es importante, dado que permitió explicar ciertos fenómenos clásicos en la Geometría Algebraica de la escuela italiana, gracias a la presencia de elementos nilpotentes en el anillo A.

Así, el espacio anillado $\text{Spec}\, A$, con A cualquier anillo conmutativo, es a lo que nos referimos como el *esquema afín* correspondiente a A y es la genera-

[2] Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Edimburgo, Agosto 14-21, 1958), J. A. Todd (ed.), University press, Cambridge, 1960; pp. 103-118.

[3] Semin. Bourbaki. Secrét. Math., Année 11, 1958-1959, 182/01-182/28.

[4] Ann. Mat. Pura Appl., 45, 1958.

lización natural de la noción de variedad algebraica afín. La idea de "pegar" espacios anillados ahora permite definir un esquema como un espacio anillado que localmente es isomorfo a un esquema afín. En este nuevo marco teórico, una variedad algebraica es un *esquema reducido de tipo finito.*

Esta generalización trajo consigo, entre otras, dos características importantes.

El Álgebra Conmutativa como parte de la Geometría Algebraica. Es decir, se trata de una teoría de objetos locales: los esquemas afines. Este punto de vista permite considerar todos los conceptos del Álgebra Conmutativa en lenguaje geométrico, poniendo en manos del algebrista una poderosa herramienta: la intuición geométrica.

La introducción de elementos nilpontentes. La aparición de elementos nilpotentes en anillos es un suceso usual en las variedades algebraicas; por ejemplo, las *fibras múltiples* de kodaira en la teoría de superficies algebraicas. Su presencia en un *esquema de módulos* o en un *esquema de Poincaré* permite explicar el fenómeno que no era bien comprendido por la escuela clásica italiana, así como ciertas patologías de las variedades algebraicas sobre un campo de característica positiva. La teoría de esquemas con elementos nilpotentes juega un rol importante en el estudio de las propiedades *infinitesimales* de las variedades algebraicas y ha servido de fundamento a la geometría formal de Grothendieck.

La Teoría de Esquemas

Hacia 1960, Grothendieck (en colaboración con J. Dieudonné) comienza a publicar el monumental tratado [EGA I-IV], en el que se propone establecer los fundamentos de la Geometría Algebraica dentro del marco teórico de la Teoría de Esquemas. Sus resultados dan un poderoso ímpetu al desarrollo del Álgebra Conmutativa, introduciendo nuevos métodos, ideas y problemas. Aquí listamos algunos de ellos.

1. El concepto de *planaridad* de un módulo (introducido por Serre en [Gaga], en 1955) es desarrollado, se le da una interpretación geométrica.

2. La creación de la técnica de pasar al límite proyectivo, que permite pasar de anillos arbitrarios a anillos de Noether o a Z-álgebras de generación finita.

3. La conexión con la noción de *profundidad* (dimensión homológica) de un módulo, introducida y desarrollada por Serre en su *Algèbre Locale*, de 1965, con la teoría de cohomología y, en particular, con la teoría local de cohomología.

4. La creación de la teoría de los *anillos excelentes*, que generaliza y sistematiza los resultados de Zariski y Nagata en anillos locales de Noether.

5. La introducción de la Teoría del Descenso.

6. La aplicación de métodos globales de la Geometría Algebraica y la teoría de cohomología, que permitió resolver ciertos problemas de anillos factoriales.

Problemas concretos en Geometría Algebraica hicieron necesario el estudio de esquemas de un tipo más especial. Por ejemplo, para la teoría de singularidades de variedades algebraicas se requirió del estudio de esquemas locales, es decir, de conjuntos abiertos de esquemas de la forma $\operatorname{Spec} A$, donde A es un anillo local. Por otro lado, una generalización natural del concepto de *grupo algebraico* en el lenguaje de la teoría de esquemas (el *esquema de grupo*) fue útil para el estudio de la reducción de una variedad abeliana. Y, en particular, H. Hironaka, en la resolución de singularidades de variedades algebraicas sobre un campo de característica cero[5] hizo uso de las ténicas ideadas por Grothendieck, y éste es uno de los variados ejemplos en los que se ha dejado ver su valía.

De primera intención

Nos planteamos como objetivos desarrollar el concepto de esquema y hacer palpable la importancia del cambio de enfoque que esta teoría presupone. Para ello, los primeros dos capítulos se avocan a establecer un puente entre los objetos geométricos y algebraicos, en el caso afín para el primero, y en el caso proyectivo para el segundo, con la finalidad de tener ejemplos concretos y, con ello, los pies sobre la tierra. El tercer capítulo se dedica a las cuestiones técnicas de la Teoría de Gavillas que nos serán útiles en el cuarto, en el que se trata de manera un tanto superficial la Teoría de Esquemas. Se ofrecen dos apéndices; en el primero se hace una rápida revisión de conceptos y resultados sobre Teoría de Categorías, y en el segundo, sobre Álgebra Conmutativa. Hubiese sido maravilloso poder incluir material sobre Topología Diferencial o Análisis Complejo, mas no lo hacemos por razones de tiempo y economía. Se espera del lector un manejo de las nociones básicas de Topología, digamos, como en la primera parte de [Mun], así como del material que usualmente se cubre en los dos primeros cursos de Álgebra Moderna en la licenciatura en Matemáticas.

Como se habrá advertido, nos interesa la historia y el filosofar sobre lo que se está haciendo; es por esa razón por la que, en la medida de lo posible, se presenta ya sea una pequeña (muy pequeña) reseña sobre el pasado de los conceptos, o comentarios que apoyan la exposición de los temas y que explican por qué los consideramos. A juicio suyo quedará, estimado lector, si hemos logrado nuestro cometido.

[5] H. Hironaka. *Resolution of singularities of an algebraic variety over a fiel of characteristic zero.* Ann. Math. 79, No. 1, 109-180, 1964.

De la gratitud

Es preciso mostrar mi gratitud hacia quienes influyeron directa o indirectamente en la presente monografía. En primer lugar, a mi asesor, Dr. Javier Elizondo, por toda la confianza depositada en mí, la siempre amable disposición, su comprensión y su apoyo constantes; al Dr. Pedro Luis del Ángel, por los gratos recibimientos en el CIMAT y valiosos comentarios que arrojaron luz sobre algunos puntos oscuros; a los doctores Adriana Ortiz e Israel Moreno Mejía, por la atención prestada durante los cursos de Geometría Algebraica I y II, respectivamente; al Dr. Guillermo Gómez Alcaraz, al Mat. Luis Manuel Hernández Gallardo y al Dr. Gerardo Sánchez Licea, su auxilio en cruciales momentos durante la licenciatura y todo aquéllo que aprendí de sus personas, con la simple convivencia, sin que ellos mismos se lo propusieran. Gracias también al Departamento de Matemáticas de la UNAM por las facilidades otorgadas durante la escritura de este trabajo.

Agradezco a los compañeros y amigos que muy amablemente me expresaron sugerencias y puntos de vista acerca del escrito: a Luis Díaz, Rodrigo Hernández, Carlos López y Francisco Barrios del Seminario Libre de Geometría Algebraica, por sus comentarios constructivos; a Eduardo Ruiz, Aurelio Reyes, Manuel Díaz y Araceli Reyes, que soportaron mis exposiciones y que de manera muy entusiasta se dieron a la tarea de leer versiones anteriores de las notas. Agradezo en especial los ánimos que frecuentemente recibí de Christian Garay. Sin embargo, como se lee siempre en estos casos, cualquier problema que subsistiese es exclusiva responsabilidad mía.

Los favores recibidos de amigos entrañables también influyeron en la redacción de este trabajo: a Luis Eduardo Pineda, la familia Cruz Villanueva (en particular, a Rodrigo), Ulises G. Dotor, Perla Vázquez, Germán Sánchez, Cecilia Chávez y Marco A. Ramírez, a quienes debo los remiendos en el ánimo siempre que me hicieron falta; y si no extravié el rumbo desde el principio fue porque al Ing. Raúl A. Trujillo Tovar debo el hermoso gesto de señalarme el camino. Y, desde luego, agradezco la asistencia siempre oportuna de mis padres, presentes desde siempre en mi corazón.

Ciudad de México, 2011.

Contenido

Capítulo 1

Espacios Afines

La noción de Geometría Euclidiana está íntimamente ligada al continuo de números $\mathbb{R}$. Para advertirlo, basta recordar que por espacio euclidiano entendemos al conjunto $\mathbb{R}^n$, para $n \in \mathbb{N}^*$, con su topología usual. Si cavilamos sobre las propiedades de $\mathbb{R}$ que hacen posible construir esta geometría en $\mathbb{R}^n$, de manera que pueda establecerse una familia de axiomas para una geometría análoga a la euclídea sobre un conjunto k, llegaremos a centrar nuestra atención en la estructura de anillo o campo que posee $\mathbb{R}$. Es entonces cuando emprendemos el estudio de las "geometrías" que pueden construise tomando como base un campo arbitrario k. A estos espacios con una geometría "análoga" a la euclidiana les llamamos *espacios afines*.[1] Como conjunto, un espacio afín, al que denotamos por $\mathbb{A}_k^n$, es igual a k^n, pero se dota además de una estructura topológica: la topología de Zariski. Para el caso de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, tenemos a la mano las técnicas del Análisis Real y/o Complejo para el estudio las propiedades geométricas (topológicas) de nuestro espacio. Pero cuando k es un campo arbitrario se necesita, además, de los métodos que provee la Teoría de Esquemas, misma que será el objeto de estudio del Capítulo 4. Cuando k es algebraicamente cerrado, se dispone de lo que generalmente se llama Geometría Algebraica Clásica para el estudio de los *conjuntos algebraicos*, objetos geométricos que constituyen el principal objeto de estudio y que definimos en la primera sección del presente capítulo. Se hará preciso extender un espacio afín a un espacio proyectivos y a ello nos avocamos en el Capítulo 2.

A grandes rasgos, los métodos de la Geometría Algebraica Clásica consisten en establecer un puente entre los conjuntos algebraicos (afines o proyectivos) y ciertos ideales en anillos de polinomios. Requerir que el campo k sea algebraicamente cerrado es fundamental para garantizar la existencia de dichos ceros de las familias de polinomios, por lo que en este capítulo y el siguiente supondremos que $k = \overline{k}$.

[1] En este tópico puede consultar [Ag], aunque una referencia obligada es [Ar].

1.1. Conjuntos Algebraicos Afines

Considere el anillo de polinomios $A := k[x_1, \ldots, x_n]$ en n indeterminadas con coeficientes en el campo k. Desde el punto de vista algebraico, A es una extensión de anillo del campo k, o bien, la k-álgebra finitamente generada por el conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset A$. Sin embargo, cada $g \in A$ puede ser considerado como una función de la forma

$$\begin{array}{rccl} g: & k^n & \longrightarrow & k \\ & (a_1, \ldots, a_n) & \longmapsto & g(a_1, \ldots, a_n). \end{array}$$

En lo que al punto de vista geométrico concierne, decimos que k^n considerado como espacio topológico es un *espacio afín* de dimensión n y lo denotamos por $\mathbb{A}_k^n$. Así, fijamos nuestra atención en los conjuntos de puntos $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ que son ceros comunes a familias de polinomios en A. Nos referimos a estos conjuntos como *conjuntos algebraicos.*

Definición 1.1 *Sea $T \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ arbitrario. El* conjunto algebraico afín *definido por T está dado por*

$$V(T) := \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n \,:\, f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ para todo } f \in T\}.$$

Si el conjunto T es finito, escribimos $V(f_1, \ldots, f_t)$ en vez de $V(\{f_1, \ldots, f_t\})$.

Nos referimos a $\mathbb{A}_k^1$ como la *línea afín* y a $\mathbb{A}_k^2$ como el *plano afín*. Por tanto, a los conjuntos de la forma

$$S := \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{A}_k^n \,:\, f(y_1, \ldots, y_n) = 0\}$$

los llamamos *curvas* si $n = 2$, superficies si $n = 3$ e *hipersuperficies* si $n > 3$.

Ejemplos. (Véase la Figura 1.1).

(a) $R := \{(x, y) \in \mathbb{A}_k^2 \,:\, y^2 - x(x^2 - 1) = 0\}$.

(b) La estrofoide $E := \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \,:\, (1 - x)y^2 = x^2(1 + x)\}$.

(c) $P := \{(x, y, z) \in \mathbb{A}_k^3 \,:\, z^2 - (x^2 + y^2) = 0\}$.

(d) La parábola semicúbica, o cúspide, $C := \{(x, y) \in \mathbb{A}_k^2 \,:\, y^2 - x^3 = 0\}$.

(e) Si $D \subseteq k[x]$ es un conjunto finito no vacío, entonces $V(D)$ también es finito en $\mathbb{A}^1(k)$. Esto se sigue de advertir que cada polinomio en $k[x]$, en particular en D, se anula cuando mucho en tantos puntos como sea su grado, puesto que k es algebraicamente cerrado.

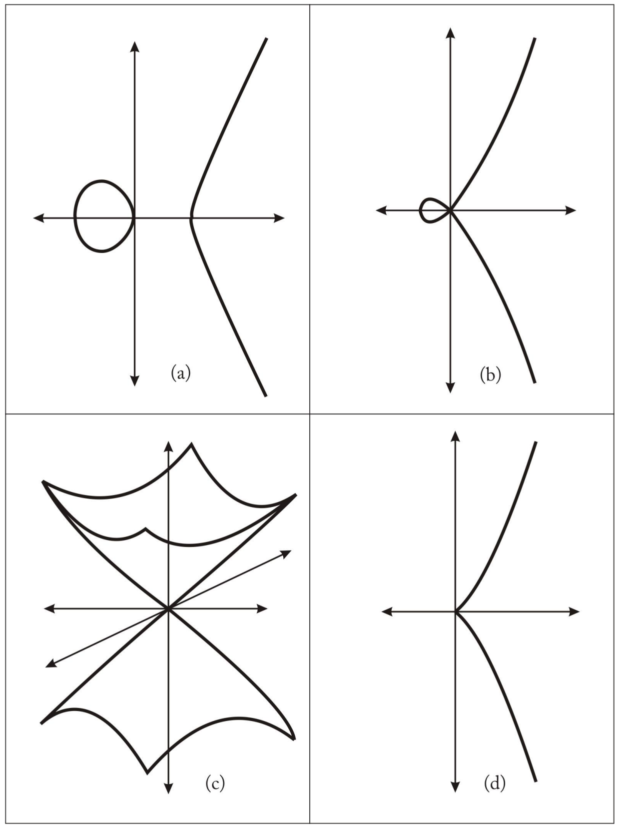

Figura 1.1: Ejemplos de conjuntos algebraicos en $\mathbb{A}_k^2$.

Regresando a la definición 1.1, si un polinomio $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ puede factorizarse por al menos uno de los polinomios en T, es decir, si $g \in \langle T \rangle$, es claro que $g(p) = 0$ para todo $p \in V(T)$, puesto que $k[x_1, \ldots, x_n]$ es un dominio entero. Dicho de otro modo, si un conjunto $S \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es algebraico, se anulan en él no solamente la familia de polinomios que lo definen, sino también cualquier g en el ideal generado por éstos, a saber, $\langle T \rangle$. En realidad, hemos probado que la familia de polinomios

$$I(X) := \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] \, : \, f(p) = 0 \text{ para todo } p \in X\}$$

que asignamos al conjunto arbitrario $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$, es un ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Pero lo anterior prueba aún más: $V(\langle T \rangle) = V(T)$.

El lector podrá tener la duda de cuántos polinomios son necesarios para definir un conjunto algebraico, o de si existe un mínimo número de ellos. La respuesta se sigue del Teorema de la Base de Hilbert (véase el Apéndice B). Es suficiente observar que el campo k es en particular un anillo de Noether (sus únicos ideales $\langle 0\rangle$ y $\langle 1\rangle = k$ son finitamente generados), por lo que $k[x_1,\ldots,x_n]$ también lo es. De este modo, todo ideal en $k[x_1,\ldots,x_n]$ es finitamente generado. Pero podemos decir aún más de $I(X)$.

Proposición 1.1 *El ideal $I(X)$ es radical.*

Prueba. Sea $f \in k[x_1,\ldots,x_n]$ y suponga que $f^m \in I(X)$, con $m \in \mathbb{N}^*$; esto es, $0 = f^m(p) = [f(p)]^m \in k$ para todo $p \in X$. Dado que k es campo, en particular es dominio entero, lo cual implica que $f(p) = 0$ para todo $p \in X$, es decir, $f \in I(X)$. □

Hemos establecido dos reglas de correspondencia, si se considera a V e I como funciones: para cada ideal J de $k[x_1,\ldots,x_n]$, V le asigna su conjunto de ceros comunes $V(J) \subseteq \mathbb{A}^n_k$; mientras que I lo hace en el sentido inverso, para el conjunto $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ se tiene el ideal $I(X)$. ¿Bajo qué condiciones puede decirse que V e I son funciones inversas la una de la otra? De principio, podemos asegurar lo siguiente.

Lema 1.1

(a) Dados $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{A}^n_k$, $I(Y) \subseteq I(X)$.

(b) Si $J \subseteq L \subseteq k[x_1,\ldots,x_n]$ son ideales, entonces $V(L) \subset V(J)$.

(c) Si J es ideal de $k[x_1,\ldots,x_n]$, entonces $J \subseteq I(V(J))$, pero no se tiene la igualdad en general.

(d) Dado $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$, $V(I(X)) \supseteq X$. La igualdad se da si y sólo si X es algebraico.

(e) Dados los ideales $J_1, J_2 \subseteq k[x_1,\ldots,x_n]$, se tiene $V(J_1) \subseteq V(J_2)$ si y sólo si $\sqrt{J_1} \supseteq \sqrt{J_2}$.

Prueba. Los enunciados *(a)*, *(b)* y *(d)* son obvios. En lo que respecta a *(c)*, la contención $J \subseteq I(V(J))$ es obvia. Considere el ideal $J := \langle x^2 + 2x + 1\rangle$ en $\mathbb{C}[x,y]$. Note que $V(x^2 + 2x + 1) = \{(-1, y) : y \in \mathbb{A}^1_C\} \subset \mathbb{A}^2_C$, donde $I(V(J)) = \langle x + 1\rangle$ y $x + 1 \notin J$, por lo que $J \neq I(V(J))$.

Para probar la condición suficiente de *(e)* considere $f \in \sqrt{J_2}$, es decir, $f^m \in J_2$ para algún $m \in \mathbb{N}^*$. Luego, $V(f^m) \supseteq V(J_2) \supseteq V(J_1)$, por lo que $f^m \in J_1$, esto es, $f \in \sqrt{J_1}$. Para la condición necesaria, tome $x \in V(J_1)$, por lo que $f(x) = 0$ para todo $f \in J_1$. Suponga que $x \notin V(J_2)$, es decir, que existe $g \in J_2$ tal que $g(x) \neq 0$. Como $J_2 \subseteq \sqrt{J_2} \subseteq \sqrt{J_1}$ y $g \in J_2$ entonces $g^n \in J_1$ para algún $n \in \mathbb{N}^*$. Por lo tanto, $g^n(x) = 0$, y esto implica que $g(x) = 0$ (dado que $k[x_1,\ldots,x_n]$ es dominio entero), lo cual es una contradicción. □

1.2. El "Nullstellensatz" de Hilbert

El teorema de la situación de los ceros (como podría versar la traducción del término Nullstellensatz del alemán al español) es la generalización del Teorema Fundamental del Álgebra de Gauß en el siguiente sentido: mientras que este último garantiza la existencia de las raíces o ceros de cualquier polinomio en una variable con coeficientes en $\mathbb{C}$, el Nullstellensatz de Hilbert extiende la aseveración a ciertos ideales de polinomios en varias variables, toda vez que los coeficientes de dichos polinomios pertenezcan a un campo algebraicamente cerrado. Antes de enunciarlo y probarlo, nos será últil considerar el resultado a continuación.

Lema 1.2

(a) Se tiene una correspondencia biyectiva entre los ideales maximales de $k[x_1, \ldots, x_n]$ y los puntos de $\mathbb{A}^n_k$.

(b) Para cada ideal propio J de $k[x_1, \ldots, x_n]$, $V(J) \neq \varnothing$.

Prueba.

(a) Sea $a := (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_k \setminus \{0\}$. Veamos que $I(a_1, \ldots, a_n) \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ es maximal. Considere la función evaluación

$$ev_a : k[x_1, \ldots, x_n] \to k,$$

dada por $ev_a(f) = f(a)$, y note que es un homomorfismo de anillos sobreyectivo (para cada $b \in k$ basta tomar f como el polinomio constante b). Desde luego,

$$\text{Núc}\, ev_a = I(a_1, \ldots, a_n) = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle.$$

Entonces, $k[x_1, \ldots, x_n]/I(a_1, \ldots, a_n) \cong k$ es campo, es decir, $I(a_1, \ldots, a_n)$ es maximal en $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Suponga ahora que se tiene el ideal maximal $\mathfrak{m} \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, entonces el cociente $F := k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m}$ es campo y, además, la k-álgebra finitamente generada $k[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n]$, donde cada $\overline{x}_i$ es la clase de x_i en $k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m}$. Puesto que k es algebraicamente cerrado, k es infinito y se cumplen así las hipótesis de la Proposición **??**, de donde se sigue que F es algebraico sobre k. De este modo, la composición

$$\phi : k \hookrightarrow k[x_1, \ldots, x_n] \xrightarrow{\eta} k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m} =: F,$$

donde $k \hookrightarrow k[x_1, \ldots, x_n]$ es la inclusión y η asigna a cada f su clase de equivalencia $\eta(f) \in F$, es una extensión de campos[2]. Finalmente, puesto

[2]Note que ϕ no es el morfismo constante cero, pues ello significaría que $\eta(k) = \{\overline{0}\}$, es decir, que $k \subset \mathfrak{m}$, en particular, que $1 \in \mathfrak{m}$ y, por tanto, $\mathfrak{m} = k[x_1, \ldots, x_n]$, contradiciendo el hecho de que $\mathfrak{m}$ es maximal. Luego, $\text{Núc}\, \phi \neq k$ y puesto que k es campo, $\text{Núc}\, \phi = \{0\}$.

que k es algebraicamente cerrado y en virtud de la Proposición B.4, ϕ establece el isomorfismo $F \cong k$.

Por tanto, haciendo $b_i := \phi^{-1}(\overline{x}_i)$ para cada i, se tiene $\eta(x_i - b_i) = 0$, es decir, $x_i - b_i \in \operatorname{Núc} \eta = \mathfrak{m}$. Y así, $\langle x_1 - b_1, \ldots, x_n - b_n \rangle \subseteq \mathfrak{m}$; sin embargo, ya mostramos que $\langle x_1 - b_1, \ldots, x_n - b_n \rangle$ es maximal, por lo que $\langle x_1 - b_1, \ldots, x_n - b_n \rangle = \mathfrak{m}$.

(b) Sea J un ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Por tanto, existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $J \subseteq \mathfrak{m}$. En virtud del inciso anterior, existe $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n$ tal que $\mathfrak{m} = \langle I(a_1, \ldots, a_n) \rangle$ y, puesto que $(a_1, \ldots, a_n) = V(\mathfrak{m}) \subseteq V(J)$, entonces $V(J) \neq \varnothing$. □

Observe que el lema anterior no es válido si k no es algebraicamente cerrado.[3]

Teorema 1.1 (Nullstellensatz) *Para cada ideal J de $k[x_1, \ldots, x_n]$,*

$$I(V(J)) = \sqrt{J}.$$

De este modo, la función I es inversa izquierda de V si y sólo si $J = \sqrt{J}$.

Prueba. Para verificar que $\sqrt{J} \subseteq I(V(J))$, considere $g \in \sqrt{J}$, es decir, $g^m \in J$ para alguna m, entonces $0 = g^m(p) = [g(p)]^m$ para todo $p \in V(J)$ y, por tanto, $g(p) = 0$ para todo p (en vista de que k es en particular dominio entero). De este modo, $g \in I(V(J))$ y con ello $g^m \in I(V(J))$ también.

Por otro lado, dado $f \in I(V(J))$, se pretende hallar $q \in \mathbb{N}^*$ tal que f^q sea de la forma

$$f^q = \sum_{i=1}^{s} A_i g_i, \qquad \text{con } g_i \in J \text{ y } A_i \in k[x_1, \ldots, x_n].$$

En otras palabras, que $f^q \in J$ para algún $q \in \mathbb{N}^*$. Para ello, introducimos una nueva variable x_0 y definimos[4]

$$J_f := \langle J, 1 - x_0 f \rangle \subseteq k[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

De este modo, se tiene

$$V(J_f) = \left\{(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_k^{n+1} \,:\, (a_1, \ldots, a_n) \in V(J) \text{ y } a_0 f(a_1, \ldots, a_n) = 1\right\}.$$

Puesto que $f \in I(V(J))$, $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in V(J)$ y así, $a_0 f(a_1, \ldots, a_n) \neq 1$, independientemente de la elección de a_0. Por tanto,

[3]Véase la Proposición B.5.

[4]Este procedimiento es conocido como el “truco de Rabinowitsch”.

$V(J_f) = \varnothing$ y con ello $J_f = k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, en particular $1 \in J_f$; es decir, podemos escribir al elemento 1 como

$$1 = \alpha_0(1 - x_0 f) + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i g_i, \tag{1.1}$$

donde $\alpha_0, \alpha_i \in k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ y $g_i \in J$ para todo i. Elegimos q como la máxima potencia de x_0 que aparece en los polinomios α_i para $0 \leq i \leq r$, de modo que si multiplicamos la ecuación (1.1) por f^q resulta

$$f^q = A_0(1 - x_0 f) + \sum_{i=1}^{r} A_i g_i, \tag{1.2}$$

donde $A_i := \alpha_i f^q \in k[x_0 f, x_1, \ldots, x_n]$ para $0 \leq i \leq r$. Aclaramos esta última aseveración: cada α_i es de la forma

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_0^{b_0^j} x_1^{b_1^j} \cdots x_n^{b_n^j}, \qquad \text{con } \lambda_j \in k,$$

por lo que

$$A_i := f^q \alpha_i = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f^{q - b_0^j} (x_0 f)^{b_0^j} x_1^{b_1^j} \cdots x_n^{b_n^j}$$

y puesto que $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $f^{q-b_0^j}$ puede expresarse como suma de monomios en los que solamente aparecen potencias de $x_1, \ldots, x_n$, potencias que podemos sumar a cada b_i^j; al resultado de dicha suma lo denotamos por c_i^j. Luego, se tiene

$$A_i := \sum_{j=1}^{p} \lambda_j (x_0 f)^{c_0^j} x_1^{c_1^j} \cdots x_n^{c_n^j} \in k[f x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

Considere ahora el anillo $k[x_0, x_1, \ldots, x_n]/\langle 1 - x_o f\rangle$ y el morfismo canónico

$$k[x_1, \ldots, x_n] \xrightarrow{\eta} k[x_0, x_1, \ldots, x_n]/\langle 1 - x_o f\rangle.$$

Usando la ecuación (1.2) obtenemos

$$f^q \equiv \sum_{i=1}^{r} A_i(1, x_1, \ldots, x_n) g_i, \ \text{mód } \langle 1 - x_o f\rangle.$$

En virtud de la inyectividad de η, se tiene la igualdad

$$f^q = \sum_{i=1}^{r} A_i(1, x_1, \ldots, x_n) g_i,$$

por lo que $f^q \in J$, como se quería probar. $\square$

1.3. La Topología de Zariski

La función V verifica las siguientes propiedades.

LEMA 1.3

(a) Los conjuntos $\varnothing$ y $\mathbb{A}_k^n$ son algebraicos en $\mathbb{A}_k^n$.

(b) La intersección arbitraria de conjuntos algebraicos afines es un conjunto algebraico afín.

(c) La unión de una familia finita de conjuntos algebraicos afines es un conjunto algebraico afín.

PRUEBA.

(a) Note que $\varnothing = V(k[x_1, \ldots, x_n])$ y $\mathbb{A}_k^n = V(0)$.

(b) Considere la familia de conjuntos algebraicos $\{V(J_i)\}_{i\in I}$. Probaremos que

$$\bigcap_{i\in B} V(J_i) = V\left(\sum_{i\in B} J_i\right).$$

Sea $u \in \bigcap_{i\in B} V(J_i)$. Si $g \in \sum_{i\in B} J_i$, dado que g es de la forma $g = \sum_{i\in B} \lambda_i g_i$, donde cada $g_i \in J_i$ y $\lambda_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$ para todo i, se tiene $g(u) = 0$, pues cada $g_i(u) = 0$ por hipótesis. Luego, $u \in V\left(\sum_{i\in B} J_i\right)$, por lo que $\bigcap_{i\in B} V(J_i) \subseteq V\left(\sum_{i\in B} J_i\right)$. Por otro lado, para cada $i \in B$, $J_i \subseteq \sum_{i\in B} J_i$, por tanto $V(J_i) \supseteq V\left(\sum_{i\in B} J_i\right)$ y así $\bigcap_{i\in B} V(J_i) \supseteq V\left(\sum_{i\in B} J_i\right)$.

(c) Dada la familia finita de conjuntos algebraicos $\{V(J_r)\}_{r=1}^m$, probaremos que

$$\bigcup_{r=1}^m V(J_r) = V\left(\prod_{r=1}^m J_r\right).$$

Sea $u \in \bigcup_{r=1}^m V(J_r)$. Entonces, existe $r^* \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $u \in V(J_{r^*})$, es decir, $f(u) = 0$ para todo $f \in J_{r^*}$. Si $g \in \prod_{r=1}^m J_r$, tomado de manera

arbitraria, entonces puede escribirse como una suma finita de la forma $g = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \left[\prod_{r=1}^{m} g_r^{\alpha_r^j} \right]$, donde $\lambda_j \in k[x_1, \ldots, x_n]$ y cada $g_r \in J_r$. Dado que $g_{r^*}(u) = 0$, entonces $\prod_{r=1}^{m} g_r^{\alpha_r^j}$ se anula en u y con ello $g(u) = 0$. Por lo tanto, como g es arbitrario, $u \in V\left(\prod_{r=1}^{m} J_r\right)$, por lo que $\bigcup_{r=1}^{m} V(J_r) \subseteq V\left(\prod_{r=1}^{m} J_r\right)$.
□

Dotamos al espacio afín $\mathbb{A}_k^n$ de una topología si consideramos a cada conjunto algebraico X como conjunto cerrado. El lema anterior establece que tales propiedades de los conjuntos algebraicos son precisamente los axiomas de espacio topológico. A esta topología de $\mathbb{A}_k^n$ la llamamos la *topología de Zariski.*

Sea $M \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un conjunto arbitrario. Su *cerradura* según la topología de Zariski, es el menor conjunto algebraico $\overline{M}$ que contiene a M. Puede caracterizarse de la siguiente manera: sea $\{V(J_i)\}_{i\in\Lambda}$, con $J_i \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, la familia de conjuntos algebraicos que contienen a M, entonces

$$\overline{M} = \bigcap_{i\in\Lambda} V(J_i) = V\left(\sum_{i\in\Lambda} J_i\right).$$

Por tanto, según el Nullstellensatz,

$$I(M) \supseteq I(\overline{M}) = \sqrt{\sum_{i\in\Lambda} J_i}.$$

Proposición 1.2 *Para cada $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ definimos $D(f) := \mathbb{A}_k^n \setminus V(f)$. La familia de abiertos $D(f)$ forma una base para la topología de Zariski en $\mathbb{A}_k^n$.*

Prueba. Sea X un conjunto abierto en $\mathbb{A}_k^n$, por tanto, existe J ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $V(J) = \mathbb{A}_k^n \setminus X$. Por el Teorema de la Base de Hilbert, J es de generación finita, digamos $J = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$, de modo que $V(J) = \bigcap_{j=1}^{s} V(f_j)$ y por las leyes de De Morgan, $X = \bigcup_{j=1}^{s} D(f_j)$. □

Presentamos ahora una serie de propiedades topológicas de los conjuntos algebraicos afines.

Proposición 1.3 *Todo conjunto algebraico $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es un espacio topológico de Noether (cualquier cadena estrictamente descendente de conjuntos cerrados en X es estacionaria).*

Prueba. Sea $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_i \supset \cdots$ una cadena estrictamente descendente de subconjuntos algebraicos de X. Ésta induce una cadena estrictamente creciente de ideales $I(X_1) \subset I(X_2) \subset \cdots \subset I(X_i) \subset \cdots$ en $I(X)$. Puesto que $k[x_1, \ldots, x_n]$ es de Noether, dicha cadena de ideales es estacionaria, es decir, $I(X_r) = I(X_{r+1}) = \cdots$ a partir de cierto $r \in \mathbb{N}$, es decir, $X_r = X_{r+1} = \cdots$ a partir de ese valor r. □

Definición 1.2 *Decimos que un conjunto algebraico $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es* irreducible *si no admite una descomposición de la forma*

$$X = X_1 \cup X_2$$

en subconjuntos algebraicos propios $X_1, X_2 \subset X$. De otro modo, se dice que X es reducible.

Nos será útil considerar el siguiente resultado.

Observación 1.1 *El conjunto algebraico $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es irreducible si y sólo si el ideal $I(X) \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ es primo.*

Prueba. Para mostrar la condición necesaria, suponga que $I(X)$ es ideal primo. Si X fuese reducible, existirían al menos dos conjuntos algebraicos X_1, X_2 no vacíos, de manera que $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ y $X = X_1 \cup X_2$. De este modo, se tendrían las contenciones propias $X_1 \subset X$ y $X_2 \subset X$, de modo que existirían $f \in X \setminus X_1$ y $g \in X \setminus X_2$. Así, el polinomio $fg \in I(X_1)I(X_2) = I(X)$ se anularía en X, mientras que ni f ni g se anulan en X, lo cual implicaría que $I(X)$ no es primo, lo cual estaría en contra de las hipótesis. Por tanto, X es irreducible.

Para la condición suficiente, sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ irreducible y considere los polinomios $f_1, f_2 \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus I(X)$. Suponer que $f_1 f_2 \in I(X)$ equivaldría a decir que $\langle f_1 f_2 \rangle \subset I(X)$ y esto a su vez que $X = V(I(X)) \subset V(f_1 f_2) = V(f_1) \cap V(f_2)$, es decir, que $X \subset V(f_i)$ y con ello que f_1 y f_2 se anulan en X, esto es, $f_1, f_2 \in I(X)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $f_1 f_2 \notin I(X)$, por lo que $I(X)$ es primo. □

Proposición 1.4 *Para todo conjunto algebraico $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ existe una única familia finita de conjuntos algebraicos irreducibles $\{X_i\}_{i=1}^s$, de manera que X pueda expresarse como*

$$X = \bigcup_{i=1}^{s} X_i.$$

Prueba. Sea $\mathcal{A}$ la familia de conjuntos algebraicos de $\mathbb{A}_k^n$ que no admiten una descomposición finita en componentes irreducibles y suponga que $\mathcal{A} \neq \varnothing$.

Sea $F \in \mathcal{A}$. Si $G \cup G'$ es una descomposición de F en conjuntos algebraicos, donde $G, G' \subset F$ por supuesto, al menos uno de ellos, digamos G, es reducible; por lo tanto, puede descomponerse a su vez como $G = G_1 \cup G_1'$. Nuevamente, al menos uno de los conjuntos G_1 o G_1' debe ser reducible, digamos $G_1 = G_2 \cup G_2'$. Iterando este proceso, obtenemos la cadena descendente de elementos de $\mathcal{A}$

$$C: \; G \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots G_i \supset \cdots ,$$

la cual, en virtud de la proposición (1.3), debe ser estacionaria. Sea G_p el elemento mínimo de C. Puesto que $G_p \in \mathcal{A}$, G_p debe ser reducible: $G_p = W \cup W'$. Sin embargo, dado que G_p es mínimo en C, entonces $W = G_p$ o $W' = G_p$, que contradice el hecho de que G_p es reducible. Por tanto, la contradicción es consecuencia de suponer que $\mathcal{A}$ es no vacío.

Argumentamos a continuación la unicidad. Suponga que se tienen las dos descomposiciones de X

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_t = Y_1 \cup \cdots \cup Y_s,$$

donde cada X_i y cada Y_j son irreducibles, además de que $X_i \not\subset X_p$ ni $Y_j \not\subset Y_q$, siempre que $i \neq p$ y $j \neq q$. De este modo

$$X_i = X_i \cap X = \bigcup_{j=1}^{s} (X_i \cap Y_j).$$

Dado que cada X_i es irreducible, se tiene $X_i \cap Y_{j^*} = X_i$, para algún índice j^*, particularmente $Y_{j^*} \supset X_i$. Intercambiando los papeles de las dos descomposiciones, un argumento similar muestra que para alguna i^* se tiene $X_{i^*} \supset Y_j \supset X_i$. Por tanto, $i = i^*$ y $X_i = Y_{j^*}$. $\square$

Corolario 1.1 *Si el conjunto algebraico $X \subset \mathbb{A}_k^n$ es irreducible y posee más de un punto, entonces no es un espacio topológico de Hausdorff.*

Prueba. Puesto que X es irreducible, para cada par X_1, X_2 de subconjuntos cerrados de X, $X_1 \cup X_2 \neq X$. Es decir, la intersección de los abiertos $X_1^c \cap X_2^c$ no es vacía. $\square$

El siguiente lema es válido para cualquier espacio topológico, no depende de la definición de la topología de Zariski.

Lema 1.4 *Sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un conjunto algebraico. Son equivalentes*

(i) X es irreducible;

(ii) si W_1 y W_2 son abiertos no vacíos de X, entonces $W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$;

(iii) todo subconjunto abierto no vacío U de X es denso en X.

Prueba. Note que

$$W_1 \cap W_2 \neq \varnothing \text{ si y sólo si } (X \setminus W_1) \cup (X \setminus W_2) = X.^5 \tag{1.3}$$

(1) $\Rightarrow$ (2). Dados los abiertos no vacíos W_1 y W_2 de X, $X \setminus W_1$ y $X \setminus W_2$. Note que $(X \setminus W_1) \cup (X \setminus W_2)$, ya que X es irreducible; sin embargo, por (1.3) se tiene $W_1 \cap W_2 = \varnothing$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Si X es reducible, existen W_1 y W_2 subconjuntos cerrados propios de X tales que $W_1 \cup W_2 = X$. Nuevamente, por (1.3), se tiene $(X \setminus W_1) \cup (X \setminus W_2) = X$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Si U es abierto no vacío de X, por la propiedad (ii), $U \cup U' \neq \varnothing$ para todo abierto U' de X. Esta es la propia definición de conjunto denso.

(3) $\Rightarrow$ (2) La definición de conjunto denso. □

1.4. Anillos de coordenadas

Es común que siempre que se definen los objetos de estudio se establezcan las relaciones entre éstos. En este caso, estamos interesados en definir un morfismo entre conjuntos algebraicos afines. Con este fin, establecemos primero la terminología.

Definición 1.3 *Sea $U \subseteq \mathbb{A}_k^n$. Se dice que la función $f : U \to k$ es* polinomial *si existe un polinomio $P \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $f(q) = P(q)$, para todo $q \in U$.*

Es claro que todo $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ es una función polinomial. Sin embargo, en la terminología de la definición anterior, el polinomio P no caracteriza a la función f, es decir, una función regular no está determinada por un único polinomio. Para convencernos de ello, note que $f = P + Q$, para cualquier $Q \in I(U)$. Ahora bien, si en el conjunto de funciones polinomiales de la forma $U \to k$ se establece la relación

$$\phi \sim \gamma \text{ si y sólo si } \phi - \gamma \in I(U),$$

se tiene entonces el isomorfismo

$$\{\text{Funciones polinomiales en } U\} \cong k[x_1, \ldots, x_n]/I(U) =: k[U],$$

dado que $\sim$ es de equivalencia. Llamamos a $k[U]$ el *anillo de coordenadas* de U y estaremos particularmente interesados en el caso en que U sea un conjunto algebraico o un subconjunto abierto de $\mathbb{A}_k^n$. De este modo, identificamos a la función polinomial f anterior con la clase de equivalencia de P en $k[U]$.

[5] Para convencernos de ello, advierta que $W_1 \cup W_2 \neq \varnothing$ si y sólo si $(X \setminus W_1) \cup (X \setminus W_2) \cup (W_1 \cap W_2) = X$.

Ejemplos.

1. Considere $U := V(x^2 - x) \subset \mathbb{A}^1_k$, esto es, $U = \{0, 1\} \subset k$. Su anillo de coordenadas es $k[U] := k[x]/\langle x^2 - x\rangle$.

2. El anillo de coordenadas $k[\Gamma]$ de la curva algebraica $\Gamma := V(y - x^2) \subset \mathbb{A}^2_k$ es $k[x, y]/\langle y - x^2\rangle$. Dicho cociente está generado, como k-álgebra, por las clases $\overline{x}$ e $\overline{y}$. Puesto que $y - x^2 \in \langle y - x^2\rangle$, se tiene la igualdad $\overline{y} = \overline{x^2}$ y dado que $\overline{x^2} \in \langle\overline{x}\rangle \subset k[\Gamma]$, pues $\overline{x} \cdot \overline{x} = \overline{x^2}$, se tiene $k[\Gamma] \cong k[x]$.

   Otra forma de convencernos de ello es la siguiente: observe que $k[x, y]$ puede ser visto como $k[x][y]$. Consideramos entonces el morfismo evaluación
   $$\begin{array}{rcl} ev_{x^2} : k[x][y] & \to & k[x] \\ f(y) & \mapsto & f(x^2). \end{array}$$
   Veamos que este morfismo es suprayectivo: dado $h(x) = \sum_{r=0}^{s} c_r x^r$ en $k[x]$, separamos las potencias pares de x de las impares y reescribimos el polinomio como
   $$h(x) = \sum_{i\in A} c_{r_i} x^{r_i} + \sum_{j\in B} c_{r_j} x^{r_j},$$
   donde r_i es impar y r_j es par. Para el miembro de la derecha, factorizamos x^2:
   $$h(x) = \sum_{i\in A} c_{r_i} x^{r_i} + x^2 \sum_{j\in B} c_{r_j} x^{r_j/2},$$
   Reemplazamos x^2 por y, otenemos un elemento (que no es único en general)
   $$g(x, y) := \sum_{i\in A} c_{r_i} x^{r_i} + y \sum_{j\in B} c_{r_j} x^{r_j/2} \in (ev_{x^2})^{-1}(h) \subseteq k[x][y].$$
   Ahora bien, note que Núc $\varphi = \{g \in k[x, y] : (y - x^2)|g\} = \langle y - x^2\rangle$ y, por tanto, $k[x] \cong k[x, y]/\langle y - x^2\rangle$.

3. Considere la superficie $S := V(z - xy) \in \mathbb{A}^3_k$. Su anillo de coordenadas $k[X]$ está dado por $k[x, y, z]/\langle z - xy\rangle$.

Intuitivamente, dado $U \subseteq \mathbb{A}^n_k$, podemos pensar al anillo de coordenadas $k[U]$ como el conjunto formado por las clases de las funciones polinomiales que no se anulan en U y la clase del cero (estas últimas, las que se anulan en U).

Podemos, entonces, establecer la relación entre objetos que buscamos.

Definición 1.4 *Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m_k$ conjuntos algebraicos afines. Un* morfismo polinomial *entre conjuntos algebraicos es una función $\varphi : X \to Y$ de la forma $\varphi(q) = (P_1(q), \ldots, P_m(q))$, con $q \in X$ y $P_1, \ldots, P_m$ funciones polinomiales definidas en X.*

Veamos que todo morfismo polinomial $\varphi : X \to Y$ puede escribirse de la forma $f = (f_1, \ldots, f_m)$, con $f_i \in k[X]$ para todo i y la razón es la siguiente. Considere el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f_i"'] & Y \arrow[d, "\pi_i"] \\ & \mathbb{A}^1_k, \end{tikzcd}$$

donde π_i asocia a cada $p \in Y$ su coordenada i-ésima y $f_i = \pi_i \circ \varphi$. Por tanto, para cada i se tiene un morfismo $f_i \in k[X]$.

Es de hacerse notar que la imagen de un conjunto algebraico bajo un morfismo polinomial no es en general un conjunto algebraico: considere la función $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dada por $(x, y) \mapsto (x, xy)$. En este caso, Im $\phi = \mathbb{C}^2 \setminus B$, donde $B := \{(0, b) \,:\, b \neq 0\}$.

Proposición 1.5 *Todo morfismo polinomial $\mu : X \to Y$, donde $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ y $Y \subseteq \mathbb{A}^m_k$, es una función continua respecto a la topología de Zariski.*

Prueba. Sea $u \in X$ y B una vecindad de $\mu(u) \in Y$. De este modo, $Y \setminus B$ es algebraico, digamos, $Y \setminus B = V(h_1, \ldots, h_r)$, con $h_i \in k[x_1, \ldots, x_m]$. Así, para cada i, $h_i \circ \mu(p) = 0$, para todo $p \in \mu^{-1}(Y \setminus B)$, por lo que este último conjunto es algebraico en X. Entonces, $A := X \setminus \mu^{-1}(Y \setminus B)$ es abierto y note, además, que contiene a u. Puesto que $\mu(A) \subset B$, μ es continua. □

Observación 1.2

(a) La función identidad es morfismo polinomial.

(b) La composición de dos morfismos polinomiales es de nuevo un morfismo polinomial.

Prueba.

(a) Sea $q = (q_1, \ldots, q_n) \in X$. Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[dr, "f_i"'] & X \arrow[d, "\pi_j"] \\ & \mathbb{A}^1_k, \end{tikzcd}$$

donde 1_X es el morfismo identidad. Por tanto, escrimos $1_X = (f_1, \ldots, f_n)$, donde cada $f_j = \pi_i \circ 1_X = \pi_j \in k[X]$ es tal que a cada $q \in X$ asocia su coordenada q_j; esto es, $f_j \in k[X]$.

(b) Considere la composición de morfismos polinomiales $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$, donde $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}_k^m$ y $Z \subseteq \mathbb{A}_k^r$. Por tanto, escribimos

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \qquad \text{y} \qquad \psi = (\psi_1 \ldots, \psi_r),$$

con $\varphi_i \in k[X]$ para todo i, mientras que $\psi_j \in k[Y]$ para todo j. Dado $p \in X$, se tiene

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(p) &= \psi(\varphi_1(p), \ldots, \varphi_m(p)) \\ &= (\psi_1(\varphi_1(p), \ldots, \varphi_m(p)), \ldots, \psi_r(\varphi_1(p), \ldots, \varphi_m(p))). \end{aligned}$$

Así, el morfismo $\psi \circ \varphi : X \to Z$, está dado por $\psi \circ \varphi = (f_1, \ldots, f_r)$, donde $f_j(p) = \psi_j(\varphi_1(p), \ldots, \varphi_m(p))$, para cada $p \in X$, y note que cada f_j es una función polinomial. □

Ejemplos.

1. Considere $A := V(xy-1) \subset \mathbb{A}_k^2$ y $B := \mathbb{A}_k^1$. La asignación $\phi : A \to B$, dada por $p \mapsto \pi(p)$ es un morfismo polinomial entre conjuntos algebraicos (no suprayectivo). Basta advertir que la función $\pi : k[x, y] \to k$ es polinomial, a saber, $\phi(x, y) = x$.

2. Sean $U := V(y - x^3) \subset \mathbb{A}_k^2$ y $W := V(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \subset \mathbb{A}_k^3$. El morfismo $\omega : U \to W$, donde $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ y $\omega_1(x, y) = x$, $\omega_2(x, y) = y$ y $\omega_3(x, y) = y$, es un morfismo polinomial.

Definición 1.5 *Dados los conjuntos algebraicos $U \subset \mathbb{A}_k^n$ y $V \subset \mathbb{A}_k^m$, se dice que el morfismo $\varphi : U \to V$ es un* isomorfismo *si existe un morfismo polinomial $\phi : V \to U$ de manera que $\varphi \circ \phi = 1_V$ y $\phi \circ \varphi = 1_U$.*

1.5. El diccionario Álgebra-Geometría Afín

Las secciones anteriores proporcionan los resultados necesarios para afirmar que se puede construir una categoría cuyos objetos son los conjuntos algebraicos afines sobre cierto campo k algebraicamente cerrado y como flechas los morfismos polinomiales. A esta categoría la denotamos por $\mathbf{Af_k}$. Hemos visto también que a cada conjunto algebraico afín $U \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es posible asociarle una k-álgebra finitamente generada: su anillo de coordenadas $k[U]$. ¿Es posible, entonces, establecer un puente entre estos objetos geométricos y alguna categoría de objetos algebraicos, digamos, la de anillos conmutativos **AnC**? La respuesta es, como ha de sospechar, afirmativa.

Estudiemos primero las propiedades de los anillos de coordenadas.

Observación 1.3 *Sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$. El anillo $k[X]$ no posee elementos nilpotentes.*

Prueba. Note que $k[X] = k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$ es una k-álgebra finitamente generada y que el ideal $I(X)$ es radical. Suponga que $k[X]$ posee elementos nilpotentes, digamos $\overline{f} \in k[X]$ no cero, de manera que $\overline{f}^r = \overline{f^r} = 0$ para algún $r \in \mathbb{N}^*$. Entonces, $f^r \in I(X)$ y, puesto que $I(X)$ es radical, $f \in I(X)$, es decir, $\overline{f} = 0$, lo cual contradice las hipótesis. □

A las álgebras sobre k que no poseen elementos nilpotentes se les llama *reducidas*. Así, estaremos interesados en las k-álgebras reducidas finitamente generadas, a las que nombramos *k-álgebras afines*. Éstas forman una categoría, que denotaremos por **ÁlgAf$_\mathbf{k}$**, donde los morfismos entre los objetos son los homomorfismos de k-álgebras.

Ahora bien, considere los conjuntos algebraicos $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}_k^m$ y $Z \subseteq \mathbb{A}_k^r$. Con el afán de construir un funtor $\Phi : \mathbf{Af_k} \to$ **ÁlgAf$_\mathbf{k}$**, veremos a continuación que todo morfismo polinomial $\varphi : X \to Y$ induce un homomorfismo de k-álgebras afines $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$.

Dado $g \in k[Y]$, definimos $\varphi^*(g) := g \circ \varphi$ y tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi^*(g)"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{A}_k^1. \end{tikzcd}$$

En otras palabras, $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ es tal que $g \mapsto g \circ \varphi$. Note además que si $\phi : Y \to Z$ es otro morfismo polinomial, se tiene para la composición

$$(\phi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \phi^* : k[Z] \to k[X].$$

Esto último se sigue de advertir que, dado $f \in k[Z]$,

$$(\phi \circ \varphi)^*(f) = f \circ (\phi \circ \varphi) = (f \circ \phi) \circ \varphi = \phi^*(f) \circ \varphi = \varphi^*(\phi^*(f)) = (\varphi^* \circ \phi^*)(f).$$

Por lo tanto, el funtor $\Phi : \mathbf{Af_k} \to$ **ÁlgAf$_\mathbf{k}$** asigna a cada conjunto algebraico afín X su anillo de coordenadas $k[X]$ y a cada morfismo polinomial $\varphi : X \to Y$ el morfismo de k-álgebras afines $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$, es decir, Φ es un funtor contravariante.

En el sentido inverso, dado un homomorfismo $\psi : k[Y] \to k[X]$ de k-álgebras afines, mostraremos que existe un único morfismo polinomial $p : X \to Y$ tal que $p^* = \psi$. Se quiere construir ahora un funtor $\Psi :$ **ÁlgAf$_\mathbf{k}$** $\to \mathbf{Af_k}$.

En virtud de que $Y \subseteq \mathbb{A}_k^m$, observe que

$$k[Y] = k[y_1, \ldots, y_m]/I(Y) = k[\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m],$$

es un objeto de **ÁlgAf$_\mathbf{k}$**, donde $\overline{y}_i$ denota la clase de y_i módulo $I(Y)$, es decir, $\overline{y}_i = y_i + I(Y)$. Hagamos entonces $f_i := \psi(\overline{y}_i) \in k[X]$, veamos que

$$f := (f_1, \ldots, f_m) : X \to \mathbb{A}_k^m$$

es el morfismo polinomial que buscamos.

Cada generador $\overline{y}_i$ de $k[Y]$ establece una función polinomial: la proyección $\pi_i : Y \to \mathbb{A}_k^1$, de modo que $\psi(\overline{y}_i) : V \to \mathbb{A}_k^1$ es también una función polinomial. En consecuencia, f es un morfismo polinomial.

Para ver que $f(X) \subseteq Y$, considere un polinomio $M(y_1, \ldots, y_m) \in I(Y)$, por lo que su clase $M(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m)$ en $k[Y]$ es la clase del cero y dado que $\psi(M) = M \circ f$, entonces también $\psi(M) = 0$. Se tiene, así, el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\psi(M)"'] & \mathbb{A}_k^m \arrow[d, "M"] \\ & \mathbb{A}_k^1. \end{tikzcd}$$

De este modo,

$$0 = \psi(M(\bar(y)_1, \ldots, \overline{y}_m)) = M(\psi(\overline{y}_1), \ldots, \psi(\overline{y}_m)) = M(f_1, \ldots, f_m).$$

Por tanto, $\psi(M) \in I(f(X))$. Hemos mostrado la contención $I(Y) \subseteq I(f(X))$ y esto implica que $f(X) \subseteq Y$, como se quería probar.

Solamente nos hace falta mostrar que $\psi = f^*$ y que f es único con tal propiedad. Como las clases $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m$ generan a la k-álgebra $k[Y]$, es suficiente mostrar que $\psi(\overline{y_i}) = f^*(\overline{y}_i) = f_i$ para cada i. Sin embargo, esta última igualdad es precisamente la definición de f_i; pero todavía más, la igualdad también muestra que f es el único morfismo tal que $\psi = f^*$, estableciéndose así la unicidad.

Con lo anterior, se construyó un puente entre conjuntos algebraicos afines y k-álgebras afines, un diccionario "álgebra-geometría", mediante los funtores Ψ y Φ. Si el amable lector se pregunta si éstos son inversos el uno del otro, acertará al responderse: sí. Probamos este hecho enseguida.

Sea X un objeto de **Af$_\mathbf{k}$**, digamos, $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$. El funtor Φ asocia a X su anillo de coordenadas $k[X]$ en **ÁlgAf$_\mathbf{k}$**. Si bien establecimos Ψ, diciendo que este funtor asocia a la k-álgebra $k[X]$ su conjunto algebraico subyacente X, no se dijo qué conjunto algebraico corresponde a una k-álgebra afín A arbitraria en **ÁlgAf$_\mathbf{k}$**, como lo hacemos a continuación. Como A es finitamente generable, podemos elegir un conjunto de generadores $\{a_1, \ldots, a_n\}$, tal que $A = k[a_1, \ldots, a_n]$. Consideramos entonces el morfismo

$$\eta : k[x_1, \ldots, x_n] \to A = k[a_1, \ldots, a_n]$$

definido por $\eta(x_i) = a_i$, para cada i; note que, por tanto, η es suprayectivo. Se tiene así el isomorfismo

$$k[x_1, \ldots, x_n]/\text{Núc}\,\eta \cong A.$$

Dado que A no posee elementos nilpotentes, $\text{Núc}\,\eta$ es un ideal radical, mismo que define el conjunto algebraico $V(\text{Núc}\,\eta) \subseteq \mathbb{A}_k^n$.

Por lo tanto, si ponemos atención en la composición de funtores

$$\mathbf{Af_k} \xrightarrow{\Phi} \mathbf{\acute{A}lgAf_k} \xrightarrow{\Psi} \mathbf{Af_k},$$

ésta es tal que $X \mapsto k[X] = k[x_1, \ldots, x_n]/I(X) \mapsto V(I(X)) = X$. En otras palabras, $\Psi \circ \Phi = \mathbf{1}_{\mathbf{Af_k}}$.

Por otro lado, si B es un objeto en $\mathbf{\acute{A}lgAf_k}$, elegimos $\{b_1, \ldots, b_m\} \subseteq B$ de modo que $B = k[b_1, \ldots, b_m]$. Como se hizo antes, consideramos

$$\delta : k[x_1, \ldots, x_m] \to B,$$

con $x_j \mapsto b_j$ para todo j y así $k[x_1, \ldots, x_m]/\text{Núc}\,\delta \cong B$. Se sigue entonces que $\Psi(B) = V(\text{Núc}\,\delta) \subseteq \mathbb{A}_k^m$ es algebraico. Por lo tanto, $I(V(\text{Núc}\,\delta)) = \text{Núc}\,\delta$. Luego, al aplicar Φ a $V(\text{Núc}\,\delta)$ se obtiene $k[x_1, \ldots, x_m]/\text{Núc}\,\delta \cong B$, esto es, $\Phi \circ \Psi = \mathbf{1}_{\mathbf{\acute{A}lgAf_k}}$.

Hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 1.2 *El funtor* $\Phi : \mathbf{Af_k} \longrightarrow \mathbf{\acute{A}lgAf_k}$*, definido en objetos como*

$$V \longmapsto k[V],$$

y en morfismos por $(f : V \to W) \longmapsto (f^* : k[W] \to k[V])$*, induce una equivalencia de categorías,*[6] *donde* $\Psi : \mathbf{\acute{A}lgAf_k} \to \mathbf{Af_k}$ *es tal que* $\Phi^{-1} = \Psi$. □

A la luz de este teorema y de resultados anteriores, se tienen las siguientes equivalencias.

Proposición 1.6 *Existe una correspondencia biunívoca en cada uno de los casos siguientes.*

(a) Ideales radicales de $k[x_1, \ldots, x_n]$ *y conjuntos algebraicos en* $\mathbb{A}_k^n$.

(b) Conjuntos algebraicos irreducibles $U \subseteq \mathbb{A}_k^n$ *e ideales primos en* $k[x_1, \ldots, x_n]$ *(cada uno de los cuales da lugar a un dominio entero* $k[U]$*).*

(c) Ideales maximales en $k[x_1, \ldots, x_n]$ *y puntos en* $\mathbb{A}_k^n$.

[6] Véase el Apéndice A.

Prueba.

(a) Si $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es algebraico, $I(X) \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ es ideal radical, por la proposición 1.1. Si $J \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ es un ideal radical y suponemos que $V(J)$ no es algebraico, entonces $I(V(J)) \neq \sqrt{J}$, pero por el lema 1.1, $J \subseteq I(V(J)) \neq \sqrt{J}$, una contradicción, pues J es radical.

(b) Si el conjunto algebraico $U \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es irreducible suponga que $I(U)$ no es primo, es decir, existen $h_1, h_2 \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $h_1 h_2 \in I(U)$ pero ni h_1 ni h_2 están en $I(U)$. Sean $J_1 = \langle I(U), h_1 \rangle$ y $J_2 = \langle I(U), h_2 \rangle$; note que $V(J_1)$ y $V(J_2)$ son subconjuntos algebraicos propios de U y que $U \subset V(J_1) \cup V(J_2)$. Para cada $p \in U$, se tiene $p \in U_1$ o $p \in U_2$; por tanto, si $h_1 h_2(p) = 0$, entonces $h_1(p) = 0$ o $h_2(p) = 0$, por lo que U es reducible, lo cual niega la hipótesis.

    Por otro lado, si $I(U)$ es primo, suponga que U es reducible, es decir, pueden hallarse U_1 y U_2 subconjuntos algebraicos propios de U tales que $U = U_1 \cup U_2$ (note que $I(U_1), I(U_2) \supset I(U)$). De este modo, existen $g_1 \in I(U_1) \setminus I(U)$ y $g_2 \in I(U_2) \setminus I(U)$, tales que el producto $g_1 g_2$ se anula en $U_1 \cup U_2 = U$, es decir, $g_1 g_2 \in I(U)$. Por tanto, $I(U)$ no es primo, lo cual es una contradicción.

    Luego, si U es irreducible, $I(U)$ es primo y así $k[U] = k[x_1, \ldots, x_n]/I(U)$ es un dominio entero.

(c) Véase el lema 1.2. □

1.6. Morfismos Racionales: el caso afín

Ponemos ahora nuestra atención en una clase particular de morfismos polinomiales entre conjuntos algebraicos: los morfismos racionales.

A lo largo de esta sección, supondremos que $U \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es un conjunto algebraico irreducible, de modo que, en virtud de la proposición (1.6), $k[U]$ será un dominio entero.

Definición 1.6 *El anillo $k[U]$ posee un campo de cocientes asociado, al que denotamos por $k(U)$ y llamamos* campo de funciones racionales *sobre U.*[7]

Cada función racional $f \in k(U)$ puede expresarse en términos de las funciones polinomiales $g, h \in k[U]$, con $g \neq 0$, como $f = g/h$. Sin embargo, esta representación no es única en general.

[7]Véase el Apéndice B.

Definición 1.7 *Dados $f \in k(U)$ y $p \in U$, decimos que la función racional f es* regular *en p si existe para ésta una representación $f = g/h$, con $g, h \in k[U]$ y $h(p) \neq 0$. Así, el* dominio de definición *de f es el conjunto*

$$dom(f) := \{q \in U \,:\, h(q) \neq 0\}.$$

En general, dado $r \in k[U]$, definimos

$$D(r) := \mathbb{A}_k^n \setminus V(r),$$

el cual es, por supuesto, un subconjunto abierto de $\mathbb{A}_k^n$. Análogamente, si J es ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$,

$$D(J) := \mathbb{A}_k^n \setminus V(J)$$

es abierto en $\mathbb{A}_k^n$.

Dado X es un subconjunto abierto de U, es usual la notación $\mathcal{O}_U(X)$ para referirse al subanillo de $k(U)$ formado por las funciones regulares en X. En particular, para cada punto $p \in X$, se tiene el anillo

$$\mathcal{O}_{U,p} := \{f \in k(U) \,:\, f \text{ es regular en } p\}.$$

Cuando se consideran espacios topológicos E y F, es común que tratemos con funciones continuas $f : E \to F$ y que se fije la atención en subconjuntos abiertos de E, o bien, en aquéllas cuyo dominio sea un conjunto abierto $A \subseteq E$. Se tienen entonces funciones "abiertas" entre espacios topológicos. En lo que nos ocupa, se busca construir la analogía para los conjuntos algebraicos con la topología de Zariski. Más precisamente, la importancia de considerar las funciones racionales sobre conjuntos algebraicos, es que el dominio de definición de éstas es siempre un conjunto abierto, como veremos a continuación.

Proposición 1.7 *Sea $f \in k(U)$.*

(a) *El conjunto $dom(f)$ es abierto y denso en U.*

(b) *La igualdad $dom(f) = U$ sucede si y sólo si $f \in k[U]$.*

(c) *Se tiene $D(h) \subseteq dom(f)$ si y sólo si $f \in k[U][1/h]$*

(d) *Para cada $p \in U$, el anillo $\mathcal{O}_{U,p}$ es local. Se tiene además*

$$\mathcal{O}_{U,p} = k[U]\{h^{-1} \,:\, h(p) \neq 0\};$$

es decir, $\mathcal{O}_{U,p} = k[U][S]^{-1}$, con $S = \{h \in k[U] \,:\, h(p) \neq 0\}$.

PRUEBA.

(a) Considere el conjunto

$$\operatorname{den}(f) := \{h \in k[U] \,:\, fh \in k[U]\}.$$

Note que éste es un ideal de $k[U]$ al que nombramos el *ideal de denominadores* de f. Éste coincide con el conjunto de funciones polinomiales $h \in k[U]$ que aparecen como denominador en alguna representación $f = g/h$, más la función constante cero. En otras palabras,

$$\operatorname{den}(f) = \{h \in k[V] \,:\, \text{existe } g \in k[U] \text{ de modo que } f = g/h\} \cup \{0\}.$$

Así, $V(\operatorname{den}(f)) = \{q \in U \,:\, h(q) = 0, \text{ para todo } h \in \operatorname{den}(f)\} = U \setminus \operatorname{dom}(f)$ es cerrado, esto es, $\operatorname{dom}(f)$ es abierto en U.

Dado que hemos considerado a U como irreducible, la densidad de $\operatorname{dom}(f)$ en U se sigue del lema 1.4.

(b) Note que $\operatorname{dom}(f) = U$ si y sólo si $V(\operatorname{den}(f)) = \varnothing$ que, por el inciso *(b)* del Lema 1.2, se tiene si y sólo si $1 \in \operatorname{den}(f)$, que a su vez equivale a que $f \in k[U]$.

(c) Se tiene $D(h)$ si y sólo si $h(q) = 0$ para todo $q \in V(\operatorname{den}(f))$. De acuerdo con el Teorema 1.1, lo anterior equivale a afirmar que alguna potencia de h pertenece a $\operatorname{den}(f)$, digamos, h^r, lo que a su vez implica que se tiene la representación $f = g/h^r \in k[U][1/h]$.

(d) En virtud de que $k[U]$ es un dominio entero, el conjunto

$$S := \{h \in k[U] \,:\, h(p) \neq 0\}$$

es multiplicativamente cerrado. Podemos, pues, localizar a $k[U]$ respecto de S; de este modo, se extiende a $k[U]$ incluyendo los inversos bajo la multiplicación de todos los elementos en S. Se obtiene entonces

$$k[U][S]^{-1} = \left\{ \frac{g}{h} \,:\, g \in k[U], h \in S \right\}.$$

Ahora bien, el único ideal máximo de $\mathcal{O}_{U,p}$ es

$$\mathfrak{m}_p := \left\{ \frac{g}{h} \in k[U] \,:\, g(p) = 0 \right\}.$$

Para convencerse de ello, observe que un elemento en $\mathcal{O}_{U,p} \setminus \mathfrak{m}_p$ es de la forma r/s, donde $r, s \in S$, el cual es invertible, su inverso es s/r. Por tanto, si existiese un ideal $\mathfrak{n}$ tal que $\mathfrak{m}_p \subseteq \mathfrak{n} \subseteq \mathcal{O}_{U,p}$ y suponemos que la primera contensión es propia, un elemento $u \in \mathfrak{n} \setminus \mathfrak{m}_p$ es unidad y, por tanto, contiene al elemento 1, es decir, $\mathfrak{n} = \mathcal{O}_{U,p}$, lo que prueba que $\mathfrak{m}_p$ es máximo.

Suponer que $\mathfrak{m}_p$ no es máximo nos lleva a suponer la existencia de otro ideal máximo $\mathfrak{a}$ distinto de $\mathfrak{m}_p$, es decir, tal que $\mathfrak{a} \setminus \mathfrak{m}_p \neq \varnothing$. Sin embargo, hemos visto que todo elemento de $\mathcal{O}_{U,p}$ que no pertenece a $\mathfrak{m}_p$ es unidad, es decir, $\mathfrak{m}_p = \mathcal{O}_{U,p}$. □

Las funciones entre conjuntos algebraicos que buscamos son los morfismos racionales.

DEFINICIÓN 1.8 *Sean $X \subseteq \mathbb{A}_k^m$ e $Y \subseteq \mathbb{A}_k^n$ conjuntos algebraicos irreducibles. Un* morfismo racional *$\rho : X \to \mathbb{A}_k^n$ es una colección ordenada $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ de funciones racionales $\rho_1, \ldots, \rho_n$ en $k(X)$. Decimos que ρ es* regular *en $p \in X$ si cada función racional ρ_j es regular en p. El* dominio de definición *de ρ es la intersección de los conjuntos de puntos regulares de cada ρ_j, esto es,*

$$dom(\rho) := \bigcap_{j=1}^{n} dom(\rho_j).$$

La función $\tau : X \to Y$ es un morfismo racional *entre conjuntos algebraicos irreducibles si $\tau : X \to \mathbb{A}_k^n$ es un morfismo racional tal que $\tau(p) \in Y$ para cada punto regular $p \in X$.*

Se pretende asociar a cada morfismo racional $\tau : X \to Y$ un morfismo de campos $\tau^* : k(Y) \to k(X)$, mismo que entenderemos como la extensión del morfismo de anillos $k[Y] \to k[X]$. Se quiere hacer la analogía con la construcción dada en la sección 1.5. Pero, en constraste con lo que sucede con los morfismos polinomiales, la composición de morfismos racionales no es en general un morfismo racional.

EJEMPLO. Considere los morfismos racionales $f : \mathbb{A}_k^1 \to \mathbb{A}_k^2$ y $g : \mathbb{A}_k^2 \to \mathbb{A}_k^1$ dados por $f(t) = (t, 0)$ y $g(t, s) = s/t$. Observe que $f(\mathbb{A}_k^1) \cap \mathrm{dom}(g) = \varnothing$, por lo que la composición no está definida.

¿Para qué clase de morfismos la composición está definida?, ¿qué propiedad los caracteriza? A ello atiende la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.9 *Decimos que el morfismo racional $\tau : X \to Y$ es* dominante *si $\tau(dom(\tau))$ es un subconjunto denso*[8] *de Y.*

Ya que hemos puesto nuestra atención en los puntos regulares, en este caso, de τ, dado $U \subseteq Y$ abierto, *imagen inversa de U bajo τ* significará

$$\tau^{-1}(U) := \{p \in \mathrm{dom}(\tau) \, : \, \tau(p) \in U\}.$$

[8]Según la topología de Zariski.

Proposición 1.8 *Sean X e Y conjuntos algebraicos irreducibles.*

(a) Cada morfismo racional dominante $\tau : X \to Y$ induce un morfismo de campos $\tau^* : k(Y) \to k(X)$.

(b) Si $\phi : k(Y) \to k(X)$ es un morfismo de campos, existe un único morfismo racional dominante $\psi : X \to Y$ de modo que $\psi^* = \phi$.

(c) Si $\tau : X \to Y$ y $\sigma : Y \to W$ son morfismos racionales dominantes, entonces $\sigma \circ \tau : X \to W$ también lo es. Además, $(\sigma \circ \tau)^* = \tau^* \circ \sigma^*$.

Prueba.

(a) Para cada morfismo racional $\tau : X \to Y$ se tiene el morfismo de anillos

$$\tau' : k[Y] \to k[X].$$

Pretendemos construir el morfismo $\tau^* : k(Y) \to k(X)$ como

$$\tau^*(f/h) := \tau'(f)/\tau'(h).$$

Probaremos por contrapositiva que si τ es dominante, la condición $h(p) \neq 0$ para todo $p \in Y$ garantizará que $\tau'(h)(q) \neq 0$ para todo $q \in X$. Dado $h \in k[Y]$, $\tau'(h)$ es el morfismo constante cero si y sólo si $\tau(\mathrm{dom}(\tau)) \subseteq V(h) \subseteq Y$. Puesto que τ es dominante, $\tau(\mathrm{dom}(\tau))$ es denso en Y, es decir, su cerradura $\overline{\tau(\mathrm{dom}(\tau))} = Y$. De aquí se sigue que $V(h) = Y$, esto es, h es el morfismo constante cero. El morfismo τ^* está, entonces, bien definido.

(b) Suponga que $Y \subseteq \mathbb{A}_k^m$, por lo que expresamos a $k[Y]$ como

$$k[y_1, \ldots, y_m]/I(Y) = k[\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m],$$

donde $\overline{y}_i$ denota la clase de y_i. Por tanto, $k(Y) = k(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m)$. Definimos

$$\psi_i := \phi(\overline{y}_i) \in k(X) \;\text{ y }\; \psi := (\psi_1, \ldots, \psi_m) : X \to \mathbb{A}_k^m.$$

Debe probarse que $\psi(\mathrm{dom}(\psi))$ es un subconjunto denso de Y. De este modo, la igualdad $\psi^* = \phi$ se tendría por la construcción que se ha hecho de ψ.

Si $G = G(y_1, \ldots, y_m)$ pertenece a $I(Y)$, $G(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m)$ es el morfismo constante cero en $k[Y]$. De este modo,

$$G(\psi_1, \ldots, \psi_m) = G(\phi(\overline{y}_1), \ldots, \phi(\overline{y}_m)) = \phi(G(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m)) = 0,$$

lo que prueba la contensión $I(Y) \subseteq I(\psi(\mathrm{dom}(\psi)))$ o, equivalentemente, que $\psi(\mathrm{dom}(\psi)) \subseteq Y$.

Como $\psi^* = \phi$, se tiene $\psi^*|_{k[Y]} = \phi|_{k[Y]}$ y, dado que ϕ es un morfismo de campos, ϕ es inyectivo. Así, el morfismo $\psi^*|_{k[Y]} : k[Y] \to k(X)$ es inyectivo, de donde se sigue (por lo discutido en el inciso (a) de esta prueba) que ψ es dominante.

(c) Puesto que $\tau : X \to Y$ y $\sigma : Y \to W$ son dominantes, los morfismos

$$\tau' : k[Y] \to k(X) \quad \text{y} \quad \sigma' : k[W] \to k(Y)$$

son inyectivos, por lo que $\tau' \circ \sigma' = (\sigma \circ \tau)'$ también lo es. De aquí se sigue (por el inciso (a)) que $\sigma \circ \tau : X \to W$ es dominante. □

Los subconjuntos abiertos de los conjuntos algebraicos afines comparten ciertas características con los conjuntos algebraicos mismos. Bajo ciertas condiciones, es posible establecer isomorfismos entre ellos, lo que justifica la siguiente terminología.

Definición 1.10 *Un conjunto algebraico* cuasiafin *es un subconjunto abierto de un conjunto algebraico afín.*

De nueva cuenta, definidos los objetos de estudio, establecemos la manera de relacionarlos. Dados A y B algebraicos cuasiafines irreducibles[9], contenidos en los conjuntos algebraicos X e Y, respectivamente, el *morfismo* $\alpha : A \to Y$ está dado por un morfismo racional $\rho : X \to Y$ tal que $A \subseteq \mathrm{dom}(\rho)$ y $\rho|_A = \alpha$. Un *morfismo* entre conjuntos cuasiafines $\beta : A \to B$ es un morfismo $\beta : A \to Y$ de modo que $\beta(A) \subseteq B$. El morfismo β anterior será un *isomorfismo* si existe otro morfismo de conjuntos cuasiafines $\gamma : B \to A$ para el cual $\gamma \circ \beta = 1_A$ y a la vez $\beta \circ \gamma = 1_B$.

Decíamos que un conjunto algebraico cuasiafín puede ser isomorfo a uno afín.

Ejemplo. El conjunto cuasiafín $X := \mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$ de $\mathbb{A}^1_k$ es isomorfo al conjunto algebraico $Y := V(xy-1) \subset \mathbb{A}^2_k$. En este caso, el morfismo cuasiafín está dado por la proyección $\pi : Y \to X$, con $\pi(x,y) = x$, cuya inversa $\eta : X \to Y$ es $\eta(x) = (x, 1/x)$. Pese a ello, note que X *no* es algebraico. En la literatura, cuando puede establecerse un isomorfismo de esta naturaleza, se dice que X e Y son *birracionalmente equivalentes* o que π (y/o η) es un morfismo *birracional.* La importancia de dichos morfismos radica en que hacen posible extender la clase de objetos geométricos (de conjuntos algebraicos a conjuntos cuasiafines) susceptibles de ser comparados. Para el ejemplo concreto, X *no* es algebraico en $\mathbb{A}^1_k$, pero es *equivalente* a Y, que sí es algebraico en $\mathbb{A}^2_k$.

Ejemplos como éste, dan la pauta para indagar lo que sucede en general.

Proposición 1.9 *Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ conjunto algebraico afín y $r \in k[X]$. El conjunto cuasiafín $X_r := X \setminus V(r)$ es isomorfo a un conjunto algebraico afín Y, cuyo anillo de coordenadas es*

$$k[Y] = k[X_r] = k[X][r^{-1}] = k[X]_r.$$

[9]No expresables como uniones disjuntas de abiertos no vacíos.

PRUEBA. Otra vez, haremos uso del truco de Rabinowitsch. Sea $J = I(X) \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ y tome $F \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $F|_X = r$. Considere

$$J_F := \langle J, tF - 1 \rangle \subseteq k[x_1, \ldots, x_n, t].$$

Se afirma que $X_r \cong W$, donde $W = V(J_F) \subseteq \mathbb{A}_k^{n+1}$. Ésto se sigue después de advertir que el morfismo

$$\begin{array}{cccc} p: & W & \longrightarrow & X_f \\ & (x_1, \ldots, x_n, y) & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

y el morfismo

$$\begin{array}{cccc} q: & X_f & \longrightarrow & W \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \left(x_1, \ldots, x_n, \dfrac{1}{F(x_1, \ldots, x_n)}\right) \end{array}$$

son mutuamente inversos. □

OBSERVACIÓN 1.4 En la prueba anterior, es de hacerse notar que cualquier conjunto abierto de X puede expresarse como la unión de conjuntos de la forma X_r, por lo que éstos últimos forman una base para la topología (de Zariski) de X.

1.7. Producto de conjuntos algebraicos.

Sean X e Y conjuntos algebraicos afines. El conjunto algebraico $X \times Y$, caracterizado de matera categórica, consiste en el producto cartesiano $X \times Y$ y la pareja de morfismos polinomiales

$$\pi_X : X \times Y \to X \quad \text{y} \quad \pi_Y : X \times Y \to Y$$

tal que dado cualquier conjunto algebraico afín Z y cualesquiera morfismos polinomiales

$$\alpha : Z \to X \quad \text{y} \quad \beta : Z \to Y,$$

existe un único morfismo polinomial $\mu : Z \to X \times Y$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\mu"] \arrow[dr, "\beta"] & \\ X & X \times Y \arrow[l, "\pi_X"] \arrow[r, "\pi_Y"'] & Y; \end{tikzcd}$$

es decir, tal que $\pi_X \circ \mu = \alpha$ y $\pi_Y \circ \mu = \beta$.

En otras palabras, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.10 *Sean $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}_k^m$ conjuntos algebraicos.*

(i) El producto cartesiano $X \times Y \subseteq \mathbb{A}_k^{n+m}$ es un conjunto algebraico afín.

(ii) Si X e Y son irreducibles, entonces $X \times Y$ también lo es.

Prueba.

(i) Suponga que $X = V(f_1, \ldots, f_r)$ e $Y = V(g_1, \ldots, g_s)$, con $f_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$ y $g_j \in k[y_1, \ldots, y_m]$. Observe que

$$X \times Y = V(f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s) \subseteq \mathbb{A}_k^{n+m}.$$

(ii) Observe que para cada $y \in Y$, la proyección a la primera coordenada establece un isomorfismo $X \times \{y\} \cong X$. Análogamente, $\{x\} \times Y \cong Y$, para todo $x \in X$.

Suponga, pues, que se tiene la descomposición $X \times Y = Z_1 \cup Z_2$, donde cada $Z_i \neq \varnothing$. De este modo:

$$X \times \{y\} = (X \times \{y\} \cap Z_1) \cup (X \times \{y\} \cap Z_2).$$

Puesto que $X \cong X \times \{y\}$ y dada la irreductibilidad de X, se verifica $X \times \{y\} \cap Z_1 = X \times \{y\}$, o bien, $X \times \{y\} \cap Z_2 = X \times \{y\}$; es decir, $X \times \{y\} \subseteq Z_1$, o bien, $X \times \{y\} \subseteq Z_2$.

Considere entonces

$$Y_i := \{y \in Y \,:\, X \times \{y\} \subseteq Z_i\}, \qquad \text{con } i = 1, 2.$$

Así, $Y_1 \cup Y_2 = Y$. Si mostramos que cada Y_i es cerrado, de la irreductibilidad de Y se seguirá que $Y_1 = Y$, o bien, que $Y_2 = Y$. En el primer caso, se tendrá $X \times Y = Z_1$, o bien, $X \times Y = Z_2$ para el segundo.

Dado $x \in X$, definimos

$$Y_i^x := \{y \in Y \,:\, (x, y) \in Z_i\}, \qquad \text{con } i = 1, 2.$$

Note que $\{x\} \times Y_i^x = (\{x\} \times Y) \cap Z_i$, por lo que los conjuntos Y_i^x son cerrados y ya que $W_i = \bigcap_{x \in X} W_i^x$, los conjuntos W_i son cerrados. □

Observe que la topología de Zariski en $X \times Y$ *no* es en general la topología producto. Como ejemplo, considere

$$\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{A}_C^1.$$

Los cerrados de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ con la topología producto deben ser finitos. Esto se sigue de advertir que cada cerrado C en $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$, distinto del total y del vacío, es unión finita de productos de la forma $A \times B$, con A y B cerrados en $\mathbb{A}^1_k$ que, como hemos visto, son finitos. Si bien los subconjuntos finitos de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ son algebraicos, no es posible obtener, por ejemplo, $M = V(y^2 - x^2(x+1)) \subseteq \mathbb{A}^2_k$ como producto de conjuntos algebraicos en $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ (consecuencia de que $\mathbb{C}$ es infinito).

Terminamos el capítulo con una proposición.

Proposición 1.11 *Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m_k$ conjuntos algebraicos. El anillo de coordenadas $k[X \times Y]$ es isomorfo a $k[X] \otimes_k k[Y]$.*

Prueba. Dado $(x, y) \in X \times Y$, definimos el morfismo

$$\varphi : k[X] \otimes_k k[Y] \to k[X \times Y]$$

como $\varphi\left(\sum_i f_i \otimes g_i\right)(x, y) := \sum_i f_i(x) g_i(y)$.

Observe que las funciones coordenadas x_i e y_j están en la imagen de φ, y dado que éstas generan al anillo $k[X \times Y]$, el morfismo φ es suprayectivo.

Para ver que φ es inyectivo, note que si las familias $\{f_i\}$ y $\{g_j\}$ son linealmente independientes en $k[X]$ y $k[Y]$, respectivamente, entonces $\{f_i \otimes g_j\}$ también lo es en $k[X \times Y]$. Por tanto, si

$$\sum_{i,j} c_{ij} f_i(x) g_j(y) = 0,$$

como $\{f_i\}$ es linealmente independiente, $\sum_j c_{ij} g_j(y) = 0$ y como $\{g_j\}$ también lo es, entonces cada $c_{ij} = 0$. En otras palabras, $\operatorname{Núc} \varphi = \{0\}$. $\square$

Capítulo 2
Espacios Proyectivos

En el plano afín, cuando se habla de la intersección de (por ejemplo) curvas algebraicas, normalmente se hace preciso separar el caso finito del infinito. Es decir, discernimos cuando dos curvas se intersectan de cuando no lo hacen, e interpretamos este último caso diciendo "se intersectan en un punto al infinito". Luego, si la pregunta es si puede construirse a partir del plano afín (en general, a partir de $\mathbb{A}_k^n$, para algún n) un espacio en el que tal distinción no sea necesaria, la respuesta es afirmativa: los espacios proyectivos.

A lo largo de este capítulo, veremos que muchas de las propiedades que verifican los conjuntos algebraicos afines también son ciertas para los espacios proyectivos.

Sea V un k-espacio vectorial de dimensión $n+1$. Definimos en $V - \{0\}$ la relación de equivalencia

$$u \sim v \text{ si y sólo si existe } \lambda \in k - \{0\} \text{ tal que } u = \lambda v.$$

Definición 2.1 *Decimos que* $V - \{0\}/\sim$ *es el* espacio proyectivo *asociado a* V *y lo denotamos por* $\mathbb{P}(V)$. *Su dimensión está dada por*

$$dim\,\mathbb{P}(V) = dim_k V - 1.$$

Si $V = k^{n+1}$, denotamos a su espacio proyectivo asociado $\mathbb{P}(k^{n+1})$ por $\mathbb{P}_k^n$.

Ejemplos.

1. El espacio $\mathbb{P}_k^0$ consta de un solo punto.
2. El espacio proyectivo asociado a $\mathbb{R}^2$, la *línea real proyectiva* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.
3. La *línea proyectiva compleja* $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es el espacio proyectivo asociado a $\mathbb{C}^2$. El espacio $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es la esfera de Riemann.
4. El espacio $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ es el plano proyectivo real. Éste puede descomponerse como
$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1,$$

por el motivo siguiente. Podemos identificar a cada línea L en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen, con su intersección con el plano $\wp : x = 1$ y viceversa: a cada punto de $\wp$ le corresponde una línea que pasa por el origen. Se tienen entonces dos clases de líneas: las que intersectan a $\wp$ y las que pertenecen al plano yz. El plano $\wp$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, y a él corresponden las del primer grupo, mientras que las del último se identifican con $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Observación 2.1 Pese a que contradice lo enunciado al principio del Capítulo 1, podemos considerar a $\mathbb{A}^{n+1}$ como el k-espacio vectorial k^{n+1}, de modo que

$$\mathbb{P}^n_k \cong \mathbb{A}^{n+1}_k - \{0\}/\sim .$$

¿Cómo manejamos los puntos de cierto $\mathbb{P}^n_k$? Dado que éstos son clases de equivalencia, nos referimos a cada una de ellas eligiendo un representante. Es decir, se tiene en mente la proyección $\pi : k^{n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$ y denotamos los puntos en la imagen por $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) := \pi(x_0, \ldots, x_n)$. Así, $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ son las *coordenadas homogéneas* del punto $P := \pi(x_0, \ldots, x_n)$. En virtud de cómo se definió la relación $\sim$, P puede representarse también por $(\lambda x_0 : \lambda x_1 : \cdots : \lambda x_n)$, para cualquier elección de $\lambda \in k - \{0\}$.

Ejemplo. Considere nuevamente $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Reescribir su descomposición como $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = U_1 \cup H_\infty$, donde

$$U_0 := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2_k \,:\, x_0 \neq 0\} \text{ y } H^0_\infty := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2_k \,:\, x_0 = 0\}.$$

En general, dado $\mathbb{P}^n_k$ puede elegirse $t \in \{0, 1 \ldots, n\}$ para establecer la descomposición $\mathbb{P}^n_k = U_t \cup H^t_\infty$, donde, análogamente,

$$U_t := \{(x_0 : \ldots, x_n) \in \mathbb{P}^n_k \,:\, x_t \neq 0\} \text{ y } H^t_\infty := \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n_k \,:\, x_t = 0\}.$$

Al espacio H^t_∞, se le llama *hiperplano al infinito*, y se identifica con $\mathbb{P}^{n-1}_k$, mientras que U_t es identificado con $\mathbb{A}^n_k$. Esta última relación está dada por los morfismos mutuamente inversos

$$\begin{array}{rccc} \alpha_t : & \mathbb{A}^n_k & \longrightarrow & U_t \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x_1 : \cdots : x_{t-1} : 1 : x_t : \cdots : x_n), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \beta_t : & U_t & \longrightarrow & \mathbb{A}^n_k \\ & (x_0 : \cdots : x_{t-1} : x_t : \cdots : x_n) & \longmapsto & \left(\dfrac{x_0}{x_t}, \ldots, \dfrac{x_{t-1}}{x_t}, \dfrac{x_{t+1}}{x_t}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_t}\right). \end{array}$$

Generalmente, se fija un valor de t (son usuales 0 o n), y nos referimos a U_t como la *parte afín* de $\mathbb{P}^n_k$ y a H^t_∞ como el *hiperplano al infinito*. Los puntos de H^t_∞ son llamados *puntos al infinito*.

La descomposición anterior en una parte afín y otra proyectiva es convencional, pero si se toma cualquier hiperplano proyectivo en $\mathbb{P}^n_k$, el complemento siempre es afín.

Definición 2.2 *Un* subespacio proyectivo *de* $\mathbb{P}(V)$ *es un conjunto de la forma* $\pi(W - \{0\})$*, donde* W *es un subespacio vectorial de* V*. En tal caso, escribimos* $\mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V)$*.*

Note que, $\dim \mathbb{P}(W) = \dim_k W - 1$. Si $\dim_k W = \dim_k V - 1$.

Lema 2.1 *Sea* V *un* k*-espacio vectorial de dimensión* $n+1$ *y* $\mathbb{P}(W_1)$ *y* $\mathbb{P}(W_2)$ *subespacios proyectivos de* $\mathbb{P}(V)$*. Si*

$$dim\,\mathbb{P}(W_1) + dim\,\mathbb{P}(W_2) \geq n,$$

entonces $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq \varnothing$*.*

Prueba. Que la suma $\dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2)$ sea mayor o igual que n, implica que $\dim_k W_1 + \dim_k W_2 \geq n+2 = \dim_k V + 1$, de modo que W_1 y W_2 se intersectan en, al menos, una línea. Es decir, existe al menos un punto común a $\mathbb{P}(W_1)$ y a $\mathbb{P}(W_2)$. □

Veamos ahora algunas propiedades de $\mathbb{P}^n_k$. De acuerdo con el resultado anterior, en particular, dos líneas en el plano proyectivo siempre se intersectan, en contraste con lo que sucede en un plano afín. Es decir, en un espacio proyectivo, la distinción entre los casos líneas paralelas y no paralelas ya no es necesaria. Por otro lado, cualquier espacio proyectivo puede cubrirse por espacios afines, de la siguiente manera

$$\mathbb{P}^n_k = \bigcup_{i=0}^{n} U_i,$$

donde cada $U_i := \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n_k \,:\, x_i \neq 0\}$. Cuando k es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, esta cubierta proporciona a $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ y a $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, estructura de *variedad topológica diferenciable compacta real* y *compleja*, respectivamente.[1]

2.1. Conjuntos Algebraicos Proyectivos

De manera análoga a como se hizo para los espacios afines, nuestro objetivo es definir conjuntos de ceros de polinomios en $\mathbb{P}^n_k$. Para ello, estaremos interesados en los polinomios $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ tales que si se anulan en cierto $P \in k^{n+1}$, también lo hagan en cada λP, para todo $\lambda \in k - \{0\}$, de modo que los conjuntos de ceros en $\mathbb{P}^n_k$ estén bien definidos. Esto condición no la satisface, por supuesto, cualquier polinomio, por lo que ponemos nuestra atención en las *formas* o *polinomios homogéneos* de grado d, entendidas(os) como las expresiones

$$f(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{\sum \nu_i = d} a_{\nu_0,\ldots,\nu_n} x_0^{\nu_0} \cdots x_n^{\nu_n},$$

[1]Véase el Apéndice C.

siendo $a_{\nu_0,\ldots,\nu_n} \in k$. No es difícil ver que para éstas, se tiene

$$f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n).$$

De este modo, si $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$, también $f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0$.

Definición 2.3 *Un* conjunto algebraico proyectivo *es un subconjunto X de $\mathbb{P}^n_k$ tal que se tiene un conjunto de formas $H \subseteq k[x_0, \ldots, x_n]$ para el cual*

$$X = \{P \in \mathbb{P}^n_k \,:\, f(P) = 0, \text{ para toda } f \in H\}.$$

Denotamos esta situación por $X = V_P(H)$.[2]

Debe hacerse notar que no se exige para esta definición, que las formas en H que definen a X tengan un mismo grado. Y, de nueva cuenta, gracias al Teorema de la Base, de Hilbert, podemos suponer que H es finito.

Ejemplos.

1. El polinomio homogéneo $\nu(x, y, z) = x^3 + x^2y - y^2z$ (una forma de grado 2), define una curva algebraica $C = V_P(\nu)$ de grado 3 en $\mathbb{P}^2_k$.

2. *Homogeneización y deshomogeneización de polinomios.* Como ya hemos visto, puede identificarse al espacio afín $\mathbb{A}^n_k$ con el subconjunto U_0 de $\mathbb{P}^n_k$ a través del morfismo $\phi : \mathbb{A}^n_k \to U_0$, dado por $\phi(x_1, \ldots, x_n) = (1, x_1, \ldots, x_n)$. Si se considera a cada polinomio como función, el morfismo anterior induce los siguientes morfismos de anillos. Por un lado,

$$\begin{array}{rccl} \phi^d : & k[x_0, x_1, \ldots, x_n] & \to & k[x_1, \ldots, x_n], \\ & f(x_0, \ldots, x_n) & \mapsto & f(1, x_1, \ldots, x_n). \end{array}$$

Por otro, dado $g = g_0 + g_1 + \cdots + g_r \in k[x_1, \ldots, x_n]$, donde cada g_i representa una forma de grado i, se tiene

$$\begin{array}{rccl} \phi^h : & k[x_1, \ldots, x_n] & \to & k[x_0, x_1 \ldots, x_n], \\ & g(x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_0^r \displaystyle\sum_{i=1}^{r} g_i = x_0^r\, g(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0). \end{array}$$

En el primer caso, diremos que $\phi^d(f) =: f^d$ es la *deshomogeneización* de f respecto de x_0; mientras que en el segundo, $\phi^h(g) =: g^h$ es la *homogeneización* de g respecto de x_0.

Siguiendo la misma notación de arriba, observe que el elemento g^h en $k[x_0, \ldots, x_n]$ es tal que $\phi^d(g^h) = g \in k[x_1, \ldots, x_n]$, por lo que el morfismo

[2] El subíndice P hace alusión a la palabra "proyectivo".

ϕ^d es sobreyectivo. Además, Núc $(\phi^d) = \langle 1 - x_0 \rangle$, de modo que se tiene el isomorfismo

$$k[x_1, \ldots, x_n] \cong k[x_0, \ldots, x_n]/\langle 1 - x_0 \rangle.$$

Otra consideración que debe destacarse es que este procedimiento puede hacerse en relación a cualquier U_i y no precisamente respecto de U_0; en otra palabras, puede homogeneizarse y deshomogeneizarse polinomios respecto de cualquier variable x_i.

Ahora bien, tomando el polinomio ν del ejemplo 1, se obtiene una curva algebraica afín al deshomogeneizar ν y considerar sus ceros $V(\nu^d) \subseteq \mathbb{A}^2_k$ respecto de (digamos) z; explícitamente, $V(\nu^d) = x^3 + x^2y - y^2$. Y en el sentido inverso, dado $\mu = y^4 - x(x+1)$ (cuyo conjunto de ceros pertenece al plano afín), al considerar los ceros de su homogeneización respecto de z, $V(\mu^h) = V(y^4 - x^2z^2 - xz^3)$ obtenemos una curva algebraica proyectiva en $\mathbb{P}^2_k$.

3. *Haces de curvas.* En Matemáticas, es común que, dado un conjunto de objetos sobre los que se tiene interés, se construya otro espacio en el cual cada uno de éstos sea un punto. Si se tiene en mente $\mathbb{P}^2_k$, las curvas de grado d en él forman un espacio proyectivo $\mathbb{P}^D_k$, donde $D = 1/2d(d+3)$.

   ¿Cuántas curvas de grado d distintas entre sí es posible construir en $\mathbb{P}^2_k$? Tantas como formas distintas de grado d se tengan y cada forma $f \in k[x_0, x_1, x_2]$ de grado d puede escribirse como

$$f = \sum_{r+s+t=d} \lambda_{(r,s,t)} x_0^r x_1^s x_2^t, \qquad \text{con } \lambda_{(r,s,t)} \in k.$$

   Para calcularlas, considere el siguiente arreglo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & x_3^d & & & & \\
 & & & x_1x_3^{d-1} & & x_2x_3^{d-1} & & & \\
 & & x_1^2x_3^{d-2} & & x_1x_2x_3^{d-2} & & x_2x_3^{d-2} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
x_1^d & x_1^{d-1}x_2 & \cdots & & \cdots & & \cdots & x_1x_2^{d-1} & x_2^d.
\end{array}$$

   Observe que en el $j-$ésimo renglón se tienen j monomios distintos y que hay $d+1$ renglones en total. De este modo, el número total de monomios distintos entre sí es

$$D + 1 = \sum_{j=1}^{d+1} j = \frac{(d+1)(d+2)}{2}.$$

   Si se identifica a cada curva $f = \sum_{r+s+t=d} \lambda_{(r,s,t)} x_0^r x_1^s x_2^t$ con el punto $(\lambda_1 : \cdots : \lambda_{D+1}) \in \mathbb{P}^D_k$, se establece una correspondencia biyectiva entre curvas de grado d en $\mathbb{P}^2_k$ y los puntos de $\mathbb{P}^D_k$.

Ahora bien, dados $A, B \in \mathbb{P}_k^D$ (dos curvas en $\mathbb{P}_k^2$), una *línea parametrizada* que pasa por A y B es el conjunto de puntos $\lambda A + \mu B$, donde al menos uno de los valores λ o μ no es cero. De este modo, para cada par de valores de λ y μ obtenemos una curva de grado d en $\mathbb{P}_k^2$. Decimos, entonces, que la línea parametrizada $\lambda A + \mu B$ es un *haz (lineal) de curvas* de grado d.

4. *Superficies regladas.* Considere el morfismo $\psi : \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1 \to \mathbb{P}_k^3$ dado por

$$\psi((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) = (x_0 y_0 : x_0 y_1 : x_1 y_0 : x_1 y_1).$$

El conjunto $\operatorname{Im} \psi$ es la superficie algebraica proyectiva

$$\operatorname{Im} \psi = V_P(z_0 z_3 - z_1 z_2) \subseteq \mathbb{P}_k^3.$$

Para cada punto $Q \in \mathbb{P}_k^1$, se tienen 2 familias de líneas: $\psi(\mathbb{P}_k^1 \times \{Q\})$ y $\psi(\{Q\} \times \mathbb{P}_k^1)$. Decimos que cada una de estas familias es un *reglado* para $\operatorname{Im} \psi$ y que ésta última es una *superficie reglada*, al ser engendrada por una recta móvil dependiente de un parámetro (el punto Q). Veremos más adelante que éste es un caso particular del *morfismo de Segre.*

Como sucede también para conjuntos algebraicos afines, para espacios proyectivos se verifica $V(H) = V(I(H))$, donde $I(H)$ es el *ideal homogéneo*[3] generado por H. Además, si de nueva cuenta consideramos a los conjuntos algebraicos proyectivos como los conjuntos cerrados de $\mathbb{P}_k^n$, se define así la *topología de Zariski* en $\mathbb{P}_k^n$, como se enuncia a continuación.

PROPOSICIÓN 2.1 *Son conjuntos algebraicos proyectivos,*

(i) el conjunto vacío y $\mathbb{P}_k^n$,

(ii) la unión finita de conjuntos algebraicos proyectivos y

(iii) la intersección arbitraria de conjuntos algebraicos proyectivos.

PRUEBA. Completamente análoga a la misma proposición en el caso afín.□

Dado un conjunto algebraico afín $V(T) \subseteq \mathbb{A}_k^n$, donde $T \subseteq k[x_0, \ldots, x_n]$, se quiere construir un conjunto algebraico proyectivo $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$, de modo que $X^A \cong V(T)$. Por ejemplo, si se considera la curva $V(y - x^2) \subseteq \mathbb{A}_k^2$, basta homogeneizar (respecto de alguna variable, digamos, z) el polinomio que la define y considerar el conjunto algebraico proyectivo: $V_P(yz - x^2) \subseteq \mathbb{P}_k^2$. Observe que $V_P(yz - x^2) \cap U_2 \cong V(y - x^2)$. Decimos, pues, que $V_P(yz - x^2)$ es la cerradura de $V(y - x^2)$; análogamente para el caso general, decimos que X es la *cerradura proyectiva* de $V(T)$ y la denotamos por $\overline{V(T)}$. Note, también, que $\overline{V(T)} = V_P(T^h)$, donde T^h es el ideal homogéneo generado por las homogeneizaciones de los polinomios que generan a T.

[3] Véase la sección Anillos Graduados e Ideales Homogéneos, en el Apéndice B.

Observación 2.2 *Con la topología de Zariski, el morfismo $\beta_t : U_t \to \mathbb{A}_k^n$, como fue dado arriba, es un homeomorfismo.*

Prueba. Considere los anillos $A := k[x_1, \dots, x_n]$ y $B := \{f \in k[x_0, \dots, x_n] : f$ es homogéneo$\}$. Los conjuntos cerrados en U_t y $\mathbb{A}_k^n$ están determinados por ideales de A y B, respectivamente. Entre estos anillos, se tienen los morfismos $\gamma : B \to A$ y $\delta : A \to B$, dados por

$$\gamma(f) := f(x_0, \dots, x_{t-1}, 1, x_{t+1}, \dots, x_n)$$

y

$$\delta(g) := x_t^{\operatorname{grad} g}\, g\left(\frac{x_1}{x_t}, \dots, \frac{x_{t-1}}{x_t}, \frac{x_{t+1}}{x_t}, \dots, \frac{x_n}{x_t}\right),$$

mismos que verifican $\gamma \circ \delta(g) = g$.

Cualquier subconjunto cerrado Y de U_t es el resultado de intersectar la cerradura proyectiva $\overline{Y}$ con U_t. Por tanto, existe $T \subseteq B$ tal que $\overline{Y} = V_P(T)$, de modo que $\beta_t(Y) = V(\gamma(T))$.

Por otro lado, todo subconjunto cerrado de $\mathbb{A}_k^n$ es de la forma $W = V(S)$, siendo $S \subseteq A$ y $\beta_t^{-1}(W) = V_P(\delta(S)) \cap U_t$. □

Definición 2.4 *Sea $Y \subseteq \mathbb{P}_k^n$ algebraico. Decimos que $X \subseteq Y$ es un conjunto algebraico* cuasiproyectivo *si X es abierto en Y.*

Los conjuntos algebraicos cuasiproyectivos son los objetos más generales que hemos tratado en estos dos primeros capítulos. La razón es la siguiente. Todo conjunto algebraico (cuasi)afín puede ser considerado como el cono afín de su cerradura proyectiva: si $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es algebraico, entonces $X \cong \overline{X} \cap U_t$, para alguna $t \in \{0, \dots, n\}$. Así, X puede considerarse un subconjunto abierto de $\overline{X}$. Además, cualquier conjunto algebraico proyectivo $Y \subseteq \mathbb{P}_k^n$ posee una cubierta

$$Y = \bigcup_{t=0}^{n} Y_t, \text{ donde } Y_t := Y \cap U_t.$$

En esta descomposición, que llamamos la *cubierta afín estándar de Y*, identificamos a cada Y_t como una copia de $\mathbb{A}_k^n$.

Como sucede en el caso afín, cada conjunto algebraico proyectivo posee una descomposición en conjuntos algebraicos irreducibles.

2.2. Anillos Graduados e Ideales Homogéneos

Se tienen las correspondencias entre conjuntos algebraicos $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ e ideales homogéneos J de $k[x_0, \dots, x_n]$, dadas por V_P e I_P, de manera análoga al caso afin. Estamos interesados en saber cuándo éstas son mutuamente inversas.

Pero antes de enunciar el *Nullstellensatz* en su versión proyectiva (donde, privilegiamos también los ideales radicales), debemos hacer ciertas consideraciones.

Por un lado, se tiene $V_P(k[x_0,\ldots,x_n]) = \varnothing$, pero por otro, el total no es el único ideal del anillo de polinomios al que la función V_P asigna el vacío, tenemos además el ideal homogéneo máximo

$$(x_0,\ldots,x_n) = \bigoplus_{d\geq 1} k^d[x_0,\ldots,x_n];$$

es decir, $V_P(x_0,\ldots,x_n) = \varnothing$. Por esta razón, a este ideal se le llama el *ideal irrelevante*.

Observe que, dado el ideal homogéneo J de $k[x_0,\ldots,x_n]$, puede considerarse tanto el conjunto algebraico proyectivo $X = V_P(J) \subseteq \mathbb{P}^n_k$ como el afín $X^A = V(J) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}_k$. Si el ideal J es propio, se tiene

$$X^A = \pi^{-1}(X) \cup \{0\},$$

siendo π la proyección $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n_k$; y observe que un punto $(x_0,\ldots,x_n)$ pertenece a X^A si y sólo si $(\lambda x_0,\ldots,\lambda x_n) \in X^A$, para cualquier $\lambda \in k$. Llamamos a X^A el *cono afín* sobre el conjunto algebraico $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$.

Teorema 2.1 (Nullstellensazt proyectivo) *Sea J un ideal homogéneo de $k[x_0,\ldots,x_n]$.*

(i) $V_P(J) = \varnothing$ si y sólo si $\sqrt{J} \supseteq (x_0,\ldots,x_n)$.

(ii) Si $V_P(J) \neq \varnothing$ entonces $I_P(V_P(J)) = \sqrt{J}$.

Prueba.

(i) Observe que $V_P(J) = \varnothing$ si y sólo si $V_P(J)^A \subseteq \{0\}$ y ésto, a su vez, sucede si y sólo sí $\sqrt{J} \supseteq (x_0,\ldots,x_n)$, de acuerdo con el Nullstellensatz del caso afín.

(ii) Suponga que $I_P(V_P(J)) \neq \varnothing$. Si $f \in I_P(V_P(J))$, entonces f está en $I_P(V_P(J)^A)$. De acuerdo con el Nullstellensatz afín, existe $n \geq 1$ tal que $f^n \in J$, es decir, $f \in \sqrt{J}$. □

Corolario 2.1 *Se tiene una correspondencia biyectiva entre*

(i) ideales homogéneos radicales J de $k[x_0,\ldots,x_n]$ y conjuntos algebraicos proyectivos $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$; e

(ii) ideales primos homogéneos y propios J de $k[x_0,\ldots,x_n]$ y conjuntos algebraicos irreducibles de $\mathbb{P}^n_k$.[4]

Prueba. Completamente análoga a la proposición correspondiente para el caso afín. □

[4]El ideal irrelevante corresponde al conjunto vacío.

2.3. Morfismos racionales: el caso proyectivo

¿Puede construirse para $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$, algebraico e irreducible, un *anillo de coordenadas*? Considere su cono afín $X^A \subset \mathbb{A}^{n+1}_k$. Definimos

$$G[X] := k\left[X^A\right] := k[x_0, \ldots, x_n]/I_P(X).$$

Este anillo posee estructura de anillo graduado $G[X] = \bigoplus_{d \geq 0} G_d[X]$, donde[5]

$$G_d[X] := \{[f] \in G[X] \,:\, f \text{ es homogéneo, con } \operatorname{gr} f = d\} \cup \{0\}.$$

En efecto, observe que $[f] = [g]$ si y sólo si $f - g \in I_P(X)$, pues si $\operatorname{gr} f \neq \operatorname{gr} g$, dado que $I_P(X)$ es homogéneo, entonces $[f] = [g] = 0$; se sigue de aquí que $G_d[X] \cap G_e[X] = \{0\}$ siempre que $d \neq e$. Diremos que $G[X]$ es el *anillo de coordenadas homogéneas* de X.

A diferencia de lo que sucede en el caso afín, no cualquier polinomio en $n+1$ variables define una función en $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$. Es por ello que nos restringimos a los cocientes de polinomios homogéneos del mismo grado, f/g, puesto que verifican

$$\frac{f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)}{g(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)} = \frac{\lambda^d f(x_0, \ldots, x_n)}{\lambda^d g(x_0, \ldots, x_n)} = \frac{f(x_0, \ldots, x_n)}{g(x_0, \ldots, x_n)};$$

es decir, el valor del cociente no depende de la elección del representante de la clase de $P \in X$.

De este modo (haciendo énfasis en que consideramos a X irreducible), se define en $k(x_0, \ldots, x_n)$ la relación

$$\frac{f}{g} \sim \frac{p}{q} \text{ si y sólo si } fq - gp \in I_P(X),$$

donde f, g, p y q son polinomios homogéneos tales que $\operatorname{gr} f = \operatorname{gr} g$ y $\operatorname{gr} p = \operatorname{gr} q$. Así, llamamos a

$$k_P(X) := \left\{\frac{f}{g} \,:\, f \text{ y } g \text{ homogéneos, } \operatorname{gr} f = \operatorname{gr} g \text{ y } g \notin I_P(X)\right\} / \sim$$

el *campo de funciones de* X y a sus elementos, *funciones racionales.*

Proposición 2.2 *Sea $X \subset \mathbb{P}^n_k$ algebraico y considere su cubierta estándar afín $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Suponga que $X \not\subset V_P(x_0)$. Entonces, se tiene un isomorfismo $k_P(X) \cong k(U_0)$.*

[5]Como $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$, $[f]$ denota la clase de este elemento en $G[X]$.

Prueba. Los morfismos

$$\begin{array}{ccc} k_P(X) & \longrightarrow & k(U_0) \\ \dfrac{f(x_0,\ldots,x_n)}{g(x_0,\ldots,x_n)} & \longmapsto & \dfrac{f(1,x_1,\ldots,x_n)}{g(1,x_1,\ldots,x_n)} \end{array} \quad \text{y}$$

$$\begin{array}{ccc} k(U_0) & \longrightarrow & k_P(X) \\ \dfrac{f(x_1,\ldots,x_n)}{g(x_1,\ldots,x_n)} & \longmapsto & \dfrac{f\left(\frac{x_1}{x_0},\ldots,\frac{x_n}{x_0}\right)}{g\left(\frac{x_1}{x_0},\ldots,\frac{x_n}{x_0}\right)} \end{array}$$

son mutuamente inversos. □

Observe que $k_P(X)$ es también isomorfo a la localización[6] $G[X]_{((0))}$, lo cual se sigue de la propia definición de $k_P(X)$.

Al contrario de lo que sucede en el caso afín, no todos los elementos de $k_P(X)$ corresponden a funciones regulares en X. Se dirá, pues, que una función $h \in k_P(X)$ es *regular en* $Q \in X$ si existe para ésta una representación $h = f/g$, con $g(Q) \neq 0$; nos referiremos al *dominio de definición* de h, denotado por $\operatorname{dom} h$, como el conjunto de puntos de X donde h es regular.

De este modo, también se tiene un *anillo local* de X en el punto Q:

$$\mathcal{O}_{X,Q} := \{h \in k_P(X) \,:\, h \text{ es regular en } Q\},$$

cuyo único ideal máximo es $\mathfrak{m}_{X,Q} := \{g \in \mathcal{O}_{X,Q} \,:\, g(Q) = 0\}$.

Nuevamente, si X es irreducible y $X \not\subset V_P(x_0)$, se tienen entonces dos anillos locales para cada punto $Q \in U_0 = X \cap U_0$: $\mathcal{O}_{X,Q}$ y $\mathcal{O}_{U_0,Q}$, si se considera a Q como punto de un espacio proyectivo o afín, respectivamente. Como consecuencia de la Proposición (2.2), se tiene $\mathcal{O}_{X,Q} \cong \mathcal{O}_{U_0,Q}$. Pero, además, si se considera el ideal de $G[X]$,

$$M_Q := \{f \in G[X] \,:\, f \text{ es homogéneo y } f(Q) = 0\},$$

oberve que $\mathcal{O}_{X,Q} \cong G[X]_{(M_Q)}$.

Ahora bien, sea $Y \subseteq X$ un conjunto algebraico cuasiproyectivo. Nos referimos al conjunto

$$\mathcal{O}(Y) := \{f \in k_P(X) \,:\, Y \subseteq \operatorname{dom} f\},$$

como el *anillo de funciones regulares* en Y. Así, considerando a $\mathcal{O}(Y)$ como subconjunto de $k_P(X)$, se tiene

$$\mathcal{O}(Y) = \bigcap_{Q \in Y} \mathcal{O}_{X,Q}.$$

Estamos, pues, en posición de enunciar el siguiente importante resultado.

[6] Véase la Sección B.7 (Apéndice B).

Teorema 2.2 *Sea $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ algebraico e irreducible, con k algebraicamente cerrado. Entonces, toda función regular en X es constante, es decir, $\mathcal{O}(X) \cong k$.*

Prueba. Supóngase que $X \not\subset H_\infty^i := V_P(x_i)$ para todo i; de lo contrario, X estaría contenido en $H_\infty^i \cong \mathbb{P}_k^{n-1}$ y así, deberíamos consideralo en un espacio proyectivo una dimensión menor. Será suficiente probar que $\mathcal{O}(X) \subseteq k$.

Sea $f \in \mathcal{O}(X)$ y considere la cubierta estándar afín de $X = \bigcup_{i=0}^n U_i$. Puesto que f es regular en X, $f|_{U_i}$ lo es en U_i. De este modo, por la prueba de la Proposición 2.2, $k_P(X) \cong k_P(U_i)$ e identificamos a $f|_{U_i}$ como un polinomio en $k\left[\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right]$. Luego, existe $g_i \in G[X]$ homogéneo de grado α_i tal que

$$f|_{U_i} = \frac{g_i}{x_i^{\alpha_i}}. \tag{2.1}$$

Como consecuencia de la irreductibilidad de X, $G[X]$ es dominio entero, por lo que tiene sentido hablar de su campo (total) de cocientes $Q(G[X]) = k(X^A)$. Este último es una extensión de anillo de $\mathcal{O}(X)$ y de $G[X]$, así como una extensión de campo de k y de $k_P(X)$.

De (2.1), se sigue que

$$x_i^{N_i} f \in G_{N_i}[X]. \tag{2.2}$$

Tome, pues, $N > \sum_i N_i$ y observe que $G_N[X]$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita, generado por las clases de los monomios de grado N en $G[X]$. De este modo, cualquier monomio $\alpha \in G_N[X]$ es divisible por $x_i^{N_i}$, para algún i. Se sigue de (2.2) que $\alpha f \in G_N[X]$ y, por tanto, $G_N[X]f \subseteq G_N[X]$. Es decir, para $q \geq 1$ se tiene la sucesión de inclusiones

$$G_N[X]f^q \subseteq G_N[X]f^{q-1} \subseteq \cdots \subseteq G_N[X]f \subseteq G_N[X],$$

que, en particular, implica que $x_0^N f^q \in G_N[X]$, para todo $q \geq 1$. Por lo tanto,

$$G[X][f] \subseteq x_0^{-N} G[X] \subseteq Q(G[X]).$$

Como $x_0^{-N} G[X]$ es un módulo de generación finita sobre $G[X]$, de la Proposición (B.8) se sigue que $x_0^{-N} G[X]$ es de Noether, por lo que el submódulo $G[X][f]$ está finitamente generado sobre $G[X]$. Por la parte (2) del Lema (B.4) f es entero sobre $G[X]$, es decir, satisface

$$f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \cdots + a_1 f + a_0 = 0,$$

donde cada $a_i \in G[X]$. Observe que f es homogéneo de grado 0 y que puede tomarse la componente de grado 0 de cada a_i, esto es, podemos suponer que a_i también es homogéneo de grado 0. Luego, $a_i \in G_0[X] = k$. Así, f es algebraico sobre k y como hemos supuesto k es algebraicamente cerrado, entonces $f \in k$, como se quería probar. $\square$

Ejemplo. Si X es la esfera de Riemann, es decir, $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, se tiene el isomorfismo $\mathcal{O}(X) \cong \mathbb{C}$.

Definición 2.5 *Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$ algebraico e irreducible. Un* morfismo racional *es una composición*

$$f : X \xrightarrow{\phi} \mathbb{A}^{m+1}_k \xrightarrow{\pi} Y \subseteq \mathbb{P}^m_k,$$

donde $\phi = (\phi_0, \ldots, \phi_m)$ es una colección ordenada de funciones racionales en $G[X]$, definida como $\phi(Q) := (\phi_0(Q) : \phi_1(Q) : \cdots : \phi_m(Q))$, para todo $Q \in X$. El dominio de ϕ está dado por

$$dom\,\phi = \bigcap_{i=0}^{m} dom\,\phi_i$$

y se verifica $\phi(dom\,\phi) \subseteq \pi^{-1}(Y)$; además, $dom\,f := dom\,\phi$ y $f(dom\,\phi) \subseteq Y$.

Observe que si $\lambda \in k \setminus \{0\}$, entonces $(f_0, \ldots, f_m)$ y $(\lambda f_0, \ldots, \lambda f_m)$ definen el mismo morfismo racional.

Definición 2.6 *Decimos que el morfismo racional $f : X \to \mathbb{P}^m_k$ es* regular *en $Q \in X$ si existe una representación $f = (f_0, \ldots, f_m)$ tal que cada f_i es regular en Q y $f_j(Q) \neq 0$ para algún valor de j.*

Ejemplos.

1. Considere la curva $X = V_P(zy^2 - x^3 - x^2 z) \subset \mathbb{P}^2_k$. El morfismo proyección $\varphi : X \to \mathbb{A}^2_k$ (desde el punto $(0:0:1)$) definido por

$$\varphi(x : y : z) = (tx, ty),$$

donde $t \in k$ es tal que $t(z-1) = 1$, es decir, $t = (z-1)^{-1}$, es un morfismo racional. Pero más aún, φ es un morfismo regular.

2. Un ejemplo de morfismo regular que no es racional es $\phi : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{P}^1_k$ dado por $\varphi(x, y) = (x : y)$. Éste está bien definido en $\mathbb{A}^2_k \setminus \{(0,0)\}$ y envía las líneas en $\mathbb{A}^2_k$ que pasan por el origen a puntos de $\mathbb{P}^1_k$, pero no hay modo de extenderlo a todo $\mathbb{A}^2_k$.

2.4. Funciones Birracionales y la equivalencia de categorías

En esta sección, consideraremos a los conjuntos $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ e $Y \subseteq \mathbb{P}_k^m$ algebraicos e irreducibles.

DEFINICIÓN 2.7 *Un morfismo racional $f : X \to Y$ es* birracional *(o una equivalencia birracional) si existe un morfismo racional $g : Y \to X$ de modo que $f \circ g = id_Y$ y $g \circ f = id_X$. En tal caso, decimos X e Y son* birracionalmente equivalentes*.*

EJEMPLO. Considere la cuádrica

$$Q := \left\{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_k^3 \,:\, x_0x_3 - x_1x_2 = 0\right\}$$

y la proyección desde el punto $p_0 := (1 : 0 : 0 : 0)$

$$\eta : \mathbb{P}_k^3 \to \mathbb{P}_k^2, \text{ donde } \eta(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (x_1 : x_2 : x_3).$$

Entonces la restricción $\eta|_Q$ es un morfismo birracional, su inversa $\gamma : \mathbb{P}_k^2 \to Q$ está dada por

$$\gamma(x_1 : x_2 : x_3) = \left(\frac{x_1x_2}{x_3} : x_1 : x_2 : x_3\right) = (x_1x_2 : x_1x_3 : x_2x_3 : x_3^2).$$

De nueva cuenta, la valía de la noción de *equivalencia birracional* radica en que establece el criterio más general para decidir si dos objetos (conjuntos algebraicos proyectivos) son isomorfos. De este modo, en los problemas de clasificación basta restringir la atención a las propiedades de los objetos que permanecen invariantes bajo equivalencia racional.

Hemos definido morfismos racionales entre conjuntos algebraicos proyectivos, pero no entre subconjuntos abiertos.

DEFINICIÓN 2.8 *Sean U y W subconjuntos abiertos de X e Y, respectivamente. Decimos que la función $\alpha : U \to W$ es un* morfismo racional *si existe un morfismo racional $f : X \to Y$ de modo que $f|_U = \alpha$, con $U \subseteq \operatorname{dom} f$ y $f(U) \subseteq W$. Dicho morfismo α es un* isomorfismo *si existe un morfismo racional $\beta : W \to U$ tal que $\alpha \circ \beta = 1_W$ y $\beta \circ \alpha = 1_U$.*

PROPOSICIÓN 2.3 *Dado el morfismo racional $f : X \to Y$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *El morfismo f es una equivalencia birracional.*
2. *El morfismo f es dominante y $f^* : k_P(Y) \to k_P(X)$ es un isomorfismo.*

3. Existen conjuntos abiertos $U \subseteq X$ e $W \subseteq Y$ tales que la restricción $f|_U : U \to W$ es un isomorfismo.

Prueba. (1) $\Leftrightarrow$ (2) La prueba es completamente análoga a la que se dió en la Proposición (1.8).

(3) $\Rightarrow$ (1) Dado que $f|_U$ es un isomorfismo, existe su inverso $\alpha : W \to U$, por lo que se tiene un morfismo racional $g : Y \to X$ tal que $g|_W = \alpha$. Entonces, los morfismos racionales

$$f \circ g : Y \to Y \text{ y } g \circ f : X \to X,$$

que son la identidad en W y U, respectivamente. Finalmente, dado que tanto U como W son densos, $f \circ g = 1_Y$ y $g \circ f = 1_X$.

(1) $\Rightarrow$ (3) Construiremos U y W. Sea $g : Y \to X$ el morfismo racional inverso a f. Definimos $X' := \operatorname{dom} f$ e $Y' := \operatorname{dom}, g$; así, $\varphi := f|_{X'} : X' \to Y$ y $\psi := |_{Y'} : Y' \to X$ son morfismos racionales. Dado que $f \circ g = 1_Y$, entonces

$$\varphi(\psi(p)) = p, \text{ para todo } p \in \psi^{-1}(X'). \tag{2.3}$$

Se tiene, pues, el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
\psi^{-1}(X') \arrow[u, hook] \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, hook] & X' \arrow[u, hook] \arrow[r, "\psi"] & Y \arrow[u, equal] \\
& Y \arrow[ur, "Y"'] &
\end{tikzcd}$$

Definimos $U := \varphi^{-1}(\psi^{-1}(X'))$ y $W := \psi^{-1}(\varphi^{-1}(Y'))$. Si $Q \in U$, entonces $\varphi(Q) \in \psi^{-1}(X')$, y por (2.3), $\varphi(\psi(\varphi(Q))) = \varphi(Q)$. Entonces,

$$\varphi(Q) \in \psi^{-1}(\varphi^{-1}(Y')) = W;$$

de este modo, el morfismo $\varphi : U \to W$ es racional. Análogamente, $\psi : W \to U$ es un morfismo racional. Finalmente, note que φ y ψ son mutuamente inversos. $\square$

Proposición 2.4 *Todo conjunto algebraico irreducible $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ es birracionalmente equivalente a una hipersuperficie afín.*

Prueba. El campo $k_P(X)$ es una extensión finita de k, digamos, $k_P(X) := k(t_1, \ldots, t_n)$. Si d es la cantidad máxima de generadores de $k_P(X)$ que son algebraicamente independientes sobre k, por la Proposición (B.6) puede escribirse

$$k_P(X) = k(z_1, \ldots, z_{d+1}), \tag{2.4}$$

donde la familia $\{z_1, \ldots, z_d\}$ es algebraicamente independiente sobre k y además $f(z_1, \ldots, z_d) = 0$, para f irreducible sobre k y $f'_{x_{d+1}} \neq 0$. El campo de funciones $k(Y)$ que define (2.4), asociado al conjunto algebraic afín Y es isomorfo a $k_P(X)$. Por tanto, X es birracionalmente equivalente a Y. $\square$

Hasta este punto, hemos visto cómo asociar una extensión de campo finita de k a un conjunto algebraico proyectivo dado y la proposición anterior establece un método para construir un conjunto algebraico proyectivo a partir de una extensión de campo finita de k.

En el lenguaje de la Teoría de Categorías, denotamos por $\mathbf{C}\mathbb{P}_k$ a la categoría de conjuntos algebraicos cuasiproyectivos y morfismos racionales dominantes, mientras que $\mathbf{E}_k$ denota la categoría de las extensiones de campo de k de generación finita y morfismos k-lineales.

Hemos probado, pues, el siguiente resultado.

Teorema 2.3 *Dado el campo k, las categorías $\mathbf{C}\mathbb{P}_k$ y $\mathbf{E}_k$ son equivalentes.*

$\square$

Decimos que un conjunto algebraico cuasiproyectivo $X \subset \mathbb{P}^n_k$ es *racional* si es birracionalmente equivalente a $\mathbb{A}^n_k$ o a $\mathbb{P}^n_k$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.5 *Sea $X \subset \mathbb{P}^n_k$ cuasiproyectivo. Son equivalentes:*

1. *X es racional;*
2. *$k_P(X) \cong k(x_1, \ldots, x_r)$;*
3. *existen los conjuntos abiertos $U \subset X$ y $W \subset \mathbb{A}^r_k$, de modo que $U \cong W$.*

Prueba.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Dado que X es racional, se tiene un morfismo birracional

$$f : X \to \mathbb{A}^r_k,$$

para algún $r \in \mathbb{N}$. De acuerdo con la Proposición (2.3), existe tal f si y sólo si los campos $k_P(X)$ y $k(x_1, \ldots, x_r)$ son isomorfos.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) Nuevamente, por la Proposición (2.3), el morfismo $f : X \to \mathbb{A}^r_k$ es una equivalencia birracional si y sólo si existen los conjuntos abiertos $U \subset X$ y $W \subset \mathbb{A}^r_k$, de modo que $f|_U : U \to W$ es un isomorfismo. $\square$

2.5. Productos

Para definir el producto de conjuntos algebraicos proyectivos emplearemos *morfismos de Segre*, que definimos a continuación.

Dados $[x] := (x_1 : \cdots : x_{n+1}) \in \mathbb{P}_k^n$ e $[y] := (y_1 : \cdots : y_{m+1}) \in \mathbb{P}_k^m$, considere el morfismo

$$\sigma : \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m \to \mathbb{P}_k^N,$$

con $N = (n+1)(m+1) - 1$, definido por $\sigma([x],[y]) = (\cdots : x_i y_j : \dots)$, donde $1 \leq i \leq n+1$ y $1 \leq j \leq m+1$ toman todos los valores posibles.

Veamos que la imagen de σ, que denotamos por $\Sigma_{n,m}$, es un conjunto algebraico al que llamamos *variedad de Segre*.[7] En efecto, si denotamos las coordenadas de los puntos de $\Sigma_{n,m}$ por $z_{i,j}$, el conjunto $\Sigma_{m,n}$ está formado por los ceros comunes a los polinomios homogéneos de la forma $z_{i,j}z_{r,s} - z_{i,s}z_{r,j}$. En otros términos, toda variedad de Segre es el resultado de los ceros comunes a los menores de la matriz de 2 por 2 $(z_{i,j})$, como puede verse en el ejemplo siguiente.

Ejemplo. El conjunto algebraico

$$Y := \left\{ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_k^3 \, : \, \text{rango} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \leq 1 \right\}$$

es la variedad de Segre definida por el morfismo

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}_k^1 \to \mathbb{P}_k^3.$$

Es decir, $Y = \Sigma_{1,1}$. Observe que éste es el ejemplo 4 de la página 33 (la superficie reglada).

Hablando en general, se tiene el resultado siguiente.

Proposición 2.6 *Sean X e Y conjuntos algebraicos proyectivos. El producto $X \times Y$ es, de nuevo, algebraico proyectivo.*

Prueba. Suponga que $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ e $Y \subseteq \mathbb{P}_k^m$ están definidos por las familias de polinomios homogéneos $\{f_i\}$ y $\{g_j\}$, respectivamente, con $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq s$. Para cada valor de i y de j, definimos $d_i := \mathrm{gr}\, f_i$ y $e_j := \mathrm{gr}\, g_j$.

El conjunto $X \times Y \subseteq \mathbb{P}_k^n \times P_k^m$ está formado por los ceros comunes a las familias de polinomios $\{F_{il} := f_i y_l^{d_i}\}$ y $\{G_{jt} := g_j x_t^{e_j}\}$, con i y j como antes, pero $0 \leq l \leq m$ y $0 \leq t \leq n$. Al considerar como homogéneos a dichos polinomios, digamos $F_{il} = F_{il}(z_{\mu l})$ y $G_{jt} = G_{jt}(z_{t\nu})$, el sistema de ecuaciones homogéneas $z_{\mu\nu}z_{\rho\sigma} - z_{\mu\sigma}z_{\rho\nu} = 0$ define a $X \times Y$. □

[7] En la literatura es común que el concepto *variedad algebraica* (o siemplemente *variedad*) sea empleado para referirse a conjuntos algebraicos irreducibles, sean afines o proyectivos. Nosotros lo usaremos en un sentido más general, como veremos en el Capítulo 4.

Capítulo 3

Teoría de Gavillas

La Teoría de Gavillas ha sido considerada originalmente como parte de la Topología Algebraica y su nacimiento estuvo muy ligado a la noción de cohomología. El artículo que usualmente es citado como su origen es [Le1], pero no es sino hasta los trabajos [Le2], [Le3] y [Le4] de 1946, en los que J. Leray acuña el término *faisceau* (gavilla), cuyo significado no era precisamente el que conocemos ahora.

A partir de los trabajos de Poincaré, asociar objetos algebraicos a espacios geométricos o topológicos ha sido una herramienta bastante útil para obtener información de estos últimos. Por ejemplo, el *grupo de Poincaré*[1] de un espacio topológico describe el número de "agujeros" que éste posee. Así también, en una teoría de cohomología, se asocia espacios vectoriales (o módulos) a los espacios topológicos. Del ejempo concreto de la *cohomología de de Rham* (bien entendida en su tiempo), Leray extrae los axiomas que una teoría de cohomología debe verificar y entonces define una propia. En palabras llanas, su método consiste en asociar una teoría de cohomología a cualquier morfismo (función continua) entre espacios topológicos $X \to Y$. Ello presupone problemas fundamentales que resuelve introduciendo los conceptos de *gavilla* (faisceau), que permite la consideración de la cohomología de subespacios variables de X, y la noción de *sucesión espectral*, que permite calcularla bajo ciertas restricciones (temas que se salen de las pretenciones del presente trabajo).

Después de su publicación, transcurrirían algunos años para que los métodos de Leray fuesen aceptados y no es sino hasta principios de la década de 1950, en los trabajos de E. Cartan, A. Borel y J.P. Serre, en que se haría patente su importancia no solamente en Topología, sino en áreas como el Análisis Complejo, la Teoría de Categorías, las Ecuaciones Diferenciales y, por supuesto, la Geometría Algebraica.

El trabajo fundamental en el estudio de los conjuntos algebraicos desde el punto de vista de la Teoría de Gavillas es [Fac]. En él, Serre muestra que las variedades algebraicas afines son el análogo a las variedades de Stein[2], mientras que

[1] El grupo fundamental.

[2] El término "variedad" aquí es entendida como espacio topológico euclidiano con estructura

las variedades algebraicas proyectivas son el análogo a las variedades analíticas proyectivas. Puesto que un conjunto algebraico es un espacio topológico con la topología de Zariski, se usa entonces la Teoría de Gavillas como herramienta, en un intento por aplicar los métodos de la Topología Algebraica a dichos espacios. Un año después de la aparición de [Fac], Serre publica [Gaga], en el que prueba que para una variedad algebraica compleja no singular, las teorías analítica y compleja coinciden.

Por otro lado, la Teoría de Gavillas también desempeñó un papel fundamental en los trabajos de A. Grothendieck, quien, después de algunos intentos por parte de Chevalley, Weil y otros, establece la correcta generalización del concepto de variedad: los esquemas, concepto que será el objeto de estudio del siguiente capítulo.

En lo subsecuente, usamos el lenguaje de la Teoría de Categorías y tratamos primero las gavillas de conjuntos, para posteriormente tratar las gavillas de grupos, anillos y A-módulos.

3.1. Pregavillas de conjuntos

Dado el espacio topológico X, construimos la categoría $\mathbf{Top}\,(X)$ de la siguiente manera: como objetos, los subconjuntos abiertos de X, mientras que entre dos objetos U y V existe un morfismo siempre que uno esté contenido (como conjuntos) en el otro, digamos, $V \subseteq U$.

Definición 3.1 *Una* pregavilla *de conjuntos $\mathscr{F}$ sobre el espacio topológico X es un funtor contravariante*

$$\mathscr{F} : \mathbf{Top}\,(X) \to \mathbf{Con}.$$

Siempre que U y V sean objetos de $\mathbf{Top}\,(X)$*, donde $V \subseteq U$, llamamos* restricciones *a los morfismos $\rho_{UV} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ correspondientes.*

De manera análoga, diremos que $\mathscr{F}$ es una pregavilla de grupos abelianos, anillos o A-módulos, sobre X, si la categoría imagen de $\mathscr{F}$ es **Ab**, **An**, $A-$**Mód**, *respectivamente.*[3]

Nos referimos al conjunto (resp. grupo abeliano, anillo,...) $\mathscr{F}(U)$ que el funtor $\mathscr{F}$ asigna al subconjunto abierto U de X como las *secciones* de $\mathscr{F}$ sobre U. Observe que si los conjuntos $W \subseteq V \subseteq U$ son abiertos de X, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\rho_{UV}"] \arrow[dr, "\rho_{UW}"'] & \mathscr{F}(V) \arrow[d, "\rho_{VW}"] \\ & \mathscr{F}(W), \end{tikzcd}$$

compleja

[3]La categoría imagen puede ser reemplazada por cualquier categoría abeliana.

conmuta. Además, se tiene $1_U = \rho_{UU}$.

Con la finalidad de simplificar la notación, dada la sección $y \in \mathscr{F}(U)$ y $V \subseteq U$, escribimos $y|_V$ en vez de $\rho_{UV}(y)$.

Ejemplo. Dado el espacio topológico, X y W uno de sus abiertos, consideramos el conjunto de funciones continuas $f : W \to \mathbb{R}$ y lo denotamos por $C(W)$. Se tiene entonces una asignación $\Lambda : \mathbf{Top}\,(X) \to \mathbf{Con}$, donde $\Lambda(W) := C(W)$ y si $f \in V \subseteq W$, $\rho_{VW}(f) := f|_W$; Λ es entonces una pregavilla de conjuntos.

3.2. Secciones, tallos, gérmenes

La razón por la cual tratamos con pregavillas es por el puente que éstas proporcionan entre el espacio topológico X y las estructuras algebraicas asignadas cada uno de sus abiertos. Dado que nos interesamos en las propiedades locales del espacio topológico en cuestión, es deseable responder a la pregunta de si podemos hacer algo con las estructuras algebraicas asignadas a los conjuntos abiertos del espacio que nos proporcione información "algebraica" al respecto. Si se toma cierto punto $x \in X$, veremos que el proceso consistente en fijarse en vecindades V de x cada vez más "pequeñas" tiene su análogo en las estructuras algebraicas. Como se advierte en la sección A.2.2, dada la pregavilla de conjuntos $\mathscr{F}$ sobre X, la familia $\{\mathscr{F}(V)\}$ indizada por el conjunto de abiertos de X es un sistema dirigido de conjuntos, con lo cual tiene sentido establecer la siguiente definición.

Definición 3.2 *Sea $x \in X$. Definimos el* tallo *de $\mathscr{F}$ en el punto x como*[4]

$$\mathscr{F}_x := \varinjlim_{x \in V} \mathscr{F}(V).$$

Dada la sección $\sigma \in \mathscr{F}(U)$, con $x \in U$, ésta define un elemento $\sigma_x \in \mathscr{F}_x$ a través del morfismo canónico $\eta_x : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_x$. Decimos entonces que σ_x es el germen *de σ en $\mathscr{F}_x$.*

De esta manera, la estructura algebraica que nos proporciona información sobre las propiedades locales en el punto x es el tallo $\mathscr{F}_x$.

Ejemplo. En el ejemplo dado anteriormente, dado $x \in X$, el tallo de Λ en x es el conjunto

$$\Lambda_x := \{f \in C(X) \,:\, f \text{ es continua en } x\}.$$

En este caso, dado el abierto W de X y $x \in W$, el germen de la sección $f \in \Lambda(W)$ en x es la restricción $f_x := f|_{\{x\}}$.

[4]En el Apéndice A encontrará la definición de límite directo.

3.3. Morfismos de pregavillas

Definición 3.3 *Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ pregavillas de conjuntos sobre X. Un* morfismo de pregavillas $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *es una transformación natural entre los funtores $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$.*

En otras palabras, el morfismo φ está determinado por la colección de morfismos $\varphi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$, indizada por los subconjuntos abiertos de X, de manera que los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho_{UV}"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\rho'_{UV}"] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] & \mathscr{G}(V), \end{tikzcd}$$

conmutan siempre que $V \subseteq U$.

Ejemplo. Considere nuevamente la pregavilla Λ de antes. Dada $f \in C(X)$, definimos el *soporte* de f como el conjunto

$$\mathrm{sop}\,(f) := \{y \in X \,:\, f(y) \neq 0\}.$$

Considere entonces el funtor $\Delta : \mathbf{Top}\,(X) \to \mathbf{Con}$ definido en cada abierto U de X por

$$\Delta(U) := \bigcup_{f \in C(U)} \mathrm{sop}\,(f).$$

El morfismo $\varphi : \Lambda \to \Delta$, definido por $\varphi_U : \Lambda(U) \to \Delta(U)$, es un morfismo de pregavillas.

Ahora bien, ¿puede darse a la familia de pregavillas de conjuntos sobre un espacio topológico X dado (junto con sus morfismos) estructura de categoría? La respuesta es afirmativa, pero para convencernos de ello, debemos probar que dado el morfismo $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ y $W \subseteq V \subseteq U$ abiertos de X, se tiene $\varphi(\rho_{VW} \circ \rho_{UV}) = \varphi(\rho_{VW}) \circ \varphi(\rho_{UV})$. El siguiente lema prueba éso y un poco más.

Lema 3.1 *Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de pregavillas sobre X.*

1. *El morfismo φ induce un único morfismo $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ en los tallos, para cada $x \in X$, de manera que $\varphi_x(\sigma_x) = (\varphi(\sigma))_x$ para cada sección σ de $\mathscr{F}$ sobre alguna vecindad de x.*

2. $[1_{\mathscr{F}}]_x = 1_{\mathscr{F}_x}$.

3. *Si $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ es otro morfismo de pregavillas sobre X, entonces*

$$(\psi \circ \varphi)_x = \psi_x \circ \varphi_x.$$

Prueba.

1. Considere el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(W) \arrow[r, "\varphi_W"] \arrow[d, "\eta_x"'] & \mathscr{G}(W) \arrow[d, "\eta_x"] \\ \mathscr{F}_x \arrow[r, "\varphi_x"] & \mathscr{G}_x \end{tikzcd}$$

La unicidad del morfismo φ_x se sigue de advertir que cualquier elemento $t \in \mathscr{F}_x$ puede ser escrito en la forma $t = \sigma_x$, para alguna sección $\sigma \in \mathscr{F}(V)$, con V algún abierto de X que contiene a x. La existencia quedará probada si dadas las secciones $\sigma \in \mathscr{F}(U)$ y $\tau \in \mathscr{F}(V)$, con U y V abiertos de X que contienen a x, de modo que $\sigma_x = \tau_x$, entonces $[\varphi(\sigma)]_x = [\varphi(\tau)]_x$. En efecto, si $\sigma_x = \tau_x$, existe una vecindad $W \subseteq V \cap U$ de modo que $\sigma|_W$ y $\tau|_W$ existen y son iguales. Así, $\varphi(\sigma)|_W = \varphi(\sigma|_W) = \varphi(\tau|_W) = \varphi(\tau)|_W$. Por tanto, $[\varphi(\sigma)]_x = [\varphi(\tau)]_x$.

2. El morfismo identidad $1_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ induce el morfismo $[1_{\mathscr{F}}]_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}_x$, es decir, $[1_{\mathscr{F}}]_x = 1_{\mathscr{F}_x}$.

3. Por el inciso 1 anterior, dado cualquier W abierto de X que contiene a x, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(W) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\eta_x"] & \mathscr{G}(W) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\eta_x"] & \mathscr{H}(W) \arrow[d, "\eta_x"] \\ \mathscr{F}_x \arrow[r, "\varphi_x"] & \mathscr{G}_x \arrow[r, "\psi_x"] & \mathscr{H}_x \end{tikzcd}$$

es conmutativo. □

Cuando nos fijamos en los tallos de una pregavilla $\mathscr{F}$, generalmente se pierde información acerca de ésta. Para analizar dicha pérdida se introduce su *pregavilla de secciones discontinuas* $[\mathscr{F}]$, definida en cada conjunto abierto V de X de la siguiente manera:

$$[\mathscr{F}](V) := \prod_{v \in V} \mathscr{F}_v.$$

Por tanto, una sección $\tau \in [\mathscr{F}](V)$ es de la forma $(\tau_v)_{v \in V}$, donde $\tau_v \in \mathscr{F}_v$. Siempre que U y V sean abiertos de X tales que $U \subseteq V$, las restricciones para esta pregavilla están dadas por el morfismo

$$\begin{array}{rccc} \rho_{VU}: & [\mathscr{F}](V) & \longrightarrow & [\mathscr{F}](U) \\ & (\tau_v)_{v\in V} & \longmapsto & (\tau_u)_{u\in U}. \end{array}$$

El siguiente resultado proporciona una relación entre una pregavilla $\mathscr{F}$ sobre X y su pregavilla de secciones discontinuas $[\mathscr{F}]$.

Lema 3.2

1. *La asignación $\lambda : \mathscr{F} \to [\mathscr{F}]$, definida en cada conjunto abierto V de X como $\lambda_V(\sigma) = (\sigma_v)_{v\in V}$, es un morfismo de pregavillas.*

2. *Si $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un morfismo de pregavillas, existe un único morfismo*

$$[\varphi] : [\mathscr{F}] \to [\mathscr{G}]$$

que hace conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\lambda"'] & \mathscr{G} \arrow[d, "\lambda"] \\ {[\mathscr{F}]} \arrow[r, "{[\varphi]}"] & {[\mathscr{G}]}. \end{tikzcd}$$

3. $[1_{\mathscr{F}}] = 1_{[\mathscr{F}]}$.

4. *Si $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ es otro morfismo de pregavillas, entonces*

$$[\psi \circ \varphi] = [\psi] \circ [\varphi].$$

Prueba.

1. Sea U abierto de V. Dada $\sigma \in \mathscr{F}(V)$, debemos mostrar que $\lambda(\sigma|_U) = \lambda(\sigma)|_U$, es decir, que $(\sigma|_U)_u = \sigma_u$, para toda $u \in U$. Pero esta última igualdad se verifica siempre.

2. Sea V abierto de X. Definimos $[\varphi]_V : [\mathscr{F}](V) \to [\mathscr{G}](V)$ en cada sección $(\tau_v)_{v\in V}$ como

$$[\varphi]_V((\tau_v)_{v\in V}) := (\varphi_v(\tau_v))_{v\in V} \in [\mathscr{G}](V).$$

Por el Lema (3.1), ésta es la única manera de definir $[\varphi]_V$ para hacer conmutar los diagramas.

Para advetir que $[\varphi]$ es un morfismo, dado U abierto de V debemos probar el que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[\mathscr{F}](V)} \arrow[r, "{[\varphi]_V}"] \arrow[d] & {[\mathscr{G}](V)} \arrow[d] \\
{[\mathscr{F}](U)} \arrow[r, "{[\varphi]_U}"'] & {[\mathscr{G}](U)}
\end{tikzcd}.$$

conmuta, es decir, que dada la sección $\tau \in [\mathscr{F}](V)$, se tiene

$$[\varphi]_U(\tau|_U) = [\varphi]_V(\tau)|_U .$$

Es suficiente observar que

$$[\varphi]_U(\tau|_U) = [\varphi]_U((\tau_u)_{u\in U}) = (\varphi_u(\tau_u))_{u\in U} = (\varphi_v(\tau_v))_{v\in V}|_U = [\varphi]_V(\tau)|_U .$$

3. Es claro.

4. Sea V abierto de X. De acuerdo con el inciso 2 anterior, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "\lambda"'] & \mathscr{G}(V) \arrow[r, "\psi_V"] \arrow[d, "\lambda"'] & \mathscr{H}(V) \arrow[d, "\lambda"'] \\
{[\mathscr{F}](V)} \arrow[r, "{[\varphi]_V}"] & {[\mathscr{G}](V)} \arrow[r, "{[\psi]_V}"] & {[\mathscr{H}](V)}
\end{tikzcd}$$

conmuta. En particular, $[\psi_V \circ \varphi_V]_V = [\psi]_V \circ [\varphi]_V$, para cada elección del abierto V. □

Una medida de analizar la pérdida de información al pasar a los tallos es la siguiente.

Lema 3.3 *Dadas $\sigma, \tau \in \mathscr{F}(V)$ para algún subconjunto abierto V de X, $\sigma_v = \tau_v$ para todo $v \in V$ si y sólo si existe una cubierta abierta $\{V_i\}_{i\in I}$ de V tal que $\sigma|_{V_i} = \tau|_{V_i}$, para cada $i \in I$.*

Prueba. Sean $\sigma, \tau \in \mathscr{F}(V)$. Si $V = \bigcap_i V_i$ es una cubierta tal que $\sigma|_{V_i} = \tau|_{V_i}$ para todo $i \in I$ y se fija $v \in V$, basta tomar V_j tal que $v \in V_j$; para dicho índice se tendrá $\sigma|_{V_j} = \tau|_{V_j}$ y, por tanto, $\sigma_v = \tau_v$.

Por otro lado, construiremos una cubierta de V con la propiedad requerida. Dado $x \in V$, por hipótesis, $\sigma_x = \tau_x$. Por tanto, existe un abierto W_x de x y contenido en V tal que $\sigma|_{W_x} = \tau|_{W_x}$ (por la definición de límite directo). La cubierta que buscamos es $V = \bigcup_{x\in V} W_x$. □

De entre las pregavillas de conjuntos $\mathscr{F}$ sobre cierto espacio topológico X, fijamos nuestra atención en aquéllas cuyas secciones $\sigma \in \mathscr{F}(U)$ están determinadas por su comportamiento local. Las llamamos *decentes*, como se precisa a continuación.

Sea $\mathscr{F}$ una pregavilla y considere el par de secciones $\sigma, \tau \in \mathscr{F}(V)$. Diremos que $\mathscr{F}$ es *decente* si para cada $v \in V$, $\sigma_v = \tau_v$ implica $\sigma = \tau$.[5]

3.4. Gavillas

Sea $\mathscr{F}$ una pregavilla sobre X y dado el abierto U de X, $\{V_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta arbitraria para éste. Tome cualquier familia de secciones $\{\sigma_i \in \mathscr{F}(V_i)\}_{i\in I}$, de modo que para cada $i, j \in I$ distintos entre sí, con $V_i \cap V_j \neq \varnothing$, se verifique

$$\sigma_i|_{V_i \cap V_j} = \sigma_j|_{V_i \cap V_j}.$$

Si existe $\sigma \in \mathscr{F}(V)$ tal que $\sigma|_{V_i} = \sigma_i$ con la propiedad anterior, decimos que $\mathscr{F}$ satisface la condición de *pegado*.

Definición 3.4 *Una pregavilla de conjuntos $\mathscr{F}$ sobre X es una* gavilla *de conjuntos si es decente y satisface la condición de pegado.*

Ejemplos.

1. Sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un conjunto algebraico afín irreducible. El funtor

   $$\mathcal{A} : \mathbf{Top}\,(X) \to \mathbf{\acute{A}lgAf}_k,$$

   que a cada abierto U de X asigna el anillo

   $$\mathcal{A}(U) = \{f : U \to k \,:\, f \text{ es regular en } U\},$$

   es una gavilla. Antes de probar esta aseveración, observe que para cada $p \in X$, el tallo de $\mathcal{A}$ en p está dado por

   $$\mathcal{A}_p := \varinjlim_{p\in U} \mathcal{A}(U) = \{f : X \to k \,:\, f \text{ es regular en } p\}.$$

   Recordemos, también, que el anillo $\mathcal{A}_p$ es local y que para cada $p \in U$ se tiene un morfismo $\nu_{U,p} : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}_p$, que asigna a cada sección $\sigma \in \mathcal{A}(U)$ su germen $\sigma_p \in \mathcal{A}_p$.

   Considere, pues, σ y τ dos secciones en $\mathcal{U}$ y $p \in U$. Suponer que $\sigma_p = \tau_p \in \mathcal{A}_p$ para todo $p \in U$, significa que tanto $\sigma|_{\{p\}}$ como $\tau|_{\{p\}}$ son regulares

[5] De acuerdo con el lema anterior, esto sucede si y sólo si existe una cubierta abierta $\{V_i\}_{i\in I}$ de V tal que $\sigma|_{V_i} = \tau|_{V_i}$ para todo $i \in I$.

para todo $p \in U$ y que, además, coinciden. Por tanto, σ y τ son regulares en U y $\sigma = \tau$. Es decir, la pregavilla $\mathcal{A}$ es decente.

Sea $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ una cubierta abierta para el abierto U de X y $\{\sigma_i\}_{i \in I}$ una familia de secciones, donde cada $\sigma_i \in \mathcal{A}(V_i)$, tal que

$$\sigma_i|_{V_i \cap V_j} = \sigma_j|_{V_i \cap V_j}, \tag{3.1}$$

con $i \neq j$ y $V_i \cap V_j \neq \varnothing$. Basta considerar $\sigma \in \mathcal{A}(U)$ definida en cada $p \in U$ como $\sigma(p) = \sigma_i(p)$, donde $i \in I$ es tal que $p \in V_i$. De este modo, por la condición (3.1), σ está bien definida y es tal que $\sigma|_{V_j} = \sigma_j$, para todo $j \in I$. La pregavilla $\mathcal{A}$ satisface así la condición de pegado.

2. Considere el espacio topológico $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^* / \sim$, donde $(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1)$ en C^* siempre que exista $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $w_i = \lambda z_i$, $i = 0, 1$. Observe que se tienen dos abiertos U_0 y U_1 de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, para los que $z_0 \neq 0$ y $z_1 \neq 0$, respectivamente, cada uno de los cuales es homeomorfo a $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C}, \\ (1, z) & \mapsto & z, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C}, \\ (u, 1) & \mapsto & u. \end{array}$$

El funtor $\mathcal{H} : \mathbf{Top}\,(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \to \mathbf{AnC}$, definido en cada abierto U de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ por

$$\mathcal{H}(U) := \{f : U \to \mathbb{C} \,:\, f|_{U \cap U_0} \text{ y } f|_{U \cap U_1} \text{ son holomorfas}\},$$

es una gavilla.

Proposición 3.1 *Sea $\mathscr{F}$ pregavilla sobre X. La pregavilla de secciones discontinuas $[\mathscr{F}]$ es una gavilla sobre X.*

Prueba. Sea U abierto de X y $\sigma, \tau \in [\mathscr{F}](U)$. Entonces, $\sigma = (\sigma_t)_{t \in U}$ y $\tau = (\tau_t)_{t \in U}$. Dado que para cada $p \in U$ se tiene

$$[\mathscr{F}]_p := \varinjlim_{p \in U} [\mathscr{F}](U) = \varinjlim_{p \in U} \left(\prod_{U \in U} \mathscr{F}_u \right) \cong \mathscr{F}_p,$$

los tallos σ_p y τ_p son precisamente las coordenadas p-ésimas de las expresiones $(\sigma_t)_{t \in U}$ y $(\tau_t)_{t \in U}$, respectivamente. Por tanto, si $\sigma_p = \tau_p$ para cada p, es claro que $sigma = (\sigma_t)_{t \in U} = (\tau_t)_{t \in U} = \tau$. Esto es, $[\mathscr{F}]$ es decente.

Sea $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ una cubierta abierta arbitraria y $\{\sigma_i\}_{i \in I}$ una familia de secciones, con $\sigma_i \in [\mathscr{F}](V_i)$ para cada i, de modo que

$$\sigma_i|_{V_i \cap V_j} = \sigma_j|_{V_i \cap V_j}. \tag{3.2}$$

Escribirmos $\sigma_i := (\sigma_{i,v})_{v \in V_i}$ y $\sigma_j := (\sigma_{j,v})_{v \in V_j}$, donde leemos $\sigma_{i,v}$ como la coordenadas v-ésima de la sección σ_i. Reescribimos entonces la condición (3.2) como

$$(\sigma_{i,v})_{v \in V_i \cap V_j} = (\sigma_{j,v})_{v \in V_i \cap V_j}.$$

Así, elegimos la sección global $\sigma := (\sigma_u)_{u\in U} \in [\mathscr{F}](U)$ de la siguiente manera: dado que $\{V_i\}_{i\in I}$ es cubierta de U, para cada $u \in U$ existe $j \in I$ tal que $u \in V_j$, entonces elegimos $sigma_u := \sigma_{j,u}$, la u-ésima coordenada de la sección σ_j. Nuevamente, por la condición (3.2), σ está bien definida y, por su construcción, es claro que $\sigma|_{V_j} = \sigma_j$, para cada $j \in I$. De este modo, $[\mathscr{F}]$ satisface la condición de pegado. □

Proposición 3.2 *Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de gavillas sobre X. Éste es un isomorfismo si y sólo si los morfismos inducidos en los tallos $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ también lo son para cada $x \in X$.*

Prueba. Si φ es isomorfismo, por supuesto, φ_x también lo es para cada $x \in X$. Y al contrario, suponga que cada φ_x es isomorfismo. Se tiene un morfismo $\varphi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ para cada abierto U de X. Veamos que cada φ_U es inyectivo: tome $\sigma \in \mathscr{F}(U)$ y $\tau \in \mathscr{F}(V)$ y suponga que $\varphi_W(\sigma|_W) = \varphi_W(\tau|_W) \in \mathscr{G}(W)$, para algún abierto W de $U \cap V$. Así, para cada $x \in W$,

$$[\varphi_W(\sigma|_W)]_x = \varphi_x(\sigma_x) = \varphi_x(\tau_x) = [\varphi_W(\tau|_W)]_x \in \mathscr{G}_x$$

y puesto que φ_x es inyectivo para cada x, entonces $\sigma_x = \tau_x \in \mathscr{F}_x$ para cada x. Dado que $\mathscr{F}$ es gavilla, en particular, es decente, por lo que $\sigma|_W = \tau|_W$, es decir, φ_W es inyectivo.

Dado el abierto U de X, considere τ una sección en $\mathscr{G}(U)$. Puesto que para cada $x \in U$, la función $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ es suprayectiva y $\tau_x \in \mathscr{G}_x$, existe $m \in \mathscr{F}_x$ tal que $\varphi_x(m) = \tau_x$. Tome V una vecindad de x, con $V \subseteq U$, y $\sigma \in \mathscr{F}(V)$ de modo que $\sigma_x = m$. Así, $\varphi_V(\sigma)$ y $\tau|_V$ pertenecen a $\mathscr{G}(V)$ y son tales que $[\varphi_V(\sigma)]_x = [\tau|_V]_x$. Dado que $\mathscr{G}$ es gavilla, existe un abierto W_x de V tal que

$$[\varphi_V(\sigma)]|_{W_x} = \varphi_{W_x}(\sigma|_{W_x}) = \tau|_{W_x}.$$

De este modo, hemos construido una cubierta $U = \bigcup_{x\in U} W_x$ y se tiene una familia de secciones $s(x) := \sigma|_{W_x} \in W_x$. Ahora bien, dados $x, y \in U$, las secciones $s(x)|_{W_x\cap W_y}$, $s(y)|_{W_x\cap W_y} \in \mathscr{F}(W_x \cap W_y)$ son tales que sus imágenes bajo $\varphi_{W_x\cap W_y}$ coinciden y su valor es $\tau|_{W_x\cap W_y}$. Como se probó en el párrafo anterior, $\varphi_{W_x\cap W_y}$ es inyectiva, por lo que $s(x)|_{W_x\cap W_y} = s(y)|_{W_x\cap W_y}$.

Nuevamente, puesto que $\mathscr{F}$ es gavilla, se tiene una sección global $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s|_{W_x} = s(x)$ para cada $x \in U$, y dado que

$$\varphi_x(s_x) = \varphi_x([s(x)]_x) = \tau_x,$$

entonces $\varphi_U(s) = \tau$; es decir, φ_U es inyectiva. □

Sea X un espacio topológico. Dadas dos pregavillas (resp. gavillas) de conjuntos $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$, ambas sobre X, decimos que $\mathscr{F}$ es *subpregavilla* (resp. *subgavilla*) de $\mathscr{G}$ si para cada conjunto abierto U de X, $\mathscr{F}(U) \subseteq \mathscr{G}(U)$ y, dados $V \subseteq U$ abiertos de X, los morfismos restricción de $\mathscr{F}$ son $\rho_{UV}|_{\mathscr{F}(U)}$, donde ρ_{UV} es la restricción correspondiente a $\mathscr{G}$.

EJEMPLO. Si $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es un conjunto algebraico afín, la gavilla $X \mapsto k[X]$ (de funciones polinomiales sobre X) es una subgavilla de la gavilla de funciones racionales $X \mapsto k(X)$ con las restricciones de funciones. Veremos más adelante que la gavilla $X \mapsto k[X]$ es el ejemplo típico de *gavilla estructural* o *gavilla de funciones regulares* en X, que denotaremos por $\mathcal{O}_X$.

3.5. La gavilla asociada a una pregavilla

Dada la pregavilla $\mathscr{F}$ sobre X, denotaremos por λ al morfismo $\mathscr{F} \to [\mathscr{F}]$, que en cada abierto V de X el morfismo correspondiente

$$\lambda_V : \mathscr{F}(V) \to [\mathscr{F}](V) := \prod_{v \in V} \mathscr{F}_v$$

está dado por $\lambda_V(\sigma) = (\sigma_v)_{v \in V}$.

Ahora bien, ¿bajo qué condiciones es posible construir (asociar) una gavilla a una pregavilla dada? El siguiente lema nos ayudará a dar una respuesta.

LEMA 3.4 *Sean $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ pregavillas de conjuntos sobre X y $x \in X$ un punto arbitrario.*

(a) *Si $\mathscr{F}$ es subpregavilla de $\mathscr{G}$, entonces $\mathscr{F}_x \subseteq \mathscr{G}_x$.*

(b) *Una subpregavilla de una pregavilla decente es decente.*

(c) *Si $\mathscr{F}$ es subpregavilla de una gavilla $\mathscr{G}$, existe una subgavilla mínima $\mathscr{H}$ de $\mathscr{G}$ que contiene a $\mathscr{F}$. De este modo, $\mathscr{F}_x = \mathscr{H}_x$.*

(d) *Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ morfismo de pregavillas. Para cada subconjunto abierto V de X definimos $\mathscr{F}_\varphi(V) := \varphi_V(\mathscr{F}(V)) \subseteq \mathscr{G}(V)$. Entonces, $\mathscr{F}_\varphi$ es subpregavilla de $\mathscr{G}$ e $\operatorname{Im}\varphi_x = \mathscr{F}_{\varphi,x}$.*

PRUEBA.

(a) Dados el abierto U de X y x un punto arbitrario en U, los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "i_U"] \arrow[d] & \mathscr{G}(U) \arrow[d] \\ \mathscr{F}_x \arrow[r, "i_x"] & \mathscr{G}_x \end{tikzcd}$$

conmutan, donde cada i_U es la inclusión natural de conjuntos e i_x es el morfismo inducido en los tallos. Probaremos que i_x es inyectivo. Sean $\sigma, \tau \in \mathscr{F}(U) \subseteq \mathscr{G}(U)$, y, considerándolas como secciones de $\mathscr{G}(U)$, suponga que $\sigma_x = \tau_x \in \mathscr{G}_x$. Por tanto, existe W abierto de U tal que $\sigma|_W = \tau|_W$. Puesto que los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "i_U"] \arrow[d] & \mathscr{G}(U) \arrow[d] \\ \mathscr{F}(W) \arrow[r, "i_W"] & \mathscr{G}(W) \end{tikzcd}$$

también conmutan, entonces $\sigma|_W = \tau|_W$ consideradas como secciones de $\mathscr{F}(W)$. Por tanto, $\sigma_x = \tau_x \in \mathscr{F}_x$, como se quería probar.

(b) Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ pregavillas sobre X, $\mathscr{G}$ decente y V abierto arbitrario de X. Considere el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\lambda_V"] \arrow[d, "i_V"'] & {[\mathscr{F}](V)} \arrow[d, "i'_V"] \\ \mathscr{G}(V) \arrow[r, "\lambda'_V"] & {[\mathscr{G}](V),} \end{tikzcd}$$

donde i_V e i'_V son inclusiones naturales de conjuntos. Dadas dos secciones $\sigma, \tau \in \mathscr{F}(V)$, debemos probar que $\sigma_v = \tau_v \in \mathscr{F}_v$ implica que $\sigma = \tau$. En efecto, si se considera a σ y τ como elementos de $\mathscr{G}(V)$ y se supone que $\lambda'_V(\sigma) = \lambda'_V(\tau) \in [\mathscr{G}](V)$, entonces $(\sigma_v)_{v\in V} = (\tau_v)_{v\in V}$, es decir, $\sigma_v = \tau_v$, para todo $v \in V$. Esta última condición, dada la decencia de $\mathscr{G}$, implica que $\sigma = \tau$; hemos probado que el morfismo $\lambda' : \mathscr{G} \to [\mathscr{G}]$ es inyectivo. Como $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$, en virtud del inciso anterior, $\mathscr{F}_v \subseteq \mathscr{G}_v$, para todo $v \in V$, de modo que habiendo tomado σ y τ en $\mathscr{F}(V)$, podemos considerar $\sigma_v = \tau_v \in \mathscr{F}_v$ y, de este modo, también el morfismo $\lambda : \mathscr{F} \to [\mathscr{F}]$ es inyectivo, que, junto a la igualdad anterior, significa que $\sigma = \tau \in \mathscr{F}(V)$, es decir, que $\mathscr{F}$ es decente.

(c) Sea V abierto de X. Dado que $\mathscr{H}$ debe ser subgavilla de $\mathscr{G}$, se debe tener $\mathscr{F}(V) \subseteq \mathscr{H}(V) \subseteq \mathscr{G}(V)$ y $\mathscr{H}(V)$ debe contener las secciones en $\mathscr{G}(V)$ que son obtenidas "pegando" secciones de $\mathscr{F}$. Definimos, pues, $\mathscr{H}(V)$ como el conjunto de todas las secciones $\sigma \in \mathscr{G}(V)$ tales que $\sigma|_{V_i} \in \mathscr{F}(V_i)$ para todo $i \in I$ y para alguna cubierta $V = \bigcup_{i\in I} V_i$.

Para mostrar que $\mathscr{H}$ es subpregavilla de $\mathscr{G}$, veamos que dado el abierto U de V el morfismo $\rho_{VU} : \mathscr{G}(V) \to G(U)$ restringido a $\mathscr{H}(V)$ es tal que $\operatorname{Im} \rho|_{\mathscr{H}(V)} \subseteq \mathscr{H}(U)$. Observe que, dada la cubierta $V = \bigcup_{i\in I} V_i$, puede construirse otra cubierta $U = \bigcup_{i\in I}(U \cap V_i)$. Tome, pues, $\sigma \in \mathscr{H}(V) \subseteq \mathscr{G}(V)$ y como $\mathscr{G}$ es gavilla, satisface la condición de pegado, es decir,

$$(\sigma|_U)|_{U\cap V_i} = (\sigma|_{V_i})|_{U\cap V_i}.$$

Dado que tomamos $\sigma \in \mathscr{H}(V)$, entonces

$$(\sigma|_U)|_{U\cap V_i} = (\sigma|_{V_i})|_{U\cap V_i} \in \mathscr{F}(U \cap V_i)$$

y por como se definió $\mathscr{H}$, esto quiere decir que $\sigma|_U \in \mathscr{H}(U)$.

Por otra parte, en virtud del inciso anterior, $\mathscr{H}$ es decente. Hace falta probar que $\mathscr{H}$ satisface la condición de pegado. Sea $\{W_j\}_{j\in J}$ una cubierta abierta para el abierto W de X. Dada la familia de secciones $\sigma_j \in \mathscr{H}(W_j) \subseteq \mathscr{G}(W_j)$ que satisfacen

$$\sigma_j|_{W_j\cap W_r} = \sigma_r|_{W_j\cap W_r} \in \mathscr{H}(W_j \cap W_r) \subseteq \mathscr{G}(W_j \cap W_r),$$

dado que $\mathscr{G}$ es gavilla, existe $\sigma \in \mathscr{G}(W)$ tal que $\sigma|_{W_j} = \sigma_j$. Debemos ver que, en realidad, $\sigma \in \mathscr{H}(W)$. En efecto, dado que $\sigma_j \in \mathscr{H}(W_j)$, se tiene una cubierta $W_j = \cup_{t\in T} W_{j,t}$ para cada $j \in J$, tal que $\sigma_j \in \mathscr{G}(W_j)$ verifica $\sigma_j|_{W_{j,t}} \in \mathscr{F}(W_{j,t})$. Note que se tiene, entonces, una nueva cubierta

$$W = \bigcup_{j\in I,\, t\in T} W_{j,t}$$

y σ satisface así la definición de $\mathscr{H}(W)$, es decir, $\sigma \in \mathscr{H}(W)$.

(d) De nueva cuenta, dados los abiertos $V \subseteq U$ de X, si $\sigma \in \mathscr{F}_\varphi(V) \subseteq \mathscr{G}(V)$, entonces $\varphi_V(\sigma)|_U \in \mathscr{G}(U)$ y es tal que $\varphi_V(\sigma)|_U = \varphi_U(\sigma|_U) \in \mathscr{F}_\varphi(U)$, donde $\sigma|_U \in \mathscr{F}(U)$. Por tanto, $\mathscr{F}_\varphi$ es subpregavilla de $\mathscr{G}$.

Ahora bien, los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d] & \mathscr{F}_\varphi(V) \arrow[d] \\ \mathscr{F}_x \arrow[r, "\varphi_x"] & \mathscr{F}_{\varphi,x} \end{tikzcd}$$

conmutan para todo abierto V de X y todo $x \in V$. Por tanto, es claro que $\operatorname{Im}\varphi_x = \mathscr{F}_{\varphi,x}$. □

Dada una pregavilla $\mathscr{F}$ sobre X, denotaremos por $\mathscr{F}^\flat$ a la subpregavilla $\mathscr{F}_\lambda$ de $[\mathscr{F}]$, donde λ es el morfismo de pregavillas $\mathscr{F} \to D[\mathscr{F}]$. La subgavilla mínima de $[\mathscr{F}]$ que contiene a $\mathscr{F}^\flat$ será denotada por $\mathscr{F}^\sharp$.

Lema 3.5 *Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ pregavillas de conjuntos sobre X.*

(a) *Se tienen los morfismos de pregavillas $\mathscr{F} \to \mathscr{F}^\flat \hookrightarrow \mathscr{F}^\sharp \hookrightarrow [\mathscr{F}]$. Para cada punto $x \in X$, los morfismos inducidos en los tallos $\mathscr{F}_x \xrightarrow{\cong} \mathscr{F}^\flat_x \xrightarrow{\cong} \mathscr{F}^\sharp_x$ son isomorfismos. Además, $\mathscr{F}^\flat$ es decente.*

(b) *Si $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es morfismo de pregavillas, existen los morfismos*

$$\varphi^\flat : \mathscr{F}^\flat \to \mathscr{G}^\flat \qquad y \qquad \varphi^\sharp : \mathscr{F}^\sharp \to \mathscr{G}^\sharp,$$

únicos tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \mathscr{F}^\flat \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^\flat"] & \mathscr{F}^\sharp \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^\sharp"] & {[\mathscr{F}]} \arrow[d, "{[\varphi]}"] \\ \mathscr{G} \arrow[r] & \mathscr{G}^\flat \arrow[r] & \mathscr{G}^\sharp \arrow[r] & {[\mathscr{G}]} \end{tikzcd}$$

conmuta.

(c) *Se tiene $(1_{\mathscr{F}})^\flat = 1_{\mathscr{F}^\flat}$ y $(1_{\mathscr{F}})^\sharp = 1_{\mathscr{F}^\sharp}$.*

(d) *Si $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ es otro morfismo de pregavillas, entonces*

$$(\psi \circ \varphi)^\flat = \psi^\flat \circ \varphi^\flat \qquad y \qquad (\psi \circ \varphi)^\sharp = \psi^\sharp \circ \varphi^\sharp.$$

Prueba.

(a) Como hemos visto, $[\mathscr{F}]$ es gavilla sobre X y el morfismo $\lambda : \mathscr{F} \to [\mathscr{F}]$ es tal que para cada abierto U de X, $\lambda_U : \mathscr{F}(U) \to [\mathscr{F}](U)$ asigna a cada $\sigma \in \mathscr{F}(U)$ la sección $(\sigma_v)_{v \in U} \in \prod_{v \in V} \mathscr{F}_v$. Como se ha dicho, $\mathscr{F}^\flat$ es el funtor definido por $\mathscr{F}^\flat(U) := \lambda_U(\mathscr{F}(U)) \subseteq [\mathscr{F}](U)$. Es claro que $\mathscr{F}^\flat$ es subpregavilla de $[\mathscr{F}]$. En virtud del lema anterior, existe una subgavilla mínima $\mathscr{F}^\sharp$ de $[\mathscr{F}]$ que contiene a $\mathscr{F}^\flat$, cuyas secciones $\mathscr{F}^\sharp(U)$ son todas aquellas $\sigma \in [\mathscr{F}](U)$ tales que $\sigma|_{U_i} \in \mathscr{F}^\flat(U_i)$, para todo $i \in I$ de alguna cubierta $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. De este modo, se tienen los morfismos

$$\mathscr{F} \xrightarrow{\lambda} \mathscr{F}^\flat \hookrightarrow \mathscr{F}^\sharp \hookrightarrow [\mathscr{F}].$$

Por el inciso (c) del lema anterior, $\mathscr{F}^\flat_x = \mathscr{F}^\sharp_x$, para todo $x \in X$.

Por otro lado, según el inciso (d), también del lema anterior, los morfismos $\lambda_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}^\flat_x$ son suprayectivos, para todo $x \in X$. Veamos que también son inyectivos. Sean $a, b \in \mathscr{F}_x$ tales que $\lambda_x(a) = \lambda_x(b)$. Existe entonces un abierto W de X que contiene a x tal que $\eta_{W,x}(y) = \lambda_x(a) = \lambda_x(b)$, para algún $y \in \mathscr{F}^\flat(W)$, siendo $\eta_{W,x} : \mathscr{F}^\flat(W) \to \mathscr{F}^\flat_x$ el morfismo canónico.

Luego, dado que el morfismo $\lambda_W : \mathscr{F}(W) \to \mathscr{F}^\flat(W)$ es suprayectivo, existe $m \in \mathscr{F}(W)$ tal que $\lambda_W(m) = y$. Puesto que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(W) \arrow[r, "\lambda_W"] \arrow[d, "\eta'_{W,x}"'] & \mathscr{F}^\flat(W) \arrow[d, "\eta_{W,x}"] \\
\mathscr{F}_x \arrow[r, "\lambda_x"] & \mathscr{F}^\flat_x
\end{tikzcd}$$

conmuta, el valor de $\eta'_{W,x}(m)$ es, a la vez, a y b. Puesto que $\eta'_{W,x}$ es función, entonces $a = \eta'_{W,x}(m) = b$. De este modo, λ_x también es inyectivo y, por tanto, $\mathscr{F}_x \cong \mathscr{F}^\flat_x$.

Observe, además, que $\mathscr{F}^\flat$ es decente, dado que es subgavilla de la gavilla $\mathscr{F}^\sharp$ que, en particular, es decente.

(b) Dado el abierto U de X, se tiene el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \arrow[r, "\lambda_U"] \arrow[d, "\varphi_U"] & \mathscr{F}^\flat(U) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^\flat_U"] & \mathscr{F}^\sharp(U) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^\sharp_U"] & {[\mathscr{F}](U)} \arrow[d, "{[\varphi]_U}"] \\
\mathscr{G}(U) \arrow[r, "\lambda'_U"] & \mathscr{G}^\flat(U) \arrow[r] & \mathscr{G}^\sharp(U) \arrow[r] & {[\mathscr{G}](U).}
\end{tikzcd}$$

Existencia y unicidad de $\varphi^\flat$. Dada la sección $\sigma \in \mathscr{F}^\flat(U)$, como λ_U es suprayectivo, existe $\tau \in \mathscr{F}(U)$ tal que $\lambda_U(\tau) = \sigma$. Definimos

$$\varphi^\flat_U(\sigma) := (\lambda'_U \circ \varphi_U)(\tau).$$

Si $\tau' \in \mathscr{F}(U)$ es otra sección tal que $\sigma = \lambda_U(\tau')$, aplicando $\varphi^\flat_U$ a ambos miembros de esta última igualdad, se tiene

$$(\lambda'_U \circ \varphi_U)(\tau) = \varphi^\flat_U(\sigma) = \varphi^\flat_U(\lambda_U(\tau')) = \lambda'_U(\varphi_U(\tau')).$$

Por tanto, $\varphi^\flat_U$ está bien definido. Así, $\varphi^\flat_U \circ \lambda_U = \lambda'_U \circ \varphi_U$ y $\varphi^\flat_U$ es único con esta propiedad.

Existencia y unicidad de $[\varphi]$. Sea $s \in [\mathscr{F}](U)$, entonces $s = (\sigma_x)_{x\in U}$, para alguna sección $\sigma \in \mathscr{F}(U)$. Definimos $[\varphi]_U : [\mathscr{F}](U) \to [\mathscr{G}](U)$ por

$$[\varphi]_U(s) := ([\varphi_U(\sigma)]_x)_{x\in U}.$$

Veamos que esta definición no depende de la elección de σ. Si existiese $\tau \in \mathscr{F}(U)$ tal que $(\tau_x)_{x\in U} = s = (\sigma_x)_{x\in U}$, entonces $\tau_x = \sigma_x$ para cada

$x \in U$. Por tanto, $\varphi_x(\sigma_x) = \varphi_x(\tau_x) \in \mathscr{G}_x$, para todo $x \in U$. Dado que los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d] & \mathscr{G}(U) \arrow[d] \\ \mathscr{F}_x \arrow[r, "\varphi_x"] & \mathscr{G}_x \end{tikzcd}$$

conmutan para cada x y cada U, se tiene

$$[\varphi_U(\sigma)]_x = \varphi_x(\sigma_x) = \varphi_x(\tau_x) = [\varphi_U(\tau)]_x \in \mathscr{G}_x,$$

y con ello, $[\varphi]_U(s) := ([\varphi_U(\sigma)]_x)_{x\in U} = ([\varphi_U(\tau)]_x)_{x\in U}$. Ésta es al única manera de definir $[\varphi]_U$ de tal suerte que los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\lambda_U"] \arrow[d, "\varphi_U"'] & {[\mathscr{F}](U)} \arrow[d, "{[\varphi]_U}"] \\ \mathscr{G}(U) \arrow[r, "\lambda'_U"] & {[\mathscr{G}](U)} \end{tikzcd}$$

conmutan, para todo U abierto de X.

Existencia y unicidad de $\varphi^\sharp$. Probaremos ahora que

$$\varphi^\sharp_U := [\varphi]_U|_{\mathscr{F}^\sharp(U)} : \mathscr{F}^\sharp(U) \to \mathscr{G}(U).$$

Para ello, dada $s \in \mathscr{F}^\sharp(U)$, mostraremos que $\varphi^\sharp_U(s) := [\varphi]_U(s)$ es una sección de $\mathscr{G}^\sharp(U)$. Observe que $\varphi^\sharp_U(s) \in [\mathscr{G}](U)$, por lo que bastará ver que para alguna cubierta $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, las restricciones $\varphi^\sharp_U(s)|_{U_i} \in \mathscr{G}^\flat(U_i)$ para todo $i \in I$. Como $s \in \mathscr{F}^\sharp(U) \subseteq [\mathscr{F}](U)$, existe una cubierta $\{U_i\}_{i\in I}$ tal que $s|_{U_i} \in \mathscr{F}^\flat(U_i)$ para todo $i \in I$. Dado que los diagramas

$$\begin{tikzcd} {[\mathscr{F}](U)} \arrow[r, "{[\varphi]_U}"] \arrow[d] & {[\mathscr{G}](U)} \arrow[d] \\ {[\mathscr{F}](U_i)} \arrow[r, "{[\varphi]_{U_i}}"] & {[\mathscr{G}](U_i)} \end{tikzcd}$$

son conmutativos, entonces

$$\begin{aligned} \varphi^\sharp_U(s)|_{U_i} &= [\varphi]_U(s)|_{U_i} \\ &= [\varphi]_{U_i}(s|_{U_i}) := ([\varphi_{U_i}(\sigma|_{U_i})]_x)_{x\in U_i} = ([\varphi_U(\sigma)|_{U_i}]_x)_{x\in U_i}. \end{aligned}$$

Esta última igualdad se tiene gracias a que los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d] & \mathscr{G}(U) \arrow[d] \\ \mathscr{F}(U_i) \arrow[r, "\varphi_{U_i}"] \arrow[d] & \mathscr{G}(U_i) \arrow[d] \\ \mathscr{F}_x \arrow[r, "\varphi_x"] & \mathscr{G}_x \end{tikzcd}$$

son conmutativos. Pero además, $([\varphi_U(\sigma)|_{U_i}]_x)_{x\in U_i}$ es la imagen de la sección $\varphi_U(\sigma)|_{U_i} \in \mathscr{G}(U_i)$ bajo el morfismo $\lambda'_{U_i} : \mathscr{G}(U_i) \to \mathscr{G}^\flat(U_i)$, es decir,

$$([\varphi_U(\sigma)|_{U_i}]_x)_{x\in U_i} = \varphi^\sharp_U(s)|_{U_i} \in \mathscr{G}^\flat(U_i).$$

Por lo tanto, $\varphi^\sharp_U(s) \in \mathscr{G}^\sharp(U)$, como se quería probar. Finalmente, dado que $[\varphi]_U$ es único, $\varphi^\sharp_U$ también lo es.

(c) Si A es un abierto de X, los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(A) \arrow[r] \arrow[d, "1_{\mathscr{F},A}"] & \mathscr{F}^\flat(A) \arrow[r] \arrow[d, "(1_{\mathscr{F},A})^\flat"] & \mathscr{F}^\sharp(A) \arrow[d, "(1_{\mathscr{F},A})^\sharp"] \\ \mathscr{F}(A) \arrow[r] & \mathscr{F}^\flat(A) \arrow[r] & \mathscr{F}^\sharp(A) \end{tikzcd}$$

conmutan. Así, $(1_{\mathscr{F},A})^\flat = 1_{\mathscr{F}^\flat(A)}$ y $(1_{\mathscr{F},A})^\sharp = 1_{\mathscr{F}^\sharp(A)}$.

(d) Dado el morfismo de pregavillas $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$, en virtud del inciso (b) anterior, el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \mathscr{F}^\flat \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^\flat"] & \mathscr{F}^\sharp \arrow[d, "\varphi^\sharp"] \\ \mathscr{G} \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \mathscr{G}^\flat \arrow[r] \arrow[d, "\psi^\flat"] & \mathscr{G}^\sharp \arrow[d, "\varphi^\sharp"] \\ \mathscr{H} \arrow[r] & \mathscr{H}^\flat \arrow[r] & \mathscr{H}^\sharp. \end{tikzcd}$$

Visto este diagrama de otro modo, se tiene

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d, "\psi\circ\varphi"] & \mathscr{F}^\flat \arrow[r] \arrow[d, "(\psi\circ\varphi)^\flat"] & \mathscr{F}^\sharp \arrow[d, "(\psi\circ\varphi)^\sharp"] \\ \mathscr{H} \arrow[r] & \mathscr{H}^\flat \arrow[r] & \mathscr{H}^\sharp. \end{tikzcd}$$

Y dada la unicidad de los morfismos, es claro que $(\psi \circ \varphi)^\flat = \psi^\flat \circ \varphi^\flat$ y también $(\psi \circ \varphi)^\sharp = \psi^\sharp \circ \varphi^\sharp$. $\square$

Hemos construido una gavilla $\mathscr{F}^\sharp$ a partir de la pregavilla $\mathscr{F}$. Por supuesto, si $\mathscr{F}$ ya es gavilla, entonces $\mathscr{F}^\sharp$ y $\mathscr{F}$ coinciden.

3.6. Gavillas abelianas, de anillos y A-módulos

Diremos que una gavilla (resp. pregavilla) $\mathscr{F}$ sobre el espacio topológico X es una *gavilla* (resp. *pregavilla*) *abeliana* si para cada abierto U de X, $\mathscr{F}(U)$ es un grupo abeliano y las restricciones $\rho_{VU} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ son morfismos de grupos abelianos.

Si $\mathscr{F}$ es una gavilla abeliana sobre X, las condición de *decencia* es equivalente a la siguiente condición: dado el abierto U de X y $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ una cubierta abierta arbitraria, si $\sigma \in \mathscr{F}(U)$ es tal que $\sigma|_{U_i} = 0$ para todo $i \in I$, entonces $\sigma = 0$. Lo probamos a continuación.

Recuerde la siguiente formulación de propiedad de decencia para pregavillas de conjuntos: dos secciones $\sigma, \tau \in \mathscr{F}(U)$ son iguales si y sólo si $\sigma|_{U_i} = \tau|_{U_i}$ para todo $i \in I$ de alguna cubierta abierta $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Suponga, pues, que $\mathscr{F}$ es una gavilla abeliana sobre X; en particular, es decente como pregavilla de conjuntos. Considere $\sigma \in \mathscr{F}(U)$ tal que $\sigma|_{U_i} = 0 \in \mathscr{F}(U_i)$, para todo $i \in I$. Dado que todo morfismo de grupos "envía" el elemento neutro en el elemento neutro, el tallo $0_x = 0 \in \mathscr{F}_x$, para todo $x \in X$. Por tanto, y dado que $\sigma|_{U_i} = 0$, $\sigma_x = 0$, para todo $x \in X$ y, puesto que $\mathscr{F}$ es decente (como pregavilla de conjuntos), entonces $\sigma = 0$.

Y a la inversa, suponga que dado el abierto U de X y $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ una cubierta abierta arbitraria, si $\sigma \in \mathscr{F}(U)$ es tal que $\sigma|_{U_i} = 0$ para todo $i \in I$, entonces $\sigma = 0$. Sean $\sigma, \tau \in \mathscr{F}(U)$ tales que $\sigma|_{U_i} = \tau|_{U_i}$ para todo $i \in I$. Entonces, dado que los morfismos restricción son morfismos de grupos abelianos, se tiene

$$(\sigma - \tau)|_{U_i} = \sigma|_{U_i} - \tau|_{U_i} = 0 \in \mathscr{F}(U_i),$$

para todo $i \in I$. De acuerdo con las hipótesis, la condición anterior implica que $\sigma - \tau = 0 \in \mathscr{F}(U)$, esto es, $\sigma = \tau$.

En lo sucesivo, dado que trataremos con gavillas cuya categoría imagen son conjuntos con estructura (grupos, anillos, A-módulos,...), preferiremos esta formulación de la propiedad de decencia que acabamos de introducir, a la anterior (la conjuntista).

Una gavilla de anillos $\mathcal{A}$ sobre X, como su nombre lo indica, asigna a cada abierto U un anillo $\mathcal{A}(U)$, siendo las restricciones morfismos de anillos y los tallos $\mathcal{A}_x$, también anillos para cada $x \in X$.

En lo sucesivo, si k es un campo algebraicamente cerrado, nos referiremos a un conjunto algebraico cuasiproyectivo $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ como una *variedad sobre* k (*variedad algebraica* o, simplemente, una *variedad*).

Ejemplo. *La gavilla estructural.* Si X es una variedad, el funtor

$$\mathcal{O}_X : \mathbf{Top}\,(X) \to \mathbf{AnC}$$

que a cada abierto U de X asigna el conjunto $\mathcal{O}_X(U)$ de funciones regulares sobre U, es una gavilla de anillos. La llamamos la *gavilla estructural* de X. Como hemos visto, ésta es tal que para cada $x \in X$, el tallo $\mathcal{O}_{X,x}$ es siempre un anillo local, cuyo único ideal maximal $\mathfrak{m}_x$ está formado por las funciones regulares en $\mathcal{O}_{X,x}$ que se anulan en x.

Si $\mathcal{A}$ es gavilla de anillos sobre X, una gavilla de $\mathcal{A}$-módulos sobre X es una gavilla abeliana $\mathcal{M}$ que a cada abierto U de X asigna un $\mathcal{A}(U)$-módulo $\mathcal{M}(U)$. Si V es un abierto de U, $a \in \mathcal{A}(U)$ y $m \in \mathcal{M}(U)$, los morfismos restricción son morfismos de $\mathcal{A}(U)$-módulos tales que $(a \cdot m)|_V = a|_V \cdot m|_V$.

3.7. Gavillas imagen directa e imagen inversa

Hasta el momento hemos tratado con gavillas sobre un sólo espacio topológico. En esta sección nos ocuparemos en cómo cambiar el espacio base vía una función continua.

Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua suprayectiva. Dadas las gavillas $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ sobre X e Y, respectivamente, dado cualquier abierto V de Y, considere el funtor

$$f_*\mathscr{F} : \mathbf{Top}\,(Y) \to \mathbf{A},$$

con $\mathbf{A}$ cualquier categoría abeliana, definido por $f_*\mathscr{F}(V) := \mathscr{F}(f^{-1}V)$. Veamos que es una pregavilla. Dado el abierto W de V, observe que $f^{-1}W \subseteq f^{-1}V$. Así, dada la sección $\sigma \in f_*\mathscr{F}(V)$, el morfismo restricción $\rho_{VW} : f_*\mathscr{F}(V) \to f_*\mathscr{F}(W)$ está definido como $\rho_{VW}(\sigma) := \sigma|_{f^{-1}W}$. Puesto que $\mathscr{F}$ es gavilla, $f_*\mathscr{F}$ también lo es, pero sobre Y. Llamamos a $f_*\mathscr{F}$ la la *gavilla imagen directa* sobre Y.

Dado $x \in X$, los tallos de $f_*\mathscr{F}$ están dados por la igualdad $f_*\mathscr{F}_x = \mathscr{F}_{f^{-1}(x)}$.

Por otro lado, dado el abierto U de X, $f(U)$ no es en general abierto de Y, por lo que, para definir una gavilla sobre X, usando $\mathscr{G}$, echamos mano de la noción de límite directo. Considere el funtor

$$f^\bullet\mathscr{G} : \mathbf{Top}\,(X) \to \mathbf{A},$$

que a cada abierto U de X asigna el objeto $f^\bullet\mathscr{G}(U) := \varinjlim_{V \subseteq f(U)} \mathscr{G}(V)$.

Veamos que $f^{\bullet}\mathscr{G}$ es una pregavilla sobre X. Sean $W \subseteq U$ abiertos de X y note que $f(W) \subseteq f(U)$. Observe que

$$M := (\{\mathscr{G}(V)\}_{V \supseteq f(U)}, \pi_{VB})$$

es un sistema dirigido de objetos, indizado por la familia de conjuntos abiertos V que contienen a $f(U)$ y donde cada morfismo $\pi_{VB} : \mathscr{G}(V) \to \mathscr{G}(B)$, con $B \subseteq V$, es la restricción correspondiente a la gavilla $\mathscr{G}$. De este modo, el par $(f^{\bullet}\mathscr{G}(U), \nu_V)$ es el límite directo para dicho sistema, con $\nu_V : \mathscr{G}(V) \to f^{\bullet}\mathscr{G}(U)$ el morfismo canónico para cada V.

A su vez, el sistema

$$N := (\{\mathscr{G}(Z)\}_{Z \supseteq f(W)}, \pi_{ZA})$$

es también un sistema dirigido de objetos, indizado por la familia de abiertos Z que contienen a W, π_{ZA} también las restricciones de la gavilla $\mathscr{G}$ y $(f^{\bullet}\mathscr{G}(W), \phi_Z)$ su límite directo.

Probaremos que $(f^{\bullet}\mathscr{G}(W), \phi_Z)$ es un límite para el sistema M. Dados V y B abiertos de X que contienen a $f(U)$, como $f(U) \supseteq f(W)$, entonces $\mathscr{G}(V)$ y $\mathscr{G}(B)$ son también elementos del sistema N, por lo que los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathscr{G}(V) \arrow[r, "\phi_V"] \arrow[d, "\pi_{VB}"'] & f^{\bullet}\mathscr{G}(W) \\ \mathscr{G}(B) \arrow[ur, "\phi_B"'] & \end{tikzcd}$$

son conmutativos (se satisface la condición de compatibilidad); es decir, $f^{\bullet}\mathscr{G}(W)$ es un límite para el sistema M. De este modo, dado que $f^{\bullet}\mathscr{G}(U)$ satisface una propiedad universal, existe un único morfismo ξ_{UW} que hace conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathscr{G}(V) \arrow[r, "\phi_V"] \arrow[d, "\nu_V"'] & f^{\bullet}\mathscr{G}(W). \\ f^{\bullet}\mathscr{G}(U) \arrow[ur, "\xi_{UW}"'] & \end{tikzcd}$$

Éstas son las restricciones de la pregavilla $f^{\bullet}\mathscr{G}$.

Ahora bien, mediante el procedimiento de la sección anterior, podemos asociar a $f^{\bullet}\mathscr{G}$ una gavilla, a la que denotamos por $f^{-1}\mathscr{G}$ y llamamos la *gavilla imagen inversa* sobre X.

Si los objetos de la categoría **A** son, por ejemplo, grupos abelianos, anillos o A-módulos,[6] dado el abierto U de X, los elementos de $f^{-1}\mathscr{G}(U)$ son secciones

[6] En general, conjuntos con alguna estructura algebraica conmutativa. Esta aclaración es pertinente dado que nos referimos a una sección como un *elemento* del conjunto que la gavilla asocia al abierto U.

$\sigma \in [f^{\bullet}\mathscr{G}](U)$ tales que $\sigma|_{U_i} \in f^{\bullet}\mathscr{G}(U_i)$, para alguna cubierta $U = \bigcup_{i\in I} U_i$.

Veamos cómo son los tallos de $f^{\bullet}\mathscr{G}$, que de acuerdo con el Lema (3.5), son los tallos de $f^{-1}\mathscr{G}$. Con la notación anterior, considere $x \in X$ y la familia de abiertos V de Y que contienen al punto $f(x)$. Entonces $(f^{\bullet}\mathscr{G})_x = \mathscr{G}_{f(x)}$. Esto se sigue de advertir que

$$(f^{\bullet}\mathscr{G})_x := \varinjlim_{V\supseteq\{f(x)\}} \mathscr{G}(V) = \varinjlim_{V\ni f(x)} \mathscr{G}(V) =: \mathscr{G}_{f(x)}.$$

Tenemos, pues, un método para asociar a una gavilla sobre X, una gavilla sobre Y y viceversa, haciendo uso de la función continua f. En otras palabras, hemos construido dos funtores entre las categorías $\mathbf{Gav}_X$ y $\mathbf{Gav}_Y$ de gavillas sobre X e Y, respectivamente. Veamos que éstos son funtores adjuntos[7] uno del otro.

Proposición 3.3 (Propiedad de adjunción) *Sea $f : X \to Y$ una función continua suprayectiva entre espacios topológicos y $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ gavillas sobre X e Y, respectivamente. Se tienen los morfismos $f^{-1}f_*\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}$ y $\mathscr{G} \mapsto f_*f^{-1}\mathscr{G}$, que inducen el isomorfismo*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gav}_X}(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gav}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}).$$

Note que f^{-1} y f_* son funtores, donde f^{-1} asigna a cada gavilla $\mathscr{G}$ sobre Y, una gavilla $f^{-1}\mathscr{G}$ sobre X, mientras que f_* hace corresponder a la gavilla $\mathscr{F}$ sobre X, la gavilla $f_*\mathscr{F}$ sobre Y. En estos términos, diremos que f^{-1} es *adjunto izquierdo* de f_* y f_*, *adjunto derecho* de f^{-1}.

Para convencernos de la proposición, considere $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Pre}_X}(f^{\bullet}\mathscr{G}, \mathscr{F})$, donde $\mathbf{Pre}_X$ denota la categoría de pregavillas sobre X. De este modo, dividimos la prueba en dos partes: probaremos primero el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gav}_X}(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pre}_X}(f^{\bullet}\mathscr{G}, \mathscr{F}) \tag{3.3}$$

y, posteriormente, que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Pre}_X}(f^{\bullet}\mathscr{G}, \mathscr{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gav}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}). \tag{3.4}$$

Prueba.
(3.3) Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pre}_X}(f^{\bullet}\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$. Dado que $\mathscr{F}$ es gavilla, coincide tanto con $\mathscr{F}^{\flat}$ como con $\mathscr{F}^{\sharp}$. Por lo que, de acuerdo con el Lema 3.5, φ induce un único morfismo $\varphi^{\sharp} : f^{-1}\mathscr{G} \to \mathscr{F}$, que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} f^{\bullet}\mathscr{G} \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\varphi"'] & (f^{\bullet}\mathscr{G})^{\flat} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi^{\flat}"] & f^{-1}\mathscr{G}. \arrow[dl, "\varphi^{\sharp}"] \\ & \mathscr{F} & \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

[7] Véase el Apéndice A.

Esta asignación nos define entonces un morfismo

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pre}_X}(f^{\bullet}\mathscr{G},\mathscr{F}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pre}_X}(f^{-1}\mathscr{G},\mathscr{F}) \\ & \varphi & \longmapsto & \Psi(\varphi)=\varphi^{\sharp}. \end{array}$$

Por otro lado, dado $\psi : f^{-1}\mathscr{G} \to \mathscr{F}$, se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} f^{\bullet}\mathscr{G} \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\alpha"'] & (f^{\bullet}\mathscr{G})^{\flat} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi^{\flat}"] & f^{-1}\mathscr{G}, \arrow[dl, "\psi"] \\ & \mathscr{F} & \end{tikzcd}$$

donde $\alpha := \psi \circ h \circ g : f^{\bullet}\mathscr{G} \to \mathscr{F}$. De esta manera, definimos un morfismo

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gav}_X}(f^{-1}\mathscr{G},\mathscr{F}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pre}_X}(f^{\bullet}\mathscr{G},\mathscr{F}) \\ & \psi & \longmapsto & \Phi(\psi)=\alpha. \end{array}$$

Bastará mostrar que los morfismos Ψ y Φ son inversos uno del otro. Dado $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pre}_X}(f^{\bullet}\mathscr{G},\mathscr{F})$, obtenemos

$$\Phi(\Psi(\varphi)) = \Phi(\varphi^{\sharp}) = \varphi^{\sharp} \circ h \circ g = \varphi,$$

de acuerdo con la conmutatividad del diagrama 3.5. Y en el otro sentido, dado $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gav}_X}(f^{-1}\mathscr{G},\mathscr{F})$, se tiene

$$\Psi(\Phi(\psi)) = \Psi(\psi \circ h \circ g) = (\psi \circ h \circ g)^{\sharp} = \psi,$$

por la unicidad del morfismo $(\psi \circ h \circ g)^{\sharp}$.

(3.4) Construiremos dos morfismos Δ y Ω y probaremos que son inversos el uno del otro.

La regla de correspondencia $\Delta : Hom_{\mathbf{Pre}_X}(f^{\bullet}\mathscr{G},\mathscr{F}) \to Hom_{\mathbf{Gav}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$.

Sea $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pre}_X}(f^{\bullet}\mathscr{G},\mathscr{F})$. Se tiene, entonces, un morfismo

$$\psi_U : f^{\bullet}\mathscr{G}(U) \to \mathscr{F}(U),$$

para cada abierto U de X, de modo que si W es abierto de U, el diagrama

$$\begin{tikzcd} f^{\bullet}\mathscr{G}(U) \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d, "\rho'_{UW}"'] & \mathscr{F}(U) \arrow[d, "\rho_{UW}"] \\ f^{\bullet}\mathscr{G}(W) \arrow[r, "\psi_W"] & \mathscr{F}(W), \end{tikzcd}$$

conmuta. Si se fija U, dado que $f^{\bullet}\mathscr{G}(U)$ es un límite directo, para cada abierto V en Y que contiene a $f(U)$ se tiene un morfismo

$$\eta_V : \mathscr{G}(V) \to f^{\bullet}\mathscr{G}(U).$$

De este modo, definimos

$$\gamma_{V,U} := \psi_U \circ \eta_V : \mathscr{G}(V) \to \mathscr{F}(U)$$

y observe que este morfismo es compatible con las restricciones de $\mathscr{F}$, es decir, dado W abierto de U, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{G}(V) \arrow[r, "\gamma_{V,U}"] \arrow[dr, "\gamma_{V,W}"'] & \mathscr{F}(U) \arrow[d, "\rho_{UW}"] \\ & \mathscr{F}(W) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Luego, si para cada V se toma el abierto particular $A := f^{-1}V$ en X (esto es posible, pues f es suprayectiva), se obtiene la familia de morfismos

$$\gamma_V : \mathscr{G}(V) \to \mathscr{F}(A) = \mathscr{F}(f^{-1}V) =: f_*\mathscr{F}(V).$$

Esta familia determina un morfismo $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gav}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$ que, en efecto, es un morfismo de gavillas. Por tanto, puede establecerse un morfismo

$$\Delta : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pre}_X}(f^{\bullet}\mathscr{G}, \mathscr{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gav}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}),$$

siendo $\Delta(\psi) := \gamma$ su regla de correspondencia.

La regla de correspondencia $\Omega : Hom_{\mathbf{Gav}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}) \to Hom_{\mathbf{Pre}_X}(f^{\bullet}\mathscr{G}, \mathscr{F})$.

Un morfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gav}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$ define una familia de morfismos

$$\varphi_V : \mathscr{G}(V) \to f_*\mathscr{F}(V) := \mathscr{F}(f^{-1}V),$$

con V abierto de Y, de modo que si W es abierto de V el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{G}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "\rho'_{VW}"'] & \mathscr{F}(f^{-1}V) \arrow[d, "\rho_{f^{-1}V\, f^{-1}W}"] \\ \mathscr{G}(W) \arrow[r, "\varphi_W"] & \mathscr{F}(f^{-1}W) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Si se fija el abierto U de X y consideramos los abiertos V de Y que contienen a $f(U)$, se tiene $U \subseteq f^{-1}V$ para cada V. Definimos entonces

$$\beta_{U,V} := \rho_{f^{-1}V,U} \circ \varphi_V : \mathscr{G}(V) \to \mathscr{F}(U). \tag{3.6}$$

Observe que esta familia de morfismos es tal que dado el abierto W de V, que también contiene a $f(U)$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}(V) \arrow[r, "\beta_{U,V}"] \arrow[d, "\rho'_{VW}"'] & \mathscr{F}(U) \\
\mathscr{G}(W) \arrow[ur, "\beta_{U,W}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Pero esta última propiedad es precisamente la condición de compatibilidad para $\mathscr{F}(U)$, que de este modo es un límite para el sistema $\{\mathscr{G}(V), \rho'_{VW}\}$, indizado por la familia de abiertos de Y que contienen a $f(U)$. Luego, por la propiedad universal de $f^{\bullet}\mathscr{G}(U)$, existe un único morfismo $\beta_U : f^{\bullet}\mathscr{G}(U) \to \mathscr{F}(U)$ que hace conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}(V) \arrow[r, "\beta_{U,V}"] \arrow[d, "\eta_V"'] & F(U). \\
f^{\bullet}\mathscr{G}(U) \arrow[ur, "\beta_U"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.7}$$

Nos hace falta probar que los morfismos β_U son compatibles con las restricciones de $\mathscr{F}$, es decir, que dado E abierto de U, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
f^{\bullet}\mathscr{G}(U) \arrow[r, "\beta_U"] \arrow[d, "\xi_{UE}"'] & \mathscr{F}(U) \arrow[d, "\rho_{UE}"] \\
f^{\bullet}\mathscr{G}(E) \arrow[r, "\beta_E"'] & \mathscr{F}(E)
\end{tikzcd} \tag{3.8}$$

conmuta. Sea $\sigma \in f^{\bullet}\mathscr{G}(U)$ y puesto que $f^{\bullet}\mathscr{G}(U)$ es un límite directo, existe un abierto V de Y, con $f^{-1}V \supseteq U$, de modo que $\sigma = \eta_V(\tau)$, para algún $\tau \in \mathscr{G}(V)$ y donde η_V es el morfismo $\mathscr{G}(V) \to f^{\bullet}\mathscr{G}(U)$. Considere, entonces, la extensión del diagrama anterior:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathscr{F}(f^{-1}V) \arrow[d, "\rho_{f^{-1}V\ U}"] \\
\mathscr{G}(V) \arrow[urr, "\varphi_V"] \arrow[r, "\eta_V"'] \arrow[dr, "\eta'_V"'] & f^{\bullet}\mathscr{G}(U) \arrow[r, "\beta_U"] \arrow[d, "\xi_{UE}"] & \mathscr{F}(U) \arrow[d, "\rho_{UE}"] \\
 & f^{\bullet}\mathscr{G}(E) \arrow[r, "\beta_E"'] & \mathscr{F}(E).
\end{tikzcd}$$

Recuerde que $\beta_U \circ \eta_V = \beta_{U,V}$ y $\beta_E \circ \eta'_V = \beta_{E,V}$, de acuerdo con la conmutatividad de los diagramas (3.7). Pero además, por la igualdad (3.6), se tiene

$$\beta_{U,V} := \rho_{f^{-1}V,U} \circ \varphi_V \qquad \text{y} \qquad \beta_{E,V} := \rho_{f^{-1}V,E} \circ \varphi_V.$$

Por lo tanto, $\beta_{E,V}(\tau) = \rho_{f^{-1}V,E}(\varphi_V(\tau)) = \rho_{UE}(\rho_{f^{-1},U}(\varphi_V(\tau))) \in \mathscr{F}(E)$. Pero $\rho_{f^{-1}V,U}(\varphi_V(\tau)) = \beta_{U,V}(\tau) = \beta_U(\eta_V(\tau))$, así que

$$\beta_{E,V}(\tau) = \rho_{f^{-1}V,E}(\varphi_V(\tau)) = \rho_{UE}(\beta_U(\eta_V(\tau))) = \rho_{UE}(\beta_U(\sigma)). \tag{3.9}$$

Por otro lado, dado que $\eta'_V(\tau) = \xi_{UE}(\eta_V(\tau)) \in f^{\bullet}\mathscr{G}(E)$, se tiene

$$\beta_{E,V}(\tau) = \beta_E(\eta'_V(\tau)) = \beta_E(\xi_{UE}(\eta_V(\tau))) = \beta_E(\xi_{UE}(\sigma)). \tag{3.10}$$

Así, de (3.9) y (3.10) concluimos que $\rho_{UE} \circ \beta_U = \beta_E \circ \xi_{UE}$, esto es, el diagrama (3.8) conmuta. Observe, pues, que la regla de correspondencia $\varphi \mapsto \beta$ define, así, un morfismo

$$\Omega : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gav}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pre}_X}(f^{\bullet}\mathscr{G}, \mathscr{F}),$$

donde, por supuesto, $\beta =: \Omega(\varphi)$.

Finalmente, los morfismos Δ y Ω son mutuamente inversos por como los hemos construido. $\square$

Capítulo 4

Esquemas y Variedades Algebraicas

En los primeros dos capítulos consideramos como objetos geométricos a los conjuntos algebraicos y sus subconjuntos cerrados, según la topología de Zariski. Vimos que cualquier conjunto algebraico cuasiproyectivo (la noción más general que se estudió), podía "cubrirse" por partes afines, lo que le daba a los conjuntos algebraicos afines cierta importancia. Pusimos énfasis en la correspondencia: conjuntos algebraicos afines X y una clase de anillos a los que llamamos k-álgebras afines (extensiones de anillo del campo k, de generación finita sobre éste y sin elementos nilpotentes). Cuando tratamos con un campo k algebraicamente cerrado, se tuvo la correspondencia biyectiva entre los puntos de X y los ideales máximos de su anillo de coordenadas $k[X]$ y, también, una correspondencia del mismo estilo entre subconjuntos algebraicos de X e ideales primos de $k[X]$. Y aquí nos detenemos con el afán de generalizar esta correspondencia.

Observemos lo que hemos hecho: establecimos como principales objetos de estudio los conjuntos algebraicos, los *ceros* de familias de polinomios y construimos, a partir de ellos, objetos algebraicos, una clase particular de anillos. La Teoría de Esquemas ve la situación desde un enfoque más general al proceder en el sentido inverso: si no se impone ninguna condición a los anillos conmutativos que hemos de estudiar, de los que se toman en cuenta sus ideales primos, ¿qué objeto geométrico les corresponde? La respuesta: los *esquemas afines*.

Hablar de una variedad diferenciable M es considerar un espacio topológico de Hausdorff obtenido al "pegar" bolas abiertas de un espacio euclídeo, es decir, un espacio topológico con un atlas de cartas coordenadas. Especificar la estructura diferenciable en M equivale a especificar qué clase de las funciones continuas en M son diferenciables en sus abiertos, pues la noción de diferenciabilidad es una noción *local*. Así, las funciones diferenciables forman una subgavilla $\mathcal{C}^\infty(M)$ de la gavilla $\mathcal{C}(M)$ de funciones continuas en M. De esta forma, puede darse una definición alternativa de variedad diferenciable: un espacio topológico de Hausdorff M junto con una subgavilla $\mathcal{C}^\infty(M) \subset \mathcal{C}(M)$ de modo que el par $(M, \mathcal{C}^\infty(M))$ es localmente isomorfo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ con su gavilla de funciones diferenciables. A Weil debemos el aplicar esta noción a las variedades algebraicas con el objeto de generalizar la noción, pero no es sino con Grothendieck que se logra la correcta analogía: un *esquema*, como veremos más adelante, es un par $(X, \mathcal{O}_X)$, un espacio topológico X y su gavilla de anillos $\mathcal{O}_X$, localmente isomorfo a un esquema afín. Así, obtendremos un esquema en general, "pegando" esquemas afines. Pero se tiene una diferencia importante: en variedades diferenciables, cada punto "se ve" localmente como cualquier otro y las bolas abiertas de un espacio euclidiano son suficientes para su construcción; en contraste, los esquemas admiten una variación local mucho más rica: dos puntos distintos arbitrarios pueden tener vecindades que no son isomorfas, los abiertos más pequeños en un esquema pueden ser tan grandes y poseer geometría muy interesante.

En lo sucesivo, todos los anillos considerados serán, por supuesto, conmutativos con elemento unitario.

En lugar de considerar un anillo de coordenadas y sus ideales primos, consideramos cualquier anillo A. Considere el conjunto

$$\operatorname{Spec} A := \{\mathfrak{p} \subset A \,:\, \mathfrak{p} \text{ es ideal primo}\}.$$

Dotamos a este conjunto con una topología, a la que llamamos, por extensión, la *topología de Zariski*. Los conjuntos cerrados serán los conjuntos de la forma

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \,:\, \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\},$$

siendo $\mathfrak{a}$ cualquier ideal de A. Para advertir que esta familia de conjuntos da a $\operatorname{Spec} A$ estructura de espacio topológico, considere el siguiente lema.

LEMA 4.1

1. *Dados los ideales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ de A, $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.*
2. *Si $\{\mathfrak{a}_i\}_{i\in I}$ es cualquier familia de ideales de A,*
$$V\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right) = \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i).$$
3. *Para los ideales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ de A, $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$ si y sólo si $\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$.*
4. *Se tiene $V(A) = \varnothing$ y $V(\{0\}) = \operatorname{Spec} A$.*

PRUEBA.

1. Si $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$, entonces $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ ó $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$. En cualquier caso, $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, esto es, $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. Y al contrario, si $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ suponga que no contiene a uno de los ideales, digamos, $p \not\supseteq \mathfrak{a}$. Existe, entonces, $a \in \mathfrak{a}$ tal que $a \notin \mathfrak{p}$. De este modo, para todo $b \in \mathfrak{b}$, se tiene $ab \in \mathfrak{p}$, pues $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, pero $a \notin \mathfrak{p}$, por lo que $b \in \mathfrak{p}$, dado que $\mathfrak{p}$ es primo. Así, $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$.

2. Si $\mathfrak{p} \in V\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_\mathfrak{i}\right)$, entonces $\mathfrak{p} \supseteq \sum_{i\in I} \mathfrak{a}_\mathfrak{i} \supseteq \mathfrak{a}_\mathfrak{i}$ para cada $i \in I$; por tanto, $\mathfrak{p} \in \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_\mathfrak{i})$. Por otro lado, si $\mathfrak{p}$ contiene a cada $\mathfrak{a}_\mathfrak{i}$, entonces también contiene a $\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_\mathfrak{i}$, dado que este último es ideal más pequeño que contiene a cada $\mathfrak{a}_\mathfrak{i}$.

3. Recordemos que dado el ideal $\mathfrak{d}$ de A, $\sqrt{\mathfrak{d}} = \bigcap_{\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{d}} \mathfrak{p}$, con $\mathfrak{p}$ primo. Así, si $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$, todo $\mathfrak{p}$ que contiene a $\mathfrak{b}$ también contiene a $\mathfrak{a}$, es decir, todo $\mathfrak{p} \in \sqrt{\mathfrak{b}}$ es tal que $\mathfrak{p} \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, i.e. $\sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. Al contrario, que $\sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ significa que todo ideal primo que contiene a $\mathfrak{b}$ contiene también a $\mathfrak{a}$, es decir, que $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$.

4. Es claro. □

De este modo, hemos definido una topología en $\operatorname{Spec} A$. Definiremos ahora una gavilla de anillos en $\operatorname{Spec} A$. Para cada ideal primo $\mathfrak{p} \subset A$, considere la localización $A_\mathfrak{p}$. Pondremos atención en las funciones

$$\sigma : U \to \coprod_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p}$$

que son *localmente* el cociente de dos elementos de A, es decir, que para cada $\mathfrak{p}$ verifiquen $\sigma(\mathfrak{q}) = f/g \in A_\mathfrak{q}$, con $f, g \in A$ y $g \notin \mathfrak{q}$, para todo $\mathfrak{q}$ en alguna vecindad $V \subseteq U$ de $\mathfrak{p}$. Suponga que $\mathcal{O}(U)$ asigna a U el anillo de esta clase de funciones; se define así un funtor

$$\mathcal{O} : \operatorname{Top}(\operatorname{Spec} A) \longrightarrow \mathbf{AnC},$$

teniéndose una pregavilla de anillos. Note que hay similitud entre estas funciones y las funciones regulares definidas en conjuntos algebraicos, pero en lugar de considerar sus valores en un sólo campo, en este caso las funciones toman valores en anillos locales distintos.

Veamos que $\mathcal{O}$ es una gavilla. Sea U abierto de $\operatorname{Spec} A$ y $\{V_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de U.

(a) Sea $\sigma \in \mathcal{O}(U)$ tal que $\sigma|_{V_i} = 0$ para todo $i \in I$. Es decir, fijo $i \in I$, $\sigma(\mathfrak{q}) = 0 \in A_\mathfrak{q}$, para todo $\mathfrak{q} \in V_i$; luego, dado que ésto sucede para todo i, $\sigma(\mathfrak{p}) = 0$, para todo $\mathfrak{p} \in U$.

(b) Sea $\sigma_i \in \mathcal{O}(V_i)$ para todo $i \in I$ de modo que para cada par de índices i y j distintos entre sí, $\sigma_i|_{V_i\cap V_j} = \sigma_j|_{V_i\cap V_j}$. Para cada $\mathfrak{p} \in U$, existe $i \in I$ tal que $\mathfrak{p} \in V_i$. Definimos $\tau \in \mathcal{O}(U)$ por

$$\tau(\mathfrak{p}) := \sigma_i(\mathfrak{p}).$$

De acuerdo con las hipótesis, τ está bien definida; $\mathcal{O}$ satisface, entonces, la condición de pegado.

Finalmente, dado el anillo A, diremos que el espacio topológico $\operatorname{Spec} A$ junto con su gavilla de anillos $\mathcal{O}$ definida en él como antes, es el *espectro* de A. Esta asignación, $A \mapsto (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O})$ define ahora un funtor, pero no hemos dicho cuál es la categoría imagen, a ello se avoca la siguiente sección.

Dado el elemento $f \in A$, consideramos su ideal $\langle f \rangle \subseteq A$ y denotamos $D(f) := \operatorname{Spec} A \setminus V(\langle f \rangle)$. Veamos que la familia de conjuntos $\{D(f)\}_{f \in A}$ forma una base para la topología de $\operatorname{Spec} A$. Dado el ideal $\mathfrak{a}$ de A, el conjunto $U := \operatorname{Spec} A \setminus V(\mathfrak{a})$ es abierto. Si $\mathfrak{p} \in U$, entonces $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{a}$, es decir, existe $f \in \mathfrak{a}$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$; así, $\mathfrak{p} \in D(f)$ y, puesto que $V(f) \supseteq V(\mathfrak{a})$, $D(f) \cap V(\mathfrak{a}) = \varnothing$.

Establecemos algunas propiedades de la gavilla $\mathcal{O}$. Denotaremos $\mathcal{O}(\operatorname{Spec} A)$ por $\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O})$.[1]

PROPOSICIÓN 4.1 *Sea A un anillo y $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O})$ su espectro.*

(a) Para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}$.

(b) Dado $f \in A$, $\mathcal{O}(D(f)) \cong A_f$. En particular, $\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}) \cong A$.

PRUEBA.

(a) Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Todo elemento en $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ es la clase $[s]$ de algún elemento $s \in \mathcal{O}(V)$, para algún abierto V de $\operatorname{Spec} A$ que contiene a $\mathfrak{p}$. De este modo, s es un morfismo $s : V \to \coprod_{\mathfrak{q} \in V} A_{\mathfrak{q}}$ tal que $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$. Definimos pues el morfismo $\varphi : \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \to A_{\mathfrak{p}}$ como $\varphi([s]) := s(\mathfrak{p})$.

Veamos que φ es suprayectivo. Todo elemento de $A_{\mathfrak{p}}$ puede ser representado en la forma f/g, donde $f, g \in A$ y $g \notin \mathfrak{p}$. Así, $D(g)$ es un abierto de $\operatorname{Spec} A$ que contiene a $\mathfrak{p}$ y es tal que existe $\tau \in \mathcal{O}(D(f))$ de modo que $\tau(\mathfrak{p}) = f/g \in A_{\mathfrak{p}}$. Por lo tanto, f/g es la imagen bajo φ de $[\tau] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$.

Para probar la inyectividad de φ, sean $[s], [t] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, con $s, t \in \mathcal{O}(U)$ para algún abierto U que contiene a $\mathfrak{p}$; podemos entonces escoger $f, g, h, m \in A$, con $g, m \notin \mathfrak{p}$ de modo que $s(\mathfrak{p})$ y $t(\mathfrak{p})$ poseen las representaciones f/g y h/m, respectivamente. Suponga que $s(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p})$, es decir, que f/g y h/m pertenecen a la misma clase de equivalencia. De acuerdo a la construcción de un anillo local, existe una unidad $u \notin \mathfrak{p}$ de modo que $u(fm - hg) = 0 \in A$. Así, $f/g = h/m$ en cualquier anillo local $A_{\mathfrak{q}}$ para el que $g, h, m \notin \mathfrak{q}$. El conjunto de tales $\mathfrak{q}$ es precisamente el abierto $A := D(g) \cap D(h) \cap D(m) \subseteq U$ que contiene a $\mathfrak{p}$, en donde las secciones $s|_A$ y $t|_A$ coinciden, por lo que sus tallos en $\mathfrak{p}$ también.

[1] Esta notación es la misma que A. Grothendieck usa en [EGA I-IV].

(b) Construimos un morfismo $\psi : A_f \to \mathcal{O}(D(f))$ que asigna a cada a/f^n la sección $s \in \mathcal{O}(D(f))$ cuya clase $[s] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ es tal que $\varphi([s]) = a/f^n \in A_{\mathfrak{p}}$.

Probaremos que ψ es inyectivo. Suponga, pues, que $\psi(a/f^n) = \psi(b/f^m)$. Entonces, para cada $\mathfrak{p} \in D(f)$, a/f^n y b/f^m poseen la misma imagen en $A_{\mathfrak{p}}$, es decir, se tiene un elemento $h \notin \mathfrak{p}$ tal que $h(f^m a - f^n b) = 0 \in A$. Considere el anulador $\mathfrak{a}$ de $f^m a - f^n b$ y, dado que $h \in \mathfrak{a}$ y $h \notin \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Dado que ésto sucede para todo $\mathfrak{p} \in D(f)$, entonces $V(\mathfrak{a})$ y $D(f)$ son disjuntos; por lo tanto, $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, esto es, $f^r \in \mathfrak{a}$, para algún natural r. De este modo, f^r anula a $f^m a - f^n b$ en A y, así, $a/f^n = b/f^m \in A_f$.

Veamos que ψ es suprayectivo. Sea $s \in \mathcal{O}(D(f))$. Entonces, puede darse una cubierta $D(f) = \bigcup_{i \in I} V_i$ de modo que $s|_{V_i}(\mathfrak{p})$ tiene una representación $a_i/g_i \in A_{\mathfrak{p}}$, con $g_i \notin \mathfrak{p}$, para todo $\mathfrak{p} \in V_i$. De este modo, cada V_i está contenido en $D(g_i)$ y puesto que los conjuntos de la forma $D(h)$ forman una base para la topología, podemos suponer que $V_i = D(h_i)$, para algún h_i. Así, $D(h_i) \subseteq D(g_i)$, con lo que $V(\langle h_i \rangle) \supseteq V(\langle g_i \rangle)$ y, por tanto, $\sqrt{\langle h_i \rangle} \subseteq \sqrt{\langle g_i \rangle}$, en particular, $h_i^n \in \langle g_i \rangle$ para algún natural n. Luego, existe c tal que $h_i^n = cg_i$, de modo que $a_i/g_i = ca_i/h_i^n$. Reemplazando en esta última igualdad ca_i por a_i y, dado que $D(h_i) = D(h_i^n)$, h_i^n por h_i, se tiene $a_i/g_i = a_i/h_i$; por tanto, podemos suponer que se tiene una cubierta $D(f) = \bigcup_{i \in I} D(h_i)$, de modo que la sección s tiene una representación $s|_{D(h_i)}(\mathfrak{p}) = a_i/h_i \in A_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p} \in D(h_i)$.

En realidad, es suficiente una cantidad finita de tales h_i. Observe que $D(f) \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} D(h_i)$ si y sólo si

$$V(\langle f \rangle) \supseteq \bigcap_{i \in I} V(\langle h_i \rangle) = V\left(\sum_{i \in I} \langle h_i \rangle \right),$$

lo que equivale a decir que $f \in \sqrt{\sum_{i \in I} \langle h_i \rangle}$, esto es, $f^n \in \sum_{i \in I} \langle h_i \rangle$, para algún n. Así, f^n puede ser expresado como la suma finita $f^n = \sum_{i=1}^r b_i h_i$, con cada $b_i \in A$; por lo que $D(f) \subseteq D(h_1) \cup \cdots \cup D(h_r)$.

Como $D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_i h_j)$, se tienen dos elementos a_i/h_i y a_j/h_j en $A_{h_i h_j}$ que representan a la vez a $s|_{D(h_i h_j)}(\mathfrak{p})$ para todo $\mathfrak{p} \in D(h_i h_j)$. Luego, aplicando la inyectividad que probamos antes para φ, ahora para ψ en $D(h_i h_j)$, se tiene $a_i/h_i = a_j/h_j \in A_{h_i h_j}$. Así,

$$(h_i h_j)^n (h_j a_i - h_i a_j) = 0 \in A.$$

Dado que tal n existe para cualquier par $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, podemos elegirlo lo suficientemente grande, de modo que verifique la ecuación anterior para cualquier par i, j. Reescribimos dicha igualdad como

$$h_j^{n+1}(h_i^n a_i) - h_i^{n+1}(h_j^n a_j) = 0,$$

en la que, si reemplazamos cada h_i^{n+1} por h_i y cada $h_i^n a_i$ por a_i, se tiene $h_j a_i = h_i a_j$. De este modo, la sección s tiene en cada $D(h_i)$ una representación a_i/h_i y es tal que $h_j a_i = h_i a_j$, para todo par i, j.

Ahora, como $f^n = \sum_{i=1}^{r} b_i h_i$, haciendo $a = \sum_{i=1}^{r} b_i a_i$, se tiene para cada j

$$h_j a = \sum_{i=1}^{r} b_i a_i h_j = \sum_{i=1}^{r} b_i h_i a_j = f^n a_j,$$

que muestra $a/f^n = a_j/h_j \in A_{h_i}$. Luego, como a_j/h_j es la representación de $s|_{D(h_j)}(\mathfrak{p})$, se tiene $\psi(a/f^n) = s$. Por lo tanto, ψ es suprayectivo, teniéndose así un isomorfismo.

Finalmente, tomando $f = 1$, se tiene $D(1) = \operatorname{Spec} A$ y también $A_1 = A$, de modo que $\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}) := \mathcal{O}(D(1)) \cong A_1 = A$. $\square$

4.1. Espacios anillados y localmente anillados

Sea X un espacio topológico. Considere en él una gavilla

$$\mathcal{O}_X : \mathbf{Top}\,(X) \to \mathbf{An}$$

que a cada abierto U de X asigna el anillo $\mathcal{O}_X(U)$. Decimos, entonces, que el par $(X, \mathcal{O}_X)$ es un *espacio anillado*. Dado otro espacio anillado $(Y, \mathcal{O}_Y)$, un *morfismo de espacios anillados* es un par

$$(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y),$$

donde $f : X \to Y$ es una función continua y $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ es un morfismo de gavillas sobre Y, donde $f_*\mathcal{O}_X$ denota, de acuerdo a lo discutido en la sección 3.7, la gavilla imagen directa.

El par $(X, \mathcal{O}_X)$ es un *espacio localmente anillado* si para todo $p \in X$ el tallo $\mathcal{O}_{X,p}$ es un anillo local. Si tanto $(X, \mathcal{O}_X)$ como $(Y, \mathcal{O}_Y)$ son localmente anillados, el morfismo $(f, f^\sharp)$ será un *morfismo de espacios localmente anillados* si para cada $p \in X$ el morfismo inducido en los tallos

$$f_p^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$$

es un *morfismo local*, es decir, si $\mathfrak{n}$ y $\mathfrak{m}$ son los ideales máximos de $\mathcal{O}_{Y,f(p)}$ y $\mathcal{O}_{X,p}$, respectivamente, $(f_p^\sharp)^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n}$.

Este morfismo de espacios localmente anillados $(f, f^\sharp)$ será un *isomorfismo* si posee un morfismo inverso bilateral; es decir, si f es un homeomorfismo y $f^\sharp$ un isomorfismo de gavillas.

Proposición 4.2

(a) Dado el anillo A, el par $(\mathit{Spec}\, A, \mathcal{O})$ es un espacio localmente anillado.

(b) Cada morfismo de anillos $\varphi : A \to B$ induce un morfismo de espacios localmente anillados

$$(f, f^\sharp) : (\mathit{Spec}\, B, \mathcal{O}_{\mathit{Spec}\, B}) \to (\mathit{Spec}\, A, \mathcal{O}_{\mathit{Spec}\, A}).$$

(c) Y a la inversa, todo morfismo de espacios localmente anillados

$$(f, f^\sharp) : (\mathit{Spec}\, B, \mathcal{O}_{\mathit{Spec}\, B}) \to (\mathit{Spec}\, A, \mathcal{O}_{\mathit{Spec}\, A})$$

es inducido por un morfismo de anillos $\varphi : A \to B$, como en el inciso anterior.

Prueba.

(a) Es claro que $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O})$ es un espacio anillado. Del inciso (a) de la Proposición (4.1) se sigue que es, además, localmente anillado.

(b) Dado el morfismo de anillos $\varphi : A \to B$, definimos $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ como $f(\mathfrak{p}) := \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$. Esta función es continua, pues si $\mathfrak{a}$ es ideal de A, $f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi(\mathfrak{a}))$.

Ahora bien, para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$, el morfismo φ induce un morfismo local $\varphi_\mathfrak{p} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \to B_\mathfrak{p}$, definido en cada $a/b \in A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})}$ como $\varphi_\mathfrak{p}(a/b) := \varphi(a)/\varphi(b)$; definición que tiene sentido, pues como $b \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, entonces $\varphi(b) \notin \mathfrak{p}$. Por esta misma razón, el ideal máximo $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$ de $A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} = A_{f(\mathfrak{p})}$ es precisamente la imagen inversa bajo $\varphi_\mathfrak{p}$ del ideal máximo $\mathfrak{N}_\mathfrak{p}$ de $B_\mathfrak{p}$. De este modo, se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\nu_\mathfrak{p}"'] & B \arrow[d, "\pi_\mathfrak{p}"] \\ A_{f(\mathfrak{p})} \arrow[r, "\varphi_\mathfrak{p}"] & B_\mathfrak{p} \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

para cada $\mathfrak{p}$. En efecto, dado $x \in A$, $\varphi(x) \in B$ y

$$\pi_\mathfrak{p}(\varphi(x)) = \varphi(x)/1 = \varphi(x)/\varphi(1) =: \varphi_\mathfrak{p}(x/1) = \varphi_\mathfrak{p}(\nu_\mathfrak{p}(x)).$$

Luego, dado el abierto V de $\operatorname{Spec} A$, definimos el morfismo

$$f_V^\sharp : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(V) \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(f^{-1}V)$$

como $f_V^\sharp(\mathfrak{p}) := \pi_\mathfrak{p}(\mathfrak{N}_\mathfrak{p})$, para todo $\mathfrak{p} \in V$. Observe que, ciertamente, $f_V^\sharp(\mathfrak{p}) \in f^{-1}V$, en virtud de la conmutatividad del diagrama (4.1).

Finalmente, por el inciso (a) de la Proposición (4.1), $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A,\, f(\mathfrak{p})} \cong A_{f(\mathfrak{p})}$ y $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B,\, \mathfrak{p}} \cong B_{\mathfrak{p}}$. Así, el morfismo inducido en los tallos $f^\sharp_{\mathfrak{p}}$ es precisamente $\varphi_{\mathfrak{p}}$ que, como se dijo ya, es local, haciendo de $(f, f^\sharp)$ un morfismo de espacios localmente anillados.

(c) Por el inciso (b) de la Proposición (4.1), se tienen los isomorfismos

$$\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}) \cong A \quad \text{y} \quad \Gamma(\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}) \cong B.$$

Por lo tanto, dado el morfismo $(f, f^\sharp)$ de las hipótesis, el morfismo $f^\sharp_{\operatorname{Spec} A}$ (tomado en las secciones globales) es precisamente el morfismo de anillos

$$f^\sharp_{\operatorname{Spec} A} =: \varphi : A \to B.$$

Para este morfismo construimos, en la sección anterior, un morfismo local $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{f(\mathfrak{p})} \to B_{\mathfrak{p}}$ de manera que el diagrama (4.1) conmuta.

Por definición, el morfismo $f^\sharp_{\mathfrak{p}}$ es local, de modo que $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})$, es decir, f coincide con el morfismo $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ inducido por φ. Por lo tanto, $f^\sharp$ también es inducido por φ. □

Ahora sí, estamos en posición de decir que la asignación funtorial

$$A \mapsto (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$$

de la que hablábamos, toma valores en la *categoría de espacios localmente anillados.*

4.2. Esquemas

Y entramos en materia.

Definición 4.1 *Un* esquema afín *es un espacio localmente anillado que, como tal, es isomorfo al espectro de algún anillo A. Un* esquema *es un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ para el que cada punto $x \in X$ posee una vecindad U, de modo que el par $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ es un esquema afín.*

Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema, nos referiremos a X como su *espacio topológico subyacente* y a $\mathcal{O}_X$ como su *gavilla estructural.* En ocasiones abusaremos de la notación y diremos que "X es un esquema", haciendo alusión al par $(X, \mathcal{O}_X)$. Un *morfismo de esquemas* es un morfismo de espacios localmente anillados y éste será *isomorfismo* si posee un morfismo inverso bilateral.

Un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es *conexo* (resp. *irreducible* o *compacto*) si su espacio topológico subyacente X es conexo (resp. irreducible o compacto[2]). Diremos que es *reducido* si para todo abierto U de X el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ no posee elementos nilpotentes; diremos que es *entero* si $\mathcal{O}_X(U)$ es dominio entero, para todo abierto U de X.

Ejemplo. Si $X = \operatorname{Spec} A$, entonces $(X, \mathcal{O}_X)$ es

(a) irreducible si y sólo si el nilradical $\mathfrak{N}$ de A es primo;

(b) reducido si y sólo si el nilradical $\mathfrak{N}$ de A es cero;

(c) entero si y sólo si A es dominio entero.

Prueba.

(a) Suponga que X es irreducible y tome $f, g \in A$, de modo que $fg \in \mathfrak{N}$, es decir, que existe $r \in \mathbb{N}^*$ tal que $(fg)^r = f^r g^r = 0$. Por lo tanto,

$$X = V((fg)^r) = V(f^r g^r) = V(f^r) \cup V(g^r).$$

Como X es irreducible, $V(f^r)$ o $V(g^r)$ es vacío, es decir, alguno de estos conjuntos es X, digamos, $X = V(f^r)$; por tanto, $f^r = 0$ y con ello, $f \in \mathfrak{N}$. Luego, $\mathfrak{N}$ es ideal primo de A.

Por otro lado, si $\mathfrak{N}$ es primo, suponga que X puede descomponerse como $X = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$, para algunos ideales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ en A. Por tanto, $X = V(\mathfrak{ab})$, de modo que $\mathfrak{ab} = \langle 0 \rangle$, es decir, $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{N}$. Así, alguno de los dos ideales es nulo, digamos, $\mathfrak{a} = \langle 0 \rangle$ y, con ello, $V(\mathfrak{a}) = V(0) = X$, probando así que X es irreducible.

(b) Suponga que el esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es reducido; es decir, para cualquier elección del abierto U de X, $\mathcal{O}_X(U)$ no posee elementos nilpotentes, en particular, las secciones globales $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Puesto que $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong A$, el anillo A no posee elementos nilpotentes distintos de 0, es decir, $\mathfrak{N} = \langle 0 \rangle$.

Si $\mathfrak{N} = \langle 0 \rangle$, entonces A no posee elementos nilpotentes distintos de 0 y dado que $A \cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \supseteq \mathcal{O}_X(U)$ para cada abierto U de X, entonces $\mathcal{O}_X(U)$ tampoco posee elementos nilpotentes distintos de 0. Así, $(X, \mathcal{O}_X)$ es entero.

(c) Si el esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es entero, entonces $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong A$ es dominio entero. Y a la inversa, si A es dominio entero, como $A \cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \supseteq \mathcal{O}_X(U)$ para cualquier elección del abierto U de X, entonces $\mathcal{O}_X(U)$ tampoco posee divisores de cero, es decir, $\mathcal{O}_X(U)$ es dominio entero. □

[2] Un espacio topológico de Noether es *compacto* si cualquier cubierta abierta de X posee una subcubierta finita.

Proposición 4.3 *Un esquema es entero si y sólo si es, a la vez, reducido e irreducible.*

Prueba. Si $(X,\mathcal{O}_X)$ es un esquema es entero, cada anillo $\mathcal{O}_X(U)$ es dominio entero y, por tanto, no posee elementos nilpotentes, por lo que $(X,\mathcal{O}_X)$ es reducido. Si $(X,\mathcal{O}_X)$ fuese reducible, existen U_1 y U_2 abiertos de X tales que $X = U_1 \cup U_2$, de modo que $\Gamma(X,\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2) = \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2)$, que no es dominio entero. Luego, la propiedad "dominio entero" implica la irreducibilidad de X.

Suponga que $(X,\mathcal{O}_X)$ es reducido e irreducible. Considere el abierto U de X y $f,g \in \mathcal{O}_X(U)$ tales que $fg = 0$. Dado $p \in X$, denotaremos por $\mathfrak{m}_p$ al único ideal máximo del anillo local $\mathcal{O}_{X,p}$. Definimos

$$Y := \{x \in U \,:\, f_x \in \mathfrak{m}_x\} \quad \text{y} \quad Z := \{x \in U \,:\, g_x \in \mathfrak{m}_x\}.$$

Veamos que éstos son subconjuntos cerrados de U tales que $Y \cup Z = U$.

Dado que $(X,\mathcal{O}_X)$ es esquema, existe un anillo B de modo que $U = \operatorname{Spec} B$. Así, según la Proposición (4.1), $\mathcal{O}_X(U) \cong B$ y $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \cong B_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$. Además, los elementos del ideal máximo $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ son de la forma a/b, con $a \in \mathfrak{p}$ y $b \in B \setminus \mathfrak{p}$.

Dado $f \in \mathcal{O}_X(U)$, probaremos que $Y = V(f) \subseteq \operatorname{Spec} B$.

Si $x \in Y$, entonces se tiene un morfismo $\eta_x : B \to B_x$ dado por $\eta_x(c) = c/1$, para todo $c \in B$; en particular, $f_x \in B_x$ y es la imagen de $f \in B$ bajo η_x, es decir, $f_x = f/1$. Dado que $x \in Y$, $f_x \in \mathfrak{m}_x$, por lo que $f \in x$. De este modo, $x \in V(f)$, lo que muestra que $Y \subseteq V(f)$.

Y en el otro sentido, si $y \in V(f)$, entonces $y \in U$ y es tal que $f \in y$, por lo que $\eta_y(f) = f_y = f/1 \in \mathfrak{m}_y$, cumpliendo así con la definición de Y; en otras palabras, $y \in Y$ y esto prueba que $V(f) \subseteq Y$.

Luego, $Y = V(f)$ y dado que $V(f)$ es cerrado en U, Y también lo es. Probar que Z es cerrado en U es un procedimiento completamente análogo, a saber, $Y = V(g)$.

Como $fg = 0$, entonces $U = V(0) = V(fg) = V(f) \cup V(g) = Y \cup Z$. Puesto que X es irreducible, U también lo es, de modo que alguno de los conjuntos Y o Z es precisamente U, digamos $U = Y$; pero esta igualdad implica que $V(0) = U = Y = V(f)$, es decir, que f es nilpotente. Sin embargo, como $(X,\mathcal{O}_X)$ es un esquema reducido, $\mathcal{O}_X(U)$ no posee elementos nilpotentes distintos de cero, de donde se sigue que $f = 0$. Esto prueba que $\mathcal{O}_X(U)$ es dominio entero y, así, que el esquema $(X,\mathcal{O}_X)$ es entero. □

Un esquema $(X,\mathcal{O}_X)$ es *localmente de Noether* si puede darse una cubierta del espacio topológico subyacente $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ donde cada $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ es isomorfo al espectro de un anillo A_i, siendo cada A_i un anillo de Noether; $(X,\mathcal{O}_X)$

es *de Noether* si es localmente de Noether y compacto.[3]

4.3. Variedades Algebraicas

El concepto "esquema" no generaliza por sí solo la noción de variedad algebraica. De hecho, una variedad algebraica *no* es un esquema; el espacio topológico subyacente de un esquema tiene más puntos que una variedad: los *puntos genéricos.*

Considere, como ejemplo, el espectro de $k[x, y]$, con k algebraicamente cerrado. El par $(\operatorname{Spec} k[x, y], \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k[x,y]})$ es un esquema afín. Los puntos de su espacio topológico subyacente son todos los ideales primos $\mathfrak{p} \in k[x, y]$ y es aquí donde aparece la discrepancia. Considerando los ideales máximos $\mathfrak{m}$ de $k[x, y]$, que de acuerdo al Nullstellensatz son de la forma $\mathfrak{m} = \langle x-a, y-b \rangle$, con $a, b \in k$, rescatamos todos los puntos del espacio afín $\mathbb{A}^2_k$; estos puntos tienen la propiedad de ser *cerrados* en $\operatorname{Spec} k[x, y]$, puesto que su cerradura $V(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{m}\}$.

Ahora, si, por ejemplo, f es un polinomio irreducible, el ideal $\langle f \rangle$ es primo en $k[x, y]$ y su cerradura en $\operatorname{Spec} k[x, y]$ es el punto mismo $\langle f \rangle$ y todos los puntos cerrados (a, b) tales que $f(a, b) = 0$, es decir, $\langle f \rangle$ y la curva $V(f) \subseteq \mathbb{A}^2_k$. Peor aún, dado que $k[x, y]$ es dominio entero, el ideal $(0) \in \operatorname{Spec} k[x, y]$ y es tal que $V(0) = \operatorname{Spec} k[x, y]$, su cerradura es ¡el espacio completo! Éstos son dos ejemplos de puntos *genéricos*, aquéllos que no son cerrados.

Pese a lo anterior, existe una manera natural de agregar puntos genéricos a una variedad. Precisamos esta noción: dado el espacio topológico X y Z un subespacio cerrado e irreducible de éste, decimos que un punto $\xi \in X$ es un *punto genérico de* Z si $\overline{\{\xi\}} = Z$.

Lema 4.2 *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema. Cualquier subconjunto no vacío, cerrado e irreducible no vacío de X posee un único punto genérico.*

Prueba. Sea $Z \subseteq X$ no vacío, cerrado e irreducible. Puesto que se tiene una cubierta $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ donde cada $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ es isomorfo al espectro de un anillo A_i y Z es irreducible, entonces $Z \subseteq \operatorname{Spec} A_i$, para algún $i \in I$. Dado que Z es cerrado, existe un ideal $\mathfrak{a}$ de A_i tal que $Z = V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spec} A_i$; como no es vacío, $\dashv \neq A$ (es propio) y dado que Z es irreducible, $\mathfrak{a}$ es primo en A_i. Observe, pues, que $\mathfrak{a} \in Z$ es un punto tal que $\overline{\{\mathfrak{a}\}} = V(\mathfrak{a}) = Z$, es decir, $\mathfrak{a}$ es un punto genérico para Z. Éste es el único, pues si se tuviese $\mathfrak{b}$ tal que $Z = \overline{\{\mathfrak{b}\}}$, como $\overline{\{\mathfrak{b}\}} = V(\mathfrak{b}) = Z = V(\mathfrak{a})$, entonces $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$. Pero tanto $\mathfrak{a}$ como $\mathfrak{b}$ son ideales primos de A_i, de modo que coinciden con sus respectivos radicales, es decir, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. □

[3] O equivalentemente, el esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es de Noether si existe una cubierta finita $X = U_1 \cup \cdots \cup U_r$ del espacio topológico subyacente, de modo que cada $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ es isomorfo al espectro de un anillo A_i.

Con el afán de explicar de qué modo usamos la Teoría de Esquemas para generalizar la noción de variedad algebraica sobre un campo k, explicamos lo que se entiende por *un esquema sobre otro.*

Definición 4.2 *Fije S un esquema. Un* esquema sobre S, *o un S-esquema, es un par (X,α), donde X es un esquema y $\alpha : X \to S$ un morfismo de esquemas. Si (X,α) e (Y,β) son S-esquemas, un morfismo entre ellos $f : (X,\alpha) \to (Y,\beta)$ (un S-morfismo) es un morfismo de esquemas $f : X \to Y$ de modo que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \\ S \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Fijo el esquema S, denotaremos $\mathfrak{Sq}(S)$ a la categoría de esquemas sobre S y S-morfismos. Dado el anillo A, denotaremos $\mathfrak{Sq}(A)$ a la categoría de esquemas sobre $\operatorname{Spec} A$.

Antes de enunciar el siguiente resultado, haremos algunas consideraciones. Dado el espacio topológico E, denotamos por $\operatorname{Irr}(E)$ a la familia de subconjuntos no vacíos cerrados e irreducibles de E. Observe que si $W \neq \varnothing$ es un subconjunto cerrado e irreducible de E, $\operatorname{Irr}(W) \subseteq \operatorname{Irr}(E)$ y que, además,

$$\operatorname{Irr}(W_1 \cup W_2) = \operatorname{Irr}(W_1) \cup \operatorname{Irr}(W_2) \quad \text{e} \quad \operatorname{Irr}\left(\bigcap_{j\in J} W_j\right) = \bigcap_{j\in J} \operatorname{Irr}(W_j).$$

Note que puede darse a $\operatorname{Irr}(E)$ estructura de espacio topológico, considerando como los cerrados de su topología a los conjuntos de la forma $\operatorname{Irr}(Y)$, donde $Y \subseteq E$ es cerrado, no vacío e irreducible en E. Además, a cada función continua $f : X_1 \to X_2$ entre espacios topológicos, puede asociársele un morfismo

$$\widetilde{f} : \operatorname{Irr}(X_1) \to \operatorname{Irr}(X_2)$$

definido en $Y \subseteq X_1$ como $\widetilde{f}(Y) := \overline{f(Y)}$.

Por otra parte, puede definirse un morfismo $\alpha : X \to \operatorname{Irr}(X)$ por $\alpha(p) = \overline{\{p\}}$. Además, α induce una biyección entre la topología de X y la de $\operatorname{Irr}(X)$.

Ahora bien, estamos en posición de enunciar el resultado más importante de esta monografía.

Teorema 4.1 *Sea k un campo algebraicamente cerrado. Se tiene un procedimiento para asociar a cada variedad algebraica sobre k un esquema sobre k, a saber, existe un funtor $\Omega : \mathfrak{Var}(k) \to \mathfrak{Sq}(k)$ pleno y fiel.*

Prueba. Sea V una variedad algebraica sobre k y $\mathcal{O}_V$ su gavilla de funciones regulares. Dado $\alpha : V \to \operatorname{Irr}(V)$ definido como antes, mostraremos que $(\operatorname{Irr}(V), \alpha_*(\mathcal{O}_V))$ es un esquema sobre k. Y dado que cualqueir variedad puede cubrirse usando sólo subvariedades afines, será suficiente probar que $(\operatorname{Irr}(V), \alpha_*(\mathcal{O}_V))$ es un esquema, siendo V afín.

Suponga, pues, que V es una variedad afín sobre k; definimos el morfismo de espacios localmente anillados

$$(h, h^\sharp) : (V, \mathcal{O}_V) \to (\operatorname{Spec} k[V], \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k[V]})$$

como sigue. Para cada $p \in V$, $h(p) := \mathfrak{m}_p$, el ideal de $k[V]$ de todas las funciones regulares que se anulan en p. De acuerdo con el Nullstellensatz, $\mathfrak{m}_p$ es máximo en $k[V]$ y h es, por tanto, una correspondencia biyectiva entre los puntos de V y los puntos cerrados de $\operatorname{Spec} k[V]$. De este modo, h es un homeomorfismo.

Ahora, dado el abierto U de $X := \operatorname{Spec} k[V]$, definimos a continuación el morfismo

$$h_U^\sharp : \mathcal{O}_X(U) \to h_*\mathcal{O}_V(U) := \mathcal{O}_V(h^{-1}U).$$

Observe que, dada la sección $s \in \mathcal{O}_X(U)$ y un punto $p \in h^{-1}U$, $h(p) \in U$ y $\mathcal{O}_{X,h(p)} \cong k[V]_{\mathfrak{m}_p}$. Entonces $s_{h(p)} \in k[V]_{\mathfrak{m}_p}$ y definimos

$$s(p) := [s_{h(p)}] \in k[V]_{\mathfrak{m}_p}/\mathfrak{m}_p \cong k.$$

De este modo, s define una función $s : h^{-1}U \to k$ que es, desde luego, regular. Puesto que hemos tomado $s \in \mathcal{O}_X(U)$ y construido un elemento $t \in h_*\mathcal{O}_V(U)$, definido en cada $p \in h^{-1}U$ como $t(p) := s(p) := [s_{h(p)}]$, la asignación $s \mapsto t$ define un isomorfismo $\mathcal{O}_X(U) \cong h_*\mathcal{O}_V(U)$.

Finalmente, como los ideales primos de $k[V]$ están en correspondencia biyectiva con los subconjuntos irreducibles de V, $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(\operatorname{Irr}(V), \alpha_*\mathcal{O}_V)$ son isomorfos como esquemas afines.

Para mostrar que $(\operatorname{Irr}(V), \alpha_*\mathcal{O}_V)$ es un esquema sobre k, debemos dar un morfismo de $(\operatorname{Irr}(V), \alpha_*\mathcal{O}_V)$ a $\operatorname{Spec} k$. Para ello, es suficiente dar un morfismo de anillos

$$k \to \Gamma(\operatorname{Irr}(V), \alpha_*\mathcal{O}_V) = \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$$

que a cada $\lambda \in k$ asocia el morfismo constante λ.

Puesto que se tiene el isomorfismo

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{Var}(k)}(V, W) \cong \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Sq}(k)}(\operatorname{Irr}(V), \operatorname{Irr}(W)),$$

el funtor Ω es pleno y fiel. $\square$

4.4. Epílogo

Es de este modo que la Teoría de Esquemas es empleada para construir un marco conceptual, en el que la noción de variedad alebraica sobre el campo k puede incorporarse y obtener una generalización. En este último capítulo la hemos tratado de manera superficial, pues hubiese sido agradable plantear y resolver problemas (ejemplos) con este enfoque (sobre curvas o superficies, por ejemplo), para hacer palpable la diferencia con el enfoque clásico. Además de que no se dio una descripción más o menos profunda de la categoría de esquemas, en tanto que no se trataron sus propiedades más importantes.

En nuestros tiempos suena a broma aspirar a elaborar tratados, por lo que no es en ese sentido en el que afirmamos que fueron varias las limitaciones de esta memoria: por mencionar algunas, el Capítulo 3 hubiese sido más claro si se agregasen ejemplos concretos de variedades analíticas complejas, en los que pudiera usarse la Teoría de Gavillas para *calcular*, ejemplos en los que pudiera haberse dicho de manera precisa qué información se rescata con tal herramienta (multiplicidades de intersecciones, singularidades, etcétera); en el Capítulo 2 no discutimos el procedimiento de "explosión" (del inglés *blow up*), de cómo usarlo en puntos singulares... no hablamos ni del espacio tangente a una variedad ni del teorema de Bézout; y, pese a que es fundamental, en toda la memoria ni siquiera asomó la cabeza la Teoría de la Dimensión.

Esperamos que todas estas inquietudes puedan ser incorporadas en versiones posteriores, solamente con la finalidad de hacer más claras (palpables) nuestras discusiones.

Mayo de 2010.

Apéndices

Apéndice A

Teoría de Categorías

El Álgebra de los siglos XIX y XX se ha caracterizado por hacer énfasis en la noción de "estructura". La Teoría de Categorías es un esfuerzo por formalizar esta noción y de unificar una gran cantidad de propiedades comunes a varias disciplinas en Matemáticas al establecer un marco conceptual en el cual incorporarlas. De este modo, se vela, entre otras cosas, por un desarrollo uniforme de dichas disciplinas y por un lenguaje estandarizado para ellas.

Enfatizamos dos de los primeros intentos en este sentido. Por un lado, los trabajos del grupo Nicolas Bourbaki, que formuló una teoría de estructuras como parte de su bien conocido tratado en varios volúmenes. Por otro, la idea de Oystein Ore de obviar la existencia de elementos en cada sistema matemático, considerado individualmente, para concentrarse en las interrelaciones entre éstos. Esta idea ha sido desarrollada sistemáticamente hasta dar con la Teoría de Categorías.[1]

A.1. Categorías y funtores

DEFINICIÓN A.1 *Una categoría $\mathscr{C}$ consiste en lo siguiente.*

(i) *Una* clase de objetos*, que denotamos por $Ob\mathscr{C}$.*

(ii) *Para cada par de objetos X, Y en $\mathscr{C}$, se tiene un conjunto de morfismos entre ellos, que denotamos por $Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$.*

(iii) *Para cada tríada X, Y y Z de objetos de $\mathscr{C}$, se tiene una función*

$$\circ : Hom_{\mathscr{C}}(X,Y) \times Hom_{\mathscr{C}}(Y,Z) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(X,Z)$$

a la que llamamos la composición*, tal que*

(a) $\psi\circ(\varphi\circ\lambda) = (\psi\circ\varphi)\circ\lambda$*, para cada $\lambda \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$, $\varphi \in Hom_{\mathscr{C}}(Y,Z)$ y $\psi \in Hom_{\mathscr{C}}(Z,W)$;*

[1] Referimos al lector interesado en la historia de este tema al texto [Cor].

(b) *para todo* $X \in Ob\mathscr{C}$*, existe el* morfismo identidad $1_X \in Hom_{\mathscr{C}}(X, X)$, *de manera que para cada* $\varphi \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$ *se tiene*

$$1_Y \circ \varphi = \varphi \qquad y \qquad \varphi \circ 1_X = \varphi.$$

Denotaremos un morfismo $\varphi \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$ *por una flecha* $\varphi : X \to Y$.

Ejemplos.

1. Sea J un conjunto parcialmente ordenado bajo la relación $\leq$. Puede formarse una categoría $\mathscr{J}$ con los elementos de J como objetos y, dados $i, j \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{J}$, diremos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{J}}(i, j)$ posee un único elemento $i \to j$ siempre que $i \leq j$ y que es vacío en otro caso.
2. La categoría **Grp**, cuyos objetos son los grupos y como morfismos los homomorfismos de grupos.
3. La categoría **Ab** de grupos abelianos y sus homomorfismos.
4. La categoría **Top** de espacios topológicos y funciones continuas.
5. La categoría **Con**, donde los objetos son los conjuntos y los morfismos, las funciones entre ellos.[2]
6. La categoría ${}_A\mathbf{Mod}$ de A-módulos izquierdos y morfismos A-lineales.
7. La categoría $\mathbf{Af_k}$ de conjuntos algebraicos afines sobre el campo k y morfismos polinomiales.
8. La categoría $\mathbf{\acute{A}lgAf}_k$ de $k-$álgebras afines y sus morfismos.

Una categoría $\mathscr{S}$ es una *subcategoría* de $\mathscr{C}$ si los objetos de $\mathscr{S}$ también lo son de $\mathscr{S}$, si $\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(X, Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ para cualesquiera dos objetos X, Y de $\mathscr{S}$, y además la función composición en $\mathscr{S}$ es inducida por la de $\mathscr{C}$. Denotamos esta situación por $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{C}$.

No se tiene la noción de igualdad entre dos objetos en una categoría arbitraria $\mathscr{C}$, por lo que se hace necesaria la noción de isomorfismos entre objetos. Un morfismo $\varphi : X \to Y$ es un *isomorfismo* si existe un morfismo $\gamma : X \leftarrow Y$ tal

[2] Este ejemplo es muestra de que la clase de objetos de una categoría no es en general un conjunto. De manera análoga, los elementos de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ no son necesariamente funciones (ya sea que preserven la estructura o no: morfismos de grupos, funciones continuas, funciones crecientes, etc.) Si en el ejemplo (1), dados $i, j \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{J}$ definimos $i < j \Leftrightarrow i \leq j$ e $i \neq j$, entonces podemos considerar a $\mathrm{Hom}_{\mathscr{J}}(i, j)$ como un conjunto de sucesiones finitas, a saber

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{J}}(i, j) := \{(i_0, \ldots, i_n) \,|\, i_k < i_{k+1}, \text{ con } i = i_0 \text{ y } j = i_n\}.$$

que $\varphi \circ \gamma = 1_Y$ y $\gamma \circ \varphi = 1_X$. En este caso se dice que el objeto X es isomorfo a Y y se escribe $X \cong Y$, o bien, $X \xrightarrow{\cong} Y$. Dado que γ es único con esta propiedad lo denotamos por φ^{-1}.

Definición A.2 *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías. Un funtor covariante $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una asignación*[3] *que a cada objeto X en $\mathscr{C}$ hace corresponder un objeto $F(X)$ de $\mathscr{D}$; y a cada morfismo $\varphi : X \to Y$ asigna un morfismo $F(\varphi) : F(X) \to F(Y)$, de modo que*

(i) $F(\varphi \circ \gamma) = F(\varphi) \circ F(\gamma)$, *para todo* $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ *y* $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z)$,

(ii) $F(1_X) = 1_{F(X)}$, *para cada* $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$.

Análogamente, un funtor contravariante es aquél que invierte el sentido de las flechas en (b) y el orden de la composición en (i).

Ejemplos.

1. El funtor *amnésico* A : **Top** $\to$ **Con**, que a cada espacio topológico asigna su conjunto subyacente, es decir, "olvida" la estructura. De manera similar es posible construir un funtor de este tipo para cada categoría cuyos objetos sean conjuntos con alguna estructura.

2. Dados dos funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$, definimos su *composición* $G \circ F : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$. Ésta es, por supuesto, asociativa. Se tiene además el funtor identidad $1_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$. Por tanto, podemos hablar de la categoría **Cat**, cuyos objetos son todas las categorías y los funtores entre ellas como morfismos.

3. El funtor Φ : $\mathbf{Af_k}$ $\to$**ÁlgAf**$_\mathbf{k}$ que asocia a cada conjunto algebraico afín X su anillo de coordenadas $k[X]$.

4. Y a la inversa, el funtor Ψ :**ÁlgAf**$_\mathbf{k}$ $\to$ $\mathbf{Af_k}$ que a cada k-álgebra afín asocia un conjunto algebraico afín.

Definición A.3 *Sean $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtores. Una* transformación natural *$\nu : F \to G$ entre éstos (o simplemente un* morfismo entre funtores*) consiste en la familia de morfismos*

$$\nu_X : F(X) \to G(X),$$

[3]El término "asignación" es un tanto impreciso. La acepción que aquí le damos es "regla de correspondencia", pues si bien una categoría no es un conjunto, un funtor no es en general una función.

indizada por los objetos X en $\mathscr{C}$, de manera que para cada morfismo entre objetos $\varphi : X \to Y$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[d, "F(\varphi)"'] & G(X) \arrow[d, "G(\varphi)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\nu_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

conmuta. Si cada morfismo ν_X es un isomorfismo, entonces se dice que ν es una equivalencia natural.

En consecuencia, al considerar la familia de funtores entre dos categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$, así como las transformaciones naturales entre ellos, obtenemos una nueva categoría $\mathbf{Fnt}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$. También es usual la notación $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$. En particular, se tiene la noción de *isomorfismo de categorías*.

Definición A.4 *Se dirá que un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una* equivalencia de categorías *si existe un funtor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tal que $G \circ F \cong 1_{\mathscr{C}}$ y $F \circ G \cong 1_{\mathscr{D}}$.*

Decimos que un objeto I en una categoría $\mathscr{C}$ es *inicial* si para cualquier objeto B existe un único morfismo $f : I \to B$. Un objeto F es un objeto *final* si, análogamente, para cualquier objeto B existe un único morfismo $g : B \to F$.

Diremos que un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ es *pleno* si para cualquier par de objetos A, B de $\mathscr{C}$ y cualquier flecha $g : F(A) \to F(B)$ de $\mathscr{B}$, existe un morfismo $f : A \to B$ en $\mathscr{C}$ tal que $g = F(f)$.

Decimos que el funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ es *fiel* cuando para cada par de objetos A, B de $\mathscr{C}$ y cualquier par de morfismos $f, g : A \to B$, la igualdad $F(f) = F(g) : T(A) \to T(B)$ implica $f = g$.

A.2. El principio de dualidad

Veremos en la siguiente sección como algunos enunciados son válidos si se invierte el sentido de las flechas (morfismos) y el de las composiciones.

Definición A.5 *Dada una categoría $\mathscr{C}$, su categoría* dual *(u* opuesta[4]*) $\mathscr{C}^*$ está formada de la siguiente manera:*

(i) $Ob\,\mathscr{C} = Ob\,\mathscr{C}^*$;

(ii) dados dos objetos A y B, $Hom_{\mathscr{C}}(A, B) = Hom_{\mathscr{C}^*}(B, A)$; dado $f : A \to B$ en $\mathscr{C}$, escribimos $f^* : B \to A$ para el correspondiente morfismo en $\mathscr{C}^*$. La ley de composición en $\mathscr{C}^*$ es, de este modo, dada por $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$.

[4]En tal caso, también se denota por $\mathscr{C}^{op}$.

De este modo, si hablamos de una propiedad, un enunciado, válido para objetos y morfismos en la categoría $\mathscr{A}$, entonces el enunciado dual será válido en $\mathscr{A}^*$.

Metateorema A.1 (Principio de dualidad) *Suponga la validad, en cualquier categoría, de un enunciado garantizando la existencia de ciertos objetos o morfismos o la equivalencia de algunas composiciones. Entonces, el* enunciado dual*, obtenido al invertir la dirección de los morfismos y cambiando el orden en las composiciones del original, también es válido en cualquier categoría.*

Por ejemplo, si un enunciado es válido para un objeto inicial, también es válido el enunciado dual para un objeto final.

A.3. Construcciones universales

Siempre que una estructura algebraica es definida, a menudo nos interesa construir o definir su producto cartesiano, cocientes, uniones, intersecciones, etcétera. En el caso general, tomaremos una categoría y definiremos este tipo de objetos en ella, a través de una *propiedad universal.*

A.3.1. Productos

Dados A y B objetos de $\mathscr{C}$. El producto cartesiano $A \times B$ es una tríada $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$, donde $\pi_A : A \times B \to A$ y $\pi_B : A \times B \to B$ son las proyecciones correspondientes, que satisface una propiedad universal, i.e., de modo que si se tiene otro objeto C y los morfismos $f : C \to A$ y $g : C \to B$, existe un único morfismo $h : C \to A \times B$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B. \end{tikzcd}$$

Debe destacarse que si en la categoría $\mathscr{C}$ existe el producto de cualquier par de objetos A y B, éste es único salvo isomorfismo; en particular, se tiene $A \times B \cong B \times A$. Además, dado un tercer objeto C, se tiene

$$(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C).$$

Del mismo modo puede definirse el producto de una familia arbitraria de objetos $\{A_i\}_{i \in I}$:

$$\left(\prod_{i \in I} A_i, \{\pi_i\}_{i \in I} \right),$$

donde cada $\pi_i : \prod_{i\in A} A_i \to A_i$ es la proyección al i-ésimo objeto correspondiente. De nueva cuenta, este objeto satisface una propiedad universal: dado cualquier objeto C y cualquier familia de morfismos $\{f_i\}_{i\in I}$, donde $f_i : C \to A_i$, existe un único morfismo $h : C \to \prod_{i\in I} A_i$ de modo que $f_i = \pi_i \circ h$, para cada $i \in I$. El producto de una familia arbitraria de objetos (cuando éste existe) es también único salvo isomorfismo.

EJEMPLOS.

1. El producto de una familia de objetos $\{U_i\}_{i\in I}$ en **Con** es el producto cartesiano $\prod_{i\in I} U_i$.
2. En **Ab** el producto de la familia $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es el grupo producto $\prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$.
3. En $\mathbf{Af_k}$, es el producto de conjuntos algebraicos afines.

La noción dual a la de producto es la de *coproducto*, obtenida al invertir las flechas en la defininición de producto y también el orden de las composiciones.

EJEMPLOS.

1. El coproducto en **Con** de la familia $\{U_i\}_{i\in I}$ es la unión disjunta $\coprod_{i\in I} U_i$, que denifimos en la siguiente sección.
2. En **Ab**, el coproducto de $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es la suma directa $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$.
3. En la categoría **AnC** de anillos conmutativos, el coproducto de la familia $\{R_i\}_{i\in I}$ es el producto tensorial generalizado $\bigotimes_{i\in I} R_i$ (sobre $\mathbb{Z}$).

A.3.2. Límites

Dedicamos especial atención a esta sección, dada la importancia que tendrá para nuestro estudio de la teoría de gavillas. Comenzamos trabajando en la categoría **Con**.

Dada la familia de conjuntos $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, formamos su *unión disjunta* de la siguiente manera:

$$\coprod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha := \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \{\alpha\} \times X_\alpha.$$

Definición A.6 *Se dice que el conjunto ordenado*[5] $(\Lambda, \leq)$ *es* dirigido *si para cualesquiera $i, j \in \Lambda$ existe un tercer elemento $k \in \Lambda$ de manera que $i \leq k$ y $j \leq k$. Si la familia de conjuntos $\{U_k\}_{k\in\Lambda}$ está indizada por el conjunto dirigido Λ y dados $i, j \in \Lambda$, con $i \leq j$, se tiene $\psi_{ij} \in \mathrm{Hom}(U_i, U_j)$ que verifica las siguientes propiedades:*

(a) *para todo $k \in \Lambda$, $\phi_{kk} = 1_{U_k}$; y*

(b) *si se tienen $i, j, k \in \Lambda$ tales que $i \leq j \leq k$, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[rr, "\phi_{ik}"] \arrow[dr, "\phi_{ij}"'] & & U_k \\ & U_j \arrow[ur, "\phi_{jk}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta; entonces diremos que el par

$$(\{U_k\}_\Lambda, \phi_{ij})$$

es un sistema directo *o* sistema inductivo *de conjuntos.*[6]

Ejemplos.

1. Si para $a, b \in \mathbb{N}^*$ establecemos

$$a \leq b \text{ si y sólo si } b|a,$$

hacemos de $\mathbb{N}$ un conjunto dirigido, puesto $[a, b]$ es tal que $a \leq [a, b]$ y $b \leq [a, b]$. Considere la familia de conjuntos $\{\mathbb{Z}_q\}_{q\in\mathbb{N}^*}$ y la familia de morfismos

$$\phi_{qr} : \mathbb{Z}_q \to \mathbb{Z}_r,$$

tales que para cada $n \in \mathbb{Z}_q$, se tiene $\phi_{qr}(n) = m \in \mathbb{Z}_r$, siempre que $n \equiv m \text{ mód } r$. Así, hacemos de $(\{\mathbb{Z}_q\}_{q\in\mathbb{N}^*}, \phi_{qr})$ un sistema inductivo de conjuntos.

2. Sea A un conjunto no vacío. El conjunto $\mathcal{P}(A)$, junto con la relación de orden

$$X \leq Y \text{ si y sólo si } X \supseteq Y,$$

[5] La relación $\leq$ definida en Λ es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Algunos autores prefieren decir *parcialmente ordenado*.

[6] Abusamos de la notación, puesto que ϕ_{ij} simboliza la familia de morfismos

$$\{U_i \to U_j \mid i, j \in \Lambda, \text{ con } i \leq j \text{ y } \Lambda \text{ dirigido}\}.$$

es un conjunto dirigido (el cnjunto $X \cap Y$ es tal que $X \leq X \cap Y$ e $Y \leq X \cap Y$). Considere el conjunto A con la topología discreta;[7] para $U \subseteq A$ definimos

$$\mathbb{R}^U := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\};$$

y siempre que $U \leq V$ en $\mathcal{P}(A)$, establecemos el morfismo

$$\begin{aligned} \psi_{UV} : \quad & \mathbb{R}^U \to \mathbb{R}^U \\ & f \mapsto f|_V, \end{aligned}$$

de manera que para cada $f \in \mathbb{R}^U$ los diagramas

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}, \\ V \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "f|_V"'] & \end{tikzcd}$$

donde i denota la inclusión natural entre conjuntos, conmutan. De esta manera, el par

$$\left(\{\mathbb{R}^U\}_{U\in\mathcal{P}(A)}, \psi_{UV}\right)$$

es un sistema inductivo.

3. Sea X un espacio topológico y Ω su topología. Considere una pregavilla $\mathscr{F}$ de conjuntos sobre X y $x \in X$. La familia de conjuntos abiertos $\Delta := \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, tal que cada U_α es vecindad de x es un conjunto dirigido. Por tanto, la familia de conjuntos $\{\mathscr{F}(U)\}_{U\in\Delta}$ es un sistema inductivo de conjuntos.

Definición A.7 *Dado el sistema inductivo* $(\{U_k\}_{k\in\Lambda}, \phi_{ij})$, *un* límite *para el sistema es un conjunto* L *y una colección de morfismos* $\varphi_k \in \mathrm{Hom}(U_k, L)$, $k \in \Lambda$, *que satisface la* condición de compatibilidad*: para cada* $i, j \in \Lambda$ *tales que* $i \leq j$, *el diagrama*

$$\begin{tikzcd} U_j \arrow[r, "\varphi_j"] \arrow[d, "\phi_{jk}"'] & L \\ U_k \arrow[ur, "\varphi_k"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. El límite $(L, \{\varphi_k\}_\Lambda)$ *es un* límite inductivo *o* límite directo *del sistema si satisface la siguiente* propiedad univesal*: si* $(M, \{\psi_k\}_\Lambda)$ *es otro límite del*

[7] La topología asociada al conjunto A es su conjunto potencia.

sistema, existe un único morfismo $f : L \to M$, de manera que para cada $k \in \Lambda$ el diagrama correspondiente

$$\begin{tikzcd}
U_k \arrow[r, "\psi_k"] \arrow[d, "\varphi_k"'] & M \\
L \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Es prudente hacer notar que si un sistema inductivo posee un límite directo, entonces éste es único salvo isomorfismo.

Proposición A.1 *Cualesquiera dos límites directos*

$$(L, \{\varphi_k\}_\Lambda) \qquad y \qquad (M, \{\psi_k\}_\Lambda)$$

de un mismo sistema inductivo $(\{U_k\}_{k\in\Lambda}, \phi_{ij})$ son isomorfos.

Prueba. En virtud de la propiedad universal que verifican L y M, existen los morfismos $L \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} M$, de manera que para cada $k \in \Lambda$ los diagramas

$$\begin{tikzcd}
& L \\
U_k \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & M \arrow[u, "g"'] \\
& L \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

conmutan. Nuevamente, dado que L es universal, $1_L : L \to L$ es el único morfismo que hace conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd}
U_k \arrow[r, "\phi_k"] \arrow[dr, "\varphi_k"'] & L \\
& L. \arrow[u, "1_L"']
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $1_L = g \circ f$. Procediendo de manera análoga para el límite directo M obtenemos $1_M = f \circ g$. □

Luego, tenemos justificación para hablar *del* límite directo de un sistema inductivo; lo denotamos por

$$L = \varinjlim_{k\in\Lambda} U_k.$$

El siguiente lema establece, en particular, las condiciones necesarias para que un límite sea un límite directo.

LEMA A.1 *Considere el sistema inductivo de conjuntos* $(\{U_k\}_{k\in\Lambda}, \phi_{jk})$ *y suponga que* $(L, \{\varphi_k\}_\Lambda)$ *es un límite para el sistema. Entonces* $(L, \{\varphi_k\}_\Lambda)$ *es el límite directo del sistema si y sólo si se verifican*

(i) *para todo* $u \in L$ *existe* $k \in \Lambda$ *de manera que* $u \in \operatorname{Im}\varphi_k$*, y*

(ii) *dados* $x \in U_j$ *e* $y \in U_k$*,* $\varphi_j(x) = \varphi_k(y)$ *si y sólo si existe* $q \in \Lambda$*, con* $j \leq q$ *y* $k \leq q$*, tal que* $\phi_{jq}(x) = \phi_{kq}(y)$.[8]

PRUEBA. ($\Leftarrow$) Mostraremos que $(L, \{\varphi_k\}_\Lambda)$ satisface una propiedad universal. Para ello, considere otro límite $(M, \{\psi_k\}_\Lambda)$ para el sistema. Se busca definir un morfismo $f : L \to M$ único que haga conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd} U_k \arrow[r, "\psi_k"] \arrow[d, "\varphi_k"'] & M, \\ L \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \tag{A.1}$$

para todo $k \in \Lambda$.

Sea $u \in L$. De acuerdo con la propiedad (i), existe $s \in \Lambda$ tal que $u = \varphi_s(x)$ para algún $x \in U_s$. De esta manera, $\psi_s(x) \in M$ y definimos $f(u) := \psi_s(x)$.

La asignación f es función (está bien definida). Si existe $r \in \Lambda$ distinto de s, de tal suerte que $u = \varphi_r(w)$ con $w \in U_r$, entonces $\psi_s(x) = \psi_r(w)$. En otras palabras, f así definida no depende del conjunto U_k donde se tome la imagen inversa de u bajo φ_k.

La función f hace conmutar los diagramas (A.1). Dado $x \in U_p$, con $p \in \Lambda$, éste define un elemento $\varphi_p(x) \in L$. Nuevamente por la condición (i), existe $j \in \Lambda$ tal que $\varphi_p(x) = \varphi_j(z)$, con $z \in U_j$. Entonces

$$f(\varphi_p(x)) = f(\varphi_j(z)) := \psi_j(z).$$

Puesto que $\varphi_p(x) = \varphi_j(z)$, en virtud de la propiedad (ii), existe $q \in \Lambda$, con $p \leq q$ y $j \leq q$, de manera que $\psi_{pq}(x) = \psi_{jq}(z)$. Dado que la familia de morfismos $\{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}$ satisface lacondición de compatibilidad, se tiene

$$\psi_j(z) = \varphi_q \circ \psi_{jq}(z) = \varphi_q \circ \psi_{pq}(x) = \psi_p(x).$$

Por tanto, $\psi_p(x) = \psi_j(z) = f(\varphi_p(x))$.

La unicidad de f. Finalmente, si $g : L \to M$ es otro morfismo que hace conmutar los diagramas (A.1), entonces, para cada $k \in \Lambda$,

$$g \circ \varphi_k = \psi_k = f \circ \varphi_k.$$

[8]Observe que la condición suficiente de este inciso siempre se verifica.

Es decir, $g = f$.

($\Rightarrow$) Ahora bien, ¿todo sistema inductivo de conjuntos posea un límite directo? Para responder, construiremos el límite directo para el sistema $(\{U_k\}_{k\in\Lambda}, \phi_{jk})$ y veremos que satisface las condiciones (i) y (ii).

Sea

$$W = \coprod_{k\in\Lambda} U_k$$

la unión disjunta de la familia de conjuntos $\{U_k\}_{k\in\Lambda}$. Se define una relación $\sim$ en W de la siguiente manera: dados $x \in U_j$ e $y \in U_k$, $x \sim y$ si y sólo si existe $q \in \Lambda$, con $j \leq q$ y $k \leq q$, de manera que $\phi_{jq}(x) = \phi_{kq}(y)$.[9]

Veamos que $\sim$ es de equivalencia. No es difícil advertir que $\sim$ es simétrica y reflexiva; probamos la transitividad: sean $x \in U_j$, $y \in U_k$ y $z \in U_r$ tales que $x \sim y$ e $y \sim z$; podemos entonces elegir $q, s, t \in \Lambda$ para los cuales tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
U_j \arrow[r, "\phi_{jq}"] & U_q \arrow[r, "\phi_{qt}"] & U_t. \\
U_k \arrow[ur, "\phi_{kq}"] \arrow[r, "\phi_{ks}"] & U_s \arrow[ur, "\phi_{st}"'] & \\
U_r \arrow[ur, "\phi_{rs}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Es decir, se tiene $\phi_{jq}(x) = \phi_{kq}(y) \in U_q$ y $\phi_{rs}(z) = \phi_{ks}(y) \in U_s$, de modo que $t \in \Lambda$ es tal que

$$\phi_{jt}(x) = \phi_{qt}(\phi_{jq}(x)) = \phi_{st}(\phi_{rs}(z)) = \phi_{rt}(z).$$

Concluimos entonces que $x \sim z$.

Si tomamos $L = W/\sim$ y para todo $k \in \Lambda$ el morfismo $\varphi_k : U_k \to L$ como la composición $U_k \hookrightarrow W \to W/\sim$, afirmamos que $(L, \{\varphi_k\}_{k\in\Lambda})$ es un límite inductivo para el sistema $\{U_k\}_\Lambda$. Y, en efecto, $(L, \{\varphi_k\}_{k\in\Lambda})$ satisface las condiciones (i) y (ii):

(i) cada elemento en L es la clase de equivalencia $[u]$ de cierto elemento $u \in U_k$, para algún $k \in \Lambda$, por la construcción que se hizo arriba;

(ii) si $x \in U_j$ y $w \in U_k$ son tales que $\varphi_j(x) = \varphi_k(w)$ en L, entonces $[x] = [w]$, por lo que $x \sim w$, lo cual significa que $\phi_{jm}(x) = \phi_{km}(w)$ en U_m (con $j \leq m$ y $k \leq m$, por supuesto). $\square$

[9] Note que x e y deberían ser pensados en rigor como elementos de los conjuntos $\{j\} \times U_j$ y $\{k\} \times U_k$, respectivamente. Sin embargo, nos permitimos este abuso de lenguaje dado que dichos elementos pueden ser identificados con (j, x) y (k, y), respectivamente.

Observe que para cada sistema inductivo de conjuntos $(\{U_k\}_{k\in\Lambda}, \phi_{jk})$ para cada $k \in \Lambda$ se tiene el morfismo canónico

$$\nu_k : U_k \to \varinjlim_{k\in\Lambda} U_k,$$

el cual aplica a cada elemento $f \in U_k$ a su clase de equivalencia $[f]$ en L.

Ejemplos. Damos a continuación los límites directos correspondientes a los ejemplos de sistemas directos que se dieron arriba, por orden de aparición.

1. El conjunto $\mathbb{Z}_1 = \{0\}$ es el límite directo del sistema $(\{\mathbb{Z}_q\}_{q\in\mathbb{N}^*}, \phi_{qr})$, como veremos a continuación.[10] En principio, $\mathbb{Z}_1$ es un límite para el sistema, dado que para todo $q \in \mathbb{N}^*$, se tiene la proyección canónica φ_q definida como
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_q & \xrightarrow{\varphi_q} & \mathbb{Z}_1 \\ m & \longmapsto & 0, \end{array}$$
para todo $m \in \mathbb{Z}_q$; con ello, $\mathbb{Z}_1$ verifica la condición (i) del Lema A.1. Finalmente, dados $x \in \mathbb{Z}_p$ y $w \in \mathbb{Z}_q$, $\varphi_p(x) = \varphi_q(w) = 0$ en $\mathbb{Z}_1$ y puesto que $\mathbb{Z}_1$ es un elemento del sistema, la condición (ii) se verifica trivialmente.

2. Aplicamos la construcción al sistema $\big(\{\mathbb{R}^U\}_{U\in\mathcal{P}(A)}, \psi_{UV}\big)$. En este caso, se tiene
$$W = \coprod_{U\in\mathcal{P}(A)} \mathbb{R}^U.$$
Dados $f \in \mathbb{R}^U$ y $g \in \mathbb{R}^W$, la relación de equivalencia está dada por la regla
$$f \sim g \text{ si y sólo si } f|_V = g|_V, \text{ para algún } V \subseteq U \cap W.$$
El límite directo para el sistema es el par $(W/\sim, \psi_V)$ donde
$$\psi_V : \mathbb{R}^V \to W/\sim$$
es la composición $\mathbb{R}^V \hookrightarrow W \to W/\sim$, para cada conjunto abierto V de A.

3. Construiremos el límite directo para el sistema inductivo $\{\mathscr{F}(U)\}_{U\in\Delta}$, con $x \in X$ y $\Delta := \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, tal que cada U_α es vecindad de x. Considere
$$L = \coprod_{U\in\Delta} \mathscr{F}(U).$$

[10] Pese a que en este ejemplo el límite directo del sistema inductivo pertenede a éste último, no sucede en general (véase el Lema A.2).

Si $\sigma \in \mathscr{F}(V)$ y $\tau \in \mathscr{F}(U)$, decimos que $\sigma \sim \tau$ si y sólo si existe $W \subseteq U \cap V$, con $W \in \Delta$, de modo que $\sigma|_W = \tau|_W$. Así, el límite directo es el par

$$(L/\sim, \nu_V)$$

donde ν_V es la composición $\mathscr{F}(V) \hookrightarrow L \to L/\sim$. Dado que se tiene un sistema de este estilo para cada $x \in X$, denotamos $\mathscr{F}_x := (L/\sim, \nu_V)$, el *tallo* de $\mathscr{F}$ en x.

Hasta el momento hemos considerado sistemas inductivos de conjuntos solamente. Pero nos será útil hacer lo propio con anillos, módulos y grupos abelianos. Comenzamos con estos últimos.

DEFINICIÓN A.8 *Un sistema inductivo de* grupos abelianos *es un sistema inductivo de conjuntos* $(\{G_k\}_{k\in\Lambda}, \phi_{jk})$ *para el que cada conjunto* G_k *posee estructura de grupo abeliano y cada* ϕ_{jk} *es un morfismo de grupos abelianos.*

Un límite *para dicho sistema es un grupo abeliano* G *junto con una familia de morfismos* $\{\varphi_k\}_\Lambda$ *de grupos abelianos. Este límite será un* límite inductivo *para el sistema si dicha familia de morfismos satisfacen una propiedad universal.*

Como en el caso para conjuntos, cualesquiera dos límites inductivos para un sistema inductivo de grupos abelianos son isomorfos. Sin embargo, las condiciones suficientes para que un límite sea límite inductivo varían un poco, en vista de la estructura de grupo abeliano. El análogo al Lema A.1 es el siguiente.

LEMA A.2 *El límite* $(G, \{\varphi_k\}_\Lambda)$ *del sistema inductivo* $(\{G_k\}_{k\in\Lambda}, \phi_{jk})$ *de grupos abelianos es un límite directo si y sólo si satisface*

(a) *para cada* $g \in G$ *existe* $j \in \Lambda$ *tal que* $g \in \operatorname{Im}\varphi_j$, *y*

(b) *si para todo* $k \in \Lambda$ *tomamos* $g_k \in G_k$, *entonces* $\varphi_k(g_k) = 0$ *si y sólo si existe* $q \in \Lambda$, *tal que* $k \leq q$ *y* $\phi_{kq}(g_k) = 0$.

PRUEBA. ($\Leftarrow$) Probaremos, de nueva cuenta, que $(G, \{\varphi_k\}_\Lambda)$ satisface una propiedad universal; es decir, que dado otro límite $(H, \{\psi_k\}_\Lambda)$ para el sistema, existe un único morfismo $\gamma : G \to H$ que hace conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd} G_k \arrow[r, "\psi_k"] \arrow[d, "\varphi_k"'] & H \\ G \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{(A.2)}$$

para todo $k \in \Lambda$. En efecto, dado $g \in G$, por (a), se tiene $j \in \Lambda$ tal que $g = \varphi_j(x)$ para algún $x \in G_j$. Definimos $\gamma : G \to H$ por

$$\gamma(g) := \psi_j(x).$$

La asignación γ es función. Si existe $k \neq j$ tal que $\varphi_k(y) = g$, para alguna $g \in G_k$, entonces
$$\psi_k(y) = \gamma(g) = \psi_j(x).$$

La función γ es morfismo de grupos abelianos. Tome h otro elemento de G; así $h = \varphi_k(y)$, con $y \in G_k$ para alguna $k \in \Lambda$. Como G es límite, los morfismos $\{\varphi_k\}_\Lambda$ satisfacen la condición de compatibilidad, y dado que $\{G_k\}_\Lambda$ es inductivo, se tiene $m \in \Lambda$ tal que $k, j \leq m$ y así
$$\varphi_j = \varphi_m \circ \phi_{jm} \qquad \text{y} \qquad \varphi_k = \varphi_m \circ \phi_{km}.$$
Desde luego, $\gamma(g) := \psi_j(x)$ y $\gamma(h) := \psi_k(y)$. Se tiene entonces el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
G_j \arrow[dr, "\phi_{jm}"] \arrow[drrr, bend left, "\psi_j"] \arrow[dddr, bend right, "\varphi_j"'] & & & \\
& G_m \arrow[drr, "\psi_m"] \arrow[dd, "\varphi_m"'] & & \\
& & G_k \arrow[ul, "\phi_{km}"'] \arrow[r, "\psi_k"'] \arrow[dl, "\varphi_k"] & H \\
& G \arrow[urr, bend right, "\gamma"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dado que los morfismos $\{\psi_k\}_\Lambda$ satisfacen la condición de compatibilidad y ψ_m es morfismo de grupos abelianos, se tiene
$$\begin{aligned}
\gamma(g+h) &= \gamma[\varphi_m \circ \phi_{jm}(x) + \varphi_m \circ \phi_{km}(y)] = \gamma[\varphi_m(\phi_{jm}(x) + \phi_{km}(y))] = \\
&= \psi_m(\phi_{jm}(x) + \phi_{km}(y)) = \psi_m(\phi_{jm}(x)) + \psi_m(\phi_{km}(y)) = \\
&= \psi_j(x) + \psi_k(y) = \gamma(g) + \gamma(h).
\end{aligned}$$

El morfismo γ hace conmutar los diagramas A.2. Dado $h \in G$, existe $j \in \Lambda$ tal que $h = \varphi_j(x)$ para algún $x \in G_j$, de modo que, según la definición de γ, se tiene $\psi_j(x) = \gamma(h) = \gamma(\varphi_j(x))$.

El morfismo γ es único. Suponga la existencia del morfismo de grupos $\delta : G \to H$ de manera que $\delta \circ \varphi_k = \psi_k$, para todo $k \in \Lambda$. Dado $g_k \in G_k$ se tiene entonces
$$\delta(\varphi_k(g_k)) = \psi_k(g_k) = \gamma(\varphi_k(g_k)),$$
para cada $k \in \Lambda$. Luego, $\delta = \gamma$.

($\Rightarrow$) Ahora bien, construiremos el límite directo del sistema inductivo de grupos abelianos $(\{G_k\}_\Lambda, \phi_{jk})$ y veremos que éste satisface (a) y (b). Definimos
$$H := \bigoplus_{k \in \Lambda} G_k;$$

y para cada G_k se tienen las inclusiones naturales $i_k : G_k \to H$ como morfismos. Definimos H_0 como el subgrupo abeliano de H generado por el conjunto

$$\{i_m(\phi_{km}(g_k)) - i_k(g_k) \,:\, k \leq m \in \Lambda\}.$$

Haciendo $G = H/H_0$ y tomando los morfismos $\varphi_k : G_k \to G$ como los morfismos canónicos, hacemos de $(G, \{\varphi_k\}_\Lambda)$ el límite directo para el sistema, como se muestra a continuación. Veamos que $(G, \{\varphi_k\}_\Lambda)$ verfica la condición de compatibilidad: considere el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G_k \arrow[dr, "i_k"'] \arrow[drr, bend left, "\varphi_k"] \arrow[dd, "\phi_{km}"'] & & \\
 & H \arrow[r, "\eta"] & H/H_0. \\
G_m \arrow[ur, "i_m"] \arrow[urr, bend right, "\varphi_m"'] & &
\end{tikzcd}$$

De esta forma, dado $g_k \in G_k$ se tiene $\phi_{km}(g_k) \in G_m$, entonces

$$\varphi_k(g_k) := \eta(i_k(g_k)).$$

Basta ver que $(G, \{\varphi_k\}_\Lambda)$ verifica las condiciones (a) y (b).

(a) Observe que $G = \{i_k(h_k) + H_0 \,:\, h_k \in G_k\}$ y la razón es la siguiente: todo elemento de G es de la forma $\xi = \sum\limits_k i_k(g_k) + H_0$, basta tomar $j \in \Lambda$ tal que $k \leq j$ para todo k y $g_k \neq 0$ para obtener

$$\xi = \sum_k (i_k(g_k) + H_0) = \sum_k (i_k(g_k) - i_k(g_k) + i_j(\phi_{kj}(g_k)) + H_0) = i_j(h_j) + H_0,$$

donde $h_j = \sum\limits_k \phi_{kj}(g_k) \in G_j$. En otras palabras, cada $u \in G$ es de la forma $i_j(h_j) + H_0$, para alguna $j \in \Lambda$, es decir, $u \in \operatorname{Im} \varphi_j$.

(b) Probaremos que $i_k(h_k) + H_0 = 0$ si y sólo si existe $q \in \Lambda$, con $q \geq k$ para todo k, tal que $\phi_{kq}(h_k) = 0$.

($\Leftarrow$) En virtud de la condición de compatibilidad, si existe q tal que $\phi_{kq}(h_k) = 0$, entonces

$$i_k(h_k) + H_0 = i_k(h_k) - i_k(h_k) + \phi_{kq}(h_k) + H_0 = H_0.$$

($\Rightarrow$) Si $i_k(h_k) + H_0 = 0$, entonces $i_k(h_k) \in H_0$ es una suma finita de la forma $i_k(h_k) = \sum_j \mu_j \in H$, donde cada $\mu_j \in H_0$ es de la forma

$$\mu_j = i_{\alpha(j)}(\phi_{j\alpha(j)}(g_j)) - i_j(g_j),$$

donde cada $g_j \in H$ y $j < \alpha(j) \in \Lambda$. Consideremos cualquier $q > k$ tal que $q > \alpha(j)$ para toda j. Fijemos j y hagamos $\alpha = \alpha(j)$. Entonces

$$\mu_j = [i_q(\phi_{jq}(g_j)) - i_j(g_j)] + [i_\alpha(\phi_{j\alpha}(g_j)) - i_q(\phi_{kq}(\phi_{j\alpha}(g_j)))].$$

Observe que μ_j es ahora una suma de dos elementos en H_0 en los que el índice más grande en cada caso es q. Por tanto, $i_k(h_k)$ puede ser expresado como una suma de elementos cuyo máximo índice es q en cada término. Cualquier suma finita de elementos que poseen el mismo índice máximo y el mismo índice mínimo es igual a un único elemnto con los mismos índices. Así,

$$i_q(\phi_{kq}(h_k)) = [i_q(\phi_{kq}(h_k)) - i_k(h_k)] + i_k(h_k), \text{ y } i_k(h_k) = \sum_j \mu_j \in H_0$$

muestra que $i_q(\phi_{kq}(h_k))$ puede ser expresado como una suma finita de elementos cada uno de los cuales posee como índice máximo a q, es decir,

$$i_q(\phi_{kq}(h_k)) = \sum_{p\leq q}(i_q(\phi_{pq}(d_p)) - i_p(d_p)), \qquad \text{con } d_p \in G_p.$$

Ésta última es una relación en H, donde un elemento es cero si y sólo si cada componente es cero a la vez. Entonces, para cada $p < q$ se tiene $-i_p(d_p) = 0$, o bien, $d_p = 0$ y, por tanto, $\phi_{pq}(d_p) = 0$. Si $p = q$, entonces ϕ_{qq} es el morfismo identidad y, de nuevo,

$$i_q(\phi_{qq}(d_q) - i_q(d_q)) = 0.$$

Por tanto, $i_q(\phi_{kq}(h_k)) = 0$. □

En el lenguaje de la teoría de categorías, si se considera el funtor covariante $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, se tiene una familia de objetos $\{F(D)\}_{D\in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}}$ (la generalización de un sistema dirigido de conjuntos). Cuando éste existe, un *límite* para dicho sistema consiste en un objeto $L \in \mathscr{C}$ y una familia de morfismos $\mu_D : F(D) \to L$ en $\mathscr{C}$, de modo que dado el morfismo $f : D \to E$ en $\mathscr{D}$, se tiene $\mu_E = F(f) \circ \mu_D$. En otras palabras, un límite para F es el par $(L, \{\mu_D\}_{D\in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}})$, tal que los diagramas

$$\begin{tikzcd} F(D) \arrow[r, "\mu_D"] \arrow[d, "F(f)"'] & L \\ F(E) \arrow[ur, "\mu_E"'] & \end{tikzcd}$$

conmutan. Así, un *límite directo* para $\{F(D)\}_{D\in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}}$ (si existe) es un límite $(L, \{\mu_D\}_{D\in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}})$, de modo que para cualquier otro límite $(M, \{\nu_D\}_{D\in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}})$ existe un único morfismo $\gamma : L \to M$ con la propiedad $\nu_D = \gamma \circ \mu_D$, para cada objeto D en $\mathscr{D}$; es decir, de tal suerte que los diagramas

$$\begin{tikzcd} F(D) \arrow[r, "\mu_D"] \arrow[dr, "\nu_D"'] & L \arrow[d, "\gamma"] \\ & M \end{tikzcd}$$

son conmutativos para cada objeto D en $\mathscr{D}$.

Observe que cambiando el funtor $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ se obtienen distintas familias de objetos $\{F(D)\}_{D \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}}$. Considere, pues, además de F, otro funtor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ y el sistema de objetos $\{G(D)\}_{D \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}}$. Suponga que ambos sistemas son dirigidos[11], digamos,

$$(\{F(D)\}_{\mathrm{Ob}\,\mathscr{D}}, \phi_{DE}) \qquad \text{y} \qquad (\{G(D)\}_{\mathrm{Ob}\,\mathscr{D}}, \psi_{DE})$$

y poseen límites directos $(L, \{\mu_D\}_{D \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}})$ y $(N, \{\lambda_D\}_{D \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}})$, respectivamente. Un morfismo entre tales sistemas

$$f : \{F(D)\}_{\mathrm{Ob}\,\mathscr{D}} \to \{G(D)\}_{\mathrm{Ob}\,\mathscr{D}}$$

es una familia de morfismos $f_D : F(D) \to G(D)$, tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd} F(D) \arrow[r, "f_D"] \arrow[d, "\phi_{DE}"'] & G(D) \arrow[d, "\psi_{DE}"] \\ F(E) \arrow[r, "f_E"] & G(E) \end{tikzcd}$$

conmutan. Cada morfismo f de tal naturaleza induce un morfismo en los límites

$$\varinjlim_{\mathrm{Ob}\,D} f_D : L \to N,$$

de modo que para cada objeto D en $\mathscr{D}$ conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(D) \arrow[r, "f_D"] \arrow[d, "\eta_F"'] & G(D) \arrow[d, "\eta_G"] \\ L \arrow[r, "\varinjlim f_D"] & N. \end{tikzcd}$$

[11]Es decir, que puede establecerse un orden parcial en los objetos de la categoría $\mathscr{D}$, de modo que pueda darse a ésta estructura de conjunto dirigido.

A.4. La noción Categoría Abeliana

Los axiomas que definen a una *categoría abeliana* se extraen de la categoría de grupos abelianos **Ab** y son una generalización a ésta. Precisaremos esta aseveración.

Diremos que una categoría $\mathscr{A}$ es una **Ab**-categoría si para cada par de objetos D, E, el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(D, E)$ posee estructura de un grupo abeliano, de modo que la composición de morfismos se distribuya con su suma. Diremos que $\mathscr{A}$ es *aditiva* si posee un objeto cero[12] y para cada par de objetos D, E su producto $D \times E$ está definido.

Sea $\mathscr{A}$ una categoría con objeto cero, A, B objetos de $\mathscr{A}$ y $f : A \to B$ un morfismo entre ellos. Decimos que el morfismo $\nu : N \to A$ es un *núcleo* de f si $f \circ \nu = 0$ y para todo morfismo $\nu' : N' \to A$, de modo que $f \circ \nu' = 0$, existe un único morfismo $g : N' \to N$ tal que $\nu \circ g = \nu'$. La noción *conúcleo* es dual.

Definición A.9 *Decimos que una categoría $\mathscr{A}$ es abeliana es una categoría aditiva tal que*

(a) todo morfismo en $\mathscr{A}$ posee núcleo y conúcleo,

(b) todo monomorfismo es el núcleo de su conúcleo, y

(c) cada epimorfismo es el conúcleo de su núcleo.

Ejemplos. **Ab**, A-**Mód**, **AnC**, **Con**.

Para nuestros fines, la importancia de las categorías abelianas radica en que sus axiomas nos permiten hablar de, entre otras propiedades, (co)productos y límites directos.

[12] Un objeto cero 0 es un objeto tal que para cualquier objeto C en $\mathscr{A}$ se tienen los morfismos únicos $C \to 0 \to C$.

Apéndice B
Álgebra Conmutativa

En este apéndice, se tratan una serie de resultados necesarios para los capítulos anteriores.

B.1. El anillo $k[x]$

PROPOSICIÓN B.1 *El anillo de polinomios en una variable $k[x]$ es un dominio de ideales principales.*

PRUEBA. El anillo $k[x]$ es un dominio entero: sean

$$f(x) = a_r x^r + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ y } g(x) = b_s x^x + \cdots + b_1 x + b_0$$

polinomios en $k[x]$ distintos de cero, de modo que existen $i^* \in \{1, \ldots, r\}$ y $j^* \in \{1, \ldots, s\}$ para los cuales $a_{i^*} \neq 0 \neq b_{j^*}$. Suponer que

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq r \\ 0 \leq j \leq s}} a_i b_j x^{i+j} = 0$$

implica que cada uno de los términos $a_i b_j x^{i+j} = 0$ y, puesto que $a_i, b_j \in k$ y k es campo (en particular, dominio entero), se tiene entonces que $a_i = 0$ o $b_j = 0$. Sin embargo, esto no sucede con la pareja de índices i^*, j^*, lo cual es una contradicción.

Mostraremos ahora que todo ideal en $k[x]$ es principal. Sea J ideal de $k[x]$. La asignación de grado a cada polinomio f en $k[x]$ puede ser considerada como una función[1] $gr : k[x] \to \mathbb{N}$. Considere entonces $gr(J) := \{gr(f) : f \in J\} \subset \mathbb{N}$. De acuerdo con el principio del buen orden, existe en $gr(J)$ un elemento mínimo m, el cual corresponde a cierto polinomio $g \in J$. Sea $h \in J$. Mostraremos que $g|h$. Por el algoritmo de la división en $k[x]$, existen $q, r \in k[x]$ de modo que

$$h(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x),$$

[1] A cada polinomio se le asigna uno y sólo uno de los elementos en $\mathbb{N}$.

donde $r(x) = 0$ ó $gr(r) < gr(g)$. Observe que $r(x) = h(x) - q(x) \cdot g(x) \in J$ y, dado que $g(x)$ posee el grado mínimo en J, la condición $gr(r) < gr(g)$ no puede darse. Por tanto, $r(x) = 0$ y así, $h(x) = q(x) \cdot g(x)$, como se quería probar. $\square$

Proposición B.2 (algoritmo de la división) *Para cada par de polinomios $f, g \in k[x]$, con $g \neq 0$, existen $r(x), q(x) \in k[x]$ únicos, de modo que*

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x),$$

donde $r(x) = 0$ ó $gr(f) < gr(g)$.[2]

Prueba. Si $gr(f) < gr(g)$, basta hacer $q(x) = 0$ y $r(x) = f(x)$. De otro modo, si $gr(f) \geq gr(g)$, escribamos

$$\begin{gathered} f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_s x^s \text{ y} \\ g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_t x^t, \end{gathered}$$

donde $b_t \neq 0$ y, por supuesto, $s \geq t$. Pretendemos dividir f/g, por lo que el primer término del cociente será $(a_s/b_t)x^{s-t}$. Definimos

$$f_1(x) := f(x) - \frac{a_s}{b_t} x^{s-t} g(x)$$

y observe que el término de mayor grado de $f(x)$, $a_s x^s$, se cancela con el término

$$-\left(\frac{a_s}{b_t}\right) x^{s-t} b_t x^t = -a_s x^t,$$

por lo que $\operatorname{gr}(f_1) < \operatorname{gr}(f)$. Usaremos inducción sobre el grado t de f. Por hipótesis de inducción se tiene

$$f_1(x) = g(x) q_1(x) + r(x),$$

donde $r(x) = 0$, o bien, $\operatorname{gr}(r) < \operatorname{gr}(g)$. Al substituir (B.1) en (B.1), se tiene

$$f(x) - \left(\frac{a_s}{b_t} x^{s-t} g(x)\right) = g(x) q_1(x) + r(x) \text{ y entonces}$$

$$f(x) = \left(\frac{a_s}{b_t} x^{s-t} + q_1(x)\right) g(x) + r(x),$$

con $q(x) := (a_s/b_t)x^{s-t} + q_1(x) \in k[x]$ y $r(x) = 0$ ó $\operatorname{gr}(r) < \operatorname{gr}(g)$.

[2] Por $gr(f)$ denotamos al *grado* del polinomio $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$, es decir, el número natural m correspondiente a la máxima potencia de x cuyo coeficiente $a_m \neq 0$.

Para probar la unicidad de q y r, suponga que existen q' y r' en $k[x]$ tales que $f(x) = g(x)q'(x) + r'(x)$, con $r'(x) = 0$ ó $\operatorname{gr}(r') < \operatorname{gr}(g)$. Se tienen, pues, dos expresiones para $f(x)$ que, al restarlas, se obtiene

$$g(x)(q(x) - q'(x)) = r(x) - r'(x).$$

Observe que $r - r' = 0$ si y sólo si $q - q' = 0$; en otro caso, se tendría

$$\operatorname{gr}(g) \leq \operatorname{gr}(g) + \operatorname{gr}(q + q') = \operatorname{gr}(r - r') \leq \text{máx}\{\operatorname{gr}(r), \operatorname{gr}(r')\},$$

lo cual es absurdo. □

B.2. Extensiones de campos

Dado el campo k, decimos que el número $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $px := \sum_{i=1}^{p} x = 0$ para todo $x \in k$, es la *característica* del campo.

Proposición B.3 *Sean k un campo y R anillo. Todo morfismo de anillos no cero $\varphi : k \to R$ es inyectivo.*

Prueba. Es suficiente advertir que $\text{Núc}\,\varphi$ es un ideal de k. Puesto que k es campo y φ no es la función constante cero, $\text{Núc}\,\varphi = \{0\}$. □

Definición B.1 *Una* extensión de campos*, que denotamos $F : k$, es un morfismo de campos $\phi : k \to F$.*

Puesto que ϕ es inyectivo (por la proposición inmediata anterior), identificamos a k con su imagen $\phi(k)$ en F.

Definición B.2 *Dada la extensión de campos $F : k$ y $\alpha \in F$, decimos que α es* algebraico *sobre k si existe $f(x) \in k[x]$ de modo que $f(\alpha) = 0$. Si esto sucede para todo $\alpha \in F$, el campo F es entonces una* extensión algebraica *de k, o que F es* algebraico *sobre k. Si el elemento $\alpha \in F$ no es algebraico sobre k, decimos que α es* trascendente *sobre k.*

Definición B.3 *Un campo k es algebraicamente cerrado si cualquier polinomio no constante en $k[x]$ posee al menos una raíz en k.*

Teorema B.1 (Fundamental del Álgebra) *El campo $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado.*

Prueba. Considere el anillo $\mathbb{R}[x]$ y su ideal $\langle x^2+1\rangle$. Puesto que x^2+1 es irreducible[3] en $\mathbb{R}[x]$, $\langle x^2+1\rangle$ es ideal primo y, por tanto, maximal en $\mathbb{R}[x]$. De este modo, $R(\alpha) := \mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$ es campo. Sea $\alpha := x + \langle x^2+1\rangle$ (la clase de x en $\mathbb{R}(\alpha)$). Mostraremos que que todo polinomio $f(\alpha)$ posee una raíz en $\mathbb{R}$. Observe que α^r, para $r \in \mathbb{N}^*$, pertenece a la clase de $(-1)^{r/2}$ si r es par, o bien, a la de $(-1)^r\alpha$ si r es impar.[4]Entonces, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $f(\alpha) = a+b\alpha$. Suponer que $f(\alpha)$ no posee raíces para ningún valor de α implica que $a + b\alpha \neq 0$, es decir, que ninguna ecuación lineal posee soluciones en $\mathbb{R}$, lo cual es falso. Luego, todo polinomio $f(\alpha)$ posee al menos una raíz en $\mathbb{R}$.

Finalmente, consideramos el morfismo

$$M : \mathbb{R}(\alpha) \to \mathbb{C}$$

dado por $f(\alpha) \mapsto f(i)$. Y, puesto que $f(\alpha) = a + b\alpha$ para algunos $a, b \in \mathbb{R}$, α juega el mismo rol en $\mathbb{R}(\alpha)$ que i en $\mathbb{C}$, estableciéndose así una biyección. De este modo, $\mathbb{R}(\alpha) \cong \mathbb{C}$. $\square$

Definición B.4 *Dada la extensión de campo $F : k$, la* cerradura *algebraica en F de k es el conjunto*

$$\overline{k} := \{\gamma \in F \,:\, \gamma \text{ es algebraico sobre } k\}.$$

Se dice que la extensión $F : k$ es algebraica (resp. trascendente) si todo elemento de F es algebraico (resp. trascendente) sobre k.

Proposición B.4 *Sea k un campo algebraicamente cerrado. Se verifican las dos condiciones siguientes.*

(a) El campo k posee una cantidad infinita de elementos.

(b) Si $F : k$ es una extensión algebraica de k, entonces $F = k$.

Prueba.

(a) Sea k un campo algebraicamente cerrado. Suponga que k es finito, digamos, $k = \{a_0 = 1, a_1 = 0, a_2, \ldots, a_s\}$, con $s \in \mathbb{N}^*$. De este modo, cualquier polinomio $f \in k[x]$ debe anularse en al menos un elemento a_i de k, es decir, f es divisible por $x - a_i$. Sin embargo, el polinomio

$$g(x) = 1 + \prod_{i=1}^{t}(x - a_i),$$

no se anula para ningún $a_i \in k$. Luego, k debe ser infinito.

[3]No existen $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que $x^2+1 = (x-a)(x-b)$.

[4]Dados $p, q \in \mathbb{R}[x]$, $p \sim q$ (están en la misma clase de equivalencia en $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\langle)$ si y sólo si $p - q \in \langle x^2+1\langle$.

(b) Si $\alpha \in F$, por hipótesis, α es algebraico sobre k, es decir, existe $f(x) \in k[x]$ de modo que $f(\alpha) = 0$. Dado que $k[x]$ es un dominio de ideales principales, existe $g(x) \in k[x]$ mónico irreducible tal que $\langle f(x) \rangle = \langle g(x) \rangle$ y $g(\alpha) = 0$. Como k es algebraicamente cerrado, $\alpha \in k$. Esto muestra que $F \subseteq k$, por lo que $F = k$. $\square$

PROPOSICIÓN B.5 *Si k es algebraicamente cerrado, todo $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ posee al menos una raíz en $\mathbb{A}_k^n$.*

PRUEBA. Se establece como consecuencia del inciso *(a)* del Lema 1.2, o bien, una reformulación del inciso *(b)*. $\square$

Dada una extensión $F : k$, diremos que la familia $L = \{a_1, \ldots, a_r\} \subset F$ es *algebraicamente dependiente*[5] sobre k si existe $f \in k[x_1, \ldots, x_r]$ no cero, tal que $f(a_1, \ldots, a_r) = 0$. En otro caso, decimos que L es *algebraicamente independiente.* Si L es infinita, diremos que es algebraicamente dependiente si cualquier subconjunto finito $M \subset L$ lo es.

LEMA B.1 *Toda extensión finita L de un campo k es algebraica.*

PRUEBA. Suponga que la extensión L de k no es algebraica, es decir, existe $\alpha \in L$ trascendente sobre k. De este modo, el conjunto $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots\}$ es linealmente independiente sobre k, lo que contradice el hecho de que $[L : k] < \infty$. $\square$

El enunciado a continuación se sigue como corolario.

OBSERVACIÓN B.1 *Si L es una extensión finita del campo algebraicamente cerrado k, entonces $L = k$.*

PRUEBA. Cada elemento de $\beta \in L$ es algebraico sobre k y la cerradura algebraica de k obliga a que β pertenezca a k, es decir, $L \subseteq k$. $\square$

Regresemos a $k[x]$. Diremos que un polinomio

$$f(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in k[x], \text{ con } a_r \neq 0$$

es *irreducible* si éste no puede expresarse como producto de polinomios de menor grado. Sea $F : k$ una extensión y $u \in F$; diremos que f es el *polinomio mínimo* de u en $k[x]$ si f es *mónico* (i.e. $a_r = 1$), irreducible y $f(u) = 0$. Por *derivada* de f nos referiremos al polinomio

$$f'(x) := r a_r x^{r-1} + a_{r-1} a_{r-1} x^{r-2} + \cdots + a_1 \in k[x].$$

Diremos que un polinomio irreducible f es *separable* si $f'(x) \neq 0$. Un elemento $u \in F$ es *separable* si su polinomio mínimo f es separable.

[5]O bien, que $a_1, \ldots, a_r$ son algebraicamente dependientes.

Proposición B.6 *Sea k algebraicamente cerrado y $F : k$ una extensión finita. Existe una familia de elementos $\{z_1, \ldots, z_{d+1}\} \subset F$ algebraicamente independiente sobre k tal que $F = k(z_1, \ldots, z_d)$ y z_{d+1} es separable sobre $k(z_1, \ldots, z_d)$.*

Prueba. Por hipótesis, existen $t_1, \ldots, t_r \in F$ de modo que $F = k(t_1, \ldots, t_r)$. De éstos, sea $d \leq r$ el número máximo de elementos algebraicamente independientes sobre k, digamos $t_1, \ldots, t_d$. Por tanto, dado cualquier $y \in F$, el conjunto $\{t_1, \ldots, t_r, y\}$ es algebraicamente dependiente; sin embargo, existe $f \in k[x_1, \ldots, x_{d+1}]$ irreducible tal que $f(t_1, \ldots, t_d, y) = 0$. Veamos que la derivada parcial $f'_{x_i} \neq 0$ para alguna $i \in \{1, \ldots, d+1\}$. En efecto, si tal i no existiese, cada x_i aparecería en f en potencias múltiplos de la característica p del campo, es decir,

$$f(x_1, \ldots, x_{d+1}) = \sum_j a_{j_1 \cdots j_{d+1}} x_1^{pj_1} \cdots x_{d+1}^{pj_{d+1}}.$$

Hagamos, entonces, $a_{j_1 \cdots j_{d+1}} =: b^p_{j_1 \cdots j_{d+1}}$ y $g := \sum\limits_j b_{j_1 \cdots j_{d+1}} x_1^{j_1} \cdots x_{d+1}^{j_{d+1}}$; de este modo, $f = g^d$, lo que contradice la irreductibilidad de f.

Ahora bien, como para dicha i, $f'_{x_i} \neq 0$, la familia $\{t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_{d+1}\}$ (con d elementos) es algebraicamente independiente sobre k. De nuevo, como $f'_{x_i} \neq 0$, la variable x_i aparece en f, por lo que t_i es algebraico sobre $k(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_{d+1})$. Sin embargo, la familia $\{t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_{d+1}\}$ podría ser algebraicamente dependiente y, por tanto, el grado de trascendencia de $k(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_{d+1})$ podría ser menor que d, lo que contradice la independencia algebraica de $t_1, \ldots, t_d$.

Renombrando dicho t_i, puede decirse que la familia $\{t_1, \ldots, t_d\}$ es algebraicamente independiente sobre k y que $f'_{x_{d+1}} \neq 0$. Esto muestra que t_{d+1} es separable sobre $k(t_1, \ldots, t_d)$. Dado que t_{d+2} es algebraico sobre $k(t_1, \ldots, t_d)$, por el teorema del elemento primitivo[6], puede hallarse y tal que $k(t_1, \ldots, t_{d+2}) = k(t_1, \ldots, t_d, y)$. Iterando este procedimiento, se consigue adjuntar los elementos $t_{d+1}, \ldots, t_r$ y podemos así expresar a F como $k(z_1, \ldots, z_{d+1})$, donde la familia $\{z_1, \ldots, z_d\}$ es algebraicamente independiente sobre k y además $f(z_1, \ldots, z_{d+1}) = 0$, con f irreducible sobre k y $f'_{x_{d+1}} \neq 0$. □

B.3. Extensiones de anillos - k-Álgebras - Módulos

Sea A anillo. Observe que si A es dominio entero, entonces $A[x]$ también lo es. Para convencerse de ello, tome $f(x) = \sum_i a_i x^i$ y $g(x) = \sum_j b_j x^j$ polinomios en $A[x]$ y suponga que tanto f como g son distintos de cero. Existen, entonces, a_{i^*} y b_{j^*} distintos de cero en A, por lo que $a_{i^*} b_{j^*} x^{i^*+j^*} \neq 0$, pues A es dominio entero. Por tanto, $fg \neq 0$.

[6] Véase [PONER REFERENCIA]

Se tiene aún más, si A es dominio entero, entonces $A[x_1, \dots, x_n]$ también lo es y, en particular, $k[x_1, \dots, x_n]$ es dominio entero. Probamos esta aseveración por inducción sobre n. Hemos dicho que $A[x_1]$ es dominio entero. Por hipótesis de inducción, $R := A[x_1, \dots, x_{n-1}]$ es dominio entero y así,

$$R[x_n] = A[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n] = A[x_1, \dots, x_n]$$

también lo es. Finalmente, si k es campo, es en particular dominio entero y, por tanto, también $k[x_1, \dots, x_n]$.

Diremos que un anillo A es *de Noether* si todos sus ideales son de generación finita.

PROPOSICIÓN B.7 *Sea A anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *A es de Noether.*
2. *Cualquier cadena ascendente de ideales*

$$J_1 \subset J_2 \subset \cdots J_r \subset J_{r+1} \subset \cdots$$

   de A es estacionaria[7].

3. *Cualquier colección de ideales $\{J_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ $(\Lambda \neq \varnothing)$ de A posee un elemento máximo.*

PRUEBA.

(1) $\Rightarrow$ (2). Considere la cadena ascendente de ideales de A

$$J_1 \subset J_2 \subset \cdots J_r \subset J_{r+1} \subset \cdots \subset A,$$

cada uno de los cuales es de generación finita[8]. Puesto que A también es ideal de sí mismo, también es de generación finita, entonces debe existir $t \in \mathbb{N}$ tal que $J_{r+1} \setminus J_r = \varnothing$, para todo $r \geq t$, es decir, tal que $J_t = J_{t+1} = J_{t+2} = \cdots$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Note que el conjunto $\mathscr{F} := \{J_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un orden parcial bajo la inclusión y puesto que $\Lambda \neq \varnothing$, la colección es no vacía. Tome una cadena $\mathcal{C}$ de ideales en $\mathscr{F}$ y considere el número natural s para el cual la cadena se estaciona (ésta es la hipótesis), entonces el ideal J_s es una cota superior para $\mathcal{C}$. La conclusión se sigue del Lema de Zorn.

[7]Existe un índice $t \in \mathbb{N}$ a partir del cual $J_t = J_{t+1} = J_{t+2} = \cdots$.
[8]Las contenciones son propias.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea J ideal de A. Suponer que J es el ideal generado por algún conjunto infinito $S \subset J$, tal que no es generado por ningún conjunto finito $T \subset S$, nos permitiría construir una cadena infinita de ideales

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots,$$

donde cada I_j está generado por el conjunto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_j\}$ de elementos distintos entre sí, para cada $j \in \mathbb{N}$.[9] Observe que la familia $\{I_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *no* está acotada, en contradicción con las hipótesis. Luego, todo ideal J de A debe ser de generación finita. □

Si, en cambio, se considera el A-módulo M y éste es tal que todos sus submódulos son de generación finita, entonces diremos que M es de Noether.

Lema B.2 *Sea* $0 \to N \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} P \to 0$ *una sucesión exacta de* A*-módulos*[10]. *Entonces,* M *es de Noether si y sólo si* N *y* P *son de Noether.*

Prueba.

($\Rightarrow$) Sean $S_1 \subset S_2 \subset \cdots$ y $T_1 \subset T_2 \subset \cdots$ cadenas de submódulos de N y P, respectivamente. Dado que α es inyectivo (resp. β es suprayectivo), la cadena de submódulos de M: $\alpha(S_1) \subset \alpha(S_2) \subset \cdots$ (resp. $\beta^{-1}(T_1) \subset \beta^{-1}(T_2) \subset \cdots$) es estacionaria, por lo que la cadena de las preimágenes de α (resp. imágenes de β) también lo es.

($\Leftarrow$) Sea $L_1 \subset L_2 \subset \cdots$ una cadena de submódulos de M, de modo que $\alpha^{-1}(L_1) \subset \alpha^{-1}(L_2) \subset \cdots$ y $\beta(L_1) \subset \beta(L_2) \subset \cdots$ son cadenas de submódulos en N y P, respectivamente. Existen entonces $r, s \in \mathbb{N}$ índices a partir de los cuales se tiene $\alpha^{-1}(L_r) = \alpha^{-1}(L_{r+1}) = \cdots$ y $\beta(L_s) = \beta(L_{s+1}) = \cdots$. Así, a partir del máximo de estos dos índices, se tiene $L_{\text{máx}\,\{r,s\}} = L_{\text{máx}\,\{r,s\}+1} = \cdots$. □

Lema B.3 *Si* $\{M_i\}_{i=1}^{n}$ *es una coleción de* A*-módulos de Noether, entonces el* A*-módulo* $\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{n} M_i$ *también lo es.*

Prueba. Aplicaremos inducción sobre n. Considere la sucesión exacta

$$0 \to M_2 \hookrightarrow M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\eta} M_1 \to 0,$$

[9] Como S es infinito, contiene al menos un conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$ numerable.

[10] Es decir, $\operatorname{Im}\alpha = \text{Núc}\,\beta$

donde η es la proyección a M_1. En virtud del lema anterior, $M_1 \oplus M_2$ es de Noether. Suponga este resultado cierto para $n-1$ (hipótesis de inducción), es decir, que $\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$ es de Noether y considere la sucesión exacta

$$0 \to M_n \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \xrightarrow{\pi} \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \to 0,$$

donde π es una proyección. El resultado se sigue de aplicar de nuevo el lema anterior. □

Proposición B.8 *Sea A un anillo de Noether y M un A-módulo de generación finita. Entonces M es de Noether.*

Prueba. Dado que M es de generación finita, existen $\{a_1, \ldots, a_r\} \subset M$ tales que $M = Aa_1 + \cdots + Aa_r$. De este modo,

$$M = \bigoplus_{i=1}^{r} A_i,$$

donde cada $A_i := Aa_i \cong A$. Luego, por el Lema (B.3), M es de Noether. □

Teorema B.2 (de la Base, de Hilbert) *Si R es un anillo de Noether, entonces $R[x_1, \ldots, x_n]$ también lo es.*

Prueba. Usaremos inducción sobre n.

Sea J un ideal de $R[x_1]$, probaremos que J es de generación finita. Considere el ideal

$$C := \{a \in R \,:\, f(x_1) = ax^s + \text{ (coeficientes de menor grado), con } f \in J\},$$

es decir, el ideal generado por los coeficientes principales de los polinomios en J. Dado que R es de Noether, es suficiente una cantidad finita de elementos $a_1, \ldots, a_t \in C$ para generar a C. Entonces, para cada i se tiene (al menos) un polinomio $f_i(x_1) \in J$ con

$$f_i(x_1) = a_i x_1^{r_i} + \text{ (términos de menor grado).}$$

Hagamos $r := \text{máx}\,\{r_i \,:\, 1 \le i \le t\}$ y tome H como el ideal $\langle f_1, \ldots, f_t \rangle \subseteq R[x_1]$. Sea $h = bx^m +$ (términos de menor grado) $\in J$, observe que $b \in C$. Si $m \ge r$, escríbase $b = \sum_{i=1}^{t} u_i a_i$, con cada $u_i \in R$. Así, $h - \sum_{i=1}^{t} i_i x_1^{m-r_i} f_i(x_1) \in J$ y su grado es menor que m. Iterando este procedimiento, podemos ir restando elementos en C de h hasta obtener un polinomio g de grado menor que r; es decir, pueden obtenerse $p \in C$ tal que $h = g + p$.

Hemos probado que $J = (J \cap M) + C$, donde M es el R-módulo $Rx_1 + Rx_1^2 + \cdots + Rx_1^{r-1}$; esto es, con M de generación finita que, por la Proposición (B.8), es de Noether. Así, $C \cap M$ también es de generación finita como R-módulo, digamos, $C \cap M = Rq_1 + \cdots R_d$, por lo que el conjunto finito $\{f_1, \ldots, f_t, q_1, \ldots, q_d\}$ genera a J, como se quería probar.

Ahora bien, por hipótesis de inducción, $A := R[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ es de Noether. Basta observar que $R[x_1, \ldots, x_n] = R[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n] = A[x_n]$ y aplicar el argumento anterior a $A[x_n]$ para obtener el resultado deseado. $\square$

Sea A anillo y B un subanillo de A. Diremos que A es una *extensión de anillo* de B o una *B-álgebra* si existe un conjunto $S \subseteq A$ tal que

$$A = B[S] = \left\{ \sum_{j \in I} \lambda_j s_j^{\alpha_j} \ : \text{cada } \lambda_j \in B,\ s_j \in S,\ \text{y } \alpha_j \in \mathbb{N} \right\}.$$

En otras palabras, A es la B-álgebra $B[S]$ si todo elemento $f \in A$ puede ser considerado como un "polinomio" con *indeterminadas* en S; sin embargo, observe la definición da cabida a que S pueda ser infinito y que existan *relaciones* entre los elementos de S, por lo que no se trata precisamente de polinomios.[11]

Si el conjunto S es finito, digamos, $S = \{a_1, \ldots, a_r\}$ diremos que A es una *B-álgebra finitamente generada* o *de tipo finito* y escribimos $A = B[a_1, \ldots, a_r]$.

Nuevamente, suponga que A es extensión de B. Un elemento $\alpha \in A$ es *entero* sobre B si existe un polinomio mónico $f(x) = x^r + b_{r-1}x_{r-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ tal que $f(\alpha) = 0$. Diremos que A es una *extensión entera* de B si todo elemento en A es entero sobre B.

B.4. Normalización de Noether

Para probar el teorema principal de esta sección, necesitaremos los siguientes resultados.

Lema B.4 *Sean $C \subseteq B \subseteq A$ anillos.*

1. *Si B y A son módulos de generación finita sobre C y B, respectivamente, entonces A es de generación finita como C-módulo.*

2. *Si A es un B-módulo finitamente generado, entonces A es extensión entera de B.*

[11] Sólo con fines didácticos, suponga, por ejemplo, que se tiene $a^t = 0$, o bien, $a^q = b$, para algunos $a, b \in S$, situación que no sucede en $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ entre las variables x_i, donde el anillo $A = k[S]$, siendo $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

3. *Si $x \in A$ es entero sobre B, entonces $B[x]$ es un B-módulo de generación finita.*

PRUEBA.

1. Por hipótesis, existen $\{a_1, \ldots, a_r\} \subset A$ y $\{b_1, \ldots, b_m\} \subset B$ tales que $A = Ba_1 + \cdots + Ba_r$ y $B = Cb_1 + \cdots + Cb_m$. De modo que $A = Ca_1b_1 + \cdots + Ca_rb_m$.

2. Dado $u \in A$, optamos por construir $m \in B[x]$ tal que $m(u) = 0$. Usamos para ello el *truco del determinante*. Puesto que A es un B-módulo de generación finita, se tiene la familia $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de elementos en A tales que
$$A = Ba_1 + \cdots Ba_n.$$
De este modo, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tienen las familias $\{\delta_{ij}\}$ y $\{b_i j\}$ de elementos en B, con $j \in \{1, \ldots, n\}$, de modo que
$$a_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} a_j \quad \text{y} \quad ua_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_j.$$
Así, sustituyendo la primera igualdad en la segunda, se tiene una expresión
$$\sum_{j=1}^{n} (u\delta_{ij} - b_{ij})\, a_j = 0, \tag{B.1}$$
para cada i. Nombrando como M a la matrix $(u\delta_{ij} - b_{ij})_{ij}$ y haciendo
$$a := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$
podemos reescribir (B.1) como
$$Ma = 0. \tag{B.2}$$
Considere la ecuación $\mathrm{adj}(M) \cdot M = \mathbf{1} \cdot \det(M)$. Multiplicando (B.2) por $\mathrm{adj}(M)$, obtenemos
$$\mathrm{adj}(M) \cdot M \cdot a = \mathbf{1} \cdot \det(M) \cdot a = 0.$$
Por lo tanto, $\det(M) = 0$. De este modo,
$$\det(M) = \alpha_0 + \alpha_1 u + \cdots + \alpha_{r-1}^{r-1} u^{r-1} + u^r = 0,$$
donde cada $\alpha_i \in B$, es un polinomio en $B[x]$, como se quería hallar.

3. Por hipótesis, $x \in A$ es tal que $f(x) = x^s + b_{t-1}x^{s-1} + \cdots + b_1 x + b_0 = 0$, esto es, x^s puede expresarse en términos de $b_0, x, x^2, \ldots, x^{s-1}$. Luego, son suficientes las primeras $s-1$ potencias de x y los elementos de B para generar cualquiel polinomio en $B[x]$; por tanto,

$$B[x] = B + Bx + Bx^2 + \cdots + Bx^{s-1}.$$

□

LEMA B.5 *Sea F campo y B subanillo de F. Si F es un B-módulo de generación finita, entonces B también es campo.*

PRUEBA. Sea $b \in B \setminus \{0\}$. Puesto que F es campo, existe $b^{-1} \in F$. Basta probar b^{-1} en realidad pertenece a B. Por el inciso 2 del lema anterior, se tienen $c_0, \ldots, c_{t-1} \in B$ tales que

$$(b^{-1})^t + c_{t-1}(b^{-1})^{t-1} + \cdots + c_1(b^{-1}) + c_0 = 0;$$

expresión que al multiplicar por b^{t-1} resulta

$$b^{-1} = -c_{t-1} - c_{t-2}b - \cdots - c_0 b^{t-1} \in B,$$

como se quería mostrar. □

LEMA B.6 (NAKAYAMA) *Sea $A \neq 0$ un $B-$módulo de generación finita. Para todos los ideales propios J de B se tiene $JA \neq A$.*

PRUEBA. Usamos de nuevo el truco del determinante, como en el Lema (B.4). Existen $a_1, \ldots, a_r \in A$ tales que $A = Ba_1 + \cdots + Ba_r$, por hipótesis. Sea J ideal propio de B y suponga que $JA = A$. Existen entonces $b_{ij} \in J$, con $1 \leq i, j \leq r$, tales que

$$a_i = \sum_{j=1}^{r} b_{ij} a_j, \qquad 1 \leq i \leq r.$$

Por tanto, $\det(\delta_{ij} - b_{ij}) = 0$. Basta expandir la expresión anterior para probar que $1 \in J$, contradiciendo así las hipótesis. □

Dado $f = \sum_\alpha \lambda_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \in k[x_1, \ldots, x_n]$, donde cada $\lambda_\alpha \in k$ y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, decimos que el grado de f es el número natural

$$\deg f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Lema B.7 *Sea $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ no cero. El cambio de variables $w_i = x_i - \alpha_i x_n$, donde $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ y cada $\alpha_i \in k$, es tal que el polinomio*

$$f(w_1 + \alpha_1 x_n, \ldots, w_{n-1} + \alpha_n x_n, x_n) \in k[w_1, \ldots, w_{n-1}, x_n]$$

tiene un término de la forma $cx_n^{grad\, f}$.

Prueba. Sea $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ y considere $w_i = x_i - \alpha_i x_n$, para alguna elección de $\alpha_i \in k$, con $1 \leq i \leq n-1$. Podemos escribir entonces

$$f = F_{\text{grad}\, f} + G,$$

donde $F_{\text{grad}\, f}$ es una suma de monomios cada uno de los cuales tiene el mismo grado que f y $\text{grad}\, G \leq \text{grad}\, f - 1$. De este modo,

$$f(w_1 + \alpha_1 x_n, \ldots, w_{n-1} + \alpha_{n-1}, x_n) = F_{\text{grad}\, f} x_n^{\text{grad}\, f} + \Delta,$$

donde Δ denota una suma de términos de menor grado en x_n. Puesto que $F_{\text{grad}\, f}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 1)$ no es el polinomio cero, $V(F_{\text{grad}}\, f) \neq \mathbb{A}_k^{n-1}$ y, dado que k es infinito, ello significa que pueden elegirse $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in k$ tales que $F_{\text{grad}\, f}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 1) \neq 0$. Haciendo $c := F_{\text{grad}\, f}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 1)$ completamos la prueba. □

Teorema B.3 (Normalización de Noether) *Existe una familia de elementos $y_1, \ldots, y_m \in k[x_1, \ldots, x_n] =: A$ ($1 \leq m \leq n$) algebraicamente independientes sobre k, de modo que $k[x_1, \ldots, x_n]$ es una $k[y_1, \ldots, y_m]$-álgebra finita.*

Prueba. Procederemos por inducción sobre n. Considere el morfismo de anillos $\psi : k[x_1, \ldots, x_n] \to k[a_1, \ldots, a_n]$, dado por $\psi(x_i) = a_i$ para todo i. Si $\text{Núc}\, \psi = \{0\}$, entones $m = n$ y la aseveración es trivial. En otro caso, tome $f \in \text{Núc}\, \psi$ y observe que $k[a_1, \ldots, a_n]$ puede identificarse con el cociente $k[x_1, \ldots, x_n]/\text{Núc}\, \psi$. Si $n = 1$, entonces $m = 0$ y, como $f(a_1) = 0$, el resultado se sigue como consecuencia del inciso 3 del Lema (B.4).

Suponga pues que la tesis se verifica para $n-1$. En virtud del Lema anterior, pueden construirse $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in k$ tales que, haciendo $z_i := a_i - \alpha_i a_n$ y $B := k[z_1, \ldots, z_{n-1}] \subset A$, existe un elemento no cero $c \in k$ de modo que el polinomio

$$F(x_n) := \frac{1}{c} f(z_1 + \alpha_1 x_n, \ldots, z_{n-1} + \alpha_{n-1} x_n, x_n)$$

es un polinomio mónico en $B[x_n]$ para el que $F(a_n) = 0$. Y, por el Lema (B.4), a_n es entero sobre B.

Por hipótesis de inducción, existen $y_1, \ldots, y_m \in B$ algebraicamente independientes sobre k, tales que B es un módulo de generación finita sobre $k[y_1, \ldots, y_m]$. Nuevamente, por el inciso 3 del Lema (B.4), $A = B[a_n]$ es un módulo finitamente generado sobre B y, por el inciso 1, A también es un $k[y_1, \ldots, y_m]$-módulo de generación finita. $\square$

Lema B.8 *Sea k es infinito y A una k-álgebra de generación finita. Si A es, además, campo, entonces A es una extensión algebraica de k.*

Prueba. Por hipótesis, se tiene una familia $\{a_1, \ldots, a_p\}$ de elementos en A, tal que $A = k[a_1, \ldots, a_p]$. El Lema de Normalización de Noether garantiza la existencia de los elementos $y_1, \ldots, y_r$, algebraicamente independientes sobre k, con $r \leq n$, de modo que A resulta ser un $k[y_1, \ldots, y_r]$-módulo finitamente generable. Al suponer que A es campo, se verifican las hipótesis del Lema (B.5), de donde se sigue que $k[y_1, \ldots, y_r]$ es campo. Esto sucede siempre que $r = 0$. Así, A es una extensión finita de k que, por el Lema 3, es algebraica sobre k. $\square$

B.5. Localización de anillos

Dado el anillo R, decimos que el subconjunto $S \subset R$ no vacío es *multiplicativamente cerrado* si $1_R \in S$ y para cada par de elementos $s, t \in S$, su producto $st \in S$.

El proceso que denominamos *localización* en el anillo R pretende extender al mismo, construyendo los inversos bajo la multiplicación de cierta familia de elementos en él. Se trata de una generalización de la construcción de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$. Procedemos de la siguiente manera.

Dado el conjunto multiplicativamente cerrado $S \subset R$, construimos en $R \times S$ una relación de equivalencia:

$$(r, s) \sim (t, u) \text{ si y sólo si existe } m \in S \text{ de modo que } m(ru - ts) = 0.$$

Al conjunto de clases de equivalencia le denotamos por $R_S := R \times S/\sim$ (en algunos casos, también se denotará por $R[S]^{-1}$) y el símbolo r/s indicará la clase del elemento $(r, s) \in R \times S$. Llamamos a R_S la *localización de R respecto de S*. Éste es, de nuevo, un anillo conmutativo con elemento unitario y el morfismo natural

$$\begin{array}{ccc} R & \to & R_S \\ r & \mapsto & \frac{r}{1} \end{array}$$

es un morfismo de anillos.

Al igual que en $\mathbb{Q}$, cada elemento $r/s \in R_S$ puede no tener una representación única, salvo el caso en el que R es un dominio de factorización única.

Cuando el anillo R es un dominio entero y $S := R^* = R \backslash \{0\}$, llamamos a R_S su *campo total de cocientes*, puesto que S es el máximo subconjunto de R para el cual R es susceptible de localizarse. En otras palabras, la localización R_S, en este caso, coincide con el campo de cocientes $Q(R)$. Ejemplo de lo anterior es el anillo de coordenadas $k[X]$ del conjunto algebraico $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$, un dominio entero, cuyo campo de cocientes denotamos por $k(X)$.

El siguiente ejemplo tiene gran importancia en lo que nos ocupa en la presente monografía. Dado un ideal primo $\mathfrak{p}$ de R, el conjunto $S := R \setminus \mathfrak{p}$ es multiplicativamente cerrado. En este caso denotamos por $R_{\mathfrak{p}}$ a la localización R_S; la llamamos la *localización de R en $\mathfrak{p}$*. El anillo $R_{\mathfrak{p}}$ es en realidad un anillo local[12], su ideal máximo está dado por

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} := \left\{ \frac{a}{b} \,:\, a \in \mathfrak{p}, b \in R \setminus \mathfrak{p} \right\} \subsetneqq R_{\mathfrak{p}}$$

Note que esta contensión es propia, puesto que los elementos de de la forma r/s, con $r, s \in R \setminus \mathfrak{p}$ están en $R_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ y dado que éstos son unidades (su inverso es s/r) el ideal $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ es, en efecto, máximo en $R_{\mathfrak{p}}$.

Otro ejemplo útil lo constituye un dominio entero R, $f \in R^*$ y como conjunto multiplicativamente cerrado $S = \{1, f, f^2, f^3, \dots\}$. Definimos

$$R_f := R_S.$$

Dado que R es dominio entero, el morfismo $R \to R_f$, dado por $r \mapsto r/1$ es un morfismo inyectivo de anillos, de modo que en el campo total de cocientes de R tenemos la igualdad

$$R_f = R[1/f] \subseteq Q(R).$$

B.6. Anillos Graduados e Ideales Homogéneos

Definición B.5 *Sea A un semigrupo abeliano.*[13] *Un anillo* A-graduado *es un anillo G junto con una descomposición en grupos abelianos*

$$G = \bigoplus_{d \in A} G_d,$$

tal que si $d \neq e$, se tiene $G_d \cap G_e = \{0\}$ y que satisface, además, $G_d \cdot G_e \subseteq G_{d+e}$. Los elementos de cada G_d se llaman elementos homogéneos *de grado d.*

El ejemplo representativo de anillo graduado es el anillo de polinomios

$$k[x_0, \dots, x_n] = \bigoplus_{d \geq 0} k^d[x_0, \dots, x_n],$$

donde $k^d[x_0, \dots, x_n]$ denota al conjunto constituido por las formas de grado d y el polinomio constante cero.

Nos serán de particular interés los anillos $\mathbb{N}$-graduados, a los que llamaremos simplemente anillos graduados.

[12] Un anillo que posee un único ideal máximo.

[13] Es decir, se tiene una operación binaria $+$ en A, asociativa y conmutativa, además de la existencia de un elmento neutro 0.

DEFINICIÓN B.6 *Se dice que el ideal H de un anillo graduado G es* homogéneo *si es tal que*

$$H = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} (H \cap G_d).$$

Observe que un ideal H es homogéneo si y sólo si cada elemento $f \in H$ tiene una descomposición única de la forma

$$f = f_0 + \cdots + f_r,$$

donde cada $f_i \in H$ es un elemento homogéneo de grado d_i.

PROPOSICIÓN B.9 *Sea H un ideal del anillo graduado G.*

1. *El ideal H es homogéneo si y sólo si está generado por elementos homogéneos.*
2. *Sea H ideal homogéneo; H es ideal primo si y sólo si para cualquier par de elementos homogéneos $f, g \in G$, para los que $fg \in H$, entonces $f \in H$ o $g \in H$.*
3. *El radical de un ideal homogéneo es un ideal homogéneo, así como también lo son la suma, el producto y la intersección de ideales homogéneos.*

PRUEBA.

1. Sea $H = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ ideal homogéneo.

   ($\Rightarrow$) Como H es homogéneo, entonces $H = \bigoplus_{d \geq 0} (H \cap G_d)$, de modo que cada u_i posee una descomposición de la forma $u_i = g_0^{(i)} + g_1^{(i)} + \cdots + g_{t_i}^{(i)}$, con $u_j^{(i)} \in H \cap G_j$. Así, el ideal H está generado por la familia de elementos homogéneos $\left\{ g_0^{(i)}, \ldots, g_{t_i}^{(i)} \right\}_{i=0}^{r}$.

   ($\Leftarrow$) Suponga que cada u_i es homogéneo. Todo $f \in H$ tiene una descomposición de la forma $f = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i$, donde cada $\lambda_i \in G$. Puesto que G es graduado, se tiene para cada uno de estos últimos una descomposición $\lambda_i = \sum_{j=1}^{d_i} h_j^{(i)}$, con $h^(i)_j \in G_j$. Por tanto, $\lambda_i u_i = \sum_{j=1}^{d_i} u_i h_j^{(i)}$, donde cada $u_i h_j^{(i)}$ es una forma de grado $j + \operatorname{gr} u_i$, perteneciente a H. Esto implica que H es homogéneo.

2. La condición suficiente es la propia definición de ideal primo. Veamos la condición necesaria: dados $f, g \in G = \bigoplus_{d \geq 0} G_d$, tales que $fg \in H$, debemos probar que $f \in H$ o que $g \in H$. Se tienen las descomposiciones

   $$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_M \text{ y } g = g_0 + g_1 + \cdots + g_N,$$

   para algunos $M, N \in \mathbb{N}$. Por tanto, $fg = \sum f_i g_j$

3. Es claro. □

B.7. Localización de anillos graduados

Sea $G = \bigoplus_{d\geq 0} G_d$ un anillo graduado y $S \subseteq G$ un conjunto multiplicativamente cerrado de elementos homogéneos. Se prentende dar a la localización $G[S]^{-1}$ estructura de anillo graduado. Para ello, será necesario definir lo que se entiende por grado de una expresión de la forma f/g, con $f \in G$ y $g \in S$:

$$\mathrm{gr}\left(\frac{f}{g}\right) := \mathrm{gr}\,(f) - \mathrm{gr}\,(g).$$

Dada cualquier otra representación de la misma clase, digamos, $p/q = f/g$, existe $h \in S$ de modo que $h(pg - fq) = 0$, es decir, $hpg = hfq$. Por tanto,

$$\mathrm{gr}\,(hpg) = \mathrm{gr}\,(h) + \mathrm{gr}\,(p) + \mathrm{gr}\,(g) = \mathrm{gr}\,(h) + \mathrm{gr}\,(f) + \mathrm{gr}\,(q) = gr(hfq),$$

por lo que $\mathrm{gr}\,(f) - \mathrm{gr}\,(g) = \mathrm{gr}\,(p) - \mathrm{gr}\,(q)$. Así, el grado de f/g no depende del representante.

Definición B.7 *Llammamos al anillo*

$$G(S)^{-1} := \left\{\frac{f}{g} \in G[S]^{-1} \,:\, \frac{f}{g} \text{ es homogéneo de grado cero}\right\}$$

la localización homogénea *de G en S.*

Observe que, en realidad, $G(S)^{-1}$ es un anillo local: su único ideal maximal es

$$M = \left\{\frac{f}{g} \in G(S)^{-1} \,:\, f \in G \setminus S, g \in S\right\}.$$

Considérense dos ejemplos. Primero: para un ideal primo homogéneo $\mathfrak{p} \subseteq G$, el conjunto $S := G \setminus \mathfrak{p} := \{f \in G \,:\, f \text{ es homogéneo}, f \notin \mathfrak{p}\}$ es multiplicativamente cerrado. Así, el anillo $G_{(\mathfrak{p})} := G(S)^{-1}$ es una localización homogénea. Segundo: si G es dominio entero y $f \in G \setminus \{0\}$, el conjunto $T := \{f^n \,:\, n \geq 0\}$ es también multiplicativamente cerrado y el anillo $G_{(f)} := G(T)^{-1}$ es una localización homogénea.

B.8. Producto tensorial de anillos

Sea A anillo y L, M y N tres A-módulos. Diremos que el morfismo

$$\phi : M \times N \to L$$

es *bilineal* si fijando una de las coordenadas se tiene un morfismo A-lineal en la otra, es decir,

$$\phi(x+x',y)=\phi(x,y)+\phi(x',y), \qquad \phi(ax,y)=a\phi(x,y),$$

$$\phi(x,y+y')=\phi(x,y)+\phi(x,y'), \qquad \phi(x,ay)=a\phi(x,y).$$

Denotamos por $\mathrm{Hom}_A(M\times N,L)$ al conjunto de morfismos bilineales de $M\times N$ en L, mismo que tiene una estructura de A-módulo.

Sea L_0 un A-módulo y considere el morfismo $\otimes : M\times N\to L_0$ (dado (x,y) en $M\times N$, escribiremos $x\otimes y$ en vez de $\otimes(x,y)$); suponga que $\otimes$ satisface la siguiente propiedad universal: para todo A-módulo L y todo $\phi\in\mathrm{Hom}_A(M\times N,L)$, existe un único morfismo $\varphi : L_0\to L$ de modo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\phi"'] & L_0 \arrow[dl, "\varphi"] \\ L & \end{tikzcd}$$

conmuta. Si esto sucede, diremos que L_0 es el *producto tensorial* de M y N, y lo denotamos por $M\otimes_A N$. Frecuentemente omitiremos el subíndice A y escribiremos $M\otimes N$ cuando ello no cause confusión. Y observe que si tal objeto $M\otimes_A N$ existe, es único bajo isomorfismos.

Debemos probar la existencia del producto tensorial. Sean F el A-módulo libre generado por el conjunto $M\times N$ y $R\subset F$ el submódulo generado por los elementos de la forma

$$(x+x',y)-(x,y)-(x',y), \qquad (ax,y)-a(x,y),$$

$$(x,y+y')-(x,y)-(x,y'), \qquad (x,ay)-a(x,y).$$

De este modo, hacemos $L_0 := F/R$ y escribimos $x\otimes y$ para la imagen en L_0 de $(x,y)\in F$. Note que los elementos de $M\otimes_A N$ son sumas de la forma $\sum_i x_i\otimes y_i$.

B.9. Miscelánea

Denotamos al ideal formado por todos los elementos nilpotentes de un anillo A por $\mathfrak{N}$. De este modo, $A/\mathfrak{N}$ no posee elementos nilpotentes distintos del 0. Llamamos a $\mathfrak{N}$ el *nilradical* de A.

Proposición B.10 *Considere* $\mathfrak{P} := \{\mathfrak{p}\subseteq A : \mathfrak{p}$ *es ideal primo*$\}$*. Entonces*

$$\mathfrak{N}=\bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}}\mathfrak{p}.$$

Prueba. Dado $f \in \mathfrak{N}$, se tiene $f^n = 0 \in \mathfrak{p}$, para algún $n \in \mathbb{N}^*$ y para todo ideal primo $\mathfrak{p}$. Por lo tanto, $f \in \mathfrak{p}$ (pues $\mathfrak{p}$ es primo).

Suponga que la inclusión $(\supseteq)$ no se verifica, es decir, que existe $f \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}} \mathfrak{p}$ que *no* es nilpotente. Considere entonces la familia de ideales

$$\Sigma := \{\mathfrak{a} \subseteq A \, : \, \{f^r\}_{r \in \mathbb{N}^*} \cap \mathfrak{a} = \varnothing\}$$

y observe que $\Sigma \neq \varnothing$, dado que $(0) \in \Sigma$. Observe que la inclusión entre ideales da a Σ estructura de conjunto parcialmente ordenado, de tal suerte que si se toma cualquier cadena en él

$$C : \qquad \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_i \subset \cdots$$

el conjunto $J = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \mathfrak{a}_i$ es un ideal y una cota superior para la cadena, como se prueba a continuación.

(i) Es ideal, porque dados $u, v \in J$, existen $i, j \in \mathbb{N}^*$ tales que $u \in \mathfrak{a}_i$ y $u \in \mathfrak{a}_j$. Suponga que $j \geq i$, por tanto, $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{a}_j$, y así, $u \in \mathfrak{a}_j$ y $u + v \in \mathfrak{a}_j \subseteq J$. Para todo $c \in A$, $cu \in \mathfrak{a}_i$ (pues este último es ideal) y con ello $cu \in J$.

(ii) Es cota superior porque, en efecto, $J \in \Sigma$, pues $\{f^r\}_{r \in N^*} \cap J = \varnothing$. Si existiese $f^t \in J$ para algún $t \in \mathbb{N}^*$, se tendría algún $k \in \mathbb{N}^*$ de modo que $f^t \in \mathfrak{a}_k$, lo que contradice las hipótesis.

Se satisfacen así las hipótesis del Lema de Zorn, por lo que Σ posee elementos máximos. Sea $\mathfrak{q} \in \Sigma$ uno de tales elementos máximos, veamos que es primo. Dados $x, y \in A \setminus \mathfrak{q}$, los ideales $\mathfrak{q} + (x)$ y $\mathfrak{q} + (y)$ contienen estrictamente a $\mathfrak{q}$ y, por tanto, no pertencen a Σ; de este modo, existen $m, n \in \mathbb{N}^*$ tales que $f^m \in \mathfrak{q} + (x)$ y $f^n \in \mathfrak{q} + (y)$. Así, $f^{m+n} \in \mathfrak{q} + (xy)$, por lo que este último ideal tampoco pertenece a Σ, de donde se sigue que $xy \in A \setminus \mathfrak{q}$, es decir, $\mathfrak{q}$ es un ideal primo que no contiene a f, de modo que $f \notin \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}} \mathfrak{p}$, que es absurdo. □

Corolario B.1 *Sea* $\mathfrak{a}$ *ideal de* A*. Entonces*

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{p},$$

con cada $\mathfrak{p}$ *ideal primo de* A*.*

Prueba. Considere el morfismo canónico $\eta : A \to A/\mathfrak{a}$. Observe que cada ideal $\mathfrak{p}$ de $A/\mathfrak{a}$ se corresponde un ideal $\mathfrak{q} := \eta^{-1}(\mathfrak{p})$ de A que contiene a $\mathfrak{a}$. En particular, si $\mathfrak{p}$ es primo, $\mathfrak{q}$ también lo es. Por tanto, en virtud de la proposición anterior y dado que $\sqrt{\mathfrak{a}} := \eta^{-1}(\mathfrak{N})$, el enunciado "la intersección de ideales primos en $A/\mathfrak{a}$ es el nilradical $\mathfrak{N}$ en $A/\mathfrak{a}$", puede reemplazarse por: la intersección de ideales primos de A que contienen a $\mathfrak{a}$ es $\sqrt{\mathfrak{a}}$. □

Referencias

[Ar] Artin, E., *Geometric Algebra.* Wiley Interscience, 1957.

[Ág] Águeda, R. *Álgebra Geométrica.* Notas de curso (2010).

[EGA I-IV] Grothendieck, A. *Eléments de Géométrie Algébrique, Vols. I, II, III y IV.* Publ. Math. IHES, 1960-65.

[Har] Harder, G. *Lectures on Algebraic Geometry I. Sheaves, Cohomology of Sheaves and Applications to Riemann Surfaces.* Vieweg, 2008.

[Le1] Leray, J. *Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations.* Journal de Math., Ser. 9, 24, 95-167 (1945). Artículo [1945a] en [Le6].

[Le2] Leray, J. *L'anneau d'homologie d'une représentation.* C.R. Acad. Sci., Paris 222, 1366-1368 (1946). Artículo [1946a] en [Le6].

[Le3] Leray, J. *Structure de l'anneau d'homologie d'une représentation.* C.R. Acad. Sci., Paris 222, 1419-1422 (1946). Artículo [1946b] en [Le6].

[Le4] Leray, J. *Propriétes de l'anneau d'homologie de la projection d'un espace fibré sur sa base.* C.R. Acad. Sci., Paris 223, 395-397 (1946). Artículo [1946c] en [Le6].

[Le5] Leray, J. *L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue.* J. Math. Pures Appl. 29, 1-139 (1950). Artículo [1950a] en [Le6].

[Le6] Leray, J. *Selected Papers. Oeuvres Scientifiques. Vol. I: Topology and Fixed Points Theorems.* Springer-Verlag y Société Mathématique de France, 1997.

[Fac] Serre, J.P. *Faisceaux Algèbriques Cohèrents.* Ann. of Math. 61 (1955), 197-278.

[Gaga] Serre, J.P. *Géométrie algébrique et géométrie analytique.* Ann. Inst. fourier 6 (1956), 1-42.

[Mat] Matsumura, H. *Commutative Ring Theory.* Cambridge University Press, 1986.

[Ei1] Eisenbud, D. *Commutative Algebra, with a view toward Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, 1995.

[Ei-Ha] Eisenbud, D., Harris, J. *The Geometry of Schemes.* Springer-Verlag, 2000.

[Kmp] Kempf, G. R. *Algebraic Varieties.* Cambridge University Press, 1993.

[Hlk] Hulek, K. *Elementary Algebraic Geometry.* American Mathematical Society, 2003.

[Hrs] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, 1977.

[Sh1] Shafarevich, I. *Basic Algebraic Geometry, Vols. I y II.* Segunda edición. Springer-Verlag, 1977.

[McL] McLane, S. *Categories for the Working Mathematician.* Segunda edición. Springer-Verlag, 1991.

[Mf1] Mumford, D. *Algebraic Geometry I, Complex Proyective Varieties.* Springer-Verlag, 1970.

[Mf2] Mumford, D. *The Red Book of Varieties and Schemes.* Second Edition. Springer-Verlag, 1999.

[Har] Harris, J. *Algebraic Geometry, A First Course.* Springer-Verlag, 1992.

[Itk] Iitaka, S. *Algebraic Geometry, An Introduction to Birational Geometry of Algebraic Varieties.* Springer-Verlag, 1981.

[Gib] Gibson, C. G. *Elementary Grometry of Algebraic Curves: an Undergraduate Introduction.* Cambridge University Press, 1998.

[Cor] Corry, L. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures.* Segunda edición revisada. Birkhäuser, 2004.

[Cil] Ciliberto, C. *The Geometry of Algebraic Varieties,* en *Development of Mathematics 1950-2000.* Birkhäuser, 2000.

[Die] Dieudonné, J. *History of Algebraic Geometry.* Wadsoworth, 1985.

[Dol] Dolgachev, Igor V. *Abstract Algebraic Geometry.* J. Soviet Math., 2:3 (1974) pp. 264-303. El original (en ruso) en Itogi Nauki i Tekhniki, Seriya Matematika (Algebra, Topologiya, Geometriya), Vol. 10, pp. 47-112, 1972.

[We] Wéil, André. *Foundations of Algebraic Geometry.* Colloquium Publications, Vol. 29. Second Edition. American Mathematical Society, New York, 1962.

[Zal] Zaldívar, Felipe. *Funciones Algebraicas de una Variable Compleja.* Univesidad Autónoma Metropolitana, 1995.