



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIFORMIZACIÓN DE SUPERFICIES DE
RIEMANN COMPACTAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
ALEJANDRO BETANCOURT DE LA PARRA

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MÓNICA ALICIA CLAPP JIMÉNEZ LABORA



2011



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del alumno

Betancourt
de la Parra
Alejandro
55 54 65 83
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
304587054

Datos del tutor

Dra.
Mónica Alicia
Clapp
Jiménez Labora

Datos del sinodal 1

Dr.
Nils Heye
Ackermann

Datos del sinodal 2

Dr.
Javier
Bracho
Carpizo

Datos del sinodal 3

Dr.
Gabriel
Ruiz
Hernández

Datos del sinodal 4

Dr.
Antonio
Capella
Kort

Datos del trabajo escrito

Uniformización de superficies de Riemann compactas
76 páginas
2011



*“La inspiración existe, pero tiene que encontrarte trabajando.”
Pablo Picasso*

A mis padres, a quienes les pertenece
por derecho este trabajo.

Agradecimientos

Siento que cometería una injusticia si la primera persona que nombrara en esta lista no fuera Pablo Gómez. Mi primer agradecimiento tiene que ser hacia ti porque sé que mi desarrollo como matemático se debe en gran parte a tus valiosas y constantes contribuciones. Sin tu compañía, difícilmente mi visión de las matemáticas sería la que hoy tengo.

Mónica, también es innegable tu enorme influencia; no sólo en esta tesis, sino en mi quehacer diario. A tu lado la matemática se vuelve apasionante, cautivadora, llena de arte e imaginación. Cada vez que entraba a una de tus clases revivía ese sentimiento de mi niñez cuando iba descubriendo el mundo y maravillándome con él. Tu presencia fue siempre un recordatorio manifiesto de que elegí bien cuando decidí estudiar matemáticas.

Nils y Antonio, les he de confesar que siempre tuve una especie de aversión por las ecuaciones diferenciales que no puedo explicar. Quise hacer la tesis en este tema precisamente para obligarme a aprender algo que desconocía pero que de alguna manera me atraía. Resultó que desde aquel congreso en Oaxaca quedé fascinado por las ecuaciones al grado de querer hacer un posgrado en una rama muy cercana a ellas. Debo esta nueva motivación, no en poca medida, a ustedes.

A Gabriel le puedo decir que me ha resultado sumamente grato conocerlo. En el poco tiempo que hemos compartido has sido un buen guía y me has dado una pauta para seguir adelante con mis estudios. Espero que algún día podamos trabajar juntos.

Roli, desde muy joven me interesé en las matemáticas y mi padre siempre me platicaba de ti. No es de extrañar que aun antes de conocerte ya fueras una influencia importante en mis deseos de ser matemático. Tu libro de geometría despertó en mí un profundo amor por el tema; amor que por cierto no ha muerto sino que crece cada vez más.

A los demás maestros que he tenido en la vida (que son demasiados para nombrar) también les agradezco sinceramente. No me cabe duda de que todos y cada uno de ustedes ha influido en mi forma de pensar y de actuar. Parte de sus enseñanzas estará reflejada en todo lo que haga. En particular, me gustaría recordar a Paco Noreña, Alejandro Mier, que fueron mis maestros en su momento y que ahora considero dos entrañables amigos.

A mis amigos Sergio, Rosa, Andrea, Tatiana, Jorge, Judith, Osvaldo y Aurelio les agradezco todo su apoyo durante la carrera. Han sido una parte impor-

tante de mi formación y buenos amigos. Espero poder trabajar con ustedes otra vez.

Cacho y Aldo, nuestro vínculo trasciende por mucho a las matemáticas. No puedo concebir mejores amigos que ustedes; naturalmente esta tesis no se habría escrito nunca de no ser por su constante compañía.

Ana Francisca y Mariau, no basta un párrafo para agradecerles. Han sido siempre una fuente inagotable de inspiración, no nada más para este trabajo sino en mi vida en general. También a ustedes les puedo decir sin el menor atisbo de duda que sin su presencia esta tesis jamás hubiera sido escrita.

Finalmente, quiero agradecer a mis padres y a mi hermano por el apoyo incondicional que me han dado toda la vida. Los esfuerzos que haya hecho a lo largo de los últimos años no son sino una pequeña retribución de todo el amor y confianza que he recibido de ustedes.

Índice general

Prefacio	VII
1. Superficies y curvatura	1
1.1. Variedades diferenciables	1
1.2. Métricas riemannianas	10
1.2.1. Coordenadas isotermas	11
1.3. Curvatura	13
1.3.1. El operador de Laplace-Beltrami	16
1.4. La ecuación de curvatura	18
2. Soluciones de la ecuación de curvatura	21
2.1. Superficies con curvatura prescrita	21
2.2. El caso $\chi(M) = 0$	22
2.2.1. Soluciones débiles de la ecuación	23
2.2.2. Regularidad de las soluciones débiles	29
2.3. El caso $\chi(M) < 0$	30
2.3.1. Planteamiento variacional del problema	31
2.3.2. Existencia y regularidad de la solución	35
2.4. El caso $\chi(M) > 0$	37
2.4.1. Métricas globalmente equivalentes	37
2.4.2. El flujo de Ricci	44
3. Una consecuencia interesante	46
3.1. Homotopías y grupo fundamental	46
3.2. Espacios cubrientes	50
3.3. Uniformización: una segunda versión	58
3.4. Generalizaciones y extensiones	62
A. Existencia de coordenadas isotermas	64
B. El teorema de Rellich-Kondrachov	71
Bibliografía	77

Prefacio

El teorema de uniformización es uno de los resultados principales en la teoría de superficies y acaso uno de los más importantes avances matemáticos del siglo XIX. Ya desde 1851 Bernhard Riemann intuyó un resultado semejante acerca de aplicaciones conformes en el plano complejo, aunque su demostración no resistió el análisis de generaciones posteriores. No obstante, el resultado original de Riemann, ahora conocido como teorema de representación conforme de Riemann (o *Riemann mapping theorem* en inglés), es uno de los teoremas más interesantes del análisis complejo y, al mismo tiempo, es una consecuencia inmediata del teorema de uniformización.

El primer salto importante para plantear y demostrar el teorema de uniformización lo dieron Poincaré y Klein, de manera independiente, en 1882. Demostraron que cualquier curva algebraica de género mayor que uno se puede obtener como el cociente del disco unitario (en \mathbb{C}) por un grupo adecuado; esta afirmación es equivalente al teorema de uniformización para superficies con característica de Euler negativa.

En 1907 Paul Koebe y Poincaré lograron demostrar la primera versión completa del teorema de uniformización. El teorema que demostraron afirma que toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a alguno (y solamente uno) de los siguientes conjuntos: el plano complejo \mathbb{C} , la esfera de Riemann \mathbb{S}^2 o el disco unitario abierto D . Expresado en estos términos, el teorema de uniformización parece más una cuestión de análisis complejo que de geometría diferencial. Quizá por este motivo resulta sorprendente el hecho de que el teorema de uniformización de Koebe y Poincaré sea equivalente a una aseveración puramente geométrica. En concreto, el teorema de Koebe y Poincaré resulta ser equivalente (salvo por alguna sutileza que mencionaremos más adelante) al hecho de que cada superficie admita una métrica con curvatura constante.

A lo largo de los siguientes capítulos nos enfocaremos en demostrar esta última afirmación para el caso de las superficies compactas y hablaremos brevemente del problema de Yamabe, que es una generalización de este resultado para dimensión mayor que dos. Veremos que el problema de Yamabe nos brinda una buena razón para acercarnos al teorema de uniformización desde el punto de vista de la geometría diferencial. Finalmente, con el teorema de uniformización a la mano, extenderemos el resultado original de Poincaré y Klein para superficies de cualquier género.

Capítulo 1

Superficies y curvatura

Empezaremos por presentar los objetos con que trabajaremos a lo largo de los siguientes capítulos. Definiremos con todo rigor el concepto de superficie y dedicaremos buena parte de nuestra atención a desarrollar una intuición geométrica para estos espacios. Posteriormente empezaremos a trabajar con la noción de curvatura gaussiana, que es probablemente el objeto central de estudio de la geometría de superficies.

1.1. Variedades diferenciables

Iniciaremos con las siguientes definiciones:

Definición 1.1. Una *variedad* de dimensión n es un espacio topológico conexo, Hausdorff y segundo numerable¹ M (a veces denotado M^n para hacer énfasis en la dimensión) tal que cada punto tiene una vecindad U homeomorfa a un abierto V de \mathbb{R}^n . Dicho homeomorfismo $\xi : U \rightarrow V$ recibe el nombre de *carta coordenada* o simplemente *carta*.

Puesto en lenguaje coloquial, una variedad es un espacio que se parece mucho al euclidiano en escalas pequeñas. Es importante mencionar que aunque el comportamiento de una variedad es localmente muy parecido al de un espacio euclidiano, el comportamiento global de las variedades es, en general, completamente distinto del de \mathbb{R}^n .

Definición 1.2. Sea M una variedad. Un *atlas* en M es una colección de cartas $\{(U_\alpha, \xi_\alpha)\}$ de manera que los conjuntos U_α constituyan una cubierta abierta de M .

Una variedad equipada con un atlas nos permite trabajar de manera muy similar a como lo haríamos en un espacio euclidiano. En particular podemos

¹Algunos autores no piden que la topología sea Hausdorff ni segundo numerable. Nosotros lo pediremos porque de esta manera podemos garantizar la existencia de métricas riemannianas que veremos más adelante.

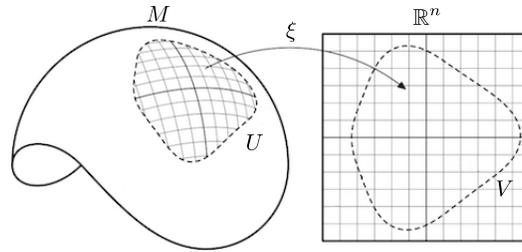


Figura 1.1: Una variedad y una carta coordenada.

hacer cálculo en variedades, lo que resultará indispensable en lo subsecuente. No obstante, antes de poder exportar los conceptos básicos del cálculo a las variedades, es necesario pulir un poco nuestras definiciones.

Definición 1.3. Un atlas $\{(U_\alpha, \xi_\alpha)\}$ es *diferenciable* si las funciones de transición $\xi_\beta \circ \xi_\alpha^{-1} : \xi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \xi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ (ver Figura 1.2) son infinitamente diferenciables.

Observación. Nótese que cuando $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ la definición se satisface por vacuidad.

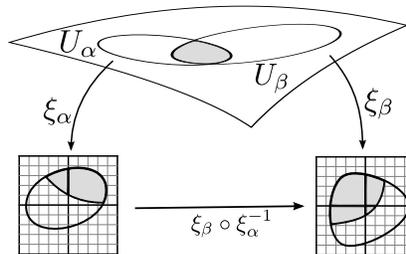


Figura 1.2: Funciones de transición.

La anterior definición es solamente una manera de pedir que cuando un punto en una variedad esté en el dominio de dos cartas, el cambio de una carta a la otra sea suave². La razón de esta condición sobre las funciones de transición es que, eventualmente, todo el cálculo que hagamos en las variedades recaerá en nuestro conocimiento del cálculo en \mathbb{R}^n . Más adelante, cuando definamos diferenciables se entenderá por qué es necesario que estas funciones de transición sean diferenciables (o de hecho difeomorfismos, pues el inverso de una función de transición es otra vez una función de transición).

Finalmente, un último detalle técnico. A veces es necesario trabajar con cartas que podrían no estar en una atlas dado. Para evitar estos problemas, es

²De aquí en adelante usaremos los términos suave y diferenciable para referirnos a funciones de clase C^∞ .

conveniente que, dado un atlas, lo completemos con todas las cartas compatibles con él, es decir, agregamos todas las cartas que cumplan que las funciones de transición sigan siendo diferenciables. En concreto tenemos la siguiente definición:

Definición 1.4. Sea M una variedad. Una *estructura diferenciable* en M es un atlas diferenciable maximal, esto es, un atlas diferenciable que no está contenido en ningún otro.

Una vez sorteados estos detalles técnicos, podemos definir los objetos que serán nuestro principal tema de estudio: las variedades diferenciables.

Definición 1.5. Una *variedad diferenciable* es una variedad provista de una estructura diferenciable. Una variedad diferenciable de dimensión dos recibirá el nombre de *superficie diferenciable* o solamente *superficie*.

Ahora estamos listos para empezar a extender las ideas del cálculo diferencial a las variedades. Empezaremos por trabajar con funciones reales definidas a lo largo de una variedad diferenciable M . Si llamamos f a una de estas funciones y $\xi : U \rightarrow V$ es una carta, diremos que la función $f \circ \xi^{-1} : \xi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ es una expresión de f en *coordenadas locales*. Esta expresión en coordenadas locales es una manera de “exportar” f a un terreno ya conocido, el de las funciones de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} . Diremos que una función real f definida en una variedad³ es diferenciable siempre que para cada carta coordenada ξ en M se tenga que la función $f \circ \xi^{-1}$ sea de clase C^∞ en el sentido usual del cálculo en espacios euclidianos. El conjunto de las funciones reales y suaves sobre una variedad M forman un espacio vectorial, que denotaremos por $C^\infty(M)$.

La noción de diferenciabilidad para funciones entre variedades se extiende de una manera análoga a lo que hemos hecho ya.

Definición 1.6. Sean M^m y N^n variedades. Una función $f : M \rightarrow N$ es diferenciable si para cada carta ξ de M y ζ de N donde la función $\zeta \circ f \circ \xi^{-1}$ esté bien definida, se tiene que es diferenciable en el sentido euclidiano (nótese que la anterior función va de $U \subseteq \mathbb{R}^m$ a $V \subseteq \mathbb{R}^n$).

Antes de proseguir es prudente hacer dos observaciones. La primera es que para verificar la diferenciabilidad de una función entre variedades no hace falta revisar todas las cartas. Es suficiente verificar que la condición de diferenciabilidad se cumpla para un conjunto de cartas que cubra a M y a N . La condición de que las funciones de transición sean diferenciables implica que automáticamente las demás cartas también satisfacen la definición anterior. La segunda observación es que podemos definir diferenciabilidad localmente en cada punto. Decimos que una función $f : M \rightarrow N$ es diferenciable en un punto $p \in M$ si hay una vecindad U de p en M tal que f restringida a U es diferenciable. Claramente f es suave si y sólo si es suave en cada punto en M .

³De aquí en adelante usaremos implícitamente el término diferenciable al referirnos a las variedades con el fin no entorpecer la lectura.

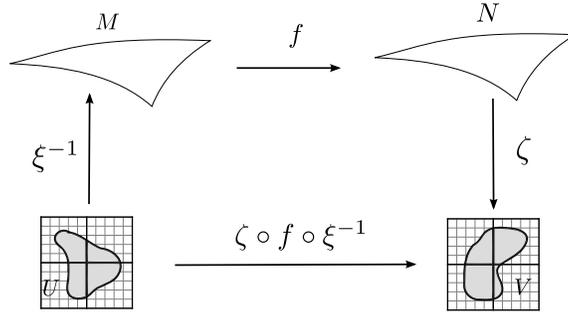


Figura 1.3: Una función diferenciable entre variedades.

Definición 1.7. Una función entre variedades $f : M \rightarrow N$ es un *difeomorfismo* si f es diferenciable, invertible y su inversa también es diferenciable.

Otro concepto del cálculo en espacios euclidianos que es de suma importancia para el estudio de variedades es el concepto de espacio tangente. Para superficies en \mathbb{R}^3 definíamos el espacio tangente como el conjunto de vectores velocidad de curvas en una superficie S , es decir $T_p M := \{\alpha'(0) \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \text{ y } \alpha(0) = p\}$. Era fácil demostrar que $T_p M$ es un espacio vectorial y de hecho era posible verlo como un subespacio de \mathbb{R}^3 . La dificultad en el caso de las variedades radicarán en que ahora no tenemos un espacio ambiente donde “meter” el espacio tangente. Esta situación nos llevará a asociarle a cada punto de una variedad un espacio vectorial abstracto que conserve las propiedades de los espacios tangentes para superficies en \mathbb{R}^3 . Tenemos la siguiente definición.

Definición 1.8. Un *vector tangente* a una variedad M en el punto p es una función $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que

- (i) Es lineal sobre \mathbb{R} , es decir, $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$ para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- (ii) Es Leibniz en $C^\infty(M)$, es decir, $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$ para $f, g \in C^\infty(M)$.

El conjunto de vectores tangentes a una variedad M en el punto p recibe el nombre de *espacio tangente* y lo denotamos por $T_p M$ como antes.

Es claro que para todo $p \in M$ el conjunto $T_p M$ forma un espacio vectorial sobre \mathbb{R} con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar. Podemos incluso asegurar que $T_p M$ tiene la misma dimensión que la variedad M . Para demostrarlo daremos una base, para lo cual hace falta definir la idea de derivada parcial de una función en $C^\infty(M)$.

Definición 1.9. Sea $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ una carta que cubre al punto p en una variedad M . Para una función $f \in C^\infty(M)$ definimos la derivada parcial de f con respecto a x^i en el punto p como

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(p)),$$

donde u^1, \dots, u^n son las coordenadas usuales en \mathbb{R}^n .

Antes de seguir, es prudente hacer una observación. Esta definición sí depende de la carta que tomemos, pues de hecho esa carta es la que nos da las coordenadas locales (de ahí el nombre de carta coordenada) en torno de un punto en la variedad. Si cambiamos de cartas, cambiamos de coordenadas. Una situación análoga al cambio de cartas para \mathbb{R}^n es la siguiente. En \mathbb{R}^n tenemos definidas las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Estas derivadas no son otra cosa que derivadas direccionales en la dirección de los ejes coordenados canónicos x_1, \dots, x_n . El cambio de carta para una variedad se traduce, en este caso, a derivar en la dirección de un nuevo conjunto de ejes, digamos y_1, \dots, y_n definido por otra base que no sea la canónica. Evidentemente las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial x^i}$ y $\frac{\partial}{\partial y^i}$ pueden no coincidir, pues lo que estamos haciendo es derivar en direcciones distintas. En variedades, cambiar de carta coordenada es análogo a cambiar nuestros ejes en \mathbb{R}^n , por lo que las derivadas parciales pueden cambiar si se cambia de carta. No obstante esta dificultad, tenemos que si $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ y $\eta = (y^1, \dots, y^n)$ son dos cartas que cubren a p , entonces las derivadas parciales estarán relacionadas de la siguiente manera (aquí $\partial/\partial u^i$ es la derivada en la dirección del i -ésimo vector canónico en \mathbb{R}^n):

$$\frac{\partial f}{\partial y^i}(p) = \frac{\partial(\xi \circ \eta^{-1})}{\partial u^i}(\eta(p)) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Con lo anterior en mente, tenemos que para cada $p \in M$ y la carta ξ correspondiente, la función

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

es un vector en $T_p M$. Para simplificar la escritura usaremos la notación

$$\partial_i|_p = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

o bien solamente ∂_i cuando el contexto sea claro y se pueda omitir la p .

Lema 1.10. *Sea $v \in T_p M$. Entonces*

- (i) *Si $f, g \in C^\infty(M)$ son iguales en una vecindad U de p , entonces $v(f) = v(g)$.*
- (ii) *Si $c \in C^\infty(M)$ es constante en una vecindad de p , entonces $v(c) = 0$.*

Demostración. (i) Vamos a demostrar que si una función $f \in C^\infty(M)$ se anula en una vecindad U de p , entonces $v(f) = 0$. El resultado se sigue por linealidad. Sea g una función tal que $g \equiv 1$ en una vecindad $V \subset\subset U^4$ que contenga a

⁴Esto quiere decir que la cerradura de V , denotada por \bar{V} , es compacta y $\bar{V} \subset U$.

p y que se anule fuera de U . Entonces, $fg \equiv 0$ en todo M . Como v es lineal, tenemos que $v(0) = 0$, así que

$$0 = v(0) = v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g) = v(f)$$

pues $g(p) = 1$ por construcción y $f(p) = 0$ por hipótesis.

(ii) Por el inciso anterior, podemos suponer que c es constante en todo M sin pérdida de generalidad. Entonces $v(c) = c \cdot v(1) = 0$, pues usando que $1 = 1 \cdot 1$ y que v satisface la regla de Leibniz para el producto tenemos que $v(1) = 0$. \square

Lema 1.11. Sean $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto convexo tal que $0 \in V$ y $g \in C^\infty(V)$. Entonces existen $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(V)$ tales que

$$g(u) = g(0) + \sum_{i=1}^n g_i(u)u^i, \quad \text{con } u = (u^1, \dots, u^n) \text{ y } g_i(0) = \frac{\partial g}{\partial u^i}(0).$$

Demostración. Sea $u \in V$. Definimos la función $f(t) := g(tu)$ para $t \in [0, 1]$. Entonces

$$\begin{aligned} g(u) - g(0) &= f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial u^i}(tu) \cdot u^i dt = \\ &= \sum_{i=1}^n u^i \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}(tu) dt = \sum_{i=1}^n g_i(u)u^i, \end{aligned}$$

donde

$$g_i(u) := \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}(tu) dt$$

son las funciones deseadas. El lema se sigue despejando $g(u)$ de la expresión anterior. \square

Teorema 1.12. Si $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ es una carta en el punto $p \in M$, entonces las funciones ∂_i recién definidas forman una base de T_pM .

Demostración. Primero veremos que los vectores $\partial_1, \dots, \partial_n$ son linealmente independientes. Antes de proseguir, es importante notar que las funciones x^i de la carta son elementos de $C^\infty(M)$, pues $x^i \circ \xi^{-1}$ no es más que la proyección en la i -ésima coordenada en \mathbb{R}^n .

Una vez dicho esto, sea

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_i = 0$$

una combinación lineal igualada a cero. Si aplicamos la función v a las x^i 's tenemos que

$$0 = v(x^i) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \partial_j(x^i) = \alpha_i,$$

pues

$$\partial_j(x^i) = \left. \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \right|_p = \delta_{ij}.$$

Por lo tanto, cada $\alpha_i = 0$ y entonces los vectores $\partial_1, \dots, \partial_n$ son linealmente independientes.

Para ver que los ∂_i generan a $T_p M$ probaremos que para cada vector tangente v se cumple la igualdad

$$v(f) = \left(\sum_{i=1}^n v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (f).$$

Para hacerlo, tomamos una carta ξ que esté definida en una vecindad U de p que satisfaga que $\xi(p) = 0$ (nótese que esto se puede hacer sin pérdida de generalidad gracias a la condición de maximalidad que pedimos al inicio de la sección) y que $\xi(U) = \{q \in \mathbb{R}^n : \|q\| < \varepsilon\}$ para alguna $\varepsilon > 0$ (Esto último se puede hacer gracias a la continuidad de ξ).

Si $f \in C^\infty(M)$, definimos la función $g := f \circ \xi^{-1}$. Entonces, por el Lema 1.11 tenemos que

$$g(u) = g(0) + \sum_{i=1}^n g_i(u) u^i.$$

Si llamamos f_i a la composición $g_i \circ \xi$, la ecuación anterior se ve como

$$f(w) = f(p) + \sum_{i=1}^n f_i(w) x^i, \quad \text{donde } w = \xi^{-1}(u).$$

Aplicando $\partial_i|_p$ de ambos lados, obtenemos que $f_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$. De esta manera, para un vector tangente v , la evaluación en f (omitimos la evaluación de la f en w para no recargar la notación) muestra que

$$v(f) = v \left(\sum_{i=1}^n f_i x^i \right) = \sum_{i=1}^n v(f_i) x^i(p) + \sum_{i=1}^n f_i(p) v(x^i) = \sum_{i=1}^n v(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

es decir,

$$v(f) = \left(\sum_{i=1}^n v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (f).$$

Como f era arbitraria, concluimos que $v = \sum v(x^i) \partial_i$. Esto concluye la demostración. \square

Gracias a esto sabemos no sólo que los $\partial_1, \dots, \partial_n$ forman una base de $T_p M$, sino que si $v \in T_p M$, su expresión en términos de esta base es

$$v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \partial_i = \sum_{i=1}^n v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p. \quad (1.1)$$

Otra consecuencia inmediata de este teorema es que M y T_pM tienen la misma dimensión.

Antes de seguir avanzando, es conveniente hablar un poco más acerca del espacio tangente T_pM . Como hemos dicho ya, T_pM es un espacio vectorial abstracto que parece tener poca o ninguna relación con lo que antes llamábamos espacio tangente. No obstante esa primera impresión, T_pM es, en realidad, muy parecido a los espacios de vectores tangentes a curvas en \mathbb{R}^n . Una manera de ver esta similitud es la siguiente: antes considerábamos que un vector tangente era el vector velocidad de una curva contenida en una superficie S . Lo que ahora consideramos como vector tangente será una derivada direccional v en la dirección de ese vector velocidad, pues nuestros vectores en T_pM no son otra cosa que derivadas, un hecho que se puede intuir fácilmente de la definición y del teorema anterior. Así, en vez de ver a los vectores tangentes como direcciones, los vemos como derivadas direccionales. Esta interpretación justifica la definición de T_pM .

Ahora que hemos definido un criterio para la diferenciabilidad de una función entre variedades construiremos otro concepto importante: la derivada. En el caso de funciones de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m teníamos que la derivada era la transformación lineal que más se parecía a la función en un punto, i.e., si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$, la derivada de f en el punto p , denotada por df_p era la transformación lineal $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida como $df_p(x) := Df_p x$, donde Df_p es la matriz jacobiana evaluada en p . En el caso de las variedades, al estar trabajando en un espacio topológico abstracto, no podemos echar mano de los espacios euclidianos para definir la derivada, sin embargo podemos valernos del espacio tangente para construir transformaciones lineales que reflejen el comportamiento local de las funciones. Antes de avanzar más, regresemos brevemente al espacio tangente.

Si $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ es una curva tal que $\alpha(0) = p$, definiremos el vector tangente $\alpha'(0)$. En el caso euclidiano, $\alpha'(0)$ era un vector velocidad; ahora con las consideraciones que hemos mencionado ya, tendremos que $\alpha'(0)$ será una derivada direccional, lo que significa que $\alpha'(0) : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada $f \in C^\infty(M)$ diremos que

$$\alpha'(0)f := \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) \right|_{t=0}. \quad (1.2)$$

Así los vectores de la forma $\alpha'(0)$ son tangentes, y no sólo eso sino que cualquier $v \in T_pM$ se puede ver como el vector velocidad de una curva α de manera que $v = \alpha'(0)$. Una forma de ver esto es notando que los vectores ∂_i son precisamente los vectores velocidad de las curvas α_i dadas por $t \mapsto \xi^{-1}(te^i)$, donde e^i son los vectores canónicos en \mathbb{R}^n y $\frac{\partial}{\partial u^i}$ es la derivada en la dirección e^i . Veremos que para toda $f \in C^\infty(M)$ se tiene que $\partial_i(f) = \alpha'_i(0)f = (f \circ \xi^{-1}(te^i))'(0)$.

Supondremos nuevamente que $\xi(p) = 0$.

$$\begin{aligned} (f \circ \xi^{-1}(te^i))'(0) &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \xi^{-1})(te^i) \right|_{t=0} = \left\langle \nabla(f \circ \xi^{-1}), \left. \frac{d(te^i)}{dt} \right|_{t=0} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(0), (0, \dots, 1, \dots, 0) \right\rangle \\ &= \frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \partial_i(f). \end{aligned}$$

Lo anterior nos dice que el espacio vectorial generado por los vectores de la forma $\alpha'(0)$ contiene a los vectores básicos ∂_i . Por otro lado, como los vectores de la forma $\alpha'(0)$ son elementos en T_pM , tenemos entonces que todo vector tangente $v \in T_pM$ se puede ver como el vector velocidad de una curva en M . Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 1.13. Sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable entre variedades. La función

$$df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$$

que manda a cada vector $\alpha'(0)$ a $(f \circ \alpha)'(0)$ se llama *derivada*⁵ de f en el punto p .

Observación. La definición de derivada no depende de la curva que se elija, es decir, si α y β son dos curvas tales que $\alpha'(0) = \beta'(0)$ entonces $(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0)$. Esto es una consecuencia directa del Teorema 1.12.

Es fácil darse cuenta de que la derivada es una transformación lineal entre espacios vectoriales haciendo uso de la siguiente identidad. Si $v \in T_pM$ es tal que $v = \alpha'(0)$ para alguna curva y $g \in C^\infty(N)$, entonces

$$df_p(v)(g) = v(g \circ f). \quad (1.3)$$

Por último, definimos un concepto que nos será de utilidad más adelante. Para hacerlo necesitaremos primero agrupar todos los espacios T_pM en una sola colección, misma que recibe el nombre de *haz tangente*. Formalmente el haz tangente a una variedad se define como sigue:

Definición 1.14. Sea M una variedad. Llamamos haz tangente al conjunto

$$TM := \coprod_{p \in M} T_pM = \{(p, v) : p \in M \text{ y } v \in T_pM\}.$$

Así, el haz tangente es la unión disjunta de todos los espacios tangentes a una variedad. La razón de hacer disjunta esta unión es porque queremos distinguir entre los ceros de cada espacio tangente (si no hacemos esta distinción $0 \in T_pM$ para toda p). Un hecho importante que no demostraremos acerca del

⁵En la literatura es común que también se le llame diferencial a esta transformación.

haz tangente es que si M es una variedad de dimensión n , entonces el haz tangente TM es una variedad de dimensión $2n$. La demostración de que TM es una variedad se puede encontrar en cualquier libro de geometría riemanniana, por ejemplo el capítulo 0 de [8].

La razón que nos motiva a construir el haz tangente es la de definir campos vectoriales en variedades. En cálculo teníamos que un campo es una función suave que a cada punto de $U \subseteq \mathbb{R}^n$ le asigna un vector en \mathbb{R}^m . Haremos lo mismo para variedades, sólo que ahora los únicos vectores que tenemos a la mano viven en TM , de manera que los elementos de la imagen estarán ahí.

Definición 1.15. Un *campo vectorial* en una variedad M es una función X que a cada punto $p \in M$ le asigna un vector $X(p) \in T_pM$. Si X , visto como una función $X : M \rightarrow TM$ entre variedades, es diferenciable, decimos que el campo es *diferenciable* o *suave*. La colección de campos suaves en una variedad se denota por $\mathfrak{X}(M)$.

Para economizar notación, si $f \in C^\infty(M)$ y X es un campo vectorial, escribiremos $X(f)$ en lugar de $X(p)(f)$ (Recordemos que $X(p)$ es un vector tangente, es decir, funciona como una derivada direccional para funciones suaves).

1.2. Métricas riemannianas

Hasta ahora hemos construido espacios que localmente se ven como el euclidiano. Hemos, incluso, adaptado los conceptos básicos del cálculo diferencial a estos espacios. Lo que haremos ahora es definir una manera de medir distancias en las variedades; no obstante, en vista de que una variedad es un espacio topológico abstracto, la manera natural de medir no será directamente en la variedad, sino en el espacio tangente. De ahora en adelante, la teoría que desarrollaremos será para el caso particular de superficies, pero casi toda sigue siendo válida para variedades de dimensión mayor que dos.

Definición 1.16. Una *métrica riemanniana* (o simplemente *métrica*) en una superficie M es una correspondencia g que a cada punto $p \in M$ le asigna un producto interior (es decir, una forma bilineal, simétrica, positivo definida) en el espacio tangente T_pM de modo que esta asignación varíe de manera diferenciable⁶. Diremos que la pareja (M, g) es una *superficie riemanniana* si M es una superficie y g una métrica en M .

Antes de proseguir, explicamos algunas cosas de la definición anterior. Primero que nada, la definición nos dice que para cada punto p , $g(p)$ es un producto interior en T_pM . Para $u, v \in T_pM$ solemos escribir $g(p)(u, v)$ como $g(u, v)$ o simplemente como $\langle u, v \rangle$ si no se presta a confusión. La diferenciableidad de que habla la definición anterior se debe entender como sigue. Para cada carta

⁶Para el lector familiarizado con los tensores, una métrica no es otra cosa que un campo tensorial simétrico y positivo definido.

$\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ (recordemos que estamos trabajando en superficies) nos fijamos en las funciones $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como:

$$g_{ij}(p) := g(\partial_i|_p, \partial_j|_p) = \langle \partial_i|_p, \partial_j|_p \rangle.$$

Diremos que la asignación de productos internos varía de manera diferenciable si las funciones g_{ij} están en $C^\infty(U)$.

Hacemos un pequeño paréntesis para explicar el por qué de esta definición. Recordemos que, para una carta dada, las funciones dx^i (evaluadas en p naturalmente)⁷ forman una base del espacio dual T_p^*M , lo que implica que cada función lineal de T_pM a \mathbb{R} se puede ver como combinación lineal de las dx^i 's. Para las formas bilineales ocurre algo similar: toda forma bilineal definida en T_pM se puede expresar (de manera única) como una combinación lineal de las funciones $dx^i \otimes dx^j$ (donde $dx^i \otimes dx^j(u, v) := dx^i(u) \cdot dx^j(v)$). Así, cualquier función que a cada punto $p \in M$ le asigne una forma bilineal en T_pM se puede expresar como combinación lineal de las $dx^i \otimes dx^j$'s. Decimos que una de estas combinaciones lineales, digamos $\sum \alpha_{ij} dx^i \otimes dx^j$, es diferenciable si las funciones α_{ij} lo son. Como una métrica g es una función que a cada punto p le asigna una forma bilineal en T_pM se tiene entonces que g se puede expresar como

$$g = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \alpha_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Así, tenemos que g es diferenciable si los α_{ij} lo son. Evaluando en (∂_i, ∂_j) tenemos

$$g(\partial_i, \partial_j) = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \alpha_{ij} dx^i \otimes dx^j(\partial_i, \partial_j) = \alpha_{ij}$$

y entonces tenemos que $\alpha_{ij} = g_{ij}$. Así

$$g = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

y g es diferenciable si las funciones g_{ij} lo son.

1.2.1. Coordenadas isotermas

Haremos un cambio de notación para definir una nueva clase de métricas que serán de gran importancia en lo que sigue. Motivados en el hecho de que estamos trabajando en dos dimensiones, escribiremos dx en vez de dx^1 y dy en lugar de dx^2 . De esta manera, una métrica se escribe como

$$g = g_{11}dx \otimes dx + g_{12}dx \otimes dy + g_{21}dy \otimes dx + g_{22}dy \otimes dy.$$

Una métrica como la anterior, aunque fácil de asimilar conceptualmente, resulta bastante impráctica cuando se debe llevar a cabo cálculos con ella. Con el fin de

⁷Estas funciones son transformaciones lineales $dx^i : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ y se definen como $dx^i(\partial_j) := \delta_{ij}$.

de hacer más comprensibles las secciones siguientes (en particular todas aquellas en las que se haga uso del operador de Laplace-Beltrami que definiremos más adelante) trabajaremos con métricas en las que los coeficientes g_{ij} sean muy sencillos.

Definición 1.17. Una métrica g en una superficie M es *conforme* si tiene la forma

$$g = \lambda^2(dx^2 + dy^2), \quad (1.4)$$

donde $\lambda \in C^\infty(M)$, $dx^2 := dx \otimes dx$ y $dy^2 := dy \otimes dy$.

A la función λ^2 se le llama *factor de conformidad*.

Es conveniente analizar geoméricamente el hecho de que una métrica sea conforme. Para este fin, veamos qué forma tiene la métrica usual en \mathbb{R}^2 (visto como una variedad). En este caso una métrica g es una función que a cada punto $x \in \mathbb{R}^2$ le asocia un producto interno en $T_x\mathbb{R}^2$. Como estamos trabajando en \mathbb{R}^2 (que es un espacio vectorial de la misma dimensión que $T_x\mathbb{R}^2$) podemos identificarlo de manera natural con su espacio tangente $T_x\mathbb{R}^2$. Hacer un producto interno en el espacio tangente es lo mismo que hacerlo en \mathbb{R}^2 , es decir, si u, v son vectores en $T_x\mathbb{R}^2$, entonces $g(u, v) = \langle u, v \rangle$. La anterior expresión quiere decir que aplicar el producto g a dos vectores tangentes es lo mismo que aplicarles el producto interno usual de \mathbb{R}^2 por medio de la identificación entre \mathbb{R}^2 y $T_x\mathbb{R}^2$. De esta manera

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

pues los vectores $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$ se identifican con los vectores canónicos en \mathbb{R}^2 . Esto implica que la métrica usual en \mathbb{R}^2 está dada por $g = dx^2 + dy^2$. En virtud de esto, podemos ver a las métricas conformes como aquellas en que los ángulos miden lo mismo que con la métrica euclídeana.

Un ejemplo importante de métrica conforme es el plano hiperbólico. Para construirlo nos fijamos en el conjunto

$$\mathbb{H}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

con la métrica

$$g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2).$$

A \mathbb{H}^2 con la métrica g recién definida se le llama *plano hiperbólico* o *hemiplano superior*. Este espacio será de gran interés más adelante cuando estudiemos métricas de Poincaré y variedades hiperbólicas.

Esta decisión de restringirnos nada más a las métricas conformes, en el caso de las superficies, resulta muy afortunada pues sucede que solamente para el caso de dimensión dos se tiene que no hemos perdido generalidad al quedarnos únicamente con estas métricas tan particulares. Elaborando un poco más acerca de esto, recordemos que una métrica queda completamente determinada por los coeficientes g_{ij} . Éstos a su vez dependen de los vectores ∂_i , que están dados por la carta con la que estamos trabajando. Si cambiamos de carta, los vectores ∂_i

cambian y por ende los coeficientes g_{ij} también. El hecho verdaderamente notable es que, cualquier superficie (M, g) tiene cartas de modo que en cada punto hay una vecindad en las que los vectores ∂_i dan lugar a una métrica conforme. En pocas palabras, toda superficie tiene coordenadas locales que hacen que una métrica dada, sea conforme. A estas coordenadas se les suele llamar *isotermas*.

La existencia de coordenadas isotermas no ocurre en dimensión mayor⁸, por lo que hemos encontrado el primer resultado que nos marca la pauta para restringirnos al caso de dimensión dos. La existencia de coordenadas isotermas para superficies fue probada por primera vez en 1916 por Lichtenstein y Korn, aunque hay varias demostraciones más accesibles, siendo las más destacadas la de Chern en 1955 y la de Dennis De Turck y Jerry Kazdan en 1981. Lamentablemente, las demostraciones anteriores son o muy largas por un lado, o bien requieren herramientas que no hemos desarrollado, por lo que el lector interesado en la demostración de este resultado puede referirse al Apéndice A. Enunciamos el resultado que utilizaremos a lo largo de los siguientes capítulos:

Teorema (Existencia de coordenadas isotermas). *Toda superficie (M, g) admite un atlas con coordenadas isotermas.*

1.3. Curvatura

Ahora que tenemos a la mano las métricas riemannianas, podemos introducir el objeto de estudio principal de esta tesis y, de alguna manera, de la geometría en general: la curvatura. Debido a la enorme relevancia de este concepto en diversas ramas de la física y de la matemática, antes de pasar a definiciones formales es conveniente hacer un paréntesis para que se entienda primero de manera intuitiva.

En los cursos de cálculo se define la curvatura de una curva γ en \mathbb{R}^2 parametrizada por longitud de arco como la longitud del vector de aceleración, es decir como $|\ddot{\gamma}(t)|$. Geométricamente, la interpretación de esto era la siguiente. Una vez fijado un punto p en la curva, la curvatura en el punto p es un número que indica qué tan abruptamente se “dobla” la curva, o qué tan rápido se separa γ de su recta tangente en p . Mientras mayor sea este número, más rápida es esta separación. Si nos fijamos en la familia de circunferencias tangentes a γ en p , descubriremos que hay una circunferencia única que tiene el mismo vector de aceleración que nuestra curva (la circunferencia osculadora). La curvatura entonces correspondía al valor $1/R$, donde R es el radio de esta circunferencia. Mientras la curva se parezca mucho a una recta, el radio de la circunferencia osculadora es grande y la curvatura, por ende, pequeña. Inversamente, circunferencias osculantes muy pequeñas dan lugar a curvaturas muy grandes.

Más tarde, al dar los primeros pasos en geometría diferencial resultó conveniente que la curvatura tenga signo. Para lograr esto tomamos un campo vectorial normal N a lo largo de γ y decimos que la curvatura es positiva si $\ddot{\gamma}(t)$ apunta en dirección de N o negativa en caso contrario.

⁸Aunque se conocen condiciones necesarias y suficientes para que existan dichas cartas.

Para definir curvatura en superficies en \mathbb{R}^3 , lo que hacemos es fijarnos en las llamadas secciones normales. El procedimiento es el siguiente. Si S es una superficie en \mathbb{R}^3 y $p \in S$ lo que hacemos es tomar un vector unitario normal a S en p y fijarnos en todos los planos que contienen a N y p (es una familia que forma una especie de hélice). Nos fijamos ahora en las curvas que resultan de cortar a la superficie con estos planos. Estas curvas reciben el nombre de secciones normales. Cada una de estas curvas tiene una curvatura en el punto p . Si nos fijamos en las curvaturas de las secciones normales resulta (hecho fácil de intuir) que hay una sección normal que tiene curvatura máxima y otra que tiene curvatura mínima. Esas curvaturas, digamos κ_1 y κ_2 para abreviar, se llaman curvaturas principales, y es justo en este punto que la discusión en torno de la curvatura se empieza a complicar.

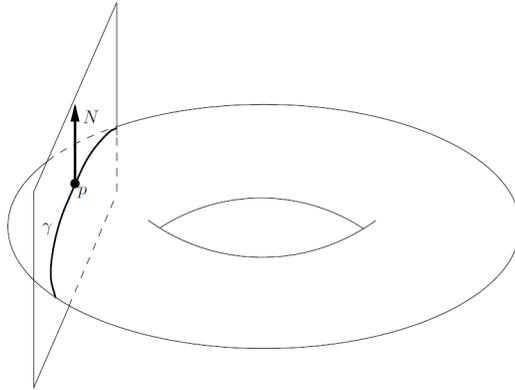


Figura 1.4: Una sección normal.

Una posible manera de definir curvatura podría ser, por ejemplo, tratar de tomar una especie de promedio de las curvaturas de las secciones normales. Si se sigue este camino, al hacer los cálculos necesarios se llega a un concepto conocido como *curvatura media*, denotada como H , y que es equivalente a tomar el promedio de las curvaturas principales, es decir

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}. \quad (1.5)$$

Aunque esta curvatura parece ser la más natural para superficies, tiene una limitante enorme: depende de un espacio ambiente para definirse⁹, en este caso \mathbb{R}^3 (para definirla necesitamos usar un vector normal y planos que están fuera de la superficie). Nuestro trabajo hasta ahora se ha desarrollado en espacios topológicos abstractos, que *a priori* no tienen por qué estar inmersos en un \mathbb{R}^n o algún otro espacio, de manera que definir una curvatura de esta manera es imposible.

⁹Además tiene otras desventajas, como que no es invariante bajo isometrías.

Un segundo intento de definir curvatura en superficies en \mathbb{R}^3 es el siguiente. Tomamos las secciones normales como antes pero ahora en vez de definir la curvatura como el promedio de las curvaturas principales la definimos como el producto, es decir

$$K = \kappa_1 \kappa_2. \quad (1.6)$$

Esta nueva curvatura se conoce como *curvatura gaussiana*. Antes de ver por qué esta curvatura es la que nos sirve, veamos que significado geométrico tiene. Tomemos por ejemplo, el caso de una esfera y un punto en ella. La curvatura gaussiana en ese punto de la esfera será el producto de las curvaturas principales en ese punto. Ahora bien, por motivos de simetría es claro que ambas curvaturas principales serán iguales (y distintas de cero) sin importar que vector normal se escoja para la superficie, por lo que el producto será positivo. Así una esfera tiene curvatura gaussiana positiva en cualquier punto. En el caso del cilindro descrito por $x^2 + y^2 = 1$ en \mathbb{R}^3 , hay una dirección (la vertical) donde la curvatura es cero (la sección normal es una recta) y otra donde es igual a 1 (la sección normal es una circunferencia de radio 1). De este modo, la curvatura gaussiana $K = 0$ para cualquier punto del cilindro. Si tomamos ahora en el paraboloides hiperbólico dado por $x^2 - y^2 = 1$ y nos fijamos en el origen, veremos que ahí la curvatura es negativa, pues hay secciones normales en que el vector de aceleración apunta en una dirección y hay otras en que apunta en la dirección opuesta, por lo que los signos de κ_1 y κ_2 serán, forzosamente, distintos. Con estos ejemplos podemos tener una idea más geométrica del significado de la curvatura gaussiana. Una superficie con curvatura gaussiana positiva se dobla como una pelota, una con curvatura negativa se dobla como una silla de montar.

Ahora que tenemos una intuición geométrica de lo que nos dice la curvatura gaussiana pasemos a hablar sobre un detalle importante que hemos dejado sin atender: la curvatura gaussiana no parece ser mejor que la media porque también hemos usado el espacio ambiente para definirla. No obstante la aparente complicación, Gauss descubrió en el año de 1827 que esta curvatura era intrínseca a la superficie, es decir que no depende del espacio ambiente en que esté inmersa. De hecho ni siquiera depende de que exista un espacio ambiente, la curvatura gaussiana depende únicamente de los coeficientes g_{ij} de la métrica. En particular, lo que Gauss descubrió es lo siguiente:

Teorema (Egregio de Gauss). *La curvatura gaussiana K se puede expresar en términos de la métrica como*

$$K = -\frac{1}{g_{11}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_{12}^2 - \frac{\partial}{\partial y} \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 \right). \quad (1.7)$$

Los símbolos Γ_{ij}^k se llaman *símbolos de Christoffel* y sólo dependen de los g_{ij} y de sus derivadas, por lo que, en esencia, para conocer la curvatura gaussiana de una superficie sólo basta conocer los coeficientes de la métrica.

Esta es la manera adecuada de definir curvatura en superficies abstractas. Definimos curvatura en una superficie arbitraria (M, g) como lo establecido en la expresión (1.7).

Como puede verse, la definición de curvatura no es difícil de entender, no obstante la expresión anterior es complicada de manipular. Es aquí donde entran en juego las métricas conformes. Veremos que la expresión (1.7) se simplifica enormemente al enfocarnos en estas métricas. Antes de hacerlo, sin embargo, hablaremos acerca de algo que ya habíamos mencionado, el operador de Laplace-Beltrami.

1.3.1. El operador de Laplace-Beltrami

Los conceptos de gradiente, divergencia y laplaciano del cálculo diferencial clásico, al igual que antes, tienen generalizaciones naturales a las variedades riemannianas. Sin embargo, para hablar de ellos en un contexto general hace falta desarrollar nuevas herramientas, lo que nos desviaría de nuestro objetivo principal. Para solventar este problema nuevamente haremos uso de las métricas conformes. De cualquier manera, mencionamos las definiciones (o mejor dicho sus expresiones en coordenadas locales) del gradiente y laplaciano en variedades para que el lector las tenga a la mano, a sabiendas de que sólo las usaremos en el contexto de las métricas conformes definidas anteriormente. Para lo siguiente (M, g) es una variedad riemanniana arbitraria.

Definición 1.18. El *gradiente* de una función $f \in C^\infty(M)$ se define como el campo dado en coordenadas locales por

$$\text{grad } f := \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j,$$

donde (g^{ij}) es la matriz inversa de (g_{ij}) dada por los coeficientes de la métrica (los g^{ij} son las entradas correspondientes de la matriz (g^{ij})).

Definición 1.19. Sea $f \in C^\infty(M)$. El *laplaciano* asociado a la métrica g de f es la función dada en coordenadas locales por

$$\Delta_g f := \sum_{i,j} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right).$$

Este nuevo laplaciano definido para variedades recibe el nombre de operador de *Laplace-Beltrami* y será fundamental para lo que sigue. La razón de definir de esta manera el laplaciano es algo complicada, así que sólo la esbozaremos. Recordemos de nuestros cursos de cálculo que $\Delta f := \text{div}(\text{grad } f)$. Usando esta misma idea, si logramos definir divergencia en variedades, podríamos usar la expresión anterior para definir el laplaciano en una variedad. La divergencia de un campo en una variedad se define como

$$\text{div } X := \sum_{i=1}^n g(\nabla_{\partial_i} X, \partial_i),$$

donde ‘ ∇ ’ es la conexión de Levi-Civita y es una especie de derivada direccional para campos vectoriales. Al hacer los cálculos pertinentes para una métrica conforme, obtenemos la fórmula dada en la definición anterior.

Ahora bien, antes de continuar hay que notar lo siguiente. Las anteriores son generalizaciones de conceptos conocidos del cálculo. Estos nuevos gradiente y laplaciano dependen directamente de la métrica g , hecho que no debe ser extraño pues para una función $f = (f_1, \dots, f_n)$ tenemos que por un lado que

$$\langle \text{grad } f(p), v \rangle = df_p(v)$$

y por otro

$$\Delta f = \left\langle \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} e_i, \sum_{i=1}^n f_i e_i \right\rangle,$$

es decir, ambos gradiente y laplaciano, guardan una estrecha relación con el producto interno usual. En una variedad, la métrica juega el papel de ese producto interno y por ende es de esperar que aparezca en estas definiciones. De ahí que ‘ Δ_g ’ sea el símbolo para representar al laplaciano.

Como habíamos dicho, el operador de Laplace-Beltrami se simplifica cuando nuestra métrica es conforme. Tenemos en esos casos la siguiente definición:

Definición 1.20. Sea $g = \lambda(dx^2 + dy^2)$ una métrica conforme (i.e. $\lambda > 0$). El operador de *Laplace-Beltrami* asociado a la métrica g es el dado por

$$\Delta_g := \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right). \quad (1.8)$$

Naturalmente, el laplaciano definido de esta manera coincide con la definición para la métrica dada. Para no recargar la notación, cuando quede claro a que métrica nos estamos refiriendo escribiremos ‘ Δ ’ en lugar de ‘ Δ_g ’.

En este contexto, de acuerdo con (1.7) definiremos curvatura gaussiana para métricas conformes como sigue.

Definición 1.21. Sea $g = \lambda(dx^2 + dy^2)$ una métrica conforme. La curvatura gaussiana (de aquí en adelante nada más curvatura) está dada por

$$K = -\frac{1}{2} \Delta \log \lambda, \quad (1.9)$$

donde ‘ Δ ’ es el operador de Laplace-Beltrami asociado a g .

En las dos definiciones anteriores se puede ver la utilidad de usar coordenadas isotermas únicamente. Por un lado el operador de Laplace-Beltrami se reduce a un múltiplo del laplaciano al que estamos acostumbrados, mientras que la expresión (1.7) del teorema Egregio de Gauss se reduce a una fórmula mucho más manipulable algebraicamente. Cabe mencionar que todo lo que haremos a continuación puede hacerse sin usar coordenadas isotermas, pero por razones de claridad en la exposición y para evitar introducir nuevas herramientas (como las formas diferenciales) es que hemos optado por simplificar las cosas usando estas coordenadas.

1.4. La ecuación de curvatura

Una vez definida la curvatura y el operador de Laplace-Beltrami, podemos iniciar nuestro estudio del *teorema de uniformización*. Tal vez lo más pedagógico en este momento es enunciar el teorema e ir explicando a qué se refiere cada parte.

Teorema (Uniformización de superficies de Riemann compactas). *Toda superficie de Riemann compacta admite una métrica de curvatura constante, es decir, toda clase conforme tiene un representante de curvatura constante.*

Empezaremos por darle sentido a las superficies de Riemann. Hasta este punto hemos trabajado con variedades riemannianas, es decir, objetos de la forma (M, g) , donde M es una variedad diferenciable y g es una métrica. Una superficie de Riemann es algo muy similar, lo único que cambiamos es que ahora en vez de concentrarnos en una sola métrica g , tomamos una clase de equivalencia de métricas, lo que nos conduce naturalmente a definir una relación de equivalencia entre las métricas admisibles en una variedad.

Definición 1.22. Dos métricas g y \tilde{g} en una variedad M son *conformemente equivalentes puntualmente* si existe una función $\lambda \in C^\infty(M)$, $\lambda > 0$ tal que

$$\tilde{g} = \lambda g.$$

Es claro que la relación recién definida es de equivalencia. A las clases de equivalencia les llamaremos *clases conformes*.

Definición 1.23. Una superficie de Riemann es una variedad M junto con una clase conforme de métricas $[g]$. Por comodidad lo seguiremos denotando como (M, g) , a sabiendas de que la g representa una clase de equivalencia y no una métrica¹⁰.

Dada una superficie de Riemann, es natural intentar buscar un representante canónico dentro de cada clase conforme. El representante más natural, desde el punto de vista geométrico, es precisamente aquel cuya curvatura es constante. De esta manera, lo que nos dice el teorema de uniformización es que ese representante de curvatura constante existe para cada clase conforme; y la manera de encontrarlo (o mejor dicho probar que existe) es resolviendo una ecuación diferencial conocida como la *ecuación de curvatura*. Para ver de dónde sale esta ecuación enunciaremos la Definición 1.22 como sigue. Dos métricas en una variedad M son equivalentes si existe $u \in C^\infty(M)$ tal que $\tilde{g} = e^{2u}g$. Es claro que esta forma de definir equivalencia conforme coincide con la anterior.

Teorema 1.24. *Sea M una superficie de Riemann. Si g_0 es una métrica conforme con curvatura k , entonces la métrica $g := e^{2u}g_0$, ($u \in C^\infty(M)$) tiene curvatura*

$$K = (k - \Delta_{g_0}u)e^{-2u}. \quad (1.10)$$

¹⁰Es posible que el lector esté familiarizado con otra definición de superficies de Riemann. Hemos optado por utilizar esta debido a que está enunciada en los mismos términos que el teorema de uniformización.

Demostración. Sea g_0 conforme. Entonces podemos escribirla como

$$g_0 = \lambda_0^2(dx^2 + dy^2)$$

para alguna $\lambda_0 \in C^\infty(M)$, $\lambda_0 > 0$. Entonces tenemos que

$$g = \lambda_0^2 e^{2u}(dx^2 + dy^2).$$

De esta igualdad se deduce que el factor de conformidad de la métrica g es $\lambda = \lambda_0^2 e^{2u}$. Además, tenemos que

$$k = -\frac{1}{2}\Delta_{g_0} \log \lambda_0^2 = -\Delta_{g_0} \log \lambda_0.$$

Finalmente, es claro que $\Delta_g = e^{-2u}\Delta_{g_0}$. Usando estas tres observaciones estamos listos para calcular la curvatura K asociada a la métrica g .

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2}\Delta_g \log \lambda \\ &= -\frac{1}{2}\Delta_g \log \lambda_0^2 e^{2u} \\ &= -\Delta_g \log \lambda_0 e^u \\ &= -e^{2u}(\Delta_{g_0} \log \lambda_0 + \Delta_{g_0} u) \\ &= (k - \Delta_{g_0} u)e^{-2u}. \end{aligned}$$

□

Ahora bien, nuestro objetivo es encontrar una $u \in C^\infty(M)$ de modo que la métrica $e^{2u}g_0$ tenga curvatura K constante. Para encontrar esa u lo único que tenemos que hacer es dar una K constante (fija) en la ecuación (1.10) y resolver la ecuación diferencial resultante para u (pues k también es una función conocida porque la g_0 es una métrica dada *a priori*). Despejando de (1.10) tenemos que u debe satisfacer

$$\Delta_{g_0} u - k + Ke^{2u} = 0. \quad (1.11)$$

Esta ecuación es conocida como la *ecuación de curvatura* y resolverla será el objetivo principal del siguiente capítulo. Antes de resolverla, no obstante, es conveniente ver en qué casos no hay soluciones. Para esto usaremos el conocido teorema de Gauss-Bonnet. Para enunciarlo, hacemos un breve recordatorio topológico. Decimos que una superficie es *orientable* si los mapas de transición de un atlas dado, vistos como funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , tienen determinante positivo (todas las superficies de Riemann son orientables). Un teorema importante de topología nos dice que las únicas superficies orientables compactas son variedades (no necesariamente diferenciables) homeomorfas a la esfera o a la suma conexa de un número finito de toros. En pocas palabras, las únicas superficies orientables compactas que existen son deformaciones de la esfera, de un toro, de un doble toro, etc. La función *característica de Euler* de una superficie, denotada por $\chi(M)$, es la función que vale 2 en superficies homeomorfas a la esfera, 0 en superficies homeomorfas al toro, -2 en el doble toro, -4 en el triple y en general $2 - 2p$ en superficies homeomorfas a la suma conexa de p toros.

Teorema (Gauss-Bonnet). *Sea M una superficie orientable compacta con curvatura K . Entonces*

$$\int_M K \, dS = 2\pi\chi(M),$$

donde $\chi(M)$ es la función característica de Euler de M .

No demostramos el teorema de Gauss-Bonnet porque no tenemos las herramientas necesarias para hacerlo. En cualquier caso, no usaremos el teorema más que para darnos una pauta de las posibles soluciones que puede tener la ecuación de curvatura. Una demostración accesible del teorema de Gauss-Bonnet se encuentra en [24]. De aquí en adelante, a menos que se diga lo contrario, trabajaremos con superficies compactas.

Con el teorema de Gauss-Bonnet a la mano podemos ver qué constantes son admisibles como funciones de curvatura. Esencialmente tendremos tres casos, a saber $K \equiv 1, 0, -1$. Para superficies con $\chi(M) > 0$ tendremos que la curvatura es necesariamente una constante positiva, de otra forma contradiríamos el teorema de Gauss-Bonnet. Para superficies con $\chi(M) = 0$, la única manera de hacer que $\int_M K = 0$ es haciendo $K \equiv 0$. Finalmente, para superficies con $\chi(M) < 0$ la condición necesaria para no contradecir Gauss-Bonnet será que K sea una constante negativa. En el siguiente capítulo resolveremos la ecuación para dos de los tres casos recién expuestos y daremos un resultado parcial para el caso de característica positiva.

Capítulo 2

Soluciones de la ecuación de curvatura

En el capítulo anterior planteamos el problema de encontrar métricas con curvatura constante dentro de una clase conforme dada, lo que nos llevó a encontrar la ecuación de curvatura (1.11). Vimos también que la topología de la superficie (en particular su característica de Euler) impone ciertas restricciones sobre el valor que pueden tomar esas constantes. Concluimos que hay esencialmente tres casos distintos, que dependen del signo que tome $\chi(M)$. En virtud de lo anterior, redujimos nuestro estudio a los casos en que $K \equiv 1, 0, -1$.

Para resolver la ecuación de curvatura (1.11) será necesario que introduzcamos nuevas herramientas. En particular, necesitaremos exportar las ideas del cálculo integral a las variedades (tal como lo hicimos en el capítulo anterior para el cálculo diferencial). Por desgracia, la manera de hacerlo es un poco complicada y nos llevaría demasiado tiempo exponerlo aquí (además del hecho de que la integración en variedades se reduce a hacer integrales de superficie del mismo tipo que las vistas en cálculo). Una buena introducción al tema de integración en variedades puede encontrarse en el capítulo 4 de [12].

2.1. Superficies con curvatura prescrita

Una vez con la ecuación de curvatura a nuestra disposición podemos aproximarnos a un problema un poco más general que el de uniformización: prescribir curvaturas en superficies. El objetivo es dar condiciones necesarias y suficientes para discernir si una función dada, $K \in C^\infty(M)$ puede o no ser la curvatura asociada a una métrica g en una superficie. Nuevamente, el teorema de Gauss-Bonnet nos impone las siguientes condiciones necesarias:

- Si $\chi(M) > 0$ entonces $K > 0$ en algún punto.
- Si $\chi(M) = 0$ entonces K cambia de signo, o bien $K \equiv 0$.
- Si $\chi(M) < 0$ entonces $K < 0$ en algún punto.

(2.1)

La pregunta obligada es ¿serán las condiciones (2.1) suficientes para que K sea la curvatura de alguna métrica en M ? En 1975 Kazdan y Warner demostraron que la respuesta es sí. Dada cualquier K diferenciable que cumpla (2.1) existe una métrica que tiene curvatura K^1 . Yendo un poco más lejos, podemos hacer una pregunta más ambiciosa que la anterior. Si K es una función diferenciable que satisface (2.1) y g es una métrica en M ¿existe una métrica \tilde{g} conformemente equivalente a g que tenga curvatura K ? Una respuesta afirmativa a esta segunda pregunta resuelve de manera implícita el teorema de uniformización. Lamentablemente en este caso la respuesta es no. En 1974 los mismos Kazdan y Warner exhibieron funciones K en \mathbb{S}^2 que satisfacen (2.1) pero son curvaturas asociadas a alguna métrica que no es conformemente equivalente a la métrica usual en la esfera.

Nuestro objetivo en las siguientes secciones seguirá siendo el de probar el teorema de uniformización a partir de la ecuación de curvatura. No obstante, en vista de las observaciones anteriores, demostraremos en algunos casos, afirmaciones ligeramente más generales que las del teorema de uniformización (por ejemplo, probaremos que en superficies con característica de Euler negativa, cualquier función $K < 0$ puede ser vista como la curvatura de una métrica conformemente equivalente a una dada).

Una vez dicho esto, proseguimos a resolver la ecuación de curvatura. Para ello dividiremos nuestro trabajo en tres casos dependiendo del signo de $\chi(M)$.

2.2. El caso $\chi(M) = 0$

Empezaremos por resolver el caso en que $\chi(M) = 0$ porque es el más sencillo de los tres. Hemos mencionado que cualquier función suave K que cambie de signo, o bien $K \equiv 0$, son curvaturas de métricas conformemente equivalentes a una métrica dada (fija). Como nuestro objetivo es demostrar el teorema de uniformización, bastará con resolver la ecuación de curvatura para el caso en que $K \equiv 0$ (el lector interesado en el caso en que K cambia de signo puede consultar [20]). Sustituyendo en (1.11), una métrica $g = e^{2u}g_0$ tendrá curvatura $K \equiv 0$ si $u \in C^\infty(M)$ es solución de la ecuación

$$\Delta u = k. \tag{2.2}$$

(Recordemos que $k \in C^\infty(M)$ es la curvatura de la métrica g_0 y ‘ Δ ’ su operador de Laplace-Beltrami).

Notemos que k no es una función arbitraria en $C^\infty(M)$, pues nuevamente por Gauss-Bonnet tenemos que

$$\bar{k} := \frac{1}{|M|} \int_M k = 0,$$

donde $|M| := \int_M 1$ es el área de M . Con esta observación en mente nos olvidaremos por un rato del significado geométrico de la ecuación y procederemos a encontrar sus soluciones.

¹Dicho sea de paso, la prueba de Kazdan y Warner sólo es válida para superficies compactas.

2.2.1. Soluciones débiles de la ecuación

Mostraremos que el problema

$$\begin{cases} \Delta u = k \\ \int_M u = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

tiene una solución única $u \in C^\infty(M)$ si k es una función suave de promedio cero.

Por desgracia, encontrar soluciones explícitas al problema (2.3) es complicado, así que tendremos que echar mano de algunos conceptos del análisis funcional para demostrar la existencia y unicidad de la solución.

Definición 2.1. Una función $u \in C^\infty(M)$ que satisface (2.3) es una *solución clásica*.

Antes de avanzar, veamos que toda solución clásica de (2.3) satisface que

$$\int_M u \Delta \varphi = \int_M k \varphi \quad (2.4)$$

para toda $\varphi \in C^\infty(M)$. Esto se sigue del teorema de la divergencia, que nos dice que para cualquier campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$\int_M \operatorname{div} X = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle, \quad (2.5)$$

donde ν es el campo normal unitario exterior y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es notación para referirnos a $g(\cdot, \cdot)$. Si usamos la identidad $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + X(f)$ junto con el teorema de la divergencia, obtenemos que

$$\int_M f \operatorname{div} X + \int_M X(f) = \int_M \operatorname{div}(fX) = \int_{\partial M} \langle fX, \nu \rangle = 0, \quad (2.6)$$

pues $\partial M = \emptyset$ (estamos trabajando en una variedad compacta). Sustituyendo $X = \operatorname{grad} g$ y usando la igualdad $\operatorname{grad} g(f) = \langle \operatorname{grad} g, \operatorname{grad} f \rangle$ (se sigue de la definición en coordenadas locales del gradiente) tenemos que

$$\int_M f \Delta g + \int_M \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle = 0. \quad (2.7)$$

Usando la notación $\operatorname{grad} f = \nabla f$ tenemos finalmente que

$$\int_M f \Delta g = - \int_M \langle \nabla f, \nabla g \rangle. \quad (2.8)$$

Si tomamos una solución clásica u de (2.3), es claro que

$$\int_M (\Delta u) \varphi = \int_M k \varphi \quad (2.9)$$

para toda $\varphi \in C^\infty(M)$. La afirmación (2.4) se sigue de aplicar (2.8) dos veces a la igualdad anterior. Esta propiedad de las soluciones clásicas nos permitirá definir más adelante un nuevo concepto conocido como solución débil. Antes de hacerlo, no obstante, es necesario precisar con qué funciones vamos a trabajar. Para ello tenemos las siguientes definiciones:

Definición 2.2. Definimos el *espacio de Sobolev* $H^1(M)$ como la completación de $C^\infty(M)$ con respecto a la norma

$$\|\varphi\|_{H^1(M)} := \left(\int_M \varphi^2 + \int_M |\nabla\varphi|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde $|\nabla\varphi|^2 =: \langle \nabla\varphi, \nabla\varphi \rangle$.

Lo primero que hay que ver es que $\|\cdot\|_{H^1(M)}$ es, efectivamente, una norma. La manera más fácil hacerlo es notando que $\|\cdot\|_{H^1(M)}$ es la norma inducida por el producto interno²

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{H^1(M)} := \int_M \varphi\psi + \int_M \langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle.$$

El espacio $H^1(M)$, tal como lo hemos definido, no es de mucha utilidad práctica porque no sabemos qué nos queda de completar $C^\infty(M)$ (es lo mismo que pasa cuando vemos a \mathbb{R} como la completación de \mathbb{Q} ; al principio sólo sabemos que \mathbb{R} son clases de equivalencia de sucesiones en \mathbb{Q} pero no vemos más estructura). El siguiente teorema nos mostrará que $H^1(M)$ es un subconjunto de $L^2(M)$ ³.

Teorema 2.3. *El espacio de Sobolev $H^1(M)$ es un subespacio de $L^2(M)$.*

Demostración. Basta con notar que cualquier sucesión de Cauchy en $H^1(M)$ es de Cauchy en $L^2(M)$ (puesto que $\|u\|_2 \leq \|u\|_{H^1(M)}$). El espacio $H^1(M)$ está formado por clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en $(C^\infty(M), \|\cdot\|_{H^1(M)})$; en consecuencia podemos ver a $H^1(M)$ como las funciones $u \in L^2(M)$ tales que existe una sucesión de Cauchy (u_k) en $(C^\infty(M), \|\cdot\|_{H^1(M)})$ que converge a u en $(L^2(M), \|\cdot\|_2)$. Para $u \in H^1(M)$ definimos $\|u\|_{H^1(M)}$ como antes (donde ahora $|\nabla u|$ es ahora el límite en $L^2(M)$ de $|\nabla u_k|$). \square

Para encontrar una solución de (2.3) (o mejor dicho *la* solución, pues resultará ser única) tendremos que concentrarnos en un subespacio de $H^1(M)$. En este subespacio, no obstante, la norma original dada por $\|\cdot\|_{H^1(M)}$ no nos será muy útil, por lo que tendremos que dar una nueva que sea equivalente a la primera y que nos ayude a encontrar la solución.

Definición 2.4. Definimos el espacio $H^{1,0}(M)$ de funciones con promedio cero como

$$H^{1,0}(M) := \left\{ u \in H^1(M) : \int_M u = 0 \right\}$$

²Es claro que este es un producto interno así que no lo demostramos.

³Los espacios $L^p(M)$ son extensiones para variedades de los espacios L^p del análisis real. La norma en $L^p(M)$ está dada por $\|\varphi\|_p := \left(\int_M |\varphi|^p \right)^{1/p}$

con la norma

$$\|\varphi\|_{H^{1,0}(M)} := \left(\int_M |\nabla\varphi|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Finalmente, definimos el concepto de solución débil:

Definición 2.5. Una función $u \in H^{1,0}(M)$ que satisface

$$\int_M u \Delta\varphi = \int_M k\varphi$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(M)$ (i.e. $\varphi \in C^\infty(M)$ y $\bar{\varphi} = 0$) se llama *solución débil* de (2.3).

A primera vista probablemente parezca que no ganamos nada al introducir la noción de solución débil, sin embargo iremos viendo que esto no es del todo cierto. Sucede que es relativamente sencillo probar la existencia y unicidad de una solución débil (cosa que no ocurre con una clásica). Nos dedicaremos en lo que resta de esta sección a demostrar que el problema (2.3) tiene una única solución débil, y luego veremos que de hecho esa solución débil es también clásica.

Ahora bien, nuestro objetivo será demostrar que $(H^{1,0}(M), \|\cdot\|_{H^{1,0}(M)})$ es un espacio de Hilbert. Claramente $\|\cdot\|_{H^{1,0}(M)}$ está inducida por el producto interno⁴

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{H^{1,0}(M)} := \int_M \langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle,$$

así que lo que resta es probar que es completo. Una vez que hayamos probado que $H^{1,0}(M)$ es de Hilbert, el teorema de representación de Riesz garantizará la existencia de una única solución débil al problema (2.3). En virtud de lo anterior, nuestro primer paso será demostrar la siguiente proposición:

Proposición 2.6. (a) $\|\cdot\|_{H^{1,0}(M)}$ es una norma en $H^{1,0}(M)$.

(b) $H^{1,0}(M)$ es cerrado en $H^1(M)$.

(c) Las normas $\|\cdot\|_{H^{1,0}(M)}$ y $\|\cdot\|_{H^1(M)}$ son equivalentes en $H^{1,0}(M)$.

Antes de demostrar la proposición anterior mencionamos dos lemas que necesitaremos. El primero es un caso particular de un resultado importante en el estudio de espacios de Sobolev: el teorema de Rellich-Kondrachov. El segundo es una desigualdad que se deriva de él. No demostraremos el teorema de Rellich-Kondrachov por ahora, pues la demostración es un poco complicada. El lector interesado en leerla puede consultar el Apéndice B.

Lema 2.7 (Teorema de Rellich-Kondrachov). *Sea M una superficie compacta y orientable. Entonces la inclusión canónica*

$$\iota : H^1(M) \hookrightarrow L^2(M)$$

⁴Lo único que podría no ser claro es por qué $\langle \varphi, \varphi \rangle_{H^{1,0}(M)} > 0$ si $\varphi \neq 0$. Esto lo probamos en la Proposición 2.6.

es un operador compacto (i.e. manda conjuntos acotados en relativamente compactos).

Lema 2.8 (Desigualdad de Poincaré). *Sea $u \in H^{1,0}(M)$. Existe una constante $\lambda_1 > 0$ ⁵ tal que*

$$\int_M u^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_M |\nabla u|^2.$$

Demostración. Definimos λ_1 como

$$\lambda_1 := \inf_{\substack{u \in H^{1,0}(M) \\ u \neq 0}} \frac{\int_M |\nabla u|^2}{\int_M u^2} \quad (2.10)$$

$$= \inf_{u \in \Sigma} \int_M |\nabla u|^2, \quad (2.11)$$

donde Σ es el conjunto definido como

$$\Sigma := \left\{ u \in H^{1,0}(M) : \int_M u^2 = 1 \right\}.$$

Es claro que λ_1 está bien definido, pues las integrales que usamos para definirlo siempre son positivas. Si logramos probar que $\lambda_1 > 0$, entonces tendremos que para cualquier $u \in H^{1,0}(M)$ distinta de cero

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_M |\nabla u|^2}{\int_M u^2} \quad (2.12)$$

y la proposición se sigue de un despeje elemental. Para ver que $\lambda_1 > 0$ notemos que

$$\int_M |\nabla u|^2 > 0 \quad (2.13)$$

para toda $u \in \Sigma$, ya que si $\int_M |\nabla u|^2 = 0$, entonces necesariamente u es una función constante. Debido a que la única función constante en $H^{1,0}(M)$ es la constante cero, y esa función no está en Σ , la integral anterior es siempre positiva.

Para probar que el ínfimo es también positivo bastará con ver que ese ínfimo es en realidad un mínimo, es decir, hay una $u \in \Sigma$ tal que

$$\lambda_1 = \int_M |\nabla u|^2 > 0. \quad (2.14)$$

Para ver que existe esa u hacemos lo siguiente. Tomamos una sucesión (u_k) en Σ tal que

$$\int_M |\nabla u_k|^2 \longrightarrow \lambda_1, \quad (2.15)$$

⁵La constante λ_1 es el primer eigenvalor de $-\Delta$, de ahí la notación.

la cual existe por definición de ínfimo. Como $\int_M |\nabla u_k|^2$ converge, tenemos que la sucesión es acotada en $H^1(M)$ (recordemos que $u_k \in \Sigma$, así que $\int_M u_k^2 = 1$). Por el teorema de Rellich-Kondrachov, la sucesión (u_k) tiene una subsucesión (u_{k_j}) convergente a una $u \in L^2(M)$. Además, por la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\int_M |\varphi| \leq \left(\int_M 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M \varphi^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

así que $L^2(M) \hookrightarrow L^1(M)$ de forma continua. Si renombramos a la subsucesión (u_{k_j}) como (u_k) (para no acarrear tantos subíndices), lo anterior nos dice que

$$\begin{aligned} u_k &\rightarrow u \text{ en } L^2(M) \text{ y} \\ u_k &\rightarrow u \text{ en } L^1(M). \end{aligned}$$

Esto por un lado implica que

$$\left| \int_M u \right| = \left| \int_M u - \int_M u_k \right| \leq \int_M |u - u_k| = \|u - u_k\|_1 \rightarrow 0$$

y por otro que

$$\int_M u^2 = \|u\|_2^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_2^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M u_k^2 = 1,$$

es decir, $u \in \Sigma$. Lo único que falta ver es que $\int_M |\nabla u|^2 = \lambda_1$. Para probar esto último basta con notar que

$$\int_M u^2 + \int_M |\nabla u|^2 = \langle u, u \rangle_{H^1(M)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_k, u \rangle_{H^1(M)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_M u_k u + \int_M \langle \nabla u_k, \nabla u \rangle \right),$$

lo que implica que

$$\int_M |\nabla u|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M \langle \nabla u_k, \nabla u \rangle.$$

De esta manera tenemos que

$$\int_M |\nabla u|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M \langle \nabla u_k, \nabla u \rangle \tag{2.16}$$

$$\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M |\nabla u_k| |\nabla u| \tag{2.17}$$

$$\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_M |\nabla u_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.18}$$

Finalmente, lo anterior implica que

$$\lambda_1 \leq \int_M |\nabla u|^2 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M |\nabla u_k|^2 = \lambda_1, \tag{2.19}$$

lo que concluye la demostración. \square

Una vez que tenemos la desigualdad de Poincaré a la mano, la demostración de la Proposición 2.6 es casi inmediata.

Demostración de la Proposición 2.6. (a) Probaremos que $\|\cdot\|_{H^{1,0}(M)}$ es una norma en $H^{1,0}(M)$. Como hemos dicho antes, $\|u\|_{H^{1,0}(M)}^2 = \langle u, u \rangle_{H^{1,0}(M)}$, así que $\|\cdot\|_{H^{1,0}(M)}$ será una norma si $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{1,0}(M)}$ es un producto interno. Es claro que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{1,0}(M)}$ es una forma bilineal simétrica, lo que no es tan obvio es que sea positivo definida. Para ver eso sólo falta notar que si

$$\int_M |\nabla u|^2 = 0$$

entonces $|\nabla u|^2$ se anula, por lo que u debe ser una constante. Como estamos en $H^{1,0}(M)$, u debe ser una constante de promedio cero, es decir, $u \equiv 0$. De aquí se deduce que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{1,0}(M)}$ es positivo definida.

(b) $H^{1,0}(M)$ es cerrado en $H^1(M)$. Para ver esto, tomemos una sucesión (u_k) en $H^{1,0}(M)$ que converja a u en $H^1(M)$. De manera completamente análoga a lo que hicimos en la demostración de la desigualdad de Poincaré, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} u_k &\rightarrow u \text{ en } L^2(M), \\ u_k &\rightarrow u \text{ en } L^1(M), \end{aligned}$$

e igual que antes tenemos que $\int_M u = 0$, es decir, $\bar{u} = 0$. De esta manera tenemos que $u \in H^{1,0}(M)$, lo que demuestra que es cerrado.

(c) Las normas $\|\cdot\|_{H^{1,0}(M)}$ y $\|\cdot\|_{H^1(M)}$ son equivalentes en $H^{1,0}(M)$. Es claro que si $u \in H^{1,0}(M)$ entonces $\|u\|_{H^{1,0}(M)} \leq \|u\|_{H^1(M)}$; la desigualdad de Poincaré nos dice que $\|u\|_{H^1(M)} \leq C\|u\|_{H^{1,0}(M)}$. Esto concluye la demostración. \square

Corolario 2.9. *El espacio $(H^{1,0}(M), \|\cdot\|_{H^{1,0}(M)})$ es de Hilbert.*

Será precisamente este corolario el que nos sirva para demostrar la proposición que hemos estado esperando.

Proposición 2.10. *El problema (2.3) tiene una única solución débil en $H^{1,0}(M)$.*

Demostración. Definimos el operador lineal $\mathcal{L} : H^{1,0}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{L}\varphi := - \int_M k\varphi.$$

Notemos que el operador \mathcal{L} además de ser lineal es acotado, pues

$$|\mathcal{L}\varphi| \leq \int_M |k|\varphi \leq \|k\|_2 \cdot \|\varphi\|_2 \leq \frac{\|k\|_2}{\lambda_1} \|\varphi\|_{H^{1,0}(M)}.$$

Entonces, el teorema de representación de Riesz nos dice que existe una única $u \in H^{1,0}(M)$ de manera que $\mathcal{L}\varphi = \langle u, \varphi \rangle_{H^{1,0}(M)}$ para cualquier $\varphi \in H^{1,0}(M)$, es decir

$$-\int_M k\varphi = \int_M \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{H^{1,0}(M)}.$$

Si además $\varphi \in C^\infty(M)$, utilizando la igualdad (2.8) y multiplicando por menos uno ambos lados concluimos que

$$\int_M u\Delta\varphi = \int_M k\varphi$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(M)$. □

2.2.2. Regularidad de las soluciones débiles

Hemos probado ya que el problema (2.3) tiene una única solución débil $u \in H^{1,0}(M)$. Nuestro objetivo ahora será ver que esa solución es clásica, es decir, que $u \in C^\infty(M)$ y que

$$\Delta u = k.$$

Las demostraciones de estas afirmaciones forman parte de una rama del análisis conocido como teoría de regularidad, que por desgracia es demasiado técnica para tratarla ahora. Por este motivo citaremos un par de resultados sin demostrarlos, dando referencias para que el lector interesado pueda leer más al respecto.

Antes de empezar con los resultados de regularidad, es necesario ampliar nuestro panorama de los espacios de Sobolev.

Definición 2.11. El *espacio de Sobolev* $W^{k,p}(M)$ es la completación de $C^\infty(M)$ con respecto a la norma

$$\|\varphi\|_{W^{k,p}(M)} := \left(\sum_{j=0}^k \int_M |\nabla^j u|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $\nabla^j u$ es la j -ésima derivada covariante de u ⁶. Denotamos por $W_0^{k,p}(M)$ a las funciones en $W^{k,p}(M)$ con promedio cero.

Podemos pensar en la j -ésima derivada covariante de u tal como pensamos en las derivadas de orden superior en funciones de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} .

Una vez definidos los espacios de Sobolev en general, tenemos que $H^1(M) = W^{1,2}(M)$. Con esta igualdad y el hecho de que sabemos que hay una solución débil $u \in H^1(M)$ tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.12. Sean Ω un subconjunto abierto de M y $u \in W^{1,2}(\Omega)$ una solución débil de $\Delta u = f$ con $f \in W^{k,2}(\Omega)$. Entonces para cualquier $\Omega' \subset\subset \Omega$ se tiene que $u \in W^{k+2,2}(\Omega')$.

⁶El uso de derivadas covariantes es una de las razones de no abordar este tema, pues para hacerlo necesitaríamos ver muchas más cosas de geometría.

Corolario 2.13. *Sea $u \in W^{1,2}(M)$ una solución débil de $\Delta u = f$ con $f \in C^\infty(M)$. Entonces $u \in C^\infty(M)$.*

La prueba de estas afirmaciones se puede encontrar en los capítulos 9 y 10 de [15]. Juntas nos dan la primera condición que necesitábamos verificar para que u sea solución clásica de (2.3).

Nos falta demostrar todavía que una función $u \in C^\infty(M)$ que satisfaga

$$\int_M u \Delta \varphi = \int_M k \varphi$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(M)$ satisface también

$$\Delta u = k.$$

Para demostrar esto último, notemos primero que el hecho de que $u \in C^\infty(M)$ implica que también $\Delta u \in C^\infty(M)$ (esto puede verse directamente de la expresión en coordenadas locales de Δu). Además, por el teorema de la divergencia tenemos que $\int_M \Delta u = 0$. De esta manera $\Delta u \in C_0^\infty(M)$. Terminamos con la siguiente proposición.

Proposición 2.14. *Sea $u \in C_0^\infty(M)$ tal que*

$$\int_M u \Delta \varphi = \int_M k \varphi$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(M)$. Entonces $\Delta u = k$.

Demostración. Notemos primero que todas las funciones involucradas, u , φ y k están en $C_0^\infty(M)$. Como u es suave, usando (2.8) obtenemos que $\int_M u \Delta \varphi = \int_M (\Delta u) \varphi$. Despejando, tenemos entonces que

$$0 = \int_M (\Delta u) \varphi - k \varphi = \int_M (\Delta u - k) \varphi.$$

Por hipótesis esta igualdad se cumple para cualquier $\varphi \in C_0^\infty(M)$. El resultado se sigue de tomar $\varphi = \Delta u - k$. \square

Con este resultado hemos demostrado el teorema de uniformización para superficies con $\chi(M) = 0$.

2.3. El caso $\chi(M) < 0$

A continuación tenemos a las superficies con $\chi(M) < 0$. Por lo comentado anteriormente, una condición necesaria para que una función $K \in C^\infty(M)$ sea la curvatura asociada a una métrica en M es que sea negativa en algún punto, así que la ecuación de curvatura resultante es

$$\Delta u = k - K e^{2u},$$

donde lo único que sabemos es que $\int_M k < 0$. Demostraremos que la ecuación anterior tiene solución para cualquier $K \in C^\infty(M)$ tal que $K < 0$ (y el teorema de uniformización será el caso particular cuando $K \equiv -1$). El método para demostrar la existencia de una solución, no obstante, difiere del que usamos en el caso anterior. Lo que haremos ahora es definir un funcional F en un espacio de funciones adecuado y veremos a las soluciones de la ecuación como puntos críticos del funcional. Una vez que hayamos demostrado la existencia de esos puntos críticos daremos un argumento de regularidad para demostrar que la solución que hayamos encontrado es, en efecto, suave.

2.3.1. Planteamiento variacional del problema

Demostraremos que el problema

$$\Delta u = k - Ke^{2u} \quad (2.20)$$

tiene una solución $u \in C^\infty(M)$ si $\int_M k < 0$ y $K < 0$.

Definición 2.15. Una *solución de (2.20)* es una función $u \in C^\infty(M)$ que satisface $\Delta u = k - Ke^{2u}$.

A continuación definiremos el funcional que garantizará la existencia de una solución. Al igual que antes, dividiremos el argumento en dos partes: primero probaremos que existe una solución débil de (2.20) y luego veremos que si k y K son suaves, entonces u también lo es y entonces la solución es clásica. Empezamos con la siguiente proposición:

Proposición 2.16. *Un punto crítico (lo suficientemente suave como para que Δu tenga sentido) del funcional $F : H^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$F[u] := \int_M \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + ku$$

sujeto a la restricción

$$S = \left\{ u \in H^1(M) : \int_M Ke^{2u} = 2\pi\chi(M) \right\}$$

satisface que $\Delta u = k - Ke^{2u}$.

Demostración. Primero veamos que $S \neq \emptyset$, pues tiene al menos a una función constante. Para el resto de la demostración utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar los puntos críticos de F sujeto a la restricción $G[u] = 2\pi\chi(M)$, donde G se define como

$$G[u] := \int_M Ke^{2u}.$$

Para utilizar el método de multiplicadores de Lagrange tendremos que verificar dos cosas: que existan $F'(u)$ y $G'(u)$ para $u \in H^1(M)$ y que $2\pi\chi(M)$ sea un valor regular de G . Primero encontramos las derivadas:

$$\begin{aligned}
 F'(u)v &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(u+sv) - F(u)}{s} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \int_M \frac{1}{2} (|\nabla(u+sv)|^2 - |\nabla u|^2) + skv \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2s} \int_M \langle \nabla u + s\nabla v, \nabla u + s\nabla v \rangle - \langle \nabla u, \nabla u \rangle + 2skv \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2s} \int_M (2s\langle \nabla u, \nabla v \rangle + 2skv) + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2s} \int_M s^2 |\nabla v|^2 \\
 &= \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle + kv
 \end{aligned}$$

Ahora bien, si la u es lo suficientemente suave como para que Δu exista, la igualdad anterior se transforma en

$$F'(u)v = \int_M (-\Delta u + k)v.$$

Además

$$\begin{aligned}
 G'(u)v &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(u+sv) - G(u)}{s} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \int_M Ke^{2(u+sv)} - Ke^{2u} \\
 &= \int_M Ke^{2u} \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2sv} - 1}{s} \right) \\
 &= 2 \int_M vKe^{2u}.
 \end{aligned}$$

Esto último se puede ver con más claridad si definimos la función $f(s) := e^{2sv}$. Entonces tenemos que $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{2sv} - 1}{s} = f'(0) = 2v$. Por otro lado, es claro por la expresión anterior que $2\pi\chi(M)$ es un valor regular de G .

El teorema de los multiplicadores de Lagrange nos dice entonces que si u es un punto crítico existe una constante β tal que $F'(u) = \beta G'(u)$, es decir

$$\int_M (-\Delta u + k)v = \beta \int_M vKe^{2u}$$

para cualquier $v \in H^1(M)$. De esto se deduce que

$$\Delta u - k + \beta Ke^{2u} = 0.$$

Para encontrar β lo único que hacemos es integrar la ecuación de arriba para obtener

$$\int_M k = \beta \int_M Ke^{2u}.$$

Si dV_0 es la forma de volumen asociada a la métrica g_0 y dV es la forma de volumen asociada a $g = e^{2u}g_0$, entonces

$$\int_M k \, dV_0 = \int_M K \, dV = \int_M K e^{2u} \, dV_0 = 2\pi\chi(M)$$

por Gauss-Bonnet, lo que implica que $\beta = 1$. Esto concluye la demostración. \square

Una vez que tenemos este resultado a la mano, nuestra tarea es simple: hay que demostrar que el funcional F tiene un mínimo y que el mínimo que encontremos es una función $u \in C^\infty(M)$.

Proposición 2.17. *El funcional F restringido al conjunto S está acotado inferiormente.*

Demostración. Sea $u \in H^1(M)$. Escribimos a u como $u = u_0 + \bar{u}$, donde $u_0 \in H^{1,0}(M)$ y

$$\bar{u} := \frac{1}{|M|} \int_M u.$$

Entonces $u \in S$ si y sólo si

$$2\pi\chi(M) = \int_M K e^{2u} = \int_M K e^{2(u_0 + \bar{u})} = e^{2\bar{u}} \int_M K e^{2u_0},$$

es decir, si y sólo si

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \log \left(2\pi\chi(M) / \int_M K e^{2u_0} \right). \quad (2.21)$$

Evaluando F en u tenemos que

$$\begin{aligned} F[u] &= F[u_0 + \bar{u}] \\ &= \int_M \left(\frac{1}{2} |\nabla u_0|^2 + k u_0 \right) + \int_M k \bar{u} \\ &= \int_M \left(\frac{1}{2} |\nabla u_0|^2 + k u_0 \right) + \pi\chi(M) \left(\log 2\pi|\chi(M)| - \log \left| \int_M K e^{2u_0} \right| \right). \end{aligned}$$

Si logramos demostrar que los términos

$$-\chi(M) \log \left| \int_M K e^{2u_0} \right| \quad \text{y} \quad \int_M k u_0$$

están acotados inferiormente habremos terminado. Para ver esto tomemos una $\delta > 0$ tal que $K(x) \leq -\delta < 0$ (esto se puede hacer porque K es una función continua sobre un conjunto compacto y entonces alcanza un máximo). Para esa δ tenemos entonces que

$$\int_M K e^{2u_0} \leq -\delta \int_M e^{2u_0}.$$

Por otra parte, gracias a la desigualdad $e^x \geq 1 + x$, se tiene que

$$\int_M e^{2u_0} \geq \int_M 1 + \int_M 2u_0 = |M|.$$

Usando estas dos desigualdades tenemos que

$$\int_M K e^{2u_0} \leq -\delta |M|.$$

Como ambos lados de la desigualdad son negativos, tomar valor absoluto equivale a multiplicar la desigualdad por menos uno, es decir

$$\left| \int_M K e^{2u_0} \right| \geq \delta |M|, \quad (2.22)$$

lo que implica que

$$-\chi(M) \log \left| \int_M K e^{2u_0} \right| \geq -\chi(M) \log \delta |M| > -\infty.$$

De esta manera, para toda $u \in S$ se tiene que

$$F[u] \geq \int_M \left(\frac{1}{2} |\nabla u_0|^2 + k u_0 \right) - C_1 \quad (2.23)$$

para alguna constante C_1 que no depende de u_0 . Además

$$-\int_M k u_0 \leq \left| \int_M k u_0 \right| \leq \|k\|_2 \cdot \|u_0\|_2 \leq C_2 \|\nabla u_0\|_2 \leq C_3 \varepsilon \|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{C_4}{\varepsilon} \quad (2.24)$$

para cualquier $\varepsilon > 0$ ⁷. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2C_3}$ tenemos

$$-\int_M k u_0 \leq \int_M \frac{1}{2} |\nabla u_0|^2 + 2C_3 C_4,$$

de lo cual se deduce que

$$F[u] \geq -2C_3 C_4 - C_1.$$

Naturalmente las constantes involucradas no dependen de u , así que hemos logrado acotar el funcional F satisfactoriamente. \square

⁷En este desarrollo hemos usado las desigualdades de Hölder, Poincaré y una versión especial de la de Young ($ab \leq \frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}$, que se deduce de la desigualdad de Young usual $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ al cambiar a por $a\sqrt{\varepsilon}$ y b por $b/\sqrt{\varepsilon}$).

2.3.2. Existencia y regularidad de la solución

El resultado de la sección anterior significa que $\inf_{u \in S} F[u]$ existe, de manera que nuestro trabajo ahora se enfocará en demostrar que hay un elemento $u \in S$ que lo alcanza. Posteriormente probaremos que u es diferenciable y por ende una solución de (2.20). Comenzamos con algunas definiciones.

Definición 2.18. Una sucesión (u_n) en un espacio de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ converge débilmente a u si

$$\langle u_n, v \rangle \longrightarrow \langle u, v \rangle$$

para todo $v \in H$. Denotamos la convergencia débil como $u_n \rightharpoonup u$.

Un resultado sencillo de análisis funcional nos dice que toda sucesión acotada en un espacio de Hilbert tiene una subsucesión débilmente convergente⁸.

Definición 2.19. Un funcional I definido en un espacio de Hilbert H es débilmente semicontinuo inferiormente (secuencialmente) si para toda sucesión (u_n) débilmente convergente a u en H se tiene que

$$I[u] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I[u_n].$$

Además de estas definiciones enunciamos un resultado sin demostrarlo porque no hemos desarrollado la teoría necesaria para hacerlo. La prueba se puede consultar en el capítulo 2, §15 de [2].

Teorema 2.20. Si $\varphi \in H^1(M)$ entonces e^φ es integrable. Más aún, la función $H^1(M) \ni \varphi \mapsto e^\varphi \in L^1(M)$ es absolutamente continua (i.e. manda sucesiones débilmente convergentes a sucesiones convergentes en norma).

Proposición 2.21. El funcional F alcanza un mínimo en $u \in S$.

Demostración. Sea $a := \inf_{u \in S} F[u]$. Escogemos una sucesión minimizante (u_n) en S de manera que $a + 1 \geq F[u_n] \geq a$ y que $F[u_n]$ converja a a . Usando la desigualdad (2.24) obtenida en la demostración anterior pero ahora con $\varepsilon = \frac{1}{4C_3}$ tenemos que

$$-\int_M k u_{n0} \leq \frac{1}{4} \|\nabla u_{n0}\|_2^2 + C_5,$$

donde $u_n = u_{n0} + \bar{u}_n$, $u_{n0} \in H^{1,0}(M)$ y \bar{u}_n es el promedio de u_n en M . Si restamos $\frac{1}{2} \|\nabla u_{n0}\|_2^2$ en ambos términos de la desigualdad y multiplicamos por menos uno obtenemos, usando (2.23), que

$$a + 1 \geq F[u_n] \geq \frac{1}{4} \|\nabla u_{n0}\|_2^2 - C_5 - C_1,$$

⁸De hecho esto ocurre para espacios de Banach reflexivos. Para leer más sobre este tema se puede revisar los capítulos cuatro y cinco del libro de John Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer, 1990.

de donde se deduce que para toda n , $\|\nabla u_{n0}\|_2 \leq C_6$. Gracias a esto tenemos que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{H^1(M)}^2 &= \int_M (u_{n0} + \bar{u}_n)^2 + \int_M |\nabla u_{n0}|^2 \\ &= \int_M u_{n0}^2 + \bar{u}_n^2 |M| + \int_M |\nabla u_{n0}|^2 \\ &\leq \bar{u}_n^2 |M| + \left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right) \|\nabla u_{n0}\|_2^2. \end{aligned}$$

De la demostración de la Proposición 2.17 (en particular de (2.21) y (2.22)) sabemos que las \bar{u}_n están acotadas por una constante que no depende de n , y por lo dicho anteriormente podemos concluir entonces que la sucesión (u_n) está acotada en $H^1(M)$. Esto, por otro lado, significa que hay una subsucesión débilmente convergente (en $H^1(M)$). Por otro lado, el teorema de Rellich-Kondrachov nos permite tomar nuevamente una subsucesión de manera que ésta converja en $L^1(M)$. Si renombramos como (u_n) a esta subsucesión tenemos que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ débilmente en } H^1(M) \text{ y} \\ u_n &\rightarrow u \text{ en } L^1(M). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\left| \int_M k(u_n - u) \right| \leq C \int_M |u_n - u| \rightarrow 0,$$

para alguna constante $C \in \mathbb{R}$, es decir

$$\int_M k u_n \longrightarrow \int_M k u.$$

Además, el funcional que a cada v en $H^1(M)$ la manda a $\int_M |\nabla v|^2$ es débilmente semicontinuo inferiormente pues

$$\int_M |\nabla u|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M \langle \nabla u_n, \nabla u \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_M |\nabla u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Juntando estas dos observaciones tenemos que

$$F[u] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F[u_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} F[u_n] = a.$$

Lo único que falta ver, entonces, es que $u \in S$. Esto se sigue del Teorema 2.20, que tiene como consecuencia que el funcional que va de $H^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $v \mapsto \int_M e^{2v}$ es continuo con respecto a la convergencia débil (i.e. si $v_n \rightharpoonup v$ débilmente entonces $\int_M e^{2v_n} \rightarrow \int_M e^{2v}$). \square

Resumiendo, lo que sabemos hasta ahora es que si u es un punto crítico (lo suficientemente suave) de F , entonces u satisface que $\Delta u - k + K e^{2u} = 0$.

Puesto que acabamos de demostrar que el funcional F tiene un mínimo en $u \in S$, lo único que nos hace falta para encontrar una solución de (2.20) es ver que $u \in C^\infty(M)$. Afortunadamente, demostrar que el mínimo que acabamos de encontrar es suave es bastante sencillo.

Proposición 2.22. *Los puntos críticos de F restringido a S son de clase C^∞ .*

Demostración. De la demostración de la Proposición 2.16 tenemos que un punto crítico u de F satisface que

$$\int_M (\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + k\varphi - \beta K e^{2u} \varphi) = 0$$

para toda $\varphi \in C^\infty(M)$. Despejando tenemos que

$$\int_M u \Delta \varphi = \int_M f \varphi,$$

donde $f = k - \beta K e^{2u}$. La expresión anterior nos dice que u es entonces solución débil de la ecuación $\Delta u = f$. Ahora bien, $f \in L^2(M) = W^{0,2}(M)$, así que el Teorema 2.12 implica que $u \in W^{2,2}(M)$. Un argumento inductivo nos muestra que $u \in C^\infty(M)$. \square

Con esto finalmente hemos probado la existencia de una solución al problema (2.20).

2.4. El caso $\chi(M) > 0$

Finalmente hemos llegado al caso en que $\chi(M) > 0$, que es, por lejos, el más complicado de los tres. Desafortunadamente, las técnicas que tenemos a nuestra disposición son insuficientes para resolver la ecuación de curvatura (1.11), de modo que atacaremos un problema ligeramente más sencillo: ver que toda superficie de Riemann M con característica de Euler positiva admite una métrica con curvatura constante y demostrar que esa métrica es equivalente, en un cierto sentido más amplio que antes, a cualquier otra métrica que demos. A esta nueva forma de tratar la equivalencia le llamaremos equivalencia global, y, como veremos a continuación, generaliza el concepto de equivalencia conforme. Empezaremos por atacar el problema de la equivalencia global y dejaremos la existencia de una métrica con curvatura constante para después.

2.4.1. Métricas globalmente equivalentes

Comenzamos definiendo formalmente el concepto de equivalencia global.

Definición 2.23. Dos métricas, g_0 y g , son *conformemente equivalentes globalmente* (o solamente *globalmente equivalentes*) si existen un difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow M$ y una función $u \in C^\infty(M)$ de manera que

$$\varphi^* g = e^{2u} g_0,$$

donde

$$\varphi^* g_p(u, v) := g_{\varphi(p)}(df_p(u), df_p(v))$$

es la *métrica inducida* (o *pullback*) de g bajo φ .

Observación. La equivalencia conforme de antes es el caso particular en que se requiere que el difeomorfismo sea la identidad.

Lo que haremos a lo largo de esta sección es demostrar que toda función suave K que satisfaga las condiciones de signo (2.1) es la curvatura de alguna métrica globalmente equivalente a una de curvatura constante. Más adelante, en la siguiente sección, veremos que si $\chi(M) > 0$ entonces existe una tal métrica (i.e. de curvatura constante). En definitiva, lo que pretendemos demostrar es el siguiente teorema:

Teorema 2.24. *Sea M una superficie con una métrica g de curvatura constante k . Cualquier función $K \in C^\infty(M)$ que satisfaga las condiciones de signo (2.1) es curvatura de una métrica globalmente equivalente a g .*

Para demostrar la equivalencia global requeriremos tres lemas auxiliares: uno de aproximación para funciones en $L^p(M)$, el teorema de la función inversa y un lema de perturbación que nos servirá para hacer invertibles algunos operadores. La necesidad de estos lemas se hace más clara cuando analizamos la ecuación a resolver.

De la definición de equivalencia global es claro que ya no basta con resolver la ecuación de curvatura (1.10) para encontrar métricas globalmente equivalente. Siendo más específicos, si g_0 es una métrica en M con curvatura k , entonces la métrica $g := (\varphi^{-1})^* e^{2u} g_0$ tiene curvatura K si y sólo si $\varphi^* g$ tiene curvatura $K \circ \varphi$, es decir, si y sólo si

$$-e^{-2u}(\Delta u - k) = K \circ \varphi. \quad (2.25)$$

En definitiva, g es una métrica globalmente equivalente a g_0 con curvatura K si y sólo si existe un difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow M$ tal que la ecuación (2.25) tenga solución. Esta es la ecuación de curvatura que vamos a resolver. Aunque a primera vista parece que añadir el difeomorfismo φ a la mezcla complica las cosas, en realidad nos da más flexibilidad para maniobrar. De hecho, viendo la ecuación (2.25) como $T(u) = K \circ \varphi$ tendríamos que si logramos invertir el operador T la ecuación queda resuelta. En los casos prácticos, no obstante, T rara vez es invertible, de manera que necesitaremos los teoremas antes mencionados para sortear este obstáculo.

Empezamos por plantear y demostrar el lema de aproximación. Para ello necesitaremos las siguientes definiciones:

Definición 2.25. *Sea M una superficie. Una triangulación de M es una familia $\{\mathcal{T}_i\}$ de subconjuntos de M cada uno de los cuales es homeomorfo a un triángulo en el plano y tal que $M \subseteq \bigcup \mathcal{T}_i$. Decimos que la triangulación es *admisibile* si para cada par de triángulos, $\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j$ con intersección no vacía sucede que $\mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j$ es todo el triángulo, toda una arista o nada más un vértice.*

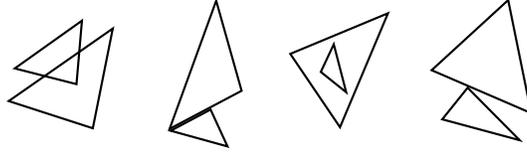


Figura 2.1: Ejemplo de triangulaciones no admisibles.

De esta manera, una triangulación es una forma de ir tapizando nuestra superficie con gajos homeomorfos a triángulos, cada uno de los cuales tiene elementos de dimensión cero (vértices), uno (aristas) y dos (caras). Con esto en mente tenemos la siguiente definición.

Definición 2.26. Dadas una superficie y una triangulación definimos el k -esqueleto como la unión de los elementos de dimensión menor o igual a k . Denotamos el k -esqueleto como $\text{skel}_k(M)$.

Por ejemplo, para un cubo tenemos que

$$\text{skel}_0(\text{Cubo}) = \text{los 8 vértices del cubo}$$

$$\text{skel}_1(\text{Cubo}) = \text{los 8 vértices y las 12 aristas}$$

$$\text{skel}_2(\text{Cubo}) = \text{los 8 vértices, las 12 aristas y las 6 caras}$$

Con estas definiciones a la mano podemos pasar a hablar sobre el teorema de aproximación. Dadas dos funciones continuas, f y g , nos interesará saber cuándo f puede aproximar a g mediante un difeomorfismo. Siendo más específicos, necesitamos conocer las condiciones bajo las cuales existe un difeomorfismo φ de manera que $f \circ \varphi$ aproxime a g en $L^p(M)$ (para $1 \leq p < \infty$), o, dicho de otra forma, cuando una función g se encuentra en la L^p -cerradura de la órbita \mathcal{O}_f de f bajo el grupo de difeomorfismos de M (recordemos que la órbita se define como $\mathcal{O}_f := \{f \circ \varphi : \varphi \text{ es un difeomorfismo}\}$). Tenemos el siguiente lema.

Lema 2.27 (de aproximación). *Sea f una función continua en M . Entonces una función continua g está en la L^p -cerradura ($1 \leq p < \infty$) de la órbita \mathcal{O}_f si y sólo si $\inf f \leq g(x) \leq \sup f$ para toda $x \in M$.*

Demostración. Para la necesidad sólo basta con notar que si g está en la L^p -cerradura de \mathcal{O}_f entonces hay una sucesión (f_n) en \mathcal{O}_f tal que $f_n(x) \rightarrow g(x)$ para casi toda x . La afirmación se sigue de notar que $\inf f_n = \inf f$ y $\sup f_n = \sup f$ y de la continuidad de g .

Para la suficiencia sea $\varepsilon > 0$. Encontraremos un difeomorfismo φ de manera que $\|f \circ \varphi - g\|_p < \varepsilon$. Para ello tomamos una triangulación admisible (y obviamente finita) $\{\mathcal{T}_i\}$ de M lo suficientemente fina como para que g sea casi constante en cada \mathcal{T}_i . En particular, pedimos que la triangulación satisfaga que

$$\max_{x,y \in \mathcal{T}_i} |g(x) - g(y)| < \delta,$$

donde $2\delta := \varepsilon/(4|M|)^{1/p}$. Sea, además, $b_i \in \text{Int}(\mathcal{T}_i)$ para cada i . Entonces, por la continuidad de f y como consecuencia de que el rango de g esté contenido en el de f tenemos que para cada b_i , existe un abierto V_i en M de manera que

$$|f(y) - g(b_i)| < \delta$$

para $y \in V_i$ (una observación prudente es que b_i no tiene por que estar en V_i ; en general esto no se da). A continuación escogemos una vecindad (abierto) Ω del 1-esqueleto de M , formado por los vértices y las aristas de la triangulación, de manera que ningún b_i esté en Ω y que sea lo suficientemente pequeña para que ocurra que

$$(\max_{x \in M} |f| + \max_{x \in M} |g|)^p |\Omega| < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Para cada i tomamos ahora una vecindad U_i tal que $b_i \in U_i$ y que $\Omega \cap U_i = \emptyset$. Entonces, existen abiertos O_1 y O_2 que satisfacen

$$M \setminus \Omega \subseteq O_1 \subseteq \bar{O}_1 \subseteq O_2 \subseteq \bar{O}_2 \subseteq M \setminus \text{skel}_1(M),$$

donde la barra denota cerradura.

Finalmente, existen difeomorfismos φ_1 tal que $\varphi_1(U_i) \subseteq V_i$ y φ_2 tal que $\varphi_2|_{M \setminus O_2} = \text{Id}$ y que $\varphi_2(O_1 \cap \mathcal{T}_i) \subseteq U_i$. Si definimos $\varphi := \varphi_1 \circ \varphi_2$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|f \circ \varphi - g\|_p^p &= \int_{\Omega} |f \circ \varphi - g|^p + \int_{M \setminus \Omega} |f \circ \varphi - g|^p \\ &< \frac{\varepsilon^p}{2} + \int_{M \setminus \Omega} |f \circ \varphi(y) - g(b_i) + g(b_i) - g(y)|^p dy \\ &< \frac{\varepsilon^p}{2} + \sum_i \int_{O_1 \cap \mathcal{T}_i} (2\delta)^p \\ &< \frac{\varepsilon^p}{2} + \sum_i 2^{p+1} \delta^p \text{Vol}(\mathcal{T}_i) = \frac{\varepsilon^p}{2} + 2^{p+1} \delta^p |M| = \varepsilon^p. \end{aligned}$$

□

Nuestro siguiente resultado será el lema de perturbación. Para enunciarlo hay que pensar en la ecuación de curvatura (2.25) como $T(u) = K \circ \varphi$, donde $T : W^{2,p}(M) \rightarrow L^p(M)$ es un operador que manda $v \mapsto -e^{-2v}(\Delta v - k)$. Para poder aplicar el teorema de la función inversa, necesitamos que $T'(u)$ sea invertible, no obstante, como habíamos señalado antes esto no siempre ocurre. Es aquí cuando el lema de perturbación se vuelve sumamente útil, pues garantizará la existencia de una w suficientemente cercana a u de manera que $T'(w)$ sí sea invertible.

Lema 2.28 (de perturbación). *Existe $D \subseteq C^2(M)$ denso tal que el operador $T'(u) : W^{2,p}(M) \rightarrow L^p(M)$ es invertible para todo $u \in D$.*

Demostración. Para demostrar la afirmación bastará con probar que si $T'(u)$ no es invertible, entonces existe una $z \in C^\infty(M)$ tal que

$$\dim \ker T'(u + tz) < \dim \ker T'(u)$$

para toda $t \in (0, \infty)$ lo suficientemente pequeña (Adelante explicamos por qué estos núcleos tienen dimensión finita). Lo anterior nos dice que si $T'(u)$ no es invertible hay un operador muy parecido, a saber $T'(u + tz)$, cuyo núcleo es más pequeño (en cuanto concierne a la dimensión) que el de $T'(u)$. Que el núcleo se haga más pequeño, por otra parte, significa que el operador se acerca cada vez más a ser inyectivo. Aplicando este resultado varias veces llegamos a un operador con núcleo cero y que se encuentra arbitrariamente cerca de $T'(u)$. Proseguimos a completar los detalles más técnicos.

Tomando el límite pertinente tenemos que

$$T'(u)v = -e^{-2u}(\Delta v - 2(\Delta u - k)v) = -e^{-2u}A(u)v,$$

donde $A(u)$ es el operador lineal que manda $v \mapsto \Delta v - 2(\Delta u - k)v$. Queda claro que $\ker T'(u) = \ker A(u)$ y que $A(u)$ es autoadjunto para cualquier u (usando el producto interno usual en $L^2(M)$). Más aún, $T'(u)$ es invertible si y sólo si $\ker T'(u) = \ker A(u) = \{0\}$ ⁹, es decir, si y sólo si cero no es un eigenvalor de $A(u)$. Si $A(u)$ no es invertible, el núcleo tiene dimensión $\dim \ker A(u) = N$, es decir, $\lambda = 0$ es un eigenvalor de multiplicidad N . Además, $A(u + tz)$ es autoadjunto como habíamos señalado, lo que significa que para cada valor t lo suficientemente pequeño hay eigenfunciones ortonormales $\varphi_i(t)$ y escalares $\lambda_i(t)$, $i = 1, \dots, N$ de manera que

$$A(u + tz)\varphi_i(t) = \lambda_i(t)\varphi_i(t) \tag{2.26}$$

y tales que $\lambda_i(0) = 0$. Esto significa que las funciones $\varphi_1(0), \dots, \varphi_N(0)$ son una base de $\ker A(u)$. Por otro lado, podemos escoger las φ_i 's y λ_i 's de manera que $\varphi_i(t)$ y $\lambda_i(t)$ sean funciones diferenciables con respecto a t ¹⁰. Demostraremos que existe una $z \in C^\infty(M)$ adecuada de manera que $\lambda_1(t) \neq 0$ si $t \neq 0$ es lo suficientemente pequeño. Esto probará automáticamente que $\dim \ker A(u + tz) \leq N - 1$ y habremos terminado.

En virtud de que $\lambda_1(t)$ es una función real de variable real, el argumento para probar que $\lambda_1(t) \neq 0$ será el siguiente: verificar que $\lambda_1'(0) \neq 0$ o bien, si $\lambda_1'(0) = 0$ ver entonces que $\lambda_1''(0) \neq 0$. Usaremos la notación $\lambda = \lambda_1(0)$, $\lambda' = \lambda_1'(0)$, $\lambda'' = \lambda_1''(0)$, $\varphi = \varphi_1(0)$ y así sucesivamente. También definiremos A' y A'' de la siguiente manera. Si llamamos $a(t) := A(u + tz)$, entonces $a(t)v$ es

⁹Esto se debe esencialmente a que $A(u)$ es un operador elíptico para toda $u \in W^{2,p}(M)$. En su artículo *Integro-differential operators on vector bundles*, Trans. amer. Math. Soc., vol. 117, 1965, pp. 167-204, R.T. Seeley demostró que para el caso de variedades compactas un operador es elíptico si y sólo si es de Fredholm (i.e. su núcleo tiene dimensión finita).

¹⁰Esto último se puede gracias a que $A(u + tz)$ depende de manera diferenciable de t , lo que significa que el espectro y en particular las eigenfunciones también. Para leer más sobre esto se puede consultar el capítulo 7, §5 de [23] y el capítulo 7, §4.8 de [18].

una función en $L^2(M)$ para cualquier $v \in C^\infty(M)$ y definimos

$$\begin{aligned} Av &:= a(0)v \\ A'v &:= a'(0)v \\ A''v &:= a''(0)v \end{aligned}$$

Con esta notación, derivando (2.26) con respecto a t y usando que $\lambda = 0$ tenemos

$$A'\varphi + A\varphi' = \lambda'\varphi \quad (2.27)$$

$$A''\varphi + 2A'\varphi' + A\varphi'' = \lambda''\varphi + 2\lambda'\varphi'. \quad (2.28)$$

Es importante notar que no estamos derivando un producto sino una composición de funciones, que a la vez varían con respecto de t . No obstante, el resultado final de tomar los límites pertinentes -por ejemplo $\frac{1}{t}(A(u+tz)\varphi(t) - A(u)\varphi(0))$ cuando $t \rightarrow 0$ en la primera ecuación- es lo que esperaríamos ver si estuviéramos derivando un producto.

Derivando $\|\varphi\|_2 = 1$ obtenemos que $\langle \varphi, \varphi' \rangle_2 = 0$. Además, como $\varphi \in \ker A(u)$ tenemos que $A\varphi = 0$, lo que implica que $\langle \varphi, A\varphi' \rangle_2 = \langle A\varphi, \varphi' \rangle_2 = 0$; análogamente probamos que $\langle \varphi, A\varphi'' \rangle_2 = 0$. Si tomamos el producto interno de (2.27) y (2.28) con φ y usamos estas igualdades, tenemos entonces las siguientes fórmulas:

$$\lambda' = \langle \varphi, A'\varphi \rangle_2 \quad (2.29)$$

$$\lambda'' = 2\langle \varphi, A'\varphi' \rangle_2 + \langle A''\varphi, \varphi \rangle_2 = 2\langle \varphi, A'\varphi' \rangle_2, \quad (2.30)$$

pues tomando los límites que usamos para definir A' y A'' tenemos que

$$A'v = -2(\Delta z)v \quad \text{y} \quad A''v = 0.$$

Esto implica que

$$\lambda' = -2\langle \varphi, (\Delta z)\varphi \rangle_2 = -2\langle \varphi^2, \Delta z \rangle_2 = -2\langle \Delta\varphi^2, z \rangle_2.$$

Si φ no es una función constante, entonces $\Delta\varphi^2$ no es cero. Tomando $z = \Delta\varphi^2$ tenemos que $\lambda' = -2\|\Delta\varphi^2\|_2^2 < 0$. Si $\varphi \equiv C$ sí es constante entonces $\lambda' = 0$. Tomamos ahora una $z \perp 1$ no trivial. Como $\varphi = C \in \ker A(u)$ tenemos que

$$\Delta C - 2(\Delta u - k)C = 0,$$

lo que implica que $\Delta u - k = 0$ (recordemos que $C \neq 0$ por ser una eigenfunción). Esto a la vez implica que $Av = A(u)v = \Delta v$. De (2.27) obtenemos que

$$\Delta\varphi' = A\varphi' = -A'\varphi = 2(\Delta z)\varphi = 2C(\Delta z).$$

Esto significa que $\varphi' = 2Cz + \text{constante}$, y debido a que $\langle \varphi, \varphi' \rangle_2 = 0$ tenemos que la constante debe ser cero. Entonces $\varphi' = 2Cz$, y sustituyendo en (2.30) tenemos que

$$\lambda'' = 2\langle C, A'(2Cz) \rangle_2 = 4C^2\langle 1, A'z \rangle_2 = 4C^2\langle 1, -2(\Delta z)z \rangle_2 = 8C^2\|\nabla z\|_2^2.$$

Esto concluye la demostración. \square

Con estos dos resultados y el teorema de la función inversa podemos proseguir a demostrar el resultado principal de esta sección.

Demostración del Teorema 2.24: Encontraremos una $u \in C^\infty(M)$ y un difeomorfismo φ de manera que (2.25) se satisfaga, es decir, que $T(u) = K \circ \varphi$ con la notación anterior. El caso en que K es constante es trivial y podemos obviar-lo (sólo basta con que u sea una constante adecuada y φ la identidad). Esto nos permite suponer que K no es constante. Trabajaremos ahora con el caso particular en que

$$\text{mín } K < k < \text{máx } K,$$

donde k , recordemos, es una constante. Ahora bien, debido a que $T(0) = k$, al lema de perturbación y a que el operador T (o más correctamente $T|_{C^\infty(M)}$) es continuo con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$ ¹¹, podemos garantizar la existencia de una $u_1 \in C^\infty(M)$ lo suficientemente cercana a $u_0 = 0$ de manera que para $\varepsilon > 0$ tengamos que

$$\|T(u_1) - k\|_\infty = \|T(u_1) - T(0)\|_\infty < \varepsilon$$

y que el operador $T'(u_1)$ sea invertible. Si escogemos una ε lo suficientemente pequeña podemos garantizar que

$$\text{mín } K < T(u_1) < \text{máx } K. \tag{2.31}$$

Ahora bien, el teorema de la función inversa nos dice que existe una $\eta > 0$ tal que si $f \in C^\infty(M)$ y $\|f - T(u_1)\|_p < \eta$, entonces hay $u \in W^{2,p}(M)$ tal que $T(u) = f$. Por otra parte, (2.31) nos permite aplicar el lema de aproximación, que en este caso nos dice que existe un difeomorfismo φ de manera que $K \circ \varphi$ aproxima a $T(u_1)$ en $L^p(M)$. En particular tenemos que $\|K \circ \varphi - T(u_1)\|_p < \eta$. Esto quiere decir que $K \circ \varphi$ es una función en $C^\infty(M)$ que está lo suficientemente cerca de $T(u_1)$ como para aplicarle el teorema de la función inversa, lo que nos permite asegurar que existe una $u \in W^{2,p}(M)$ tal que $T(u) = K \circ \varphi$. Más aún, valiéndonos de un argumento inductivo análogo al del caso $\chi(M) < 0$ podemos asegurar que $u \in C^\infty(M)$.

Para deshacernos de la suposición de que $\text{mín } K < k < \text{máx } K$ basta con notar que k y K tienen el mismo signo en algún punto. Esto permite asegurar que hay una constante c tal que $\text{mín } cK < k < \text{máx } cK$. Por lo visto anteriormente podemos resolver la ecuación $T(u) = cK \circ \varphi$. Entonces la función $v := u + \log(c/2)$ satisface $T(v) = K \circ \varphi$. \square

Una vez demostrada esta proposición, lo único que falta por hacer es probar la existencia de una métrica de curvatura constante. Discutimos este resultado en la siguiente sección.

¹¹Definida como $\|\varphi\|_\infty := \text{ess sup } |\varphi|$.

2.4.2. El flujo de Ricci

Ya hemos probado la afirmación de que toda superficie de Riemann admite una métrica de curvatura constante para los casos en que $\chi(M) \leq 0$, por lo que el único caso restante es cuando $\chi(M) = 2$. Para hacerlo, presentamos una técnica conocida como *flujo de Ricci*. Esta técnica, introducida en 1981 por Richard Hamilton¹², ha resultado ser sumamente fructífera, al punto de ser utilizada por Perelman para resolver la conjetura de Poincaré. Lamentablemente los detalles y formalidades acerca del flujo de Ricci están fuera del alcance de esta tesis, de manera que nos enfocaremos en explicar las ideas fundamentales.

El flujo de Ricci es un proceso mediante el cual se deforma una métrica en una superficie (o en una variedad en general). Empezamos con una superficie M y una métrica $g(0)$. La idea detrás de esta técnica es ir dejando que la métrica $g(0)$ ‘evolucione con el tiempo’, es decir, a cada valor de un parámetro t le asociamos una nueva métrica $g(t)$. Si imponemos las restricciones adecuadas obtendremos una métrica de curvatura constante. Siendo un poco más específicos, el flujo de Ricci (normalizado) en una superficie está dado por

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = (r - R)g_{ij}.$$

Nos detenemos un tiempo para explicar esta expresión. Una métrica queda determinada por los coeficientes g_{ij} , que no son otra cosa que funciones en $C^\infty(M)$. Ahora bien, con la idea de flujo de Ricci en mente, lo que tenemos es que esos g_{ij} 's dependen del valor del parámetro t , es decir, para cada t tenemos un coeficiente $g_{ij}(t)$ distinto. El flujo de Ricci nos dice entonces cómo varían esos coeficientes con respecto a t . En la ecuación anterior R es la curvatura escalar y r es el valor promedio de R en M . La curvatura escalar es un concepto que cobra bastante importancia en dimensión mayor, sin embargo, en el caso de las superficies resulta que la curvatura escalar $R = 2K$, donde K es la curvatura gaussiana que ya conocemos.

Naturalmente, al ir cambiando la métrica, cambia también la curvatura. Haciendo un cálculo relativamente sencillo se llega a que la curvatura escalar satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta R + R^2 - rR.$$

De esta ecuación sabemos que si $R \geq 0$ en el tiempo cero, entonces $R \geq 0$ para cualquier t . Más aún, Hamilton demostró que si $R > 0$ en el tiempo cero, entonces $g(0)$ converge, bajo el flujo de Ricci, a una métrica de curvatura constante. No obstante, como hemos visto ya, hay funciones que no son estrictamente positivas pero que si son curvaturas. La pregunta de si cualquier métrica, aun las que dan lugar a curvaturas con signo cambiante, converge a una de curvatura constante permaneció abierta hasta 1991. En ese año Bennet Chow demostró que cualquier métrica bajo el flujo de Ricci converge, en un tiempo finito, a

¹²En su artículo *Three-manifolds with Positive Ricci curvature*, J. Diff. Geom. 17, (1982), 255-306.

una métrica con curvatura positiva en todo punto. Utilizando ambos resultados tenemos la existencia de una métrica con curvatura positiva constante¹³.

¹³Siendo un poco más precisos, Hamilton utiliza en algún momento un resultado que depende del teorema de uniformización, de modo que la prueba aún no estaba completa. En 2006 Xiuxiong, Peng y Gang lograron demostrar ese resultado sin usar uniformización, y finalmente la prueba quedó completa.

Capítulo 3

Una consecuencia interesante

Como mencionamos en el primer capítulo, existe un teorema de clasificación de superficies. Este teorema afirma que toda superficie orientable y compacta es homeomorfa a la suma conexa de un número finito, p , de toros (donde la suma conexa de cero toros es, por definición, una esfera). En este capítulo nos dedicaremos a demostrar una extensión de este resultado para las superficies orientables. Naturalmente, para lograrlo haremos uso del teorema de uniformización¹. Empezamos con un breve recuento de algunos conceptos topológicos que necesitaremos más adelante.

3.1. Homotopías y grupo fundamental

De aquí en adelante, a menos que se indique de otro modo, X y Y serán espacios topológicos arbitrarios mientras que I representará el intervalo unitario $[0, 1]$.

Definición 3.1. Una *trayectoria* en X es una función continua $g : I \rightarrow X$. Al punto $g(0)$ le llamaremos inicial y a $g(1)$ final. Si $g(0) = g(1)$ decimos que la curva es cerrada.

Definición 3.2. Dos funciones continuas $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ son *homotópicas* si existe $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ continua tal que

$$\begin{aligned} F|_{X \times \{0\}} &= f_1, \\ F|_{X \times \{1\}} &= f_2. \end{aligned}$$

Usamos la notación $g_1 \approx g_2$ para decir que dos *funciones* son *homotópicas*. La función F recibe el nombre de *homotopía*.

¹Curiosamente, la generalización que obtendremos resulta ser equivalente al teorema de uniformización, por lo que muchos autores llaman teorema de uniformización a este resultado.

La relación de homotopía resulta especialmente importante cuando las funciones g_1 y g_2 son trayectorias. En este caso conviene modificar, o más correctamente, añadir una condición más a la definición, de modo que podamos generar una relación de equivalencia a partir de la relación ‘ \approx ’.

Definición 3.3 (Homotopía entre trayectorias). Dos trayectorias $g_1, g_2 : I \rightarrow X$ son homotópicas si

$$\begin{aligned} g_1(0) = g_2(0) = x_0 \in X \quad \text{y} \\ g_1(1) = g_2(1) = x_1 \in X \end{aligned}$$

y existe una homotopía $G : I \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que

$$G|_{\{0\} \times [0,1]} = x_0, \quad G|_{\{1\} \times [0,1]} = x_1.$$

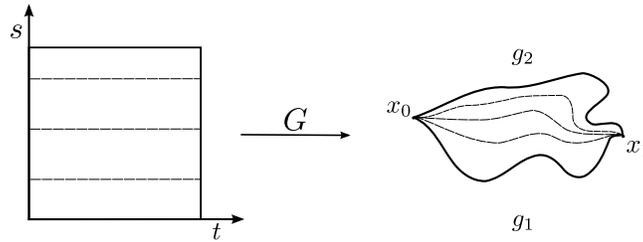


Figura 3.1: Homotopía entre curvas.

Para no recargar la notación seguiremos escribiendo $g_1 \approx g_2$, teniendo cuidado de no confundir la homotopía entre trayectorias con la homotopía entre funciones (en este capítulo hablaremos exclusivamente de la homotopía entre trayectorias). También es importante sacar a la luz algo que está implícito en la definición: el hecho de que dos trayectorias sean homotópicas implica que tanto ellas, como las trayectorias intermedias (es decir las trayectorias de la forma $G|_{I \times \{s_0\}}$ con $s_0 \in [0, 1]$) tienen puntos inicial y final comunes, a saber x_0 y x_1 . Visto geométicamente, una homotopía entre dos trayectorias no es más que una colección de trayectorias intermedias que exhiben cómo se deforma una en la otra.

Como habíamos mencionado antes, la modificación que introdujimos permite definir una relación de equivalencia entre trayectorias con puntos inicial y final en común. Concretamente, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.4. Sean $x_0, x_1 \in X$. La relación ‘ \approx ’ es de equivalencia en el conjunto de las trayectorias con puntos inicial x_0 y final x_1 .

Demostración. Hay que verificar que la relación ‘ \approx ’ es reflexiva, simétrica y transitiva.

Dada una trayectoria g , es trivial que $g \approx g$.

Para la simetría sea G una homotopía entre dos trayectorias g_1 y g_2 . Entonces $G'(t, s) := G(t, 1 - s)$ es una homotopía entre g_2 y g_1 .

Por último, sean $g_1 \approx g_2$, $g_2 \approx g_3$ y G, G' las respectivas homotopías. La función

$$\Gamma(t, s) = \begin{cases} G(t, 2s) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G'(t, 2s - 1) & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

es continua gracias al lema de pegado² y por ende una homotopía entre g_1 y g_3 . \square

De acuerdo con el teorema anterior, denotaremos con $[g]$ a la clase de equivalencia de una trayectoria g . Estas clases de equivalencia reciben el nombre de *clases de homotopía*.

Lo que haremos a continuación es definir una operación entre trayectorias en un espacio topológico y luego extenderla a las clases de homotopía, de manera que esta operación nos permita construir un grupo cuyos elementos serán precisamente estas clases. Para esto comenzamos con la siguiente definición.

Definición 3.5. Si $g_1, g_2 : I \rightarrow X$ son trayectorias tales que $g_1(1) = g_2(0)$ (es decir, g_2 empieza donde g_1 termina), definimos el *producto (de trayectorias)* $g_1 \cdot g_2$ como la trayectoria dada por

$$g(t) := \begin{cases} g_1(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g_2(2t - 1) & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Es claro que la función g está bien definida y es continua por el lema de pegado, así que el producto $g_1 \cdot g_2$, o puesto más brevemente como $g_1 g_2$, resulta ser una trayectoria de x_0 a x_2 . Nuestra operación ‘ \cdot ’ se extiende³ de manera a natural a un *producto (de clases de homotopía)* de la siguiente forma:

$$[g_1] \cdot [g_2] := [g_1 g_2].$$

Para ver que la operación está bien definida tomemos dos pares de trayectorias homotópicas, $f \approx f'$ y $g \approx g'$, de manera que fg y $f'g'$ tengan sentido (es decir, que los puntos iniciales y finales sean los adecuados). Si F es una homotopía entre f y f' , y G una homotopía entre g y g' , la función Φ dada por

$$\Phi(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2t - 1, s) & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

es continua por el lema de pegado y satisface las condiciones de ser una homotopía entre fg y $f'g'$. Ahora estamos listos para definir el principal objeto de estudio de este capítulo. Para $x_0 \in X$ tenemos la siguiente definición.

²El lema de pegado es un resultado elemental de topología que dice lo siguiente: Sean X y Y espacios topológicos tales que ambos son cerrados o ambos abiertos y B un espacio arbitrario. Si $A = X \cup Y$ y $f : A \rightarrow B$ es continua cuando se restringe a X y a Y , entonces f es continua en todo A .

³Seguimos llamándola ‘ \cdot ’ para no introducir más notación.

Definición 3.6. Un *lazo basado en x_0* es una trayectoria g tal que $g(0) = g(1) = x_0$. El conjunto clases de homotopía de lazos basados en x_0 junto con la operación ‘ \cdot ’ se llama *grupo fundamental de X relativo a x_0* y se denota como $\pi_1(X, x_0)$.

Antes de avanzar más, debemos justificar nuestra definición anterior mostrando que, en efecto, $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ es un grupo. Tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.7. $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo con respecto al producto de clases de homotopía.

Demostración. En vista de que los lazos son trayectorias cerradas, el producto de dos lazos basados en x_0 es otro lazo basado en x_0 . De este hecho se sigue naturalmente que el producto de dos clases en $\pi_1(X, x_0)$ es nuevamente una clase, es decir, el producto de clases de homotopía es cerrado en $\pi_1(X, x_0)$.

A pesar de que en general $f(gh) \neq (fg)h$, es cierto que $f(gh) \approx (fg)h$ (una trayectoria es una reparametrización de la otra, y las reparametrizaciones son trivialmente homotópicas). De esta observación concluimos que $[f]([g][h]) = [f(gh)] = [(fg)h] = ([f][g])[h]$ (de ahora en adelante omitimos los puntos que denotan el producto), es decir, el producto es asociativo.

Por otro lado, la trayectoria constante $g_0 \equiv x_0$ claramente actúa como el elemento identidad y finalmente, el inverso de una clase $[g]$ es la clase $[g^{-1}]$, donde g^{-1} está definida como

$$g^{-1}(t) := g(1 - t), \quad t \in [0, 1].$$

Una homotopía entre g_0 y gg^{-1} está dada por

$$G(t, s) = \begin{cases} g(2st) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g^{-1}(1 + 2s(t - 1)) = g(2s(1 - t)) & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

□

Teorema 3.8. Sea X conexo por trayectorias. Entonces para $x_0, x_1 \in X$ los grupos $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$ son isomorfos.

Demostración. Como X es conexo por trayectorias, hay una trayectoria γ tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$. Definimos una función de $\pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ de modo que $[g] \mapsto [\gamma^{-1}g\gamma]$. Esta función es claramente un isomorfismo. □

Observación. Como habíamos dicho, el producto entre trayectorias no es asociativo, de manera que la expresión $\gamma^{-1}g\gamma$ no tiene sentido (hay que especificar de que lado multiplicamos primero). No obstante, $[(\gamma^{-1}g)\gamma] = [\gamma^{-1}(g\gamma)]$, así que escribir $[\gamma^{-1}g\gamma]$ es legítimo.

Este teorema nos permite hablar, en el caso de espacios conexos por trayectorias, del *grupo fundamental de X* , que denotamos como $\pi_1(X)$. Un caso de gran importancia se da cuando $\pi_1(X) = \{1\}$. Si esto ocurre decimos que X es *simplemente conexo*. Finalizamos esta sección con el siguiente lema:

Lema 3.9. Sea $f : X \rightarrow Y$ continua y $f(x_0) = y_0$. Entonces f induce un homomorfismo $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ de grupos fundamentales dado por

$$f_*([g]) := [f \circ g].$$

Demostración. Notemos primero que la función f_* está bien definida (no depende del representante) porque si $g_1 \approx g_2$ entonces $f \circ g_1 \approx f \circ g_2$ por la continuidad de f (una homotopía entre las trayectorias $f \circ g_1$ y $f \circ g_2$ está dada por $f \circ G$, donde G es una homotopía entre g_1 y g_2). Además, es claro que para dos trayectorias $g_1, g_2 \in [g]$ tenemos que $f \circ (g_1 g_2) = (f \circ g_1)(f \circ g_2)$, lo que implica que f_* es un homomorfismo como afirmábamos. \square

3.2. Espacios cubrientes

A continuación vamos a introducir el concepto de *espacio cubriente* de un espacio topológico. Más adelante utilizaremos esta herramienta para trabajar con variedades y sus grupos fundamentales. Comenzamos con la siguiente definición:

Definición 3.10. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ se llama *homeomorfismo local* si para todo $x \in X$ existe una vecindad U tal que $x \in U$ y $f|_U$ es un homeomorfismo.

Definición 3.11. Sean Y y X espacios topológicos y $p : Y \rightarrow X$ una función continua. Un abierto $U \subseteq X$ está *cubierto parejamente* por p si la preimagen $p^{-1}(U)$ es la unión ajena de conjuntos V_α cada uno de los cuales cumple que $p|_{V_\alpha}$ es un homeomorfismo.

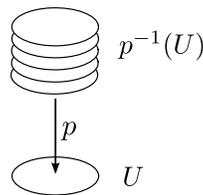


Figura 3.2: Una vecindad cubierta parejamente.

Definición 3.12. Una función continua $p : Y \rightarrow X$ entre espacios topológicos es una *aplicación cubriente* si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad conexa U cubierta parejamente por p . El espacio Y recibe el nombre de *espacio cubriente*.

Observación. Una consecuencia inmediata de las definiciones anteriores es que toda aplicación cubriente es un homeomorfismo local.

Como hemos dicho, los espacios cubrientes son muy útiles debido a que nos proporcionan mucha información acerca del grupo fundamental del espacio que

cubren (X en la definición anterior). La manera precisa en que esto ocurre involucra, naturalmente, hablar de trayectorias. En particular nos interesa ver qué sucede con una trayectoria en Y bajo una aplicación cubriente p , e, inversamente, qué sucede con una trayectoria en X cuando se “levanta” a Y .

Definición 3.13. Sean $f : S \rightarrow X$ una función continua entre espacios topológicos y $p : Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente. Un *levantamiento* de f es una función continua $f' : S \rightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow p \\ S & \begin{array}{c} \nearrow f' \\ \xrightarrow{f} \end{array} & X \end{array}$$

o escrito en el lenguaje de funciones, $p \circ f' = f$.

Nuestro interés principal será levantar lazos y homotopías. Los siguientes teoremas nos mostrarán que ambos se pueden levantar y que, de hecho, los levantamientos son únicos. Antes de enunciarlos necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.14 (Número de Lebesgue). *Sea $\{A_\alpha\}$ una cubierta abierta de un espacio métrico (X, d) . Si X es compacto existe un número real $\delta > 0$ tal que para todo $S \subseteq X$ de diámetro menor que δ se tiene que $S \subseteq A_\alpha$ para algún α . Una δ que satisface lo anterior se llama número de Lebesgue de la cubierta $\{A_\alpha\}$.*

Demostración. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $\{A_\alpha\}$ una cubierta abierta (suponemos que X no es un elemento de la cubierta, pues de serlo el resultado es trivial). Como X es compacto podemos extraer una subcubierta finita $\{A_1, \dots, A_n\}$. Para cada i , sea $C_i := X \setminus A_i$. Definimos la función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ como el promedio de las distancias a los conjuntos C_i , es decir, para cada $x \in X$

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(x, C_i).$$

La continuidad de la función distancia implica que f también es continua, por lo que alcanza un mínimo, es decir, existe $\delta := \min_{x \in X} \{f(x)\}$. Además, $f(x) > 0$ para toda $x \in X$, pues forzosamente $x \in A_j$ para algún j y como A_j es abierto, tenemos que hay un $\varepsilon_x > 0$ tal que $B(x, \varepsilon_x) \subseteq A_j$, lo que implica que $d(x, C_j) \geq \varepsilon_x > 0$ y tenemos entonces que $\delta > 0$. Veamos que δ es un número de Lebesgue de la cubierta $\{A_\alpha\}$. Sea $S \subseteq X$ de diámetro menor que δ . Tomamos un $x_0 \in S$ arbitrario. Como el diámetro de S es menor que δ , tenemos que $S \subseteq B(x_0, \delta)$. Ahora bien

$$\delta \leq f(x_0) \leq d(x_0, C_m),$$

donde $d(x_0, C_m)$ es el máximo de los valores $d(x_0, C_i)$. Lo anterior implica que $B(x_0, \delta) \subseteq A_m$ y el resultado se sigue. \square

Teorema 3.15. *Sean $p : Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente, $x_0 \in X$, $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ y $g : [0, 1] \rightarrow X$ una trayectoria tal que $g(0) = x_0$. Entonces g puede ser levantada de manera única a una trayectoria $g' : [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $g'(0) = y_0$.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de X de manera que cada U_α esté cubierto parejamente por p . Una cubierta abierta de $[0, 1]$ está dada por $\{g^{-1}(U_\alpha)\}$ gracias a la continuidad de g . Usando el lema anterior, podemos encontrar una partición $\{t_0, \dots, t_n\}$ que cumpla que cada $[t_i, t_{i+1}] \subseteq g^{-1}(U_\alpha)$ para algún α , o, lo que es lo mismo, que $g([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_\alpha$. Vamos a construir el levantamiento recursivamente.

Primero definimos $g'(0) := y_0$ y supongamos que $g'(t)$ está definida para $0 \leq t \leq t_i$. Para definir g' en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ tomamos una vecindad $U \subseteq X$ cubierta parejamente por p de modo que $g([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U$. Al ser p cubriente, se tiene que $p|_{V_\alpha}$ es un homeomorfismo (donde los conjuntos V_α son las componentes conexas de $p^{-1}(U)$). Dado que $g'(t_i)$ ya está definido, llamamos V_0 a la componente que lo contiene. Ahora definimos g' en $[t_i, t_{i+1}]$ como

$$g'(t) := (p|_{V_0})^{-1} \circ g(t).$$

La definición es válida porque $p|_{V_0}$ es un homeomorfismo así que la inversa existe y es continua. Como g es una trayectoria, tenemos que g' es una función continua de $[t_i, t_{i+1}] \rightarrow V_0$. De esta manera podemos definir g' en todo el intervalo $[0, 1]$. La función resultante será continua por el lema de pegado y $g = p \circ g'$ se sigue inmediatamente de la construcción de g' .

La unicidad de g' se prueba inductivamente. Supongamos que g'' fuera otro levantamiento tal que $g''(0) = y_0$ y $g'(t) = g''(t)$ para $t \in [0, t_i]$. Veremos que la igualdad se mantiene para $t \in [0, t_{i+1}]$. Como g'' es un levantamiento, $g''([t_i, t_{i+1}]) \subseteq p^{-1}(U)$. Además es un subconjunto conexo porque g'' es continua. Lo anterior implica que, por definición de componente conexa, $g''([t_i, t_{i+1}]) \subseteq V_\alpha$ para algún α . Como $g'(t_i) = g''(t_i)$, y por definición V_0 es la componente que contiene a $g'(t_i)$, se sigue que $g''([t_i, t_{i+1}]) \subseteq V_0$. Si $g'(t) \neq g''(t)$ para algún t , hay dos puntos distintos en V_0 tales que $p(g'(t)) = p(g''(t)) = g(t)$ pero eso no se puede porque $p|_{V_0}$ es un homeomorfismo. Luego entonces $g'(t) = g''(t)$ para toda $t \in [t_i, t_{i+1}]$ y la unicidad sobre todo $[0, 1]$ se sigue. \square

El siguiente teorema garantiza que las homotopías también se pueden levantar.

Teorema 3.16. *Sean $p : Y \rightarrow X$ cubriente, $p(y_0) = x_0$ y sea F una función continua $F : I \times I \rightarrow X$ tal que $F(0, 0) = x_0$. Entonces F tiene un único levantamiento $F' : I \times I \rightarrow Y$ tal que $F'(0, 0) = y_0$. Más aún, si F es una homotopía entre trayectorias entonces F' también lo es.*

Demostración. Empezamos por definir $F'(0, 0) := y_0$. Usando el lema anterior podemos levantar las trayectorias $F|_{\{0\} \times I}$ y $F|_{I \times \{0\}}$. Después, dividimos $I \times I$ en un número finito de rectángulos de la forma $I_i \times J_j := [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ de manera que $F([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]) \subseteq U$ donde U es un abierto de X que está cubierto parejamente por p (ésto se puede gracias al lema del número de Lebesgue). Llamemos $\{R_i\}_{i=0}^N$ a esta familia de rectángulos ordenados lexicográficamente⁴.

⁴Decimos que $I_{i_1} \times J_{j_1} < I_{i_2} \times J_{j_2}$ si $i_1 < i_2$, o bien, en caso de que $i_1 = i_2$, si $j_1 < j_2$.

Con esto en mente construimos F' recursivamente. Llamamos A_i al conjunto que consta de los primeros i rectángulos y los lados $\{0\} \times I$ e $I \times \{0\}$ del cuadrado $I \times I$. Supongamos que F' ya está definido en A_i . Para tener definida F' en A_{i+1} lo único que falta es definirla en R_{i+1} . Por hipótesis, F' ya está definida en el conjunto C_i que consta de los lados izquierdos e inferior del rectángulo R_{i+1} (i.e. $C_i := A_i \cap R_{i+1}$). Como C_i es conexo, $F'(C_i)$ debe de estar contenido en una componente conexas, digamos V_0 , de $p^{-1}(U)$. Sabemos que ahí p es un homeomorfismo, así que para $x \in R_{i+1}$ definimos F' como

$$F'(x) := (p|_{V_0})^{-1} \circ F(x).$$

La función resultante definida en A_{i+1} es continua por el lema de pegado. Como hay un número finito de rectángulos este proceso es finito y F' queda definida en $I \times I$. La unicidad se demuestra de manera análoga al Teorema 3.15.

Finalmente, si F es una homotopía entre trayectorias queremos ver que F' también lo es. Como F' es continua, lo único que falta ver es que $F'(\{0\} \times [0, 1]) = \{y_0\}$, y $F'(\{1\} \times [0, 1]) = \{y'_0\}$ (es decir, todas las trayectorias intermedias en la homotopía tienen los mismos puntos inicial y final). Como $\{0\} \times [0, 1]$ es conexo, entonces $F'(\{0\} \times [0, 1])$ también es conexo y por lo tanto está contenido en algún V_α (los conjuntos V_α siguen siendo las componentes conexas de $p^{-1}(U)$). $F'(0, 0) = y_0 \in V_0$ por definición, así que $F'(\{0\} \times [0, 1])$ es un subconjunto conexo de V_0 . Además $p \circ F'(\{0\} \times [0, 1]) = F(\{0\} \times [0, 1]) = \{x_0\}$, así que $F'(\{0\} \times [0, 1]) \subseteq p^{-1}(x_0)$, pero en V_0 sólo hay un punto en $p^{-1}(x_0)$, a saber y_0 . De esta manera $F'(\{0\} \times [0, 1]) = \{y_0\}$. La prueba de que $F'(\{1\} \times [0, 1]) = \{y'_0\}$ es análoga. Así, F' es una homotopía entre trayectorias en Y . \square

Corolario 3.17. Sean $p : Y \rightarrow X$ cubriente y $p(y_0) = x_0$. Sean f y g dos trayectorias homotópicas en X y f', g' sus respectivos levantamientos basados en y_0 . Entonces f' y g' tienen el mismo punto final y son homotópicas.

Lema 3.18. Sean $p : Y \rightarrow X$ cubriente y $p(y_0) = x_0$. Entonces:

- (a) El homomorfismo inducido (ver Lema 3.9) $p_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ es inyectivo.
- (b) Si g es un lazo en X basado en x_0 , entonces $[g] \in H_0 := p_*(\pi_1(Y, y_0))$ si y sólo si g se levanta a un lazo en Y basado en y_0 .

Demostración. (a) Sean h' un lazo en Y basado en y_0 y $p_*([h']) = 1 \in H_0$ el elemento identidad. Sea F' una homotopía entre $p \circ h'$ y el lazo constante x_0 . Si F' es el levantamiento de F tal que $F'(0, 0) = y_0$ entonces F' es una homotopía entre h' y el lazo constante y_0 .

(b) Sean f, g lazos en X basados en x_0 y f', g' sus respectivos levantamientos basados en y_0 . Probaremos que $f'(1) = g'(1)$ si y sólo si $[f] \in H_0[g]$. El resultado se sigue de tomar $g = x_0$ (el lazo trivial).

\Leftarrow] Supongamos que $[f] \in H_0[g]$. Entonces:

$$\begin{aligned} [f] \in H_0[g] &\implies [f] = [h][g] \text{ para algún } h \in H_0 \\ &\implies f \approx (p \circ h')g \quad (\text{con } h' \text{ un lazo en } Y) \\ &\implies f' \approx ((p \circ h')g)' \\ &\implies f'(1) = g'(1) \end{aligned}$$

\Rightarrow] Supongamos ahora que $f'(1) = g'(1)$. Entonces el producto $f'g'^{-1}$ está definido y es un lazo, digamos h' en Y . Claramente $[h'g'] = [f']$, es decir $h'g' \approx f'$. Si una homotopía entre $h'g'$ y f' está dada por F' , entonces $F := p \circ F'$ es una homotopía entre hg y f (donde $h := p \circ h'$). De esta manera $[f] \in H_0[g]$ \square

Una consecuencia inmediata del lema anterior es que

$$\pi_1(Y, y_0) \leq \pi_1(X, x_0),$$

donde ' \leq ' es la notación para subgrupos (más correctamente, H_0 es un subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$ isomorfo a $\pi_1(Y, y_0)$).

De ahora en adelante pediremos que los espacios X y Y sean conexos por trayectorias y localmente conexos por trayectorias. Los resultados que obtengamos seguirán siendo lo suficientemente generales, pues los objetos de estudio de este trabajo, las variedades, satisfacen estas condiciones.

Definición 3.19. Sean $p : Y \rightarrow X$ y $p' : Y' \rightarrow X$ dos aplicaciones cubrientes. Decimos que son *equivalentes* si existe un homeomorfismo h tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{h} & Y' \\ p \searrow & & \swarrow p' \\ & B & \end{array}$$

es decir, $p = p' \circ h$. Decimos que h es una *equivalencia entre aplicaciones cubrientes*.

Teorema 3.20 (Levantamiento general). *Sean $p : Y \rightarrow X$ cubriente y $p(y_0) = x_0$; sea $f : S \rightarrow X$ continua y tal que $f(s_0) = x_0$. Entonces, si S es conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias, la función f tiene un levantamiento f' tal que $f'(s_0) = y_0$ si y sólo si*

$$f_*(\pi_1(S, s_0)) \subseteq p_*(\pi(Y, y_0)).$$

Más aún, el levantamiento es único.

Demostración. Si el levantamiento existe la contención es clara. Inversamente, si se da la contención construimos el levantamiento f' como sigue. Dado un punto $s \in S$ escogemos una trayectoria γ de s_0 a s y nombramos $\sigma := f \circ \gamma$, que es una trayectoria en X con punto inicial x_0 . Definimos $f'(s) := \sigma'(1)$, es decir, $f'(s)$ es el punto final del levantamiento de σ a una trayectoria en Y

basada en y_0 . Para ver que la función está bien definida hay que mostrar que f' no depende de la trayectoria γ que escojamos. Si γ' es otra trayectoria de s_0 a s , entonces $f \circ (\gamma'\gamma^{-1}) = \sigma'\sigma^{-1}$ es un lazo basado en x_0 . Por hipótesis, $[\sigma'\sigma^{-1}] \in p_*(\pi(Y, y_0))$; y usando el Lema 3.18 tenemos que los levantamientos de σ y σ' tienen el mismo punto final.

La continuidad de f' se demuestra puntualmente para cada $s \in S$. Sea N una vecindad de $f(s)$ que esté cubierta parejamente por p y sea V la componente de $p^{-1}(N)$ que contiene a $f'(s)$ y que es homeomorfa a N . Elegimos ahora una vecindad conexa por trayectorias U de s tal que $f(U) \subseteq N$. Queremos ver que $f'(U) \subseteq V$. Para hacerlo, tomemos una $s' \in U$. Entonces, si llamamos α a la trayectoria que va de s a s' y γ a la que va de s_0 a s tenemos que $f'(s')$ será el punto final del levantamiento de la trayectoria $f \circ (\gamma\alpha)$. Por otro lado, $f \circ (\gamma\alpha) = (f \circ \gamma)(f \circ \alpha)$ es una trayectoria cuyo punto final cae en N . De esta manera al levantarla tenemos que el punto final del levantamiento cae en V . Entonces $f'(U) \subseteq V$ y f' es continua (tenemos que en una vecindad de s la función f' se ve como $f' = (p|_V)^{-1} \circ f$ y el lado derecho es claramente continuo).

La unicidad del levantamiento se sigue directamente de la unicidad del levantamiento para trayectorias. \square

Corolario 3.21. Sean $p : Y \rightarrow X$ y $p' : Y' \rightarrow X$ cubrientes tales que $p(y_0) = p'(y'_0) = x_0$. Entonces existe una equivalencia h tal que $h(y_0) = y'_0$ si y sólo si los grupos

$$H_0 := p_*(\pi_1(Y, y_0)) \quad \text{y} \quad H'_0 := p'_*(\pi_1(Y', y'_0))$$

son iguales. Además, si la h existe es única.

Demostración. La necesidad es clara. Para la suficiencia, el hecho de que $H_0 = H'_0$ aunado al teorema anterior (sustituyendo la f por p y luego por p') nos da funicones $\varphi : Y \rightarrow Y'$ y $\psi : Y' \rightarrow Y$ que son continuas y que mandan $y_0 \mapsto y'_0$ y viceversa. Por el Lema 3.26 que demostraremos a continuación, $\varphi \circ \psi$ y $\psi \circ \varphi$ son la identidad en Y y Y' respectivamente. Por lo tanto, ambas son homeomorfismos y se da la equivalencia. \square

El corolario anterior nos dice cuándo existe una equivalencia entre aplicaciones cubrientes que manda $y_0 \mapsto y'_0$, pero no nos dice cuándo existe una equivalencia en general. Para deshacernos de la condición anterior tenemos una versión un poco más fuerte de este corolario. Para la demostración usaremos el siguiente lema:

Lema 3.22. Sea $p : Y \rightarrow X$ cubriente y $y_0, y_1 \in p^{-1}(x_0)$. Entonces:

- (a) Los grupos $H_0 := p_*(\pi_1(Y, y_0))$ y $H_1 := p_*(\pi_1(Y, y_1))$ son conjugados.
- (b) Inversamente, todos los subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$ conjugados a H_0 son de la forma H_1 para algún $y_1 \in p^{-1}(x_0)$.

Demostración. (a) Sea γ una trayectoria que va de y_0 a y_1 en Y . Vamos a demostrar que $[g]H_1[g]^{-1} \subseteq H_0$, donde $g := p \circ \gamma$. Los elementos de $[g]H_1[g]^{-1}$

son de la forma $[g][p \circ \alpha][g]^{-1}$ con $[\alpha] \in \pi_1(Y, y_1)$. Definimos el lazo $\sigma := \gamma \alpha \gamma^{-1}$ basado en y_0 . Entonces

$$\begin{aligned} [g][p \circ \alpha][g]^{-1} &= [g(p \circ \alpha)g^{-1}] \\ &= [(p \circ \gamma)(p \circ \alpha)(p \circ \gamma^{-1})] \\ &= [p \circ \sigma] = p_*([\sigma]). \end{aligned}$$

Esto demuestra la contención $[g]H_1[g]^{-1} \subseteq H_0$. La otra contención es análoga.

(b) Supongamos ahora que H y H_0 son conjugados. Entonces $H_0 = [g]H[g]^{-1}$. Los elementos en el conjunto anterior son de la forma $[ghg^{-1}]$. Definimos $y_1 := \gamma(1)$, es decir, como el punto final del levantamiento de g basado en y_0 . Por el inciso anterior tenemos que $H_0 = [g]H_1[g]^{-1}$. Concluimos que $H = H_1$. \square

Teorema 3.23. Sean $p : Y \rightarrow X$ y $p' : Y' \rightarrow X$ cubrientes tales que $p(y_0) = p'(y'_0) = x_0$. Las cubiertas son equivalentes si y sólo si los grupos

$$H_0 := p_*(\pi_1(Y, y_0)) \quad y \quad H'_0 := p'_*(\pi_1(Y', y'_0))$$

son conjugados en $\pi_1(X, x_0)$.

Demostración. Si $h : Y \rightarrow Y'$ es una equivalencia definimos $y'_1 := h(y_0)$ y $H'_1 := p'_*(\pi_1(Y', y'_1))$. El Corolario 3.21 implica entonces que $H_0 = H'_1$. Por otro lado, el lema anterior nos dice que H'_0 y H'_1 son conjugados.

Inversamente, si los grupos H_0 y H'_0 son conjugados, el lema anterior nos dice que hay un punto $y'_1 \in Y'$ de modo que $H'_1 = H_0$ (todos los conjugados de H'_0 son de la forma H'_1 , y H_0 es, por hipótesis, uno de esos conjugados). Nuevamente el Corolario 3.21 garantiza la existencia de una equivalencia h . \square

Este teorema permite establecer una correspondencia entre clases de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$ y clases de equivalencia de aplicaciones cubrientes (aunque la correspondencia no tiene por qué ser una biyección).

Definición 3.24 (Cubierta universal). Una cubierta $p : Y \rightarrow X$ se llama *cubierta universal* si Y es simplemente conexo.

Por el teorema anterior tenemos que la cubierta universal es única salvo homeomorfismos. Es importante mencionar que la existencia de una cubierta universal no está garantizada (aunque bajo hipótesis relativamente laxas se puede hacer que sí exista).

Para terminar este capítulo introducimos un último concepto que nos permitirá conocer más detalles sobre el grupo fundamental.

Definición 3.25. Para una cubierta $p : Y \rightarrow X$ definimos el *grupo de transformaciones cubrientes* (también llamado grupo de automorfismos) de la cubierta como el conjunto de homeomorfismos $\varphi : Y \rightarrow Y$ tales que $p \circ \varphi = p$. Denotamos este grupo como $\text{Aut}(p)$.

Lema 3.26. Las transformaciones cubrientes distintas de la identidad no tienen puntos fijos.

Demostración. Sean $p : X \rightarrow Y$ una aplicación cubriente y $\varphi \in \text{Aut}(p)$. Llamamos Ω al conjunto de puntos fijos de φ . Si $y_0 \in \Omega$ y y es un punto en Y , escogemos una trayectoria γ de y_0 a y . A continuación levantamos (φ es una aplicación cubriente por ser un homeomorfismo) γ a una trayectoria γ' en Y basada en y_0 como indica el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & \xrightarrow{p} & X \\ & \nearrow^{\gamma'} & \downarrow \varphi & & \\ I & \xrightarrow{\gamma} & Y & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

Es fácil ver que la trayectoria $\gamma' := \varphi^{-1}\gamma$ es el levantamiento buscado. Ahora bien, $p(\gamma)$ es una trayectoria en X , y como $p(\gamma) = p(\varphi(\gamma')) = p(\gamma')$, tenemos que $p(\gamma)$ y $p(\gamma')$ son la misma trayectoria. Esto implica que tanto γ como γ' son levantamientos de la misma trayectoria en X (a saber $p(\gamma)$). Por la unicidad de los levantamientos, tenemos que $\gamma = \gamma'$. En particular, tenemos que $y = \gamma(1) = \gamma'(1) = \varphi^{-1}\gamma(1) = \varphi^{-1}(y)$, lo que implica que $\varphi(y) = y$. Como y es arbitrario se sigue que $\varphi = \text{Id}$. \square

Una consecuencia importante de este lema es que dadas dos transformaciones cubrientes φ_1, φ_2 , tenemos que $\varphi_1 = \varphi_2$ si y sólo si $\varphi_1(y) = \varphi_2(y)$ para algún $y \in Y$. Para el siguiente teorema denotamos con $H_0 := p_*(\pi_1(Y))$, $G := \pi_1(X)$ y $N_G(H_0)$ al normalizador de H_0 en G .

Teorema 3.27. *Los grupos $\text{Aut}(p)$ y $N_G(H_0)/H_0$ son isomorfos. En particular, si Y es simplemente conexo tenemos que $\text{Aut}(p)$ es isomorfo a G .*

Demostración. Vamos a dar un epimorfismo de $N_G(H_0)$ a $\text{Aut}(p)$ con núcleo H_0 . Para ello, fijamos un punto $y_0 \in Y$ y para cada $y \in Y$ escogemos una trayectoria g' de y_0 a y . Definimos la trayectoria $g := p \circ g'$. Nuestro epimorfismo es la función que manda

$$[\gamma] \in N_G(H_0) \mapsto \varphi_\gamma \in \text{Aut}(p),$$

donde φ_γ es un automorfismo de Y dado por la regla $\varphi_\gamma(y) := (\gamma g)'$ (1).

Lo primero que debemos ver es que la función está bien definida. Gracias al Corolario 3.17 tenemos que la función no depende del representante que tomemos en $[\gamma]$. Por otra parte, la función también es independiente de la g' que escojamos, pues, si f' fuera otra trayectoria de y_0 a y tendríamos entonces que $g f'^{-1} \in H_0$ (donde $f := p \circ f'$). Por la definición de normalizador, tenemos que $\gamma g f'^{-1} \gamma^{-1} \in H_0$ (recordemos que $\gamma \in N_G(H_0)$). De este modo $(\gamma g)(1) = (\gamma f)(1)$ y de aquí se sigue que φ_γ tampoco depende de la g' elegida.

Que la función es un homomorfismo es claro pues un cálculo directo muestra que $\varphi_{\gamma_1 \gamma_2} = \varphi_{\gamma_1} \circ \varphi_{\gamma_2}$. Además es una transformación cubriente en vista de que

$$p(\varphi_\gamma(y)) = p((\gamma g)')(1) = p(g'(1)) = p(y),$$

pues las trayectorias $(\gamma g)'$ y g' tienen, trivialmente, el mismo punto final.

El núcleo del homomorfismo es H_0 , pues

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma = \text{Id} &\iff \varphi_\gamma(y_0) = y_0 \text{ por el Lema 3.26} \\ &\iff \gamma'(1) = y_0 \\ &\iff \gamma' \in \pi_1(Y, y_0) \\ &\iff \gamma \in H_0. \end{aligned}$$

Dada una $\varphi \in \text{Aut}(p)$ damos una trayectoria γ' en Y de y_0 a $\varphi(y_0)$. Entonces, para $\gamma := p \circ \gamma'$ tenemos que $\varphi_\gamma(y_0) = \varphi(y_0)$. Usando el Lema 3.26 nuevamente, tenemos que $\varphi_\gamma = \varphi$, así que nuestro homomorfismo es suprayectivo, lo que concluye la demostración. \square

Corolario 3.28. *El grupo H_0 es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x_0)$ si y sólo si para cada pareja de puntos y_0 y y_1 en $p^{-1}(x_0)$ hay una transformación cubriente $\varphi \in \text{Aut}(p)$ tal que $\varphi(y_0) = y_1$.*

Definición 3.29. Decimos que una cubierta $p : Y \rightarrow X$ es *regular* si H_0 es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x_0)$.

3.3. Uniformización: una segunda versión

Utilizaremos los conceptos desarrollados a lo largo de este capítulo para el caso en que los espacios topológicos en cuestión son variedades riemannianas (seguimos pidiendo que sean conexas, compactas y orientables). En estos espacios ya no bastará con hablar de funciones continuas, pues ahora tenemos una estructura diferenciable, por lo que tendremos que hacer unas pequeñas modificaciones a lo que hemos visto. Primero que nada, cuando hablemos del grupo fundamental de una variedad, $\pi_1(M)$, usaremos representantes diferenciables. Esto es, si $[\gamma] \in \pi_1(M)$ entonces el representante de la clase $[\gamma]$ que escogeremos será una curva diferenciable. Segundo, nos enfocaremos únicamente en las aplicaciones cubrientes $p : M \rightarrow N$ que son difeomorfismos locales. Bajo estas dos condiciones tenemos que los elementos de $\text{Aut}(p)$ son no sólo homeomorfismos sino difeomorfismos.

Para generalizar el teorema de clasificación de superficies compactas necesitaremos recordar algo de teoría de grupos.

Definición 3.30. Sean G un grupo y X un conjunto cualquiera. Decimos que G actúa sobre X si existe una función de $G \times X \rightarrow X$ tal que $(g, x) \mapsto gx$ y

- (i) $g_1(g_2x) = (g_1 \cdot g_2)x$ para cualesquiera $g_1, g_2 \in G$ y $x \in X$.
- (ii) $ex = x$ para cualquier $x \in X$.

Aquí e es el elemento neutro de G y \cdot es la operación del grupo.

Naturalmente, en el contexto en el que estamos nos interesará hablar de acciones de grupo cuando el conjunto X es una variedad.

Definición 3.31. La *órbita* de un punto x bajo la acción de un grupo G es el conjunto

$$Gx := \{gx : g \in G\}.$$

Definición 3.32. Decimos que un grupo actúa *libremente* si no tiene puntos fijos no triviales, es decir, si $gx = x$ implica que $g = e$.

Definición 3.33. Decimos que una acción de un grupo G sobre una variedad M es *propriadamente discontinua* si para cada punto $x \in M$ existe una vecindad U de x tal que $g(U) \cap U = \emptyset$ si $g \in G$, $g \neq e$.

Finalmente, dos observaciones antes de enunciar los resultados principales de esta sección: si M es una variedad y tenemos un grupo G que actúa de manera propriadamente discontinua sobre M , el conjunto de clases de equivalencia⁵

$$M/G := \{Gx\}_{x \in M}$$

es también una variedad cuando lo equipamos con la topología cociente. Más aún, la proyección canónica $\pi : M \rightarrow M/G$ que manda $M \ni x \mapsto Gx$ resulta ser un difeomorfismo local. Notemos que necesitamos pedir que la acción sea propriadamente discontinua para poder garantizar que todo punto en M tiene una vecindad donde π es inyectiva.

Por otro lado, si $p : \tilde{M} \rightarrow M$ es una aplicación cubriente entre variedades y g es una métrica en M , entonces podemos utilizar el *pullback* para inducir una métrica $\tilde{g} := p^*g$ en \tilde{M} (recordemos, del capítulo anterior que la métrica inducida se define como $p^*g_{\tilde{x}}(u, v) := g_{p(\tilde{x})}(dp_{\tilde{x}}(u), dp_{\tilde{x}}(v))$). Un cálculo fácil nos muestra además que \tilde{g} es invariante bajo transformaciones cubrientes, esto es, $\varphi^*\tilde{g} = \tilde{g}$ para toda transformación cubriente φ (recordemos que los elementos de $\text{Aut}(p)$ son difeomorfismos bajo las hipótesis que hemos asumido en esta sección).

Definición 3.34. Sean (M, g) y (N, \tilde{g}) dos variedades riemannianas. Un difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$ es una isometría si para cada punto $p \in M$ se cumple que

$$g_p(u, v) = \tilde{g}_{\varphi(p)}(d\varphi_p(u), d\varphi_p(v)).$$

Una *isometría local* es una función suave ψ tal que cada punto tiene una vecindad U donde $\psi|_U$ es una isometría.

El caso particular en que $(M, g) = (N, \tilde{g})$ resulta de interés, pues el conjunto de isometrías forma un grupo con respecto a la composición. Este grupo se conoce como el *grupo de isometrías* de M , y como veremos juega un papel importante en la clasificación de las variedades.

A continuación citamos un teorema interesante de geometría riemanniana. No lo demostraremos porque para hacerlo precisamos del teorema de Cartan y de algunos resultados importantes concernientes a la transformación exponencial y a las trayectorias geodésicas. El lector familiarizado con estos temas puede consultar el capítulo 8, §4 de [8] para ver la demostración.

⁵Decimos que dos puntos en M son equivalentes si están en la misma órbita.

Teorema. *Sea (M, g) una superficie compacta con curvatura gaussiana constante K . Entonces la cubierta universal \widetilde{M} de M , equipada con la métrica inducida $\tilde{g} = p^*g$ (donde p es una aplicación cubriente $p: \widetilde{M} \rightarrow M$) es isométrica a*

- (a) \mathbb{S}^2 si $K = 1$,
- (b) \mathbb{R}^2 si $K = 0$, y
- (c) \mathbb{H}^2 si $K = -1$.

Los resultados del capítulo anterior garantizan la existencia de una métrica con curvatura constante, cualquiera sea la superficie. Más aún, el teorema de uniformización junto con este resultado garantizan que la cubierta universal de toda superficie de Riemann es isométrica a alguno de estos tres espacios. Estamos listos para enunciar y demostrar el teorema principal de este capítulo.

Teorema 3.35 (de uniformización, segunda versión). *Sea (M, g) una superficie de Riemann compacta. Entonces existe una isometría*

$$f: M \rightarrow \Sigma$$

donde Σ es

- (a) Una superficie de la forma \mathbb{R}^2/Γ si $\chi(M) = 0$,
- (b) \mathbb{H}^2/Γ si $\chi(M) < 0$,
- (c) \mathbb{S}^2/Γ si $\chi(M) > 0$,

y Γ es un subgrupo del grupo de isometrías de \widetilde{M} que es isomorfo a $\pi_1(M)$ y actúa libremente y de forma propiamente discontinua.

Demostración. De acuerdo con el teorema anterior llamamos \widetilde{M} a la cubierta universal de M . Tomamos una transformación cubriente (suave) $p: \widetilde{M} \rightarrow M$ y dotamos a \widetilde{M} con la métrica inducida $\tilde{g} = p^*g$. Vamos a encontrar un subgrupo adecuado Γ del grupo de isometrías de manera que \widetilde{M}/Γ sea isométrico a M . Curiosamente, el subgrupo Γ que estamos buscando es precisamente el grupo de transformaciones cubrientes $\text{Aut}(p)$.

Veamos, antes que otra cosa, que $\Gamma := \text{Aut}(p)$ es un subgrupo del grupo de isometrías. Sabemos de la sección anterior que Γ es un grupo así que lo único que nos falta demostrar es que sus elementos son isometrías. Esto, sin embargo, no es otra cosa que la invariancia de la métrica inducida \tilde{g} bajo transformaciones cubrientes, es decir, $\varphi^*\tilde{g} = \tilde{g}$ para $\varphi \in \text{Aut}(p)$. De esta manera, tenemos que Γ es un subgrupo de isometrías.

Por otra parte, al ser \widetilde{M} simplemente conexo tenemos, por el Teorema 3.27, que Γ es isomorfo a $\pi_1(M)$. El Corolario 3.28 junto con la continuidad de los elementos de Γ implican que la acción es propiamente discontinua. El Lema 3.26 implica que la acción es libre.

Finalmente, equipamos a \widetilde{M}/Γ con la métrica inducida por \widetilde{M} (i.e. la que hace que la proyección $\pi : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/\Gamma$ sea una isometría local).

Que \widetilde{M} sea simplemente conexo implica que la cubierta $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ es regular, así que dos puntos, $\tilde{x}, \tilde{y} \in \widetilde{M}$ satisfacen que $p(\tilde{x}) = p(\tilde{y})$ si y sólo si $\Gamma\tilde{x} = \Gamma\tilde{y}$, es decir, si y sólo si $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{y})$. Esto significa que las clases de equivalencia en \widetilde{M} dadas por p y por la acción de Γ son las mismas. Esto nos da una biyección $f : M \rightarrow \widetilde{M}/\Gamma$ tal que $\pi : f \circ p$. En virtud de que π y p son isometrías y difeomorfismos locales, f también lo es. Además por ser f biyectiva tenemos entonces que es una isometría (en la definición de isometría va implícito que f también es un difeomorfismo), no nada más una isometría local. \square

Este resultado tiene una interpretación geométrica bastante intuitiva. El teorema de clasificación de superficies compactas nos dice que toda superficie compacta y orientable es la suma conexa de un número finito, p , de toros. Este número recibe el nombre de *género*. (naturalmente el género y la característica satisfacen la relación $\chi(M) = 2 - 2p$). Estas sumas conexas de toros se pueden construir a partir de polígonos como veremos a continuación.

El caso más conocido es sin dudas el del toro, así que empezamos con él. Un toro se forma al tomar un cuadrado en el plano e identificar los lados. Tomamos las aristas laterales y las pegamos para formar un cilindro. Luego tomamos las otras dos aristas, que se han transformado en circunferencias, y las pegamos. Este proceso, puesto en el lenguaje de grupos, se expresa como sigue: tomamos primero el plano \mathbb{R}^2 , que es la cubierta universal del toro. Su grupo fundamental es \mathbb{Z}^2 , y como hemos visto, debe ser isomorfo al grupo de transformaciones cubrientes Γ . El toro entonces será isométrico a $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Lo único que hace este cociente es identificar los puntos del plano cuya diferencia es un elemento de \mathbb{Z}^2 , es decir, $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Z}^2$. Esta identificación nos permite restringir el estudio únicamente a los elementos del cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$. Sin embargo, en este cuadrado siguen quedando puntos cuya diferencia sigue estando en \mathbb{Z}^2 (por ejemplo las cuatro esquinas), y la única manera de obtener un pedazo de plano en el que haya sólo un representante de cada clase de equivalencia es doblarlo como hemos descrito anteriormente. Este procedimiento, además, nos brinda una explicación para el hecho de que el toro tiene una métrica con curvatura cero (el plano le “hereda” su curvatura al toro cuando tomamos el cociente). En definitiva, este procedimiento nos permitió doblar un polígono de cuatro lados para obtener la superficie de género uno.

Como es de esperarse, el proceso puede extenderse para superficies de género arbitrario. En general, es posible deformar un polígono de $4p$ lados para obtener la superficie de género p . La complicación ahora resulta ser que el plano no se puede teselar con polígonos de $4p$ lados cuando $p > 1$, sin embargo, estas teselaciones sí existen en el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 . Por otra parte, las isometrías son transformaciones de Möbius, que al aplicarlas al plano \mathbb{H}^2 mandan esta teselación en sí misma y el resultado es, al igual que antes, una superficie compacta, sólo que ahora de género p . La curvatura, en este caso la constante -1 , también se hereda a estos espacios cociente. Esta es la razón de que estas variedades reciban el nombre de superficies hiperbólicas, y las métricas de curvatura

constante se llaman métricas de Poincaré o hiperbólicas. La siguiente figura⁶ ilustra el procedimiento recién descrito para el caso de un octágono.

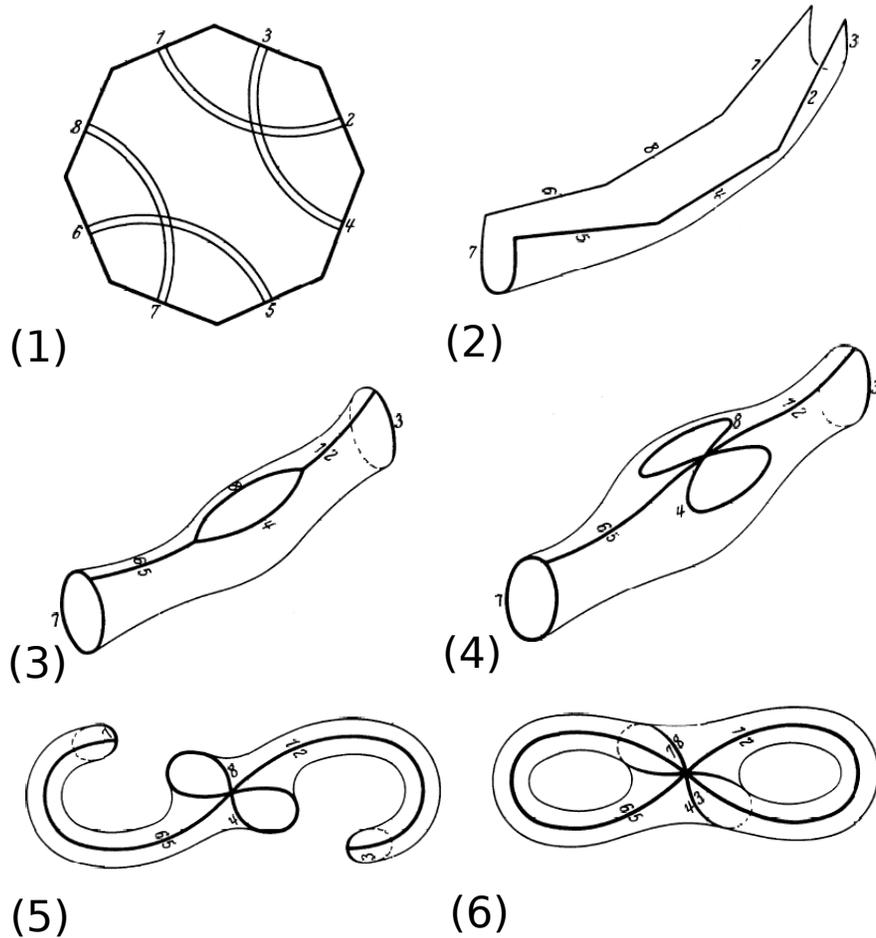


Figura 3.3: Construcción de una superficie de género 2 a partir de un octágono.

3.4. Generalizaciones y extensiones

En 1960 Hidehiko Yamabe se preguntó si el teorema de uniformización tiene un análogo n -dimensional, es decir, dada una variedad compacta de dimensión $n \geq 3$ queremos saber si existe una métrica equivalente a una dada de manera

⁶Tomada de Hilbert, David & Cohn-Vossen, S., *Geometry and the Imagination*, AMS, 1999.

que la nueva métrica tenga curvatura seccional constante. Aunque él mismo dio una respuesta afirmativa, en 1968 Neil Trudinger descubrió un error en la prueba y desde ese momento la pregunta quedó abierta nuevamente, ahora bajo el nombre de problema de Yamabe. El hecho de que esta pregunta sea tan difícil de responder radica principalmente en que la ecuación de curvatura a resolver, a saber,

$$-u^{\frac{n+2}{n-2}} \left(\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta u - ku \right) = K$$

es mucho más complicada. Gracias al trabajo combinado de Yamabe, Trudinger, Aubin y Schoen, en 1984 se demostró que la respuesta a la pregunta original de Yamabe es sí. La investigación actual se concentra en el caso no compacto, que a la fecha sigue siendo un problema abierto (dicho sea de paso, el teorema de uniformización para superficies no compactas sigue siendo válido).

Por otra parte, el teorema de la sección pasada sobre la cubierta universal sigue siendo válido en dimensión mayor, es decir, toda variedad compacta de dimensión n con curvatura seccional constante tiene a \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n o \mathbb{S}^n como cubierta universal. Puesto que el problema de Yamabe tiene una respuesta afirmativa, podríamos intentar hacer un análogo del Teorema 3.35 para dimensión mayor. El problema de clasificar las variedades compactas de dimensión mayor se reduce entonces a encontrar los subgrupos del grupo de isometrías de \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n y \mathbb{H}^n que actúan libremente y de manera propiamente discontinua, cosa que en dimensión dos es sencillo pero que se complica tremendamente en dimensión mayor. Además, el teorema de clasificación de superficies que hemos citado varias veces no tiene un análogo para dimensión mayor. Como se puede ver, aún hay muchas preguntas relacionadas con el teorema de uniformización que no se han respondido, y es un campo fructífero para hacer nuevas contribuciones.

Apéndice A

Existencia de coordenadas isotermas

Demostramos a continuación que toda superficie (M, g) admite, para cada punto $p \in M$, coordenadas locales $\xi = (u, v)$ en las que g es una métrica conforme. Como hemos dicho ya, existen varias demostraciones distintas de este resultado. La prueba que presentamos en este trabajo está basada en la de Kazdan y DeTurck, que es sin lugar a dudas la más breve y concisa. La única dificultad radica en el uso de formas diferenciales, por lo que mencionamos algunos resultados básicos al respecto antes de demostrar el teorema principal¹. A lo largo de esta sección, supondremos que las superficies con que trabajamos son compactas y orientables.

Tensores

Definición A.1. Sea V un espacio vectorial. Un *tensor de orden k* (o *k -tensor*) es una función

$$T : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}$$

que es lineal en cada entrada, es decir

$$T(v_1, \dots, v_i + \lambda u_i, \dots, v_k) = T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + \lambda T(v_1, \dots, u_i, \dots, v_k).$$

Si además el tensor satisface que cambia de signo al trasponer dos variables, es decir $T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$, decimos que el tensor es *alternante*.

Es evidente que los tensores de orden k forman un espacio vectorial, que denotamos por $\mathcal{J}^k(V^*)$. La definición de tensor implica que $\mathcal{J}^1(V^*) = V^*$, el

¹Para ver las demostraciones de los resultados elementales sobre formas diferenciales se puede consultar el capítulo 4 de [12] o bien el texto de Do Carmo, [9].

espacio dual de V . Además de formar un espacio vectorial, los tensores pueden multiplicarse. Si tenemos un k -tensor T y un l -tensor S , existe un $(k+l)$ -tensor, $T \otimes S$, dado por

$$T \otimes S(v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l) := T(v_1, \dots, v_k)S(u_1, \dots, u_l).$$

El tensor $T \otimes S$ recibe el nombre de *producto tensorial*. Es claro que en general $T \otimes S \neq S \otimes T$. Por desgracia esta manera de multiplicar tensores no nos satisface completamente porque más adelante necesitaremos que el producto de dos tensores alternantes sea alternante, cosa que el producto ‘ \otimes ’ no satisface.

Con el fin de definir un nuevo producto consideramos el grupo de permutaciones S_k ². Dada una $\pi \in S_k$ definimos $(-1)^\pi$ como 1 si π es una permutación par o -1 si es impar. Si tenemos un k -tensor T definimos el k -tensor T^π como

$$T^\pi(v_1, \dots, v_k) := T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}).$$

Con esto en mente, daremos para cada tensor $T \in \mathcal{J}^k(V^*)$ un tensor alternante que denotaremos por $\text{Alt}(T)$.

Definición A.2. Sea T un k -tensor. Definimos

$$\text{Alt}(T) := \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} (-1)^\pi T^\pi.$$

El tensor $\text{Alt}(T)$ resulta ser siempre un tensor alternante, no importa quien sea T . Definiremos el *producto cuña* entre tensores como sigue: Si T es un k -tensor y S es un l -tensor, el producto cuña $T \wedge S$ es un $(k+l)$ -tensor definido como

$$T \wedge S := \text{Alt}(T \otimes S).$$

Obviamente el producto cuña entre dos tensores alternantes es alternante. Además el producto cuña es asociativo, distributivo sobre la suma y conmuta con la multiplicación por un escalar (esto es consecuencia directa de la definición de $\text{Alt}(T)$). Finalmente, si T es un k -tensor y S es un l -tensor entonces $T \wedge S = (-1)^{kl} S \wedge T$ y $T \wedge T = 0$ si k es impar.

Nos enfocaremos ahora en el subespacio $\Lambda^k(V^*) \leq \mathcal{J}^k(V^*)$ de los tensores alternantes.

Proposición A.3. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea ϕ_1, \dots, ϕ_n una base del espacio dual V^* . Entonces el conjunto

$$\{\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

es una base de $\Lambda^k(V^*)$.

Corolario A.4. Para $1 \leq k \leq n$ el espacio $\Lambda^k(V^*)$ tiene dimensión $\binom{n}{k}$. Si $k > n$ entonces $\Lambda^k(V^*)$ tiene dimensión cero.

² S_k es el grupo de permutaciones del conjunto $\{1, \dots, k\}$.

El corolario anterior significa que tenemos un número finito de espacios $\Lambda^k(V^*)$ no triviales. Si definimos $\Lambda^0(V^*)$ como el conjunto de funciones constantes en V y extendemos ‘ \wedge ’ de manera que el producto cuña de un elemento en $\Lambda^0(V^*)$ por un k -tensor en $\Lambda^k(V^*)$ sea la multiplicación por un escalar de siempre, entonces la suma directa

$$\Lambda(V^*) := \Lambda^0(V^*) \oplus \dots \oplus \Lambda^n(V^*)$$

de los espacios $\Lambda^k(V^*)$ no triviales resulta ser un álgebra no conmutativa con unidad que recibe el nombre de *álgebra exterior* de V .

Formas diferenciales

Estamos listos ahora para introducir las herramientas que usaremos para demostrar el teorema de existencia de coordenadas isotermas.

Definición A.5. Una *forma diferencial de orden k* (o bien k -forma) ($k \geq 1$) en una variedad M es una función que a cada punto $p \in M$ le asocia un tensor alternante en $\Lambda^k(T_p^*M)$ ³. Una 0-forma es una función suave en M .

Nos referiremos a las formas diferenciales con letras del alfabeto griego.

Ya hemos trabajado con las formas diferenciales más sencillas: las 0-formas y 1-formas. Por definición, una 0-forma es una función $f \in C^\infty(M)$, mientras que las 1-formas se generan a partir de dichas funciones. Por ejemplo, si φ es una función suave en una variedad, la asignación que a cada punto $p \in M$ le asocia la transformación lineal (i.e. el 1-tensor) $d\varphi_p$ es una 1-forma que se denota por $d\varphi$. En particular, si tenemos una carta coordenada $\xi = (x^1, \dots, x^n)$, las funciones x^i son suaves, de manera que dan lugar a las 1-formas dx^i que ya hemos mencionado antes. Estas formas bastan para generar a las demás.

Proposición A.6. *Sea M una variedad de dimensión n . Entonces el conjunto*

$$\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} : 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$$

forma una base (local) para las k -formas.

Esta proposición implica que todas las k -formas se pueden ver como

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

donde cada $a_{i_1 \dots i_k}$ es una función real. Pediremos, a partir de ahora, que todas las formas diferenciales con que trabajemos satisfagan que las funciones $a_{i_1 \dots i_k}$ sean elementos de $C^\infty(M)$.

Esta manera de expresar a las formas diferenciales nos permitirá introducir un operador que trabaje sobre ellas: la *derivada exterior* ‘ d ’. Este operador

³Aquí T_p^*M es el espacio dual de T_pM .

transforma una k -forma en una $k + 1$ -forma de una manera muy natural que explicamos a continuación. Para las 0-formas (i.e. funciones suaves) el operador derivada funciona como es de esperarse, es decir, transforma a $\varphi \in C^\infty(M)$ en la 1-forma $d\varphi$ descrita anteriormente. Usando la expresión de una k -forma en términos de la base (y recordando que las $a_{i_1 \dots i_k}$ son funciones suaves), la derivada exterior de una k -forma se define como

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} da_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Si usamos el hecho (fácil de verificar) de que

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

para una función $f \in C^\infty(M)$, entonces la derivada exterior de una k -forma puesta en términos de la base se ve como

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} \sum_{i_0=1, \dots, n} \frac{\partial}{\partial x^{i_0}} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Una propiedad importante del operador ‘d’ es que

$$d^2 = 0,$$

es decir, $d(d\omega) = 0$ para cualquier k -forma ω . Finalmente, decimos que una forma ω es *exacta* si existe una forma θ tal que

$$\omega = d\theta,$$

y es *cerrada* si

$$d\omega = 0.$$

Es claro que toda forma diferencial exacta es cerrada. El problema inverso de ver cuando una forma cerrada es exacta da origen a una herramienta importante de la topología algebraica conocida como *cohomología de de Rham*, que desafortunadamente no trataremos aquí. No obstante, nos limitaremos a decir que en los casos en que trabajaremos (subconjuntos abiertos contraíbles en superficies) sucede también lo inverso, es decir, toda forma cerrada es exacta. Este resultado se conoce como lema de Poincaré y será de vital importancia para demostrar la existencia de coordenadas isotermas (una demostración accesible del lema de Poincaré se puede encontrar en el capítulo 4, §3 de [9]).

El dual de Hodge y la codiferencial

Otra consecuencia importante de la Proposición A.6 es que si M tiene dimensión n , entonces el espacio de las k -formas tiene dimensión $\binom{n}{k}$ si $1 \leq k \leq n$

y cero si $k > n$. De la igualdad elemental $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ concluimos que el espacio de las k -formas tiene la misma dimensión que el de las $n - k$ -formas y hay por ende una correspondencia natural entre ambos. Esta correspondencia está dada por el operador dual de Hodge que mostramos a continuación. Aunque el dual de Hodge existe para variedades orientables de cualquier dimensión, nos enfocaremos solamente en el caso de las superficies (i.e. $n = 2$). En este contexto, las únicas k -formas no triviales son cuando $k = 0, 1, 2$.

Definición A.7 (Dual de Hodge). Sean (M, g) una superficie orientable y ω una k -forma. Definimos la forma *dual de Hodge*, $*\omega$, como sigue:

- (i) Si $k = 0$, entonces $\omega = f$, una función suave en M y

$$*\omega := f \sqrt{\det(g_{ij})} \, dx \wedge dy.$$

- (ii) Si $k = 1$, entonces $\omega = f \, dx + g \, dy$ y

$$*\omega := -g \, dx + f \, dy.$$

- (iii) Si $k = 2$, entonces $\omega = f \, dx \wedge dy$ y

$$*\omega := \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} f.$$

Observación. Es claro de la definición que $*\omega = 0$ si y sólo si $\omega = 0$.

Una vez que tenemos el dual de Hodge a la mano, podemos definir una forma bilineal como sigue. Si ζ y η son dos k -formas, entonces $\zeta \wedge *\eta$ es una n -forma. Usando el hecho de que podemos integrar una n -forma en una variedad (orientable) de dimensión n^4 definimos la forma bilineal (\cdot, \cdot) como

$$(\zeta, \eta) := \int_M \zeta \wedge *\eta.$$

Esta forma bilineal nos servirá para definir una especie de dual de la derivada exterior ‘d’. Si ζ es una k -forma y η es una $k + 1$ -forma, entonces para una variedad compacta (orientable) M tenemos que

$$\begin{aligned} (d\zeta, \eta) &= \int_M d\zeta \wedge *\eta \\ &= (-1)^{k+1} \int_M \zeta \wedge d(*\eta) + \int_M d(\zeta \wedge *\eta) \\ &= (-1)^{k+1} \int_M \zeta \wedge d(*\eta) \quad (\text{por el teorema de Stokes}) \\ &= - \int_M \zeta \wedge ** d(*\eta) \quad (\text{pues } (-1)^k = **) \\ &= (\zeta, - * d * \eta). \end{aligned}$$

⁴Ver capítulo 4 de [12].

Si usamos la notación

$$\delta := - * d *,$$

tenemos entonces que $(d\zeta, \eta) = (\zeta, \delta\eta)$, es decir, ‘ δ ’ es una especie de adjunto de ‘ d ’. Es importante notar que ‘ d ’ manda k -formas en $k + 1$ formas, mientras que ‘ δ ’ manda k -formas en $k - 1$ -formas. Al operador ‘ δ ’ se le llama *codiferencial*.

Definición A.8. Definimos el operador de *Laplace-de Rham* sobre k -formas como

$$\Delta := \delta d + d\delta.$$

Proposición A.9. Sean (M, g) una superficie y $f \in C^\infty(M)$. Entonces los operadores de Laplace-de Rham ‘ Δ ’ y Laplace-Beltrami ‘ Δ_g ’ difieren únicamente en el signo, es decir, $\Delta f = -\Delta_g f$.

Demostración. Para la demostración usaremos la métrica dual definida como $\langle dx^i, dx^j \rangle := g^{ij}$. Con esto en mente, un cálculo directo (escribiendo \sqrt{g} en lugar de $\sqrt{\det(g_{ij})}$) nos muestra que

$$\begin{aligned} \int_M \Delta f \cdot \varphi \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 &= (\Delta f, \varphi) = (df, d\varphi) \\ &= \int_M df \wedge *d\varphi \\ &= \int_M \langle df, d\varphi \rangle * (1) \\ &= \int_M \left(\sum_{1 \leq i, j \leq 2} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right) \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \int_M \text{grad } f(\varphi) \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \int_M \langle \text{grad } f, \text{grad } \varphi \rangle \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \\ &= - \int_M (\Delta_g f) \varphi \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned}$$

para cualquier $\varphi \in C^\infty(M)$, de donde se sigue el resultado. \square

De esta manera, el operador de Laplace-de Rham es una generalización para k -formas del operador de Laplace-Beltrami que teníamos para funciones suaves.

Demostración del teorema principal

Con las herramientas que tenemos podemos demostrar de manera casi inmediata la existencia de coordenadas isotermas en superficies. Para ello, sean (M, g) una superficie y $\varphi = (x, y)$ una carta coordenada en el punto $p \in M$. Si

introducimos nuevas coordenadas $\xi = (u, v)$ en el punto p , éstas serán isotermas siempre que $*du = dv$.

En vista de que u y v son funciones suaves, tenemos que

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad \text{y} \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

Puesto de esta manera, la condición $*du = dv$ significa que u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Además $\xi = (u, v)$ es una función que preserva orientación. Estas dos observaciones implican que ξ también preserva ángulos (ver el capítulo 1, §6 del volumen 2 de [28] para más detalles sobre esto), es decir

$$\lambda g(r, s) = \langle d\xi_p(r), d\xi_p(s) \rangle \quad \lambda > 0,$$

(donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la métrica usual en \mathbb{R}^2) para cualquier par de vectores $r, s \in T_p M$. Si llamamos g_0 al producto usual en \mathbb{R}^2 , la ecuación anterior se puede escribir como

$$\lambda g = \xi^* g_0 \quad \lambda > 0, \tag{A.1}$$

donde $\xi^* g_0$ es la métrica inducida vista en los capítulos anteriores. Esto inmediatamente implica que $g_{ij} = \lambda^{-1} \delta_{ij}$, es decir, g es una métrica conforme. Así pues, lo único que tenemos que demostrar es que dado un punto $p \in M$ existe una carta $\xi = (u, v)$ tal que p está en el dominio de la carta y que $*du = dv$.

Teorema A.10. *Sea $p \in M$. Entonces existen un abierto $\Omega \subseteq M$ tal que $p \in \Omega$ y funciones $u, v \in C^\infty(\Omega)$ tales que du y dv son linealmente independientes y $*du = dv$.*

Demostración. Sea u una función armónica en alguna vecindad (abierta y contractible) Ω de p tal que $du_p \neq 0$ (para ver la demostración de la existencia de dicha función se puede consultar el capítulo 5, §10 de [31]). Que u sea armónica significa que $\Delta_g u = 0$, o puesto de otra forma $*d * du = 0$. Esto último se da si y sólo si $d * du = 0$, es decir, si y sólo si la 1-forma $*du$ es cerrada. Por el lema de Poincaré, toda forma cerrada es exacta, esto es, existe una $v \in C^\infty(\Omega)$ tal que $*du = dv$. Evidentemente $dv \neq 0$ y por ende du y dv son linealmente independientes. \square

Corolario A.11. *Toda superficie admite un atlas con coordenadas isotermas.*

Demostración. Como las funciones u y v de la demostración anterior son tales que sus derivadas no se anulan en p , por el teorema de la función inversa, tenemos que $\xi := (u, v)$ es un difeomorfismo local y por ende, podemos pensarlo como una carta coordenada en una vecindad del punto p . El resultado se sigue de repetir este procedimiento para cada punto en la superficie. \square

Apéndice B

El teorema de Rellich-Kondrachov

A continuación demostramos una versión del teorema de Rellich-Kondrachov. La estrategia será demostrarlo primero para subconjuntos abiertos y acotados en \mathbb{R}^n y luego extender el resultado a variedades usando particiones de la unidad. Antes de demostrar el resultado en \mathbb{R}^n hacemos un breve repaso de algunos conceptos y resultados importantes de análisis.

Ahora y en lo que sigue denotaremos por $C^0(X, Y)$ al conjunto de funciones continuas de X a Y (donde ambos, (X, d_X) y (Y, d_Y) , son espacios métricos) provisto con una métrica dada por

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)).$$

Esta métrica recibe el nombre de *métrica uniforme*.

Definición B.1. Una familia de funciones $\mathcal{F} \subseteq C^0(X, Y)$ es *equicontinua en* x_0 si para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}$

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{si } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Decimos que \mathcal{F} es *equicontinua* si es equicontinua en todo punto $x_0 \in X$.

Que una función f sea continua en un punto x_0 significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ siempre que $d_X(x, x_0) < \delta$. La equicontinuidad de \mathcal{F} significa que podemos escoger una δ que funciona para todos los elementos de \mathcal{F} .

Uno de los teoremas más importantes en análisis es el teorema de Arzelà-Ascoli. Este teorema nos da una caracterización de los subconjuntos compactos (con respecto de la topología inducida por la métrica uniforme) de $C^0(K, X)$, donde K es un espacio métrico compacto y X un espacio métrico completo. Naturalmente, la equicontinuidad juega un papel fundamental en este resultado.

Teorema B.2 (Arzelà-Ascoli). Sea $\mathcal{F} \subseteq C^0(K, X)$, donde K es compacto y X completo. Entonces \mathcal{F} es relativamente compacto¹ si y sólo si \mathcal{F} es equicontinuo y

$$\mathcal{F}(x) := \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$$

es relativamente compacto para cada $x \in K$.

La demostración de este resultado puede encontrarse en el capítulo 7, §5 de [6]. Utilizaremos esta caracterización de los subconjuntos relativamente compactos en la demostración del teorema de Rellich-Kondrachov en \mathbb{R}^n .

Definición B.3. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos el *soporte* de f como la cerradura (relativa) del conjunto de puntos donde f no se anula, es decir

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \cap \Omega.$$

(La barra representa la cerradura en \mathbb{R}^n , de ahí que luego tomemos la intersección con Ω).

Denotamos por $C_c^\infty(\Omega)$ a las funciones (infinitamente) diferenciables cuyo soporte es compacto y está contenido en Ω .

Definición B.4. Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Definimos el espacio $W_C^{1,2}(\Omega)$ como la completación² de $C_c^\infty(\Omega)$ con respecto de la norma

$$\|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \varphi^2 + \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Naturalmente, los elementos en $W_C^{1,2}(\Omega)$ son funciones en $L^2(\Omega)$ (esto es consecuencia del Teorema 2.3 del capítulo dos).

Definición B.5. Sea Ω un subconjunto abierto y acotado en \mathbb{R}^n . Para un parámetro $\varepsilon > 0$ definimos el *regularizador estándar* (o *molificador*) de una función $f \in L^2(\Omega)$ como

$$f^\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\Omega} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y) dy,$$

donde $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la función dada por

$$\eta(x) := \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

y c es una constante adecuada de manera que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1$.

¹Un conjunto es relativamente compacto si su cerradura es compacta.

²Recordemos que $W^{1,2}(\Omega)$ se define como la completación de $C_c^\infty(\Omega)$ con respecto de la misma norma.

Teorema B.6 (Rellich-Kondrachov). *Sea Ω abierto y acotado en \mathbb{R}^n . Entonces la inclusión $W_C^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacta, es decir, cada sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset W_C^{1,2}(\Omega)$ tal que*

$$\|u_k\|_{W^{1,2}(\Omega)} < C_0 \quad (\text{B.1})$$

tiene una subsucesión que converge en $L^2(\Omega)$.

Demostración. Tomemos una sucesión (u_k) en $W_C^{1,2}(\Omega)$ que satisfaga (B.1). Dividiremos el argumento en dos partes.

Primer paso: Lo primero que haremos será verificar que para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar una sucesión $(w_{k,\varepsilon})$ en $C^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|u_k - w_{k,\varepsilon}\|_{W^{1,2}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{B.2})$$

Como $u_k \in W^{1,2}(\Omega)$, esto quiere decir que existe una función $w_k \in C_C^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|u_k - w_k\|_{W^{1,2}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (\text{B.3})$$

Por (B.1) tenemos entonces que la sucesión (w_k) también es acotada, es decir, $\|w_k\|_{W^{1,2}(\Omega)} < C'_0$ para alguna constante C'_0 . Ahora bien, definimos la sucesión $(w_{k,\varepsilon})$ como la regularización de (w_k) para un parámetro $h := h(\varepsilon)$ tal que $h \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ que detreminaremos después, esto es

$$w_{k,\varepsilon} := \frac{1}{h^n} \int_{\Omega} \eta\left(\frac{x-y}{h}\right) w_k(y) \, dy.$$

Veamos que $w_{k,\varepsilon}$ se acerca arbitrariamente a w_k (en $L^2(\Omega)$) si el parámetro h es lo suficientemente pequeño:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |w_k(x) - w_{k,\varepsilon}(x)|^2 \, dx &= \int_{\Omega} \left(\int_{|y| \leq 1} \eta(y) (w_k(x) - w_{k,\varepsilon}(x - hy)) \, dy \right)^2 \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\int_{|y| \leq 1} \eta(y) \int_0^{h|y|} \left| \frac{\partial}{\partial r} w_k(x - r\omega) \right| \, dr \, dy \right)^2 \, dx \quad \text{con } \omega = \frac{y}{|y|} \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{|y| \leq 1} \eta(y)^{\frac{1}{2}} \eta(y)^{\frac{1}{2}} \int_0^{h|y|} \left| \frac{\partial}{\partial r} w_k(x - r\omega) \right| \, dr \, dy \right)^2 \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\int_{|y| \leq 1} \eta(y) \, dy \right) \left(\int_{|y| \leq 1} \eta(y) \left(\int_0^{h|y|} \left| \frac{\partial}{\partial r} w_k(x - r\omega) \right| \, dr \right)^2 \, dy \right) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \int_{|y| \leq 1} \eta(y) \left(\int_0^{h|y|} \left| \frac{\partial}{\partial r} w_k(x - r\omega) \right| \, dr \right)^2 \, dy \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} \int_{|y| \leq 1} \eta(y) \cdot h|y| \int_0^{h|y|} \left| \frac{\partial}{\partial r} w_k(x - r\omega) \right|^2 \, dr \, dy \, dx \end{aligned}$$

$$\leq \int_{|y| \leq 1} \eta(y) \cdot h^2 |y|^2 \int_{\Omega} |\nabla w_k|^2 dx dy$$

por la desigualdad de Hölder y el teorema de Fubini. Lo anterior implica que

$$\|w_k - w_{k,\varepsilon}\|_2 \leq h \|\nabla w_k\|_2.$$

En virtud de que la sucesión (w_k) es acotada en $W^{1,2}(\Omega)$, tenemos entonces que

$$\|w_k - w_{k,\varepsilon}\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{B.4})$$

para algún valor de h lo suficientemente pequeño. Las desigualdades (B.3) y (B.4) implican (B.2). Además, $w_{k,\varepsilon}$ es diferenciable porque η lo es³.

Segundo paso: Veremos que la sucesión $(w_{k,\varepsilon})$ es un subconjunto relativamente compacto de $C^0(\Omega, \mathbb{R})$. Para ello utilizaremos el teorema de Arzelà-Ascoli (para poder utilizar este teorema necesitamos que el dominio sea compacto, pero eso no representa un problema porque podemos extender de manera continua nuestras funciones a $\bar{\Omega}$). Veamos entonces que las hipótesis de Arzelà-Ascoli se satisfacen:

$$\begin{aligned} |w_{k,\varepsilon}(x)| &\leq \frac{1}{h^n} \int_{\Omega} \eta\left(\frac{x-y}{h}\right) |w_k(y)| dy \\ &\leq ch^{-n} \|w_k\|_1 \\ &\leq ch^{-n} |\Omega|^{\frac{p-1}{p}} \|w_k\|_p \\ &\leq ch^{-n} |\Omega|^{\frac{p-1}{p}} C'_0 = M \end{aligned}$$

donde M es una constante que no depende de k . De esta manera, tenemos que si llamamos $\mathcal{F} := (w_{k,\varepsilon})$ entonces el conjunto $\mathcal{F}(x)$ es un subconjunto acotado de \mathbb{R} y por ende relativamente compacto. Por otra parte,

$$\begin{aligned} |\nabla w_{k,\varepsilon}(x)| &\leq \frac{1}{h^n} \int_{\Omega} \left| \nabla \eta\left(\frac{x-y}{h}\right) \right| |w_k(y)| dy \\ &\leq Ch^{-n-1} \|w_k\|_1 \\ &\leq Ch^{-n-1} |\Omega|^{\frac{p-1}{p}} C'_0 = M'. \end{aligned}$$

Una consecuencia de esta desigualdad y del teorema del valor medio es que para algún $\theta \in [0, 1]$

$$|w_{k,\varepsilon}(x_0) - w_{k,\varepsilon}(y)| = |\nabla w_{k,\varepsilon}((1-\theta)x_0 + \theta y) \cdot (x_0 - y)| \leq M' |x_0 - y|,$$

siempre que y esté suficientemente cerca de x_0 (de otra manera no podemos aplicar el teorema del valor medio). Esto significa que la familia \mathcal{F} es equicontinua en x_0 , y como x_0 es arbitrario tenemos que es equicontinua. El teorema

³Tenemos, de hecho, que

$$\frac{\partial}{\partial x^i} w_{k,\varepsilon}(x) = \frac{1}{h^n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^i} \eta\left(\frac{x-y}{h}\right) w_k(y) dy.$$

Una demostración de esta igualdad puede encontrarse en el capítulo 4, §6 de [11].

de Arzelà-Ascoli implica entonces que la sucesión $(w_{k,\varepsilon})$ es un conjunto relativamente compacto de $C^0(\Omega, \mathbb{R})$. Ahora bien, utilizando una equivalencia que dice que un espacio métrico es compacto si y sólo si es cerrado y totalmente acotado⁴, lo anterior significa que la cerradura de $(w_{k,\varepsilon})$ en $C^0(\Omega, \mathbb{R})$ es un conjunto totalmente acotado. Esto quiere decir que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número finito de funciones $z_\nu \in L^2(\Omega)$, $\nu = 1, \dots, N$ tales que para toda k existe un ν que satisface que

$$\|w_{k,\varepsilon} - z_\nu\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2|\Omega|^{1/2}}.$$

Usando el hecho de que $\|\varphi\|_2 \leq |\Omega|^{1/2}\|\varphi\|_\infty$ para dominios acotados, la anterior desigualdad implica que

$$\|w_{k,\varepsilon} - z_\nu\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{B.5})$$

De las desigualdades (B.2) y (B.5) tenemos entonces que

$$\|u_k - z_\nu\|_2 < \varepsilon,$$

por lo que la sucesión (u_k) es un conjunto totalmente acotado de $L^2(\Omega)$. Esto implica que existe una subsucesión (u_{k_j}) convergente en $L^2(\Omega)$. \square

Corolario B.7 (Teorema de Rellich-Kondrachov para superficies). *Sea M una superficie compacta y orientable. Entonces la inclusión canónica*

$$\iota : W^{1,2}(M) \hookrightarrow L^2(M)$$

es compacta.

Demostración. Sean $\{(U_i, \varphi_i)\}$, $i = 1, \dots, N$ un atlas (finito) de M y $\{\rho_i\}$ una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{U_i\}$. Tomamos una sucesión (u_k) en $W^{1,2}(M)$ y veremos que tiene una subsucesión convergente. Por definición, tenemos que

$$\begin{aligned} \|u_k - u_j\|_2 &= \int_M |u_k(x) - u_j(x)|^2 dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{U_i} |u_k \circ \varphi_i^{-1}(y) - u_j \circ \varphi_i^{-1}(y)|^2 \rho_i \circ \varphi_i^{-1}(y) dy \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{U_i} |u_k \circ \varphi_i^{-1}(y) - u_j \circ \varphi_i^{-1}(y)|^2 dy \\ &= \sum_{i=1}^N \|u_k \circ \varphi_i^{-1} - u_j \circ \varphi_i^{-1}\|_{L^2(U_i)}^2 \end{aligned}$$

⁴Decimos que un espacio métrico X es totalmente acotado si para cada $\varepsilon > 0$ la cubierta $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in X}$ tiene una subcubierta finita.

Por el teorema de Rellich-Kondrachov para \mathbb{R}^2 , para cada U_i hay una subsucesión de $(u_k \circ \varphi^{-1})$ que converge (y es por ende de Cauchy). Escogiendo una subsucesión adecuada podemos encontrar una (u_{k_j}) que sea de Cauchy, y por lo tanto convergente. \square

Bibliografía

- [1] Ahlfors, Lars V., *Complex Analysis*, 3ra ed., McGraw Hill, 1979.
- [2] Aubin, Thierry, *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*, Springer, 1998
- [3] Aubin, Thierry, *A Course in Differential Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, AMS, vol. 27, 2001.
- [4] Berger, Melvyn, *On Riemannian structures of prescribed Gauss curvature for compact two-dimensional manifolds*, J. Diff. Geo. 5, 1971, pp. 325-332.
- [5] Clapp, Mónica, *Análisis*, Notas del curso de Análisis I y II, UNAM, 2009.
- [6] Dieudonné, J. *Foundations of Modern Analysis*, 3ra ed., Academic Press, 1969
- [7] Do Carmo, Manfredo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- [8] Do Carmo, Manfredo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.
- [9] Do Carmo, Manfredo, *Differential Forms and Applications*, Springer, 2000.
- [10] Evans, Laurence C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, AMS, vol. 19, 1998.
- [11] Evans, Laurence C. & Gariepy, Roland F., *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 1992.
- [12] Guillemin, Victor & Pollack, Alan, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.
- [13] Hamilton, Richard S., *The Ricci Flow on Surfaces*, Math. and General Relativity, Contemporary Mathematics vol. 71, 1988, pp. 237-262.
- [14] Hebey, Emmanuel, *Sobolev Spaces on Riemannian Manifolds*, Springer, 1996.
- [15] Jost, Jürgen, *Compact Riemann Surfaces*, 3ra ed., Springer, 2006.

- [16] Jost, Jürgen, *Partial Differential Equations*, 2a ed., Springer, 2007.
- [17] Jost, Jürgen, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, 5a ed., Springer, 2008.
- [18] Kato, Tosio, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, 1995.
- [19] Kazdan, J.L. & Warner, W.F., *Integrability Conditions for $\Delta u = k - Ke^{\alpha u}$ with Applications to Riemannian Geometry*, Bull. AMS vol. 77, 1971, pp. 819-823.
- [20] Kazdan, J.L. & Warner, W.F., *Curvature Functions for Compact 2-Manifolds*, Ann. of Math. vol. 99, 1974, pp. 14-47.
- [21] Kazdan, J.L. & Warner, W.F., *Existence and Conformal Deformation of Metrics with prescribed Gaussian and scalar Curvatures*, Ann. of Math. vol. 101, 1975, pp. 317-331.
- [22] Kazdan, J.L. & DeTurck, Dennis, *Some Regularity Theorems in Riemannian Geometry*, Annales scientifiques de l'É.N.S. vol. 14, no. 3, 1981, pp. 249-260.
- [23] Kreyszig, Erwin, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.
- [24] Lee, John M., *Riemannian manifolds, An Introduction to Curvature*, Springer, 1997.
- [25] Massey, William S., *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer, 1967.
- [26] Munkres, James R., *Topology*, 2a ed., Prentice-Hall, 2000.
- [27] O'Neill, Barrett, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, 1983.
- [28] Palmas, Oscar & Reyes, Guadalupe, *Curso de geometría diferencial*, vol. I y II, UNAM-Facultad de Ciencias, 2005.
- [29] Salicrup, Graciela, *Introducción a la topología*, Publicación de la SMM, 1997.
- [30] Spivak, Michael, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. I y II, Publish or Perish, 1999.
- [31] Taylor, Michael E., *Partial Differential Equations*, vol. I, II y III, 2a ed., Springer, 2010.

Índice alfabético

- acción de grupo, 58
 - discontinua, 59
 - libre, 59
- álgebra exterior, 66
- aplicación cubriente, 50
- atlas, 1
 - diferenciable, 2
- campo vectorial, 10
- característica de Euler, 20
- carta coordenada, 1
- clase conforme, 18
- codiferencial, 69
- convergencia débil, 35
- coordenadas isotermas, 13
- cubierta
 - regular, 58
 - universal, 56
- curvatura
 - ecuación de, 19
 - escalar, 44
 - gaussiana, 15, 17
 - media, 14
- derivada, 9
 - exterior, 66
- difeomorfismo, 4
- equicontinuidad, 71
- equivalencia
 - conforme, 18
 - de aplicaciones cubrientes, 54
 - global, 37
- espacio
 - cubriente, 50
 - de Sobolev, 24, 29
 - tangente, 4
 - totalmente acotado, 75
- esqueleto, 39
- estructura diferenciable, 3
- factor de conformidad, 12
- flujo de Ricci, 44
- forma diferencial, 66
 - cerrada, 67
 - exacta, 67
- género de una superficie, 61
- Gauss-Bonnet, teorema de, 20
- gradiente, 16
- grupo
 - de isometrías, 59
 - fundamental, 49
- haz tangente, 9
- Hodge, dual de, 68
- homeomorfismo local, 50
- homotopía
 - entre funciones, 46
 - entre trayectorias, 47
- isometría, 59
- laplaciano, 16, 69
- levantamiento, 51
- métrica
 - conforme, 12
 - riemanniana, 10
 - uniforme, 71
- número de Lebesgue, 51
- órbita, 59

- plano hiperbólico, 12
- Poincaré
 - desigualdad de, 26
 - lema de, 67
- producto
 - cuña, 65
 - tensorial, 65
- regularizador estándar, 72
- Rellich-Kondrachov, teorema de, 25, 73, 75
- semicontinuidad débil, 35
- simplemente conexo, 49
- soporte, 72
- superficie
 - de Riemann, 18
 - riemanniana, 10
- tensor, 64
 - alternante, 64
- transformación cubriente, 56
- trayectoria, 46
- triangulación, 38
- variedad, 1
 - diferenciable, 3