Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES FUNCIONALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
FRANCISCO DÍAZ CERÓN

DIRECTOR DE TESIS:
M. en C. JOSÉ ANTONIO GÓMEZ ORTEGA

2011

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
Díaz
Cerón
Francisco
56170571
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
300112302
2. Datos del tutor
M. en C.
José Antonio
Gómez
Ortega
3. Datos del sinodal 1
Dr.
Rogelio
Valdez
Delgado
4. Datos del sinodal 2
Dr.
Eric Fabián
Hernández
Martínez
5. Datos del sinodal 3
M. en C.
Francisco Manuel
Barrios
Paniagua
6. Datos del sinodal 4
Dr.
Manuel Jesús
Falconi
Magaña
7. Datos del trabajo escrito
Introducción a las ecuaciones funcionales
147 p.
2011

“El pensamiento no es más que un relámpago en medio de una larga noche. Pero ese relámpago lo es todo”.

Henri Poincaré.

“El hombre está dispuesto siempre a negar todo aquello que no comprende”.

Blaise Pascal.

“Mejor que de nuestro juicio, debemos fiarnos del cálculo algebraico”.

Leonhard Euler.

“No anheles conocerlo todo, no sea que te vuelvas ignorante de todo”.

Demócrito.

“Educar no es dar carrera para vivir, sino templar el alma para las dificultades de la vida.”

Pitágoras.

“La verdad siempre se halla en la simplicidad y no en la multiplicidad y confusión de las cosas”.

Isaac Newton.

“Dudar de todo o creerlo todo son dos opciones igualmente cómodas, pues tanto una como otra nos eximen de reflexionar”.

Henri Poincaré.

“Muchas personas preferirían morirse antes que pensar; en realidad eso es lo que hacen”.

Bertrand Russell.

Agradecimientos

Empiezo agradeciendo a mi Madre por el gran esfuerzo que ha realizado en educarme y por todo lo que me ha dado. ¡Gracias Estela!.

A mi padre, Marco Antonio.

A mis hermanos Fernando, Carlos y Marco Antonio por el apoyo que me han brindado y por todos esos momentos que hemos vivido juntos.

A mi tía Aida, por todo el cariño que siempre me muestra.

Agradezco a mis amigos por estar siempre que los he necesitado y por todos los buenos tiempos que siempre hemos pasado: Daniel, Graciela, Karina, Iván, Luz, Martin, Marusia, Juan Carlos, Violeta y muchos más que falta mencionar.

A mi asesor de tesis José Antonio, gracias por ser tan paciente, por tus consejos y por todas tus enseñanzas.

También quiero agradecer a los sinodales por todas las correcciones y observaciones hechas a esta tesis, gracias Rogelio, Eric, Francisco y Manuel.

A la UNAM, por darme la oportunidad de estudiar y crecer como persona.

Por último a mis compañeros de clases y a los profesores, gracias a los cuales ha sido más amena (si esto es posible) la estancia en la Facultad.

¡Gracias a todos!

Francisco Díaz Cerón

Introducción

En los exámenes que se aplican en diversas competencias de matemáticas alrededor del mundo, tales como la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO), la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (OIM), la Olimpiada de Matemáticas de la cuenca del Pacífico (APMO), entre otras, es frecuente encontrar algún problema en el que se pida resolver una ecuación funcional.

Para encontrar las soluciones de ecuaciones funcionales no existe una metodología que nos indique exactamente como resolver cada ecuación funcional, aunque si se pueden seguir algunas sugerencias que nos lleven a encontrar tales soluciones, dichas sugerencias se dan en la presente tesis.

Este trabajo va dirigido especialmente para los jóvenes que participan en las diferentes olimpiadas de matemáticas. También puede ser de gran ayuda para aquellas personas que necesiten resolver alguna ecuación funcional ya que éstas tienen una gran aplicación en diferentes campos de estudio. Ejemplos de aplicaciones se ven en [5].

Cabe destacar que para resolver una ecuación funcional se pueden utilizar una o más de las recomendaciones que se darán, además, podría suceder que haya diferentes formas de obtener las soluciones.

En el primer capítulo veremos un poco de historia acerca de las ecuaciones funcionales, su definición y unos ejemplos elementales que servirán después como base para la resolución de una buena cantidad de ecuaciones funcionales.

Dentro del capítulo dos y tres se dan una serie de sugerencias y recomendaciones para resolver ecuaciones funcionales. Las recomendaciones del capítulo dos son las primeras que se pueden aplicar para encontrar la solución de la ecuación dada, mientras que las del capítulo tres son más avanzadas y se necesita un conocimiento más profundo acerca de diversas propiedades de las funciones. Cada una de las recomendaciones viene acompañada de ejemplos sobre como utilizarla.

En el capítulo cuatro se dan más ejemplos de ecuaciones con variable discreta. Para la resolución de dichos ejemplos se utilizan propiedades de los números naturales, enteros y los racionales, además de algunos problemas en los que se utilizan conceptos de teoría de números, tales como la divisibilidad, factorización en primos, etc.

Las ecuaciones con variable real se estudian con más detenimiento en el capítulo cinco. Se verá el caso particular en el que la función solución sea un polinomio. Además, si la ecuación por resolver no es lineal, se dan sugerencias para linealizarla. También resolveremos la ecuación de Abel y la de Schröder. Al final del capítulo se dan otras soluciones a la ecuación funcional aditiva de Cauchy que no son las funciones afines, tales soluciones reciben el nombre de funciones salvajes, ya que las gráficas de éstas es un subconjunto denso de $\mathbb{R}^2$.

En cierto tipo de ecuaciones se utilizan iteraciones de funciones o se necesita encontrar algún tipo de sucesión o recurrencia, para lo cual se utilizan las ecuaciones en diferencias, otro nombre que reciben son relaciones recurrentes. Este tipo de ecuaciones se verán en el capítulo seis.

Para finalizar, en el capítulo siete se resuelven una gran variedad de problemas que han aparecido en la IMO, así como en diversas competencias regionales y de algunos países, se propone sólo una forma de resolver cada problema, aunque sin duda no es la única. Varias de las soluciones se encuentran dentro de los libros listados en la bibliografía, en especial aquellos que se refieren a los concursos [4], [8], [10], [24], [25], [26], [28], [30], [31], [32], [33], [34].

Cuando se demuestre un teorema o un lema terminaremos la demostración con un cuadrado negro $\blacksquare$ y para señalar que se ha terminado con la solución de un ejemplo o problema utilizaremos un cuadrado blanco $\square$.

Los conceptos que se necesitan para resolver ecuaciones funcionales se dan en el Apéndice A y algunos otros se darán cuando se requieran en el transcurso del presente trabajo.

Índice general

Capítulo 1

Ejemplos fundamentales

En este primer capítulo veremos la definición de ecuación funcional así como un poco de historia acerca de como se fueron desarrollando tales ecuaciones a través de los años. Además veremos unos ejemplos esenciales cuando se estudian este tipo de ecuaciones.

A los conjuntos de números naturales, enteros, racionales y reales los denotaremos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, respectivamente. Los reales positivos son $\mathbb{R}^+$ y los racionales positivos $\mathbb{Q}^+$. En algunos problemas será necesario incluir al cero en algún conjunto A por lo que denotaremos $A_0 = A \cup \{0\}$; por ejemplo $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ es el conjunto de los números naturales unión el cero.

En un sentido general una *ecuación funcional* es una ecuación en la que se tienen variables, funciones dadas, así como una o varias funciones incógnitas. No tomaremos en cuenta ecuaciones que contengan derivadas e integrales.

Al resolver ecuaciones funcionales lo que buscaremos es la función o funciones que satisfagan la ecuación funcional dada. En algunos casos, además de encontrar la solución, debemos decidir si es única, o bien, caracterizar a la familia de funciones que satisface dicha ecuación.

1.1. Definición de ecuación funcional

Empezaremos dando la definición de *término*, la cual es esencial para la definición de ecuación funcional.

Definición 1.1 *Los únicos **términos** son los siguientes*

1. *Las variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_k$.*

2. *Si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son **términos** y F es una función de m variables entonces $F(A_1, \ldots, A_m)$ también es un **término**.*

3. No hay otros ***términos****.*

Entonces un término contiene un determinado número de variables (k) y un determinado número de funciones (n). En ecuaciones funcionales algunas funciones son conocidas mientras otras son incógnitas.

Ya teniendo la definición de término continuamos con el concepto principal que manejaremos, la definición de *ecuación funcional*.

Definición 1.2 *Una* ***ecuación funcional*** *es una igualdad*

$$A_1 = A_2$$

entre dos ***términos*** A_1 *y* A_2*, que contiene al menos una función incógnita, un número finito de variables independientes así como un número finito de funciones conocidas.*

Esta igualdad se debe satisfacer con respecto a todas las variables que aparecen en ella y que pertenecen a un determinado conjunto. Algunos ejemplos de ecuaciones funcionales son los siguientes

$$f(xy) = f(x) + f(y), \tag{1.1}$$

$$g(x+y) + g(x-y) = 2f(x)h(y), \tag{1.2}$$

$$F(x,y) + F(y,z) = F(x,z). \tag{1.3}$$

En la ecuación (1.1) tenemos las variables independientes x e y, así como la función f de una variable, los cuales son términos. En este caso podemos ver la ecuación como la siguiente igualdad entre dos términos A_1 y A_2

$$\begin{aligned} A_1 &= F(x,y,f) = f(xy), \\ A_2 &= G(x,y,f) = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Para la ecuación (1.2) hay dos variables independientes x e y; también tenemos las funciones g, f, y h, todas estas funciones son de una variable y cada una de estas, así como las variables son términos. Aquí se puede observar que

$$\begin{aligned} A_1 &= F(x,y,g) = g(x+y) + g(x-y), \\ A_2 &= G(x,y,f,h) = 2f(x)h(y). \end{aligned}$$

Para (1.3) tenemos 3 variables independientes que son x, y, z además de la función F de dos variables, por lo que

$$\begin{aligned} A_1 &= G(x,y,z,F) = F(x,y) + F(y,z), \\ A_2 &= H(x,z,F) = F(x,z). \end{aligned}$$

También tenemos las siguientes definiciones que se refieren al número de variables y a las funciones de una o más variables que aparecen en una ecuación funcional.

Definición 1.3 *Una ecuación funcional en la que todas las funciones incógnitas son de una variable se le llama* ***ecuación funcional ordinaria.*** *A una ecuación funcional en la que al menos una de las funciones incógnita es una función de más de una variable se le llama* ***ecuación funcional parcial.***

Definición 1.4 *Al número de variables independientes que aparecen en una ecuación funcional se le llama el* ***rango de la ecuación****.*

En general trabajaremos con ecuaciones funcionales ordinarias, es decir, con ecuaciones cuya solución será una función $f : A \to B$ con $A, B \subseteq \mathbb{R}$, aunque también veremos algún ejemplo de ecuaciones funcionales parciales.

En lo referente al rango, casi todas las ecuaciones que estudiaremos son de rango 1, 2 ó 3. Por ejemplo, la ecuación (1.1) es una ecuación funcional ordinaria de rango 2, ya que es una función real y contiene a las variables x, y. La ecuación (1.3) es una ecuación funcional parcial, pues F es una función de dos variables y tiene rango 3, ya que las variables independientes son x, y y z.

Al conjunto en donde está definida la solución de una ecuación funcional se le conoce como *dominio de la ecuación funcional* el cual no hay que confundir con el dominio de las funciones que están involucradas en dicha ecuación. En algunas ocasiones se da el dominio en el que deben estar definidas la solución o soluciones y si el dominio no se da de manera explícita se intentará encontrar el máximo dominio en donde esté definida la solución. Pasemos a la definición de *solución* de una ecuación funcional.

Definición 1.5 *Una* ***solución particular*** *de una ecuación funcional es cualquier función que satisface la ecuación funcional en el dominio considerado y dentro de la clase de funciones con las que se trabaja.*

Ejemplo. Las funciones $f_0(x) = -3x$ y $f_1(x) = 5x$ satisfacen la ecuación funcional $f(x + y) = f(x) + f(y)$, con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. $\square$

Definición 1.6 *La* ***solución general*** *es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación funcional dentro de la clase de funciones considerada y en el dominio que se tome en cuenta.*

Ejemplo. La solución general de la ecuación

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua es

$$f(x) = cx, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Siempre buscaremos la solución general de la ecuación funcional dada, en algunos casos la solución general puede ser algún conjunto finito o infinito de funciones, mientras que en otros casos podría no existir, es decir, que no haya función alguna que satisfaga la ecuación funcional en cuestión.

En algunos problemas se pide encontrar la función o funciones que satisfagan dos o más ecuaciones funcionales, las cuales forman un sistema de ecuaciones, por lo que tenemos la siguiente

Definición 1.7 *Un* ***sistema de ecuaciones funcionales*** *consiste de $p \geq 2$ ecuaciones funcionales que contienen $n \geq 1$ funciones incógnitas.*

Ejemplos de sistemas de ecuaciones funcionales son los siguientes

$$\begin{cases} f(x^2) = [f(x)]^2, \\ f(x+1) = f(x) + 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(2x) = [g(x)]^2, \\ g(-x) = \dfrac{1}{g(x)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y), \\ g(x+y) = g(x)f(y) + g(y)f(x). \end{cases}$$

Hay que tener en cuenta que el rango, número de funciones y ecuaciones es esencial, es decir, ninguna de las variables, funciones o ecuaciones puede ser eliminada de manera trivial.

1.2. Referencias históricas

Un primer ejemplo de ecuación funcional lo dio Nicole d'Oresme (1323-1382), matemático francés quien usó una variante de lo que ahora conocemos como sistema coordenado y definió las *cualidades diformes* y las *cualidades uniformemente diformes*, él decía:

> *"Una cualidad uniformemente diforme es una para la cual, dados cualesquiera tres puntos, la razón de la distancia entre el primer y el segundo punto con la distancia entre el segundo y tercer punto es igual a la razón del exceso en intensidad del primero sobre el segundo con la del segundo sobre el tercero..."*[1]

lo cual nos lleva a la ecuación funcional

$$\frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_2) - f(x_3)}. \tag{1.4}$$

Así, las *cualidades uniformemente diformes* que describe Oresme son las funciones afines. [2] En particular, sus *cualidades uniformes* son las funciones constantes. Esto es lo que caracterizaba la definición de Oresme, pues una función constante no satisface las

[1] Ver [2] página 357.

[2] Las funciones afines son aquellas de la forma $f(x) = ax + b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

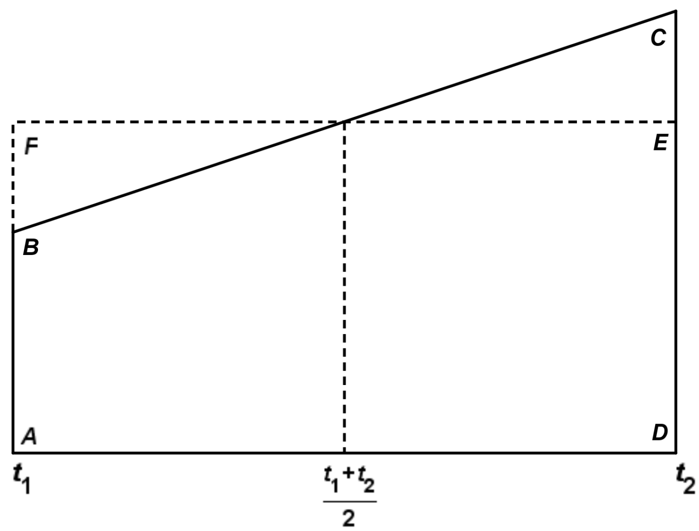

Figura 1.1: El teorema de Merton.

condiciones de una cualidad uniformemente diforme.

Si en (1.4) elegimos x_2 el punto medio entre x_1 y x_3 obtenemos la ecuación de Jensen, la cual estudiaremos más adelante

$$f\left(\frac{x_1+x_3}{2}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_3)}{2}. \tag{1.5}$$

Este argumento está relacionado con lo que ahora se conoce como el Teorema de Merton, llamado así debido a que los autores del teorema trabajaban en el Colegio Merton, en Oxford. Este teorema establece que la distancia cubierta por un objeto en movimiento en línea recta con velocidad uniformemente diforme es igual a la cubierta por un objeto cuya velocidad es uniforme (constante) e igual a la media aritmética de la velocidad inicial y final del primer objeto. En términos modernos si $x(t)$ denota la distancia cubierta por el primer objeto y $v(t)$ su velocidad, esto se traslada a la ecuación funcional siguiente

$$x(t_2)-x(t_1)=\frac{v(t_1)+v(t_2)}{2}\,(t_2-t_1)\,,$$

Oresme utilizó la ecuación anterior en la forma

$$x(t_2)-x(t_1)=v\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)(t_2-t_1)\,. \tag{1.6}$$

Dicho en términos modernos, el Teorema de Merton relaciona un hecho del cálculo integral con la ecuación funcional (1.5). Oresme dió una justificación geométrica de este

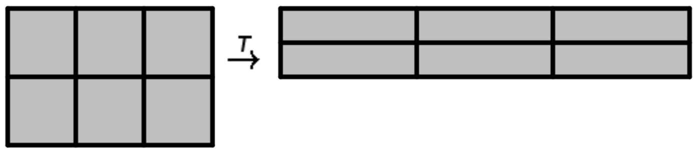

Figura 1.2: Área invariante de un rectángulo bajo T.

resultado usando la igualdad de áreas de un trapecio y un rectángulo para probar la ecuación (1.6) (ver la figura (1.1)).

Tiempo después, Gregorio de San Vicente (Belgica, 1584–1667) trabajó con un tipo de ecuaciones funcionales al calcular el área bajo la hipérbola, para lo cual utilizaba el siguiente hecho: "si una región plana es estirada horizontalmente por un factor dado y al mismo tiempo es encogido verticalmente por el mismo factor, entonces el área de la región obtenida será la misma que el área de la región original."[3]

Lo anterior se puede observar claramente con rectángulos, como en la figura (1.2), en la cual mediante la transformación T se estira horizontalmente y se encoje verticalmente por un factor igual a dos.

Pero ya no resulta tan claro si en lugar de rectángulos tenemos otro tipo de figuras, tal como se muestra en la figura (1.3). Sin embargo, utilizando cálculo integral es fácil ver que el área sí se mantiene invariante. Para calcular el área de una región Ω en el plano tenemos la siguiente fórmula

$$\text{Área}(\Omega) = \int\int_{\Omega} dxdy.$$

Si a la región le aplicamos la siguiente transformación

$$T(x,y) = (rx, \tfrac{y}{r}),$$

tenemos que el área de la nueva región $T(\Omega)$ está dada por la siguiente integral

$$\text{Área}(T(\Omega)) = \int\int_{T(\Omega)} |J|\, dudv.$$

[3]Ver [21] página 6.

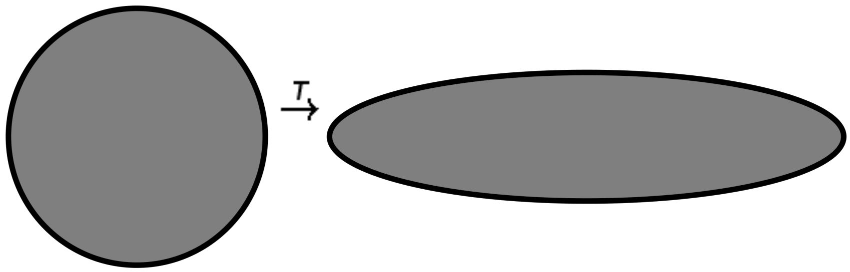

Figura 1.3: Área invariante bajo T.

En donde $u = rx$, $v = \frac{y}{r}$ y $|J|$ es el determinante del Jacobiano de la transformación T, el cual es

$$|J| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{vmatrix} = r\frac{1}{r} = 1,$$

por lo que

$$\text{Área}(\Omega) = \int\int_{\Omega} dxdy = \int\int_{T(\Omega)} dudv = \text{Área}(T(\Omega)).$$

Cuando Gregorio de San Vicente calculaba el área de una región bajo la hipérbola $g(x) = x^{-1}$, digamos en el intervalo $[1, x]$, se dio cuenta que si multiplicaba por un factor y el intervalo $[1, x]$ el área comprendida de 1 hasta x era la misma que el área desde y hasta xy (ver figura (1.4)). Nombremos $f(x)$ el área comprendida desde 1 a x entonces tenemos que

$$f(x) = f(xy) - f(y),$$

lo cual nos lleva a la ecuación funcional logarítmica

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

En los cursos de cálculo integral, al calcular el área bajo la hipérbola se llega a una integral en específico, por lo que la función $f(x)$ quedaría determinada de la siguiente forma

$$f(x) = \log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt,$$

la cual es solución de la funcional logarítmica y fue estudiada por Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Esta ecuación la veremos con detalle más adelante.

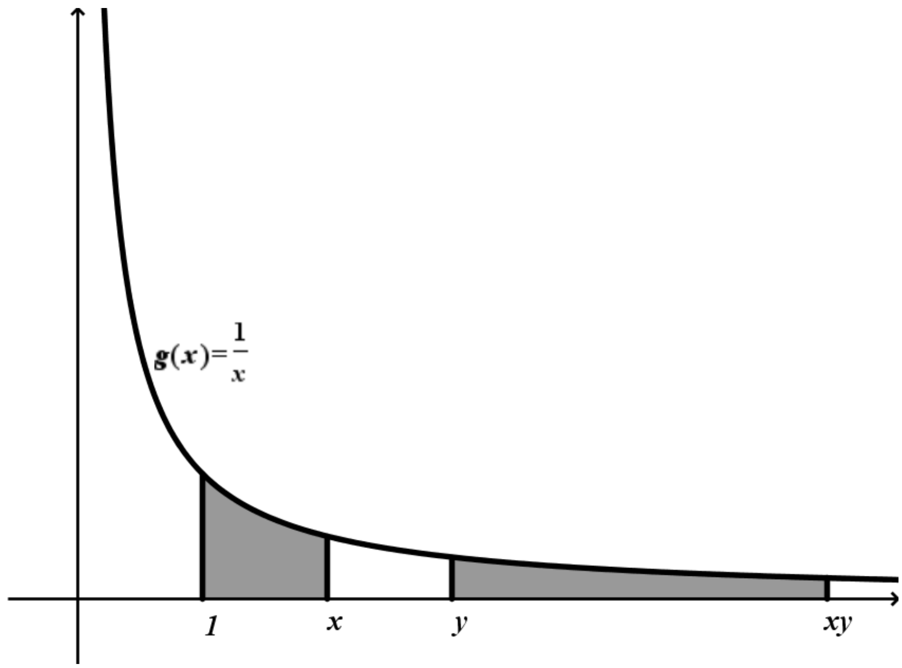

Figura 1.4: Área bajo la hipérbola.

La ecuación funcional que se asocia a Cauchy es la ecuación funcional aditiva[4]

$$f(x+y) = f(x) + (y),$$

válida para todo par de números reales x, y. A ésta se le conoce como la ecuación de Cauchy, la cual también veremos después. Otra de las motivaciones que tenía Cauchy para resolver la ecuación funcional aditiva era encontrar una generalización para el teorema del binomio

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + x^n,$$

en donde $n \in \mathbb{N}$ y los coeficientes de cada miembro de esta suma son las entradas del triángulo de Pascal, los cuales están definidos por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Para su época, Issac Newton (1642-1727) desarrolló una fórmula para $(1+x)^z$ donde x y z son dos números reales cualquiera

[4]Ver [6], pág. 133-135.

$$(1+x)^z = 1 + zx + \binom{z}{2}x^2 + \binom{z}{3}x^3 + \dots. \tag{1.7}$$

Pero fue Cauchy quien demostró que si $|x| < 1$ entonces el lado derecho de (1.7) converge para todo $z \in \mathbb{R}$, de tal manera que definió la función

$$f(z) = 1 + zx + \binom{z}{2}x^2 + \binom{z}{3}x^3 + \dots$$

y demostró que estas sumas cumplen con la siguiente ecuación

$$f(z+w) = f(z)f(w).$$

Otra de las ecuaciones funcionales más conocidas es la ecuación dada por Jean le Rond D'Alembert (1717-1783), la cual se puede resolver fácilmente utilizando cálculo diferencial. La ecuación es la siguiente[5]

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y). \tag{1.8}$$

Si queremos encontrar las soluciones para $x, y \in \mathbb{R}$ hagamos primero $x = y = 0$, con lo cual obtenemos $2f(0) = 2[f(0)]^2$ luego $f(0) = 0$ ó $f(0) = 1$.

Al tomar $y = 0$ tenemos que $2f(x) = 2f(x)f(0)$, si tomamos en cuenta $f(0) = 0$ llegamos a que $f(x) = 0$, la cual es solución de la ecuación funcional.

Veamos que pasa en el caso $f(0) = 1$. Si hacemos $x = 0$ tenemos que

$$f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y),$$

como $f(0) = 1$ tenemos que $f(y) = f(-y)$, por lo que la función f es par. Ahora si derivamos dos veces con respecto a y en ambos lados de la ecuación (1.8) y después hacemos $y = 0$ obtenemos

$$f''(x) = kf(x),$$

donde $k = f''(0)$ de aquí que la ecuación que resuelve la ecuación (1.8) debe ser de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \cosh(\sqrt{k}x) & \text{si } k > 0, \\ \cos(\sqrt{-k}x) & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Todo esto suponiendo que $f(x)$ es dos veces diferenciable. Más adelante encontraremos la solución suponiendo solamente que la función es continua.

Otra persona que estudió las ecuaciones funcionales fue Charles Babbage (1791-1871), quien trabajó con dos tipos de ecuaciones funcionales, las ecuaciones del primer tipo eran de la forma

$$F[x, f(x), f(\alpha_1(x)), f(\alpha_2(x)), \dots, f(\alpha_n(x))] = 0, \tag{1.9}$$

[5]Ver [6], página 141 y [21], páginas 9-10.

en donde la función F y las funciones α_i con $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ están dadas y la función f es la que tenemos que determinar.

El otro tipo de ecuaciones con las que trabajó y a las que llamó *ecuaciones funcionales de orden* n son de la forma

$$F[x, f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x)] = 0,$$

donde $f^j(x)$ es la composición de j veces la función f. En este caso la función F está dada y f es la función incógnita. Por ejemplo, el primer problema que trató era determinar todas las funciones que satisfacen la siguiente ecuación funcional

$$f(x) = f(\alpha(x)). \tag{1.10}$$

Es fácil ver que la ecuación anterior tiene muchas soluciones. Si hemos encontrado una solución f_0 entonces todas las funciones que tengan la siguiente forma también serán solución

$$f(x) = \sigma(f_0(x)),$$

en donde σ es una función arbitraria. Como f_0 satisface (1.10) entonces

$$f(\alpha(x)) = (\sigma \circ f_0 \circ \alpha)(x) = \sigma(f_0(\alpha(x))) = \sigma(f_0(x)) = f(x),$$

veamos un ejemplo.

Ejemplo. De las ecuaciones del tipo (1.10) tienen particular interés los casos en los que $\alpha(x)$ es una *involución*, es decir, en el caso en que la función α aplicada dos veces nos da la identidad, como en la siguiente ecuación

$$f(x) = f\left(\frac{x}{x-1}\right). \tag{1.11}$$

En este caso tenemos que

$$\alpha(x) = \frac{x}{x-1}, \qquad \alpha(\alpha(x)) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = x,$$

siempre y cuando $x \neq 1$.

Una solución general para la ecuación (1.10) cuando α es una involución es

$$f(x) = \tau(x, \alpha(x)), \tag{1.12}$$

en donde $\tau(u, v)$ es una función simétrica de u y v, es decir

$$\tau(u, v) = \tau(v, u).$$

Una solución de (1.11) es la siguiente función

$$f(x) = \cos(\log(x-1)). \tag{1.13}$$

Veamos que efectivamente (1.13) es solución de (1.11). Calculemos $f(\frac{x}{x-1})$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{x-1}\right) &= \cos\left(\log\left(\frac{x}{x-1}-1\right)\right), \\ &= \cos\left(\log\left(\frac{1}{x-1}\right)\right) = \cos\left(-\log\left(x-1\right)\right), \\ &= \cos\left(\log\left(x-1\right)\right) = f(x). \end{aligned}$$

Por lo que efectivamente, la solución se puede escribir como una función simétrica de x y $\alpha(x)$

$$f(x) = \cos\left(\log\left(x-1\right)\right) = \tau\left(x, \frac{x}{x-1}\right),$$

en donde

$$\tau(x,y) = \cos\left(\log\left(\frac{x}{y}\right)\right).$$

□

Babbage también se dio cuenta que si tenemos una función simétrica o antisimétrica, (la función τ es antisimétrica si $\tau(u,v) = -\tau(v,u)$) entonces una solución para la siguiente ecuación

$$\tau(x, f(x)) = 0, \tag{1.14}$$

es una involución, es decir $f(f(x)) = x$. Veamos dos ejemplos.

Ejemplo. Sea $\tau(u,v) = u^2 - v^2$, esta es una función antisimétrica que nos lleva a la siguiente ecuación funcional

$$x^2 - [f(x)]^2 = 0 \tag{1.15}$$

por lo que $x^2 = [f(x)]^2$, entonces tenemos que las siguientes funciones $f(x) = x$ y $f(x) = -x$ son soluciones de la ecuación (1.15) y son involuciones. □

Ejemplo. Sea $\tau(u,v) = (u^2+u) + (v^2+v)$, en este caso τ es una función simétrica de la cual obtenemos la siguiente ecuación

$$f(x)\left(1+f(x)\right) = -x(1+x) \quad \Rightarrow \quad x(1+x) + f(x) + [f(x)]^2 = 0. \tag{1.16}$$

Entonces la ecuación anterior es una ecuación cuadrática la cuál podemos resolver con la fórmula general, con lo que obtenemos las siguientes dos soluciones

$$f_1(x) = \frac{-1+\sqrt{1-4x(1+x)}}{2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \frac{-1-\sqrt{1-4x(1+x)}}{2}.$$

Analizando las dos funciones podemos ver que f_1 es una involución en el siguiente conjunto (ver figura (1.5)).

$$\left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{1}{2} \le x \le \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right\},$$

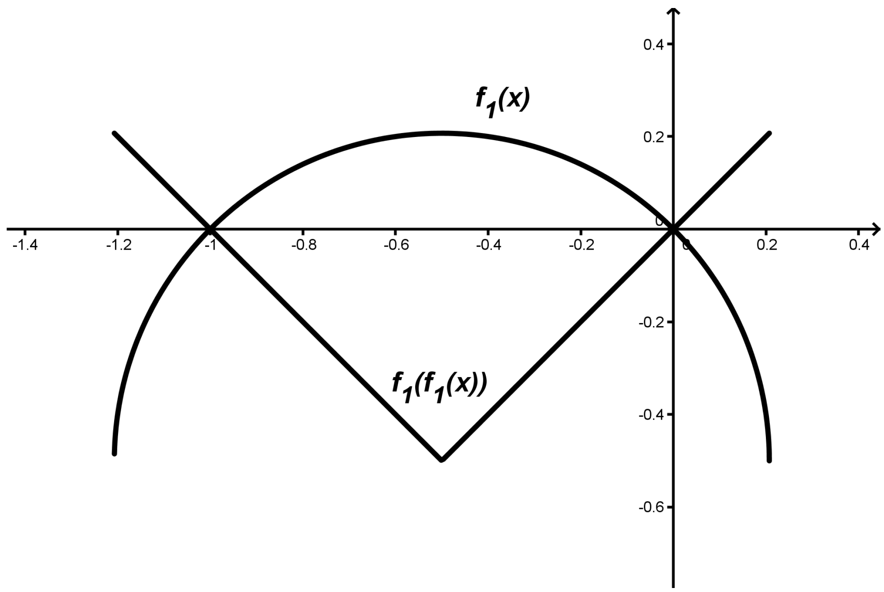

Figura 1.5: Solución de la ecuación simétrica $\tau(u,v) = (u^2+u) + (v^2+v)$.

además, el conjunto en donde f_2 es una involución es el siguiente

$$\left\{ x \in \mathbb{R};\ \frac{-(\sqrt{2}+1)}{2} \le x \le -\frac{1}{2} \right\}.$$

□

Entonces podemos encontrar muchas soluciones para la ecuación $f^2(x) = x$, solo necesitamos encontrar soluciones de $\tau(u,v)$, en donde τ es una función simétrica o antisimétrica.

Babbage notó que utilizando este tipo de soluciones podía generar muchas más. Si tomamos una función ψ que sea inyectiva entonces ψ^{-1} está bien definida y si además f es una involución tenemos que

$$g(x) = (\psi^{-1} \circ f \circ \psi)(x), \tag{1.17}$$

también es una involución, como lo vemos enseguida

$$\begin{aligned} g^2(x) &= (\psi^{-1} \circ f \circ \psi)((\psi^{-1} \circ f \circ \psi)(x)), \\ &= \psi^{-1}(f^2(\psi(x))), \\ &= \psi^{-1}(\psi(x)), \\ &= x. \end{aligned}$$

Babbage en uno de los problemas que propuso preguntaba por la solución de la siguiente ecuación

$$f^2(x) = \alpha(x). \tag{1.18}$$

Si buscamos soluciones que sean de la forma

$$f(x) = (\psi^{-1} \circ \beta \circ \psi)(x),$$

en donde β es una función dada y ψ es una función que tenemos que encontrar. De este modo $\alpha(x)$ se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= f^2(x), \\ &= (\psi^{-1} \circ \beta^2 \circ \psi)(x), \end{aligned}$$

en este caso β no es una involución a menos que $\alpha(x) = x$. De la ecuación anterior tenemos que $\psi(x)$ debe ser una solución de la siguiente ecuación funcional

$$\psi(\alpha(x)) = \beta^2(\psi(x)).$$

Las ecuaciones de este tipo son llamadas *conjugadas*, las cuales veremos más adelante, en particular veremos la ecuación de Abel y la de Schröder.

1.3. Ecuaciones de Cauchy

En [6], Cauchy menciona cuatro ecuaciones funcionales, para las cuales las funciones que las resuelven satisfacen ciertas propiedades. Aquí vamos a resolver estas cuatro ecuaciones, pues la técnica que utilizó Cauchy para encontrar las soluciones nos servirá para resolver otras ecuaciones funcionales.

Además, si alguna ecuación funcional se puede reducir a alguna de las ecuaciones de Cauchy, se podrá obtener de manera directa la función que resuelva dicha ecuación. Las ecuaciones funcionales del tipo de Cauchy son

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{ecuación aditiva,} \tag{1.19}$$
$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \qquad \text{ecuación logarítmica,} \tag{1.20}$$
$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \qquad \text{ecuación exponencial,} \tag{1.21}$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \qquad \text{ecuación multiplicativa.} \tag{1.22}$$

Como ya habíamos comentado, para establecer qué funciones satisfacen una cierta ecuación funcional debe tenerse presente el dominio y el codominio donde se desean resolver. Por ejemplo si en la ecuación (1.20) se desea resolver en todo $\mathbb{R}$, al considerar $y = 0$ resulta que $f(x) = 0$ para toda x, la cual es una ecuación simple; para esta ecuación el dominio es $\mathbb{R}^+$, los reales positivos. También se debe tener presente si hay alguna condición adicional a la ecuación funcional. Por ahora nos restringiremos a cuando la variable son números racionales.

1.3.1. La ecuación de Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Primero resolveremos la ecuación (1.19) con f no necesariamente continua y $x, y \in \mathbb{Q}$, para lo cual tenemos la siguiente

Definición 1.8 *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es **racionalmente homogénea** si y sólo si*

$$f(rx) = rf(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Veamos que la ecuación aditiva de Cauchy es racionalmente homogénea. Al tomar $x = y = 0$, se tiene $f(0) = 2f(0)$, por lo que $f(0) = 0$.

Si $y = -x$, se tiene $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, por lo que

$$f(-x) = -f(x),$$

lo que nos dice que la función f deberá ser impar. Con $x = y$, se tiene que $f(2x) = 2f(x)$. Ahora usando inducción matemática se puede concluir que

$$f(nx) = nf(x), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.23}$$

Para $n = 1, 2$ ya vimos que es válido, supongamos que es válido para n y comprobemos para $n + 1$.

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x),$$

por lo que $f(nx) = nf(x)$ para $n \in \mathbb{N}$. Usando que $f(-x) = -f(x)$ se obtiene que $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Por otro lado, como $x = \frac{mx}{m}$ con m natural tenemos lo siguiente

$$f(x) = f\left(\frac{m}{m}x\right) = f\left(m\frac{x}{m}\right) = mf\left(\frac{x}{m}\right),$$

despejando $\dfrac{1}{m}f(x)$ resulta que

$$f\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{1}{m}f(x). \tag{1.24}$$

Al combinar las ecuaciones (1.23) y (1.24) llegamos a

$$f\left(\frac{n}{m}x\right) = f\left(n\frac{x}{m}\right) = nf\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{n}{m}f(x).$$

Así $f(rx) = rf(x)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Si hacemos $c = f(1)$, tendremos que $f(r) = cr$, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Podemos concluir que una función definida solamente en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales que satisfaga la ecuación (1.19) deberá ser de la forma $f(r) = cr$, para todo $r \in \mathbb{Q}$, con $c = f(1)$ una constante fija. Desde luego una función de este tipo $f(x) = cx$ satisface la ecuación de Cauchy (1.19), pues $c(x + y) = cx + cy$, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Q}$. Veremos en la siguiente sección un teorema que nos permitirá extender la solución continua de la ecuación de Cauchy en el dominio de los números reales.

1.3.2. Hipótesis adicionales a la ecuación funcional de Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Empezaremos con un teorema que nos servirá cuando necesitemos encontrar soluciones continuas en todos los reales y sólo podamos encontrar funciones que resuelvan la ecuación en algún subconjunto denso de $\mathbb{R}$. En el enunciado del teorema se podría utilizar $\mathbb{Q}$ en lugar de cualquier subconjunto denso de los reales, pero más adelante encontraremos funciones definidas en subconjuntos densos que no son precisamente los racionales.

Teorema 1.9 *Sean f y g dos funciones continuas definidas en $\mathbb{R}$, sea $D \subset \mathbb{R}$ subconjunto denso, supongamos que $f(d) = g(d)$ para todo $d \in D$ entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$, como D es denso en $\mathbb{R}$ tenemos que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $\{d_n\} \subset D$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d_n = x.$$

Ahora bien, como f y g son continuas se cumplen las siguientes igualdades

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} d_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(d_n) \quad \text{y} \quad g(x) = g\left(\lim_{n\to\infty} d_n\right) = \lim_{n\to\infty} g(d_n).$$

Como f y g coinciden en D entonces $f(d_n) = g(d_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por lo que $\lim_{n\to\infty} f(d_n) = \lim_{n\to\infty} g(d_n)$ y entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

A continuación se da una lista de hipótesis adicionales para la ecuación aditiva de Cauchy y su respectiva solución.

1. La función es continua en todo $\mathbb{R}$

En vista del teorema anterior, como $\mathbb{Q}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{R}$, $f(r) = cr$ para toda $r \in \mathbb{Q}$ y además $g(x) = cx$ para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces podemos extender el dominio de la función f a $\mathbb{R}$, por lo que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y utilizando el teorema anterior tenemos que

$$f(x) = cx, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

pues f coincide con g en $\mathbb{Q}$, el cual es denso en $\mathbb{R}$.

2. La función es continua solamente en $x = 0$

Si la función es continua en 0 entonces es continua en $a \in \mathbb{R}$, lo cual vemos en el siguiente

Lema 1.10 *Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface la ecuación $f(x+y) = f(x) + f(y)$ y es continua en 0 entonces es continua en cualquier real a.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión con $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, entonces la sucesión $\{a_n - a\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - a) = 0.$$

La continuidad de f en 0, nos garantiza que

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n - a) = 0.$$

Pero como f es aditiva nos lleva a que

$$f(a_n) = f(a_n - a) + f(a), \quad \text{para } n \in \mathbb{N}$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n - a) + \lim_{n\to\infty} f(a) = f(a),$$

lo que garantiza que f es continua en a. ∎

Tomando en cuenta este resultado tenemos que $f(x) = cx$ con $c \in \mathbb{R}$, pues f ya es continua en todos los reales.

El lema anterior lo utilizaremos más adelante cuando veamos funciones que cumplen la ecuación aditiva de Cauchy pero que no son de la forma $f(x) = cx$, a las funciones que no son de esa forma se les conoce como funciones *salvajes*.

3. La función es monótona

Si la función f además de aditiva es monótona, digamos, sin perdida de generalidad que es monótona creciente, entonces $f(x)$ deberá ser de la forma $f(x) = cx$. Veamos porqué.

Para todo número irracional x podemos encontrar sucesiones de números racionales $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que convergen a x y con $r_n < x < s_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por la monotonía de la función f, se tiene que

$$cr_n = f(r_n) < f(x) < f(s_n) = cs_n.$$

Al tomar límites tenemos que

$$cx = \lim_{n\to\infty} cr_n \leq f(x) \leq \lim_{n\to\infty} cs_n = cx.$$

Por lo que $f(x) = cx$ para toda $x \in \mathbb{R}$. El caso en el que la función es monótona decreciente es análogo. Podemos cambiar $<$ por $\leq$ y tendríamos la misma conclusión. Desde luego también en el caso de $\geq$.

4. La función es positiva en los reales positivos

Veremos que si la función además de aditiva es positiva en los positivos entonces es monótona creciente. Si $f(x) > 0$ para $x > 0$ entonces

$$x < y \Rightarrow y - x > 0,$$

como $f(x)$ es positiva tenemos que $f(y - x) > 0$. Por lo que

$$f(x) < f(x) + f(y - x) = f(x + (y - x)) = f(y),$$

lo que queríamos. Luego, si f es positiva en los positivos tenemos que es de la forma $f(x) = cx$.

5. La función es acotada

Si la función f es acotada en un intervalo de la forma $[a, b]$, es decir existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, la función deberá ser de la forma $f(x) = cx$, veamos porqué.

Notemos primero que
$$x \in [0, b-a] \Leftrightarrow x + a \in [a, b],$$
y para $x \in [0, b-a]$ tenemos lo siguiente
$$|f(x)| = |f(x+a) - f(a)| \leq |f(x+a)| + |f(a)| \leq 2M,$$
esto garantiza que f también está acotada por $2M$ en $[0, b-a]$.

Sean $\alpha = b - a$, $c = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$ y $g(x) = f(x) - cx$. Demostraremos que $g(x) = 0$, para lo cual notemos lo siguiente

1. La función g es aditiva, pues
$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) - c(x+y), \\ &= f(x) - cx + f(y) - cy, \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

2. También tenemos que $g(\alpha) = f(\alpha) - c\alpha = 0$, pues $c = \frac{f(x)}{\alpha}$.

3. La función g es periódica con periodo α, pues $g(x + \alpha) = g(x) + g(\alpha) = g(x)$.

4. Para $x \in [0, \alpha]$ tenemos que $|g(x)| = |f(x) - cx| \leq |f(x)| + |cx| \leq 2M + \left|\frac{f(\alpha)}{\alpha}\right| |\alpha| \leq 3M$, es decir g está acotada en el intervalo $[0, \alpha]$ y entonces por ser periódica es acotada en todo $\mathbb{R}$.

Si $g(x_0) \neq 0$ para algún real x_0, entonces como $g(nx_0) = ng(x_0)$ para todo entero n, podemos hacer $|g(nx_0)|$ tan grande como se desee, luego g no estará acotada, lo que sería una contradicción a la parte 4.

Por lo que $g(x) = 0$ para todo número real x y entonces $f(x) = cx$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. La función es acotada en una vecindad del cero

Si la función f es acotada en el cero entonces f es de la forma $f(x) = cx$, por la segunda hipótesis bastará ver que f es continua en 0.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión que converge a 0 y sea $\epsilon > 0$, veremos que
$$|f(a_n)| < \epsilon,$$

para $n \in \mathbb{N}$ grande. Si $M > 0$ es la cota de f en la vecindad $(-a, a)$, tomemos un natural N tal que $\frac{M}{N} < \epsilon$.
Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n| < \frac{a}{N} \qquad \forall n \geq n_0.$$

Como $|Na_n| < a$, se tiene que $|f(Na_n)| \leq M$ para $n \geq n_0$, pero como $f(Na_n) = Nf(a_n)$, tenemos que

$$|f(a_n)| \leq \frac{M}{N} < \epsilon, \qquad \text{si } n \geq n_0,$$

como se quería.

7. Si la gráfica de f es cerrada

La gráfica de f es el conjunto $graf(f) = \big\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2;\ x \in dom(f)\big\}$. Si f cumple la ecuación (1.19) entonces $f(x) = cx$ para $x \in \mathbb{Q}$ con $c = f(1)$. Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números racionales con

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x.$$

Como $f(a_n) = ca_n$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} ca_n = cx \qquad \Rightarrow \qquad (a_n, f(a_n)) \in graf(f).$$

Luego $(a_n, f(a_n))$ converge a (x, cx) dado que $graf(f)$ es cerrada, pero entonces deberá suceder que $(x, cx) = (x, f(x))$, lo que implica que $f(x) = cx$.

8. Otra prueba de que si f es continua y aditiva entonces es lineal (usando integrales)

Si en la ecuación (1.19) tomamos a f continua, fijamos x e integramos con respecto a y tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 f(x)dy \\ &= \int_0^1 [f(x+y) - f(y)]dy \\ &= \int_x^{x+1} f(u)du - \int_0^1 f(y)dy, \quad \text{con } u = x + y. \end{aligned}$$

Y como f es continua podemos aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo en el lado derecho de la ecuación anterior por lo tanto f es derivable y se tiene que

$$f'(x) = f(x+1) - f(x)$$

pero como f es aditiva se tiene que $f(x+1) = f(x) + f(1)$ y entonces $f'(x) = f(1)$. Integrando obtenemos que $f(x) = f(1)x + c$, en donde $c \in \mathbb{R}$, como f es aditiva tenemos que $f(0) = 0$, luego $c = 0$ y la solución de (1.19) es $f(x) = f(1)x$.

La siguiente si es una hipótesis adicional para garantizar que una función aditiva sea lineal.

9. Si f es localmente integrable

Primero veamos que significa ser *localmente integrable.*

Definición 1.11 *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es localmente integrable si y sólo si es integrable sobre todo intervalo finito.*

Veamos que si f es aditiva y es localmente integrable entonces f es lineal. Como f es aditiva y localmente integrable entonces se cumple lo siguiente

$$
\begin{aligned}
yf(x) &= \int_0^y f(x)dt \\
&= \int_0^y [f(x+t) - f(t)]dt \\
&= \int_x^{x+y} f(u)du - \int_0^y f(t)dt \quad \text{con } u = x+t, \\
&= \int_0^{x+y} f(u)du - \int_0^x f(u)du - \int_0^y f(u)du \\
&= \int_0^{y+x} f(u)du - \int_0^y f(u)du - \int_0^x f(u)du \\
&= xf(y).
\end{aligned}
$$

en donde la última igualdad se da, pues podemos intercambiar x por y, pero si $yf(x) = xf(y)$ entonces $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}$ para $x \neq 0$, luego $\frac{f(x)}{x} = c$.

Como f es aditiva tenemos que $f(0) = 0$, luego $f(x) = cx$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

10. Otras hipótesis

A continuación resolveremos ciertas ecuaciones funcionales en las que está involucrada la ecuación aditiva de Cauchy y además se piden ciertas hipótesis algebraicas.

Proposición 1.12 *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es aditiva y que satisface*

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} f(x), \qquad x \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

entonces f es lineal.

Demostración. Para $x \neq 0, 1, -1$ se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} f\left(x - \frac{1}{x}\right) &= f\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = \left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2 f\left(\frac{x}{x^2-1}\right) \\ &= \frac{(x^2-1)^2}{x^2} f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)\right) \\ &= \frac{(x^2-1)^2}{2x^2}\left(f\left(\frac{1}{x-1}\right) + f\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) \\ &= \frac{(x+1)^2}{2x^2} f(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2x^2} f(x+1) \\ &= \frac{x^2+1}{x^2} f(x) - \frac{2}{x} f(1) \\ &= f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} f(1). \end{aligned}$$

Ahora bien, como $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)$, de la ecuación anterior se tiene que $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} f(1)$. Luego $f(x) = f(1)x$ para todo $x \neq 0, 1, -1$, pero sabemos que para estos valores se cumple que $f(x) = f(1)x$. Por lo tanto $f(x) = f(1)x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Proposición 1.13 *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditiva y para alguna $a > 0$ se cumple que*

$$f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = a, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{1.25}$$

Entonces f es lineal.

Demostración. Notemos que f no puede ser constante, pues si lo fuera entonces $f(x) = \sqrt{a}$ pero como f es aditiva tenemos que $f(0) = 0$, una contradicción.

Como f es aditiva, para $x \neq 1, -1$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x^2-1}\right) &= f\left(\frac{1}{(x+1)(x-1)}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right) \\ &= \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right). \end{aligned}$$

Al hacer $x = 1$ obtenemos que $[f(1)]^2 = a$, utilizando esto y (1.25) en la ecuación anterior llegamos a

$$\frac{a}{f(x^2-1)} = \frac{a}{2f(x-1)} - \frac{a}{2f(x+1)}$$

por lo que

$$\frac{a}{f(x^2)-f(1)} = \frac{a}{2(f(x)-f(1))} - \frac{a}{2(f(x)+f(1))}.$$

Como $a > 0$ lo podemos eliminar, al hacer las operaciones correspondientes llegamos a que $f(x^2)f(1) = [f(x)]^2$, de lo cual obtenemos dos casos

- Si $f(1) > 0$. Entonces $f(x) > 0$ para $x > 0$, es decir, f es positiva en los positivos, luego f es lineal y además $f(x) = \sqrt{a}x$.
- Si $f(1) < 0$. En este caso $f(x) < 0$ para $x > 0$ y tal como se vió en la hipótesis 4 se puede demostrar en este caso que si f es negativa en los positivos entonces es decreciente, por lo que f es lineal y en este caso $f(x) = -\sqrt{a}x$.

Por lo que f es lineal. ■

Problema 1.14 *Encontrar todas las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que satisfacen*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad y \qquad f(xy) = f(x)f(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Solución. Tomando $x = y$ en la multiplicativa tenemos que $f(x^2) = [f(x)]^2$, es decir, $f(x) \geq 0$ para toda $x \geq 0$. Como f es aditiva y es positiva en los positivos entonces $f(x) = cx$, al sustituir esto en la multiplicativa tenemos que $c^2 = c$, por lo que $c = 0$ ó $c = 1$ luego $f(x) \equiv 0$ ó bien, $f(x) = x$. □

Proposición 1.15 *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *aditiva y que cumple*

$$f(x^m) = [f(x)]^m, \qquad x \in \mathbb{R},$$

con $m \in \mathbb{Z}$ *fijo,* $m \neq 0, 1$. *Entonces* f *es una de las siguientes funciones* $f(x) \equiv 0$ *ó* $f(x) = x$ *ó* $f(x) = -x$.

Demostración. Es claro que una solución es $f(x) \equiv 0$, busquemos soluciones que no sean idénticamente cero.

Considerando $m = 2n > 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $f(x) \geq 0$ para x positivos, luego $f(x) = cx$ por lo que $c = c^m$, de lo cual $c = 0$ ó $c = 1$. Tomando $c = 1$ obtenemos la solución $f(x) = x$ y si $c = 0$ es la solución que ya conocíamos, $f(x) \equiv 0$.

Si ahora tomamos $m = 2n + 1 > 0$ y $r \in \mathbb{Q}$ con $r \neq 0$ y sustituyendo x por $x + r$ en la ecuación funcional por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}
[f(x+r)]^m &= [f(x) + f(r)]^m \\
&= [f(x) + rf(1)]^m \\
&= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} [f(x)]^i \left(f(1)r\right)^{m-i}.
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
[f(x+r)]^m &= f((x+r)^m) \\
&= f\left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i r^{m-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{m}{i} f(x^i) r^{m-i}.
\end{aligned}$$

Hay que notar que en las ecuaciones anteriores se utilizó el hecho que f es aditiva. Si las ecuaciones anteriores las vemos como polinomios en la variable r e igualando los coeficientes obtenemos $f(1)[f(x)]^{m-1} = f(x^{m-1})$. Como m es impar entonces $[f(x)]^{m-1} \geq 0$. Entonces, si $f(1) > 0$ tenemos que $f(x) \geq 0$ y si $f(1) < 0$ se tiene que $f(x) \leq 0$ para $x \geq 0$. En cualquiera de los casos f es continua y entonces $f(x) = cx$ de lo cual obtenemos que $c^m = c$, además como m es impar tenemos que $c = 0, 1, -1$, lo cual nos lleva a las soluciones $f(x) = x$ ó $f(x) = -x$.

Ya sólo falta ver que se cumple para los enteros negativos, el caso $m = -1$ se vió en la proposición 1.13, por lo que tomaremos $m \neq -1$. De la ecuación original tenemos que

$$f(x^{m^2}) = [f(x)]^{m^2}, \qquad \text{con } m^2 \neq 1,$$

por los casos anteriores tenemos que $f(x) = x$ si m^2 es par ó $f(x) = -x$ si m^2 es impar. Sólo hay que notar que si m^2 es par entonces m es par y análogamente, si m^2 es impar entonces m es impar. ■

Problema 1.16 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditiva tal que*

$$f(x^n) = x^{n-m} f(x^m), \qquad x \in \mathbb{R},$$

se cumple para n y m enteros diferentes de cero y $n \neq m$. Muestra que f es continua y $f(x) = f(1)x$.

Solución. Sin perdida de generalidad supongamos que $n > m$. Sustituyendo x por $x + r$, con $r \in \mathbb{Q}$ diferente de cero, en la ecuación funcional obtenemos por un lado

$$\begin{aligned}
f((x+r)^n) &= f\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i r^{n-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} f\left(\binom{n}{i} x^i r^{n-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} r^{n-i} f(x^i)
\end{aligned}$$

del lado derecho tenemos que

$$\begin{aligned} x^{n-m} f(x^m) &= \left(\sum_{i=0}^{n-m} \binom{n-m}{i} x^i r^{m-i} \right) f \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i r^{m-i} \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-m} \binom{n-m}{i} x^i r^{m-i} \right) \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} r^{m-i} f(x^i). \end{aligned}$$

Igual que antes, si la ecuación de arriba la vemos como un polinomio en la variable r, al igualar los términos correspondientes obtenemos que $f(x) = f(1)x$. $\square$

Finalmente veremos un teorema que da caracterizaciones para garantizar que una función sea aditiva.

Teorema 1.17 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces son equivalentes los siguientes enunciados*

1. *La función f es aditiva.*
2. *La función f satisface*

$$[f(x+y)]^2 = [f(x) + f(y)]^2 \qquad \textit{para todo } x, y \in \mathbb{R}$$

3. *La función f satisface*

$$|f(x+y)| = |f(x) + f(y)| \qquad \textit{para todo } x, y \in \mathbb{R} \tag{1.26}$$

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) y 2) $\Rightarrow$ 3) Son claras.

3) $\Rightarrow$ 1) Haciendo $x = y = 0$ en (1.26) tenemos que $f(0) = 0$. Al hacer $y = -x$ obtenemos que $|f(x) + f(-x)| = 0$, luego $f(-x) = -f(x)$ con $x \in \mathbb{R}$, por lo que f es impar.

Utilizando que f es impar y (1.26) obtenemos

$$|f(y)| = |f(y + x - x)| = |f(x+y) + f(-x)| = |f(x+y) - f(x)|. \tag{1.27}$$

Sabemos que se cumple la *ley del paralelogramo* (ver [4]) para los números reales, es decir si $c, d \in \mathbb{R}$ entonces $|c+d|^2 + |c-d|^2 = 2c^2 + 2d^2$. Utilizando la ley del paralelogramo y las ecuaciones (1.26) y (1.27) primero con $c_0 = f(x+y)$, $d_0 = f(x) - f(y)$ y después con $c_1 = f(x+y) - f(x)$, $d_1 = f(y)$ obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} |c_0 + d_0|^2 + |c_0 - d_0|^2 &= 2|f(x+y)|^2 + 2|f(x) - f(y)|^2 \\ &= 2|f(x) + f(y)|^2 + 2|f(x) - f(y)|^2 \qquad \text{por (1.26)} \\ &= 4|f(x)|^2 + 4|f(y)|^2 \qquad \text{ley del paralelogramo.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |c_1 + d_1|^2 + |c_1 - d_1|^2 &= 2|f(x+y) - f(x)|^2 + 2|f(y)|^2 \\ &= 2|f(y)|^2 + 2|f(y)|^2 \qquad \text{por (1.27),} \\ &= 4|f(y)|^2. \end{aligned}$$

Las dos ecuaciones que se obtienen son

$$|f(x+y)+f(x)-f(y)|^2+|f(x+y)-f(x)+f(y)|^2=4|f(x)|^2+4|f(y)|^2, \quad (1.28)$$

$$|f(x+y)-f(x)+f(y)|^2+|f(x+y)-f(x)-f(y)|^2=4|f(y)|^2, \quad (1.29)$$

al intercambiar x por y en la última ecuación obtenemos

$$|f(y+x)-f(y)+f(x)|^2+|f(y+x)-f(y)-f(x)|^2=4|f(x)|^2. \quad (1.30)$$

Al sumar (1.29) y (1.30) e igualarla con (1.28) obtenemos

$$|f(x+y)-f(x)-f(y)|^2=0, \qquad x,y\in\mathbb{R}.$$

Por lo que $f(x+y)=f(x)+f(y)$, es decir, f es aditiva. ■

1.3.3. La ecuación de Cauchy $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$

Ahora encontraremos las soluciones continuas de la ecuación funcional.

$$f(x\cdot y)=f(x)+f(y).$$

Ya señalamos que si $x=0$ pertenece al dominio de f entonces $f(x)=0$. Supongamos ahora que $x\neq 0$. Si hacemos $x=y=1$ en la ecuación tenemos que

$$f(1)=2f(1) \qquad \Rightarrow \qquad f(1)=0.$$

Si ahora hacemos $x=y=-1$, nos lleva a que

$$f(1)=2f(-1) \qquad \Rightarrow \qquad f(-1)=0.$$

Ahora al hacer $y=-1$, obtenemos $f(-x)=f(x)$ esto nos indica que la función es par y quedará determinada por su comportamiento cuando x es positivo, el dominio natural de esta ecuación es $\mathbb{R}^+$, pero si x e y son positivos entonces existen $u,v\in\mathbb{R}$ de manera que $x=e^u$, $y=e^v$ por lo que la ecuación se puede expresar así

$$f(e^u\cdot e^v)=f(e^u)+f(e^v).$$

Haciendo $g(u)=f(e^u)$, es continua y cumple con

$$g(u+v)=g(u)+g(v),$$

que es la primera ecuación de Cauchy que sabemos se resuelve con $g(u)=cu$, con $c=g(1)=f(e)$, luego $f(x)=g(u)=f(e)\log x$, para $x>0$ y la solución es

$$f(x)=f(e)\log|x| \qquad \text{para } x\neq 0.$$

1.3.4. La ecuación de Cauchy $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

Resolveremos la ecuación $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, en donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua. Notemos primero que si para alguna y se tiene que $f(y) = 0$, entonces f es constante y $f(x) = 0$. En efecto esto se sigue de que $f(x) = f(x-y+y) = f(x-y)f(y) = 0$. Si f nunca es cero entonces es positiva pues se tiene que

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0.$$

Entonces, como f siempre es positiva podemos tomar logaritmo de ambos lados de la ecuación y tener ahora la ecuación funcional

$$\log f(x+y) = \log f(x) + \log f(y),$$

que es la ecuación funcional aditiva y si suponemos que f es continua se tendría que $\log f(x) = cx$, con $c = \log f(1)$, luego al aplicar la exponencial se tiene que

$$f(x) = e^{x \log f(1)} = f(1)^x \qquad \text{con } x \in \mathbb{R}.$$

Notemos que aquí también hemos encontrado las soluciones continuas.

1.3.5. La ecuación de Cauchy $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

Al igual que en las ecuaciones anteriores resolveremos la ecuación para f continua. Si para alguna $y \neq 0$, $f(y) = 0$, entonces f es constante, lo cual se sigue de que

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) f(y) = 0.$$

Si f nunca se anula entonces para x positivo $f(x)$ es positivo ya que

$$f(x) = f(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = [f(\sqrt{x})]^2 > 0.$$

Para $x = 1$, se tiene que $f(1) = (f(1))^2$, por lo que $f(1) = 0$ ó $f(1) = 1$, la primera opción ya ha sido tratada, veamos el caso $f(1) = 1$.

Como $f(x^2) = [f(x)]^2$ entonces $f(-1) = \pm 1$. Al hacer $y = -1$ en la ecuación original se tiene que $f(-x) = \pm f(x)$ por lo que bastará analizar que pasa con $x > 0$, después tendremos dos opciones para extender a los reales negativos ya sea haciendo la función par o impar.

Como para $x > 0$ la función f es positiva, podemos aplicar logaritmo en ambos lados de la igualdad y obtener

$$\log f(x \cdot y) = \log f(x) + \log f(y),$$

por lo que si consideramos a $g(x) = \log f(x)$, tenemos que g satisface (1.20) y entonces $g(x) = g(e) \log x$, de lo cual $f(x) = x^{g(e)} = x^{\log f(e)}$. Las soluciones continuas son entonces

$$f(x) = 0, \qquad f(x) = \pm x^{\log f(e)}.$$

Una observación, el punto $x = 0$ queda un poco fuera del análisis (cuando tomamos logaritmo), pero al final lo podemos incluir y necesariamente tiene que suceder para tener continuidad ahí que $f(0) = 0$, salvo en el caso en que $f(e) = 1$ donde tendremos la solución continua $f(x) = 1$ y la solución $f(x) = signo(x)$ que deja de ser continua en $x = 0$.

1.3.6. Desigualdad de Cauchy

La desigualdad de Cauchy es la siguiente

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y). \tag{1.31}$$

Para el caso en el que la igualdad se cumple ya hemos encontrado toda una familia de funciones que la satisfacen, pero si además de esto consideramos que adicionalmente la función f que satisface (1.31) también satisfaga la siguiente desigualdad

$$f(x) \leq x \tag{1.32}$$

entonces la única solución es $f(x) = x$, veamos porqué.

Haciendo $x = y = 0$ en (1.31) tenemos que

$$f(0) \leq 2f(0)$$

por lo que $0 \leq f(0)$. Pero por otro lado tenemos que $f(0) \leq 0$ ya que $f(x) \leq x$. De esto tenemos que $f(0) = 0$. Ahora haciendo $y = -x$ llegamos a

$$f(0) \leq f(x) + f(-x) \quad \Rightarrow \quad -f(-x) \leq f(x),$$

entonces tenemos que

$$x = -(-x) \leq -f(-x) \leq f(x) \leq x.$$

Por lo que $f(x) = x$ es la única solución posible. Notemos que aquí no se pidió que f fuese continua.

1.4. Otras ecuaciones funcionales clásicas

A continuación veremos otras ecuaciones funcionales que fueron estudiadas en su tiempo por diversos matemáticos, las cuales son interesantes en si mismas, pues tienen soluciones particulares. Las ecuaciones que veremos son las de Jensen, D'Alembert y las de Pexider. Las ecuaciones de Pexider son generalizaciones de las de Cauchy.

1.4.1. La ecuación de Jensen

Johan Jensen (1859-1925) fue un matemático e ingeniero danés, estudió las funciones convexas llegando a resultados muy importantes, el más conocido es la *desigualdad de*

Jensen la cual nos dice que si f es una función *convexa* en $A \subset \mathbb{R}$ entonces para $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ y $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}^+$ tales que $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = 1$ sucede que

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i).$$

En donde *convexa* significa que la desigualdad anterior se cumple para $n = 2$. Jensen se planteó encontrar todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

la cual se conoce como la ecuación de Jensen. Notemos que en esta ecuación el hacer $x = y = 0$ no da información de quien deberá ser $f(0)$. Hagamos $g(x) = f(x) - f(0)$ que es también continua y un cálculo directo muestra que

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2}, \tag{1.33}$$

solamente que ahora la función g cumple que $g(0) = 0$. Al tomar $y = 0$ en la nueva ecuación tenemos

$$g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{g(x)}{2},$$

al hacer en esta última $x = u + v$, obtenemos que

$$g\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{g(u+v)}{2}. \tag{1.34}$$

Luego, de (1.33) y (1.34) podemos asegurar que $g(u + v) = g(u) + g(v)$, para $u, v \in \mathbb{R}$, esto es g es una función continua que cumple la ecuación (1.19), por lo que $g(x) = ax$ con $a = g(1)$ y entonces la función f es de la forma $f(x) = ax + b$ con $b = f(0)$.

1.4.2. La ecuación de D'Alembert

Ya hemos visto como se resolvía la ecuación de D'Alembert, pero para resolverla supusimos que la solución era diferenciable dos veces. En esta parte resolveremos la ecuación pero sólo supondremos que la solución es continua.

Recordemos que la ecuación de D'Alembert es

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y). \tag{1.35}$$

Como ya habíamos visto si $y = 0$ tenemos que $f(0) = 1$ ó $f(0) = 1$. Con $f(0) = 0$ tenemos la solución constante $f(x) = 0$, por lo que tomaremos el caso en el que $f(0) = 1$, con lo cual podemos elegir un número pequeño α de tal manera que la función f se mantenga positiva en el intervalo $[0, \alpha]$. De esta manera tenemos dos casos, o bien $f(\alpha) < 1$ ó $f(\alpha) > 1$, veamos cada caso.

- $f(\alpha) < 1$. Como $f(\alpha)$ está comprendido entre cero y uno podemos representar este valor por medio del coseno de cierto angulo θ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ entonces tenemos que
$$f(\alpha) = \cos\theta. \tag{1.36}$$
Si hacemos sucesivamente las siguientes sustituciones $x = y = \alpha$; $x = 2\alpha$, $y = \alpha$ y $x = 3\alpha$, $y = \alpha$ en (1.35) expresada en la siguiente forma
$$f(x+y) = 2f(y)f(x) - f(x-y),$$
obtenemos lo siguiente
$$f(2\alpha) = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta,$$
$$f(3\alpha) = 2\cos\theta\cos 2\theta - \cos\theta = \cos 3\theta,$$
$$f(4\alpha) = 2\cos\theta\cos 3\theta - \cos 2\theta = \cos 4\theta.$$
Utilizando inducción llegamos a que
$$f(m\alpha) = \cos m\theta. \tag{1.37}$$
Ahora si hacemos $x = y = \frac{\alpha}{2}$ llegamos a
$$\left(f\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 = \frac{f(0)+f(\alpha)}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \left(\cos\frac{1}{2}\theta\right)^2.$$
Ahora sacamos raíz a ambos lados y tomando las raíces positivas tendremos
$$f\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \cos\frac{1}{2}\theta.$$
Tomando ahora $x = y = \frac{\alpha}{4}$ entonces
$$\left(f\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right)^2 = \frac{f(0)+f(\frac{\alpha}{2})}{2} = \frac{1+\cos\frac{\theta}{2}}{2} = \left(\cos\frac{1}{4}\theta\right)^2,$$
sacando raíces positivas en ambos lados
$$\left(f\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right) = \left(\cos\frac{1}{4}\theta\right),$$
usando inducción se demuestra que
$$f\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right) = \cos\frac{1}{2^n}\theta. \tag{1.38}$$
Ahora utilizando (1.37) y (1.38) llegamos a
$$f\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right) = \cos\frac{m}{2^n}\theta. \tag{1.39}$$

Por otro lado, el conjunto

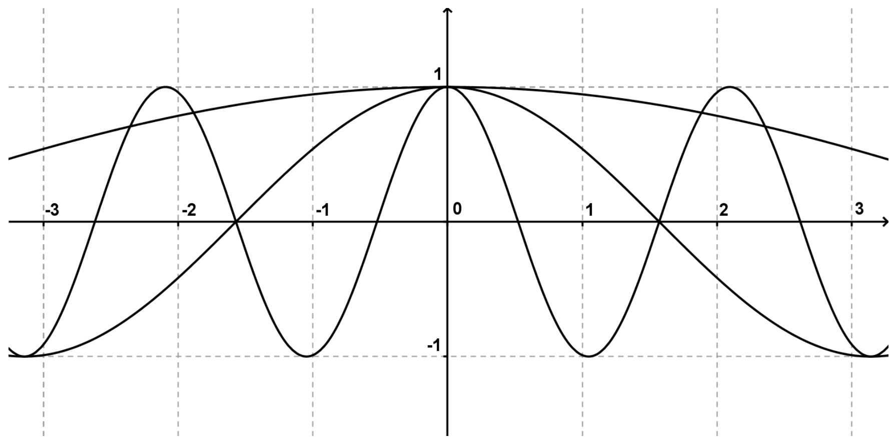

Figura 1.6: La función $f(x) = \cos ax$ para algunos valores de a.

$$\mathbb{D}^+ = \left\{ s \in \mathbb{R};\ s = \frac{m}{2^n},\ \ n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

es denso[6] en $\mathbb{R}^+$, ($\mathbb{D}^+$ es el conjunto de los *números racionales diádicos positivos*, es decir, el denominador es una potencia de 2 y el numerador es un numero entero) por lo que

$$f(\alpha s) = \cos(s\theta) \qquad s \in \mathbb{R}^+. \tag{1.40}$$

Si además en (1.35) hacemos $x = 0$ y $y = s\alpha$ tenemos que

$$f(-s\alpha) = (2f(0) - 1)f(s\alpha) = \cos s\theta = \cos(-s\theta)$$

de aquí que para cualquier valor de x se tiene que

$$f(\alpha x) = \cos \theta x. \tag{1.41}$$

Si sustituimos x por $\dfrac{x}{\alpha}$ en (1.41) obtenemos

$$f(x) = \cos\left(x\frac{\theta}{\alpha}\right),$$

por lo tanto

$$f(x) = \cos(ax) \qquad a \in \mathbb{R}.$$

en donde $a = \pm\frac{\theta}{\alpha}$ es solución de (1.35). (Ver figura (1.6)).

[6]En [19] página 194, se demuestra que los racionales diádicos son densos en el intervalo $[0, 1]$

- $f(\alpha) > 1$. En este caso $f(\alpha)$ es mayor que uno entonces podemos encontrar un número real r que satisface

$$f(\alpha) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \tag{1.42}$$

la ecuación tiene dos soluciones (cualquiera de ellas sirve) y son

$$r = f(\alpha) \pm \sqrt{f((\alpha))^2 - 1}.$$

Si la ecuación (1.35) la transformamos en

$$f(x+y) = 2f(x)f(y) - f(x-y)$$

y ahora sustituimos $x = y = \alpha$ en la ecuación anterior para llegar a

$$f(2\alpha) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right).$$

Ahora hagamos $x = 2\alpha$ y $y = \alpha$, entonces

$$f(3\alpha) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2}\left(r^3 + \frac{1}{r^3}\right).$$

También en este caso por inducción llegamos a que

$$f(m\alpha) = \frac{1}{2}\left(r^m + \frac{1}{r^m}\right). \tag{1.43}$$

Escribamos la ecuación (1.35) de la siguiente forma

$$f(x)f(y) = \frac{f(x-y) + f(x+y)}{2}. \tag{1.44}$$

Ahora hagamos $x = y = \frac{\alpha}{2}$ y sustituyamos en (1.44)

$$\left(f\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 = \frac{f(0) + f(\alpha)}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)}{2} = \frac{1}{4}\left(r^{\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{2}}\right)^2$$

al extraer las raíces positivas de los dos miembros llegamos a la siguiente ecuación

$$f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Hagamos $x = y = \frac{\alpha}{4}$ y sustituyamos en (1.44) para obtener

$$\left(f\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right)^2 = \frac{f(0) + f(\frac{\alpha}{2})}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{2}}\right)}{2} = \frac{1}{4}\left(r^{\frac{1}{4}} + r^{-\frac{1}{4}}\right)^2,$$

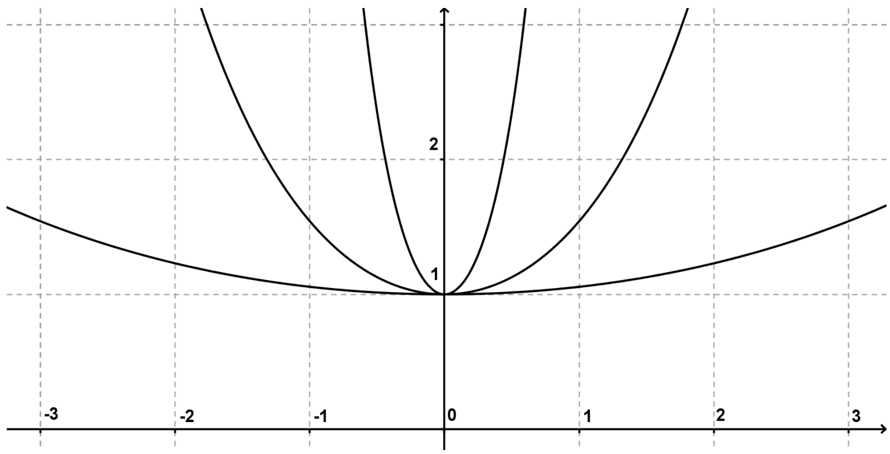

Figura 1.7: la función $f(x) = \cosh(ax)$ para diferentes valores de a.

otra vez sacando las raíces positivas obtenemos

$$f\left(\frac{\alpha}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{4}} + r^{-\frac{1}{4}}\right),$$

y otra vez por inducción llegamos a que

$$f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{2^n}} + r^{-\frac{1}{2^n}}\right). \tag{1.45}$$

Ahora con la información que tenemos de las ecuaciones (1.43) y (1.45) tenemos la siguiente ecuación

$$f\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(r^{\frac{m}{2^n}} + r^{-\frac{m}{2^n}}\right) \tag{1.46}$$

y como en el caso anterior como $\mathbb{D}^+$ es un subconjunto denso de $\mathbb{R}^+$ por lo que para cualquier real positivo s se tiene que

$$f(s\alpha) = \frac{1}{2}\left(r^s + r^{-s}\right).$$

Si ahora hacemos $x = 0$ y $y = s\alpha$ y sustituimos en (1.35) llegamos a

$$f(-s\alpha) = (2f(0) - 1)\, f(s\alpha) = \frac{1}{2}\left(r^{-s} + r^s\right),$$

por lo que para cualquier número $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$f(\alpha x) = \frac{1}{2}\left(r^x + r^{-x}\right).$$

Ahora en la ecuación anterior sustituyamos x por $\dfrac{x}{\alpha}$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(r^{\frac{x}{\alpha}} + r^{-\frac{x}{\alpha}}\right),$$

haciendo $r^{\frac{1}{\alpha}} = A$ tenemos que la solución de (1.35) es

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(A^x + A^{-x}\right),$$

pero $A^x = e^{\log A^x} = e^{x\log A}$ y si hacemos $\log A = a$ en la ecuación anterior vemos que

$$f(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} = \cosh ax \tag{1.47}$$

es solución de (1.35). En la figura (1.7) vemos la gráfica de $\cosh ax$ para algunos valores de a.

Con esto tenemos que las soluciones para la ecuación de D'Alembert son

$$f(x) = \begin{cases} \cosh ax & \text{si } f(\alpha) > 1 \\ \cos ax & \text{si } f(\alpha) < 1. \end{cases}$$

La función constante $f(x) = 1$ está incluida en las soluciones anteriores en el caso en que $f(x) = \cos ax$ con $a = 0$. $\square$

1.4.3. Las ecuaciones de Pexider

La ecuación de Pexider es la siguiente

$$f(x+y) = g(x) + h(y), \tag{1.48}$$

la cual es una generalización de la ecuación aditiva de Cauchy.

Aquí se pide resolver (1.48) para $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En el caso de buscar funciones continuas veremos que no es difícil encontrar tales soluciones. Hagamos $y = 0$, entonces de (1.48) obtenemos

$$f(x) = g(x) + h(0).$$

Si ahora hacemos $x = 0$

$$f(y) = g(0) + h(y).$$

Si $g(0) = a$ y $h(0) = b$ entonces tendremos lo siguiente

$$g(x) = f(x) - b \qquad \text{y} \qquad h(y) = f(y) - a.$$

Y entonces la ecuación de Pexider se transforma en la siguiente ecuación

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - a - b. \tag{1.49}$$

Definamos ahora la siguiente función

$$f_0(x) = f(x) - a - b \tag{1.50}$$

entonces

$$\begin{aligned} f_0(x+y) &= f(x+y) - a - b, \\ &= f(x) + f(y) - 2a - 2b, \\ &= f_0(x) + f_0(y). \end{aligned}$$

Por lo que f_0 cumple la ecuación aditiva de Cauchy, luego

$$f_0(x) = cx$$

para algún $c \in \mathbb{R}$ y obtenemos que las soluciones de la ecuación de Pexider son las siguientes

$$\begin{aligned} f(x) &= cx + a + b, \\ g(x) &= cx + a, \\ h(x) &= cx + b. \end{aligned}$$

Además de ésta, tenemos otras tres ecuaciones de Pexider, las cuales son las generalizaciones de (1.20), (1.21) y (1.22) y son

$$f(xy) = g(x) + h(y), \tag{1.51}$$

$$f(x+y) = g(x)h(y), \tag{1.52}$$

$$f(xy) = g(x)h(y). \tag{1.53}$$

La solución a la ecuación (1.51) es

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha(x) + a + b, \\ g(x) &= \alpha(x) + a, \\ h(x) &= \alpha(x) + b, \end{aligned}$$

mientras que la solución a (1.52) y (1.53) son

$$\begin{aligned} f(x) &= ab\beta(x), \\ g(x) &= a\beta(x), \\ h(x) &= b\beta(x), \end{aligned}$$

en donde las funciones $\alpha(x)$ es la solución de (1.20) y β es la solución de (1.21) y (1.22) para resolver (1.52) y (1.53) respectivamente. Hay que tener en cuenta que se piden las soluciones continuas.

Capítulo 2

Primeras recomendaciones

En este capítulo veremos las sugerencias básicas para resolver ecuaciones funcionales, estas sugerencias son las primeras que podemos utilizar para resolver la ecuación funcional que se nos plantea. En algunos casos se pueden aplicar varias de estas sugerencias para convertir la ecuación en otra cuya solución será más fácil de encontrar.

2.1. Sustituir por valores las variables

Uno de los primeros pasos que se pueden seguir es ver si pueden determinarse algunos valores específicos de la función, por ejemplo $f(0)$, $f(1)$, etc. En varios casos se encuentran haciendo la sustitución directa. Pero tal vez se necesite hacer algún intercambio de variables. Por ejemplo si hay algo de la forma $f(x+y)$ es natural hacer $y=-x$, para llegar a $f(0)$. Veamos varios ejemplos de cómo se utiliza esta sugerencia.

Ejemplo. Encuentre todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que

$$f(y+x)-f(y-x)=4yx. \tag{2.1}$$

Solución. Haciendo $y=x$ tenemos que $f(2y)-f(0)=4y^2$ y tomando $f(0)=c$ obtenemos que $f(2y)=4y^2+c$, ahora, si hacemos $2y=x$ tenemos que la solución de la ecuación funcional es de la forma $f(x)=x^2+c$. Desde luego, las funciones de este tipo satisfacen (2.1). $\square$

Ejemplo. Encuentre todas las funciones $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ que satisfacen

$$f(xy)=f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Solución. En este caso haciendo $x=y$ tenemos que $f(x^2)=f(1)$, esto tiene sentido ya que la función está definida en los reales positivos.

Por otro lado, haciendo $y = x^2$ obtenemos que $f(y) = f(1)$ para todo $y \in \mathbb{R}^+$ por lo que las funciones que resuelven la ecuación funcional son las constantes. $\square$

En los ejemplos anteriores hicimos la sustitución $x = y$, lo que nos llevó directamente a las soluciones de las ecuaciones propuestas. Mostramos enseguida otros ejemplos en donde sustituiremos las variables por valores numéricos concretos.

Ejemplo. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x + y) + f(x - y) = f(x) + 6xy^2 + x^3.$$

Solución. Haciendo $y = 0$ obtenemos $2f(x) = f(x) + x^3$ por lo que $f(x) = x^3$ es la función que buscamos, lo cual se comprueba fácilmente. $\square$

Ejemplo. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ que cumplen con las siguientes dos condiciones

$$f(xy) = xf(y) + yf(x) \quad \text{y} \quad f(x + y) = f(x^2) + f(y^2).$$

Solución. Si en la primera ecuación hacemos $x = y = 0$ obtenemos $f(0) = 0$ y tomando $x = y = 1$ tenemos $f(1) = 2f(1)$, es decir, $f(1) = 0$.

Por otro lado, haciendo $x = 0$ en la segunda ecuación llegamos a $f(y) = f(y^2)$ y si $y = 0$ obtenemos $f(x) = f(x^2)$ por lo que la segunda ecuación se convierte en $f(x+y) = f(x)+f(y)$ y sabemos, por la ecuación de Cauchy, que la función deberá ser $f(x) = f(1)x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Además, como $f(1) = 0$ la única solución es $f(x) = 0$. $\square$

2.2. Inducción matemática

Debemos tener siempre presente que el principio de inducción matemática nos puede ayudar. No hay que olvidar tener la base de inducción, por ejemplo saber quien es $f(1)$ o $f(j)$ y después tener una conjetura o buenos indicios de algo por proponer, que bien puede ser una relación que permita pasar de n a $n + 1$. Si el caso lo requiere, buscar cosas del estilo $f(\frac{1}{n})$ y después de la forma $f(r)$ con $r \in \mathbb{Q}$, lo cual será adecuado con ecuaciones cuyas variables sean racionales.

Ejemplo. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfacen las condiciones
(i) $f(2) = 2$,
(ii) $f(mn) = f(m)f(n)$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$,
(iii) $f(m) < f(n)$ para $m < n$.

Solución. Si $m = n = 1$ entonces $f(1 \cdot 1) = f(1)f(1)$, luego $f(1) = [f(1)]^2$ y entonces $f(1) = 1$, ya que $f(1) = 0$ no es válido.

Por (i) y (iii) se tiene que $2 = f(2) < f(3) < f(4) = f(2)f(2) = 4$, por lo que $f(3) = 3$.

Veamos por inducción que $f(n) = n$. Ya tenemos la base de inducción $f(1) = 1$ y $f(2) = 2$. Supongamos válido que $f(n) = n$, entonces por (ii) se tiene que $f(2n) = f(2)f(n) = 2f(n) = 2n$.

Ahora, para $n < n+1 < \ldots < 2n$ se tiene por (iii) que $n = f(n) < f(n+1) < \ldots < f(2n) < 2n$, lo que obliga a que $f(n+1) = n+1$, $f(n+2) = n+2, \ldots f(2n-1) = 2n-1$. Por lo tanto $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ejemplo. Demuestre que no existen funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumplan

$$f(f(n)) = n + 1. \tag{2.2}$$

Solución. Supongamos que existe una función que cumple la ecuación anterior. Aplicando f a ambos lados de la ecuación obtenemos que $f(n+1) = f(f(f(n))) = f(n) + 1$. Veamos por inducción que $f(n+1) = f(1) + n$.

El caso $n = 1$ es obvio, pues tenemos $f(n+1) = f(n) + 1$ y al sustituir $n = 1$ tenemos que $f(1+1) = f(1) + 1$. Supongamos que es cierto para $n-1$ y demostremos para n. Como es cierto para $n-1$ se cumple lo siguiente

$$f(n+1) = f(n) + 1 = f((n-1)+1) + 1 = (f(1) + n - 1) + 1 = f(1) + n,$$

por lo que $f(n+1) = f(1) + n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Teniendo esto en cuenta y la ecuación (2.2) llegamos a que

$$n + 1 = f(f(n)) = f(n) - 1 + f(1) = n - 1 + f(1) - 1 + f(1) = n - 2 + 2f(1),$$

luego $f(1) = \frac{3}{2}$, lo cual es una contradicción, pues la imagen de f son números naturales. Por lo tanto no existe tal f que cumpla (2.2). $\square$

2.3. Propiedades básicas de las funciones

Indagar si la función es inyectiva, suprayectiva, biyectiva, par, impar o con algún tipo de simetría ayuda a reducir casos, además de que nos permite concentrar la atención solamente en el dominio en el que es válida la solución de la ecuación.

Ejemplo. (IMO 1988, lista corta). Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función que cumple

$$f(f(m) + f(n)) = m + n, \qquad m, n \in \mathbb{N}.$$

Encuentre todos los valores posibles para $f(1988)$.

Solución. Primero notemos que f es inyectiva, ya que si $f(m) = f(n)$, entonces $f(m) + f(n) = f(n) + f(n)$ de lo cual se sigue que $m + n = f(f(m) + f(n)) = f(f(n) + f(n)) = n + n$, por lo que $m = n$.

Para $l < n$, se tiene que

$$f(f(m+l)+f(n-l)) = m+l+n-l = m+n = f(f(m)+f(n)). \qquad (2.3)$$

Ahora por inducción veamos que $f(n) = n$. Primero para $n = 1$ veamos que efectivamente $f(1) = 1$. Si $b = f(1)$, entonces se cumplen las siguientes dos igualdades

$$f(2b) = f(f(1)+f(1)) = 2 \qquad \text{y} \qquad f(b+2) = f(f(1)+f(2b)) = 1+2b.$$

Luego $b = 2$ no es posible, pues por un lado tendríamos que $f(2 \cdot 2) = 2$ y por otro $f(2+2) = 1+2\cdot 2 = 5$.

También $b > 2$ no es posible, pues utilizando que $f(2b) = 2$, $f(1) = b$ y (2.3) tenemos que

$$\begin{aligned} f(2+b) &= f(f(2b)+f(1)) \\ &= f(f(2b-(b-2))+f(1+(b-2))) \\ &= f(f(b+2)+f(b-1)) \\ &= f(1+2b+f(b-1)), \end{aligned}$$

por la inyectividad de f tenemos que $2+b = 1+2b+f(b-1)$, luego $f(b-1) = 1-b < 0$ lo cual no es posible. Por tanto $b = f(1) = 1$.

Supongamos ahora que $f(n) = n$, entonces de la ecuación original y de la hipótesis de inducción tenemos

$$n+1 = f(f(n)+f(1)) = f(n+1).$$

Por lo que el único valor para $f(1988)$ es 1988. $\square$

En el siguiente ejemplo la inyectividad juega un papel muy importante, en el enunciado no se pide que la función sea inyectiva, pero se demuestra fácilmente.

Ejemplo. Encuentre las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que satisfacen la condición

$$f(xf(y)) + f(yf(x)) = 2xy$$

para cualesquiera x, $y \in \mathbb{R}^+$.

Solución. Tomando $x = y$, resulta que

$$f(xf(x)) = x^2$$

En particular $f(f(1)) = 1$. Haciendo $x = f(1)$ en la ecuación anterior obtenemos que

$$f(1)^2 = f(f(1)f(f(1))) = f(f(1)) = 1$$

por lo que $f(1) = 1$. Al hacer $y = 1$ en la ecuación original, tenemos

$$f(x) + f(f(x)) = 2x.$$

Esta igualdad nos sirve para mostrar que f es inyectiva ya que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 2x = f(x) + f(f(x)) = f(y) + f(f(y)) = 2y \Rightarrow x = y.$$

Si $z > 0$, tomando $x = zf(z)$, y $y = \frac{1}{z}$ en la ecuación funcional tenemos que

$$f\left(zf(z)f\left(\frac{1}{z}\right)\right) + f\left(\frac{1}{z}f(zf(z))\right) = 2zf(z)\frac{1}{z}$$

luego, usando que $f(zf(z)) = z^2$, llegamos a

$$f\left(zf(z)f\left(\frac{1}{z}\right)\right) = f(z)$$

pero como f es inyectiva se tiene que

$$f(z)f\left(\frac{1}{z}\right) = 1.$$

Si ahora tomamos $x = z$, $y = \frac{1}{z}$ en la ecuación funcional

$$f\left(zf\left(\frac{1}{z}\right)\right) + f\left(\frac{1}{z}f(z)\right) = 2$$

pero

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{f(z)} \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{z}{f(z)}\right) + f\left(\frac{f(z)}{z}\right) = 2$$

Como $f(z)f\left(\frac{1}{z}\right) = 1$, también tenemos que

$$f\left(\frac{z}{f(z)}\right) \cdot f\left(\frac{f(z)}{z}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{z}{f(z)}\right) = f\left(\frac{f(z)}{z}\right) = 1 = f(1)$$

y de nuevo la inyectividad de f nos garantiza que $f(z) = z$. $\square$

Ejemplo (IMO 2002, lista corta.) Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x) \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Solución. Primero veamos que f es suprayectiva, si tomamos $y = -f(x)$ tenemos que $f(f(x) - f(x)) = 2x + f(f(-f(x)) - x)$, es decir $f(f(-f(x)) - x) = f(0) - 2x$. Como el lado derecho de esta última ecuación es una función suprayectiva entonces f también lo deberá ser.

Entonces existe un x_0 tal que $f(x_0) = 0$. Haciendo $x = x_0$ en la ecuación original obtenemos que

$$f(y) = 2x_0 + f(f(y) - x_0),$$

por lo que si hacemos $z = f(y) - x_0$ se tiene que

$$f(z) = z - x_0.$$

Por lo que las funciones que satisfacen la ecuación deben ser de la forma $f(z) = z + c$ para alguna constante c. $\square$

A continuación mostramos un ejemplo en el que la función es biyectiva, lo que ayudará a encontrar la solución.

Ejemplo. (IMO, 1990). Encuentre una función $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ que satisfaga la ecuación

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y},$$

para todo $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

Solución. Si $x = 1$, $f(f(y)) = \frac{f(1)}{y}$, luego f es biyección, veamos por qué. Si $f(y_1) = f(y_2)$ entonces

$$f(f(y_1)) = f(f(y_2)) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(1)}{y_1} = \frac{f(1)}{y_2} \quad \Rightarrow y_1 = y_2,$$

por lo que f es inyectiva.

Ahora que f es suprayectiva. Sea $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$, si $f(x) = \frac{m}{n}$ entonces

$$f(f(x)) = f\left(\frac{m}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(1)}{x} = f\left(\frac{m}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{f(1)}{f(\frac{m}{n})}.$$

Por lo tanto f es suprayectiva.

Con $y = 1$ y usando la inyectividad tenemos que $f(1) = 1$ y entonces $f(f(y)) = \frac{1}{y}$. Aplicando f a ambos lados obtenemos $\frac{1}{f(y)} = f\left(\frac{1}{y}\right)$, pues $f(f(f(y))) = \frac{1}{f(y)}$.

Para $x, y \in \mathbb{Q}^+$, tomemos z tal que $f(z) = y$, luego $f(xy) = f(xf(z)) = \frac{f(x)}{z} = f(x)f(f(z)) = f(x)f(y)$.

Así una función que cumpla la ecuación funcional deberá satisfacer las dos ecuaciones

$$f(f(x)) = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

Una solución particular se puede definir así: sean $p_1, p_2, ...$ los primos ordenados y en ellos se define la función como sigue:

$$f(p_i) = \begin{cases} p_{i+1} & \text{si } i \text{ es impar} \\ \frac{1}{p_{i-1}} & \text{si } i \text{ es par} \end{cases}$$

y para una racional $r = p_1^{n_1}...p_k^{n_k}$, se define la función así

$$f(r) = f(p_1)^{n_1}...f(p_k)^{n_k},$$

donde $n_k \in \mathbb{Z}$. $\square$

2.4. Continuidad, monotonía

Investigar si la función incógnita es monótona o continua es muy útil pues el problema se podría reducir a resolverlo en los racionales o en algún subconjunto denso, tal como sucedía en las ecuaciones del tipo de Cauchy.

Ejemplo. (Nórdica, 1998). Encuentre todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que satisfagan la condición,

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y), \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Solución. Al tomar $x = y = 0$, se tiene que $f(0) = 0$. Si $x = y$ entonces $f(2x) = 4f(x)$ por lo que al hacer $x = 1$ obtenemos $f(2) = 4f(1)$ y por inducción

$$f(n) = n^2 f(1)$$

para todo entero positivo n. Con $x = 0$, se tiene que $f(y) + f(-y) = 2f(y)$, luego $f(y) = f(-y)$ y f es par, por lo tanto $f(n) = n^2 f(1)$ para todo entero n.

Si tomamos $r = \frac{p}{q}$ entonces

$$p^2 f(1) = f(p) = f\left(q\frac{p}{q}\right) = q^2 f\left(\frac{p}{q}\right),$$

por lo que $f(\frac{p}{q}) = (\frac{p}{q})^2 f(1)$, luego $f(r) = cr^2$ para todo $r \in \mathbb{Q}$ con $c = f(1)$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, por el teorema 1.7 tenemos que $f(x) = cx^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. $\square$

En el ejemplo que a continuación se muestra la continuidad de la función juega un papel muy importante.

Ejemplo. Sea f una función continua definida en el intervalo $[0, 1]$, tal que para cada $x \in (0, 1)$ existe una $h > 0$ que satisface $0 \leq x - h < x + h \leq 1$ y

$$f(x) = \frac{f(x-h) + f(x+h)}{2}.$$

Muestre que $f(x) = cx + d$ para algunos $c, d \in \mathbb{R}$.

Solución. Hay que tener en cuenta que h depende de x. Queremos que f sea de la forma $f(x) = cx + d$ entonces tenemos que

$$f(0) = d \qquad \text{y} \qquad f(1) = c + d$$

por lo que nuestra función f quedaría de la siguiente forma

$$f(x) = xf(1) - xf(0) + f(0).$$

Hagamos $g(x) = f(x) - xf(1) + xf(0) - f(0)$. Por un lado $g(x)$ cumple la misma condición de f, es decir

$$g(x) = \frac{g(x-h) + g(x+h)}{2} \tag{2.4}$$

y por otro lado vamos a ver que $g(x) = 0$ para toda $x \in [0, 1]$.

Por una parte tenemos que

$$g(0) = f(0) - 0f(1) + 0f(0) - f(0) = 0,$$

$$g(1) = f(1) - 1f(1) + 1f(0) - f(0) = 0.$$

Ahora sean M y m el máximo y mínimo respectivamente de g en $[0, 1]$ (g es continua por la forma en la que la escogimos, luego alcanza su máximo y su mínimo) y sean $A = \{x \in [0, 1]\,;\ g(x) = M\}$ y $B = \{x \in [0, 1]\,;\ g(x) = m\}$ los cuales son no vacíos, además como g es continua entonces A y B son cerrados en $\mathbb{R}$ y por lo tanto tienen máximo y mínimo.

Sea $y = \max\{A\}$, si $0 < y < 1$ entonces existe $h > 0$ tal que

$$M = g(y) = \frac{g(y-h) + g(y+h)}{2}$$

$$2M = g(y-h) + g(y+h)$$

como M es el máximo entonces $M \geq g(y-h)$ y también $M \geq g(y+h)$ por lo que

$$M = g(y-h) = g(y+h).$$

Lo cual es una contradicción, pues $y < y + h$ y habíamos supuesto que y era el máximo tal que $g(y) = M$. Por lo tanto tenemos que $y = 0$ o bien $y = 1$ y entonces $M = g(0) = g(1) = 0$. Luego $g(x) \leq 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

Análogamente, sea $z = \min\{B\}$. Si $0 < z < 1$ entonces existe h tal que

$$m = g(z) = \frac{g(z-h) + g(z+h)}{2}$$

$$2m = g(z-h) + g(z+h).$$

El argumento es igual al anterior, de la ecuación anterior llegamos a que $m \leq g(z-h)$ y $m \leq g(z+h)$ por lo que

$$m = g(z-h) = g(z+h)$$

Lo cual es una contradicción, pues $z - h < z$ y z era el mínimo tal que $g(z) = m$. Por lo tanto $z = 0$ ó $z = 1$ y $m = g(0) = g(1) = 0$, luego $g(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$.

Combinando las dos desigualdades anteriores concluimos que

$$g(x) = 0.$$

Ahora sustituyendo la ecuación anterior en (2.4) llegamos a

$$f(x) = xf(1) - xf(0) + f(0).$$

Por lo tanto la solución de nuestra ecuación funcional es de la forma

$$f(x) = cx + d$$

donde $c = f(1) - f(0)$ y $d = f(0)$. Es claro que tal función satisface la ecuación funcional. □

En los dos ejemplos anteriores utilizamos la continuidad de las funciones para llegar a la solución, en el que mostramos a continuación se utiliza la monotonía.

Ejemplo Encuentre todas las funciones estrictamente monótonas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x + f(y)) = f(x) + y.$$

Solución. Haciendo $x = y = 0$ tenemos que $f(f(0)) = f(0)$. Como f es estrictamente monótona tenemos que es inyectiva, por lo que $f(0) = 0$.

Tomando ahora $x = 0$ llegamos a que $f(f(y)) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}$. haciendo ahora $a = f(y)$ de lo anterior tenemos que $f(f(y)) = y = f(a)$, luego

$$f(x + y) = f(x + f(a)) = f(x) + a = f(x) + f(y)$$

por lo que f satisface la ecuación aditiva de Cauchy, además con la condición $f(f(y)) = y$ tenemos que las únicas soluciones son $f(x) = x$ y $f(x) = -x$, las cuales verifican la ecuación funcional. □

2.5. Simetría en las variables

Si la ecuación involucra dos o más variables, por ejemplo x, y, sustituir a la y por x (y viceversa) es una buena opción para llegar a una ecuación funcional más sencilla.

Ejemplo. (Irlanda, 1995). Encuentre todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfagan la condición

$$xf(x)-yf(y)=(x-y)f(x+y).$$

Solución. Tomando $y=-x$ en la ecuación tenemos $xf(x)+xf(-x)=2xf(0)$, para toda x. Luego $f(x)+f(-x)=2f(0)$ si $x\neq 0$. Tomando $x+y$ en lugar de x y x en lugar de y en la ecuación funcional obtenemos

$$(x+y)f(x+y)-xf(x)=yf(2x+y).$$

Tomando $2x+y$, $-x$, en lugar de x e y respectivamente se obtiene

$$(2x+y)f(2x+y)+xf(-x)=(3x+y)f(x+y).$$

Por lo que las dos últimas ecuaciones se reescriben como

$$x\left(f(x+y)-f(x)\right)=y\left(f(2x+y)-f(x+y)\right),$$

$$(2x+y)(f(2x+y)-f(x+y))=x(f(x+y)-f(-x)).$$

Tomando en cuenta las dos ecuaciones anteriores tenemos que se cumple la siguiente igualdad $(2x+y)x(f(x+y)-f(x))=yx(f(x+y)-f(-x))$, de la cual, tomando $x\neq 0$, se deriva que

$$\begin{aligned}2xf(x+y) &= (2x+y)f(x)-yf(-x),\\ &= (2x+y)f(x)-y(2f(0)-f(x)),\\ &= (2x+2y)f(x)-2yf(0).\end{aligned}$$

Por lo que $x(f(x+y)-f(0))=(x+y)(f(x)-f(0))$. Ahora si $x=1$ se cumple que $f(1+y)-f(0)=(1+y)(f(1)-f(0))$. Al hacer $x=1+y$, tenemos que $f(x)=f(0)+x(f(1)-f(0))$. Luego las funciones son las de la forma $f(x)=mx+b$, con m y b constantes. Desde luego éstas cumplen la ecuación funcional. $\square$

Ejemplo. Encuentre todas las funciones continuas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x).$$

Solución. Haciendo $x=y$ tenemos que $f(2x)=2f(x)-f(0)$. Entonces, de la ecuación original se obtiene que $f(x+y)+f(x-y)=f(2x)+f(0)$, restando $2f(0)$ en ambos lados llegamos a

$$f(x+y)-f(0)+f(x-y)-f(0)=f(2x)-f(0).$$

Luego $f(x)-f(0)$ es aditiva, pues al tomar $u=x+y$, $v=x-y$ en la ecuación anterior tenemos que

$$f(u)-f(0)+f(v)-f(0)=f(u+v)-f(0).$$

Como $f(x)-f(0)$ es continua se tiene que $f(x)=f(0)+ax$ para todo $x\in\mathbb{R}$. $\square$

2.6. Siga sus instintos

Si ya se tiene una sospecha de que una cierta función resuelve la ecuación y se intuye que es única, se puede proponer que en algún valor la función es mayor (o menor) que la función que se sospecha para llegar a una contradicción.

Ejemplo. Encuentre las funciones continuas $f : [0,1] \to [0,1]$ que satisfacen $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f^n(x) = x$ para todo $x \in (0,1)$ con $n \in \mathbb{N}$ fijo.

Solución. Veamos que $f(x) = x$. Notemos primero que f es inyectiva, si $f(x) = f(y)$ entonces

$$x = f^n(x) = f^n(y) = y,$$

por lo que $x = y$ y entonces f es inyectiva. Ahora veamos que f es creciente. Supongamos que existen x_1 y x_2 tales que $x_1 < x_2$ y $f(x_1) \geq f(x_2)$, como f es continua en $[0, x_1]$ entonces por el teorema del valor intermedio existe una $c \in [0, x_1]$ tal que $f(c) = f(x_2)$, lo cual es una contradicción, pues f es inyectiva.

Ahora supongamos que $x < f(x)$ entonces

$$f(x) < f(f(x)) \ldots < f^n(x) = x,$$

lo cual es una contradicción. Análogamente si suponemos que $x > f(x)$ llegamos a otra contradicción por lo que $f(x) = x$ es la única función que satisface las condiciones dadas. $\square$

Ejemplo. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x - y) = f(x + y)f(y), \qquad \text{con } x, y \in \mathbb{R}.$$

Solución. Es claro que $f(x) \equiv 0$ y $f(x) \equiv 1$ son soluciones, veamos que son las únicas.

Tomando $x = y = 0$ en la ecuación funcional tenemos que $f(0) = [f(0)]^2$, luego $f(0) = 0$ o bien $f(0) = 1$, analicemos los dos posibles casos.

- $f(0) = 0$. Haciendo en la ecuación funcional $y = 0$ tenemos lo siguiente que $f(x) = f(x)f(0) = 0$, luego $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- $f(0) = 1$. Primero veamos que $f(x) \neq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Haciendo $x = y$ en la ecuación obtenemos $1 = f(0) = f(2x)f(x)$, luego $f(x) \neq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

  Sustituyendo x e y por $2u$ y u respectivamente obtenemos $f(u) = f(3u)f(u)$, como $f(u) \neq 0$ entonces $f(3u) = 1$ y finalmente haciendo $3u = x$ obtenemos que $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

por lo tanto, las únicas dos soluciones son $f(x) \equiv 0$ y $f(x) \equiv 1$. $\square$

2.7. Comprobar siempre

Siempre hay que comprobar que la función propuesta como solución a la ecuación funcional, realmente la resuelve. No incluir este pequeño detalle, será un problema incompleto, además ayuda a descubrir si hemos cometido algún error. Como ejemplo resolvamos la siguiente ecuación funcional.

Ejemplo. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen

$$2f(x+y) = f(x+2y) + x^3.$$

Solución. Si hacemos $y = 0$ tenemos que $2f(x) = f(x) + x^3$, por lo que $f(x) = x^3$ y entonces podríamos decir que ya terminamos. ¿Pero realmente $f(x) = x^3$ resuelve la ecuación funcional para todo $x \in \mathbb{R}$?

Si hacemos ahora $x = 0$ en la ecuación funcional obtenemos que $2f(y) = f(2y)$ y entonces $2y^3 = 8y^3$, pero esta ultima igualdad sólo se cumple para $y = 0$ y por lo tanto no existe tal función f que resuelva la ecuación funcional. $\square$

En los ejemplos que se han presentado y en los posteriores no se comprueba que las soluciones encontradas resuelvan las ecuaciones en cuestión, sin embargo, es rutina ver que efectivamente tales funciones satisfacen los problemas enunciados.

2.8. Ecuaciones conocidas

Hay que tener presente siempre una lista de las ecuaciones funcionales que satisfacen las funciones básicas (las lineales, las trigonométricas, logaritmicas, exponenciales, potencias, etc.) A continuación mostramos una pequeña lista de ecuaciones funcionales con su función solución. Algunas de estas soluciones ya se demostraron y algunas otras las veremos más adelante.

Ecuación funcional	**Solución**
$f(x+y) = f(x) + f(y)$	$f(x) = a\,x$
$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$	$f(x) = e^{ax}$
$f(xy) = f(x) + f(y)$	$f(x) = a \log x$
$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$	$f(x) = x^a$

$f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$	$f(x) = ax + b$
$f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$	$f(x) = \tan ax$
$f(x+y) = \dfrac{f(x)f(y)-1}{f(x)f(y)}$	$f(x) = \cot ax$
$f(x+y) = \dfrac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$	$f(x) = \dfrac{c}{x}$
$f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)+2f(x)f(y)}{1-f(x)f(y)}$	$f(x) = \dfrac{cx}{1-cx}$
$f(x+y)+f(x-y) = 2(f(x)+f(y))$	$f(x) = ax^2$
$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)$	$f(x) = cx + a$
$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y)$	$f(x) = \cosh ax$ $f(x) = \cos bx$
$f(x+y)f(x-y) = [f(x)]^2 + [f(y)]^2$	$f(x) = ax$ $f(x) = a \sin bx$ $f(x) = a \sinh bx$
$f(x+y) = f(x)e^y$	$f(x) = ae^x$
$f(x+y) = f(x)+f(y)+f(x)f(y)$	$f(x) = e^{ax} - 1$

Cuadro 2.1: Algunas ecuaciones funcionales y sus soluciones.

Para finalizar con este capítulo sólo resta decir que siempre se deben tomar en cuenta las propiedades que se piden para la función solución de la ecuación funcional, pues si cambian las condiciones de la función también cambian las soluciones, tal como se ilustra en los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo. Encuentre todas las funciones **continuas** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = (2x).$$

Solución. Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$, además, como f es continua podemos aplicar el límite en la función y obtenemos

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} \frac{x}{2^n}\right) = f(0),$$

por lo que $f(x) = f(0)$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y f es constante. $\square$

Ejemplo. Encuentre **todas** las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = f(2x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Solución. En este caso es fácil ver que las funciones constantes resuelven la ecuación funcional, sin embargo, podemos construir más soluciones de la siguiente manera. Tomemos cualquier intervalo de la forma $[s, 2s]$ con $s \in \mathbb{R}^+$ y sea $f : [s, 2s] \to \mathbb{R}$ una función arbitraria con la condición $f(s) = f(2s)$. De este modo tenemos f definida en todos los reales positivos. Ahora si tomamos la gráfica de f y la estiramos horizontalmente por un factor 2^n con $n \in \mathbb{Z}$ entonces obtenemos la gráfica de f en el intervalo $[2^n s, 2^{n+1}s]$.

Análogamente definimos f en los reales negativos en un intervalo $[2t, t]$ con $t < 0$ y con la condición que $f(2t) = f(t)$. Así sólo falta definir f en $x = 0$, el cual puede tomar cualquier valor. $\square$

Cosas más patológicas las veremos en el capítulo 5, al resolver la ecuación de Cauchy utilizando las bases de Hamel.

Capítulo 3

Otras recomendaciones

En el capítulo anterior vimos las sugerencias básicas para empezar a resolver ecuaciones funcionales. En este capítulo veremos más sugerencias, algunas no son triviales mientras otras podrían sólo servir para resolver cierto tipo de ecuaciones.

3.1. Cuando ya se conoce una solución

En algunas ocasiones se puede encontrar fácilmente una solución particular f_0 y entonces tenemos la oportunidad de compararla con la solución general f de la ecuación funcional. Una posible comparación es $g(x) = f(x) - f_0(x)$ y ver si g satisface una ecuación funcional más sencilla o incluso que g sea idénticamente cero, en cuyo caso la solución es única. Otra posible comparación se da cuando $f_0(x)$ no se anula, en este caso podemos tomar $h(x) = f(x)/f_0(x)$ y de igual manera ver si h satisface una ecuación funcional tal vez conocida y si h es idénticamente uno entonces la solución es única.

Ejemplo. Determine todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $x, y \in \mathbb{R}$ que cumplen

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy. \tag{3.1}$$

Solución. Una solución de la ecuación (3.1) es $f_0(x) = x^2$. Consideremos la función $g(x) = f(x) - x^2$, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) - (x+y)^2, \\ &= f(x) + f(y) + 2xy - x^2 - 2xy - y^2, \\ &= f(x) - x^2 + f(y) - y^2 = g(x) + g(y), \end{aligned}$$

luego g debe cumplir la ecuación de Cauchy cuyas soluciones continuas son $g(x) = cx$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces sustituyendo $g(x) = cx$ en $g(x) = f(x) - x^2$ obtenemos que

$$f(x) = x^2 + cx,$$

las cuales satisfacen la ecuación funcional. □

En el ejemplo anterior vimos cómo se resolvía la ecuación considerando $g(x) = f(x) - f_0(x)$ en el ejemplo que se muestra a continuación se tomará en cuenta la función $h(x) = \frac{f(x)}{f_0(x)}$.

Ejemplo. Encuentre todas las funciones continuas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que satisfacen

$$\frac{f(x+y)}{f(x)f(y)} = \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2.$$

Solución. Es claro que una solución es $f(x) = x^2$. Tomando entonces la función $h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ y sustituyendo en la ecuación original obtenemos

$$\frac{(x+y)^2 h(x+y)}{x^2 h(x) y^2 h(y)} = \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2,$$

lo que nos lleva a que $h(x+y) = h(x)h(y)$, cuya solución es $h(x) = a^x$ con $a \in \mathbb{R}^+$, luego las funciones que resuelven nuestra ecuación funcional son $f(x) = a^x x^2$. $\square$

3.2. Puntos fijos y ceros

Localizar los puntos fijos y en general puntos periódicos puede ser de gran ayuda para caracterizar funciones. Encontrar los ceros y/o las intersecciones con los ejes o algunas rectas especiales sirve para tener indicios de como serán las soluciones. Son dos sugerencias útiles, pues algunas veces estos puntos separan el comportamiento de las funciones que se buscan.

Ejemplo. (IMO, 1983). Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que satisfacen,
(*i*) $f(x(f(y))) = yf(x)$ para cualesquiera números positivos x, y,
(*ii*) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Solución. Si $x = 1$, entonces

$$f(f(y)) = yf(1)$$

y como $f(1) \neq 0$ (pues $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$) se tiene que f es una biyección, en particular es suprayectiva, luego existe y_0 tal que $f(y_0) = 1$.

Como

$$f(xf(y_0)) = y_0 f(x) \qquad \text{si} \qquad x > 0,$$

al hacer $x = 1$, se tiene que $f(1) = y_0 f(1)$ por lo que $y_0 = 1$, por tanto

$$f(1) = 1.$$

Si $x = y$ entonces

$$f(xf(x)) = xf(x)$$

luego $xf(x)$ es un punto fijo de f. Veamos que el único punto fijo de f es 1 por lo que se concluirá que $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Al sustituir x por $\frac{1}{a}$, y por a, en la ecuación original obtenemos

$$f\left(\frac{1}{a}f(a)\right) = af\left(\frac{1}{a}\right)$$

y como f es inyectiva tenemos que

$$f(a) = a \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}$$

luego si hay un punto fijo a diferente de 1, entonces hay otro punto fijo que es $\frac{1}{a}$. Como $a \neq 1$ entonces a o $\frac{1}{a}$ es mayor que 1, por lo que podemos suponer que a es un punto fijo mayor que 1. Pero $f(a) = a$ implica por inducción que

$$f(a^n) = a^n,$$

como

$$a^n \to \infty \quad \text{si} \quad n \to \infty. \qquad \Rightarrow \qquad f(a^n) = a^n \to \infty,$$

lo que contradice que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Desde luego la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ satisface las condiciones del problema. $\square$

Ejemplo. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ y supongamos que $f(x) = x$ no tiene raíces reales. Muestre que la ecuación

$$f(f(x)) = x,$$

no tiene soluciones reales.

Solución. La solución es bastante fácil, como $f(x) = x$ no tiene raíces reales, es decir, no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) - x = 0$ entonces se cumple que $f(x) > x$ o bien $f(x) < x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ pues $f(x) - x$ es continua y si fuera positiva en un punto a y negativa en b entonces, por el teorema del valor intermedio, existiría un c entre a y b tal que $f(c) = 0$.

Si $f(x) > x$ entonces $f(f(x)) > f(x)$ por lo que $f(f(x)) > x$ para todo x real y $f(f(x)) = x$ no tiene soluciones reales.

Análogamente, si $f(x) < x$ entonces $f(f(x)) < f(x)$ por lo que $f(f(x)) < x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y por lo tanto $f(f(x)) = x$ tampoco tiene solución en los reales. $\square$

3.3. Otras sustituciones

Además de la sustitución por valores específicos, se pueden intentar otras sustituciones más generales, por ejemplo $\frac{1}{x}$, $x+1$, $x+y$, $x-y$. Por ejemplo, para encontrar las funciones que cumplan, $f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = x$, sustituir x por $\frac{1}{1-x}$ es un buen primer intento, sucede a veces como en este ejemplo, que hay que seguir haciendo sustituciones como aquí el valor $\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$ es también un candidato para sustituir. Así que si se ve la necesidad de seguir haciendo sustituciones, hay que realizarlas.

Ejemplo. Sea f definida en los reales excepto para $x = 0$ y $x = 1$ y que satisface la ecuación funcional

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x. \tag{3.2}$$

Encuentre todas las f que satisfacen estas condiciones.

Solución. Si hacemos

$$\alpha(x) = \frac{x-1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha^2(x) = \frac{-1}{x-1} \qquad \text{y} \qquad \alpha^3(x) = x$$

sustituyendo x por $\alpha(x)$ en (3.2) llegamos a lo siguiente

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{-1}{x-1}\right) = \frac{2x-1}{x} \tag{3.3}$$

y ahora x por $\alpha^2(x)$ igual en (3.2)

$$f\left(\frac{-1}{x-1}\right) + f\left(x\right) = \frac{x-2}{x-1}. \tag{3.4}$$

Ahora si sumamos (3.2) y (3.4) y restamos (3.3) llegamos a lo siguiente

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 1}{2x(x-1)},$$

la cual es la solución de nuestra ecuación funcional. $\square$

Ejemplo. (OIM, 1986). Encuentre todas las $f(x)$ tales que

$$[f(x)]^2 f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x$$

para todo x distinto de 0, 1, -1.

Solución. Al sustituir x por $\dfrac{1-x}{1+x}$ en la ecuación original, obtenemos

$$\left[f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]^2 \cdot f(x) = 64\frac{1-x}{1+x}.$$

Como $[f(x)]^4 \left[f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]^2 = (64x)^2$, tenemos de las dos últimas igualdades que

$$[f(x)]^3 = \frac{(64x)^2}{64\left(\frac{1-x}{1+x}\right)} = \frac{64x^2(1+x)}{(1-x)}$$

por lo que

$$f(x) = 4\sqrt[3]{\frac{x^2(1+x)}{(1-x)}}.$$

Se verifica de manera usual que tal $f(x)$ satisface la ecuación. $\square$

3.4. Periodicidad

Si se logra ver que la función debe cumplir una relación de la forma $f(x+a) = f(x)$ para alguna a fija, es decir ver que la función es periódica, entonces tendremos alguna reducción del problema. Por lo que se deberá tener en cuenta las funciones periódicas básicas como seno, coseno, tangente.

Ejemplo. (Bielorusia, 2005).
(i) Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisface $f(n) = f(n + f(n))$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Muestre que si la imagen de f es finita entonces f es periódica.
(ii) Dar un ejemplo de una función no periódica $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumpla $f(n) = f(n + f(n))$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Solución. (i) Como $f(n) = f(n + f(n))$ entonces se cumple que

$$\begin{aligned} f(n + f(n) + f(n)) &= f((n + f(n)) + f(n + f(n))) \\ &= f(n + f(n)) = f(n). \end{aligned}$$

Por tanto, $f(n) = f(n + 2f(n))$ y por inducción se puede verificar fácilmente que $f(n) = f(n + kf(n))$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sea $A = f(\mathbb{N}) = \{a_1, ..., a_t\}$ la imagen de f. Sea $T = a_1 \cdot a_2 \cdots a_{t-1} \cdot a_t$. Veamos que f es periódica con periodo T.

Como $f(n) = f(n+kf(n))$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $f(n+T) = f(n+T+lf(n+T))$ para todo l. Luego, si $a = f(n)$, $b = f(n+T) \in A$ entonces $k = \frac{2T}{a}$, $l = \frac{T}{b} \in \mathbb{N}$ y $n + kf(n) = n + T + lf(n+T)$, por tanto,

$$f(n) = f(n + kf(n)) = f(n + T + lf(n + T)) = f(n + T).$$

Por lo que f es periódica con periodo T.

(ii) Para $n = 2^k m$ con $k \in \mathbb{N}_0$ y m impar definimos $f(n) = 2^{k+1}$.
Notemos que $f(n + f(n)) = f(2^k m + 2^{k+1}) = f(2^k(m + 2)) = 2^{k+1} = f(n)$, por lo que cumple con la propiedad requerida y no es periódica. $\square$

Ejemplo. Muestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica si para alguna $a \in \mathbb{R}$ y para toda $x \in \mathbb{R}$ se cumple

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}.$$

Solución. De la ecuación obtenemos $f(x) = \frac{1+f(x-a)}{1-f(x-a)}$ y sustituyendo en la original obtenemos

$$\begin{aligned} f(x+a) &= \frac{1+\frac{1+f(x-a)}{1-f(x-a)}}{1-\frac{1+f(x-a)}{1-f(x-a)}} \\ &= \frac{2}{-2f(x-a)} = \frac{-1}{f(x-a)}. \end{aligned}$$

y entonces se cumple que $f(x+2a) = \frac{-1}{f(x)}$. Tomando en cuenta lo anterior calculemos $f(x+4a)$.

$$\begin{aligned} f(x+4a) &= f((x+2a)+2a) \\ &= \frac{-1}{f(x+2a)} \\ &= \frac{-1}{\frac{-1}{f(x)}} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto f es periódica con periodo $4a$. □

3.5. Transformar la ecuación

Algunas veces aplicando una función conocida a ambos lados de la ecuación funcional se puede llegar a otra ecuación cuya solución sea más fácil encontrar. Por ejemplo la ecuación del tipo de Cauchy, $f(x+y) = f(x)f(y)$ se simplifica al transformarla a $logf(x+y) = logf(x) + logf(y)$.

Ejemplo. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que

$$f(x+1) = [f(x)]^2$$

Solución. Si $a > 0$ podemos aplicar $\log_a$ en ambos lados y obtener

$$\log_a f(x+1) = 2\log_a f(x)$$

por lo que si $g(x) = \log_a f(x)$ tenemos la nueva ecuación $g(x+1) = 2g(x)$ que es una ecuación en diferencias[1] cuya solución es $2^x\Psi(x)$, con $\Psi(x)$ una función periódica de periodo 1. Entonces tenemos que

$$f(x) = a^{2^x\Psi(x)},$$

[1]Para más detalles acerca de ecuaciones en diferencias se pueden consultar [7], [9], [11].

se comprueba fácilmente que la ecuación anterior satisface la ecuación funcional. $\square$

Las ecuaciones en diferencias las veremos más adelante en el capítulo 6. Veamos otro ejemplo en donde es necesario transformar la ecuación para llegar a la solución.

Ejemplo. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas que satisfacen

$$[f(x)]^2 = f(x+y) \cdot f(x-y).$$

Solución. Aplicando logaritmo a ambos lados de la ecuación tenemos lo siguiente: $2 \log f(x) = \log f(x+y) + \log f(x-y)$. Haciendo $g(x) = \log f(x)$ la ecuación se transforma en

$$2g(x) = g(x+y) + g(x-y),$$

la cual ya se resolvió en la sección 2.5 en el segundo ejemplo, pero veamos otra manera de encontrar la solución. Hagamos $u = x+y$ y $v = x-y$, sustituyendo esto tenemos que

$$2g\left(\frac{u+v}{2}\right) = g(u) + g(v) \quad \Rightarrow \quad g\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{g(u)+g(v)}{2}$$

ésta es la ecuación de Jensen, cuya solución es $g(x) = ax + g(0)$ con $a \in \mathbb{R}$, por lo que $\log f(x) = \log ax + \log f(0)$. Luego la solución a la ecuación funcional es

$$f(x) = f(0)e^{ax}.$$

$\square$

Aunque en los dos ejemplos anteriores se utilizaron propiedades de los logaritmos para encontrar las soluciones se pueden utilizar algunas otras funciones, tales como las trigonométricas, un ejemplo utilizando propiedades de la función tangente lo veremos en la siguiente recomendación.

3.6. Recordar las ecuaciones de Cauchy

Siempre se deben tener en cuenta las ecuaciones del tipo Cauchy. Si se sospecha que alguna ecuación funcional puede reducirse a una de éstas, hay que intentar hacerlo. Después de ver varios ejemplos y problemas se podrá decidir cuando esto podría funcionar.

Ejemplo. (IMO 1977 lista larga) Determine todas las funciones reales $f(x)$ continuas definidas en el intervalo $(-1,1)$ y que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)} \qquad (x+y), x, y \in (-1,1). \tag{3.5}$$

Solución. Haciendo $x = y = 0$ obtenemos lo siguiente

$$f(0) = \frac{2f(0)}{1-[f(0)]^2}.$$

lo cual tiene sentido si $f(0) \neq \pm 1$ y entonces tenemos que $[f(0)]^3 - f(0) = 0$ por lo que una solución posible es $f(0) = 0$.

Hagamos ahora $g(x) = \arctan f(x)$ por lo que $\tan g(x) = f(x)$ la cual está bien definida, pues $x \in (-1, 1)$. Sustituyendo lo anterior en (3.5) obtenemos que

$$\tan g(x+y) = \frac{\tan g(x) + \tan g(y)}{1 - \tan g(x) \tan g(y)} = \tan\left(g(x) + g(y)\right).$$

La última igualdad la obtenemos de la fórmula para la tangente de la suma de dos ángulos. Ahora, aplicando la función inversa de la tangente a ambos lados de la ecuación obtenemos que

$$g(x+y) = g(x) + g(y) + k(x,y)\pi \tag{3.6}$$

en donde $k(x, y)$ es una función que sólo toma valores enteros. Por otro lado como $f(0) = 0$ tenemos que $g(0) = 0$ y entonces $k(0, 0) = 0$, pero como k es una función continua entonces $k(x, y) = 0$ para toda $x, y \in \mathbb{R}$ y obtenemos la ecuación

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

que es la ecuación de Cauchy cuya solución continua es $g(x) = ax$. Luego la solución de la ecuación (3.5) es la función

$$f(x) = \tan ax.$$

$\square$

A continuación mostramos un ejemplo parecido al anterior, en el cual también se transforma la ecuación para llegar a una ecuación funcional de Cauchy.

Ejemplo. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas tales que

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), \qquad \text{con } xy \neq 1.$$

Solución. Como $\dfrac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \tan(u+v)$, podemos tomar $x = \tan u$ e $y = \tan v$ con $xy \neq 1$, lo cual se cumple si y sólo si $\tan u \tan v \neq 1$, es decir, $u - v \neq \frac{\pi}{2}$.

La ecuación se transforma en

$$f(\tan u) + f(\tan v) = f(\tan(u+v)),$$

luego $f \circ \tan$ es aditiva y continua, por lo que $f \circ \tan u = cu$ lo cual implica que $f(x) = c \arctan x$. $\square$

Ejemplo. Encuentre todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y).$$

Solución. La función $f(x) \equiv -1$ es solución de la ecuación funcional. Hagamos $g(x) = f(x) + 1$ y sustituyendo obtenemos

$$\begin{aligned} g(x+y) - 1 &= g(x) - 1 + g(y) - 1 + [g(x) - 1][g(y) - 1], \\ &= g(x) - 1 + g(y) - 1 + [g(x)g(y) - g(x) - g(y) + 1], \\ &= g(x)g(y) - 1. \end{aligned}$$

por lo que $g(x)$ cumple la ecuación de Cauchy $g(x+y) = g(x)g(y)$ y entonces $g(x) = a^x$ con $a \in \mathbb{R}^+$ y $f(x) = a^x - 1$. $\square$

3.7. Recurrencia e iteración

Usando relaciones recurrentes o relaciones entre valores consecutivos, digamos entre $f(n)$, $f(n+1)$, $f(n+2)$ ó relaciones entre las iteradas $f(n)$, $f(f(n))$, $f(f(f(n)))$ se puede reducir el problema o dar indicios de que función resuelve la ecuación. El caso en el que aparezcan $f(n)$, $f(n+1)$, $f(n+2)$, etcétera, se podrá resolver utilizando ecuaciones en diferencias. Sin embargo hay situaciones en donde se puede hacer uso de las ecuaciones en diferencias para resolver algunas ecuaciones, tal como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Muestre que existe una única función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$f(f(x)) = 6x - f(x). \tag{3.7}$$

Solución. Haciendo $x_n = f(x_{n-1})$ con $n \geq 1$ y x_0 fijo real positivo y sustituyendo en (3.7) obtenemos

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 0$$

cuyo polinomio característico (véase el capítulo 6) es $r^2 + r - 6$ y sus raíces características son $r = 2$ y $r = -3$, por lo que

$$x_n = C_1 2^n + C_2(-3)^n$$

en donde C_1 y C_2 satisfacen que $x_0 = C_1 + C_2$ y $x_1 = 2C_1 - 3C_2$, es decir, C_1 y C_2 dependen de los valores iniciales x_0 y x_1. Ahora, como $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ entonces se tiene que $f^n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ y dividiendo por 3^n obtenemos

$$\frac{f^n(x_0)}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n C_1 + (-1)^n C_2$$

así $\left(\frac{2}{3}\right)^n C_1 + (-1)^n C_2 \geq 0$. Como $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ se deberá tener, para que $\left(\frac{2}{3}\right)^n C_1 + (-1)^n C_2$ sea no negativo, que $C_2 = 0$. Luego $f^n(x_0) = 2^n x_0$ por lo que $f(x_0) = 2x_0$, pero como x_0 es arbitrario la única solución posible de nuestra ecuación funcional es $f(x) = 2x$. $\square$

Más ejemplos los veremos en el capítulo 6, el cual se refiere a ecuaciones en diferencias o que contienen a la función incógnita iterada con ella misma.

3.8. Coincidencias

Analice el conjunto de valores donde la función de la ecuación coincide con la función que propone para resolver el problema. Trate de mostrar que el conjunto de coincidencias es igual al dominio de la función que dan. También bastará, en el caso de tener funciones continuas, que el conjunto de coincidencias sea denso.

Ejemplo. Encuentre todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para todo x y y reales se cumple que

$$f(x+y)f(x-y) = [f(x)f(y)]^2.$$

Solución. Sea $y = 0$ entonces

$$[f(x)]^2 = [f(x)]^2[f(0)]^2.$$

Si $f(0) = 0$ entonces $f(x) = 0$ y si $f(x) \neq 0$ para algún valor de x entonces tenemos que $f(0) = \pm 1$ y como f satisface la ecuación si y sólo si $-f$ la satisface sólo veremos el caso en el que $f(0) = 1$

Al tomar $x = 0$ y como suponemos $f(0) = 1$ entonces

$$f(y)f(-y) = [f(y)]^2$$

por lo que $f(y) = f(-y)$ y tenemos que la función f es par. Ahora haciendo $x = y$ y tomando en cuenta que $f(0) = 1$ llegamos a

$$f(2x) = [f(x)]^4$$

veamos que $f(x) \neq 0$ para toda $x \geq 0$. Supongamos que existe un x_0 tal que $f(x_0) = 0$ entonces

$$0 = f(x_0) = f\left(\frac{x_0}{2} + \frac{x_0}{2}\right) f(0) = \left[f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right]^4 \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{x_0}{2}\right) = 0.$$

Inductivamente $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 0$ y además como f es continua al tomar el límite obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{2^n}\right) = f(0) = 0$$

lo cual es una contradicción, pues tomamos $f(0) = 1$. De la ecuación original ya habíamos obtenido que $f(2x) = [f(x)]^4$. Ahora calculemos $f(3x)$ tomando $2x$ y x en lugar de x y y respectivamente.

$$\begin{aligned} f(3x)f(x) &= [f(2x)f(x)]^2 \\ &= [f(2x)]^2[f(x)]^2 \\ &= [f(x)]^8[f(x)]^2 \Rightarrow f(3x) = [f(x)]^9. \end{aligned}$$

Veamos por inducción que

$$f(nx) = [f(x)]^{n^2}. \tag{3.8}$$

Supongamos válido para valores menores o iguales a n y analicemos el caso $n+1$. Haciendo nx y x en lugar x y y en la ecuación original.

$$f((n+1)x)f((n-1)x) = [f(nx)f(x)]^2$$

$$f((n+1)x)[f(x)]^{(n-1)^2} = [f(x)]^{2n^2}[f(x)]^2$$

$$f((n+1)x) = \frac{[f(x)^{2n^2}][f(x)]^2}{[f(x)]^{n^2-2n+1}} = [f(x)]^{2n^2+2-n^2+2n-1} = [f(x)]^{(n+1)^2}.$$

Por último al hacer $x = \frac{1}{n}$, llegamos a que

$$f(1) = f\left(n\frac{1}{n}\right) = \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}$$

por lo que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = [f(1)]^{\frac{1}{n^2}} \tag{3.9}$$

luego, de (3.8) y (3.9) llegamos a

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{m^2} = [f(1)]^{\left(\frac{m}{n}\right)^2}.$$

Como ésta función es continua en un subconjunto denso de $\mathbb{R}^+$ entonces es continua en todos los reales positivos. Además, como f es par entonces es continua en todos los reales, por lo tanto

$$f(x) = [f(1)]^{x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

es la función solución de nuestra ecuación funcional. □

3.9. Otras bases de numeración

En ecuaciones funcionales donde $\mathbb{N}$ esté presente, puede ayudar trabajar en un sistema de numeración en base diferente de 10. Los sistemas binario y ternario son frecuentes.

Ejemplo. (China, 1995) Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisface las condiciones
(*i*) $f(1) = 1$,
(*ii*) $3f(n)f(2n+1) = f(2n)(1+3f(n))$, para toda $n \in \mathbb{N}$,
(*iii*) $f(2n) < 6f(n)$, para $n \in \mathbb{N}$.
Encuentre todas las soluciones de la ecuación, $f(k) + f(l) = 293$, $k < l$.

Solución. Por (*ii*) se tiene que $3f(n)$ divide a $f(2n)(1+3f(n))$, y como $3f(n)$ y $3f(n)+1$ son primos relativos se tiene que $3f(n)$ divide a $f(2n)$. Por (*iii*) $\frac{f(2n)}{3f(n)} < 2$ luego $f(2n) = 3f(n)$ y entonces $f(2n+1) = 1 + 3f(n)$.

Con las dos ecuaciones $f(2n) = 3f(n)$ y $f(2n+1) = 1 + 3f(n)$ podemos encontrar los primeros valores de $f(n)$, por ejemplo

$$f(2)=3,\ f(1)=3,\ f(3)=3f(1)+1=4,\ f(4)=3f(2)=3^2$$

Observemos que para las primeras potencias de 2 se tiene que

$$\begin{aligned} f(2^0) &= f(1)=1=3^0 \\ f(2^1) &= f(2)=3=3^1 \\ f(2^2) &= f(4)=9=3^2 \end{aligned}$$

Vamos a probar por inducción que si $n=2^{\alpha_k}+\cdots+2^{\alpha_0}$ en donde $\alpha_0<\alpha_1<...<\alpha_k$, entonces $f(n)=3^{\alpha_k}+\cdots+3^{\alpha_0}$.

Para $n=1$ tenemos $f(1)=f(2^0)=1=3^0$. Supongamos que el resultado es cierto para $1,2,\ldots,n-1$, con $n\geq 2$ y demostremos para n. Supongamos que $n=2^{\alpha_k}+\cdots+2^{\alpha_0}$ tenemos los siguientes casos

- Si $\alpha_0\geq 1$, sea $m=2^{\alpha_k-1}+2^{\alpha_{k-1}-1}+\ldots+2^{\alpha_0-1}$, entonces $n=2m$ y

$$\begin{aligned} f(n) &= f(2m)=3f(m), \\ &= 3(3^{\alpha_k-1}+3^{\alpha_{k-1}-1}+\ldots+3^{\alpha_0-1}), \\ &= 3^{\alpha_k}+3^{\alpha_{k-1}}+\ldots+3^{\alpha_0}. \end{aligned}$$

  La hipótesis de inducción es sobre m, pues $m<n$.

- Si $\alpha_0=0$, sea $m=2^{\alpha_k-1}+2^{\alpha_{k-1}-1}+\ldots+2^{\alpha_1-1}$, entonces $n=2m+1$ y

$$\begin{aligned} f(n) &= f(2m+1)=3f(m)+1, \\ &= 3(3^{\alpha_k-1}+3^{\alpha_{k-1}-1}+\ldots+3^{\alpha_1-1})+3^0 \\ &= 3^{\alpha_k}+3^{\alpha_{k-1}}+\ldots+3^{\alpha_0}. \end{aligned}$$

  En este caso la hipótesis se aplica igualmente sobre m.

Por lo tanto, si n se escribe de la forma $n=2^{\alpha_k}+\cdots+2^{\alpha_0}$ entonces

$$f(2^{\alpha_k}+\cdots+2^{\alpha_0})=3^{\alpha_k}+\cdots+3^{\alpha_0}.$$

Ahora bien, para resolver $f(k)+f(l)=293$, necesitamos encontrar números que en base 3 solamente usen 0 y 1 y que sumen 293. Como $293=(101212)_3$, tenemos solamente 4 descomposiciones

$$\begin{aligned} 293 &= (101)_3+(101111)_3, \\ &= (111)_3+(101101)_3, \\ &= (1101)_3+(100111)_3, \\ &= (1111)_3+(100101)_3. \end{aligned}$$

Estas soluciones corresponden a los números

$$\begin{array}{ll} k = 5 = (101)_2 & l = 47 = (101111)_2 \\ k = 7 = (111)_2 & l = 45 = (101101)_2 \\ k = 13 = (1101)_2 & l = 39 = (100111)_2 \\ k = 15 = (1111)_2 & l = 37 = (100101)_2 \end{array}$$

$\square$

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función que satisface las siguientes condiciones

$$f(1) = 2, \qquad f(2) = 1, \qquad f(3n) = 3f(n),$$

$$f(3n+1) = 3f(n) + 2, \qquad f(3n+2) = 3f(n) + 1.$$

Encuentre todos los naturales $n \leq 2011$ para los cuales $f(n) = 2n$.

Solución. A continuación vemos como se comporta la función en base 10 y en base 3.

$$\begin{array}{ll} f(1) = 2 & f((1)_3) = (2)_3 \\ f(2) = 1 & f((2)_3) = (1)_3 \\ f(3) = 3f(1) = 6 & f((10)_3) = (20)_3 \\ f(4) = 3f(1) + 2 = 8 & f((11)_3) = (22)_3 \\ f(5) = 3f(1) + 1 = 7 & f((12)_3) = (21)_3 \\ f(6) = 3f(2) = 3 & f((20)_3) = (10)_3 \\ f(7) = 3f(2) + 2 = 5 & f((21)_3) = (12)_3 \\ f(8) = 3f(2) + 1 = 4 & f((22)_3) = (11)_3 \\ f(9) = 3f(3) = 18 & f((100)_3) = (200)_3 \\ f(10) = 3f(3) + 2 = 20 & f((101)_3) = (202)_3. \end{array}$$

Lo anterior nos sugiere que la función intercambia los dígitos 2 por 1 en la representación en base 3 y viceversa, lo cual demostraremos por inducción.

Notemos primero que cualquier número n se puede representar de la siguiente manera $n = a_k 3^{\alpha_k} + a_{k-1} 3^{\alpha_{k-1}} + \ldots + a_1 3^{\alpha_1} + a_0 3^{\alpha_0}$, en donde $a_i = 1$ ó 2 con $0 \leq i \leq k$ y además $\alpha_k > \alpha_{k-1} > \ldots > \alpha_1 > \alpha_0$.

Sea f la función que intercambia los dígitos 2 por 1 y viceversa en la representación de n en base 3, es decir

$$\begin{aligned} f(n) &= f(a_k 3^{\alpha_k} + a_{k-1} 3^{\alpha_{k-1}} + \ldots + a_1 3^{\alpha_1} + a_0 3^{\alpha_0}) \\ &= b_k 3^{\alpha_k} + b_{k-1} 3^{\alpha_{k-1}} + \ldots + b_1 3^{\alpha_1} + b_0 3^{\alpha_0} \end{aligned}$$

en donde $b_i = 1$ si $a_i = 2$ y $b_j = 2$ si $a_j = 1$, con $1 \leq i, j \leq k$.

La base de inducción ya la tenemos, supongamos que es válido hasta $n-1$ y demostremos para n. Tenemos los siguientes dos casos

- Si $\alpha_0 = 0$. Sea $m = a_k 3^{\alpha_k} + a_{k-1}3^{\alpha_{k-1}} + \ldots + a_1 3^{\alpha_1}$, entonces $n = m + a_0$ por lo que

$$\begin{aligned} f(n) &= f(m + a_0) = f(m) + b_0 \\ &= f(a_k 3^{\alpha_k} + a_{k-1}3^{\alpha_{k-1}} + \ldots + a_1 3^{\alpha_1}) + b_0 \\ &= b_k 3^{\alpha_k} + b_{k-1}3^{\alpha_{k-1}} + \ldots + b_1 3^{\alpha_1} + b_0. \end{aligned}$$

- Si $\alpha_0 \geq 1$. Sea $m = a_k 3^{\alpha_k - 1} + a_{k-1}3^{\alpha_{k-1}-1} + \ldots + a_1 3^{\alpha_1 - 1} + a_0 3^{\alpha_0 - 1}$ entonces $n = 3m$ y se tiene que

$$\begin{aligned} f(n) &= f(3m) = 3f(m) \\ &= 3f(a_k 3^{\alpha_k - 1} + a_{k-1}3^{\alpha_{k-1}-1} + \ldots + a_1 3^{\alpha_1 - 1} + a_0 3^{\alpha_0 - 1}) \\ &= 3(b_k 3^{\alpha_k - 1} + b_{k-1}3^{\alpha_{k-1}-1} + \ldots + b_1 3^{\alpha_1 - 1} + b_0 3^{\alpha_0 - 1}) \\ &= a_k 3^{\alpha_k} + a_{k-1}3^{\alpha_{k-1}} + \ldots + a_1 3^{\alpha_1} + a_0 3^{\alpha_0}. \end{aligned}$$

Si queremos que $f(n) = 2n$ entonces n no debe tener ningún 2 en su representación en base 3, pues en caso contrario $f(n) < 2n$, por ejemplo

$$f(24) = 3f(8) = 3 \cdot 4 = 12, \qquad f((220)_3) = (110)_3 = 12$$

Por lo que debemos contar los números menores que 2011 cuya representación ternaria no contenga el dígito 2. Como $2011 = (2202111)_3$ entonces los números menores que $(2202111)_3$ son de la forma $a_6 3^6 + \ldots + a_0 3^0$ con $a_i = 0, 1$ y los a_i no todos cero. Luego tenemos $2^7 - 1 = 127$ números menores que 2011 que cumplen $f(n) = 2n$. $\square$

Capítulo 4

Ecuaciones con variable discreta

En este capítulo veremos con más detalle cómo resolver ecuaciones funcionales donde el dominio de las funciones solución son conjuntos discretos, que por lo general serán los números naturales ó los enteros y a partir de estos ver soluciones de problemas que tengan como dominio a los números racionales.

De los métodos que vimos en los capítulos tres y cuatro hay algunos que sólo se utilizan para resolver ecuaciones funcionales con variable discreta, aunque hay otros que se utilizan también para ecuaciones con variable continua.

4.1. Ecuaciones con variable entera

En el siguiente ejemplo se utilizan dos principios que son básicos en los números naturales (los cuales son equivalentes) el principio de inducción matemática y el principio del buen orden. El principio del buen orden afirma que cualquier subconjunto de números naturales tiene un elemento mínimo (ver el apéndice A).

Ejemplo. (IMO 1977). Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función que satisface la siguiente desigualdad $f(n+1) > f(f(n))$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Muestre que $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Sea $A = \{f(1), f(2), f(3), \ldots\}$. Para toda $n \geq 2$ se cumple lo siguiente $f(n) > f(f(n-1))$, así que $f(n)$ no puede ser el mínimo de A, luego el mínimo debe ser $f(1)$ y entonces $f(n) > f(1)$ para todo $n \geq 2$.

Ahora sea $A_p = \{f(p), f(p+1), f(p+2), \ldots\}$. Para toda $n \geq p+1$ se tiene que $f(n) > f(f(n-1))$, por lo que $f(n)$ no puede ser el mínimo de A_p, luego el mínimo debe ser $f(p)$, por lo que concluimos que $f(n) > f(p)$ para toda $n \geq p+1$.

De lo anterior tenemos que $f(1) < f(2) < \ldots < f(p) < f(p+1) < \ldots$, es decir, si $p < m$ entonces $f(p) < f(m)$ por lo que f es creciente.

También tenemos que $f(1) \geq 1$ y $f(2) > f(1)$ de lo cual $f(2) \geq 2$. Análogamente $f(2) \geq 2$ y $f(3) > f(2)$ luego $f(3) \geq 3$, en general se tiene que $f(p) \geq p$, lo cual demostramos por inducción a continuación. La base, ya la tenemos, supongamos que $f(p) \geq p$, como f es creciente tenemos que $f(p+1) > f(p) \geq p$, luego $f(p+1) > p$ y entonces $f(p+1) \geq p+1$.

Tenemos que $f(f(p)) < f(p+1)$ entonces $f(p) < p+1$, pues f es creciente. Como $f(p) \geq p$ y $f(p) < p+1$ se tiene que $p+1 > f(p) \geq p$ y concluimos que $f(p) = p$. $\square$

Ejemplo. (Estonia, 2000). Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfagan la condición,

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n, \text{ para todo entero positivo } n.$$

Solución. Primero veamos que $f(1) = 1$. Si $f(1) > 1$, entonces $f(f(f(1))) + f(f(1)) + f(1) > 3$ lo cual no es posible. Notemos que f es inyectiva, ya que si $f(n) = f(m)$ entonces $3n = f(f(f(n)) + f(f(n)) + f(n) = f(f(f(m))) + f(f(m)) + f(m) = 3m$, por lo que $n = m$.

Ahora por inducción veamos que $f(n) = n$. El caso $n = 1$ ya lo demostramos. Supongamos que $f(k) = k$ para $1 \leq k < n$ y demostremos que $f(n) = n$.

Si $k < n \leq m$ como f es inyectiva (y como $f(k) = k$ para $k < n$) deberá suceder que $n \leq f(m)$, en particular $n \leq f(n)$. También tenemos, tomando $m = f(n)$ que $n \leq f(f(n))$ y entonces, usando $m = f(f(n))$, vemos que $n \leq f(f(f(n)))$, luego

$$3n = f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) \geq n + n + n.$$

Esto implica que $f(n) = n$, como queríamos. $\square$

Ejemplo. (IMO, 1996). Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ que satisfagan la condición,

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n) \qquad n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Solución. Al tomar $m = n = 0$ se tiene que $f(0) = 0$, luego $f(f(n)) = f(n)$ para toda $n \in \mathbb{N}_0$ y la ecuación funcional es equivalente a

$$f(m + f(n)) = f(m) + f(n), \qquad f(0) = 0. \tag{4.1}$$

La función constante cero es solución. Supongamos entonces que f no es la función cero.

Sea $V = \{f(n);\ n \in \mathbb{N}_0\}$ la imagen de f. Como $f(f(n)) = f(n)$ todos los valores $v \in V$ son puntos fijos de f. Sea d el menor número positivo del conjunto V, entonces $f(d) = d$ y usando (4.1) se puede verificar por inducción que $kd \in V$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Notemos que si $u, v \in V$ con $u > v$ entonces $u - v \geq d$, en efecto, como se tiene que

$$u = f(u) = f(u - v + v) = f(u - v + f(v)) = f(u - v) + f(v) = f(u - v) + v$$

entonces $f(u - v) = u - v$, por lo que $u - v \in V$ y es positivo, luego $u - v \geq d$. Usando esto podemos verificar que todos los puntos fijos de f son de la forma kd con $k \in \mathbb{N}_0$. Ya que si $a = kd + b$ es punto fijo de f con $b < d$, entonces

$$a = f(a) = f(kd + b) = f(b + f(kd)) = f(b) + f(kd) = f(b) + kd$$

luego $f(b) = b$ y entonces $b = 0$.

La relación $h(r) = \frac{f(r)}{d}$ para $r = 0, 1, ..., d-1$, define una función $h : \{0, 1, ..., d-1\} \to \mathbb{N}_0$ con $h(0) = 0$. Todo entero $n \in \mathbb{N}_0$ está representado de manera única en la forma $n = qd + r$ con $q \in \mathbb{N}_0$, $r \in \{0, 1, ..., d-1\}$ y $f(n) = f(r + qd) = f(r) + qd = (q + h(r))d$ queda determinada.

Ahora veamos que la función anterior con $n = qd + r$ con $q \in \mathbb{N}_0$ y $r \in \{0, 1, ..., d-1\}$ define una función que cumple la ecuación funcional. La condición $h(0) = 0$ asegura que si v es un entero divisible entre d (esto es $v = qd$) entonces por la fórmula de f, $f(v) = f(qd) = qd = v$. Sean ahora $m, n \in \mathbb{N}_0$, con representaciones

$$m = kd + s, \qquad n = ld + t \qquad \text{con } k, l \in \mathbb{N}_0 \text{ y } s, t \in \{0, 1, ..., d-1\}$$

tenemos que $f(m) = (k + h(s))d$ y $f(n) = (l + h(t))d$, el número $v = f(m)$ es divisible entre d y entonces $f(v) = v$, equivalentemente $f(f(m)) = (k + h(s))d$. Notemos que $m + f(n) = (k + l + h(t))d + s$ y aplicando la función se obtiene

$$f(m + f(n)) = (k + l + h(t) + h(s))d = f(n) + f(f(m)).$$

□

Cuando se trabaja con funciones en $\mathbb{N}$ o en $\mathbb{Z}$ es necesario encontrar valores de la función y con base en eso encontrar cómo está definida tal función en todo el dominio, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. La función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es creciente y satisface la condición $f(f(n)) = 3n$. Encuentre $f(2011)$.

Solución. La función es claramente inyectiva. Como $f(3n) = f(f(f(n))) = 3f(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$, es claro que $f(3) = 3f(1)$.

Si $f(1) = 1$, entonces $3 = 3 \cdot 1 = f(f(1)) = f(1) = 1$, lo cuál es absurdo por lo que $f(1) > 1$.

Como f es creciente, $1 < f(1) < f(f(1)) = 3$ por lo que $f(1) = 2$. Y entonces como $f(f(1)) = 3$, $f(2) = 3$.

Ahora notemos que $f(3) = 3f(1) = 6$ y $f(6) = f(3 \cdot 2) = 3f(2) = 9$ y como f es creciente, $f(4) = 7$ y $f(5) = 8$. Podemos ahora también encontrar que

$$\begin{aligned} f(7) &= f(f(4)) = 3 \cdot 4 = 12, \\ f(8) &= f(f(5)) = 15, \\ f(9) &= f(f(6)) = 18, \\ f(12) &= f(f(7)) = 21. \end{aligned}$$

De nuevo usando que f es creciente, se obtiene que $f(10) = 19$ y $f(11) = 20$.

Si para alguna k se tiene $f(k) = n$ y $f(k+1) = n+1$, entonces $f(n) = f(f(k)) = 3k$ y $f(n+1) = f(f(k+1)) = 3k+3$. Y si $f(k) = n$ y $f(k+1) = n+3$ entonces $f(n) = 3k$ y $f(n+3) = 3k+3$ por lo que $f(n+1) = 3k+1$ y $f(n+2) = 3k+2$.

Por inducción tenemos que $f(3^m) = 3^m f(1)$. Ahora, si n es tal que $3^m \leq n < 2 \cdot 3^m$ para algún m, tenemos en este caso que $f(3^m) = 3^m f(1) = 2 \cdot 3^m$ y $f(2 \cdot 3^m) = f(f(3^m)) = 3^{m+1}$ y por ser f creciente,

$$2 \cdot 3^m = f(3^m) < f(3^m + 1) < ... < f(3^m + 3^m - 1) < f(2 \cdot 3^m) = 3^{m+1}$$

por lo que $f(3^m + j) = 2 \cdot 3^m + j$ para $0 \leq j \leq 3^m$, luego $f(n) = n + 3^m$ para toda n con $3^m \leq n \leq 2 \cdot 3^m$.

Ahora, si $2 \cdot 3^m \leq n \leq 3^{m+1}$, entonces $n = 2 \cdot 3^m + j$ con $0 \leq j \leq 3^m$, por lo que

$$\begin{aligned} f(n) &= f(2 \cdot 3^m + j) \qquad \text{(utilizando el caso anterior)} \\ &= f(f(3^m + j)) \\ &= 3(3^m + j) \\ &= 3^{m+1} + 3j = 3n - 3^{m+1}. \end{aligned}$$

En resumen la función f es

$$f(n) = \begin{cases} n + 3^m & \text{si} \quad 3^m \leq n \leq 2 \cdot 3^m \\ \\ 3n - 3^{m+1} & \text{si} \quad 2 \cdot 3^m \leq n \leq 3^{m+1} \end{cases}$$

Como $2 \cdot 3^6 = 1458 < 2011 < 3^7 = 2187$, tenemos que $f(2011) = 3 \cdot 2011 - 2187 = 3846$. □

4.2. Ecuaciones con variable racional

A continuación se verán con más detalle ejemplos en donde el dominio de la ecuación funcional son los racionales. Esta sección tiene gran importancia, pues podría servirnos en el caso en el que el dominio de la ecuación funcional sean los reales, pues como ya vimos en el teorema 1.9, si se pide continuidad es fácil extender la solución de los números racionales a los reales.

Ejemplo. Encuentre todas las funciones $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ tales que $f(1)=2$ y que cumplen $f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$.

Solución. Haciendo $x=1$, $y=n$ con $n\in\mathbb{N}$ y tomando en cuenta que $f(1)=2$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(n) &= f(1)f(n)-f(n+1)+1 \\ f(n+1) &= f(n)+1. \end{aligned}$$

Es claro por inducción que $f(n)=n+1$.

Si ahora tomamos $x=0$, $y=n\in\mathbb{N}$ tenemos que $f(0)=f(0)f(n)-f(n)+1$ y despejando obtenemos que $f(0)-1=f(n)(f(0)-1)$. Ahora bien, si $f(0)\neq 1$ entonces $f(n)=1$ para todo $n\in\mathbb{N}$, lo cual no es posible, pues $f(1)=2$, por lo que $f(0)=1$ y entonces $f(n)=n+1$ para $n\in\mathbb{N}_0$.

Tomando $x=-1$, $y=1$ resulta que $f(-1)=f(-1)f(1)-f(0)+1$, como $f(0)=1$ y $f(1)=2$ llegamos a que $f(-1)=0$.

Si $x=-1$, $y=n\in\mathbb{N}_0$ entonces $f(-n)=f(-1)f(n)-f(-1+n)+1=-n+1$. También por inducción es claro que $f(-n)=-n+1$ para $n\in\mathbb{N}_0$. Por lo tanto $f(n)=n+1$ si $n\in\mathbb{Z}$.

Con $x=n$ y $y=\frac{1}{n}$, con $n\in\mathbb{N}$ obtenemos lo siguiente

$$f(1)=f(n)f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(n+\frac{1}{n}\right)+1=(n+1)f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(n+\frac{1}{n}\right)+1. \tag{4.2}$$

Al hacer $x=1$, $y=m+\frac{1}{n}$ tenemos que

$$f\left(m+\frac{1}{n}\right)=f(1)f\left(m+\frac{1}{n}\right)-f\left(1+m+\frac{1}{n}\right)+1$$

lo que nos lleva a $f(1+m+\frac{1}{n})=f(m+\frac{1}{n})+1$. Por inducción sobre m tenemos que

$$f\left(m+\frac{1}{n}\right)=m+f\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.3}$$

de la ecuación anterior junto con la ecuación (4.2) llegamos a

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+1$$

Por último, si en la ecuación funcional original hacemos $x = m$, $y = \frac{1}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, tomando en cuenta la ecuación (4.3), la ecuación anterior y el hecho de que $f(z) = z+1$ para todo $z \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{n}\right) &= f(m)f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(m + \frac{1}{n}\right) + 1 \\ &= (m+1)\left(\frac{1}{n}+1\right) - \left(m + f\left(\frac{1}{n}\right)\right) + 1 \\ &= \frac{m}{n} + \frac{1}{n} - f\left(\frac{1}{n}\right) + 2 \\ &= \frac{m}{n} + 1. \end{aligned}$$

por lo que la ecuación que resuelve la ecuación funcional es $f(r) = r+1$ con $r \in \mathbb{Q}$. $\square$

Ejemplo. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tales que

$$f(x^2 - y^2) = (x-y)[f(x) + f(y)] \qquad x, y \in \mathbb{Q}.$$

Solución. Al hacer $x = y = 0$ obtenemos que $f(0) = 0$. Con $x = -1$, $y = 0$ llegamos a $f(1) = -f(-1)$.

Ahora, tomando $x = r$, $y = 1$ y después $x = r$, $y = -1$ obtenemos las dos ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} f(r^2-1) &= (r-1)[f(r) + f(1)] \\ f(r^2-1) &= (r+1)[f(r) - f(1)]. \end{aligned}$$

Al igualar las dos ecuaciones anteriores y haciendo las operaciones indicadas llegamos a que

$$rf(r) + rf(1) - f(r) - f(1) = rf(r) - rf(1) + f(r) - f(1)$$

de donde $f(r) = f(1)r$.

Por lo que la solución a la ecuación funcional es $f(x) = cx$ con $c = f(1) \in \mathbb{Q}$. $\square$

4.3. Ecuaciones con sabor aritmético

También se encontrarán casos en los que se necesite utilizar algunas propiedades aritméticas de los números enteros, tales como la divisibilidad, factorización en primos o congruencias. El siguiente es un ejemplo donde se utiliza la divisibilidad.

Ejemplo. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfagan lo siguiente,
(i) f es una función suprayectiva,

(ii) $m \mid n$ si y sólo si $f(m) \mid f(n)$, para todos $m, n \in \mathbb{N}$.

Solución. Primero veamos que $f(1) = 1$. Como 1 divide a cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f(1)$ divide a $f(n)$. Por (i) existe n con $f(n) = 1$, luego $f(1)$ divide a 1 y entonces $f(1) = 1$.

Tenemos que f es inyectiva, ya que si $f(n) = f(m)$ entonces $f(n) \mid f(m)$ y $f(m) \mid f(n)$ luego por (ii) $n \mid m$ y $m \mid n$, por lo que $m = n$. Esto último y la propiedad (i) nos garantizan que f es biyectiva y entonces también se tiene por (ii) que $m \mid n$ si y sólo si $f^{-1}(m) \mid f^{-1}(n)$, es decir, $f^{-1}(n)$ cumple (ii).

Ahora veamos que $f(p)$ es un número primo si p lo es. Supongamos que p es primo y que $q \mid f(p)$. Como f^{-1} satisface (ii) se tiene que $f^{-1}(q) \mid p$, luego $f^{-1}(q) = 1$ o $f^{-1}(q) = p$, esto lleva a que $q = f(1) = 1$ o $q = f(p)$ lo que muestra que $f(p)$ es primo. Lo anterior también implica que $f^{-1}(p)$ es primo si p lo es.

Ahora vemos que $f(p^\alpha) = f(p)^\alpha$ para p primo y cada $\alpha \in \mathbb{N}$. Si q es primo y $q \mid f(p^\alpha)$ entonces $f^{-1}(q)$ es primo y $f^{-1}(q) \mid p^\alpha$ luego $f^{-1}(q) = p$, esto es $q = f(p)$. Luego el único primo que divide a $f(p^\alpha)$ es $f(p)$, por lo que $f(p^\alpha) = f(p)^\beta$ para algún entero positivo β. Como $1, p, p^2, ..., p^\alpha$ son divisores diferentes de p^α, tenemos que 1, $f(p)$, $f(p^2), ..., f(p^\alpha)$ son también divisores diferentes de $f(p^\alpha) = f(p)^\beta$, por lo que $\alpha \leq \beta$.

Si consideramos f^{-1} en lugar de f se puede ver que $\beta \leq \alpha$, por lo que $f(p^\alpha) = f(p)^\alpha$.

Veamos que f es multiplicativa, esto es que $f(mn) = f(m)f(n)$ para m, $n \in \mathbb{N}$, con $(m, n) = 1$. Como $(m,n) = 1$, entonces $(f(m), f(n)) = 1$, ya que si p es un primo que divide a $(f(m), f(n))$ entonces $f^{-1}(p)$ es un primo que divide a (m, n) lo que es una contradicción. Recíprocamente si $(f(m), f(n)) = 1$ entonces $(m, n) = 1$, pues basta aplicar lo anterior con f^{-1}.

Como m y n dividen a mn, se tiene que $f(m)$ y $f(n)$ dividen a $f(mn)$. Como $(f(m), f(n)) = 1$ se tiene que $f(m)f(n)$ divide a $f(mn)$. Aplicando al mismo argumento a f^{-1} concluimos que $f(mn)$ divide a $f(m)f(n)$, luego $f(mn) = f(m)f(n)$ si $(m, n) = 1$. Lo anterior y la descomposición de naturales en factores primos ayuda a ver que

$$f(mn) = f(m)f(n), \qquad \text{para todo } n, m \in \mathbb{N}.$$

La función f deberá ser de la siguiente manera, $f(1) = 1$, ser multiplicativa, mandar primos en primos y biyectiva. Cualquier biyección en los primos ayuda a generar una función que cumple (i) y (ii). En efecto, si g es la biyección entonces la f se puede definir para $n = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ como

$$f(n) = g(p_1^{r_1}) \cdots g(p_s^{r_s}),$$

la cual verifica las condiciones del problema. □

Ejemplo. (OIM, 1985). A cada $n \in \mathbb{N}$ se le asigna $f(n) \in \mathbb{N}_0$ de manera que se satisfacen.

(i) $f(ab) = f(a) + f(b)$

(ii) $f(n) = 0$ si la cifra de las unidades de n es 3
(iii) $f(10) = 0$
Encuentre el valor de $f(1985)$.

Solución. De las propiedades (i) y (iii) tenemos que

$$f(10) = f(2 \cdot 5) = f(2) + f(5) = 0 \Rightarrow f(2) = f(5) = 0.$$

Por otra parte como $1985 = 5 \cdot 397$ se tiene que $f(1985) = f(5) + f(397) = f(397)$.

Ahora, como $9 \cdot 397 = 3573$ y por (ii) se tiene que $0 = f(3573) = f(9) + f(397)$ por lo que $f(9) = f(397) = 0$, entonces $f(1985) = 0$. □

Ejemplo. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfagan las siguientes condiciones
(i) $f(2) = 3$,
(ii) $f(mn) = f(m)f(n)$, para todos $m, n \in \mathbb{N}$,
(iii) $f(m) < f(n)$, para $m < n$.

Solución. No hay funciones que satisfagan el problema. Supongamos que si hay tal función y que $a = f(3)$. Como $2^3 < 3^2$ y la función cumple las condiciones (i), (ii) y (iii) se tiene que $3^3 = f(2^3) < f(3^2) = f(3)^2 = a^2$ por lo que $a > 5$. También de que $3^3 < 2^5$, se tiene que $a^3 = f(3)^3 = f(3^3) < f(2^5) = 3^5 < 7^3$ por lo que $a < 7$ y entonces $a = f(3) = 6$.

Pero por otro lado, $3^8 < 2^{13}$, luego $6^8 = f(3^8) < f(2^{13}) = 3^{13}$ lo que implica que $2^8 < 3^5$ pero esto último es falso. Luego no existe tal función. □

En el siguiente ejemplo vemos que la función solución es la **función de Euler**, la cual está definida de la siguiente manera

$$\varphi(n) = \#\{l \in \mathbb{N};\ l \leq n \text{ y } (n, l) = 1\}, \tag{4.4}$$

en donde $\#$ es la cardinalidad del conjunto en cuestión y (m, l) es el máximo común divisor de m y l.

Ejemplo. Determine todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{d|n} f(d) = n, \quad \text{para toda } n \geq 1.$$

Solución. Para $n = 1$ tenemos que $f(1) = 1$ y para $n = 2$ obtenemos $f(1) + f(2) = 2$, luego $f(2) = 1$.

Si $n = p$, con p número primo tenemos que $f(1) + f(p) = p$, por lo que $f(p) = p - 1$. Tomando ahora $n = p^r$ con p primo y r entero tal que $r \geq 1$ llegamos a que

$f(1)+f(p)+\ldots+f(p^r)=p^r$. Una inducción sobre r nos muestra que $f(p^r)=p^r-p^{r-1}$.

Veamos ahora que f es multiplicativa, es decir, $f(mn)=f(m)f(n)$ para $m,n\in\mathbb{N}$, por inducción sobre $l=mn$.

Si $l=mn=1$ tenemos que $m=n=1$, luego $f(1\cdot 1)=f(1)f(1)$. Supongamos que la afirmación se cumple para toda $s\leq l$ y veamos que es válida para $l+1$.

Sean $m,n\in\mathbb{N}$ con $(m,n)=1$ (m y n primos relativos) y $mn=l+1$ entonces se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned}
mn &= \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n} f(d_1d_2) \\
&= \sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n} f(d_1)f(d_2) - f(m)f(n) + f(mn) \\
&= \left(\sum_{d_1|m} f(d_1)\right)\left(\sum_{d_2|n} f(d_2)\right) - f(m)f(n) + f(mn) \\
&= mn - f(m)f(n) + f(mn).
\end{aligned}$$

La última igualdad se da por la hipótesis de inducción, luego $f(mn)=f(m)f(n)$.

Sea $n\in\mathbb{N}$ con $n\geq 2$ y $n=p_1^{r_1}\cdots p_m^{r_m}$ su factorización en primos. Por ser f multiplicativa se tiene que

$$f(n)=f(p_1^{r_1})\cdots f(p_m^{r_m})$$

además, como $f(p_j^{r_j})=p_j^{r_j}-p_j^{r_j-1}$ para todo $j\in\{1,\ldots m\}$ se tiene que

$$f(n)=(p_1^{r_1}-p_1^{r_1-1})\cdots(p_m^{r_m}-p_m^{r_m-1})=\varphi(n),$$

en donde φ es la función de Euler.

Es claro que la función de Euler cumple la ecuación. $\square$

Capítulo 5

Ecuaciones con variable continua

5.1. Ecuaciones funcionales con varias variables

En este sección describiremos ecuaciones funcionales en las que aparecen dos o más variables, es decir, de acuerdo con la definición 1.4, las ecuaciones cuyo rango es mayor que 1.

De las ecuaciones de varias variables que hemos visto destacan las de Cauchy, la de Jensen, la de D'Alembert y las de Pexider. Todas ellas se resolvieron de una manera relativamente fácil, pues en general resolver ecuaciones de rango mayor que 1 es más fácil que resolver ecuaciones de rango 1.

Veamos la ecuación de Euler, la cual involucra a las funciones homogéneas. Sea k un número real, una función que cumple con

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y) \quad \text{con } x, y \in \mathbb{R}^+$$

es llamada una *función homogénea de grado k*.

La ecuación de Euler es

$$f(tx, ty) = g(t)f(x, y), \tag{5.1}$$

donde g es continua. Primero mostraremos que g debe ser de la forma $g(t) = t^k$.

En efecto, si en (5.1) hacemos $t = us$ se tiene que $f(tx, ty) = f(usx, usy)$ además, como

$$f((us)x, (us)y) = f(u(sx), u(sy))$$

se tiene que

$$f((us)x, (us)y) = g(us)f(x, y),$$

$$f(u(sx), u(sy)) = g(u)f(sx, sy) = g(u)g(s)f(x, y).$$

De las dos ecuaciones anteriores tenemos que

$$\begin{aligned} g(us)f(x,y) &= f((us)x,(us)y) \\ &= f(u(sx),u(sy)) \\ &= g(u)g(s)f(x,y), \end{aligned}$$

por lo que g satisface $g(us) = g(u)g(s)$, es decir, cumple una de las ecuaciones de Cauchy cuya solución es

$$g(t) = t^k, \quad k \in \mathbb{R}^+.$$

Veamos a continuación un ejemplo en en el que se pide encontrar los polinomios que cumplen una ecuación funcional.

Ejemplo. Encuentre todos los polinomios que satisfacen

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y).$$

Solución. Haciendo $x = y$ tenemos que $2xf(x) = 2x[f(x)]^2$ de donde obtenemos que $2xf(x) - 2x[f(x)]^2 = 0$ y factorizando obtenemos que

$$2xf(x)[1 - f(x)] = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$

luego, hay dos soluciones de la ecuación son $f(x) \equiv 0$ y $f(x) \equiv 1$. Sólo falta ver que no hay otras soluciones.

Supongamos que $f(x)$ no es idénticamente cero, y que $deg(f) = n \geq 1$ entonces f tiene a lo más n raíces $a_1, \ldots, a_n$ por (5.2) tendríamos que $1 - f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$, lo cual es absurdo, pues $1 - f(x)$ debe tener a lo más n ceros, luego $deg(f) = 0$ y $f(x) \equiv 0$. Lo mismo sucede si suponemos que f no es idénticamente 1. Por tanto $f(x) \equiv 1$ y $f(x) \equiv 0$ son las únicas soluciones.

5.2. Ecuaciones funcionales con una variable

A continuación veremos ecuaciones funcionales con una variable, las cuales en algunas ocasiones son más difíciles de resolver, pues no hay la versatilidad de intercambiar las variables, tal como se puede hacer en el caso de ecuaciones funcionales de rango $n \geq 2$.

5.2.1. Ecuaciones funcionales con polinomios

Veamos ahora el caso de los polinomios, los cuales son un caso más fácil, pues son funciones continuas que están definidas en todos los números reales. Aquí damos unos ejemplos, para lo cual necesitaremos propiedades básicas de polinomios, tales propiedades se ven con detalle en el Apéndice.

Ejemplo. ¿Existirá un polinomio $p(x)$ para el cual se cumpla que

$$xp(x-1) = (x+1)p(x)?$$

Solución. Es claro que $p(x) \equiv 0$ satisface la ecuación, veamos que es la única solución.

Haciendo $x = 0$ obtenemos que $p(0) = 0$, y si tomamos $x = 1$ entonces $0 = 1p(0) = 2p(1)$ por lo tanto $p(1) = 0$.

Veamos que $p(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La base de inducción ya la tenemos, supongamos que $p(n) = 0$ y veamos que $p(n+1) = 0$. Sustituyendo x por $n+1$ en la ecuación original tenemos que $(n+1)p(n) = (n+2)p(n+1)$. Como $p(n) = 0$ se tiene que

$$(n+2)p(n+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad p(n+1) = 0.$$

Entonces $p(x)$ tiene un número infinito de ceros, lo cual no es posible para algún polinomio de grado $n \geq 1$, luego $p(x) \equiv 0$. $\square$

Ahora veamos un ejemplo en el que utilizamos el grado de los polinomios para encontrar la solución a una ecuación funcional.

Ejemplo. Encuentre todos los polinomios p y q con coeficientes reales que satisfacen

$$p(q(x)) = p(x)q(x).$$

Solución. Primero tenemos que $deg(p \circ q) = deg(p) \cdot deg(q)$ y $deg(p \cdot q) = deg(p) + deg(q)$, luego deberá cumplirse que $deg(p) \cdot deg(q) = deg(p) + deg(q)$, por lo que

$$deg(p) = deg(q) = 0 \quad \text{ó} \quad deg(p) = deg(q) = 2.$$

Si $deg(p) = deg(q) = 0$ tenemos que p y q son constantes lo que nos lleva a que

$$p(x) \equiv c, \qquad q(x) \equiv 1. \tag{5.3}$$

Veamos el caso en el que $deg(p) = deg(q) = 2$. Sabemos por el teorema fundamental del álgebra que $q(z) = 0$ para algún $z \in \mathbb{C}$ por lo que

$$\begin{aligned} p(0) &= p(q(z)) \\ &= p(x)q(z) \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo que nos dice que 0 es una raíz de $p(x)$, por lo que se puede escribir de la forma $p(x) = a(x^2 + bx)$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Como $p(q(x)) = p(x)q(x)$ tenemos que

$$a([q(x)]^2 + bq(x)) = a(x^2 + bx)q(x)$$

despejando y factorizando $aq(x)$ llegamos a

$$aq(x)[q(x) - x^2 - bx + b] = 0,$$

como $deg(q) \neq 0$ entonces $q(x) = x^2 + bx - b$ por lo que las soluciones de la ecuación cuando $deg(p) = deg(q) = 2$ son

$$\begin{aligned} p(x) &= a(x^2 + bx) \\ q(x) &= x^2 + bx - b. \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo. Encuentre los polinomios $p(x)$ con coeficientes reales tales que

$$p(x^2) = p(x)p(x+1).$$

Solución. Si $a \in \mathbb{C}$ es una raíz de $p(x) = 0$, entonces de la ecuación funcional sse obtiene que $a^2, a^4, a^8, \ldots$ son también raíces de $p(x) = 0$, luego $|a| = 1$ o bien $|a| = 0$, pues en caso contrario se tendría un conjunto infinito de raíces.

También $(a-1)^2$ es raíz, ya que $p((a-1)^2) = p(a-1)p(a) = 0$ y se tiene que $(a-1)^4, (a-1)^8, (a-1)^{16}, \ldots$ también son raíces, por lo que $|a-1| = 0$ o bien $|a-1| = 1$.

Ahora veamos que no puede darse el caso que $|a| = 1$ y $|a-1| = 1$. Si $a = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, las dos restricciones obligan a que $2\cos\theta = 1$, por lo que $\theta = \frac{\pi}{3}$ ó $\theta = \frac{5\pi}{3}$.

Si $\theta = \frac{\pi}{3}$, como a^2 es raíz de $p(x) = 0$ entonces $a^2 - 1$ también es raíz de $p(x) = 0$ y como

$$(a^2-1)^2 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} - 1\right)^2 + \left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)^2 = 3$$

tal raíz $a^2 - 1$ tiene modulo mayor a 1 y entonces $p(x) = 0$ tendría una infinidad de raíces $(a^2-1)^n$, con $n \in \mathbb{N}$. El caso $\theta = \frac{5\pi}{3}$ es análogo.

Entonces solamente ocurre que $a = 0$ ó $a = 1$, por lo que $p(x)$ es de la forma $p(x) = cx^n(x-1)^m$, para alguna constante real c y $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Al sustituir $p(x)$ en la ecuación se tiene que $c = 0$ ó $c = 1$. En el primer caso $p(x) \equiv 0$ y en el segundo caso se obtiene que $n = m$, por lo que $p(x) = x^n(x-1)^n$ con $n \geq 0$, en el caso que $n = 0$ tenemos la solución $p(x) = 1$. Es claro que los polinomios de tal forma cumplen con la ecuación funcional. $\square$

5.2.2. Linealización

En muchas ocasiones se presentan ecuaciones que no son lineales y como ya habíamos visto en el capítulo 3 mediante alguna transformación se puede simplificar la ecuación funcional que necesitemos resolver tal como se hizo en algunas de las ecuaciones de Cauchy.

Primero, si tenemos una ecuación funcional que contenga $f(ax)$ podemos linealizarla de la siguiente manera, Haciendo $a = e^b$ y $x = e^z$

$$f(ax) = f(e^b e^z) = f(e^{b+z}) = g(b+z),$$

en donde la función g cumple que $g(x) = (f \circ \exp)(x)$ y $b = \log a$.

Ahora, si la ecuación tiene alguna potencia de x como argumento de la función, es decir, $f(x^n)$, con $n > 1$ podemos hacer la transformación $x = e^{n \log x}$, haciendo $h(x) = (f \circ \exp)(x)$ obtenemos

$$f(x^n) = f(e^{n \log x}) = f(e^{ny}) = h(ny).$$

y entonces podemos aplicar el caso anterior, con lo cual llegamos a lo siguiente

$$\begin{aligned} f(x^n) &= f(e^{n \log x}) = f(e^{e^m \cdot e^z}) \\ &= f(e^{e^{m+z}}) \\ &= g(m+z), \end{aligned}$$

en donde $m = \log n$, $z = \log(\log x)$ y $g(x) = (f \circ \exp \circ \exp)(x)$.

Si tenemos que la ecuación contiene $f(e^{ax})$ entonces podemos hacer lo siguiente

$$f(e^{ax}) = f(e^{e^b e^z}) = f(e^{e^{b+z}}) = g(b+z),$$

con $g(x) = (f \circ \exp \circ \exp)(x)$, $b = \log a$ y $z = \log x$. Algunas veces es útil usar algún logaritmo en cualquier otra base, pues de este modo se reduce el problema de manera significativa.

Al linealizar una ecuación funcional con alguno de los métodos descritos se obtendrá una ecuación en diferencias lineal, las cuales se verán con más detenimiento en el capítulo siguiente.

5.2.3. Función característica e invariantes

En esta sección trabajaremos con ecuaciones de los siguientes tipos

$$f(g(x)) = G(x, f(x)) \tag{5.4}$$

$$f(h(x, f(x))) = H(x, f(x)) \tag{5.5}$$

En las ecuaciones (5.4) y (5.5) las funciones g, G, h y H son funciones que toman valores reales y son conocidas, $f(x)$ es la función incógnita que queremos encontrar. El dominio de f siempre será un subconjunto de $\mathbb{R}$. Si no nos dan el dominio entonces encontraremos la función f con el mayor dominio posible.

Como ya habíamos dicho, la gráfica de f es el conjunto

$$graf(f) = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2;\ x \in dom(f)\right\}.$$

En la ecuación (5.4) si $(x_0, y_0) \in graf(f)$ (con $y_0 = f(x_0)$), si definimos $x_1 = g(x_0)$ y $y_1 = G(x_0, y_0)$, entonces $(x_1, y_1) \in graf(f)$. Esto implica que la función

$$\chi : (x, y) \to (g(x), G(x, y))$$

manda puntos de $graf(f)$ en ella misma. A la función χ se le conoce como la *función característica* de la ecuación funcional (5.4). Esta nos ayudará a encontrar algunas soluciones de tal ecuación. Análogamente para la ecuación (5.5) tenemos la función característica

$$\chi : (x, y) \to (h(x, y), H(x, y)).$$

También tenemos la siguiente definición acerca de funciones y conjuntos *invariantes.*

Definición 5.1 *Sean $\chi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ entonces*

1. *Si para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tenemos que*

$$\varphi(x, y) = \varphi(\chi(x, y))$$

   *entonces φ es un **invariante** en la órbita de χ.*

2. *Si $A \subset \mathbb{R}^2$ satisface que*

$$\chi(A) \subset A$$

   *entonces A es un **conjunto invariante** con respecto a la función χ.*

Veamos unos ejemplos de como resolver ecuaciones de los tipos señalados utilizando la función característica correspondiente.

Ejemplo. Encuentre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(3x) = f(x) + x^2.$$

Solución. Esta ecuación es de la forma $f(g(x)) = G(x, f(x))$, donde

$$g(x) = 3x \quad \text{y} \quad G(x, f(x)) = f(x) + x^2.$$

luego, si la función $\chi(x, y)$ está definida como

$$\chi(x, y) = (3x, x^2 + y)$$

la función $\varphi(x, y) = y - \frac{x^2}{8}$ es invariante en la órbita de $\chi(x, y)$, pues

$$\varphi(\chi(x, y)) = \varphi(3x, y + x^2) = y + x^2 - 9\frac{x^2}{8} = \varphi(x, y).$$

Haciendo $A_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \varphi(x,y) = c\}$ tenemos que $y - \frac{x^2}{8} = c$ por lo que

$$f(x) = \frac{x^2}{8} + c$$

es una solución de la ecuación funcional, lo cual se comprueba fácilmente, pues

$$f(3x) = \frac{9x^2}{8} + c = \frac{x^2}{8} + x^2 + c = f(x) + x^2.$$

□

Ahora veamos un ejemplo con una ecuación del tipo (5.5).

Ejemplo. Resuelva la siguiente ecuación

$$f(x + f(x)) = 3f(x). \tag{5.6}$$

Solución. Esta ecuación es de la forma $f(h(x, f(x))) = H(x, f(x))$, por lo que utilizaremos la función característica $\chi : (x,y) \to (h(x,y), H(x,y))$.
En este caso

$$\begin{aligned} h(x, f(x)) &= x + f(x), \\ H(x, f(x)) &= 3f(x). \end{aligned}$$

Luego

$$\chi(x,y) = (x + y, 3y).$$

Ahora hay que encontrar una función $\varphi(x,y)$ tal que $\varphi(x,y) = \varphi(\chi(x,y))$, es decir, que sea invariante bajo χ Tal función es la siguiente

$$\varphi(x,y) = 2x - y.$$

Pues $\varphi(\chi(x,y)) = \varphi(x + y, -3y) = 2(x + y) - 3y = 2x - y = \varphi(x,y)$.

Ahora sea $c \in \mathbb{R}$ y sea $A_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \varphi(x,y) = c\}$. La imagen de A_c bajo χ es A_c mismo y es la gráfica de la función $f(x) = 2x + c$, la cual es una solución de la ecuación funcional lo cual veremos enseguida.

Sustituyendo $f(x) = 2x + c$ en (5.6) tenemos que

$$f(x + f(x)) = f(3x + c) = 6x + 3c = 3(2x + c) = 3f(x)$$

Por lo que efectivamente $f(x) = 2x + c$ es solución. Hay que notar también que otra solución es $f(x) \equiv 0$. □

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo. Resuelva la siguiente ecuación

$$f(f(x)-2x)=2f(x)-3x. \tag{5.7}$$

Solución. En este caso

$$\chi(x,y)=(y-2x,2y-3x)$$

y si hacemos $\varphi(x,y)=-y+x$, entonces tendremos que

$$\varphi(\chi(x,y))=\varphi(y-2x,2y-3x)=-(2y-3x)+(y-2x)=-y+x=\varphi(x,y).$$

Tenemos también que $A_c=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \varphi(x,y)=c\}$ es la gráfica de $f(x)=x+c$, la cual es una solución de (5.7), pues

$$f(f(x)-2x)=f(-x+c)=-x+2c=2(x+c)-3x=2f(x)-3x.$$

□

Hay que tener presente que esta manera de resolver ecuaciones funcionales no siempre puede utilizarse, tenemos como ejemplo la siguiente ecuación funcional.

Ejemplo. Encuentre todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que

$$f(1-x)=f(x)+1.$$

Solución. En este caso la ecuación es del tipo (5.4), por lo que $g(x)=1-x$ y $G(x,f(x))=f(x)+1$, con función característica $\chi(x,y)=(1-x,y+1)$. Una función invariante es $\varphi(x,y)=x-x^2$, pues

$$\varphi(\chi(x,y))=\varphi(1-x,1+y)=(1-x)-(1-x)^2=x-x^2=\varphi(x,y).$$

Sin embargo, si existen x_0 y $1-x_0$ que cumplen la ecuación funcional se tiene que

$$f(x_0)=f(1-(1-x_0))=1+f(1-x_0)=1+1+f(x_0)$$

lo cual es absurdo, luego no existe tal función f. □

Podría pasar que $A_c=\emptyset$ o bien $A_c=\mathbb{R}^2$, los cuales son casos en los que no estamos interesados, tal como en el ejemplo anterior, en el cual tenemos que $\varphi(x,y)=x-x^2$ y al hacer $\varphi(x,y)=c$ tenemos que $A_c=\mathbb{R}^2$.

5.2.4. Ecuaciones funcionales lineales

Las ecuaciones funcionales lineales son las que tienen la siguiente forma

$$f(g(x))=f(x)h(x)+F(x) \tag{5.8}$$

la cual se conoce como *ecuación funcional no homogénea* o bien,

$$f(g(x)) = f(x)h(x) \tag{5.9}$$

y a ésta se le conoce como *ecuación funcional homogénea.* Las funciones g, h, y F están dadas y f es la función que queremos encontrar. Aquí las funciones tienen que estar definidas en algún intervalo I y además debemos tener que $g(I) \subset I$.

Tenemos el siguiente teorema que relaciona las dos ecuaciones anteriores.

Teorema 5.2 *Sea f_1 una solución de (5.8) se cumple que*

1. *Si f_2 es una solución de (5.9) entonces la siguiente función*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

   es una solución de la ecuación (5.8).

2. *Cualquier solución de (5.8) se puede obtener de f_1 en la manera establecida en el punto anterior.*

Demostración. La parte uno es fácil, sólo es cuestión de sustituir. Como f_1 es solución de (5.8) tenemos lo siguiente

$$f_1(g(x)) = h(x)f_1(x) + F(x).$$

Como f_2 es solución de (5.9) también se cumple la siguiente ecuación

$$f_2(g(x)) = h(x)f_2(x).$$

Por otro lado como $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f_1(g(x)) + f_2(g(x)) \\ &= h(x)f_1(x) + F(x) + h(x)f_2(x) \\ &= h(x)\left(f_1(x) + f_2(x)\right) + F(x) \\ &= h(x)f(x) + F(x), \end{aligned}$$

con lo que queda demostrada la primera parte. Para probar la segunda parte denotemos por f una solución cualquiera de (5.8) entonces la ecuación

$$f_2(x) = f(x) - f_1(x)$$

es solución de la ecuación (5.9) en donde la función $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ tiene la forma requerida. ■

El siguiente teorema se refiere a las soluciones de la ecuación homogénea.

Teorema 5.3 *Si tenemos la ecuación homogénea (5.9) entonces*

1. *La suma de cualesquiera dos soluciones de la ecuación homogénea es también una solución.*

2. *Sea f una solución de (5.9). Si $\varphi(x)$ es un invariante de su función característica que depende solamente de la primer variable x (en particular si $\varphi(x)$ es una constante) y si $\omega(x)$ es cualquier función entonces*

$$f_0(x) = \omega(\varphi(x))f(x)$$

es una solución de (5.9).

Demostración. Como en el teorema anterior en la primera parte sólo tenemos que sustituir. Sean f_1 y f_2 soluciones de la ecuación (5.9) y sea $f = f_1 + f_2$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f_1(g(x)) + f_2(g(x)) \\ &= h(x)f_1(x) + h(x)f_2(x) \\ &= h(x)\left(f_1(x) + f_2(x)\right) \\ &= h(x)f(x). \end{aligned}$$

Para la segunda parte sabemos que $\omega(\varphi(g(x))) = \omega(\varphi(x))$ lo que implica, por (5.9) que

$$\omega(\varphi(g(x)))f(g(x)) = \omega(\varphi(x))h(x)f(x)$$

que es lo queríamos probar. ∎

5.2.5. Ecuación de Abel. Ecuación de Schröder

La ecuación de Abel (1802-1829) es la siguiente

$$f(g(x)) = f(x) + 1 \tag{5.10}$$

y la ecuación de Schröder (1841-1902)

$$f(g(x)) = \lambda f(x), \qquad \lambda \neq 0. \tag{5.11}$$

Para resolver estas ecuaciones necesitaremos unas cuantas definiciones. Para empezar, cualquier función $g : A \to A$ puede ser usada para definir una relación de equivalencia[1] en el conjunto A de la siguiente manera: dos elementos $x, y \in A$ son equivalentes y denotamos la relación de equivalencia por $\sim_g$ si y sólo si existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $g^m(x) = g^n(y)$. Verifiquemos que ésta es realmente una relación de equivalencia.

[1] Una relación de equivalencia en A es una relación binaria $\sim$ que cumple con las siguientes propiedades

1. **Reflexividad**: Todo elemento de A está relacionado consigo mismo, es decir $x \sim x$.
2. **Simetría**: Para $x, y \in A$ si $x \sim y$ entonces $y \sim x$.
3. **Transitividad** Para $x, y, z \in A$ si $x \sim y$ y $y \sim z$ entonces $x \sim z$.

1. **Reflexividad**. Es obvio que $x \sim_g x$ en este caso $m = n = 1$ y tenemos $g(x) = g(x)$.
2. **Simetría**. Si $x \sim_g y$ entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $g^m(x) = g^n(y)$, luego $g^n(y) = g^m(x)$, por lo que $y \sim_g x$.
3. **Transitividad**. Si $x \sim_g y$ y $y \sim_g z$ entonces existen $m, n, k, l \in \mathbb{N}$ tales que $g^m(x) = g^n(y)$ y $g^k(y) = g^l(z)$, luego $g^{m+k}(x) = g^{n+k}(y)$ y $g^{k+n}(y) = g^{l+n}(z)$ y entonces $g^{m+k}(x) = g^{k+n}(y) = g^{l+n}(z)$, por lo tanto $x \sim_g z$.

Ahora asignemos a cada $x \in A$ el conjunto

$$\Omega(x) = \{y \in A;\ x \sim_g y\}.$$

A este conjunto se le conoce como la *órbita de x*. Tal como en una relación de equivalencia el conjunto de las órbitas de A forma una partición de A, lo que significa que cada elemento de A está en una y sólo una órbita, es decir, si $x, y \in A$ entonces $\Omega(x) = \Omega(y)$ o bien $\Omega(x) \cap \Omega(y) = \varnothing$. A continuación veremos un teorema que relaciona la ecuación de Abel con los puntos fijos y *ciclos* de g (ver el apéndice para la definición de *ciclo*).

Teorema 5.4 *La ecuación de Abel tiene solución si y sólo si g no tiene ciclos ni puntos fijos. En ese caso la ecuación de Abel tiene una infinidad de soluciones.*

Demostración. Primero supongamos que la ecuación de Abel tiene solución y que g tiene un punto cíclico x_0 de orden k. Observemos que para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$f(g^n(x)) = f(x) + n \tag{5.12}$$

esto lo demostraremos por inducción. El caso $n = 1$ es la ecuación de Abel. Ahora supongamos que se cumple para n, es decir

$$f(g^n(x)) = f(x) + n$$

y demostremos que se cumple para $n + 1$. Para $n + 1$ tenemos que

$$f\left(g^{n+1}(x)\right) = f(g^n(g(x)))$$

pero por hipótesis de inducción

$$f\left(g^n(g(x))\right) = f(g(x)) + n$$

con eso y utilizando el caso $n = 1$ se tiene que

$$f(g^{n+1}(x)) = f(g^n(g(x))) = f(g(x)) + n = f(x) + n + 1.$$

Ahora, utilizando (5.12) y el hecho de que x_0 es un punto periódico de g de orden k tenemos que

$$f(x_0) = f(g^k(x_0)) = f(x_0) + k$$

lo cual no posible. Por lo tanto, si la ecuación de Abel tiene solución entonces g no tiene puntos fijos ni periódicos.

Ahora veamos que si g no tiene puntos fijos ni puntos periódicos de orden k entonces la ecuación de Abel tiene una infinidad de soluciones. Escojamos un $x_0 \in \mathbb{R}$ y definamos $f(x_0) = y_0$ donde y_0 es cualquier número. Veremos que esto define sin ambigüedades la función en todo lugar de la órbita $\Omega(x_0)$.

Empleando la ecuación (5.12) tenemos lo siguiente

$$f(g^n(x_0)) = f(x_0) + n = y_0 + n.$$

Y como la función g no tiene ciclos ni puntos fijos entonces nuestra definición es correcta.

Ahora sea $z \in \Omega(x_0)$ veamos que f sí está definida en z. Como $z \in \Omega(x_0)$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g^m(x_0) = z$, luego

$$f(z) = f(g^m(x_0)) = y_0 + m.$$

Por lo que f está definida en toda la órbita $\Omega(x_0)$. De manera similar podemos definir f en las otras órbitas. Ahora bien, si $\Omega(x_1)$ y $\Omega(x_2)$ son órbitas ajenas tenemos que f está definida en $\Omega(x_2)$ de manera independiente de como se definió en $\Omega(x_1)$, esto se debe a que g manda puntos de la órbita $\Omega(x)$ en puntos de ella misma.

Por la forma en que construimos la función f es evidente que es solución de (5.10). Entonces la infinidad de soluciones corresponden a la cantidad infinita de valores $f(x_0) = y_0$ que se pueden elegir, es decir, definimos f para cada valor $f(x_0) = y_0$. ■

Ahora veamos la ecuación de Schröder como un ejemplo utilizando la ecuación de Abel.

Ejemplo.(Ecuación de Schröder.) Demuestre que la ecuación funcional

$$f(g(x)) = \lambda f(x), \qquad \lambda \neq 0$$

en donde $g(x)$ es una función conocida siempre tiene solución.

Solución. La función $f(x) \equiv 0$ es una solución de (5.2.5). Veamos si hay otras soluciones diferentes de la idénticamente cero. Si tomamos $\lambda > 0$ y $\lambda \neq 1$ y si además elegimos una función $f_0(x)$ que sea solución de la ecuación de Abel entonces la función

$$f(x) = \lambda^{f_0(x)}$$

es una solución de la ecuación de Schröder, ya que

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \lambda^{f_0(g(x))} = \lambda^{f_0(x)+1} \\ &= \lambda \cdot \lambda^{f_0(x)} \\ &= \lambda f(x). \end{aligned}$$

□

5.3. Bases de Hamel

En 1905, George Hamel descubrió funciones *salvajes* que no están acotadas en ningún intervalo y que satisfacen la ecuación de Cauchy[2]

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{5.13}$$

Además mostró que hay una infinidad de éstas que no son lineales. Veamos como se construyen éstas funciones salvajes.

Primero tenemos que $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, es un espacio vectorial que no tiene dimensión finita y entonces una base de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ es un conjunto H de elementos linealmente independientes con la propiedad de que cada $x \in \mathbb{R}$ puede expresarse como combinación lineal finita de elementos de H con coeficientes en $\mathbb{Q}$, es decir existen $h_1, h_2, ..., h_r \in H$ y $q_1, q_2, ..., q_r$ números racionales tales que

$$x = q_1h_1 + q_2h_2 + \cdots + q_rh_r.$$

Al conjunto H se le llama una base de Hamel y siempre existe (esto es un teorema de análisis matemático que utiliza el Axioma de Elección). Ahora definimos f en H de cualquier manera y extendemos a $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = q_1g(h_1) + q_2g(h_2) + \cdots + q_rg(h_r)$$

en donde g es una función de H en $\mathbb{R}$. Es fácil ver que f es aditiva en $\mathbb{R}$ (es decir satisface la ecuación (5.13)), lo cual veremos en el siguiente teorema.

Teorema 5.5 *Sea H una base de Hamel para $\mathbb{R}$ y sea $g : H \to \mathbb{R}$. Entonces la función f que asigna a cada $x \in \mathbb{R}$ ($x = q_1h_1 + q_2h_2 + \cdots + q_rh_r$) el valor*

$$f(x) = q_1g(h_1) \cdots + q_rg(h_r)$$

es una solución de la Ecuación de Cauchy.

Demostración. Si x y y son de la siguiente forma

$$x = q_1h_1 + q_2h_2 + \cdots + q_rh_r, \qquad y = s_1h_1 + s_2h_2 + \cdots + s_rh_r.$$

Entonces, aplicando f a x e y y sumando se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= f(q_1h_1 + q_2h_2 + \cdots + q_rh_r) + f(s_1h_1 + s_2h_2 + \cdots + s_rh_r) \\ &= q_1g(h_1) + \cdots + q_rg(h_r) + s_1g(h_1) + \cdots + s_rg(h_r) \\ &= (q_1 + s_1)g(h_1) + (q_2 + s_2)g(h_2) + \cdots + (q_r + s_r)g(h_r) \\ &= f((q_1 + s_1)h_1 + \cdots + (q_r + s_r)h_2) \\ &= f(x+y). \end{aligned}$$

[2]Para más referencias se puede consultar [12] capítulo 7, [21] Apéndice 6 y [16] páginas 6-7.

Por lo que f es aditiva, es decir, es solución de la ecuación de Cauchy. ■

Ahora si h_1 y h_2 son dos elementos de H diferentes y definimos $f(h_1) = h_2$, $f(h_2) = h_1$ y $f(h) = h$ para toda $h \in H \setminus \{h_1, h_2\}$, la función en $\mathbb{R}$ que extiende a esta función no es de la forma $f(x) = cx$. Ya que si $f(x) = cx$ para alguna constante c, tendríamos que

$$\begin{aligned} ch_1 &= f(h_1) = h_2 \\ ch_2 &= f(h_2) = h_1, \end{aligned}$$

luego $c = \pm 1$ y entonces $h_1 = h_2$ o $h_1 = -h_2$, pero esto es imposible para elementos de una base de Hamel, luego f no es lineal. Llamemos a $f(x) = cx$ las *soluciones triviales* de la ecuación de Cauchy. Damos enseguida un ejemplo de una función que cumple la ecuación aditiva de Cauchy .

Ejemplo. De una función que sea aditiva en un conjunto $\mathbb{K}$ que contiene a $\mathbb{Q}$, pero que no es lineal en $\mathbb{K}$.

Solución. Definamos $\mathbb{K}$ de la siguiente manera

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = a + \sqrt{2}b;\ a, b \in \mathbb{Q}.$$

Este conjunto con la suma y producto heredados de $\mathbb{R}$ es un campo que contiene a $\mathbb{Q}$. La función $f : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(a + \sqrt{2}b) = a + b$$

es una función que es aditiva es decir $f(x+y) = f(x)+f(y)$, para $x, y \in \mathbb{K}$, sin embargo f no es lineal (es decir no es de la forma $f(x) = cx$ para todo $x \in \mathbb{K}$). □

Veamos otro.

Ejemplo. Sea H una base de Hamel y sea $h_0 \in H$ fijo, definamos f como en el teorema anterior de tal manera que g tenga las siguientes propiedades

$$g(h_0) = 1 \qquad \text{y} \qquad g(h) = 0, \qquad \text{si} \quad h \neq h_0$$

si el elemento h_0 multiplicado por r_0 aparece en el desarrollo de x utilizando H entonces

$$f(x) = r_0$$

de otro modo tenemos que

$$f(x) = 0$$

De esta manera f no es de la forma $f(x) = ax$ pues toma el valor cero en una cantidad infinita de valores, esos valores son de la forma sh donde $h \in H$, $h \neq h_0$ y s es cualquier número racional y por lo tanto $f(sh) = 0$. □

Como ya vimos hay soluciones de la ecuación de Cauchy que no son las triviales. Mostraremos que las soluciones no triviales están caracterizadas por el hecho de que la gráfica de tales soluciones es densa en $\mathbb{R}^2$.

En el capítulo 1, en las hipótesis adicionales a la ecuación de Cauchy vimos que si la función que satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$ y es acotada entonces es de la forma$f(x) = cx$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

También vimos que si es acotada en una vecindad del cero igualmente f es de la forma $f(x) = cx$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En el siguiente teorema veamos como están relacionadas las soluciones no triviales de la ecuación de Cauchy con su gráfica.

Teorema 5.6 *Sea f una solución de la ecuación $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Entonces los siguientes dos enunciados son equivalentes*
1) *La gráfica de f es densa en $\mathbb{R}^2$.*
2) *La función f es una solución no trivial de la ecuación de Cauchy.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que f es una solución trivial de la ecuación de Cauchy. Como f es una linea recta entonces la gráfica de f no es densa en $\mathbb{R}^2$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, si la gráfica de f es densa en $\mathbb{R}^2$ entonces f es solución no trivial de la ecuación de Cauchy.

2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que la gráfica de f no es densa en $\mathbb{R}^2$. Entonces existe un rectángulo abierto $A = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$ tal que

$$graf(f) \cap A = \emptyset.$$

Veamos que se cumple al menos uno de los siguientes enunciados
(i) para toda $x \in (a, b)$ tenemos que $f(x) \geq c$;
(ii) para toda $x \in (a, b)$ se cumple $f(x) \leq d$
Supongamos que existen $x_1, x_2 \in (a, b)$ que satisfacen

$$f(x_1) < c, \quad f(x_2) > d$$

podemos entonces encontrar dos números racionales q_1 y q_2 tales que $q_1 + q_2 = 1$ y que cumplan $q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) \in (c, d)$. Además tenemos que $f(q_1 x_1 + q_2 x_2) = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$ por lo que

$$(q_1 x_1 + q_2 x_2, f(q_1 x_1 + q_2 x_2)) \in (a, b) \times (c, d),$$

lo cual es imposible. Por lo tanto (i) o (ii) se debe cumplir. Supongamos sin pérdida de generalidad que se cumple (i). Como (a, b) es abierto existe un $\delta > 0$ y $s \in \mathbb{R}$ tal que $(-\delta + s, \delta + s) \subseteq (a, b)$ por lo que se deduce que f es acotada inferiormente en $(-\delta, \delta)$, adicionalmente tenemos que $f(x) = -f(-x)$, luego f es acotada en $(-\delta, \delta)$. Con las hipótesis adicionales a la ecuación de Cauchy vistas en el capítulo 1, llegamos a que f es continua en 0 (hipótesis 6). Luego f es continua en todos los reales (hipótesis 2), lo cual es una contradicción. Por lo tanto, si f es una solución no trivial de la ecuación de Cauchy entonces la gráfica de f es densa en $\mathbb{R}^2$. ∎

5.4. Otra mirada a la ecuación de Cauchy

Como ya vimos, las ecuaciones de Cauchy juegan un papel muy importante al momento de resolver ecuaciones funcionales. También se han dado ciertas equivalencias a la ecuación aditiva de Cauchy tomando en cuenta diferentes hipótesis. A continuación damos un teorema referente a la ecuación de Cauchy con una lista de enunciados equivalentes, entre los cuales hay algunos que utilizan herramientas un poco más avanzadas de matemáticas.

Teorema 5.7 *Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple la ecuación aditiva de Cauchy y además $c = f(1) > 0$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *f es continua en un punto x_0.*
2. *f es creciente.*
3. *f es positiva para x positivos.*
4. *f está acotada superiormente en cada intervalo cerrado finito.*
5. *f está acotada inferiormente en cada intervalo cerrado finito.*
6. *f está acotada superiormente (inferiormente) en cada conjunto acotado de medida de Lebesgue positiva.*
7. *f es acotada cada conjunto acotado de medida de Lebesgue positiva.*
8. *f es acotada cada intervalo finito.*
9. *$f(x) = cx$.*
10. *f es localmente integrable.*
11. *f es diferenciable.*
12. *f es Lebesgue medible.*

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2). Sea $x > y$, veamos que $f(x) > f(y)$. Sea $\{r_n\} \subset \mathbb{Q}$ una sucesión de números racionales tales que

$$\lim_{n\to\infty} r_n = x - y.$$

De la ecuación anterior tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n + y - x + x_0 = x_0$. Por la continuidad de f en x_0 tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n + y - x + x_0) = f(x_0).$$

Ahora como f es aditiva y $f(1) = c$ tenemos que $f(r_n + y - x + x_0) = cr_n + f(y) - f(x) + f(x_0)$. Por lo que

$$\lim_{n\to\infty} cr_n + f(y) - f(x) = 0.$$

Pero también sucede que

$$\lim_{n\to\infty} cr_n + f(y) - f(x) = c(x-y) + f(y) - f(x),$$

al comparar los dos últimos límites se tiene que

$$f(x) - f(y) = c(x-y) > 0.$$

La desigualdad anterior se cumple, pues $f(1) = c > 0$ y además $x > y$. Por lo tanto $f(x) > f(y)$ y f es creciente.

2) $\Rightarrow$ 3). Sea $x > 0$, veamos que $f(x) > 0$. Como $x > 0$ y f es creciente se tiene que $f(x) > f(0) = 0$, que es lo que queríamos demostrar.

3) $\Rightarrow$ 4). Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo finito, veamos que f es acotada superiormente en tal intervalo. Sea $x \in [a,b]$, entonces $b - x \geq 0$. Como f es positiva en los positivos entonces $f(b-x) \geq 0$. Como f es aditiva tenemos que $f(b) - f(x) = f(b-x) \geq 0$, luego $f(b) \geq f(x)$, por lo que f está acotada superiormente en $[a,b]$ por $f(b)$.

4) $\Leftrightarrow$ 5). Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado finito, veamos que f está acotada inferiormente (superiormente) ahí. Consideremos el intervalo $[-b,-a]$, aquí por hipótesis f está acotada superiormente (inferiormente), luego para cada $-x \in [-b,-a]$ se cumple que $f(-x) \leq M$ ($N \leq f(-x)$), pero sabemos que f es impar, luego $f(-x) = -f(x)$ por lo que $-M \leq f(x)$ ($f(x) \leq -N$) para toda $x \in [a,b]$.

5) $\Rightarrow$ 6). Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado de medida de Lebesgue positiva, entonces existe un intervalo cerrado finito $[a,b]$ con $A \subset [a,b]$. Por hipótesis f está acotada inferiormente en $[a,b]$, por lo que f está acotada inferiormente en A. Para ver que f está acotada superiormente en cada conjunto acotado de medida de Lebesgue positiva se procede igual, solamente se usa 4) en lugar de 5).

6) $\Rightarrow$ 7) Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado de medida de Lebesgue positiva se tiene por 6) que existen M_1 y M_2 con $M_1 \leq f(x) \leq M_2$ para todo $x \in A$. Es claro que si $M = \max\{|M_1|, |M_2|\}$ se cumple que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in A$.

7) $\Rightarrow$ 8) Sea $|f(x)| < M$ para $x \in A$, con A un conjunto de medida de Lebesgue positiva. Sabemos que existe un número $\delta > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ que satisface $|t| < \delta$ el número t se puede expresar como $t = x - y$ para $x, y \in A$ adecuados. Luego $|f(t)| = |f(x-y)| \leq 2M$ para $t \in (-\delta, \delta)$. Entonces f es acotada en $(-\delta, \delta)$ lo cual implica que f es acotada en cualquier intervalo finito.

8) $\Rightarrow$ 9) Supongamos que f es acotada en el intervalo $[a,b]$, definamos la siguiente función

$$g(x) = f(x) - cx, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Vamos a demostrar que $g(x) \equiv 0$. Notemos que $g(x)$ es aditiva, pues

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) - c(x+y) \\ &= f(x) + f(y) - c(x) - c(y) \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

También tenemos que $g(r) = 0$ para todo $r \in \mathbb{Q}$ y g es acotada en $[a, b]$ ya que $f(x)$ y $h(x) = cx$ son acotadas en $[a, b]$.

Por otro lado tenemos para $x \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{Q}$ que

$$\begin{aligned} g(x+r) &= f(x+r) - c(x+r) \\ &= f(x) + f(r) - cx - cr \\ &= f(x) - cx = g(x). \end{aligned}$$

Si $x \in \mathbb{R}$ podemos encontrar un número r tal que $x + r \in [a, b]$, luego por la ecuación anterior, g es acotada en $\mathbb{R}$. Supongamos ahora que $g(x_0) = d > 0$ para algún x_0, entonces $g(nx_0) = nd$ para $n \in \mathbb{Z}$, lo cual sería una contradicción al hecho de que g es acotada.

Por lo tanto $g(x) \equiv 0$, de lo cual concluimos que $f(x) = cx$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

9) $\Rightarrow$ 10) Es claro, pues $f(x) = cx$ es una función integrable en cualquier intervalo cerrado.

10) $\Rightarrow$ 11) Sea f localmente integrable, veamos que f es diferenciable. Como f es aditiva y localmente integrable tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} x_0 f(x) &= \int_0^{x_0} f(x)dt \\ &= \int_0^{x_0} [f(x+t) - f(t)]dt \\ &= \int_x^{x+x_0} f(u)du - \int_0^{x_0} f(t)dt \quad \text{con } u = x+t, \\ &= \int_0^{x+x_0} f(u)du - \int_0^{x} f(u)du - \int_0^{x_0} f(u)du \\ &= \int_0^{x_0+x} f(u)du - \int_0^{x_0} f(u)du - \int_0^{x} f(u)du \\ &= x f(x_0). \end{aligned}$$

La última igualdad se da ya que podemos intercambiar x por x_0. De la ecuación anterior tenemos que $x_0 f(x) = x f(x_0)$ y al restar $x_0 f(x_0)$ en ambos lados obtenemos

$$x_0 f(x) - x_0 f(x_0) = x f(x_0) - x_0 f(x_0) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0}, \quad x_0 \neq 0.$$

Sacando límite cuando $x \to x_0$ llegamos a

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0} \qquad x_0 \neq 0.$$

Luego f es diferenciable si $x_0 \neq 0$. Para ver que f es diferenciable en 0 tomemos una sucesión de racionales $\{r_n\}$ que converja a 0, luego tenemos que

$$f'(0) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(r_n) - 0}{r_n - 0} = \lim_{n \to \infty} \frac{cr_n}{r_n} = c.$$

por lo tanto f es diferenciable en 0, luego f es diferenciable en $\mathbb{R}$.

11) $\Rightarrow$ 12) Como f es diferenciable entonces es continua y por lo tanto es Lebesgue medible.

12) $\Rightarrow$ 1) Notemos que es suficiente probar que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(h)| < \epsilon$ para toda $h \in (0, \delta)$, pues que esto implicaría la continuidad de f en cero y ya sabemos que si f es continua en cero entonces es continua en cualquier otro punto.

Sea $\epsilon > 0$, como f es Lebesgue medible el teorema de Lusin[3] nos permite encontrar un conjunto cerrado $A \subset [0, 1]$ con $\mu(A) \geq \frac{2}{3}$ y f continua en A, en donde μ es la medida de Lebesgue.

Como f es continua en A entonces es uniformemente continua en A por lo que existe $\delta \in (0, \frac{1}{3})$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ si $x, y \in A$ y $|x - y| < \delta$.

Sea $h \in (0, \delta)$. Si A y $A - h = \{x - h;\ x \in A\}$ fueran ajenos tendríamos que

$$1 + h = \mu([-h, 1]) \geq \mu(A \cup (A - h)) = \mu(A) + \mu(A - h) \geq \frac{4}{3},$$

lo cual no es posible, ya que $h < \delta < \frac{1}{3}$. Entonces A y $A - h$ no son ajenos, por lo que existe $x_0 \in A \cap (A - h)$, luego $|f(h)| = |f(x_0) - f(x_0 - h)| < \epsilon$, que es lo que queríamos.

Por lo tanto f es continua en 0 y entonces es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$. ■

Observación 1. Demostramos la equivalencia de lo enunciados anteriores, sin embargo podemos quitar los que se refieren a la medida e integral de Lebesgue así como el enunciado de diferenciabilidad y quedarnos con una cadena más corta, es decir, se pueden demostrar los enunciados en el siguiente orden
1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 8) $\Rightarrow$ 9) $\Rightarrow$ 1).

Observación 2. También podríamos agregar el siguiente enunciado: 13) *f es continua en $\mathbb{R}$*, quitar los referentes a la medida de Lebesgue con lo cual obtenemos que
1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 8) $\Rightarrow$ 9) $\Rightarrow$ 10) $\Rightarrow$ 11) $\Rightarrow$ 13) $\Rightarrow$ 1).

[3]Ver [18] páginas 66-67.

Capítulo 6

Ecuaciones en diferencias y recursivas

En este capítulo veremos ecuaciones que contienen a $f(x)$, $f(x+1)$ y en general $f(x+n)$ con $n \in \mathbb{N}$, las cuales son ecuaciones en diferencias. También estudiaremos ecuaciones que contienen iteraciones de f, es decir $f(x),\ f^2(x), \ldots, f^n(x)$ con $n \in \mathbb{N}$, a las cuales también se les llama recursiones.

En el capítulo 5 se vió cómo transformar una ecuación funcional en otra más fácil de resolver al linealizar el argumento de la función. Si teníamos una función f con argumento ax aplicamos la transformación $f(x) = g(z)$, en donde $z = \log x$ para llegar a otra ecuación funcional, pero en lugar de tener $f(ax)$ tendremos $g(z+b)$, con $b = \log a$, con lo que llegaremos a un ecuación en diferencias y al resolver la ecuación que contiene a $g(z+b)$ se llegará directamente a la función f.

6.1. Ecuaciones en diferencias

Cuando se estudian ecuaciones en diferencias se trabaja con el operador diferencia Δ, el cual está definido de la siguiente manera, si $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces $\Delta z = z(x+h) - z(x)$, siempre que $x + h$ pertenezca al dominio de z con h una constante fija. El operador Δ lo podemos definir como la diferencia de otros dos operadores los cuales son $Ez(x) = z(x+h)$ y la identidad $Iz(x) = z(x)$, por lo que $\Delta z(x) = Ez(x) - Iz(x)$.

Se define entonces la *n-ésima diferencia* Δ^n de z como $\Delta^n z = \Delta(\Delta^{n-1} z)$ y $\Delta^0 z(x) = z(x)$. Análogamente definimos $E^n z(x) = E(E^{n-1} z)$, por lo que $E^n z(x) = z(x+nh)$. y $E^0 z(x) = z(x)$.

Si Z es una función cuya primera diferencia es la función $z(x)$ entonces la llamaremos la *suma indefinida* de z y la denotamos por $\Delta^{-1} z$. Luego $\Delta Z(x) = z(x)$ y $\Delta^{-1} z(x) = Z(x)$.

A continuación enunciamos propiedades de los operadores Δ, E e I, los cuales son inmediatas. Una buena referencia para más propiedades es [9] capítulo 1.3 y 1.4.

1. $\Delta[cz(x) + w(x)] = c\Delta z(x) + \Delta w(x)$, con $c \in \mathbb{R}$.
2. $\Delta[z(x)w(x)] = Ez(x) \cdot \Delta w(x) + w(x) \cdot \Delta z(x)$.
3. $\Delta \dfrac{z(x)}{w(x)} = \dfrac{w(x)\Delta z(x) - z(x)\Delta w(x)}{w(x)Ew(x)}$, con $w(x) \neq 0$.
4. $\Delta^m \Delta^n = \Delta^n \Delta^m = \Delta^{m+n}$, con $m, n \in \mathbb{N}$.
5. $E^m E^n = E^n E^m = E^{m+n}$, con $m, n \in \mathbb{N}$.
6. Como $\Delta = E - I$ entonces
$$\Delta^n = (E - I)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} E^i.$$

Una ecuación en la que aparecen $z(x)$ y una o más de las diferencias $\Delta z(x)$, $\Delta^2 z(x), \cdots$ para cada valor de x en algún conjunto A es llamada *ecuación en diferencias* sobre el conjunto A.

Ejemplos de ecuaciones en diferencias son los siguientes

$$\Delta z(x) - 2z(x) = 0, \tag{6.1}$$

$$\Delta^2 z(x) + 3\Delta z(x) = z(x), \tag{6.2}$$

$$z(x)\Delta^2 z(x) = 1. \tag{6.3}$$

En las siguientes dos secciones veremos cómo resolver este tipo de ecuaciones cuando la variable x es entera o real.

6.1.1. Ecuaciones en diferencias con variable entera

Aquí tomaremos en cuenta ecuaciones en diferencias sobre $\mathbb{N}_0$ y para hacer más fácil la notación la variable x la cambiaremos por n, para indicar que trabajamos sobre los naturales. La h del operador E será igual a 1. Además $z(n)$ lo denotaremos por z_n. De esta manera las ecuaciones (6.1), (6.2) y (6.3) quedan de la siguiente manera

$$\Delta z_n - 2z_n = 0, \tag{6.4}$$

$$\Delta^2 z_n + 3\Delta z_n = z_n, \tag{6.5}$$

$$z_n \Delta^2 z_n = 1. \tag{6.6}$$

Si aplicamos las propiedades de los operadores Δ y E obtenemos que las ecuaciones (6.4), (6.5) y (6.6) se convierten respectivamente en

$$z_{n+1} - 3z_n = 0, \tag{6.7}$$

$$z_{n+2} + z_{n+1} - 3z_n = 0, \tag{6.8}$$

$$z_n z_{n+2} - 2z_n z_{n+1} + z_n^2 = 1. \tag{6.9}$$

Sólo veremos cómo resolver ecuaciones en diferencias tales como (6.7) o (6.8), para lo cual tenemos la siguiente definición.

Definición 6.1 *Una ecuación en diferencias lineal de orden $k \geq 1$ es una ecuación de la forma*

$$z_{n+k} + a_1 z_{n+k-1} + \ldots + a_k z_n = b_n \qquad n \geq k, \tag{6.10}$$

donde los a_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ son constantes y b_n es una sucesión conocida. Si $b_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ diremos que es una ecuación lineal homogénea.

Por el momento veamos como se resuelven las ecuaciones homogéneas.

La ecuación en diferencias lineal homogénea de orden 1

$$z_{n+1} = a_1 z_n,$$

tiene como solución

$$z_n = C a_1^n,$$

en donde $z_0 = C$.

Si queremos resolver la ecuación en diferencias lineal de segundo orden homogénea

$$z_{n+2} + a_1 z_{n+1} + a_2 z_n = 0 \quad n \geq 2 \tag{6.11}$$

y buscamos soluciones del tipo $z_n = Cr^n$ con $C \neq 0$, $r \neq 0$ lo que tenemos que hacer es sustituir $z_n = Cr^n$ en la ecuación anterior y obtenemos

$$Cr^{n+2} + a_1 Cr^{n+1} + a_2 Cr^n = 0, \tag{6.12}$$

como $C \neq 0$ entonces factorizamos para obtener

$$r^n[r^2 + a_1 r + a_2] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + a_1 r + a_2 = 0. \tag{6.13}$$

A la última ecuación se le llama *polinomio característico* y a las raíces de dicho polinomio se les llama *raíces características*. Veamos dos teoremas que nos servirán para relacionar las raíces características con las soluciones de la ecuación (6.11).

Teorema 6.2 *Si y_n y w_n son dos soluciones de la ecuación (6.11) entonces $C_1 y_n + C_2 w_n$ también es solución con constantes C_1 y C_2 arbitrarias.*

Demostración. Solo es cuestión de sustituir $C_1 y_n + C_2 w_n$ por z_n en (6.11). ■

Teorema 6.3 *Si tenemos una ecuación en diferencias lineal de segundo orden homogénea*

$$z_{n+2} + a_1 z_{n+1} + a_2 z_n = 0 \tag{6.14}$$

con polinomio característico $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$, entonces

1. *r es raíz característica si y sólo si r^n es una solución de la ecuación en diferencias lineal de segundo orden.*
2. *Si r es raź doble del polinomio característico entonces nr^n también es solución de la ecuación en diferencias lineal de segundo orden.*
3. *Si las raíces características son $r_1 \neq r_2$ entonces la solución de (6.14) es*
$$z_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n.$$
4. *Si r es raíz doble del polinomio caraterístico entonces la solución general de (6.14) es*
$$z_n = C_1 r^n + C_2 n r^n.$$
5. *Si el polinomio característico de la ecuación tiene soluciones no reales $w_1 = \rho e^{i\theta}$, $w_2 = \rho e^{-i\theta}$ entonces la solución es*
$$z_n = A\rho^n \cos(n\theta + B).$$

En donde ρ es la norma y θ es el ángulo del número complejo que resuelve el polinomio característico escrito en forma polar. En estos casos C_1 y C_2 así como A y B dependen de condiciones iniciales z_1 y z_2 dadas.

La demostración detallada de este teorema se encuentra en [9] pág. 134-140.

En general, si tenemos la ecuación en diferencias homogénea de orden k (6.10) con polinomio característico

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{k-1} r + a_k = 0. \tag{6.15}$$

la solución general de (6.10) es la suma de las siguientes soluciones

- Para cada raíz real r no repetida de (6.15) tenemos la solución
$$C_1 r^n.$$
- Para cada raíz de (6.15) repetida l veces tenemos la siguiente solución
$$(C_1 + C_2 n + \ldots + C_l n^{l-1}) r^n.$$
- Para cada par de raíces complejas conjugadas no repetidas tenemos
$$A\rho^n \cos n\theta + B.$$
- Y para cada par de raíces complejas conjugadas repetidas l veces escribimos la siguiente solución
$$\rho^n [A_1 \cos(n\theta + B_1) + A_2 n \cos(n\theta + B_2) + \ldots + A_l n^{l-1} \cos(n\theta + B_l)].$$

También en [9] se pueden ver con detalle que éstas son las soluciones de la ecuación en diferencias de orden k (pág. 163-164).

Si queremos encontrar la solución de (6.10) con $b_n \neq 0$ tenemos que encontrar la solución de la ecuación homogénea y a esta sumarle una solución particular. En la siguiente tabla mostramos una lista de soluciones de ensayo z_n^* que sirven para encontrar la solución particular.

Si aparecen dos o más de estas soluciones de ensayo se tienen que tratar por separado. Si una de las soluciones de ensayo aparece ya en la solución de la ecuación homogénea la multiplicamos por n y utilizamos esta nueva solución ensayo. Todos los coeficientes que aparecen tienen que determinarse para que la solución funcione para todos los valores de n.

b_n	**Solución de ensayo**
a^n	Aa^n
$\operatorname{sen} cn$ ó $\cos cn$	$A \operatorname{sen} cn + B \cos cn$
n^m	$A_0 + A_1 n + \ldots + A_m n^m$
$n^m a^n$	$a^n(A_0 + A_1 n + \ldots + A_m n^m)$
$a^n \operatorname{sen} cn$ ó $a^n \cos cn$	$a^n(A \operatorname{sen} cn + B \cos cn)$

Cuadro 6.1: Soluciones de ensayo.

Veamos unos ejemplos.

Ejemplo. Encuentre la solución de la siguiente ecuación en diferencias homogénea

$$2z_{n+2} - 5z_{n+1} + 2z_n = 0.$$

Solución. El polinomio característico es $2r^2 - 5r + 2 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 2$ y $r_2 = \frac{1}{2}$. Entonces la solución general es

$$z_n = C_1 2^n + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

en donde C_1 y C_2son constantes arbitrarias. $\square$

En el siguiente ejemplo resolveremos una ecuación en diferencias no homogénea, para lo cual utilizaremos las soluciones de ensayo descritas en el cuadro (6.1).

Ejemplo. Encuentre la solución de la siguiente ecuación en diferencias

$$z_{n+2} - 4z_{n+1} + 4z_n = 3n + 2^n. \tag{6.16}$$

Solución. En este caso, para la ecuación homogénea tenemos el polinomio característico $r^2 - 4r + 4 = 0$, con raíz doble $r = 2$, por lo que la solución general de la ecuación homogénea es

$$z_n = (C_1 + C_2 n)2^n$$

y sólo falta sumarle la solución particular para tener la solución completa.

Observemos que el término $3n$ del lado derecho sugiere la solución de ensayo $A_0 + A_1 n$. Por otro lado el término 2^n nos lleva a la solución de ensayo $A2^n$, la cual ya aparece en la solución homogénea y tenemos que multiplicar por n, obteniendo así $An2^n$ la cual también aparece en la solución homogénea y multiplicamos por n para obtener $An^2 2^n$.

Sumando las soluciones de ensayo llegamos a la solución de ensayo general

$$z_n^* = A_0 + A_1 n + An^2 2^n.$$

Sustituyendo en la ecuación original tenemos que

$$z_{n+2}^* - 4z_{n+1}^* + 4z_n^* = 3n + 2^n,$$

y al hacer todas las operaciones del lado izquierdo obtenemos que

$$(A_0 - 2A_1) + A_1 n + 8A2^n = 3n + 2^n$$

lo único que nos falta es resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene con $A_0 - 2A_1 = 0$, $A_1 = 3$ y $8A = 1$. Luego $A_0 = 6$, $A_1 = 3$ y $A = \frac{1}{8}$. Por lo que la solución completa es

$$z_n = (C_1 + C_2 n)2^n + 6 + 3n + \frac{1}{8}n^2 2^n.$$

□

Ejemplo. Resuelva la ecuación en diferencias

$$z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n = 5 + 3n. \tag{6.17}$$

Solución. En este caso el polinomio característico de la ecuación homogénea es $r^2 - 2r + 1 = 0$. La única raíz es 1 con multiplicidad 2, luego la solución general de la ecuación homogénea es

$$z_n = C_1 + C_2 n.$$

Para la solución de ensayo z_n^* tendríamos $z_n^* = A_0 + A_1 n$ pero tal solución ya aparece en la solución general, por lo que multiplicamos por n, obteniendo $A_0 n + A_1 n^2$, como en la solución general ya tenemos un término lineal volvemos a multiplicar por n llegando a $z_n^* = A_0n^2 + A_1n^3$. Al sustituir en (6.17) y haciendo las operaciones correspondientes obtenemos que $A_0 = 1$ y $A_1 = \frac{1}{2}$.

Entonces, la solución de la ecuación (6.17) es

$$z_n = C_1 + C_2n + n^2 + \frac{1}{2}n^3.$$

□

6.1.2. Ecuaciones en diferencias con variable continua

En esta sección veremos ecuaciones en diferencias cuya variable es continua. Sólo veremos ecuaciones homogéneas de primer y segundo orden. Entre las de primer orden destaca la función gamma $\Gamma(x)$ que trataremos más adelante.

Ecuaciones homogéneas de primer orden

Empezaremos con las ecuaciones en diferencias lineales homogéneas de primer orden, las cuales son de la forma

$$f(x+1) - g(x)f(x) = 0 \tag{6.18}$$

con $g(x)$ una función continua y $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ es la función incógnita. Si $f_0(x)$ es una solución particular de (6.18) entonces su solución general es

$$f(x) = f_0(x)\Psi(x)$$

en donde Ψ es una función periódica con periodo 1. Notemos que la solución general está bien definida, pues si tenemos otra solución particular f_1 tendríamos que $f(x) = f_1(x)\Psi(x)$, sustituyendo f por las dos soluciones y despejando $g(x)$ e igualando obtenemos

$$\frac{f_0(x+1)}{f_0(x)} = \frac{f_1(x+1)}{f_1(x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{f_0(x+1)}{f_1(x+1)} = \frac{f_0(x)}{f_1(x)}.$$

Por lo que $\frac{f_0}{f_1}(x+1) = \frac{f_0}{f_1}(x)$ es una función de periodo 1 y la solución está bien definida. Veamos unos ejemplos.

Ejemplo. Resuelva la siguiente ecuación.

$$f(x+1) - bf(x) = 0$$

Solución. Haciendo $f(x+1) = bf(x)$ y si $b > 0$ aplicamos logaritmo en base b, por lo que obtenemos una nueva ecuación $g(x+1) = g(x) + 1$, en donde $g = \log_b f$. Luego $g(x) = x$ y nuestra solución particular es $f_0(x) = b^x$, por lo que la solución general es $f(x) = b^x\Psi(x)$, con Ψ una función periódica de periodo 1. □

Si en la ecuación (6.18) la función g es la identidad entonces tenemos la siguiente ecuación

$$f(x+1) - xf(x) = 0 \tag{6.19}$$

una solución es la función *gamma*, una de las definiciones de la esta función es la siguiente

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

veamos por qué

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{x+1}}{(x+1)(x+2)\dots(x+1+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(x \frac{n!\, n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \frac{n}{(x+1+n)} \right) \\
&= x\Gamma(x) \lim_{n\to\infty} \frac{n}{x+1+n} \\
&= x\Gamma(x).
\end{aligned}$$

Hay que notar que la función $\Gamma(x)$ no es la única solución a (6.19) pues las funciones $\Gamma(x)\Psi(x)$ con $x > 0$ y $\Psi(x)$ periódica de periodo uno también son solución. Notemos que también son solución $\Gamma(x)e^{\Psi(x)}$, pues $e^{\Psi(x)}$ es una función periódica con periodo 1.

Ecuaciones homogéneas de segundo orden

Las ecuaciones homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes son de la forma

$$af(x+2) + bf(x+1) + cf(x) = 0 \quad ac \neq 0. \tag{6.20}$$

Al igual que en las ecuaciones en diferencias con variable entera tenemos que el polinomio característico asociado a la ecuación es $ar^2+br+c=0$, con raíces características r_1 y r_2.

Si tenemos que las dos raíces son reales y diferentes entonces la solución general de (6.20) es de la forma

$$\begin{array}{lll}
f(x) = \Psi_1(x)r_1^x + \Psi_2(x)r_2^x & \text{si} & ab < 0,\ ac > 0. \\
f(x) = \Psi_1(x)r_1^x + \Psi_2(x)\left|r_2\right|^x \cos\pi x & \text{si} & ac < 0. \\
f(x) = \Psi_1(x)\left|r_1\right|^x \cos\pi x + \Psi_2(x)\left|r_2\right|^x \cos\pi x & \text{si} & ab > 0,\ ac > 0.
\end{array}$$

Si las raíces son reales e iguales entonces la solución es

$$\begin{array}{lll}
\left[\Psi_1(x) + x\Psi_2(x)\right] r^x & \text{si} & ab < 0. \\
\left[\Psi_1(x) + x\Psi_2(x)\right] \left|r\right|^x \cos\pi x & \text{si} & ab < 0.
\end{array}$$

Y si las raíces son complejas entonces tenemos la solución

$$f(x) = \Psi_1(x)\rho^x \cos\theta x + \Psi_2\rho^x \sin\theta x.$$

en donde $r_{1,2} = \rho(\cos\theta x \pm i\sin\theta x)$, $\rho = \frac{c}{a}$ y $\theta = \arccos\left(-\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)$ y además $\Psi_1(x)$ y $\Psi_2(x)$ funciones periódicas con periodo 1.

Ejemplo. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ que cumplan

$$f(x+2) - f(x+1) - 6f(x) = 0.$$

Solución. El polinomio característico de esta ecuación es $r^2 - r - 6 = 0$, por lo que las raíces son $r_1 = 3$ y $r_2 = -2$. En este caso $ac = -6 < 0$ y entonces la solución general es

$$f(x) = \Psi_1 3^x + \Psi_2(x)\,|-2|^2 \cos\pi x,$$

con $\Psi_1(x)$ y Ψ_2 funciones periódicas de periodo 1. Es fácil comprobar que tal f resuelve la ecuación funcional, sólo hay que tomar en cuenta que $\Psi_1(x+2) = \Psi_1(x+1) = \Psi_1(x)$ y $\Psi_2(x+2) = \Psi_2(x+1) = \Psi_2(x)$, pues $\Psi_1(x)$ y $\Psi_2(x)$ son de periodo 1. □

6.2. Ecuaciones recursivas

En la sección anterior vimos algunos ejemplos de ecuaciones funcionales que contienen ecuaciones en diferencias, en esta sección veremos ecuaciones que contengan la función incógnita f iterada consigo misma o alguna otra función la cual, al iterarla, reduzca el problema en cuestión.

Ejemplo. (IMO, 1992, lista corta).
Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos. Dados dos números reales positivos a y b suponga que la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisface la ecuación funcional

$$f(f(x)) + af(x) = b(a+b)x, \qquad \text{para toda } x \in \mathbb{R}.$$

Muestre que existe una única solución a esta ecuación.

Solución. Definamos $x_n = f(x_{n-1})$ en donde $x_0 \in \mathbb{R}^+$ es fijo, entonces de la ecuación original obtenemos

$$x_{n+2} + ax_{n+1} - b(a+b)x_n = 0 \tag{6.21}$$

cuyo polinomio característico es $r^2 + ar - b(a+b) = 0$ y las raíces de tal polinomio son $r_1 = b$ y $r_2 = -a-b$, luego la solución a la ecuación (6.21) es

$$x_n = C_1 b^n + C_2(-a-b)^n \tag{6.22}$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ que satisfacen $x_0 = C_1 + C_2$ y $x_1 = C_1 b + C_2(-a-b)$. Veamos a continuación que C_1 y C_2 dependen de x_0 y x_1. Sustituyendo $C_2 = x_0 - C_1$ en (6.22) tenemos que

$$C_1 = \frac{f(x_0) + (a+b)x_0}{a+2b}.$$

Por otro lado, sustituyendo $C_1 = x_0 - C_2$ también en (6.22) llegamos a que

$$C_2 = \frac{bx_0 - f(x_0)}{a + 2b}.$$

Por lo que efectivamente C_1 y C_2 dependen de x_0 y x_1.

Ahora bien, como $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tenemos que

$$f^n(x_0) = C_1 b^n + C_2(-a-b)^n$$

y dividiendo en ambos lados por $(a+b)^n$ obtenemos lo siguiente

$$\frac{f^n(x)}{(a+b)^n} = C_1 \left(\frac{b}{a+b}\right)^n + (-1)^n C_2$$

y como f^n siempre es positiva entonces

$$C_1 \left(\frac{b}{a+b}\right)^n + (-1)^n C_2 \geq 0$$

y se cumplen las siguientes desigualdades

$$C_1 \left(\frac{b}{a+b}\right)^{2n+1} \geq C_2 \geq -C_1 \left(\frac{b}{a+b}\right)^{2n}$$

como a y b son positivos entonces $a+b > b > 0$ por lo que tomando límites en la ecuación anterior tenemos que $C_2 = 0$ De aquí que $x_0 = C_1$ y $f(x_0) = x_1 = C_1 b = bx_0$. Ahora bien, como la x_0 fue arbitraria concluimos que $f(x) = bx$ es la única solución posible a nuestra ecuación funcional. $\square$

Se dan a continuación una serie de ejemplos que contienen a la función incógnita iterada consigo misma en la ecuación funcional o bien, ecuaciones en diferencias.

Ejemplo. (Austria-Polonia, 1997) Muestre que no existe función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que

$$f(x + f(y)) = f(x) - y, \qquad \text{con } x, y \in \mathbb{Z}$$

Solución. Supongamos que existe tal función f, haciendo $x = 0$ tenemos que $f(f(y)) = f(0) - y$. Esto nos lleva a que $f \circ f$ es una biyección entre los enteros, pues es una función afín luego también f es una biyección entre los enteros.

Tomando $x = y = 0$ tenemos que $f(f(0)) = f(0)$ y por la inyectividad de f tenemos que $f(0) = 0$ por lo que $f(f(y)) = -y$ para toda $y \in \mathbb{Z}$.

Sean $x, y \in \mathbb{Z}$, como f es una biyección entonces existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $f(a) = y$ por lo que $f(y) = f(f(a)) = -a$, de lo cual

$$f(x + y) = f(x + f(a)) = f(x) - a = f(x) + f(y),$$

entonces f satisface la ecuación aditiva de Cauchy, luego, para cualquier entero x tenemos que $f(x) = xf(1)$, por lo que $f(f(x)) = f(xf(1)) = (xf(1))f(1) = x[f(1)]^2$, luego

$$x[f(1)]^2 = f(f(x)) = -x.$$

De la última ecuación tenemos que $[f(1)]^2 = -1$, lo cual es imposible, pues $[f(1)]^2$ debe ser un entero no negativo. Por lo tanto no existe tal f. $\square$

En el siguiente ejemplo no se puede reducir a ningún tipo de ecuación en diferencias, pues si bien, la ecuación funcional contiene a $f(n+1)$ y $f(n)$ también $f(f(n))$ aparece en la ecuación, por lo que tampoco se puede hacer una ecuación con las iteradas de f.

Ejemplo. ¿Existirá alguna función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(f(n)) = f(n+1) - f(n)? \tag{6.23}$$

Solución. Notemos primero que f es creciente, Ya que $f(f(n)) \geq 1$. Además como $f(n+1) - f(n) = f(f(n))$ se tiene que $f(n+1) \geq 1 + f(n)$, por lo que $f(n+1) > f(n)$.

Haciendo $n = 1$ en (6.23) tenemos que $f(2) = f(f(1)) + f(1)$, como $f(1) > 0$ entonces $f(f(1)) < f(2)$, pero f es creciente, luego $f(1) < 2$ y concluimos que $f(1) = 1$. También tenemos que $f(2) = f(f(1)) + f(1) = f(1) + 1 = 2$.

Para $n = 2$ obtenemos de (6.23), $f(3) = f(f(2)) + f(2) = f(2) + 2 = 4$. Por último, haciendo $n = 3$ en (6.23) llegamos a que $f(4) = f(f(3)) + f(3) = f(4) + 4$, lo cual es absurdo. Por lo tanto no existe f que satisfaga la ecuación funcional. $\square$

Ejemplo. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que

$$f(f(n)) + [f(n)]^2 = n^2 + 3n + 3.$$

Solución. Es claro que tampoco podemos usar ecuaciones en diferencias o alguna recursión, sin embargo, es fácil ver que una solución de la ecuación es $f(n) = n + 1$, demostremos que es la única solución.

Supongamos que $f(n) > n + 1$, entonces $f(n) \geq n + 2$, por lo que $[f(n)]^2 \geq (n+2)^2$ y entonces

$$f(f(n)) \leq n^2 + 3n + 3 - (n+2)^2 = n^2 + 3n + 3 - n^2 - 4n - 4 = -n - 1,$$

lo cual es absurdo, por lo que $f(n) \leq n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $f(n) < n + 1$ de la ecuación original tenemos que

$$f(f(n)) > n^2 + 3n + 3 - (n+1)^2 = n^2 + 3n + 3 - n^2 - 2n - 1 = n + 2 > f(n) + 1$$

entonces $f(f(n)) > f(n)+1$ y tenemos el caso anterior, por lo que $f(n) < n+1$ tampoco puede suceder. Luego $f(n) = n + 1$ es la única solución. $\square$

Veamos un último ejemplo de ecuaciones en diferencias.

Ejemplo. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ tales que

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3k$$

donde $k \in \mathbb{N}$ es un número fijo.

Solución. Sea $z_1 = n$ y $z_{n+1} = f(z_n)$, sustituyendo en la ecuación z_n y después z_{n+1} obtenemos que

$$\begin{aligned} z_{n+2} + z_{n+1} &= 2z_n + 3k \\ z_{n+3} + z_{n+2} &= 2z_{n+1} + 3k. \end{aligned}$$

Restando las dos ecuaciones anteriores tenemos que $z_{n+3} - z_{n+1} = 2z_{n+1} - 2z_n$, y obtenemos la siguiente ecuación

$$z_{n+3} - 3z_{n+1} + 2z_n = 0$$

con polinomio característico $r^3 - 3r + 2 = 0$, cuyas raíces son $r = 1, 1, -2$, entonces la solución general es

$$z_n = C_1 + C_2 n + C_3(-2)^n.$$

Para n suficientemente grande tenemos que $z_n < 0$, no importa cuales sean las constantes C_1, C_2 y C_3, lo cual no es posible, pues $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, por lo tanto $C_3 = 0$.

Entonces la solución se escribe como $z_n = C_1 + C_2 n$ y sustituyendo en $z_{n+2} + z_{n+1} = 2z_n + 3k$ obtenemos

$$C_1 + C_2(n+2) + C_1 + C_2(n+1) = 2(C_1 + C_2 n) + 3k,$$

despejando obtenemos que $C_2 = k$. Por otro lado, también sabemos que

$$z_2 - z_1 = (C_1 + 2C_2) - (C_1 + C_2) = C_1 + 2k - (C_1 + k) = k$$

llegando a que $f(n) - n = k$ para toda $n \in \mathbb{N}$, luego, la función $f(n) = n + k$ es la solución de la ecuación funcional. $\square$

Capítulo 7

Problemas recientes

En este último capítulo veremos problemas que han aparecido en competencias recientes de la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO), de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (OIM), de la Olimpiada de Matemáticas de la cuenca del Pacífico (APMO) así como algunos de diversos países. Aquí proponemos una solución a dichos problemas, aunque hay algunos cuya solución se puede encontrar de diferente manera.

7.1. Problemas de la IMO

Problema 7.1 *(IMO, 1986). Encuentre todas las funciones* $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ *que satisfacen*

(i) $f(xf(y))f(y)=f(x+y)$ *para cualesquiera números* $x,y\geq 0$,

(ii) $f(2)=0$,

(iii) $f(x)\neq 0$ *para toda* $0\leq x<2$.

Solución. Si $z\geq 2$ entonces $f(z)=f(z-2+2)=f((z-2)f(2))f(2)=0$; luego $f(z)=0$ para $z\geq 2$. Por (*iii*) tenemos que $f(z)=0$ si y sólo si $z\geq 2$.

Como para $0\leq y<2$, se tiene que $f(y)\neq 0$ y como $0=f(2)=f(2-y+y)=f((2-y)f(y))f(y)$, se tiene que $f((2-y)f(y))=0$ y entonces

$$(2-y)f(y)\geq 2.$$

Tomando $x=\frac{2}{f(y)}$, se tiene que $f(x+y)=f(xf(y))f(y)=f(2)f(y)=0$, por lo que $2\leq x+y=\frac{2}{f(y)}+y$, pero esto implica que, $2\geq(2-y)f(y)$, luego

$$f(y)=\frac{2}{2-y}\quad \text{para } 0\leq y<2.$$

Luego una solución debe cumplir

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{2-y} & \text{para } 0\leq y<2,\\ 0 & \text{para } y\geq 2.\end{cases}$$

Desde luego esta función verifica las condiciones del problema. $\square$

Problema 7.2 *(IMO, 1988). La función f está definida en los enteros positivos como sigue*

$$\begin{aligned}
&f(1) = 1, \quad f(3) = 3,\\
&f(2n) = f(n),\\
&f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n),\\
&f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n).
\end{aligned}$$

Encuentre todos los valores n tales que $f(n) = n$ y $1 \leq n \leq 1988$.

Solución. Primero notemos que la función f es única, pues ha quedado determinada para todos los números enteros, pues todo entero mayor o igual a 2 y diferente de 3 es de la forma $2n$, $4n+1$ ó $4n+3$ con $n \in \mathbb{N}$. Para tener una idea del comportamiento de f calculemos sus primeros valores.

$$\begin{aligned}
&f(1) = 1,\ f(2) = f(1) = 1,\ f(3) = 3\\
&f(4) = f(2) = 1\\
&f(5) = 2f(3) - f(1) = 6 - 1 = 5\\
&f(6) = f(3) = 3\\
&f(7) = 3f(3) - 2f(1) = 9 - 2 = 7\\
&f(8) = f(4) = 1\\
&f(9) = 2f(5) - f(2) = 10 - 1 = 9\\
&f(10) = f(5) = 5\\
&f(11) = 3f(5) - 2f(2) = 15 - 2 = 13\\
&f(12) = f(6) = 3\\
&f(13) = 2f(7) - f(3) = 14 - 3 = 11\\
&f(14) = f(7) = 7\\
&f(15) = 3f(7) - 2f(3) = 21 - 6 = 15.
\end{aligned}$$

Escribamos en binario algunos valores de las igualdades anteriores, esto para ver como se comporta la función.

$$\begin{aligned}
&f(1) = f\left((1)_2\right) = (1)_2\\
&f(2) = f\left((10)_2\right) = (01)_2\\
&f(3) = f\left((11)_2\right) = (11)_2\\
&f(4) = f\left((100)_2\right) = (001)_2\\
&f(5) = f\left((101)_2\right) = (101)_2\\
&f(6) = f\left((110)_2\right) = (011)_2\\
&f(7) = f\left((111)_2\right) = (111)_2\\
&f(8) = f\left((1000)_2\right) = (0001)_2\\
&f(9) = f\left((1001)_2\right) = (1001)_2\\
&f(10) = f\left((1010)_2\right) = (0101)_2
\end{aligned}$$

Este patrón sugiere que la función f invierte el orden de los dígitos en la representación binaria, esto es, si $n = a_k 2^k + a_{k-1}2^{k-1} + \cdots + a_1 2 + a_0$ con $a_j \in \{0, 1\}$ entonces

$$f(n) = a_0 2^k + a_1 2^{k-1} + \cdots + a_{k-1}2 + a_k.$$

Probaremos esto por inducción en el número de dígitos de la representación binaria. Supongamos que el resultado es cierto para números tales que su representación binaria tiene m o menos dígitos y tomemos un entero con $m+1$ dígitos, digamos $n = a_m 2^m + \cdots + a_1 2 + a_0$, con $a_m = 1$ y $a_j \in \{0,1\}$ para $0 \leq j \leq m-1$. Tenemos entonces los siguientes tres casos

- Si $a_0 = 0$, $n = a_m 2^m + \cdots + a_1 2 = 2\left(a_m 2^{m-1} + \cdots + a_2 2 + a_1\right)$.
  Usando la hipótesis de inducción y la propiedad de f

$$\begin{aligned} f(n) &= f(2(a_m 2^{m-1} + \cdots + a_1)) \\ &= f(a_m 2^{m-1} + \cdots + a_1) \\ &= a_1 2^{m-1} + a_2 2^{m-2} + \cdots + a_m \\ &= a_0 2^m + a_1 2^{m-1} + \cdots + a_m. \end{aligned}$$

- Si $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ y

$$n = a_m 2^m + a_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + a_2 2^2 + 1 = 4\left(a_m 2^{m-2} + \cdots + a_2\right) + 1,$$

  tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} f(n) &= f\left(4\left(a_m 2^{m-2} + \cdots + a_2\right) + 1\right) \\ &= 2f\left(2\left(a_m 2^{m-2} + \cdots + a_2\right) + 1\right) - f\left(a_m 2^{m-2} + \cdots + a_2\right) \\ &= 2f\left(a_m 2^{m-1} + \cdots + a_2 2 + 1\right) - f(a_m 2^{m-2} + \cdots + a_2) \\ &= 2\left(2^{m-1} + a_2 2^{m-2} + \cdots + a_{m-1} 2 + a_m\right) - \left(a_2 2^{m-2} + \cdots + a_m\right) \\ &= 2^m + a_2 2^{m-2} + \cdots + a_{m-1} 2 + a_m \\ &= a_0 2^m + a_1 2^{m-1} + a_2 2^{m-2} + \cdots + a_m. \end{aligned}$$

- Con $a_0 = a_1 = 1$ y

$$\begin{aligned} n &= a_m 2^m + a_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + a_2 2^2 + 2 + 1 \\ &= 2^2\left(a_m 2^{m-2} + \cdots + a_2\right) + 3 \end{aligned}$$

  tenemos que

$$\begin{aligned} f(n) &= 3f\left(2(a_m 2^{m-2} + \cdots + a_2) + 1\right) - 2f(a_m 2^{m-2} + \cdots + a_2) \\ &= 3\left(2^{m-1} + a_2 2^{m-2} + \cdots + a_n\right) - 2\left(a_2 2^{m-2} + \cdots + a_m\right) \\ &= 3 \cdot 2^{m-1} + a_2 2^{m-2} + \cdots + a_m \\ &= a_0 2^m + a_1 2^{m-1} + a_2 2^{m-2} + \cdots + a_m. \end{aligned}$$

Ahora debemos de contar los enteros n, con $1 \leq n \leq 1988$ y que tengan representación binaria capicúa, ya que estos son los que cumplen que cumplen con $f(n) = n$.

Notemos que, $n = (a_m a_{m-1} ... a_0)_2$ es una representación capicúa si y sólo si $a_m = a_0$, $a_{m-1} = a_1$, etc. Como $2^{10} < 1988 < 2^{11}$ y $1988 = (11111000100)_2$ debemos contar los capicúas de 11 ó menos dígitos con algunas restricciones, quitar los mayores a 1988 que son $(11111111111)_2 = 2047$ y $(11111011111)_2 = 2015$.

Capicúas de 11 ó menos dígitos hay: $1+1+2+2+4+4+8+8+16+16+32 = 94$, luego los que se piden son 92. En la suma anterior el sumando j, con $j = 1, 2, \dots, 11$; corresponde a la cantidad de capicúas con j dígitos, para lo cual hay que tener en cuenta que el primer dígito y el último deben ser iguales a 1. $\square$

Problema 7.3 *(IMO, 1992). Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que*

$$f(x^2 + f(y)) = y + [f(x)]^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Solución. Sea $a = f(0)$. Si $x = 0$ tenemos que $f(f(y)) = a^2 + y$.

Con $x = y = 0$, $f(a) = a^2$. Luego $f(x^2 + a) + a^2 = [f(x)]^2 + f(a)$ y al aplicar f tenemos que $f(a^2 + f(x^2 + a)) = f([f(x)]^2 + f(a))$, luego

$$a^4 + x^2 + a = (a^2 + x)^2 + a, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

entonces $a = 0$, $f(f(y)) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}$ y $f(x^2) = [f(x)]^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

La última ecuación garantiza que si $x \geq 0$ entonces $f(x) \geq 0$. Además si $f(x) = 0$ entonces $f(x^2) = f(x^2 + f(x)) = [f(x)]^2 + x = x$, pero como$f(x^2) = f(x)^2$, se debe tener que $x = 0$. De este modo, si $x > 0$ entonces $f(x) > 0$ y $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$

Como $f([f(x)]^2 + f(y)) = [f(f(x))]^2 + y = x^2 + y$, se tiene que

$$f(x^2 + y) = f(f([f(x)]^2 + f(y))) = [f(x)]^2 + f(y) = f(x^2) + f(y),$$

por lo que f es aditiva para $x \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$.

Si $x < y$, entonces $y - x > 0$ y $y = y - x + x$ por lo que $f(y) = f(y - x + x) = f(y - x) + f(x) > f(x)$, es decir f es creciente. Pero f monótona creciente y $f(f(x)) = x$ garantiza que $f(x) = x$, ya que si $f(x) > x$ entonces $x = f(f(x)) > f(x)$, una contradicción y si $f(x) < x$ entonces $x = f(f(x)) < f(x)$, otra contradicción. $\square$

Problema 7.4 *(IMO, 1993). Determine si existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ creciente con las siguientes propiedades*

(*i*) $f(1) = 2$,
(*ii*) $f(f(n)) = f(n) + n$.

Solución. La respuesta es que sí existe y daremos dos construcciones de una función que cumple

Solución (a). Sea $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ la raíz positiva de la ecuación $r^2 - r - 1 = 0$. Definamos

$$f(n) = \left\lfloor rn + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

en donde $\lfloor x \rfloor$ denota el máximo entero menor o igual que x. Veamos que f cumple con las restricciones (i), (ii) y que f es creciente.

(i) $f(1) = \left\lfloor r + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2$.

(ii) Para ver que $f(f(n)) = f(n) + n$, notemos que

1. $f(f(n)) - f(n) - n$ es un entero,
2. $|f(n) - rn| < \frac{1}{2}$,
3. $r^2 n - rn - n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} |f(f(n)) - f(n) - n| &= \left| f(f(n)) - r^2 n - f(n) + rn \right| \\ &= \left| f(f(n)) - rf(n) + rf(n) - r^2 n - f(n) + rn \right| \\ &\leq (r-1)\,|f(n) - rn| + |f(f(n)) - rf(n)| \\ &\leq (r-1)\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{r}{2} < 1. \end{aligned}$$

Luego $f(f(n)) - f(n) - n = 0$.

Sólo falta ver que f es creciente. Tenemos que $r(n+1) = rn + r$, luego $r(n+1) + \frac{1}{2} = rn + \frac{1}{2} + r$ por lo que $f(n+1) > f(n)$.

Por lo tanto la función $f(n) = \left\lfloor rn + \frac{1}{2} \right\rfloor$ cumple las tres propiedades.

Solución (b). Sabemos que $f(1) = 2$ y utilizando el hecho de que $f(f(n)) = f(n) + n$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(1) &= 2, \\ f(2) &= f(f(1)) = f(1) + 1 = 3, \\ f(3) &= f(f(2)) = f(2) + 2 = 5, \\ f(5) &= f(f(3)) = f(3) + 3 = 8, \end{aligned}$$

lo cual nos sugiere que la función f manda cada número de Fibonacci en el siguiente, lo cual demostramos por inducción.

Ya vimos que $f(1) = 2$ y $f(2) = 3$, supongamos que es válido para el m-ésimo número de Fibonacci y comprobemos para $m + 1$.

Llamemos F_m al m-ésimo número de Fibonacci. Calculemos $f(F_{m+1})$

$$f(F_{m+1}) = f(f(F_m)) = f(F_m) + F_m = F_{m+1} + F_m = F_{m+2},$$

por lo que efectivamente, la función f manda a cada número de Fibonacci en el siguiente.

Ya tenemos la función definida en los número de Fibonacci, sólo falta extenderla a los demás naturales, para lo cual utilizaremos el teorema de Zeckendorf, el cual nos asegura que todo número natural n tiene una única representación como suma de números de Fibonacci no consecutivos.[1]

Si $n = \sum_{j=1}^{k} F_{i_j}$ con $|i_j - i_{j-1}| \geq 2$ con $i_1 < i_2 \ldots < i_k$, definamos la función f por

$$f(n) = f\left(\sum_{j=1}^{k} F_{i_j}\right) = \sum_{j=1}^{k} F_{i_j+1}$$

y veamos que satisface las condiciones del problema.

(i) Es claro que $f(1) = 2$, pues $F_1 = 1$ y $F_2 = 2$.

(ii) Calculemos $f(f(n))$

$$f(f(n)) = f\left(\sum_{j=1}^{k} F_{i_j+1}\right) = \sum_{j=1}^{k} F_{i_j+2} = \sum_{j=1}^{k} \left(F_{i_j+1} + F_{i_j}\right) = f(n) + n.$$

Solo falta ver que $f(n+1) > f(n)$ para lo cual distinguimos dos casos

- En la representación de n no se usan F_1 y F_2. Entonces la representación de $n+1$, es la de n más un sumando 1 y entonces $f(n)$ y $f(n+1)$ difieren en un sumando adicional, luego $f(n+1) > f(n)$.
- En la representación de n se usa F_1 ó F_2, entonces $n+1$ tendrá un sumando más grande que los sumandos de n (y los demás iguales) y como esto se conservará después de aplicar f, tendremos que $f(n+1) > f(n)$. □

Problema 7.5 *(IMO, 1994). Sea $\mathbb{S}$ el conjunto de los números reales estrictamente mayores que -1. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ que satisfagan las dos condiciones*

(i) *$f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{S}$,*

(ii) *$\dfrac{f(x)}{x}$ es creciente en cada uno de los intervalos $0 < x$, $-1 < x < 0$.*

Solución. Si $x = y = 0$, entonces

$$f(f(0)) = f(0).$$

Si $x = y$, entonces

$$f(x + f(x) + xf(x)) = x + f(x) + xf(x)$$

por lo que $x+f(x)+xf(x)$ es punto fijo de f, notemos que también $f(0)$ es punto fijo de f.

[1] D.E. Daykin, *Representation of natural numbers as sums of generalised Fibonacci numbers* J. London Math. Soc. , 35. 1960 pag. 143–160.

Ahora $a \neq 0$ es punto fijo de f si y sólo si $\frac{f(a)}{a} = 1$, pero la condición (ii) en $(-1,0)$ solamente puede haber un punto fijo, lo mismo que en $(0,\infty)$ hay a lo más un punto fijo y el 0 es otro posible punto fijo. Veamos que en $(-1,0)$ y en $(0,\infty)$ no hay puntos fijos.

Si $a \in (-1,0)$ es punto fijo de f, tomando $x = y = a$ en la ecuación funcional, tenemos que

$$f(2a + a^2) = 2a + a^2$$

por lo que $2a + a^2$ es punto fijo y como $-1 < a < 0$ se tiene que $2a + a^2 < 0$, pero ya observamos que en $(-1,0)$ no hay dos puntos fijos. Luego no hay puntos fijos en $(-1,0)$.

Si $a > 0$, como $f(2a+a^2) = 2a+a^2 > 0$ también $2a+a^2$ es punto fijo positivo, de igual manera esto no es posible por lo que en $(0,\infty)$ tampoco hay puntos fijos.

Luego $f(0)$ es el único punto fijo y este debe ser 0, esto es $f(0) = 0$. Como $x+f(x)+xf(x)$ es punto fijo para toda x se debe tener que

$$x + f(x) + xf(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{-x}{1+x}.$$

Falta ver que $f(x) = \dfrac{-x}{1+x}$ cumple las condiciones. Es claro que $\frac{f(x)}{x} = \frac{-1}{1+x}$ es creciente. Ahora bien, como

$$x + f(y) + xf(y) = x + \frac{(1+x)(-y)}{1+y} = \frac{x-y}{1+y},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} f(x + f(y) + xf(y)) &= f\left(\frac{x-y}{1+y}\right) = \frac{-\left(\frac{x-y}{1+y}\right)}{1 + \frac{x-y}{1+y}}, \\ &= \frac{y-x}{1+x} = y + f(x) + yf(x). \end{aligned}$$

Por lo que efectivamente cumple con las condiciones del problema. □

Problema 7.6 *(IMO, 1998). Considere todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfagan la condición*

$$f(m^2 f(n)) = n[f(m)]^2$$

para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$. Determine el mínimo valor posible de $f(1998)$.

Solución. Al hacer $m = 1$, tenemos $f(f(n)) = nf(1)^2$. Si consideramos $a = f(1)$, tenemos que $f(a) = a^2$, $f(a^2) = f(f(a)) = af(1)^2 = a^3$. Luego por inducción $f(a^n) = a^{n+1}$, para $n \geq 1$. También $f(am^2) = f(m^2 f(1)) = [f(m)]^2$. Usando lo anterior

$$\begin{aligned} [f(m)]^2[f(n)]^2 &= [f(m)]^2 f(an^2) = f(m^2 f(f(an^2))) \\ &= f(m^2 \cdot an^2 \cdot a^2) = f(a \cdot m^2 \cdot n^2 \cdot a^2) \\ &= [f(amn)]^2. \end{aligned}$$

Luego, $f(amn) = f(m)f(n)$ para todos m, $n \in \mathbb{N}$.

Si $m = 1$, $f(an) = af(n)$, y entonces $af(mn) = f(m)f(n)$. De nuevo por inducción $a^{k-1}f(n^k) = [f(n)]^k$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Ahora veamos que a divide a $f(n)$, si p es un primo y p^α es la máxima potencia de p que divide al entero a y p^β es la máxima potencia de p que divide a $f(n)$, entonces de $a^{k-1}f(n^k) = f(n)^k$, tenemos que $(k-1)\alpha \leq k\beta$ para toda $k = 1, 2, ..$ lo que es posible solamente si $\alpha \leq \beta$, luego como p es primo tenemos que a divide a $f(n)$.

Podemos ahora definir $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $g(n) = \frac{f(n)}{a}$, esta nueva función cumple $g(nm) = g(n)g(m)$, $g(1) = 1$ y $g(ag(n)) = an$, con $n = 1$ da que $g(a) = a$ y como $an = g(ag(n)) = g(a)g(g(n)) = ag(g(n))$ también se cumple $g(g(n)) = n$.

Ahora como g es multiplicativa y $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$, se tiene que $g(1998) = g(2)g(3)^3g(37)$.

Veamos ahora que la función g en los primos da un número primo, si $p \in \mathbb{N}$ es primo y si $g(p) = xy$ entonces $p = g(g(p)) = g(xy) = g(x)g(y)$, como p es primo $g(x) = 1$ ó $g(y) = 1$, si $g(x) = 1$ entonces $x = g(g(x)) = g(1) = 1$. Lo mismo ocurre si $g(y) = 1$, luego $g(p)$ es primo.

Luego $g(1998)$ será mínimo cuando el producto $g(2)g(3)^3g(37)$ sea un producto de primos mínimo, por lo que lo mejor es hacer $g(2) = 3$, $g(3) = 2$ y $g(37) = 5$ en cuyo caso $g(1998) = 3 \cdot 2^3 \cdot 5 = 120$.

La función se puede extender (y basta definirla en los primos) como $g(1) = 1$, $g(2) = 3$, $g(3) = 2$, $g(5) = 37$, $g(37) = 5$ y $g(p) = p$ para p primo con $p \neq 2, 3, 5, 37$. □

Problema 7.7 *(IMO, 1999). Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfagan la condición*

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Solución. Tomando $x = f(z)$, se tiene que $f(f(z) - f(y)) = f(f(y)) + f(z)f(y) + f(f(z)) - 1$.

Tomando $x = f(y)$, se tiene que $f(0) = 2f(f(y)) + [f(y)]^2 - 1$, por lo que $f(f(y)) = \frac{1+f(0)-[f(y)]^2}{2}$.

De las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} f(f(z) - f(y)) &= f(f(y)) + f(f(z)) + f(z)f(y) - 1 \\ &= \frac{1 + f(0) - [f(y)]^2}{2} + \frac{1 + f(0) - [f(z)]^2}{2} + f(z)f(y) - 1 \\ &= f(0) - \frac{(f(z) - f(y))^2}{2}. \end{aligned}$$

Luego $f(\omega) = f(0) - \frac{\omega^2}{2}$, siempre y cuando ω se pueda escribir como $\omega = f(z) - f(y)$.

Veamos ahora que cualquier ω se puede escribir de tal forma. En la ecuación original tomando $y = 0$, nos da que

$$f(x - f(0)) - f(x) = f(f(0)) + xf(0) - 1 \tag{7.1}$$

Si $f(0) = 0$, el lado izquierdo es cero y el derecho -1, lo cual es absurdo, por lo que $f(0) \neq 0$. Ahora es claro que $f(f(0)) + xf(0) - 1$ puede tomar cualquier valor $\omega \in \mathbb{R}$, en efecto, $x = \frac{1+\omega-f(f(0))}{f(0)}$ sirve para tal fin. Por lo que $\omega = f(z) - f(y)$ con $z = x - f(0)$, $y = x$. Luego $f(\omega) = f(0) - \frac{\omega^2}{2}$ para toda $\omega \in \mathbb{R}$.

Para $\omega = f(y)$, tenemos que $f(f(y)) = f(0) - \frac{f(y)^2}{2}$ y por otro lado teníamos que $f(f(y)) = \frac{1+f(0)-[f(y)]^2}{2}$, al comparar estas dos últimas expresiones, tenemos que $f(0) = \frac{1+f(0)}{2}$ por lo que $f(0) = 1$ y entonces $f(\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{2}$ es la única función que satisface la ecuación funcional. □

Problema 7.8 *(IMO, 2008). Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que*

$$\frac{[f(w)]^2 + [f(x)]^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2} \tag{7.2}$$

en donde w, x, y, z satisfacen $wx = yz$.

Solución. Haciendo $w = x = y = z$ obtenemos $[f(x)]^2 = f(x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, en particular $f(1) = 1$. Si tomamos $\sqrt{w}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ y $\sqrt{z}$ en la ecuación funcional y tomando en cuenta que $[f(x)]^2 = f(x^2)$ obtenemos

$$\frac{f(w) + f(x)}{f(y) + f(z)} = \frac{w + x}{y + z}, \quad \text{si} \quad wx = yz.$$

Haciendo $z = 1$ en la ecuación anterior obtenemos

$$w = \frac{y}{x} \qquad \text{y} \qquad f\left(\frac{y}{x}\right) + f(x) = \left(\frac{y}{x} + x\right) \cdot \frac{f(y) + 1}{y + 1}.$$

Ahora reemplazando y por x^2 obtenemos

$$f(x) = x \cdot \frac{[f(x)]^2 + 1}{x^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad (f(x) - x)\left(f(x) - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

por lo que $f(x) = x$ y $f(x) = \frac{1}{x}$.

Veamos que efectivamente son las soluciones. Supongamos que existen $x, w \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ tales que $f(x) = x$ y $f(w) = \frac{1}{w}$. Haciendo $y = z = \sqrt{wx}$ y sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$\frac{1}{w} + x = (w + x)\frac{f(\sqrt{wx})}{\sqrt{wx}}. \tag{7.3}$$

Si $f(\sqrt{wx}) = \sqrt{wx}$ entonces de la ecuación (7.3) se concluye que $w = 1$, una contradicción. Por otra parte, si $f(\sqrt{wx}) = \frac{1}{\sqrt{wx}}$ entonces $x = 1$, otra contradicción. Por lo tanto $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ o bien $f(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Es claro que estas son solución de la ecuación funcional. $\square$

Problema 7.9 *(IMO, 2009). Determine todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que para cualesquiera naturales a, b existe un triángulo no degenerado cuyos lados miden*

$$a,\ f(b)\ y\ f(b + f(a) - 1).$$

(Un triángulo es no degenerado si sus vértices no están alineados).

Solución. Probemos primero que $f(1) = 1$. Supongamos que $u = f(1) - 1 > 0$, sea m el mínimo de f y b un número para el cual $f(b) = m$. Tenemos que 1, $m = f(b)$ y $f(b + f(1) - 1) = f(b + u)$ forman un triángulo, por lo que $f(b + u) < 1 + f(b)$. Como m es mínimo entonces $f(b + u) = m$ y entonces por inducción $f(b + nu) = m$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe un triángulo con lados $b + nu$, $f(1)$ y $f(m)$, por lo que $b+nu < f(1)+f(m)$ para cada n lo cual es una contradicción. Por lo tanto $f(1) = 1$.

Entonces tenemos que los números a, $1 = f(1)$ y $f(f(a))$ forman un triángulo para cada a y entonces se cumplen las siguientes desigualdades $a - 1 < f(f(a)) < a + 1$ por lo que $f(f(a)) = a$ y f es un biyección, ahora tenemos que $f(a)$, $f(b)$ y $f(b+a-1)$ determinan un triángulo para todo $a, b \in \mathbb{N}$.

Sea $f(2) = z$. Es claro que $z > 1$, y como $f(z)$, $f(z)$ y $f(2z - 1)$ forman un triángulo obtenemos que $f(2z-1) < 2f(z) = 2f(f(2)) = 4$ y entonces $f(2z-1) \in \{1, 2, 3\}$ lo cual implica que $f(2z-1) = 3$ pues $f(1) = 1$, $f(z) = 2$ y f es biyectiva. Probemos ahora que $f(n) = (n - 1)z - n + 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ya vimos que se cumple para $n = 1, 2$. Supongamos que se cumple para $1, 2, \ldots, n$ y demostremos para $n+1$. Como $n = f(f(n)) = f((n-1)z - n + 2)$, $f(z)$ y $f(nz - n + 1)$ forman un triángulo tenemos que $f(nz - n + 1) < n + f(z) = n + 2$, por lo que $f(nz-n+1) \leq n+1$. Ahora, como f es inyectiva $f(nz-n+1) \neq i$, con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a menos que $nz-n+1 = (i-1)z-i+2$, es decir, $n+1 = i$ y entonces $f(nz-n+1) = n+1$ o bien, $f(n + 1) = nz - n + 1$, por lo que se cumple para $n + 1$ y ademásf es creciente.

Por último veamos que $z = 2$. Si $z > 2$ entonces $2 = f(z) > f(2) = z$ lo cual es una contradicción y entonces $z = 2$. Como $z = 2$ entonces $f(n) = (n-1)z-n+2$ se convierte en $f(n) = n$, y esta es la única función que cumple con la condición dada. $\square$

Problema 7.10 *(IMO, 2010). Determine todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que la igualdad*

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor \tag{7.4}$$

se cumple para todos $x, y \in \mathbb{R}$. (En donde $\lfloor z \rfloor$ denota el máximo entero menor o igual que z.)

Solución. Haciendo $x = y = 0$ en (7.4) obtenemos que

$$f(0) = f(0) \lfloor f(0) \rfloor .$$

por lo que tenemos dos casos, el primero, si $f(0) \neq 0$ nos lleva a que $\lfloor f(0) \rfloor = 1$, mientras el segundo es $f(0) = 0$. Veamos cada uno de estos.

- *Si* $f(0) \neq 0$. Hagamos $y = 0$ en (7.4) como $\lfloor f(0) \rfloor = 1$ tenemos $f(0) = f(x)$ y entonces $f(x) = c$ por lo que sustituyendo esto en la ecuación original vemos que $c = c \lfloor c \rfloor$ y las soluciones de ésta última ecuación son $c = 0$ ó $1 \leq c < 2$. Ahora como $f(0) \neq 0$ entonces la única solución es $f(x) = c$ con $1 \leq c < 2$.

- *Si* $f(0) = 0$. Haciendo $x = y = 1$ obtenemos $f(1) = f(1) \lfloor f(1) \rfloor$ por lo que consideramos dos subcasos: si $f(1) = 0$ o bien, si $\lfloor f(1) \rfloor = 1$.

  - *Si* $f(1) = 0$. Haciendo $x = 1$ en (7.4) obtenemos que $f(y) = f(1) \lfloor f(y) \rfloor$ y entonces $f(y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$.
  - *Si* $\lfloor f(1) \rfloor = 1$. Haciendo $y = 1$ en (7.4) llegamos a que

    $$f(\lfloor x \rfloor) = f(x) \lfloor f(1) \rfloor \tag{7.5}$$

    por lo que $f(\lfloor x \rfloor) = f(x)$. Si hacemos $x = 2$ y $y = \frac{1}{2}$ en (7.4) tenemos que $f(1) = f(2) \left\lfloor f\left(\frac{1}{2}\right) \right\rfloor$, pero por (7.5) tenemos $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor) = f(0) = 0$ y entonces $f(1) = 0$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto las únicas soluciones de nuestra ecuación funcional son $f(x) = 0$ y $f(x) = \lfloor c \rfloor$ en donde $1 \leq c < 2$. □

7.2. Problemas de la OIM

Problema 7.11 *(OIM, 1990). Sea $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ que verifica las dos condiciones siguientes*
(i) Si $n = 2^j - 1$, para $j = 0, 1, 2, \ldots,$ entonces $f(n) = 0$,
(ii) Si $n \neq 2^j - 1$, para $j = 0, 1, 2, \ldots,$ entonces $f(n + 1) = f(n) - 1$.

a) Muestre que para todo entero $n \geq 0$, existe un entero $k \geq 0$ tal que $f(n) + n = 2^k - 1$.
b) Calcular $f(2^{1990})$.

Solución. Para la primera parte veamos por inducción que si $2^j \leq n \leq 2^{j+1} - 1$, entonces $f(n) = 2^{j+1} - 1 - n$.

Si $n = 1$, entonces $2^0 \leq 1 \leq 2^{0+1} - 1$ y entonces $0 = f(1) = 2^{0+1} - 1 - 1$. Supongamos cierta la afirmación para n, con $2^j \leq n \leq 2^{j+1} - 1$, entonces $2^j + 1 \leq n + 1 \leq 2^{j+1}$.

Si $n+1 = 2^{j+1} - 1$, se tiene que $f(n+1) = 0$ y $f(n+1) = 2^{j+1} - 1 - (n+1)$ se cumple. Si $n+1 < 2^{j+1} - 1$, entonces $n < 2^{j+1} - 2 < 2^{j+1} - 1$, luego $f(n+1) = f(n) - 1$. Por hipótesis de inducción $f(n) = 2^{j+1}-1-n$ y entonces $f(n+1) = 2^{j+1}-1-(n+1)$, como se deseaba.

Para la segunda parte, como $2^{1990} \leq 2^{1990} \leq 2^{1991} - 1$, tenemos que

$$f\left(2^{1990}\right) = 2^{1991} - 1 - 2^{1990} = 2^{1990} - 1.$$

$\square$

Problema 7.12 *(OIM, 1991.) Sea f una función no decreciente*[2] *definida para todo número real x, $0 \leq x \leq 1$ tal que*
(i) $f(0) = 0$
(ii) $f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{f(x)}{2}$.
(iii) $f(1-x) = 1 - f(x)$.
Encuentre $f\left(\frac{18}{1991}\right)$.

Solución. Primero notemos algunas propiedades de f.

1. $f(1) = f(1-0) = 1 - f(0) = 1$.
2. $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{f(1)}{2} = \frac{1}{2}$ y por inducción $f\left(\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2^n}$ para $n \geq 1$.
3. $f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(1-\frac{1}{3}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Ahora bien, como f es no decreciente, resulta que $f(x) = \frac{1}{2}$ para $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$.
4. $f\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{f\left(\frac{2}{3}\right)}{2} = \frac{1}{4}$. Y de igual manera, por ser f no decreciente se tiene que $f(x) = \frac{1}{4}$ para $\frac{1}{9} \leq x \leq \frac{2}{9}$.

Ahora, como $f\left(\frac{8}{9}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{3}{4}$ y $f\left(\frac{7}{9}\right) = 1 - f\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{3}{4}$, se tiene también que $f(x) = \frac{3}{4}$ para $\frac{7}{9} \leq x \leq \frac{8}{9}$.

Por inducción $f(x)$ es constante en cada tercio medio del proceso de división de $[0,1]$ en $3, 3^2, \ldots$ subintervalos. Y como $\frac{2}{3^5} + \frac{1}{3^7} < \frac{18}{1991} < \frac{2}{3^5} + \frac{2}{3^7}$, tenemos que f es constante en el intervalo $\left[\frac{2}{3^5} + \frac{1}{3^7}, \frac{2}{3^5} + \frac{2}{3^7}\right]$.

Pero

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3^5} + \frac{1}{3^7}\right) &= f\left(\frac{1}{3^4}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3^3}\right)\right) = \frac{f\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3^3}\right)}{2^4} \\ &= \frac{f\left(1 - \frac{8}{3^3}\right)}{2^4} = \frac{1}{2^4}\left(1 - f\left(\frac{8}{3^3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2^4}\left(1 - \frac{f\left(\frac{8}{9}\right)}{2}\right) = \frac{1}{2^4}\left(1 - \frac{3}{2^3}\right) \\ &= \frac{1}{2^4}\left(\frac{2^2+1}{2^3}\right) = \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7}. \end{aligned}$$

[2]En el enunciado original se pide que la función sea creciente, pero como se verá más adelante que $f(\frac{1}{3}) = f(\frac{2}{3})$, entonces cambiamos “creciente” por “no decreciente”, ver el apéndice A.

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{2}{3^5}+\frac{2}{3^7}\right) &= \frac{1}{2^4}f\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^3}\right)=\frac{1}{2^4}f\left(1-\frac{7}{3^3}\right)\\
&= \frac{1}{2^4}\left(1-f\left(\frac{7}{3^3}\right)\right)=\frac{1}{2^4}\left(1-\frac{1}{2}f\left(\frac{7}{9}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2^4}\left(1-\frac{3}{2^3}\right)=\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}.
\end{aligned}$$

Por lo que $f\left(\frac{18}{1991}\right)=\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}$. □

Problema 7.13 *(OIM, 1993.) Encuentre todas las funciones $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ que satisfagan las condiciones*
(i) f es creciente,
(ii) $f(nf(m))=m^2f(nm)$, para todas m, $n\in\mathbb{N}$.

Solución. Como f es creciente resulta que f es inyectiva. Si $n=m=1$, se tiene que $f(f(1))=f(1)$ y por ser f inyectiva $f(1)=1$.

También tenemos que

$$\begin{aligned}
f(nf(n)f(m)) &= m^2f(nf(n)m)=m^2f(nmf(n))\\
&= m^2n^2f(n(mn))=f(nf(mn)),
\end{aligned}$$

pero por ser f inyectiva, $f(mn)=f(n)f(m)$ para $n,m\in\mathbb{N}$.

Veamos que $f(n)=n^2$. Lo cual demostraremos por contradicción.

- Si $f(n)<n^2$, entonces $nf(n)<n^3$ por lo que

  $$f(n)^3=f(n^3)>f(nf(n))=n^2f(n^2)=n^2[f(n)]^2,$$

  luego $f(n)>n^2$ una contradicción.

- Si $f(n)>n^2$, entonces $nf(n)>n^3$ y

  $$f(n)^3=f(n^3)<f(nf(n))=n^2f(n^2)=n^2[f(n)]^2$$

  por lo que $f(n)<n^2$ de nuevo una contradicción. Luego $f(n)=n^2$. □

7.3. Problemas de la APMO

Problema 7.14 *(APMO, 1989). Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función creciente con inversa f^{-1}. Encuentre todas las posibles f tales que*

$$f(x)+f^{-1}(x)=2x. \tag{7.6}$$

Solución. Es obvio que $f(x) = x$ es una solución, busquemos ahora otras soluciones. Supongamos que $f(a) \neq a$ para alguna $a \in \mathbb{R}$ entonces existe $b \neq 0$ tal que $f(a) = a + b$. Como $f(f(a)) + f^{-1}(f(a)) = 2f(a)$ entonces $f(a+b) + a = 2a + 2b$ lo que nos lleva a que $f(a+b) = a + 2b$ y por inducción podemos ver que

$$f(a + nb) = a + (n+1)b \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Si ahora tomamos x tal que $a \leq x \leq a+b$ y supongamos que $f(x) = x + c$ por inducción tenemos que $f(x + nc) = x + (n+1)c$. Ahora, como f es creciente $a + b \leq x + c \leq a + 2b$ y otra vez por inducción llegamos a que $a + nb \leq x + nc \leq a + (n+1)b$, luego $b - \frac{x-a}{n} \leq c \leq b + \frac{a+b-x}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Tomando el límite cuando n tiende a infinito tenemos que $b = c$ por lo que las soluciones son $f(x) = x + b$ para toda $x \in \mathbb{R}$ $\square$

Problema 7.15 *(APMO, 1994). Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que (i) $f(1) = 1$. (ii) $f(-1) = -1$. (iii) $f(x) \leq 0$ si $0 < x < 1$. (iv) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ para toda $x, y \in \mathbb{R}$. (v) $f(x+y) \leq f(x) + f(y) + 1$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.*

Solución. Por las condiciones (i) y (iv) tenemos que $f(x+1) \geq f(x) + f(1) = f(x) + 1$ y por (iv) y (ii) $f(x) \geq f(x+1) + f(-1) = f(x+1) - 1$, lo que nos lleva a que

$$f(x+1) = f(x) + 1. \tag{7.7}$$

Por otro lado $1 = f(1) = f(0+1) = f(0) + 1$, así que $f(0) = 0$. Por (iii) tenemos que $f(x) \leq 0$ si $0 < x < 1$ y por (v), $1 = f(1) = f(x + 1 - x) \leq f(x) + f(1-x) + 1$ por lo que $f(x) + f(1-x) \geq 0$.

Pero si $0 < x < 1$ entonces también $0 < 1 - x < 1$, luego $f(x) \leq 0$ y $f(1-x) \leq 0$, entonces $f(x) = f(1-x) = 0$, por lo que

$$f(x) = 0 \quad \text{si } 0 \leq x < 1. \tag{7.8}$$

De las ecuaciones (7.7) y (7.8) tenemos que la función solución es el máximo entero $f(x) = \lfloor x \rfloor$. $\square$

Problema 7.16 *(APMO, 2002). Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen*

(i) Hay solo un número finito de $s \in \mathbb{R}$ tales que $f(s) = 0$,
(ii) $f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(f(y))$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución. Si hacemos $x = 0$ tenemos que $f(y) = f(f(y))$, por lo que la segunda condición se puede reescribir como $f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(y)$.

Haciendo $y = 0$ y $x = 1$ en la ecuación anterior obtenemos $f(1) = f(1) + f(0)$ por lo que $f(0) = 0$, luego $f(x^4) = x^3 f(x)$ y por (ii) tenemos que

$$f(x^4 + y) = f(x^4) + f(y). \tag{7.9}$$

Veamos que f es impar, cumple la primera ecuación de Cauchy ($f(x+y) = f(x) + f(y)$) y que además es inyectiva.

- *La función f es impar.* Ya sabemos que $f(x^4) = x^3 f(x)$, entonces, para todo $x \neq 0$ tenemos que
$$x^3 f(x) = f(x^4) = f((-x)^4) = -x^3 f(-x)$$
por lo que $f(x) = -f(-x)$ si $x \neq 0$. Además sabemos que $f(0) = 0$, luego f es impar.

- *Cumple la ecuación de Cauchy.* Veamos que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que $f(a+b) = f(a) + f(b)$. Definamos $c = \sqrt[4]{a}$ y entonces tenemos tres casos
  - Si $a > 0$. Tenemos que $f(a+b) = f(c^4 + b) = f(c^4) + f(b) = f(a) + f(b)$.
  - Si $a = 0$. En este caso $f(a+b) = f(b) = f(0) + f(b) = f(a) + f(b)$.
  - Si $a < 0$. Aquí tenemos lo siguiente
$$\begin{aligned} f(a+b) &= f(-c^4 + b) = -f(c^4 - b) \\ &= -(f(c^4) + f(-b)) = f(-c^4) + f(b) \\ &= f(a) + f(b). \end{aligned}$$

  Por lo que f cumple la ecuación de Cauchy.

- *La función f es inyectiva.* Si $f(u) = f(v)$, como f es impar tenemos que $f(u) = f(v) = -f(-v)$ y entonces $f(u - v) = f(u) + f(-v) = 0$. Supongamos que $u \neq v$ entonces, como f es de Cauchy tenemos que $f(n(u - v)) = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, lo cual es una contradicción a (i), por lo que $u = v$.

Como f es inyectiva, además $f(y) = f(f(y))$ y por la condición (ii) tenemos que la solución es $f(y) = y$. $\square$

Problema 7.17 *(APMO, 2006). Sea n un número natural. Encuentre el mayor número real positivo $f(n)$ (que depende de n) con la siguiente propiedad: si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales tales que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ es un número entero, entonces existe algún número i tal que $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq f(n)$.*

Solución. Si n es par. Si $a_i = \frac{1}{2}$ para toda i, entonces $a_1 + a_2 +, \ldots, + a_n$ es un entero y como $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| = 0$ para toda i concluimos que $f(n) = 0$ para n par.

Ahora, si n es impar, supongamos que $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2^n}$ para todo $1 \leq i \leq n$ y como $\sum_{i=1}^{n} a_i$ es un entero se cumple la siguiente desigualdad
$$\frac{1}{2} \leq \left|\sum_{i=1}^{n} a_i - \frac{n}{2}\right|$$
pero
$$\sum_{i=1}^{n} \left|a_i - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}.$$

y como $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i - \frac{n}{2}\right| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \left|a_i - \frac{1}{2}\right|$ tenemos una contradicción, por lo que $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{2n}$. Por otro lado, haciendo $n = 2m+1$ y $a_i = \frac{m}{2m+1}$ para toda i obtenemos $\sum_{i=1}^{n} a_i = m$ y también

$$\left|a_i - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} - \frac{m}{2m+1} = \frac{1}{2(2m+1)} = \frac{1}{2n}$$

esto para toda i y entonces $f(n) = \frac{1}{2n}$ es el mejor posible para cualquier n impar. Y la función f está definida por

$$f(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ par.} \\ \dfrac{1}{2n} & n \text{ impar.} \end{cases}$$

La cual satisface las condiciones del problema. $\square$

Problema 7.18 *(APMO, 2008). Considere la función* $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *definida por las siguientes condiciones*
(i) $f(0) = 0$,
(ii) $f(2n) = 2f(n)$,
(iii) $f(2n+1) = n + 2f(n)$ *para todo* $n \geq 0$.
(a) Determine los tres conjuntos

1. $L := \{n;\ f(n) < f(n+1)\}$,
2. $E := \{n;\ f(n) = f(n+1)\}$,
3. $G := \{n;\ f(n) > f(n+1)\}$.

(b) Para cada $k \geq 0$, *encuentre una fórmula para*

$$a_k := \text{máx}\left\{f(n) | 0 \leq n \leq 2^k\right\}.$$

en términos de k.

Solución.
(a) Hagamos $L_1 := \{2k | k > 0\}$, $E_1 := \{0\} \cup \{4k+1 | k > 0\}$ y $G_1 := \{4k+3 | k \geq 0\}$. Mostraremos que $L = L_1$, $E = E_1$ y $G = G_1$, para lo cual solo es necesario verificar que $L_1 \subseteq L$, $E_1 \subseteq E$ y $G_1 \subseteq G$ debido a que L_1 E_1 y G_1 son ajenos por pares, $L_1 \cup E_1 \cup G_1 = \mathbb{N}_0$ y a que $L \cup E \cup G = \mathbb{N}_0$ y L, E, G son ajenos por pares también.

Primero veamos que $L_1 \subseteq L$. Si $k > 0$ entonces $f(2k) - f(2k+1) = -k < 0$, por lo que $L_1 \subseteq L$.

Ahora que $E_1 \subseteq E$. Como $f(0) = 0$ y $f(1) = 0 + 2f(0) = 0$ se tiene que $0 \in E$. Además

$$\begin{aligned} f(4k+1) &= 2k + 2f(2k) = 2k + 4f(k) \\ f(4k+2) &= 2f(2k+1) = 2(k + 2f(k)) = 2k + 4f(k) \end{aligned}$$

esto para todo $k \geq 0$, por lo que $E_1 \subseteq E$.

Y ahora que $G_1 \subseteq G$. Afirmamos que $f(n+1) - f(n) < n$. Para $n = 2t$ por definición tenemos $f(2t+1) - f(2t) = t < n$.
Si $n = 2t + 1$ entonces por inducción llegamos a que

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= f(2t+2) - f(2t+1) - t - 2f(t) \\ &= 2(f(t+1) - f(t)) - t \leq 2t - t = t < n. \end{aligned}$$

Y para $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} f(4k+4) - f(4k-3) &= f(2(2k+2)) - f(2(2k+1)+1) \\ &= 4f(k+1) - (2k+1+2f(2k+1)) \\ &= 4f(k+1) - (2k+1+2k+4f(k)) \\ &= 4(f(k+1) - f(k)) - (4k+1) \\ &\leq 4k - (4k+1) < 0. \end{aligned}$$

Por lo que $G_1 \subseteq G$.

(b) Primero notemos que $a_0 = a_1 = f(1) = 0$. Sea $k \geq 2$ y sea $N_k = \{0, 1, 2, \ldots, 2^k\}$. Afirmamos que el máximo a_k ocurre en el número más grande de la intersección $G \cap N_k$, esto es $a_k = f(2^k - 1)$, lo cual demostraremos por inducción. Notemos que $a_2 = f(3) = f(2^2 - 1)$.

Ahora, sea $k \geq 3$. Para cualquier número par $2t$ con $2^{k-1} + 1 < 2t \leq 2^k$ se cumple que

$$f(2t) = 2f(t) \leq 2a_{k-1} = 2f(2^{k-1} - 1) \tag{7.10}$$

esto por hipótesis de inducción. Por otro lado, para todo impar $2t+1$ con $2^{k-1} + 1 \leq 2t + 1 < 2^k$ se cumple la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} f(2t+1) &= t + 2f(t) \leq 2^{k-1} - 1 + 2f(t) \\ &\leq 2^{k-1} - 1 + 2a_{k-1} \\ &= 2^{k-1} - 1 + 2f(2^{k-1} - 1). \end{aligned}$$

Lo cual también se cumple por hipótesis de inducción. Combinando la ecuación anterior con (7.10) llegamos a que

$$f(2^k - 1) = f(2(2^{k-1} - 1) + 1) = 2^{k-1} - 1 + 2f(2^{k-1} - 1),$$

por lo que $a_k = f(2^k - 1)$. Y además obtenemos una fórmula recursiva para a_k con $k \geq 3$, la cuál es

$$a_k = 2a_{k-1} + 2^{k-1} - 1.$$

De esta fórmula recursiva podemos obtener una fórmula para que cada a_k que solo dependa de k

$$\begin{aligned}
a_k &= 2a_{k-1} + 2^{k-1} - 1 = 2(2a_{k-2} + 2^{k-2} - 1) + 2^{k-1} - 1 \\
&= 2^2 a_{k-2} + 2 \cdot 2^{k-1} - 2 - 1 = 2^2(2a_{k-3} + 2^{k-3} - 1) + 2 \cdot 2^{k-1} - 2 - 1 \\
&= 2^3 a_{k-3} + 3 \cdot 2^{k-1} - 2^2 - 2 - 1 \\
&\vdots \\
&= 2^k a_0 + k2^{k-1} - 2^{k-1} - 2^{k-2} - \ldots - 2 - 1 = k2^{k-1} - 2^k + 1.
\end{aligned}$$

□

Problema 7.19 *(APMO, 2010). Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ la identidad*

$$f(f(x) + f(y) + f(z)) = f(f(x) - f(y)) + f(2xy + f(z)) + 2f(xz - yz). \qquad (7.11)$$

Solución. Es claro que si f satisface la solución y es constante entonces $f(x) \equiv 0$. Busquemos soluciones de la ecuación que no sean constantes.

Haciendo $y = z = 0$ y después $x = z = 0$ en la ecuación (7.11) obtenemos las siguientes dos ecuaciones

$$\begin{aligned}
f(f(x) + 2f(0)) &= f(f(x) - f(0)) + f(f(0)) - 2f(0), \\
f(f(y) + 2f(0)) &= f(f(0) - f(y)) + f(f(0)) - 2f(0).
\end{aligned}$$

Al hacer $x = y$ en las dos ecuaciones anteriores e igualando llegamos a que

$$f(f(x) - f(0)) = f(f(0) - f(x)). \qquad (7.12)$$

Veamos que f es una función par. Supongamos que existen $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ tales que $f(z_1) = f(z_2)$ al sustituir $y = 0$, $z = z_1$ y $y = 0$, $z = z_2$ en la ecuación original y al igualar obtenemos

$$f(xz_1) = f(xz_2) \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \qquad (7.13)$$

Como f no es constante entonces existe x_0 tal que $f(x_0) - f(0) \neq 0$. Tomando $z_1 = f(x_0) - f(0)$ y $z_2 = -z_1$, por la ecuación (7.12) tenemos que $f(z_1) = f(z_2)$. Ahora bien, teniendo en cuenta la ecuación (7.13) tenemos que

$$f(xz_1) = f(xz_2) = f(-xz_1) \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

como $z_1 \neq 0$ entonces $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que f es función par.

Veamos a continuación que $f(z) \neq 0$ si $z \neq 0$. Supongamos que $f(z) = 0$ para alguna $z \neq 0$, entonces por (7.13) tenemos que $f(xz) = f(x \cdot 0) = f(0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ luego f es constante, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $f(z) \neq 0$ si $x \neq 0$.

Ahora veamos que si $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$ ó $x = -y$. Supongamos que existen x_0 y y_0 tales que $f(x_0) = f(y_0)$ pero que $-y_0 \neq x_0 \neq y_0$. Como f es par podemos asumir que x_0 y y_0 tiene el mismo signo. Por (7.13) tenemos que $f(sx_0) = f(sy_0)$ para todo $s \in \mathbb{R}$, luego existe $r > 0$, $r \neq 1$ tal que $f(x) = f(rx)$ para toda x.

Al sustituir x por rx, y por ry y después x por r^2x en (7.11) obtenemos respectivamente

$$\begin{aligned} f(f(rx)+f(ry)+f(z)) &= f(f(rx)-f(ry))+f(2r^2xy+f(z))+2f(r(x-y)z), \\ f(f(r^2x)+f(y)+f(z)) &= f(f(r^2x)-f(y))+f(2r^2xy+f(z))+2f(z(r^2x-y)). \end{aligned}$$

De las dos ecuaciones anteriores y teniendo en cuenta que $f(rx) = f(x)$ obtenemos

$$f(r(x-y)z) = f(z(r^2x-y)).$$

Tomando ahora $u, v \in \mathbb{R}$ y haciendo $x = \frac{v-u}{r^2-1}$, $y = \frac{v-r^2u}{r^2-1}$ y $z = 1$ llegamos a que

$$f(v) = f(ru) = f(u)$$

y como u y v fueron arbitrarios entonces f es constante, una contradicción. Luego $x_0 = y_0$ o bien $x_0 = -y_0$.

Al hacer $z = 0$ en (7.11) tenemos que

$$f(f(x)+f(y)+f(0)) = f(f(x)-f(y))+f(2xy+f(0))+2f(0),$$

al cambiar y por $-y$ obtenemos

$$f(f(x)+f(-y)+f(0)) = f(f(x)-f(-y))+f(-2xy+f(0))+2f(0).$$

Al igualar las últimas dos ecuaciones, tomando en cuenta que $f(y) = f(-y)$ obtenemos

$$f(2xy+f(0)) = f(-2xy+f(0))$$

por lo que tenemos dos opciones.

- Si $2xy+f(0) = -2xy+f(0)$, entonces tenemos que $4xy = 0$ lo cual solo es posible si $x = 0$ ó $y = 0$.
- Si $2xy+f(0) = 2xy-f(0)$, entonces $f(0) = 0$.

Para terminar veamos que $f(x) = x^2$. Haciendo $x = y$ en (7.11) obtenemos

$$f(2f(x)+f(z)) = f(0)+f(2x^2+f(z)+2f(0) \quad \Rightarrow \quad f(2f(x)+f(z) = f(2x^2+f(z)),$$

por lo que otra vez tenemos dos opciones

- Si $2f(x)+f(z) = -2x^2-f(z)$, si existe x_0 tal que $f(x_0) \neq x_0^2$ entonces $f(z) = -f(x_0)-x-0^2$ para toda $z \in \mathbb{R}$, luego f es constante, una contradicción.

- Si $2f(x) + f(z) = 2x^2 + f(z)$, entonces $f(x) = x^2$, la cual satisface la ecuación (7.11).

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación funcional son $f(x) \equiv 0$ y $f(x) = x^2$. $\square$

Problema 7.20 *(APMO, 2011). Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de todos los números reales, que satisfacen las siguientes dos condiciones*

(i) Existe un número real M tal que para cada número real x se satisface

$$f(x) < M.$$

(ii) Para cada par de números reales x, y,

$$f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy). \tag{7.14}$$

Solución. Haciendo $x = y = 1$ tenemos que $f(f(1)) = f(1)$. Si ahora hacemos $x = 1$ y $y = f(1)$ y tomando en cuenta que $f(f(1)) = f(1)$ tenemos la siguiente igualdad $[f(1)]^2 = f(1)$, luego hay dos posibilidades:

- Si $f(1) = 1$. Al sustituir en la ecuación funcional $y = 1$ obtenemos $f(xf(1)) + f(x) = xf(1) + f(x)$, luego $f(x) = x$ para toda $x \in \mathbb{R}$, pero esta función no cumple con la propiedad (i), por lo que $f(1) = 1$ no puede suceder.

- Si $f(1) = 0$. Haciendo $x = 1$ obtenemos $f(f(y)) + yf(1) = f(y) + f(y)$, luego $f(f(y)) = 2f(y)$. Si $f(y) \in \mathfrak{R}(f)$ entonces $2f(y) \in \mathfrak{R}(f)$ luego, por inducción $f^n(y) = 2^n f(y) \in \mathfrak{R}(f)$. Concluímos que $f(y) \leq 0$, pues si $f(y) > 0$ se tendría que $2^n f(y) \in \mathfrak{R}(f)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual no puede suceder debido a (i).

  Al sustituir x por $\frac{x}{2}$ y y por $f(y)$ y teniendo en cuenta que $f(f(y)) = 2f(y)$ se obtiene $f(xf(y)) + f(y)f\left(\frac{x}{2}\right) = xf(y) + f\left(\frac{x}{2}f(y)\right)$, luego $xf(y) - f(xf(y)) = f(y)f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{x}{2}f(y)\right) \geq 0$ tomando esto junto con la ecuación (7.14) tenemos que $yf(x) \geq f(xy)$.

  Teniendo en cuenta que $yf(x) \geq f(xy)$ y tomando $x > 0$, $y = \frac{1}{x}$ obtenemos que $f(x) \geq 0$, como $f(x) \leq 0$ entonces $f(x) = 0$. Claramente $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ satisface la ecuación funcional y cumple $f(x) \leq M$.

  Supongamos que f no es idénticamente 0, entonces existe un $x_0 < 0$ tal que $f(x_0) < 0$. Sea $y_0 = f(x_0)$, entonces $f(y_0) = f(f(x_0)) = 2f(x_0) = 2y_0$. Para cualquier $x < 0$ tenemos que $y_0 x > 0$, luego $f(y_0 x) = f(2y_0 x) = 0$ por lo que al sustituir y por y_0 en (7.14) se tiene

$$f(2y_0 x) + y_0 f(x) = 2y_0 x + f(xy_0)$$

  luego $f(x) = 2x$ para todo $x < 0$. Por lo que otra solución es $f(x) = 0$ para $x \geq 0$ y $f(x) = 2x$ para $x < 0$.

Por lo tanto tenemos que las únicas dos soluciones son

$$f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ 2x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Desde luego se verifica que estas funciones satisfacen las propiedades enunciadas en el problema. $\square$

7.4. Problemas de diversas competencias

Problema 7.21 *(Irán, 1995). Encuentre todas las funciones* $f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ *que satisfagan la condición.*

$$f\left(\frac{m+n}{3}\right) = \frac{f(m) + f(n)}{2}, \qquad m, n \neq 0.$$

Solución. Veamos que las únicas funciones que satisfacen la ecuación funcional son las constantes.

Como $f(n) = f\left(\frac{n+2n}{3}\right) = \frac{f(n)+f(2n)}{2}$, se tiene que $f(n) = f(2n)$; por lo que $f(1) = f(2) = f(4) = ... = f(2^n)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Y como $f(2) = f\left(\frac{3+3}{3}\right) = \frac{f(3)+f(3)}{2}$, tenemos que $f(3) = f(2)$.

Supongamos ahora que $f(k) = f(1)$ para toda $k < n$. Sea $i \in \{1, 2, 3\}$ que tal $n + i$ es múltiplo de 3 entonces como $\frac{n+i}{3} < n$, se tiene que

$$f(1) = f\left(\frac{n+i}{3}\right) = \frac{f\,(n) + f\,(i)}{2} = \frac{f(n) + f(1)}{2}$$

por lo que $f(n) = f(1)$, para $n \in \mathbb{N}$.

Si $n \in \mathbb{Z}$ es negativo se tiene que

$$f(1) = f\left(\frac{n + (-n+3)}{3}\right) = \frac{f(n) + f(3-n)}{2} = \frac{f(n) + f(1)}{2},$$

luego $f(n) = f(1)$ para n entero negativo. $\square$

Problema 7.22 *(Ucrania, 1997). Encuentre todas las funciones* $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$*, que satisfagan las condiciones*

(i) $f(x+1) = f(x) + 1$, *para todos los racionales* $x \in \mathbb{Q}^+$,

(ii) $f(x^2) = [f(x)]^2$, *para todos los racionales* $x \in \mathbb{Q}^+$.

Solución. Notemos primero que $f(x+1) = f(x)+1$ entonces $f(x+n) = f(x)+n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual es inmediato por inducción.

Y que $f(x^2) = [f(x)]^2$ junto con $f(x+n) = f(x)+n$ implican que

$$f((x+n)^2) = [f(x+n)]^2 = (f(x)+n)^2,$$

luego

$$f(x^2+2xn+n^2) = f(x^2+2xn)+n^2 = [f(x)]^2 + 2f(x)n + n^2,$$

por lo que

$$f(x^2+2xn) = [f(x)]^2 + 2f(x)n.$$

Al hacer $x = 0$ y $n = 1$ en la última ecuación se llega a que $f(0) = 0$. Y al tomar $x = \frac{p}{q}$ y $n = q$, tenemos que

$$f\left(\frac{p^2}{q^2}+2p\right) = \left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^2 + 2qf\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p^2}{q^2}\right) + 2qf\left(\frac{p}{q}\right),$$

y como $f\left(\frac{p^2}{q^2}+2p\right) = f\left(\frac{p^2}{q^2}\right) + 2p$ se tiene que $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$, esto es $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}^+$. □

Problema 7.23 *(BMO 1997, 2000). Resuelva la ecuación funcional*

$$f(xf(x)+f(y)) = y + [f(x)]^2 \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Solución. Veamos que la función es biyectiva. Si hacemos $x = 0$ en la ecuación obtenemos $f(f(y)) = y + [f(0)]^2$, como la función del lado derecho es biyectiva lo mismo debe ocurrir para la función del lado izquierdo, pues la primera f aplicada en $f(f(y)$ es inyectiva y la segunda f es suprayectiva, por lo que f es biyectiva, pues es la misma función f.

Entonces existe un t tal que $f(t) = 0$ y sustituyendo en la ecuación original $x = 0$ y $y = t$ obtenemos $f(0) = t + [f(0)]^2$. Haciendo $x = t$ nos lleva a que $f(f(y)) = y$ por lo que $t = f(f(t)) = f(0) = t + [f(0)]^2$ y entonces $f(0) = 0$. Remplazando x por $f(x)$ en la ecuación original obtenemos $f(f(x)x + f(y)) = y + x^2$, de aquí que $[f(x)]^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y entonces consideramos dos casos.

- *Si f(1)=1.* Sustituyendo $x = 1$ obtenemos $f(1+f(y)) = 1+y$, luego

  $$(1+y)^2 = [f(1+f(y))]^2 = [1+f(y)]^2 = 1 + 2f(y) + [f(y)]^2$$

  y entonces $f(y) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}$

- *Si f(1)=-1.* Análogamente sustituyendo $x = -1$ obtenemos $f(-1+f(y)) = 1+y$ y elevando al cuadrado obtenemos lo siguiente

  $$(1+y)^2 = [f(-1+f(y))]^2 = (-1+f(y))^2 = 1 - 2f(y) + [f(y)]^2$$

  y en este otro caso tenemos que $f(y) = -y$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

Por lo que las soluciones de la ecuación funcional son $f(x) = x$ y $f(x) = -x$. $\square$

Problema 7.24 *(Irlanda, 1999). Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisface las condiciones*
(i) $f(mn) = f(m)f(n)$, para todos $m, n \in \mathbb{N}$, con $(m, n) = 1$,
(ii) $f(p + q) = f(p) + f(q)$, para p, q números primos.
Muestre que $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ y $f(1999) = 1999$.

Solución. Con $m > 1$ y $n = 1$, la parte (i) implica que $f(1) = 1$. También (i) con $(2, 3) = 1$ da que $f(6) = f(2)f(3)$ y usando (ii) $f(6) = 2f(3)$, luego $f(2) = 2$. Por (ii) con $p = q = 2$, $f(4) = 4$.

Por (ii) con $p = 2$, $q = 3$, $f(5) = 2 + f(3)$; con $p = 5$, $q = 2$, $f(7) = 2 + f(5) = 4 + f(3)$; y con $p = 5$, $q = 7$, $f(12) = f(5) + f(7) = 6 + 2f(3)$.

Por otro lado (i) con $m = 4$, $n = 3$, nos da $f(12) = f(4)f(3) = 4f(3)$, luego $6 + 2f(3) = f(12) = 4f(3)$ por lo que $f(3) = 3$. También tenemos que $f(5) = 5$ y $f(7) = 7$.

Usando (i) con $m = 5$, $n = 3$, $f(15) = 5 \cdot 3 = 15$, Por (ii) con $p = 13$, $q = 2$ y con $p = 11$, $q = 2$ se tiene que $f(13) = f(15) - f(2) = 13$ y $f(11) = f(13) - f(2) = 11$.

Finalmente para encontrar $f(1999)$, tenemos por (ii) que $f(1999) = f(2002) - f(3)$, y por (i) aplicándola varias veces tenemos que $f(2002) = f(2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13) = f(2)f(7)f(11)f(13) = 2002$, luego $f(1999) = 1999$. $\square$

Problema 7.25 *(Irán, 2000). Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfagan las condiciones*
(i) $f(m) = 1$ si y sólo si $m = 1$,
(ii) si $d = (m, n)$, entonces $f(mn) = \frac{f(m)f(n)}{f(d)}$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$,
(iii) $f^{2000}(m) = m$, para toda $m \in \mathbb{N}$.

Solución. No hay funciones con esas condiciones, ya que por (ii) tenemos que $f(4) = f(2 \cdot 2) = \frac{f(2)f(2)}{f(2)} = f(2)$ y entonces

$$2 = f^{2000}(2) = f^{1999}(f(2)) = f^{1999}(f(4)) = f^{2000}(4) = 4,$$

lo que es una contradicción. $\square$

Problema 7.26 *(Turquía, 2000). Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface que*

$$|f(x + y) - f(x) - f(y)| \leq 1 \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Muestre que existe una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - g(x)| \leq 1$, para toda $x \in \mathbb{R}$ y tal que $g(x + y) = g(x) + g(y)$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución. Al hacer $x = y = 2^n x$, se tiene que

$$\left| \frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} - \frac{f(2^n x)}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Luego la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}}-\frac{f(2^n x)}{2^n}\right)$$
es absolutamente convergente y entonces convergente por lo que
$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}}-\frac{f(2^n x)}{2^n}\right)=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{f(2^{N+1}x)}{2^{N+1}}-f(x)\right)$$
existe, digamos que es $h(x)$. Luego $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}}=h(x)+f(x)$. Si definimos $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}}$, tenemos que
$$|g(x)-f(x)|=|h(x)|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}}-\frac{f(2^n x)}{2^n}\right|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=1.$$
Y también
$$\begin{aligned}|g(x+y)-g(x)-g(y)| &= \left|\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^n(x+y))-f(2^n x)-f(2^n y)}{2^n}\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{|f(2^n(x+y))-f(2^n x)-f(2^n y)|}{2^n}\\ &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.\end{aligned}$$
Por lo que $g(x+y)=g(x)+g(y)$ para $x,y\in\mathbb{R}$. □

Problema 7.27 *(Canadá, 2002). Determine todas las funciones $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ tales que*
$$nf(m)+mf(n)=(n+m)f(n^2+m^2),$$
para todo $n,m\in\mathbb{N}_0$.

Solución. Es claro que la función constante $f(x)=c$ con $c\in\mathbb{N}_0$ es una solución de la ecuación (7.27), veamos que las funciones constantes son las únicas soluciones.

Supongamos que f no es constante, entonces existen $n,m\in\mathbb{N}$ tales que $f(n)<f(m)$ y $f(m)-f(n)>0$ es mínimo, entonces se cumple lo siguiente
$$f(n)=\frac{nf(n)+mf(n)}{n+m}<\frac{nf(m)+mf(n)}{n+m}<\frac{nf(m)+mf(m)}{n+m}=f(m),$$
como $\frac{nf(m)+mf(n)}{n+m}=f(n^2+m^2)$ entonces $f(n)<f(n^2+m^2)<f(m)$, por lo que $0<f(n^2+m^2)-f(n)<f(m)-f(n)$ lo cual es una contradicción, pues $f(m)-f(n)$ era mínimo.

Por lo tanto, las únicas soluciones son las funciones constantes. □

Problema 7.28 *(Ucrania, 2009). Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que*

$$f(x + xy + f(y)) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(f(y) + \frac{1}{2}\right). \tag{7.15}$$

Solución. Si hacemos $y = -1$ tenemos que

$$f(f(-1)) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(f(-1) + \frac{1}{2}\right)$$

y si $f(-1) + \frac{1}{2} \neq 0$ llegamos a que $f(x) + \frac{1}{2} = \dfrac{f(f(1))}{f(-1) + \frac{1}{2}} \equiv c$, por lo que $f(x) \equiv c$ pero si f es una función constante tenemos por (7.15) que

$$c = \left(c + \frac{1}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 + \frac{1}{4} = 0$$

lo cual es absurdo, pues $c \in \mathbb{R}$ y entonces $f(-1) = -\frac{1}{2}$.

Ahora haciendo $x = 0$ obtenemos

$$f(f(y)) = \left(f(0) + \frac{1}{2}\right)\left(f(y) + \frac{1}{2}\right). \tag{7.16}$$

Tomando $y = -1$ en (7.16) tenemos $f(f(-1)) = 0$, pero ya habíamos visto que $f(-1) = -\frac{1}{2}$ por lo que $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. También haciendo $y = -\frac{1}{2}$ en (7.16) tenemos que $f(0) = \left(f(0) + \frac{1}{2}\right)(f(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2})$, por lo tanto $f(0) = \frac{1}{2}$. Y haciendo $y = 0$ en (7.15) llegamos a que $f(x + \frac{1}{2}) = (f(x) + \frac{1}{2}) + \left(f(0) + \frac{1}{2}\right) = f(x) + \frac{1}{2}$.

Veamos ahora que si $f(y) = -\frac{1}{2}$ entonces $y = -1$. Supongamos que existe un $y_0 \neq -1$ tal que $f(y_0) = -\frac{1}{2}$, entonces al hacer $y = y_0$ en (7.15) tenemos que $f(x(1 + y_0) - \frac{1}{2}) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(f(y_0) + \frac{1}{2}\right) = 0$ y entonces f es una constante, lo cual ya vimos no puede suceder, por lo que

$$f(y) = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad y = -1. \tag{7.17}$$

Ahora bien, si $y \neq -1$ tomemos $x = \dfrac{-\frac{1}{2} - f(y)}{y + 1}$ (esto es, $x + xy + f(y) = -\frac{1}{2}$) en (7.15) llegamos a que

$$0 = f(-\frac{1}{2}) = f(x + xy + f(y)) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(f(y) + \frac{1}{2}\right),$$

por lo tanto $f(x) + \frac{1}{2} = 0$ y de aquí que

$$f\left(\frac{-\frac{1}{2} - f(y)}{y + 1}\right) = -\frac{1}{2},$$

pero en vista de (7.17) tenemos que $\dfrac{-\frac{1}{2}-f(y)}{y+1}=-1$ y despejando $f(y)$ obtenemos que la función es

$$f(y)=y+\frac{1}{2}.$$

Desde luego $f(y)=y+\frac{1}{2}$ cumple la ecuación funcional. $\square$

Apéndice A

Definiciones y teoremas

En este apéndice daremos los conceptos básicos necesarios para la resolución de ecuaciones funcionales. Para las demostraciones de los una buena referencia es [23]

Funciones

Empecemos con la definición de función, la cuál es fundamental para el estudio de las ecuaciones funcionales y también ciertas propiedades que pueden tener las funciones.

Definición A.1 *Dados dos conjuntos* A *y* B *una* ***función*** *es una conjunto de parejas* (a, b) *con* $a \in A$ *y* $b \in B$ *con la propiedad de que si* (a, b) *y* (a, b_1) *están en la función entonces* $b = b_1$.

Es común denotar $f(a) = b$ para identificar a la pareja (a, b). Escribimos $f : A \to B$ para designar a la función que va del conjunto A en el conjunto B. Al conjunto A se le llama el *dominio de la función* y al conjunto B el *codominio* y se denotan por $dom(f)$ y $codom(f)$ respectivamente.

Si $f : A \to B$ y $A_0 \subset A$ al conjunto $f(A_0) \subset B$ se le llama la *imagen* de A_0 y si $B_0 \subset B$, al conjunto $f^{-1}(B_0) \subset A$ se le llama *la preimagen de* B_0 o *imagen inversa de* B_0. Al conjunto $f(A)$ se le conoce como el *rango de la función* f y se denota como $\mathfrak{R}(f)$.

Tenemos también las siguientes definiciones de propiedades de funciones.

Definición A.2 *Sea* $f : A \to B$ *una función, decimos que* f *es* ***inyectiva*** *si y sólo si para* $x, y \in A$ *con* $f(x) = f(y)$ *se tiene que* $x = y$.

Una función $f : A \to B$ *es* ***suprayectiva*** *si y sólo si para todo* $b \in B$ *existe al menos un* $a \in A$ *tal que* $f(a) = b$.

Decimos que una función $f : A \to B$ *es* ***biyectiva*** *si es inyectiva y suprayectiva.*

También podemos operar con las funciones para crear otras nuevas, esto es, sumarlas, multiplicarlas y componerlas veamos como se definen estas nuevas funciones.

1. *Suma de funciones.* Si tenemos dos funciones $f, g : A \to B$ definimos la función $f + g : A \to B$ como
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

2. *Producto de funciones.* Si $f, g : A \to B$ son dos funciones definimos $f \cdot g : A \to B$ de la siguiente manera
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

3. *División de funciones* Si $f, g : A \to B$ son dos funciones, entonces $\frac{f}{g} : A \to B$ está dada por
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{si} \quad g(x) \neq 0.$$

4. *Composición de funciones* Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$, la composición $g \circ f : A \to C$ está definida por
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Si tenemos una función f inyectiva y con $f(A) = B$ entonces, para cada $b \in B$ existe exactamente un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Definimos la función $g : B \to A$ con dominio B y codominio A de modo a cada elemento de B se le asigna su preimagen $a = g(b)$. A la función g se le llama la *función inversa* de f y se denota por f^{-1}. Notemos que $(f \circ g)(x) = x$ para todo $x \in B$ y $(g \circ f)(x) = x$ para todo $x \in A$.

Por otro lado decimos que una función con dominio A es

1. *Creciente* en A si $x < y$ implica que $f(x) < f(y)$ para todo $x, y \in A$.

2. *Decreciente* en A si $x < y$ implica que $f(x) > f(y)$ para todo $x, y \in A$.

3. *No creciente* en A si $x \leq y$ implica que $f(x) \geq f(y)$ para todo $x, y \in A$.

4. *No decreciente* en A si $x \leq y$ implica que $f(x) \leq f(y)$ para todo $x, y \in A$.

A este tipo de funciones se les llama *funciones monótonas*. Hay que tener en cuenta que no siempre es cierto que una función que no sea *creciente* es necesariamente *no creciente*.

También tenemos las siguientes definiciones acerca de una función real (cuyo dominio y codominio son los números reales) $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. f es *acotada superiormente* en A si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) \leq M$ para todo $a \in A$.

2. f es *acotada inferiormente* en A si existe $N \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) \geq N$ para todo $a \in A$.

3. f es *acotada* si existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $a \in A$.

Definición A.3 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ decimos que $a \in A$ es un* ***punto máximo*** *de f sobre A si*

$$f(x) \leq f(a) \quad \text{para todo } x \in A,$$

a $f(a)$ se le llama el ***valor máximo*** *de f sobre A.*

Definición A.4 *Decimos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es* ***par*** *si para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que*

$$f(x) = f(-x).$$

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es ***impar*** *si para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que*

$$f(x) = -f(-x).$$

Un ejemplo de función par es $f(x) = x^{2n}$, pues $f(x) = x^{2n} = (-x)^{2n} = f(-x)$. Mientras que $f(x) = x^{2n+1}$ es una función impar, pues $f(x) = x^{2n+1} = -((-x)^{2n+1}) = -f(-x)$.

Tambien están las *funciones periódicas*, de las cuales damos la definición a continuación.

Definición A.5 *Decimos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es* ***periódica*** *si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x + a) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Al número a se le llama un ***periodo*** *de f.*

Las funciones también se pueden definir como *convexas* o *cóncavas.* Las definiciones son las siguientes.

Definición A.6 *Decimos que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es* ***convexa*** *si*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda y)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

con $x, y \in [a, b]$ y $\lambda \in [0, 1]$.

Definición A.7 *Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es* ***cóncava*** *si*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda y)) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

con $x, y \in [a, b]$ y $\lambda \in [0, 1]$.

Entre las principales funciones que se utilizan para resolver ecuaciones funcionales están las siguientes

1. Los polinomios.
2. Las funciones trigonométricas.
3. Exponenciales y logarítmicas.

Veamos las definiciones de estas y algunas de sus propiedades.

Definición A.8 *Un **polinomio** es una función $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en donde P es de la siguiente forma*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{A.1}$$

los coeficientes a_i, $i \in \{1,\ 2,\ \ldots\ , n\}$ los tomaremos en $\mathbb{R}$ y los exponentes serán todos números naturales.

El número $a_n \neq 0$ por lo general lo consideraremos distinto de cero y se le conoce como *coeficiente principal*, en tal caso a $P(x)$ se le llama polinomio de grado n. Al grado de un polinomio lo denotaremos por $deg(f)$. Si tenemos dos polinomios f y g entonces se cumple lo siguiente

$$deg(f \cdot g) = deg(f) + deg(g)$$

$$deg(f \circ g) = deg(f) \cdot deg(g)$$

Sea $P(x)$ un polinomio, decimos que α es una *raíz* de $P(x)$ si $P(\alpha) = 0$. También decimos que $(x - \alpha)$ es un factor de $P(x)$ si existe otro polinomio $Q(x)$ tal que

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x).$$

El siguiente teorema relaciona las raíces de un polinomio con sus factores.

Teorema A.9 *(Teorema del factor.) Sea P(x) un polinomio entonces $(x - \alpha)$ es un factor de $P(x)$ si y sólo si α es una raíz de $P(x)$.*

Sea $P(x)$ un polinomio decimos que α es una *raíz de multiplicidad k* si $(x - \alpha)^k$ es un factor de $P(x)$.

Las funciones trigonométricas también juegan un papel importante, pues son funciones periódicas. Por ejemplo, si $f(x) = \sin x$, sabemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y

$$\sin x = \sin{(x + 2\pi)}$$

por lo que el periodo de $\sin x$ es 2π. Ahora si $g(x) = \tan x$ entonces $f : \mathbb{R} \backslash \{(2k+1)\pi\} \to \mathbb{R}$ tenemos que

$$\tan x = \tan{(x + \pi)}$$

y el periodo de $\tan x$ es π.

Las funciones logarítmica y exponencial están definidas de la siguiente manera

$$\log{(x)} = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

$$e^x = \exp{(x)} = \log^{-1}{(x)}$$

el exponente (-1) en el logaritmo indica que es la función inversa y el valor de e es

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818284...$$

estas funciones tienen la propiedad que son inversas una de la otra, esto es

$$(\log \circ \exp)(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(\exp \circ \log)(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Debemos tener en cuenta ciertas propiedades de estas funciones. Las cuales enunciamos a continuación.

Propiedades de la función logarítmica

1. $\log xy = \log x + \log y$.
2. $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$.
3. $\log x^y = y \log x$.
4. $\log 1 = 0$.

Propiedades de la función exponencial

1. $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.
2. $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
3. $\exp(xy) = [\exp(x)]^y$.
4. $\exp(0) = 1$.

También podemos tomar cualquier otro número $b \in \mathbb{R}^+$ como base para logaritmos y exponenciales los cuales denotamos $\log_b x$ y b^x respectivamente. Pero como $x = b^y$ entonces se tiene que $\log x = y \log b$ y además $\log_b x = y$ $\log_b x = \frac{\log x}{\log b}$, todo lo trabajaremos en logaritmos naturales, que tienen como base el número e y lo denotaremos por $\log$.

Sucesiones

Las sucesiones también son parte importante cuando resolvemos ecuaciones funcionales, sobre todo de variable discreta, por lo que veremos la definición a continuación.

Definición A.10 *Una **sucesión infinita** de números reales es una función cuyo dominio son los números naturales* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Es común denotar a $a(n)$ por a_n el cuál es llamado el término general de la sucesión y se denota a la sucesión por $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Algunos ejemplos de sucesiones son los siguientes

1. $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$
2. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

3. $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Un concepto asociado con las sucesiones es el de *convergencia.*

Definición A.11 *Una sucesión $\{a_n\}$ **converge hacia l** si para todo $\epsilon > 0$ existe un número natural N tal que, para todo natural n,*

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |n_n - l| < \epsilon.$$

A partir de la definición anterior decimos que la sucesión $\{a_n\}$ *tiende hacia l* o que *tiene límite l* y lo escribimos como $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. Decimos que una sucesión *converge* si converge hacia algún l y *diverge* si no converge.

Teorema A.12 *Además, si tenemos dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ que convergen a l y m respectivamente entonces se cumple*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = l \pm m.$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = l \cdot m.$
3. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{m}$, *si* $m \neq 0$.

Tambien hay otras propiedades de las sucesiones que se heredan de las propiedades de las funciones las cuales mencionamos enseguida. Decimos que una sucesión $\{a_n\}$ es:

1. *Creciente* si $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. *No decreciente* si $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. *Acotada superiormente* si existe M tal que $a_n \leq M$.

Y las definiciones de *decrecientes*, *no crecientes* y *acotada inferiormente* son análogas a las definiciones dadas para las funciones. Con estas definiciones tenemos el siguiente teorema.

Teorema A.13 *Si $\{a_n\}$ es una sucesión no decreciente y acotada superiormente entonces $\{a_n\}$ converge. Análogamente si $\{b_n\}$ es una sucesión no creciente y acotada inferiormente entonces $\{b_n\}$ converge.*

También es posible extraer de cualquier sucesión $\{a_n\}$ otra sucesión. A esta nueva sucesión la llamamos *subsucesión* de la sucesión $\{a_n\}$ y se define como una sucesión de la forma

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots,$$

en donde n_i son números naturales que cumplen

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots.$$

Un primer resultado sobre subsucesiones se presenta en el siguiente lema.

Lema A.14 *Cualquier sucesión $\{a_n\}$ contiene una subsucesión que es no creciente o bien es no decreciente.*

Y tenemos el siguiente teorema que trata acerca de las sucesiones acotadas.

Teorema A.15 *(Teorema de Bolzano-Weierstrass.) Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

Por último veamos la definición de sucesión de Cauchy y un teorema que relaciona esta definición con la definición de convergencia de una sucesión.

Definición A.16 *Una sucesión $\{a_n\}$ es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\epsilon > 0$ existe un número natural N tal que, para todo m y n*

$$m, n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - a_m| < \epsilon.$$

lo cual generalmente se escribe $\lim_{m,n\to\infty} |a_m - a_n| = 0$.

Teorema A.17 *Una sucesión es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.*

Límites

Definición A.18 *Diremos que la función f **tiende hacia el límite l en a** si para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x,*

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon.$$

y escribimos $\lim_{x\to a} f(x) = l$

Observación. Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} f(x) = m$ entonces $l = m$. Es decir, f no puede tender hacia dos límites diferentes en a.

Teorema A.19 *Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} g(x) = m$, entonces se cumple lo siguiente*

1. $\lim_{x\to}(f \pm g)(x) = l \pm m$,
2. $\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x) = lm$,
3. $\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{m}, \qquad$ *si* $m \neq 0$.

En general utilizamos los límites cuando x tiende hacia un número $a \in \mathbb{R}$, aunque en otras ocasiones utilizaremos límites cuando $x \to \infty$, por lo que definiremos formalmente la idea.

Definición A.20 *Decimos que $f(x)$ **tiende hacia** l **en** ∞ y lo escribimos como $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que:*

$$si \quad x > N, \quad \Rightarrow \qquad |f(x) - l| < \epsilon$$

Continuidad

Ahora veremos la definición de continuidad, primero continuidad en un punto y enseguida la generalización a un conjunto más grande.

Definición A.21 *Diremos que una función f es* ***continua en*** *a si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Otra forma de definir continuidad es con la siguiente

Definición A.22 *Una función es* ***continua en*** *a si y sólo si para cualquier sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ se tiene que*

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(a).$$

De aquí seguimos a la definición de continuidad en conjuntos más grandes, los cuales pueden ser intervalos o incluso todos los reales.

Definición A.23 *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es* ***continua en*** *$A \subseteq \mathbb{R}$, si es continua en cada $x \in A$.*

Y a continuación se enuncian varios teoremas que son de gran utilidad.

Teorema A.24 *Sean f y g funciones continuas en a entonces*

1. *$f + g$ es continua en a*
2. *$f \cdot g$ es continua en a*
3. *$\dfrac{1}{g}$ es continua en a si $g(a) \neq 0$.*

Teorema A.25 *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$ entonces $g \circ f$ es continua en a.*

Veamos ahora una serie de teoremas que pueden servir de ayuda.

Teorema A.26 *(Teorema del valor intermedio) Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $f(a) < f(b)$, entonces para todo $d \in [f(a), f(b)]$ existe al menos un $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.*

Teorema A.27 *Si f es continua en un intervalo $[a, b]$ entonces f está acotada superiormente.*

Teorema A.28 *Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to B$ una función continua e inyectiva entonces $f^{-1} : B \to A$ es continua en A.*

Teorema A.29 *Sea $f : A \to B$ una función continua en A y sea $I \subset A$ un intervalo, entonces $f(I)$ es un intervalo.*

Derivada

Para una función real definida en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ y un número $a \in I$ es común encontrar en los libros de cálculo diferencial la siguiente definición de que una función f sea derivable en a.

Definición A.30 *La función $f : I \to \mathbb{R}$ es **derivable en** $a \in I$, si existe el siguiente límite*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

*el límite se denota por $f'(a)$ y se le nombra **la derivada de f en a.***

Diremos que f es **derivable** si es derivable en todo punto del el dominio de f.

Veamos una serie de teoremas referentes a la derivada de una función.

Teorema A.31 *Sean f y g dos funciones derivables*

1. *Si f y g son derivables en a entonces $f + g$ es derivable en a y*
$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$
2. *Si f y g son derivables en a entonces $f \cdot g$ es derivable en a y*
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$
3. *Si g es derivable en a y $g(a) \neq 0$ entonces $1/g$ es derivable en a y*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{[g(a)]^2}.$$
4. *Si f y g son derivables en a y $g(a) \neq 0$ entonces f/g es derivable en a y se tiene que*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a) \cdot f'(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

Teorema A.32 *(Regla de la cadena.) Sean f y g dos funciones. Si g es derivable en a y f es derivable en $g(a)$ entonces $f \circ g$ es derivable en a y además*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Y tenemos otro teorema que nos servirá para ver la monotonía de las funciones.

Teorema A.33 *Sea f una función con derivada f' en un intervalo I*

1. *Si para todo $x \in I$, $f'(x) < 0$, entonces f es decreciente en I.*
2. *Si para todo $x \in I$, $f'(x) > 0$, entonces f es creciente en I.*

Teorema A.34 *(Teorema del valor medio.) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y diferenciable en el intervalo (a, b) entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Inducción matemática

Los números naturales $\mathbb{N}$ tiene una propiedad fundamental, que es el *Principio de inducción matemática*, el cual nos dice lo siguiente: Si A es un conjunto de números naturales que cumple las siguientes dos condiciones

1. 1 pertenece al conjunto A.
2. Si k está en A entonces $k+1$ está en A.

Entonces A es el conjunto de los números naturales.

También tenemos el *Principio del buen orden* el cual nos dice lo siguiente: si A es un subconjunto no vacío de números naturales entonces A tiene un elemento mínimo. Estos principios son equivalentes, lo cual veremos en los siguientes dos lemas.

Lema A.35 *Supongamos que es verdadero el Principio de inducción y sea A un subconjunto no vacío de números naturales, entonces A tiene un elemento mínimo.*

Demostración. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ con $A \neq \emptyset$. Supongamos que A no tiene elemento mínimo. Como $A \neq \emptyset$ entonces existe $B \subset \mathbb{N}$ tal que $B = \mathbb{N} \setminus A$ entonces tenemos las siguientes afirmaciones

1. $1 \in B$, pues si $1 \in A$ entonces A tiene elemento mínimo.
2. Si cada número natural menor o igual a n está en B entonces $n+1 \in B$, pues si no fuera así entonces $n+1$ sería el mínimo de A

Entonces, por inducción tenemos que $B = \mathbb{N}$ por lo que $A = \emptyset$ lo cual es una contradicción, pues habíamos supuesto que $A \neq \emptyset$. Luego A tiene un elemento mínimo. ■

Ahora veamos que el Principio del buen orden implica el Principio de inducción matemática.

Lema A.36 *Supongamos que es verdadero el Principio del buen orden y sea $A \subseteq \mathbb{N}$ que cumple con las siguientes condiciones*

1. $1 \in A$
2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ si $\{1, 2, 3, \ldots, n\} \subseteq A$ entonces $n+1 \in A$,*

entonces $A = \mathbb{N}$

Demostración. Supongamos que $A \neq \mathbb{N}$ entonces $\mathbb{N} \setminus A \neq \emptyset$, Sea a el mínimo de $\mathbb{N} \setminus A$. Sabemos que $\{1, 2, 3, \ldots a-1\} \subseteq A$, pues de otra manera a no sería el mínimo de $\mathbb{N} \setminus A$. Ahora bien, como $\{1, 2, 3, \ldots a-1\} \subseteq A$ entonces por la segunda hipótesis $a \in A$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathbb{N} \setminus A = \emptyset$ y entonces $A = \mathbb{N}$ ■

Iteración de funciones y recursividad

Si tenemos una función definida en un conjunto A y además $f(A) \subset A$ entonces podemos componer f con ella misma $(f \circ f)(x) = f((x))$. La notación que utilizamos es $f^2(x) = f(f(x))$ (la cual no hay que confundir con la potencia de una función). Ahora definimos $f^{n+1} = f(f^n(x))$. Para referirnos a la potencia de una función utilizaremos doble paréntesis. De esta manera, si tenemos $f(x) = \log x$ por un lado tendremos que

$$f^3(x) = \log(\log(\log x)) \quad \text{y} \quad [f(x)]^3 = [\log x]^3 = \log x \cdot \log x \cdot \log x.$$

Ahora bien, si para alguna $x_0 \in A$ se cumple que $f(x_0) = x_0$, a x_0 se le llama *punto fijo de* f. Si tenemos que $f^n(x_0) = x_0$ y $f^i(x_0) \neq x_0$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ a x_0 se le llama *punto periódico de* f *de orden* n y $\left\{x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right\}$ es el ciclo de x_0 bajo f.

A la sucesión $\left\{f^i(x_0)\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ se le conoce como la *órbita* de x_0. En ocasiones esta órbita puede ser finita, como en el caso de los puntos fijos, en donde ésta solo consiste de un solo punto, o bien, los puntos periódicos de orden n cuya órbita tiene n elementos. En cuanto a los puntos fijos tenemos la siguiente definición.

Definición A.37 *Sea $f : I \to I$ una función continua y sea x_0 un punto fijo de f, decimos que x_0 es*

1. ***Atractor*** *si existe una vecindad U de x_0 tal que para cualquier $x \in U$ se tiene que $\left\{f^i(x)\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a x_0.*
2. ***Repulsor*** *si existe una vecindad U de x_0 tal que para todo $x \in U \setminus \{x_0\}$ se tiene que $f^n(x) \notin U$ para alguna n.*

Teorema A.38 *Sea I un intervalo y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > x$ y $f(y) < y$ para algún $x, y \in I$, entonces f tiene un punto fijo entre x e y.*

Demostración. Consideremos la siguiente función

$$g(x) = f(x) - x$$

la cual es evidentemente continua, entonces $g(x) > 0$ y $g(y) < 0$ y por el teorema del valor intermedio existe un c entre x e y tal que $g(c) = 0$ por lo que $f(c) = c$. ■

Veamos otros teoremas.

Teorema A.39 *Sea $f : I \to I$ continua y sea α un punto fijo de f entonces*

1. *Si para todo $x \neq \alpha$ en alguna vecindad U de α se cumple que*

$$\left|\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}\right| < 1$$

entonces α es un punto fijo atractor.

2. Si para todo $x \neq \alpha$ en alguna vecindad U de α se cumple que

$$\left|\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}\right| > 1$$

entonces α es un punto fijo repulsor.

Observación. Si f es diferenciable en I, α un punto fijo de f y $|f'(\alpha)| < 1$ entonces α es atractor y si $|f'(\alpha)| > 1$ entonces α es repulsor.

Teorema A.40 *Sea I un intervalo y $f : I \to I$ una función continua. Supongamos que para algún x_0 la sucesión $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún punto $\alpha \in I$. Entonces α es un punto fijo de f.*

Demostración. Sabemos que $\{f^n(x_0)\}$ converge a α, es decir

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \alpha. \tag{A.2}$$

Pero también $\left\{f^{n+1}(x_0)\right\}$ converge a α

$$\lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = \alpha \tag{A.3}$$

además sabemos que $f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0))$ y como f es continua tenemos por (A.2) y (A.3) que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) &= \lim_{n\to\infty} f(f^n(x_0)) \\
&= f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)\right) \\
&= f(\alpha)
\end{aligned}$$

por lo tanto $f(\alpha) = \alpha$, esto es, α es punto fijo. ■

Bibliografía

[1] Áczel, J. *Lectures on functional equations and their applications.* Academia Press. New York, 1966.

[2] Áczel, J. Dhombres, J. *Functional equations in several variables.* Cambridge University Press. Great Britain. 1989.

[3] Áczel, J. (Editor) *Functional Equations: history, applications and theory.* Reidel Publishing Company. Holland. 1984.

[4] Alsina, Claudi. *Invitación a las ecuaciones funcionales.* Red Olimpica 2000. Argentina. 2000.

[5] Castillo, Enrique. *Ecuaciones funcionales y modelización en ciencia, ingeniería y economía.* Editorial Reverté S.A. España. 1993.

[6] Cauchy, Augustin-Louis. *Curso de Análisis.* Servicios editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. México. 1994

[7] Elaydi, Saber. *An Introduction to Difference Equations.* Springer Science+Business Media. EE.UU. 2005.

[8] Engel, Arthur. *Problem-Solving Strategies.* Springer-Verlag New York, Inc. EE.UU. 1998.

[9] Goldberg, Samuel. *Introduction to difference equations.* Dover Publications, Inc. New York. 1986.

[10] Janković, Vladimir. *The IMO Compendium.* Springer. EE.UU. 2006.

[11] Kelley, Walter. *Difference equations. An introduction with applications.* Academic Press. EE.UU. 2001.

[12] Kharazishvili, A. B. *Strange functions in real analysis.* Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 2000.

[13] Kuczma, Marek. *Functional equations in a single variable.* Warszawa. Polonia, 1968.

[14] Kuczma, Marek. *Iterative functional equations.* Cambridge University Press. Great Britain. 1990.

[15] Onucu Drimbe, M. *200 de ecuatii functionale pe* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. Editura Gil. Rumania. 2003.

[16] Pl. Kannappan. *Functional equations and inequalities with applications.* Springer Science+Business Media. EE.UU. 2009.

[17] Polyanin, Andrei. *Handbook of mathematics for engineers and scientists.* Chapman & Hall/CRC. EE.UU. 2007.

[18] Richardson, Leonard. *Measure and integration.* John Wiley & Sons, Inc. 2008

[19] Rubiano, Gustavo. *Topología General.* Panamericana, formas e impresos S.A. Bogotá, Colombia. 2002.

[20] Sahoo, P. *Mean value theorems and functional equations.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore. 1998

[21] Small, Christopher G. *Functional equations and how to solve them.* Springer Science+Business Media EE.UU. 2007.

[22] Smital, Jaroslav. *On functions and functional equations.* Bristol : Hilger, Inglaterra, 1988

[23] Spivak, Michael. *Cálculo infinitesimal.* Reverté Ediciones. México, 1996.

[24] Titu Andreescu. *Mathematical Olympiads. Problems and solutions from around the world. 1998-1999.* The mathematical association of America. EE.UU. 2000.

[25] Titu Andreescu. *Mathematical Olympiads. Problems and solutions from around the world. 1999-2000.* The mathematical association of America. EE.UU. 2002.

[26] Titu Andreescu. *Mathematical Olympiads. Problems and solutions from around the world. 2000-2001.* The mathematical association of America. EE.UU. 2003.

[27] Venkatachala, B. J. *Funtional equations. A problem solving approach.* Prism Books Pvt Ltd. Bangalore. 2002.

Referencias electrónicas

[28] Radovanović, Marko, 2007. *Functional equations.* "Olimpyad training materials."
http://www.imomath.com/tekstkut/funeqn_mr.pdf
Consultado el 13 de diciembre de 2010.

[29] *Functional Equations*, en "EqWorld, The World of Mathematical Equations."
http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/fe.htm
Consultado el 10 de noviembre de 2010.

[30] Lasosa, Daniel, 2007. *Algunas técnicas de resolución de ecuaciones funcionales en problemas de Olimpiada (I): Funciones reales de variable real.*
http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero30/ecuacionesfuncionales1.pdf
Consultado el 17 de noviembre de 2010.

[31] Lasosa, Daniel, 2007. *Algunas técnicas de resolución de ecuaciones funcionales en problemas de Olimpiada (II): Funciones enteras de variable entera.*
http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero31/ecuacionesfuncionales2.pdf
Consultado el 17 de noviembre de 2010.

[32] *APMO Test Papers* y *APMO Solutions* en "The Korean Mathematical Society."
http://www.kms.or.kr/competitions/apmo/
Consultado el 10 de enero de 2011.

[33] *Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Enunciados de las pruebas.* en "Organización de Estados Iberoamericanos."
http://www.oei.es/oim/problemas.htm
Consultado el 12 de enero de 2011.

[34] Bornsztein, Pierre et Omarjee, Moubinool, 2003. *Cours-Équations fonctionnelles*
http://www.animath.fr/IMG/pdf/cours-eqfonc.pdf
Consultado el 23 de febrero de 2011